



**HAL**  
open science

# Modélisation et étude de la dynamique complexe d'un système bi-rotor aubagé couplé

Cécile Dumartineix

► **To cite this version:**

Cécile Dumartineix. Modélisation et étude de la dynamique complexe d'un système bi-rotor aubagé couplé. Autre. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSEC049 . tel-03052668

**HAL Id: tel-03052668**

**<https://theses.hal.science/tel-03052668v1>**

Submitted on 10 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

**DE**

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE MEGA

MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

par

**Cécile DUMARTINEIX**

## **Modélisation et étude de la dynamique complexe d'un système bi-rotor aubagé couplé**

Soutenue publiquement le 20 Décembre 2019, devant le jury d'examen :

A. BATAILLY, Professeur, LAVA, Polytechnique Montréal	Rapporteur
S. COGAN, Chargé de Recherche, FEMTO-ST, Univ. de Franche-Comté	Rapporteur
L. JEZEQUEL, Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon	Président
M. GRUIN, Ingénieure R&T, Safran Aircraft Engines	Examinatrice
D. LAVAZEC, Ingénieure R&T, Safran Aircraft Engines	Examinatrice
F. THOUVEREZ, Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
B. CHOUVION, Maître de Conférences, LTDS, École Centrale de Lyon	Co-encadrant



# Résumé

L'optimisation des turboréacteurs nécessite une excellente maîtrise des phénomènes vibratoires de la structure complète et notamment des interactions entre les différents organes constitutifs du moteur. Dans le cas d'une ligne d'arbre, le couplage entre dynamique d'ensemble et dynamique d'aubages modifie le comportement des roues aubagées, généralement dimensionnées individuellement. La prise en compte de ce phénomène fait intervenir des modèles de grandes tailles, justifiant la nécessité de développer des outils numériques spécifiques intégrant une stratégie de résolution peu coûteuse. Ces échanges énergétiques sont d'autant plus difficiles à prévoir pour une architecture bi-rotor possédant un palier inter-arbre : lors de la mise en équation simultanée des deux rotors, leur différence de vitesse de rotation génère des coefficients périodiques problématiques, impliquant une résolution temporelle onéreuse. L'objet principal de ce mémoire de thèse consiste à développer une nouvelle méthode de projection de l'équation du mouvement d'un bi-rotor aubagé, dans le but de se ramener à une forme traditionnelle d'équation permettant d'appliquer les méthodes de résolution fréquentielles classiques. La validation par comparaison avec une résolution temporelle de référence donne d'excellents résultats sur des modèles éléments finis simples soumis à des excitations mono- et multi- fréquentielles. Le gain notable en temps de calcul permet d'exploiter la méthode pour étudier, sur de larges plages de vitesse, la réponse forcée d'un système caractéristique de deux roues aubagées couplées. Deux phénomènes d'interaction vibratoire notables sont ainsi mis en évidence, traduisant des échanges énergétiques au travers du palier inter-arbre. Une détection graphique des zones d'instabilité en fonction des deux vitesses de rotation est également établie puis validée à l'aide de formulations bi-anneau. Par la suite, la méthode de projection de l'équation du mouvement est étendue à deux problématiques industrielles actuelles. Dans le cas où une non-linéarité de frottement est présente sur l'une des roues aubagées, une adaptation de la méthode de résolution non-linéaire par équilibrage harmonique est proposée afin de traiter la forme d'équation obtenue après projection. L'influence de la nature du couplage est finalement abordée en remplaçant le palier inter-arbre par un réducteur à engrenages.

**Mots clés :** turbomachines, roue aubagée, système bi-rotor, couplage, dynamique d'ensemble, roulement, réducteur à engrenages, équation non-linéaire, frottement.



# Abstract

Turbomachines optimization requires an excellent control of the vibration phenomena of the whole structure, especially in regards to the interactions between the different parts of the engine. The coupling between global dynamics and blade dynamics of a shaft line alters the vibration behavior of the bladed-disks, which are usually designed separately. The study of these phenomena comes with large sized models which require specific numerical tools with low-cost solving strategy. These energy exchanges are particularly difficult to predict in the case of a bi-rotor architecture coupled with a bearing system. When the equations of motion of both structures are written simultaneously, the rotating speed difference introduces time-periodic coefficients which yield expensive time resolution. The main purpose of this thesis is to develop a new methodology for the projection of the equation of motion of a bladed bi-rotor system in order to restore a regular equation form compatible with classical frequency solving methods. Compared with time resolution taken as reference, this new approach gives accurate results when applied on simple finite element models submitted to mono- and multi-frequency excitation forces. This substantially time-saving method makes it possible to study the forced response of a characteristic system of two coupled bladed-disks, on a large range of rotation speeds. Two vibratory interaction phenomena are thus revealed, directly related to the occurrence of energy exchanges through the inter-shaft bearing. A graphic detection of unstable areas according to both rotation speeds is established and validated thanks to a double ring model. The proposed projection methodology of the equation of motion is then extended to consider two current industrial challenges. First, in the case of friction nonlinearity present on one bladed-disk, the harmonic balance method is adapted to fit the new form of equation obtained after projection. Finally, the impact of the coupling mechanism is studied by replacing the bearing with a gearbox.

**Keywords :** turbomachines, bladed-disk, bi-rotor system, coupling, global dynamics, bearing, gearbox, nonlinear equation, friction.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes deux rapporteurs Alain Batailly et Scott Cogan pour avoir accepté d'évaluer mes travaux de thèse, ainsi que pour leur patience devant les conditions complexes qu'implique une soutenance par visio-conférence. J'ai été en particulier honorée qu'Alain participe à ce jury, mon expérience de stage à ses côtés n'étant pas étrangère à ma poursuite en doctorat et m'ayant fourni les bases théoriques et pratiques nécessaires à ce travail. J'adresse également mes remerciements à Louis Jézéquel pour avoir animé cette soutenance, dans la continuité des diverses étapes de ma formation d'ingénieur auxquelles il a contribué.

Si une thèse est un travail personnel, il est évident qu'elle ne pourrait être menée à bien sans encadrement. Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement mon directeur de thèse Fabrice Thouverez, pour m'avoir fait confiance en m'accueillant dans son équipe et pour m'avoir accompagnée avec bienveillance, tout en me laissant une grande part d'autonomie. Au gré de nos diverses discussions anneaux, frotteurs et singularités, j'ai découvert la magie du directeur de thèse capable de réinventer, en à peine dix minutes, une multitude de nouvelles perspectives dans l'horizon obscurci du thésard... Je remercie également mon co-encadrant Benjamin Chouvion pour son suivi amical et ses conseils avisés tout au long de ma thèse. En particulier pour m'avoir aidée à maintenir une cohérence dans mes travaux – le chemin le plus direct étant rarement celui de la recherche – ainsi que pour son soutien durant la longue phase de rédaction et sa relecture approfondie de mes articles et de ce mémoire.

En tant que doctorante Cifre, j'ai eu la chance de bénéficier d'une expérience complémentaire en entreprise. Je tiens à remercier tout particulièrement Marie-Océane Parent qui a su me guider au sein de Safran tout en respectant les changements de cap effectués côté labo, sans oublier d'ajouter de temps à autre un peu de piment au travers de nouveaux défis... Suite au départ de Marie-O vers de nouvelles aventures, c'est à Deborah Lavazec qu'a été confiée la tâche de remplaçante, peu de temps après son arrivée dans l'équipe. Je la remercie de s'être volontiers prêtée à cet exercice difficile et de m'avoir fait bénéficier de son expérience encore fraîche en matière de gestion de fin de thèse. Enfin, je tiens à remercier Marion Gruin pour ses précieux conseils concernant l'après-thèse et pour avoir accepté de renforcer ce jury de son expertise industrielle, rassurante et bienvenue lors des discussions.

Il va de soi que l'environnement quotidien du thésard est un facteur important dans la réussite de ses travaux. Je remercie donc l'ensemble de l'équipe DySCo pour m'avoir accueillie durant ces quatre années, et notamment les habitants du G8 bis/ter/phare avec qui j'ai eu le plaisir de



partager petit déjeuner, pauses café, BBQ, défis rubik's cube, mots croisés, horoscopes, randos et bien d'autres. En particulier un grand merci à Isabelle, Étienne (improvisé expert audio-visuel avec grand talent!) et Jéjé pour leur implication sans faille dans l'organisation et le bon déroulement de cette journée de soutenance, rendue plus délicate par le climat de grèves. Sans oublier bien sûr mes différents co-bureaux qui ont animé le quotidien en supportant mes bavardages et mon caractère, paraît-il, parfois un peu râleur...

Je ne peux décrire fidèlement ces années de thèse sans rappeler les soirées (promis, un jour je retiendrai les règles des jeux...), weekends cirque (Vive le Piston Circus!!) et randos bivouac (ça y est Franck, je suis bac+7-2+3, m'accepteras-tu encore dans ton refuge??) qui les ont égayées. Merci à mes amis de Lyon, de Paris et d'ailleurs pour tous ces bons moments que je ne suis pas prête d'oublier et que nous allons, je l'espère, continuer à partager encore longtemps. Spéciale dédicace à Caro, Lapinou, Marie, Dr Bidou, Buburg, Bibel, Dame Audrey, Ced, Pépino, Tachu, Riric et Prune, qui m'ont fait l'immense plaisir de braver les grèves le jour J pour venir envahir le dernier rang de l'amphi et animer un weekend inoubliable!

Mes derniers remerciements seront pour ceux qui m'accompagnent depuis toujours, inlassablement convaincus de mes capacités à accomplir mes projets même s'ils n'en comprennent plus tous les détails. Dominique d'abord, pour les nombreux séjours à Soulières si importants pour moi, toujours ressourçants et instructifs en activités variées; et enfin mes parents, mon frère Ju et Margaux pour cet esprit "Famille" qu'ils alimentent chaque jour, sur lequel j'ai toujours pu m'appuyer sans compter, dans les bons comme les moins bons moments.

# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Dynamique des machines tournantes</b>	<b>9</b>
1 Présentation d'un turboréacteur . . . . .	10
1.1 Principe de fonctionnement . . . . .	10
1.2 Origine des excitations dans les turboréacteurs . . . . .	12
2 Dynamique d'un corps élastique en rotation . . . . .	14
2.1 Cinématique d'une particule d'un système continu . . . . .	14
2.2 Formulation des équations du mouvement . . . . .	16
3 Modélisation des roues aubagées . . . . .	18
3.1 Propriétés des structures à symétrie cyclique . . . . .	18
3.2 Propriétés modales des structures en rotation . . . . .	25
3.3 Définition d'un amortissement modal . . . . .	29
4 Spécificités des structures bi-rotors . . . . .	33
4.1 Excitations multi-fréquentielles . . . . .	33
4.2 Problématique du repère d'étude . . . . .	37
4.3 Solutions usuelles et modélisation retenue . . . . .	39
5 Conclusion . . . . .	41
<b>II Mise en équation d'un bi-rotor aubagé linéaire</b>	<b>43</b>
1 Présentation du système étudié . . . . .	44
1.1 Modélisation des rotors et du roulement . . . . .	44
1.2 Équation du mouvement du système bi-rotor . . . . .	45
2 Construction du modèle pour une roue aubagée isolée . . . . .	46
2.1 Transformations des bases modales . . . . .	47
2.2 Décomposition des déformées modales en harmoniques spatiales au niveau du roulement . . . . .	51
3 Étude du système couplé . . . . .	60
3.1 Expression des termes de couplage . . . . .	61
3.2 Projection dans des repères intermédiaires . . . . .	64
3.3 Résolution fréquentielle de l'équation à coefficients constants . . . . .	74
4 Validations sur un modèle bi-anneau . . . . .	75

4.1	Définition de l'élément poutre courbe . . . . .	75
4.2	Paramétrage de la décomposition spatiale des vecteurs propres dans la zone du roulement . . . . .	77
4.3	Simulations numériques temporelles et fréquentielles . . . . .	79
5	Conclusion . . . . .	83
<b>III Application à un modèle bi-rotor simplifié</b>		<b>85</b>
1	Modèle éléments finis étudié . . . . .	86
1.1	Calcul des coefficients <b>C</b> et <b>S</b> . . . . .	87
1.2	Configuration utilisée pour les simulations numériques . . . . .	88
2	Validation de la méthode développée . . . . .	88
2.1	Paramétrage des calculs . . . . .	89
2.2	Comparaison des simulations numériques . . . . .	90
3	Comportement vibratoire sur plusieurs plages de vitesse . . . . .	93
3.1	Première plage de vitesse (co-rotatif) . . . . .	94
3.2	Deuxième plage de vitesse (contra-rotatif) . . . . .	95
3.3	Troisième plage de vitesse (co-rotatif) . . . . .	97
3.4	Conclusion . . . . .	97
4	Étude de la stabilité du système . . . . .	98
4.1	Mise en équation d'un modèle d'anneau par la méthode de Rayleigh-Ritz .	98
4.2	Corrélation avec les deux modèles d'anneaux . . . . .	103
4.3	Étude de la stabilité du système bi-anneau . . . . .	110
4.4	Extension au système bi-rotor aubagé . . . . .	119
5	Conclusion . . . . .	120
<b>IV Adaptation à deux problématiques industrielles</b>		<b>123</b>
1	Ajout d'une non-linéarité de type frottement dans le modèle . . . . .	124
1.1	Origine des non-linéarités dans les turboréacteurs . . . . .	124
1.2	Principe de résolution par la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM)	125
1.3	Adaptation de la HBM dans le cadre de notre étude . . . . .	135
1.4	Applications numériques . . . . .	143
1.5	Conclusion . . . . .	152
2	Couplage par une gearbox – cas de l'UHBR ID . . . . .	152
2.1	Modèle simplifié utilisé . . . . .	155
2.2	Matrice de couplage associée . . . . .	156
2.3	Projection de la matrice de couplage . . . . .	160
2.4	Simulations numériques . . . . .	162
2.5	Conclusion . . . . .	167
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>171</b>
<b>A Bi-orthogonalité des matrices pseudo-modales</b>		<b>177</b>
<b>B Procédure de projection de l'équation du mouvement</b>		<b>179</b>

---

<b>C</b>	<b>Calcul des coefficients de la décomposition spatiale en base cyclique</b>	<b>181</b>
<b>D</b>	<b>Matrices d'un élément poutre courbe</b>	<b>183</b>
<b>E</b>	<b>Fonctions de forme pour l'élément SOLID185 d'ANSYS</b>	<b>187</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>191</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>197</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>201</b>



# Nomenclature

## Abréviations

AFT	Alternating Frequency Time
EF	Éléments finis
FRF	Fonction de réponse en fréquence
HBM	Harmonic Balance Method
ddl	Degrés de liberté

## Notations

$\dot{\bullet}$	Dérivée temporelle de la grandeur $\bullet$
$\bar{\bullet}$	Grandeur $\bullet$ exprimée en base cyclique
$\tilde{\bullet}$	Grandeur $\bullet$ exprimée en base modale
$\hat{\bullet}$	Grandeur $\tilde{\bullet}$ après projection dans les nouveaux repères
$\bullet^F$	Grandeur $\bullet$ spatialement limitée à la zone de fixation du roulement
$\bullet_h$	Grandeur $\bullet$ exprimée dans le domaine fréquentiel (coefficients harmoniques)
$g,d\bullet$	Grandeur $\bullet$ en lien avec la base modale à gauche ou la base modale à droite
$\bullet_{1,2}$	Grandeur $\bullet$ associée au rotor $R_1$ ou $R_2$
$\otimes$	Produit de Kronecker
<b>A</b>	Matrice pseudo-raideur du système augmenté
<b>B</b>	Matrice pseudo-masse du système augmenté
<b>D</b>	Matrice d'amortissement
$E$	Module d'Young
$E_p$	Énergie potentielle des raideurs modélisant le roulement (ou la gearbox)
<b>F</b>	Matrice de transformée de Fourier discrète (modélisation cyclique)
$\mathcal{F}$	Matrice de transformée de Fourier discrète (procédure d'AFT)

---

<b>G</b>	Matrice gyroscopique
<b>H</b>	Matrice des fonctions de forme
<i>I</i>	Moment d'inertie
<b>I<sub>n</sub></b>	Matrice identité de taille <i>n</i>
<b>K</b>	Matrice raideur
<b>K<sub>c</sub></b>	Matrice de couplage modélisant la raideur du roulement / de la gearbox
$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$	Sous-matrice de la matrice de couplage modale $\tilde{\mathbf{K}}_c$
<i>K<sub>max</sub></i>	Valeur du plus grand diamètre existant pour une structure à symétrie cyclique
<b>K<sub>prec</sub></b>	Matrice raideur de précharge statique
<b>L</b>	Matrice de rigidité dynamique
<b>M</b>	Matrice de masse
<b>N</b>	Matrice d'assouplissement centrifuge
<b>N<sub>A</sub></b>	Matrice diagonale par blocs contenant $2N_h + 1$ fois la matrice <b>A</b> : $\mathbf{N}_A = \mathbf{I}_{2N_h+1} \otimes \mathbf{A}$
<i>N</i>	Nombre de secteurs ou effort normal
<i>N<sub>h</sub></i>	Nombre d'harmoniques temporelles conservées pour la résolution non-linéaire
<i>N<sub>s</sub></i>	Nombre de satellites d'une gearbox
<b>P</b>	Matrice de projection des deux rotors dans les nouveaux repères
<b>P<sub>h</sub></b>	Matrice de projection dans les nouveaux repères exprimée dans le domaine fréquentiel
<b>P<sub>int</sub></b>	Matrice de projection à appliquer à $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ lors de la projection de $\tilde{\mathbf{K}}_c$ selon <b>P</b>
<b>R</b> ( $\theta$ )	Matrice de rotation d'angle $\theta$
<b>R</b>	Matrice de transformation combinant une symétrie et une rotation : $\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}$
$\mathcal{R}_{1,2}$	Repère mobile lié au rotor 1 ou 2
$\mathcal{R}_f$	Repère fixe
<i>R</i>	Rayon de l'interface de fixation du roulement
<b>S</b>	Matrice de symétrie
<i>S</i>	Section d'un élément poutre courbe
<b>T</b>	Base harmonique temporelle pour la résolution non-linéaire
<i>T</i>	Période de la solution associée à la pulsation $\omega$
<b>T<sub>m</sub></b>	Base harmonique associée à la fréquence $\omega_{\text{mobile}}$
<b>U</b>	Vecteur des déplacements en base augmentée
<b>V</b>	Matrice contenant les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres

---

<b>W</b>	Matrice pseudo-modale réelle du système augmenté construite à partir de <b>V</b> et <b>Ω</b>
<b>a<sub>k</sub></b>	Coefficients en cosinus pour l'harmonique temporelle <i>k</i> de la solution non-linéaire
<b>b<sub>k</sub></b>	Coefficients en sinus pour l'harmonique temporelle <i>k</i> de la solution non-linéaire
<b>f<sub>ext</sub></b>	Vecteur des efforts extérieurs
<b>f<sub>nl</sub></b>	Vecteur des efforts non-linéaires
<b>h</b>	Vecteur ligne contenant les $\cos(m\theta)$ et $\sin(m\theta)$ des harmoniques spatiales <i>m</i>
<b>j</b>	Unité imaginaire telle que $j^2 = -1$
<b>k</b>	Nombre de diamètres d'un mode
<b>k<sub>a</sub></b>	Raideur d'attache permettant de supprimer les modes de corps rigide d'un anneau
<b>ℓ</b>	Longueur d'un élément entre deux nœuds du modèle EF
<b>m</b>	Ordre d'une harmonique spatiale s'écrivant $m = \pm k + pN$ , $p \in \mathbb{N}$
<b>n<sub>t</sub></b>	Nombre d'instantanés temporels conservés pour l'échantillonnage de la procédure d'AFT
<b>n<sub>1,2</sub></b>	Nombre de sillages générés par le stator en amont de la roue 1 ou 2
<b>q</b>	Coordonnées modales
<b>u</b>	Vecteur des déplacements physiques
<b>y, z</b>	Parties réelles et imaginaires des vecteurs propres augmentés $\Phi = \mathbf{y} + j\mathbf{z}$
<b>Γ</b>	Matrice de coefficients des harmoniques spatiales <i>m</i> contenues dans les déformées modales
<b>Γ<sub>c</sub></b>	Matrice réunissant les coefficients harmoniques des deux rotors, nécessaire pour l'expression de $\tilde{\mathbf{K}}_c$
<b>Λ</b>	Matrice spectrale complexe contenant les valeurs propres $\lambda_i$ sur sa diagonale
<b>Φ</b>	Matrice des vecteurs propres complexes en base augmentée construite à partir de <b>φ</b> et <b>Λ</b>
<b>Ω</b>	Matrice pseudo-spectrale réelle contenant les $\alpha_i$ et $\omega_i$
<b>Ω̄</b>	Matrice contenant les composantes du vecteur vitesse angulaire <b>ω</b>
<b>Ω</b>	Vitesse de rotation d'un rotor
<b>ΔΩ</b>	Différence de vitesse de rotation entre les deux rotors
<b>∇</b>	Opérateur de dérivation (HBM)
<b>∇<sub>P</sub></b>	Opérateur de dérivation associé à la matrice de projection <b>P</b>
<b>α</b>	Largeur angulaire d'un secteur
<b>α<sub>i</sub></b>	Coefficient d'amortissement modal du mode <i>i</i>
<b>α<sub>s</sub></b>	Largeur angulaire entre deux nœuds consécutifs de la zone de fixation du roulement
<b>β<sub>1,2</sub></b>	Position angulaire dans le repère $\mathcal{R}_{1,2}$
<b>θ</b>	Position angulaire dans le repère fixe



$\kappa$	Densité de raideur du roulement ou matrice raideur d'un satellite de la gearbox
$\lambda_i$	Valeur propre du mode complexe $i$ : $\lambda_i = -\alpha_i + j\omega_i$
$\mu$	Coefficient de frottement
$\xi_i$	Taux d'amortissement du mode $i$
$\rho$	Masse volumique
$\varphi$	Matrice des vecteurs propres complexes en base physique
$\omega_i$	Pulsation propre du mode $i$
$\omega_{\text{mobile}}$	Fréquence fondamentale de la solution non-linéaire dans le repère mobile du rotor
$\omega_{\text{proj}}$	Fréquence fondamentale de la solution non-linéaire dans les nouveaux repères de projection

# Introduction

## Contexte industriel

Les turboréacteurs font actuellement partie des machines les plus complexes fabriquées, nécessitant de la part des constructeurs des compétences technologiques de pointe dans des domaines très variés. La forte compétitivité internationale de ce domaine associée à un contexte économique et environnemental très exigeant, favorisent une dynamique d'innovation constante visant à optimiser ces systèmes de propulsion et en accroître l'efficacité.

D'abord dimensionnés pour répondre à des contraintes aérodynamiques de rendement, les turboréacteurs font également l'objet de nombreux calculs mécaniques, primordiaux durant les phases de conception. Il s'agit d'en assurer le bon fonctionnement en évitant des détériorations coûteuses, tout en garantissant la sécurité des usagers. Plusieurs axes d'optimisation sont activement étudiés par les motoristes, parmi lesquels le développement de nouveaux matériaux innovants adaptés à des contraintes spécifiques ou l'amélioration du rendement aérodynamique grâce à l'abaissement des marges de fonctionnement. Ce deuxième aspect consiste notamment en la réduction des jeux fonctionnels entre les pièces fixes et les pièces en mouvement, nécessaires au bon fonctionnement mécanique mais préjudiciables au rendement aérodynamique. Ce type d'optimisation impose une excellente maîtrise des phénomènes vibratoires.

Bien que systématiquement validées par de nombreux essais, les nouvelles géométries ne pourraient être développées sans l'aide d'outils numériques dédiés au dimensionnement de chaque organe. C'est notamment le cas des roues aubagées constitutives des rotors et pièces maîtresses du fonctionnement du moteur. Pour ce type d'élément à la fabrication complexe et précise, les essais et re-fabrications s'avèrent trop coûteux pour constituer le cœur du processus de conception. De plus, compte tenu des degrés d'optimisation actuels, les géométries les plus performantes sont souvent trop élaborées pour être imaginées sans l'aide d'outils numériques adaptés.

Enfin, l'optimisation des turboréacteurs peut nécessiter des transformations plus radicales touchant à l'architecture globale du moteur. L'ajout d'un réducteur à engrenages entre le fan et le reste de l'arbre basse pression fait notamment l'objet de nombreuses recherches à l'heure actuelle. L'objectif est d'augmenter le taux de dilution du moteur grâce à un fan de grand diamètre tournant plus lentement que le reste des roues aubagées. L'utilisation d'un tel système entraîne toutefois une augmentation de la masse et génère de nouvelles sources de vibration à étudier.

## Enjeux de l'étude

Lors du dimensionnement mécanique d'un moteur, les roues aubagées sont dans un premier temps étudiées séparément, grâce à des modèles fins capables de représenter fidèlement leur comportement vibratoire. Les différents phénomènes mis en jeu sont alors traités individuellement puis intégrés dans des modèles de complexité croissante. Cette phase de conception n'est toutefois pas suffisante pour appréhender le comportement vibratoire de l'ensemble du moteur, les interactions entre ses différents organes étant fortes et nombreuses. Des modèles d'ensemble sont donc également développés, basés sur des descriptions moins détaillées afin de conserver des temps de calcul raisonnables. Cependant, ces modèles simplifiés ne sont généralement pas capables de représenter l'ensemble des phénomènes vibratoires susceptibles d'exister en situation réelle.

C'est notamment le cas des modèles de dynamique d'ensemble utilisés pour simuler la dynamique de ligne d'arbre, principalement en flexion ou en torsion. Ces modèles ne s'intéressent pas à la déformation propre des roues aubagées portées par les rotors, qui sont alors modélisées par des masses et des inerties représentatives de simples disques rigides. Si les interactions entre dynamique de ligne d'arbre et dynamique d'aubage étaient jusqu'à présent raisonnablement négligeables, elles le sont de moins en moins sur les versions les plus récentes de turboréacteurs dont les degrés d'optimisation ont conduit à une forte réduction des jeux en bout d'aube.

Ce phénomène d'interaction est notamment présent sur les architectures bi-rotor constituées de deux rotors co-axiaux couplés par un palier inter-arbre. Il est ainsi observé expérimentalement une influence de la dynamique de l'arbre haute pression sur les aubages du rotor basse pression par l'intermédiaire du palier. Ces interactions sont principalement liées à des déformations de l'arbre en flexion sous l'influence d'un phénomène de balourd. Il s'agit alors d'une déformation spatiale d'ordre harmonique 1. Dans le cas d'arbres creux facilement déformables, il est tout à fait envisageable que des déformations d'ordre plus élevé se transmettent également de part et d'autre du palier entre les roues aubagées les plus proches de cette zone d'interaction.

Les modèles actuels n'étant pas capables de prendre en compte ces phénomènes de couplage, il est difficile de prévoir et de maîtriser les niveaux vibratoires pouvant être transmis entre les deux rotors d'une architecture possédant un palier inter-arbre. Ceci constitue une faiblesse de cette solution technologique qui est parfois abandonnée au détriment d'une augmentation de la masse du moteur : chaque rotor est alors maintenu indépendamment en rotation par rapport aux parties fixes. L'objet de ce mémoire est donc de développer une stratégie adaptée à l'étude des interactions entre les dynamiques de deux rotors aubagés couplés, afin de mieux comprendre et maîtriser les phénomènes de couplage vibratoire entre arbres et aubages.

## Organisation du mémoire

Ce mémoire s'articule en quatre chapitres. Le Chapitre I est un chapitre d'introduction destiné à exposer le contexte scientifique et les méthodologies utilisées pour la suite des développements. Après une brève présentation du fonctionnement des turboréacteurs et de leurs excitations, les outils de mise en équation spécifiques aux caractéristiques géométriques des roues aubagées

sont présentés, indispensables pour l'étude vibratoire des rotors. Les spécificités relatives à la dynamique des structures bi-rotors sont ensuite analysées, aussi bien en ce qui concerne les motivations de l'étude proposée que les difficultés mathématiques inévitablement rencontrées avec ce type de système. Les objectifs précis de la suite des développements sont ainsi établis.

Le Chapitre II est dédié à la présentation d'une nouvelle méthode destinée à transformer l'équation du mouvement du système bi-rotor afin d'obtenir une forme d'équation répondant aux critères des techniques habituelles de résolution fréquentielle. La mise en équation de cette méthode est détaillée, en passant par les caractéristiques du système concerné, les hypothèses retenues et les propriétés de l'équation finale. Une étude numérique préliminaire est ensuite menée sur une structure simplifiée bi-anneau permettant une première évaluation de la validité de cette nouvelle méthode.

L'objet du Chapitre III est d'appliquer la méthode développée dans le chapitre précédent sur une structure bi-rotor non-axisymétrique. Un modèle éléments finis de deux roues aubagées simplifiées est donc construit. Après une phase de validation, des investigations sont menées quant au comportement vibratoire de ce système bi-rotor sur plusieurs plages de vitesse de rotation. Les phénomènes physiques mis en évidence sont ensuite expliqués au travers d'un système bi-anneau recalé. Une étude de stabilité est notamment proposée.

Enfin, le Chapitre IV est consacré à l'extension de la méthode de projection de l'équation du mouvement à deux problématiques industrielles actuelles. La première concerne la prise en compte de non-linéarités de frottement pour l'étude du comportement dynamique d'une roue aubagée. La méthode de résolution par équilibrage harmonique, généralement utilisée dans ce type de situation, est adaptée afin de pouvoir traiter la forme de l'équation du mouvement obtenue après transformation. Des simulations numériques sont menées, appliquées aux deux modèles éléments finis bi-anneau et bi-rotor développés dans les Chapitres II et III.

Une seconde application est proposée, s'intéressant cette fois-ci à la nature du couplage entre les deux rotors. Le roulement est alors remplacé par un réducteur appelé *gearbox*, nécessitant une nouvelle modélisation du couplage. Après adaptation de la méthode développée à cette nouvelle modélisation, les modifications engendrées en terme de transfert d'énergie par rapport au cas du roulement sont étudiées.



## Dynamique des machines tournantes

*L'objet de ce chapitre d'introduction est d'établir le contexte ainsi que les bases théoriques sur lesquelles reposent les développements proposés dans la suite du mémoire. Après une brève présentation des turboréacteurs, quelques généralités concernant la mise en équation d'une structure en rotation sont détaillées. Les notions de « symétrie cyclique » et de modes propres « à droite » et « à gauche » sont notamment abordées, avant de présenter les difficultés propres aux systèmes bi-rotors aubagés. À partir des solutions rencontrées dans l'état de l'art, certains choix de modélisation du bi-rotor sont fixés ainsi que les objectifs de la méthode développée dans le Chapitre II.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation d'un turboréacteur</b>	<b>10</b>
1.1	Principe de fonctionnement	10
1.2	Origine des excitations dans les turboréacteurs	12
<b>2</b>	<b>Dynamique d'un corps élastique en rotation</b>	<b>14</b>
2.1	Cinématique d'une particule d'un système continu	14
2.2	Formulation des équations du mouvement	16
<b>3</b>	<b>Modélisation des roues aubagées</b>	<b>18</b>
3.1	Propriétés des structures à symétrie cyclique	18
3.2	Propriétés modales des structures en rotation	25
3.3	Définition d'un amortissement modal	29
<b>4</b>	<b>Spécificités des structures bi-rotors</b>	<b>33</b>
4.1	Excitations multi-fréquentielles	33
4.2	Problématique du repère d'étude	37
4.3	Solutions usuelles et modélisation retenue	39
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

---

## 1 Présentation d'un turboréacteur

Un turboréacteur est un système de propulsion principalement utilisé dans le domaine de l'aviation, aussi bien civile que militaire. Au carrefour de plusieurs disciplines telles que l'aérodynamique, la mécanique du solide, la thermique ou encore l'électronique, cette structure complexe est le siège d'une grande diversité de phénomènes physiques dont la compréhension et la maîtrise sont essentiels pour assurer sécurité et rendement. Si son fonctionnement repose principalement sur des considérations aérodynamiques, l'étude mécanique de ses différents organes est indispensable pour en vérifier la résistance dans des conditions de contraintes très variées : contraintes thermiques, tenue en rotation, balourd, ingestion de corps étranger, ...

### 1.1 Principe de fonctionnement

Le fonctionnement d'un turboréacteur repose sur le principe d'action-réaction de Newton : la différence de vitesse du flux d'air entre l'entrée et la sortie du moteur crée une quantité de mouvement qui entraîne le déplacement de l'ensemble moteur/avion. De la famille des machines tournantes, un turboréacteur est constitué d'une succession de roues aubagées en rotation. On distingue les parties « compresseur » qui fournissent de l'énergie au fluide en augmentant sa pression, des parties « turbine » qui récupèrent l'énergie du fluide. L'apport d'énergie se situe au niveau de la chambre de combustion où un mélange d'air et de kérosène est enflammé.

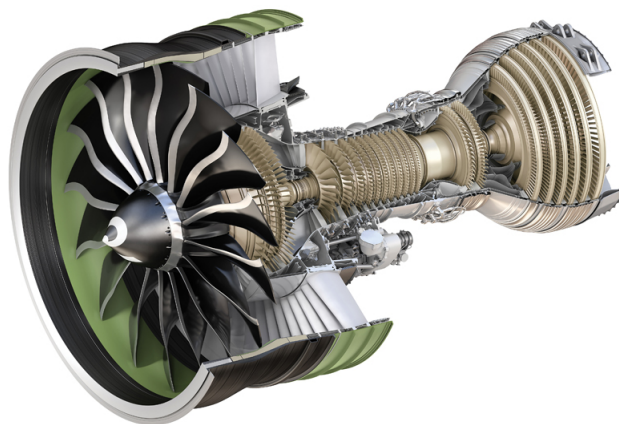


FIGURE I.1 – Exemple d'un turboréacteur LEAP<sup>®</sup> développé par CFM International, société commune 50/50 entre Safran Aircraft Engines et GE.

On appelle corps un ensemble compresseur-turbine solidaire d'un même arbre et donc en rotation à la même vitesse. Un turboréacteur peut être mono-, double- ou triple-corps. L'intérêt d'une architecture multi-corps et d'autoriser une vitesse de rotation supérieure pour le rotor HP (Haute Pression) dont les roues aubagées possèdent un diamètre plus faible que celles du rotor BP (Basse Pression) (*cf.* Figure I.2). Un meilleur taux de compression est ainsi obtenu, augmentant la puissance du moteur.

L'architecture d'un turboréacteur peut également se faire en simple ou double flux. La technologie simple flux est essentiellement utilisée pour les moteurs militaires car elle assure un

rendement maximum au-delà de Mach 1. Le même chemin est alors suivi par l'ensemble du flux d'air, traversant les compresseurs, la chambre de combustion et les turbines.

Pour les moteurs civils, une technologie double-flux est généralement privilégiée car plus économique en carburant et beaucoup moins bruyante. 80% de la poussée du moteur est ainsi générée par le flux secondaire ou flux froid qui ne traverse pas les différents étages de compression et de détente.

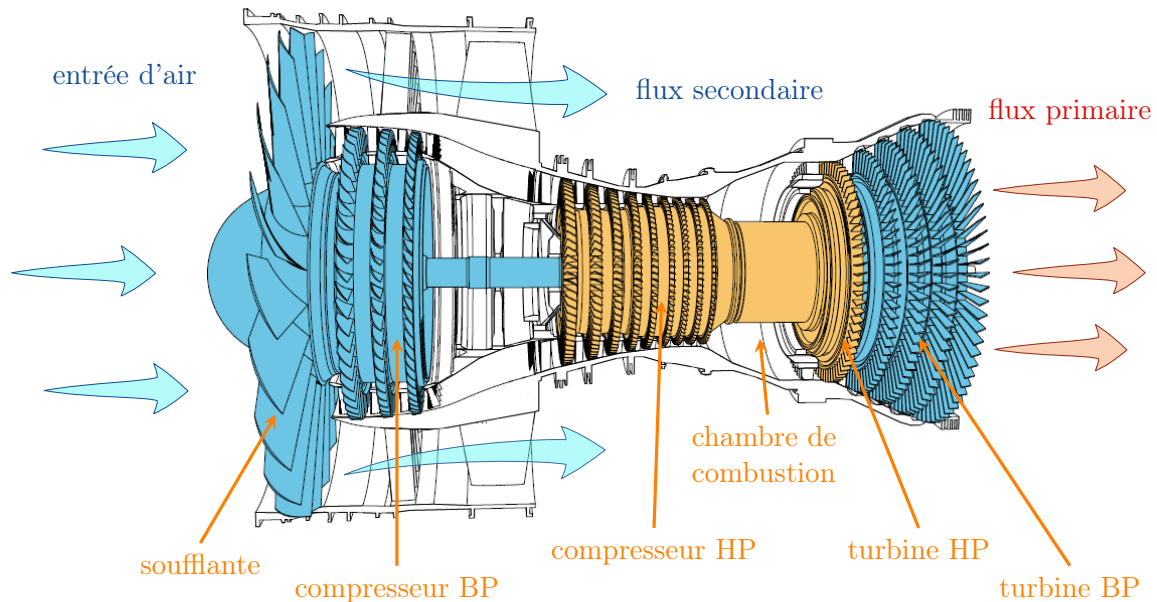


FIGURE I.2 – Coupe d'un moteur double-corps, double-flux de type CFM56<sup>®</sup>.

Dans cette architecture double-flux, l'entrée de l'air dans le turboréacteur se fait par la *soufflante*, premier étage du compresseur basse pression également appelé *fan*. De bien plus grande dimension que les roues aubagées suivantes, elle aspire de grandes quantités d'air qui sont ensuite séparées entre le flux principal (chaud) et le flux secondaire (froid). Dans les moteurs double-flux, c'est donc la soufflante qui contribue majoritairement à la poussée du moteur en générant le flux secondaire. Le rôle du flux primaire est alors d'entraîner la soufflante en rotation.

Après le passage de la soufflante, le flux primaire est comprimé et accéléré par la double action des étages de compression et de la géométrie convergente de la veine. À la sortie du compresseur haute pression, l'air fortement comprimé est mélangé au kérosène dans la chambre de combustion. Une flamme permanente enflamme ce mélange, conduisant à une augmentation brutale de la température et une détente des gaz. Cet apport d'énergie accélère le fluide en direction de la tuyère où il est mélangé au flux secondaire avant de s'échapper du turboréacteur. Entre la chambre de combustion et la tuyère, une partie de l'énergie du fluide est récupérée par les turbines assurant l'entraînement en rotation des compresseurs et de la soufflante en amont de la combustion.

Chaque étage de compression ou de détente est constitué d'une roue mobile et d'un stator composé de pales fixes (*cf.* Figure I.3). Dans un étage de compression, le stator est appelé *redresseur* et se situe en aval de la roue mobile. Son rôle est de redresser l'écoulement – mis en rotation par la roue mobile – vers la direction axiale. L'énergie cinétique de la composante giratoire de vitesse est ainsi transformée en pression statique. À l'inverse, le stator d'un étage de turbine est situé en amont de la roue mobile et est appelé *distributeur*. Son rôle est cette fois-ci



de provoquer la giration de l'écoulement de façon à transformer l'énergie de pression statique disponible en énergie cinétique. Cette énergie est ensuite récupérée par la roue mobile, alors entraînée en rotation.

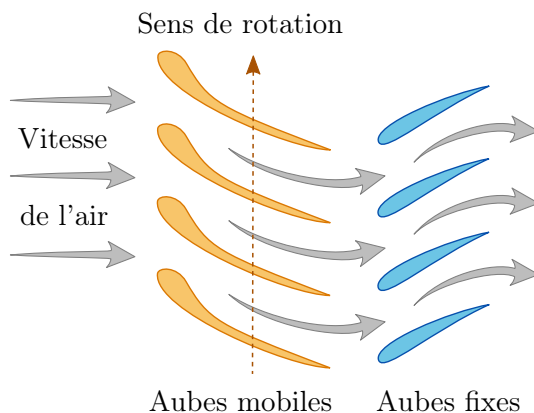


FIGURE I.3 – Vue du dessus d'un étage de compresseur avec alternance d'une roue mobile et d'un stator.

Le démarrage d'un turboréacteur nécessite l'utilisation d'un moteur électrique d'appoint pour amorcer la mise en rotation des différents corps ainsi que la combustion. Il permet notamment de protéger les étages de détente en assurant la circulation de l'air dans les circuits de refroidissement intégrés. Les températures atteintes à la sortie de la chambre de combustion peuvent en effet dépasser la température de fusion des matériaux.

## 1.2 Origine des excitations dans les turboréacteurs

Les excitations observées dans les turboréacteurs sont généralement complexes, d'origines multiples et souvent difficiles à prédire. Elles conduisent à des phénomènes vibratoires variés, principaux responsables de l'endommagement et de la ruine des aubages. Les conséquences pour le moteur vont alors d'une perte significative de rendement à la destruction partielle voire totale.

Ces excitations peuvent être classées en deux grandes catégories. Les excitations d'origine aérodynamique, générées par l'écoulement du flux d'air dans la veine, sont intrinsèquement liées au fonctionnement du moteur. Elles constituent la principale source d'excitation des pales. De nature plus accidentelle, les excitations d'origine mécanique sont quant à elles majoritairement générées par un événement ponctuel dans le cycle de fonctionnement du moteur.

### 1.2.1 Excitations d'origine aérodynamique

On distingue deux types d'excitations aérodynamiques : synchrones et asynchrones. Une excitation est dite synchrone lorsque sa fréquence correspond à une harmonique de la vitesse de rotation de l'arbre. Ce type d'excitation est généré par la présence d'obstacles dans la veine d'écoulement de l'air (redresseurs, distributeurs, bras de maintien). Chaque obstacle entraîne une fluctuation du champ de pression dans l'écoulement, appelé sillage. Une pale de roue mobile est soumise à cette fluctuation une fois par rotation. La fréquence d'excitation de la pale correspond donc au produit du nombre d'obstacles dans la veine par la vitesse de rotation : il s'agit bien

d'une excitation synchrone. En subsonique, ces perturbations peuvent remonter la veine et exciter des aubages en amont de l'obstacle : on parle d'excitation par *effet potentiel*.

La réponse de la structure à ce type de perturbation est relativement facile à prévoir à l'aide d'un calcul de réponse forcée. Une aube est susceptible d'entrer en résonance lorsqu'une de ses fréquences propres croise une harmonique d'excitation [1]. Il est ainsi possible de déterminer, dès la conception du turboréacteur, les régimes moteurs critiques d'un rotor puis de modifier la géométrie des aubages en conséquence.

Beaucoup plus difficiles à anticiper, les excitations asynchrones aéroélastiques proviennent des interactions entre les vibrations des pales et le fluide : la vibration des aubes perturbe l'écoulement qui génère en conséquence un champ de pression excitant ces mêmes aubages. Ces vibrations auto-entretenues conduisent à des phénomènes de type flottement [2] très dangereux, pouvant mener à la ruine de la structure.

À l'heure actuelle, la compréhension des excitations asynchrones constitue un enjeu majeur pour les constructeurs de turbomachines. Ces phénomènes variés et mal maîtrisés sont en effet de plus en plus fréquemment rencontrés en raison de la constante diminution des marges de stabilité pour améliorer le rendement du moteur. Ils sont toutefois difficiles à prendre en compte au moment de la conception puisque les fréquences d'excitation ne dépendent plus simplement de la vitesse de rotation du rotor mais d'un phénomène vibratoire des pales. Ils apparaissent donc généralement au moment des phases d'essais nécessitant alors une reconception coûteuse.

Pour limiter ces phénomènes, une astuce consiste à concevoir des roues aubagées désaccordées : plusieurs familles de pales de géométries différentes sont présentes sur la roue, de façon à en casser la symétrie et à ainsi limiter l'installation du phénomène [3, 4].

### 1.2.2 Excitations d'origine mécanique

La première source d'excitation mécanique, propre au domaine des machines tournantes, est le phénomène de balourd. Lié à une répartition hétérogène de la masse du rotor autour de son axe de rotation, il conduit à un déséquilibre statique lorsque le centre de gravité se trouve en dehors de l'axe de rotation, ou à un déséquilibre dynamique lorsque l'axe de rotation ne correspond pas à l'axe principal d'inertie. Il en découle des excitations harmoniques respectivement de type force et moment.

Les phénomènes de balourd sont en premier lieu causés par un mauvais centrage des composants en rotation ou par une hétérogénéité du matériau en raison des imperfections des techniques de fabrication par usinage ou fonderie. Ces deux problématiques sont toutefois limitées par des tolérances de fabrication très strictes et un rééquilibrage des pièces par ajout de masselottes ou usinage. Un balourd peut également apparaître lors d'une perte d'aube d'un étage de compresseur ou de turbine suite à un phénomène de fatigue vibratoire ou à l'ingestion d'un corps étranger (oiseau, glace, ...). Le rotor est alors brusquement déséquilibré, générant des efforts importants transmis aux paliers. Il s'agit généralement d'excitations mécaniques pseudo-périodiques.

Les phénomènes de contact rotor/stator constituent une seconde source d'excitation mécanique fréquemment rencontrée dans les moteurs d'avion. Ils apparaissent lorsque les jeux de fonctionnement en bout d'aube sont totalement consommés. Ces jeux sont nécessaires au bon

fonctionnement du turboréacteur afin de permettre l'allongement des aubes sous l'effet des forces centrifuges ou des gradients thermiques. Ils engendrent toutefois des fuites d'écoulement entre le carter et la tête des aubages dégradant le rendement du moteur. La réduction de ces jeux conduit à des contacts répétés entre les bouts d'aube et le carter, à l'origine de phénomènes d'instabilité vibratoire [5, 6] et d'interactions modales [7]. Parmi les solutions actuellement disponibles, l'utilisation d'un matériau à structure mono-cristalline permet de fabriquer des aubages plus résistants au fluage. Il est également courant de recouvrir certaines portions de la veine de l'écoulement d'une couche de matériau abrasable destinée à adoucir le contact entre les aubes et le carter.

## 2 Dynamique d'un corps élastique en rotation

En tant que machine tournante, un turboréacteur présente un comportement vibratoire se rapportant à une branche particulière de la mécanique du solide : la dynamique d'un corps élastique en rotation. Cette section s'intéresse en particulier à la mise en équation d'un solide déformable dans son propre repère mobile. Nous verrons en effet dans la section I.4.2 que ce repère est généralement privilégié pour décrire une structure en rotation. À partir de l'étude de la cinématique d'une particule associée à une formulation discrétisée du problème, les formes continues des énergies cinétique et potentielle exprimées dans le repère mobile conduisent à l'équation matricielle régissant le comportement dynamique de la structure en rotation. Plus de précisions concernant les développements qui suivent sont données dans l'ouvrage de Gmür [8].

### 2.1 Cinématique d'une particule d'un système continu

Soit un solide déformable de volume  $\Omega$  et de frontière  $\partial\Omega$  représenté Figure I.4 dans sa configuration non-déformée de référence. La position d'une particule  $P$  de ce solide est repérée par le vecteur  $\mathbf{x} = [X \ Y \ Z]^T$  dans le repère fixe inertiel et orthonormé  $\mathcal{R}_f = (O, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ .

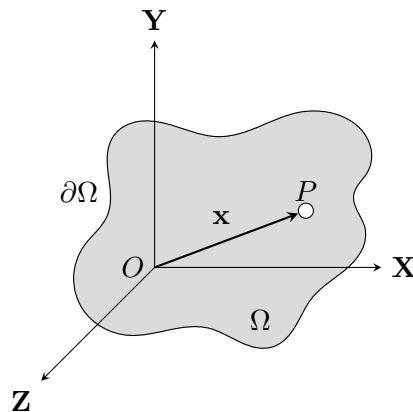


FIGURE I.4 – Solide déformable dans sa configuration de référence.

Le mouvement de ce solide suivant une trajectoire quelconque est étudié au cours du temps. Les notations utilisées sont repérées sur la Figure I.5. À l'instant  $t=0$ , la particule  $P$ , soumise à un champ de déplacement initial  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  est située au point initial  $P_0$  dont la position dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}_f$  est repérée par le vecteur :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

À un instant  $t > 0$ , la double action du mouvement et de la déformation déplace la particule au point  $P_1$  repéré dans le référentiel  $\mathcal{R}_f$  par le vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ . Dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}_m = (O_1, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_1)$  lié au solide, la position de la particule  $P_1$  s'écrit :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

avec  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  le vecteur déplacement à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_m$ . Ce champ de déplacement résulte de la déformation dynamique du corps.

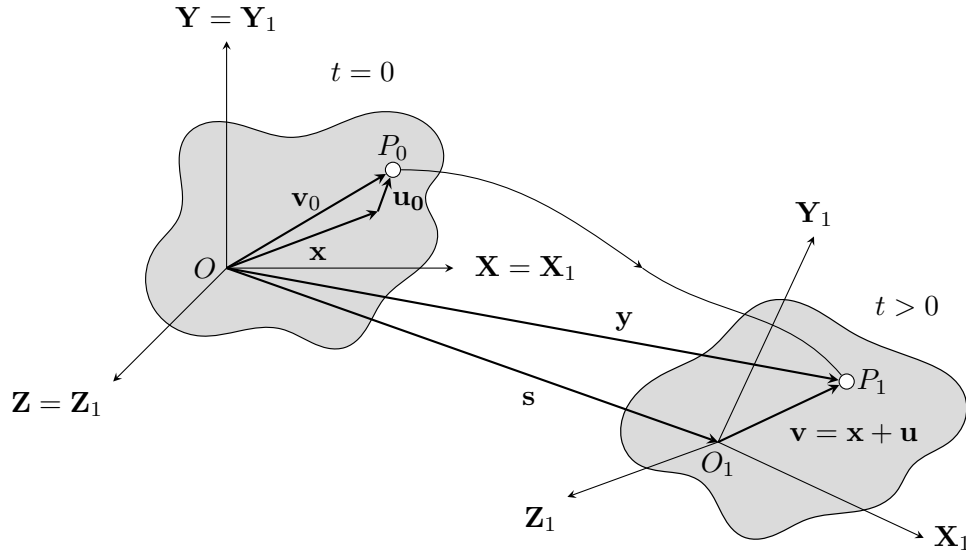


FIGURE I.5 – Solide déformable dans sa configuration initiale (gauche) puis déformée (droite).

On note qu'à l'instant  $t = 0$ , les deux repères  $\mathcal{R}_f$  et  $\mathcal{R}_m$  sont confondus. Pour les instants  $t > 0$ , le changement de repère entre  $\mathcal{R}_m$  et  $\mathcal{R}_f$  se définit par une translation  $\mathbf{s}(t)$  de l'origine du repère et une rotation autour d'un axe quelconque passant par  $O_1$ . La vitesse angulaire associée est définie par le vecteur  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  dans le repère mobile  $\mathcal{R}_m$ . Enfin, la matrice de changement de repère  $\mathbf{R}(t)$  est constituée des vecteurs de base du repère mobile exprimés dans le repère fixe. Grâce à ses propriétés d'orthogonalité, cette matrice vérifie la relation  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité.

Avec ces notations, le vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  repérant la position de la particule  $P_1$  dans le repère  $\mathcal{R}_f$  a pour expression :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)[\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)] \quad (\text{I.3})$$

En prévision de l'étude dynamique du solide, il est nécessaire de définir la vitesse obtenue par dérivée temporelle du vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)[\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.4})$$

La dérivée temporelle de la matrice de rotation s'exprime sous la forme  $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\underline{\boldsymbol{\Omega}}$ , avec  $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$  une matrice antisymétrique contenant les composantes du vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$\underline{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

## 2.2 Formulation des équations du mouvement

La méthode présentée ici pour obtenir les équations du mouvement repose sur le principe variationnel d'Hamilton exprimant la stationnarité de l'énergie totale du système au cours du temps :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{W} - \mathcal{F}) dt = 0 \quad (\text{I.6})$$

Dans cette relation,  $\mathcal{T}$  désigne l'énergie cinétique du système,  $\mathcal{V}$  l'énergie potentielle de déformation et le potentiel des forces conservatives,  $\mathcal{W}$  le travail des forces extérieures et  $\mathcal{F}$  le travail des forces de dissipation. Dans la théorie des vibrations, il est fréquent de travailler avec la différence  $\mathcal{T} - \mathcal{V}$  notée  $\mathcal{L}$  et appelée *Lagrangien* ou *Fonction de Lagrange* du système. Dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_f$ , l'énergie cinétique a pour expression :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} d\Omega \quad (\text{I.7})$$

En remplaçant la vitesse  $\dot{\mathbf{y}}$  par son expression (I.4), l'énergie cinétique se réécrit sous une forme faisant apparaître les déplacements  $\mathbf{u}$  exprimés dans le repère mobile  $\mathcal{R}_m$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{u} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \underline{\underline{\Omega}}^T (\mathbf{R}\dot{\mathbf{s}} + \underline{\underline{\Omega}}\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{R}\dot{\mathbf{s}} + \underline{\underline{\Omega}}\mathbf{x}) d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + 2\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{R} \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Sous l'hypothèse de petites déformations, une relation simple existe entre le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et le gradient du déplacement de la particule  $\nabla \mathbf{u}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.9})$$

Sous cette condition et en notant  $\mathbf{C}$  le tenseur d'élasticité linéaire, l'énergie potentielle de déformation élastique s'exprime :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u}) d\Omega \quad (\text{I.10})$$

Le travail des forces volumiques  $\mathbf{f}_v$  et surfaciques  $\mathbf{f}_s$  externes a pour expression :

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s d(\partial\Omega) \quad (\text{I.11})$$

Enfin, dans le cadre d'un amortissement constitutif visqueux, de coefficient  $\eta$ , le travail des forces de dissipation prend la forme suivante :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T \mathbf{C} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (\text{I.12})$$

L'approche utilisée dans ce mémoire pour discrétiser les déplacements de la structure est basée sur une approximation de Rayleigh-Ritz. Les déplacements continus  $\mathbf{u}$  sont ainsi décomposés sous la forme de fonctions de l'espace  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  cinématiquement admissibles, appelées *fonctions de forme*, et de fonctions du temps  $\mathbf{q}(t)$  appelées *coordonnées généralisées* qui constituent les nouvelles inconnues du problème :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \quad (\text{I.13})$$

Le principe d'Hamilton tel qu'énoncé équation (I.6) revient alors à vérifier les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{I.14})$$

Après substitution des différents termes par leurs expressions données précédemment, les équations de Lagrange conduisent à l'équation du mouvement matricielle du système, exprimée dans le repère mobile  $\mathcal{R}_m$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{q} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (\text{I.15})$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{D}$  la matrice d'amortissement,  $\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{N}$  la matrice d'assouplissement centrifuge,  $\mathbf{P}$  la matrice d'accélération angulaire,  $\mathbf{f}$  le vecteur des excitations extérieures et  $\mathbf{r}$  le vecteur des excitations indirectes dues au mouvement du système de coordonnées  $\mathcal{R}_m$ . Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  sont symétriques définies positives, la matrice  $\mathbf{N}$  est symétrique définie négative et les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{P}$  sont antisymétriques. Leurs expressions en fonction des fonctions de forme  $\mathbf{H}$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, d\Omega \\ \mathbf{D} &= \int_{\Omega} \eta (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega \\ \mathbf{G} &= \int_{\Omega} 2\rho \mathbf{H}^T \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{H} \, d\Omega \\ \mathbf{K} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega \\ \mathbf{N} &= - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{H} \, d\Omega \\ \mathbf{P} &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \dot{\underline{\underline{\Omega}}} \mathbf{H} \, d\Omega \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_s \, d(\partial\Omega) \\ \mathbf{r} &= - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \left( \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\underline{\underline{\Omega}}} \mathbf{x} - \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{x} \right) \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Dans la suite de ce mémoire, l'ensemble des études sont réalisées à vitesse de rotation constante, ce qui conduit à l'annulation de la dérivée  $\dot{\underline{\underline{\Omega}}}$ . D'autre part, le mouvement du repère mobile se limite à un pur mouvement de rotation. Les origines  $O$  et  $O_1$  des repères  $\mathcal{R}_f$  et  $\mathcal{R}_m$  sont alors confondues, ce qui conduit à un vecteur de translation  $\mathbf{s}$  nul. Dans ces conditions, la matrice  $\mathbf{P}$  n'apparaît plus dans l'équation du mouvement et les excitations  $\mathbf{r}$  se limitent au terme statique suivant :

$$\mathbf{r} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{\Omega}} \mathbf{x} \, d\Omega \quad (\text{I.17})$$

Cet effort est responsable du raidissement centrifuge du système qui apparaît lors de sa mise en rotation. Ce phénomène peut être traduit dans l'équation du mouvement par une raideur de précharge statique  $\mathbf{K}_{\text{prec}}(\omega)$  directement dépendante de la vitesse de rotation  $\omega$ .

Dans le cas de l'étude des machines tournantes, la matrice gyroscopique correspond à la prise en compte des effets de Coriolis. Associés au raidissement et à l'assouplissement centrifuge, ces effets sont responsables de nombreux phénomènes caractéristiques des rotors.

### 3 Modélisation des roues aubagées

Les roues aubagées possèdent de par leur géométrie des propriétés dites de *symétrie cyclique*. Ces propriétés s'appliquent aux structures pouvant être partitionnées en un nombre fini de sous-structures identiques se refermant sur elles-mêmes. Chacune de ces sous-structures est appelée *secteur*. Comme représenté Figure I.6, une roue aubagée complète est ainsi obtenue par répétition de son secteur de référence autour d'un axe de révolution. Cette caractéristique géométrique peut être mathématiquement exploitée pour interpréter le comportement vibratoire de la structure et notamment optimiser le calcul des modes propres.

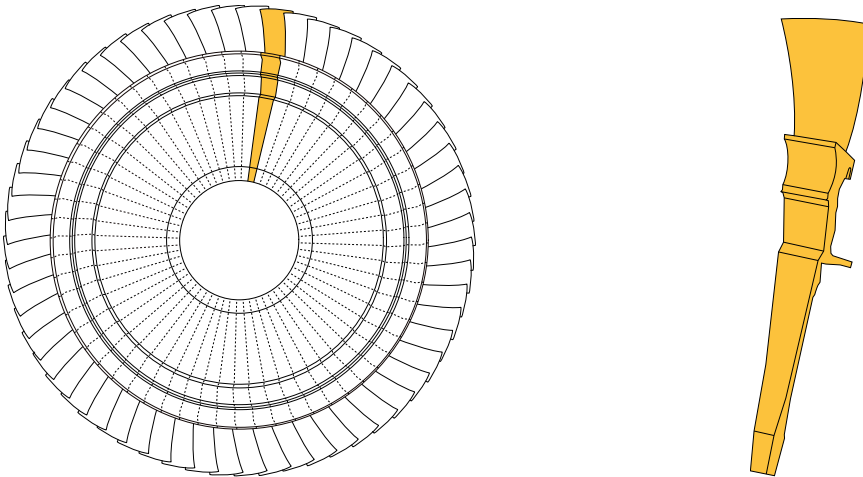


FIGURE I.6 – Schéma du secteur de référence d'une roue aubagée.

D'autre part, les roues aubagées étant des structures en rotation, la prise en compte ou non des effets liés à la vitesse (effets gyroscopiques, raidissement et assouplissement centrifuge) modifie certaines propriétés de leurs bases modales. Les différents cas pouvant être rencontrés et leurs conséquences sur la forme des bases modales sont présentés dans cette section.

#### 3.1 Propriétés des structures à symétrie cyclique

Lors de l'étude d'une structure à symétrie cyclique, le principe est de limiter la modélisation à un unique secteur auquel sont appliquées des conditions limites représentatives du type d'onde se propageant aux interfaces avec les secteurs adjacents. Il s'agit donc d'une analyse couplant les deux approches physique et ondulatoire et assurant la description exacte du comportement de la structure complète. Les développements liés à cette modélisation sont principalement issus des travaux de Thomas [9], Wildheim [10, 11] ou encore Henry [12].

##### 3.1.1 Définition des composantes cycliques

La structure à symétrie cyclique considérée est composée de  $N$  secteurs numérotés de 0 à  $N - 1$ . Ces secteurs sont spatialement déphasés de l'angle  $\alpha = 2\pi/N$ . L'axe de symétrie cyclique du système est supposé confondu avec son axe de rotation. Le champ de déplacement de la structure, noté  $\mathbf{u}$ , est généralement exprimé dans son repère tournant de façon à s'affranchir d'éventuels termes périodiques temporels. La restriction au secteur  $j$  de ce champ de déplacement

est notée  $\mathbf{u}_j$ , ce qui implique la relation suivante compte tenu des propriétés de périodicité :

$$\mathbf{u}_{j+N} = \mathbf{u}_j, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (\text{I.18})$$

Selon la théorie des groupes introduite par Valid et Ohayon [13], le champ de déplacement associé au secteur  $j$  peut être décrit comme une superposition d'harmoniques spatiales :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ijk\alpha} \bar{\mathbf{u}}_0^k \quad (\text{I.19})$$

L'amplitude  $\bar{\mathbf{u}}_0^k$  de chacune des fonctions harmoniques  $k$ , appelée *composante cyclique* d'ordre  $k$ , est définie sur le secteur de référence d'indice 0. De nature complexe, elle peut se décomposer en parties réelle et imaginaire :

$$\bar{\mathbf{u}}_0^k = \bar{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} + i\bar{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \quad (\text{I.20})$$

L'ensemble des amplitudes harmoniques  $\bar{\mathbf{u}}_0^k$  constitue une base appelée *base cyclique*. Cette base peut être obtenue à partir des déplacements physiques grâce à la relation :

$$\bar{\mathbf{u}}_0^k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j e^{-ijk\alpha} \quad (\text{I.21})$$

À noter que cette écriture en base cyclique peut également être appliquée aux autres champs du problème (pression, chargement, contraintes, déformations, ...).

Les relations (I.19) et (I.21) permettant de transiter entre les espaces physiques et cycliques, correspondent à des transformées de Fourier spatiales discrètes. Des expressions équivalentes existent dans le domaine des réels. Ainsi, en utilisant la décomposition en parties réelle et imaginaire (I.20) des composantes cycliques  $\bar{\mathbf{u}}_0^k$ , les déplacements réels  $\mathbf{u}_j$  ont pour expression :

$$\mathbf{u}_j = \bar{\mathbf{u}}_0^0 + \sum_{k=1}^{K_{\max}} \left( \bar{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \cos(jk\alpha) + \bar{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \sin(jk\alpha) \right) + (-1)^j \bar{\mathbf{u}}_0^{N/2} \quad (\text{I.22})$$

Le dernier terme de cette relation n'est présent que dans le cas où le nombre de secteurs  $N$  est pair. Cette parité conditionne également la valeur du paramètre  $K_{\max}$  :

$$K_{\max} = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

Les différentes composantes de la base cyclique réelle ont quant à elles pour expression :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_0^0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \\ \bar{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \cos(jk\alpha) \\ \bar{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \sin(jk\alpha) \\ \bar{\mathbf{u}}_0^{N/2} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \mathbf{u}_j \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$



Ici encore, la dernière relation n'existe que lorsque le nombre de secteurs  $N$  est pair. Finalement, le champ de déplacement physique complet de la structure est obtenu en juxtaposant les vecteurs de déplacement de chacun des secteurs :

$$\mathbf{u} = \left[ \mathbf{u}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_j \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{N-1} \right]^T \quad (\text{I.25})$$

De la même façon, la base cyclique complète regroupe l'ensemble des composantes cycliques exprimées sur le secteur de référence d'indice 0 en formalisme réel :

$$\bar{\mathbf{u}} = \left[ \bar{\mathbf{u}}_0^0 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \quad \bar{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{u}}_0^{N/2} \right]^T \quad (\text{I.26})$$

Avec ces notations, la relation (I.22) permettant la reconstruction des déplacements physiques à partir des composantes modales réelles s'exprime matriciellement par la relation :

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{u}} \quad (\text{I.27})$$

où  $\mathbf{F}$  est une matrice de transformée de Fourier discrète, d'expression :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cos \alpha & \sin \alpha & \cos 2\alpha & \cdots & \sin K_{\max}\alpha & -1 \\ 1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 4\alpha & \cdots & \sin 2K_{\max}\alpha & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(N-1)\alpha & \sin(N-1)\alpha & \cos(N-1)2\alpha & \cdots & \sin(N-1)K_{\max}\alpha & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.28})$$

La dernière colonne de cette matrice n'existe de nouveau que dans le cas où le nombre de secteurs  $N$  est pair. Cette matrice de transformée de Fourier peut également être exprimée en complexe, mais le formalisme réel est privilégié dans ce mémoire.

En résumé, l'ensemble des grandeurs physiques d'une structure à symétrie cyclique peuvent être décrites selon une base cyclique grâce à des composantes cycliques définies sur le secteur de référence et un indice d'harmonique  $k$ . Du point de vue des résultats, cette description est parfaitement équivalente aux expressions en base physique habituellement rencontrées. Elle s'avère en revanche bien plus pertinente en ce qui concerne la dimension du problème à résoudre. En effet, la formulation physique nécessite de considérer simultanément les inconnues de l'ensemble des secteurs de la roue, ce qui constitue un problème de dimension  $N$ . Dans le cas de la description en base cyclique, les inconnues sont exprimées sur un unique secteur de référence, et ce pour chaque harmonique spatiale  $k$ . Grâce aux propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, les expressions associées à chacune de ces harmoniques spatiales sont totalement décorrélées. Cette représentation revient donc à partitionner le comportement dynamique par type d'onde se propageant dans la structure. Le problème à résoudre est alors découpé en  $N$  sous-problèmes indépendants.

### 3.1.2 Formulation d'un problème en base cyclique

En considérant que la structure étudiée est modélisée par la méthode des éléments finis, il s'agit à présent d'exprimer les matrices structurelles du problème en base cyclique. Pour cela, la discrétisation doit être la même sur l'ensemble des secteurs de la structure. Le vecteur des

déplacements discrétisés  $\mathbf{u}$  s'exprime alors à partir de ses coordonnées cycliques  $\bar{\mathbf{u}}$  et de la matrice de transformée de Fourier discrète  $\mathbf{F}$  sous la forme :

$$\mathbf{u} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{I.29})$$

Le symbole  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker, et la matrice  $\mathbf{I}_n$  est la matrice identité de taille  $n$  avec  $n$  le nombre de degrés de liberté d'un secteur.

La construction matricielle du problème en base cyclique étant similaire pour l'ensemble des matrices structurelles, les développements suivants sont présentés pour une matrice  $\mathbf{A}$  pouvant par exemple correspondre à la matrice de masse ou de raideur de la structure cyclique. Par analogie avec la construction (I.25) du vecteur des déplacements physiques  $\mathbf{u}$ , la matrice  $\mathbf{A}$  est diagonale par bloc, constituée de la juxtaposition des sous-matrices associées à chacun des secteurs :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_j & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{I.30})$$

Dans le cas d'une structure cyclique, les secteurs sont supposés posséder les mêmes propriétés mécaniques. Dans ce cas, l'ensemble des sous-matrices  $\mathbf{A}_j$  sont identiques et peuvent donc s'exprimer à partir de celle du secteur 0 de référence :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}_0) \quad (\text{I.31})$$

À ce stade des développements, il est important de noter que les secteurs sont encore « disjoints », c'est-à-dire qu'ils sont traités indépendants de leurs secteurs adjacents. Les conditions aux limites permettant de les recoller afin de reconstruire le comportement dynamique de la structure complète seront introduites dans la section I.3.1.3. Au préalable, la matrice  $\mathbf{A}$  est exprimée en base cyclique à l'aide de la transformation de Fourier suivante :

$$\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}_0) (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \quad (\text{I.32})$$

Compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, la projection en base cyclique de la matrice  $\mathbf{A}$  conduit également à une matrice diagonale par bloc, chaque bloc traduisant les propriétés mécaniques associées à l'onde  $k$  considérée :

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}^0 & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}^k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}^{N/2} \end{pmatrix} \quad (\text{I.33})$$

Chacun de ces sous-blocs s'exprime très simplement sur le secteur de référence :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^0 &= \bar{\mathbf{A}}^{N/2} = N \mathbf{A}_0 \\ \bar{\mathbf{A}}^k &= \frac{N}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} \quad k = 1, \dots, K_{\max} \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

On retrouve dans la construction (I.33) de la matrice cyclique  $\bar{\mathbf{A}}$  une décomposition du problème général en sous-problèmes indépendants relatifs à l'ordre de l'harmonique  $k$  considérée. Il est intéressant de noter que la dimension du sous-problème, de taille  $n$  pour les harmoniques 0 et  $N/2$  lorsqu'elle existe, est doublée pour toutes les autres ondes se propageant dans la structure. Cette caractéristique sera étudiée dans la section I.3.1.4. Enfin, on remarquera que la matrice de transformée de Fourier n'intervient plus dans les expressions (I.34) des sous-blocs de la matrice  $\bar{\mathbf{A}}$  en base cyclique. Cette dernière s'obtient donc très facilement à partir de la matrice physique du secteur de référence.

### 3.1.3 Conditions aux limites cycliques

La dernière étape dans la formulation du problème en base cyclique consiste à prendre en compte les conditions aux limites assemblant les comportements vibratoires de deux secteurs adjacents. Il s'agit d'imposer un comportement dynamique commun aux deux surfaces en contact à l'interface entre deux secteurs. Les notations utilisées concernant les frontières inter-secteur sont explicitées Figure I.7.

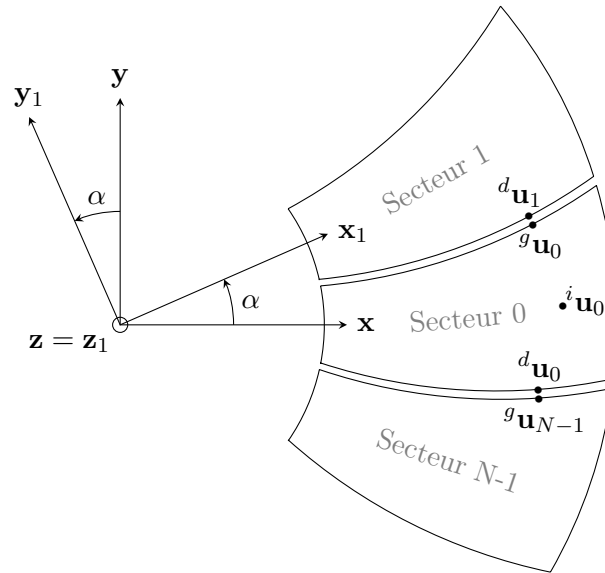


FIGURE I.7 – Notations pour les conditions aux frontières inter-secteur.

Pour chaque secteur, le vecteur des degrés de liberté peut être partitionné en trois groupes : les ddl de la frontière gauche, les ddl de la frontière droite et les ddl internes au secteur. Dans le cas du secteur 0, le vecteur obtenu est organisé comme suit :

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} g\mathbf{u}_0 & d\mathbf{u}_0 & i\mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

La continuité des grandeurs physiques à l'interface avec ses deux secteurs adjacents s'exprime :

$$\begin{aligned} g\mathbf{u}_0 &= d\mathbf{u}_1 \\ d\mathbf{u}_0 &= g\mathbf{u}_{N-1} \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

En remplaçant les déplacements physiques par leur formulation cyclique (I.19), ces conditions de

continuité s'expriment en base cyclique pour chaque harmonique  $k$  :

$$\begin{aligned} g_{\bar{\mathbf{u}}_0}^k &= d_{\bar{\mathbf{u}}_0}^k e^{ik\alpha} \\ d_{\bar{\mathbf{u}}_0}^k &= g_{\bar{\mathbf{u}}_0}^k e^{i(N-1)k\alpha} \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Dans cette formulation cyclique, les conditions aux limites (I.37) ne font plus intervenir les secteurs adjacents mais bien les frontières gauche et droite du secteur de référence. Ces deux relations étant parfaitement équivalentes compte tenu de la périodicité du système, la première est suffisante pour assurer la prise en compte de la propagation des ondes aux interfaces inter-secteur. Ce choix conduit à supprimer les ddl à gauche de la formulation du problème en base cyclique. Ces mêmes conditions aux limites peuvent être exprimées à l'aide d'un formalisme réel :

- Pour  $k = 0$  :

$$g_{\bar{\mathbf{u}}_0}^0 = d_{\bar{\mathbf{u}}_0}^0 \quad (\text{I.38})$$

- Pour  $k = 1, \dots, K_{\max}$  :

$$\begin{pmatrix} g_{\bar{\mathbf{u}}_0}^{k,\cos} \\ g_{\bar{\mathbf{u}}_0}^{k,\sin} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\alpha) & \sin(k\alpha) \\ -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_{\bar{\mathbf{u}}_0}^{k,\cos} \\ d_{\bar{\mathbf{u}}_0}^{k,\sin} \end{pmatrix} \quad (\text{I.39})$$

- Pour  $k = \frac{N}{2}$  :

$$g_{\bar{\mathbf{u}}_0}^{N/2} = -d_{\bar{\mathbf{u}}_0}^{N/2} \quad (\text{I.40})$$

L'application de ces conditions aux limites sur les matrices (I.33) des sous-problèmes fournit finalement les équations du système complet en base cyclique.

### 3.1.4 Calcul des modes propres en base cyclique

Le problème libre associé à la structure cyclique représentée Figure I.6 et modélisée par la méthode des éléments finis s'exprime dans le domaine physique par la relation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{I.41})$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse et raideur de la structure complète. Ce problème peut être reformulé en base cyclique en appliquant la transformée de Fourier discrète (I.32) puis en prenant en compte les conditions aux limites (I.38), (I.39) et (I.40) permettant d'assembler les secteurs. On obtient alors pour chaque harmonique  $k$  un sous-problème indépendant défini sur le secteur de référence :

$$\bar{\mathbf{M}}^k \ddot{\bar{\mathbf{u}}_0}^k + \bar{\mathbf{K}}^k \bar{\mathbf{u}}_0^k = \mathbf{0} \quad (\text{I.42})$$

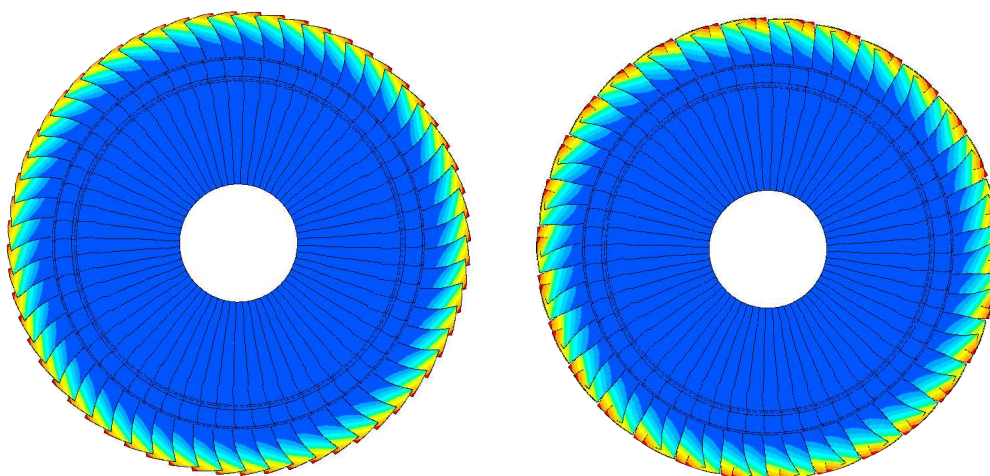
Dans ces conditions, l'analyse modale d'une structure à symétrie cyclique consiste en la résolution de  $K_{\max} + 1$  sous-problèmes aux valeurs propres  $(\lambda, \bar{\Phi}_0^k)$  définis sur le secteur de référence :

$$\left( \bar{\mathbf{K}}^k - \lambda^2 \bar{\mathbf{M}}^k \right) \bar{\Phi}_0^k = \mathbf{0} \quad (\text{I.43})$$

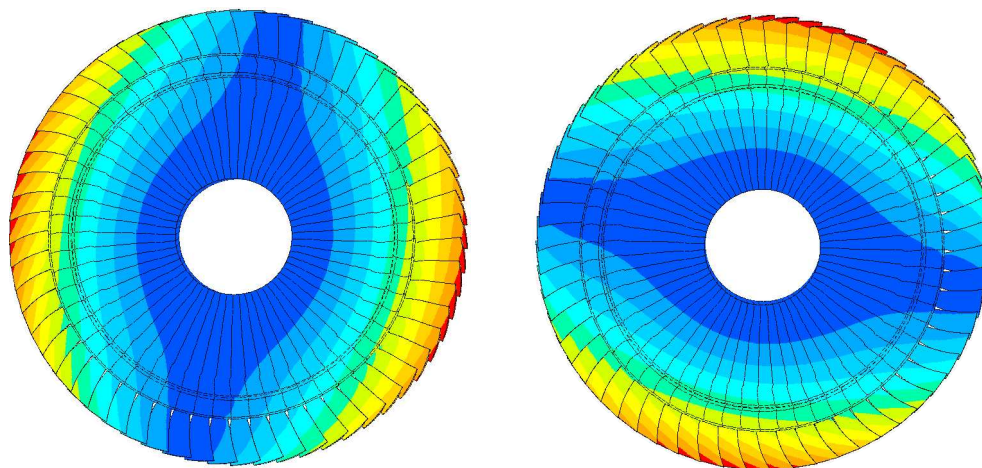
En plus d'optimiser les temps de calculs de la base modale complète, cette décomposition en sous-problèmes permet si besoin de limiter le calcul des modes propres à certaines harmoniques  $k$  en fonction des comportements vibratoires à étudier.

D'après la relation (I.34), le sous-problème aux valeurs propres est de dimension  $n$  pour les harmoniques  $k = 0$  et  $k = N/2$ , conduisant à des solutions dites *simples* ou *non-dégénérées*. Dans le cas des autres harmoniques  $1 < k < K_{\max}$ , la dimension du problème est doublée ce qui se traduit par la présence de  $2n$  solutions *dégénérées*. Chaque fréquence propre est alors associée à deux vecteurs propres orthogonaux : on parle de *modes doubles*. Cette notion est perdue dès que les effets gyroscopiques deviennent non-négligeables. Les deux modes adoptent alors des évolutions différentes, aussi bien en terme de fréquence qu'en terme de déformée.

À titre d'exemple, la Figure I.8 présente les déformées de deux modes simples et d'un mode double pour une roue aubagée possédant 60 secteurs. Les modes simples ont été tracés pour les harmoniques  $k = 0$  et  $k = N/2$ . Les pales vibrent alors respectivement en phase ou en opposition de phase vis-à-vis de leurs voisines immédiates.



(a) Déformées de deux modes simples d'harmoniques  $k = 0$  et  $k = N/2$ .



(b) Déformées orthogonales d'un mode double d'harmonique  $k = 1$ .

FIGURE I.8 – Déformées modales de deux modes simples et d'un mode double. Source : [14].

Les deux déformées orthogonales du mode double sont tracées pour un mode d'harmonique  $k = 1$ . Un axe de symétrie est visible dans la déformée de ce mode, appelé *diamètre nodal*. Cette caractéristique peut être étendue à l'ensemble des modes doubles, chaque déformée d'harmonique  $k$  présentant  $k$  diamètres de symétrie. La notion de *modes à diamètres* sera régulièrement employée dans ce mémoire.

Les vecteurs propres définis en base physique sur la structure complète sont reconstruits à partir des vecteurs propres cycliques  $\bar{\Phi}_0^k$  en appliquant la relation (I.29). En pratique, cette reconstruction peut s'opérer séparément pour chaque harmonique  $k$  grâce à une décomposition de la matrice de transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\Phi &= (\mathbf{F}^0 \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\Phi}_0^0 && \text{pour } k = 0 \\ \Phi &= (\mathbf{F}^k \otimes \mathbf{I}_n) \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_0^{k,\cos} \\ \bar{\Phi}_0^{k,\sin} \end{pmatrix} && \text{pour } k = 1, \dots, K_{\max} \\ \Phi &= (\mathbf{F}^{N/2} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\Phi}_0^{N/2} && \text{pour } k = \frac{N}{2}\end{aligned}\tag{I.44}$$

$$\text{avec : } \mathbf{F}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos jk\alpha & \sin jk\alpha \\ \vdots & \vdots \\ \cos(N-1)k\alpha & \sin(N-1)k\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^{N/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

### 3.2 Propriétés modales des structures en rotation

Les caractéristiques mathématiques et géométriques de la base modale d'une structure possédant des propriétés de symétrie cyclique viennent d'être présentées, notamment en ce qui concerne la définition des *modes à diamètres* et la distinction entre modes *simples* et *doubles*. Il s'agit à présent d'établir les particularités de cette base modale en fonction de la prise en compte d'un amortissement structurel et/ou des effets liés à la vitesse. Les notions de *modes à gauche* et *modes à droite* vont ainsi être introduites.

On considère une structure en rotation décrite par la méthode des éléments finis et possédant  $n$  ddl. Ses matrices de masse, raideur, amortissement, effets gyroscopiques et assouplissement centrifuge sont respectivement notées  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{N}$ . L'équation du mouvement libre associée a pour expression :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{G} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{u} = \mathbf{0}\tag{I.45}$$

Compte tenu de la présence des termes différentiels de degré 1, ce type d'équation est usuellement réécrit sous la forme d'un système d'état afin de simplifier l'étude du problème aux valeurs propres. Les propriétés des bases modales obtenues, notamment en ce qui concerne la relation entre les modes à gauche et les modes à droite, sont alors dépendantes des propriétés de symétrie des matrices du système d'état. Dans ces conditions, il est important de noter que les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{D}$ , associées au même terme différentiel et respectivement antisymétrique et symétrique, possèdent des propriétés de symétrie contraires. Trois cas distincts sont alors à traiter : le cas général tournant et amorti, le cas non-amorti où seuls les effets gyroscopiques sont pris en compte, et enfin le cas amorti négligeant les effets liés à la vitesse. Les développements de cette section sont principalement issus de l'ouvrage de Gmür [8].

### 3.2.1 Cas général

Pour déterminer un système d'état adapté au calcul des bases modales en présence des effets gyroscopiques, d'un amortissement et de l'assouplissement centrifuge, une première équation triviale est ajoutée à l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} + \mathbf{N})\dot{\mathbf{u}} &= (\mathbf{K} + \mathbf{N})\dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{G} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

Le système d'état retenu est alors de dimension  $2n$  :

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (\text{I.47})$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} + \mathbf{N} \\ -(\mathbf{K} + \mathbf{N}) & -(\mathbf{G} + \mathbf{D}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{I.48})$$

La matrice  $\mathbf{A}$ , appelée matrice de pseudo-raideur, ne présente aucune propriété de symétrie alors que la matrice de pseudo-masse  $\mathbf{B}$  est symétrique. Il est à noter que si le système ne présente pas de modes de corps rigide, les matrices  $\mathbf{K} + \mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  sont non-singulières. La matrice  $\mathbf{B}$  l'est donc également. En écrivant la solution générale du problème de départ (I.45) sous la forme modale exponentielle  $\mathbf{u} = \alpha e^{\lambda t} \boldsymbol{\varphi}$ , avec  $\lambda$  une valeur propre du système,  $\boldsymbol{\varphi}$  le vecteur propre associé et  $\alpha$  une amplitude de référence, la solution du système augmenté a pour expression :

$$\mathbf{U} = \alpha e^{\lambda t} \boldsymbol{\Phi} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \lambda \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{I.49})$$

Le vecteur propre augmenté  $\boldsymbol{\Phi}$  de dimension  $2n$  est constitué d'une moitié de coordonnées en déplacement correspondant au vecteur propre du système de départ, et d'une autre moitié de coordonnées en vitesse. Le problème aux valeurs propres généralisé pour le système augmenté s'écrit alors :

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad (\text{I.50})$$

L'ensemble des valeurs propres satisfaisant ce problème est constitué, pour des systèmes sous-amortis, de  $n$  paires d'éléments complexes conjugués  $\lambda_i = -\alpha_i + j\omega_i$  et  $\bar{\lambda}_i = -\alpha_i - j\omega_i$  où les paramètres  $\alpha_i$  et  $\omega_i$  sont respectivement les coefficients d'amortissement modaux et les pulsations propres du système. De la même façon, les vecteurs propres s'organisent en  $n$  couples de grandeurs complexes conjuguées  $\boldsymbol{\Phi}_i$  et  $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i$  de taille  $2n$ .

Compte tenu de l'absence de propriété de symétrie de la matrice augmentée  $\mathbf{A}$ , il est également nécessaire d'étudier les modes propres  $(\mu, \boldsymbol{\Psi})$  du système transposé :

$$(\mathbf{A}^T - \mu \mathbf{B}^T) \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \quad (\text{I.51})$$

Il est possible de montrer [8] que les valeurs propres  $\mu$  de ce second système sont identiques aux valeurs propres  $\lambda$  du système de départ, et que les vecteurs propres apparaissent également en  $n$  couples de grandeurs conjuguées  $\boldsymbol{\Psi}_i$  et  $\bar{\boldsymbol{\Psi}}_i$ . Pour caractériser ces vecteurs propres, le vecteur  $\boldsymbol{\Psi}$  associé à la valeur propre  $\lambda$  est séparé en ses moitiés supérieure et inférieure :

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{\text{sup}} \\ \boldsymbol{\psi}_{\text{inf}} \end{pmatrix} \quad (\text{I.52})$$

En détaillant les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  dans l'expression (I.51) selon leur définition (I.48), il vient les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} -\lambda(\mathbf{K} + \mathbf{N})^T \boldsymbol{\psi}_{\text{sup}} - (\mathbf{K} + \mathbf{N})^T \boldsymbol{\psi}_{\text{inf}} &= 0 \\ (\mathbf{K} + \mathbf{N})^T \boldsymbol{\psi}_{\text{sup}} - [(\mathbf{G} + \mathbf{D})^T + \lambda \mathbf{M}^T] \boldsymbol{\psi}_{\text{inf}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.53})$$

La matrice  $\mathbf{K} + \mathbf{N}$  étant supposée non singulière, la première relation donne  $\boldsymbol{\psi}_{\text{inf}} = -\lambda \boldsymbol{\psi}_{\text{sup}}$ , soit en notant  $\boldsymbol{\psi}_{\text{sup}} = \boldsymbol{\psi}$  :

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ -\lambda \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{I.54})$$

La construction obtenue est similaire à celle des vecteurs propres  $\boldsymbol{\Phi}$  à un signe « $-$ » près. D'autre part, en transposant l'équation (I.51), le problème aux valeurs propres devient :

$$\boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad (\text{I.55})$$

Cette relation rappelle le problème aux valeurs propres (I.50) avec simplement une position différente des vecteurs propres par rapport au bloc  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})$ . Ainsi, en raison de leur positionnement à gauche de ce bloc, les vecteurs propres  $\boldsymbol{\Psi}$  sont généralement appelés *vecteurs propres à gauche* alors que les vecteurs propres  $\boldsymbol{\Phi}$  sont appelés *vecteurs propres à droite*. Ils seront respectivement notés dans la suite  ${}^g \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Psi}$  et  ${}^d \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}$ . Les déplacements physiques de la structure peuvent alors être exprimés indifféremment à partir de ces deux bases duales.

Des propriétés de bi-orthogonalité peuvent être obtenues en utilisant ces deux bases modales [8]. En rangeant les vecteurs propres par paires de vecteurs complexes conjugués :

$$\begin{aligned} {}^g \boldsymbol{\Phi} &= [{}^g \boldsymbol{\Phi}_1, {}^g \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1, \dots, {}^g \boldsymbol{\Phi}_n, {}^g \bar{\boldsymbol{\Phi}}_n] \\ {}^d \boldsymbol{\Phi} &= [{}^d \boldsymbol{\Phi}_1, {}^d \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1, \dots, {}^d \boldsymbol{\Phi}_n, {}^d \bar{\boldsymbol{\Phi}}_n] \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

et en choisissant une norme adaptée par rapport à la matrice  $\mathbf{B}$ , ces propriétés de bi-orthogonalité sont les suivantes :

$$\begin{aligned} {}^g \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{B} {}^d \boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{I}_{2n} \\ {}^g \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{A} {}^d \boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{\Lambda} \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

où  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n)$  est une matrice diagonale appelée matrice spectrale et constituée des  $n$  paires de valeurs propres complexes conjuguées du système étudié.

Ce formalisme complexe, bien que souvent plus compact dans les développements analytiques, est généralement évité en prévision de l'utilisation d'algorithmes de résolution numérique. Il est alors nécessaire de mettre en place une formulation réelle, établie ici en utilisant le fait que les vecteurs propres et valeurs propres apparaissent par couples de complexes conjugués. L'information, contenue dans leurs parties réelle et imaginaire est alors présente deux fois. Ainsi, au lieu de conserver chaque couple de vecteurs propres, la base modale réelle à droite est constituée de l'alternance des parties réelle  ${}^d \mathbf{y}$  et imaginaire  ${}^d \mathbf{z}$  de ces couples. La matrice  ${}^d \mathbf{W}$  obtenue, appelée matrice pseudo-modale à droite, est également de dimension  $2n$  :

$$\begin{aligned} {}^d \boldsymbol{\Phi} &= [{}^d \boldsymbol{\Phi}_1, {}^d \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1, \dots, {}^d \boldsymbol{\Phi}_n, {}^d \bar{\boldsymbol{\Phi}}_n] \\ {}^d \mathbf{W} &= [{}^d \mathbf{y}_1, {}^d \mathbf{z}_1, \dots, {}^d \mathbf{y}_n, {}^d \mathbf{z}_n] \end{aligned} \quad \text{avec} \quad {}^d \boldsymbol{\Phi}_i = {}^d \mathbf{y}_i + j {}^d \mathbf{z}_i \quad (\text{I.58})$$



La même procédure est appliquée à la base à gauche en travaillant cette fois-ci avec le conjugué des vecteurs propres, de façon à obtenir des propriétés d'orthogonalité plus adaptées (*cf.* Annexe A) :

$$\begin{aligned} {}^g\Phi &= [{}^g\Phi_1, {}^g\bar{\Phi}_1, \dots, {}^g\Phi_n, {}^g\bar{\Phi}_n] \\ {}^g\mathbf{W} &= [{}^g\mathbf{y}_1, -{}^g\mathbf{z}_1, \dots, {}^g\mathbf{y}_n, -{}^g\mathbf{z}_n] \end{aligned} \quad \text{avec} \quad {}^g\Phi_i = {}^g\mathbf{y}_i + j {}^g\mathbf{z}_i \quad (\text{I.59})$$

En utilisant ce formalisme réel, les propriétés d'orthogonalité deviennent :

$$\begin{aligned} {}^g\mathbf{W}^T \mathbf{B}^d \mathbf{W} &= \mathbf{I}_{2n} \\ {}^g\mathbf{W}^T \mathbf{A}^d \mathbf{W} &= \Omega \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

avec  $\Omega$  une matrice diagonale par bloc nommée matrice pseudo-spectrale et contenant les pulsations propres et les coefficients d'amortissement modaux du système :

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & -\alpha_n & \omega_n \\ 0 & 0 & -\omega_n & -\alpha_n \end{pmatrix} \quad (\text{I.61})$$

En notant  $\mathbf{V}$  la moitié supérieure d'une matrice pseudo-modale  $\mathbf{W}$ , correspondant aux parties réelles et imaginaires des vecteurs propres du système de départ (I.45), les matrices  ${}^d\mathbf{W}$  et  ${}^g\mathbf{W}$  se décomposent sous la forme :

$${}^d\Phi = \begin{pmatrix} {}^d\varphi \\ {}^d\varphi\Lambda \end{pmatrix} \quad {}^d\mathbf{W} = \begin{pmatrix} {}^d\mathbf{V} \\ {}^d\mathbf{V}\Omega \end{pmatrix} \quad {}^g\Phi = \begin{pmatrix} {}^g\varphi \\ -{}^g\varphi\Lambda \end{pmatrix} \quad {}^g\mathbf{W} = \begin{pmatrix} {}^g\mathbf{V} \\ -{}^g\mathbf{V}\Omega^T \end{pmatrix} \quad (\text{I.62})$$

Comme dans le cas des bases modales complexes, les déplacements physiques de la structure s'expriment indifféremment à partir des matrices pseudo-modales à gauche ou à droite. Ainsi, pour les coordonnées modales à gauche et à droite notées  ${}^g\mathbf{q}$  et  ${}^d\mathbf{q}$ , un déplacement quelconque  $\mathbf{U}$  associé au système augmenté s'écrit des deux façons suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= {}^g\mathbf{W} {}^g\mathbf{q} \\ \mathbf{U} &= {}^d\mathbf{W} {}^d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{I.63})$$

Il est intéressant de noter que les mêmes coordonnées généralisées permettent de reconstruire les déplacements de la structure physique de départ en ne conservant que la moitié supérieure des matrices pseudo-modales et du vecteur  $\mathbf{U}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= {}^g\mathbf{V} {}^g\mathbf{q} \\ \mathbf{u} &= {}^d\mathbf{V} {}^d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

Finalement, en faisant le choix d'écrire les déplacements  $\mathbf{U}$  sur la base à droite  $\mathbf{U} = {}^d\mathbf{W} {}^d\mathbf{q}$ , la projection de l'équation (I.47) dans la base modale s'écrit :

$${}^g\mathbf{W}^T \mathbf{B}^d {}^d\mathbf{W} \dot{{}^d\mathbf{q}} - {}^g\mathbf{W}^T \mathbf{A}^d {}^d\mathbf{W} {}^d\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad {}^d\dot{\mathbf{q}} - \Omega^d \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{I.65})$$

La forme d'équation ainsi obtenue est très simplifiée et beaucoup plus facile à traiter que l'équation de départ (I.45). En effet, si les valeurs de la seule matrice du problème dépendent toujours du système étudié, sa structure est quant à elle invariante, de surcroît diagonale par bloc avec une organisation bien précise de chaque bloc.

### 3.2.2 Cas particulier d'un système tournant non-amorti

En fonction de la forme des matrices augmentées  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , il peut exister des propriétés particulières entre les bases modales à gauche et à droite. Pour un système non-amorti, c'est-à-dire pour lequel la matrice d'amortissement  $\mathbf{D}$  est nulle, l'antisymétrie de la matrice gyroscopique  $\mathbf{G}$  associée à la structure du système d'état retenu (I.47) confèrent à la matrice  $\mathbf{A}$  des propriétés d'antisymétrie. La matrice  $\mathbf{B}$  quant à elle ne change pas et est donc de nouveau symétrique. Le problème aux valeurs propres à gauche (I.51), permettant d'étudier les modes propres du système d'état transposé, devient alors :

$$(-\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})^g \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{I.66})$$

En l'absence d'amortissement, les valeurs propres sont imaginaires pures ce qui conduit à la relation  $\bar{\lambda} = -\lambda$ . Dans ces conditions, le problème devient :

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{B})^g \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{I.67})$$

Finalement, en tenant compte du fait que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont réelles, le conjugué de cette dernière relation conduit à la même forme d'équation que le problème aux valeurs propres à droite (I.50) :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})^g \bar{\Phi} = \mathbf{0} \quad (\text{I.68})$$

Il existe donc une relation particulière entre les bases modales à gauche et à droite d'un système tournant non-amorti :

$${}^g\Phi = {}^d\bar{\Phi} \quad (\text{I.69})$$

### 3.2.3 Cas particulier d'un système non-tournant amorti

Dans le cas où les effets gyroscopiques sont nuls, une autre forme de système d'état plus adaptée permet de construire des matrices augmentées toutes les deux symétriques :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{I.70})$$

Dans ce cas, le problème aux valeurs propres à gauche (I.51) s'écrit directement sous la même forme que le problème aux valeurs propres à droite (I.50) :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})^g \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{I.71})$$

Une relation d'égalité existe donc entre les bases modales à gauche et à droite d'un système non-tournant amorti :

$${}^g\Phi = {}^d\Phi \quad (\text{I.72})$$

## 3.3 Définition d'un amortissement modal

L'étude de la réponse forcée d'une structure nécessite généralement d'ajouter des termes d'amortissement aux caractéristiques de rigidité et de masse du modèle. Différentes modélisations existent pour établir la matrice d'amortissement. L'une des plus classiques consiste à construire

une matrice d'amortissement « global » appelé *amortissement de Rayleigh*, constituée d'une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur :

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (\text{I.73})$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont généralement déterminés expérimentalement à partir des coefficients d'amortissement  $\xi$  de deux modes propres. L'inconvénient de cette solution est que le réglage de l'amortissement n'est possible que pour une plage de modes limitée. Dans le cas d'une réponse modale très étalée, il est préférable d'établir un amortissement modal assurant un réglage séparé pour chaque mode. La construction de la matrice associée en base modale est alors directe :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \xi_1 \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_n \omega_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.74})$$

Il peut toutefois être nécessaire de déterminer la matrice d'amortissement en base physique, par exemple dans le cadre de calculs de validation. Cette transformation est possible à condition d'avoir accès à l'ensemble des modes propres de la structure. Dans le cas d'un système de grande dimension pour lequel la base modale est tronquée, une adaptation de la méthode doit être envisagée.

### 3.3.1 Cas d'une base modale complète

La méthode proposée consiste à calculer les modes propres de la structure à l'arrêt et sans amortissement, c'est-à-dire en ne tenant compte que des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ . Le problème aux valeurs propres à résoudre est alors de la forme  $(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0}$  avec  $\omega_i$  une valeur propre du problème et  $\boldsymbol{\varphi}_i$  le vecteur propre associé, orthonormé par rapport à la matrice de masse. En notant  $\xi_i$  le taux d'amortissement du mode  $i$ , l'objectif est d'établir une matrice d'amortissement  $\mathbf{D}$  vérifiant la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi} = [2\xi_i \omega_i] \quad (\text{I.75})$$

Il s'agit ici de l'expression de l'amortissement en base modale. Le retour en base physique s'opère en inversant la matrice des vecteurs propres  $\boldsymbol{\varphi}$ , ce qui est possible si la base est complète :

$$\mathbf{D} = (\boldsymbol{\varphi}^{-1})^T [2\xi_i \omega_i] \boldsymbol{\varphi}^{-1} \quad (\text{I.76})$$

Les taux d'amortissement modaux  $\xi_i$  peuvent ainsi être réglés séparément.

Dans le cas d'une structure à symétrie cyclique, il est souvent préférable de travailler en base cyclique de façon à alléger les calculs des modes propres ou les étapes de résolution. Le passage des vecteurs propres physiques  $\boldsymbol{\varphi}$  aux vecteurs cycliques  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$  se fait par l'intermédiaire d'une matrice de transformée de Fourier discrète notée  $\mathbf{F}$  :  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}\bar{\boldsymbol{\varphi}}$  (cf. section I.3.1). Il en est de même pour les matrices du problème et notamment celle d'amortissement, dont on détermine l'expression en base cyclique grâce à la relation :  $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}$ . Ainsi, en remplaçant  $\boldsymbol{\varphi}$  par son expression cyclique dans l'équation (I.76), il vient :

$$\mathbf{D} = (\mathbf{F}^{-1})^T (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1})^T [2\xi_i \omega_i] \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{I.77})$$

Ce qui donne finalement pour l'expression de l'amortissement en base cyclique :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}} &= \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^{-1})^T (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1})^T [2\xi_i \omega_i] \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \\ &= (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1})^T [2\xi_i \omega_i] \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}\end{aligned}\quad (\text{I.78})$$

Avec cette approche, l'amortissement peut être réglé séparément pour chaque mode, mais il est courant d'appliquer un coefficient d'amortissement commun, généralement compris entre 1% et 10%.

### 3.3.2 Cas d'une base modale tronquée

Lorsque le modèle éléments finis étudié est de grande taille, sa base modale est tronquée aux modes nécessaires à une représentation fidèle des phénomènes vibratoires à étudier. Dans ce cas, le passage en base modale entraîne une perte d'information qui ne permet plus de reconstruire la matrice d'amortissement physique aussi facilement. Il n'est en effet plus possible d'inverser la matrice des vecteurs propres  $\boldsymbol{\varphi}$ . D'autres méthodes existent cependant comme des méthodes de correction sous contrainte. L'approche proposée ici, issue de l'ouvrage de Friswell [15], est une méthode de correction directe d'une matrice initiale proportionnelle à la matrice de raideur. Elle se réalise en deux temps.

#### 1. Calcul de la matrice d'amortissement initiale $\mathbf{D}_{\text{init}} = \alpha \mathbf{K}$ :

Une première matrice d'amortissement  $\mathbf{D}_{\text{init}}$ , proportionnelle à la raideur du système, est établie pour servir de base à une procédure de correction ultérieure. Pour cela, les  $n$  premiers modes propres  $(\lambda_i, \boldsymbol{\Phi}_i)_{i=1, \dots, n}$  de la structure conservative sont calculés à partir des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ . Le paramètre de proportionnalité  $\alpha$  est ensuite réglé en fonction de l'amortissement modal  $\xi_{\frac{n}{2}}$  souhaité pour le mode numéro  $n/2$  de pulsation propre  $\omega_{\frac{n}{2}}$ , de façon à se placer à peu près au milieu de la bande de fréquence contenant les  $n$  premiers modes propres :

$$\boldsymbol{\Phi}_{\frac{n}{2}}^T \mathbf{D}_{\text{init}} \boldsymbol{\Phi}_{\frac{n}{2}} = \alpha \boldsymbol{\Phi}_{\frac{n}{2}}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_{\frac{n}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2\xi_{\frac{n}{2}} \omega_{\frac{n}{2}} = \alpha \omega_{\frac{n}{2}}^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2 \frac{\xi_{\frac{n}{2}}}{\omega_{\frac{n}{2}}} \quad (\text{I.79})$$

#### 2. Correction pour obtenir $\mathbf{D}_{\text{corrigé}}$ :

La matrice d'amortissement  $\mathbf{D}_{\text{init}}$  ainsi obtenue assure la maîtrise de l'amortissement d'un seul mode. Elle doit donc être corrigée de façon à régler l'amortissement des autres modes présents dans la base tronquée. Pour cela, la fonction de coût suivante est employée :

$$\left\| \mathbf{D}_{\text{init}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{D}_{\text{corrigé}} - \mathbf{D}_{\text{init}}) \mathbf{D}_{\text{init}}^{-\frac{1}{2}} \right\| \quad (\text{I.80})$$

avec une norme d'expression :

$$\| \| = \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{h,k=1}^n \left[ \mathbf{D}_{\text{init}}^{-\frac{1}{2}} \right]_{ih} ([\mathbf{D}_{\text{corrigé}}]_{hk} - [\mathbf{D}_{\text{init}}]_{hk}) \left[ \mathbf{D}_{\text{init}}^{-\frac{1}{2}} \right]_{kj} \right]^2 \quad (\text{I.81})$$

Deux contraintes sont imposées de façon à assurer la symétrie de la matrice finale et à fixer la valeur d'amortissement de tous les modes indépendamment :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\text{corrigé}}^T &= \mathbf{D}_{\text{corrigé}} \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D}_{\text{corrigé}} \boldsymbol{\Phi} &= [2\xi_i \omega_i]_{i=1, \dots, n}\end{aligned}\quad (\text{I.82})$$

L'association de la fonction de coût (I.80) et des contraintes (I.82) conduit finalement à l'expression de la matrice d'amortissement corrigée  $\mathbf{D}_{\text{corrigé}}$  :

$$\mathbf{D}_{\text{corrigé}} = \mathbf{D}_{\text{init}} + \mathbf{D}_{\text{init}} \Phi \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \left[ [2\xi_i \omega_i] - \tilde{\mathbf{D}} \right] \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \Phi^T \mathbf{D}_{\text{init}}$$

avec  $\tilde{\mathbf{D}} = \Phi^T \mathbf{D}_{\text{init}} \Phi$

La matrice ainsi obtenue respecte la propriété de symétrie imposée et est définie positive. Cette méthode est applicable aussi bien pour une structure complète que pour un seul secteur d'une structure à symétrie cyclique.

Dans le cas d'une roue aubagée, l'utilisation de la symétrie cyclique est préférable pour le calcul des modes propres de la structure dissipative. Toutefois, si des simulations en 360 (*i.e.* sur la structure complète) sont nécessaires notamment dans le cadre d'un calcul de validation, les matrices d'amortissement utilisées doivent être cohérentes de façon à ce que les différentes simulations soient comparables. Pour cela, la matrice d'amortissement physique  $\mathbf{D}_{360}$  est reconstruite à partir des matrices en base cyclique  $\bar{\mathbf{D}}_k$ , définies pour chaque diamètre  $k$ , et de la transformée de Fourier inverse  $\mathbf{F}^{-1}$  permettant de passer du domaine physique au cyclique :

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 \cos \alpha & 2 \cos 2\alpha & \dots & 2 \cos(N-1)\alpha \\ 0 & 2 \sin \alpha & 2 \sin 2\alpha & \dots & 2 \sin(N-1)\alpha \\ 2 & 2 \cos 2\alpha & 2 \cos 4\alpha & \dots & 2 \cos(N-1)2\alpha \\ 0 & 2 \sin 2\alpha & 2 \sin 4\alpha & \dots & 2 \sin(N-1)2\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2 \sin K_{\max}\alpha & 2 \sin 2K_{\max}\alpha & \dots & 2 \sin(N-1)K_{\max}\alpha \\ 1 & -1 & 1 & \dots & -1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2\pi}{N}$$

(I.83)

La dernière ligne de cette matrice n'est présente que dans le cas où le nombre de secteurs  $N$  est pair. En inversant la relation (I.32) qui permet d'exprimer une matrice en base cyclique à partir de son expression physique sur le secteur de référence, il est possible d'établir l'expression de la matrice d'amortissement physique à partir de sa forme cyclique :

$$\mathbf{D}_{360} = \mathbf{F}^{-1T} \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_0 & & & \mathbf{0} \\ & \bar{\mathbf{D}}_1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \bar{\mathbf{D}}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \quad (I.84)$$

Il aurait bien sûr été possible de calculer la matrice d'amortissement directement en 360 en appliquant l'approche par correction présentée au début de cette section. Cependant, la méthode de correction utilisée nécessite le calcul d'une base modale tronquée. Or rien n'assure que les modes propres retenus pour un calcul en 360 seront les mêmes que ceux calculés en symétrie cyclique. Les matrices d'amortissement obtenues ne seraient alors pas comparables et des écarts pourraient être observés dans les résultats.

## 4 Spécificités des structures bi-rotors

Il a été expliqué dans la section I.1.1 que les turboréacteurs possèdent fréquemment deux rotors coaxiaux dans le but d'augmenter leur puissance. Ces rotors sont maintenus en rotation par différents paliers, notamment fixés sur le stator. Comme représenté Figure I.9, il est parfois fait le choix, sur certaines architectures, d'utiliser un *palier inter-arbre* directement entre les deux rotors ce qui présente l'avantage d'un gain de poids notable.



FIGURE I.9 – Coupe schématisée d'un turboréacteur double-corps possédant un palier inter-arbre. Rotor basse pression (—), rotor haute pression (—), paliers (—), stator (—).

Ce palier constitue toutefois une liaison mécanique directe entre les deux arbres, permettant alors un transfert d'énergie entre les différents composants des deux structures en rotation. Les travaux de Gruin [14] ont ainsi mis en évidence, sur une architecture de ce type, une influence notable du balourd de l'arbre HP sur le comportement vibratoire des aubages d'une roue de l'arbre BP.

Dans ces conditions, les études de chaque roue aubagée séparément ainsi que des lignes d'arbre supportant de simples disques sans aubages ne sont plus suffisantes pour assurer une bonne compréhension du comportement vibratoire de ces structures bi-rotor. D'autre part, de par leur architecture, ces structures présentent généralement des excitations multi-fréquentielles qui peuvent en compliquer l'étude, notamment dans un cadre non-linéaire.

Le début de cette section présente donc les principales difficultés rencontrées lors de l'étude vibratoire de ce type d'architecture bi-rotor aubagées, en ce qui concerne la nature des excitations à traiter puis la mise en équation. Les méthodes de modélisation habituellement rencontrées ainsi que leurs limites respectives sont ensuite répertoriées, posant le cadre et les objectifs de l'étude proposée dans la suite de ce mémoire.

### 4.1 Excitations multi-fréquentielles

Une excitation est considérée multi-fréquentielle si son spectre possède au moins deux fréquences fondamentales non-commensurables, c'est-à-dire que leur quotient n'est pas un nombre rationnel :  $f_1$  et  $f_2$  non-commensurables si  $f_1/f_2 \notin \mathbb{Q}$ . Il faut être vigilant à ne pas confondre le terme « multi-fréquentiel » avec la notion de « multi-harmonique » qui désigne quant à elle plusieurs harmoniques de la même fréquence fondamentale  $f : (f, 2f, \dots, nf)$ .

#### 4.1.1 Origine des excitations multi-fréquentielles dans les architectures bi-rotor

Pour illustrer le cas des structures bi-rotor possédant un palier inter-arbre, on se limite à l'exemple des excitations aérodynamiques synchrones relativement simples à interpréter. Les

autres sources d'excitations conduisent majoritairement aux mêmes conclusions.

Les excitations aérodynamiques synchrones sont générées par les obstacles présents dans la veine de l'écoulement, à savoir les aubes des stators. Comme représenté Figure I.10, chaque obstacle génère un sillage dans l'écoulement qui perturbe le champ de pression appliqué au rotor en aval du stator.

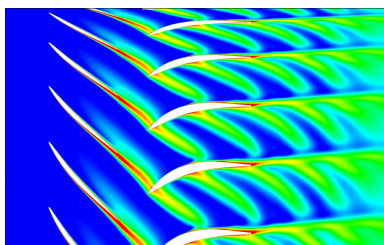


FIGURE I.10 – Champ de pression dans l'écoulement après passage d'un étage rotor/stator.

Source : [16].

La distribution circonférentielle de ce type d'excitation est proche d'un créneau, soit une composition fréquentielle relativement riche. Une représentation fidèle de l'excitation n'étant pas nécessaire pour une étude préliminaire du système bi-rotor, cette distribution spatiale sera assimilée à une sinusoïde dans l'ensemble des simulations de ce mémoire.

D'autre part, les stators étant des structures non-tournantes, ces excitations sont fixes dans le repère fixe. Elles deviennent tournantes lorsqu'on se place dans le repère mobile d'une roue aubagée en rotation. Ainsi, en aval d'un stator possédant  $n$  aubages, une pale fixée sur un rotor verra  $n$  sillages d'excitation durant une rotation complète. La fréquence d'excitation perçue, dans le repère de la roue mobile, est alors un multiple  $n$  de la vitesse de rotation  $\Omega$  de la roue :  $f_{\text{ext}} = n\Omega$ . Il s'agit bien d'une excitation synchrone.

Dans le cas d'un système bi-rotor, les efforts appliqués à l'un des rotors se transmettent au second par l'intermédiaire du palier inter-arbre, généralement un roulement. Si on se limite, sur chaque rotor, aux sillages d'un stator en amont d'une unique roue aubagée (*cf.* Figure I.11), alors le système bi-rotor présente deux fréquences d'excitations :  $f_1 = n_1\Omega_1$  pour la roue du premier rotor et  $f_2 = n_2\Omega_2$  pour la roue du second. *A priori*, il n'y a aucune raison pour que les vitesses de rotation des deux rotors possèdent une propriété de commensurabilité. Il s'agit donc bien d'une situation d'excitations multi-fréquentielles.

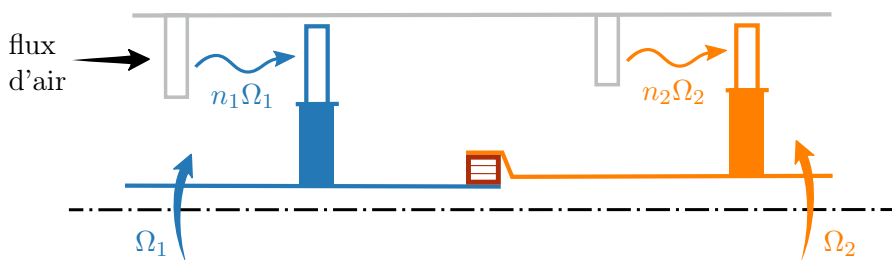


FIGURE I.11 – Schéma d'un bi-rotor soumis à deux excitations synchrones générées par les stators en amont des deux roues aubagées.

D'autres sources d'excitations multi-fréquentielles sont bien sûr envisageables, que ce soit via un transfert d'énergie au niveau du palier inter-arbre (par exemple des excitations par balourd) ou directement dans le spectre d'un effort aérodynamique complexe appliqué à une pale. Dans le cadre de ce mémoire, les simulations se limiteront toujours à des excitations synchrones.

#### 4.1.2 Conséquences pour une étude non-linéaire

La prise en compte d'une excitation multi-fréquentielle ne pose pas de difficulté particulière dans le cadre d'une étude linéaire, le principe de superposition permettant de simplement sommer les réponses forcées obtenues individuellement pour chaque fréquence d'excitation. La situation se complique lorsque la modélisation comporte des non-linéarités.

Lors de l'étude de la réponse forcée d'une structure, il est notamment possible de rechercher les solutions périodiques du régime permanent. Les méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel sont alors souvent bien plus adaptées que les méthodes de résolution temporelles. Parmi les méthodes fréquentielles, la méthode d'équilibrage harmonique, aussi appelée HBM pour l'anglais *Harmonic Balance Method*, est usuellement retenue pour les études non-linéaires appliquées aux turbomachines. Cette méthode, qui sera décrite plus en détail dans le Chapitre IV, est brièvement présentée ici de façon à comprendre les enjeux d'une résolution multi-fréquentielle.

Dans le cadre d'une excitation mono-fréquentielle de fréquence  $\omega$  appliquée à un système non-linéaire, le principe de la HBM est de rechercher une solution périodique  $\mathbf{x}$  sous la forme d'une somme d'harmoniques de la fréquence fondamentale d'excitation  $\omega$ . La solution  $\mathbf{x}$  se décompose alors en une série de Fourier :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) \quad (\text{I.85})$$

L'intérêt de cette écriture est de se ramener à de nouvelles inconnues  $\mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{b}_k$  indépendantes du temps. Le calcul d'une somme infinie étant numériquement impossible, la somme est tronquée à l'harmonique  $N_h$ . La dimension du problème à résoudre est alors de taille  $2N_h$ .

D'un point de vue mathématique, il est relativement simple de généraliser la HBM au cas d'une excitation multi-fréquentielle contenant deux fréquences non-commensurables  $\omega_1$  et  $\omega_2$  [17]. Cette généralisation est parfois qualifiée de méthode en *hypertemps* car elle fait intervenir une échelle temporelle différente pour chaque fréquence d'excitation impliquée. Dans ce cas, la solution périodique  $\mathbf{x}$  se décompose sur les harmoniques de la fréquence  $\omega_1$ , sur celles de la fréquence  $\omega_2$ , mais également sur toutes les combinaisons linéaires possibles de ces deux fréquences. Ceci se traduit par la présence d'une double somme dans l'expression harmonique de la solution :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \sum_{k_2 \in \mathbb{N}} \mathbf{a}_{k_1, k_2} \cos((k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t) + \mathbf{b}_{k_1, k_2} \sin((k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t) \quad (\text{I.86})$$

En conservant  $N_h$  harmoniques pour chacune des deux fréquences d'excitation, la dimension du problème à résoudre est alors élevée au carré. Pour une excitation contenant 3 fréquences non-commensurables, elle est élevée au cube, et ainsi de suite. La taille du système à résoudre peut donc rapidement exploser, notamment dans le cas de systèmes industriels possédant un grand nombre de ddl.

Pour contourner cette difficulté, diverses méthodes ont été développées, notamment dans le cas particulier où seules deux fréquences d'excitations non-commensurables coexistent dans le spectre



des efforts extérieurs. Dans le domaine de l'électronique, les signaux avec porteuse présentent deux fréquences très éloignées. Une approche multi-échelle est alors parfaitement adaptée [18]. Ce type d'approche a été repris pour l'étude de régimes quasi-périodiques par Schilder et *al.* [19], puis appliqué dans le cadre des machines tournantes par Laxalde [20] pour l'étude de la stabilité des solutions périodiques. Ces applications sont toutefois très spécifiques et peu adaptées au cas du système bi-rotor. Toujours dans le domaine des turbomachines, une seconde approche a été développée par Zhou et *al.* [21], spécifiquement pour les régimes quasi-périodiques générés par une excitation à deux fréquences : la VCHBM pour *Variable Coefficient Harmonic Balance Method*. Un formalisme complexe étant préférable pour expliquer cette méthode, la solution périodique est réécrite comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{k_1, k_2} e^{i(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2)t} \quad (\text{I.87})$$

Le principe est de rechercher la solution quasi-périodique sous la forme d'une série de Fourier dont les coefficients sont également périodiques temporels. Pour cela, les propriétés des fonctions trigonométriques sont utilisées pour séparer les contributions des deux fréquences d'excitation :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{k_1, k_2} e^{ik_2 \omega_2 t} \right) e^{ik_1 \omega_1 t} \quad (\text{I.88})$$

Il est ainsi possible de définir un nouveau coefficient  $\mathbf{u}_{k_1}(\omega_2, t)$ , dépendant du temps et fonction de la fréquence  $\omega_2$ , pour se ramener à une écriture classique de la HBM mono-fréquentielle appliquée à la fréquence  $\omega_1$  :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}_{k_1}(\omega_2, t) e^{ik_1 \omega_1 t} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_{k_1}(\omega_2, t) = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{k_1, k_2} e^{ik_2 \omega_2 t} \quad (\text{I.89})$$

Deux niveaux de résolution sont ainsi définis, sous la forme d'une « cascade » de bases harmoniques. La solution est donc obtenue en appliquant deux fois la procédure d'HBM. L'un des intérêts de cette méthode est de pouvoir s'appliquer dans le cas où l'une des deux fréquences d'excitation est inconnue. Cette approche serait tout à fait envisageable dans le cas du bi-rotor, à condition de se limiter à une unique excitation synchrone par rotor.

Enfin, une dernière approche basée sur l'association de la HBM à une transformée de Fourier quasi-périodique semble prometteuse pour le cas du bi-rotor. Initialement développée dans le domaine de l'électronique [22], elle a plus récemment été appliquée dans le domaine de la mécanique des fluides [23]. Plus générale car permettant de traiter plus de deux fréquences d'excitation, elle se concentre principalement sur l'étape de transition entre les domaines temporel et fréquentiel. Cette étape, appelée AFT pour *Alternating Frequency Time*, est nécessaire pour l'évaluation des efforts non-linéaires ne pouvant pas être directement exprimés en fréquentiel. À chaque pas d'itération de la résolution, la solution est calculée pour un échantillon d'instant temporels sur une période grâce à une transformée de Fourier discrète inverse. Les efforts non-linéaires sont ensuite évalués en chacun de ces instants, puis exprimés dans le domaine fréquentiel par une transformée de Fourier directe. Généralement, le pas entre deux instants temporels est pris uniforme sur tout l'échantillon. Son choix est alors essentiel : un pas de temps trop grand ne permet pas de correctement détecter l'ensemble du contenu fréquentiel, mais un pas trop faible génère une augmentation des temps de calcul et de la place mémoire nécessaire. Cette nouvelle approche

propose d'établir un échantillon temporel non-uniforme de taille minimale adapté aux fréquences mises en jeu. L'objectif est d'assurer la détection de l'ensemble des phénomènes fréquentiels en limitant au maximum les temps de calcul de l'étape d'AFT. Si son efficacité est avérée, cette méthode serait particulièrement intéressante pour l'étude de deux fréquences très éloignées. En effet, avec un échantillonnage temporel uniforme, la fréquence la plus faible impose une période de temps importante à couvrir par l'échantillon, alors que la fréquence la plus élevée impose un pas de temps faible. Il en résulte un échantillon de grande taille entraînant des temps de calculs élevés. L'utilisation d'un échantillon non-uniforme pourrait limiter ce problème.

Dans le cadre de ce mémoire, la situation multi-fréquentielle ne sera traitée que dans un cas linéaire. Les développements proposés quant à la mise en équation du système bi-rotor seront bien testés dans un cadre non-linéaire mais purement mono-fréquentiel. Pour respecter cette condition, une unique excitation synchrone ainsi qu'un unique effort non-linéaire seront appliqués à la même roue aubagée. Le second rotor ne pourra donc être excité que par l'intermédiaire du roulement.

Cette restriction donne malgré tout accès à un certain nombre de phénomènes vibratoires du système bi-rotor. Elle permet en outre de valider les différents développements en situation non-linéaire, sans nécessiter la mise en place de méthodes de résolution complexes et coûteuses. Celles-ci pourront faire l'objet de travaux futurs afin d'approfondir la compréhension du comportement dynamique du système bi-rotor dans un contexte plus général.

## 4.2 Problématique du repère d'étude

Le choix du repère d'étude d'un système en rotation est primordial pour s'affranchir d'éventuels coefficients périodiques temporels dans les équations du mouvement. La présence de tels coefficients ne permet notamment plus d'appliquer les méthodes classiques de calcul des modes propres ou de résolutions fréquentielles. Ils peuvent donc fortement complexifier l'étude de la dynamique du système. Si le cas d'une structure seule est relativement simple à traiter, la prise en compte simultanée de deux structures co-axiales couplées et tournant à des vitesses différentes s'avère bien plus délicate. Ces deux situations mono- et bi-rotor sont présentées dans cette section.

### 4.2.1 Choix du repère pour une structure seule en rotation

Le choix du repère d'étude – généralement fixe ou tournant – d'un système en rotation présente un véritable enjeu dès lors que la structure ne possède pas de caractéristique d'axisymétrie. Il est ainsi préférable de choisir un repère dans lequel les propriétés d'asymétrie sont fixes de façon à prévenir l'apparition de coefficients temporels dans les matrices du problème [24]. Ces termes temporels sont généralement liés à la vitesse de rotation de la structure.

Dans le domaine des machines tournantes, les roues aubagées constituent des structures non-axisymétriques en raison de la présence d'aubages périodiquement fixés sur la circonférence du disque. Dans ces conditions, un rotor comportant des roues aubagées est habituellement décrit dans un repère mobile qui lui est lié (*cf.* Figure I.12). De cette façon, la structure est fixe et les matrices structurelles telles que les matrices de masse ou de raideur sont constantes.

À l'inverse, l'étude d'une roue mobile dans le repère fixe entraîne l'apparition de termes temporels dans les matrices structurelles liés au passage périodique des aubages : ces coefficients

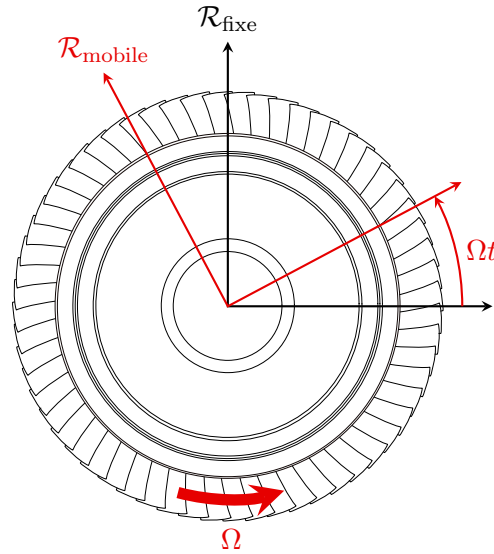


FIGURE I.12 – Choix du repère mobile pour l'étude d'une roue aubagée tournant à la vitesse  $\Omega$ .

sont donc proportionnels à la vitesse de rotation de la roue. Pour les mêmes raisons, un stator est généralement décrit dans le repère fixe.

#### 4.2.2 Cas d'une structure bi-rotor

La situation se complique dans le cas de l'étude couplée de deux rotors aubagés co-axiaux tournant à des vitesses  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  distinctes. Comme expliqué précédemment, il est préférable de décrire chaque rotor dans son propre repère mobile. Les deux structures sont alors exprimées dans des repères différents.

Dans ces conditions, la difficulté est localisée au niveau du couplage entre les deux rotors, soit dans la modélisation du palier inter-arbre. Pour une technologie de type roulement constituée de deux bagues et de billes (ou rouleaux), chaque bague est fixée sur l'un des rotors. Par conséquent, le calcul du transfert d'énergie s'opérant entre ces deux bagues par l'intermédiaire des billes nécessite de tenir compte d'un changement de repère, entre deux repères tournant à des vitesses différentes autour du même axe (*cf.* Figure I.13). Il en résulte la génération de termes périodiques temporels dans l'équation du mouvement du bi-rotor, de fréquence proportionnelle à la différence de vitesse de rotation des deux bagues du roulement.

Ce constat, déjà problématique en linéaire, l'est également en non-linéaire pour l'application d'une méthode de résolution de type HBM. En effet, dans le cas d'une excitation synchrone de chaque rotor, les coefficients périodiques introduisent dans le problème à résoudre la fréquence supplémentaire  $\Omega_2 - \Omega_1$ , différente des deux fréquences d'excitation  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Dans ces conditions, rien ne permet d'assurer que le spectre de la réponse correspondra aux seules fréquences et harmoniques de l'excitation, la fréquence  $\Omega_2 - \Omega_1$  des coefficients périodiques pouvant également être présente.

Aucun des trois principaux repères d'un système bi-rotor, à savoir le repère fixe  $\mathcal{R}_f$  et les deux repères mobiles  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , ne semblent donc parfaitement adaptés pour décrire le comportement vibratoire de la structure. La stratégie adoptée pour les développements de ce mémoire sera présentée dans la section I.4.3.2.

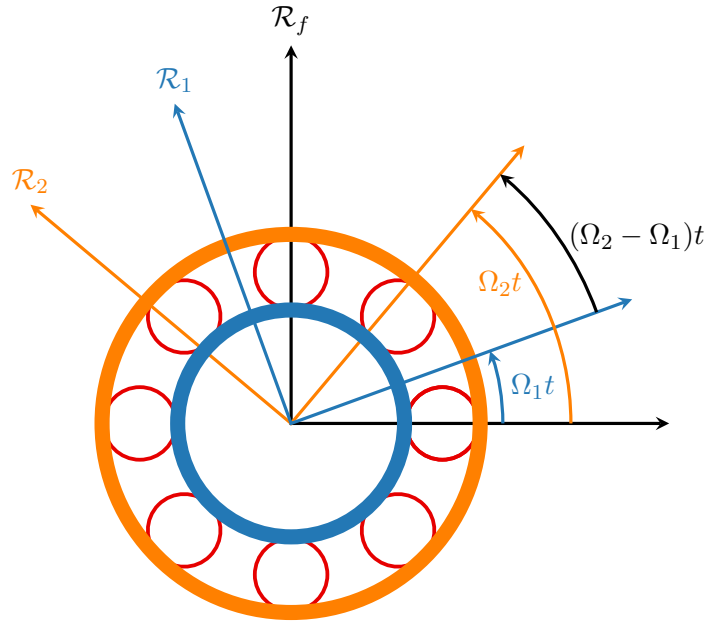


FIGURE I.13 – Schéma des repères mobiles liés à chaque bague du roulement inter-arbre.

### 4.3 Solutions usuelles et modélisation retenue

#### 4.3.1 État de l'art pour des structures bi-rotor

L'étude de la dynamique couplée de deux rotors est indispensable pour l'optimisation de la conception mécanique des turboréacteurs double-corps. Elle nécessite en premier lieu une bonne compréhension de la dynamique vibratoire d'un rotor seul, qui présente une phénoménologie caractéristique relativement riche. La bibliographie sur ce sujet étant très vaste, nous pourrions retenir quelques ouvrages de référence [25, 26, 27, 28]. Les modélisations étudiées s'appliquent notamment pour des études de ligne d'arbre. Celles-ci recherchent principalement à caractériser les déformées en flexion ou en torsion de l'arbre, en fonction des positions, masses et inerties des roues aubagées qu'il supporte ainsi que des positions et caractéristiques de ses paliers [29]. Dans ce cas, c'est la dynamique d'ensemble du rotor qui est analysée, le comportement des aubages n'étant pas pris en compte. Chaque roue aubagée est alors modélisée par un simple disque équivalent.

Dans ces conditions, la structure redevient axisymétrique ce qui supprime les difficultés liées au choix du repère. L'étude d'un système bi-rotor est alors envisageable, aussi bien en linéaire [28] que dans des configurations plus complexes nécessitant la mise en place d'une résolution HBM. Il est par exemple possible de tenir compte d'un jeu radial dans le roulement inter-arbre [30] ou de la présence d'une fissure sur l'un des rotors [31].

Bien que cette modélisation simplifiée des roues fournisse des informations précieuses pour le dimensionnement de l'arbre, elle ne permet pas d'étudier l'influence d'un couplage bi-rotor sur la dynamique des aubages. Des résultats d'essais expérimentaux montrent pourtant qu'il est nécessaire de tenir compte de ces phénomènes dès la conception du moteur. Les travaux de Gruin [14] se sont ainsi intéressés à l'étude d'une structure bi-rotor dont l'un des disques est aubagé. Il a alors été mis en évidence, sur une modélisation de turboréacteur possédant un palier inter-arbre, un phénomène de couplage entre l'excitation par balourd de l'arbre haute pression et la dynamique vibratoire des aubages de l'arbre basse pression. La méthode développée permet

notamment de tenir compte des non-linéarités de type jeu radial avec contact au niveau du palier. Toutefois, le choix du repère est de nouveau facilité puisqu'une seule des roues du modèle, située sur le rotor basse pression, possède des aubages. L'asymétrie de cette roue impose simplement d'utiliser le repère mobile lié à l'arbre basse pression pour décrire la dynamique de l'ensemble du système bi-rotor.

Aucune étude n'a été trouvée concernant la dynamique d'un système bi-rotor possédant des aubages sur les deux arbres. Certains travaux réalisés dans des configurations voisines peuvent toutefois s'avérer pertinents pour cette étude. C'est notamment le cas des modélisations multi-étages nécessaires pour la modélisation d'un module compresseur ou turbine complet. Le rotor possède alors plusieurs roues aubagées couplées tournant à la même vitesse, mais possédant un nombre de secteurs différent. Une modélisation par symétrie cyclique classique, assurant une réduction de la dimension du problème, n'est alors plus directement possible puisque les secteurs des différentes roues ne sont pas concomitants. Une solution proposée [32, 33], utilisant l'écriture en symétrie cyclique, consiste à exprimer le couplage inter-étage à partir d'une équation de compatibilité définie dans une base physique commune aux deux étages adjacents. Les échanges d'énergie entre les bases cycliques de ces deux étages sont alors limités aux nombres d'onde équivalents. Bien que ce type de système n'intègre pas les difficultés liées au choix du repère d'étude et à la création de coefficients périodiques dans l'équation du mouvement, il traite malgré tout d'une propagation d'onde à l'interface entre deux roues aubagées. Une notion similaire de compatibilité à l'interface sera retrouvée dans les développements associés au cas du bi-rotor et présentés dans ce mémoire.

Enfin, dans un autre domaine d'applications, les travaux de Salvat et *al.* [34] s'avèrent particulièrement intéressants pour la modélisation d'un système bi-rotor aubagé. Cette étude s'intéresse au couplage rotor/stator notamment engendré par un palier maintenant l'arbre aubagé en rotation par rapport au carter. Les auteurs proposent une technique de projection de l'équation du mouvement écrite en base modale dans un repère en rotation à la vitesse moitié de celle du rotor. Les coefficients périodiques liés à la rotation de l'arbre, le carter étant fixe, sont ainsi supprimés. Bien que ce système ne fait intervenir la rotation que d'une unique structure, la présence de coefficients périodiques dans son équation du mouvement le rend tout à fait pertinent pour une adaptation au cas d'un bi-rotor.

### 4.3.2 Stratégie adoptée et principaux objectifs

Compte tenu de l'absence d'alternative efficace dans la littérature, nous avons décidé de conserver, dans le cadre de l'étude du système bi-rotor aubagé, une description de chaque rotor dans son propre repère mobile. Comme expliqué dans la section I.4.2.2, il découle de ce choix la création de coefficients temporels périodiques dans les termes de couplages introduits par la présence du roulement.

Il pourrait être envisageable de traiter ces termes de couplage comme une excitation non-linéaire, évaluée par une procédure d'AFT lors d'une résolution de type HBM. Toutefois, ceci implique une absence totale de couplage entre les deux structures dans la partie linéaire de l'équation, laissant présager des difficultés de convergence lors de la résolution. De plus, compte tenu de la lourdeur d'une résolution HBM et de son coût numérique, il est si possible préférable

de l'éviter, d'autant plus lorsque le système étudié est linéaire.

En se basant sur les travaux de Salvat et *al.* [34], l'objectif principal est donc de déterminer une projection de l'équation du mouvement assurant la suppression des coefficients temporels des termes de couplage, sans en créer par ailleurs dans les matrices structurelles des deux rotors. La méthode développée doit être adaptée au cas d'une structure industrielle de grande taille ainsi qu'à une résolution en présence de non-linéarités.

Deux différences principales avec le cas traité par Salvat et *al.* vont nécessiter des adaptations. La première concerne le remplacement du carter par un rotor, et donc la prise en compte de deux vitesses de rotation distinctes. La seconde concerne le champ d'application de la méthode : les auteurs se limitent dans leur modélisation au premier mode à un diamètre de la roue aubagée et du carter, ainsi qu'à un mode de suspension modélisant la déformée en flexion de l'arbre. Nous souhaitons étendre la méthode à la prise en compte de plusieurs modes et de plusieurs diamètres de chaque structure simultanément.

## 5 Conclusion

Ce chapitre d'introduction a posé le cadre de l'étude du système bi-rotor aubagé couplé ainsi que les bases théoriques nécessaires à la compréhension des développements présentés dans la suite de ce mémoire. Compte tenu des problématiques liées à l'architecture d'un système bi-rotor avec palier inter-arbre, et suite à l'étude des solutions proposées dans l'état de l'art, plusieurs choix ont été établis pour la modélisation du système.

Chaque rotor sera décrit dans son propre repère mobile, générant des coefficients temporels dans les termes de couplage liés à la présence du roulement. Les propriétés de symétrie cyclique des deux structures seront utilisées pour optimiser le calcul de leurs modes propres. Afin de rester dans un cadre le plus général possible, les effets liés à la vitesse (effets gyroscopiques, raidissement et assouplissement centrifuge) ainsi qu'un amortissement modal seront pris en compte, nécessitant des dispositions particulières pour le calcul des modes propres.

L'objectif est de déterminer une projection de l'équation du mouvement du bi-rotor assurant la suppression de l'ensemble des coefficients périodiques temporels. Cette méthode doit être compatible avec une résolution linéaire mais également non-linéaire de type HBM.

Chaque roue aubagée sera soumise à une excitation de type synchrone, de répartition spatiale sinusoïdale, fixe dans le repère fixe. Pour simplifier l'étude non-linéaire, le caractère multi-fréquentiel de l'excitation du bi-rotor ne sera pris en compte que pour les simulations linéaires. Pour les simulations non-linéaires, les efforts d'excitation et de frottement ne seront appliqués qu'à l'une des deux roues aubagées, de façon à rester dans le cadre d'une résolution par HBM mono-fréquentielle.



## Chapitre II

# Mise en équation d'un bi-rotor aubagé linéaire

*Ce chapitre présente une nouvelle méthode de projection de l'équation du mouvement d'un système bi-rotor aubagé assurant la suppression des termes temporels liés à la différence de vitesse des deux structures. Basée sur une projection dans de nouveaux repères, établie grâce à l'analyse des déformées modales de chaque rotor au niveau du roulement, elle permet d'obtenir une équation à coefficients constants pour laquelle la résolution fréquentielle dans un cadre linéaire est immédiate. Cette méthode est validée dans le cadre d'un modèle éléments finis d'anneaux, dont le faible nombre de ddl et la simplicité assurent des temps de calculs raisonnables et une compréhension facilitée des phénomènes.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation du système étudié . . . . .</b>	<b>44</b>
1.1	Modélisation des rotors et du roulement . . . . .	44
1.2	Équation du mouvement du système bi-rotor . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Construction du modèle pour une roue aubagée isolée . . . . .</b>	<b>46</b>
2.1	Transformations des bases modales . . . . .	47
2.2	Décomposition des déformées modales en harmoniques spatiales au niveau du roulement . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Étude du système couplé . . . . .</b>	<b>60</b>
3.1	Expression des termes de couplage . . . . .	61
3.2	Projection dans des repères intermédiaires . . . . .	64
3.3	Résolution fréquentielle de l'équation à coefficients constants . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Validations sur un modèle bi-anneau . . . . .</b>	<b>75</b>
4.1	Définition de l'élément poutre courbe . . . . .	75
4.2	Paramétrage de la décomposition spatiale des vecteurs propres dans la zone du roulement . . . . .	77
4.3	Simulations numériques temporelles et fréquentielles . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>83</b>

---



## 1 Présentation du système étudié

### 1.1 Modélisation des rotors et du roulement

Le système étudié, représenté Figure II.1, est constitué de deux roues aubagées couplées par un roulement et tournant aux vitesses constantes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  distinctes. Il s'agit d'un modèle simplifié n'incluant pas les effets de dynamique de ligne d'arbre. Contrairement aux modélisations souvent rencontrées dans la littérature, assimilant une roue aubagée à un simple disque, les aubages sont ici pris en compte ce qui confère des propriétés de symétrie cyclique aux deux rotors. Les repères  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont les repères mobiles associés à chacune des deux roues et le repère  $\mathcal{R}_f$  est un repère fixe.

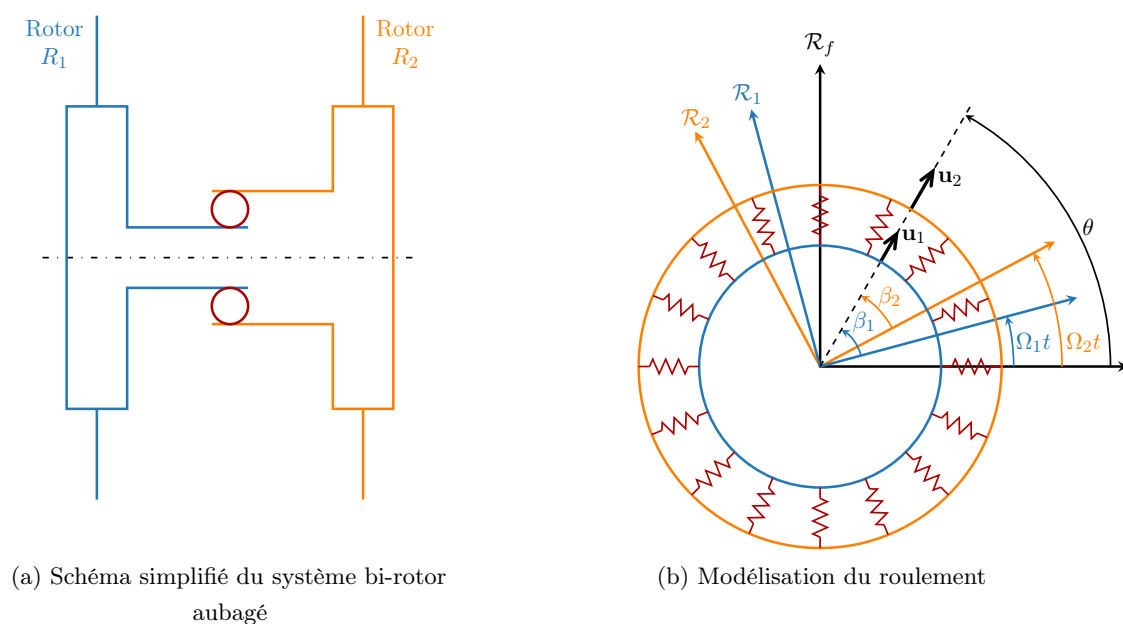


FIGURE II.1 – Système bi-rotor étudié

Différentes modélisations de roulement sont proposées dans la littérature. Le modèle le plus ancien et le plus simple consiste à ne prendre en compte que deux degrés de liberté en déplacement dans le plan transverse à l'arbre supporté par le roulement. Il s'agit d'une modélisation sous la forme de deux raideurs, généralement dans les directions « verticale » et « horizontale », pouvant être de valeurs différentes notamment lorsque l'effet de la pesanteur est non-négligeable. Ce modèle peut être complexifié pour tenir compte des jeux dans les roulements [35] ou de l'influence des corps roulants provenant d'une raideur de roulement non-uniforme selon sa circonférence [36]. Ce type de modélisation est classiquement utilisée pour les études de réponses à balourd d'un rotor [37], notamment nécessaires dans le domaine des turbomachines. Des modèles plus complexes à 5 ddl [38] permettent la prise en compte des efforts transmis axialement par le roulement ainsi que des deux rotations autour des axes orthogonaux à l'axe de rotation. Leur relative complexité les rend toutefois difficilement applicables pour des études de rotors à grand nombre de ddl. Dans le cas d'un roulement à rouleaux pour lequel aucun effort axial n'est transmis, une modélisation à 4 ddl peut être envisagée. Ce type de modèle a notamment été utilisé par Guskov [30] pour simuler un palier inter-arbre. Enfin, des modèles plus complexes de roulements à billes ont pu être

développés pour certaines applications précises. Tadina et Boltežar [39] ont par exemple proposé un modèle couplant une modélisation 2 ddl de la bague intérieure avec une description éléments finis de la bague extérieure, destiné à étudier les déformations radiales de la bague extérieure pendant les phases de montée en régime.

Dans le cadre de ce mémoire, le palier inter-arbre du bi-rotor est décrit sur le principe de la méthode proposée par Salvat et *al.* [34]. La dynamique des billes est ainsi modélisée par un continuum de raideurs constantes sur toute la circonférence du roulement. Une éventuelle dissymétrie dans la raideur du roulement, notamment liée au poids du rotor central, ne peut donc pas être représentée par ce modèle. Les raideurs sont modélisées dans les trois directions de façon à permettre une transmission de vibrations la plus générale possible. Leur densité de raideur est notée  $\boldsymbol{\kappa}$  :

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

La composante orthoradiale  $\kappa_y$  est généralement nulle puisqu'il s'agit de la direction de déplacement des billes ou des rouleaux. Les composantes radiale  $\kappa_x$  et axiale  $\kappa_z$  dépendent de la configuration étudiée. Les bagues du roulement, dont les déformations sont supposées retranscrire fidèlement les déformées de chacun des deux arbres, ne sont pas physiquement présentes car confondues avec l'arbre sur lequel elles sont fixées. Sur chaque rotor, les raideurs sont ainsi placées suivant une ligne circulaire représentant la trajectoire des points de contact des billes. Dans la suite, ces cercles seront nommés **frontière** ou **zone de fixation du roulement**. L'intérêt de cette modélisation « continue » du couplage entre les deux rotors est d'assurer une bonne transmission des ondes à l'interface entre les deux structures, sans risque de filtrage. Tous les nombres d'onde  $k$  peuvent ainsi être traités.

## 1.2 Équation du mouvement du système bi-rotor

Les deux roues aubagées sont modélisées par la méthode des éléments finis. Pour une roue donnée, on note respectivement  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{N}$  ses matrices masse, raideur, amortissement, gyroscopique et assouplissement centrifuge exprimées dans son repère mobile, et  $\mathbf{u}$  ses déplacements physiques. Les termes d'accélération centrifuge ne sont pas pris en compte car le mouvement étudié est supposé être de rotation uniforme. L'équation du mouvement associée à la structure couplée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 + \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 + \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 + \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c1,1} & \mathbf{K}_{c1,2} \\ \mathbf{K}_{c2,1} & \mathbf{K}_{c2,2} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext},1} \\ \mathbf{f}_{\text{ext},2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2})$$

où les indices  $\bullet_1$  et  $\bullet_2$  désignent respectivement les rotors  $R_1$  et  $R_2$ . La matrice de raideur de couplage  $\mathbf{K}_c$  découle de l'énergie de déformation du roulement et assure mathématiquement le couplage dynamique des deux structures au travers des termes extra-diagonaux  $\mathbf{K}_{c1,2}$  et  $\mathbf{K}_{c2,1}$ . De plus, les deux roues aubagées étant décrites dans des repères mobiles différents, ces termes extra-diagonaux possèdent des coefficients périodiques temporels provenant du passage d'un repère mobile à l'autre. L'objectif est donc de déterminer une projection de cette équation annulant les termes temporels de la matrice  $\mathbf{K}_c$  sans en créer par ailleurs dans les autres matrices du problème.

Pour cela, il est particulièrement intéressant de travailler en base modale. En effet, si la matrice de couplage est projetée de façon à en supprimer les termes temporels, la même projection devra être appliquée au reste de l'équation. En base physique, les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{N}$  dépendent de la structure et possèdent donc une forme assez quelconque. Il est alors relativement difficile d'établir dans un cadre général si leur projection engendrera ou non de nouveaux termes temporels. En revanche, en travaillant en système d'état, ces matrices prennent en base modale des formes connues et relativement simples qui faciliteront l'étude de la projection en permettant notamment de s'assurer qu'aucun nouveau terme temporel n'est introduit.

La procédure permettant d'établir une projection adaptée de l'équation du mouvement est présentée dans la suite. Elle est constituée de deux étapes principales : l'étude de chaque roue aubagée séparément, incluant certaines transformations de leurs deux bases modales en prévision des besoins ultérieurs, puis la construction de la matrice de couplage exprimée dans ces deux bases modales et conduisant au choix d'une projection adaptée. Les différentes étapes de cette procédures sont résumées dans un diagramme en Annexe B. Il pourra être utile de s'y référer régulièrement afin de suivre le fil des développements.

## 2 Construction du modèle pour une roue aubagée isolée

Dans un premier temps, une unique roue aubagée est étudiée en configuration libre et sans couplage. Décrite par la méthode des éléments finis, elle possède  $n$  ddl. Il est supposé que les dispositions nécessaires à la suppression d'éventuels modes de corps rigide ont été prises. Son équation du mouvement en base physique dans son propre repère mobile s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{G} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{II.3})$$

Comme expliqué dans la section I.3.2.1, l'écriture en système d'état de cette relation, rappelée ci-dessous, constitue l'une des solutions permettant d'en calculer les modes propres :

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (\text{II.4})$$

$$\text{avec } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} + \mathbf{N} \\ -(\mathbf{K} + \mathbf{N}) & -(\mathbf{G} + \mathbf{D}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

On rappelle également la relation entre les modes propres à gauche et à droite du système (II.3) de départ, notés  ${}^g\mathbf{V}$  et  ${}^d\mathbf{V}$ , et les modes propres du système augmenté (II.4), notés  ${}^g\mathbf{W}$  et  ${}^d\mathbf{W}$  :

$${}^d\mathbf{W} = \begin{pmatrix} {}^d\mathbf{V} \\ {}^d\mathbf{V}\boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} \quad {}^g\mathbf{W} = \begin{pmatrix} {}^g\mathbf{V} \\ -{}^g\mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^T \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Il s'agit ici des modes propres réels permettant de s'affranchir des notations complexes. La matrice  $\boldsymbol{\Omega}$  est une matrice diagonale par blocs, appelée *matrice pseudo-spectrale* et contenant les valeurs propres du système augmenté. Ainsi, en notant  ${}^d\mathbf{q}$  les coordonnées modales à droite associées aux vecteurs propres  ${}^d\mathbf{W}$ , l'équation du mouvement (II.4) s'exprime en base modale sous la forme :

$${}^d\dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Omega}{}^d\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{II.7})$$

Cette écriture présente l'intérêt de faire intervenir uniquement la matrice  $\boldsymbol{\Omega}$  dont la structure est invariante, quelle que soit la géométrie de la roue aubagée étudiée. Ainsi, l'étude de l'influence d'une

projection de cette équation, notamment en ce qui concerne la possible création de coefficients périodiques temporels, sera valable quel que soit le système d'étude.

La validité de la relation (II.7) est toutefois conditionnée par l'orthonormalisation des bases  ${}^g\mathbf{W}$  et  ${}^d\mathbf{W}$ . D'autre part, certaines propriétés dans la structure de ces deux bases sont nécessaires pour assurer le bon déroulement des futures projections. Les transformations relatives à ces conditions sont présentées dans la suite.

## 2.1 Transformations des bases modales

Les développements de cette section utilisent la forme complexe des bases modales telles qu'elles sont obtenues par le solveur utilisé, notées  ${}^g\Phi$  et  ${}^d\Phi$ . Le lien entre les vecteurs propres complexes du système de départ et ceux du système augmenté, explicité section I.3.2.1, est rappelé ici :

$${}^d\Phi = \begin{pmatrix} {}^d\varphi \\ {}^d\varphi\Lambda \end{pmatrix} \quad {}^g\Phi = \begin{pmatrix} {}^g\varphi \\ -{}^g\varphi\Lambda \end{pmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Une fois que les post-traitements nécessaires à la suite des développements sont appliqués, le retour à la formulation réelle des vecteurs propres  ${}^g\mathbf{W}$  et  ${}^d\mathbf{W}$  s'opère en supprimant les modes complexes conjugués des matrices modales  ${}^g\Phi$  et  ${}^d\Phi$  puis en séparant leurs parties réelles et imaginaires comme expliqué section I.3.2.1.

### 2.1.1 Orthonormalisation simultanée des bases modales à gauche et à droite

L'écriture en base modale de l'équation du mouvement sous la forme de la relation (II.7) nécessite que les deux bases duales vérifient des propriétés d'orthogonalité vis-à-vis de la matrice de pseudo-masse  $\mathbf{B}$ , ainsi qu'une normalisation adaptée :

$${}^g\Phi^T \mathbf{B} {}^d\Phi = \mathbf{I}_{2n} \quad (\text{II.9})$$

Bien que cette propriété d'orthogonalité existe [8], elle n'est pas toujours immédiate, les vecteurs propres étant définis à un coefficient près (cas des modes simples) ou à une combinaison linéaire près (cas des modes doubles). Lorsque la seule base à droite est calculée, cette propriété est respectée d'emblée pour les modes simples par la plupart des solveurs, mais n'est souvent plus vérifiée dès qu'il s'agit de modes doubles. Lorsque les deux bases duales sont nécessaires, les solveurs proposent généralement une option permettant de les calculer simultanément. Toutefois, la structure du système d'équations utilisé ainsi que la définition de l'orthogonalisation ne sont pas uniques et il est souvent difficile d'en obtenir les expressions.

Dans notre cas où la structure des vecteurs propres doit être maîtrisée, il est donc préférable de calculer séparément les bases à gauche et à droite en utilisant les relations (I.50) et (I.51). Dans ce cas, les deux bases obtenues ne sont *a priori* pas orthogonales entre elles ce qui nécessite de mettre en place une procédure d'orthogonalisation.

La propriété d'orthogonalité recherchée (II.9) fait intervenir deux bases simultanément ce qui n'est pas habituel dans les procédures d'orthogonalisation classiques comme par exemple dans la méthode de Gram-Schmidt [40]. Une adaptation de cette méthode est donc proposée ici, s'appuyant sur le même principe de construction vecteur par vecteur de la nouvelle base

orthogonale, mais en traitant simultanément à chaque étape le vecteur à gauche et le vecteur à droite associés à la même valeur propre.

Le produit scalaire utilisé est défini à partir de la matrice  $\mathbf{B}$  symétrique et définie positive : pour deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{B} \mathbf{v}$ .

### Procédure d'orthogonalisation

On note  ${}^d\boldsymbol{\chi}$  et  ${}^g\boldsymbol{\chi}$  les nouvelles bases à droite et à gauche construites à partir des deux bases initiales  ${}^d\boldsymbol{\Phi}$  et  ${}^g\boldsymbol{\Phi}$  et orthogonalisées suivant le produit scalaire défini ci-dessus. Le premier vecteur de chaque base est conservé :

$$\begin{aligned} {}^d\boldsymbol{\chi}_1 &= {}^d\boldsymbol{\Phi}_1 \\ {}^g\boldsymbol{\chi}_1 &= {}^g\boldsymbol{\Phi}_1 \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Une projection sur le premier vecteur de chacune des deux bases est ensuite soustrait au couple de vecteurs suivant :

$$\begin{aligned} {}^d\boldsymbol{\chi}_2 &= {}^d\boldsymbol{\Phi}_2 - \frac{\langle {}^g\boldsymbol{\chi}_1, {}^d\boldsymbol{\Phi}_2 \rangle}{\langle {}^g\boldsymbol{\chi}_1, {}^d\boldsymbol{\chi}_1 \rangle} {}^d\boldsymbol{\chi}_1 \\ {}^g\boldsymbol{\chi}_2 &= {}^g\boldsymbol{\Phi}_2 - \frac{\langle {}^d\boldsymbol{\chi}_1, {}^g\boldsymbol{\Phi}_2 \rangle}{\langle {}^d\boldsymbol{\chi}_1, {}^g\boldsymbol{\chi}_1 \rangle} {}^g\boldsymbol{\chi}_1 \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Et ainsi de suite pour l'ensemble des vecteurs des deux bases :

$$\begin{aligned} {}^d\boldsymbol{\chi}_n &= {}^d\boldsymbol{\Phi}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle {}^g\boldsymbol{\chi}_i, {}^d\boldsymbol{\Phi}_n \rangle}{\langle {}^g\boldsymbol{\chi}_i, {}^d\boldsymbol{\chi}_i \rangle} {}^d\boldsymbol{\chi}_i \\ {}^g\boldsymbol{\chi}_n &= {}^g\boldsymbol{\Phi}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle {}^d\boldsymbol{\chi}_i, {}^g\boldsymbol{\Phi}_n \rangle}{\langle {}^d\boldsymbol{\chi}_i, {}^g\boldsymbol{\chi}_i \rangle} {}^g\boldsymbol{\chi}_i \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

### Procédure de normalisation

Une fois les deux bases orthogonales construites, il reste à les normaliser. En pratique, agir sur la norme d'une seule des deux bases est suffisant pour obtenir la normalisation de la relation (II.9). Par exemple en travaillant avec la base à droite, les nouvelles bases orthonormalisées  ${}^d\boldsymbol{\chi}'$  et  ${}^g\boldsymbol{\chi}'$  s'obtiennent par les relations :

$$\begin{aligned} {}^d\boldsymbol{\chi}'_n &= \frac{{}^d\boldsymbol{\chi}_n}{\langle {}^d\boldsymbol{\chi}_n, {}^g\boldsymbol{\chi}_n \rangle} \\ {}^g\boldsymbol{\chi}'_n &= {}^g\boldsymbol{\chi}_n \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Les bases modales  ${}^d\boldsymbol{\chi}'$  et  ${}^g\boldsymbol{\chi}'$  ainsi obtenues sont orthonormalisées par rapport à la matrice  $\mathbf{B}$ . Pour éviter la multiplicité de notations, ces bases sont de nouveaux notées  ${}^d\boldsymbol{\Phi}$  et  ${}^g\boldsymbol{\Phi}$  dans la suite, bien qu'il s'agisse à présent des deux bases orthonormées.

#### 2.1.2 Combinaison linéaire des vecteurs d'un mode double

Les structures à symétrie cyclique, telles que les roues aubagées, ont la particularité de posséder des modes doubles dans le cas où les effets gyroscopiques sont négligeables (*cf.* section I.3.1). Il

est possible de montrer [41] une relation intéressante entre les coefficients en cosinus et en sinus (*cf.* relation (I.22)) des deux vecteurs d'un mode double exprimés en base cyclique :

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \Phi_c \\ \Phi_s \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \pm \begin{pmatrix} -\Phi_s \\ \Phi_c \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Il sera montré dans la section II.3.2.1 que cette structure particulière est requise pour le bon déroulement de l'étape de projection assurant la suppression des coefficients périodiques de la matrice de couplage. Toutefois, les vecteurs d'un mode double étant définis à une combinaison linéaire près, cette structure n'est pas nécessairement obtenue immédiatement lors du calcul des bases modales. Une seconde étape de post-traitement des deux bases doit donc être effectuée en prenant soin de ne pas perdre les propriétés d'orthogonalité obtenues lors de la procédure d'orthonormalisation de la section II.2.1.1.

La méthode proposée consiste à définir une combinaison linéaire des deux vecteurs d'un mode double respectant les propriétés d'orthogonalité (II.9) de façon à obtenir deux nouveaux vecteurs possédant la structure particulière de la relation (II.14). Puisque les propriétés d'orthogonalité impliquent à la fois les vecteurs propres à gauche et à droite, les combinaisons linéaires de ces deux bases duales doivent être établies simultanément.

Mathématiquement, on travaille avec le quadruplet de vecteurs propres d'un mode double  ${}^d\Phi_1$ ,  ${}^d\Phi_2$ ,  ${}^g\Phi_1$  et  ${}^g\Phi_2$ , exprimé en base cyclique, dont la structure est pour l'instant quelconque :

$${}^d\Phi_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \end{pmatrix} \quad {}^d\Phi_2 = \begin{pmatrix} C_2 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad {}^g\Phi_1 = \begin{pmatrix} C_3 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad {}^g\Phi_2 = \begin{pmatrix} C_4 \\ S_4 \end{pmatrix} \quad (\text{II.15})$$

L'objectif est d'établir des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

$$\begin{aligned} {}^d\chi_1 &= a {}^d\Phi_1 + b {}^d\Phi_2 & {}^g\chi_1 &= \alpha {}^g\Phi_1 + \beta {}^g\Phi_2 \\ {}^d\chi_2 &= c {}^d\Phi_1 + d {}^d\Phi_2 & {}^g\chi_2 &= \gamma {}^g\Phi_1 + \delta {}^g\Phi_2 \end{aligned} \quad \text{avec } a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \quad (\text{II.16})$$

telles que les nouveaux vecteurs  ${}^d\chi_1$ ,  ${}^d\chi_2$ ,  ${}^g\chi_1$  et  ${}^g\chi_2$  vérifient les deux conditions suivantes :

- **Propriété d'orthogonalité :**

$${}^g\chi_i^T \mathbf{B}^d \chi_j = {}^g\bar{\chi}_i^T \mathbf{B}^d \bar{\chi}_j = \delta_{ij} \quad (\text{II.17})$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. En développant ces égalités sachant que les vecteurs propres de départ vérifient cette même propriété d'orthogonalité, il vient la relation suivante entre les huit coefficients à déterminer :

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= 1 \\ \gamma c + \delta d &= 1 \\ \alpha c + \beta d &= 0 \\ \gamma a + \delta b &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

soit en imposant  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  :

$$a = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \quad b = \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} \quad c = \frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \quad d = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} \quad (\text{II.19})$$

- **Relations entre les deux vecteurs d'un mode double** : il s'agit ici d'imposer la structure particulière définie équation (II.14) aux vecteurs propres à droite et à gauche :

$${}^d\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} {}^d\boldsymbol{\chi}_c \\ {}^d\boldsymbol{\chi}_s \end{pmatrix} \quad {}^d\boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} -{}^d\boldsymbol{\chi}_s \\ {}^d\boldsymbol{\chi}_c \end{pmatrix} \quad {}^g\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} {}^g\boldsymbol{\chi}_c \\ {}^g\boldsymbol{\chi}_s \end{pmatrix} \quad {}^g\boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} -{}^g\boldsymbol{\chi}_s \\ {}^g\boldsymbol{\chi}_c \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

D'après la structure des vecteurs propres de départ (II.15) et l'équation (II.16), il est possible d'écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} {}^d\boldsymbol{\chi}_1 &= \begin{pmatrix} a\mathbf{C}_1 + b\mathbf{C}_2 \\ a\mathbf{S}_1 + b\mathbf{S}_2 \end{pmatrix} & {}^d\boldsymbol{\chi}_2 &= \begin{pmatrix} c\mathbf{C}_1 + d\mathbf{C}_2 \\ c\mathbf{S}_1 + d\mathbf{S}_2 \end{pmatrix} \\ {}^g\boldsymbol{\chi}_1 &= \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{C}_3 + \beta\mathbf{C}_4 \\ \alpha\mathbf{S}_3 + \beta\mathbf{S}_4 \end{pmatrix} & {}^g\boldsymbol{\chi}_2 &= \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{C}_3 + \delta\mathbf{C}_4 \\ \alpha\mathbf{S}_3 + \delta\mathbf{S}_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Finalement, la combinaison des relations (II.20) et (II.21) fournit le système :

$$\begin{aligned} a\mathbf{C}_1 + b\mathbf{C}_2 &= c\mathbf{S}_1 + d\mathbf{S}_2 \\ a\mathbf{S}_1 + b\mathbf{S}_2 &= -c\mathbf{C}_1 - d\mathbf{C}_2 \\ \alpha\mathbf{C}_3 + \beta\mathbf{C}_4 &= \gamma\mathbf{S}_3 + \delta\mathbf{S}_4 \\ \alpha\mathbf{S}_3 + \beta\mathbf{S}_4 &= -\gamma\mathbf{C}_3 - \delta\mathbf{C}_4 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

En remplaçant dans les relations (II.22) les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  par leurs expressions (II.19) en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ , le système à résoudre se réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 & -\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_1 & -\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 & -\mathbf{S}_3 & -\mathbf{S}_4 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Ce système admet une infinité de solutions ce qui signifie que plusieurs combinaisons linéaires des vecteurs de départ existent pour satisfaire aux deux conditions imposées. Pour établir une solution, le paramètre  $\alpha = 1$  est arbitrairement fixé, permettant d'obtenir le nouveau système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 & -\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{C}_4 & -\mathbf{S}_3 & -\mathbf{S}_4 \\ \mathbf{S}_4 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{S}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Il est important de noter que les grandeurs  $\mathbf{C}_i$  et  $\mathbf{S}_i$  sont des vecteurs. Par conséquent les mêmes coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  doivent être obtenus quelle que soit la composante considérée dans ces vecteurs. Il s'agit bien sûr de travailler avec la même composante pour les quatre vecteurs associés :  $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$  ou  $(\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4)$ . Afin d'obtenir de meilleurs résultats, la composante dont la valeur absolue est à la fois maximale pour l'un des vecteurs et non nulle pour les autres est sélectionnée.

Les valeurs ainsi choisies dans les vecteurs sont notées  $C_i$  et  $S_i$ . Finalement, la résolution du

système (II.24) en calcul symbolique fournit les relations finales :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \\
\beta &= -\frac{C_3^2 S_1 + S_1 S_3^2 + C_2 C_3 S_4 - C_2 C_4 S_3 + C_3 C_4 S_2 + S_2 S_3 S_4}{D} \\
\gamma &= \frac{C_2 C_4^2 + C_2 S_4^2 + C_1 C_3 C_4 + C_1 S_3 S_4 + C_3 S_1 S_4 - C_4 S_1 S_3}{D} \\
\delta &= -\frac{C_1 C_3^2 + C_1 S_3^2 + C_2 C_3 C_4 + C_2 S_3 S_4 - C_3 S_2 S_4 + C_4 S_2 S_3}{D} \\
D &= C_4^2 S_2 + S_2 S_4^2 - C_1 C_3 S_4 + C_1 C_4 S_3 + C_3 C_4 S_3 + C_3 C_4 S_1 + S_1 S_3 S_4
\end{aligned} \tag{II.25}$$

En résumé, cette procédure permet de définir les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , puis  $a, b, c, d$  nécessaires à la recombinaison des vecteurs d'un mode double et permettant de respecter l'organisation particulière de la relation (II.14). Ces nouveaux vecteurs vérifient toujours les propriétés d'orthonormalisation obtenues section II.2.1.1.

## 2.2 Décomposition des déformées modales en harmoniques spatiales au niveau du roulement

Dans cette partie, les bases non-augmentées (*cf.* section I.3.2.1) complexes  ${}^d\boldsymbol{\varphi}$  et  ${}^g\boldsymbol{\varphi}$  ou réelles  ${}^d\mathbf{V}$  et  ${}^g\mathbf{V}$  sont alternativement utilisées. Certaines démonstrations sont en effet plus efficaces en complexe, mais les résultats finaux devront toujours être présentés en réel, les bases réelles ayant été choisies pour écrire l'équation du mouvement (II.7). D'autre part, les développements proposés étant similaires pour les bases à droite et à gauche, les exposants  ${}^d\bullet$  et  ${}^g\bullet$  seront omis.

Dans le modèle étudié, la transmission d'énergie entre les deux rotors s'effectue intégralement par l'intermédiaire du roulement et fait donc intervenir, sur chaque roue, une zone très restreinte modélisée par une simple ligne circulaire. Dès lors, la maîtrise du comportement vibratoire de cette zone apparaît primordiale pour la compréhension des transferts d'énergie entre les deux structures.

Puisqu'il a été fait le choix d'écrire l'équation du mouvement en base modale, il s'agit dans cette section de caractériser au mieux les vecteurs propres dans la zone de fixation du roulement. On cherche en particulier à décomposer ces vecteurs, limités aux ddl de la zone d'intérêt, sur une base spatiale connue et compatible avec la dynamique de la structure. Il sera ainsi plus facile d'appréhender les déformées de chaque mode et de comprendre leurs rôles respectifs dans la transmission d'énergie. Dans la suite, l'exposant  $\bullet^F$  est utilisé pour indiquer que les vecteurs ou matrices concernées se limitent aux ddl de la frontière de fixation du roulement, supposée circulaire et régulièrement maillée.

La base modale utilisée pour écrire l'équation du mouvement (II.7) étant la base réelle  $\mathbf{W}$ , construite à partir de la base non-augmentée  $\mathbf{V}$ , ce sont les déformées de cette base  $\mathbf{V}$  qui doivent être caractérisées dans la zone du roulement. Pour cela, une méthode de type Rayleigh-Ritz utilisant la base des fonctions trigonométriques convient parfaitement à la géométrie d'une roue aubagée. En effet, cette famille de fonctions est bien adaptée pour décrire le comportement dynamique d'une structure cyclique fermée. Une telle décomposition a notamment été utilisée par Lazarus & *al.* dans le cas d'un rotor asymétrique [42].



Avec ce choix de discrétisation, le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base, dont les parties réelle et imaginaire  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  sont séparées en deux vecteurs (cf. section I.3.2.1), s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_i^F(\theta) & \mathbf{z}_i^F(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \left( \begin{bmatrix} \cos m\theta & \sin m\theta \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^m & \mathbf{c}_i^m \\ \mathbf{b}_i^m & \mathbf{d}_i^m \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Cette relation est formulée dans le cas d'un modèle 3D, pour lequel les vecteurs de coefficients  $\mathbf{a}_i^m$ ,  $\mathbf{b}_i^m$ ,  $\mathbf{c}_i^m$  et  $\mathbf{d}_i^m$  possèdent chacun trois coordonnées. Le produit de Kronecker avec la matrice identité est nécessaire pour appliquer les fonctions cosinus et sinus à chacune de ces coordonnées. Il sera toutefois souvent omis afin d'alléger les notations. Cette écriture est également possible pour un problème dans le plan en adaptant la taille de la matrice identité et des vecteurs de coefficients.

Le calcul des coefficients de la nouvelle base de description trigonométrique, spatialement continue, s'effectue à partir de la base EF grâce à une transformée de Fourier spatiale qui sera présentée section II.2.2.2. Le nombre d'harmoniques pouvant être conservées dans la base trigonométrique est alors directement fonction du nombre de nœuds présents dans la discrétisation de la frontière de fixation du roulement.

La même caractérisation spatiale de la base modale complexe  $\varphi^F$  associée peut également s'avérer très utile pour démontrer certaines propriétés de la base  $\mathbf{V}^F$ . En effet, la décomposition trigonométrique proposée dans l'espace des réels se transforme, dans l'espace des complexes, en une série exponentielle complexe, bien plus facile à manipuler que les fonctions cosinus et sinus :

$$\varphi_i^F(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \mathbf{A}_i^m e^{jm\theta} + \mathbf{A}_i^{-m} e^{-jm\theta} \quad (\text{II.27})$$

Tous les termes de cette relation sont complexes et peuvent donc se décomposer en parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} e^{jm\theta} &= \cos m\theta + j \sin m\theta \\ \mathbf{A}_i^m &= \boldsymbol{\alpha}_i^m + j\boldsymbol{\beta}_i^m \\ \mathbf{A}_i^{-m} &= \boldsymbol{\alpha}_i^{-m} + j\boldsymbol{\beta}_i^{-m} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

En développant l'expression (II.27), la relation entre les coefficients des descriptions réelle et complexe est obtenue par identification avec l'équation (II.26) :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^m &= \boldsymbol{\alpha}_i^m + \boldsymbol{\alpha}_i^{-m} \\ \mathbf{b}_i^m &= \boldsymbol{\beta}_i^{-m} - \boldsymbol{\beta}_i^m \\ \mathbf{c}_i^m &= \boldsymbol{\beta}_i^m + \boldsymbol{\beta}_i^{-m} \\ \mathbf{d}_i^m &= \boldsymbol{\alpha}_i^m - \boldsymbol{\alpha}_i^{-m} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Ces deux descriptions sont ainsi équivalentes. Tout le travail consiste maintenant à déterminer les harmoniques spatiales  $m$  présentes dans chaque vecteur propre  $i$  au niveau du roulement ainsi que les coefficients  $\mathbf{a}_i^m$ ,  $\mathbf{b}_i^m$ ,  $\mathbf{c}_i^m$  et  $\mathbf{d}_i^m$  associés.

### 2.2.1 Compatibilité des harmoniques spatiales avec les modes à diamètre

Il a été montré dans la section I.3.1 que les structures à symétrie cyclique présentent la particularité de pouvoir classer et calculer leurs modes propres par groupes de diamètres égaux :

pour un mode à  $k$  diamètres, un secteur possède la même déformée que le secteur précédent simplement déphasée d'un angle  $k\alpha$ ,  $\alpha$  étant l'angle d'un secteur. En revanche, aucune contrainte n'est imposée quant à la déformée interne du secteur.

Dans le cas de l'étude des modes propres au niveau du roulement, c'est justement la déformée interne des secteurs qui nous intéresse, que l'on cherche à caractériser sous la forme d'harmoniques spatiales. Il est important de noter que la zone de fixation du roulement est une structure axisymétrique pour laquelle la notion de secteur n'a plus vraiment de sens. Toutefois, pour rester cohérent avec les contraintes imposées par le reste de la roue aubagée, ce découpage en secteurs ainsi que le calcul des modes propres par diamètre sont conservés. Ce choix conditionne les harmoniques spatiales pouvant être détectées dans un mode puisqu'elles doivent nécessairement posséder une déformée compatible avec le diamètre du mode. Pour illustration, la Figure II.2 présente les deux premières harmoniques compatibles avec une déformée à 0 diamètre dans la zone de fixation du roulement d'une roue aubagée possédant 30 secteurs.

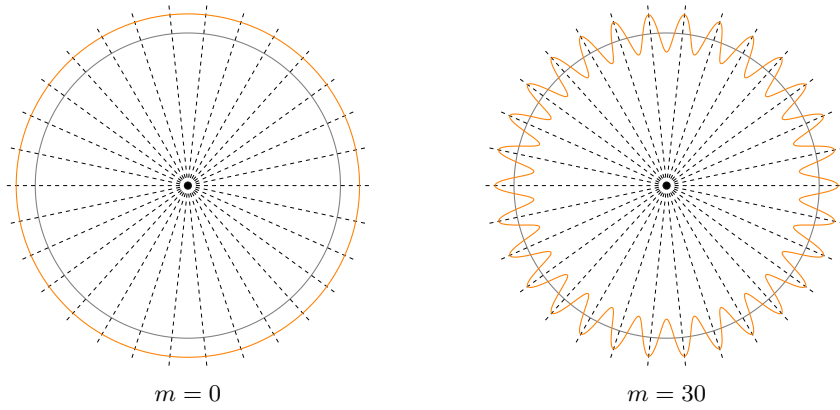


FIGURE II.2 – Représentation des deux premières harmoniques spatiales de la base des modes à 0 diamètre. Configuration initiale (—), configuration déformée (—), délimitation des secteurs (---)

Il est ainsi possible de ranger les harmoniques spatiales par groupes en fonction du nombre de diamètres des modes à caractériser. Cette étape n'est pas indispensable pour la décomposition des déformées modales au niveau du roulement, mais elle permet d'optimiser l'étape de projection des vecteurs propres EF sur leurs harmoniques spatiales en se limitant aux harmoniques compatibles.

On attire ici l'attention du lecteur sur une confusion possible de vocabulaire. En effet, le terme d'« harmonique » est parfois employé pour désigner le diamètre d'un mode. Dans le cadre de ce mémoire, ce terme sera réservé à la dénomination des harmoniques spatiales continues présentes dans la déformée au niveau du roulement. On parlera toujours de « diamètre » pour évoquer les déformées des secteurs les uns par rapport aux autres.

Pour établir l'ordre des harmoniques spatiales compatibles avec un mode à  $k$  diamètres, le plus efficace est de travailler avec la base modale complexe continue  $\varphi(\theta)$  définie relation (II.27). Par définition, en notant  $N$  le nombre de secteurs de la structure, le mode  $i$  à  $k$  diamètres doit vérifier la relation suivante :

$$\varphi_i \left( \theta + \frac{2\pi}{N} \right) = e^{j\frac{2\pi k}{N}} \varphi_i(\theta) \quad (\text{II.30})$$

En remplaçant  $\varphi_i$  à gauche et à droite par son expression (II.27), puis en utilisant la propriété

d'orthogonalité de la base exponentielle complexe  $e^{jm\theta}$ , on obtient la relation :

$$\mathbf{A}_i^{\pm m} e^{\pm j \frac{2\pi m}{N}} = \mathbf{A}_i^{\pm m} e^{j \frac{2\pi k}{N}} \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{II.31})$$

Pour une valeur de  $m$  donnée, si les coefficients  $\mathbf{A}_i^m$  sont nuls, c'est que l'harmonique  $m$  n'est pas contenue dans la déformée du mode  $i$ . Sinon, en simplifiant à gauche et à droite le terme  $\mathbf{A}_i^{\pm m}$  et en tenant compte de la  $2\pi$ -périodicité de l'exponentielle complexe, on obtient une relation entre le nombre de diamètre  $k$  du mode  $i$ , le nombre de secteurs  $N$  de la structure et l'harmonique  $m$  détectée :

$$\pm \frac{2\pi m}{N} = \frac{2\pi k}{N} + 2\pi p \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.32})$$

Puisque  $m$  ne prend que des valeurs positives ou nulles, la relation finale s'écrit :

$$m = \begin{cases} \pm k + pN & \text{pour } p \in \mathbb{N}^* \\ k & \text{pour } p = 0 \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

En s'inspirant des travaux de Charleux [43], cette décomposition de l'ordre  $m$  des harmoniques spatiales peut se représenter sous la forme d'un diagramme zigzag illustré Figure II.3. Le nombre de

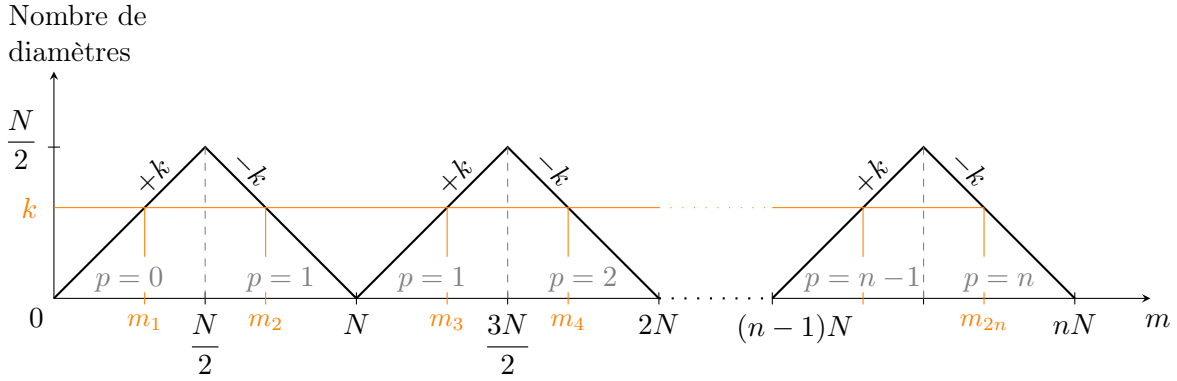


FIGURE II.3 – Représentation des harmoniques spatiales  $m = \pm k + pN$  compatibles avec une déformée modale à  $k$  diamètres.

diamètre  $k$  étudié est choisi en ordonné. La droite horizontale associée croise le diagramme zigzag en plusieurs points dont les abscisses correspondent aux harmoniques spatiales  $m_i$  compatibles avec le diamètre  $k$ . L'écriture de ces harmoniques sous la forme  $m_i = \pm k + pN$  se détermine par lecture du diagramme : la valeur de  $p$  est indiquée sous la courbe et change à chaque sommet du diagramme ; le signe  $+$  ou  $-$  devant  $k$  dépend de la pente respectivement positive ou négative au niveau du croisement.

En fonction de la valeur de l'harmonique maximale recherchée, les bornes de  $p$  ne sont pas toujours les mêmes pour les cas  $m = k + pN$  et  $m = -k + pN$ . D'autre part, les diamètres 0 et  $N/2$  (présent uniquement si  $N$  est pair) présentent des redondances si les deux décompositions  $m = \pm k + pN$  sont conservées. Dans la suite, seule la version positive de  $k$  est conservée pour ces deux diamètres :

$$\begin{aligned} \text{Pour } k = 0 \text{ ou } k = \frac{N}{2} : \quad m &= k + pN \\ \text{Pour } 0 < k < \frac{N}{2} : \quad m &= \pm k + pN \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Ainsi, connaissant le diamètre d'un mode, il est possible de prévoir les harmoniques spatiales susceptibles d'être détectées et de limiter le nombre de projections à effectuer.

### 2.2.2 Calcul des coefficients en symétrie cyclique

La projection d'un vecteur propre EF sur ses harmoniques spatiales continues permet de déterminer à la fois l'ordre des harmoniques présentes et leurs coefficients en cosinus et sinus. On effectue pour cela une transformée de Fourier spatiale qui consiste à projeter la déformée d'un mode sur les cosinus et sinus des potentiels harmoniques. Les coefficients non nuls indiquent les harmoniques présentes dans la déformée du mode.

Dans le cas d'une étude en éléments finis, les vecteurs propres à la frontière de fixation du roulement sont au préalable reconstruits en continu à partir des fonctions de forme. Pour simplifier les projections, il est préférable de choisir une discrétisation régulière de la zone de travail, à savoir la zone de fixation du roulement, avec un angle constant entre deux nœuds consécutifs.

La formulation réelle des vecteurs propres est utilisée dans cette partie, avec pour objectif de déterminer les coefficients  $\mathbf{a}^m$ ,  $\mathbf{b}^m$ ,  $\mathbf{c}^m$  et  $\mathbf{d}^m$  tels que définis équation (II.26). La procédure étant la même pour les parties réelles et imaginaires  $\mathbf{y}^F(\theta)$  et  $\mathbf{z}^F(\theta)$  des vecteurs propres continus, les développements ne sont présentés que dans le cas des coefficients  $\mathbf{a}^m$  et  $\mathbf{b}^m$ .

La projection d'un vecteur propre continu  $\mathbf{y}^F(\theta)$  sur l'harmonique  $m$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{y}^F(\theta) d\theta \\ \mathbf{a}^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \mathbf{y}^F(\theta) d\theta \quad m \neq 0 \\ \mathbf{b}^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \mathbf{y}^F(\theta) d\theta \quad m \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Le coefficient  $\mathbf{b}^0$  n'existe pas pour l'harmonique 0. On note  $n_s$  le nombre de nœuds par secteur sur la frontière de fixation du roulement et  $\alpha_s = \frac{2\pi}{Nn_s}$  l'angle entre deux nœuds consécutifs.  $n_s$  correspond également au nombre d'éléments par secteur. Ainsi, sur l'élément  $n$  de l'anneau, l'expression continue du vecteur propre  $\mathbf{y}^F(\theta)$  se reconstruit à partir des fonctions de forme  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{y}^F(\theta) = \mathbf{H}(\theta) \mathbf{y}_{e_n} \quad \text{pour} \quad n\alpha_s \leq \theta \leq (n+1)\alpha_s \quad (\text{II.36})$$

où  $\mathbf{y}_{e_n}$  correspond aux ddl associés à l'élément  $n$  du vecteur propre  $\mathbf{y}$ . Le vecteur  $\mathbf{y}_{e_n}$  contient donc les ddl de deux nœuds consécutifs. Cette relation permet de faire le lien entre l'approche discrétisée des vecteurs propres EF et la description continue des harmoniques spatiales recherchées.

En utilisant cette relation, le calcul de l'intégrale pour les coefficients  $\mathbf{a}^m$  et  $\mathbf{b}^m$  peut s'effectuer séparément sur chaque élément du modèle EF de la zone de fixation du roulement. Les développements étant similaires pour les deux coefficients, ils ne sont explicités que pour  $\mathbf{a}^m$ . Si la discrétisation choisie est bien régulière, ce calcul se décompose en une somme de  $Nn_s$  intégrales, chacune calculée sur un élément :

$$\mathbf{a}^m = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{Nn_s-1} \int_0^{\alpha_s} \cos m(\theta + n\alpha_s) \mathbf{H}(\theta) d\theta \mathbf{y}_{e_n} \quad (\text{II.37})$$

Les propriétés des fonctions trigonométriques permettent ensuite de décomposer la fonction cosinus de façon à séparer la position angulaire sur l'élément, repérée par l'angle  $\theta$ , de la position angulaire de l'élément sur la frontière de fixation du roulement, repérée par l'angle  $n\alpha_s$ . L'intérêt

est que les termes en  $n\alpha_s$  sont constants et peuvent être sortis de l'intégrale. Celle-ci devient alors indépendante du numéro de l'élément  $n$  et donc de la somme :

$$\mathbf{a}^m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \cos(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta \sum_{n=0}^{Nn_s-1} \cos(mn\alpha_s) \mathbf{y}_{e_n} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \sin(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta \sum_{n=0}^{Nn_s-1} \sin(mn\alpha_s) \mathbf{y}_{e_n} \quad (\text{II.38})$$

Finalement, l'expression obtenue comporte deux intégrales dépendant uniquement des fonctions de forme et de l'harmonique sur laquelle est effectuée la projection. Ces intégrales constituent donc des coefficients propres au modèle EF, notés  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$ . Ils peuvent être calculés analytiquement dès la mise en place du modèle EF, suivant les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \cos(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \sin(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Les coefficients harmoniques  $\mathbf{a}^m$  et  $\mathbf{b}^m$  ont alors pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^m &= \sum_{n=0}^{Nn_s-1} [\mathbf{C} \cos(mn\alpha_s) - \mathbf{S} \sin(mn\alpha_s)] \mathbf{y}_{e_n} \\ \mathbf{b}^m &= \sum_{n=0}^{Nn_s-1} [\mathbf{S} \cos(mn\alpha_s) + \mathbf{C} \sin(mn\alpha_s)] \mathbf{y}_{e_n} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Une relation équivalente existe pour l'harmonique 0 :

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha_s} \mathbf{H}(\theta) d\theta \sum_{n=0}^{Nn_s-1} \mathbf{y}_{e_n} \quad (\text{II.41})$$

Ces expressions s'appliquent aux vecteurs propres calculés sur la structure complète. Il est néanmoins possible de les adapter au cas d'une formulation en symétrie cyclique, couramment employée lors du calcul des modes propres d'une roue aubagée. Les développements associés sont présentés en Annexe C. Ainsi, en notant  $\bar{\mathbf{y}}^F$  la partie réelle d'un vecteur propre exprimé en base cyclique et en rappelant que l'ordre  $m$  de l'harmonique se décompose sous la forme  $m = \pm k + pN$ , l'expression des coefficients  $\mathbf{a}^m$  et  $\mathbf{b}^m$  en fonction d'une formulation cyclique des vecteurs propres devient :

- Pour  $m = 0$  :

$$\mathbf{a}^0 = \frac{N}{2\pi} \int_0^{\alpha_s} \mathbf{H}(\theta) d\theta \sum_{i=0}^{n_s-1} \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^0 \quad (\text{II.42})$$

- Pour  $k = 0$  ( $m \neq 0$ ) ou  $k = \frac{N}{2}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^m &= N \sum_{i=0}^{n_s-1} (\mathbf{C} \cos(im\alpha_s) - \mathbf{S} \sin(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^k \\ \mathbf{b}^m &= N \sum_{i=0}^{n_s-1} (\mathbf{S} \cos(im\alpha_s) + \mathbf{C} \sin(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^k \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

- Pour  $0 < k < \frac{N}{2}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^m &= \frac{N}{2} \sum_{i=0}^{n_s-1} \left[ (\mathbf{C} \cos(im\alpha_s) - \mathbf{S} \sin(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,c} \mp (\mathbf{C} \sin(im\alpha_s) + \mathbf{S} \cos(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,s} \right] \\ \mathbf{b}^m &= \frac{N}{2} \sum_{i=0}^{n_s-1} \left[ (\mathbf{S} \cos(im\alpha_s) + \mathbf{C} \sin(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,c} \mp (\mathbf{S} \sin(im\alpha_s) - \mathbf{C} \cos(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,s} \right]\end{aligned}\tag{II.44}$$

Le choix du signe «  $\pm$  » dépend du signe devant  $k$  dans la décomposition de l'harmonique  $m$  sous la forme  $m = \pm k + pN$ . La démarche étant parfaitement similaire pour la partie imaginaire  $\mathbf{z}(\theta)$  du vecteur propre, ces relations sont utilisables en l'état pour les coefficients  $\mathbf{c}^m$  et  $\mathbf{d}^m$  en remplaçant simplement les parties réelles  $\bar{\mathbf{y}}$  par les parties imaginaires  $\bar{\mathbf{z}}$ .

Compte tenu de l'expression des coefficients  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$ , le nombre maximum d'harmoniques spatiales pouvant être détectées dépend du degré des fonctions de forme utilisées et de la finesse du maillage au niveau de la ligne de fixation du roulement.

### 2.2.3 Relations entre les coefficients des vecteurs propres d'un mode double

Il a été montré section I.3.1 qu'une roue aubagée possède des modes doubles dans le cas où les effets gyroscopiques sont négligeables. L'objet de la section II.2.1.2 était de mettre en place une combinaison linéaire des deux vecteurs de chaque mode double de façon à assurer une relation bien précise dans la structure de ces vecteurs, exprimés en base cyclique :

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi^c \\ \varphi^s \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \pm \begin{pmatrix} -\varphi^s \\ \varphi^c \end{pmatrix}\tag{II.45}$$

Cette structure, une fois appliquée dans les expressions (II.44), permet d'établir une relation entre les coefficients  $\mathbf{a}^m$  et  $\mathbf{b}^m$  des deux vecteurs d'un mode double :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_2^m &= \mp \mathbf{b}_1^m \\ \mathbf{b}_2^m &= \pm \mathbf{a}_1^m\end{aligned}\tag{II.46}$$

La même structure est obtenue pour les coefficients  $\mathbf{c}^m$  et  $\mathbf{d}^m$ . Finalement, les décompositions en harmoniques spatiales des deux vecteurs d'un mode double dans la zone de fixation du roulement s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^F(\theta) & \mathbf{z}_1^F(\theta) & \mathbf{y}_2^F(\theta) & \mathbf{z}_2^F(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & \sin(m\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^m & \mathbf{c}_1^m & -\mathbf{b}_1^m & -\mathbf{d}_1^m \\ \mathbf{b}_1^m & \mathbf{d}_1^m & \mathbf{a}_1^m & \mathbf{c}_1^m \end{bmatrix}\tag{II.47}$$

Il sera montré section II.3.2.1 que cette structure particulière entre les coefficients d'un mode double est nécessaire pour assurer le bon déroulement des projections de l'équation du mouvement.

### 2.2.4 Relations entre les parties réelle et imaginaire du vecteur d'un mode simple

Dans le cas du diamètre  $N/2$  lorsqu'il existe, ou dans le cas où les effets gyroscopiques ne sont plus négligeables, la structure présente des modes simples. Des relations particulières sont

alors observées entre les coefficients  $\mathbf{a}^m$ ,  $\mathbf{b}^m$ ,  $\mathbf{c}^m$  et  $\mathbf{d}^m$  des parties réelle et imaginaire de chaque vecteur :

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^m &= -\mathbf{b}^m \\ \mathbf{d}^m &= \mathbf{a}^m\end{aligned}\tag{II.48}$$

Dans ces conditions, la décomposition en harmoniques spatiales de chaque vecteur dans la zone de fixation du roulement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}^F(\theta) & \mathbf{z}^F(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & \sin(m\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^m & -\mathbf{b}^m \\ \mathbf{b}^m & \mathbf{a}^m \end{bmatrix}\tag{II.49}$$

De la même façon que pour les modes doubles, cette structure spécifique sera nécessaire lors de l'étape de projection de la section II.3.2.1.

### 2.2.5 Hypothèses simplificatrices

À cette étape du travail, la décomposition en harmoniques spatiales des modes propres sur la ligne de fixation du roulement est encore très générale et ne tient pas compte des particularités géométriques de la roue aubagée dans cette zone. Ces propriétés permettent pourtant de poser certaines hypothèses quant au comportement dynamique de cette portion de structure, assurant une simplification des décompositions spatiales.

En effet, il semble raisonnable de supposer que la zone de fixation du roulement – de forme circulaire, simplifiée en une unique ligne dans notre modèle – se comporte dynamiquement comme une structure axisymétrique. Ceci sous-entend que le caractère périodique de la roue, engendré par la présence des aubages, n'a que très peu d'influence sur les déformées au niveau du roulement. Cette hypothèse est acceptable si les aubages sont considérés suffisamment éloignés du roulement. Dans ce cas, la frontière de fixation du roulement se modélise par une simple structure d'anneau, pour laquelle chaque mode propre est décrit spatialement par une unique harmonique [44, 45]. Il est alors possible de simplifier l'expression des projections des modes doubles (II.47) et des modes simples (II.49) en supprimant la somme.

Lorsque les décompositions spatiales de tous les vecteurs propres à  $k$  diamètres sont réunies dans une écriture matricielle commune, cette hypothèse permet d'en simplifier les termes. Ainsi, un vecteur harmonique  $\mathbf{h}^k(\theta)$  est défini, contenant en alternance les cosinus et sinus des harmoniques d'ordre  $m$  compatibles avec une déformée à  $k$  diamètres comme expliqué section II.2.2.1 :

$$\mathbf{h}^k = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) & \cos(-k+N)\theta & \dots & \sin(k+P_{\max}N)\theta \end{bmatrix}\tag{II.50}$$

$P_{\max}$  correspond à la valeur maximale à prendre en compte pour l'entier  $p$ , associée à l'harmonique maximale  $m_{\max}$  considérée. Dans le cas présent, les harmoniques sont rangées par ordre croissant bien que ce ne soit pas une obligation. L'ordre le plus élevé peut valoir  $m_{\max} = k + P_{\max}N$  ou  $m_{\max} = -k + P_{\max}N$  en fonction du maillage et des fonctions de forme choisies.

Les coefficients  $\mathbf{a}^m$ ,  $\mathbf{b}^m$ ,  $\mathbf{c}^m$  et  $\mathbf{d}^m$  associés sont réunis dans une matrice de coefficients notée  $\mathbf{\Gamma}^k$  dont un exemple de structure, obtenu à partir des relations (II.47) et (II.49), est présentée Figure II.4. L'expression continue des vecteurs propres réels à  $k$  diamètres, au niveau du roulement, s'écrit finalement :

$$\mathbf{V}^{F,k}(\theta) = \left( \mathbf{h}^k(\theta) \otimes \mathbf{I}_3 \right) \mathbf{\Gamma}^k\tag{II.51}$$

	$\varphi_1$		$\varphi_2$		...	$\varphi_i$		$\varphi_{i+1}$		...	$\varphi_n$	
	$y_1$	$z_1$	$y_2$	$z_2$		$y_i$	$z_i$	$y_{i+1}$	$z_{i+1}$		$y_n$	$z_n$
$k$	$\mathbf{a}_1^{k,0}$	$-\mathbf{b}_1^{k,0}$										
	$\mathbf{b}_1^{k,0}$	$\mathbf{a}_1^{k,0}$										
$-k + N$						$\mathbf{a}_i^{-k,1}$	$\mathbf{c}_i^{-k,1}$	$-\mathbf{b}_i^{-k,1}$	$-\mathbf{d}_i^{-k,1}$			
						$\mathbf{b}_i^{-k,1}$	$\mathbf{d}_i^{-k,1}$	$\mathbf{a}_i^{-k,1}$	$\mathbf{c}_i^{-k,1}$			
$k + N$			$\mathbf{a}_2^{k,1}$	$-\mathbf{b}_2^{k,1}$								
			$\mathbf{b}_2^{k,1}$	$\mathbf{a}_2^{k,1}$								
$\vdots$												
$k + P_{\max}N$											$\mathbf{a}_n^{k,P_m}$	$-\mathbf{b}_n^{k,P_m}$
											$\mathbf{b}_n^{k,P_m}$	$\mathbf{a}_n^{k,P_m}$

FIGURE II.4 – Structure de la matrice des coefficients  $\mathbf{\Gamma}^k$  obtenue en décomposant les vecteurs propres à  $k$  diamètres sur leurs harmoniques spatiales. Seuls les blocs grisés sont non-nuls.

Dans l'exemple présenté Figure II.4, les vecteurs  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_n$  correspondent à des modes simples, alors que les vecteurs  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1}$  constituent un mode double. Les lignes de la matrice fonctionnent par deux, chaque paire étant associée à une harmonique spatiale dans l'ordre de rangement du vecteur  $\mathbf{h}^k$ . Dans le cas particulier de l'harmonique 0, la seconde ligne de coefficients n'existe pas et est donc supprimée.

L'hypothèse d'axisymétrie de la zone de fixation du roulement est visible dans cette matrice de coefficients : chaque colonne ne peut contenir qu'un seul bloc non nul correspondant à l'unique harmonique spatiale présente dans le mode. C'est donc en détectant la position de ce bloc que l'harmonique spatiale du vecteur associé est déterminée. Il sera montré dans la section II.3.2.1 que la présence d'un unique bloc dans chaque colonne de cette matrice est primordiale pour assurer le bon déroulement des projections de l'équation du mouvement.

Une fois les projections effectuées séparément pour chaque diamètre, la décomposition harmonique de l'ensemble des modes propres de la structure s'écrit matriciellement en réunissant les termes de chaque diamètre. Pour le vecteur harmonique  $\mathbf{h}(\theta)$ , il suffit simplement de juxtaposer les sous-vecteurs par nombre de diamètres croissant :

$$\mathbf{h} = \left[ \mathbf{h}^0 \quad \mathbf{h}^1 \quad \dots \quad \mathbf{h}^{K_{\max}} \right] \quad (\text{II.52})$$

La matrice des coefficients harmoniques  $\mathbf{\Gamma}$  est quant à elle diagonale par blocs, chaque bloc



correspondant aux coefficients d'un nombre de diamètres :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}^0 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{\Gamma}^1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{\Gamma}^{K_{\max}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

La base modale continue complète est finalement reconstruite grâce à l'expression :

$$\mathbf{V}^F(\theta) = (\mathbf{h}(\theta) \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{\Gamma} \quad (\text{II.54})$$

Il est rappelé ici que le produit de Kronecker avec la matrice identité d'ordre 3 permet de tenir compte des 3 coordonnées dans les coefficients  $\mathbf{a}^m$ ,  $\mathbf{b}^m$ ,  $\mathbf{c}^m$  et  $\mathbf{d}^m$  associées à un modèle 3D. Ce produit de Kronecker sera parfois omis dans la suite afin d'alléger les notations.

### 3 Étude du système couplé

À ce stade des développements, les modes propres des deux roues aubagées ont été calculés séparément en symétrie cyclique puis orthonormalisés en tenant compte des bases à gauche et à droite. En se limitant aux ddl de la frontière de fixation du roulement, et en supposant le comportement dynamique de cette zone comme axisymétrique, chaque vecteur propre a été projeté sur une unique harmonique spatiale, fournissant ainsi une description continue de la déformée de la roue sur l'ensemble de la circonférence du roulement. Un traitement préalable des vecteurs propres a permis d'assurer certaines relations entre les coefficients harmoniques de chaque mode, qu'il soit simple ou double.

Cette description continue aurait bien sûr pu être obtenue en utilisant les fonctions de forme du modèle éléments finis. Toutefois ces fonctions de forme sont quelconques, dans le sens où elles peuvent être différentes d'un modèle EF à l'autre. Il serait alors difficile d'établir des règles générales concernant les transferts d'énergie au niveau du roulement. De plus, ces fonctions de forme ne sont pas nécessairement les plus adaptées pour établir l'expression des termes de couplage, les fonctions trigonométriques présentant l'avantage de posséder des propriétés d'orthogonalité qui seront exploitées par la suite.

Il s'agit à présent de réunir les deux roues afin d'étudier la mise en place du couplage. En utilisant les notations de la section II.2, l'équation du mouvement du système couplé (II.2) s'écrit en base modale sous la forme :

$$\begin{pmatrix} {}^d\dot{\mathbf{q}}_1 \\ {}^d\dot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^d\mathbf{q}_1 \\ {}^d\mathbf{q}_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_c \begin{pmatrix} {}^d\mathbf{q}_1 \\ {}^d\mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{\Omega}_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_{\text{ext},1} \\ -\mathbf{\Omega}_2^g \mathbf{V}_2^T \mathbf{f}_{\text{ext},2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.55})$$

La matrice raideur de couplage en base modale  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  s'exprime en fonction de la matrice de couplage en base physique  $\mathbf{K}_c$  par la relation :

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = {}^g\mathbf{V}^T \mathbf{K}_c {}^d\mathbf{V} \quad \text{avec} \quad {}^g, {}^d\mathbf{V} = \begin{pmatrix} {}^g, {}^d\mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^g, {}^d\mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.56})$$

L'objectif est donc d'établir analytiquement la structure des coefficients périodiques temporels dans la matrice de couplage modale  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  de façon à déterminer une projection assurant leur suppression.

### 3.1 Expression des termes de couplage

L'expression de la matrice de couplage s'obtient à partir de l'énergie de déformation des raideurs modélisant le roulement. Comme illustré Figure II.1, ces raideurs de couplage se fixent sur chaque rotor suivant un cercle. Seuls les déplacements de cette frontière sont alors nécessaires pour établir l'énergie de déformation du roulement. L'exposant  $\bullet^F$  est donc de nouveau utilisé pour indiquer que les vecteurs mis en jeu se limitent aux ddl de la frontière de fixation du roulement. L'énergie de déformation des raideurs de couplage a pour expression :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u}_1^F(\theta) - \mathbf{u}_2^F(\theta))^T \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{u}_1^F(\theta) - \mathbf{u}_2^F(\theta)) d\theta \quad (\text{II.57})$$

où  $\boldsymbol{\kappa}$  est la densité de raideur du roulement par unité d'angle telle que définie par la relation (II.1). Les déplacements  $\mathbf{u}^F$  sont les déplacements physiques des frontières de fixation du roulement exprimés en continu selon le paramètre angulaire  $\theta$ .

Puisqu'il a été fait le choix d'écrire l'équation du mouvement en base modale, ces déplacements physiques sont remplacés par leur décomposition sur les bases modales respectives des deux rotors. Ici encore, il s'agit des bases modales continues limitées aux ddl de la zone de fixation du roulement. Afin de rester cohérent avec les projections modales des matrices pseudo-masse et pseudo-raideur, assurant les propriétés d'orthogonalité en faisant intervenir simultanément les bases à droite et à gauche (*cf.* section II.2.1.1), les déplacements à droite de  $\boldsymbol{\kappa}$  sont écrits sur les bases à droite alors que ceux de gauche sont écrits sur les bases à gauche suivant les deux relations :  $\mathbf{u}_i^F(\theta) = {}^g\mathbf{V}_i^F(\theta) {}^g\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{u}_i^F(\theta) = {}^d\mathbf{V}_i^F(\theta) {}^d\mathbf{q}_i$ , avec  $i = 1, 2$  le numéro du rotor concerné. Sachant que les coordonnées modales  $\mathbf{q}_i$  sont indépendantes de la position angulaire  $\theta$ , l'expression de l'énergie de déformation en écriture matricielle devient :

$$E_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} {}^g\mathbf{q}_1 \\ {}^g\mathbf{q}_2 \end{pmatrix}^T \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} {}^g\mathbf{V}_1^F & -{}^g\mathbf{V}_2^F \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\kappa} \begin{bmatrix} {}^d\mathbf{V}_1^F & -{}^d\mathbf{V}_2^F \end{bmatrix} d\theta \begin{pmatrix} {}^d\mathbf{q}_1 \\ {}^d\mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.58})$$

On reconnaît ici l'expression classique de l'énergie potentielle  $E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$  où  $\mathbf{K}$  est la raideur du système et  $\mathbf{q}$  les inconnues. Ces inconnues étant, dans le cas présent, les coordonnées modales, la matrice  $\mathbf{K}$  associée correspond à la matrice de raideur de couplage en base modale, notée  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  :

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} {}^g\mathbf{V}_1^F & -{}^g\mathbf{V}_2^F \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\kappa} \begin{bmatrix} {}^d\mathbf{V}_1^F & -{}^d\mathbf{V}_2^F \end{bmatrix} d\theta \quad (\text{II.59})$$

Afin d'exprimer analytiquement cette intégrale et ainsi étudier la répartition des termes temporels dans la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ , les vecteurs propres sont remplacés par leur décomposition en harmoniques spatiales mise en place dans la section II.2.2 :

$$\mathbf{V}_i^F(\beta_i) = (\mathbf{h}_i(\beta_i) \otimes \mathbf{I}_3) \boldsymbol{\Gamma}_i \quad (\text{II.60})$$

Les angles  $\beta_i$ , repérés sur la figure II.1, correspondent à la position angulaire exprimée dans le repère mobile de chaque rotor. Pour le calcul de l'intégrale, il est nécessaire de se ramener à un

angle commun aux deux rotors, comme par exemple la position angulaire  $\theta$  exprimée dans le repère fixe. Les deux angles  $\beta_i$  s'expriment alors :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \theta - \Omega_1 t \\ \beta_2 &= \theta - \Omega_2 t\end{aligned}\tag{II.61}$$

Pour simplifier les expressions dans la suite des développements, les décompositions en harmoniques spatiales des modes propres des deux structures sont réunies dans des matrices et vecteurs communs. On définit ainsi le vecteurs  $\mathbf{h}_c(\theta, t)$  contenant les harmoniques spatiales des deux roues et la matrice  $\mathbf{\Gamma}_c$  contenant les coefficients associés :

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_c(\theta, t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(\theta - \Omega_1 t) & -\mathbf{h}_2(\theta - \Omega_2 t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Gamma}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{II.62}$$

On notera la présence d'un signe « $-$ » devant les fonctions harmoniques du rotor  $R_2$ , l'énergie de déformation d'une raideur étant calculée à partir de la différence des déplacements de ses deux extrémités. La notation  $\bullet_c$  est utilisée chaque fois que les grandeurs concernent les deux structures réunies, soit la structure couplée. Avec ces nouvelles notations, la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  s'exprime :

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = \int_0^{2\pi} {}^g\mathbf{\Gamma}_c^T (\mathbf{h}_c^T(\theta, t) \otimes \mathbf{I}_3) \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{h}_c(\theta, t) \otimes \mathbf{I}_3) {}^d\mathbf{\Gamma}_c d\theta\tag{II.63}$$

Les matrices des coefficients  $\mathbf{\Gamma}_c$  sont indépendantes de la position angulaire  $\theta$  et peuvent donc être sorties de l'intégrale. De plus, compte tenu de la dimension  $3 \times 3$  de la densité de raideur  $\boldsymbol{\kappa}$  ainsi que des propriétés du produit de Kronecker, l'expression de  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  se simplifie sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = {}^g\mathbf{\Gamma}_c^T \left( \int_0^{2\pi} \mathbf{h}_c^T(\theta, t) \mathbf{h}_c(\theta, t) d\theta \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) {}^d\mathbf{\Gamma}_c\tag{II.64}$$

À ce stade, l'ensemble des termes temporels *a priori* problématiques, sont regroupés sous l'intégrale et constituent une sous matrice de la matrice de couplage  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ , nommée  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T(\theta - \Omega_1 t) \mathbf{h}_1(\theta - \Omega_1 t) & -\mathbf{h}_1^T(\theta - \Omega_1 t) \mathbf{h}_2(\theta - \Omega_2 t) \\ -\mathbf{h}_2^T(\theta - \Omega_2 t) \mathbf{h}_1(\theta - \Omega_1 t) & \mathbf{h}_2^T(\theta - \Omega_2 t) \mathbf{h}_2(\theta - \Omega_2 t) \end{bmatrix} d\theta\tag{II.65}$$

C'est finalement la structure de cette sous-matrice qui est particulièrement importante pour comprendre l'organisation des termes temporels et choisir une projection assurant leur suppression. La matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  se reconstruit à partir de  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  grâce à la relation :

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = {}^g\mathbf{\Gamma}_c^T \left( \tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) {}^d\mathbf{\Gamma}_c\tag{II.66}$$

En étudiant la définition de la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  grâce à la construction (II.50) des vecteurs  $\mathbf{h}_{1,2}$ , on remarque qu'il s'agit simplement de la projection de deux bases trigonométriques entre elles. On comprend ici tout l'intérêt d'avoir choisi les fonctions trigonométriques pour exprimer les déformées modales de la zone de couplage. En effet, les propriétés d'orthogonalité propres à ces fonctions assurent l'annulation d'un grand nombre de ces projections et ainsi une expression relativement simple pour la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ . En notant respectivement  $m$  et  $n$  une harmonique

du premier ou du deuxième rotor, la projection de la base d'un rotor sur l'autre génère des termes qui se regroupent en trois catégories :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta &= 2\pi \quad \rightarrow \quad \text{harmonique } m = n = 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos m(\theta - \Omega_1 t) \sin n(\theta - \Omega_2 t) \, d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi \sin m(\Omega_1 - \Omega_2)t & \text{si } m = n \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos m(\theta - \Omega_1 t) \cos n(\theta - \Omega_2 t) \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin m(\theta - \Omega_1 t) \sin n(\theta - \Omega_2 t) \, d\theta \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi \cos m(\Omega_1 - \Omega_2)t & \text{si } m = n \end{cases}
\end{aligned} \tag{II.67}$$

Ces relations sont également valables pour la projection d'une base sur elle-même en remplaçant par exemple  $\Omega_2$  par  $\Omega_1$ . Un exemple de structure finalement obtenue pour la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  est présentée Figure II.5 dans le cas où les déformées modales du premier et du second rotor se décomposent respectivement sur les harmoniques  $(0, m_1, m_2)$  et  $(0, m_1, m_2, m_3)$ .

	1	$\cos m_1(\theta - \Omega_1 t)$	$\sin m_1(\theta - \Omega_1 t)$	$\cos m_2(\theta - \Omega_1 t)$	$\sin m_2(\theta - \Omega_1 t)$	-1	$-\cos m_2(\theta - \Omega_2 t)$	$-\sin m_2(\theta - \Omega_2 t)$	$-\cos m_3(\theta - \Omega_2 t)$	$-\sin m_3(\theta - \Omega_2 t)$	$-\cos m_1(\theta - \Omega_2 t)$	$-\sin m_1(\theta - \Omega_2 t)$
1	$2\pi$	0	0	0	0	$2\pi$	0	0	0	0	0	0
$\cos m_1(\theta - \Omega_1 t)$	0	$\pi$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_1}$	
$\sin m_1(\theta - \Omega_1 t)$	0	0	$\pi$	0	0	0	0	0	0	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_1}$	
$\cos m_2(\theta - \Omega_1 t)$	0	0	0	$\pi$	0	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_2}$		0	0	0	0
$\sin m_2(\theta - \Omega_1 t)$	0	0	0	0	$\pi$	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_2}$		0	0	0	0
-1	$2\pi$	0	0	0	0	$2\pi$	0	0	0	0	0	0
$-\cos m_2(\theta - \Omega_2 t)$	0	0	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_2}^T$		0	$\pi$	0	0	0	0	0
$-\sin m_2(\theta - \Omega_2 t)$	0	0	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_2}^T$		0	0	$\pi$	0	0	0	0
$-\cos m_3(\theta - \Omega_2 t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\pi$	0	0	0
$-\sin m_3(\theta - \Omega_2 t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\pi$	0	0
$-\cos m_1(\theta - \Omega_2 t)$	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_1}^T$		0	0	0	0	0	0	0	$\pi$	0
$-\sin m_1(\theta - \Omega_2 t)$	0	$-\pi \mathbf{R}_{m_1}^T$		0	0	0	0	0	0	0	0	$\pi$

FIGURE II.5 – Exemple de construction de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$

Quatre blocs se distinguent dans cette matrice symétrique : deux blocs diagonaux correspondant à la projection de chacune des deux bases trigonométriques sur elle-même, et deux blocs extra-diagonaux représentant la projection de la base trigonométrique d'un rotor sur celle du second

rotor. Il est à noter que les termes dépendant du temps sont exclusivement présents dans les blocs extra-diagonaux qui traduisent le couplage entre les deux structures. Compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, ces termes temporels n'apparaissent que pour les harmoniques possédant le même ordre  $m_i$ . Physiquement, cela signifie qu'un transfert d'énergie entre les bases modales des deux rotors ne pourra s'instaurer au travers du roulement qu'entre deux vecteurs propres possédant une harmonique commune dans leur déformée spatiale.

D'autre part, ces termes temporels s'organisent sous la forme caractéristique de matrices de rotation :

$$\mathbf{R}_{m_i} = \begin{bmatrix} \cos m_i \Delta \Omega t & \sin m_i \Delta \Omega t \\ -\sin m_i \Delta \Omega t & \cos m_i \Delta \Omega t \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

avec  $\Delta \Omega = \Omega_1 - \Omega_2$  la différence de vitesse de rotation entre les deux rotors. Ce constat est cohérent avec la problématique du choix du repère d'écriture. En effet, chaque rotor étant décrit dans son propre repère mobile, les termes couplant les deux systèmes tiennent compte du changement de repère permettant de passer d'un repère mobile à l'autre. L'intérêt d'une telle structure est qu'il est relativement simple de supprimer les termes temporels contenus dans ces matrices de rotation en appliquant des rotations d'angle opposé. Il est toutefois important de noter que l'expression de ces rotations dépend de l'ordre  $m_i$  de l'harmonique associée : la rotation à appliquer devra être propre à chaque harmonique spatiale présente dans les déformées modales des deux rotors.

## 3.2 Projection dans des repères intermédiaires

Dans cette section, une matrice de projection contenant les différentes rotations assurant la suppression des termes temporels est établie à partir de la structure de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ . Il est ensuite vérifié que cette projection est bien compatible avec le reste de l'équation du mouvement, c'est-à-dire qu'elle n'entraîne pas l'apparition de nouveaux termes temporels indésirables.

### 3.2.1 Projection de la matrice de couplage

On s'intéresse dans un premier temps à la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  de la matrice de couplage afin de déterminer une projection permettant d'en supprimer les termes temporels. À partir de cette projection est ensuite déduite une nouvelle matrice de projection, cette fois-ci destinée à la matrice de couplage complète  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ .

#### Projection de la matrice $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$

L'étude de la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  a mis en évidence des termes temporels pouvant être supprimés en appliquant de simples rotations. Les angles de ces rotations dépendent de la différence de vitesse entre les deux rotors ainsi que des ordres des harmoniques spatiales présentes dans les déformées modales au niveau du roulement. Il est donc nécessaire d'appliquer une rotation distincte pour chaque harmonique spatiale d'un même rotor.

Plusieurs choix de rotations sont possibles pour supprimer les termes temporels présents dans la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ . Il serait par exemple envisageable de ne projeter que l'un des deux rotors, d'un angle  $m_i \Delta \Omega t$  pour chaque harmonique  $m_i$  concernée. Par soucis d'analogie dans le traitement des deux structures, il est choisi ici d'appliquer des rotations aux deux rotors, en tenant compte de l'ordre de chaque harmonique spatiale  $m_i$  qui aura été détectée dans les déformées modales au



matrice projetée  $\widehat{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  suivante :

$$\widehat{\mathbf{K}}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\pi \\ 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\pi & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \quad (\text{II.73})$$

Compte tenu des propriétés d'orthogonalité des matrices de rotation, les blocs diagonaux n'ont pas été modifiés. En revanche, les matrices de rotation des blocs extra-diagonaux ont disparu au profit de termes constants. La projection choisie est donc bien adaptée à la suppression des termes temporels de la sous-matrice  $\widetilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ .

### Projection de la matrice de couplage $\widetilde{\mathbf{K}}_c$

À partir de la matrice de projection  $\mathbf{P}_{\text{int}}$ , on cherche à présent à déterminer la projection  $\mathbf{P}$  telle que la matrice de couplage projetée  $\widehat{\mathbf{K}}_c = \mathbf{P}^T \widetilde{\mathbf{K}}_c \mathbf{P}$  soit indépendante du temps. On rappelle que la matrice de couplage en base modale a pour expression :

$$\widetilde{\mathbf{K}}_c = {}^g \mathbf{\Gamma}^T \left( \widetilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) {}^d \mathbf{\Gamma} \quad (\text{II.74})$$

Puisque la matrice de projection  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  est composée de matrices de rotation orthogonales, la propriété suivante est vérifiée :

$$\mathbf{P}_{\text{int}}^{-1} = \mathbf{P}_{\text{int}}^T \quad (\text{II.75})$$

On en déduit :

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{P}_{\text{int}} \mathbf{P}_{\text{int}}^T \left( \widetilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) \mathbf{P}_{\text{int}} \mathbf{P}_{\text{int}}^T \quad (\text{II.76})$$

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker, et sachant que la densité de raideur  $\boldsymbol{\kappa}$  est de dimension 3 pour un problème 3D, cette expression se réécrit :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} &= (\mathbf{P}_{\text{int}} \otimes \mathbf{I}_3) \left( \mathbf{P}_{\text{int}}^T \widetilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \mathbf{P}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) (\mathbf{P}_{\text{int}}^T \otimes \mathbf{I}_3) \\ &= (\mathbf{P}_{\text{int}} \otimes \mathbf{I}_3) \left( \widehat{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) (\mathbf{P}_{\text{int}}^T \otimes \mathbf{I}_3) \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

Finalement, la projection de la matrice de couplage s'exprime à partir de la sous-matrice projetée  $\widehat{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  et de la matrice de projection  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  sous la forme :

$$\widehat{\mathbf{K}}_c = \mathbf{P}^T {}^g \mathbf{\Gamma}^T (\mathbf{P}_{\text{int}} \otimes \mathbf{I}_3) \left( \widehat{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) (\mathbf{P}_{\text{int}}^T \otimes \mathbf{I}_3) {}^d \mathbf{\Gamma} \mathbf{P} \quad (\text{II.78})$$

Les termes temporels sont à présent tous contenus dans les matrices de projection  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{P}$ , la forme de cette dernière étant à déterminer. La matrice de couplage sera donc indépendante du

temps si les projections des matrices de coefficients  ${}^g\hat{\mathbf{\Gamma}}$  et  ${}^d\hat{\mathbf{\Gamma}}$  le sont, avec :

$$\begin{aligned} {}^g\hat{\mathbf{\Gamma}} &= (\mathbf{P}_{\text{int}}^T \otimes \mathbf{I}_3) {}^g\mathbf{\Gamma} \mathbf{P} \\ {}^d\hat{\mathbf{\Gamma}} &= (\mathbf{P}_{\text{int}}^T \otimes \mathbf{I}_3) {}^d\mathbf{\Gamma} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

Lors de la construction des matrices de coefficients  ${}^g\mathbf{\Gamma}$  et  ${}^d\mathbf{\Gamma}$ , les mêmes harmoniques sont détectées dans les bases modales à gauche et à droite puisque ces deux bases duales caractérisent la même déformée. Ces deux matrices possèdent donc des structures similaires se comportant *a priori* de la même façon lors des projections. Par conséquent, les exposants  ${}^g\bullet$  et  ${}^d\bullet$  sont omis dans la suite de cette section afin d'alléger les notations.

À l'instar de la matrice  $\mathbf{P}_{\text{int}}$ , la matrice de projection  $\mathbf{P}$  est recherchée sous une forme diagonale par blocs contenant des rotations dont les angles sont à déterminer. Pour cela, on travaille successivement avec chaque mode  $i$  regroupant 2 ou 4 colonnes consécutives dans la matrice  $\mathbf{\Gamma}$  en fonction de s'il s'agit d'un mode simple ou double. Comme présenté sur la Figure II.4, tous les termes de ces deux ou quatre colonnes sont nuls à l'exception d'un bloc, correspondant à l'unique harmonique spatiale  $m$  retenue dans la déformée du mode  $i$ . Ce sous-bloc de la matrice de coefficient  $\mathbf{\Gamma}$  est noté  $\mathbf{\Gamma}_{i,m}$ .

Compte tenu de la structure diagonale par bloc des deux matrices de projection  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{P}$ , la projection de ce sous bloc a pour expression :

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{i,m} = (\mathbf{R}(m\Omega t) \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{\Gamma}_{i,m} \mathbf{P}_{i,m} \quad (\text{II.80})$$

avec  $\Omega$  la vitesse de rotation du rotor concerné. Ce sous-bloc sera le seul non nul dans les colonnes associées de la matrice de couplage projetée  $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ . La structure du sous-bloc  $\mathbf{\Gamma}_{i,m}$  diffère selon qu'il s'agit d'un mode simple ou double. Pour un mode simple, la structure interne de ce bloc correspond à celle d'une matrice de rotation :

$$\mathbf{\Gamma}_{i,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (\text{II.81})$$

Cette propriété permet d'obtenir l'invariance de la matrice  $\mathbf{\Gamma}_{i,m}$  par rotation :

$$(\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{\Gamma}_{i,m} \mathbf{R} = \mathbf{\Gamma}_{i,m} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{pour un angle } \theta \text{ quelconque} \quad (\text{II.82})$$

Pour les modes doubles, une structure similaire à celle d'une rotation est également présente, mais cette fois-ci entre les parties réelles des deux vecteurs d'une part, et leurs parties imaginaires d'autre part :

$$\mathbf{\Gamma}_{i,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} & -\mathbf{b} & -\mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} & \mathbf{a} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (\text{II.83})$$

Une propriété d'invariance existe donc également en modifiant la matrice de projection à droite :

$$(\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{\Gamma}_{i,m} (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_2) = \mathbf{\Gamma}_{i,m} \quad (\text{II.84})$$

Dans le cas présent, le choix de l'angle  $\theta$  à appliquer est fixé par la matrice de projection  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  et dépend de l'harmonique  $m$  présente dans la déformée du mode :  $\theta = m\Omega t$ . Le sous-bloc  $\mathbf{P}_{i,m}$  de la matrice de projection  $\mathbf{P}$  a donc pour expression :

$$\begin{aligned} \text{mode simple :} & \quad \mathbf{P}_{i,m} = \mathbf{R}(m\Omega t) \\ \text{mode double :} & \quad \mathbf{P}_{i,m} = \mathbf{R}(m\Omega t) \otimes \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$



Finalement, la matrice de projection  $\mathbf{P}$  assurant la suppression des termes temporels de la matrice de couplage  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  se construit sur le même principe que la matrice  $\mathbf{P}_{\text{int}}$ . Les projections à appliquer à chacun des deux rotors sont séparées en deux blocs :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.86})$$

Les deux matrices  $\mathbf{P}_i$  sont diagonales par bloc, chaque bloc contenant une matrice de rotation  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_2$ . Les angles de ces rotations sont proportionnels à la vitesse du rotor  $R_i$  et dépendent de l'harmonique détectée dans chaque vecteur. Tout comme les matrices de rotation qui la constitue, la matrice de projection  $\mathbf{P}$  est donc orthogonale. Pour exemple, la projection à appliquer à la matrice des coefficients  $\mathbf{\Gamma}^k$  présentée Figure II.4 serait de la forme :

$$\mathbf{P}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(k\Omega t) & & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{R}((k+N)\Omega t) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{R}((-k+N)\Omega t) \otimes \mathbf{I}_2 & \\ & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{R}((k+P_{\text{max}}N)\Omega t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.87})$$

avec  $\Omega$  la vitesse de rotation du rotor concerné. Ainsi, en utilisant les deux projections  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{P}$  telles que définies dans cette section, la relation (II.79) conduit à deux matrices de coefficients invariantes par projection :

$$\begin{aligned} {}^g\hat{\mathbf{\Gamma}} &= {}^g\mathbf{\Gamma} \\ {}^d\hat{\mathbf{\Gamma}} &= {}^d\mathbf{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{II.88})$$

Finalement, la projection  $\hat{\mathbf{K}}_c = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}}_c \mathbf{P}$  de la matrice de couplage complète aboutit à une matrice de couplage projetée indépendante du temps, d'expression :

$$\hat{\mathbf{K}}_c = {}^g\mathbf{\Gamma}^T \left( \hat{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) {}^d\mathbf{\Gamma} \quad (\text{II.89})$$

### 3.2.2 Projection des autres matrices du problème libre

La section précédente a permis d'établir une matrice de projection  $\mathbf{P}$  assurant la suppression des termes temporels contenus dans la matrice de couplage en base modale  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ . Il s'agit à présent de vérifier que l'application de cette projection au reste de l'équation du mouvement ne génère pas de nouveaux coefficients temporels dans les autres matrices du problème libre.

L'équation du mouvement en base modale de la structure couplée (II.55), en configuration libre, peut se réécrire sous une forme condensée en réunissant les contributions des deux rotors dans des grandeurs communes :

$${}^d\dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Omega} {}^d\mathbf{q} - \boldsymbol{\Omega} \tilde{\mathbf{K}}_c {}^d\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad {}^d\mathbf{q} = \begin{pmatrix} {}^d\mathbf{q}_1 \\ {}^d\mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.90})$$

L'application de la projection  $\mathbf{P}$  aux coordonnées modales  ${}^d\mathbf{q}$  définit de nouvelles inconnues  ${}^d\hat{\mathbf{q}}$  correspondant aux coordonnées modales projetées :

$${}^d\mathbf{q} = \mathbf{P} {}^d\hat{\mathbf{q}} \quad (\text{II.91})$$

La présence de la dérivée temporelle  ${}^d\dot{\mathbf{q}}$  dans l'équation du mouvement nécessite de dériver cette relation en tenant compte de la dépendance temporelle de la matrice de projection :

$${}^d\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{P}}^d\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{P}^d\dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad (\text{II.92})$$

Finalement, l'équation du mouvement projetée s'obtient en pré-multipliant l'équation du mouvement (II.90) par la matrice  $\mathbf{P}^T$  et en remplaçant les inconnues  ${}^d\mathbf{q}$  et  ${}^d\dot{\mathbf{q}}$  par leurs expressions :

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P}^d\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \left( \mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}} - \mathbf{P}^T\Omega\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\Omega\mathbf{P}\hat{\mathbf{K}}_c \right) {}^d\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{II.93})$$

Le premier terme de cette relation se simplifie grâce à la propriété d'orthogonalité de la matrice  $\mathbf{P}$  :  $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$  avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Il est nécessaire d'établir les expressions analytiques des deux autres matrices du problème, à savoir  $\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}$  et  $\mathbf{P}^T\Omega\mathbf{P}$ , de façon à vérifier que la projection proposée n'a pas généré de nouveaux coefficients temporels.

### Expression de la matrice $\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}$

La matrice de projection  $\mathbf{P}$  étant diagonale par blocs (*cf.* section II.3.2.1), les matrices  $\dot{\mathbf{P}}$  et  $\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}$  le sont également, ce qui permet d'étudier chaque bloc séparément. Le sous-bloc de la matrice  $\mathbf{P}$  associé au mode  $i$  d'harmonique  $m$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \text{mode simple : } \mathbf{P}_{i,m} &= \mathbf{R}(m\Omega t) \\ \text{mode double : } \mathbf{P}_{i,m} &= \mathbf{R}(m\Omega t) \otimes \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.94})$$

$\Omega$  correspond à la vitesse de rotation du rotor concerné. Pour faciliter l'écriture de la dérivée de ces termes, un opérateur de dérivation est défini, noté  $\nabla_{\mathbf{R}_m}$  et d'expression :

$$\nabla_{\mathbf{R}_m} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.95})$$

La dérivée de la matrice de rotation s'écrit alors  $\dot{\mathbf{R}}(m\Omega t) = \Omega\mathbf{R}(m\Omega t)\nabla_{\mathbf{R}_m}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \text{mode simple : } \dot{\mathbf{P}}_{i,m} &= \Omega\mathbf{P}_{i,m}\nabla_{\mathbf{R}_m} \\ \text{mode double : } \dot{\mathbf{P}}_{i,m} &= \Omega\mathbf{P}_{i,m}(\nabla_{\mathbf{R}_m} \otimes \mathbf{I}_2) \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

En réunissant les blocs associés aux différents modes à  $k$  diamètres, la dérivée de la matrice  $\mathbf{P}^k$ , donnée en exemple équation (II.87) s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{P}}^k = \Omega\mathbf{P}^k\nabla_{\mathbf{P}^k} \quad \text{avec} \quad \nabla_{\mathbf{P}^k} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{R}_k} & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \nabla_{\mathbf{R}_{k+n}} & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \nabla_{\mathbf{R}_{-k+N}} \otimes \mathbf{I}_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & & \nabla_{\mathbf{R}_{k+P_{\max}N}} & \end{bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

Finalement, en réintroduisant les indices  $\bullet_1$  et  $\bullet_2$  permettant de distinguer les deux rotors, la dérivée de la matrice de projection du rotor  $R_1$  est diagonale par blocs, contenant les sous-matrices

$\dot{\mathbf{P}}_1^k$ ,  $k = 0, \dots, K_{\max}$ , ce qui mène à l'expression :

$$\dot{\mathbf{P}}_1 = \Omega_1 \mathbf{P}_1 \nabla_{\mathbf{P}_1} \quad \text{avec} \quad \nabla_{\mathbf{P}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & \nabla_{\mathbf{P}_1^1} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \nabla_{\mathbf{P}_1^{K_{\max}}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.98})$$

Le processus est similaire pour la matrice de projection du rotor  $R_2$ . La dérivée de la matrice de projection du système couplé est ensuite construite par blocs :

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \nabla_{\mathbf{P}} \quad \text{avec} \quad \nabla_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \nabla_{\mathbf{P}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_2 \nabla_{\mathbf{P}_2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.99})$$

Dans ces conditions, le calcul du produit  $\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{P}}$  est immédiat et se résume à l'opérateur de dérivation  $\nabla_{\mathbf{P}}$ , indépendant du temps :

$$\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{P}} = \nabla_{\mathbf{P}} \quad (\text{II.100})$$

Ce terme ne génère donc pas de nouveau coefficient temporel dans l'équation du mouvement.

### Expression du produit $\mathbf{P}^T \Omega \mathbf{P}$

La construction de la matrice pseudo-spectrale  $\Omega$  est donnée équation (I.61). Cette matrice étant diagonale par blocs, il est de nouveau possible de traiter les blocs du produit  $\mathbf{P}^T \Omega \mathbf{P}$  indépendamment les uns des autres. Pour le  $i^{\text{ème}}$  mode simple, le sous-bloc associé dans la matrice  $\Omega$  s'écrit :

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} -\alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\alpha_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.101})$$

Cette structure bien particulière présente l'intérêt d'être invariante par rotation, et ce quel que soit l'angle de rotation :

$$\mathbf{R}^T \Omega_i \mathbf{R} = \Omega_i \quad (\text{II.102})$$

Pour le  $i^{\text{ème}}$  mode double, le sous-bloc de la matrice  $\Omega$  s'écrit cette fois-ci :

$$\Omega_i = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} -\alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\alpha_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.103})$$

Le sous-bloc associé dans la matrice de projection  $\mathbf{P}$  est de la forme  $\mathbf{P}_{m,i} = \mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_2$ . La projection du sous-bloc  $\Omega_i$  s'écrit donc :

$$\mathbf{P}_{m,i}^T \Omega_i \mathbf{P}_{m,i} = (\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{I}_2) \left( \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} -\alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\alpha_i \end{bmatrix} \right) (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_2) \quad (\text{II.104})$$

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker, cette expression se simplifie en :

$$\mathbf{P}_{m,i}^T \Omega_i \mathbf{P}_{m,i} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \otimes \begin{bmatrix} -\alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\alpha_i \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} -\alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\alpha_i \end{bmatrix} = \Omega_i \quad (\text{II.105})$$

Comme pour le mode simple, le sous-bloc  $\Omega_i$  associé à un mode double présente de nouveau une propriété d'invariance par rotation. La matrice pseudo-spectrale du système bi-rotor complet est donc invariante par la projection  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P}^T \Omega \mathbf{P} = \Omega \quad (\text{II.106})$$

Aucun nouveau terme temporel n'est donc introduit par cette étape de projection.

### Expression de l'équation libre du mouvement après projection

Finalement, l'équation du mouvement du système bi-rotor libre, en base modale et après projection, a pour expression :

$${}^d\dot{\mathbf{q}} + \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \Omega - \Omega \widehat{\mathbf{K}}_c \right) {}^d\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{II.107})$$

L'équation ainsi formulée est à coefficients constants, ce qui la rend beaucoup plus facile à traiter que l'équation de départ en base physique (II.2).

La dernière étape avant la mise en place d'une résolution est d'établir l'impact de la projection sur le spectre d'excitation.

#### 3.2.3 Projection des efforts extérieurs

En supprimant les coefficients périodiques dans l'équation libre du mouvement, la projection proposée partie II.3.2.1 entraîne un enrichissement du spectre des efforts extérieurs. Une connaissance précise de ce spectre étant nécessaire pour la résolution de l'équation, l'objet de cette section est d'établir la « liste » des harmoniques d'excitation dans les nouveaux repères d'étude, puis de ré-exprimer les efforts en fonction de ces harmoniques.

D'après l'équation du mouvement en base modale (II.55), les efforts extérieurs modaux, avant projection, ont pour expression :

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} -\Omega_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_{\text{ext},1} \\ -\Omega_2^g \mathbf{V}_2^T \mathbf{f}_{\text{ext},2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.108})$$

Lors de la projection de l'équation du mouvement dans de nouveaux repères, section II.3.2.2, l'ensemble de l'équation a été pré-multipliée par la matrice de projection  $\mathbf{P}^T$ . Cette opération doit également être appliquée aux efforts extérieurs. On rappelle que la matrice de projection  $\mathbf{P}$  est constituée des matrices de projection des deux rotors :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.109})$$

Ainsi, les efforts extérieurs en base modale dans les nouveaux repères d'étude ont pour expression :

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P}_1^T \Omega_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_{\text{ext},1} \\ -\mathbf{P}_2^T \Omega_2^g \mathbf{V}_2^T \mathbf{f}_{\text{ext},2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.110})$$

La suite des développements ne traite que les efforts extérieurs du rotor  $R_1$ , les résultats étant similaires pour le rotor  $R_2$ .

Les excitations extérieures prises en compte pour les simulations de ce mémoire sont de type synchrones, générées par les sillages du stator en amont de chaque roue aubagée. Pour simplifier leurs expressions, la répartition spatiale de ces excitations est assimilée à une sinusoïde. Ainsi, pour un stator possédant  $n_1$  aubages, la force d'excitation appliquée à la roue  $R_1$ , exprimée en continu dans le repère mobile  $\mathcal{R}_1$ , s'écrit :

$$\mathbf{f}_{\text{ext},1}(r, \alpha, x, t) = \mathbf{A}_1(r, x) \cos n_1(\Omega_1 t + \alpha) + \mathbf{B}_1(r, \alpha) \sin n_1(\Omega_1 t + \alpha) \quad (\text{II.111})$$

où  $r$ ,  $\alpha$  et  $x$  sont respectivement les positions radiale, angulaire et axiale d'un point de la roue aubagée soumis aux efforts extérieurs. Les coefficients  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{B}_1$  possèdent autant de composantes qu'il y a de ddl par nœud dans le modèle éléments finis considéré. En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, les termes dépendant du temps sont isolés de la position angulaire sur la roue, ce qui permet de reformuler les efforts extérieurs de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_{\text{ext},1} = \mathbf{f}_1^c \cos n_1 \Omega_1 t + \mathbf{f}_1^s \sin n_1 \Omega_1 t \quad (\text{II.112})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^c(r, \alpha, x) &= \mathbf{A}_1(r, x) \cos n_1 \alpha + \mathbf{B}_1(r, x) \sin n_1 \alpha \\ \mathbf{f}_1^s(r, \alpha, x) &= \mathbf{B}_1(r, x) \cos n_1 \alpha - \mathbf{A}_1(r, x) \sin n_1 \alpha \end{aligned} \quad (\text{II.113})$$

En utilisant cette formulation, les efforts modaux appliqués à la roue  $R_1$ , après projection dans les nouveaux repères ont pour expression :

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext},1} = -\cos(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_1^T \boldsymbol{\Omega}_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_1^c - \sin(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_1^T \boldsymbol{\Omega}_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_1^s \quad (\text{II.114})$$

Les termes  $\boldsymbol{\Omega}_1$ ,  ${}^g\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{f}_1^c$  et  $\mathbf{f}_1^s$  sont indépendants du temps et n'interviennent donc pas dans l'étude du spectre d'excitation. Ils sont réunis sous la forme de deux coefficients modaux afin d'alléger les notations :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{f}}_1^c &= -\boldsymbol{\Omega}_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_1^c \\ \widetilde{\mathbf{f}}_1^s &= -\boldsymbol{\Omega}_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_1^s \end{aligned} \quad (\text{II.115})$$

ce qui conduit à la nouvelle expression :

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext},1} = \cos(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_1^T \widetilde{\mathbf{f}}_1^c + \sin(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_1^T \widetilde{\mathbf{f}}_1^s \quad (\text{II.116})$$

Puisque la matrice de projection  $\mathbf{P}_1$  est diagonale par bloc, chaque bloc associé à un mode propre de la structure, il est possible de traiter séparément les composantes d'effort appliquées à chaque mode. Pour le mode  $i$  d'harmonique spatiale  $m$ , cette composante s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext},1,i} = \cos(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_{i,m}^T \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^c + \sin(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_{i,m}^T \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^s \quad (\text{II.117})$$

Ce terme correspond à 2 ou 4 lignes du vecteur  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext},1}$  en fonction de s'il s'agit d'un mode simple ou double. La détermination du spectre d'excitation consiste alors à établir les harmoniques générées par les produits  $\cos(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_{i,m}^T$  et  $\sin(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_{i,m}^T$ .

D'après la relation (II.85), le sous-bloc de la matrice  $\mathbf{P}_1^T$  associé au mode  $i$  d'harmonique spatiale  $m$  a pour expression :

$$\mathbf{P}_{i,m}^T = \mathbf{R}^T(m \Omega_1 t) (\otimes \mathbf{I}_2) \quad (\text{II.118})$$

Le produit de Kronecker n'existe que si le mode en question est double. En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, le produit de cette projection avec les harmoniques de l'excitation s'écrit :

$$\begin{aligned} \cos(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_{i,m}^T &= \frac{1}{2} [\mathbf{R}^T((n_1 + m) \Omega_1 t) + \mathbf{R}^T((n_1 - m) \Omega_1 t)] (\otimes \mathbf{I}_2) \\ \sin(n_1 \Omega_1 t) \mathbf{P}_{i,m}^T &= \frac{1}{2} [\mathbf{R}^T((n_1 + m) \Omega_1 t) - \mathbf{R}^T((n_1 - m) \Omega_1 t)] \boldsymbol{\Pi} (\otimes \mathbf{I}_2) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.119})$$

La projection associée au mode  $i$  d'harmonique spatiale  $m$ , génère donc 2 harmoniques dans le spectre d'excitation :  $(n_1 + m)\Omega_1$  et  $(n_1 - m)\Omega_1$ . Dans ces conditions, les efforts extérieurs projetés, associés au mode  $i$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext},1,i} = & \cos((n_1 + m)\Omega_1 t) \widehat{\mathbf{f}}_{1,i+}^c + \sin((n_1 + m)\Omega_1 t) \widehat{\mathbf{f}}_{1,i+}^s \\ & + \cos((n_1 - m)\Omega_1 t) \widehat{\mathbf{f}}_{1,i-}^c + \sin((n_1 - m)\Omega_1 t) \widehat{\mathbf{f}}_{1,i-}^s \end{aligned} \quad (\text{II.120})$$

L'expression des coefficients  $\widehat{\mathbf{f}}_{1,i\pm}^c$  et  $\widehat{\mathbf{f}}_{1,i\pm}^s$  se détermine en projetant les deux relations (II.119) sur les harmoniques  $\cos((n_1 \pm m)\Omega_1 t)$  et  $\sin((n_1 \pm m)\Omega_1 t)$  :

$$\begin{array}{ll} \text{modes simples :} & \text{modes doubles :} \\ \widehat{\mathbf{f}}_{1,i\pm}^c = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_2 \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^c \pm \mathbf{\Pi} \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^s \right) & \widehat{\mathbf{f}}_{1,i\pm}^c = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_4 \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^c \pm (\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{I}_2) \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^s \right) \\ \widehat{\mathbf{f}}_{1,i\pm}^s = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_2 \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^s \mp \mathbf{\Pi} \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^c \right) & \widehat{\mathbf{f}}_{1,i\pm}^s = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_4 \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^s \mp (\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{I}_2) \widetilde{\mathbf{f}}_{1,i}^c \right) \end{array} \quad (\text{II.121})$$

Par la suite, le vecteur complet des efforts extérieurs après projection se construit en réunissant les composantes associées à chaque mode propre dans les quatre vecteurs de coefficients  $\widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^c$  et  $\widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^s$  :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^c &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_{2n} \widetilde{\mathbf{f}}_1^c \pm \mathbf{\Pi}_{2n} \widetilde{\mathbf{f}}_1^s \right) \\ \widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^s &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_{2n} \widetilde{\mathbf{f}}_1^s \mp \mathbf{\Pi}_{2n} \widetilde{\mathbf{f}}_1^c \right) \end{aligned} \quad (\text{II.122})$$

$n$  correspond au nombre de modes propres du rotor  $R_1$ , chaque mode étant composé de 2 vecteurs.  $\mathbf{\Pi}_{2n}$  est une matrice diagonale par blocs contenant, dans l'ordre de rangement des modes du rotor, la matrice  $\mathbf{\Pi}$  pour les modes simples et  $\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{I}_2$  pour les modes doubles. Finalement, le vecteur complet des efforts extérieurs projetés appliqués au rotor  $R_1$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext},1} = & \cos \left( \left[ (n_1 + m_i)\Omega_1 t \right]_{i \in [1,2n]} \right) \widehat{\mathbf{f}}_{1+}^c + \sin \left( \left[ (n_1 + m_i)\Omega_1 t \right]_{i \in [1,2n]} \right) \widehat{\mathbf{f}}_{1+}^s \\ & + \cos \left( \left[ (n_1 - m_i)\Omega_1 t \right]_{i \in [1,2n]} \right) \widehat{\mathbf{f}}_{1-}^c + \sin \left( \left[ (n_1 - m_i)\Omega_1 t \right]_{i \in [1,2n]} \right) \widehat{\mathbf{f}}_{1-}^s \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

où les vecteurs  $\left[ (n_1 \pm m_i)\Omega_1 t \right]_{i \in [1,2n]}$  sont construits en juxtaposant les harmoniques d'excitations  $(n_1 \pm m_i)\Omega_1$  associées à l'harmonique spatiale  $m_i$  de chaque vecteur propre  $i$  dans l'ordre de rangement des vecteurs propres de la structure.

Ainsi, pour chaque harmonique spatiale  $m$  détectée dans les déformées des modes propres au niveau du roulement, deux harmoniques sont créées dans le spectre d'excitation, de pulsations  $(n_1 + m)\Omega_1$  et  $(n_1 - m)\Omega_1$ . Si  $N_m$  est le nombre total d'harmoniques spatiales détectées, alors le spectre d'excitation du rotor  $R_1$ , après projection dans les nouveaux repères, possède  $2N_m$  harmoniques contre une seule dans le repère mobile du rotor. Il est toutefois important de noter que cet enrichissement du spectre d'excitation n'implique que des harmoniques de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ . Une unique fréquence fondamentale subsiste donc.

### 3.3 Résolution fréquentielle de l'équation à coefficients constants

L'écriture en base modale et l'application de projections ont conduit à réécrire l'équation du mouvement du système bi-rotor sous la forme :

$${}^d\hat{\mathbf{q}} + \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\widehat{\mathbf{K}}_c \right) {}^d\hat{\mathbf{q}} = \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \quad (\text{II.124})$$

La nouvelle formulation de cette équation présente l'avantage d'être à coefficients constants. De plus, le spectre des efforts extérieurs étant connu, cette équation linéaire se résout très simplement dans le domaine fréquentiel en appliquant le principe de superposition : les solutions sont obtenues séparément pour chaque harmonique d'excitation, puis sommées afin de reconstruire la réponse complète du système.

Dans cette section, les harmoniques d'excitation du rotor  $i$  sont notées  $h_i = (n_i \pm m)\Omega_i$  avec  $m$  une harmonique spatiale de la base modale du rotor  $i$ . Pour chacune de ces harmoniques, la solution périodique de l'équation du mouvement est de la forme :

$${}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}(t) = {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^c \cos(h_it) + {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^s \sin(h_it) \quad (\text{II.125})$$

Cette expression est dérivée de façon à pouvoir substituer  ${}^d\hat{\mathbf{q}}$  et  ${}^d\dot{\hat{\mathbf{q}}}$  dans l'équation du mouvement (II.124) :

$${}^d\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{h_i}(t) = h_i \left( {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^s \cos(h_it) - {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^c \sin(h_it) \right) \quad (\text{II.126})$$

L'équation du mouvement est alors projetée sur les fonctions  $\cos(h_it)$  et  $\sin(h_it)$  de façon à séparer les différentes harmoniques présentes dans les efforts extérieurs dont l'expression est donnée équation (II.123) :

$$\begin{aligned} h_i {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^s + \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\widehat{\mathbf{K}}_c \right) {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^c &= \widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^c \\ -h_i {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^c + \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\widehat{\mathbf{K}}_c \right) {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^s &= \widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^s \end{aligned} \quad (\text{II.127})$$

Les coefficients d'excitation  $\widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^c$  et  $\widehat{\mathbf{f}}_{1\pm}^s$  prennent ici les valeurs des coefficients de la relation (II.121) pour les lignes associées à l'harmonique  $h_i$ , et des valeurs nulles pour les autres lignes. Finalement, le système d'équations (II.127) à résoudre pour chaque harmonique  $h_i$  s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\widehat{\mathbf{K}}_c & h_i \mathbf{I}_{2n} \\ -h_i \mathbf{I}_{2n} & \nabla_{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\widehat{\mathbf{K}}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^c \\ {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^s \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \pm \boldsymbol{\Pi}_{2n} \\ \mp \boldsymbol{\Pi}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{f}}_1^c \\ \widetilde{\mathbf{f}}_1^s \end{pmatrix} \quad (\text{II.128})$$

Cette fois-ci, il faut bien comprendre que les vecteurs de coefficients  $\widetilde{\mathbf{f}}_1^c$  et  $\widetilde{\mathbf{f}}_1^s$  sont annulés partout sauf pour les lignes associées à l'harmonique spatiale  $m$ , dont dépend la valeur de l'harmonique d'excitation  $h_i$  étudiée.

Ce système est alors résolu pour chaque valeur d'harmonique d'excitation  $h_i$ . La solution périodique de l'équation projetée (II.124) est ensuite reconstruite en sommant les contributions  ${}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}$  de chaque harmonique :

$${}^d\hat{\mathbf{q}}(t) = \sum_{h_i} \cos(h_it) {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^c + \sin(h_it) {}^d\hat{\mathbf{q}}_{h_i}^s \quad (\text{II.129})$$

Les déplacements temporels en base physique du système bi-rotor, exprimés dans les deux repères mobiles  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , sont finalement obtenus en appliquant le processus de transformation inverse

de l'équation du mouvement : projection dans les repères mobiles des deux rotors ( ${}^d\mathbf{q} = \mathbf{P}^d\widehat{\mathbf{q}}$ ) puis reconstitution des déplacements physiques à partir des vecteurs propres et des coordonnées modales ( $\mathbf{u} = {}^d\mathbf{V}^d\mathbf{q}$ ) :

$$\mathbf{u}(t) = {}^d\mathbf{VP}(t) \sum_{h_i} \cos(h_it) {}^d\widehat{\mathbf{q}}_{h_i}^c + \sin(h_it) {}^d\widehat{\mathbf{q}}_{h_i}^s \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.130})$$

## 4 Validations sur un modèle bi-anneau

La méthode de projection développée dans ce chapitre et permettant la suppression des coefficients temporels de l'équation du mouvement d'un système bi-rotor, est testée dans cette section sur un modèle bi-anneau. L'intérêt d'une telle structure est de respecter la géométrie de la zone de fixation du roulement d'un bi-rotor, et donc l'hypothèse d'axi-symétrie, tout en proposant des temps de calculs raisonnables et une interprétation *a priori* simplifiée des phénomènes vibratoires.

Compte tenu de la propriété d'axi-symétrie d'une structure d'anneau, la notion de secteur n'est plus vraiment justifiée. Ce découpage artificiel est malgré tout conservé afin d'appliquer la méthode développée dans les mêmes conditions que s'il s'était agi d'un vrai modèle de roue aubagée.

Les anneaux sont discrétisés par la méthode des éléments finis selon une modélisation poutre courbe. La solution de l'équation projetée (II.124) résolue dans le domaine fréquentiel est comparée à la solution de l'équation de départ (II.2) obtenue par intégration temporelle. La vitesse de rotation de chaque anneau est choisie grâce à l'étude de son diagramme de Campbell, afin d'obtenir une fréquence d'excitation proche de l'une de ses fréquences propres et ainsi amplifier les phénomènes vibratoires observés.

### 4.1 Définition de l'élément poutre courbe

L'anneau est discrétisé en éléments poutre courbe suivant le modèle utilisé par Legrand [41]. Chaque élément est constitué d'un barreau rectangulaire courbé de hauteur  $h$  et de largeur  $b$ . La relation suivante entre la longueur  $\ell$  de l'élément et le rayon  $R$  de l'anneau permet d'assurer à cet élément un rayon de courbure respectant la géométrie circulaire de l'anneau :

$$\ell = \frac{2\pi R}{Nn_s} \quad (\text{II.131})$$

La section d'un élément et son moment d'inertie ont respectivement pour expression  $S = bh$  et  $I = bh^3/12$ . Selon les notations introduites Figure II.6, et sachant que la notation  $\bullet_{,s}$  désigne la dérivée de la grandeur  $\bullet$  par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ , les fonctions de forme cubiques



utilisées, notées  $\mathbf{H}$ , ont pour expression :

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1(s) & M_2(s) & 0 & 0 & M_3(s) & M_4(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1(s) & M_2(s) & 0 & 0 & M_3(s) & M_4(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{,s1} \\ v_1 \\ v_{,s1} \\ u_2 \\ u_{,s2} \\ v_2 \\ v_{,s2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.132})$$

$$\begin{aligned} M_1(s) &= 1 - \frac{3s^2}{\ell^2} + \frac{2s^3}{\ell^3} \\ M_2(s) &= s - \frac{2s^2}{\ell} + \frac{s^3}{\ell^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3(s) &= \frac{3s^2}{\ell^2} - \frac{2s^3}{\ell^3} \\ M_4(s) &= \frac{s^3}{\ell^2} - \frac{s^2}{\ell} \end{aligned}$$

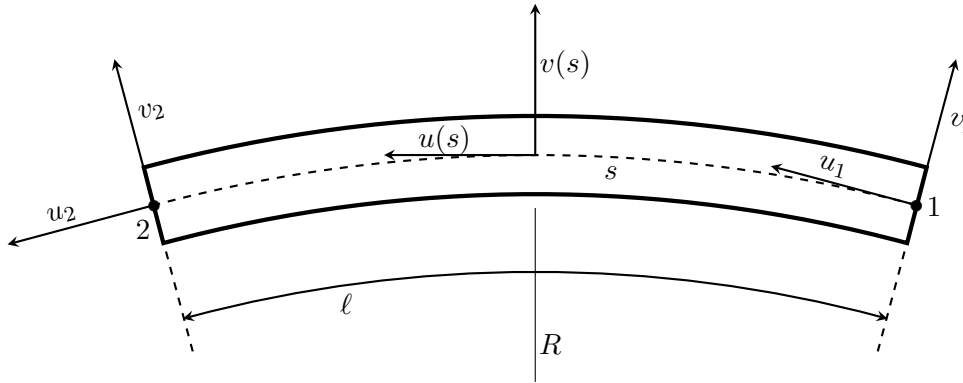


FIGURE II.6 – Schéma d'un élément poutre courbe et notations associées.

Les matrices de masse, des effets gyroscopiques et d'assouplissement centrifuge associées à ces fonctions de forme sont calculées suivant leurs expressions (I.16) données au Chapitre I. En notant  $E$  le module d'Young du matériau, le potentiel élastique permettant de déterminer la matrice de raideur d'un élément a pour expression :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^\ell ES \left( \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left( \frac{v}{R^2} + \frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 ds \quad (\text{II.133})$$

Un amortissement modal est appliqué, défini selon la méthode proposée dans la section I.3.3. Enfin, la raideur associée à la précharge statique découle du potentiel suivant :

$$E_{p_{\text{prec}}} = \frac{E}{4} \int_0^\ell [SB_0 (A^2 + B^2) + I (C^2 B_0 + 2BCC_0)] ds \quad (\text{II.134})$$

$$\text{avec} \quad A = \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R}, \quad B = \frac{du}{ds} + \frac{v}{R}, \quad C = \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \quad (\text{II.135})$$

Les termes  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$  correspondent aux valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$  calculées pour les déplacements initiaux notés  $\mathbf{U}_0$  et engendrés par la précharge statique. Ces déplacements initiaux sont établis à

partir du vecteur des forces d'inerties  $\mathbf{r}$  dont l'expression est la suivante (*cf.* section I.2.2), dans le cas d'un mouvement de rotation uniforme de l'anneau :

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \rho S \mathbf{H}^T \underline{\boldsymbol{\Omega}}^T \underline{\boldsymbol{\Omega}} \begin{bmatrix} R \\ s \end{bmatrix} ds \quad (\text{II.136})$$

Il s'agit alors de forces d'inertie centrifuges. Connaissant l'expression de ces efforts, les déplacements initiaux  $\mathbf{U}_0$  liés à cette précharge statique sont obtenus grâce à la relation :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{U}_0 = \mathbf{r} \quad (\text{II.137})$$

En se plaçant sur la fibre neutre, soit en  $v = 0$ , le terme  $C$  s'annule et l'énergie potentielle associée à la précharge statique se simplifie en :

$$E_{p_{\text{prec}}} = \frac{E}{4} \int_0^\ell SB_0 (A^2 + B^2) ds \quad (\text{II.138})$$

Les expressions finales de l'ensemble des matrices d'un élément poutre courbe sont données en Annexe D.

## 4.2 Paramétrage de la décomposition spatiale des vecteurs propres dans la zone du roulement

La décomposition des vecteurs propres au niveau du roulement sous la forme d'harmoniques spatiales nécessite de déterminer certains paramètres directement liés modèle EF utilisé. Parmi eux, le nombre maximum d'harmoniques distinctes pouvant être détectées dans les déformées modales dépend de la discrétisation choisie ainsi que des fonctions de forme. Les coefficients  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$ , introduits par la relation (II.40) et nécessaires pour ces décompositions, se calculent également à partir de l'expression des fonctions de forme. Ces paramètres sont établis dans cette section pour le modèle d'anneau en éléments finis poutre courbe.

### 4.2.1 Harmonique spatiale maximale

Les fonctions de forme proposées pour décrire un élément poutre courbe de l'anneau sont cubiques. Le degré maximum d'oscillation pouvant être observé avec de telles fonctions est d'une période d'oscillation sur un élément, comme représenté Figure II.7.



FIGURE II.7 – Degré d'oscillation maximum pouvant être observé sur un élément avec des fonctions de forme cubiques.

L'anneau étant constitué de  $Nn_s$  éléments, l'harmonique maximale pouvant être détectée correspond à l'harmonique  $m_{\text{max}} = Nn_s$ . En utilisant le diagramme zigzag représenté Figure II.3, il est alors possible de déterminer, pour chaque nombre de diamètre  $k$ , les valeurs de  $p$  autorisées

lors de la décomposition de l'ordre  $m$  d'une harmonique sous la forme  $m = \pm k + pN$  :

$$\begin{aligned}
k = 0 : \quad m &= pN & 0 \leq p \leq n_s \\
k = \frac{N}{2} : \quad m &= \frac{N}{2} + pN & 0 \leq p \leq n_s - 1 \\
0 < k < \frac{N}{2} : \quad m &= k + pN & 0 \leq p \leq n_s - 1 \\
m &= -k + pN & 1 \leq p \leq n_s
\end{aligned} \tag{II.139}$$

Il n'est pas absolument nécessaire d'établir ces décompositions  $m = \pm k + pN$  pour appliquer la méthode développée, la connaissance de l'ordre maximum  $m_{\max}$  étant suffisante. Toutefois, ces décompositions permettent de cibler les harmoniques compatibles avec chaque diamètre  $k$ , et ainsi de limiter le nombre de projections à effectuer. Il s'agit donc simplement d'une optimisation numérique.

#### 4.2.2 Calcul des coefficients $\mathbf{C}$ et $\mathbf{S}$

La projection des vecteurs propres au niveau du roulement sur leurs harmoniques spatiales est présentée dans la partie II.2.2.2. L'expression des coefficients associés contient deux matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  uniquement dépendantes des fonctions de forme choisies et du numéro de l'harmonique spatiale recherchée. On rappelle leurs expressions :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \cos(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta \\
\mathbf{S} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \sin(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{II.140}$$

Après calcul, on obtient dans le cas des fonctions de forme cubiques choisies pour l'élément poutre courbe :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
C_1(m) &= \frac{1}{\pi m^3 \alpha_s^2} \left( \frac{12}{m\alpha_s} - \frac{12}{m\alpha_s} \cos(m\alpha_s) - 6 \sin(m\alpha_s) \right) \\
C_2(m) &= \frac{R}{\pi m^3 \alpha_s} \left( \frac{6 - m^2 \alpha_s^2}{m\alpha_s} - \frac{6}{m\alpha_s} \cos(m\alpha_s) - 2 \sin(m\alpha_s) \right) \\
C_3(m) &= \frac{1}{\pi m^3 \alpha_s^2} \left( \frac{12}{m\alpha_s} \cos(m\alpha_s) + (m^2 \alpha_s^2 + 6) \sin(m\alpha_s) - \frac{12}{m\alpha_s} \right) \\
C_4(m) &= \frac{R}{\pi m^3 \alpha_s} \left( \frac{m^2 \alpha_s^2 - 6}{m\alpha_s} \cos(m\alpha_s) - 4 \sin(m\alpha_s) + \frac{6}{m\alpha_s} \right) \\
S_1(m) &= \frac{1}{\pi m^3 \alpha_s^2} \left( 6 \cos(m\alpha_s) - \frac{12}{m\alpha_s} \sin(m\alpha_s) + 6 + m^2 \alpha_s^2 \right) \\
S_2(m) &= \frac{2R}{\pi m^3 \alpha_s} \left( \cos(m\alpha_s) - \frac{3}{m\alpha_s} \sin(m\alpha_s) + 2 \right) \\
S_3(m) &= \frac{1}{\pi m^3 \alpha_s^2} \left( -(6 + m^2 \alpha_s^2) \cos(m\alpha_s) + \frac{12}{m\alpha_s} \sin(m\alpha_s) - 6 \right) \\
S_4(m) &= \frac{R}{\pi m^3 \alpha_s} \left( 4 \cos(m\alpha_s) + \frac{m^2 \alpha_s^2 - 6}{m\alpha_s} \sin(m\alpha_s) + 2 \right)
\end{aligned} \tag{II.141}$$

Pour mémoire,  $\alpha_s$  correspond à l'angle entre deux nœuds consécutifs de l'anneau. Pour l'harmonique 0, les coefficients  $\mathbf{S}$  sont tous nuls et les coefficients  $\mathbf{C}$  s'écrivent :

$$\mathbf{C}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \mathbf{H}(\theta) d\theta \quad (\text{II.142})$$

soit

$$\begin{aligned} C_1(0) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} & C_3(0) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \\ C_2(0) &= \frac{R\alpha_s^2}{12\pi} & C_4(0) &= -\frac{R\alpha_s^2}{12\pi} \end{aligned} \quad (\text{II.143})$$

### 4.3 Simulations numériques temporelles et fréquentielles

#### 4.3.1 Modèle éléments finis et paramétrage retenu

En utilisant le modèle EF poutre courbe défini en début de section, deux anneaux sont construits afin de tester la méthode de projection de l'équation du mouvement développée dans ce chapitre. Les paramètres géométriques et matériau utilisés pour les simulations de cette section sont les suivants :

$$\begin{aligned} R &= 0,05 \text{ m} & E &= 210 \text{ GPa} \\ b &= 0,01 \text{ m} & \rho &= 7800 \text{ kg.m}^3 \\ h &= 0.005 \text{ m} & \xi &= 1\% \end{aligned} \quad (\text{II.144})$$

Le nombre d'éléments de chaque anneau doit être suffisamment important pour permettre aux phénomènes vibratoires de s'établir, mais également relativement limité afin d'assurer des temps de calculs raisonnables. En prévision d'une résolution de l'équation physique de départ par intégration temporelle, il est préférable de choisir une discrétisation équivalente des deux structures dans la zone de fixation du roulement, soit dans le cas présent un nombre d'éléments égal pour les deux anneaux. En effet, cette propriété permet de simplifier la construction de la matrice de raideur de couplage en base physique. Il est toutefois possible de choisir un nombre de secteurs différents en compensant par le nombre d'éléments par secteur. Le paramétrage retenu est le suivant :

$$\begin{aligned} N_1 &= 3 & N_2 &= 6 \\ n_{s,1} &= 6 & n_{s,2} &= 3 \end{aligned} \quad (\text{II.145})$$

Pour s'affranchir des modes de corps rigide, chaque anneau est placé sur un lit de ressorts : une raideur de valeur  $k_a$ , liée à un bâti tournant avec la structure, est fixée tangentiellement en chaque nœud du modèle éléments finis comme représenté Figure II.8. Ces raideurs d'attache tournent avec l'anneau.

Le comportement modal de chaque anneau en fonction de sa vitesse de rotation peut être étudié à l'aide d'un diagramme de Campbell. Le principe de ce diagramme est de tracer l'évolution des fréquences propres d'un système en fonction de sa vitesse de rotation. La superposition des régimes moteur permet de déterminer les vitesses de rotation critiques pour lesquelles la fréquence de vibration de l'arbre coïncide avec une fréquence propre de la structure, entraînant des amplitudes de vibration maximales.

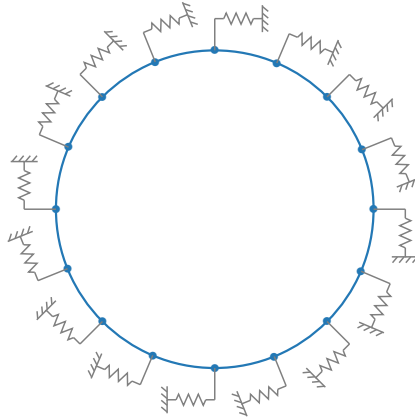


FIGURE II.8 – Raideurs d’attache placées en chaque nœud du modèle EF d’anneau pour en supprimer les modes de corps rigide

Dans le cas des anneaux, les modes créés par la présence des raideurs d’attache sont fortement dépendants des effets liés à la vitesse de rotation. Leur assouplissement avec la vitesse conduit rapidement à l’apparition d’instabilités dont la physique ne présente pas d’intérêt pour la présente étude. La valeur de  $k_a$  doit donc être suffisamment élevée pour s’assurer que le début des zones d’instabilité se trouve bien en dehors des plages de vitesse à étudier. Cette valeur doit néanmoins rester raisonnable au risque de fortement perturber les autres modes propres de l’anneau.

Dans le cas présent, les deux anneaux possèdent les mêmes caractéristiques géométriques et le même nombre d’éléments. Leurs modes propres sont donc identiques ce qui permet de se limiter à une seule étude de diagramme de Campbell, tracé Figure II.9 pour la valeur  $k_a = 5 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$ . Cette valeur assure la stabilité des modes liés aux raideurs d’attache, en pointillés sur le diagramme, dans la zone où les modes propres d’harmoniques spatiales 2 et 3 croisent les ordres d’excitation moteurs associés, notés  $2N$  et  $3N$ . Ces coïncidences sont repérées par des ronds orange et déterminent les vitesses de rotation pour lesquelles la réponse de chacun de ces modes sera maximale :  $19420 \text{ rad.s}^{-1}$  pour le mode d’harmonique spatiale 2 et  $14360 \text{ rad.s}^{-1}$  pour le mode d’harmonique spatiale 3.

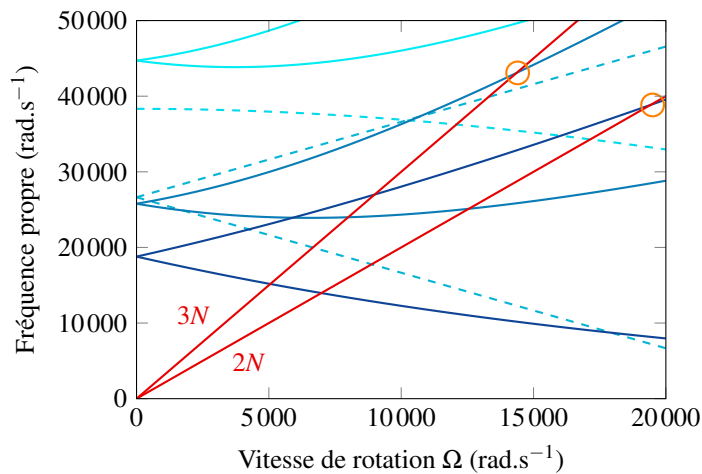


FIGURE II.9 – Diagramme de Campbell du modèle d’anneau retenu pour les simulations avec la superposition des régimes moteur  $2N$  et  $3N$  (—). Modes liés aux raideurs d’attache (---).

Il faut s'attendre à ce que les fréquences propres des deux anneaux soient légèrement décalées avec la prise en compte du couplage. Ces deux valeurs de vitesse donnent néanmoins un ordre de grandeur à respecter pour obtenir une fréquence d'excitation compatible avec les modes d'harmoniques spatiales 2 et 3 qui seront étudiés dans les simulations. Ces deux valeurs sont donc conservées :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= 19420 \text{ rad.s}^{-1} \\ \Omega_2 &= -14360 \text{ rad.s}^{-1}\end{aligned}\tag{II.146}$$

Enfin, la densité de raideur modélisant le roulement est choisie purement radiale et fixée à une valeur de  $\kappa_v = 10^7 \text{ N.m}^{-1}\text{rad}^{-1}$ .

Comme expliqué dans la section II.3.2.3, les efforts appliqués sur toute la circonférence de l'anneau sont fixes dans le repère fixe, de répartition spatiale sinusoïdale. Ces efforts sont purement radiaux, d'amplitude fixée à  $f_v = 10^5 \text{ N}$  pour toutes les simulations de cette section.  $f_v$  correspond ici à la valeur dans la direction radiale des coefficients  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{B}_1$  de l'expression (II.111) des efforts extérieurs :

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} f_u = 0 \\ f_v \end{pmatrix}\tag{II.147}$$

Seule l'harmonique de la répartition spatiale, représentant le nombre de sillages d'excitations, est susceptible de varier.

Les résultats de deux simulations sont présentés ici. Dans la première, seul l'anneau 1 est soumis à une excitation d'harmonique 2, le second ne pouvant vibrer que par l'intermédiaire des transferts d'énergie au travers du roulement. On s'assure ainsi qu'un échange énergétique non-négligeable s'instaure bien entre les deux structures. La deuxième simulation est réalisée en situation multi-fréquentielle : une excitation d'harmonique 3 est ajoutée sur l'anneau 2 afin d'étudier la superposition des deux excitations sur chacune des deux structures.

#### 4.3.2 Première simulation : excitation d'un seul anneau

Pour cette première simulation, l'anneau 1 est soumis à un effort d'harmonique 2. Compte tenu du diagramme de Campbell tracé Figure II.9, cet anneau est ainsi supposé répondre sur son mode d'harmonique spatiale 2. Aucune excitation extérieure n'est appliquée à l'anneau 2. L'évolution temporelle des déplacements radiaux d'un nœud de chaque anneau sont tracés Figure II.10, en superposant la résolution temporelle de l'équation de départ (en bleu) avec la résolution fréquentielle de l'équation projetée (en orange).

En l'absence d'information sur la réponse des anneaux, la résolution temporelle est initialisée sur une configuration non-déformée du système bi-anneau. Le régime transitoire observé est alors relativement long, ce qui nécessite un nombre d'itérations important pour atteindre le régime stationnaire. Il aurait bien sûr été possible de choisir la solution fréquentielle comme initialisation, supprimant alors le régime transitoire. Cependant, en plus de valider la méthode développée, l'objectif de ces simulations est d'en montrer l'utilité, notamment en terme de gain en temps de calcul par rapport aux méthodes classiques.

Une fois le régime permanent atteint, les deux méthodes de résolution se superposent parfaitement pour les deux anneaux. Les fréquences de vibration observées correspondent au double de la

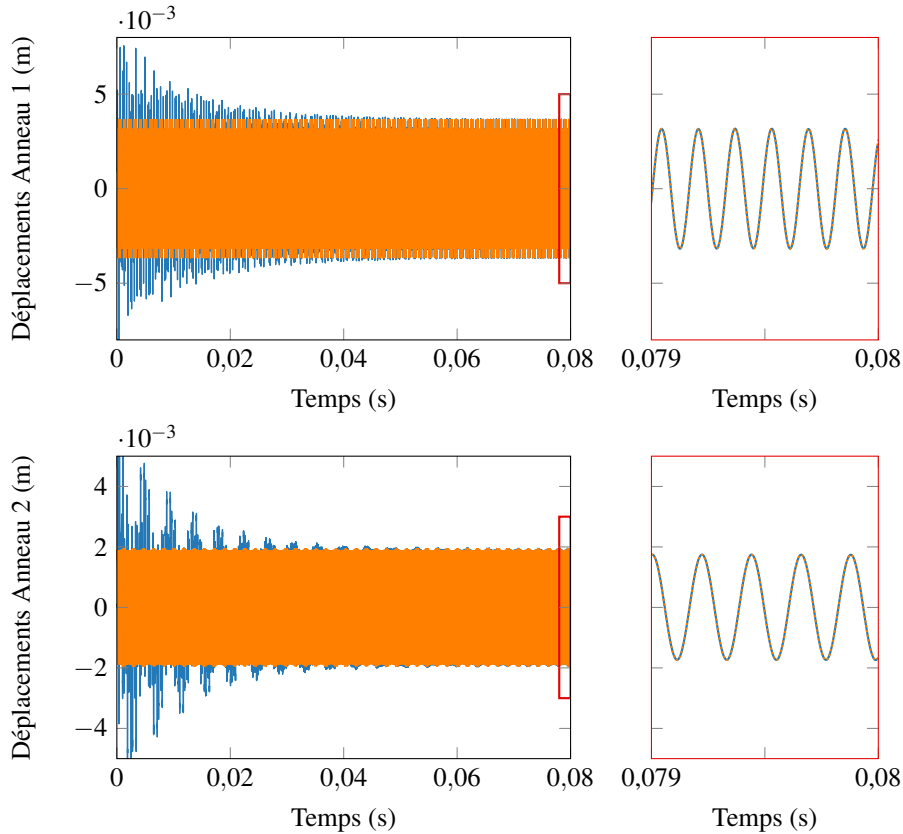


FIGURE II.10 – Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (—), zoom sur l'état stationnaire (□).

vitesse de rotation de chaque anneau, ce qui est bien cohérent avec une excitation d'harmonique 2. Enfin, on notera que les amplitudes de vibration de l'anneau 2 sont plus faibles que celles du premier.

### 4.3.3 Seconde simulation : excitation simultanée des deux anneaux

D'autres calculs ont été réalisés en appliquant cette fois-ci un effort à chacun des anneaux, respectivement d'harmoniques spatiales 2 et 3. Les vitesses de rotation (II.146) des deux structures ont été fixées grâce au diagramme de Campbell de la Figure II.9 de façon à se placer aux alentours des modes propres associés à ces deux harmoniques. Les déplacements radiaux d'un nœud de chaque anneau sont présentés Figure II.11 en superposant de nouveau résolutions temporelle et fréquentielle.

La durée du régime transitoire observé est du même ordre de grandeur que pour la première simulation. Une fois le régime stationnaire atteint, les deux méthodes de résolution se superposent de nouveau parfaitement. La réponse des deux anneaux n'est plus tout à fait sinusoïdale en raison de la superposition des deux excitations. L'amplitude de vibration du premier anneau est restée similaire au cas précédent, bien que la forme des oscillations soit perturbée par la contribution de l'anneau 2. Celui-ci présente quant à lui des amplitudes de vibration bien plus importantes que précédemment, son propre effort extérieur d'harmonique 3 prenant le dessus sur les vibrations transmises par le roulement.

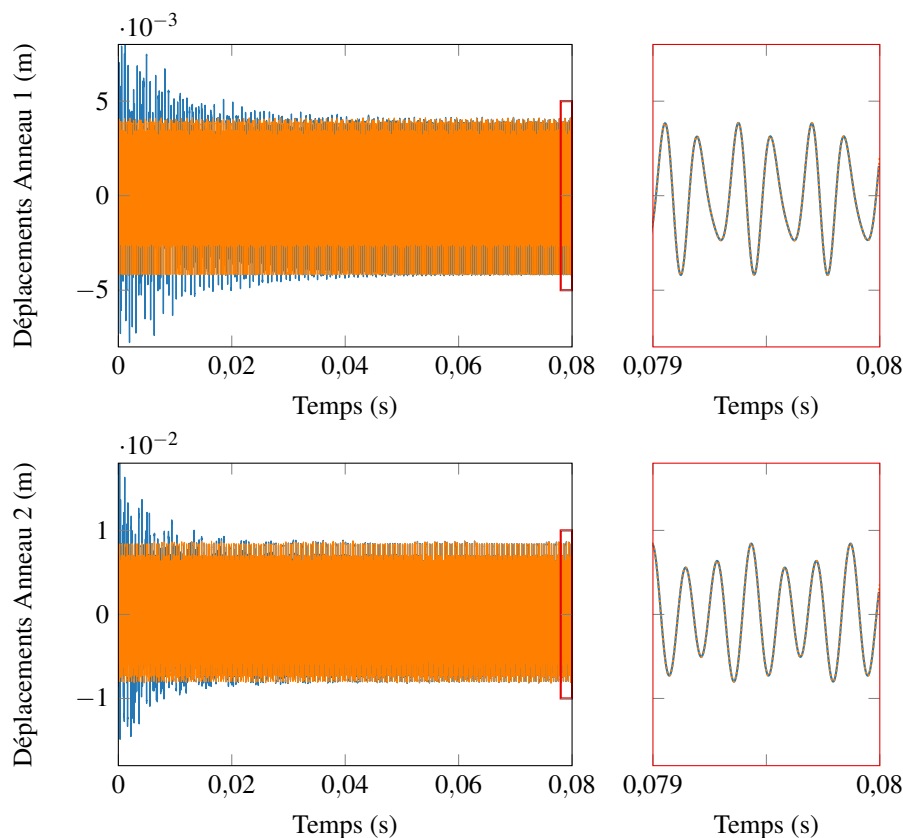


FIGURE II.11 – Déplacements radiaux au cours du temps d’un nœud de chaque anneau. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (—), zoom sur l’état stationnaire (□).

La méthode proposée donne donc de très bons résultats sur ce système axi-symétrique bi-anneau, pour lequel des transferts d’énergie au travers du roulement sont bien présents. De plus, elle permet un gain de temps notable par rapport à une résolution temporelle, la projection puis résolution fréquentielle ne nécessitant que quelques secondes contre environ 1h pour l’intégration temporelle.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de transformation de l’équation du mouvement d’un système bi-rotor aubagé a été présentée, dans le but de supprimer les coefficients temporels inhérents aux vitesses de rotation distinctes des deux structures couplées. Le principe est de focaliser l’étude sur le comportement vibratoire du bi-rotor à l’interface de transfert de l’énergie, à savoir le roulement. En fonction de la compatibilité de leurs déformées dans cette zone, les vecteurs propres des deux structures sont appairés, puis projetés dans de nouveaux repères tournants. Ces repères de projection sont propres à chaque harmonique spatiale présente dans les déformées modales des rotors dans la zone de couplage. Le comportement dynamique de chaque structure est ainsi scindé sur ses modes propres, puis projeté dans une multitude de repères différents. La résolution fréquentielle de l’équation à coefficients constants alors obtenue est immédiate.

Cette méthode a été validée sur une structure simple bi-anneau lors de calculs de réponse forcée, en comparant une résolution fréquentielle de l’équation projetée avec une intégration



temporelle de l'équation de départ. Ces premières simulations laissent présager l'intérêt numérique de la méthode proposée, le gain en temps de calcul étant notable par rapport à une résolution temporelle (quelques secondes contre environ 1h). Cet aspect sera d'autant plus visible avec une structure plus réaliste possédant un plus grand nombre de ddl.

La méthode développée s'appuie toutefois sur une hypothèse principale : il est supposé que le comportement vibratoire de chaque roue aubagée, dans la zone de fixation du roulement, peut être considéré comme axi-symétrique. Cela permet de limiter la description de chaque vecteur propre dans cette zone à une unique harmonique spatiale, condition nécessaire au bon déroulement des projections. Cette hypothèse ne peut être validée sur la structure bi-anneau compte tenu de sa géométrie déjà axi-symétrique. L'étude d'une structure plus complexe, de géométrie cyclique mais non axi-symétrique, est donc nécessaire pour valider notre approche et en étudier les limites. Cette étude fait l'objet du prochain chapitre.

## Chapitre III

# Application à un modèle bi-rotor simplifié

*Les premières simulations effectuées sur un système bi-anneau ont permis de tester la méthode de projection de l'équation du mouvement présentée Chapitre II sur un système simple au comportement vibratoire connu et assurant un nombre de ddl limité. Toutefois, la géométrie axi-symétrique de ce type de structure ne permet pas d'assurer que la principale hypothèse de la méthode – à savoir la prise en compte d'une seule harmonique spatiale par vecteur propre au niveau du roulement – est bien valable dans le cas d'un système plus complexe. L'objectif de ce chapitre est donc d'étendre l'étude à un modèle de roues aubagées afin d'introduire une notion de périodicité, ce modèle devant rester simple de façon à limiter les coûts numériques. Une fois la méthode validée pour cette structure bi-rotor, divers calculs sont menés afin de mieux en comprendre le comportement vibratoire et notamment ses conditions de stabilité.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modèle éléments finis étudié . . . . .</b>	<b>86</b>
1.1	Calcul des coefficients <b>C</b> et <b>S</b> . . . . .	87
1.2	Configuration utilisée pour les simulations numériques . . . . .	88
<b>2</b>	<b>Validation de la méthode développée . . . . .</b>	<b>88</b>
2.1	Paramétrage des calculs . . . . .	89
2.2	Comparaison des simulations numériques . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Comportement vibratoire sur plusieurs plages de vitesse . . . . .</b>	<b>93</b>
3.1	Première plage de vitesse (co-rotatif) . . . . .	94
3.2	Deuxième plage de vitesse (contra-rotatif) . . . . .	95
3.3	Troisième plage de vitesse (co-rotatif) . . . . .	97
3.4	Conclusion . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Étude de la stabilité du système . . . . .</b>	<b>98</b>
4.1	Mise en équation d'un modèle d'anneau par la méthode de Rayleigh-Ritz . . . . .	98
4.2	Corrélation avec les deux modèles d'anneaux . . . . .	103
4.3	Étude de la stabilité du système bi-anneau . . . . .	110
4.4	Extension au système bi-rotor aubagé . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>120</b>

---

## 1 Modèle éléments finis étudié

Le modèle EF étudié, représenté Figure III.1, est composé de deux roues aubagées coaxiales simplifiées, possédant respectivement 48 et 24 secteurs. Ces roues aubagées sont modélisées à partir d'un unique secteur, les propriétés mathématiques de symétrie cyclique étant exploitées pour les calculs. De cette façon, le problème se limite à 1872 ddl pour les deux secteurs pris

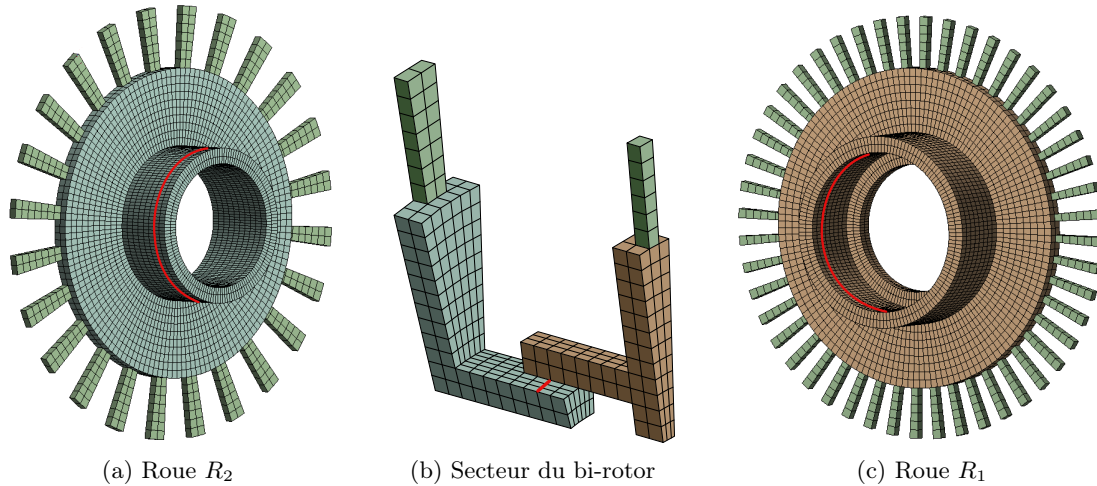


FIGURE III.1 – Modèle éléments finis du système bi-rotor aubagé avec en rouge les lignes de fixation des raideurs modélisant le roulement.

ensemble, contre 31506 pour la structure complète. Ce modèle EF est construit avec l'élément hexaédrique SOLID185 d'ANSYS. Deux contraintes de maillages sont à respecter :

- La ligne de fixation des raideurs de couplage doit coïncider sur chaque roue aubagée avec une ligne du maillage de façon à faciliter la construction de la matrice de couplage.
- Sur cette ligne de fixation des raideurs, les modèles EF des deux roues aubagées doivent posséder, dans une configuration  $360^\circ$ , le même nombre de nœuds. Cette contrainte facilite la construction de la matrice de couplage en base physique, nécessaire uniquement pour les calculs en intégration temporelle destinés à valider la méthode fréquentielle. Il ne s'agit donc pas d'une vraie limitation puisqu'elle ne concerne pas la méthode développée.

La construction de la matrice de couplage dans les nouveaux repères de projection nécessite de décomposer les vecteurs propres continus, au niveau de la ligne de fixation des raideurs, sous la forme d'harmoniques spatiales. Il est alors nécessaire de connaître l'expression des fonctions de forme sur cette ligne du maillage de façon à reconstruire les vecteurs propres continus à partir des vecteurs propres EF obtenus par une analyse modale sur le maillage. Les développements associés dans le cas de l'élément SOLID185 d'ANSYS sont présentés en Annexe E. En notant  $\alpha_s$  la

largeur angulaire d'un élément, les fonctions de forme obtenues ont pour expression :

$$\begin{pmatrix} u(\theta) \\ v(\theta) \\ w(\theta) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1(\theta) & 0 & 0 & M_2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & M_1(\theta) & 0 & 0 & M_2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & M_1(\theta) & 0 & 0 & M_2(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(\theta)} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.1})$$

$$\begin{aligned} M_1(\theta) &= 1 - \frac{\theta}{\alpha_s} \\ M_2(\theta) &= \frac{\theta}{\alpha_s} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_s \quad (\text{III.2})$$

### 1.1 Calcul des coefficients $\mathbf{C}$ et $\mathbf{S}$

Lors de la construction de la matrice de couplage, des matrices de coefficients  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  uniquement dépendantes des fonctions de forme et de l'ordre  $m$  d'une harmonique spatiale, sont nécessaires pour la décomposition en harmoniques des vecteurs propres (*cf.* section II.2.2.2). Pour rappel, ces matrices ont pour expression :

$$\mathbf{C}(m \neq 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \cos(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta \quad \mathbf{C}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha_s} \mathbf{H}(\theta) d\theta \quad (\text{III.3})$$

$$\mathbf{S}(m \neq 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_s} \sin(m\theta) \mathbf{H}(\theta) d\theta \quad \mathbf{S}(0) = 0 \quad (\text{III.4})$$

ce qui donne, dans le cas des fonctions de forme (III.1) :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

avec

$$\begin{aligned} C_1(0) &= C_2(0) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \\ C_1(m) &= \frac{1}{\pi m^2 \alpha_s} (1 - \cos m\alpha_s) \\ C_2(m) &= \frac{1}{\pi m} \left( \frac{\cos m\alpha_s}{m\alpha_s} + \sin m\alpha_s - \frac{1}{m\alpha_s} \right) \\ S_1(m) &= \frac{1}{\pi m} \left( 1 - \frac{\sin m\alpha_s}{m\alpha_s} \right) \\ S_2(m) &= \frac{1}{\pi m} \left( -\cos m\alpha_s + \frac{\sin m\alpha_s}{m\alpha_s} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Ces coefficients font partie des paramètres à renseigner lors de la définition du système étudié, au même titre que le nombre de secteurs ou les propriétés matériaux.

## 1.2 Configuration utilisée pour les simulations numériques

Les principales dimensions et conditions limites appliquées au modèle bi-rotor pour les simulations numériques de ce chapitre sont présentées Figure III.2.

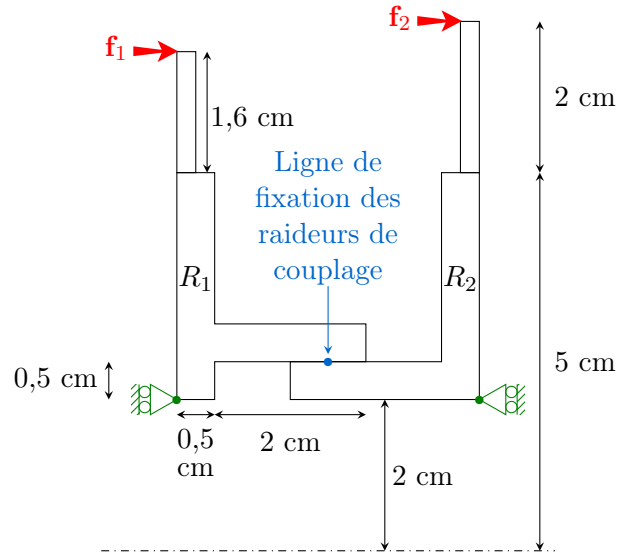


FIGURE III.2 – Schéma des principales dimensions et conditions limites du système bi-rotor.

Pour chaque roue aubagée, les déplacements d'une arête située à la base du disque est contraint dans la direction axiale de façon à supprimer les modes de corps rigide. La formulation en symétrie cyclique élimine automatiquement ceux des autres directions.

Les raideurs de couplage sont fixées sur une ligne circulaire tournant autour de l'axe de révolution. Le plan du schéma étant perpendiculaire à cette ligne, un seul point est visible. Pour les développements présentés dans ce mémoire, le modèle de roulement se limite à des raideurs purement radiales. Il pourrait être complexifié, la méthode de résolution étant prévue pour tenir compte des trois directions de couplage. Enfin, les excitations des deux roues aubagées sont axiales et situées sur une arête au sommet des aubes.

Les matrices de masse et de raideur sont fournies par le code EF ANSYS. Une matrice d'amortissement modale est ajoutée lors de la construction du modèle dans le code Python sur le principe de la section I.3.3.2. Pour ce modèle bi-rotor, les effets gyroscopiques, le raidissement et l'assouplissement centrifuge sont négligés, les matrices associées n'ayant pu être extraites du modèle ANSYS. Toutefois leur prise en compte est prévue par la méthode de projection développée et ne devrait en théorie pas modifier les temps de calcul ni les conclusions de l'étape de validation. En revanche, elle complexifierait l'étude présentée section III.3 concernant le comportement du bi-rotor sur des plages de vitesse. En effet, les bases modales seraient alors dépendantes des vitesses de rotation et devraient donc être recalculées pour chaque couple de vitesse  $(\Omega_1, \Omega_2)$ .

## 2 Validation de la méthode développée

La méthode de projection de l'équation du mouvement développée dans le Chapitre II et destinée à se débarrasser des termes périodiques temporels indésirables, n'a pour l'instant été testée que sur un modèle axisymétrique d'anneaux. L'objectif de cette section est d'intégrer la

notion de symétrie cyclique en effectuant le même type de simulations et de comparaisons entre les résolutions temporelle et fréquentielle, cette fois-ci sur le modèle EF simplifié de roue aubagée introduit dans la section III.1.

## 2.1 Paramétrage des calculs

Quels que soient les calculs effectués, le résultat recherché consiste à observer un couplage entre les deux rotors, ce qui nécessite de choisir une configuration assurant une transmission d'énergie au travers du roulement. Pour cela, l'effort appliqué doit solliciter au moins un mode propre du rotor excité dont la déformée dans la zone du roulement est significative. Une transmission d'énergie non-négligeable vers le second rotor est ainsi assurée.

Après visualisation des déformées modales de chaque roue aubagée séparément dans ANSYS, le premier mode à 2 diamètres de la roue  $R_1$ , représenté Figure III.3, semble le plus adapté compte tenu de la déformation notable de la zone de fixation du roulement. Il est intéressant de noter que le même mode pour la roue  $R_2$  présente une déformée de cette même zone bien plus faible, et sera donc probablement moins visible dans les phénomènes de couplage.

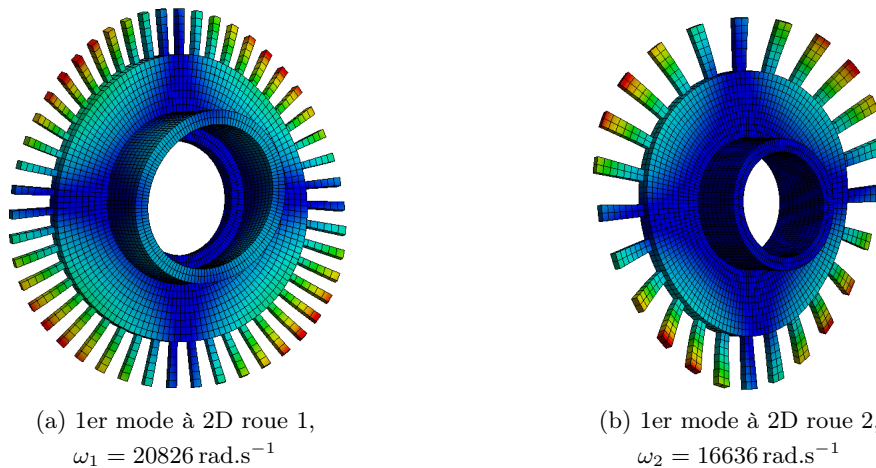


FIGURE III.3 – Visualisation des déformées modales du premier mode à 2 diamètres de chaque roue aubagée.

L'excitation du mode choisi nécessite d'appliquer un effort cohérent spatialement et fréquentiellement, c'est-à-dire un effort à 2 diamètres (deux sillages dans le cas d'une excitation aérodynamique) et à la fréquence moitié de la fréquence propre visée (*cf.* section I.4.1.1). Comme dans le cas des anneaux, il est fait le choix de travailler avec une excitation fixe dans le repère fixe, spatialement sinusoïdale. La vitesse de rotation du rotor  $R_1$ , directement liée à sa fréquence d'excitation, doit être d'environ  $\Omega_1 \simeq 10415 \text{ rad.s}^{-1}$  pour exciter le premier mode à 2 diamètres. Il n'est pas nécessaire de chercher à atteindre la fréquence propre exacte du mode, celle-ci étant amenée à varier légèrement en situation couplée. Un ordre de grandeur est suffisant.

La valeur de la densité des raideurs de couplage  $\kappa$  est un autre paramètre important dans la mise en place des phénomènes vibratoires : elle doit être ni trop faible afin d'assurer un transfert d'énergie au travers du roulement, ni trop élevée de façon à ce que le comportement du rotor excité ne devienne pas prépondérant sur les vibrations du second.

À partir de ces critères, une première liste de paramètres communs à l'ensemble des simulations numériques de cette section a été établie :

Paramétrage commun :	Roue aubagée $R_1$ :	Roue aubagée $R_2$ :
$\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$	$\Omega_1 = 10415 \text{ rad.s}^{-1}$	À définir en fonction
$E = 210 \text{ GPa}$	2 sillages d'excitation	des simulations
$\xi = 1\%$	$F_{z1} = 10^6 \text{ N}$	
$\kappa = \begin{bmatrix} 5.10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N.m}^{-1}\text{rad}^{-1}$		

Enfin, le dernier élément à fixer concerne la troncature de la base modale de chaque roue aubagée, indispensable compte tenu du grand nombre de ddl que possède la structure. Lors du choix du nombre de modes propres à calculer, il faut être vigilant à bien conserver les deux vecteurs d'un mode double afin d'assurer un comportement vibratoire cohérent. Pour les simulations présentées dans ce chapitre, le nombre de vecteurs propres pris en compte est limité au maximum afin d'accélérer les calculs : seul un mode double par diamètre est conservé, ce qui correspond à 4 vecteurs en raison de l'écriture en système d'état. Dans le cas du modèle EF utilisé, 100 modes propres sont ainsi retenus pour la roue  $R_1$  (diamètres 0 à 24) et 52 pour la roue  $R_2$  (diamètres 0 à 12). Il faut au préalable s'assurer que le mode à exciter est bien présent dans cette base modale réduite, ce qui est le cas ici.

## 2.2 Comparaison des simulations numériques

Comme pour le système bi-anneau, la validation de la méthode développée utilise comme référence la résolution par intégration temporelle de l'équation de départ, cette fois-ci écrite en base modale. En effet, malgré le choix d'un modèle de roue aubagée très simplifié, le nombre de ddl physiques reste relativement élevé et entraînerait un temps de résolution temporelle trop long. Le passage en base modale permet de limiter ce coût numérique. La même troncature de la base modale est appliquée pour les résolutions temporelle et fréquentielle afin de comparer des systèmes similaires. En revanche, aucun traitement ni projection ne sont appliqués à la base modale utilisée pour la résolution temporelle.

### 2.2.1 Premier calcul

Pour le premier calcul de validation, seule la première roue aubagée est excitée sur le mode propre sélectionné précédemment, c'est-à-dire son premier mode à 2D. De cette façon, la seule excitation appliquée à la seconde roue est celle transmise par le roulement. On vérifie ainsi qu'un transfert d'énergie existe bien en se limitant au cas simple d'une seule excitation, plus facile à interpréter. Le paramétrage utilisé pour ce calcul est le suivant :

Roue aubagée $R_1$ :	Roue aubagée $R_2$ :
$\Omega_1 = 10415 \text{ rad.s}^{-1}$	$\Omega_2 = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$
2 sillages d'excitation	Pas d'excitation
$F_{z1} = 10^6 \text{ N}$	

L'évolution temporelle des déplacements radiaux d'un nœud dans la zone de fixation du roulement de chaque rotor est tracée Figure III.4 en superposant les résultats de l'intégration temporelle et de la résolution fréquentielle. Cette zone a été choisie pour l'étude des courbes puisqu'elle constitue le lieu de transfert de l'énergie entre les deux structures. On se limite volontairement aux déplacements radiaux, le modèle de roulement utilisé n'assurant pas de couplage dans les autres directions.

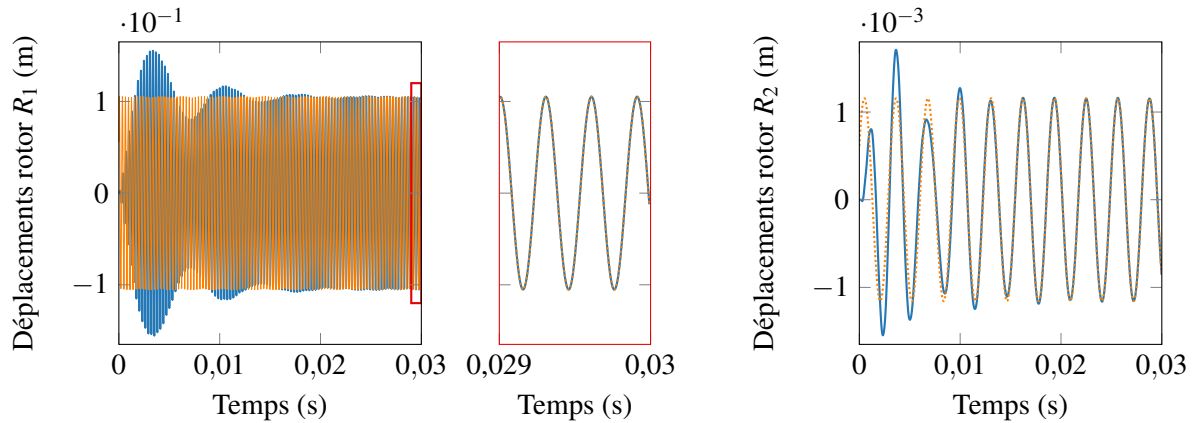


FIGURE III.4 – Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque roue aubagée au niveau du roulement. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (---).

De la même façon que pour l'étape de validation sur le modèle bi-anneau, section II.4.3.2, l'intégration temporelle est initialisée sur la configuration non-déformée du système bi-rotor. Les résultats de la méthode fréquentielle ne sont pas utilisés de façon à évaluer le vrai temps de calcul de la résolution temporelle. Il en découle un régime transitoire relativement long, nécessitant de nombreuses itérations avant d'atteindre le régime stationnaire. Une fois le régime stationnaire atteint, les deux méthodes de résolution présentent une très bonne corrélation de leurs résultats pour les deux rotors.

Les déplacements significatifs du rotors  $R_2$ , initialement non exposé à un chargement externe, résultent d'un transfert d'énergie au travers du roulement. Les amplitudes de déplacement de ce rotor, qui dépendent de la densité de raideur de couplage, sont logiquement plus faibles que celles du rotor  $R_1$ .

Enfin, les fréquences des vibrations relevées sur les deux rotors correspondent au double de leurs vitesses de rotation ce qui est bien cohérent avec une excitation à 2 diamètres.

## 2.2.2 Second calcul

Un second calcul est réalisé en appliquant cette fois-ci une excitation aux deux rotors afin d'étudier la superposition des réponses vibratoires. Les harmoniques d'excitation sont volontairement distinctes de façon à faciliter l'interprétation du comportement vibratoire observé. La



paramétrage utilisé est le suivant :

Roue aubagée $R_1$ :	Roue aubagée $R_2$ :
$\Omega_1 = 10415 \text{ rad.s}^{-1}$	$\Omega_2 = 8500 \text{ rad.s}^{-1}$
2 sillages d'excitation	3 sillages d'excitation
$F_{z1} = 10^6 \text{ N}$	$F_{z2} = 10^6 \text{ N}$

Les déplacements radiaux d'un point de chaque roue aubagée au niveau du roulement sont tracés Figure III.5. On observe de nouveau un régime transitoire relativement long nécessitant de nombreuses itérations pour la résolution temporelle. Une fois le régime transitoire atteint, les courbes des deux méthodes de résolution se superposent parfaitement.

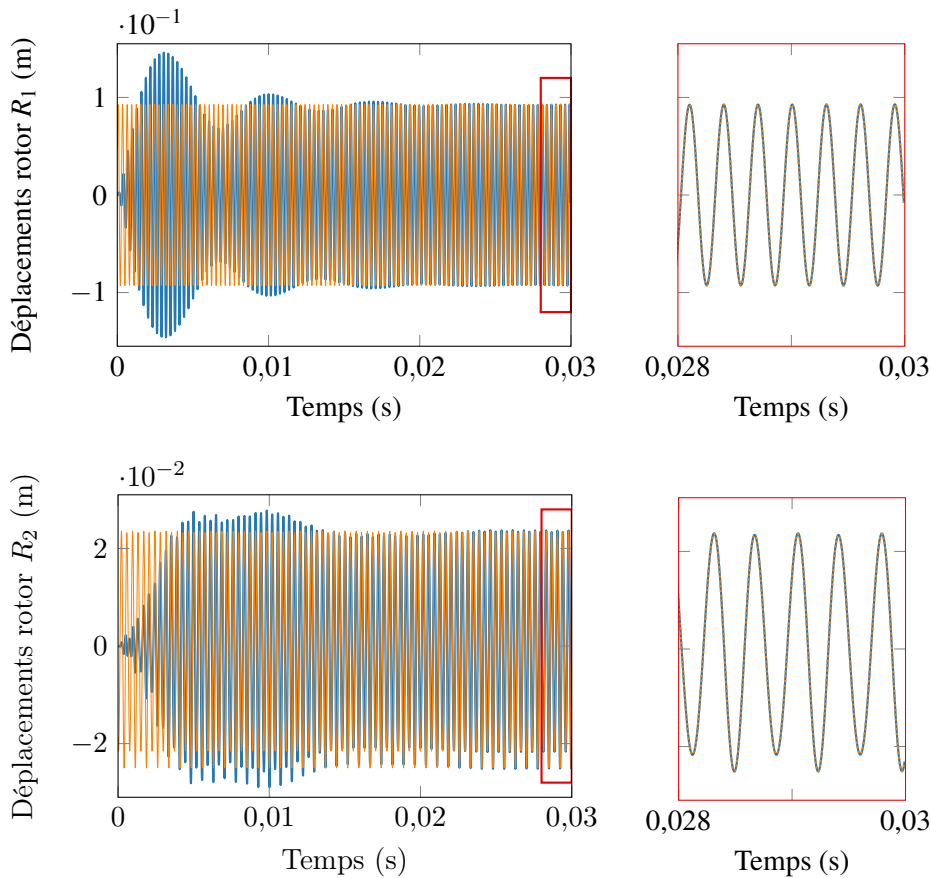


FIGURE III.5 – Déplacements radiaux au cours du temps d'un noeud de chaque roue aubagée au niveau du roulement. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (—).

L'ajout d'une excitation sur le deuxième rotor ne semble pas particulièrement perturber la première roue aubagée. Ce constat est cohérent avec les déformées modales du second rotor très localisées au niveau des aubes. Les faibles niveaux vibratoires transmis à la roue  $R_1$  au travers du roulement sont probablement négligeables devant la propre déformée de cette roue. En revanche, la superposition des deux efforts est bien visible sur le rotor  $R_2$ . Les déplacements sont en moyenne décentrés par rapport à la configuration de déplacement nul. La variation d'amplitude observée résulte d'une contribution inégale des deux harmoniques d'excitation : cette forme particulière d'oscillations est reconstruite Figure III.6 à partir des harmoniques spatiales d'harmoniques 2 et 3 en donnant un poids plus important à l'harmonique 2.

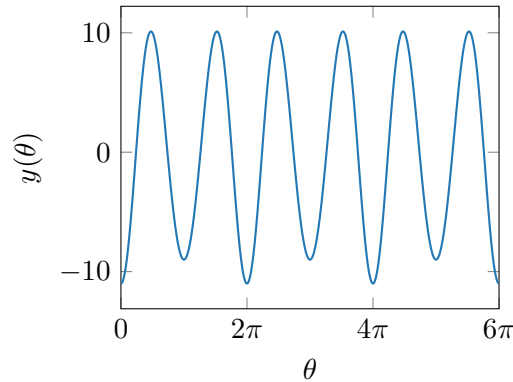


FIGURE III.6 – Tracé de la fonction d'équation  $y(\theta) = -10 \cos(2\theta) - 3 \cos(3\theta)$ .

### 2.2.3 Conclusion

Pour les deux simulations présentées, les résolutions temporelle et fréquentielle se superposent parfaitement une fois le régime stationnaire atteint. La méthode de projection de l'équation du mouvement, déjà testée dans le cadre d'un modèle axisymétrique, semble donc également valable pour une structure à symétrie cyclique dans les conditions étudiées ici. Sachant qu'on ne s'intéresse qu'au régime stationnaire, cette méthode présente le sérieux avantage d'un temps de calcul très réduit : la résolution temporelle a nécessité environ 6h de calculs, contre seulement 5min pour la méthode fréquentielle comprenant le calcul des bases modales, la construction de l'équation du mouvement dans les nouveaux repères et la résolution fréquentielle. À noter que l'étape la plus longue dans cette procédure est de loin le calcul de la base modale, l'application de la méthode développée et la résolution étant quasi-instantanées. Il reste désormais à étudier les limites de cette nouvelle méthode, notamment concernant son comportement dans une configuration instable de la structure bi-rotor.

## 3 Comportement vibratoire sur plusieurs plages de vitesse

Le calcul de la réponse forcée d'un système fournit des informations précieuses quant à son comportement vibratoire dans le domaine de fréquence étudié, notamment lors du passage des modes propres qui conduit généralement à un phénomène de résonance. Dans le cas du système bi-rotor, les fréquences d'excitations sont directement liées aux vitesses de rotation. L'étude de la réponse forcée du système couplé implique donc de faire varier les vitesses de rotation des deux rotors et aboutit au tracé de nappes représentant l'amplitude maximale de déplacement d'un point de chaque roue aubagée en fonction des deux vitesses de rotation. La comparaison des nappes des deux rotors fournit des informations concernant les transferts d'énergie s'instaurant au travers du roulement.

Ce type d'étude ne serait pas envisageable avec une méthode de résolution temporelle, trop onéreuse en temps de calcul compte tenu du grand nombre de résolutions nécessaires au quadrillage correct des plages de vitesse à étudier. En revanche, la méthode fréquentielle est tout à fait adaptée, d'autant plus dans le cas où les effets gyroscopiques, le raidissement et l'assouplissement centrifuge sont négligés : le calcul des bases modales des deux roues, étape la plus longue de la procédure, n'est à effectuer qu'une seule fois puisque les modes propres sont alors indépendants

des vitesses de rotation. Toutefois, cette méthode n'a pour l'instant été testée que dans certaines configurations du système bi-rotor, qui se sont toutes avérées être stables. Par conséquent, rien ne permet dans l'immédiat de prévoir le comportement de cette méthode pour des couples de vitesse correspondant à une configuration instable du bi-rotor.

Dans toute cette section, un effort extérieur à 2 diamètres est appliqué uniquement sur la première roue aubagée. L'objectif est toujours de solliciter un mode propre dont la déformée significative dans la zone du roulement assure un transfert d'énergie au second rotor. L'usage d'une unique excitation permet de travailler avec un cas simple plus facile à interpréter. Le paramétrage utilisé pour le calcul des nappes est le suivant :

Paramétrage commun :	Roue aubagée $R_1$ :	Roue aubagée $R_2$ :
$\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$	2 sillages d'excitation	pas d'excitation
$E = 210 \text{ GPa}$	$F_{z1} = 10^6 \text{ N}$	
$\xi = 1\%$		
$\kappa = \begin{bmatrix} 5.10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N.m}^{-1}\text{rad}^{-1}$		

### 3.1 Première plage de vitesse (co-rotatif)

Le premier calcul est réalisé en configuration co-rotative. Les phénomènes notables étant généralement situés au passage des fréquences propres, la plage de vitesse pour chaque rotor est choisie de façon à couvrir la fréquence de son premier mode à 2 diamètres. Ces fréquences propres, en situation couplée à l'arrêt, ont respectivement pour valeur  $\omega_{1,\text{couplé}} = 21365 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{2,\text{couplé}} = 16720 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui correspond aux vitesses de rotation  $\Omega_1 = 10680 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 = 8360 \text{ rad.s}^{-1}$ . Dans ces conditions, une plage de vitesse de 0 à  $15000 \text{ rad.s}^{-1}$  semble adaptée pour les deux rotors. Les calculs sont effectués dans un premier temps avec un pas de  $100 \text{ rad.s}^{-1}$ , puis raffinés autour de la zone de croisement des deux modes propres à un pas de  $10 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les réponses forcées des deux rotors sont tracées Figure III.7.

On remarque qu'une valeur spécifique de vitesse de chaque rotor génère une nette augmentation de l'amplitude des déplacements :  $\Omega_1 \simeq 10700 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 \simeq 8300 \text{ rad.s}^{-1}$ , ce qui correspond comme prévu aux fréquences du premier mode propre à 2 diamètres de chaque rotor en situation couplée. À l'intersection de ces deux vitesses de rotation, un phénomène particulier apparaît : un transfert d'énergie du rotor excité  $R_1$  vers le rotor  $R_2$  se met en place, entraînant une diminution brutale de l'amplitude des déplacements du rotor  $R_1$  en échange d'une forte augmentation de l'amplitude des déplacements du rotor  $R_2$ . Au-delà de ce croisement, la ligne suivant le maximum d'amplitude de chaque rotor a tendance à se déplacer légèrement, comme si les fréquences du système couplé avaient été décalées :  $\Omega_1 \simeq 10800 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 \simeq 8600 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La comparaison du comportement des deux rotors sur cette plage de vitesse met en évidence un second phénomène notable. En dehors de la zone de croisement des modes propres des deux rotors, le rotor  $R_1$  ne semble pas perturbé par la résonance du rotor  $R_2$ , à peine visible sur sa nappe. Au contraire, les deux résonances sont bien visibles sur le rotor  $R_2$  avec le même ordre de grandeur d'amplitude. Ce constat peut s'expliquer par la différence entre les déformées

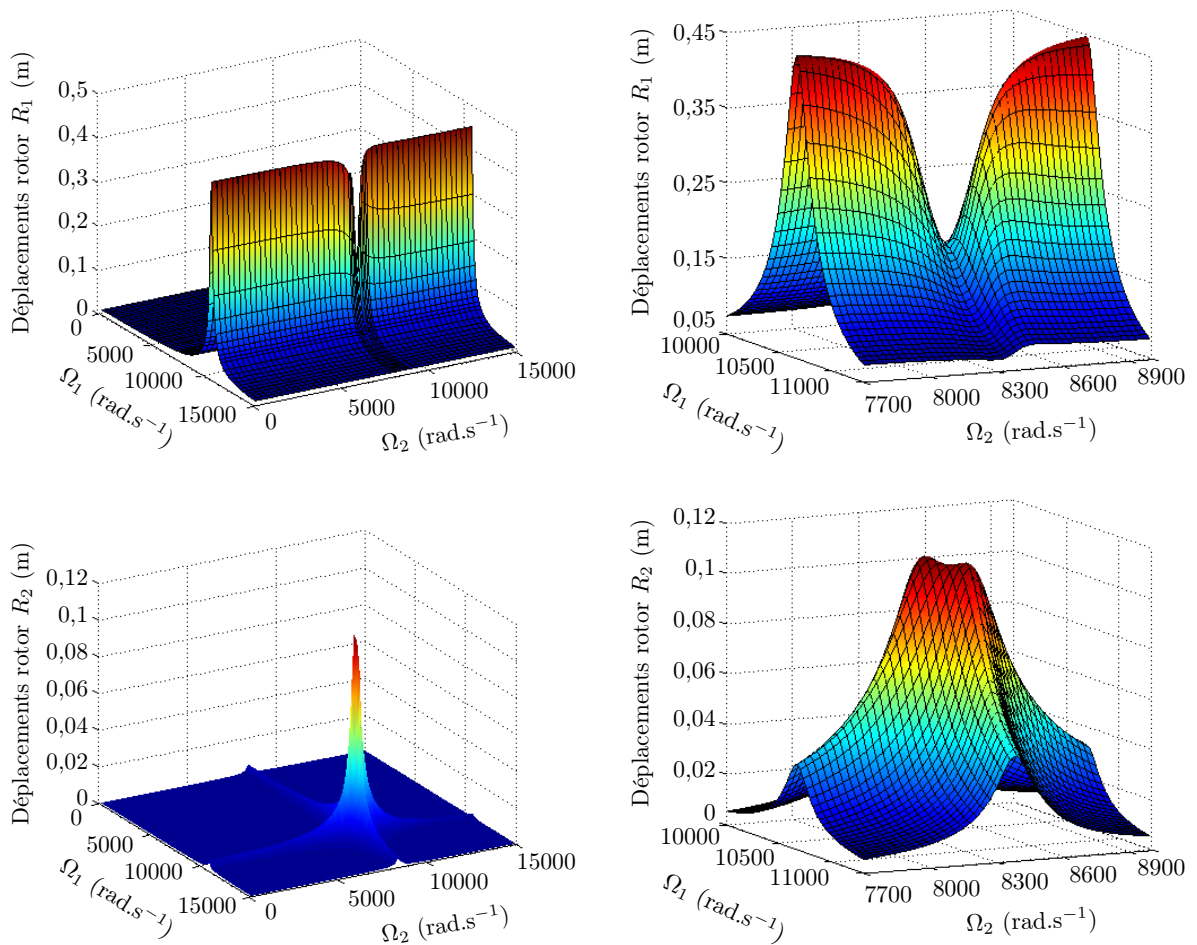


FIGURE III.7 – Réponse forcée dans la direction radiale d’un point de la zone du roulement de chaque roue aubagée en configuration co-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres.

des deux modes concernés dans la zone de fixation du roulement : le mode propre du rotor  $R_2$  déforme très peu cette zone d’échange et n’engendre donc qu’un faible transfert d’énergie vers le rotor  $R_1$ , par ailleurs soumis à une excitation externe. Il est probable que les déplacements induits par le rotor  $R_2$ , en dehors de la zone de croisement des deux modes propres, soient trop faibles comparativement aux déplacements générés par l’excitation externe pour être visibles. En revanche, la déformée modale du rotor  $R_1$  étant significative dans la zone du roulement, le niveau d’énergie transmis au rotor  $R_2$  s’approche probablement de celui engendré par son excitation en bout d’aube, ce qui justifie que les amplitudes des deux modes soient similaires sur ce rotor.

### 3.2 Deuxième plage de vitesse (contra-rotatif)

Suite aux observations du cas co-rotatif, l’objectif de ce second calcul est d’étudier la dynamique du système bi-rotor sur la même plage de vitesse mais en configuration contra-rotative, afin d’établir si les deux configurations possèdent un comportement vibratoire similaire. Les mêmes pas de calcul sont utilisés pour tracer les nappes présentées Figure III.8.

Ici encore, une valeur particulière de vitesse de chaque rotor entraîne une augmentation de

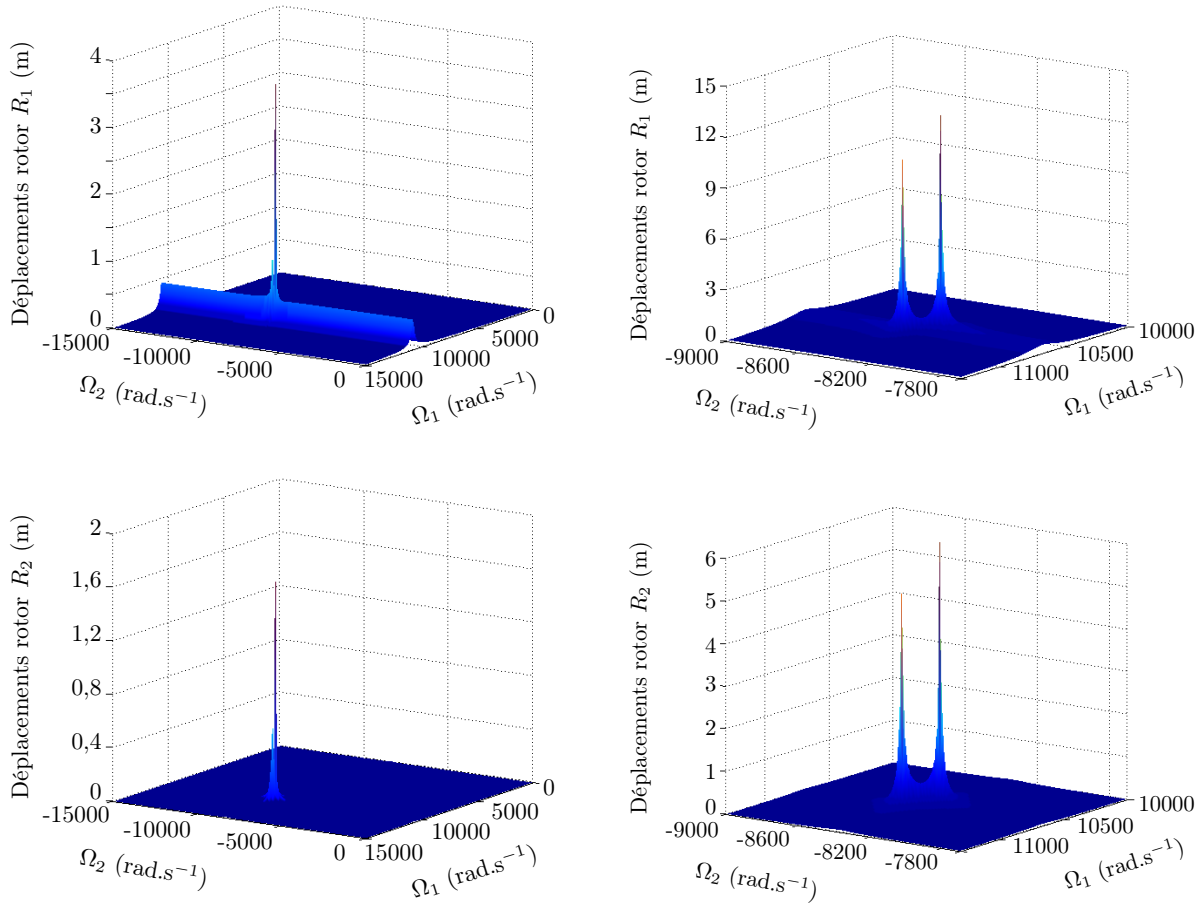


FIGURE III.8 – Réponse forcée dans la direction radiale d’un point de la zone du roulement de chaque roue aubagée en configuration contra-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres.

l’amplitude des déplacements sur toute la nappe :  $\Omega_1 \simeq 10700 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 \simeq -8400 \text{ rad.s}^{-1}$ . Il s’agit de nouveau du passage des fréquences propres des deux rotors. Comme dans la configuration co-rotative, les lignes d’amplitude maximale se décalent légèrement après la zone de croisement des deux modes. En revanche, cette zone de croisement présente maintenant deux points singuliers caractérisés par une augmentation importante et brutale de l’amplitude des vibrations des deux rotors. Le raffinement du pas de calcul autour de cette zone fait croître l’amplitude des pics jusqu’à des valeurs de déplacements n’ayant plus de sens physique. Cette singularité étant absente en situation co-rotative, on peut supposer qu’elle est liée à certaines valeurs particulières de la différence de vitesse entre les deux rotors  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ . Ceci est cohérent avec l’expression des coefficients temporels dans la matrice de couplage. D’après l’étude de la stabilité des équations de Mathieu [46, 47], ces termes sont en effet responsables d’une instabilité du système, probablement exprimée ici au travers des deux pics d’amplitude. Les valeurs de  $\Delta\Omega$  associées à ces pics sont :  $\Delta\Omega_a = 18800 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Delta\Omega_b = 19500 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les conditions d’apparition de ces pics seront étudiées dans la section III.4.

### 3.3 Troisième plage de vitesse (co-rotatif)

Pour tester les conditions d'apparition de la singularité observée en configuration contra-rotative, une troisième nappe est tracée en situation co-rotative. L'objectif est de se placer aux alentours du mode propre du premier rotor de façon à assurer un niveau vibratoire suffisant, tout en respectant les différences de vitesse  $\Delta\Omega_{a,b}$  correspondant aux pics d'amplitude obtenus en contra-rotatif. On se place donc aux alentours de  $\Omega_1 = 10700 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui impose d'étudier au minimum la plage de vitesse  $29500 \text{ rad.s}^{-1} \leq \Omega_2 \leq 30200 \text{ rad.s}^{-1}$  pour couvrir les deux pics en respectant  $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta\Omega_{a,b}$ . Les nappes ont été tracées avec un pas de  $10 \text{ rad.s}^{-1}$ , et sont présentées Figure III.9.

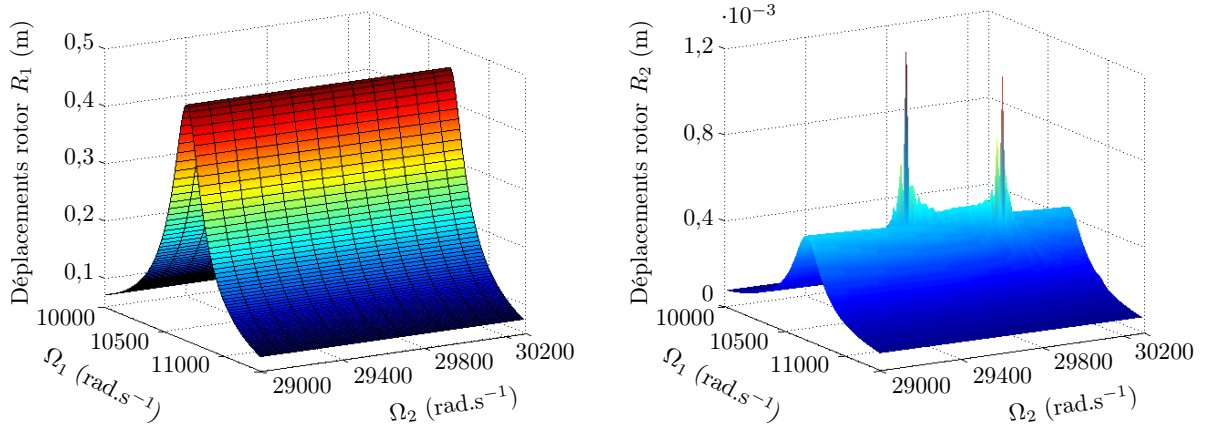


FIGURE III.9 – Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de la zone du roulement de chaque roue aubagée en configuration co-rotative, autour de la fréquence propre de la roue  $R_1$  et des deux valeurs de  $\Delta\Omega$  présentant des points singuliers dans le cas contra-rotatif.

La résonance associée au passage de la fréquence propre du premier rotor est toujours bien visible dans le comportement vibratoire des deux structures. On remarque que le rotor  $R_2$  présente deux pics d'amplitude au passage du mode propre du rotor  $R_1$ , rappelant les points singuliers observés en contra-rotatif. Toutefois, les amplitudes des déplacements, toujours inférieures à celles du rotor  $R_1$ , restent raisonnables et le rotor  $R_1$  ne présente aucune singularité sur cette plage de vitesse. Une étude plus approfondie est nécessaire pour établir l'origine de ce phénomène, qui sera présentée dans la section III.4.

### 3.4 Conclusion

L'étude du comportement vibratoire du système bi-rotor présentée ici met en évidence deux phénomènes remarquables :

- En configuration co-rotative, un transfert d'énergie entre les deux structures s'établit au croisement de leurs modes propres respectifs. Il est à noter que ce phénomène est particulièrement sensible à la valeur des raideurs de couplage et ne sera donc pas toujours visible pour ce type de système bi-rotor.
- En configuration contra-rotative, une singularité apparaît au croisement des deux modes propres sous la forme de deux pics d'amplitude très importante. Ce phénomène est visible

dans une moindre mesure en co-rotatif pour les mêmes valeurs de différence de vitesse des deux rotors. Il pourrait s'agir d'une instabilité du système.

Des recherches plus approfondies, incluant notamment une étude de stabilité, sont nécessaires pour expliquer l'origine et les conditions d'apparition de ce phénomène singulier, ainsi que pour discuter de la validité de la méthode développée dans le domaine de vitesse concerné. Compte tenu de la taille et de la relative complexité du modèle de roue aubagée, un modèle bi-anneau présentant les mêmes comportements vibratoires que cette structure bi-rotor est développé dans la suite, de façon à accélérer les calculs et faciliter la compréhension des phénomènes.

## 4 Étude de la stabilité du système

L'objectif de cette section est de reproduire le comportement vibratoire du modèle bi-rotor aubagé à l'aide d'une structure plus simple d'anneaux afin de faciliter l'étude des phénomènes d'instabilité et de s'assurer de leur sens physique. Pour cela, deux descriptions différentes d'anneau sont utilisées :

- Le modèle EF poutre courbe développé dans la section II.4 dont les effets gyroscopiques, le raidissement et l'assouplissement centrifuge sont négligés afin de se placer dans la situation des roues aubagées. L'intérêt de ce modèle est de pouvoir appliquer la procédure de calcul des nappes exactement dans les mêmes conditions que pour les roues aubagées.
- Un modèle continu sous forme de fonctions de Rayleigh-Ritz dont la simplicité et le très faible nombre de ddl permet presque de le traiter entièrement de façon analytique. L'étude de la stabilité est ainsi grandement facilitée.

Ces deux modèles, dont les comportements dynamiques sont très similaires, sont dans un premier temps recalés en terme de valeurs propres sur le modèle de roues aubagées puis utilisés afin d'étudier la stabilité du système. Comme dans le cas des roues aubagées, le comportement vibratoire à 2 diamètres des anneaux sera exclusivement pris en compte.

### 4.1 Mise en équation d'un modèle d'anneau par la méthode de Rayleigh-Ritz

Le schéma de la structure bi-anneau et les notations utilisées pour construire le modèle Rayleigh-Ritz sont présentés Figure III.10. L'objectif étant d'étudier les vibrations à 2 diamètres, la formulation se limitera à des fonctions d'harmoniques spatiales 2.

Les déplacements radiaux étant les plus significatifs dans la configuration bi-rotor étudiée en raison d'un couplage purement radial, la formulation se focalisera sur ces déplacements notés  $\mathbf{v}$ .

#### 4.1.1 Étude d'un anneau seul

Les équations sont développées dans un cas général, soit pour une harmonique spatiale  $n$  quelconque. Il convient de fixer  $n = 2$  dans les résultats pour se rapporter au cas à étudier.

Les déplacements radiaux d'harmonique  $n$  d'un anneau dans son propre repère peuvent s'écrire sous la forme harmonique suivante [44, 45] :

$$v(\beta, t) = a(t) \cos n\beta + b(t) \sin n\beta \quad (\text{III.7})$$

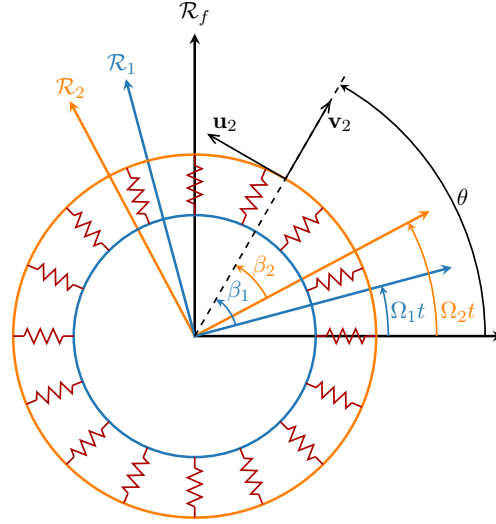


FIGURE III.10 – Schéma du système de deux anneaux utilisé pour la modélisation par la méthode de Rayleigh-Ritz.

Dans le cas où le cisaillement est négligé, l'énergie de déformation de l'anneau dans le plan a pour expression [48] :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left( \frac{\partial^2 v(\beta, t)}{\partial \beta^2} + \frac{\partial u(\beta, t)}{\partial \beta} \right)^2 R d\beta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{ES}{R^2} \left( v(\beta, t) - \frac{\partial u(\beta, t)}{\partial \beta} \right)^2 R d\beta \quad (\text{III.8})$$

Plusieurs études [49, 50] ont montré qu'une condition d'inextensibilité de la fibre neutre de l'anneau modifie peu son comportement vibratoire. Sous cette condition, la deuxième partie de l'énergie de déformation (III.8) s'annule ce qui permet d'établir une relation entre les déplacements radiaux et tangentiels :

$$v(\beta, t) = \frac{\partial u(\beta, t)}{\partial \beta} \quad (\text{III.9})$$

On déduit ainsi l'expression des déplacements tangentiels en utilisant la relation (III.7) :

$$u(\beta, t) = -\frac{b(t)}{n} \cos n\beta + \frac{a(t)}{n} \sin n\beta \quad (\text{III.10})$$

Cette condition d'anneau inextensible permet de retrouver l'expression de l'énergie de déformation proposée dans [51, 52], à laquelle est ajoutée la formulation de l'énergie cinétique de l'anneau :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left( \frac{\partial^2 v(\beta, t)}{\partial \beta^2} + \frac{\partial u(\beta, t)}{\partial \beta} \right)^2 R d\beta \\ T &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho S (\dot{u}^2(\beta, t) + \dot{v}^2(\beta, t)) R d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

### Matrices masse et raideur

Après remplacement de  $u$  et  $v$  par leurs expressions (III.7) et (III.10), le potentiel élastique et l'énergie cinétique deviennent :

$$\begin{aligned} W &= \frac{EI(1-n^2)^2}{2R^3} \pi (a^2 + b^2) \\ T &= \frac{\rho SR \pi}{2} \frac{n^2 + 1}{n^2} (\dot{a}^2 + \dot{b}^2) \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$



On en déduit les matrices de masse et de raideur d'un anneau associées aux déplacements radiaux de l'harmonique spatiale  $n$  :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad k = (1 - n^2)^2 \frac{EI\pi}{R^3} \quad m = \rho SR\pi \frac{n^2 + 1}{n^2} \quad (\text{III.13})$$

Les coordonnées généralisées associées sont :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

### Matrice d'amortissement

Afin de s'approcher au mieux du modèle EF d'anneaux, un amortissement modal doit être appliqué à la structure. Compte tenu de la symétrie d'un anneau et de la prise en compte d'une seule harmonique pour en décrire les déplacements, le calcul des modes propres associés aux matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  donne un unique mode double  $(\varphi, \omega)$ . Un amortissement proportionnel à la raideur est alors facilement réglable :

$$\mathbf{D} = \gamma \mathbf{K} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2\xi}{\omega} \quad (\text{III.15})$$

### Efforts extérieurs

De la même façon que pour les autres simulations de ce mémoire, on considère des efforts extérieurs spatialement sinusoïdaux, fixes et constants dans le repère fixe et notés  $\mathbf{f}$ . Dans le cas de la formulation Rayleigh-Ritz, ces efforts se limitent à la direction radiale privilégiée. Dans le repère mobile de l'anneau, les efforts extérieurs radiaux s'expriment :

$$f_v(\beta, t) = \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = f_1 \cos(n\Omega t + \beta) + f_2 \sin(n\Omega t + \beta) \quad (\text{III.16})$$

soit en séparant les termes en  $\beta$  et en  $t$  :

$$\begin{aligned} f_v(\beta, t) &= f^c(t) \cos n\beta + f^s(t) \sin n\beta \\ \text{avec} \quad f^c(t) &= f_1 \cos n\Omega t + f_2 \sin n\Omega t \\ f^s(t) &= f_2 \cos n\Omega t - f_1 \sin n\Omega t \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

L'expression du travail élémentaire de la force radiale permet ensuite d'exprimer la projection  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  de ces efforts sur les coordonnées généralisées  $\mathbf{x}$  :

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^{2\pi} f_v(\beta, t) \delta v(\beta, t) d\beta = \mathbf{f}_{\text{ext}}^T(t) \cdot \delta \mathbf{x}(t) \quad (\text{III.18})$$

On obtient finalement :

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_0^{2\pi} (f^c \cos n\beta + f^s \sin n\beta) \begin{pmatrix} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{pmatrix} d\beta = \pi \begin{pmatrix} f^c \\ f^s \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

### 4.1.2 Étude du système couplé

Comme pour les modèles EF, la matrice de couplage liant les deux anneaux découle de l'énergie de déformation des raideurs modélisant le roulement. Cette énergie a pour expression :

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \kappa (v_1(\beta_1) - v_2(\beta_2))^2 d\theta \quad (\text{III.20})$$

où  $\kappa$  est la densité de raideur radiale du roulement. Pour le calcul de cette intégrale, les déplacements  $v_1$  et  $v_2$  doivent être repérés par un angle commun, par exemple l'angle  $\theta$  indiqué Figure III.10. Il faut donc exprimer les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  en fonction de cet angle  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \theta - \Omega_1 t \\ \beta_2 &= \theta - \Omega_2 t \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Après calcul de l'intégrale, l'énergie de déformation des raideurs de couplage s'exprime en fonction des coordonnées généralisées des deux anneaux  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  :

$$\begin{aligned} W_c = \frac{\kappa\pi}{2} [ &a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 \cos n(\Omega_1 - \Omega_2)t - 2a_1b_2 \sin n(\Omega_1 - \Omega_2)t \\ &+ 2b_1a_2 \sin n(\Omega_1 - \Omega_2)t - 2b_1b_2 \cos n(\Omega_1 - \Omega_2)t] \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Il en découle la matrice de couplage suivante :

$$\mathbf{K}_c = k_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos n\Delta\Omega t & -\sin n\Delta\Omega t \\ 0 & 1 & \sin n\Delta\Omega t & -\cos n\Delta\Omega t \\ -\cos n\Delta\Omega t & \sin n\Delta\Omega t & 1 & 0 \\ -\sin n\Delta\Omega t & -\cos n\Delta\Omega t & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} k_c &= \kappa\pi \\ \Delta\Omega &= \Omega_1 - \Omega_2 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

associée aux coordonnées généralisées :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.24})$$

On retrouve bien la même structure de matrice de couplage qu'avec les modèles EF, toutefois limitée à un seul bloc périodique puisqu'un seul mode propre est pris en compte dans ce modèle.

Finalement, l'équation du système couplé libre, normée par rapport à la masse, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{a}_1 \\ \ddot{b}_1 \\ \ddot{a}_2 \\ \ddot{b}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_1 k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{b}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 + k_c \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & -\frac{\cos n\Delta\Omega t}{m_1} & -\frac{\sin n\Delta\Omega t}{m_1} \\ 0 & \frac{1}{m_1} & \frac{\sin n\Delta\Omega t}{m_1} & -\frac{\cos n\Delta\Omega t}{m_1} \\ -\frac{\cos n\Delta\Omega t}{m_2} & \frac{\sin n\Delta\Omega t}{m_2} & \frac{1}{m_2} & 0 \\ -\frac{\sin n\Delta\Omega t}{m_2} & -\frac{\cos n\Delta\Omega t}{m_2} & 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} \frac{f_1^c}{m_1} \\ \frac{f_1^s}{m_1} \\ \frac{f_2^c}{m_2} \\ \frac{f_2^s}{m_2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.25})$$

L'équation ainsi obtenue est à coefficients périodiques ce qui est de nouveau compatible avec une résolution par intégration temporelle. Comme dans le cas du modèle EF, une projection de l'équation dans de nouveaux repères est possible afin de supprimer les coefficients périodiques de la matrice de couplage. Toutefois, pour ce modèle continu, ces changements de repère ne nécessitent aucune hypothèse puisqu'une seule harmonique spatiale est prise en compte. L'équation à coefficients périodiques et l'équation projetée seront donc parfaitement équivalentes.

### Projection de l'équation à coefficients périodiques

Plusieurs projections équivalentes sont envisageables pour supprimer les coefficients périodiques de l'équation du mouvement. Le plus intuitif serait d'utiliser la même transformation que pour les calculs EF, à savoir projeter chacun des deux rotors selon un angle proportionnel à sa propre vitesse de rotation :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(n\Omega_1 t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(n\Omega_2 t) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Dans ce cas, l'équation après projection fait apparaître séparément les termes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . D'après les observations de la section III.3, il semble toutefois que la stabilité du système soit uniquement dépendante de la différence de vitesse  $\Delta\Omega$  et non de la valeur de chaque terme séparément. Pour mettre en évidence cette propriété, une autre projection plus pertinente peut être envisagée, consistant à projeter les deux anneaux d'un angle proportionnel à la différence de vitesse  $\Delta\Omega$  :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(n\frac{\Delta\Omega}{2}t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T(n\frac{\Delta\Omega}{2}t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

La projection est appliquée à l'équation du mouvement grâce à la pré-multiplication de la relation (III.25) par la matrice  $\mathbf{P}^T$  ainsi qu'au changement de variable :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{x}} + 2\dot{\mathbf{P}}\dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{P}\ddot{\hat{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

En tenant compte des trois relations suivantes :

$$\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{P}} = n \frac{\Delta\Omega}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\frac{\pi}{2}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^T \ddot{\mathbf{P}} = -n^2 \frac{\Delta\Omega^2}{4} \mathbf{I}_4 \quad \mathbf{P}^T \mathbf{K}_c \mathbf{P} = k_c \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \mathbf{I}_2 & -\frac{1}{m_1} \mathbf{I}_2 \\ -\frac{1}{m_2} \mathbf{I}_2 & \frac{1}{m_2} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

on obtient l'équation projetée :

$$\ddot{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{G}(\Delta\Omega) + \mathbf{D}) \dot{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{K}_1(\Delta\Omega) + \mathbf{K}_2(\Delta\Omega) + \mathbf{K} + \widehat{\mathbf{K}}_c) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (\text{III.29})$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2 k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2 k_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad \widehat{\mathbf{K}}_c = k_c \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & -\frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & -\frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} & 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1(\Delta\Omega) = -n^2 \frac{\Delta\Omega^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2(\Delta\Omega) = n \frac{\Delta\Omega}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_1 k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1 k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2 k_2}{m_2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2 k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

$$\mathbf{G}(\Delta\Omega) = n \Delta\Omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Toutes les matrices étant indépendantes du temps, ce système peut maintenant être traité avec les méthodes classiques. Il est notamment possible d'en calculer les modes propres grâce au système d'état suivant, donnant ainsi directement accès à la stabilité du système :

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} \quad \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_4 \\ \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K} + \widehat{\mathbf{K}}_c & \mathbf{G} + \mathbf{D} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

## 4.2 Corrélation avec les deux modèles d'anneaux

Une fois la formulation de Rayleigh-Ritz établie, il reste à déterminer les paramètres géométriques des deux modèles d'anneaux (éléments finis et Rayleigh-Ritz) permettant de reproduire les phénomènes vibratoires observés sur le bi-rotor aubagé. L'étude de la stabilité sera alors possible.

### 4.2.1 Paramétrage des anneaux pour le recalage

L'objectif est de trouver une configuration d'anneaux reproduisant le plus fidèlement possible le comportement vibratoire du système bi-rotor aubagé étudié dans la section III.3. Les paramètres à fixer sont les rayons, longueurs (direction axiale) et épaisseurs (direction radiale) des anneaux, notés  $R_{1,2}$ ,  $b_{1,2}$  et  $h_{1,2}$ , ainsi que la valeur de la densité de raideur radiale de couplage. Les fréquences propres du premier mode à 2D des deux roues aubagées du système bi-rotor, pour les

deux configurations séparée et couplée, sont utilisées comme critère de recalage. Ce sont en effet ces deux modes propres qui interviennent dans la réponse forcée du système bi-rotor.

De nombreuses configurations assurent de respecter ce critère. Une nouvelle contrainte est donc ajoutée, imposant de travailler avec deux anneaux de dimensions similaires et du même ordre de grandeur que celles des roues aubagées. De plus, la valeur de densité de raideur de couplage du système bi-rotor aubagé est conservée.

La première étape consiste à recalibrer les fréquences propres des anneaux découplés. Il s'agit de fixer les valeurs de  $R_{1,2}$  et  $h_{1,2}$ , seuls paramètres d'influence sur ces fréquences. Une fois ces quatre valeurs établies, les deux longueurs  $b_{1,2}$  sont modifiées afin de recalibrer les fréquences du système couplé à l'arrêt. Les rayons  $R_{1,2}$  et épaisseurs  $h_{1,2}$  des anneaux ayant également une influence sur ces fréquences, il peut être nécessaire de les corriger afin de travailler avec des longueurs d'anneaux raisonnables. Dans ce cas, la première étape doit être reprise afin de vérifier le recalage des fréquences propres découplées avec ce nouveau paramétrage et itérer jusqu'à obtenir une configuration satisfaisante. Le paramétrage finalement retenu est le suivant :

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,035 \text{ m} & R_2 &= 0,05 \text{ m} \\ b_1 &= 0,09 \text{ m} & b_2 &= 0,11 \text{ m} \\ h_1 &= 0,006351 \text{ m} & h_2 &= 0,010355 \text{ m} \\ \rho &= 7800 \text{ kg.m}^{-3} & \kappa &= 5 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}\text{rad}^{-1} \\ E &= 210 \text{ GPa} & \xi &= 1\% \end{aligned}$$

Dans le cas du modèle EF, le nombre de secteurs  $N$  et d'éléments par secteur  $n_s$  doivent également être fixés. L'influence de ces paramètres sur les valeurs propres des anneaux étant très limitée, les valeurs du modèle bi-rotor aubagé sont reprises :

$$\begin{aligned} N_1 &= 48 & N_2 &= 24 \\ n_{s,1} &= 3 & n_{s,2} &= 6 \end{aligned}$$

Les raideurs d'attache situées en chaque nœud du modèle EF et nécessaires à la suppression des modes de corps rigide, sont fixées à  $10 \text{ N.m}^{-1}$  de façon à ne pas perturber les modes propres des anneaux. Cette valeur a beaucoup moins d'importance que pour les applications numériques du Chapitre II, les effets gyroscopiques, de raidissement et d'assouplissement centrifuge étant négligés. En pratique, ces raideurs ne sont pas nécessaires si les seuls modes à 2D sont conservés dans la base modale.

Les pulsations propres obtenues pour le premier mode à 2 diamètres de chaque modélisation sont présentées Tableau III.1. Le recalage obtenu n'est pas parfait, notamment pour les fréquences propres en configuration couplée, mais reste dans les bons ordres de grandeur et permet d'obtenir deux anneaux aux dimensions proches.

On remarque une légère différence dans les valeurs propres des deux modélisations d'anneau supposées reproduire des comportements dynamiques similaires : les fréquences propres de la modélisation EF sont légèrement plus faibles que celles de la modélisation Rayleigh-Ritz. Cette différence provient de la condition d'inextensibilité de l'anneau dans sa modélisation Rayleigh-Ritz. En effet, cette hypothèse a tendance à rigidifier la structure et donc à en augmenter les fréquences propres. Ce constat n'est pas problématique à condition que les réponses vibratoires des deux modèles restent bien similaires.

	Roues aubagées	Anneaux EF	Anneaux RR
$\omega_1$	20826	20826	20836
$\omega_2$	16636	16636	16647
$\omega_{1,\text{couplé}}$	21365	21462	21473
$\omega_{2,\text{couplé}}$	16720	16865	16876

TABLE III.1 – Pulsations propres ( $\text{rad.s}^{-1}$ ) en configurations séparée et couplée du premier mode propre à 2 diamètres des deux rotors pour chaque modélisation étudiée : roues aubagées, modèle EF d’anneaux ou modèle continu Rayleigh-Ritz d’anneaux.

Pour le vérifier, un calcul de réponse temporelle a été réalisé pour chaque modélisation, avec le paramétrage suivant :

Anneau 1 :

$$\Omega_1 = 10500 \text{ rad.s}^{-1}$$

2 sillages d’excitation

$$F_{v1}^c = F_{v1}^s = 10^5 \text{ N}$$

Anneau 2 :

$$\Omega_2 = 8200 \text{ rad.s}^{-1}$$

pas d’excitation

Ces vitesses de rotation permettent de se placer à proximité des fréquences propres des deux rotors et d’assurer un niveau vibratoire significatif. Pour les deux modélisations, une résolution par intégration temporelle de l’équation de départ est privilégiée car mieux maîtrisée que la méthode de projection de l’équation du mouvement. En effet, pour cette comparaison réalisée une seule fois, le temps de calcul a peu d’importance mais la maîtrise du résultat est déterminante pour établir si une différence entre les deux modèles est inhérente aux formulations choisies ou simplement à une approximation de la méthode de résolution. Les résultats obtenus pour les deux modélisations sont comparés Figure III.11.

On observe globalement un comportement vibratoire similaire des deux modèles, que ce soit pour l’anneau 1 directement excité ou pour l’anneau 2 couplé au premier par un continuum de raideurs. Il faut toutefois noter une légère majoration de l’amplitude des oscillations du modèle EF en régime stationnaire. Tout comme pour les fréquences propres, cet écart s’explique par l’utilisation d’un potentiel élastique différent dans nos deux modèles. La condition d’inextensibilité de l’anneau RR induit une raideur plus importante et donc une amplitude des oscillations plus restreinte. Cet écart reste toutefois très faible et ne devrait pas impacter le comportement vibratoire du système bi-anneau, notamment en ce qui concerne sa stabilité.

#### 4.2.2 Comportement vibratoire des anneaux éléments finis recalés sur plusieurs plages de vitesse

Une fois les deux systèmes bi-anneau recalés fréquentiellement sur le modèle bi-rotor, il est important de s’assurer que le paramétrage retenu permet bien d’obtenir un comportement vibratoire similaire dans les plages de vitesse d’intérêt. Dans ce cas, le modèle d’anneau pourra être considéré comme légitime pour l’étude des phénomènes observés avec les roues aubagées.

Pour cela, la modélisation EF des anneaux est privilégiée afin de tracer la réponse forcée du

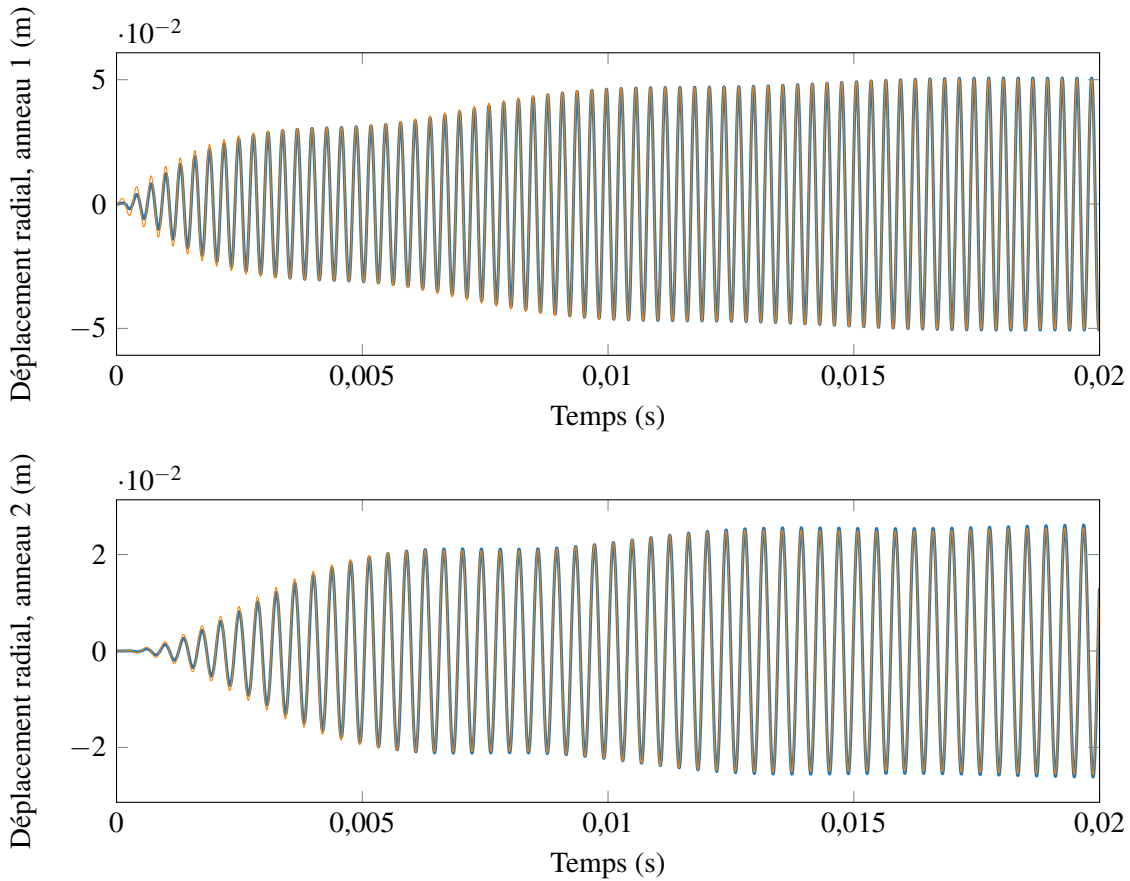


FIGURE III.11 – Déplacements radiaux au cours du temps d’un point de chaque anneau du système couplé. Comparaison des modélisations éléments finis (—) et Rayleigh Ritz (—) résolues par intégration temporelle.

système bi-anneau sur les mêmes plages de vitesse que le système bi-rotor et dans les mêmes conditions de calcul. Comme dans le cas des roues aubagées, seul l’anneau 1 est excité sur un mode à 2D. Les nappes sont calculées en utilisant la méthode de projection de l’équation du mouvement associée à une résolution fréquentielle. Le paramétrage utilisé pour l’ensemble des calculs de nappe sont les suivants :

Paramétrage commun :	Anneau 1 :	Anneau 2 :
$\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$	2 sillages d’excitation	pas d’excitation
$E = 210 \text{ GPa}$	$F_{v1} = 10^5 \text{ N}$	
$\xi = 1\%$		
$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5.10^6 \end{bmatrix} \text{ N.m}^{-1}\text{rad}^{-1}$		

### Première plage de vitesse (co-rotatif)

Pour ce premier calcul, le système bi-anneau est étudié en configuration co-rotative sur des plages de vitesse assurant de croiser le mode propre à 2 diamètres des deux anneaux. En configuration couplée et à l’arrêt, ces modes ont pour fréquence propre  $\omega_{1,\text{couplé}} = 21462 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{2,\text{couplé}} = 16865 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui correspond, dans le cadre d’une excitation à 2 diamètres, aux

vitesse de rotation  $\Omega_1 = 10730 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 = 8430 \text{ rad.s}^{-1}$ . De la même façon que pour les roues aubagées, la plage de vitesse de 0 à  $15000 \text{ rad.s}^{-1}$  est donc adaptée pour les deux anneaux. Les calculs de réponse forcée sont réalisés avec un pas de  $100 \text{ rad.s}^{-1}$ , puis raffinés autour de la zone de croisement des deux modes propres à un pas de  $10 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les nappes obtenues sont présentées Figure III.12.

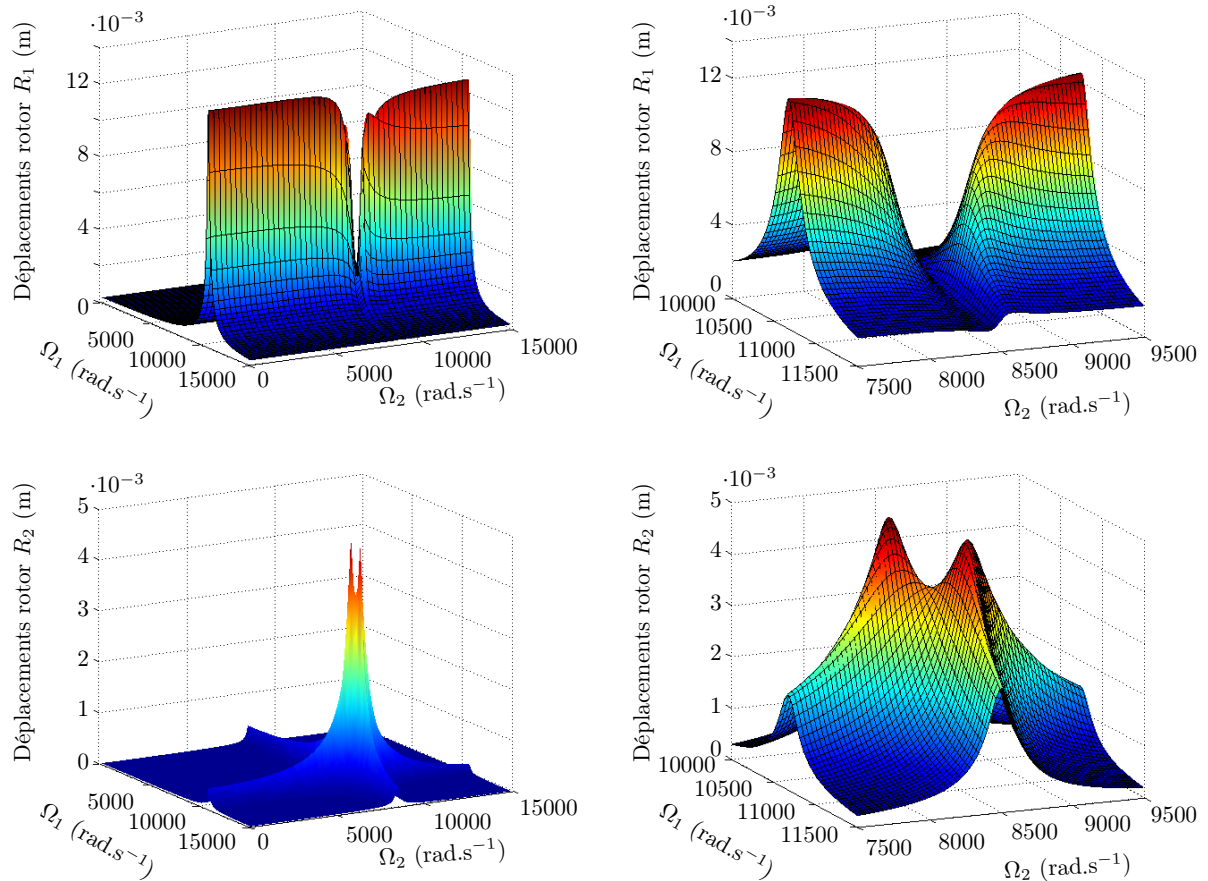


FIGURE III.12 – Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de chaque anneau en configuration co-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres.

On retrouve pour ce système bi-anneau un comportement en configuration co-rotative très similaire à celui des roues aubagées. Sur le premier anneau, qui est l'anneau excité, seul son propre mode à 2 diamètres est nettement visible sur toute la plage de vitesse étudiée. Sur le second anneau, les modes propres des deux structures apparaissent avec le même ordre de grandeur d'amplitude, aux alentours de  $\Omega_1 = 10700 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 = 8400 \text{ rad.s}^{-1}$ . Au croisement de ces deux modes propres, l'amplitude des déplacements du premier anneau chute fortement alors que celle du second anneau augmente. On retrouve le phénomène de transfert d'énergie déjà observé dans le cas des roues aubagées. Lors de ce transfert, le ratio entre les amplitudes des deux anneaux est proche de celui des roues aubagées, témoignant d'un couplage d'intensité similaire. Ici aussi, les lignes d'amplitude maximale se décalent légèrement pour les deux rotors au passage de la résonance pour se stabiliser autour de  $\Omega_1 = 10800 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 = 8500 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Malgré des apparences très similaires, les nappes obtenues avec les roues aubagées ou les anneaux présentent tout de même une légère différence. Dans les deux cas, la résonance visible



sur le rotor 2 comporte deux pics, mais ces pics se distinguent beaucoup plus dans le cas des anneaux. Il est toutefois normal d'observer des écarts entre les deux modèles, les deux structures étant géométriquement très différentes.

### Deuxième plage de vitesse (contra-rotatif)

Ce deuxième calcul a pour objectif de vérifier la présence d'une singularité dans le comportement du système bi-anneau dans la même configuration contra-rotative que les roues aubagées. Le paramétrage des anneaux reste inchangé mis à part le sens de rotation de l'anneau 2. Les nappes obtenues sont tracées Figure III.13.

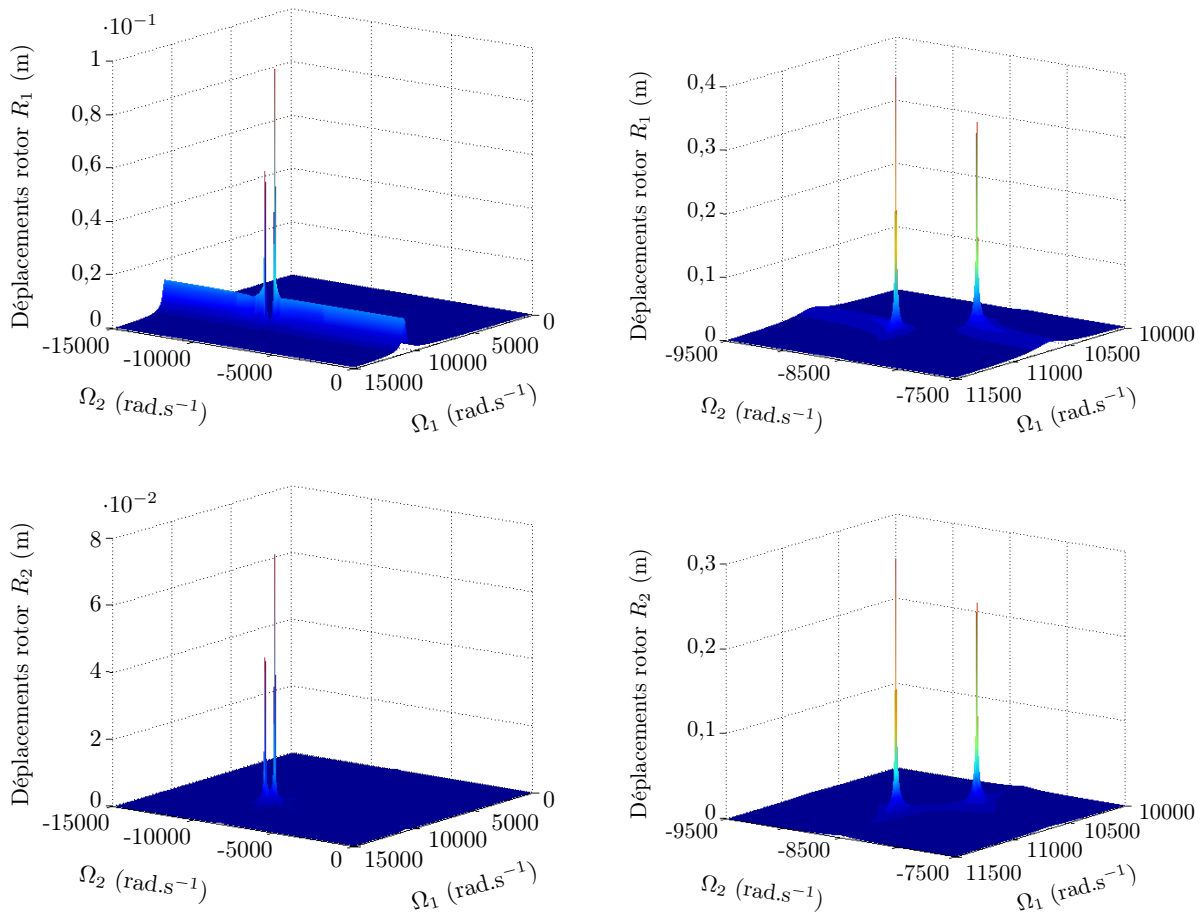


FIGURE III.13 – Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de chaque anneau en configuration contra-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres.

Ici encore, les nappes de réponse forcée sont très similaires à celles des roues aubagées. Les modes propres des deux anneaux sont visibles sur toute la plage de vitesse étudiée, bien que de façon moins marquée en raison des pics d'amplitude visibles au croisement des deux modes propres, aux deux valeurs de  $\Delta\Omega$  :  $\Delta\Omega_a \simeq 18800 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Delta\Omega_b \simeq 19530 \text{ rad.s}^{-1}$ . Ces deux pics sont mieux séparés que dans le cas des roues aubagées, avec une nette diminution de l'amplitude des déplacements entre eux.

### Troisième plage de vitesse (co-rotatif)

Comme pour les roues aubagées, le comportement du système bi-anneau est vérifié en co-rotatif pour les valeurs de  $\Delta\Omega$  générant des singularités en configuration contra-rotative. Les valeurs cibles de  $\Delta\Omega$  ne pouvant pas être atteintes en croisant simultanément les modes propres des deux anneaux, le mode propre du premier est privilégié et la plage d'étude du second est définie de façon à couvrir les deux valeurs  $\Delta\Omega_{a,b}$ . La résonance du premier rotor apparaissant aux alentours de  $\Omega_1 = 10700 \text{ rad.s}^{-1}$ , la plage minimale de vitesse pour l'anneau 2 est comprise entre  $29500 \text{ rad.s}^{-1} \leq \Omega_2 \leq 30230 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les nappes sont calculées avec un pas de  $10 \text{ rad.s}^{-1}$  et tracées Figure III.14.

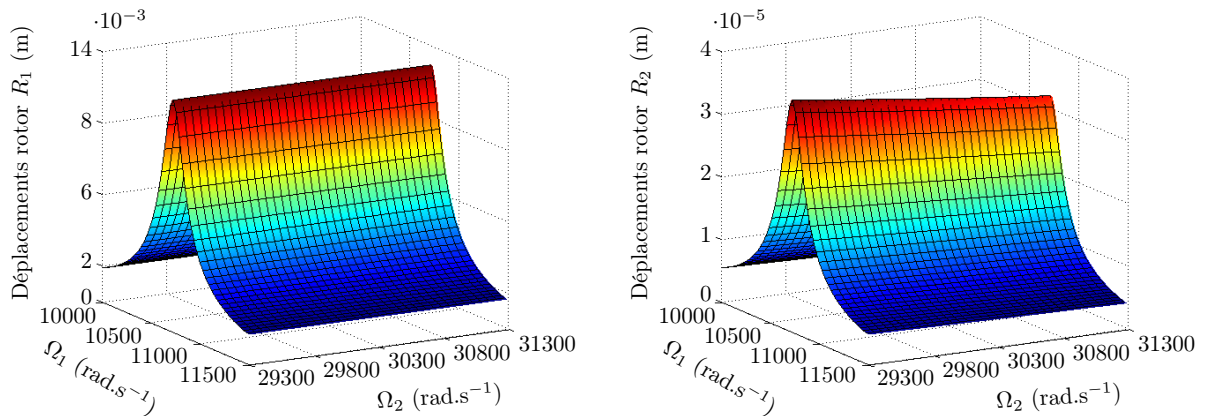


FIGURE III.14 – Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de chaque anneau en configuration co-rotative, autour de la fréquence propre de la roue  $R_1$  et des deux valeurs de  $\Delta\Omega$  présentant des points singuliers dans le cas contra-rotatif.

Comme dans le cas des roues aubagées, la résonance de l'anneau 1 est visible sur les deux rotors. Ici encore, l'anneau 1 ne présente pas de phénomène vibratoire particulier au passage des valeurs cibles de  $\Delta\Omega$ . Contrairement au cas des roues aubagées, l'anneau 2 ne présente pas non plus de phénomène vibratoire notable sur cette plage de vitesse. Il est probablement atteint ici l'une des limites de la modélisation du comportement vibratoire du système bi-rotor par une structure simple d'anneaux.

### Conclusion

Le comportement vibratoire présenté au travers de ces nappes est très similaire à celui des roues aubagées : au croisement des deux modes propres, un transfert d'énergie se met en place en co-rotatif et une singularité sous la forme de deux pics d'amplitude apparaît en contra-rotatif. Ce modèle bi-anneau recalé semble donc pertinent pour l'étude de ces deux phénomènes déjà présents sur les roues aubagées.

En revanche aucun phénomène vibratoire particulier n'est observé en co-rotatif pour les mêmes valeurs de différence de vitesse que les points singuliers des nappes en contra-rotatif. L'origine des pics observés en co-rotatif sur les roues aubagées ne pourra probablement pas être expliquée par ce modèle trop simple. Cette différence ne remet toutefois pas en question la pertinence du modèle bi-anneau pour l'étude des deux autres phénomènes. En effet, il est normal qu'une

structure axi-symétrique ne présente pas exactement le même comportement dynamique qu'une structure à symétrie cyclique bien plus complexe géométriquement.

### 4.3 Étude de la stabilité du système bi-anneau

La pertinence du système bi-anneau recalé ayant été validée pour l'étude des phénomènes vibratoires du bi-rotor aubagé, la modélisation Rayleigh-Ritz est à présent utilisée pour expliquer l'origine de ces phénomènes. Cette formulation à 4 ddl, très intéressante du point de vue de son écriture analytique et de son très faible coût numérique, est également tout à fait adaptée pour une étude de stabilité, concernant notamment l'origine des singularités observées sur les nappes en configuration contra-rotative.

#### 4.3.1 Étude paramétrique des conditions de stabilité

Plusieurs méthodes sont à notre disposition pour déterminer les conditions de stabilité du système bi-anneau en fonction des différents paramètres d'influence, à savoir les vitesses de rotation, la densité de raideur  $\kappa$  et le taux d'amortissement  $\xi$ . L'équation du mouvement de départ (III.25) est une équation de Mathieu, c'est-à-dire une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques. La stabilité des solutions périodiques de ce type d'équation est étudiée dans la théorie de Floquet [53]. Cette méthode est basée sur le calcul des multiplicateurs de Floquet, un jeu unique de paramètres associés au problème de départ qui donnent une mesure de la divergence ou convergence orbitale locale de la solution sur une période : si les multiplicateurs sont strictement inférieurs ou supérieurs à 1, la solution est respectivement stable ou instable. S'ils sont égaux à 1, des investigations supplémentaires sont nécessaires pour conclure. L'inconvénient de cette méthode est sa sensibilité numérique. Pour des valeurs très proches de 1, il peut être difficile d'affirmer la stabilité ou l'instabilité de la solution en raison des potentielles erreurs numériques. Cette situation ayant été très régulièrement rencontrée avec le système bi-anneau, la méthode de Floquet n'a pas permis d'obtenir de résultats toujours concluants.

Une seconde façon d'étudier la stabilité de ce système est de travailler avec l'équation du mouvement projetée (III.29) pour laquelle les termes périodiques ont été supprimés. Il suffit alors d'en calculer les valeurs propres et d'étudier le signe de la partie réelle correspondant à l'amortissement du système : un amortissement positif ou nul est signe d'instabilité. Le gros avantage avec la modélisation Rayleigh-Ritz est que l'opération de projection de l'équation du mouvement ne nécessite aucune hypothèse contrairement au cas EF. L'équation à coefficients périodiques et l'équation projetée sont ainsi parfaitement équivalentes. Les seules erreurs potentiellement introduites sont les erreurs numériques de calcul des valeurs propres qui peuvent raisonnablement être jugées négligeables. Cette méthode d'étude de la stabilité, ainsi très performante pour l'étude du bi-rotor, est utilisée dans la suite.

En pratique, il est conseillé de travailler avec la formulation en système d'état (III.31) dont les valeurs propres sont calculées en faisant varier les différents paramètres d'influence. La projection (III.27) de l'équation du mouvement, nécessaire pour la suppression des termes temporels, a été choisie de façon à ne plus faire apparaître les vitesses  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparément mais toujours sous la forme de la différence de vitesse  $\Delta\Omega$ . C'est donc ce paramètre qui sera pris en compte dans l'étude de stabilité.

Trois calculs successifs sont réalisés pour trois valeurs d'amortissement  $\xi$ . Pour chaque calcul, la stabilité est déterminée sur une plage de valeurs de  $\kappa$  et de  $\Delta\Omega$ . Dans les trois cas, la zone étudiée présente un unique lobe d'instabilité représenté en nuances de gris sur la Figure III.15. Toute la zone blanche correspond à une configuration stable du système bi-anneau.

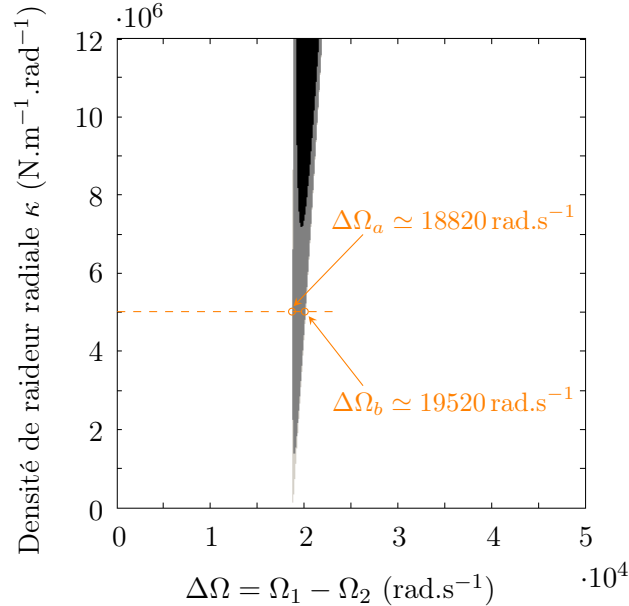


FIGURE III.15 – Lobe d'instabilité du système bi-anneau pour trois valeurs d'amortissement  $\xi$  en fonction de la différence de vitesse des deux rotors  $\Delta\Omega$  et de la densité de raideur radiale  $\kappa$ .

$$\xi = 0, 1\% (\square), \xi = 1\% (\blacksquare), \xi = 5\% (\blacksquare).$$

L'influence du taux d'amortissement est cohérente, générant une zone d'instabilité d'autant plus grande que l'amortissement est faible. Les pointillés orange indiquent la valeur de la densité de raideur utilisée pour les calculs de réponse forcée de la partie III.4.2.2. Le taux d'amortissement de ces calculs de nappe étant de  $\xi = 1\%$ , la zone d'instabilité est effectivement rencontrée pour une différence de vitesse située entre  $18820 \text{ rad.s}^{-1} \leq \Delta\Omega \leq 19520 \text{ rad.s}^{-1}$ . Ces valeurs sont très proches de celles relevées sur la nappe de la Figure III.13, au niveau des singularités de la réponse forcée en configuration contra-rotative. L'entrée et la sortie du lobe d'instabilité sont donc bien marquées lors des calculs fréquentiels, alors que le cœur de la zone d'instabilité ne présente pas de comportement particulier, ce qui est classique en calcul fréquentiel.

#### 4.3.2 Explication analytique des singularités des calculs fréquentiels

Pour expliquer ce phénomène, on reprend l'équation du mouvement projetée écrite en système d'état (III.31). La matrice pseudo-raideur de ce système ne possédant aucune propriété de symétrie ou d'antisymétrie, il est nécessaire d'en calculer les modes propres à droite et à gauche de façon à pouvoir projeter l'équation en base modale [8]. On obtient une relation de la forme :

$${}^d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda}^d \mathbf{q} = -\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{g} \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi} \\ -\mathbf{g} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{\Lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{III.32})$$

$\mathbf{g} \boldsymbol{\Phi}$  est la matrice des modes propres à gauche du système d'état (III.31) et  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice spectrale contenant les valeurs propres complexes associées. Dans le cas de la formulation Rayleigh-Ritz

utilisée ici et limitée à 4ddl, la matrice spectrale est de dimension 8 :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 + j\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 - j\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 + j\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 - j\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 + j\omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 - j\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 + j\omega_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 - j\omega_4 \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha_i$  et  $\omega_i$  respectivement le coefficient d'amortissement modal et la pulsation propre du mode  $i$  de la structure couplée. Pour simplifier la suite des développements, les efforts extérieurs et la projection  $\mathbf{P}^T$ , d'angle  $\pm \frac{\Delta\Omega}{2}t$  en fonction de l'anneau considéré, sont réécrits en formalisme complexe :

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{F} e^{jn\Omega_1 t} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} e^{-jn\frac{\Delta\Omega}{2}t} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{jn\frac{\Delta\Omega}{2}t} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

On notera que les efforts extérieurs ne s'appliquent qu'à l'anneau 1 conformément à la configuration utilisée pour les calculs de nappe. De ce fait, une seule fréquence d'excitation est présente, ne dépendant que de la vitesse de rotation de cet anneau. Avec cette écriture, l'effort projeté s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} &= \mathbf{F} e^{jn(\Omega_1 - \frac{\Delta\Omega}{2})t} \\ &= \mathbf{F} e^{jn\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}t} \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

L'équation (III.32) devient alors :

$${}^d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda} {}^d\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}} e^{jn\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}t} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} \quad (\text{III.35})$$

où  $\tilde{\mathbf{F}}$  est un vecteur de coefficients indépendants du temps. Ce système étant linéaire, les coordonnées modales  ${}^d\mathbf{q}$  évoluent à la fréquence d'excitation  $n\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$  :

$${}^d\mathbf{q} = \mathbf{Q} e^{jn\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}t} \quad (\text{III.36})$$

soit en remplaçant dans l'équation (III.35) :

$$\left( jn\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} \mathbf{I}_8 + \mathbf{\Lambda} \right) \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (\text{III.37})$$

Finalement, l'amplitude de réponse du mode propre  $i$  a pour expression :

$$Q_i = \frac{\tilde{F}_i}{-\alpha_i + j \left( n\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} \pm \omega_i \right)} \quad (\text{III.38})$$

Cette relation permet d'expliquer la raison pour laquelle la zone d'instabilité apparait sur les calculs fréquentiels, et ce uniquement en certains points bien particuliers. En effet, une singularité sera visible chaque fois que le dénominateur de cette expression s'annule, soit lorsque les deux conditions suivantes sont atteintes simultanément :

$$\alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \omega_i = \pm n\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} \quad (\text{III.39})$$

La condition  $\alpha_i = 0$  limite l'apparition du phénomène à l'entrée et la sortie de la zone d'instabilité. Sur chacune de ces deux frontières, la seconde condition n'est vérifiée que pour deux couples de vitesse  $(\Omega_1, \Omega_2)$  spécifiques. La nappe de réponse forcée présente alors un pic d'amplitude localisé autour du point correspondant à chacun de ces couples.

### 4.3.3 Tracé des zones d'instabilité sur les nappes de réponse forcée

La présence de singularité sur les nappes de réponse forcée d'un système bi-rotor est particulièrement intéressante dès lors que le positionnement de ces pics par rapport à l'ensemble de la zone d'instabilité est complètement maîtrisée. Dans ces conditions, il est envisageable de déterminer graphiquement les zones d'instabilité du système, économisant ainsi des calculs de stabilité souvent complexes et numériquement coûteux.

Une étude plus approfondie des deux conditions (III.39) d'apparition des singularités est alors nécessaire, notamment afin de déterminer les couples de vitesse  $(\Omega_1, \Omega_2)$  qui leur sont associés. En travaillant avec le système bi-anneau, la première étape consiste à tracer l'évolution du coefficient d'amortissement  $\alpha_i$  et de la pulsation propre  $\omega_i$  de chaque mode en fonction de la différence de vitesse  $\Delta\Omega$ . Pour cela, la densité de raideur est fixée à  $\kappa = 5 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}.\text{rad}^{-1}$ , ce qui revient à se déplacer sur la droite en pointillés orange de la Figure III.15. On rappelle que les valeurs propres sont calculées dans les nouveaux repères de projection qui sont des repères tournants.

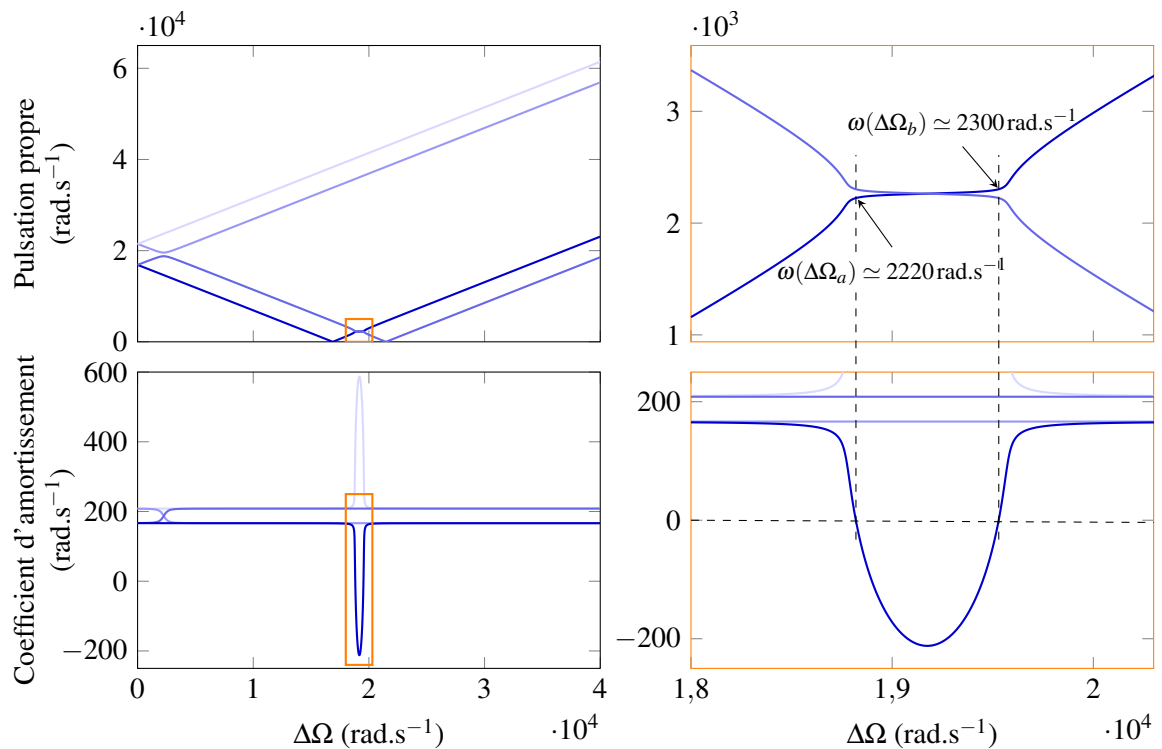


FIGURE III.16 – Évolution des parties réelles et imaginaires des 4 valeurs propres du système couplé bi-anneau en fonction de la différence de vitesse  $\Delta\Omega$ . Zoom sur la zone d'instabilité ( $\square$ ).

Les courbes obtenues pour chacune des quatre valeurs propres, tracées Figure III.16, permettent d'expliquer plusieurs des phénomènes visibles sur les nappes de la section III.4.2.2. Pour commencer, un phénomène de veering [54], avec rapprochement puis éloignement sans croisement de deux

fréquences propres, est visible aux alentours de  $\Delta\Omega \simeq 2300 \text{ rad.s}^{-1}$ . Cette valeur correspond au transfert d'énergie des nappes tracées Figure III.12. Sur ces nappes, un léger décalage des fréquences propres avant et après croisement des deux modes est visible. Ce décalage s'explique ici par l'échange des déformées des deux modes au niveau du veering.

Un second phénomène caractéristique apparaît autour de  $\Delta\Omega \simeq 19000 \text{ rad.s}^{-1}$ . La courbe des pulsations propres présente une coalescence entraînant le croisement de deux modes propres. Au même moment, l'un des coefficients d'amortissement devient négatif, signe d'une instabilité du mode. On remarque ici qu'un seul des quatre modes propres est responsable de l'instabilité du système couplé bi-anneau. Le coefficient d'amortissement  $\alpha_i$  de ce mode s'annule deux fois, en entrant et en sortant de la zone d'instabilité, pour les deux valeurs  $\Delta\Omega_a = 18820 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\Delta\Omega_b = 19520 \text{ rad.s}^{-1}$ . On retrouve de nouveau les valeurs déjà relevées sur la Figure III.15. Les pulsations propres associées, dans le repère de projection tournant, ont pour valeur  $\omega(\Delta\Omega_a) \simeq 2220 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega(\Delta\Omega_b) \simeq 2300 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Les couples de vitesses respectant l'une de ces quatre valeurs  $\Delta\Omega_{a,b}$  ou  $\omega(\Delta\Omega_{a,b})$  sont multiples. Ils constituent dans chaque cas une droite dans le plan  $(\Omega_1, \Omega_2)$  pouvant être superposée aux nappes de réponse forcée calculées en fréquentiel. La Figure III.17 présente les tracés effectués sur la nappe de l'anneau 1 en configuration contra-rotative. Les deux premières droites étudiées, délimitant la zone d'instabilité, correspondent aux valeurs  $\Delta\Omega_a$  et  $\Delta\Omega_b$  pour lesquelles le coefficient d'amortissement  $\alpha_i$  s'annule. Ce coefficient est négatif dans la zone contenue entre ces droites, dont les équations sont obtenues à partir de la définition de la différence de vitesse  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$  :

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \Omega_1 - \Delta\Omega_a \\ \Omega_2 &= \Omega_1 - \Delta\Omega_b\end{aligned}\tag{III.40}$$

Comme prévu, ces droites passent chacune par l'un des pics d'amplitude de la nappe. Compte tenu de la symétrie du système qui permet d'intervertir la place des deux rotors, il existe une seconde façon de définir  $\Delta\Omega$  :  $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ . Cette nouvelle formulation fournit deux droites supplémentaires d'équation :

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \Omega_1 + \Delta\Omega_a \\ \Omega_2 &= \Omega_1 + \Delta\Omega_b\end{aligned}\tag{III.41}$$

Ces dernières ne sont pas visibles sur la Figure III.17 car elles se situent en dehors de la plage de vitesse représentée. Elles délimitent une seconde zone d'instabilité parfaitement identique à celle de la Figure III.17.

Le tracé de ces droites est suffisant pour déterminer les zones d'instabilité. Il est toutefois intéressant de représenter également les droites pour lesquelles la fréquence propre du mode potentiellement instable prend les valeurs  $\omega(\Delta\Omega_a)$  et  $\omega(\Delta\Omega_b)$  afin de les situer par rapport à la zone d'instabilité. Les équations de ces droites sont établies à partir de la seconde condition de la relation (III.39), appliquée pour l'harmonique spatiale d'ordre  $n = 2$ . Deux groupes de solutions distinctes sont définis par cette relation :  $\omega_i = \Omega_1 + \Omega_2$  et  $\omega_i = -(\Omega_1 + \Omega_2)$ . La forme  $\omega_i = \Omega_1 + \Omega_2$  établit les deux premières droites d'équation :

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \omega(\Delta\Omega_a) - \Omega_1 \\ \Omega_2 &= \omega(\Delta\Omega_b) - \Omega_1\end{aligned}\tag{III.42}$$

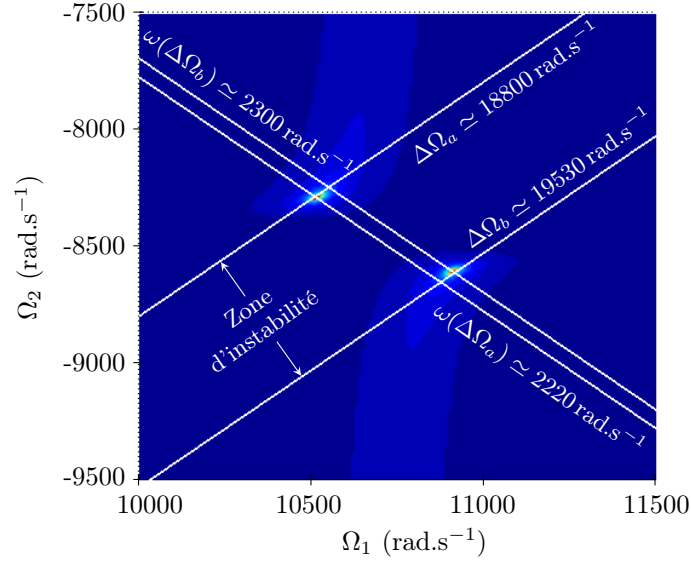


FIGURE III.17 – Tracé des droites correspondant à un coefficient d'amortissement nul et aux valeurs de pulsations propres susceptibles de générer une singularité. Superposition sur la nappe de réponse forcée obtenue pour l'anneau 1 en configuration contra-rotative.

Chacune de ces droites, représentées sur la Figure III.17, croise l'une des deux droites délimitant la zone d'instabilité, exactement au niveau d'un pic d'amplitude dans la réponse forcée du système. Ceci confirme bien l'origine des deux singularités, directement liées à une instabilité du système bi-anneau. La seconde expression  $\omega_i = -(\Omega_1 + \Omega_2)$  fournit deux autres droites d'équation :

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= -\omega(\Delta\Omega_a) - \Omega_1 \\ \Omega_2 &= -\omega(\Delta\Omega_b) - \Omega_1\end{aligned}\tag{III.43}$$

Ces droites, associées à la seconde zone d'instabilité définie par les équations (III.41), sont également non-visibles sur la Figure III.17 car en dehors de la plage de vitesse représentée. Leurs intersections avec les droites d'équations (III.41) présentent également des pics d'amplitude.

En résumé, les singularités observées sur les nappes en situation contra-rotative correspondent bien à l'observation simultanée des deux conditions (III.39), entraînant ainsi l'annulation du dénominateur dans la relation (III.38). Il est intéressant de noter que ces développements ne sont à présent plus nécessaires pour établir la délimitation de la zone d'instabilité. Celle-ci se détermine simplement par étude graphique en traçant les droites de pente 1 passant par les pics d'amplitude.

#### 4.3.4 Validation par résolution temporelle

Plusieurs résolutions par intégration temporelle ont été réalisées avec le paramétrage des simulations de la section III.4.2.2 pour différents couples de vitesse  $(\Omega_1, \Omega_2)$ . L'objectif est de vérifier la bonne détection de la zone d'instabilité visible sur la Figure III.17. La modélisation Rayleigh-Ritz est privilégiée pour ces calculs en raison de sa rapidité.

Les simulations sont effectuées pour six couples de vitesse repérés sur la Figure III.18. Les deux droites délimitant la zone de stabilité y sont tracées, en superposition sur la nappe de



réponse forcée de l'anneau 1 en configuration contra-rotative. Les simulations sont réparties en deux groupes : 3 dans la zone stable et 3 dans la zone supposée instable. Les simulations ① et ④ ont volontairement été placées de part et d'autre de la limite de stabilité afin de s'assurer de la validité et de la précision de cette limite.

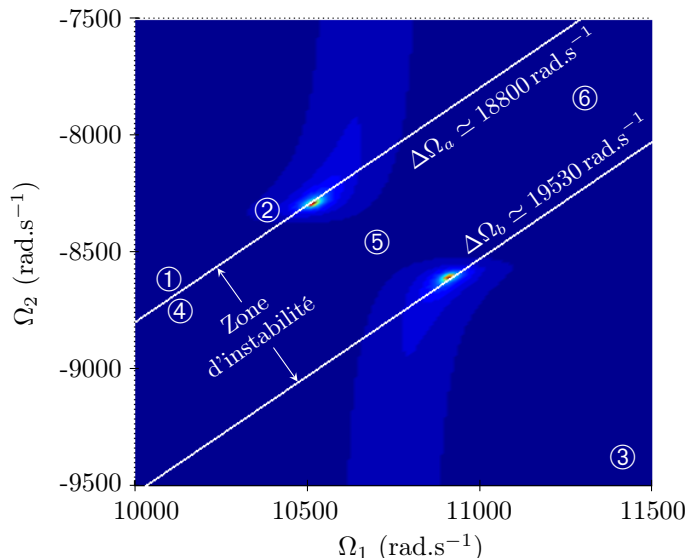


FIGURE III.18 – Tracé de la zone d'instabilité du système bi-anneau en contra-rotatif à partir des deux pics de résonance observés sur la réponse forcée de l'anneau 1 en configuration contra-rotative.

Les déplacements radiaux d'un point de chaque anneau au cours du temps pour chacune de ces simulations sont tracés Figure III.19. Quelle que soit la simulation, le comportement stable ou instable prévu est bien observé avec une divergence très nette des amplitudes d'oscillation pour les courbes ⑤ et ⑥ situées au cœur de la zone d'instabilité. Les courbes ① et ④ associées à des domaines de vitesse très proches, présentent des similitudes dans la forme de leur enveloppe, mais diffèrent en ce qui concerne la stabilité. Quant aux courbes ② et ③, elles représentent bien des comportements stables. La zone d'instabilité détectée est donc correctement estimée.

À partir des valeurs  $\Delta\Omega_{a,b}$  établies grâce à la localisation des deux pics d'amplitude sur la nappe de la Figure III.18, il est possible d'étendre le tracé des zones d'instabilité aux autres plages de l'étude. Ainsi, la configuration co-rotative de la Figure III.12 appartient bien intégralement à une zone stable. En revanche, bien qu'aucun phénomène vibratoire singulier ne soit visible, une zone d'instabilité traverse les nappes co-rotatives de la Figure III.14. Les deux droites délimitant cette zone d'instabilité sont tracées Figure III.20 sur la nappe de l'anneau 1.

Comme précédemment, plusieurs calculs temporels ont été réalisés en différents points de la nappe afin de vérifier la bonne détection de la zone d'instabilité. Ces points sont repérés Figure III.20 et les déplacements associés d'un point de chaque anneau sont tracés Figure III.21. Deux simulations ont été réalisées en configuration stable, et deux en configuration instable. Les simulations ② et ④ ont été choisies de part et d'autre de la limite d'instabilité afin de vérifier la validité de cette frontière.

Par rapport aux calculs de la Figure III.19 effectués en contra-rotatif, l'intégration temporelle

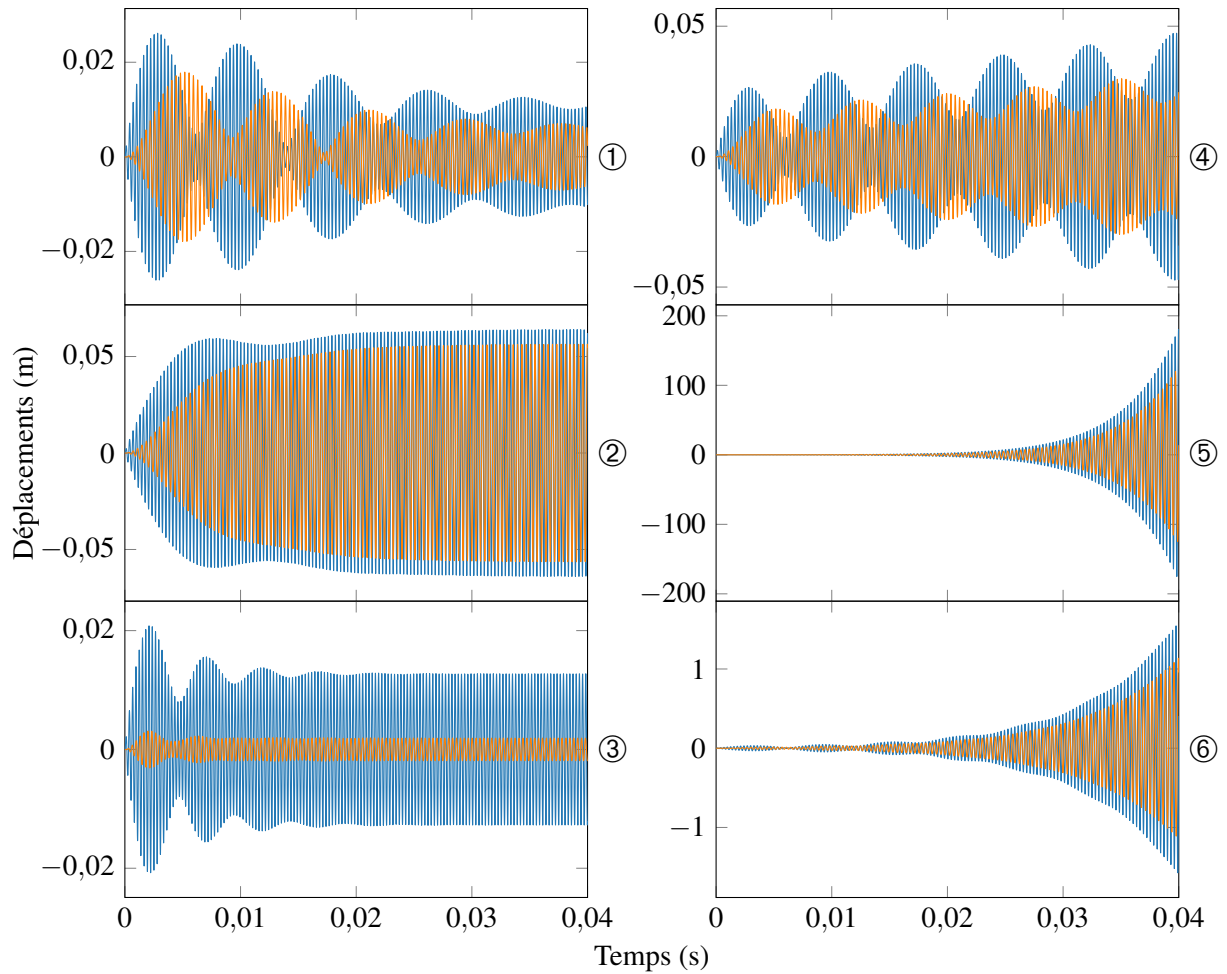


FIGURE III.19 – Déplacements radiaux au cours du temps d’un point de chaque anneau pour trois configurations stables (gauche) et trois configurations instables (droite) repérées sur la Figure III.18. Anneau 1 (—), anneau 2 (—).

est ici prolongée sur une période plus longue. En effet, la simulation ④ située à l’entrée de la zone d’instabilité, présente une variation très lente de l’amplitude du signal. La durée de l’intégration temporelle doit au minimum être doublée pour voir apparaître le comportement instable prévu par les calculs de stabilité. Pour les deux cas stables (courbes ① et ②), l’amplitude des déplacements de l’anneau 2 est trop faible par rapport à celle de l’anneau 1 pour pouvoir être visible sur ces courbes. Cet écart d’amplitude est cohérent puisque les simulations sont réalisées pour des vitesses de rotation situées à proximité du mode propre à 2D de l’anneau 1 mais relativement loin de celui de l’anneau 2. Dans les configurations instables ③ et ④, le deuxième anneau est suffisamment excité par le premier pour atteindre des amplitudes significatives, bien qu’elles restent plus faibles que celles du premier.

Le caractère stable ou instable du système bi-anneau observé sur ces quatre simulations est donc conforme au comportement initialement prévu par le tracé de la zone d’instabilité Figure III.20. L’extension du tracé des zones d’instabilité aux autres nappes de l’étude semble donc fonctionner.

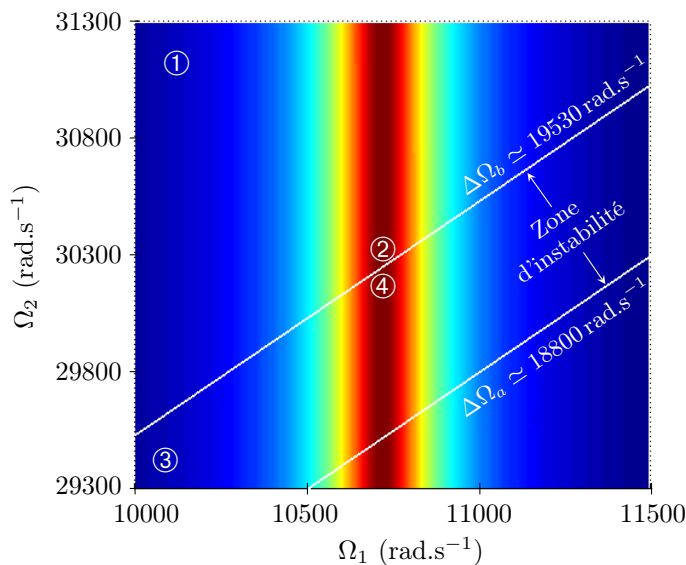


FIGURE III.20 – Tracé de la zone d'instabilité sur une nappe de l'anneau 1 en situation co-rotative.

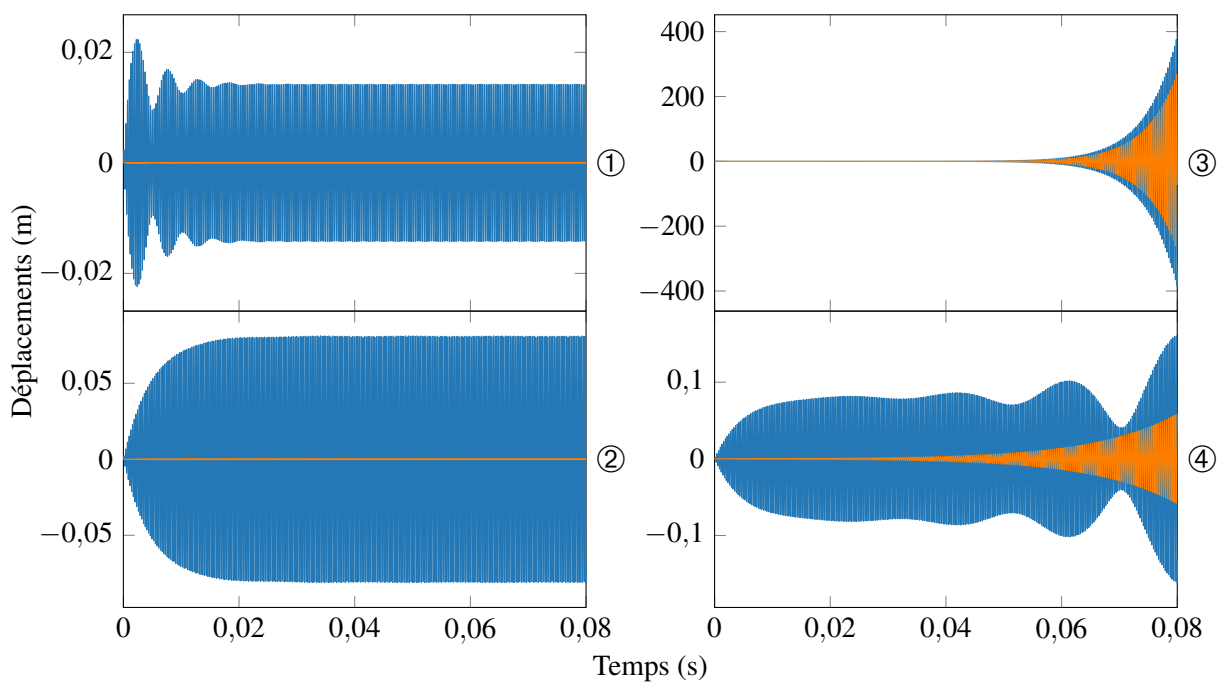


FIGURE III.21 – Déplacements radiaux au cours du temps d'un point de chaque anneau pour deux configurations stables (gauche) et deux configurations instables (droite) repérées sur la Figure III.20. Anneau 1 (—), anneau 2 (—).

#### 4.3.5 Conclusion

Les singularités observées sur certaines nappes de réponse forcée de la structure bi-anneau correspondent bien à l'expression d'une instabilité du système. Elles apparaissent lors des calculs fréquentiels en raison de l'annulation du dénominateur de la relation (III.38). Leur localisation à la frontière des zones instables présente l'énorme avantage de permettre la détection graphique de

ces zones sans aucun calcul supplémentaire. Pour cela, il suffit de tracer les droites de pente 1 passant par ces pics. L'utilisation des méthodes classiques d'étude de stabilité, parfois complexes à mettre en place, est ainsi évitée.

La limite de cette méthode de détection réside dans le risque de rater les zones d'instabilité dans le cas d'un maillage en vitesse trop grossier, mais surtout lorsque les points singuliers se situent en dehors des plages de vitesse étudiées. Le cas co-rotatif de la Figure III.20 illustre bien ce danger, avec la présence d'une zone d'instabilité sans qu'aucun phénomène vibratoire singulier ne soit visible sur la nappe de réponse forcée. Pour limiter les risques d'erreur, il est conseillé d'étudier en priorité les plages d'apparition des fréquences propres des deux anneaux notamment dans leur zone de croisement, en configurations co- et contra-rotatives.

#### 4.4 Extension au système bi-rotor aubagé

Les études de stabilité menées sur le système bi-anneau ont mis en évidence une caractéristique intéressante des nappes de réponse forcée obtenues par résolution fréquentielle : certains points singuliers situés à la frontière des zones instables permettent de délimiter les zones d'instabilité sur l'ensemble du domaine. Cette propriété s'avère particulièrement utile dans le cas du système bi-rotor aubagé pour lequel une étude de stabilité identique aux anneaux engendrerait des temps de calcul relativement importants. Cette section est donc dédiée à l'application de la méthode de tracé des zones d'instabilité sur le cas des roues aubagées.

Le premier cas à étudier est celui de la configuration contra-rotative, tracée Figure III.8 et qui présente deux points singuliers. Les valeurs de vitesse  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  associées à ces points sont déterminées par simple lecture de la nappe de l'une des deux roues, permettant ainsi d'établir les différences de vitesse  $\Delta\Omega_{a,b}$  délimitant la zone instable. Les droites associées, tracées Figure III.22 sur la nappe de la roue  $R_1$ , sont de pente 1 et passent par les deux points singuliers.

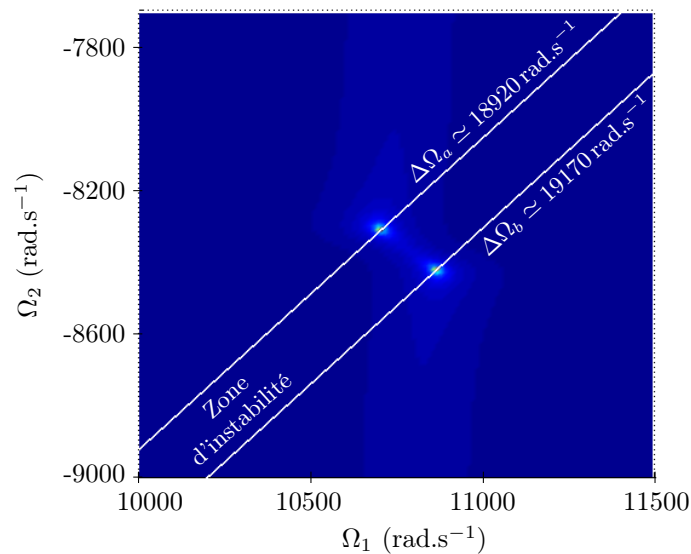


FIGURE III.22 – Tracé de la zone d'instabilité du système bi-rotor à partir de la position des points singuliers sur la nappe du rotor  $R_1$  en situation contra-rotative.

Une fois la zone d'instabilité établie sur cette nappe, elle peut être prolongée sur les autres

plages de vitesse étudiées. On s'intéresse particulièrement aux nappes de la Figure III.9 tracées en configuration co-rotative, pour lesquelles un phénomène vibratoire particulier avec apparition de pics d'amplitude est visible uniquement sur le rotor  $R_2$ . La superposition, Figure III.23, des

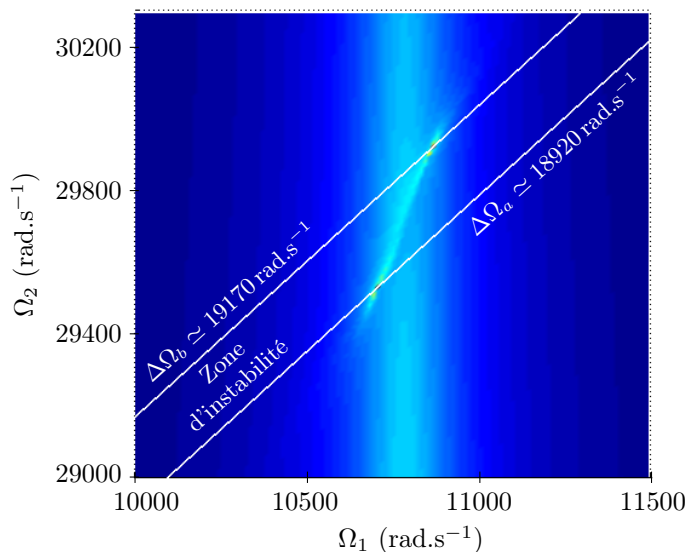


FIGURE III.23 – Tracé de la zone instable du système bi-rotor sur une nappe du rotor  $R_2$  en co-rotatif présentant un phénomène vibratoire particulier.

droites délimitant la zone instable sur la nappe du rotor  $R_2$  montre que ce phénomène particulier est probablement lié à l'expression de l'instabilité du système, les deux pics d'amplitude étant situés exactement à la frontière des domaines stables et instables.

Le relevé graphique des zones d'instabilité est donc cohérent avec le comportement vibratoire observé sur les nappes de réponse forcée du système bi-rotor aubagé.

## 5 Conclusion

La méthode de projection de l'équation du mouvement présentée Chapitre II a été appliquée sur un modèle simplifié de deux roues aubagées couplées possédant des propriétés de symétrie cyclique. Les projections proposées ainsi que l'hypothèse décrivant chaque vecteur propre dans la zone du roulement selon une unique harmonique spatiale ont été validées grâce à la comparaison des résolutions fréquentielle et temporelle pour des excitations mono- et multi-fréquentielles. L'avantage numérique de la méthode développée est notable, avec un temps de calcul de seulement 5 minutes pour plus de 6 heures dans le cas d'une résolution temporelle classique.

Cette méthode a ensuite été exploitée afin d'étudier la réponse forcée du système bi-rotor aubagé sur plusieurs plages de vitesses. Le calcul de chaque nappe nécessitant déjà environ 24 heures avec cette méthode fréquentielle, l'utilisation d'une résolution temporelle, beaucoup plus onéreuse, n'était pas envisageable. Deux phénomènes vibratoires spécifiques ont été observés puis expliqués à l'aide d'un système bi-anneau recalé, plus facile à interpréter :

- Un échange d'énergie des deux structures apparaît au croisement des modes propres des deux rotors en configuration co-rotative. Il s'agit d'un phénomène de veering entre deux modes du système couplé.

- Le même croisement en situation contra-rotative présente des pics de forte amplitude, témoins de l'entrée dans une zone d'instabilité.

Enfin, une formulation Rayleigh-Ritz du système bi-anneau a permis l'étude analytique de son domaine de stabilité. Il a ainsi été démontré que l'ensemble des zones d'instabilité d'un système bi-rotor peuvent être déterminés graphiquement grâce à la position des singularités observées sur les nappes de réponse forcée contra-rotative. Cette propriété permet de s'affranchir de calculs de stabilité souvent complexes et numériquement coûteux pour une telle structure.



## Chapitre IV

# Adaptation à deux problématiques industrielles

*La méthode de projection de l'équation du mouvement proposée dans le Chapitre II et permettant d'étudier le comportement vibratoire d'un système bi-rotor aubagé a été appliquée dans le Chapitre III dans un cadre linéaire avec couplage par un roulement. L'objectif de ce Chapitre IV est d'étendre la méthode à deux applications industrielles rencontrées sur les architectures actuelles de turboréacteurs. La première consiste à intégrer au modèle des non-linéarités de frottement présentes notamment en pied d'aube. Ces frottements, qui modifient le comportement vibratoire des aubages, ne peuvent être négligés lors du dimensionnement dynamique des rotors. L'enjeu réside alors dans les capacités d'adaptation des méthodes de résolution non-linéaires aux transformations de l'équation du mouvement imposées par la méthode de projection, jusqu'ici développée uniquement dans un cadre linéaire. La seconde application consiste à adapter la méthode à une architecture du type de l'Ultra High Bypass Ratio Integral Drive. Dans cette architecture, le fan et le compresseur BP sont fixés sur deux arbres distincts couplés par un réducteur à engrenages appelé gearbox. Il s'agit ici de développer un modèle simplifié représentatif du couplage dynamique engendré par la gearbox, puis de tester la méthode de projection en remplaçant le roulement par ce nouveau modèle de couplage.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Ajout d'une non-linéarité de type frottement dans le modèle . . . . .</b>	<b>124</b>
1.1	Origine des non-linéarités dans les turboréacteurs . . . . .	124
1.2	Principe de résolution par la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM)	125
1.3	Adaptation de la HBM dans le cadre de notre étude . . . . .	135
1.4	Applications numériques . . . . .	143
1.5	Conclusion . . . . .	152
<b>2</b>	<b>Couplage par une gearbox – cas de l'UHBR ID . . . . .</b>	<b>152</b>
2.1	Modèle simplifié utilisé . . . . .	155
2.2	Matrice de couplage associée . . . . .	156
2.3	Projection de la matrice de couplage . . . . .	160
2.4	Simulations numériques . . . . .	162
2.5	Conclusion . . . . .	167

---



## 1 Ajout d'une non-linéarité de type frottement dans le modèle

Les équations étudiées jusqu'à présent caractérisent des comportements vibratoires linéaires généralement simulés de façon satisfaisante par les codes de calculs commerciaux. Toutefois, si l'étude de la dynamique linéaire d'un turboréacteur constitue une première étape indispensable, elle ne permet pas de représenter toute la complexité technologique de ces machines, notamment le comportement non-linéaire de certaines pièces ou assemblages.

### 1.1 Origine des non-linéarités dans les turboréacteurs

Les origines des non-linéarités rencontrées dans les turbomachines sont diverses. **Les non-linéarités matériaux** interviennent notamment lorsque les matériaux constitutifs des pièces, souvent des alliages de titane ou de nickel, sont sollicités dans leurs zones de plasticité. Plus récemment, l'introduction des matériaux composites tissés 3D principalement au niveau des aubes de soufflante a présenté une avancée technologique considérable mais nécessite de travailler avec un matériau non-isotrope difficile à caractériser et dont les lois de comportement peuvent être non-linéaires [55].

**Les non-linéarités géométriques** concernent les structures dont la rigidité dépend du déplacement auxquelles elles sont soumises. Il s'agit notamment du raidissement des pales lié aux forces centrifuges, ou des grands déplacements à prendre en compte dans le cas d'aubage de grande dimension comme c'est le cas pour les soufflantes [56].

Enfin, de nombreuses **non-linéarités de type contact** sont présentes dans les turboréacteurs. Ces contacts peuvent être accidentels comme les contacts sommet d'aube/carter. Ceux-ci apparaissent lorsque le jeu fonctionnel laissé entre les parties fixes et tournantes du moteur est intégralement consommé. Ce jeu est réduit au maximum lors de la conception de façon à atteindre de meilleures performances aérodynamiques. Il peut alors être nécessaire de recouvrir certaines zones de la veine d'un matériau abradable tendre de manière à limiter l'impact dynamique de ces contacts [57]. Les contacts entre pièces peuvent également être volontaires afin d'apporter de l'amortissement sous la forme de frottement [58, 59] et ainsi de mieux maîtriser le comportement vibratoire de la pièce. On parle alors de dispositif d'amortissement passif. Ce type de contact s'observe au niveau des nageoires situées à mi-longueur des aubes de soufflantes, au niveau des talons situés au sommet des aubes de turbine BP ou encore au niveau des joncs utilisés sur les disques aubagés monoblocs [60]. Les roues aubagées constituées d'un assemblage d'aubes montées sur un disque sont également soumises à du contact frottant au niveau des assemblages aube/disque. Le contact est assuré par la force centrifuge qui vient plaquer le pied de l'aube contre l'alvéole du disque. Les excitations de l'aube entraînent des glissements de faible amplitude au niveau des surfaces en contact. Toutes ces non-linéarités de contact perturbent le comportement vibratoire des aubages et doivent donc être prises en compte lors du dimensionnement dynamique des pièces. Les contacts frottants peuvent également entraîner une usure des surfaces en contact [61], modifiant l'amortissement apporté à la structure ou produisant l'initiation de fissures [62].

La prédiction du comportement vibratoire des turbomachines en tenant compte de ces non-linéarités nécessite de développer des outils spécifiques de résolution adaptés à chacun de ces phénomènes.

## 1.2 Principe de résolution par la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM)

La prise en compte des effets non-linéaires dans la dynamique d'une roue aubagée nécessite de résoudre l'équation du mouvement habituelle faisant intervenir les matrices masse  $\mathbf{M}$ , raideur  $\mathbf{K}$  et amortissement  $\mathbf{D}$  à laquelle le terme  $\mathbf{f}_{nl}$  est ajouté, correspondant aux efforts non-linéaires :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{ext}(t) \quad (\text{IV.1})$$

De la même façon que pour les simulations du Chapitre III, les effets gyroscopiques, le raidissement et l'assouplissement centrifuge sont négligés. La difficulté de ce type d'équation différentielle réside dans la dépendance en déplacement et vitesse des efforts non-linéaires. En l'état, il n'est pas possible d'établir une expression analytique exacte de la solution de ce type d'équation.

Dans le cas de non-linéarités faibles, il est envisageable qu'une linéarisation au premier ordre modifie peu la dynamique du système et permette alors d'obtenir une solution approchée de l'équation différentielle non-linéaire. Cette approximation n'est pas toujours possible dans le cadre de la dynamique des rotors pour laquelle les non-linéarités mises en jeu sont généralement fortes et non-régulières, comme c'est le cas pour les contacts frottants. Des méthodes approchées numériques doivent alors être envisagées, méthodes qui se répartissent en deux grandes catégories : les méthodes dans le domaine temporel et les méthodes dans le domaine fréquentiel. Une brève revue de ces méthodes est présentée ici, des explications plus approfondies pouvant être trouvées dans les travaux de Gruin [14] et Grolet [63].

### Méthodes de résolution dans le domaine temporel

L'approche la plus classique dans le cas d'une équation différentielle non-linéaire dépendant du temps est d'utiliser une méthode de résolution par intégration temporelle. Le principe est de construire la réponse dynamique du système de façon itérative dans le temps, c'est-à-dire pas à pas. Les méthodes de Runge-Kutta [64] sont souvent utilisées pour les problèmes réguliers en raison de leur précision et de leur stabilité comparativement à un schéma d'intégration d'Euler d'ordre inférieur. Pour les équations différentielles du second ordre, comme c'est souvent le cas avec les problèmes de dynamique des structures, la méthode de Newmark [65] peut également être utilisée. Elle évite notamment l'écriture en système d'état nécessaire avec les méthodes de Runge-Kutta ou d'Euler, et qui a pour conséquence de doubler le nombre de ddl du système. Elle se limite toutefois à un ordre 2 de précision, pouvant être supérieur à 4 avec les méthodes de Runge-Kutta. Pour les problèmes non-réguliers, le schéma d'Euler peut être utilisé ou des méthodes plus spécifiques telles que les algorithmes de Carpenter [66] ou Moreau Jean [67, 68].

Bien adaptées à l'étude d'un régime transitoire, ces méthodes s'avèrent moins efficaces lorsqu'on ne s'intéresse qu'au régime stationnaire. En effet, le calcul du régime transitoire peut engendrer des temps de calculs importants. D'autre part, cette phase peut être longue et nécessiter un grand nombre de pas d'intégration, risquant d'engendrer la propagation d'une erreur numérique importante.

Ces méthodes sont donc à privilégier pour l'étude d'un phénomène vibratoire transitoire ou dans le cadre de la validation d'une méthode de résolution plus adaptée.

Des alternatives basées sur les méthodes temporelles existent, comme la méthode de tir qui permet de s'affranchir du calcul du régime transitoire en recherchant une condition initiale directement sur la solution périodique. Cette méthode, qui a déjà été appliquée dans le domaine

de la dynamique des rotors [69, 70], est plus avantageuse en temps de calcul mais présente des limitations en terme de stabilité.

### Méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'au régime stationnaire, les méthodes de résolution fréquentielle constituent une bonne alternative aux méthodes temporelles. En se plaçant dans l'espace de Fourier, on accède directement aux solutions périodiques ce qui assure généralement un gain de temps notable par rapport aux méthodes temporelles.

La méthode présentée ici, appelée *méthode d'équilibrage harmonique* ou *balance harmonique* (HBM), permet de rechercher les solutions périodiques du comportement dynamique d'un système mécanique non-linéaire soumis à une excitation harmonique mono-fréquentielle de fréquence  $\omega$ . Cette méthode est donc adaptée pour l'étude du régime permanent. L'excitation étant mono-fréquentielle, la solution est recherchée sous une forme périodique de même période  $T = 2\pi/\omega$  que l'excitation, mais pouvant être multi-harmonique compte tenu de la présence de non-linéarités. Une décomposition de la solution  $\mathbf{x}$  sous la forme d'une série de Fourier semble donc particulièrement adaptée à ce type de problème :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t \quad (\text{IV.2})$$

Le principe de cette méthode fréquentielle est de substituer la relation (IV.2) dans l'équation à résoudre (IV.1), puis de projeter l'ensemble des équations du problème sur la base des fonctions harmoniques. On obtient ainsi un système d'équations algébriques non-linéaires pour lequel la variable de temps  $t$  a disparu, qui est ensuite résolu grâce à des méthodes itératives.

La méthode d'équilibrage harmonique est utilisée dans divers domaines comme l'électronique [18, 71], l'électronique quantique [72] ou encore la mécanique des fluides [73, 74]. En mécanique du solide, elle est notamment employée pour étudier la dynamique des roues aubagées [75, 76, 77] ou les phénomènes de crissement de frein [78]. Les aspects théoriques de cette méthode, notamment décrits par Narayanan et Sekar [79], sont présentés dans cette partie.

#### 1.2.1 Mise en équation

La décomposition en série de Fourier de la solution proposée équation (IV.2) met en jeu une somme infinie qui ne peut être traitée numériquement. Cette solution est donc approximée en tronquant la décomposition à un ordre  $N_h$ , limitant ainsi le problème à  $(2N_h + 1)n$  inconnues,  $n$  étant le nombre de ddl du système :

$$\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t \quad (\text{IV.3})$$

Plus le nombre d'harmoniques conservées dans la base trigonométrique est important, et plus la solution obtenue s'approchera de la solution périodique (IV.2) exacte. Cette relation peut également s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}_h \quad (\text{IV.4})$$

où  $\mathbf{T}$  est une base de fonctions trigonométriques et  $\mathbf{x}_h$  les coefficients de Fourier de la série :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0(t) \otimes \mathbf{I}_n \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega t & \sin \omega t & \dots & \cos N_h \omega t & \sin N_h \omega t \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

$$\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^T & \mathbf{a}_1^T & \mathbf{b}_1^T & \dots & \mathbf{a}_{N_h}^T & \mathbf{b}_{N_h}^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{IV.6})$$

L'intérêt de cette écriture est de séparer les inconnues  $\mathbf{x}_h$  de la dépendance temporelle contenue dans la base  $\mathbf{T}$ . Les expressions de la vitesse  $\dot{\mathbf{x}}$  et de l'accélération  $\ddot{\mathbf{x}}$  sont ensuite obtenues par dérivation de la solution (IV.4). Pour faciliter leur écriture, on définit un opérateur de dérivation  $\nabla$  :

$$\nabla = \text{diag}(\mathbf{0}_{n,n}, \nabla^{\{1\}}, \dots, \nabla^{\{N_h\}}) \quad \text{avec} \quad \nabla^{\{k\}} = k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \omega \mathbf{T} \nabla \mathbf{x}_h \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \omega^2 \mathbf{T} \nabla^2 \mathbf{x}_h \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement non-linéaire (IV.1), on obtient finalement l'expression du résidu dynamique :

$$\mathbf{r}(t) = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{T}(t) \nabla^2 \mathbf{x}_h + \omega \mathbf{D} \mathbf{T}(t) \nabla \mathbf{x}_h + \mathbf{K} \mathbf{T}(t) \mathbf{x}_h + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_h, t) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(t) \quad (\text{IV.9})$$

Le résidu  $\mathbf{r}$  découle de l'erreur engendrée par l'approximation de  $\mathbf{x}$  par une série de Fourier tronquée. Ce résidu est d'autant plus faible que le nombre d'harmonique  $N_h$  est grand. Le cœur de la méthode de l'équilibrage harmonique repose sur la suppression de la dépendance temporelle du résidu  $\mathbf{r}$  en exprimant la relation (IV.9) dans le domaine fréquentiel. On applique pour cela la procédure de Galerkin qui consiste à orthogonaliser le résidu  $\mathbf{r}$  par rapport à la base trigonométrique  $\mathbf{T}$  grâce au produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_h = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{r}(t) dt \quad (\text{IV.10})$$

Le système d'équations (IV.9) devient ainsi un système d'équations algébriques non-linéaires :

$$\mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h) = \mathbf{L} \mathbf{x}_h + \mathbf{f}_{\text{nl}_h}(\mathbf{x}_h) - \mathbf{f}_{\text{ext}_h} \quad (\text{IV.11})$$

La matrice  $\mathbf{L}$ , appelée matrice de rigidité dynamique, est composée des matrices structurelles du problème et contient la contribution dynamique linéaire du système :

$$\mathbf{L} = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}^T (\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{T} \nabla^2 + \omega \mathbf{D} \mathbf{T} \nabla + \mathbf{K} \mathbf{T}) dt \quad (\text{IV.12})$$

Les vecteurs  $\mathbf{f}_{\text{nl}_h}$  et  $\mathbf{f}_{\text{ext}_h}$  sont les coefficients harmoniques des efforts non-linéaires et des efforts extérieurs et ont pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{nl}_h}(\mathbf{x}_h) &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_h, t) dt \\ \mathbf{f}_{\text{ext}_h} &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}(t) dt \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Dans les cas qui nous intéressent, les efforts extérieurs  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  sont généralement des excitations périodiques synchrones qui peuvent aisément être décomposées sous la forme d'une somme de

fonctions cosinus et sinus. Les coefficients harmoniques associés  $\mathbf{f}_{\text{ext}_h}$  découlent naturellement de cette décomposition.

Pour les efforts non-linéaires, le calcul des coefficients harmoniques peut se faire analytiquement dans le cas d'une non-linéarité simple, pour laquelle les coefficients harmoniques des efforts  $\mathbf{f}_{\text{nl}_h}$  peuvent s'exprimer directement à partir de ceux des déplacements  $\mathbf{x}_h$ . La non-linéarité peut alors être traitée directement dans le domaine fréquentiel, comme c'est le cas pour les efforts extérieurs. Lorsque les non-linéarités sont exprimées dans le domaine temporel, comme les non-linéarités de contact ou de frottement, des méthodes numériques sont nécessaires pour évaluer les coefficients harmoniques des efforts non-linéaires. Ces méthodes seront présentées dans la section IV.1.2.3.

### Expression de la matrice de rigidité dynamique

Dans son expression (IV.12), la matrice  $\mathbf{L}$  possède des termes temporels contenus dans la base trigonométrique  $\mathbf{T}$ . L'objectif est alors d'isoler les autres termes de l'expression, tous indépendants du temps, de façon à les sortir du calcul de l'intégrale. Pour cela, la relation suivante est établie grâce aux propriétés du produit de Kronecker, pour une matrice carrée  $\mathbf{A}$  de dimension  $n$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} &= (\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{T}_0 \otimes \mathbf{I}_n) = (\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{T}_0) \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n) = \mathbf{T}_0 \otimes \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{I}_{2N_h+1}) \otimes (\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{T}_0 \otimes \mathbf{I}_n) \cdot (\mathbf{I}_{2N_h+1} \otimes \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_\mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

La matrice  $\mathbf{N}_\mathbf{A} = \mathbf{I}_{2N_h+1} \otimes \mathbf{A}$  est une matrice diagonale par blocs contenant  $2N_h + 1$  fois la matrice  $\mathbf{A}$ . En appliquant cette relation aux matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$ , on isole les termes indépendants du temps hors de l'intégrale :

$$\mathbf{L} = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} dt (\omega^2 \mathbf{N}_\mathbf{M} \nabla^2 + \omega \mathbf{N}_\mathbf{D} \nabla + \mathbf{N}_\mathbf{K}) \quad (\text{IV.15})$$

Enfin, en utilisant la relation  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$ , on simplifie le calcul de l'intégrale à :

$$\frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_0 dt \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{IV.16})$$

La base  $\mathbf{T}_0$  étant orthogonale, les seuls termes non nuls dans cette projection sont ceux de la diagonale :

$$\frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} dt = \begin{bmatrix} 2\mathbf{I}_n & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I}_n & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

En remplaçant dans l'équation (IV.15) et en explicitant les différents termes, on obtient finalement l'expression analytique de la matrice de rigidité dynamique sous la forme d'une matrice diagonale

par blocs indépendante du temps :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{L}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

$$\mathbf{L}_0 = 2\mathbf{K} \quad \mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (j\omega)^2\mathbf{M} & j\omega\mathbf{D} \\ -j\omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (j\omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, N_h$$

### 1.2.2 Résolution par une méthode de Newton

Une fois tous les termes du système algébrique non-linéaire (IV.11) exprimés, il reste à le résoudre de façon à déterminer l'ensemble des inconnues  $\mathbf{x}_h$ , c'est-à-dire établir les racines de l'équation :

$$\mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h) = \mathbf{0} \quad (\text{IV.19})$$

Pour résoudre ce type de problème, des méthodes de résolution itératives sont souvent employées. L'ouvrage de Fletcher [80] en présente plusieurs dont les méthodes du gradient, les méthodes de Newton ou encore les méthodes des régions de confiance. Dans le cadre de la HBM, une méthode itérative de type Newton-Raphson, initialement introduite par Lau [81], est couramment utilisée. Le principe de cette méthode est de déterminer une solution  $\mathbf{x}_{h0}$  satisfaisant le relation (IV.19) de manière itérative. En partant d'une condition initiale  $\mathbf{x}_h^{(0)}$ , on évalue à chaque itération  $i$  une correction  $\Delta\mathbf{x}_h$  à ajouter au vecteur  $\mathbf{x}_h^{(i)}$  pour se rapprocher de la solution :

$$\mathbf{x}_h^{(i+1)} = \mathbf{x}_h^{(i)} + \Delta\mathbf{x}_h \quad (\text{IV.20})$$

Le processus est répété jusqu'à obtenir un vecteur  $\mathbf{x}_{h0}$  qui vérifie un critère d'arrêt arbitraire fixé par l'utilisateur, généralement basé sur la norme du résidu, comme par exemple  $\|\mathbf{r}_h(\mathbf{x}_{h0})\| < \epsilon$ . Dans la méthode de Newton Raphson, le calcul de la correction  $\Delta\mathbf{x}_h$  est basé sur le développement de Taylor au premier ordre de l'équation (IV.19) :

$$\mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h^{(i)} + \Delta\mathbf{x}_h) = \mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h^{(i)}) + \frac{\partial\mathbf{r}_h}{\partial\mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h^{(i)})\Delta\mathbf{x}_h + o(\Delta\mathbf{x}_h) = \mathbf{0} \quad (\text{IV.21})$$

ce qui conduit à l'expression de la correction :

$$\Delta\mathbf{x}_h = - \left[ \frac{\partial\mathbf{r}_h}{\partial\mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h^{(i)}) \right]^{-1} \mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h^{(i)}) \quad (\text{IV.22})$$

dans laquelle apparait la matrice jacobienne du système algébrique (IV.19) évaluée en  $\mathbf{x}_h^{(i)}$ . Son expression est obtenue à partir de l'expression (IV.11) du résidu  $\mathbf{r}_h$  :

$$\frac{\partial\mathbf{r}_h}{\partial\mathbf{x}_h} = \mathbf{L} + \frac{\partial\mathbf{f}_{nl_h}}{\partial\mathbf{x}_h} \quad (\text{IV.23})$$

Cette relation fait intervenir la matrice de rigidité dynamique  $\mathbf{L}$  connue ainsi que la matrice jacobienne des termes non-linéaires dont l'évaluation peut s'avérer délicate. Différentes approches existent pour établir numériquement une expression de cette matrice, comme par exemple une approximation par différences finies [82]. Une autre méthode plus adaptée au cas des contacts dans les turbomachines est présentée dans la section IV.1.2.3.

### 1.2.3 Méthode AFT pour le calcul des termes non-linéaires

Dans le cas des problèmes de contact appliqués aux turbomachines, l'expression analytique reliant les efforts non-linéaires aux déplacements dans le domaine fréquentiel n'est pas connue. Les non-linéarités sont en effet exprimées dans le domaine temporel. Deux méthodes sont particulièrement adaptées pour contourner cette difficulté : la méthode de *collocation trigonométrique* [14] et l'*alternance temps-fréquence* (AFT) initialement introduite par Cameron et Griffin [83]. Cette seconde approche, présentée dans ce mémoire, consiste à transiter entre les domaines fréquentiel et temporel grâce à des transformées de Fourier directes et inverses, de façon à résoudre le système non-linéaire dans le domaine fréquentiel tout en évaluant les termes non-linéaires dans le domaine temporel.

La première étape de cette méthode est de décomposer les termes non-linéaires dans le domaine fréquentiel sous la forme d'une série de Fourier tronquée, au même titre que les déplacements  $\mathbf{x}$  dans la relation (IV.3) :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \simeq \mathbf{c}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{c}_k \cos k\omega t + \mathbf{d}_k \sin k\omega t \quad (\text{IV.24})$$

En effet, seules les solutions périodiques des déplacements  $\mathbf{x}$  sont recherchées, de périodicité directement dépendante de celle des efforts extérieurs. Les efforts non-linéaires étant fonction de ces déplacements, il semble licite de les exprimer également sous la forme d'une fonction périodique de même périodicité  $T$ . On définit ainsi la structure du vecteur harmonique des efforts non-linéaires  $\mathbf{f}_{\text{nl}_h}$  à déterminer :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}_h}(\mathbf{x}_h) = \left[ \mathbf{c}_0^T \quad \mathbf{c}_1^T \quad \mathbf{d}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{c}_{N_h}^T \quad \mathbf{d}_{N_h}^T \right]^T \quad (\text{IV.25})$$

L'expression des efforts non-linéaires n'étant connue que dans le domaine temporel, la seconde étape consiste à reconstruire les déplacements  $\mathbf{x}$  et vitesse  $\dot{\mathbf{x}}$  sur une période échantillonnée à partir des coefficients harmoniques  $\mathbf{x}_h$ , grâce à une transformée de Fourier discrète inverse (IDFT). Pour cela, la période  $T$  de la solution est divisée en  $n_t$  instants notés  $t_k$ , généralement équidistants :

$$t_k = k \frac{T}{n_t} \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, n_t \quad (\text{IV.26})$$

On construit ainsi la matrice de transformée de Fourier discrète inverse :

$$\mathcal{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \omega t_1 & \sin \omega t_1 & \dots & \cos N_h \omega t_1 & \sin N_h \omega t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega t_k & \sin \omega t_k & \dots & \cos N_h \omega t_k & \sin N_h \omega t_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega T & \sin \omega T & \dots & \cos N_h \omega T & \sin N_h \omega T \end{pmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

On remarque que le produit  $\omega t_k = \frac{2k\pi}{n_t}$  est indépendant de la pulsation  $\omega$ . Il n'est donc pas nécessaire de recalculer cette matrice à chaque changement de fréquence d'excitation. Les déplacements et vitesses discrétisés en temps sur une période s'obtiennent alors par les deux relations :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \mathbf{x}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(T) \end{pmatrix} = (\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_h \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t_1) \\ \dot{\mathbf{x}}(t_2) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}(T) \end{pmatrix} = \omega (\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \nabla \mathbf{x}_h \quad (\text{IV.28})$$

Il est à présent possible d'évaluer les efforts non-linéaires à chaque instant  $t_k$  de la période échantillonnée. Les coefficients harmoniques des efforts non-linéaires sont finalement obtenus en effectuant une transformée de Fourier directe des efforts échantillonnés :

$$\mathbf{f}_{nl_h} = (\mathcal{F} \otimes \mathbf{I}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{nl}(t_1) \\ \mathbf{f}_{nl}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{nl}(T) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

La matrice de transformée de Fourier discrète associée à cette opération a pour expression :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{n_t} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2 \cos \omega t_1 & \dots & 2 \cos \omega t_k & \dots & 2 \cos \omega T \\ 2 \sin \omega t_1 & \dots & 2 \sin \omega t_k & \dots & 2 \sin \omega T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2 \cos N_h \omega t_1 & \dots & 2 \cos N_h \omega t_k & \dots & 2 \cos N_h \omega T \\ 2 \sin N_h \omega t_1 & \dots & 2 \sin N_h \omega t_k & \dots & 2 \sin N_h \omega T \end{pmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Cette méthode d'AFT permet donc de déterminer les coefficients harmoniques des efforts non-linéaires associés à chaque solution itérative  $\mathbf{x}_h$ . Ainsi, tous les termes du résidu (IV.11) sont à présent connus ce qui permet de résoudre le système algébrique non-linéaire  $\mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h) = \mathbf{0}$ .

Cette technique peut également être utilisée pour évaluer la matrice jacobienne des efforts non-linéaires, nécessaire à la méthode de Newton-Raphson présentée dans la section IV.1.2.2, lorsque la forme de  $\mathbf{f}_{nl}(t)$  permet d'en établir une expression analytique. Il s'agit alors d'évaluer cette matrice dans le domaine temporel aux différents instants de l'échantillon, puis de la ramener dans l'espace des fréquences par une transformation de Fourier. Lorsque l'expression analytique de cette matrice ne peut être établie, une approximation est généralement obtenue par différence finie, entraînant une augmentation du temps de calcul de chaque itération et une convergence parfois plus difficile.

#### 1.2.4 Application à un modèle simple masse-ressort

La méthode d'équilibrage harmonique est appliquée dans cette section à un système simple masse-ressort soumis à une force de frottement de façon à présenter les comportements caractéristiques rencontrés dans ce type de problème.

##### Modèle étudié

On s'intéresse à un oscillateur à 2 ddl représenté Figure IV.1 dont les deux masses sont reliées par un frotteur. Les valeurs numériques utilisées pour les résultats présentés dans cette partie sont réunies dans le tableau IV.1.

Le comportement vibratoire de ce type de système, fortement non-linéaire et dissipatif, se situe entre deux états asymptotiques. Le premier correspond à l'état totalement glissant pour lequel le frotteur n'apporte pas de dissipation d'énergie ce qui revient à le supprimer. Dans cette situation, l'oscillateur présente deux modes propres de pulsations :

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{2m}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2} \quad (\text{IV.31})$$



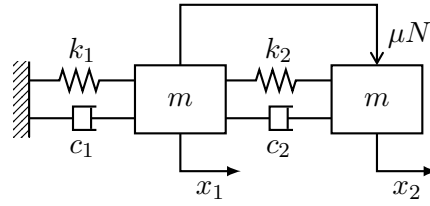


FIGURE IV.1 – Oscillateur à deux degrés de liberté avec frotteur

Ces pulsations prennent les valeurs  $\omega_1 = 0,618 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_2 = 1,618 \text{ rad.s}^{-1}$  pour les valeurs de masse et de raideur présentées dans le tableau IV.1. Le second état asymptotique correspond à l'état collé pour lequel les deux masses sont soudées, ce qui revient à étudier un oscillateur à 1 ddl de masse  $2m$ . Dans ce cas un seul mode propre est présent, de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{2m}} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . Enfin, un amortissement modal de 5% est appliqué aux deux modes libres de la structure.

$k_1$ (N.m <sup>-1</sup> )	$k_2$ (N.m <sup>-1</sup> )	$m$ (kg)
2	0.5	1

TABLE IV.1 – Valeurs numériques utilisées pour l'oscillateur à 2 ddl

### Effort non-linéaire

La modélisation des non-linéarités de frottement sec se répartit en deux catégories dans la littérature : des modèles statiques dérivant des lois de Coulomb [84], ou des modèles dynamiques découlant des méthodes de Dahl [85] et de Bouc-Wen [86] notamment. Dans le cas où les surfaces en frottement sont soumises à des glissements partiels, comme c'est souvent le cas au niveau des aubes dans les turbomachines, il peut être nécessaire de modéliser les micro-glissements [87] et de développer des méthodes plus sophistiquées alliant des modèles de macro- et micro-glissements [88] afin de reproduire fidèlement le comportement vibratoire engendré dans la structure.

Dans le cadre de ce mémoire, une loi de type Coulomb est employée en raison de sa simplicité. Dans les phases de glissement, c'est-à-dire au-delà d'une valeur seuil d'effort tangent  $f_0$ , elle peut être implémentée sous la forme d'une fonction signe établissant l'orientation de la force tangente en fonction de la vitesse relative  $\dot{\mathbf{x}}_{\text{rel}}$  calculée entre deux ddl en contact. L'intensité de cette force, alors constante en norme, dépend uniquement d'un coefficient de frottement  $\mu$  et de l'effort normal aux surfaces en contact noté  $N$ . La valeur du coefficient de frottement, caractéristique de ces deux surfaces, est comprise entre 0 et 1. Pour un frottement acier/acier, elle se situe autour de 0,3. Dans le cas des machines tournantes, la force normale correspond à l'effort centrifuge maintenant les portées d'une aube en contact avec l'alvéole du disque. Cette loi a donc pour expression, dans les phases de glissement :

$$f_{\text{Coulomb}} = \text{sign}(\dot{\mathbf{x}}_{\text{rel}})\mu N \quad \text{pour } |f_{\text{Coulomb}}| > f_0 \quad (\text{IV.32})$$

L'inconvénient de cette loi réside dans la discontinuité établie par la valeur seuil  $f_0$  et marquant la transition entre phases collées et glissantes. Cette caractéristique peut s'avérer problématique numériquement pour la gestion d'oscillations autour d'une zone d'arrêt, ainsi que pour établir une expression de la matrice jacobienne des efforts non-linéaires nécessaire à l'étape de résolution

présentée section IV.1.2.2. Différentes méthodes peuvent alors être envisagées pour établir une loi approchée des efforts non-linéaires en évitant cette discontinuité [84]. Dans le cadre de ce mémoire, une régularisation grâce à la fonction  $\tanh$  est choisie, conduisant à l'expression suivante pour les efforts non-linéaires :

$$\mathbf{f}_{nl}(t) = \mu N \tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_{rel}}{\epsilon}\right) \quad (\text{IV.33})$$

Le paramètre  $\mu$  est fixé à 0,3 pour les simulations numériques présentées dans la suite. Le paramètre  $\epsilon$  permet de contrôler la pente de la fonction  $\tanh$  et ainsi le degré de régularisation comme représenté Figure IV.2. Plus il est faible et plus la loi de frottement s'approche d'une fonction signe, mais plus la convergence va être difficile à obtenir pour le solveur. On notera que pour des petits débattements associés à de faibles vitesses relatives, c'est-à-dire pour un état proche de l'état collé, une valeur trop importante de  $\epsilon$  conduirait à une loi de frottement linéaire correspondant à l'ajout d'un amortissement visqueux de valeur  $\mu N/\epsilon$ . En revanche, pour des débattements importants, une valeur trop faible de  $\epsilon$  entrainerait des temps de calculs importants sans modifier fondamentalement la solution.

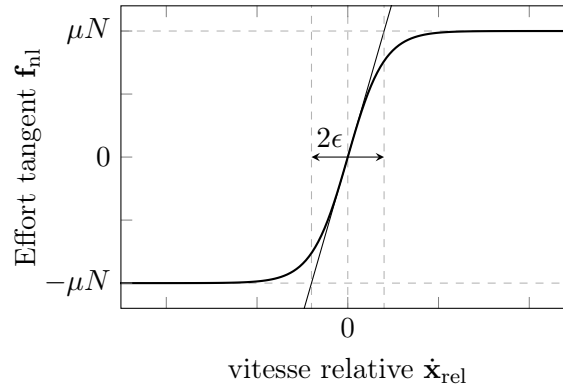


FIGURE IV.2 – Loi de frottement régularisée par une fonction tangente hyperbolique.

### Étude de l'influence du nombre d'harmoniques temporelles

L'un des paramètres à fixer lors de la mise en place d'une résolution de type HBM est le nombre d'harmoniques temporelles  $N_h$  à conserver pour approximer la solution. On a vu dans la section IV.1.2.1 que plus ce nombre est grand et plus on s'approche de la solution exacte, mais plus le coût numérique associé est important. L'objectif ici est donc d'estimer le nombre d'harmoniques minimum à conserver pour obtenir des résultats acceptables tout en assurant des temps de calculs raisonnables.

Pour cela, on se place dans une situation intermédiaire entre les deux états asymptotiques complètement collé ou complètement glissant. En effet, ces deux situations correspondent à des comportements relativement linéaires faisant par conséquent intervenir peu d'harmoniques. En revanche, dans une situation intermédiaire pour laquelle le frotteur va alternativement glisser ou coller, la solution temporelle sera beaucoup moins régulière et nécessitera plus d'harmoniques pour être représentée fidèlement.

L'influence du paramètre  $N_h$  a donc été étudiée sur l'oscillateur à 2 ddl de la Figure IV.1, pour lequel une force périodique est appliquée à la masse 1. L'amplitude de cette excitation est fixée à  $0,1N$ ,  $N$  étant l'effort normal appliqué au niveau du frotteur. Ce rapport excitation/effort

normal correspond à un comportement majoritairement collé présentant des phases de glissement autour de la résonance. Les résultats sont présentés Figure IV.3 pour un nombre d'harmoniques temporelles compris entre 1 et 7.

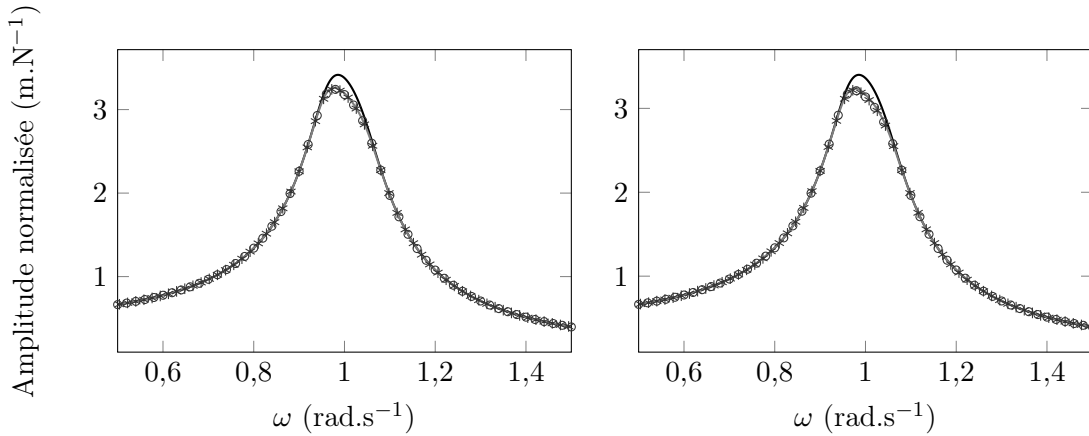


FIGURE IV.3 – Influence du nombre d'harmoniques temporelles sur les réponses forcées de la masse 1 (gauche) et de la masse 2 (droite).  $N_h = 1$  (—),  $N_h = 3$  (---),  $N_h = 5$  (○○○),  $N_h = 7$  (\*\*\*) .

La réponse forcée du système converge de façon satisfaisante dès 3 harmoniques. Cette situation semi-collée/semi-glissante est assez contraignante du point de vue du nombre d'harmoniques à conserver, car elle correspond aux signaux les plus irréguliers. Par conséquent, il est inutile d'augmenter ce nombre pour les situations totalement collées et glissantes. Le nombre d'harmoniques temporelles est ainsi fixé à  $N_h = 3$  pour la suite des simulations.

### Comportement du système en fonction de l'amplitude de l'excitation

Une fois fixé le nombre d'harmoniques temporelles à conserver, il est intéressant de faire varier l'amplitude de l'effort extérieur afin d'étudier le comportement de l'oscillateur et de chercher à retrouver les deux états asymptotiques caractéristiques. Pour un effort normal fixé à  $N = 5N$ , on fait varier l'amplitude des efforts extérieurs entre  $0,01N$  (état collé) et  $5N$  (état glissant). La valeur du paramètre  $\epsilon$  est ajustée dans chaque cas de façon à adapter la régularisation de la loi de frottement aux amplitudes de vitesse relative observées. Les réponses forcées des deux masses associées à ces simulations sont présentées Figure IV.4.

On observe bien sur ces courbes une transition entre deux états caractéristiques. Les courbes oranges sont le résultat d'un état majoritairement glissant, pour lequel deux pics d'amplitude plus importante sont visibles, correspondant aux deux modes propres du système à 2 ddl. Ces résonances apparaissent effectivement aux valeurs de pulsation annoncées, à savoir  $0,618 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $1,618 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les courbes bleues représentent quant à elles un état majoritairement collé, avec un seul pic de résonance autour de  $1 \text{ rad.s}^{-1}$  correspondant bien à la pulsation de l'oscillateur à 1 ddl pour lequel les deux masses sont soudées. Les états intermédiaires, semi-glissants semi-collés, sont caractérisés par des réponses forcées amorties dont les pics de résonance se situent sous l'une des deux configurations en fonction du comportement collé ou glissant prédominant. Ces observations décrivent une phénoménologie classique déjà présentée dans divers travaux [89, 20] ce qui permet de valider l'approche numérique proposée dans cette section.

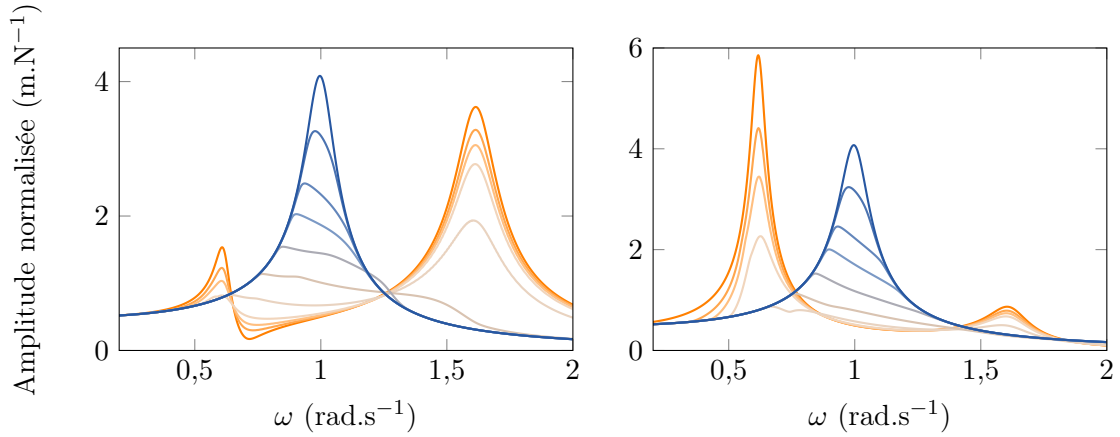


FIGURE IV.4 – Influence de l'amplitude des efforts extérieurs sur la réponse forcée des masses 1 (à gauche) et 2 (à droite). Comportement linéaire collé (—), comportement linéaire glissant (—).

### 1.3 Adaptation de la HBM dans le cadre de notre étude

Dans le cas de l'étude d'un système bi-rotor aubagé couplé, il a été montré dans le chapitre II qu'une transformation de l'équation du mouvement permettait de s'affranchir des coefficients temporels liés à l'étude simultanée de deux solides tournant à des vitesses différentes. Cette transformation implique une écriture en base modale ainsi qu'une projection de l'équation du mouvement dans différents nouveaux repères. Si on ajoute à présent des effets non-linéaires dans le système, l'équation du mouvement devient :

$${}^d\hat{\mathbf{q}} + \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\hat{\mathbf{K}}_c \right) {}^d\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}} \left( {}^d\hat{\mathbf{q}}, {}^d\dot{\hat{\mathbf{q}}} \right) = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \quad (\text{IV.34})$$

On rappelle que la notation  $\hat{\bullet}$  signifie que la grandeur  $\bullet$  est exprimée en base modale dans les nouveaux repères de projection. Les déplacements physiques dans les repères mobiles de chacun des deux rotors s'obtiennent par la relation  $\mathbf{u} = {}^d\mathbf{V}\mathbf{P}{}^d\hat{\mathbf{q}}$  avec  ${}^d\mathbf{V}$  la matrice des vecteurs propres à droite et  $\mathbf{P}$  la matrice de projection permettant de passer des nouveaux repères aux repères mobiles des deux roues aubagées. En base modale et dans les nouveaux repères de projection, les efforts s'expriment :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} &= -\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega} {}^s\mathbf{V}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}} &= -\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega} {}^s\mathbf{V}^T \mathbf{f}_{\text{nl}} \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Dans ces deux expressions, les matrices  $\boldsymbol{\Omega}$  et  ${}^s\mathbf{V}$  sont indépendantes du temps. Il a été montré dans la section II.3.2.3 que la projection  $\mathbf{P}^T$  de l'excitation dans les nouveaux repères génère simplement de nouvelles harmoniques sans modifier les fréquences fondamentales d'excitation, à savoir dans notre cas les vitesses de rotation des deux rotors  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Comme expliqué dans la section I.4.1, ce problème est donc un problème non-linéaire multi-fréquentiel qui nécessite des méthodes de résolution adaptées plus complexes à mettre en œuvre que la HBM classique. Toutefois, ce qui nous intéresse ici est de valider la méthode de projection de l'équation du mouvement dans un cadre non-linéaire, que ce soit mono- ou multi-fréquentiel. En effet, la mise en place de cette méthode dépend uniquement de la nature du couplage et des déformées modales, mais pas des efforts extérieurs. Elle n'intervient sur l'excitation que par l'intermédiaire de l'enrichissement du

spectre avec de nouvelles harmoniques, ce qui ne modifie pas fondamentalement l'application des méthodes de résolution non-linéaires multi-fréquentielles. Par conséquent, la compatibilité de la méthode de projection proposée avec une méthode de résolution non-linéaire est *a priori* indépendante du caractère mono- ou multi-fréquentiel de l'excitation.

Ainsi, pour s'affranchir des difficultés liées aux méthodes de résolution multi-fréquentielles, une unique excitation extérieure est appliquée sur le rotor  $R_1$ , le rotor  $R_2$  ne pouvant alors être excité que par l'intermédiaire du roulement. De même, seule la première roue aubagée est soumise à un effort non-linéaire de frottement. De cette façon, une unique fréquence fondamentale  $\Omega_1$  est présente dans le spectre d'excitation ce qui nous permet de traiter ce problème en mono-fréquentiel. Les contributions des efforts appliqués à chacun des deux rotors s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}_1} &= -\mathbf{P}_1^T \Omega_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_{\text{ext}_1} & \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}_2} &= \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_1} &= -\mathbf{P}_1^T \Omega_1^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_{\text{nl}_1} & \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_2} &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (\text{IV.36})$$

Comme dans le cas classique présenté dans la section IV.1.2, l'excitation appliquée, après projection dans les nouveaux repères, est sinusoïdale de périodicité multiple de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ . On recherche donc la solution de l'équation (IV.34) sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'harmonique  $N_h$  :

$${}^d\widehat{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{T}(t) {}^d\widehat{\mathbf{q}}_h \quad \text{avec} \quad {}^d\widehat{\mathbf{q}}_h = [\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{a}_{N_h}^T, \mathbf{b}_{N_h}^T]^T \quad (\text{IV.37})$$

où  $\mathbf{T}$  est la base des fonctions trigonométriques définie équation (IV.5). Le choix de la fréquence fondamentale  $\omega_{\text{proj}}$  de cette base dépend des harmoniques présentes dans le spectre de l'excitation et sera discuté dans la partie IV.1.3.4. Il s'agira dans tous les cas d'un multiple de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ .

En utilisant l'opérateur de dérivation  $\nabla$  défini par la relation (IV.7), il est possible d'exprimer la dérivée de  ${}^d\widehat{\mathbf{q}}$  en fonction de ses coefficients harmoniques :

$${}^d\widehat{\mathbf{q}} = \omega_{\text{proj}} \mathbf{T} \nabla {}^d\widehat{\mathbf{q}}_h \quad (\text{IV.38})$$

Ainsi en remplaçant dans l'équation du mouvement (IV.34), on obtient le résidu :

$$\mathbf{r}(t) = \left( \omega_{\text{proj}} \mathbf{T}(t) \nabla + \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \Omega - \Omega \widehat{\mathbf{K}}_c \right) \mathbf{T}(t) \right) {}^d\widehat{\mathbf{q}}_h + \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}({}^d\widehat{\mathbf{q}}_h) - \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}(t) \quad (\text{IV.39})$$

Comme dans la méthode générale présentée partie IV.1.2, on cherche à se débarrasser de la dépendance temporelle de cette équation en la projetant sur la base trigonométrique  $\mathbf{T}$  suivant une procédure de Galerkin avec le produit scalaire (IV.10). On obtient ainsi les coefficients harmoniques du résidu en fonction de la matrice de rigidité dynamique  $\mathbf{L}$  ainsi que des efforts dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{r}_h({}^d\widehat{\mathbf{q}}_h) = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T(t) \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{L} {}^d\widehat{\mathbf{q}}_h + \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_h}({}^d\widehat{\mathbf{q}}_h) - \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}_h} \quad (\text{IV.40})$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T \left( \omega_{\text{proj}} \mathbf{T} \nabla + \nabla_{\mathbf{P}} \mathbf{T} - \Omega \mathbf{T} - \Omega \widehat{\mathbf{K}}_c \mathbf{T} \right) dt \\ \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_{h1}} &= \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_1} dt & \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_{h2}} &= \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}_{h1}} &= \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}_1} dt & \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}_{h2}} &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (\text{IV.41})$$

où  $T_1$  est la période associée à la vitesse de rotation  $\Omega_1 : T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1}$ . Il est important de noter que cette période ne correspond plus nécessairement à la fréquence  $\omega_{\text{proj}}$ , contrairement à l'expression de la matrice de rigidité (IV.12) associée à une résolution non-linéaire classique. Le vecteur des efforts extérieurs  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}_h}$  (respectivement non-linéaires  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_h}$ ) contient la réunion des efforts extérieurs (respectivement non-linéaires) appliqués à chacun des deux rotors. La solution harmonique recherchée correspond aux valeurs de  ${}^d\widehat{\mathbf{q}}_h$  qui annulent le résidu  $\mathbf{r}_h$ .

### 1.3.1 Matrice de rigidité dynamique

La matrice de rigidité dynamique  $\mathbf{L}$  obtenue équation (IV.41) est différente de celle utilisée dans le cas classique présenté partie IV.1.2 en raison de l'écriture en base modale et de la projection de l'équation du mouvement dans de nouveaux repères. Toutefois, la même procédure peut être appliquée pour en obtenir une expression simplifiée, en utilisant la relation (IV.14) :

$$\mathbf{L} = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T \mathbf{T} dt \left( \omega_{\text{proj}} \nabla + \mathbf{N}_{\nabla \mathbf{P}} - \mathbf{N}_{\Omega} - \mathbf{N}_{\Omega \widehat{\mathbf{K}}_c} \right) \quad (\text{IV.42})$$

où  $\mathbf{N}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_{2N_h+1} \otimes \mathbf{A}$  est une matrice diagonale par bloc contenant  $2N_h + 1$  fois la matrice  $\mathbf{A}$ . Finalement, la matrice de rigidité dynamique s'exprime de nouveau sous une forme diagonale par blocs :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{L}_{N_h} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_0 = 2 \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \Omega - \Omega \widehat{\mathbf{K}}_c \right) \quad \mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{P}} - \Omega - \Omega \widehat{\mathbf{K}}_c & j\omega_{\text{proj}} \mathbf{I}_n \\ -j\omega_{\text{proj}} \mathbf{I}_n & \nabla_{\mathbf{P}} - \Omega - \Omega \widehat{\mathbf{K}}_c \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, N_h \quad (\text{IV.43})$$

$n$  correspond au nombre de ddl du problème à résoudre, soit dans notre cas le nombre de modes propres conservés dans l'écriture en base modale de l'équation du mouvement (IV.34).

### 1.3.2 Évaluation des efforts non-linéaires

Cette section ne s'applique qu'au rotor  $R_1$ , le rotor  $R_2$  n'étant soumis à aucun effort non-linéaire. Pour alléger les écritures, l'indice  $\bullet_1$  indiquant que la grandeur  $\bullet$  se rapporte au rotor  $R_1$  sera donc omis.

La projection de Galerkin du résidu (IV.39) a permis de définir l'expression des efforts non-linéaires du rotor  $R_1$  dans le domaine fréquentiel, rappelée ci-dessous :

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}_h} = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}} dt \quad (\text{IV.44})$$

En général, les efforts non-linéaires s'évaluent à partir des déplacements  $\mathbf{u}$  et des vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$  des nœuds concernés. Dans l'étude présentée ici, ces efforts se limitent à du frottement et sont modélisés grâce à la fonction  $\tanh$  utilisée dans le modèle simple masse-ressort de la section IV.1.2.4. Cette formulation ne fait intervenir que la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  des points de frottement.

Comme dans le cas du système simple masse-ressort, cette dépendance à la vitesse nécessite d'utiliser une procédure d'AFT pour obtenir les coefficients fréquentiels des efforts non-linéaires. À cette procédure, il est nécessaire d'ajouter la prise en compte des changements de repère et de l'écriture en base modale. En effet, l'équation du mouvement étant habituellement exprimée en base physique dans le repère mobile de la roue aubagée, la procédure d'AFT utilise les coefficients harmoniques  $\dot{\mathbf{u}}_h$  des vitesses physiques pour déterminer les efforts non-linéaires physiques. Dans notre cas, l'équation non-linéaire (IV.34) étudiée est exprimée en base modale et projetée dans de nouveaux repères. Les coefficients harmoniques des vitesses physiques  $\dot{\mathbf{u}}_h$  ne sont donc pas directement accessibles et doivent être déterminés à partir des coefficients harmoniques des coordonnées modales projetées  ${}^d\hat{\mathbf{q}}_h$ . De même, les efforts non-linéaires obtenus grâce à la procédure d'AFT doivent être exprimés en base modale et dans les nouveaux repères de façon à pouvoir être intégrés à l'équation (IV.40).

Une procédure d'AFT adaptée a ainsi été développée et est présentée dans la suite. Afin de faciliter la compréhension des développements associés, cette procédure a été schématisée Figure IV.5.

La première étape consiste à établir une relation analytique entre  $\dot{\mathbf{u}}_h$  et  ${}^d\hat{\mathbf{q}}_h$ . Pour cela, on utilise la relation entre déplacements physiques et coordonnées modales projetées :

$$\mathbf{u}(t) = {}^d\mathbf{V}\mathbf{P}{}^d\hat{\mathbf{q}}(t) \quad (\text{IV.45})$$

Cette relation est ensuite dérivée pour obtenir une expression de la vitesse physique, en tenant compte du fait que la matrice de projection  $\mathbf{P}$  est dépendante du temps :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = {}^d\mathbf{V}\dot{\mathbf{P}}{}^d\hat{\mathbf{q}}(t) + {}^d\mathbf{V}\mathbf{P}{}^d\dot{\hat{\mathbf{q}}}(t) \quad (\text{IV.46})$$

Par la suite, les coordonnées modales projetées  ${}^d\hat{\mathbf{q}}$  et les vitesses associées  ${}^d\dot{\hat{\mathbf{q}}}$  sont exprimées en fonction des coefficients harmoniques  ${}^d\hat{\mathbf{q}}_h$  suivant les expressions (IV.37) et (IV.38) :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = {}^d\mathbf{V}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{T}{}^d\hat{\mathbf{q}}_h + \omega_{\text{proj}}{}^d\mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{T}\nabla{}^d\hat{\mathbf{q}}_h \quad (\text{IV.47})$$

La dérivée de la matrice de projection  $\mathbf{P}$  s'exprime grâce à l'opérateur de dérivation  $\nabla_{\mathbf{P}}$  explicité équation (II.98) :

$$\dot{\mathbf{P}} = \Omega_1\mathbf{P}\nabla_{\mathbf{P}} \quad (\text{IV.48})$$

où  $\Omega_1$  est la vitesse de rotation du rotor  $R_1$ .

Il reste à établir l'expression des coefficients harmoniques  $\dot{\mathbf{u}}_h$  à partir des vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$ . Dans l'expression (IV.47) de  $\dot{\mathbf{u}}$ , les seuls termes dépendants du temps sont la matrice de projection  $\mathbf{P}$  constituée de fonctions trigonométriques, ainsi que la base harmonique  $\mathbf{T}$ . Le produit des deux fournit donc un signal harmonique dont la fréquence fondamentale  $\omega_{\text{mobile}}$ , multiple de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ , sera explicitée dans la section IV.1.3.4. La vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  peut donc s'écrire sous la forme d'une série de Fourier tronquée :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{T}_m(t)\dot{\mathbf{u}}_h \quad (\text{IV.49})$$

où  $\mathbf{T}_m$  est la base harmonique telle que définie équation (IV.5) pour la fréquence fondamentale  $\omega_{\text{mobile}}$ . Ainsi, les coefficients harmoniques  $\dot{\mathbf{u}}_h$  de la vitesse physique s'obtiennent en projetant

$\dot{\mathbf{u}}(t)$  sur la base trigonométrique  $\mathbf{T}_m$  suivant le produit scalaire défini par la relation (IV.10) :

$$\dot{\mathbf{u}}_h = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}_m^T \dot{\mathbf{u}}(t) dt \quad (\text{IV.50})$$

Finalement, en remplaçant  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  par son expression (IV.47) et en utilisant les propriétés du produit de Kronecker ainsi que la relation  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 \otimes \mathbf{I}_n$ , on obtient la relation :

$$\dot{\mathbf{u}}_h = \mathbf{N}_{d\mathbf{V}} \left[ \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}_m^T \mathbf{P} \mathbf{T} dt \Omega_1 \mathbf{N}_{\nabla \mathbf{P}} + \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}_m^T \mathbf{P} \mathbf{T} dt \omega_{\text{proj}} \nabla \right] {}^d \hat{\mathbf{q}}_h \quad (\text{IV.51})$$

avec  $\mathbf{N}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_{2N_h+1} \otimes \mathbf{A}$ . On définit  $\mathbf{P}_h$  la matrice de projection dans les nouveaux repères exprimée dans le domaine fréquentiel par la relation :

$$\mathbf{P}_h = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}_m^T \mathbf{P} \mathbf{T} dt \quad (\text{IV.52})$$

L'expression de cette matrice sera détaillée dans la section IV.1.3.3. On obtient finalement l'expression analytique de  $\dot{\mathbf{u}}_h$  en fonction des coordonnées modales harmoniques projetées  ${}^d \hat{\mathbf{q}}_h$ , qui peut se détailler afin de faire apparaître la vitesse  ${}^d \dot{\mathbf{q}}_h$  :

$$\dot{\mathbf{u}}_h = \mathbf{N}_{d\mathbf{V}} {}^d \dot{\mathbf{q}}_h \quad \text{avec} \quad {}^d \dot{\mathbf{q}}_h = \mathbf{P}_h [\Omega_1 \mathbf{N}_{\nabla \mathbf{P}} + \omega_{\text{proj}} \nabla] {}^d \hat{\mathbf{q}}_h \quad (\text{IV.53})$$

Il est à présent possible d'appliquer la procédure d'AFT comme présentée dans la section IV.1.2.3 afin de déterminer une expression fréquentielle des efforts de frottement  $\mathbf{f}_{nl_h}$  en base physique dans le repère mobile de la roue aubagée  $R_1$ . La base harmonique associée est la base  $\mathbf{T}_m$  de fréquence  $\omega_{\text{mobile}}$ , telle que :

$$\mathbf{f}_{nl}(t) = \mathbf{T}_m \mathbf{f}_{nl_h} \quad (\text{IV.54})$$

Ces efforts doivent ensuite être exprimés en base modale dans les nouveaux repères de projection de façon à pouvoir être utilisés dans l'équation à résoudre non-linéaire (IV.40) :

$$\hat{\mathbf{f}}_{nl}(t) = -\mathbf{P}^T \Omega^g \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{nl}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_{nl}(t) = \mathbf{T}_m \mathbf{f}_{nl_h} \quad (\text{IV.55})$$

Il reste à déterminer les coefficients harmoniques des efforts projetés  $\hat{\mathbf{f}}_{nl_h}$  à partir de leur définition (IV.44) et de la relation (IV.55) :

$$\hat{\mathbf{f}}_{nl_h} = -\frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T \mathbf{P}^T \Omega^g \mathbf{V}^T \mathbf{T}_m \mathbf{f}_{nl_h} dt \quad (\text{IV.56})$$

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker et la relation  $\mathbf{T}_m = \mathbf{T}_{m_0} \otimes \mathbf{I}_n$ , il vient :

$$\hat{\mathbf{f}}_{nl_h} = -\frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}^T \mathbf{P}^T \mathbf{T}_m dt \mathbf{N}_{\Omega^g \mathbf{V}^T} \mathbf{f}_{nl_h} \quad (\text{IV.57})$$

Finalement, cette expression se simplifie d'après la définition (IV.52) de la matrice de projection  $\mathbf{P}_h$  dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{\mathbf{f}}_{nl_h} = \mathbf{P}_h^T \tilde{\mathbf{f}}_{nl_h} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{nl_h} = -\mathbf{N}_{\Omega^g \mathbf{V}^T} \mathbf{f}_{nl_h} \quad (\text{IV.58})$$

Cette adaptation de la procédure d'AFT permet ainsi de prendre en compte l'écriture en base modale et les changements de repères.



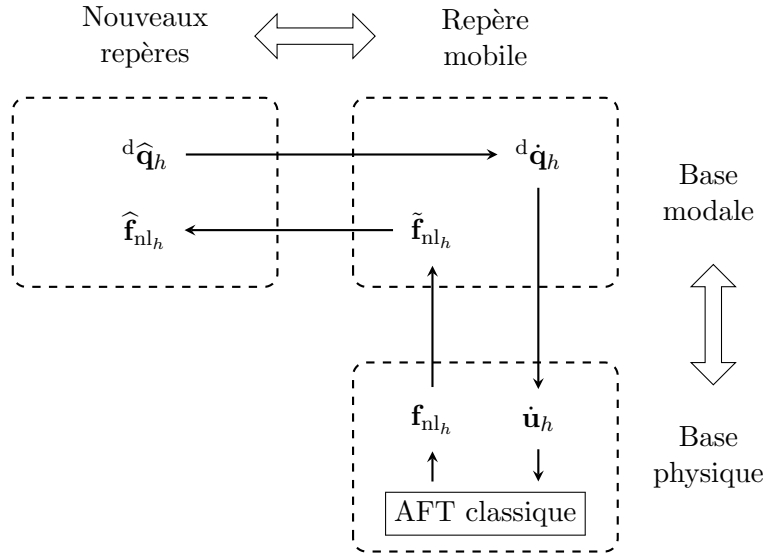


FIGURE IV.5 – Adaptation de la procédure d’AFT en tenant compte de l’écriture en base modale et des changements de repères.

### 1.3.3 Prise en compte des changements de repère dans le domaine fréquentiel

Le couplage de la procédure d’AFT avec la prise en compte des changements de repère a conduit à la définition d’une matrice de projection exprimée dans le domaine fréquentiel (*cf.* (IV.52)). Cette matrice de projection correspond aux changements de repère nécessaires à la suppression des termes temporels de l’équation du mouvement du système couplé bi-rotor. Dans le cas présenté ici, le rotor  $R_2$  n’est soumis à aucun effort non-linéaire. Seule la matrice de projection fréquentielle du rotor  $R_1$  est donc étudiée. Son expression est rappelée ci-dessous, après ré-introduction des indices  $\bullet_1$  et  $\bullet_2$  permettant de distinguer les deux rotors :

$$\mathbf{P}_{h1} = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \mathbf{T}_m^T \mathbf{P}_1 \mathbf{T} dt \quad (\text{IV.59})$$

On rappelle que les bases trigonométriques  $\mathbf{T}_m$  et  $\mathbf{T}$  sont respectivement de fréquence fondamentale  $\omega_{\text{mobile}}$  et  $\omega_{\text{proj}}$ . Ces deux fréquences, encore à définir, sont néanmoins des multiples de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ .

La matrice de projection  $\mathbf{P}_1$ , dont la forme est explicitée dans la section II.3.2.1, est une matrice diagonale par blocs constituée de matrices de rotation d’angles  $m_i \Omega_1 t$  notées  $\mathbf{R}_{m_i}$ . Pour rappel, l’entier  $m_i$  correspond à la  $i^{\text{ème}}$  harmonique spatiale détectée dans les déformées des vecteurs propres au niveau du roulement.

La matrice de projection  $\mathbf{P}_{h1}$  dans le domaine fréquentiel se calcule donc en intégrant sur la période  $T_1 = 2\pi/\Omega_1$  un produit de fonctions trigonométriques, toutes de périodicité multiple de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ . Compte tenu des propriétés d’orthogonalité des fonctions trigonométriques, ce calcul d’intégrale s’effectue aisément et conduit à un grand nombre de termes nuls sauf dans quatre cas détaillés par la suite.

Pour bien comprendre la structure de la matrice  $\mathbf{P}_{h1}$ , un exemple est donné Figure IV.6 dans le cas où seules deux harmoniques temporelles sont conservées dans les bases  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}_m$ , et

seulement deux harmoniques spatiales sont présentes dans la matrice de projection  $\mathbf{P}_1$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 1 & c_{p_1} & s_{p_1} & c_{p_2} & s_{p_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_m &= \begin{bmatrix} 1 & c_{k_1} & s_{k_1} & c_{k_2} & s_{k_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{m_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{m_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} c_{p_i} &= \cos p_i \Omega_1 t, & s_{p_i} &= \sin p_i \Omega_1 t \\ c_{k_i} &= \cos k_i \Omega_1 t, & s_{k_i} &= \sin k_i \Omega_1 t \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

Ces restrictions permettent de travailler avec des matrices de taille raisonnable, le principe de construction étant similaire pour un plus grand nombre d'harmoniques.

$$\mathbf{P}_{h1} = \frac{2}{T_1} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \int \mathbf{P}_1 & \int c_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int s_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int c_{p_2} \mathbf{P}_1 & \int s_{p_2} \mathbf{P}_1 \\ \hline \int c_{k_1} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_1} c_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_1} s_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_1} c_{p_2} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_1} s_{p_2} \mathbf{P}_1 \\ \hline \int s_{k_1} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_1} c_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_1} s_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_1} c_{p_2} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_1} s_{p_2} \mathbf{P}_1 \\ \hline \int c_{k_2} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_2} c_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_2} s_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_2} c_{p_2} \mathbf{P}_1 & \int c_{k_2} s_{p_2} \mathbf{P}_1 \\ \hline \int s_{k_2} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_2} c_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_2} s_{p_1} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_2} c_{p_2} \mathbf{P}_1 & \int s_{k_2} s_{p_2} \mathbf{P}_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \frac{2}{T_1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \int c_{k_1} c_{p_2} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & \int c_{k_1} s_{p_2} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \int c_{k_1} c_{p_2} \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} & \int c_{k_1} s_{p_2} \mathbf{R}_2 \\ \hline \int s_{k_1} c_{p_2} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & \int s_{k_1} s_{p_2} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \int s_{k_1} c_{p_2} \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} & \int s_{k_1} s_{p_2} \mathbf{R}_2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \mathbf{A}_0 = \frac{2}{T_1} \begin{array}{|c|c|} \hline \int c_{k_1} c_{p_2} \mathbf{R}_1 & \int c_{k_1} s_{p_2} \mathbf{R}_1 \\ \hline \int s_{k_1} c_{p_2} \mathbf{R}_1 & \int s_{k_1} s_{p_2} \mathbf{R}_1 \\ \hline \end{array}$$

FIGURE IV.6 – Structure de la matrice de projection dans le domaine fréquentiel présentée pour un nombre d'harmoniques temporelles et spatiales restreint.

À chaque triplet  $(k_i, p_j, m_\ell)$  correspond un sous-bloc noté  $\mathbf{A}_0$  comme représenté Figure IV.6. Tous les termes de ce sous-bloc sont nuls sauf pour quatre cas particuliers :

- $k_i + p_j + m_\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$
- $k_i + p_j - m_\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$

$$\begin{aligned}
\bullet k_i - p_j + m_\ell = 0 & \Rightarrow \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
\bullet k_i - p_j - m_\ell = 0 & \Rightarrow \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Dans le cas où plusieurs de ces conditions sont observées simultanément (par exemple si  $m_\ell = 0$ ), il convient de sommer les blocs  $\mathbf{A}_0$  associés.

Une dernière opération peut être nécessaire dans le cas où les deux modes présents dans la matrice  $\mathbf{P}_1$  correspondent en fait à un mode double. Dans ce cas,  $m_1 = m_2$  et la forme particulière de la matrice  $\mathbf{P}_1$  (cf. section II.3.2.1) nécessite d'appliquer une permutation de certaines lignes et colonnes du bloc  $\mathbf{A}$  de la Figure IV.6 :

$$\mathbf{A}_{\text{mode double}} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

On obtient finalement une matrice constante qui permet de passer du repère mobile du rotor  $R_1$  aux nouveaux repères de projection directement dans l'espace de Fourier. Il est intéressant de noter que cette matrice de projection est indépendante de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ . Une unique évaluation sera donc nécessaire pour un calcul de réponse forcée.

### 1.3.4 Choix des harmoniques temporelles des bases $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}_m$

Dans une résolution non-linéaire de type HBM, le choix de la fréquence fondamentale de la base trigonométrique permettant de décomposer la solution dépend de la fréquence d'excitation. Si cette fréquence d'excitation est un multiple entier  $n$  d'une autre fréquence  $\omega$  du problème, par exemple une vitesse de rotation, elle peut s'écrire sous la forme  $f_{\text{excitation}} = n\omega$ . Dans ce cas, et si la détermination du multiple  $n$  n'est pas immédiate, il peut sembler plus simple de choisir comme fondamentale de la base de Fourier la fréquence  $\omega$ . Ce choix peut toutefois s'avérer très coûteux numériquement, d'autant plus que  $n$  est grand. En effet, si  $p$  multiples de la fréquence  $f_{\text{excitation}}$  sont nécessaires pour décrire correctement le comportement du système non-linéaire,  $p \times n$  harmoniques devront être conservées dans la base de fréquence fondamentale  $\omega$ , un certain nombre d'entre elles étant pourtant inutiles. Pour limiter les temps de calcul, il convient donc de déterminer, dans la mesure du possible, la plus petite harmonique d'excitation  $n$  mise en jeu.

Dans le cas du système bi-rotor couplé qui nous intéresse, la difficulté réside dans la projection de l'équation du mouvement dans de nouveaux repères. En effet, cette projection génère de nouvelles harmoniques dans le spectre des efforts extérieurs. Il faut donc s'assurer que toutes ces harmoniques sont bien représentées lors du choix de la fréquence fondamentale  $\omega_{\text{proj}}$  de la base de Fourier  $\mathbf{T}$ , permettant de décrire la solution **dans les nouveaux repères de projection**.

Dans le cas d'une excitation synchrone générée par les  $n_1$  sillages du stator en amont de la roue  $R_1$ , la fréquence d'excitation dans le repère mobile est  $n_1\Omega_1$ . Il a été montré dans la section II.3.2.3 que pour chaque harmonique spatiale  $m$  détectée dans les déformées modales au niveau du roulement, la projection dans de nouveaux repères génère deux harmoniques dans le spectre d'excitation :  $(n_1 + m)\Omega_1$  et  $(n_1 - m)\Omega_1$ . Le choix de la fréquence fondamentale  $\omega_{\text{proj}} = k\Omega_1$  va donc directement dépendre de la valeur des harmoniques spatiales  $m$  de la base modale.

À titre d'exemple, prenons le cas du modèle EF bi-rotor étudié dans le chapitre III. Le rotor  $R_1$  est soumis à une excitation à deux diamètres. Seuls les modes à deux diamètres sont donc susceptibles de répondre, ce qui limite déjà les harmoniques spatiales  $m$  pouvant être détectées. D'autre part, l'étude des 20 premiers modes propres à deux diamètres de ce rotor ne met en évidence que des déformées d'harmonique spatiale 2 au niveau du roulement. Les projections dans les nouveaux repères ne vont donc introduire que deux harmoniques d'excitation : 0 et  $4\Omega_1$ . Le plus judicieux numériquement est alors de choisir  $\omega_{\text{proj}} = 4\Omega_1$ . On évite ainsi le coût numérique lié aux harmoniques  $\Omega_1$ ,  $2\Omega_1$  et  $3\Omega_1$  *a priori* inutiles pour décrire la solution.

Une fois la base de Fourier  $\mathbf{T}$  établie, la fréquence fondamentale  $\omega_{\text{mobile}}$  de la base  $\mathbf{T}_m$ , décrivant la solution dans le **repère mobile** de la roue aubagée se détermine en fonction de la périodicité du produit  $\mathbf{PT}$  (*c.f.* IV.1.3.2). Pour chaque harmonique spatiale  $m$  contenue dans les déformées modales au niveau du roulement, la projection  $\mathbf{P}$  de la base  $\mathbf{T}$  entraîne la création de deux harmoniques :  $(k + m)\Omega_1$  et  $(k - m)\Omega_1$ . Le choix de la fréquence  $\omega_{\text{mobile}}$  devra donc se faire en tenant compte de toutes ces harmoniques.

En reprenant l'exemple précédent, la projection de la base  $\mathbf{T}$  dans le repère mobile de la roue  $R_1$  génère entre autre les deux harmoniques :  $2\Omega_1$  et  $6\Omega_1$ . La fréquence  $\omega_{\text{mobile}} = 2\Omega_1$  paraît donc adaptée pour la base  $\mathbf{T}_m$ .

Dans un cas relativement complexe faisant intervenir plusieurs harmoniques d'excitation ou un nombre important d'harmoniques spatiales dans la base modale, il peut s'avérer laborieux de déterminer une harmonique  $k$  de la vitesse de rotation  $\Omega_1$  qui assure de représenter toutes les harmoniques temporelles du problème. Dans ce cas, la meilleure solution est probablement de conserver  $\omega_{\text{proj}} = \omega_{\text{mobile}} = \Omega_1$ . Il est toutefois peu probable, dans le cas d'une unique source d'excitation synchrone, qu'un grand nombre d'harmoniques spatiales soient observées au niveau du roulement en raison de la rigidité de la structure dans cette zone. On s'attend en effet à détecter des déformées d'ordre relativement faible. Dans ce cas, le nombre d'harmoniques d'excitation à prendre en compte est restreint ce qui facilite l'optimisation du choix des fréquences  $\omega_{\text{proj}}$  et  $\omega_{\text{mobile}}$ . Il serait également intéressant d'envisager une méthode de sélection des harmoniques telle que proposée par Grolet [90] pour remédier à cette difficulté du choix des harmoniques à prendre en compte.

#### 1.4 Applications numériques

L'objectif de cette partie est de vérifier la compatibilité de l'étude non-linéaire proposée section IV.1.3 avec la méthode de transformation de l'équation du mouvement présentée Chapitre II.

L'écriture de l'équation du mouvement en base modale peut notamment s'avérer problématique dans un contexte non-linéaire. En effet, les modes propres de la structure sont modifiés en présence d'une non-linéarité de frottement. Représenter fidèlement un comportement collé à partir d'une base libre va donc nécessiter de conserver une base relativement riche, induisant des temps de calcul plus importants. Tout l'enjeu réside dans notre capacité à sélectionner les modes libres les plus pertinents pour représenter un comportement collé.

La résolution fréquentielle de l'équation non-linéaire projetée peut être validée par comparaison avec une intégration temporelle de l'équation de départ. Toutefois, cette méthode de validation est difficilement envisageable dans le cas du modèle complet de roue aubagée en raison de l'importance des ressources numériques nécessaires pour l'intégration temporelle d'un tel modèle. De plus, la pertinence de l'utilisation d'une base modale libre tronquée pour écrire l'équation du mouvement constitue l'un des points à valider. Cette astuce de réduction ne peut donc plus être appliquée pour accélérer la résolution par intégration temporelle. D'autres méthodes plus adaptées pourraient être envisagées, communément appelées méthodes CMS pour l'anglais *Component Mode Synthesis*. Parmi celles-ci, on trouve des méthodes dites à interfaces libres [91, 92] ou à interfaces fixes telle la méthode de Craig-Bampton [93] qui reste l'une des plus utilisées aujourd'hui. Les travaux de Batailly [94] présentent plusieurs de ces méthodes appliquées à la dynamique de roue aubagée en présence de contact aube/carter.

Dans le cadre de ce mémoire, l'étape de validation n'est effectuée que sur le modèle d'anneau grâce à une intégration temporelle de l'équation de départ. La présence ou non d'un couplage avec un second anneau n'ayant pas d'influence sur les non-linéarités de frottement, les changements de repère ou l'écriture en base modale, un seul anneau est pris en compte.

Une étude fréquentielle est ensuite réalisée sur le modèle simplifié de roue aubagée visant à retrouver dans la dynamique du système, grâce à la seule base libre, les deux comportements libre et collé. Les résolutions linéaires du système libre (sans frotteur) et du système collé (ddl frottants encastrés) sont utilisées comme références pour valider la pertinence de la base modale retenue.

#### 1.4.1 Validation sur le modèle d'anneau

Une première étape de validation a été réalisée sur le modèle d'anneau en raison de son faible nombre de ddl permettant la mise en place d'une résolution par intégration temporelle. Le modèle utilisé est le premier anneau du modèle recalé de la section III.4.2.1 pour lequel le nombre de secteurs a été réduit. En effet, afin de conserver une notion de symétrie cyclique, il est nécessaire de placer au moins un frotteur par secteur. La présence d'un trop grand nombre de frotteurs risquant de fortement contraindre la dynamique de l'anneau et de rapidement en bloquer les mouvements, il est préférable de limiter le nombre de secteurs. Les caractéristiques du modèle retenu sont les suivantes :

- $N = 3$  secteurs
- $n_e = 6$  éléments par secteur
- 1 frotteur par secteur sur le nœud central

Les effets liés à la vitesse (effets gyroscopiques, raidissement ou assouplissement centrifuge) sont négligés. Comme représenté Figure IV.7, les frotteurs sont placés dans la direction radiale entre un

nœud de chaque secteur et un bâti tournant à la même vitesse que l'anneau. Afin de s'affranchir

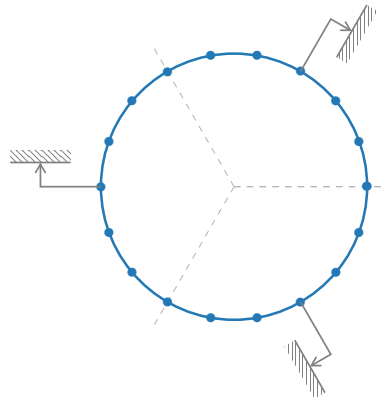


FIGURE IV.7 – Positionnement des frotteurs dans la direction radiale sur le modèle EF d'anneau à 3 secteurs.

d'éventuelles difficultés lors de l'écriture en symétrie cyclique, il est préférable d'éviter de placer le frotteur sur un nœud frontière de symétrie cyclique. On choisit d'appliquer une excitation d'harmonique spatiale 2, tournante dans le repère mobile de l'anneau. Les modes propres associés, en configuration libre (sans frotteur) et collée (ddl frottants encastrés) sont représentés Figure IV.8.

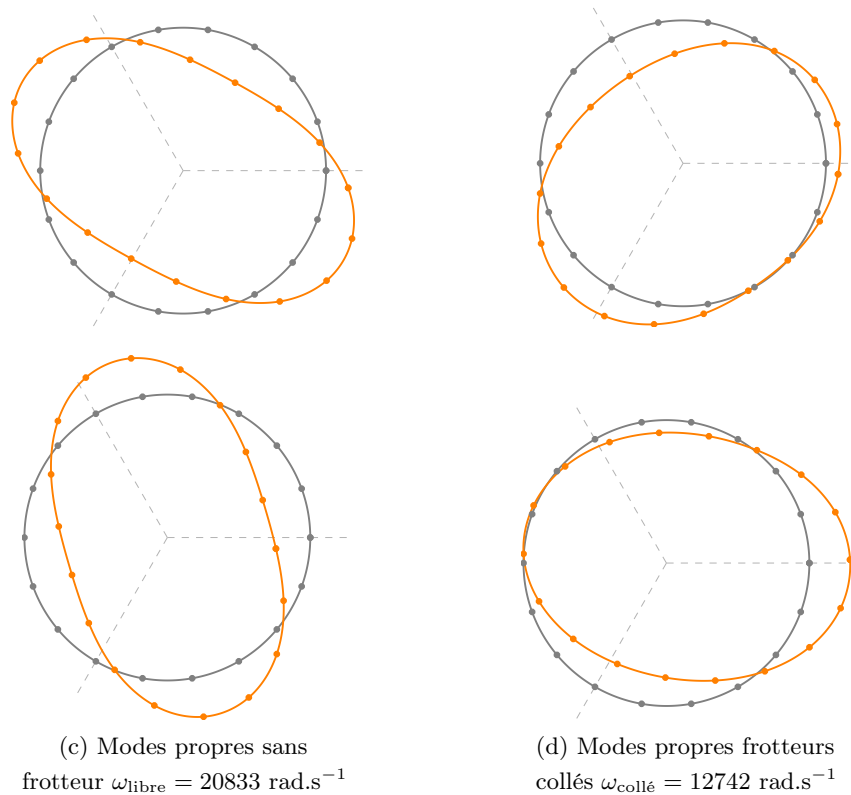


FIGURE IV.8 – Déformées modales d'harmonique spatiale 2 de l'anneau en situation sans frotteur à gauche et frotteurs collés à droite. Configuration non-déformée (—), configuration déformée (—).

Les fréquences propres associées sont respectivement de  $20833 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $12742 \text{ rad.s}^{-1}$ . Il est à noter que le mode libre possède la fréquence la plus élevée. L'introduction du frottement devrait donc conduire à un assouplissement de la structure, alors qu'un phénomène de raidissement est habituellement observé sur les roues aubagées.

On observe une différence notable dans la forme de ces deux modes propres, avec un décentrage du mode propre collé traduisant un comportement vibratoire très différent du mode libre. En effet, les frotteurs collés dans la direction radiale empêchent la propagation de l'onde tournante générée par l'excitation et conduisent à une dynamique s'approchant d'une onde stationnaire. La transition entre les comportements glissant et collé, de cinématiques très différentes, risque donc d'être difficile à représenter avec la seule base libre. Par conséquent, cette structure d'anneau ne semble pas adaptée à une étude complète des phénomènes de frottement. Elle sera uniquement étudiée dans la phase glissante pour laquelle la présence des frotteurs n'entraîne pas d'assouplissement mais simplement de l'amortissement.

Les FRF de l'anneau autour de la fréquence du mode propre glissant, calculées en fréquentiel et par intégration temporelle sont tracées Figure IV.9 pour différentes amplitudes d'excitation, relatives à l'effort normal  $N$  appliqué au niveau des frotteurs :  $0,3N$  ;  $0,5N$  et  $1N$ . La courbe linéaire sans frottement est également tracée. L'effort non-linéaire de frottement utilisé répond à la loi en  $\tanh$  tracée Figure IV.2. Le coefficient de frottement et l'effort normal sont fixés à  $\mu = 0,3$  et  $N = 10^4 \text{ N}$ . Le paramètre  $\epsilon$  est réglé à chaque simulation et prend des valeurs entre  $10^{-1}$  et  $10^1$ . Pour la résolution fréquentielle non-linéaire, tous les modes propres de la structure sont pris en compte mais les harmoniques temporelles utilisées pour la HBM sont sélectionnées comme expliqué section IV.1.3.4 : les harmoniques  $4\Omega$  et  $2\Omega$  sont choisies comme fondamentales respectivement dans les nouveaux repères de projection et dans le repère mobile de l'anneau.

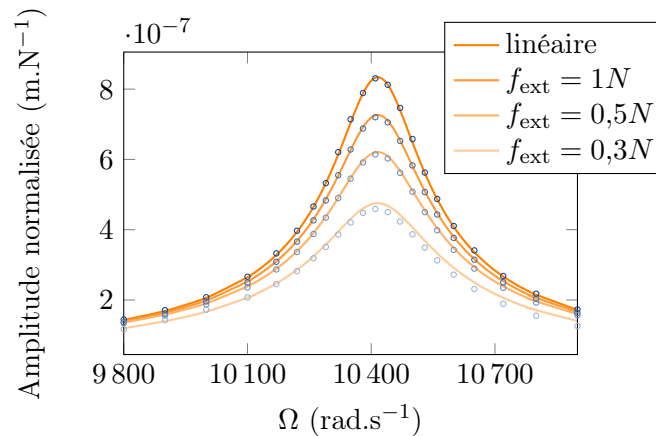


FIGURE IV.9 – Courbes de réponse en fréquence d'un anneau normalisée par l'effort extérieur, pour différents niveaux d'excitation. Comparaison entre résolutions fréquentielles (—) et temporelles (ooo).

Une unique harmonique temporelle  $N_h = 1$  est prise en compte lors de la résolution non-linéaire fréquentielle, accompagnée d'un échantillonnage temporel  $n_t = 100$ . Des simulations ont également été réalisées avec  $N_h = 3$  harmoniques temporelles, sans que cela ait le moindre impact sur le tracé des FRF. Cela s'explique probablement par l'étape de projection en base modale qui vient lisser le comportement temporel des efforts non-linéaires : alors que l'évolution temporelle de

ces efforts, exprimés en base physique, est généralement sous la forme d'un créneau, elle devient sinusoïdale après projection en base modale.

On observe sur la Figure IV.9 une excellente corrélation des résolutions fréquentielles et temporelles pour de faibles valeurs de frottement, qui se dégrade légèrement lorsque le frottement augmente. Il est d'ailleurs intéressant de noter que le pic de la FRF obtenue par intégration temporelle pour le frottement le plus important (i.e. l'excitation la plus faible  $f_{\text{ext}} = 0,3N$ ) présente un léger décalage vers la gauche. Il s'agit d'un léger assouplissement traduisant le début de la transition vers la phase collée. Cet assouplissement n'est pas du tout visible sur la résolution fréquentielle qui ne parvient à représenter que la situation glissante.

Ces premiers résultats sont donc encourageants quant à la validation de la méthode proposée, au moins dans les situations où le frottement est suffisamment faible pour n'introduire que de l'amortissement. La transition vers un comportement collé doit encore être étudiée avec un modèle plus adapté.

#### 1.4.2 Application au modèle de roue aubagée

Une non-linéarité de frottement est introduite sur le modèle EF simplifié de roue aubagée présenté section III.1 sous la forme d'un frotteur dans la direction axiale entre deux nœuds situés à la base de l'aubage de la première roue (*cf.* Figure IV.10). L'excitation extérieure est toujours une excitation à 2 diamètres, tournante dans le repère mobile de la roue et appliquée en bout d'aube dans la direction axiale.

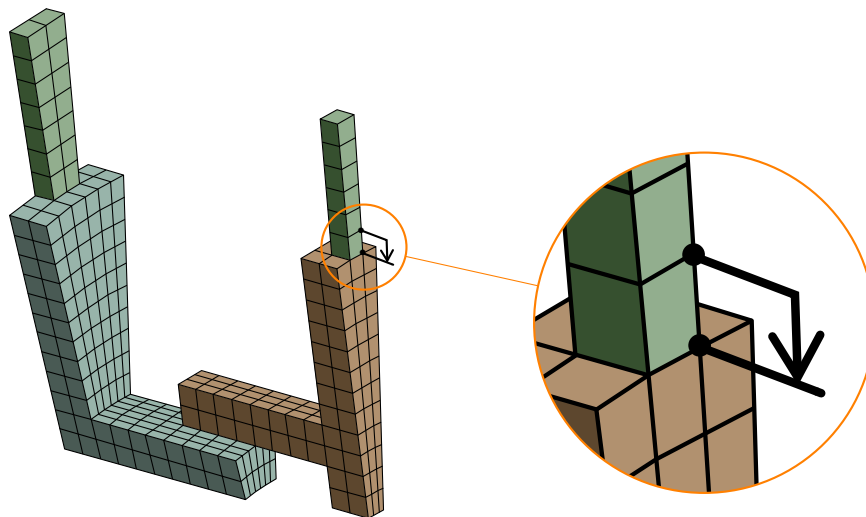


FIGURE IV.10 – Positionnement du frotteur en pied d'aube de la première roue aubagée dans la direction axiale.

Ce modèle semble plus adapté pour l'étude de l'influence du frottement sur la dynamique de la structure, notamment dans les phases collées. En effet, le blocage dans la direction axiale des ddl frottants modifie peu la forme du premier mode propre à 2 diamètres par rapport à celui de la structure libre, comme on peut le voir Figure IV.11. On s'attend donc à pouvoir également représenter la situation collée en utilisant la résolution fréquentielle non-linéaire, à condition de conserver suffisamment de modes propres dans la base libre.



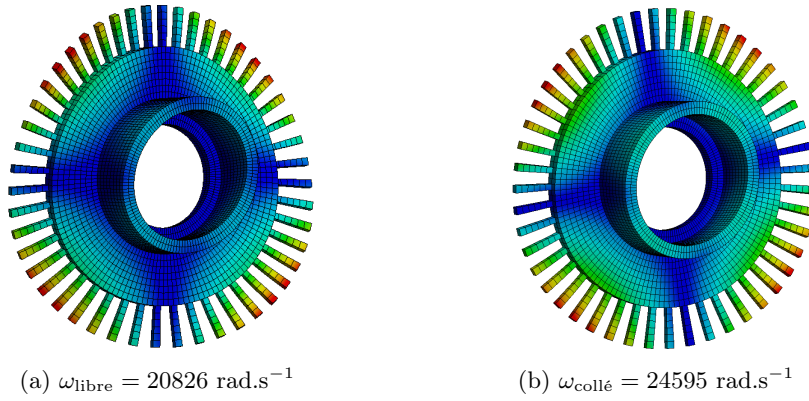


FIGURE IV.11 – Déformées modales du premier mode à 2 diamètres en configurations libre et collée.

### Choix de la base modale libre

On choisit ici de travailler avec les bases modales à droite, la même procédure pouvant être adaptée pour les bases à gauche. Théoriquement, en conservant l'intégralité de la base libre notée  ${}^d\Phi_\ell$  et connaissant les coefficients  $\mathbf{q}$  adaptés, il est possible de reconstruire n'importe quel mode propre collé, notamment le premier mode collé à 2 diamètres noté  ${}^d\Phi_{c,1}$  :

$${}^d\Phi_{c,1} = {}^d\Phi_\ell \mathbf{q} \quad (\text{IV.62})$$

Toutefois, les modes libres n'ont pas tous la même importance dans la reconstruction de la déformée du mode collé. De plus, la résolution fréquentielle est d'autant plus longue que la base modale utilisée est riche. C'est pourquoi il est important de mettre en place une méthode de sélection des modes propres libres de façon à ne conserver que les modes apportant une contribution notable dans la représentation du mode collé.

Pour cela, une solution consiste à projeter les modes de la base libre sur le mode collé objectif, et ne conserver pour la résolution que les modes libres présentant la projection maximale. L'orthonormalisation de la base modale libre par rapport à la matrice de pseudo-masse  $\mathbf{B}$  donne la propriété suivante :  ${}^g\Phi_\ell^T \mathbf{B} {}^d\Phi_\ell = \mathbf{I}$ . Ainsi, en multipliant à gauche la relation (IV.62) par  ${}^g\Phi_\ell^T \mathbf{B}$ , on obtient le vecteur des coefficients  $\mathbf{q}$  permettant de reconstruire le mode collé à partir de la base libre :

$$\mathbf{q} = {}^g\Phi_\ell^T \mathbf{B} {}^d\Phi_{c1} \quad (\text{IV.63})$$

Il suffit alors de sélectionner les plus grandes valeurs dans le vecteur  $\mathbf{q}$  pour construire la base libre à utiliser lors de la résolution fréquentielle non-linéaire.

Afin d'établir une base modale libre assurant des résultats acceptables pour des temps de calcul raisonnables, plusieurs bases modales ont été testées au travers d'un calcul de FRF en situation collée, *i.e.* pour de faibles valeurs d'excitation. Un premier calcul linéaire, obtenu en utilisant le mode propre collé (ddl frottants encastés), constitue la référence pour évaluer la pertinence des différentes bases libres testées. Deux bases libres contenant respectivement les 500 et les 800 premiers modes à 2 diamètres sont étudiées. Une sélection des 200 puis 300 modes les plus pertinents parmi les 800 premiers modes est ensuite testée dans le but de réduire les temps de calculs.

Les FRF associées sont tracées Figure IV.12. Les caractéristiques relatives à chaque base modale testée (fréquence propre obtenue pour le mode collé, erreur relative avec la référence et temps de calcul) sont réunies dans le Tableau IV.2.

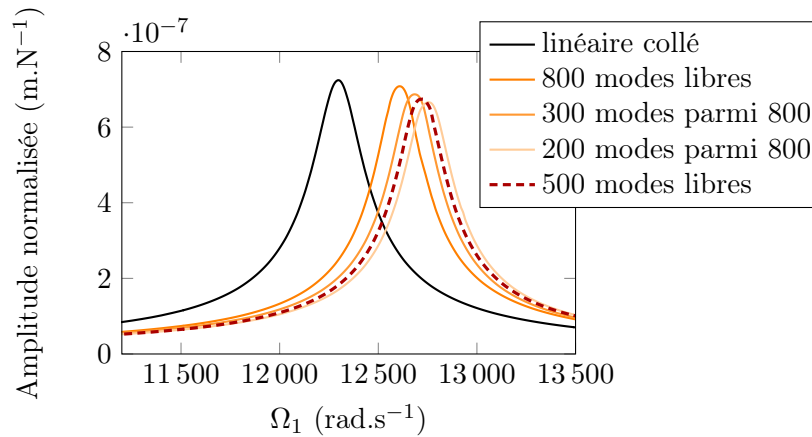


FIGURE IV.12 – Tracé de la résonance associée au mode propre collé en fonction de la base libre choisie.

	Pulsation mode collé (rad.s <sup>-1</sup> )	Erreur relative	Temps calcul FRF
Calcul linéaire, 1 mode collé	24600	Référence	moins d'1 min
800 modes libres	25200	2,4 %	4h40
300 modes parmi 800 modes libres	25360	3,1 %	40 min
200 modes parmi 800 modes libres	25520	3,7 %	20 min
500 modes libres	25440	3,4 %	2h

TABLE IV.2 – Caractéristiques associées à chaque base modale testée.

On observe pour toutes les bases testées une surestimation de la fréquence propre collée, qui se réduit en augmentant le nombre de modes propres pris en compte. La sélection de modes parmi la base de 800 modes libres semble efficace puisqu'elle dégrade peu la valeur de fréquence propre collée observée, mais diminue fortement les temps de calcul. Ainsi, la base constituée des 300 modes les plus pertinents parmi les 800 premiers modes libres présente une erreur relative de 3,1% ce qui nous paraît acceptable. Cette base modale sera donc utilisée pour la suite des simulations présentées dans cette section.

### Étude de la première roue aubagée sans couplage

Une première étude est réalisée sans couplage, afin d'étudier le comportement de la première roue aubagée en situation de frottement. L'effort de frottement utilisé suit la loi en tanh tracée Figure IV.2, pour un effort normal  $N = 5 \cdot 10^3 \text{N}$  et un coefficient de frottement de 0,3. Le paramètre  $\epsilon$  est réglé à chaque simulation et varie entre  $10^{-3}$  et 1,5. Les FRF sont calculées en appliquant la résolution fréquentielle non-linéaire proposée section IV.1.3. La base modale utilisée est constituée d'une sélection des 300 modes les plus pertinents parmi les 800 premiers modes libres de la structure. Plusieurs FRF sont calculées en faisant varier l'amplitude des efforts

extérieurs par rapport à l'effort normal  $N$  appliqué :  $0,1N \leq f_{\text{ext}} \leq 10^2N$ . Les résultats obtenus sont tracés Figure IV.13a au niveau d'un nœud de frottement dans la direction axiale.

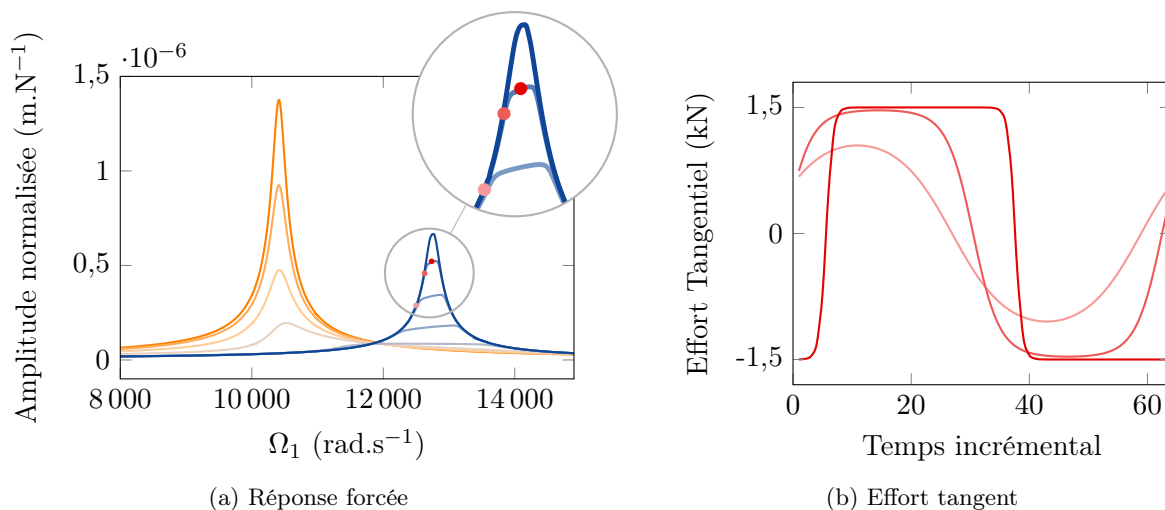


FIGURE IV.13 – Comportement vibratoire dans la direction axiale et au niveau d'un frotteur de la roue  $R_1$  (sans couplage) pour différentes valeurs d'excitation. Comportement linéaire collé (—), comportement linéaire glissant (—).

Pour de grandes valeurs d'excitation (courbes orange), on retrouve le comportement linéaire sans frotteur de la roue aubagée. La diminution de l'amplitude d'excitation entraîne dans un premier temps un affaissement de l'amplitude de la FRF traduisant un « apport » d'amortissement. On observe par la suite une transition vers l'état collé avec un raidissement de la structure, puis une augmentation de l'amplitude de la FRF pour les valeurs d'excitation les plus faibles (courbes bleues), s'approchant ainsi de l'état linéaire collé.

L'évolution temporelle de l'effort tangentiel non-linéaire est tracée Figure IV.13b en différents points de la FRF. Les trois situations caractéristiques sont observées :

- Pour les débattements les plus importants, le frotteur glisse et l'effort non-linéaire sature à la valeur  $\mu N = 1,5 \cdot 10^3 \text{N}$ . L'inversion du sens de déplacement du frotteur génère alors une forme de créneau.
- Pour des débattements légèrement plus faibles, l'effort non-linéaire sature toujours mais sur des phases plus courtes. Son évolution temporelle se rapproche doucement d'une forme plus sinusoïdale. La dissipation d'énergie est maximale dans cette situation.
- Pour de faibles débattements, la valeur de l'effort non-linéaire n'atteint plus les limites du cône de frottement. Son évolution temporelle est purement sinusoïdale, il s'agit d'une configuration représentant la situation collée.

En résumé, le paramétrage choisi pour cette étude permet d'observer à la fois les comportements glissant et collé sur les FRF des nœuds de frottement, ainsi qu'une phase de transition. L'évolution temporelle des efforts non-linéaires présente bien des situations totalement glissantes, totalement collées ou intermédiaires. La méthode de résolution fréquentielle non-linéaire proposée semble donc adaptée à l'étude du comportement vibratoire de ce modèle de roue aubagée en présence de non-linéarités de frottement.

### Étude du système bi-rotor couplé

Le comportement observé sur la première roue aubagée étant cohérent, il s'agit maintenant de coupler la seconde roue aubagée afin d'étudier l'influence des efforts non-linéaires sur la transmission de vibrations au travers du roulement. Pour cette étude, la seconde roue aubagée n'est soumise à aucun effort extérieur ni effort de frottement. Sa seule source d'excitation possible est la transmission de vibrations par l'intermédiaire du roulement. La configuration du paragraphe précédent utilisée pour la première roue aubagée reste inchangée. La densité de raideur radiale appliquée pour le couplage est la même que pour les simulations du Chapitre III, à savoir  $\kappa = 5.10^6 \text{N.m}^{-1}\text{rad}^{-1}$ .

L'objectif est de montrer qu'une non-linéarité sur la première roue aubagée présente un impact non-négligeable sur le comportement vibratoire de la seconde. On démontre ainsi l'utilité de la résolution fréquentielle non-linéaire proposée dans le cadre d'un système bi-rotor.

Des calculs de FRF ont donc été réalisés dans les mêmes conditions de frottement et d'excitation de la roue  $R_1$  que dans le paragraphe précédent. La deuxième roue aubagée n'étant soumise à aucun effort non-linéaire, il n'est pas nécessaire d'enrichir sa base modale pour la résolution. Seul son premier mode propre à 2 diamètres est donc pris en compte. Les FRF obtenues pour les deux roues sont tracées Figure IV.14, dans la direction axiale en bout d'aube.

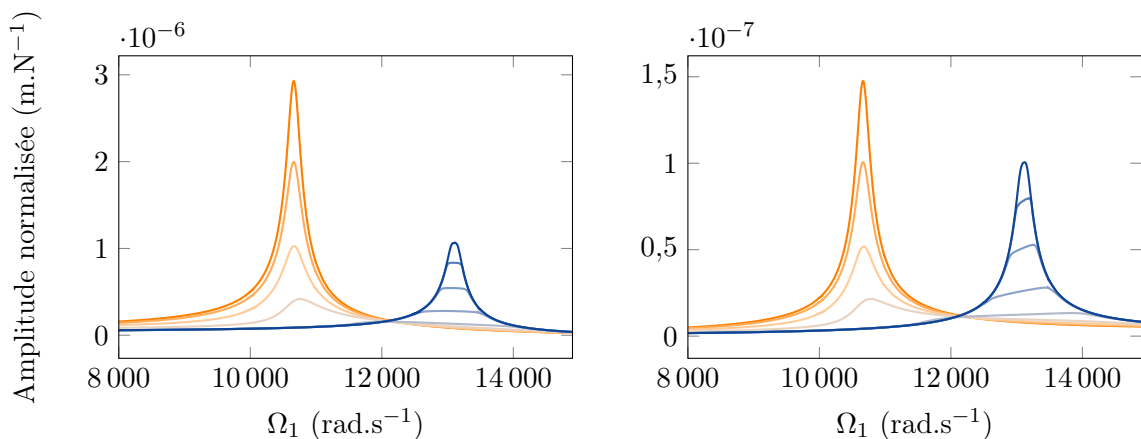


FIGURE IV.14 – Réponse forcée dans la direction axiale et en bout d'aube des rotors  $R_1$  (gauche) et  $R_2$  (droite) pour différentes valeurs d'excitation. Comportement linéaire collé (—), comportement linéaire glissant (—).

On retrouve pour la première roue aubagée les deux situations glissante et collée ainsi qu'une phase de transition. La valeur des fréquences propres libre et collée est plus élevée que dans la situation découplée ce qui est cohérent avec les observations du Chapitre III concernant la rigidification des structures lors du couplage. La forme des FRF est légèrement différente de celles du paragraphe précédent, notamment pour les situations globalement collées, puisque le point d'observation n'est plus le même.

Les mêmes variations d'amplitude et de fréquence sont directement observables en bout d'aube de la seconde roue aubagée. Les amplitudes des FRF sont bien sûr plus faibles que celles de la roue  $R_1$  en raison de la transmission via le roulement. Les effets non-linéaires sont donc directement visibles sur la seconde roue aubagée, entraînant des variations de niveau vibratoire non négligeables.

## 1.5 Conclusion

L'objectif de ce début de chapitre était d'intégrer à l'étude du bi-rotor une non-linéarité de type frottement afin de vérifier que la méthode de projection de l'équation du mouvement est bien compatible avec une résolution non-linéaire. Pour cela, une résolution mono-fréquentielle de type HBM a été adaptée afin de tenir compte des projections dans de nouveaux repères. Le cadre mono-fréquentiel est assuré en ne soumettant que l'un des deux rotors à des excitations extérieures ou de frottement, le second n'étant excité que par l'intermédiaire du roulement. L'une des interrogations principales associées à ces développements concerne la validité de l'écriture des équations en base modale sachant que cette base évolue entre l'état libre et l'état collé.

Le modèle bi-anneau s'est avéré peu adapté pour cette étude non-linéaire, la présence des frotteurs contraignant de façon très marquée la dynamique du système. Toutefois, la comparaison avec une intégration temporelle de l'équation de départ a permis de valider la méthode dans les situations de faible frottement.

Cette résolution par intégration temporelle n'est plus applicable dans le cadre du modèle de roues aubagées simplifiées présenté Chapitre III en raison de l'importance des ressources numériques associées. Ce modèle est donc étudié, notamment en situation de frottement important, par comparaison avec une résolution linéaire utilisant directement le mode propre collé. Une sélection des modes propres libres les plus pertinents dans la représentation du comportement collé permet ainsi d'obtenir un comportement dynamique relativement réaliste pour des temps de calcul raisonnables, y compris en situation collée. On montre alors que la présence d'efforts de frottement sur la première roue impacte de façon notable les vibrations de la seconde.

Ce modèle pourra permettre de réaliser des études plus poussées concernant le comportement vibratoire du système bi-rotor sur des plages de vitesse pour différentes valeurs de frottement. Les phénomènes observés dans le Chapitre III (transfert d'énergie au croisement des modes propres, présence de pics traduisant une instabilité) pourraient être modifiés, notamment dans les situations de frottement impliquant une dissipation d'énergie maximale. Si les pics d'instabilité disparaissent, des études plus poussées seront nécessaires pour établir si les zones d'instabilité ont été totalement supprimées ou si elles ne sont simplement plus visibles.

## 2 Couplage par une gearbox – cas de l'UHBR ID

Dans un turboréacteur double-corps classique, l'arbre BP relie le fan, le compresseur BP et la turbine BP. La vitesse de rotation de cet arbre est limitée par la dimension du fan, pour lequel il est préférable de conserver en bout de pale une vitesse subsonique. Les évolutions actuelles des turboréacteurs tendent à augmenter le diamètre du fan de façon à accroître le taux de dilution ou *bypass ratio* et ainsi réduire la consommation en carburant et le bruit émis. Il en résulte une diminution de la vitesse de rotation de l'arbre BP, nécessitant l'augmentation du nombre d'étages de compresseur et de turbine afin d'assurer une charge acceptable sur chacun des étages tout en conservant la même efficacité globale. L'un des inconvénients de cette solution est l'augmentation du poids du moteur.

Une architecture alternative, actuellement très étudiée par les motoristes, consiste à placer entre le fan et le reste de l'arbre BP un boîtier de réduction à engrenages, aussi appelé *gearbox*

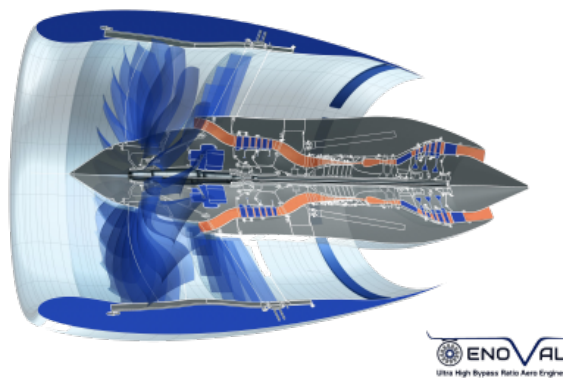


FIGURE IV.15 – Schéma de L’*Ultra High Bypass Ratio Integral Drive* développé par Safran et comportant une gearbox entre le fan et le reste de l’arbre BP.

(Figure IV.15). Cette solution permet d’imposer des vitesses de rotation différentes entre le fan et le reste de l’arbre BP, autorisant des vitesses plus élevées pour le compresseur et la turbine. Il est alors possible de réduire le nombre d’étages de ces deux modules tout en améliorant l’efficacité générale du turboréacteur. L’ajout de la gearbox entraîne une augmentation du poids du moteur, en partie contrebalancée par l’allègement du compresseur et de la turbine BP.

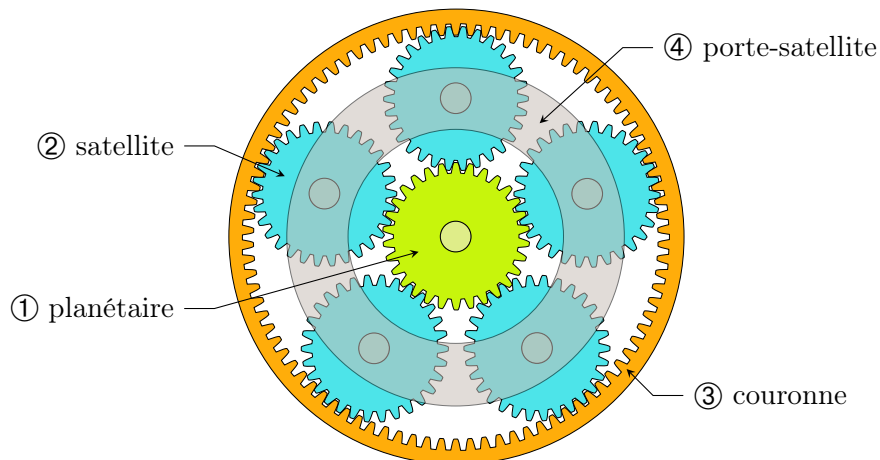


FIGURE IV.16 – Schéma d’un réducteur à engrenages ou gearbox.

La gearbox est un réducteur à planétaires comme représenté Figure IV.16. Son introduction dans l’architecture d’un turboréacteur n’est pas sans conséquence sur la dynamique des différents organes du moteur. Sa structure complexe génère diverses perturbations, comme par exemple des excitations hautes fréquences en lien avec la fréquence d’engrènement des dents et le passage des satellites [95, 96]. Ces excitations sont nuisibles, notamment lorsqu’elles sont transmises au compresseur. Des perturbations de la vitesse de rotation peuvent également être observées, générées par des phénomènes dynamiques locaux au niveau des dents : sous l’effet de la charge transmise dans les engrenages, les dents se déforment localement entraînant des modulations de raideur en torsion. On parle de non-linéarité des raideurs d’engrènement. Enfin, de par son architecture globale, des effets dynamiques couplés entre la gearbox, la ligne d’arbre et le reste du moteur peuvent apparaître : le plus notable concerne le couplage de la flexion de ligne d’arbre,

générée par des phénomènes de balourd du fan ou du compresseur, avec des mouvements en torsion par le biais de la gearbox.

Les vitesses de rotation des différentes pièces d'un réducteur à engrenages tel que représenté Figure IV.16 sont directement liées au nombre de dents du planétaire et de la couronne (noté  $Z_i$ ) par la formule de Willis :

$$\lambda = \frac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}} = -\frac{Z_3}{Z_1} \quad (\text{IV.64})$$

$\lambda$  est appelé la *raison* du train. La grandeur  $\omega_{i/j}$  désigne la vitesse de rotation du solide  $i$  dans le référentiel du solide  $j$ . Deux schémas de montage sont possibles à partir d'un réducteur à engrenages de ce type : en train épicycloïdal ou en train planétaire. La différence entre ces deux solutions technologiques réside dans le choix de l'élément qui sera fixe : la couronne pour le train épicycloïdal ( $\omega_{3/0} = 0$ ) ou le porte-satellites pour le train planétaire ( $\omega_{4/0} = 0$ ) (cf. Figure IV.17). La formule de Willis permet alors d'obtenir une relation directe entre les vitesses d'entrée et de sortie du réducteur :

$$\begin{aligned} \text{Train épicycloïdal : } \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{4/0}} &= 1 + \frac{Z_3}{Z_1} \\ \text{Train planétaire : } \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{3/0}} &= -\frac{Z_3}{Z_1} \end{aligned} \quad (\text{IV.65})$$

Lorsque tous les éléments du réducteur sont laissés libres, il s'agit d'un différentiel.

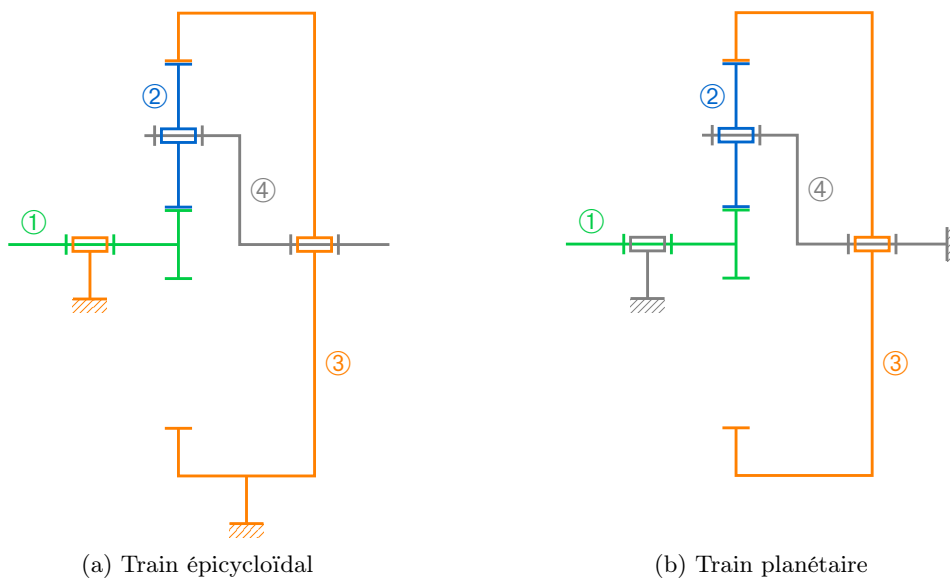


FIGURE IV.17 – Deux solutions technologiques envisageables pour réaliser la gearbox couplant le fan et l'arbre BP.

Dans le cadre d'un turboréacteur, le choix du montage conditionne les éléments sur lesquels vont venir se positionner les arbres d'entrée et de sortie (*i.e.* arbre fan et arbre BP) : planétaire/porte-satellites ou planétaire/couronne. Par analogie avec l'architecture d'un roulement, nous avons choisi de travailler avec un montage en train planétaire : les arbres sont fixés sur le planétaire et la couronne, représentant les deux anneaux du roulement, et le couplage est assuré par les satellites en comparaison aux billes du roulement. L'objectif est alors d'étudier les excitations

pouvant être transmises entre la couronne et le planétaire par l’intermédiaire des déformations des satellites.

## 2.1 Modèle simplifié utilisé

Le modèle proposé, schématisé Figure IV.18 correspond à une modélisation simplifiée de la gearbox, qui ne tient compte que de la déformation globale des satellites sous l’effet des efforts générés par la couronne et le planétaire. Tous les phénomènes liés à l’engrènement (déformation locale des dents, excitation à la fréquence d’engrènement) ne sont pas pris en compte.

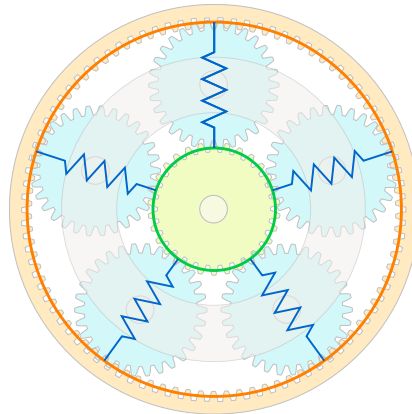


FIGURE IV.18 – Modélisation simplifiée de la gearbox à l’aide d’anneaux et de raideurs.

La couronne et le planétaire, modélisés par deux anneaux, retransmettent les déformations des arbres fan et BP auxquels ils sont liés. Chaque satellite est représenté par une raideur  $\kappa$  possédant des composantes dans les trois directions :

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \quad (\text{IV.66})$$

Si on considère des dentures droites, il n’y a pas de transfert d’énergie dans la direction axiale entre les satellites et le planétaire ou la couronne. La raideur axiale  $\kappa_z$  associée sera donc prise nulle. Comme représenté Figure IV.19, la direction des efforts transmis entre deux roues dentées dépend du positionnement des points de contact des dents.

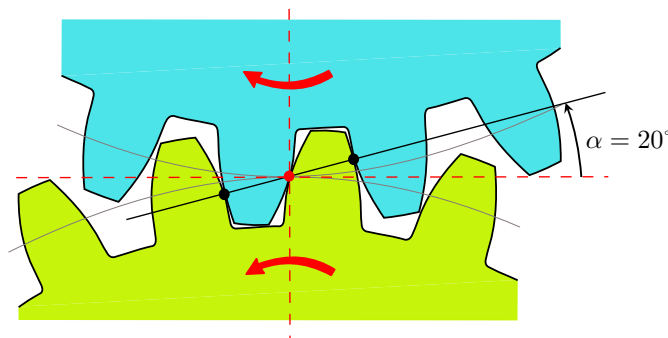


FIGURE IV.19 – Représentation de la ligne d’action dans un engrènement.



La forme des dents correspondant généralement à une développante de cercle, ces points sont répartis sur une droite appelée *ligne d'action* ou *ligne d'engrènement*, inclinée d'un angle de  $20^\circ$  par rapport à la tangente aux deux cercles primitifs des roues. Avec le modèle de raideur (IV.66) proposé, la combinaison des raideurs radiale et orthoradiale  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  permet d'imposer cette orientation lors de la transmission d'effort entre le planétaire et la couronne.

On note  $N_s$  le nombre de satellites, supposés iso-espacés géométriquement. L'angle entre deux satellites vaut donc  $2\pi/N_s$ . Enfin, dans le cas d'un montage en train planétaire, le porte-satellite est fixe, donc les raideurs sont fixes dans le repère fixe alors que les deux anneaux tournent.

## 2.2 Matrice de couplage associée

L'étude de la dynamique d'un système bi-rotor couplé par une gearbox nécessite d'établir une expression de la matrice de couplage associée afin de l'introduire dans l'équation du mouvement. Les notations utilisées dans cette section sont résumées sur la Figure IV.20.

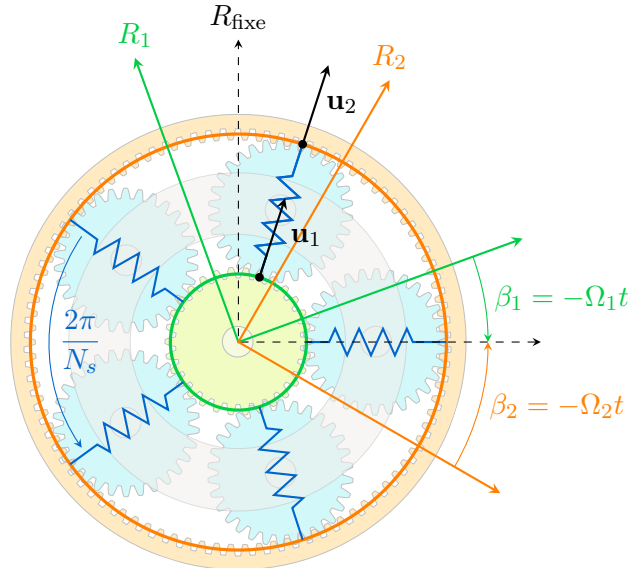


FIGURE IV.20 – Notations utilisées dans le modèle simplifié de gearbox.

De la même façon que pour le roulement, la matrice de couplage associée à la gearbox se détermine à partir de l'énergie de déformation des raideurs modélisant chaque satellite. La procédure est donc similaire à celle de la section II.3.1 à laquelle le lecteur pourra se reporter pour plus de détails. La différence principale concerne l'utilisation d'une somme discrète sur le nombre de satellites au lieu d'une intégrale :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_s-1} \left( \mathbf{u}_1^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) - \mathbf{u}_2^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \right)^T \boldsymbol{\kappa} \left( \mathbf{u}_1^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) - \mathbf{u}_2^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \right) \quad (\text{IV.67})$$

Les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  repèrent la position du premier satellite dans les repères mobiles du planétaire et de la couronne, auxquels sont fixées les roues aubagées. On rappelle que dans le cas d'un train planétaire, la position des satellites est fixe dans le repère fixe. Ces deux angles sont directement

dépendants des vitesses de rotation des deux rotors :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\Omega_1 t \\ \beta_2 &= -\Omega_2 t\end{aligned}\tag{IV.68}$$

Les satellites suivants sont repérés par rapport au premier par les angles  $2\pi k/N_s$ ,  $k = 0, \dots, N_s - 1$ . Pour la suite, on applique exactement les mêmes étapes que dans le cas du roulement. En remplaçant les déplacements physiques  $\mathbf{u}$  par leurs décompositions modales  $\mathbf{u} = {}^g\mathbf{V}^g\mathbf{q}$  et  $\mathbf{u} = {}^d\mathbf{V}^d\mathbf{q}$ , il est possible d’isoler la matrice de couplage  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  exprimée en base modale :

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = \sum_{k=0}^{N_s-1} \left[ {}^g\mathbf{V}_1^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \quad -{}^g\mathbf{V}_2^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \right]^T \boldsymbol{\kappa} \left[ {}^d\mathbf{V}_1^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \quad -{}^d\mathbf{V}_2^F \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \right]\tag{IV.69}$$

Les vecteurs propres, limités aux ddl situés dans la zone de fixation de la gearbox, sont ensuite remplacés par leur décomposition spatiale établie dans la section II.2.2 :

$$\mathbf{V}_i^F(\alpha_i) = (\mathbf{h}_i(\alpha_i) \otimes \mathbf{I}_3) \boldsymbol{\Gamma}_i\tag{IV.70}$$

où  $i = 1, 2$  correspond au numéro du rotor concerné. Pour rappel,  $\mathbf{h}_i$  est un vecteur constitué de la base harmonique spatiale contenue dans les déformées modales et  $\boldsymbol{\Gamma}_i$  est une matrice regroupant les coefficients associés à la base  $\mathbf{h}_i$ . L’angle  $\alpha_i$  correspond à la position angulaire d’un point dans le repère mobile du rotor  $i$ . Dans le cas des satellites, il prend les valeurs :

$$\begin{aligned}\alpha_1(k) &= \beta_1 + \frac{2\pi k}{N_s} \\ \alpha_2(k) &= \beta_2 + \frac{2\pi k}{N_s}\end{aligned}\quad k = 0, \dots, N_s - 1\tag{IV.71}$$

Pour alléger les notations, les décompositions spatiales des deux rotors sont réunies dans le vecteur  $\mathbf{h}_c$  et la matrice de coefficients  $\boldsymbol{\Gamma}_c$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_c(k, t) &= \left[ \mathbf{h}_1 \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \quad -\mathbf{h}_2 \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \right] \\ \boldsymbol{\Gamma}_c &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{IV.72}$$

La matrice de couplage, exprimée en base modale, peut alors s’écrire sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = {}^g\boldsymbol{\Gamma}_c^T \left( \tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) {}^d\boldsymbol{\Gamma}_c \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} = \sum_{k=0}^{N_s-1} \mathbf{h}_c(k, t) {}^T \mathbf{h}_c(k, t)\tag{IV.73}$$

L’équation du mouvement (II.55) du bi-rotor dans laquelle intervient cette matrice de couplage est rappelée ici sous sa forme condensée :

$${}^d\dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Omega}^d\mathbf{q} - \boldsymbol{\Omega}\tilde{\mathbf{K}}_c {}^d\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}\tag{IV.74}$$

L’intérêt de cette écriture de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  est qu’elle regroupe l’ensemble des termes périodiques temporels dans la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ . Pour les mêmes raisons qu’avec le roulement, ces termes temporels sont problématiques car ils ne permettent pas l’utilisation des méthodes classiques de

résolution fréquentielle ou de calcul des modes propres. L'objectif est donc d'étudier la structure de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  de façon à établir une projection assurant la suppression des termes temporels. La matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  se décompose sous la forme de quatre blocs :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} = \sum_{k=0}^{N_s-1} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{h}_1^T \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \mathbf{h}_1 \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) & -\mathbf{h}_1^T \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \mathbf{h}_2 \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \\ \hline -\mathbf{h}_2^T \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \mathbf{h}_1 \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) & \mathbf{h}_2^T \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \mathbf{h}_2 \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) \end{array} \right] \quad (\text{IV.75})$$

Les bases  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}_2$  étant des bases trigonométriques, il s'agit ici de sommer, sur une période, le produit de deux fonctions trigonométriques  $2\pi$ -périodiques. Ces sommes s'expriment analytiquement grâce aux propriétés des fonctions trigonométriques. Ainsi, en notant  $m$  et  $n$  deux des harmoniques présentes dans les bases  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}_2$ , trois cas se distinguent dans le calcul des sommes de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ , résumés dans le Tableau IV.3. Si une relation existe entre les deux valeurs  $n$  et  $m$  et le nombre de satellites  $N_s$  sous la forme  $n = \pm m + p_1 N_s$ ,  $p_1 \in \mathbb{Z}$ , alors la somme des fonctions trigonométriques aboutit à deux relations non-nulles relativement simples. Sinon, cette somme est nulle.

Dans le Tableau IV.3, les trois cas sont détaillés en distinguant les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , c'est-à-dire qu'ils concernent la projection de la base  $\mathbf{h}_1$  sur la base  $\mathbf{h}_2$ . Ces résultats sont toutefois généralisables pour la projection d'une base sur elle-même en posant  $\beta_1 = \beta_2$ .

	pour $n = \pm m + p_1 N_s$ $p_1 \in \mathbb{Z}$		Sinon
	si $m = p_2 \frac{N_s}{2}$ $p_2 \in \mathbb{Z}$	si $m \neq p_2 \frac{N_s}{2}$ $p_2 \in \mathbb{Z}$	
$\sum_{k=0}^{N_s-1} \cos m \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \cos n \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right)$	$\frac{N_s}{2} (\cos(m\beta_1 + n\beta_2) + \cos(m\beta_1 - n\beta_2))$	$\frac{N_s}{2} \cos(m\beta_1 \mp n\beta_2)$	0
$\sum_{k=0}^{N_s-1} \sin m \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \sin n \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right)$	$\frac{N_s}{2} (\cos(m\beta_1 - n\beta_2) - \cos(m\beta_1 + n\beta_2))$	$\pm \frac{N_s}{2} \cos(m\beta_1 \mp n\beta_2)$	0
$\sum_{k=0}^{N_s-1} \cos m \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) \sin n \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right)$	$\frac{N_s}{2} (\sin(m\beta_1 + n\beta_2) - \sin(m\beta_1 - n\beta_2))$	$\mp \frac{N_s}{2} \sin(m\beta_1 \mp m\beta_2)$	0

TABLE IV.3 – Calcul analytique des sommes de produits de fonctions trigonométriques en fonction des multiplicités de leurs harmoniques  $m$  et  $n$ .

Pour bien comprendre la construction de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ , et notamment la position des termes non-nuls, un exemple est donné Figure IV.21 pour un train planétaire possédant  $N_s = 5$  satellites. Les harmoniques spatiales d'ordre 0 à 10 sont prises en compte pour la construction de cette matrice. Seul le quart supérieur droit de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  de l'équation (IV.75) est représenté, noté  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int},12}$ , le reste de la matrice s'obtenant en permutant ou remplaçant les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

Les positions et valeurs des blocs non-nuls sont obtenus grâce au Tableau IV.3 en fonction de la multiplicité des deux harmoniques  $m$  et  $n$  mises en jeu vis-à-vis du nombre de satellites. Si ces

	1	$c_{1,\beta_2}$	$s_{1,\beta_2}$	$c_{2,\beta_2}$	$s_{2,\beta_2}$	$c_{3,\beta_2}$	$s_{3,\beta_2}$	$c_{4,\beta_2}$	$s_{4,\beta_2}$	$c_{5,\beta_2}$	$s_{5,\beta_2}$	$c_{6,\beta_2}$	$s_{6,\beta_2}$	$c_{7,\beta_2}$	$s_{7,\beta_2}$	$c_{8,\beta_2}$	$s_{8,\beta_2}$	$c_{9,\beta_2}$	$s_{9,\beta_2}$	$c_{10,\beta_2}$	$s_{10,\beta_2}$		
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_{1,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$s_{1,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$c_{2,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$s_{2,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$c_{3,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$s_{3,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$c_{4,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$s_{4,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$c_{5,\beta_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_{5,\beta_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_{6,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$s_{6,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$c_{7,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$s_{7,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$c_{8,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$s_{8,\beta_1}$	0	0	0					0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0
$c_{9,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$s_{9,\beta_1}$	0			0	0	0	0			0	0			0	0	0	0			0	0	0	0
$c_{10,\beta_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_{10,\beta_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Trois cas distincts pour  $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$  :

- $n = m + p_1 N_s$  :
  - $m = p_2 \frac{N_s}{2}$  :  $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \frac{N_s}{2} \begin{bmatrix} c^+ & s^+ \\ s^+ & -c^+ \end{bmatrix} + \frac{N_s}{2} \begin{bmatrix} c^- & -s^- \\ s^- & c^- \end{bmatrix}$
  - $m \neq p_2 \frac{N_s}{2}$  :  $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \frac{N_s}{2} \begin{bmatrix} c^- & -s^- \\ s^- & c^- \end{bmatrix}$
- $n = -m + p_1 N_s$  et  $m \neq p_2 \frac{N_s}{2}$  :  $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \frac{N_s}{2} \begin{bmatrix} c^+ & s^+ \\ s^+ & -c^+ \end{bmatrix}$

Notations :

$$\begin{aligned}
 c_{m,\beta_1} &= \cos m \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) & c_{n,\beta_2} &= \cos n \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) & c^\pm &= \cos(m\beta_1 \pm n\beta_2) \\
 s_{m,\beta_1} &= \sin m \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_1 \right) & s_{n,\beta_2} &= \sin n \left( \frac{2\pi k}{N_s} + \beta_2 \right) & s^\pm &= \sin(m\beta_1 \pm n\beta_2)
 \end{aligned}$$

FIGURE IV.21 – Structure de la matrice de couplage en base modale  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int},12}$  pour une gearbox à 5 satellites.

blocs contiennent bien 4 termes comme dans le cas du roulement, leur organisation interne est toutefois différente, ne se limitant pas toujours à une simple matrice de rotation. La forme de ces blocs sera étudiée dans la section IV.2.3.

D'autre part, le nombre de blocs non-nuls est ici bien supérieur au cas du roulement : la position des blocs supplémentaires traduit un phénomène de repliement entraînant des couplages d'harmoniques spatiales d'ordre différent. La Figure IV.22 permet d'établir ces couplages en fonction du nombre de satellites. Un exemple est donné en orange dans le cas d'une configuration à 5 satellites, qui sera celle utilisée pour les simulations numériques. Dans cette configuration, les couplages s'effectuent au sein de 3 groupes d'harmoniques :  $(0, 5, 10, \dots)$  ;  $(1, 4, 6, 9, \dots)$  et  $(2, 3, 7, 8, \dots)$ .

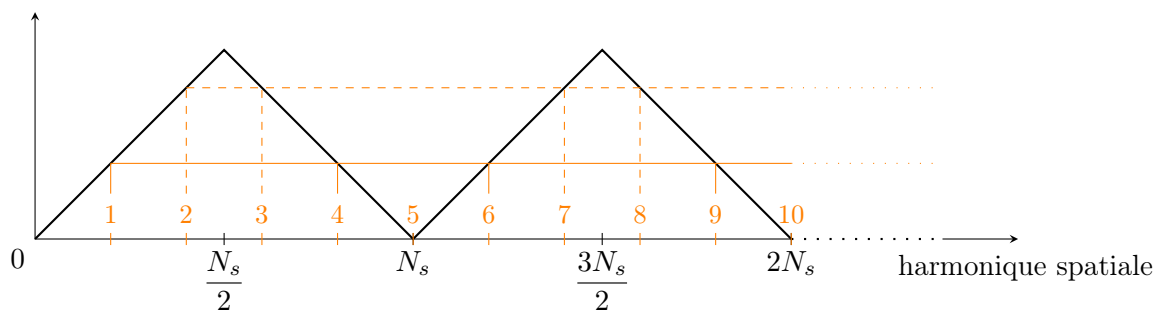


FIGURE IV.22 – Diagramme permettant d'établir les couplages d'harmoniques spatiales transmises par la gearbox en fonction du nombre de satellites  $N_s$ . Exemple pour une gearbox à 5 satellites.

Ce phénomène de repliement s'explique géométriquement par le caractère « discontinu » du couplage des deux rotors au travers de la gearbox. En effet, les efforts ne sont transmis que par l'intermédiaire des cinq satellites, soit en cinq points équi-répartis sur la circonférence des anneaux. En superposant les déformées des harmoniques spatiales de chaque groupe, supposées compatibles entre elles, on observe figure IV.23 que ces harmoniques se croisent effectivement en cinq points équi-répartis modélisant la position des satellites. Avec comme seule information les déplacements de ces cinq points, il n'est donc pas possible de distinguer les différentes harmoniques de chaque groupe ce qui justifie qu'elles soient toutes susceptibles de répondre.

Cette propriété provenant du caractère « discontinu » du couplage des deux rotors en raison d'un nombre fini de satellites, constitue une différence majeure avec le comportement dynamique du modèle de roulement de la section II.1.1 pour lequel la description du couplage était continue. D'autre part, la structure de la matrice de couplage en base modale étant légèrement modifiée par rapport au cas du roulement, il est nécessaire de s'assurer que les projections mises en place dans la section II.3.2.1 sont toujours efficaces pour supprimer les termes temporels de cette matrice.

### 2.3 Projection de la matrice de couplage

La sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  regroupe tous les termes temporels de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ . Comme dans le cas du roulement, l'objectif est de déterminer une projection de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  assurant la suppression

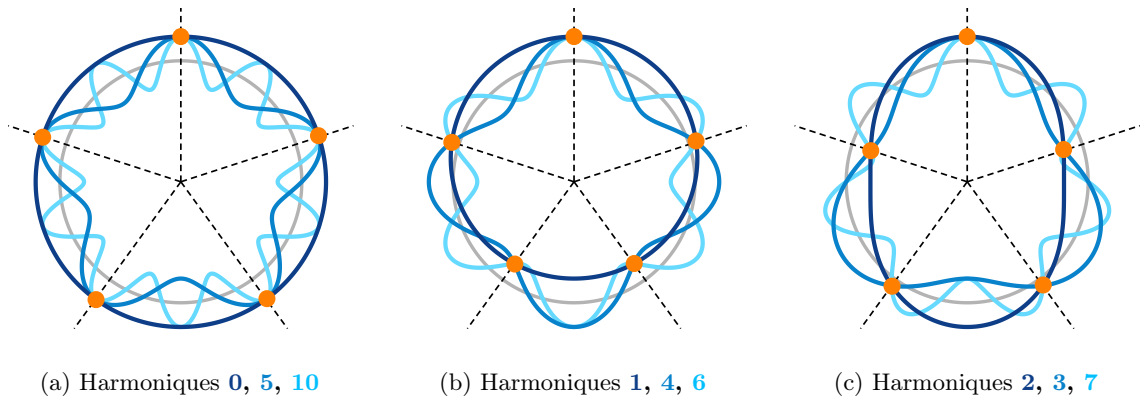


FIGURE IV.23 – Superposition des harmoniques spatiales d’ordres compatibles dans le cas d’une gearbox possédant 5 satellites.

des termes temporels de la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  sans en introduire dans les autres matrices du problème.

Comme présenté Figure IV.21, les termes temporels de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$  s’organisent sous la forme de blocs de quatre termes qui prennent deux formes caractéristiques :

- une matrice de rotation orthogonale classique  $\mathbf{R}$ , déjà présente dans le cas du roulement :

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{IV.76})$$

- une matrice  $\mathcal{R}$  définie comme la composée d’une symétrie  $\mathbf{S}$  et d’une rotation  $\mathbf{R}$  :

$$\mathcal{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}(\alpha) \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.77})$$

La matrice  $\mathcal{R}$ , propre au cas de la gearbox, possède diverses propriétés, la plus évidente étant sa symétrie :  $\mathcal{R}^T = \mathcal{R}$ . Il est également possible de montrer que cette matrice est involutive, c’est-à-dire que  $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{orthogonalité} \\ \text{de } \mathbf{R} \text{ et} \\ \text{symétrie de } \mathbf{S}}}}{=} \mathbf{R}^T \mathbf{S} = (\mathbf{S} \mathbf{R})^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{définition} \\ \text{de } \mathcal{R}}}}{=} \mathcal{R}^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symétrie} \\ \text{de } \mathcal{R}}}}{=} \mathcal{R} \quad (\text{IV.78})$$

Enfin, la composition à gauche ou à droite de la matrice  $\mathcal{R}$  par une matrice de rotation  $\mathbf{R}$  donne deux propriétés remarquables :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(a) \cdot \mathbf{R}(b) &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}(a) \cdot \mathbf{R}(b) & \mathbf{R}(b) \cdot \mathcal{R}(a) &= \mathbf{R}(b) \cdot \mathcal{R}^T(a) = \mathbf{R}(b) \cdot \mathbf{R}^T(a) \cdot \mathbf{S} \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}(a+b) & &= \mathbf{R}^T(a-b) \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}(a-b))^T \\ &= \mathcal{R}(a+b) & &= \mathcal{R}^T(a-b) = \mathcal{R}(a-b) \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

Avec ces notations, les trois blocs présents dans la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int},12}$  représentée Figure IV.21

s'expriment :

$$\begin{aligned}
 \boxed{\phantom{0}} &= \frac{N_s}{2} \cdot \mathbf{R}^T(m\beta_1 - n\beta_2) \\
 \boxed{\phantom{0}} &= \frac{N_s}{2} \cdot \mathcal{R}(m\beta_1 + n\beta_2) \\
 \boxed{\phantom{0}} &= \frac{N_s}{2} \cdot (\mathbf{R}^T(m\beta_1 - n\beta_2) + \mathcal{R}(m\beta_1 + n\beta_2))
 \end{aligned} \tag{IV.80}$$

En utilisant la propriété (IV.79), il est possible de montrer que la matrice de projection  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  proposée dans le cas du roulement section II.3.2.1, est également utilisable dans le cas présent malgré les termes supplémentaires de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ . En effet, cette matrice de projection est diagonale par blocs, constituée de matrices de rotation d'angles multiples de  $\beta_1 = -\Omega_1 t$  et  $\beta_2 = -\Omega_2 t$  et tenant compte des harmoniques  $m$  et  $n$  considérées. Ainsi, le bloc supérieur droit de la matrice projetée  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{int}} = \mathbf{P}_{\text{int}}^T \tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \mathbf{P}_{\text{int}}$ , qui a pour expression  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{int},12} = \mathbf{P}_{\text{int}1}^T \tilde{\mathbf{K}}_{\text{int},12} \mathbf{P}_{\text{int}2}$ , présente les trois blocs suivants :

$$\begin{aligned}
 \boxed{\phantom{0}} &= \frac{N_s}{2} \cdot \mathbf{R}^T(-m\beta_1) \mathbf{R}^T(m\beta_1 - n\beta_2) \mathbf{R}(-n\beta_2) = \frac{N_s}{2} \cdot \mathbf{R}(0) \\
 &= \frac{N_s}{2} \cdot \mathbf{I}_2 \\
 \boxed{\phantom{0}} &= \frac{N_s}{2} \cdot \mathbf{R}^T(-m\beta_1) \mathcal{R}(m\beta_1 + n\beta_2) \mathbf{R}(-n\beta_2) \\
 &= \frac{N_s}{2} \cdot \mathbf{R}^T(-m\beta_1) \mathcal{R}(m\beta_1) = \frac{N_s}{2} \cdot \mathcal{R}(0) \\
 &= \frac{N_s}{2} \cdot \mathbf{S} \\
 \boxed{\phantom{0}} &= \frac{N_s}{2} \cdot (\mathbf{I}_2 + \mathbf{S})
 \end{aligned} \tag{IV.81}$$

Finalement on obtient bien, après projection, des blocs constants indépendants du temps. Le cas de la gearbox se traite donc exactement de la même façon que le roulement du point de vue des projections. Aucune étude supplémentaire n'est nécessaire pour s'assurer de la compatibilité de la projection proposée avec le reste de l'équation du mouvement puisque les développements associés ont déjà été présentés section II.3.2.2. La structure de la matrice de couplage constitue donc la seule différence entre les modèles de roulement et de gearbox : les termes supplémentaires dans le cas de la gearbox autorisent des transferts d'énergie entre harmoniques spatiales d'ordre différent. On s'attend ainsi à observer une dynamique du bi-rotor avec gearbox légèrement différente que dans le cas du roulement.

## 2.4 Simulations numériques

L'objectif de cette section est double : valider la structure de la matrice de couplage projetée en comparant la résolution fréquentielle linéaire avec une intégration temporelle de l'équation de départ, mais également étudier le phénomène de repliement propre à la gearbox et autorisant le

couplage d’harmoniques spatiales d’ordres différents. Le modèle EF bi-anneau est particulièrement adapté à cette seconde étude, l’ordre de l’harmonique spatiale de l’anneau excité découlant directement de la forme de l’effort extérieur appliqué. Il est en effet plus délicat de maîtriser l’ordre de l’harmonique spatiale dans la zone de couplage du modèle de roue aubagée qui dépend de la forme des modes propres mis en jeu. Nous avons donc choisi de nous concentrer sur le modèle bi-anneau, le cas roue aubagée fera l’objet de travaux futurs.

Le modèle EF d’anneau utilisé ici est le modèle linéaire recalé de la section III.4.2.1 pour lequel le nombre de secteurs et d’éléments par secteur a été réduit de façon à limiter les temps de calcul de l’intégration temporelle. Ces deux anneaux sont couplés par le modèle de gearbox proposé dans ce chapitre. Lors de la modélisation d’un satellite, la prise en compte simultanée d’une raideur radiale et ortho-radiale n’est pas absolument nécessaire pour une étude préliminaire de validation et de compréhension du phénomène de repliement. Les courbes tracées avec une ou deux raideurs présentent en effet les mêmes formes et des temps de calcul similaires. Les 5 satellites sont donc modélisés par une raideur purement radiale :

$$\begin{aligned}\kappa_x &= 5 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1} \\ \kappa_y &= 0 \text{ N.m}^{-1}\end{aligned}\tag{IV.82}$$

Les deux anneaux tournent en sens opposé afin de rester cohérent avec le montage en train planétaire choisi pour modéliser la gearbox. Un effort extérieur purement radial est appliqué sur le premier anneau. Comme dans les chapitres précédents, cet effort est tournant dans le repère mobile de l’anneau et possède une répartition spatiale sinusoïdale représentant les sillages générés par un stator en amont. Le nombre de sillages varie en fonction des simulations présentées dans cette section. Aucun effort extérieur n’est appliqué au second anneau qui ne peut être excité que par l’intermédiaire de la gearbox. Le paramétrage retenu est le suivant :

Anneau 1 :	Anneau 2 :
$N_1 = 24$	$N_2 = 12$
$n_{s,1} = 2$	$n_{s,2} = 4$
$\Omega_1 = 10200 \text{ rad.s}^{-1}$	$\Omega_2 = -8000 \text{ rad.s}^{-1}$
$f_{v1}^c = f_{v1}^s = 10^5 \text{ N}$	pas d’excitation extérieure

### 2.4.1 Validation par intégration temporelle

La première étape consiste à valider la forme de la matrice de couplage de la gearbox, obtenue après projection dans les nouveaux repères, en comparant la résolution fréquentielle de l’équation projetée avec une intégration temporelle de l’équation de départ. Aucun traitement n’est effectué sur l’équation de départ qui présente donc des coefficients périodiques temporels inhérents à l’écriture des rotors dans deux repères mobiles distincts. Trois simulations sont présentées pour des nombres de sillages différents. En effet, contrairement au cas du roulement, le modèle de gearbox ne retransmet pas nécessairement la même harmonique spatiale entre les deux anneaux. Il est donc intéressant d’étudier différents cas.

#### Première simulation : 3 sillages d’excitation

Pour cette première simulation, 3 sillages d’excitation sont appliqués à l’anneau 1. Les



déplacements radiaux d'un nœud de chaque anneau sont tracés Figure IV.24 en superposant les deux méthodes de résolution. Comme dans le cas du roulement, on observe pour la résolution temporelle un régime transitoire relativement long nécessitant un nombre d'itérations important avant d'atteindre un état stationnaire. Une fois le régime permanent atteint, les résultats des deux méthodes de résolution se superposent parfaitement.

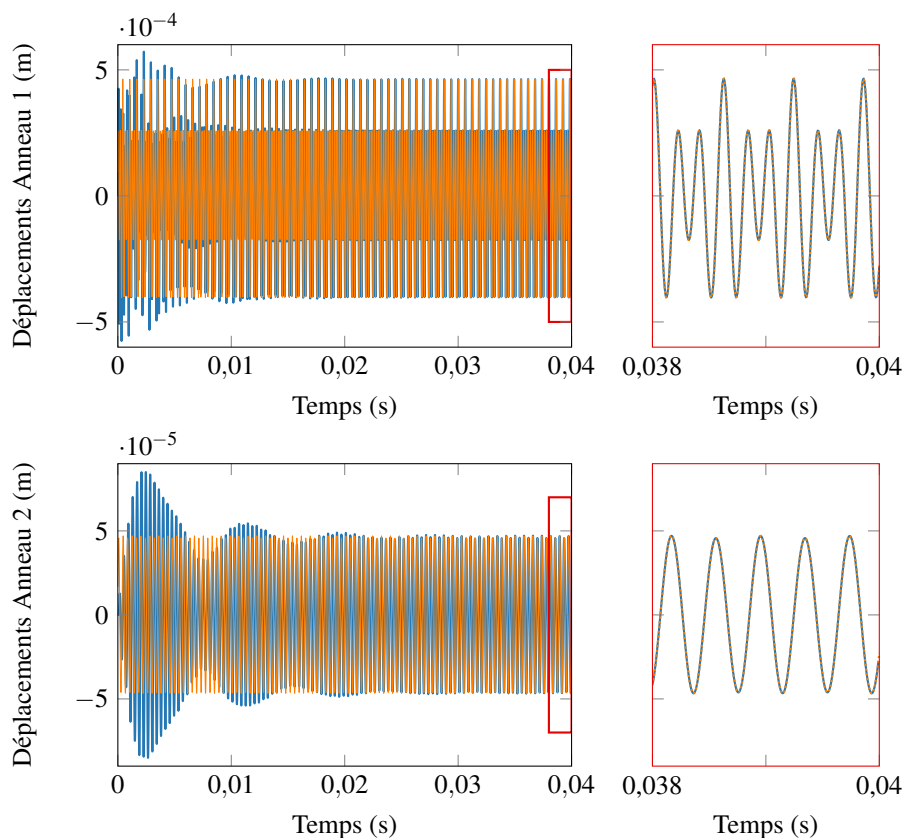


FIGURE IV.24 – Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Couplage par une gearbox, excitation à 3 sillages. Intégration temporelle de l'équation de départ (—), résolution fréquentielle de l'équation projetée (.....).

On observe dans les déplacements du premier anneau la superposition de deux harmoniques spatiales dont les fréquences correspondent aux ordres 2 et 3. Le second anneau ne présente que l'harmonique spatiale d'ordre 2. Ces constats sont cohérents avec le diagramme de la Figure IV.22 présentant les harmoniques spatiales susceptibles de se coupler au travers de la gearbox. L'harmonique d'ordre 3 provient naturellement de l'excitation appliquée au premier anneau. Cette harmonique se transforme en ordre 2 lors de la transmission à l'anneau 2. Les déformations de l'anneau 2 génèrent alors de nouveaux efforts sur l'anneau 1, entraînant l'apparition d'une harmonique d'ordre 2 dans les déplacements du premier anneau. Les harmoniques compatibles d'ordre plus élevé ne sont pas visibles, probablement en raison d'un niveau vibratoire trop faible devant celui des ordres 2 et 3.

### Deuxième simulation : 5 sillages d'excitation

Pour cette deuxième simulation, l'anneau 1 est soumis à 5 sillages d'excitation. D'après la Figure IV.22, il s'agit ici d'un autre groupe d'harmoniques compatibles que dans le cas de

l’excitation à 3 sillages : les harmoniques 0, 5, 10, ... . Les déplacements radiaux d’un nœud de chaque anneau sont tracés Figure IV.25 pour les deux méthodes de résolution.

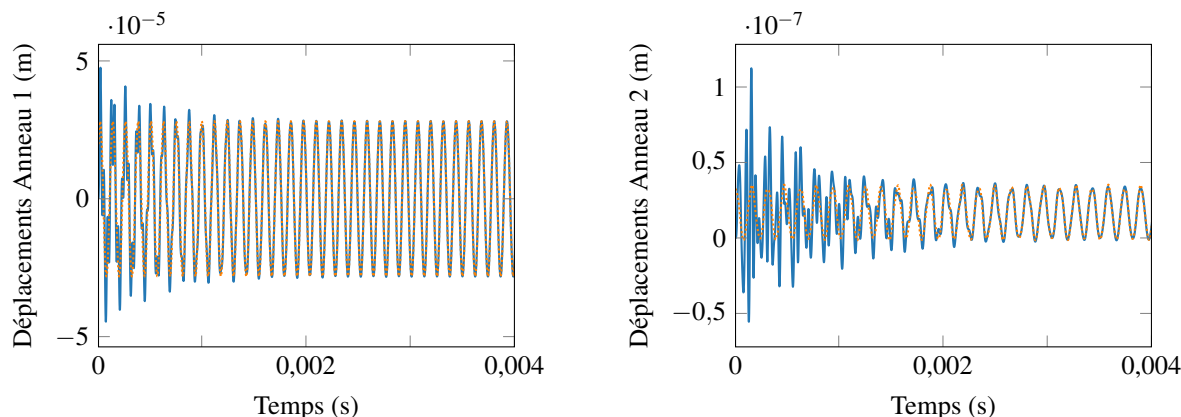


FIGURE IV.25 – Déplacements radiaux au cours du temps d’un nœud de chaque anneau. Couplage par une gearbox, excitation à 5 sillages. Intégration temporelle de l’équation de départ (—), résolution fréquentielle de l’équation projetée (.....).

On observe dans le cas de l’intégration temporelle, un régime transitoire beaucoup plus court que dans le cas de l’excitation à 3 sillages. Le régime permanent est donc atteint plus rapidement et présente de nouveau une très bonne corrélation des résultats des deux méthodes de résolution.

On retrouve dans les déplacements de l’anneau 1 une périodicité correspondant à l’harmonique spatiale d’excitation d’ordre 5. Les déplacements de l’anneau 2 présentent quant à eux la même périodicité mais ne sont plus centrés sur une valeur nulle, témoignant de la présence de l’harmonique 0. Ce constat est de nouveau cohérent avec les prévisions du diagramme de la Figure IV.22 puisqu’il s’agit bien de deux harmoniques compatibles. On remarque toutefois que le comportement est inversé par rapport au cas des 3 sillages d’excitation : ce sont ici les déplacements de l’anneau 2 qui présentent une superposition d’harmoniques, toutes deux générées par le transfert via la gearbox. La périodicité de l’anneau 1 ne semble pas perturbée par la réponse du second anneau, dont l’amplitude des déplacements est probablement d’un ordre de grandeur trop faible.

### Troisième simulation : 7 sillages d’excitation

Pour cette dernière simulation, 7 sillages d’excitation sont appliqués à l’anneau 1. Il s’agit donc du même groupe d’harmoniques que dans le cas de la première simulation, mais avec un ordre d’excitation plus élevé. L’intérêt est d’établir si l’harmonique la plus faible, en l’occurrence d’ordre 2, est toujours prépondérante sur les suivantes lors de la transmission au travers de la gearbox. Les résultats des deux méthodes de résolution sont tracés Figure IV.26 pour un nœud de chaque anneau.

Le profil des courbes obtenues est très similaire avec le cas à 3 sillages d’excitation. La durée du régime transitoire est semblable, et on obtient de nouveau une très bonne corrélation des deux méthodes de résolution dans la phase stationnaire. Ici encore, on observe une superposition de deux harmoniques spatiales dans la réponse de l’anneau 1 : l’harmonique d’excitation 7 et l’harmonique 2, toutes deux compatibles d’après le diagramme de la Figure IV.22. Les déplacements de l’anneau 2 ne présentent quant à eux que l’harmonique spatiale 2, qui se retransmet à l’anneau 1 par le biais de la gearbox. Le phénomène observé est donc parfaitement similaire au cas de la première

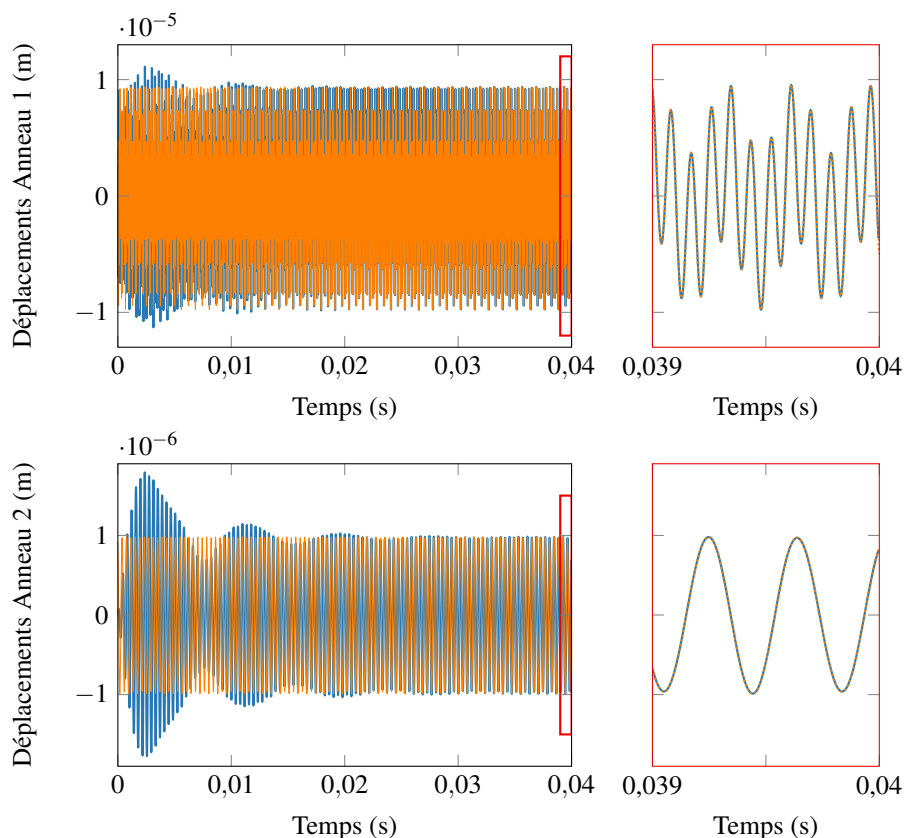


FIGURE IV.26 – Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Couplage par une gearbox, excitation à 7 sillages. Intégration temporelle de l'équation de départ (—), résolution fréquentielle de l'équation projetée (.....).

simulation : au passage de la gearbox, l'harmonique d'excitation de l'anneau 1 se transforme pour l'anneau 2 en une harmonique compatible d'ordre le plus faible possible, à savoir l'ordre 2. Les déformées de ce second anneau se répercutent ensuite sur l'anneau 1 en se superposant aux efforts extérieurs. Les harmoniques d'ordre supérieur sont de nouveau absentes, probablement d'amplitude trop faible devant celles des harmoniques 2 et 7.

### Cas du troisième groupe d'harmoniques : 1, 4, 6, 9, ...

Le diagramme de la Figure IV.22 met en évidence 3 groupes d'harmoniques susceptibles d'être couplées au travers de la gearbox. Aucune simulation n'est présentée pour le groupe d'harmoniques (1, 4, 6, ...) en raison d'un régime transitoire particulièrement long pour l'intégration temporelle, lorsque la configuration non-déformée est choisie comme point de départ. Après plus de 15 jours de calcul, les résultats ne sont toujours pas convergés, bien que la tendance générale s'approche doucement de la solution fréquentielle. L'augmentation de l'amortissement à 10% n'a pas permis de résoudre ce problème. En revanche, en utilisant comme point de départ la solution fréquentielle, les déplacements des deux méthodes de résolution se superposent immédiatement, validant ainsi la méthode de projection mise en place dans le cadre de la gearbox. Cet exemple témoigne particulièrement bien de l'utilité de la méthode développée qui permet de s'affranchir des difficultés numériques liées à la durée du régime transitoire.

## Conclusion

Dans le cas d’une gearbox à 5 satellites, les harmoniques spatiales se répartissent en trois groupes en fonction de leur capacité à se coupler au travers de la gearbox. À l’intérieur de chaque groupe, les simulations sont similaires en terme de durée du régime transitoire et de couplage d’harmoniques spatiales au travers de la gearbox. Dans tous les cas, les deux méthodes de résolution présentent une très bonne corrélation de leurs résultats, ce qui permet de valider, dans le cadre de ce modèle de gearbox, la méthode de projection de l’équation du mouvement assurant la suppression des termes temporels problématiques.

De seulement quelques heures pour le groupe d’harmoniques (0, 5, 10, ...), la durée nécessaire à la résolution temporelle passe à environ 24h pour le groupe (2, 3, 7, ...), et plusieurs semaines pour le groupe (1, 4, 6, ...). L’intérêt de la méthode développée, permettant une résolution fréquentielle quasiment instantanée, est donc parfaitement justifié.

### 2.4.2 Étude du filtrage

La méthode de projection de l’équation du mouvement associée à une résolution fréquentielle ayant été validée dans le cadre de la gearbox, il semble à présent intéressant d’exploiter cette procédure pour étudier le transfert d’harmoniques et le phénomène de repliement au travers de la gearbox. Pour cela, le modèle EF bi-anneau utilisé pour l’étape de validation est conservé, avec une gearbox à 5 satellites. Seul le premier anneau est excité, ce qui permet d’observer le comportement du second sans engendrer d’interférence avec de potentiels efforts extérieurs. Les déformées des deux anneaux obtenues pour des excitations allant de 0 à 10 sillages sont présentées dans le Tableau IV.4.

On remarque que les harmoniques présentes dans les déformées de l’anneau 2 sont très peu variées : pour le groupe (0, 5, 10, ...), il s’agit d’une superposition des harmoniques 0 et 5, pour le groupe (1, 4, 6, 9, ...), il s’agit de l’harmonique 1, et pour le groupe (2, 3, 7, 8) de l’harmonique 2. Les déformées de l’anneau 1 sont parfois légèrement perturbées par celles de l’anneau 2, l’harmonique spatiale de l’anneau 2 se superposant à celle de l’excitation. Ce phénomène est principalement visible pour les cas à 3, 7 et 8 sillages d’excitation pour lesquels la déformée de l’anneau 1 n’est plus parfaitement symétrique.

Le comportement dynamique de la gearbox semble donc agir comme un filtre, ne laissant passer que des harmoniques spatiales d’ordre inférieur au nombre de satellites de la gearbox. Contrairement au cas du roulement, le couplage entre deux modes propres possédant des harmoniques spatiales d’ordre différent dans la zone de fixation de la gearbox est donc possible, à condition que ces harmoniques soient géométriquement compatibles selon le diagramme de la Figure IV.22.

## 2.5 Conclusion

La méthode de projection de l’équation du mouvement d’un bi-rotor, développée dans le cadre d’un couplage par roulement afin de supprimer les termes temporels indésirables, est également applicable avec le modèle de gearbox proposé. La décomposition spatiale des bases modales de chaque rotor dans les zones de couplage, ainsi que les projections établies dans le cadre du roulement sont toujours appropriées. La différence principale entre les deux technologies

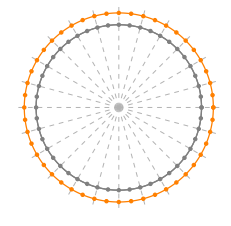
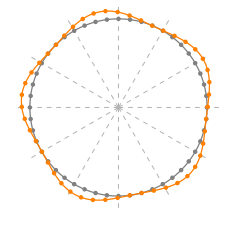
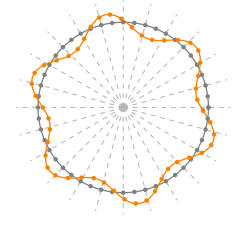
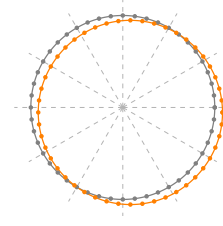
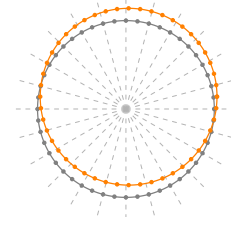
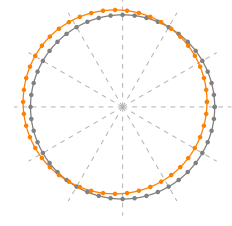
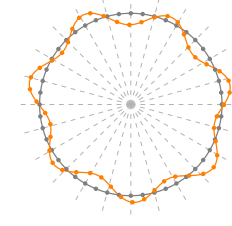
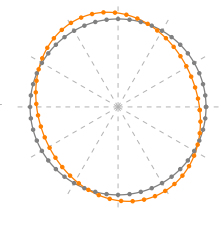
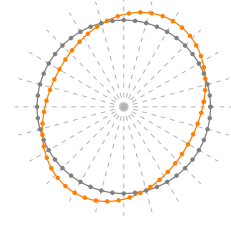
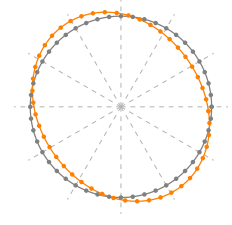
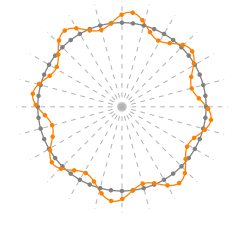
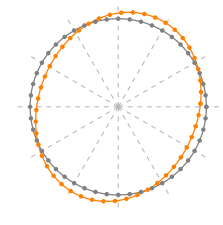
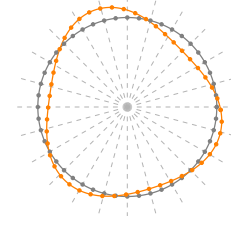
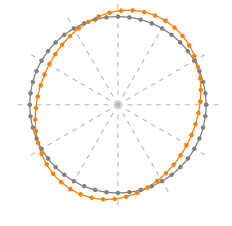
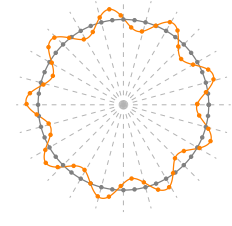
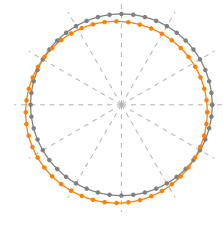
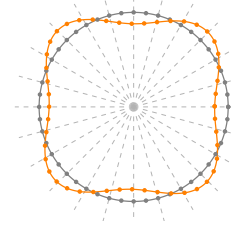
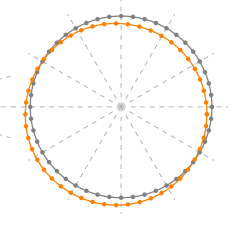
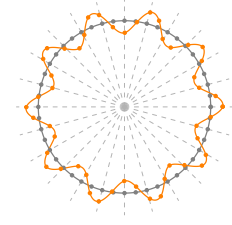
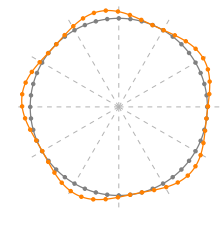
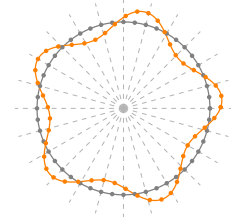
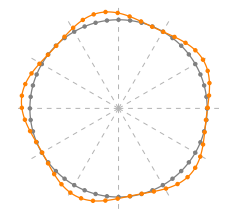
Nb. de sillages	Anneau d'entrée excité	Anneau de sortie	Nb. de sillages	Anneau d'entrée excité	Anneau de sortie
0			6		
1			7		
2			8		
3			9		
4			10		
5					

TABLE IV.4 – Déformées des deux anneaux en fonction du nombre de sillages de l'excitation appliquée en entrée d'une gearbox à 5 satellites. Configuration non-déformée (—), configuration déformée (—), délimitation des secteurs (---).

de couplage concerne le caractère « discontinu » du transfert d'énergie via les satellites de la gearbox, là où le roulement est modélisé par un continuum de raideurs. Il en résulte des termes supplémentaires dans la matrice de couplage de la gearbox, autorisant certains échanges d'énergie

entre harmoniques spatiales d’ordre différent. La compatibilité de ces harmoniques dépend du nombre de satellites de la gearbox. D’après l’étude réalisée avec 5 satellites, il semble que ce réducteur agisse comme un filtre, ne laissant passer que les harmoniques d’ordres les plus faibles dans chaque groupe d’harmoniques géométriquement compatibles entre elles.

Le modèle de gearbox développé dans cette section reste relativement simple, laissant de côté une partie de la dynamique de ce système complexe. En intégrant d’autres phénomènes, tels qu’une excitation liée à la fréquence d’engrènement des dents des engrenages, le risque est de générer de nouveaux termes temporels ne pouvant pas être supprimés par la méthode développée. Dans ce cas, il est possible de traiter séparément chaque phénomène. Le couplage « linéaire » du réducteur, étudié dans ce mémoire et provenant du transfert d’énergie via la déformation élastique globale des satellites, de la couronne et du planétaire, peut toujours être simplifié par la méthode proposée. Les termes supplémentaires devront faire l’objet d’une étude plus approfondie. Il serait toutefois envisageable de les traiter comme des termes non-linéaires, évalués grâce à une procédure d’AFT lors d’une résolution non-linéaire de type HBM.



# Conclusion et perspectives

## Bilan de l'étude

Les travaux présentés dans ce mémoire ont porté sur le développement d'une nouvelle méthode, adaptée à l'étude du comportement vibratoire d'un système de deux rotors co-axiaux couplés par un palier inter-arbre et comportant chacun des aubages. L'objectif sous-jacent était d'améliorer la maîtrise de l'interaction entre les phénomènes vibratoires de dynamique d'ensemble et la déformation des aubes.

Une stratégie a ainsi été mise en place afin de contourner les difficultés mathématiques rencontrées lors de la mise en équation d'un tel système. La difficulté majeure concernait le choix du repère d'écriture de chaque structure, la création de coefficients périodiques temporels étant problématique pour les méthodes de résolution fréquentielles. En suivant la solution usuellement retenue dans le domaine des machines tournantes, chaque rotor a été décrit dans son propre repère mobile. Une méthode de projection de l'équation du mouvement a ensuite été développée afin de supprimer les coefficients périodiques temporels contenus dans le terme de couplage entre les deux rotors et provenant de la différence de vitesse de rotation entre les deux repères mobiles utilisés.

La première étape de cette méthode de projection consiste à écrire le comportement dynamique de chaque rotor à l'aide de sa base modale. L'intérêt de l'opération est double : simplifier la forme de l'équation du mouvement en prévision de l'application d'une projection, mais également découpler les comportements dynamiques associés à chaque mode et ainsi faciliter la compréhension des échanges qui s'opèrent au niveau du palier inter-arbre. Il a ainsi été mis en évidence que les modes propres des deux rotors susceptibles d'interagir au travers du palier doivent posséder dans cette zone d'échange une déformée spatiale similaire. Les vecteurs propres, restreints aux degrés de liberté de l'interface d'échange, sont alors projetés sur une base trigonométrique permettant d'établir les harmoniques spatiales constituant leur déformée. Chaque vecteur propre est ensuite projeté dans un nouveau repère tournant, dont la vitesse de rotation est directement dépendante de l'ordre de l'harmonique spatiale détectée. La dynamique du système bi-rotor est ainsi scindée sur une multitude de repères tournants distincts. L'application de cette projection à l'ensemble de l'équation du mouvement aboutit à une équation à coefficients constants parfaitement adaptée aux méthodes de résolution fréquentielles classiques. La solution obtenue est ensuite reconstruite dans les repères mobiles des deux rotors en appliquant une projection opposée, puis ré-exprimée dans le domaine physique.



Le bon déroulement de cette méthode de projection nécessite de vérifier deux hypothèses principales. La première concerne la modélisation du couplage entre les deux rotors, dont la description doit *a minima* posséder une propriété de symétrie cyclique. Dans le cadre de ce mémoire, le palier inter-arbre assimilé à un roulement est modélisé par un continuum de raideurs sur toute la circonférence des arbres : la description est donc axi-symétrique. La seconde hypothèse concerne la décomposition sous la forme d'harmoniques spatiales des vecteurs propres au niveau de l'interface d'échange. Pour que l'étape de projection supprime bien l'ensemble des coefficients périodiques, chaque vecteur propre ne peut contenir qu'une unique harmonique spatiale. Cette restriction revient à assimiler le comportement vibratoire d'un rotor, dans la zone de fixation du palier inter-arbre, à celui d'un anneau. Compte tenu de la rigidité du disque séparant l'arbre des aubages, cette hypothèse paraît raisonnable.

Deux modèles éléments finis de complexité différente ont été développés afin de tester et d'appliquer cette méthode de projection de l'équation du mouvement. Le modèle le plus simple est un modèle axi-symétrique bi-anneau, représentatif de la géométrie des rotors au niveau de l'interface d'échange créée par le palier inter-arbre. Ce modèle de taille réduite assure de faibles temps de calcul et une interprétation facilitée des phénomènes vibratoires observés. Le second modèle, plus réaliste, est composé de deux roues aubagées de géométrie simplifiée afin de conserver une dimension du problème raisonnable. Ce modèle bi-rotor permet d'appliquer la méthode développée dans de vraies conditions de symétrie cyclique.

Après plusieurs calculs de validation sur les deux modèles éléments finis en comparant la résolution fréquentielle de l'équation projetée avec une résolution par intégration temporelle de l'équation à coefficients périodiques, la méthode de projection de l'équation du mouvement a été exploitée sur le modèle EF bi-rotor. Le faible temps de calcul nécessaire à la résolution fréquentielle de l'équation projetée permet en effet d'étudier le comportement dynamique linéaire de ce système sur de larges plages de vitesse. Deux phénomènes vibratoires principaux ont ainsi été mis en évidence au croisement du premier mode à 2 diamètres de chaque rotor : un transfert d'énergie au travers du palier en configuration co-rotative, et des pics d'amplitude traduisant une instabilité du système en situation contra-rotative. Ces deux phénomènes ont pu être expliqués grâce à une modélisation Rayleigh-Ritz d'un système bi-anneau recalé sur le comportement dynamique du bi-rotor. Il a entre autres été montré que la méthode de projection développée, associée à une résolution fréquentielle, permet la détection des plages d'instabilité du système sans calcul supplémentaire.

Enfin, le champ d'application de la méthode développée a été étendu en tenant compte de deux problématiques industrielles qui font actuellement l'objet de nombreuses recherches dans le domaine des turbomachines. La première concerne la présence de non-linéarités de frottement au niveau des roues aubagées. La méthode de résolution par équilibrage harmonique, classiquement utilisée dans ce type de situation, a donc été adaptée afin de pouvoir s'appliquer à la forme de l'équation du mouvement obtenue après projection dans les nouveaux repères. L'une des principales difficultés a été de déterminer, pour chaque rotor, une base modale orthogonale capable de représenter simultanément les deux comportements glissant ou collé au niveau des frotteurs. Le comportement vibratoire observé pour le bi-rotor en présence d'une non-linéarité de

frottement est bien cohérent avec les deux situations linéaires extrêmes : frotteurs complètement glissant ou complètement collés. La validation exacte de ces phénomènes constitue une perspective de travail possible à court terme.

La seconde problématique étudiée concernait quant à elle la nature du couplage entre les rotors. Le palier inter-arbre a ainsi été remplacé par un réducteur appelé *gearbox*, dont la modélisation proposée n'est plus axi-symétrique mais à symétrie cyclique. Il a alors été montré que malgré une forme de matrice de couplage légèrement différente, la méthode de projection peut toujours être appliquée sans modification. Dans ces conditions, il a été observé sur le système bi-anneau un phénomène de repliement des harmoniques spatiales transmises au travers du roulement, qui n'était pas présent dans le cas du palier inter-arbre. Ce phénomène est directement lié à la description "discrète" du couplage engendré par la gearbox, en opposition à la description continue du palier.

En conclusion, le résultat principal de ce travail de thèse est un outil numérique adapté à l'étude dynamique linéaire ou non-linéaire d'un système bi-rotor couplé possédant des aubages. Le couplage peut être de répartition axi-symétrique ou à symétrie cyclique. Le gain en temps de calcul apporté par cet outil, en comparaison à une résolution frontale de l'équation à coefficients périodiques, permet notamment de déterminer les zones de stabilité du système bi-rotor lors d'un calcul de réponse forcée sur de larges plages de vitesse. L'utilité de cet outil a été montrée sur une structure bi-rotor simplifiée dont la réponse forcée présente au moins deux phénomènes vibratoires notables.

## Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire ouvrent la voie à plusieurs pistes d'amélioration ou de développement. Celles-ci peuvent être organisées en trois grandes catégories : la poursuite des simulations en conservant la méthode de projection de l'équation du mouvement telle que présentée dans ce mémoire ; l'enrichissement de la modélisation pour rendre plus réaliste le système d'étude, pouvant alors nécessiter des adaptations de la méthode développée ; et enfin l'exploitation de cette nouvelle méthode pour établir des critères de dimensionnement industriels. Ces différents points sont exposés dans la suite.

En complément des résultats déjà obtenus sur le modèle éléments finis bi-rotor simplifié, diverses simulations peuvent être envisagées sans avoir à modifier la méthode de projection de l'équation du mouvement. Ces simulations devraient donc être rapides à mettre en place. Il serait tout d'abord intéressant d'approfondir l'étude non-linéaire en effectuant des calculs de réponse forcée du modèle bi-rotor sur les mêmes plages de vitesse qu'en linéaire, mais cette fois-ci en présence d'un frottement. Il est probable que les phénomènes vibratoires observés en linéaire soient alors modifiés, notamment en ce qui concerne l'étendue des zones d'instabilité qui pourraient être réduites grâce à l'amortissement introduit par le frottement. Une résolution non-linéaire multi-fréquentielle serait également à prévoir afin de pouvoir traiter des cas plus généraux où les deux rotors seraient simultanément soumis à des excitations extérieures et non-linéaires. Ces développements ne présentent *a priori* pas de difficulté particulière vis-à-vis de la méthode de projection développée, mais nécessitent d'importantes recherches concernant les méthodes de

résolution multi-fréquentielles souvent lourdes à mettre en place.

D'autre part, il ne faut pas perdre de vue la finalité industrielle de ces recherches qui impose comme condition incontournable que la méthode développée soit adaptée à une vraie géométrie moteur. Deux implications de cette condition peuvent d'ores et déjà être étudiées, en utilisant la méthode de projection à son stade actuel de développement. En premier lieu se pose la question de la taille maximale du modèle éléments finis pouvant être traité avec les ressources numériques actuellement à disposition. Des simulations devront être effectuées pour établir le coût numérique de la méthode proposée sur un modèle réel. Toutefois, l'écriture en base modale assure une réduction notable de la dimension du système, ce qui permettra *a priori* de traiter des gros modèles sans grande difficulté. De plus, le modèle éléments finis bi-rotor étudié dans ce mémoire était constitué de deux roues aubagées directement couplées entre elles. La dynamique de ligne d'arbre, apportant un déplacement de corps rigide aux roues aubagées, n'est donc pas prise en compte et devra être ajoutée à la mise en équation. Ces phénomènes vibratoires se limitant à des déformées à 0 et 1 diamètre, parfaitement bien traitées par la méthode de projection développée, aucune difficulté particulière n'est à prévoir.

Une deuxième catégorie de perspectives de recherches concerne l'amélioration et le développement de la modélisation utilisée, afin d'élargir le champ d'application de la méthode de projection développée. Celle-ci devra éventuellement être adaptée en fonction des propriétés modifiées. Le premier axe d'étude concerné, relatif au couplage inter-arbre, a pour motivation de rendre plus réaliste le système bi-rotor étudié. Les modèles de roulement et de gearbox utilisés dans ce mémoire sont en effet simplifiés et ne permettent pas de traiter l'ensemble des problématiques rencontrées en situation réelle. Il s'agit ici de discuter la nécessité de deux propriétés, jusqu'alors considérées indispensables au bon déroulement de la méthode de projection : la linéarité du couplage inter-arbre et sa description cyclique. L'ajout d'une non-linéarité au niveau du couplage permettrait notamment de simuler un jeu fonctionnel présent à la fois dans les roulements et les réducteurs. Il serait également possible de prendre en compte une déformation non-linéaire des pièces mises en jeu, par exemple au niveau des dents des satellites. L'enjeu serait alors de s'assurer que l'adaptation proposée pour la méthode de résolution non-linéaire par équilibrage harmonique est bien toujours valable avec cette nouvelle forme de non-linéarité. S'il ne semble pas y avoir de difficulté majeure, il faudra cependant être vigilant à conserver un terme de couplage linéaire. Sans cela, les parties linéaires des équations du mouvement des deux rotors seraient totalement découplées, entraînant probablement des difficultés de convergence de la résolution non-linéaire.

En ce qui concerne la description cyclique du couplage, il serait avantageux de pouvoir lever cette condition peu réaliste. Les raideurs résultantes dans les directions verticale et horizontale d'un roulement sont en effet rarement égales, ne serait-ce qu'à cause du poids des rotors. La prise en compte de cette dissymétrie ne permet plus de considérer le couplage comme cyclique, ce qui risque d'intégrer dans l'équation du mouvement de nouveaux coefficients périodiques non-traitables par la méthode de projection développée. Une adaptation serait alors à envisager pour supprimer ces nouveaux termes problématiques. Toutefois, si aucune projection ne permet de résoudre cette difficulté, il serait toujours envisageable de traiter les effets de dissymétrie de la même façon que les efforts non-linéaires.

Enfin, la pertinence de la modélisation retenue peut encore être renforcée, notamment dans le

cadre d'une étude non-linéaire. Le choix de la base de réduction au niveau des interfaces constitue une sérieuse piste d'investigations pour améliorer les performances de la méthode développée. Aucune des deux bases modales libre ou collée ne semble en effet idéale pour représenter à la fois les comportements glissant et collé. L'écriture en base modale étant fondamentale pour le bon déroulement de la méthode de projection, le choix d'une alternative nécessitera de reconsidérer toutes les étapes de la procédure. Pour finir avec le volet modélisation, le développement d'outils autour de la stabilité serait à envisager, afin de renforcer la méthode développée en assurant une bonne maîtrise de la dynamique des systèmes couplés.

Le dernier axe d'étude proposé vise à optimiser la mise en œuvre de la méthode développée sur un modèle bi-rotor industriel. Pour que cette méthode puisse être utilisée comme outil de dimensionnement efficace, il est primordial que son champ d'application soit cohérent avec la physique des échanges énergétiques réellement observés sur un système bi-rotor réel. Il s'agit notamment de caractériser les ordres harmoniques susceptibles de se propager via le couplage en fonction de la géométrie du bi-rotor. Dans le cas du palier inter-arbre, il est en effet peu probable que des harmoniques spatiales d'ordre très élevé soient transmises avec un niveau vibratoire significatif. Tout dépend de la géométrie de l'arbre, notamment dans le cas d'un arbre très creux dont la rigidité est plus restreinte. De même, l'amortissement induit par la longueur d'une ligne d'arbre ne permet probablement pas à une harmonique spatiale d'ordre relativement élevé de se propager au-delà des premiers étages. Seules les roues aubagées situées à proximité du palier pourront donc être impactées de façon notable par la dynamique du second rotor. La méthode de projection développée devrait permettre d'établir, en fonction des paramètres géométriques du bi-rotor, les roues aubagées susceptibles d'être les plus perturbées ainsi que l'harmonique spatiale maximale à prendre en compte. Les études de dimensionnement liées aux couplages dynamiques entre les différents rotors, rendues indispensables par la recherche de performances des nouvelles architectures, pourraient ainsi être optimisées.



## Annexe A

# Bi-orthogonalité des matrices pseudo-modales

L'objet de cette annexe est de démontrer les propriétés de bi-orthogonalité des matrices pseudo-modales  ${}^g\mathbf{W}$  et  ${}^d\mathbf{W}$  à partir de ces mêmes propriétés pour les matrices modales complexes  ${}^g\Phi$  et  ${}^d\Phi$ . Il s'agit notamment de déterminer la forme de  ${}^g\mathbf{W}$  qui permet d'obtenir les propriétés d'orthogonalité souhaitées (*cf.* section I.3.2.1).

Les propriétés d'orthogonalité s'expriment par rapport aux matrices augmentées de pseudo-raideur  $\mathbf{A}$  et de pseudo-masse  $\mathbf{B}$  du système d'état. Dans le cas des bases modales complexes, il existe les deux relations d'orthogonalité suivantes [8] :

$${}^g\Phi^T \mathbf{B}^d \Phi = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad {}^g\Phi^T \mathbf{A}^d \Phi = \mathbf{\Lambda} \quad (\text{A.1})$$

Les relations d'orthogonalité recherchées pour les matrices pseudo-modales sont de la forme :

$${}^g\mathbf{W}^T \mathbf{B}^d \mathbf{W} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad {}^g\mathbf{W}^T \mathbf{A}^d \mathbf{W} = \mathbf{\Omega} \quad (\text{A.2})$$

où  $\mathbf{\Omega}$  est la matrice pseudo-spectrale contenant les valeurs propres du système et dont la forme est explicitée équation (I.61). La première propriété d'orthogonalité (A.1) donne pour deux vecteurs  $i$  et  $j$  des deux bases duales :

$$\begin{aligned} {}^g\Phi_i^T \mathbf{B}^d \Phi_j &= \delta_{ij} \\ {}^g\bar{\Phi}_i^T \mathbf{B}^d \Phi_j &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Sachant que les vecteurs propres  ${}^g\Phi_i$  et  ${}^d\Phi_i$  se décomposent en parties réelles et imaginaires comme suit :

$$\begin{aligned} {}^g\Phi_i &= {}^g\mathbf{y}_i + j {}^g\mathbf{z}_i \\ {}^d\Phi_i &= {}^d\mathbf{y}_i + j {}^d\mathbf{z}_i \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

les deux relations d'orthogonalité (A.3) deviennent :

$$\begin{aligned} [{}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j - {}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j] + j [{}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j + {}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j] &= \delta_{ij} \\ [{}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j + {}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j] + j [{}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j - {}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les quatre relations suivantes sont obtenues par identification des parties réelles et imaginaires de ces deux égalités :

$${}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j - {}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.6a})$$

$${}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j = -{}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j \quad (\text{A.6b})$$

$${}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j = -{}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j \quad (\text{A.6c})$$

$${}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j = {}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j \quad (\text{A.6d})$$

soit en combinant d'une part les relations (A.6a) et (A.6c), et d'autre part les relations (A.6b) et (A.6d) :

$${}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j = -{}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (\text{A.7})$$

$${}^g\mathbf{z}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{y}_j = {}^g\mathbf{y}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{z}_j = 0 \quad (\text{A.8})$$

Le signe « $-$ » de la première relation montre que l'une des deux matrices pseudo-modales (la matrice  ${}^g\mathbf{W}$  pour les développements de ce mémoire) doit être construite à partir du conjugué des vecteurs complexes. De cette façon, la relation d'orthogonalité souhaitée est bien obtenue :  ${}^g\mathbf{W}^T \mathbf{B}^d \mathbf{W} = \mathbf{I}$ .

La seconde propriété recherchée  ${}^g\mathbf{W}^T \mathbf{A}^d \mathbf{W} = \mathbf{\Omega}$  est démontrée en appliquant la même démarche sur la seconde relation d'orthogonalité (A.1).

Il est important de noter que pour cette construction de la matrice  ${}^g\mathbf{W}$ , les valeurs propres associées ne sont plus les  $\lambda$  mais leur conjugué  $\bar{\lambda}$ . Par conséquent la matrice pseudo-spectrale associée n'est plus  $\mathbf{\Omega}$  mais  $\mathbf{\Omega}^T$ . Cette modification doit être prise en compte lors de la décomposition de la matrice pseudo-modale  ${}^g\mathbf{W}$  en parties supérieure et inférieure :

$${}^g\mathbf{W} = \begin{pmatrix} {}^g\mathbf{V} \\ -{}^g\mathbf{V}\mathbf{\Omega}^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

## Annexe B

# Procédure de projection de l'équation du mouvement

Les différentes étapes de la méthode de projection développée dans le Chapitre II sont résumées dans le diagramme de cette annexe. Toute les notations utilisées sont définies dans le Chapitre II. On rappelle que le but de cette méthode est de supprimer les coefficients périodiques de l'équation du mouvement d'un système bi-rotor aubagé, initialement exprimée dans les repères mobiles des deux rotors.



Equation du mouvement des  
deux rotors libres séparés

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 + (\mathbf{G}_1 + \mathbf{D}_1) \dot{\mathbf{u}}_1 + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{N}_1) \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 + (\mathbf{G}_2 + \mathbf{D}_2) \dot{\mathbf{u}}_2 + (\mathbf{K}_2 + \mathbf{N}_2) \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

Écriture en système d'état

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{U}}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{U}}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}$$

Calcul des bases modales à gauche  
et à droite et orthonormalisation

$$\mathbf{u}_1 = {}^g \mathbf{V}_1 {}^g \mathbf{q}_1 = {}^d \mathbf{V}_1 {}^d \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{U}_1 = {}^g \mathbf{W}_1 {}^g \mathbf{q}_1 = {}^d \mathbf{W}_1 {}^d \mathbf{q}_1$$

$${}^g \mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} {}^g \mathbf{V}_i \\ -{}^g \mathbf{V}_i \boldsymbol{\Omega}_i^T \end{pmatrix} \quad {}^d \mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} {}^d \mathbf{V}_i \\ {}^d \mathbf{V}_i \boldsymbol{\Omega}_i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = {}^g \mathbf{V}_2 {}^g \mathbf{q}_2 = {}^d \mathbf{V}_2 {}^d \mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{U}_2 = {}^g \mathbf{W}_2 {}^g \mathbf{q}_2 = {}^d \mathbf{W}_2 {}^d \mathbf{q}_2$$

Décomposition des vecteurs propres en har-  
moniques spatiales dans la zone du roulement

$${}^g \mathbf{V}_1^F(\theta) = (\mathbf{h}_1(\theta) \otimes \mathbf{I}_3) {}^g \boldsymbol{\Gamma}_1$$

$${}^d \mathbf{V}_1^F(\theta) = (\mathbf{h}_1(\theta) \otimes \mathbf{I}_3) {}^d \boldsymbol{\Gamma}_1$$

$${}^g \mathbf{V}_2^F(\theta) = (\mathbf{h}_2(\theta) \otimes \mathbf{I}_3) {}^g \boldsymbol{\Gamma}_2$$

$${}^d \mathbf{V}_2^F(\theta) = (\mathbf{h}_2(\theta) \otimes \mathbf{I}_3) {}^d \boldsymbol{\Gamma}_2$$

Construction de la matrice  
de couplage en base modale

$$\boldsymbol{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_c = {}^g \boldsymbol{\Gamma}_c^T \left( \tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}(t) \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) {}^d \boldsymbol{\Gamma}_c$$

Équation du mouvement du système cou-  
plé dans les bases modales des deux rotors

$$\begin{pmatrix} {}^d \dot{\mathbf{q}}_1 \\ {}^d \dot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^d \mathbf{q}_1 \\ {}^d \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_c \begin{pmatrix} {}^d \mathbf{q}_1 \\ {}^d \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Omega}_1 {}^g \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_{\text{ext},1} \\ -\boldsymbol{\Omega}_2 {}^g \mathbf{V}_2^T \mathbf{f}_{\text{ext},2} \end{pmatrix}$$

Projection de la matrice de couplage en  
fonction des harmoniques des vecteurs propres

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{int}} = \mathbf{P}_{\text{int}}^T \tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}} \mathbf{P}_{\text{int}} \quad \hat{\mathbf{K}}_c = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}}_c \mathbf{P}$$

Projection du reste de  
l'équation du mouvement

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} {}^d \mathbf{q}_1 \\ {}^d \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{q}}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \left( \nabla_{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{K}}_c \right) \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$$

## Annexe C

# Calcul des coefficients de la décomposition spatiale en base cyclique

L'objet de cette annexe est d'exprimer la décomposition spatiale des vecteurs propres au niveau du roulement à partir de leurs coordonnées cycliques (*cf.* section II.2.2). Il s'agit donc d'établir les coefficients harmoniques  $\mathbf{a}^m$  et  $\mathbf{b}^m$  en fonction des vecteurs propres EF, exprimés en base cyclique sur chaque élément  $e_i$  du modèle EF.

Les composantes d'un vecteur propre à  $k$  diamètres sur le secteur  $j$  s'expriment à partir des composantes en cosinus et sinus du vecteur propre exprimé en base cyclique sur le secteur 0. Ainsi, pour l'élément  $i$  du secteur  $j$ , on peut écrire :

$$\mathbf{y}_{e_i,j}^k = \cos(jk\alpha)\bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,c} + \sin(jk\alpha)\bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,s} \quad (\text{C.1})$$

où  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$  correspond à l'angle séparant deux secteurs consécutifs. Il est utile de noter pour la suite que l'angle  $\alpha$  se décompose selon l'angle  $\alpha_s$  d'un élément et le nombre  $n_s$  d'éléments par secteur :  $\alpha = n_s\alpha_s$ . On rappelle que la notation  $\bar{\bullet}$  désigne les composantes cycliques de la grandeur  $\bullet$ . Ainsi, d'après la relation (II.40), la contribution du secteur  $j$  dans le calcul du coefficient  $\mathbf{a}^m$  s'écrit :

$$\mathbf{a}_j^m = \sum_{i=0}^{n_s-1} (\mathbf{C} \cos(m(i + jn_s)\alpha_s) - \mathbf{S} \sin(m(i + jn_s)\alpha_s)) \left( \cos(jk\alpha)\bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,c} + \sin(jk\alpha)\bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,s} \right) \quad (\text{C.2})$$

L'angle des premiers cos et sin présente des contributions provenant de deux origines différentes : la contribution en  $j$  propre au secteur étudié, et une contribution en  $i$  indépendante du secteur étudié. Ces deux fonctions sont donc développées en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques afin de séparer ces deux contributions :

$$\begin{aligned} \cos(m(i + jn_s)\alpha_s) &= \cos(jmn_s\alpha_s) \cos(im\alpha_s) - \sin(jmn_s\alpha_s) \sin(im\alpha_s) \\ \sin(m(i + jn_s)\alpha_s) &= \sin(jmn_s\alpha_s) \cos(im\alpha_s) + \cos(jmn_s\alpha_s) \sin(im\alpha_s) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Sachant que  $n_s\alpha_s = \alpha$  avec  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ , et en rappelant la décomposition de l'ordre  $m$  de l'harmonique sous la forme  $m = \pm k + pN$ , il est possible d'écrire :  $(\pm k + pN)\alpha = \pm k\alpha + 2p\pi$ . Les fonctions cosinus et sinus étant  $2\pi$ -périodiques, on en déduit :

$$\begin{aligned} \cos(m(i + jn_s)\alpha_s) &= \cos(jk\alpha) \cos(im\alpha_s) \mp \sin(jk\alpha) \sin(im\alpha_s) \\ \sin(m(i + jn_s)\alpha_s) &= \sin(jk\alpha) \cos(im\alpha_s) \pm \cos(jk\alpha) \sin(im\alpha_s) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Avec ces simplifications, l'équation (C.2) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j^m = & \cos^2(jk\alpha) \sum_{i=0}^{n_s-1} (\mathbf{C} \cos(im\alpha_s) - \mathbf{S} \sin(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,c} + \sin^2(jk\alpha) \sum_{i=0}^{n_s-1} (\mp \mathbf{C} \sin(im\alpha_s) \mp \mathbf{S} \cos(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,s} \\ & + \cos(jk\alpha) \sin(jk\alpha) \sum_{i=0}^{n_s-1} [(\mp \mathbf{C} \sin(im\alpha_s) \mp \mathbf{S} \cos(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,c} + (\mathbf{C} \cos(im\alpha_s) - \mathbf{S} \sin(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,s}] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Enfin, pour revenir au coefficient  $\mathbf{a}^m$ , il faut sommer les contributions de chaque secteur  $j$  :

$$\mathbf{a}^m = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{a}_j^m \quad (\text{C.6})$$

En utilisant les propriétés trigonométriques suivantes pour  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \cos^2(jk\alpha) &= \sum_{j=0}^{N-1} \sin^2(jk\alpha) = \frac{N}{2} \\ \sum_{j=0}^{N-1} \cos(jk\alpha) \sin(jk\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

on obtient finalement la relation :

$$\mathbf{a}^m = \frac{N}{2} \sum_{i=0}^{n_s-1} \left[ (\mathbf{C} \cos(im\alpha_s) - \mathbf{S} \sin(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,c} \mp (\mathbf{C} \sin(im\alpha_s) + \mathbf{S} \cos(im\alpha_s)) \bar{\mathbf{y}}_{e_i}^{k,s} \right] \quad (\text{C.8})$$

Cette relation est valable pour les modes de diamètre  $0 < k < \frac{N}{2}$ . La même procédure peut être appliquée pour les diamètres  $k = 0$  et  $k = \frac{N}{2}$ , ainsi que pour les coefficients  $\mathbf{b}^{\pm k,p}$ . Ces résultats sont donnés par les relations (II.42), (II.43) et (II.44).

## Annexe D

# Matrices d'un élément poutre courbe

En notant  $\rho$  la masse volumique du matériau utilisé,  $E$  son module d'Young,  $S$  la surface d'une section de l'élément,  $\ell$  sa longueur et  $R$  son rayon, les matrices masse, assouplissement centrifuge, gyroscopique et raideur s'écrivent :

$$\mathbf{M} = \rho S \ell \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11\ell}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13\ell}{420} & 0 & 0 \\ & \frac{\ell^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13\ell}{420} & -\frac{\ell^2}{140} & 0 & 0 \\ & & \frac{13}{35} & \frac{11\ell}{210} & 0 & 0 & \frac{90}{70} & -\frac{13\ell}{420} \\ & & & \frac{\ell^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13\ell}{420} & -\frac{\ell^2}{140} \\ & & & & \frac{13}{35} & -\frac{11\ell}{210} & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{\ell^2}{105} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & & & \frac{13}{35} & -\frac{11\ell}{210} \\ & & & & & & & \frac{\ell^2}{105} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{N} = -\Omega^2 \mathbf{M} \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{G} = 2\Omega \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{K} = E \begin{bmatrix} \frac{6S}{5\ell} & \frac{S}{10} & -\frac{S}{2R} & -\frac{S\ell}{10R} & -\frac{6S}{5\ell} & \frac{S}{10} & -\frac{S}{2R} & \frac{S\ell}{10R} \\ & \frac{2S\ell}{15} & \frac{S\ell}{10R} & 0 & -\frac{S}{10} & -\frac{S\ell}{30} & -\frac{S\ell}{10R} & \frac{S\ell^2}{60R} \\ & & A & B & \frac{S}{2R} & -\frac{S\ell}{10R} & C & F \\ & & & D & \frac{S\ell}{10R} & -\frac{S\ell^2}{60R} & -F & G \\ & & & & \frac{6S}{5\ell} & -\frac{S}{10} & \frac{S}{2R} & -\frac{S\ell}{10R} \\ & & & & & \frac{2S\ell}{15} & \frac{S\ell}{10R} & 0 \\ & & \text{sym} & & & & A & -B \\ & & & & & & & D \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \frac{13\ell^4 SR^2 + 13\ell^4 I - 84I\ell^2 R^2 + 420IR^4}{35\ell^3 R^4} \\
B &= \frac{11\ell^4 SR^2 + 11\ell^4 I - 252I\ell^2 R^2 + 1260IR^4}{210\ell^2 R^4} \\
C &= 3 \frac{3\ell^4 SR^2 + 3\ell^4 I + 56I\ell^2 R^2 - 280IR^4}{70\ell^3 R^4} \\
D &= \frac{\ell^4 SR^2 + \ell^4 I - 28I\ell^2 R^2 + 420IR^4}{105\ell R^4} \\
F &= \frac{2520IR^4 - 13\ell^4 SR^2 - 13\ell^4 I - 84I\ell^2 R^2}{420\ell^2 R^4} \\
G &= \frac{840IR^4 - 3\ell^4 SR^2 - 3\ell^4 I + 28I\ell^2 R^2}{420\ell R^4}
\end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

La matrice de raideur associée à la précharge statique entrainant un raidissement est exprimée sur la fibre neutre de l'élément :

$$\mathbf{K}_{\text{prec}} = \rho S \Omega^2 R^2 \begin{bmatrix} A & C & 0 & -\frac{\ell}{10R} & E & -D & -\frac{1}{2R} & \frac{\ell}{10R} \\ & B & \frac{\ell}{10R} & 0 & D & -F & -\frac{\ell}{10R} & \frac{\ell^2}{60R} \\ & & A & C & \frac{1}{2R} & -\frac{\ell}{10R} & E & -D \\ & & & B & \frac{\ell}{10R} & -\frac{\ell^2}{60R} & D & -F \\ & & & & A & -C & 0 & -\frac{\ell}{10R} \\ & & & & & B & \frac{\ell}{10R} & 0 \\ & & & & & & A & -C \\ & & & & & & & B \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{13\ell}{70R^2} + \frac{3}{5\ell} & D &= \frac{13\ell^2}{840R^2} - \frac{1}{20} \\ B &= \frac{\ell^3}{210R^2} + \frac{\ell}{15} & E &= \frac{9\ell}{140R^2} - \frac{\ell}{15} \\ C &= \frac{11\ell^2}{420R^2} + \frac{1}{20} & F &= \frac{\ell^3}{280R^2} + \frac{\ell}{60} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$



## Annexe E

# Fonctions de forme pour l'élément SOLID185 d'ANSYS

La construction de la matrice de couplage associée au roulement nécessite d'établir l'expression des fonctions de forme associées à la ligne de fixation des raideurs de couplage (*cf.* section III.1). Pour cela, on s'intéresse à la formulation de l'élément hexaédrique SOLID185 d'ANSYS représenté Figure E.1.

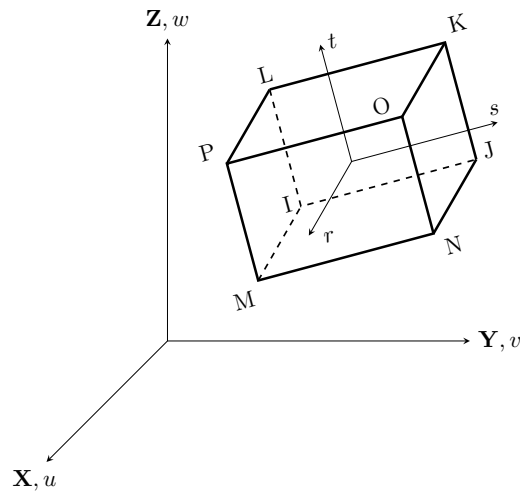


FIGURE E.1 – Notations pour l'élément hexaédrique SOLID185 d'ANSYS.

Les fonctions de forme fournies dans la documentation d'ANSYS correspondent au cas d'un cube de côté 2, avec pour coordonnées  $(r, s, t)$  de ses sommets exprimées dans le repère de l'élément :

I $(-1, -1, -1)$	K $(-1, 1, 1)$	M $(1, -1, -1)$	O $(1, 1, 1)$
J $(-1, 1, -1)$	L $(-1, -1, 1)$	N $(1, 1, -1)$	P $(1, -1, 1)$

Le déplacement  $u$  d'un point repéré sur l'élément par ses coordonnées  $(r, s, t)$  a pour expression



dans le repère global ( $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ ), en fonction des déplacements aux sommets :

$$u = \frac{1}{8} \left( \begin{aligned} &u_I(1-s)(1-t)(1-r) + u_J(1+s)(1-t)(1-r) \\ &+ u_K(1+s)(1+t)(1-r) + u_L(1-s)(1+t)(1-r) \\ &+ u_M(1-s)(1-t)(1+r) + u_N(1+s)(1-t)(1+r) \\ &+ u_O(1+s)(1+t)(1+r) + u_P(1-s)(1+t)(1+r) \end{aligned} \right) \quad (\text{E.1})$$

Cette expression est également valable pour les ddl  $v$  et  $w$ . Si la ligne de fixation des raideurs de couplage coïncide bien avec une ligne du maillage comme spécifié dans les contraintes de maillage, alors les raideurs sont fixées sur une arête de l'élément. Dans ce cas particulier, l'expression des déplacements  $u, v$  et  $w$  est simplifiée :

$$\begin{aligned} \text{Arête I-J (idem pour L-K / M-N / P-O)} & \quad u = \frac{1}{2} (u_I(1-s) + u_J(1+s)) \\ \text{Arête I-M (idem pour J-N / L-P / K-O)} & \quad u = \frac{1}{2} (u_I(1-r) + u_M(1+r)) \\ \text{Arête I-L (idem pour J-K / N-O / M-P)} & \quad u = \frac{1}{2} (u_I(1-t) + u_L(1+t)) \end{aligned}$$

Ces trois expressions étant similaires, les développements se limitent dans la suite aux arêtes dans la direction  $s$ , le raisonnement et les résultats étant équivalents pour les directions  $r$  et  $t$ . Ainsi, en numérotant les deux nœuds d'une arête  $\bullet_1$  et  $\bullet_2$  dans le sens du repère  $(r, s, t)$  de l'élément, les fonctions de forme sur cette arête ont pour expression :

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & 1+s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 & 1+s & 0 \\ 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 1+s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

En pratique, dans un cas plus général, les coordonnées de l'élément ne sont pas comprises entre -1 et 1 mais entre  $-\ell/2$  et  $\ell/2$ , avec  $\ell$  la longueur de l'arête considérée. Le changement de variable suivant est alors nécessaire :

$$s_0 = \frac{\ell}{2}s \quad \text{avec} \quad -\frac{\ell}{2} \leq s_0 \leq \frac{\ell}{2} \quad (\text{E.3})$$

D'autre part, pour faciliter le calcul des coefficients  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  utilisés lors de l'étape de décomposition des vecteurs propres sous la forme d'harmoniques spatiales, il est préférable d'exprimer les fonctions de forme de la ligne de fixation des raideurs en fonction de la coordonnée angulaire  $\theta$  comprise entre 0 et  $\alpha_s$  sur un élément.  $\alpha_s$  correspond à la largeur angulaire de l'élément. Dans ce cas, un second changement de variable doit être pris en compte :

$$s_0 = R\theta - \frac{\ell}{2} \quad \text{soit} \quad s = \frac{2R\theta}{\ell} - 1 \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_s \quad (\text{E.4})$$

Enfin, la relation  $\ell = \alpha_s R$  conduit à la définition du changement de variable final :

$$s = \frac{2\theta}{\alpha_s} - 1 \quad (\text{E.5})$$

Avec ce changement de variable, les fonctions de forme  $\mathbf{H}(\theta)$  deviennent :

$$\begin{pmatrix} u(\theta) \\ v(\theta) \\ w(\theta) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1(\theta) & 0 & 0 & M_2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & M_1(\theta) & 0 & 0 & M_2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & M_1(\theta) & 0 & 0 & M_2(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(\theta)} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} M_1(\theta) &= 1 - \frac{\theta}{\alpha_s} \\ M_2(\theta) &= \frac{\theta}{\alpha_s} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_s \quad (\text{E.7})$$



# Bibliographie

- [1] F. Nelson, “A review of the origins and current status of rotor dynamics,” in *Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney, Australia*, 2002. 13
- [2] E. H. Dowell and R. N. Clark, *A modern course in aeroelasticity*. Solid mechanics and its applications, Kluwer Academic Publishers, 4ème édition revue et élargie ed., 2004. 13
- [3] G. H. Henderson and S. Fleeter, “Aerodynamically forced response and flutter of structurally mistuned bladed disks in subsonic flow,” *Journal de Physique III*, vol. 2, no. 9, pp. 1813–1833, 1992. 13
- [4] R. Corral, O. Khemiri, and C. Martel, “Design of mistuning patterns to control the vibration amplitude of unstable rotor blades,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 80, pp. 20 – 28, 2018. 13
- [5] N. Lesaffre, J.-J. Sinou, and F. Thouverez, “Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, no. 4-5, pp. 1005–1032, 2007. 14
- [6] M.-O. Parent and F. Thouverez, “Phenomenological model for stability analysis of bladed rotor-to-stator contacts,” in *International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, (Honolulu, United States), Apr. 2016. 14
- [7] M. Legrand, C. Pierre, and B. Peseux, “Structural modal interaction of a four-degree-of-freedom bladed disk and casing model,” *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 5, pp. 13–41, Oct. 2010. 14
- [8] T. Gmür, *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997. 14, 25, 26, 27, 47, 111, 177
- [9] D.L. Thomas, “Dynamics of rotationally periodic structures,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 81 – 102, 1979. 18
- [10] S. Wildheim, “Excitation of rotationally periodic structures,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 46, no. 4, pp. 878–882, 1979. 18
- [11] J. Wildheim, “Excitation of rotating circumferentially periodic structures,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 75, no. 3, pp. 397–416, 1981. 18
- [12] R. Henry, “Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires,” *Journal de Mécanique appliquée*, vol. 4, no. 1, pp. 61–82, 1980. 18
- [13] R. Valid and R. Ohayon, “Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques,” *La recherche aérospatiale*, no. 4, pp. 251–263, 1985. 19

- [14] M. Gruin, *Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine basse pression soumise à des excitations structurales d'un turboréacteur*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2012. 24, 33, 39, 125, 130, 197
- [15] M.I. Friswell and J.E. Mottershead, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Springer Science & Business Media, 1995. 31
- [16] F. Sicot, *Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2009. 34,197
- [17] M. Guskov, J.J. Sinou, and F. Thouverez, "Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics," *Mechanics Research Communications*, pp. 537–545, 2008. 35
- [18] P. Feldmann and J. Roychowdhury, "Computation of circuit waveform envelopes using an efficient, matrix-decomposed harmonic balance algorithm," *IEEE*, pp. 295–300, 1996. 36,126
- [19] F. Schilder, W. Vogt, S. Schreiber, and H. Osinga, "Fourier methods for quasi-periodic oscillations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, 07 2006. 36
- [20] D. Laxalde, *Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007. 36,134
- [21] B. Zhou, F. Thouverez, and D. Lenoir, "A variable-coefficient harmonic balance method for the prediction of quasi-periodic response in nonlinear systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, pp. 233–244, 2015. 36
- [22] K.S. Kundert, G.B. Sorkin, and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Applying harmonic balance to almost-periodic circuits," *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, pp. 366–378, 1988. 36
- [23] T. Guédeney, A. Gomar, F. Gallard, F.Sicot, G. Dufour, and G. Puigt, "Non-uniform time sampling for multiple-frequency harmonic balance computations," *Journal of Computational Physics*, pp. 317–345, 2013. 36
- [24] D.J. Ewins, *Modal testing : theory, practice and application*. Research Studies Press Wiley, second ed., 2000. 37
- [25] J. M. Vance, *Rotordynamics of turbomachinery*. John Wiley & Sons, 1988. 39
- [26] D. Childs, *Turbomachinery rotordynamics : phenomena, modeling, and analysis*. John Wiley & Sons, 1993. 39
- [27] F. F. Ehrlich, *Handbook of rotordynamics*. Krieger, 1999. 39
- [28] M. Lalanne and G. Ferraris, *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Wiley, second ed., 2000. 39
- [29] F. C. Nelson, "A brief history of early rotor dynamics," *Sound and Vibration*, vol. 37, no. 6, pp. 8–11, 2003. 39
- [30] M. Guskov, *Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors. Études numérique et expérimentale*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007. 39,44
- [31] Z. Lu, L. Hou, Y. Chen, and C. Sun, "Nonlinear response analysis for a dual-rotor system with a breathing transverse crack in the hollow shaft," *Nonlinear Dynamics*, pp. 169–185, 2016. 39

- [32] D. Laxalde, F. Thouverez, and J.P. Lombard, “Dynamical analysis of multi-stage cyclic structures,” *Mechanics Research Communications*, pp. 379–384, 2007. 40
- [33] G. Battiato, C.M. Firrone, T.M. Berruti, and B.I. Epureanu, “Reduced order modeling for multi-stage coupling of cyclic symmetric structures,” *Proceedings of ISMA*, pp. 3447 – 3462, 2016. 40
- [34] N. Salvat, A. Batailly, and M. Legrand, “Two-dimensional modeling of unilateral contact-induced shaft precessional motions in bladed-disk/casing systems,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, pp. 90 – 104, 2015. 40, 41, 45
- [35] E.P. Jr Gargiulo, “A simple way to estimate bearing stiffness,” *Machine Design*, vol. 52, no. 17, pp. 107–110, 1980. 44
- [36] C. Sunnersjö, “Varying compliance vibrations of rolling bearings,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 58, no. 3, pp. 363 – 373, 1978. 44
- [37] C. Villa, J.-J. Sinou, and F. Thouverez, “Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 13, no. 4, pp. 804 – 821, 2008. 44
- [38] A. Jones, “A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions,” *Journal of basic engineering*, vol. 82, no. 2, pp. 309–320, 1960. 44
- [39] M. Tadina and M. Boltežar, “Improved model of a ball bearing for the simulation of vibration signals due to faults during run-up,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 17, pp. 4287 – 4301, 2011. 45
- [40] J. R. Rice, “Experiments on Gram-Schmidt orthogonalization,” *Mathematics of Computation*, vol. 20, no. 94, pp. 325–328, 1966. 47
- [41] M. Legrand, *Modèles de prédiction de l’interaction rotor/stator dans un moteur d’avion*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes (ECN), Université de Nantes, 2005. 49,75
- [42] A. Lazarus, B. Prabel, and D. Combescure, “A 3d finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 18, pp. 3780 – 3797, 2010. 51
- [43] D. Charleux, *Étude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2006. 54
- [44] S. Timoshenko, *Théorie des vibrations à l’usage des ingénieurs*. Librairie Polytechnique Béranger, second ed., 1954. 58,98
- [45] S.S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*. Wiley, 2007. 58,98
- [46] S. Pradeep and S. K. Shrivastava, “On the stability of the damped Mathieu equation,” *Mechanics Research Communications*, vol. 15, no. 6, pp. 353 – 359, 1988. 96
- [47] M. Mond, G. Cederbaum, P.B. Khan, and Y. Zarmi, “Stability analysis of the non-linear Mathieu equation,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 167, no. 1, pp. 77 – 89, 1993. 96
- [48] F. Nelson, “In-plane vibration of a simply supported circular ring segment,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 4, no. 6, pp. 517 – 527, 1962. 99
- [49] A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, vol. 1. 1892. 99

- [50] J.W. Strutt and B. Rayleigh, *The theory of sound*, vol. 2. Dover, second ed., 1896. 99
- [51] Z. Celep, "In-plane vibrations of circular rings on a tensionless foundation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 143, no. 3, pp. 461 – 471, 1990. 99
- [52] M.-O. Parent, *Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2015. 99
- [53] A.H. Nayfeh and B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational, and experimental methods*. Wiley, 1995. 110
- [54] C. Pierre, "Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126, no. 3, pp. 485 – 502, 1988. 113
- [55] M. Rafiee, F. Nitzsche, and M. Labrosse, "Dynamics, vibration and control of rotating composite beams and blades : A critical review," *Thin-Walled Structures*, vol. 119, pp. 795 – 819, 2017. 124
- [56] Y.-a. Huang, Z.-c. Deng, and L.-x. Yao, "Dynamic analysis of a rotating rigid-flexible coupled smart structure with large deformations," *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 28, no. 10, pp. 1349–1360, 2007. 124
- [57] A. Batailly, M. Legrand, A. Millecamps, and F. Garcin, "Numerical-experimental comparison in the simulation of rotor/stator interaction through blade-tip/abradable coating contact," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 134, no. 8, 2012. 124
- [58] J. J. Chen and C. H. Menq, "Periodic Response of Blades Having Three-Dimensional Nonlinear Shroud Constraints ," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 123, no. 4, pp. 901–909, 2001. 124
- [59] E. P. Petrov and D. J. Ewins, "Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks ," *Journal of Turbomachinery*, vol. 125, pp. 364–371, 04 2003. 124
- [60] D. Laxalde, C. Gibert, and F. Thouverez, "Experimental and Numerical Investigations of Friction Rings Damping of Blisks," in *ASME Turbo Expo 2008*, (Berlin, Germany), June 2008. 124
- [61] L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, and A. Gousskov, "Dynamic analysis of fretting-wear in friction contact interfaces," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, no. 10, pp. 1513 – 1524, 2011. 124
- [62] H. Murthy, G. Harish, and T. N. Farris, "Efficient modeling of fretting of blade/disk contacts including load history effects," *Journal of Tribology*, vol. 126, pp. 56–64, 01 2004. 124
- [63] A. Grolet, *Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique*. Thèse de doctorat, 2013. 125
- [64] J. Dormand and P. Prince, "A family of embedded runge-kutta formulae," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 19 – 26, 1980. 125
- [65] M. Géradin and D. J. Rixen, *Mechanical vibrations : theory and applications to structural dynamics*. John Wiley, 2nd ed., 1997. 125
- [66] N. J. Carpenter, R. L. Taylor, and M. G. Katona, "Lagrange constraints for transient finite element surface contact," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, no. 1, pp. 103–128, 1991. 125

- [67] J. Moreau, "Numerical aspects of the sweeping process," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, no. 3, pp. 329 – 349, 1999. 125
- [68] M. Jean, "The non-smooth contact dynamics method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, no. 3, pp. 235 – 257, 1999. 125
- [69] P. Sundararajan and S. T. Noah, "Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method – Application to rotor systems," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 119, pp. 9–20, 01 1997. 126
- [70] D. Demailly, *Étude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel – Application à la dynamique rotor*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2003. 126
- [71] J. Kawata, T. Kinouchi, Y. Yamagami, Y. Nishio, and A. Ushida, "Envelope analysis of nonlinear electronic circuits based on harmonic balance method," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 40, 03 2012. 126
- [72] B. Schmithusen, S. Odermatt, and B. Witzigmann, "Large-signal simulation of semiconductor lasers on device level : Numerical aspects of the harmonic balance method," *Optical and Quantum Electronics*, vol. 40, pp. 355–360, 04 2008. 126
- [73] L. He, "Fourier methods for turbomachinery applications," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 46, pp. 329–341, 11 2010. 126
- [74] L. He, "Special issue on Fourier-based method development and application," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 27, no. 2, pp. 51–51, 2013. 126
- [75] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, and L. Jezequel, "A dynamic lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, no. 1, pp. 201 – 219, 2003. 126
- [76] D. Laxalde and F. Thouverez, "Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 322, pp. 1009–1025, 05 2009. 126
- [77] C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, J.-P. Ousty, and M. Mbaye, "A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 83, 06 2016. 126
- [78] N. Coudeyras, J.-J. Sinou, and S. Nacivet, "A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, pp. 1175–1199, 01 2009. 126
- [79] S. Narayanan and P. Sekar, "A frequency domain based numeric–analytical method for non-linear dynamical systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 211, no. 3, pp. 409 – 424, 1998. 126
- [80] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*. Wiley, second ed., 2000. 129
- [81] S. L. Lau, Y. K. Cheung, and S. Y. Wu, "Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems," *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The Asme - J APPL MECH*, vol. 50, 12 1983. 129
- [82] Y.-S. Choi and S. T. Noah, "Nonlinear steady-state response of a rotor-support system," *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, vol. 109, 08 1987. 129



- [83] T.M. Cameron and J.H. Griffin, “An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56(1), pp. 149–154, 1989. 130
- [84] R. Kikuuwe, N. Takesue, A. Sano, H. Mochiyama, and H. Fujimoto, “Fixed-step friction simulation : from classical coulomb model to modern continuous models,” in *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1009–1016, Aug 2005. 132,133
- [85] T. Piatkowski, “Dahl and lugre dynamic friction models — the analysis of selected properties,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 73, pp. 91 – 100, 2014. 132
- [86] R. Bouc, “Forced vibration of mechanical systems with hysteresis,” in *Proceedings of 4th Conference Nonlinear Oscillation, Prague*, p. 315, 1967. 132
- [87] C.-H. Menq, J. Bielak, and J. Griffin, “The influence of microslip on vibratory response, part i : A new microslip model,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 107, no. 2, pp. 279 – 293, 1986. 132
- [88] E. Ciğeroğlu and H. N. Özgüven, “Nonlinear vibration analysis of bladed disks with dry friction dampers,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, no. 3, pp. 1028 – 1043, 2006. 132
- [89] C. Joannin, *Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires – Application à la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2017. 134
- [90] A. Grolet and F. Thouverez, “On a new harmonic selection technique for harmonic balance method,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 30, pp. 43 – 60, 2012. 143
- [91] R. MacNeal, “A hybrid method of component mode synthesis,” *Computers and Structures*, vol. 1, no. 4, pp. 581–601, 1971. 144
- [92] D. Martinez, T. Carne, D. Gregory, and A. Miller, “Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis,” in *25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, p. 941, 1984. 144
- [93] R. R. Craig and M. C. C. Bampton, “Coupling of substructures for dynamic analyses,” *AIAA Journal*, vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319, 1968. 144
- [94] A. Batailly, *Simulation de l’interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2008. 144
- [95] M. Inalpolat and A. Kahraman, “A theoretical and experimental investigation of modulation sidebands of planetary gear sets,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 323, no. 3, pp. 677 – 696, 2009. 153
- [96] C. Molina Vicuña, “Vibration characteristics of single-stage planetary gear transmissions,” *Ingeniare*, vol. 22, pp. 88–98, 10 2014. 153

# Table des figures

I.1	Exemple d'un turboréacteur LEAP <sup>®</sup> développé par CFM International, société commune 50/50 entre Safran Aircraft Engines et GE. . . . .	10
I.2	Coupe d'un moteur double-corps, double-flux de type CFM56 <sup>®</sup> . . . . .	11
I.3	Vue du dessus d'un étage de compresseur avec alternance d'une roue mobile et d'un stator. . . . .	12
I.4	Solide déformable dans sa configuration de référence. . . . .	14
I.5	Solide déformable dans sa configuration initiale (gauche) puis déformée (droite). . . . .	15
I.6	Schéma du secteur de référence d'une roue aubagée. . . . .	18
I.7	Notations pour les conditions aux frontières inter-secteur. . . . .	22
I.8	Déformées modales de deux modes simples et d'un mode double. Source : [14]. . . . .	24
I.9	Coupe schématisée d'un turboréacteur double-corps possédant un palier inter-arbre. Rotor basse pression (—), rotor haute pression (—), paliers (—), stator (—). . . . .	33
I.10	Champ de pression dans l'écoulement après passage d'un étage rotor/stator. Source : [16]. 34	
I.11	Schéma d'un bi-rotor soumis à deux excitations synchrones générées par les stators en amont des deux roues aubagées. . . . .	34
I.12	Choix du repère mobile pour l'étude d'une roue aubagée tournant à la vitesse $\Omega$ . . . . .	38
I.13	Schéma des repères mobiles liés à chaque bague du roulement inter-arbre. . . . .	39
II.1	Système bi-rotor étudié . . . . .	44
II.2	Représentation des deux premières harmoniques spatiales de la base des modes à 0 diamètre. Configuration initiale (—), configuration déformée (—), délimitation des secteurs (---) . . . . .	53
II.3	Représentation des harmoniques spatiales $m = \pm k + pN$ compatibles avec une déformée modale à $k$ diamètres. . . . .	54
II.4	Structure de la matrice des coefficients $\mathbf{\Gamma}^k$ obtenue en décomposant les vecteurs propres à $k$ diamètres sur leurs harmoniques spatiales. Seuls les blocs grisés sont non-nuls. . . . .	59
II.5	Exemple de construction de la matrice $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int}}$ . . . . .	63
II.6	Schéma d'un élément poutre courbe et notations associées. . . . .	76
II.7	Degré d'oscillation maximum pouvant être observé sur un élément avec des fonctions de forme cubiques. . . . .	77
II.8	Raideurs d'attache placées en chaque nœud du modèle EF d'anneau pour en supprimer les modes de corps rigide. . . . .	80

II.9	Diagramme de Campbell du modèle d'anneau retenu pour les simulations avec la superposition des régimes moteur $2N$ et $3N$ (—). Modes liés aux raideurs d'attache (---). . . . .	80
II.10	Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (—), zoom sur l'état stationnaire (□). . . .	82
II.11	Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (—), zoom sur l'état stationnaire (□). . . .	83
III.1	Modèle éléments finis du système bi-rotor aubagé avec en rouge les lignes de fixation des raideurs modélisant le roulement. . . . .	86
III.2	Schéma des principales dimensions et conditions limites du système bi-rotor. . . . .	88
III.3	Visualisation des déformées modales du premier mode à 2 diamètres de chaque roue aubagée. . . . .	89
III.4	Déplacements radiaux au cours du temps d'un noeud de chaque roue aubagée au niveau du roulement. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (—). . . .	91
III.5	Déplacements radiaux au cours du temps d'un noeud de chaque roue aubagée au niveau du roulement. Intégration temporelle (—), résolution fréquentielle (—). . . .	92
III.6	Tracé de la fonction d'équation $y(\theta) = -10 \cos(2\theta) - 3 \cos(3\theta)$ . . . . .	93
III.7	Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de la zone du roulement de chaque roue aubagée en configuration co-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres. . . . .	95
III.8	Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de la zone du roulement de chaque roue aubagée en configuration contra-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres. . . . .	96
III.9	Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de la zone du roulement de chaque roue aubagée en configuration co-rotative, autour de la fréquence propre de la roue $R_1$ et des deux valeurs de $\Delta\Omega$ présentant des points singuliers dans le cas contra-rotatif. . . . .	97
III.10	Schéma du système de deux anneaux utilisé pour la modélisation par la méthode de Rayleigh-Ritz. . . . .	99
III.11	Déplacements radiaux au cours du temps d'un point de chaque anneau du système couplé. Comparaison des modélisations éléments finis (—) et Rayleigh Ritz (—) résolues par intégration temporelle. . . . .	106
III.12	Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de chaque anneau en configuration co-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres. . . . .	107
III.13	Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de chaque anneau en configuration contra-rotative. Zoom (à droite) sur le croisement des deux fréquences propres. . . . .	108
III.14	Réponse forcée dans la direction radiale d'un point de chaque anneau en configuration co-rotative, autour de la fréquence propre de la roue $R_1$ et des deux valeurs de $\Delta\Omega$ présentant des points singuliers dans le cas contra-rotatif. . . . .	109
III.15	Lobe d'instabilité du système bi-anneau pour trois valeurs d'amortissement $\xi$ en fonction de la différence de vitesse des deux rotors $\Delta\Omega$ et de la densité de raideur radiale $\kappa$ . $\xi = 0, 1\%$ (□), $\xi = 1\%$ (■), $\xi = 5\%$ (■). . . . .	111

III.16	Évolution des parties réelles et imaginaires des 4 valeurs propres du système couplé bi-anneau en fonction de la différence de vitesse $\Delta\Omega$ . Zoom sur la zone d'instabilité ( $\square$ )	113
III.17	Tracé des droites correspondant à un coefficient d'amortissement nul et aux valeurs de pulsations propres susceptibles de générer une singularité. Superposition sur la nappe de réponse forcée obtenue pour l'anneau 1 en configuration contra-rotative. . . . .	115
III.18	Tracé de la zone d'instabilité du système bi-anneau en contra-rotatif à partir des deux pics de résonance observés sur la réponse forcée de l'anneau 1 en configuration contra-rotative. . . . .	116
III.19	Déplacements radiaux au cours du temps d'un point de chaque anneau pour trois configurations stables (gauche) et trois configurations instables (droite) repérées sur la Figure III.18. Anneau 1 ( $\text{---}$ ), anneau 2 ( $\text{---}$ ). . . . .	117
III.20	Tracé de la zone d'instabilité sur une nappe de l'anneau 1 en situation co-rotative. . . . .	118
III.21	Déplacements radiaux au cours du temps d'un point de chaque anneau pour deux configurations stables (gauche) et deux configurations instables (droite) repérées sur la Figure III.20. Anneau 1 ( $\text{---}$ ), anneau 2 ( $\text{---}$ ). . . . .	118
III.22	Tracé de la zone d'instabilité du système bi-rotor à partir de la position des points singuliers sur la nappe du rotor $R_1$ en situation contra-rotative. . . . .	119
III.23	Tracé de la zone instable du système bi-rotor sur une nappe du rotor $R_2$ en co-rotatif présentant un phénomène vibratoire particulier. . . . .	120
IV.1	Oscillateur à deux degrés de liberté avec frotteur . . . . .	132
IV.2	Loi de frottement régularisée par une fonction tangente hyperbolique. . . . .	133
IV.3	Influence du nombre d'harmoniques temporelles sur les réponses forcées de la masse 1 (gauche) et de la masse 2 (droite). $N_h = 1$ ( $\text{---}$ ), $N_h = 3$ ( $\text{---}$ ), $N_h = 5$ ( $\circ\circ\circ$ ), $N_h = 7$ (***) . . . . .	134
IV.4	Influence de l'amplitude des efforts extérieurs sur la réponse forcée des masses 1 (à gauche) et 2 (à droite). Comportement linéaire collé ( $\text{---}$ ), comportement linéaire glissant ( $\text{---}$ ). . . . .	135
IV.5	Adaptation de la procédure d'AFT en tenant compte de l'écriture en base modale et des changements de repères. . . . .	140
IV.6	Structure de la matrice de projection dans le domaine fréquentiel présentée pour un nombre d'harmoniques temporelles et spatiales restreint. . . . .	141
IV.7	Positionnement des frotteurs dans la direction radiale sur le modèle EF d'anneau à 3 secteurs. . . . .	145
IV.8	Déformées modales d'harmonique spatiale 2 de l'anneau en situation sans frotteur à gauche et frotteurs collés à droite. Configuration non-déformée ( $\text{---}$ ), configuration déformée ( $\text{---}$ ). . . . .	145
IV.9	Courbes de réponse en fréquence d'un anneau normalisée par l'effort extérieur, pour différents niveaux d'excitation. Comparaison entre résolutions fréquentielles ( $\text{---}$ ) et temporelles ( $\circ\circ\circ$ ). . . . .	146
IV.10	Positionnement du frotteur en pied d'aube de la première roue aubagée dans la direction axiale. . . . .	147
IV.11	Déformées modales du premier mode à 2 diamètres en configurations libre et collée. . . . .	148

IV.12	Tracé de la résonance associée au mode propre collé en fonction de la base libre choisie	149
IV.13	Comportement vibratoire dans la direction axiale et au niveau d'un frotteur de la roue $R_1$ (sans couplage) pour différentes valeurs d'excitation. Comportement linéaire collé (—), comportement linéaire glissant (—).	150
IV.14	Réponse forcée dans la direction axiale et en bout d'aube des rotors $R_1$ (gauche) et $R_2$ (droite) pour différentes valeurs d'excitation. Comportement linéaire collé (—), comportement linéaire glissant (—).	151
IV.15	Schéma de L' <i>Ultra High Bypass Ratio Integral Drive</i> développé par Safran et comportant une gearbox entre le fan et le reste de l'arbre BP.	153
IV.16	Schéma d'un réducteur à engrenages ou gearbox.	153
IV.17	Deux solutions technologiques envisageables pour réaliser la gearbox couplant le fan et l'arbre BP.	154
IV.18	Modélisation simplifiée de la gearbox à l'aide d'anneaux et de raideurs.	155
IV.19	Représentation de la ligne d'action dans un engrenage.	155
IV.20	Notations utilisées dans le modèle simplifié de gearbox.	156
IV.21	Structure de la matrice de couplage en base modale $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{int},12}$ pour une gearbox à 5 satellites.	159
IV.22	Diagramme permettant d'établir les couplages d'harmoniques spatiales transmises par la gearbox en fonction du nombre de satellites $N_s$ . Exemple pour une gearbox à 5 satellites.	160
IV.23	Superposition des harmoniques spatiales d'ordres compatibles dans le cas d'une gearbox possédant 5 satellites.	161
IV.24	Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Couplage par une gearbox, excitation à 3 sillages. Intégration temporelle de l'équation de départ (—), résolution fréquentielle de l'équation projetée (.....).	164
IV.25	Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Couplage par une gearbox, excitation à 5 sillages. Intégration temporelle de l'équation de départ (—), résolution fréquentielle de l'équation projetée (.....).	165
IV.26	Déplacements radiaux au cours du temps d'un nœud de chaque anneau. Couplage par une gearbox, excitation à 7 sillages. Intégration temporelle de l'équation de départ (—), résolution fréquentielle de l'équation projetée (.....).	166
E.1	Notations pour l'élément hexaédrique SOLID185 d'ANSYS.	187

# Liste des tableaux

III.1 Pulsations propres ( $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) en configurations séparée et couplée du premier mode propre à 2 diamètres des deux rotors pour chaque modélisation étudiée : roues aubagées, modèle EF d'anneaux ou modèle continu Rayleigh-Ritz d'anneaux. . .	105
IV.1 Valeurs numériques utilisées pour l'oscillateur à 2 ddl . . . . .	132
IV.2 Caractéristiques associées à chaque base modale testée. . . . .	149
IV.3 Calcul analytique des sommes de produits de fonctions trigonométriques en fonction des multiplicités de leurs harmoniques $m$ et $n$ . . . . .	158
IV.4 Déformées des deux anneaux en fonction du nombre de sillages de l'excitation appliquée en entrée d'une gearbox à 5 satellites. Configuration non-déformée (—), configuration déformée (—), délimitation des secteurs (---). . . . .	168



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. A. BATAILLY

Professeur - Polytechnique Montréal - Département de Génie Mécanique - Local A107.2  
CP 6079 - succ. Centre-ville - Montréal (Québec) - Canada H3C 3A7

et de

M. S. COGAN

Chargé de Recherche HDR - FEMTO-ST - Département Mécanique Appliquée  
24 chemin de l'épitaphe - 25000 Besançon

**Madame DUMARTINEIX Cécile**

est autorisée à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 16 décembre 2019

P/Le directeur de l'E.C.L.  
Le directeur des Etudes

