



**HAL**  
open science

# Modélisation multi-échelle de la diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles

Justine Labat

► **To cite this version:**

Justine Labat. Modélisation multi-échelle de la diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2019. Français. NNT : 2019PAUU3023 . tel-03066216

**HAL Id: tel-03066216**

**<https://theses.hal.science/tel-03066216v1>**

Submitted on 15 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





*Pour Roland Michel*





## REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'assister à ma soutenance de thèse et de faire partie de mon jury. Je remercie particulièrement Habib Ammari, Éric Bonnetier et Benjamin Stamm qui ont tous trois accepté de rapporter sur ma thèse, y ont apporté leur expertise scientifique, leurs remarques et leurs commentaires pertinents sur le sujet. Je remercie également Monique Dauge d'avoir accepté de présider ce jury et pour les diverses questions qu'elle a pu soulevé au cours de ma thèse – je pense notamment à mon premier rapport de recherche. Une mention particulière va à Benjamin que j'ai eu l'occasion de rencontrer à une conférence internationale et qui m'a, par la suite, invité à l'Université d'Aix-La-Chapelle durant une semaine, afin d'initier une collaboration scientifique. Une seconde mention particulière va à Agnès Pujols que j'ai rencontré dans une conférence nationale et qui m'a offert l'opportunité de poursuivre en post-doctorat au CEA-Cesta.

Je tiens à exprimer mes remerciements et toute ma gratitude à l'ensemble des personnes qui m'ont aidé et guidé durant ces trois années et qui ont fait que ce projet puisse être réalisé. Ma première pensée va à mon directeur de thèse, Sébastien Tordeux, qui a toujours été présent et disponible et qui m'a accordé sa confiance en me donnant l'opportunité de réaliser cette thèse. Son expertise scientifique et ses compétences ont été largement exploitées et je le remercie pour sa persévérance et sa volonté de me les transmettre. Je tiens également à remercier mon co-directeur de thèse, Victor Péron, pour ses conseils, sa rigueur et ses encouragements qui ont parfaitement complété cet encadrement. Je ne peux parler de mes directeurs de thèse sans citer l'équipe-projet Magique 3D et en particulier, la directrice de recherche, Hélène Barucq, qui m'a chaleureusement accueillie au sein de l'équipe, pour mon stage de fin d'études en premier

---

abord, puis en thèse. J'ai spécifiquement apprécié son tempérament, son implication et sa volonté de former une équipe unie et soudée ; cela permettant implicitement un travail efficace dans un environnement sain et prospère. Je tiens également à remercier Julien Diaz qui a toujours été présent dans n'importe quelle circonstance et Ha Howard-Faucher qui m'a beaucoup appris grâce à ses nombreuses et pertinentes questions. Une pensée pour, comme nous les appelons, « les bordelais », et tout particulièrement à Marc Duruflé qui a pris le temps et eu la patience de m'initier à son code de calcul éléments finis. Merci également à l'ensemble des doctorants actuels, Aurélien, Chengyi, Pierre, Rose, Nathan, Stéfano et Vinduja, mais aussi aux anciens, Florian, Ajalar, Marie, Izar, Mamadou et Elvira – surtout Florian sinon il va dire que nous l'oublions – qui ont fait de cette aventure un plaisir à vivre.

Le dernier paragraphe mais pas des moindres, est dédié à ma famille et mes amis. Tous ceux qui ne font pas partie du cadre du travail et qui m'ont soutenu et supporté au cours de ces trois années, dans les meilleurs moments comme dans les pires. Ce sont ceux-là qui font de moi qui je suis, me rappellent d'où je viens et me guident vers là où je vais.

## RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Dans ce projet, nous développons des méthodes numériques de résolution rapide, précise et efficace qui permettent de prendre en compte, dans des configurations tri-dimensionnelles, les phénomènes de diffraction d'ondes électromagnétiques en régime harmonique par une multitude d'obstacles, dans le cadre de calcul à basses et moyennes fréquences.

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans un cadre à basses fréquences et nous nous intéressons à une modélisation multi-échelle du phénomène de diffraction des ondes électromagnétiques par des obstacles dont la taille caractéristique est petite en comparaison avec la longueur d'onde. Nous mettons en œuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés qui s'avère vraiment efficace dans le cadre de la réduction de modèles, appliquée à l'électromagnétisme. Deux types de développements se distinguent : les approximations en champ proche ou quasi-statiques qui décrivent le phénomène à l'échelle microscopique et celles en champ lointain qui décrivent le phénomène à *grande distance*. Dans ce dernier contexte, les petits obstacles ne sont plus considérés comme des contraintes géométriques et peuvent être modélisés par des sources ponctuelles équivalentes que sont les multipôles électromagnétiques.

Dans un second temps, nous nous plaçons dans un cadre à moyennes fréquences ; le domaine de calcul faisant quelques dizaines de longueurs d'ondes. Nous mettons en place une méthode spectrale pour le problème de diffraction multiple des ondes électromagnétiques par de multiples sphères. Cette méthode est basée sur la discrétisation d'une formulation par équations intégrales de frontière dans des bases locales et tangentielles, composées des fonctions harmoniques sphériques vectorielles. Il apparaît que les modèles réduits peuvent être adaptés au régime moyennes fréquences en incorporant

---

des corrections non-triviales dictées par la théorie de Mie et portant sur les fonctions de jauge associées aux termes successifs des développements asymptotiques. Nous présentons une comparaison de ces différents modèles illustrant leur précision.

Toutefois, la prise en compte d'un grand nombre d'hétérogénéités peut s'avérer coûteuse en termes de temps de calcul, mais surtout d'utilisation de la mémoire. Pour pallier cette difficulté, nous implémentons un algorithme astucieux pour la résolution itérative des problèmes linéaires induits, sans jamais avoir à assembler de manière globale les matrices associées à la discrétisation.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à l'électromagnétisme</b>	<b>7</b>
1.1 Formulation des équations . . . . .	8
1.1.1 Quantités physiques . . . . .	8
1.1.2 Lois de constitution . . . . .	10
1.1.3 Les équations de Maxwell . . . . .	11
1.1.4 Force électromagnétique . . . . .	13
1.1.5 Note sur les sources magnétiques . . . . .	15
1.2 Propagation en régime harmonique . . . . .	16
1.2.1 Les équations harmoniques . . . . .	16
1.2.2 Les équations réduites . . . . .	18
1.2.3 Propagation dans l'espace libre . . . . .	19
1.2.4 Note sur les sources magnétiques : suite . . . . .	21
1.3 La théorie du potentiel . . . . .	22
1.3.1 Représentation des champs électromagnétiques . . . . .	22
1.3.2 Invariance de jauge . . . . .	23
1.3.3 Expression des potentiels . . . . .	25
1.4 Les sources multipolaires . . . . .	26
1.4.1 Définitions et propriétés . . . . .	26
1.4.2 Dipôle électrique . . . . .	29

1.4.3	Quadripôle électrique . . . . .	33
1.4.4	Note sur les multipôles magnétiques . . . . .	39
1.5	Conclusion . . . . .	41
<b>I Modélisation asymptotique de la diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles</b>		<b>43</b>
<b>2</b>	<b>La diffraction par de petits obstacles</b>	<b>45</b>
2.1	Le problème de diffraction . . . . .	48
2.1.1	La source . . . . .	48
2.1.2	La géométrie . . . . .	49
2.1.3	Les conditions de frontière . . . . .	50
2.1.4	Formulation du problème . . . . .	50
2.1.5	Existence et unicité de la solution . . . . .	52
2.2	Les développements asymptotiques . . . . .	54
2.2.1	Les développements raccordés . . . . .	57
2.2.2	Les développements multi-échelles . . . . .	62
2.3	Les modèles réduits de diffraction multiple . . . . .	65
2.4	Conclusion . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Les développements asymptotiques raccordés</b>	<b>71</b>
3.1	Construction des développements . . . . .	72
3.1.1	Rappel des notations . . . . .	72
3.1.2	Algorithme de construction . . . . .	74
3.1.3	Existence et unicité des termes des développements asymptotiques	80
3.2	Justification du raccord . . . . .	84
3.2.1	Décomposition modale harmonique . . . . .	84
3.2.2	Décomposition modale statique . . . . .	86
3.2.3	Décomposition modale emboîtée . . . . .	88
3.2.4	Raccord des solutions . . . . .	91
3.3	Premiers termes . . . . .	93
3.3.1	Lemmes préliminaires . . . . .	93
3.3.2	Cas sphérique . . . . .	94
3.3.3	Cas général . . . . .	107
3.4	Conclusion . . . . .	110

<b>4 Applications des développements asymptotiques raccordés</b>	<b>113</b>
4.1 Interprétation physique . . . . .	114
4.1.1 Développement interne . . . . .	114
4.1.2 Développement externe . . . . .	117
4.2 Modèles réduits pour la diffraction simple . . . . .	118
4.2.1 Les modèles collectés . . . . .	119
4.2.2 Les modèles modifiés . . . . .	120
4.3 La diffraction multiple . . . . .	122
4.3.1 Approximation de Born . . . . .	123
4.3.2 Modèle de Foldy-Lax . . . . .	124
4.4 Conclusion . . . . .	128
<b>5 Résultats numériques</b>	<b>129</b>
5.1 Validation des développements asymptotiques raccordés . . . . .	130
5.1.1 Description des tests numériques . . . . .	130
5.1.2 Convergence en champ proche . . . . .	137
5.1.3 Convergence en champ lointain . . . . .	139
5.2 Validation des modèles réduits pour la diffraction multiple . . . . .	143
5.2.1 Description des tests numériques . . . . .	143
5.2.2 Comparaison des modèles asymptotiques . . . . .	146
5.2.3 Comparaison des surfaces équivalentes radar . . . . .	152
5.3 Conclusion . . . . .	153
<b>II Méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple : Justification et résolution itérative rapide</b>	<b>157</b>
<b>6 Théorie de Mie généralisée à la diffraction multiple</b>	<b>159</b>
6.1 Le problème de diffraction multiple . . . . .	161
6.1.1 La géométrie . . . . .	161
6.1.2 Formulation du problème . . . . .	163
6.1.3 Note sur l'espace des champs tangents sur la sphère . . . . .	163
6.2 La diffraction par une sphère . . . . .	166
6.2.1 Potentiels de Debye et de Hertz . . . . .	166
6.2.2 Décomposition modale des champs électromagnétiques . . . . .	168
6.2.3 Décomposition modale d'une onde plane . . . . .	169
6.2.4 Formalisme de Xu (1995) . . . . .	170



6.3	Méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple . . . . .	171
6.3.1	Décomposition modale du champ diffracté . . . . .	172
6.3.2	Le lemme de translation à deux centres . . . . .	173
6.3.3	Calcul des coefficients de translation . . . . .	177
6.3.4	Comparaison avec la littérature . . . . .	180
6.4	Conclusion . . . . .	181
<b>7</b>	<b>Méthode d'équations intégrales pour la diffraction multiple en électromagnétisme</b>	<b>183</b>
7.1	Représentation intégrale de Stratton-Chu . . . . .	184
7.1.1	Rappel des notations . . . . .	184
7.1.2	Opérateurs intégraux volumiques . . . . .	185
7.1.3	Représentation intégrale . . . . .	186
7.1.4	Décomposition modale des potentiels électromagnétiques . . . . .	187
7.2	Équations intégrales de frontière . . . . .	189
7.2.1	Prolongement de la solution . . . . .	189
7.2.2	Opérateurs intégraux de frontière . . . . .	191
7.2.3	Formulation faible de l'équation intégrale . . . . .	192
7.2.4	Discrétisation de l'équation intégrale . . . . .	194
7.3	Formulation dans le cas sphérique . . . . .	195
7.3.1	Discrétisation . . . . .	195
7.3.2	Normalisation . . . . .	199
7.3.3	Systèmes linéaires . . . . .	201
7.4	Justification de la méthode . . . . .	205
7.4.1	Existence et unicité des problèmes continus . . . . .	206
7.4.2	Stabilité et convergence . . . . .	209
7.4.3	Cas des petits obstacles . . . . .	210
7.4.4	Équivalence avec la méthode de Mie généralisée . . . . .	211
7.5	Conclusion . . . . .	211
<b>8</b>	<b>Implémentation : Accélération algorithmique et réduction matérielle</b>	<b>213</b>
8.1	La résolution . . . . .	214
8.1.1	Rappel des notations . . . . .	214
8.1.2	Résolution directe . . . . .	215
8.1.3	Résolution itérative . . . . .	215
8.1.4	Stratégie . . . . .	216

8.2	Le préconditionnement . . . . .	219
8.2.1	Préconditionnement des systèmes . . . . .	219
8.2.2	Conditionnement des matrices . . . . .	222
8.2.3	Densité et extraction . . . . .	227
8.3	Le stockage et l'assemblage . . . . .	235
8.3.1	Stockage par bloc . . . . .	235
8.3.2	Assemblage des matrices « blocs » . . . . .	244
8.3.3	Action du produit matrice-vecteur . . . . .	247
8.4	Conclusion . . . . .	250
<b>9</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>251</b>
9.1	Validation numérique : convergence . . . . .	252
9.1.1	Description des tests numériques . . . . .	252
9.1.2	Ordre de la méthode . . . . .	256
9.1.3	Comparaison avec des solutions aux éléments finis . . . . .	259
9.1.4	Comparaison avec les modèles asymptotiques . . . . .	265
9.2	Résolution pour un grand nombre d'obstacles . . . . .	267
9.2.1	Description des tests numériques . . . . .	267
9.2.2	Comparaison des surfaces équivalentes radar . . . . .	270
9.2.3	Convergence des solveurs itératifs . . . . .	274
9.3	Coûts de calcul . . . . .	277
9.3.1	Comparaison avec les modèles asymptotiques . . . . .	277
9.3.2	Comparaison avec les éléments finis . . . . .	278
9.4	Conclusion . . . . .	280
	<b>Conclusion générale</b>	<b>281</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>304</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>306</b>



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'électromagnétisme est un secteur de recherche très actif car il est présent dans de nombreux domaines. En astronomie, les signaux électromagnétiques sont les seuls (hormis les quelques mesures d'ondes gravitationnelles) que nous recevons depuis l'espace lointain et qui nous donnent des informations sur l'origine de l'Univers et des galaxies. C'est pour cette raison que les États ont développé de grands instruments de mesure astronomique comme le Très Grand Télescope (ou *Very Large Telescope* en anglais) ou le télescope spatial *Hubble*. La compréhension des phénomènes électromagnétiques a eu un rôle essentiel dans les révolutions industrielles à partir du XIX-ème siècle, à travers la production massive d'électricité et la possibilité de communiquer sur de longues distances grâce aux signaux radio. À partir de la seconde moitié du XX-ème siècle, elle a permis l'essor des technologies de communications avec les signaux TV, la téléphonie, la fibre optique *et cetera*. Ces usages se sont développés d'abord dans le cadre d'applications militaires (communication, furtivité, détection radar) puis se sont généralisés à l'ensemble des domaines civils avec le four à micro-ondes, les IRM (imagerie par résonance magnétique) ou les *smartphones*.

L'utilisation massive d'émetteurs est aussi un sujet de controverse, né de la sensibilisation de la population aux effets du rayonnement électromagnétique, et par conséquent, un sujet de santé publique. Les pouvoirs publics ont besoin d'informations précises pour définir des normes acceptées par le plus grand nombre afin de limiter les dangers pour la santé. D'autre part, la multiplication des appareils émettants perturbe le bon fonctionnement des appareils électroniques et c'est aussi un sujet sensible et de sûreté, par exemple dans les hôpitaux. Nous parlons d'étude de compatibilité électromagnétique. En complément des études sur bancs d'essai électromagnétiques, il s'avère nécessaire de

développer des méthodes numériques pour modéliser les phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques.

Les phénomènes électromagnétiques sont réellement des phénomènes multi-échelles. Le spectre électromagnétique héberge plusieurs types de rayonnement : les rayons Gamma, les rayons X, les rayons ultra-violet, la lumière visible, les rayons infra-rouges et les ondes radio. Les rayons Gamma sont caractérisés par les ondes de longueur inférieure à 10 picomètres. Ils sont produits par des transitions *nucléaires*, c'est-à-dire une modification structurelle au niveau des nucléons, au cœur des noyaux atomiques. Les rayons X sont caractérisés par les ondes dont la longueur est comprise entre 10 picomètres et 10 nanomètres. Ils sont produits par des transitions *électroniques*, c'est-à-dire le passage d'un électron d'un niveau d'énergie à un autre ; et sont fréquemment utilisés dans le domaine de l'imagerie médicale. Les rayons ultra-violet sont caractérisés par les ondes de longueur comprise entre 10 et 400 nanomètres et proviennent principalement du Soleil. Le domaine du visible est caractérisé par les ondes de longueur comprise entre 400 et 800 nanomètres, comprenant toutes les couleurs de l'arc-en-ciel. Les rayons infra-rouges sont caractérisés par les ondes de longueur comprise entre 800 nanomètres et 0.1 millimètre. Ils produisent de l'énergie thermique et sont utilisés dans le domaine du contrôle non-destructif, en *thermographie infrarouge*. Enfin, les ondes radio qui ont une longueur comprise entre 1 millimètre et 30 kilomètres, servent à transporter l'information.

Le domaine de propagation peut être très grand ou peut contenir des objets de petite taille vis-à-vis de la longueur d'onde. La discrétisation de ces problèmes est donc ardue et il n'est pas possible de simuler l'ensemble de ces phénomènes multi-échelles à l'aide d'une même méthode numérique. On distinguera les méthodes hautes fréquences des méthodes basses et moyennes fréquences. Les méthodes basses fréquences fourniront une très bonne qualité d'approximation de la solution mais sur un domaine ne comportant que quelques longueurs d'ondes tandis que les méthodes hautes fréquences, qui sont une extension de l'optique géométrique, permettent de considérer de très grandes scènes de calcul. La prise en compte d'objets de petite taille en termes de longueurs d'ondes est aussi complexe et nécessite le développement de modèles réduits.

La modélisation multi-échelle a mobilisé la communauté scientifique, avec une attention particulière des mathématiciens appliqués portée à la théorie de l'analyse asymptotique. Nous pensons notamment à l'homogénéisation qui s'intéresse aux domaines

périodiques, la théorie des couches limites qui s'intéresse aux revêtements et aux effets de peau et les développements asymptotiques singuliers qui s'intéressent entre autres aux phénomènes ponctuels.

Dans cette thèse, nous nous intéresserons au développement de modèles réduits pour la prise en compte d'une multitude de petits obstacles dans le cadre du développement de code de calcul basses mais surtout moyennes fréquences ; l'objectif étant de développer des codes de calcul à la fois rapides et précis. Il s'agit d'un travail méthodologique pour démontrer l'efficacité des développements asymptotiques raccordés dans le cadre de la réduction de modèles appliqué à l'électromagnétisme. Ce sujet trouve pourtant de nombreuses applications dont la modélisation des peintures utilisées dans le domaine de la furtivité, qui sont imprégnées de microscopiques billes métalliques et permettent d'éviter des réflexions totales et monodirectionnelles par le fuselage.

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe Magique 3D dont les activités visent au développement, à l'analyse et à l'implémentation de modèles réduits et de méthodes numériques dans le cadre de la simulation d'ondes adaptés au calcul haute performance. Le projet Magique 3D a notamment pour objectif d'appliquer ces méthodes numériques à la résolution du problème inverse, à la conception d'instruments et à la calibration de modèles. Notre travail se situe uniquement au niveau du solveur direct rapide mais a bénéficié de cette expertise.

## Plan du manuscrit

Cette thèse contient un premier chapitre introductif sur l'électromagnétisme puis deux parties concernant d'une part la modélisation asymptotique de la diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles et d'autre part la modélisation spectrale par équations intégrales de frontière de la diffraction multiple des ondes électromagnétiques par de multiples sphères.

Les deux premiers chapitres introduisent le problème de diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles. Dans le Chapitre 1, nous présentons les équations de Maxwell sous leur forme harmonique, que nous utiliserons tout au long de ce manuscrit. La décomposition en potentiels des champs électromagnétiques permet de développer des expressions analytiques pour les champs électromagnétiques générés en la

présence de sources ponctuelles électromagnétiques dans l'espace libre : les multipôles électromagnétiques. Dans le Chapitre 2, nous présentons le problème de Maxwell posé dans le domaine de propagation qui est le domaine extérieur à un obstacle dont la taille caractéristique est très petite devant la longueur d'onde. Dans le cadre de la diffraction simple, les méthodes d'analyse asymptotiques sont décrites et comparées formellement avec une attention particulière pour les développements asymptotiques raccordés qui sera au cœur de notre projet. Nous présentons enfin le principe de la théorie de Foldy pour la prise en compte des phénomènes de diffraction multiple.

Nous présentons la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le Chapitre 3 et nous y détaillons les résultats d'existence et d'unicité des problèmes vérifiés par les termes successifs des développements. Nous explicitons les premiers termes des développements asymptotiques dans le cadre d'obstacles de forme arbitraire à l'aide des tenseurs de polarisabilité électrique et de polarisabilité magnétique et nous menons le calcul analytique des trois premiers termes associés à chacun des développements dans le cas d'un obstacle sphérique. Dans le Chapitre 4, les obstacles sont modélisés par des sources multipolaires équivalentes qui mènent à des développements identiques. Nous développons des modèles réduits dipolaires pour le problème du petit obstacle que nous étendons à l'aide de la théorie de Foldy au problème de diffraction multiple. Le Chapitre 5 présente la validation numérique des développements asymptotiques et des modèles réduits pour la diffraction multiple. Les résultats numériques sont en accord avec la théorie fournie dans la littérature.

Nous introduisons le problème de diffraction multiple par des obstacles non nécessairement petits en comparaison avec la longueur d'onde dans le Chapitre 6. Nous rappelons les principes de la théorie de Mie pour la diffraction par une sphère et présentons la méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple, introduite par Yu-Lin Xu en 1995. Cette méthode est équivalente à la discrétisation d'une méthode d'équations intégrales de frontière appliquée au problème de diffraction multiple par de multiples sphères, dans la base des harmoniques sphériques vectorielles, faisant l'objet du Chapitre 7. Cette méthode spectrale mène également à des approximations équivalentes aux modèles asymptotiques dans le cadre des petits obstacles et d'obstacles de taille comparable à la longueur d'onde. Toutefois, dans le cadre de moyens et grands obstacles, la stabilité du problème est garantie seulement si nous excluons les fréquences de résonance associées aux problèmes intérieurs volumiques locaux.

La méthode spectrale hérite des propriétés des méthodes d'équations intégrales de frontière et en particulier, engendre des matrices denses. Cela a évidemment des répercussions en termes de coût de calcul et notamment pour l'utilisation de la mémoire. Dans le Chapitre 8, nous nous adonnons donc à des problématiques d'algèbre linéaire. Nous mettons en place un préconditionnement associé aux systèmes linéaires issus de la méthode spectrale, avec des illustrations numériques à l'appui. Cela est pratiquement impossible dans le cadre de méthodes volumiques. Nous définissons un procédé de résolution itérative évitant l'assemblage des parties denses du problème. Ces considérations, qui, après étude structurelle, s'appliquent tout aussi bien aux modèles réduits, permettent de réduire drastiquement les coûts de calcul comme cela est présenté dans le Chapitre 9. Il y a toutefois – et comme souvent – un compromis à faire en termes de stockage mémoire et temps de calcul. Par ailleurs, la méthode spectrale est validée numériquement à l'aide de solutions éléments finis.

## Production bibliographique

Durant cette thèse, un article a été publié et un rapport de recherche rédigé concernant les modèles réduits pour la diffraction simple :

« Equivalent multipolar point-source modeling of small spheres for fast and accurate electromagnetic wave scattering computations. » avec Victor Péron et Sébastien Tordeux. (2020) *Wave Motion*, 82 :102409.

« Asymptotic modeling of the electromagnetic scattering by small spheres perfectly conducting. » avec Victor Péron et Sébastien Tordeux. (2019) Rapport de Recherche n° 9169.

De plus, nous prévoyons d'écrire un article sur les modèles réduits pour la diffraction multiple par une multitude d'obstacles.

Nous listons également les séminaires extérieurs, les conférences et les *expanded abstracts* :

« Equivalent point-source modeling of small obstacles for electromagnetic waves. » avec Victor Péron et Sébastien Tordeux. *Book of Abstracts WAVES 2019*. 14th In-



ternational Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Vienne, Autriche, 2019.

« Asymptotic models for the multiple electromagnetic wave scattering problem by small obstacles. » JOSO 2019. Le Barp, France, 2019.

« The multiple electromagnetic wave scattering by small spheres. » Séminaire de MATHCCES, RWTH Aachen University. Aix-La-Chapelle, Allemagne, 2018.

« Asymptotic modeling of the multiple electromagnetic wave scattering by small spheres. » ECCM-ECFD 2018. Glasgow, Écosse, 2018.

« Foldy-Lax model for the scattering problem in electromagnetism. » 5th International congress on Multiphysics, Multiscale and Optimization Problems. Bilbao, Espagne, 2018.

« On the scattering of small of electromagnetic waves by small bodies. » Séminaire de la Caléta Numérica, Pontificia Universidad Catolica de Valparaíso. Valparaíso, Chili, 2017.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION À L'ÉLECTROMAGNÉTISME

### Sommaire

<b>1.1 Formulation des équations</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1.1 Quantités physiques . . . . .	8
1.1.2 Lois de constitution . . . . .	10
1.1.3 Les équations de Maxwell . . . . .	11
1.1.4 Force électromagnétique . . . . .	13
1.1.5 Note sur les sources magnétiques . . . . .	15
<b>1.2 Propagation en régime harmonique</b> . . . . .	<b>16</b>
1.2.1 Les équations harmoniques . . . . .	16
1.2.2 Les équations réduites . . . . .	18
1.2.3 Propagation dans l'espace libre . . . . .	19
1.2.4 Note sur les sources magnétiques : suite . . . . .	21
<b>1.3 La théorie du potentiel</b> . . . . .	<b>22</b>
1.3.1 Représentation des champs électromagnétiques . . . . .	22
1.3.2 Invariance de jauge . . . . .	23
1.3.3 Expression des potentiels . . . . .	25
<b>1.4 Les sources multipolaires</b> . . . . .	<b>26</b>
1.4.1 Définitions et propriétés . . . . .	26
1.4.2 Dipôle électrique . . . . .	29
1.4.3 Quadripôle électrique . . . . .	33
1.4.4 Note sur les multipôles magnétiques . . . . .	39
<b>1.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>41</b>

Une *onde* est la propagation d'une perturbation entraînant une variation des propriétés physiques locales du milieu. Il existe trois principaux types d'ondes :

- les ondes mécaniques, comme les ondes acoustiques ou sismiques, correspondant au déplacement d'une perturbation mécanique dans la matière,
- les ondes électromagnétiques, comme la lumière, correspondant aux oscillations périodiques des champs électromagnétiques générés par des particules chargées,
- les ondes gravitationnelles correspondant à la propagation de déformations de la géométrie de l'espace-temps.

Contrairement aux ondes mécaniques, les ondes électromagnétiques ne nécessitent pas de support matériel pour se propager. Il convient de distinguer le *rayonnement électromagnétique* de l'onde électromagnétique, introduite pour modéliser le phénomène de rayonnement. Les rayonnements électromagnétiques sont classés en fonction de leur longueur d'onde, mesurée en mètres (m), dans le *spectre électromagnétique*.

## 1.1 Formulation des équations

Les équations de Maxwell, qui régissent la théorie de l'électromagnétisme, fournissent une représentation mathématique de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu donné. Elles ont été introduites en 1873 sous leur forme intégrale par James Clerk Maxwell (1831-1879) dans *A treatise on Electricity and Magnetism*. En s'appuyant principalement sur les travaux de Carl F. Gauss (1777-1855) ([Gauss, 1813](#)) et Michael Faraday (1791-1867) ([Faraday, 1832](#)), James C. Maxwell parvient à compléter et unifier la théorie de l'électromagnétisme.

« *When I translated what I considered to be Faraday's ideas into a mathematical form I found that in general the results of the two methods coincided [...]* » ([Maxwell, 1873](#))

Le lecteur pourra se référer aux travaux de [Landau et Lifshitz \(1960\)](#), [John D. Jackson \(1962\)](#), [Richard P. Feynman et al. \(1979\)](#) et [François A. Reuse \(2012\)](#) pour une présentation plus détaillée de la théorie de l'électromagnétisme.

### 1.1.1 Quantités physiques

La théorie macroscopique des champs électromagnétiques fait intervenir un champ électrique  $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$  mesuré en Volt par mètre ( $\text{Vm}^{-1}$ ), un champ magnétique  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$  mesuré en Ampère par mètre ( $\text{Am}^{-1}$ ), un champ de déplacement électrique  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, t)$  mesuré

en Coulomb par mètre carré ( $\text{Cm}^{-2}$ ) et un champ d'induction magnétique  $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$  mesuré en Tesla (T), évalués en chaque point de l'espace  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et à chaque temps  $t \in \mathbb{R}$ .

Les champs électromagnétiques sont générés par des particules chargées induisant un transfert d'énergie appelé courant. La distribution de charge est représentée par une densité scalaire de charge électrique  $\varrho(\mathbf{x}, t)$  mesurée en Coulomb par mètre cube ( $\text{Cm}^{-3}$ ) et le courant par une densité vectorielle de courant électrique  $\mathcal{J}(\mathbf{x}, t)$  mesurée en Ampère par mètre carré ( $\text{Am}^{-2}$ ). Dans un système isolé, les densités de charge électrique  $\varrho$  et de courant électrique  $\mathcal{J}$  vérifient le *principe de conservation de la charge*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{J} = 0, \quad (1.1)$$

où  $\frac{\partial}{\partial t}$  représente la dérivée partielle par rapport à la variable temporelle et  $\nabla \cdot$  désigne l'opérateur divergence.

La propagation dépend des propriétés du milieu traversé par l'onde. Les grandeurs physiques induisant des variations dans les champs électromagnétiques sont la permittivité électrique  $\varepsilon$  mesurée en Farad par mètre ( $\text{Fm}^{-1}$ ), la perméabilité magnétique  $\mu$  mesurée en Henry par mètre ( $\text{Hm}^{-1}$ ) et la conductivité électrique  $\sigma$  mesurée en Siemens par mètre ( $\text{Sm}^{-1}$ ). Ces grandeurs physiques interviennent dans les lois de constitution du milieu.

**Remarque 1.1.** Les unités énoncées correspondent aux unités du système international (SI) et sont récapitulées dans le tableau 1.1.

Quantité physique	Symbole	Unité SI	Unité SI de base
Champ électrique	$\mathcal{E}$	$\text{Vm}^{-1}$	$\text{kg m A}^{-1}\text{s}^{-3}$
Champ magnétique	$\mathcal{H}$	$\text{Am}^{-1}$	$\text{Am}^{-1}$
Déplacement électrique	$\mathcal{D}$	$\text{Cm}^{-2}$	$\text{A s m}^{-2}$
Induction magnétique	$\mathcal{B}$	T	$\text{kg A}^{-1}\text{s}^{-2}$
Densité de charge électrique	$\varrho$	$\text{Cm}^{-3}$	$\text{A s m}^{-3}$
Densité de courant électrique	$\mathcal{J}$	$\text{Am}^{-2}$	$\text{Am}^{-2}$
Permittivité électrique	$\varepsilon$	$\text{Fm}^{-1}$	$\text{A}^2\text{s}^4 \text{kg}^{-1}\text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique	$\mu$	$\text{Hm}^{-1}$	$\text{m kg s}^{-2}\text{A}^{-2}$
Conductivité électrique	$\sigma$	$\text{Sm}^{-1}$	$\text{A}^2\text{s}^3 \text{kg}^{-1}\text{m}^{-3}$
Potentiel électrique	$\mathcal{V}$	V	$\text{kg m}^2\text{A}^{-1}\text{s}^{-3}$
Potentiel magnétique	$\mathcal{A}$	$\text{Wb m}^{-1}$	$\text{kg m}^2\text{A}^{-1}\text{s}^{-2}$

TABLE 1.1 – Unités SI des quantités physiques intervenant en électromagnétisme.

### 1.1.2 Lois de consitution

Dans un milieu *linéaire*, le champ de déplacement électrique  $\mathcal{D}$  est relié au champ électrique  $\mathcal{E}$  et le champ d'induction magnétique  $\mathcal{B}$  au champ magnétique  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}. \quad (1.2)$$

La nature des grandeurs  $\varepsilon$  et  $\mu$  dépend de la nature du milieu. Dans un matériau linéaire, ce sont des matrices de taille  $3 \times 3$  définies positives, qui dépendent des variables spatio-temporelles  $\mathbf{x}$  et  $t$ ,

$$\varepsilon = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \mu = \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}, t).$$

Si de plus,

- le milieu est *homogène* (en espace) et *non-dispersif* (en temps), alors les tenseurs  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$  et  $\underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}, t)$  sont des matrices définies positives, constantes en espace et en temps  $\varepsilon = \underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\mu = \underline{\underline{\mu}}$ ,
- le milieu est *isotrope*, alors les tenseurs  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$  et  $\underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}, t)$  sont diagonalisables et admettent une valeur propre d'ordre 3 strictement positive,  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbb{I}_3$  et  $\mu = \mu_0 \mu_r \mathbb{I}_3$ , où  $\mathbb{I}_3$  désigne la matrice identité d'ordre 3, les constantes  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  désignent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide,

$$\varepsilon_0 \approx 8.854\,187 \cdot 10^{-12} [\text{Fm}^{-1}] \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{Hm}^{-1}]$$

et  $\varepsilon_r > 0$ ,  $\mu_r > 0$  désignent respectivement les permittivité électrique et perméabilité magnétique relatives au matériau.

Dans un milieu linéaire, homogène, non-dispersif et isotrope, les relations (1.2) sont des relations de proportionnalité avec  $\varepsilon > 0$  et  $\mu > 0$ .

Dans un milieu dit *ohmique* de conductivité électrique  $\sigma \geq 0$ , la densité de courant électrique  $\mathcal{J}$  peut être décomposée en un courant extérieur  $\mathcal{J}_a$  appliqué au système et, d'après la loi d'Ohm, un courant proportionnel au champ électrique  $\mathcal{E}$ ,

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}_a. \quad (1.3)$$

Cette relation constitutive s'applique dans un milieu linéaire, homogène, non-dispersif et isotrope dans lequel les variations relatives du champ électrique au cours du temps sont faibles à l'échelle microscopique.

**Hypothèse 1. Condition sur le milieu**

Dans cette thèse, nous étudierons la propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux linéaires, homogènes, non-dispersifs, isotropes et ohmiques.

Le milieu sera *conducteur* si la conductivité électrique  $\sigma$  du matériau qui le compose est strictement positive. Ce sont des milieux dans lesquels les charges électriques sont libres de se déplacer comme les métaux ou les plasmas. Le milieu sera *diélectrique* si la conductivité électrique  $\sigma$  du matériau qui le compose est nulle, ce qui est par définition un isolant électrique. Parmi les diélectriques, nous retrouvons entre autres le vide, l'air (sec) ou le verre.

**1.1.3 Les équations de Maxwell**

Les équations de Maxwell sont issues de lois fondamentales de la physique classique permettant de décrire l'électrodynamique des milieux. Elles sont constituées de deux équations vectorielles et deux équations scalaires qui mettent en jeu les champs électromagnétiques  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , le champ de déplacement électrique  $\mathcal{D}$  et le champ d'induction magnétique  $\mathcal{B}$ .

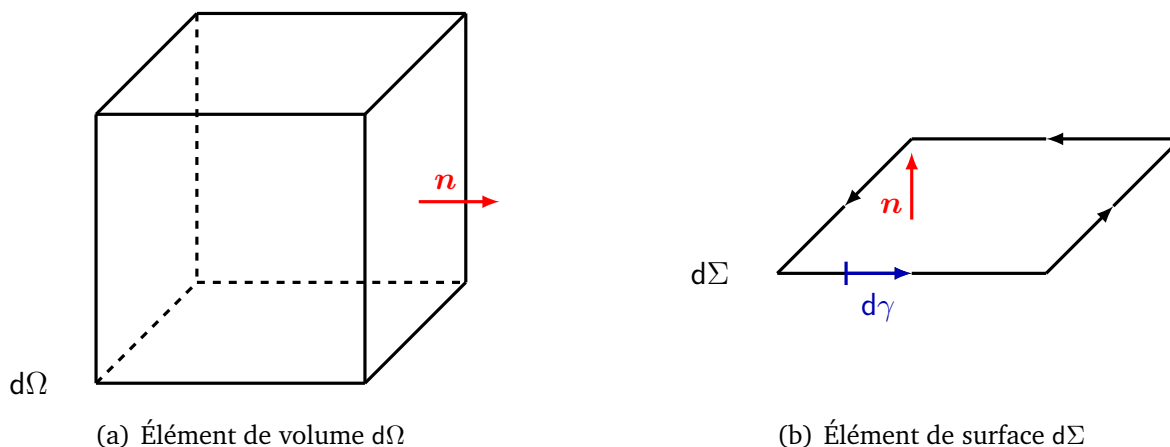
Nous considérons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  borné, régulier et nous notons  $d\Omega$  son élément de volume,  $\Gamma$  sa frontière (orientée),  $d\Gamma$  l'élément de surface associé et  $\mathbf{n}$  le champ de vecteurs normal dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ . La Figure 1.1 illustre la géométrie considérée. La loi de Gauss caractérise le flux du champ de déplacement électrique à travers de la surface fermée  $\Gamma$ ,

$$\int_{\Gamma} \mathcal{D} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \varrho \, d\Omega. \quad (1.4)$$

Le théorème de Green-Ostrogradski (George Green, 1793-1841 et Mikhaïl Ostrogradski, 1801-1862) permet d'obtenir une relation portant sur la divergence du déplacement,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathcal{D} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathcal{D} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (1.5)$$

Nous considérons à présent un domaine  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ , borné, régulier et nous notons  $d\Sigma$  son élément de surface,  $\mathbf{n}$  le champ de vecteurs normal dirigé dans « le sens du courant »,  $\gamma$  sa frontière (orientée) et  $d\gamma$  le champ de vecteurs tangent au chemin  $\gamma$ . La Figure 1.1 illustre la géométrie considérée. Les lois d'induction de Faraday et de


 FIGURE 1.1 – Illustration des éléments de volume  $d\Omega$  et de surface  $d\Sigma$ .

Maxwell-Ampère rendent compte des phénomènes d'induction électromagnétique,

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{n} d\Sigma, \quad \int_{\gamma} \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot \boldsymbol{n} d\Sigma + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\mathcal{D}} \cdot \boldsymbol{n} d\Sigma. \quad (1.6)$$

La loi d'Ampère est devenue la loi de Maxwell-Ampère après l'introduction du courant dans l'équation. Le théorème de Stokes (George G. Stokes, 1819-1903) permet d'obtenir des relations portant sur le rotationnel du champ électrique et du champ magnétique,

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot \boldsymbol{n} d\Sigma = \int_{\gamma} \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{\gamma}, \quad \int_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}}) \cdot \boldsymbol{n} d\Sigma = \int_{\gamma} \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot d\boldsymbol{\gamma}. \quad (1.7)$$

**Remarque 1.2.** *L'utilisation des formules de Green et de Stokes, ainsi que la simple utilisation de signes intégrales, suggère une certaine régularité des champs électromagnétiques et des champs de déplacement électrique et d'induction magnétique. La théorie mathématique des équations de Maxwell fait intervenir des espaces de type Sobolev mettant en jeu les opérateurs rotationnel et divergence. Nous rappellerons le cadre fonctionnel et variationnel des équations de Maxwell dans la Section 2.1.5.*

Les égalités (1.4) et (1.5), respectivement (1.6) et (1.7) étant vérifiées pour tout domaine  $\Omega$  et pour toute surface  $\Sigma$ , nous obtenons les équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \varrho, \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{J}}, \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0.$$

**Remarque 1.3.** La dernière équation du système est une conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday, en notant que  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ . Nous notons que l'équation de Maxwell-Gauss peut aussi être obtenue à l'aide des équations de Maxwell-Ampère et de la conservation de la charge (1.1).

Les lois constitutives (1.2) du milieu permettent de réduire le nombre de variables de ce système d'équations en y substituant la relation de proportionnalité associant le déplacement électrique et l'induction magnétique aux champs électromagnétiques,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathcal{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathcal{J} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = 0. \quad (1.8)$$

Il est de plus possible d'éliminer le champ électrique ou le champ magnétique des équations précédentes en concédant des équations du second ordre,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathcal{H}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \mathcal{J}, \quad (1.9)$$

où  $c = (\varepsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$  désigne la vitesse de l'onde dans le milieu. Lorsque l'une des deux équations du second ordre est considérée, avec la formulation électrique ou magnétique, le champ n'intervenant pas dans l'équation peut être calculé à l'aide de l'équation du premier ordre faisant intervenir sa dérivée temporelle.

**Remarque 1.4.** Les équations (1.9) sont des équations d'ondes vectorielles. En notant que  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ , nous retrouvons l'opérateur classique de l'équation des ondes, appelé l'opérateur d'Alembertien, agissant composante par composante,

$$-\Delta \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho, \quad -\Delta \mathcal{H} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \mathcal{J}.$$

### 1.1.4 Force électromagnétique

La force de Lorentz (Hendrick Lorentz, 1853-1928) exercée par un champ électromagnétique sur une particule chargée de charge électrique  $q$  se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{v}$ , résulte localement de la densité de force

$$\mathcal{F}_u = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}).$$

Elle est la superposition d'une densité de force électrique  $q\mathbf{E}$  et d'une densité de force magnétique  $q(\mathbf{v} \times \mathcal{B})$ . Cette formule se généralise à une densité continue de charge



électrique  $\rho$  en notant que la densité de courant  $\mathcal{J}$  est proportionnelle à la vitesse  $\mathbf{v}$  des particules. La densité de force électromagnétique est alors donnée par

$$\mathcal{F} = \rho \mathcal{E} + \mathcal{J} \times \mathcal{B}.$$

Nous considérons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  borné, régulier et nous notons  $d\Omega$  son élément de volume,  $\Gamma$  sa frontière (orientée),  $d\Gamma$  l'élément de surface associé et  $\mathbf{n}$  le champ de vecteurs normal dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ . La Figure 1.1 illustre la géométrie considérée. À un instant fixé, le travail  $W(\Omega)$  de la force électromagnétique, mesuré en Joules (J), est l'énergie fournie pour déplacer l'ensemble des particules chargées dans le domaine  $\Omega$ ,

$$W(\Omega) = \int_{\Omega} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega.$$

Puisque  $(\mathcal{J} \times \mathcal{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ , nous remarquons que seule la force électrique travaille

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{J} \cdot \mathcal{E} \, d\Omega.$$

À l'aide de l'équation issue de (1.8), le travail peut être exprimé en fonction de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ ,

$$W(\Omega) = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathcal{H}) \cdot \mathcal{E} \, d\Omega - \varepsilon \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \cdot \mathcal{E} \, d\Omega.$$

En appliquant le théorème de Green qui s'écrit, pour deux champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  réguliers,

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma,$$

faisant apparaître des densités de flux surfaciques, puis en injectant l'expression de  $\nabla \times \mathcal{E}$  issue de (1.8), la première intégrale s'écrit

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathcal{H}) \cdot \mathcal{E} \, d\Omega = -\mu \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \cdot \mathcal{H} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathcal{H}) \cdot \mathcal{E} \, d\Gamma.$$

En remarquant de plus que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \cdot \mathcal{E} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |\mathcal{E}|^2 \, d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \cdot \mathcal{H} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |\mathcal{H}|^2 \, d\Omega,$$

nous obtenons l'équation de conservation de l'énergie dans un champ électromagnétique, donnée par le théorème de Poynting (John Henry Poynting, 1852-1914),

$$\frac{d}{dt}E(\Omega) = -W(\Omega) + \int_{\Gamma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  désigne le *vecteur de Poynting* mesuré en Watt par mètre carré ( $\text{Wm}^{-2}$ ). Ce vecteur indique la direction de propagation de l'onde électromagnétique. L'énergie totale  $E(\Omega)$  du champ électromagnétique est donnée par

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu |\mathbf{H}|^2 + \varepsilon |\mathbf{E}|^2) \, d\Omega.$$

Enfin, grâce au théorème de Stokes (1.7) et comme les égalités sont vérifiées pour tout domaine  $\Omega$ , nous obtenons la formulation locale

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu |\mathbf{H}|^2 + \varepsilon |\mathbf{E}|^2) + \mathcal{J} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S} = 0.$$

### 1.1.5 Note sur les sources magnétiques

Bien que les sources magnétiques n'existent pas en physique classique, il est toujours possible d'introduire ces quantités fictives, analogiquement aux sources et constantes électriques, dans les équations de Maxwell.

*« Il n'y a ni courant, ni charge magnétique [...]. La considération de ces quantités fictives permet de simplifier certains problèmes de modélisation. » (Bendali, 2013).*

Il s'agit de considérer une densité de charge magnétique  $\varrho_m(\mathbf{x}, t)$  et une densité de courant magnétique  $\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)$  vérifiant un principe de conservation de la charge analogue à (1.1),

$$\frac{\partial \varrho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{M} = 0.$$

Ces quantités apparaissent comme des termes sources dans les équations suivantes, issues des équations (1.8),

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathcal{M} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\varrho_m}{\mu}.$$

Les conséquences de l'introduction de ces nouvelles quantités peuvent être répercutées dans les seconds membres des équations de Maxwell temporelles du second ordre,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} &= -\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{M}} - \mu \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{J}}}{\partial t}, \\ \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t^2} &= \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{J}} - \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{M}}}{\partial t}.\end{aligned}$$

## 1.2 Propagation en régime harmonique

En régime *harmonique*, l'onde se propage de manière sinusoïdale dans le temps à une même fréquence. L'analyse mathématique concernant les équations de Maxwell temporelles et les équations harmoniques est sensiblement différente.

### 1.2.1 Les équations harmoniques

En régime harmonique, par exemple [Colton et Kress \(1998\)](#), nous considérons les solutions particulières des équations de Maxwell admettant une dépendance harmonique en temps de la forme

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}, t) = \text{Re} [\exp(-i\omega t) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x})], \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x}, t) = \text{Re} [\exp(-i\omega t) \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x})], \quad (1.11)$$

où  $i$  est le nombre complexe unitaire tel que  $i^2 = -1$  et  $\omega$  désigne la pulsation de l'onde,

$$\omega = 2\pi f, \quad (1.12)$$

où  $f > 0$  est la fréquence mesurée en Hertz (Hz).

**Remarque 1.5.** Par définition une onde harmonique, ou monochromatique, est décrite par une fonction sinusoïdale dans le temps  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0(\boldsymbol{x}) \cos(\omega t - \varphi(\boldsymbol{x}))$ , où  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0(\boldsymbol{x})$  désigne le module et  $\varphi(\boldsymbol{x})$  désigne la phase, au point  $\boldsymbol{x}$ . La présence de la phase permet de caractériser le fait que l'amplitude maximale du champ évalué en deux points distincts de l'espace n'est pas atteint en un même instant. Toutefois, cette formulation n'est pas utilisée dans la littérature et l'on préfère plonger le problème dans le plan complexe en posant  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0(\boldsymbol{x}) \exp(i\varphi(\boldsymbol{x}))$ . Cela est expliqué en détail dans Abderrahmane [Bendali \(2013\)](#).

La séparation des variables temporelle  $t$  et spatiale  $\mathbf{x}$  permet de ré-exprimer les dérivées temporelles sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}[-i\omega \exp(-i\omega t)\mathcal{E}(\mathbf{x})], & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}[-\omega^2 \exp(-i\omega t)\mathcal{E}(\mathbf{x})], \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}[-i\omega \exp(-i\omega t)\mathcal{H}(\mathbf{x})], & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}[-\omega^2 \exp(-i\omega t)\mathcal{H}(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

L'hypothèse supplémentaire d'une dépendance harmonique en temps des termes sources,

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}[\varrho(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)], \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}[\mathcal{J}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)],$$

permet d'obtenir des équations aux dérivées partielles en espace vérifiées par les phaseurs  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{H}(\mathbf{x})$  associés aux champs électromagnétiques. Ces équations sont obtenues en substituant les expressions (1.11) et (1.13) dans les équations (1.8) puis en divisant par  $\exp(-i\omega t)$  de part et d'autre des égalités,

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad \nabla \times \mathcal{E} - i\omega\mu\mathcal{H} = 0, \quad \nabla \times \mathcal{H} + i\omega\varepsilon\mathcal{E} = \mathcal{J}, \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = 0.$$

**Remarque 1.6.** Dans la suite, nous confondrons systématiquement champ et phaseur.

Enfin, en appliquant la loi d'Ohm donnée par (1.3), nous obtenons les équations de Maxwell harmoniques du premier ordre,

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad \nabla \times \mathcal{E} - i\omega\mu\mathcal{H} = 0, \quad \nabla \times \mathcal{H} + (i\omega\varepsilon - \sigma)\mathcal{E} = \mathcal{J}_a \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = 0. \quad (1.14)$$

De la même manière, à partir des équations (1.9), nous obtenons les équations de Maxwell harmoniques du second ordre,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) - \kappa^2 \mathcal{E} = i\omega\mu\mathcal{J}_a, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathcal{H}) - \kappa^2 \mathcal{H} = \nabla \times \mathcal{J}. \quad (1.15)$$

Lorsque l'une des deux formulations du second ordre est considérée, le champ n'intervenant pas dans l'équation peut être retrouvé à l'aide des équations issues de (1.14),

$$\mathcal{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{i\omega\varepsilon - \sigma} (\mathcal{J}_a - \nabla \times \mathcal{H}).$$

Dans les équations (1.15),  $\kappa \in \mathbb{C}$  désigne le nombre d'onde complexe associé à la propagation des ondes, vérifiant la relation de dispersion

### Hypothèse 2. Condition sur le nombre d'onde

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon} \right), \quad \text{avec } \operatorname{Re}[\kappa] > 0 \text{ et } \operatorname{Im}[\kappa] \geq 0.$$

Le nombre d'onde  $\kappa$  est réel si et seulement si la conductivité électrique  $\sigma$  du milieu est nulle. Lorsque le nombre d'onde  $\kappa$  admet une partie imaginaire strictement positive, le matériau a des pertes diélectriques c'est-à-dire qu'il absorbe de l'énergie par effet Joule. Un tel milieu, dit *absorbant*, peut être décrit en introduisant une permittivité électrique complexe  $\varepsilon_c$  associée à une vitesse d'onde complexe  $c_c$ , telles que

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}, \quad \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c_c^2}.$$

La considération ou non d'un milieu absorbant aura des répercussions concernant l'analyse du problème de Maxwell. Dans un milieu diélectrique, il est toujours possible d'introduire un terme de *viscosité artificielle*, c'est-à-dire une partie imaginaire strictement positive au nombre d'onde réel, vouée à tendre vers zéro,

$$\kappa_\epsilon = \kappa + i\epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (1.16)$$

Cela permet de stabiliser le comportement des solutions du problème considéré grâce aux « bonnes » propriétés de l'opérateur  $\nabla \times (\nabla \times \cdot) - \kappa^2$  issu de (1.15), lorsque  $\kappa$  admet une partie imaginaire strictement positive – voir encore Section 2.1.5.

## 1.2.2 Les équations réduites

Il est possible de symétriser les équations (1.14) comme par exemple dans Colton et Kress (1998) et Monk (2003), en imposant une normalisation des champs électromagnétiques de la forme

$$\alpha \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \varepsilon_c^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(\mathbf{x}), \quad \alpha \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mu^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}(\mathbf{x}), \quad (1.17)$$

où  $\alpha > 0$  désigne un facteur introduit dans le but de supprimer les unités des équations. Nous supposons que son carré  $\alpha^2$  est mesuré en Pascal (Pa,  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$ ) de sorte que les champs de vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  soient sans unité

$$1 \text{ Pa}^{-\frac{1}{2}} (\text{F}^{\frac{1}{2}} \text{m}^{-\frac{1}{2}}) (\text{Vm}^{-1}) = 1 = 1 \text{ Pa}^{-\frac{1}{2}} (\text{H}^{\frac{1}{2}} \text{m}^{-\frac{1}{2}}) (\text{Am}^{-1}).$$

Nous renvoyons le lecteur à la Table des unités 1.1. En injectant la normalisation (1.17) dans les équations (1.14) puis en posant

$$\alpha\rho(\mathbf{x}) = \varepsilon_c^{-\frac{1}{2}}\varrho(\mathbf{x}), \quad \alpha\mathbf{J}_a(\mathbf{x}) = \varepsilon_c^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}_a(\mathbf{x}) \quad (1.18)$$

et enfin en divisant par  $\alpha$  de part et d'autre des égalités, nous obtenons les équations de Maxwell réduites du premier ordre

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa\mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\kappa\mathbf{E} = \frac{1}{c}\mathbf{J}_a \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (1.19)$$

De la même manière, à partir des équations (1.15), nous obtenons les équations de Maxwell réduites du second ordre,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \kappa^2\mathbf{E} = \frac{i\kappa}{c}\mathbf{J}_a, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \kappa^2\mathbf{H} = \frac{1}{c}\nabla \times \mathbf{J}_a. \quad (1.20)$$

Lorsque l'une des deux équations du second ordre est considérée, le champ n'intervenant pas dans l'équation peut être retrouvé à l'aide d'une équation du premier ordre,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\kappa}\nabla \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{i\kappa}\left(\frac{1}{c}\mathbf{J}_a - \nabla \times \mathbf{H}\right).$$

**Remarque 1.7.** L'équation de conservation de la charge (1.1) devient

$$-i\omega\rho + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho + \nabla \cdot \mathbf{J}_a = 0. \quad (1.21)$$

### 1.2.3 Propagation dans l'espace libre

Dans l'espace libre, nous devons imposer une condition portant sur le comportement des champs électromagnétiques à l'infini selon laquelle les ondes s'y dispersent. En électromagnétisme, cette condition de radiation appelée *condition de Silver-Müller*, est donnée par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}) = 0 \quad \text{uniformément en } \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad \text{où } r = |\mathbf{x}|. \quad (1.22)$$

Cette condition d'*onde sortante* implique qu'aucune énergie ne peut rayonner depuis l'infini. Cela est aussi relié à la notion de causalité lorsque nous parlons d'une solution en régime temporel. Pour les formulations du second ordre, nous utilisons généralement

une version faisant intervenir le champ et son rotationnel,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r ((\nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{x} - i\kappa \mathbf{E}) = 0 \quad \text{uniformément en } \hat{x}.$$

Il existe également des conditions d'ondes entrantes pour lesquelles le «  $-$  » est remplacé par un «  $+$  ». Théoriquement, l'une des deux conditions est nécessaire pour garantir l'unicité des champs électromagnétiques.

Dans l'espace libre, le champ électromagnétique sortant vérifiant (1.20) est calculé à partir du produit de convolution  $i\kappa \mathbb{G} * \mathbf{J}_a$  s'effectuant composante par composante,

$$(i\kappa \mathbb{G} * \mathbf{J}_a)_i = i\kappa \sum_{j=1}^3 \mathbb{G}_{ij} * (\mathbf{J}_a)_j, \quad \mathbb{G}_{ij} * (\mathbf{J}_a)_j(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{G}_{ij}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) (\mathbf{J}_a)_j(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.23)$$

Le produit de convolution fait intervenir la solution fondamentale (sortante)  $\mathbb{G}$  des équations de Maxwell, appelé *tenseur de Green* de Maxwell. Ce tenseur d'ordre 2, voir par exemple [Nédélec \(2001\)](#), est donné par

$$\mathbb{G} = G \mathbb{I} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla(\nabla \cdot G \mathbb{I}), \quad (1.24)$$

où  $\mathbb{I}$  désigne la matrice identité et  $G$  est la fonction de Green sortante associée à l'équation de Helmholtz (Hermann von Helmholtz, 1821-1894) qui est une fonction radiale donnée par

$$G(r) = \frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r}.$$

**Remarque 1.8.** *La fonction de Green  $G$  vérifie l'équation de Helmholtz*

$$-\Delta G - \kappa^2 G = \delta_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

où  $\delta_0$  désigne la distribution de Dirac en 0. Elle est définie au sens des distributions par

$$\langle \delta_a, f \rangle_{\mathbb{R}^3} = f(a), \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \forall a \in \mathbb{R}^3. \quad (1.25)$$

L'équation de Helmholtz est obtenue en considérant des solutions harmoniques de l'équation (scalaire) des ondes. L'opérateur d'Alembertien présenté en Remarque 1.4 devient ainsi  $-\Delta - \kappa^2$ . Elle vérifie de plus une condition d'onde sortante qui, pour l'équation de Helmholtz, n'est plus la condition de Silver-Müller mais la condition de Sommerfeld (Arnold

Sommerfeld, 1868-1951) donnée par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\partial_r G - i\kappa G) = 0 \quad \text{uniformément en } \hat{x}. \quad (1.26)$$

La condition de Silver-Müller est plus riche que cette dernière car elle permet de caractériser aussi le vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  introduit dans (1.10), voir par exemple [Bendali \(2013\)](#).

### 1.2.4 Note sur les sources magnétiques : suite

En régime harmonique, nous ajoutons une loi artificielle similaire à la loi d'Ohm (1.3) qui impose la création de courants magnétiques par le champ magnétique,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \sigma_m \mathcal{H}.$$

où  $\sigma_m \geq 0$  désigne la conductivité magnétique et  $\mathcal{M}_a$  la densité de courant magnétique extérieur appliqué au système. Alors, les équations « magnétiques » issues des équations harmoniques (1.14), deviennent

$$\nabla \times \mathcal{E} - (i\omega\mu - \sigma_m)\mathcal{H} = -\mathcal{M}_a \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = \frac{\rho_m}{\mu}.$$

En introduisant la perméabilité magnétique complexe  $\mu_c$  et un nouveau nombre d'onde complexe  $\kappa_m$  donnés par

$$\mu_c = \mu + \frac{i\sigma_m}{\omega}, \quad \kappa_m^2 = \kappa^2 \frac{\mu_c}{\mu},$$

nous obtenons les équations de Maxwell du second ordre muni de sources magnétiques,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) - \kappa_m^2 \mathcal{E} &= -\nabla \times \mathcal{M}_a + i\omega\mu_c \mathcal{J}_a, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathcal{H}) - \kappa_m^2 \mathcal{H} &= \nabla \times \mathcal{J}_a + i\omega\varepsilon_c \mathcal{M}_a. \end{aligned}$$

**Remarque 1.9.** Lorsque  $\sigma_m = 0$  alors  $\kappa_m = \kappa$ .

La dernière réduction consiste à supprimer les unités des équations. Il faut alors adapter les normalisations (1.17) et (1.18) en remplaçant la perméabilité magnétique réelle  $\mu$  par la perméabilité magnétique complexe  $\mu_c$  dans l'expression de  $\alpha\mathbf{H}$  et  $\alpha\mathbf{J}_a$ . En po-



sant par ailleurs

$$\alpha\rho_m(\mathbf{x}) = \mu_c^{-\frac{1}{2}}\varrho_m(\mathbf{x}), \quad \alpha\mathbf{M}_a(\mathbf{x}) = \mu_c^{-\frac{1}{2}}\mathcal{M}_a(\mathbf{x}),$$

les équations réduites (1.19) et (1.20) s'écrivent respectivement

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa_m \mathbf{H} = -\frac{1}{c}\mathbf{M}_a, \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\kappa_m \mathbf{E} = \frac{1}{c}\mathbf{J}_a \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu},$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \kappa_m^2 \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\nabla \times \mathbf{M}_a + \frac{i\kappa_m}{c}\mathbf{J}_a, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \kappa_m^2 \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\nabla \times \mathbf{J}_a + \frac{i\kappa_m}{c}\mathbf{M}_a. \end{aligned}$$

### 1.3 La théorie du potentiel

Les champs électromagnétiques sont directement associés aux forces, voir Section 1.1.4, tandis que les potentiels électromagnétiques sont plutôt associés aux énergies. Les phénomènes électromagnétiques peuvent être décrits de manière équivalente avec les champs ou les potentiels électromagnétiques. Ces derniers fournissent une représentation des champs électromagnétiques et permettent généralement de simplifier le problème considéré. Ils ont été introduits initialement pour appréhender les phénomènes d'électrostatique ou de magnétostatique mais leur utilisation a été étendue en régime temporel ou harmonique.

La théorie des potentiels électromagnétiques fait intervenir un potentiel scalaire électrique  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$  mesuré en Volt (V) et un potentiel vecteur magnétique  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$  mesuré en Weber par mètre ( $\text{Wb m}^{-1}$ ,  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2$ ).

#### 1.3.1 Représentation des champs électromagnétiques

Nous considérons les champs électromagnétiques  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  vérifiant les équations de Maxwell temporelles (1.8). Typiquement, un champ à divergence nulle peut être identifié au rotationnel d'un potentiel vecteur et un champ à rotationnel nul peut être identifié au gradient d'un potentiel scalaire. Cela provient de résultats de géométrie différentielle, voir par exemple De Rham (1973), et de la théorie de Hodge (1989), ayant été adaptés à l'analyse dans Amrouche *et al.* (1998) par exemple. Ainsi, les champs électro-

magnétiques admettent la décomposition suivante

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla\mathcal{V} - \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}). \quad (1.27)$$

Cela résulte du fait que le champ d'induction magnétique est à divergence nulle et qu'en substituant l'expression de  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  dans l'équation issue de (1.8), puis en utilisant la commutativité de la dérivée temporelle et de l'opérateur rotationnel, nous obtenons

$$\nabla \times \left( \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \right) = 0.$$

En régime harmonique, nous introduisons les phaseurs  $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$  et  $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})$  associés aux potentiels électromagnétiques par le biais de solutions particulières recherchées sous la forme

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{x}, t) = \text{Re} [\exp(-i\omega t)\mathcal{V}(\boldsymbol{x})], \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, t) = \text{Re} [\exp(-i\omega t)\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})]. \quad (1.28)$$

Une décomposition similaire des champs électromagnétiques a lieu. La dérivée temporelle est substituée par le facteur  $-i\omega$ ,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla\mathcal{V} + i\omega\boldsymbol{\mathcal{A}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}).$$

La dernière réduction consiste à normaliser les potentiels en posant

$$\alpha V(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_c^{\frac{1}{2}} \mathcal{V}(\boldsymbol{x}), \quad \alpha \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) = \mu^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}), \quad (1.29)$$

de sorte que la décomposition réduite s'écrive

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V + i\kappa\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \quad (1.30)$$

### 1.3.2 Invariance de jauge

Nous nous plaçons dans un cadre où les champs électromagnétiques sont définis de manière unique. En régime temporel, cela suggère de fixer un temps  $t_0 = 0$  et une condition initiale vérifiée par les champs électromagnétiques à l'instant  $t_0$  dans le domaine considéré. Dans l'espace libre, il s'agit de plus de considérer une condition de radiation à l'infini, dans un domaine borné, des conditions de frontière *admissibles* et les deux dans un domaine non-borné. Nous introduirons différentes conditions de frontière à la

Section 2.1.3.

Tels qu'ils sont définis dans la Section 1.3.1, les potentiels électromagnétiques ne sont pas uniques. Il est nécessaire d'ajouter une *condition de jauge* qui est une condition de compatibilité permettant de garantir l'unicité des potentiels électromagnétiques. La condition de *jauge de Lorenz* (Ludwig Lorenz, 1829-1891) généralement présentée dans le vide, peut être généralisée à un milieu vérifiant l'Hypothèse 1,

$$\nabla \cdot \mathcal{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = 0. \quad (1.31)$$

La représentation par potentiels (1.27) et les équations (1.8) vérifiées par les champs électromagnétiques permettent de déterminer des équations vérifiées par les potentiels électromagnétiques. Deux des quatre équations nous donnent

$$-\Delta \mathcal{V} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathcal{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathcal{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathcal{V} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = \mathcal{J}_a.$$

Nous déduisons à partir de (1.31) et de l'identité  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A}$  que les potentiels vérifient les équations d'ondes suivantes

$$-\Delta \mathcal{V} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad -\Delta \mathcal{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = \mu \mathcal{J}_a.$$

Les équations en régime harmonique sont des équations de Helmholtz, introduites à la Remarque 1.8,

$$-\Delta \mathcal{V} - \kappa^2 \mathcal{V} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad -\Delta \mathcal{A} - \kappa^2 \mathcal{A} = \mu \mathcal{J}_a. \quad (1.32)$$

La réduction consistant à substituer les expressions (1.18) et (1.29) dans (1.32) donne

$$-\Delta V - \kappa^2 V = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon} \rho, \quad -\Delta \mathbf{A} - \kappa^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_a.$$

**Remarque 1.10.** Lorsque la conductivité du milieu est négligeable devant sa permittivité et la fréquence angulaire de l'onde alors  $\varepsilon_c \approx \varepsilon$ . En particulier, dans un milieu diélectrique, nous avons  $\varepsilon_c = \varepsilon$ .

### 1.3.3 Expression des potentiels

Dans l'espace libre, les solutions *causales*, c'est-à-dire nulles jusqu'à l'instant initial, de l'équation des ondes sont connues sous le nom de solutions *retardées*, voir par exemple [Mattesi \(2014\)](#). Elles sont déterminées à partir de la fonction de Green  $G_t$  causale de l'équation des ondes scalaires définie au sens des distributions,

$$G_t(r, t) = \frac{\delta_{t-\frac{r}{c}}}{4\pi r}.$$

Les potentiels électromagnétiques, appelés potentiels retardés, sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon} G_t * \varrho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \\ \mathcal{A}(\mathbf{x}, t) &= \mu G_t * \mathcal{J}_a(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathcal{J}_a(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

où  $*$  désigne le produit de convolution en espace, composante par composante, défini par (1.23).

Les potentiels électromagnétiques en régime harmonique s'obtiennent de manière équivalente en considérant le produit de convolution faisant intervenir la fonction de Green de l'équation de Helmholtz, voir Remarque 1.8 ou en considérant la dépendance harmonique des sources dans (1.33) puis en identifiant les phaseurs issus avec (1.28),

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\varrho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\mathcal{J}_a(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

De même, les potentiels électromagnétiques réduits sont donnés par

$$V(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_c}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\mathbf{J}_a(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

(1.34)

**Remarque 1.11.** *En régime statique, les grandeurs considérées ne dépendent pas de la variable temporelle. Cela est aussi équivalent à considérer une fréquence angulaire  $\omega$  égale à zéro dans les expressions des champs (1.30) et des potentiels électromagnétiques (1.34).*

## 1.4 Les sources multipolaires

Les *multipôles* sont des sources électriques ou magnétiques qui génèrent des ondes électromagnétiques. Ils peuvent être considérés en régime temporel, en régime statique ou en régime harmonique. Un multipôle en régime non-stationnaire est composé de charges ponctuelles et de courants filiformes qui circulent entre les charges. Il est défini selon un procédé asymptotique qui consiste à faire tendre la distance entre les charges ponctuelles qui le composent vers zéro tandis que la valeur non signée des charges tend vers l'infini. Ce n'est plus tout à fait le cas en régime stationnaire. L'électrostatique est l'étude des champs électriques générés par des charges électriques statiques, c'est-à-dire qui ne dépendent pas du temps. Analogiquement, la magnétostatique est l'étude des champs magnétiques générés par des courants électriques statiques. Il n'y a pas de couplage entre les champs électromagnétiques.

Le calcul des champs électromagnétiques générés par des multipôles de bas ordre (dipôles et quadripôles) en régime statique ou harmonique est explicité dans [Jackson \(1962\)](#), [Brown \(2009\)](#) ou [Reuse \(2012\)](#). Toutefois, leur étude s'arrête avant le quadripôle électrique en régime harmonique. La considération des potentiels électromagnétiques est particulièrement adaptée au calcul analytique des champs électromagnétiques générés par des sources multipolaires.

Ces sources particulières fournissent des expressions analytiques des champs électromagnétiques lorsque nous les considérons dans l'espace libre. Dans la Section 4.1, de telles sources sont utilisées pour modéliser de petits objets diffractants.

### 1.4.1 Définitions et propriétés

Nous introduisons la définition mathématique d'un multipôle électrique et celle de l'approximation multipolaire des potentiels et des champs électromagnétiques. Les potentiels et les champs sont générés par des sources *idéales* qui sont des charges électriques ponctuelles et des courants électriques filiformes. La théorie des distributions se prête parfaitement à leur définition.

**Définition 1.1.** Une distribution de charge  $\varrho$  constituée de  $K$  charges électriques ponctuelles positionnées aux points  $c_k$  deux à deux distincts et d'amplitude  $q_k(t)$  peut être repré-

sentée par une combinaison linéaire de distributions de Dirac

$$\varrho(\cdot, t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) \delta_{c_k},$$

où  $\delta_{c_k}$  est définie au sens des distributions par (1.25).

En régime stationnaire, les charges électriques ne varient pas au cours du temps, c'est-à-dire les amplitudes  $q_k(t) = q_k$  sont constantes. Elles génèrent un champ électrique statique. Leur étude fait partie du domaine de l'électrostatique. En régime harmonique, les charges oscillent à la fréquence  $\omega$ . Leur amplitude admet la dépendance temporelle

$$q_k(t) = q_k \exp(-i\omega t).$$

Les charges oscillantes génèrent d'une part des courants électriques et d'autre part des champs électromagnétiques couplés admettant une dépendance harmonique en temps.

Un courant électrique filiforme est à la magnétostatique ce qu'une charge électrique ponctuelle est à électrostatique. Il peut être assimilé à un fil conducteur . . .

« . . . dans lequel circule un courant électrique et pour lequel la forme et les dimensions des diverses sections du fil n'interviennent pas lorsqu'on se livre à des considérations qui relèvent d'une échelle où les distances mises en jeu sont très supérieures aux dimensions de ces sections. » [Reuse \(2012\)](#).

**Définition 1.2.** Une distribution de courant électrique filiforme  $\mathcal{J}_a$  est décrite à l'aide d'une courbe continue orientée  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\gamma(0) = \mathbf{c}_-$  et  $\gamma(1) = \mathbf{c}_+$ , ouverte ou fermée, et d'une intensité  $I(t)$ . Elle peut être représentée par

$$\mathcal{J}_a(\cdot, t) = I(t)(\mathbf{c}_+ - \mathbf{c}_-)\delta_\gamma.$$

L'intensité  $I(t)$  est constante sur chaque section  $\Sigma_\gamma$  du fil  $\gamma \times \Sigma_\gamma$ ,

$$I(t) = \int_{\Sigma_\gamma} \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma_\gamma.$$

La Figure 1.2 illustre la définition d'un courant électrique filiforme. La distribution

de Dirac  $\delta_\gamma$  sur la courbe  $\gamma$  est définie au sens des distributions par

$$\langle \delta_\gamma, f \rangle_{\mathbb{R}^3} = \int_\gamma f(\mathbf{x}) d\gamma \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

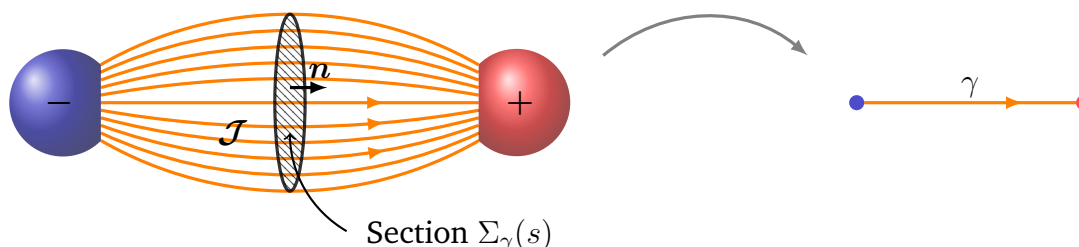


FIGURE 1.2 – Courant filiforme.

En régime stationnaire, l'intensité du courant électrique est constante au cours du temps  $I(t) = I$ . Un courant électrique filiforme stationnaire génère un champ magnétique statique. En régime harmonique, l'intensité admet une dépendance harmonique en temps de la forme  $\exp(-i\omega t)$  et, puisque la charge est conservée, nous avons

$$-i\omega q = I. \quad (1.35)$$

Un multipôle électrique d'ordre  $p \geq 1$  est caractérisé par la donnée de  $2^p$  charges électriques ponctuelles et de courants électriques filiformes reliant deux à deux les positions des charges négatives à celles des charges positives. En régime harmonique, nous parlons de multipôle oscillant. Le système est constitué de  $2^{p-1}$  charges positives  $+q(t)$  et de  $2^{p-1}$  charges négatives  $-q(t)$  telles que le point milieu entre le barycentre associé à l'ensemble des charges positives et celui associé à l'ensemble des charges négatives soit confondu avec l'origine. La Figure 1.3 montre la géométrie associée aux multipôles d'ordre 1, 2 et 3 respectivement appelés dipôle, quadrupôle et octopôle. Un tel système admet une charge totale nulle. En particulier, les systèmes globalement neutres sont caractérisés par leur *moment multipolaire*. Le moment multipolaire est directement relié à la géométrie considérée et définit complètement le multipôle. C'est un tenseur complexe d'ordre  $p$  avec  $2p + 1$  degrés de liberté. Nous présenterons les propriétés des moments dipolaires et moments quadrupolaires dans les Sections 1.4.2 et 1.4.3.

Le cadre de l'approximation multipolaire correspond à l'étude des potentiels et des champs électromagnétiques à *grande distance*, c'est-à-dire lorsque la distance entre les

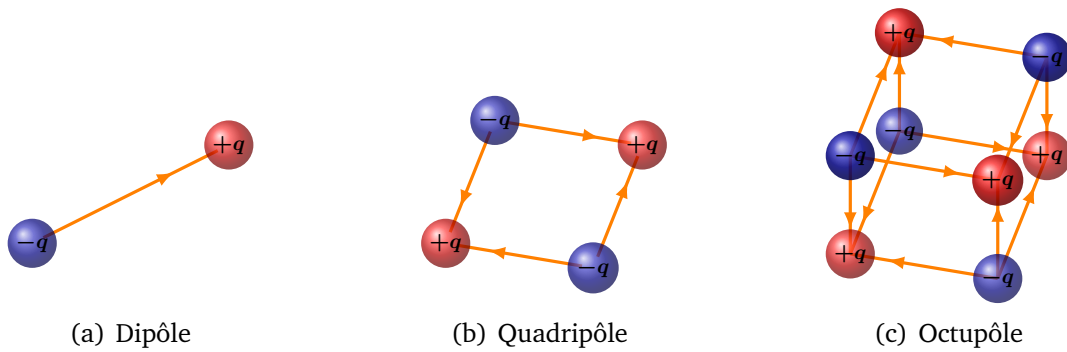


FIGURE 1.3 – Dipôle à gauche, quadripôle au milieu et octupôle à droite

charges est négligeable par rapport à la distance qui sépare le système de l'observateur. Ainsi, pour caractériser un multipôle d'ordre  $p \geq 1$ , nous émettons l'hypothèse d'une dépendance de la forme

$$q(t) = \frac{1}{\epsilon^p} q_0(t), \quad I(t) = \frac{1}{\epsilon^p} I_0(t), \quad \gamma^k = \epsilon \gamma_0^k,$$

où  $\epsilon > 0$  désigne un paramètre voué à tendre vers zéro. L'approximation multipolaire des potentiels et des champs consiste à effectuer leurs développements limités à l'ordre  $p$  suivant les puissances de  $\frac{\epsilon}{r}$  lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro.

## 1.4.2 Dipôle électrique

Nous étudions les approximations dipolaires des potentiels et des champs électromagnétiques générés par un dipôle électrique, qui est un multipôle électrique d'ordre 1. Nous donnons au préalable quelques propriétés concernant l'étude des dipôles électrostatiques comprenant les charges électriques ponctuelles ainsi que leur équivalent en magnétostatique avec la considération de courants électriques filiformes.

**Définition 1.3.** *Un dipôle électrostatique peut être caractérisé par un doublet de charges ponctuelles d'amplitude stationnaire  $-q$  et  $+q$  avec  $q > 0$ , positionnées respectivement en les points  $\mathbf{c}_- = -\mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}_+ = \mathbf{c}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Le moment dipolaire  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$  associé au système est donné par*

$$\mathbf{d} = q(\mathbf{c}_+ - \mathbf{c}_-).$$

**Remarque 1.12.** *En toute généralité, un dipôle électrique (qu'il soit statique ou oscillant) est caractérisé par son moment dipolaire  $\mathbf{d}$  qui est un élément de  $\mathbb{C}^3$ . Lorsque le dipôle est réel, c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ , le point de vue géométrique présenté dans la Définition*



1.3 caractérise complètement le dipôle. Un moment dipolaire complexe se traduit par un déphasage dans chacune des directions,

$$\mathbf{d} = \exp(i\tau_x[\mathbf{d}]) \mathbf{d}_x + \exp(i\tau_y[\mathbf{d}]) \mathbf{d}_y + \exp(i\tau_z[\mathbf{d}]) \mathbf{d}_z.$$

Un dipôle complexe est défini comme la superposition de trois dipôles réels asynchrones de moments respectifs  $\mathbf{d}_x$ ,  $\mathbf{d}_y$  et  $\mathbf{d}_z$ , où  $\mathbf{d}_x = |\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_x| \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{d}_y = |\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_y| \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{d}_z = |\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z| \mathbf{e}_z$  et  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$  sont respectivement les arguments de  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z$ , choisis dans l'intervalle  $(0, 2\pi)$ . Ainsi, l'interprétation géométrique d'un dipôle de moment complexe passe par sa décomposition dans une base de dipôles de moments réels. Nous notons que le choix de la base est arbitraire.

Dans le contexte de l'approximation dipolaire, nous supposons que la charge électrique  $q$  est donnée par  $q = \frac{q_0}{\epsilon}$  avec  $q_0 > 0$  et les points  $\mathbf{c}_+$  et  $\mathbf{c}_-$  sont tels que  $\mathbf{c}_+ = \frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0$  et  $\mathbf{c}_- = -\frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0$ . La distribution de charge  $\rho_\epsilon$  associée est donnée par

$$\rho_\epsilon = \frac{q_0}{\epsilon} \left( \delta_{\frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0} - \delta_{-\frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0} \right). \quad (1.36)$$

**Proposition 1.1.** Supposons que  $\sigma = 0$ . L'approximation dipolaire  $V_{stat}^{elec}[\mathbf{d}]$  du potentiel électrique statique est

$$V_{stat}^{elec}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad \text{avec } \mathbf{d} = q_0 \mathbf{c}_0,$$

celle du champ électrique statique  $\mathbf{E}_{stat}^{elec}[\mathbf{d}] = -\nabla V_{stat}^{elec}[\mathbf{d}]$  est donnée par

$$\mathbf{E}_{stat}^{elec}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^3} (3(\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}).$$

*Démonstration.* L'approximation dipolaire  $V_{stat}[\mathbf{d}]$  du potentiel électrique est obtenue en passant à la limite lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro dans le développement limité du potentiel électrique  $V_\epsilon$  généré par le dipôle électrostatique à  $\epsilon > 0$  fixé. D'après l'expression (1.34) et la Remarque 1.11 sur le régime statique, le potentiel  $V_\epsilon$  généré par la distribution de charge ponctuelle  $\rho_\epsilon$  définie par (1.36), est donné par

$$V_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{\epsilon} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0|} \right). \quad (1.37)$$

En utilisant les développements limités à l'ordre 1 de  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ , de  $\sqrt{1 + X}$  et de  $\frac{1}{1+Y}$ , nous obtenons le développement limité de  $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|}$  donné par

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{r^2} + O_{\mathbf{a} \rightarrow 0}(|\mathbf{a}|^2) \right). \quad (1.38)$$

Ainsi, le potentiel électrique (1.37) admet le développement suivant

$$V_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{r^3} (\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{x}) + O_{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon).$$

L'expression du champ électrique  $\mathbf{E}_{\text{stat}}[\mathbf{d}]$  est obtenue en calculant  $-\nabla V_{\text{stat}}[\mathbf{d}]$ . □

Dans le contexte de l'approximation dipolaire, nous considérons le courant électrique filiforme  $\mathbf{J}_\epsilon$  stationnaire, d'intensité  $I = \frac{I_0}{\epsilon}$  avec  $I_0 > 0$  et d'extrémités disjointes  $\mathbf{c}_+ = \frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0$  et  $\mathbf{c}_- = -\frac{\epsilon}{2} \mathbf{c}_0$ . La distribution de courant  $\mathbf{J}_\epsilon$  s'écrit

$$\mathbf{J}_\epsilon = \frac{I_0}{\epsilon} \frac{\mathbf{c}_0}{|\mathbf{c}_0|} \delta_{\gamma_\epsilon} \quad \text{avec} \quad \gamma_\epsilon(s) = \frac{\epsilon}{2} (2s - 1) \mathbf{c}_0, \quad s \in [0, 1].$$

Nous sommes dans un cadre quasi-statique, l'étude des potentiel et champ en magnéto-statique considérant les courants fermés.

**Proposition 1.2.** *L'approximation dipolaire  $\mathbf{A}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h]$  du potentiel magnétique est donnée par*

$$\mathbf{A}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h](\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c r} \mathbf{d}_h, \quad \text{avec} \quad \mathbf{d}_h = I_0 \mathbf{c}_0,$$

où  $c$  désigne la vitesse de l'onde. L'approximation dipolaire  $\mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h] = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h]$  du champ magnétique est donnée par

$$\mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h](\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c r^2} (\mathbf{d}_h \times \hat{\mathbf{x}}).$$

*Démonstration.* Dans le cadre de l'approximation dipolaire, le potentiel magnétique  $\mathbf{A}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h]$  est obtenu en passant à la limite lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro dans le développement limité du potentiel magnétique  $\mathbf{A}_\epsilon$  généré par la distribution de courant  $\mathbf{J}_\epsilon$  avec  $\epsilon > 0$  fixé. D'après l'expression (1.34) et le développement limité (1.38), nous obtenons le développement du potentiel  $\mathbf{A}_\epsilon$

$$\mathbf{A}_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{I_0}{4\pi c \epsilon} \frac{\mathbf{c}_0}{|\mathbf{c}_0|} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{|\mathbf{x} - t\mathbf{c}_0|} |\mathbf{c}_0| dt = \frac{I_0}{4\pi c r} \mathbf{c}_0 + O_{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon).$$

L'expression du champ magnétique  $\mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h]$  est obtenue en calculant  $\nabla \times \mathbf{A}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_h]$ .  $\square$

En régime harmonique, le dipôle électrique est appelé dipôle électrique oscillant. Il est composé de deux charges électriques ponctuelles  $-q$  et  $+q$  diamétralement opposées, reliées par un courant électrique filiforme vérifiant le principe de conservation de la charge (1.35).

**Proposition 1.3.** *Supposons que  $\sigma = 0$ . Les approximations dipolaires  $V^{\text{elec}}[\mathbf{d}]$  et  $\mathbf{A}^{\text{elec}}[\mathbf{d}]$  des potentiels électromagnétiques générés par un dipôle électrique oscillant de moment  $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$  sont données par*

$$V^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{i\kappa^2}{4\pi} h_1^{(1)}(\kappa r) \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{\kappa^2}{4\pi} h_0^{(1)}(\kappa r) \mathbf{d},$$

où les fonctions  $h_n^{(1)}$  désignent les fonctions de Hankel sphériques de première espèce dont la définition est donnée dans la Proposition 6.2. Les approximations dipolaires  $\mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}]$  et  $\mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}]$  des champs électromagnétiques sont données par

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = -\frac{\kappa^3}{4\pi} \left[ \tilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{d} \times \hat{\mathbf{x}})) + 2 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \right], \\ \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = -\frac{\kappa^3}{4\pi} h_1^{(1)}(\kappa r) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}), \end{cases}$$

où la fonction de Hankel  $\tilde{h}_n^{(1)}$  est définie par (6.16).

**Remarque 1.13.** *En remplaçant les fonctions de Hankel par leurs valeurs, nous avons*

$$V^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r} \left( \frac{1}{r} - i\kappa \right) (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{A}^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = -\frac{i\kappa \exp(i\kappa r)}{4\pi r} \mathbf{d}, \quad (1.39)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r} \left[ \left( -\frac{1}{r^2} + \frac{i\kappa}{r} + \kappa^2 \right) (\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{d} \times \hat{\mathbf{x}})) + 2 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa}{r} \right) (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \right], \\ \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r} \left( \frac{i\kappa}{r} + \kappa^2 \right) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}). \end{cases}$$

*Démonstration.* Supposons que  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ . L'approximation dipolaire  $V[\mathbf{d}]$  du potentiel électrique en régime harmonique est obtenue en passant à la limite lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro dans le développement limité de  $V_\epsilon$  généré par un dipôle électrique oscillant de

moment  $\mathbf{d}$ . D'après (1.34), nous avons

$$V_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{\epsilon} \left( \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0|)}{|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0|} - \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0|)}{|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0|} \right). \quad (1.40)$$

À l'aide du développement limité (1.38) et celui de  $\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{a}|)$  donné par

$$\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{a}|) = \exp(i\kappa r) \left( 1 - \frac{i\kappa(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})}{r} + O_{a \rightarrow 0}(|\mathbf{a}|^2) \right),$$

nous obtenons le développement limité de  $\frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{a}|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}$  donné par

$$\begin{aligned} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{a}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} &= \frac{\exp(i\kappa r)}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{r^2} + O_{a \rightarrow 0}(|\mathbf{a}|^2) \right) \left( 1 - i\kappa \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{r} + O_{a \rightarrow 0}(|\mathbf{a}|^2) \right), \\ &= \exp(i\kappa r) \left( \frac{1}{r} - \frac{i\kappa}{r^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{r^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + O_{a \rightarrow 0}(|\mathbf{a}|^2) \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ainsi, le potentiel électrique (1.40) admet le développement

$$V_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{i\kappa}{r^2} \right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} + O_{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon),$$

qui correspond avec (1.39). L'approximation dipolaire  $\mathbf{A}[\mathbf{d}]$  du potentiel magnétique en régime harmonique est donnée par le passage à la limite lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro du développement limité de  $\mathbf{A}_\epsilon$  généré par un dipôle électrique oscillant de moment  $\mathbf{d}$ . D'après (1.34) et (1.41), nous avons

$$\mathbf{A}_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{I_0}{4\pi c \epsilon} \frac{\mathbf{c}_0}{|\mathbf{c}_0|} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - t\mathbf{c}_0|)}{|\mathbf{x} - t\mathbf{c}_0|} dt = \frac{I_0}{4\pi c} \frac{\exp(i\kappa r)}{r} \mathbf{c}_0 + O_{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon).$$

De plus, puisque  $I_0 = -i\omega q_0 \mathbf{d}$  d'après (1.35),  $\mathbf{d} = q_0 \mathbf{c}_0$  et  $\kappa = \frac{\omega}{c}$ , nous obtenons à la limite le potentiel  $\mathbf{A}[\mathbf{d}]$ . Les approximations dipolaires  $\mathbf{E}[\mathbf{d}]$  et  $\mathbf{H}[\mathbf{d}]$  des champs électromagnétiques sont obtenus à l'aide des relations (1.30). Le résultat pour  $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$  est le même par linéarité des expressions, par rapport au moment  $\mathbf{d}$ .  $\square$

### 1.4.3 Quadripôle électrique

Nous étudions les approximations quadripolaires des potentiels et des champs électromagnétiques générés par un quadripôle qui est un multipôle d'ordre 2. Un quadripôle est défini par son moment quadripolaire qui est un tenseur d'ordre 2, c'est-à-dire une matrice  $3 \times 3$ . Comme pour le cas du dipôle, nous pouvons introduire le quadripôle

suivant deux points de vue : un point de vue géométrique qui consiste à définir le quadripôle à partir de la géométrie considérée et un point de vue mettant en jeu le moment quadripolaire, sachant que le premier est beaucoup plus restrictif que le second. Nous introduisons quelques propriétés relatives au régime statique puis nous généralisons au cas du dipôle oscillant.

**Définition 1.4.** *Un quadripôle électrostatique peut être caractérisé par deux doublets de charges ponctuelles d'amplitude  $-q$  et  $+q$  avec  $q > 0$ , les charges positives étant positionnées en les points  $\mathbf{c}_+^1 = \mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_-^1 = -\mathbf{c}_1$  de  $\mathbb{R}^3$ , et les charges négatives en les points  $\mathbf{c}_+^2 = \mathbf{c}_2$  et  $\mathbf{c}_-^2 = -\mathbf{c}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $|\mathbf{c}_2| = |\mathbf{c}_1|$ . Le moment quadripolaire  $\mathbf{Q}$  associé au système est*

$$\mathbf{Q} = \frac{q}{2} (\mathbf{u}\mathbf{v}^\top + \mathbf{v}\mathbf{u}^\top), \quad (1.42)$$

où  $\mathbf{u} = \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$ .

**Remarque 1.14.** *Le moment quadripolaire  $\mathbf{Q}$  défini par (1.42) est un tenseur d'ordre 2 à valeurs réelles, symétrique, dont la trace est nulle. La symétrie est évidente. Par ailleurs, la trace de  $\mathbf{Q}$  est donnée par*

$$\text{Tr}(\mathbf{Q}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1) \cdot (\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1) = |\mathbf{c}_2|^2 - |\mathbf{c}_1|^2 = 0,$$

car  $|\mathbf{c}_1| = |\mathbf{c}_2|$ . Plus généralement, un quadripôle est défini à partir d'un tenseur  $\mathbf{Q}$  à valeurs complexes, symétrique et à trace nulle,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & -Q_{11} - Q_{22} \end{pmatrix}.$$

Il admet cinq degrés de liberté  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$ ,  $Q_{22}$  et  $Q_{23}$  appartenant à  $\mathbb{C}$ . Il peut être décomposé dans une base de quadripôles asynchrones dont les moments quadripolaires sont à valeurs réelles,

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^5 Q_k \exp(i\tau_k[\mathbf{Q}]) \mathbf{Q}_k.$$

Une base de tenseurs quadripolaires réels ( $\mathbf{Q}_k$ ) est donnée par

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les amplitudes réelles  $Q_k$  sont les modules  $Q_1 = |Q_{11}|$ ,  $Q_2 = |Q_{22}|$ ,  $Q_3 = |Q_{12}|$ ,  $Q_4 = |Q_{13}|$  et  $Q_5 = |Q_{23}|$ . Les déphasages  $\tau_k[\mathbf{Q}]$  sont respectivement les arguments de  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$  et  $Q_{23}$  choisis dans l'intervalle  $(0, 2\pi)$ . Chaque moment quadripolaire réel issu de cette base admet une interprétation géométrique comme cela est présenté dans la Définition 1.4. En particulier, chaque tenseur élémentaire  $\mathbf{Q}_k$  se décompose sous la forme

$$\mathbf{Q}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^\top + \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^\top),$$

où les couples  $(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$  appartiennent à  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  et sont donnés par

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad (\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$(\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_4) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad (\mathbf{u}_5, \mathbf{v}_5) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Ces systèmes quadripolaires sont illustrés en Figure 1.4.

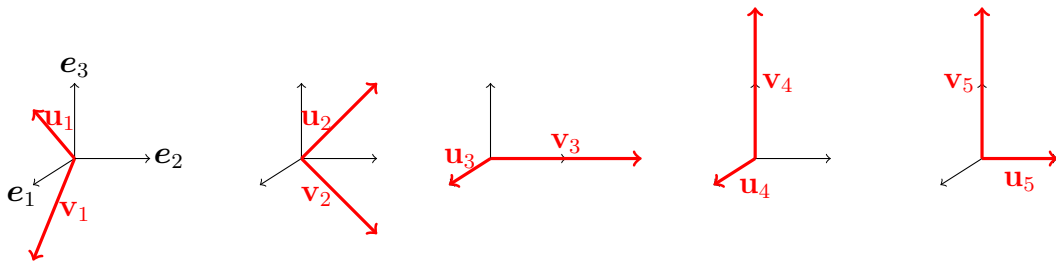


FIGURE 1.4 – Systèmes quadripolaires issus de la base ( $\mathbf{Q}_k$ )

Dans le contexte de l'approximation quadripolaire, nous supposons que la charge électrique  $q$  est donnée par  $q = \frac{q_0}{\epsilon^2}$  avec  $q_0 > 0$  et les points  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  sont donnés par  $\mathbf{c}_1 = \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1$  et  $\mathbf{c}_2 = \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2$ . La distribution de charge  $\rho_\epsilon$  associée est donnée par

$$\rho_\epsilon = \frac{q_0}{\epsilon} \left( \delta_{\frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1} + \delta_{-\frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1} - \delta_{\frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2} - \delta_{-\frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2} \right). \quad (1.43)$$

**Proposition 1.4.** *Supposons que  $\sigma = 0$ . L'approximation quadripolaire  $V_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}]$  du potentiel électrique statique est*

$$V_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = -\frac{3}{16\pi r^3} \hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}},$$

celle du champ électrique  $\mathbf{E}_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}] = -\nabla V_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}]$  est donnée par

$$\mathbf{E}_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = \frac{3}{16\pi r^4} \left( -3(\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + 2 \hat{\mathbf{x}} \times ((\mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}}) \right).$$

*Démonstration.* Comme pour la Proposition 1.1, le potentiel électrique  $V_\epsilon$  généré par la distribution de charge  $\rho_\epsilon$  définie par (1.43), est donné par

$$V_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi \epsilon^2} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1|} + \frac{1}{|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2|} \right).$$

Nous effectuons le développement limité de  $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}$  à l'ordre 2,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{r^2} + \frac{1}{2r^4} [3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})^2 - |\mathbf{a}|^2] + O_{a \rightarrow 0}(|\mathbf{a}|^3) \right), \quad (1.44)$$

afin d'obtenir le développement du potentiel électrique

$$\begin{aligned} V_\epsilon(\mathbf{x}) &= \frac{q_0}{4\pi r^5} \left( 3 [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_0^1)^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_0^2)^2] + [|\mathbf{c}_0^2|^2 - |\mathbf{c}_0^1|^2] \right) + O_{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon), \\ &= \frac{q_0}{16\pi r^5} (-3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + O_{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon), \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u} = \mathbf{c}_0^2 + \mathbf{c}_0^1$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{c}_0^2 - \mathbf{c}_0^1$ . Enfin, puisque  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  et

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{v} \mathbf{u}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{u} \mathbf{v}^\top \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top (\mathbf{u} \mathbf{v}^\top + \mathbf{v} \mathbf{u}^\top) \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}. \quad (1.45)$$

nous obtenons, à la limite, l'expression de  $V_{stat}[\mathbf{Q}]$ . Le champ électrique  $\mathbf{E}_{stat}[\mathbf{Q}]$  est obtenu en calculant  $-\nabla V_{stat}[\mathbf{Q}]$ .  $\square$

Dans le cadre de l'approximation quasi-statique du potentiel et du champ magnétique, nous considérons un courant électrique  $\mathbf{J}_\epsilon$  défini comme la réunion de courants électriques filiformes d'intensité stationnaire  $\frac{I_0}{2c^2}$ , paramétrés par les segments  $\gamma_\epsilon^{+-}$ ,  $\gamma_\epsilon^{++}$ ,  $\gamma_\epsilon^{-+}$  et  $\gamma_\epsilon^{--}$  tels que pour  $s \in [0, 1]$ ,

$$\gamma_\epsilon^{*1*2}(s) = (1-s)\mathbf{c}_{*1}^2 + s\mathbf{c}_{*2}^1, \quad \text{avec } *1 = \pm \text{ et } *2 = \pm.$$

La distribution de courant  $\mathbf{J}_\epsilon$  s'écrit

$$\mathbf{J}_\epsilon = \frac{I_0}{2\epsilon^2} \left( \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} [\delta_{\gamma_\epsilon^{--}} - \delta_{\gamma_\epsilon^{++}}] + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} [\delta_{\gamma_\epsilon^{-+}} - \delta_{\gamma_\epsilon^{+-}}] \right). \quad (1.46)$$

**Proposition 1.5.** *L'approximation quadripolaire  $\mathbf{A}_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}_h]$  du potentiel magnétique est donnée par*

$$\mathbf{A}_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}_h](\mathbf{x}) = \frac{1}{32\pi c r^2} \mathbf{Q}_h \hat{x}, \quad \text{avec } \mathbf{Q}_h = I_0 \mathbf{Q}.$$

*L'approximation quadripolaire  $\mathbf{H}_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}_h] = \nabla \times \mathbf{A}_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}_h]$  du champ magnétique est donnée par*

$$\mathbf{H}_{stat}^{elec}[\mathbf{Q}_h](\mathbf{x}) = \frac{3}{16\pi c r^3} \hat{x} \times (\mathbf{Q} \hat{x}).$$

Nous nous plaçons en régime harmonique. Le quadripôle électrique oscillant peut être caractérisé par la donnée de quatre charges ponctuelles telles que présentées dans la Définition 1.4, et par la donnée de courants électriques filiformes reliant ces charges (toujours de « moins » vers « plus »). Cette configuration est illustrée sur la Figure 1.3.

**Proposition 1.6.** *Supposons que  $\sigma = 0$ . Les approximations quadripolaires  $V^{elec}[\mathbf{Q}]$  et  $\mathbf{A}^{elec}[\mathbf{Q}]$  des potentiels électromagnétiques générés par un quadripôle électrique oscillant de moment  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ , sont données par*

$$V^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = -\frac{i\kappa^3}{16\pi} h_2^{(1)}(\kappa r) \hat{x}^\top \mathbf{Q} \hat{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = -\frac{\kappa^3}{16\pi} h_1^{(1)}(\kappa r) \mathbf{Q} \hat{x}.$$

*Les approximations quadripolaires  $\mathbf{E}^{elec}[\mathbf{Q}]$  et  $\mathbf{H}^{elec}[\mathbf{Q}]$  des champs électromagnétiques*



sont données par

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = \frac{\kappa^4}{16\pi} \left( \tilde{h}_2^{(1)}(\kappa r) [\hat{\mathbf{x}} \times ((\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}})] + 3 \frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \right), \\ \mathbf{H}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = -\frac{\kappa^4}{16\pi} h_2^{(1)}(\kappa r) \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}). \end{cases}$$

**Remarque 1.15.** En remplaçant les fonctions de Hankel par leurs valeurs, nous obtenons

$$\begin{aligned} V^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) &= \frac{\exp(i\kappa r)}{16\pi r} \left( -\frac{3}{r^2} + \frac{3i\kappa}{r} + \kappa^2 \right) \hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{A}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) &= \frac{\exp(i\kappa r)}{32\pi r} \left( \frac{i\kappa}{r} + \kappa^2 \right) \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\kappa r)}{16\pi r} \left\{ \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3i\kappa}{r^2} - \frac{3\kappa^2}{2r} + \frac{i\kappa^3}{2} \right) [\hat{\mathbf{x}} \times ((\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}})] \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \left( -\frac{9}{r^3} - \frac{9i\kappa}{r^2} - \frac{5\kappa^2}{r} + 2i\kappa^3 \right) (\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \right\}, \\ \mathbf{H}^{elec}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\kappa r)}{16\pi r} \left( \frac{3i\kappa}{r^2} + \frac{3\kappa^2}{r} - i\kappa^3 \right) \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}). \end{cases}$$

*Démonstration.* Comme pour les démonstrations précédentes, le potentiel  $V_\epsilon$  donné par

$$V_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon^2} \left( \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1|)}{|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1|} + \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1|)}{|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^1|} - \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2|)}{|\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2|} - \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2|)}{|\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{c}_0^2|} \right),$$

est approché à l'aide des développements (1.44) et celui de  $\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{a}|)$  à l'ordre 2,

$$\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{a}|) = \exp(i\kappa r) \left( 1 + \frac{i\kappa}{r} \left[ \frac{|\mathbf{a}|^2}{2} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \right] - \frac{\kappa^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2}{2r^2} - \frac{i\kappa(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2}{2r^3} + O(|\mathbf{a}|^3) \right).$$

Nous avons

$$\frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{a}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \exp(i\kappa r) \left( \frac{1}{r} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{i\kappa}{r^2} \right] + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})^2 \left[ \frac{3}{2r^5} - \frac{3i\kappa}{2r^4} - \frac{\kappa^2}{2r^3} \right] + |\mathbf{a}|^2 \left[ -\frac{1}{2r^4} + \frac{i\kappa}{2r} \right] \right) + \underset{|\mathbf{a}| \rightarrow 0}{O(|\mathbf{a}|^3)},$$

ce qui implique, en posant  $\mathbf{u} = \mathbf{c}_0^2 + \mathbf{c}_0^1$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{c}_0^2 - \mathbf{c}_0^1$ ,

$$V_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{q_0 \exp(i\kappa r)}{16\pi r} \left\{ \left[ -\frac{3}{r^4} + \frac{3i\kappa}{r^3} + \frac{\kappa^2}{r^2} \right] (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) + \left[ \frac{1}{r^4} - \frac{i\kappa}{r} \right] (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \right\} + \underset{\epsilon \rightarrow 0}{O}(\epsilon).$$

Enfin, en utilisant (1.45), en notant que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  et en faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro, nous obtenons l'expression du potentiel  $V^{\text{elec}}[\mathbf{Q}]$ . Le potentiel  $\mathbf{A}_\epsilon$  est obtenu à partir de la définition (1.34) puis en utilisant l'expression du courant (1.46). Il faut ensuite paramétriser les segments  $\gamma_\epsilon^{\pm\pm}$ , utiliser le développement limité de  $\frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x}-t\Box|)}{|\mathbf{x}-t\Box|}$  et faire tendre  $\epsilon$  vers zéro pour obtenir l'approximation  $\mathbf{A}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}]$ .  $\square$

#### 1.4.4 Note sur les multipôles magnétiques

L'ensemble du travail réalisé dans le cadre de sources multipolaires électriques, c'est-à-dire avec la considération de charges et courants électriques, peut être calqué au cas de sources multipolaires magnétiques. Leur définition est analogue au cas électrique en considérant à la place, des charges ponctuelles  $\rho_m$  et des courants filiformes  $M_a$  de nature magnétique, comme cela est introduit dans les Sections 1.1.5 et 1.2.4. De la dualité des équations de Maxwell et de ses symétries, nous établissons ici un ensemble de corollaires permettant de caractériser des champs électromagnétiques générés par des multipôles magnétiques. En particulier, nous avons la décomposition en potentiels suivante,

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m - i\kappa_m \mathbf{A}_m \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{A}_m$$

où  $V_m$  désigne l'analogie du potentiel électrique scalaire  $V$  et  $\mathbf{A}_m$  celui du potentiel magnétique vectoriel  $\mathbf{A}$ , donnés par (1.34), mais générés par des sources magnétiques. Leur expression est donnée par

$$V_m(\mathbf{x}) = \frac{\mu_c}{4\pi\mu} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rho_m(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) M_a(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y},$$

en remarquant que si  $\sigma_m = 0$ , quantité introduite dans la Section 1.2.4,  $\frac{\mu_c}{\mu} = 1$ .

**Corollaire 1.** Supposons  $\sigma_m = 0$ . L'approximation dipolaire  $\mathbf{H}_{stat}^{mag}[\mathbf{d}]$  du champ magnétique statique est donnée par

$$\mathbf{H}_{stat}^{mag}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^3} (3(\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}).$$

**Corollaire 2.** L'approximation dipolaire  $\mathbf{E}_{stat}^{mag}[\mathbf{d}_e]$  du champ électrique est donnée par

$$\mathbf{E}_{stat}^{mag}[\mathbf{d}_e](\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi c r^2} (\mathbf{d}_e \times \hat{\mathbf{x}}).$$

**Corollaire 3.** Supposons que  $\sigma_m = 0$ . Les approximations dipolaires  $\mathbf{E}^{mag}[\mathbf{d}]$  et  $\mathbf{H}^{mag}[\mathbf{d}]$  des champs électromagnétiques générés par un dipôle magnétique oscillant de moment  $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$  sont données par

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{mag}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = -\frac{\kappa^3}{4\pi} \left[ \tilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{d} \times \hat{\mathbf{x}})) + 2 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \right], \\ \mathbf{E}^{mag}[\mathbf{d}](\mathbf{x}) = \frac{\kappa^3}{4\pi} h_1^{(1)}(\kappa r) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}). \end{cases}$$

**Corollaire 4.** Supposons que  $\sigma_m = 0$ . L'approximation dipolaire  $\mathbf{H}_{stat}^{mag}[\mathbf{Q}]$  du champ magnétique statique est donnée par

$$\mathbf{H}_{stat}^{mag}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = \frac{3}{16\pi r^4} \left( -3(\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \times ((\mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}}) \right).$$

**Corollaire 5.** Supposons que  $\sigma_m = 0$ . Les approximations quadripolaires  $\mathbf{E}^{mag}[\mathbf{Q}]$  et  $\mathbf{H}^{mag}[\mathbf{Q}]$  des champs électromagnétiques générés par un quadripôle magnétique oscillant de moment  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  sont données par

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{mag}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = \frac{\kappa^4}{16\pi} \left( \tilde{h}_2^{(1)}(\kappa r) [\hat{\mathbf{x}} \times ((\mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}})] + 3 \frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \right), \\ \mathbf{E}^{mag}[\mathbf{Q}](\mathbf{x}) = \frac{\kappa^4}{16\pi} h_2^{(1)}(\kappa r) \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}). \end{cases}$$

## 1.5 Conclusion

Dans la suite, nous étudierons la propagation des ondes électromagnétiques en régime harmonique dans un milieu satisfaisant à l'Hypothèse 1.1.2 page 11. Nous nous intéresserons aux problèmes de diffraction simple et de diffraction multiple dans un domaine extérieur  $\Omega$  non-borné, d'un point de vue asymptotique dans la Partie I, puis, en adoptant le formalisme de Mie dans la Partie II. Les champs électromagnétiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  seront les champs normalisés (1.17) et vérifieront les équations de Maxwell réduites (1.19) homogènes que nous écrirons sous la forme

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\kappa \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

en notant que les équations de divergence sont inutiles, voir Remarque 1.3. Le nombre d'onde  $\kappa$  vérifiera l'Hypothèse 1.2.1 page 18.

La théorie des potentiels électromagnétiques, introduite dans la Section 1.3, sera utilisée dans le Chapitre 3 pour représenter et démontrer l'existence et l'unicité des champs quasi-statiques apparaissant dans les développements asymptotiques. Enfin, les sources multipolaires et les champs induits, qui ont été introduits dans la Section 1.4, seront utilisés dans le Chapitre 4 afin de représenter les différents termes issus des développements asymptotiques.



## **Première partie**

# **Modélisation asymptotique de la diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles**



## CHAPITRE 2

# LA DIFFRACTION PAR DE PETITS OBSTACLES

### Sommaire

---

<b>2.1 Le problème de diffraction</b> . . . . .	<b>48</b>
2.1.1 La source . . . . .	48
2.1.2 La géométrie . . . . .	49
2.1.3 Les conditions de frontière . . . . .	50
2.1.4 Formulation du problème . . . . .	50
2.1.5 Existence et unicité de la solution . . . . .	52
<b>2.2 Les développements asymptotiques</b> . . . . .	<b>54</b>
2.2.1 Les développements raccordés . . . . .	57
2.2.2 Les développements multi-échelles . . . . .	62
<b>2.3 Les modèles réduits de diffraction multiple</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>2.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>69</b>

---

Dans le Chapitre 1, nous avons introduit les équations de Maxwell harmoniques (1.14) dans un domaine vérifiant l’Hypothèse 1 page 11. La résolution de ces équations requiert généralement une méthode numérique basée sur une approximation discrète de la géométrie, le *maillage*. Les solutions peuvent parfois être explicitées analytiquement : par exemple dans l’espace libre avec des sources particulières comme les multipôles présentés dans la Section 1.4, ou en considérant des géométries particulières bornées ou non bornées, comme à l’intérieur ou à l’extérieur d’une sphère.

La diffraction des ondes électromagnétiques par un *diffuseur* de taille et de forme arbitraire est associée à de nombreux phénomènes physiques mettant en jeu différentes



échelles. À l'échelle microscopique, les rayonnements électromagnétiques, qui peuvent également être décrits de manière corpusculaire avec la propagation de photons, interagissent avec les électrons libres ou peu liés, à haute énergie (rayons X ou Gamma). À l'échelle mésoscopique ou macroscopique, les rayonnements électromagnétiques interagissent avec la matière. La théorie de la diffraction rend compte de différents phénomènes ondulatoires, en fonction du ratio entre la taille caractéristique du diffuseur et la longueur d'onde. Lorsque la taille de l'obstacle est comparable à la longueur d'onde, nous sommes dans le régime de diffusion de Mie (Gustav Mie, 1868-1957). Ce nom vient de la théorie de [Mie \(1908\)](#), rappelée dans la Section 6.2, dédiée à l'étude des champs électromagnétiques en géométrie sphérique. Lorsque la taille de l'obstacle est très petite devant la longueur d'onde, nous sommes dans le régime de diffusion de Rayleigh (Lord Rayleigh, 1842-1919). Ce nom résulte notamment de l'approximation de [Rayleigh \(1897\)](#).

La théorie de la diffraction trouve ses applications dans de nombreux domaines. Un exemple naturel est l'arc-en-ciel. La lumière est diffractée par les gouttes d'eau. En science atmosphérique, [Nousiainen et McFarquhar \(2004\)](#) étudient la diffraction de la lumière par des cristaux de glace dans les nuages. En climatologie, [Veihelmann \*et al.\* \(2006\)](#) s'intéressent à la diffraction par des aérosols minéraux. En astronomie, [Purcell et Pennypacker \(1973\)](#) ou [Draine \(2003\)](#) étudient la diffraction par des grains de poussière interstellaire. Dans le domaine de la science médicale, [Wriedt \*et al.\* \(2006\)](#) étudient les propriétés de la diffraction de la lumière par un globule rouge. Enfin, dans le contexte du contrôle non-destructif, voir par exemple [Blitz \(2012\)](#), les méthodes d'inversion nécessitent des résolutions directes efficaces, rapides et performantes. Le lecteur trouvera des compléments sur la théorie de la diffraction et ses applications dans [Mishchenko \*et al.\* \(1999\)](#).

En général, il n'existe pas de solution analytique au problème de diffraction des ondes électromagnétiques par un obstacle de forme arbitraire. L'utilisation d'une méthode numérique est alors prescrite. La précision de la méthode numérique est directement associée à son ordre et au nombre de points par longueur d'onde considérés dans le maillage. Nous comprenons par là que le choix de la méthode dépendra aussi du régime de diffusion dans lequel nous nous plaçons. En particulier, pour des petites longueurs d'ondes, il est nécessaire de considérer des maillages très raffinés ou des méthodes d'ordre élevé.

---

Les méthodes numériques volumiques comme les éléments finis – voir [Monk \(2003\)](#) ou [Duruflé \(2006\)](#) – ou spectraux continus, les éléments finis discontinus ou *de Galerkin discontinus* – voir [Dolean et al. \(2008\)](#) par exemple – ou encore la méthode de Galerkin discontinu hybride – voir [Nguyen et al. \(2011\)](#) ou [Li et al. \(2013\)](#) – nécessitent une approximation discrète du volume dans lequel la propagation est considérée. Ces méthodes sont particulièrement adaptées à des géométries complexes. Si la propagation a lieu en domaine non-borné, une frontière extérieure fictive peut être introduite et une condition de radiation sur cette frontière est approchée. La simulation numérique est d'autant plus précise que la frontière est éloignée du domaine d'intérêt. En trois dimensions, la prise en compte d'un petit défaut (en comparaison avec la longueur d'onde) dans le milieu par ces méthodes volumiques s'avère très coûteuse même dans le contexte de la parallélisation numérique et du raffinement local de maillage.

Les méthodes numériques surfaciques issues de la théorie des équations intégrales, comme les éléments finis de frontière, s'appuient généralement sur une approximation discrète des frontières. Ces méthodes sont particulièrement adaptées au problème de diffraction en domaine non borné car la condition de radiation exacte est vérifiée. En contraste avec les méthodes volumiques où les matrices de résolution sont généralement creuses, les matrices de résolution issues des méthodes surfaciques sont denses, leur taille dépendant dans les deux cas du nombre d'éléments du maillage et de l'ordre de la méthode. La considération d'un petit objet diffractant dans le milieu est tout à fait accessible avec des méthodes surfaciques. Toutefois, elles atteignent leurs limitations lorsque le domaine de calcul est fortement hétérogène (en termes de nombre d'obstacles).

La prise en compte d'un petit obstacle peut aussi recourir à l'analyse asymptotique – domaine qui a déjà suscité une littérature abondante. Nous distinguons plusieurs initiateurs des méthodes asymptotiques entre l'école anglo-saxonne de [Crighton et al. \(1992\)](#), l'école russe de [Il'in \(1992\)](#) ou [Maz'ya et al. \(2012\)](#) et bien d'autres comme [Eckhaus \(1973\)](#), [Van Dyke \(1975\)](#) et *cetera*. Le problème du petit obstacle a donné lieu à de nombreux travaux dans le domaine des ondes :

- pour les ondes acoustiques en domaine fréquentiel avec entre autres [Ramm \(1986\)](#), [Ramm \(2005\)](#), [Ammari et al. \(2013a\)](#) ou [Bendali et al. \(2016\)](#),
- en domaine temporel avec [Mattesi \(2014\)](#), [Korikov \(2014\)](#) ou [Marmorat \(2015\)](#),
- pour les ondes électromagnétiques avec entre autres [Vogelius et Volkov \(2000\)](#),

Ammari *et al.* (2001), Ammari et Khelifi (2003), Ammari *et al.* (2013b) ou Korikov et Plamenevskii (2016),

- pour les ondes élastiques avec Ammari *et al.* (2002), Beretta *et al.* (2011a) ou Marenic *et al.* (2015),
- concernant le problème inverse avec Volkov (2003), Ammari et Kang (2004), Ammari *et al.* (2007) ou Beretta *et al.* (2011b).

Cette branche de l'analyse permet de traiter d'autres perturbations géométriques singulières comme des fentes minces dans Tatout (1996) ou Tordeux (2004), des fils dans Claeys (2008) ou Delourme (2010), des coins dans Dauge (1988) ou Vial (2003). Elle permet aussi de considérer des perturbations géométriques régulières comme les couches minces et les couches limites qui se forment par exemple dans des matériaux à fort contraste dans Péron (2009).

## 2.1 Le problème de diffraction

Nous présentons le problème de diffraction simple des ondes électromagnétiques en régime harmonique par un obstacle borné, régulier et tridimensionnel dont le rayon est petit en comparaison avec la longueur d'onde.

### 2.1.1 La source

Une source électrique harmonique, i.e. une densité de charge  $\rho$  et une densité de courant  $\mathbf{J}_a$  vérifiant (1.21), oscillant à une fréquence angulaire  $\omega > 0$  et dont le support borné n'intersecte pas le support de l'obstacle, est considérée dans un milieu infini vérifiant l'Hypothèse 1 page 11. Cette source génère des champs électromagnétiques  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  appelés *champs incidents* vérifiant les équations (1.19) en l'absence d'obstacle,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{inc}} - i\kappa \mathbf{H}^{\text{inc}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times \mathbf{H}^{\text{inc}} + i\kappa \mathbf{E}^{\text{inc}} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_a & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\kappa$  vérifie l'Hypothèse 2 page 18. Nous n'imposons pour l'instant pas de condition sur le caractère conducteur du milieu. La longueur d'onde  $\lambda$  est le ratio entre la vitesse  $c$  de l'onde dans le milieu et la fréquence  $f$  donnée par (1.12).

**Remarque 2.1.** *Nous omettrons systématiquement les équations portant sur la divergence des champs qui peuvent être déduites de (2.1) et (1.1).*

### 2.1.2 La géométrie

Soit  $\widehat{\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^3$  un domaine de référence borné et contenant l'origine du repère cartésien, de frontière  $\widehat{\Gamma}$  régulière. Le petit obstacle  $\mathcal{B}_\delta$  est défini de manière autosimilaire,

$$\mathcal{B}_\delta = \mathbf{c} + \delta \widehat{\mathcal{B}},$$

où  $\mathbf{c}$  désigne son centre et  $\delta > 0$  désigne le petit paramètre vérifiant  $\delta \ll \lambda$ . Sa frontière est notée  $\Gamma_\delta$ . Nous notons  $\Omega_\delta$  le domaine extérieur à l'obstacle donné par

$$\Omega_\delta = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_\delta}.$$

Cette configuration géométrique est présentée dans la Figure 2.1.

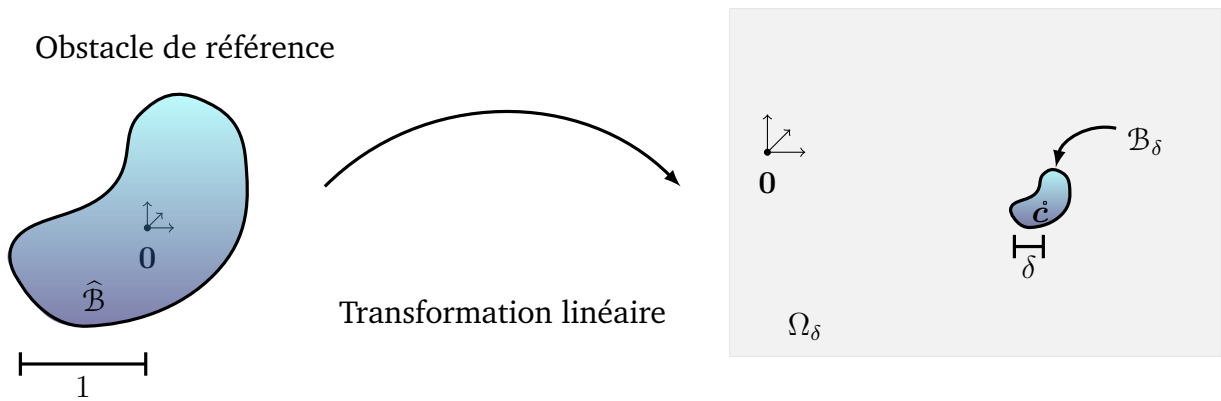


FIGURE 2.1 – Géométrie du problème.

En régime temporel, il est plus naturel d'imaginer la propagation de l'onde. L'onde générée par la source est diffractée au contact de l'obstacle. À cet instant, l'onde totale se divise : l'onde incidente continue à se propager mais une partie de l'onde est diffractée, voire pénètre à l'intérieur de l'obstacle. Cela se répercute sur les champs électromagnétiques en régime harmonique. Dans la suite, nous noterons  $(\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}, \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}})$  les champs totaux et  $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta)$  les champs diffractés définis dans  $\Omega_\delta$  tels que  $\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}_\delta$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} = \mathbf{H}^{\text{inc}} + \mathbf{H}_\delta$ .

### 2.1.3 Les conditions de frontière

Le phénomène de diffraction dépend de la nature de l'obstacle. Un obstacle non pénétrable fait référence à une condition de frontière de conducteur parfait

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{n}$  représente le vecteur normal unitaire à  $\Gamma_\delta$  dirigé vers l'extérieur de  $\mathcal{B}_\delta$  et  $\times$  désigne le produit vectoriel. Cela peut aussi faire référence à une condition d'isolant parfait

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta. \quad (2.3)$$

**Remarque 2.2.** *Les équations portant sur la trace normale du champ sont des conséquences de celles portant sur la trace tangentielle de l'autre champ.*

Si l'obstacle est pénétrable, il est nécessaire de considérer des conditions de transmission à l'interface des deux milieux. Elles imposent la continuité des traces tangentielles des champs totaux,

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta \quad \text{et} \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta,$$

où  $[\mathbf{u}]$  désigne le saut de  $\mathbf{u}$  à l'interface  $\Sigma$  de deux milieux  $\Omega^e$  et  $\Omega^i$ , défini par

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_{|\Sigma}^e - \mathbf{u}_{|\Sigma}^i, \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}^e = \mathbf{u}_{|\Omega^e} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_{|\Omega^i}. \quad (2.4)$$

La condition de frontière d'impédance, aussi appelée *condition de Leontovitch* (Mikhail Leontovich, 1903-1981), modélise par une condition locale la pénétration de l'onde à l'intérieur de l'obstacle. Elle est donnée par

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} - Z(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta, \quad (2.5)$$

où  $Z$  désigne le coefficient d'impédance associé à la surface.

### 2.1.4 Formulation du problème

Nous considérons le problème de Maxwell réduit constitué des équations (1.19) dans  $\Omega_\delta$ , de la condition de radiation (1.22) à l'infini vérifiée par la partie diffractée des champs et d'une des conditions de frontière (2.2), (2.3) ou (2.5) sur  $\Gamma_\delta$ , vérifié par les

champs électromagnétiques totaux,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} - i\kappa \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega_\delta, \\ \nabla \times \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} + i\kappa \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_a & \text{dans } \Omega_\delta, \\ \mathcal{B}(\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}, \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}}) = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( (\mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \times \hat{x} - (\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} - \mathbf{E}^{\text{inc}}) \right) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

où  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{c}|$ ,  $\hat{x} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}}{r}$  et l'opérateur  $\mathcal{B}(\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}, \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}})$  est associé à une condition de conducteur parfait, d'isolant parfait ou d'impédance. Nous discuterons des résultats suivant la condition de frontière considérée. Cette formulation du premier ordre n'est cependant pas toujours adaptée à l'analyse. Nous préférons des formulations équivalentes à ce problème : la formulation du second ordre en champ électrique total ou la formulation du premier ordre en champs diffractés.

Une formulation du second ordre en champ total est mieux adaptée à un cadre fonctionnel volumique comme celui fourni par Lax-Milgram (Peter Lax, 1926- et Arthur Milgram, 1912-1961) ou celui de Phillips (1973). Le problème, constitué des équations (1.20) dans  $\Omega_\delta$ , de la condition de radiation (1.22) et d'une condition de frontière associée à l'opérateur  $\mathcal{B}$ , est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}) - \kappa^2 \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} = \frac{i\kappa}{c} \mathbf{J}_a & \text{dans } \Omega_\delta, \\ \mathcal{B}(\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}, \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}) = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( (\mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \times \hat{x} - (\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} - \mathbf{E}^{\text{inc}}) \right) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Par ailleurs, Nédélec (2001) établit un résultat d'existence et d'unicité en introduisant un espace à poids à partir de la formulation du premier ordre qui suit.

Une formulation du premier ordre en champs diffractés, avec  $\mathbf{E}_\delta = \mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} - \mathbf{E}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}_\delta = \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} - \mathbf{H}^{\text{inc}}$ , est plus adaptée au calcul analytique (quand celui-ci est possible) des champs électromagnétiques. Il est plus facile de prendre en compte une condition surfacique qu'une contrainte volumique et l'opérateur  $\nabla \times (\nabla \times \cdot)$  est plus difficile à traiter. Le problème est obtenu en soustrayant les équations volumiques issues de (2.6)

avec (2.1), en utilisant la linéarité de  $\mathcal{B}$  et considérant la condition de radiation (1.22),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E}_\delta - i\kappa \mathbf{H}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega_\delta, \\ \nabla \times \mathbf{H}_\delta + i\kappa \mathbf{E}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega_\delta, \\ \mathcal{B}(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta) = -\mathcal{B}(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}) & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r (\mathbf{H}_\delta \times \hat{x} - \mathbf{E}_\delta) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

### 2.1.5 Existence et unicité de la solution

Nous supposons que  $\mathcal{B}$  correspond à une condition de frontière de conducteur parfait et renvoyons le lecteur à la Remarque 2.5 pour des détails concernant les autres conditions.

Lorsque le nombre d'onde  $\kappa$  admet une partie imaginaire strictement positive, le cadre fonctionnel est variationnel car l'opérateur de Maxwell est coercif vis-à-vis de la norme énergie. Pour une donnée  $\mathbf{J}_a \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta)$  à support compact dans  $\Omega_\delta$ , le champ électrique  $\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}$  vérifiant (2.7) est unique dans l'espace de Sobolev  $\mathbf{H}_0(\nabla \times, \Omega_\delta)$  faisant intervenir l'opérateur rotationnel et la condition à la frontière,

$$\mathbf{H}_0(\nabla \times, \Omega_\delta) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta), \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta), \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \right\}.$$

Si de plus  $\nabla \cdot \mathbf{J}_a \in L^2(\Omega_\delta)$  alors  $\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}$  appartient à l'espace  $\mathbf{H}(\nabla \cdot, \Omega_\delta)$  qui est l'espace de Sobolev faisant intervenir la divergence du champ,

$$\mathbf{H}(\nabla \cdot, \Omega_\delta) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta), \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega_\delta) \right\}.$$

Il en est de même pour le champ magnétique  $\mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} \in \mathbf{H}(\nabla \times, \Omega_\delta) \cap \mathbf{H}_0(\nabla \cdot, \Omega_\delta)$ , où ce dernier espace inclut la condition à la frontière vérifiée par  $\mathbf{H}_\delta^{\text{tot}}$ ,

$$\mathbf{H}_0(\nabla \cdot, \Omega_\delta) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta), \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega_\delta), \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \right\}.$$

**Remarque 2.3.** Lorsque  $\kappa$  est un nombre réel strictement positif, il est possible d'introduire un terme de viscosité artificielle (1.16) sur le nombre d'onde  $\kappa$  afin de rendre coercif le problème perturbé. Il faut ensuite démontrer que la solution du problème auquel nous avons ajouté le terme de viscosité artificielle converge vers la solution du problème initial en un certain sens : c'est le principe d'absorption limite.

Généralement, en domaine non-borné, nous ne pouvons espérer une appartenance à  $L^2(\Omega_\delta)$  que localement. Plusieurs méthodes comme l'introduction d'une frontière fictive extérieure dans [Nédélec \(2001\)](#), ou une adaptation de la méthode de [Phillips \(1973\)](#) dans [Labat \(2016\)](#) qui consiste à considérer le problème comme une perturbation de celui dans l'espace libre donnent des résultats similaires en ajoutant le caractère local à la donnée et à la solution. Pour  $\mathbf{J}_a \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\Omega_\delta)$  à support compact dans  $\Omega_\delta$ , où

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\Omega_\delta) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall \chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), (\chi \mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta),$$

le champ électrique  $\mathbf{E}_\delta$  vérifiant (2.7) est unique dans  $\mathbf{H}_{0,\text{loc}}(\nabla \times, \Omega_\delta)$ , l'espace donné par

$$\mathbf{H}_{0,\text{loc}}(\nabla \times, \Omega_\delta) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\Omega_\delta), \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\Omega_\delta), \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \right\}.$$

Si de plus  $\nabla \cdot \mathbf{J}_a \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_\delta)$  alors  $\mathbf{E}_\delta$  appartient à  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \cdot, \Omega_\delta)$  qui est l'espace donné par

$$\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \cdot, \Omega_\delta) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\Omega_\delta), \nabla \cdot \mathbf{u} \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_\delta) \right\}.$$

En considérant la représentation des champs diffractés avec les potentiels de simple et double couches, voir Section 7.1, nous retrouvons ce même résultat après la résolution d'une équation intégrale comme dans [Colton et Kress \(1998\)](#) ou [Colton et Kress \(2013\)](#), l'hypothèse portant sur la trace tangentielle du champ électrique. Si  $\mathcal{B}(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}$  appartient à l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\delta}, \Gamma_\delta)$  des champs de vecteurs tangents à  $\Gamma_\delta$ , donné par

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\delta}, \Gamma_\delta) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta), \text{div}_{\Gamma_\delta} \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta) \text{ et } \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \right\}, \quad (2.9)$$

alors les champs électromagnétiques  $\mathbf{E}_\delta$  et  $\mathbf{H}_\delta$  vérifiant (2.8) sont uniques dans l'espace  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \Omega_\delta) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \cdot, \Omega_\delta)$ .

**Remarque 2.4.** L'opérateur de trace tangentielle « tournée » donné par  $\mathbf{n} \times \mathbf{u}$  est linéaire, continu et surjectif de  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \Omega_\delta)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\delta}, \Gamma_\delta)$ . Quant à lui, l'opérateur de trace tangentielle donné par  $(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}$  est linéaire, continu et surjectif de  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \Omega_\delta)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_\delta}, \Gamma_\delta)$ . Ces deux espaces de traces très souvent associés aux équations de Maxwell sont les duaux l'un de l'autre.

Le cadre fonctionnel le mieux adapté en domaine non borné est celui des espaces à poids car il inclut le comportement des champs à l'infini. Pour une donnée  $\mathcal{B}(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\delta}, \Gamma_\delta)$ , [Nédélec \(2001\)](#) démontre que les champs électromagnétiques



$E_\delta$  et  $H_\delta$  vérifiant (2.8) sont uniques dans

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{E}}{r} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta), \quad \frac{\mathbf{H}}{r} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta), \quad (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta), \\ (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta) \quad \text{et} \quad r(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{x}}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_\delta) \end{array} \right\}.$$

**Remarque 2.5.** *Le cas de l'isolant parfait est analogue au cas du conducteur parfait en considérant une formulation du second ordre en champ magnétique. Des compléments sur la condition d'impédance peuvent être trouvés dans [Nédélec \(2001\)](#).*

## 2.2 Les développements asymptotiques

La simulation numérique de problèmes faisant intervenir un paramètre asymptotique qui tend vers zéro ou l'infini, demande beaucoup de ressources de calcul. Le paramètre peut être de nature physique ou géométrique. Lorsque la perturbation est géométrique comme le cas du petit obstacle, différentes techniques peuvent venir améliorer et adapter les méthodes existantes comme les méthodes de raffinement local de maillages ou l'enrichissement des espaces d'approximations de type Trefftz, voir par exemple [Huttunen et al. \(2007\)](#) ou [Dauge et al. \(2019\)](#). Toutefois, nous pouvons imaginer leurs limites lorsque le nombre d'obstacles et la taille du domaine croissent. L'analyse asymptotique permet de définir une approximation de la solution d'une problème donné par le biais d'un développement asymptotique (ici, à une échelle donnée),

$$\mathbf{u}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \sum_{p=0}^{\infty} g_p(\delta) \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbf{u}_\delta(\mathbf{x}) - \sum_{p=0}^P g_p(\delta) \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) = \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(g_{P+1}(\delta)),$$

où  $\mathbf{u}_p$  est appelé  $p$ -ième terme du développement asymptotique et  $g_p(\delta)$  désigne la  $p$ -ième *fonction de jauge*. Les fonctions de jauge vérifient la relation

$$g_{p+1}(\delta) = \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(g_p(\delta)).$$

La dépendance en  $\delta$  n'apparaît plus dans les termes des développements asymptotiques.

Le développement asymptotique capture le comportement prépondérant de la solution. Lorsqu'une solution au *problème limite*, qui est le problème vérifié par  $\mathbf{u}_\delta$  en l'absence d'obstacle, existe et est unique, les fonctions de jauge  $g_p(\delta)$  tendront toutes vers zéro excepté la première qui sera en  $O(1)$ , lorsque  $\delta$  tend vers zéro. Dans le cas contraire, il peut intervenir des fonctions de jauge tendant vers l'infini. Dans l'application qui nous concerne où le problème limite est bien posé, les fonctions de jauge seront polynomiales en  $\delta$ , c'est-à-dire  $g_p(\delta) = \delta^p$ . De plus, l'approximation sera d'ordre  $\phi(P)$  où  $\phi$  est une fonction strictement croissante qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $P$  tend vers  $+\infty$ , si

$$\|\mathbf{u}_\delta - \sum_{p=0}^P \delta^p \mathbf{u}_p\| \leq c \delta^{\phi(P)},$$

où la norme  $\|\cdot\|$  est associée à la norme énergie du problème vérifié par  $\mathbf{u}_\delta$  évaluée dans un domaine de validité du développement asymptotique et la constante  $c$  ne dépend pas de  $\delta$ . Le lecteur peut se référer à [Il'In \(1992\)](#) pour des détails concernant les développements asymptotiques.

**Remarque 2.6.** *Les fonctions de jauge ne sont pas toujours polynomiales. Nous pouvons citer l'exemple du problème de Helmholtz en deux dimensions où une condition de Neumann est considérée sur la frontière de l'obstacle. L'analyse asymptotique de ce problème dans [Claeys \(2008\)](#) montre que les fonctions de jauge sont de la forme  $\delta^p (\ln^q \delta)$ . En fait, les fonctions de jauge sont associées au comportement asymptotique de la solution et peuvent être déterminées à l'aide des développements modaux.*

Il existe deux « grandes » méthodes issues de l'analyse asymptotique : la méthode des développements asymptotiques raccordés et la méthode des développements multi-échelles. Bien que ces méthodes mettent en jeu des analyses mathématiques un peu différentes, elles mènent à des résultats similaires comme cela est établi dans [Dauge et al. \(2010\)](#) pour l'exemple du problème de coin. Nous renvoyons le lecteur à [Il'In \(1992\)](#) ou [Crighton et al. \(1992\)](#) pour une présentation générale de la méthode des développements asymptotiques raccordés et à [Maz'ya et al. \(2012\)](#) pour la méthode des développements multi-échelles.

La méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à définir deux développements distincts de la solution. Le développement *externe* approche la solution dans une zone de *champ lointain*, c'est-à-dire loin de l'obstacle. Depuis le point d'observation, le petit obstacle apparaît comme une singularité géométrique ponctuelle. Quant

à lui, le développement *interne* est défini dans une (ou plusieurs, en général) coordonnée mise à l'échelle, appelées coordonnée *rapide*, qui consiste à ramener le repère à l'obstacle de référence. Il approche la solution dans une zone de *champ proche*, c'est-à-dire près de l'obstacle. Les domaines mis en jeu ne dépendent plus du petit paramètre  $\delta$  ce qui permet d'obtenir une famille de problèmes vérifiés par les termes des développements asymptotiques, indépendante de  $\delta$ . Le principe de raccordement de [Van Dyke \(1975\)](#), introduit initialement en mécanique des fluides, est basé sur l'hypothèse qu'il existe une zone intermédiaire où la solution peut être approchée par les deux développements. Il consiste alors à identifier le comportement asymptotique radial du développement interne pour de grandes valeurs de la coordonnée radiale rapide avec celui du développement externe au voisinage du centre de l'obstacle, exprimé dans la coordonnée rapide. Ce principe est présenté dans [Bouche et Molinet \(1994\)](#), appliqué à un problème de couche mince. La méthode des développements asymptotiques raccordés a largement été appliquée au problème du petit obstacle pour des problèmes d'ondes, par exemple dans [Claeys \(2008\)](#) pour l'acoustique en deux dimensions, dans [Mattesi \(2014\)](#) pour l'équation des ondes en trois dimensions ou dans [Bendali et al. \(2016\)](#) pour l'acoustique en trois dimensions.

La méthode des développements multi-échelles consiste à définir un développement asymptotique global de la solution. Ce développement global est constitué d'une partie *externe* et d'une correction *interne*. Ces termes sont employés pour mettre en évidence une certaine correspondance avec la méthode des développements asymptotiques raccordés. La correction interne, définie dans la coordonnée rapide, est appliquée seulement dans un voisinage de l'obstacle de sorte que, dans la zone de champ lointain, le développement global de la solution corresponde avec le développement externe. Le terme correcteur est introduit pour canaliser le comportement singulier du développement externe au voisinage du centre de l'obstacle. Cette méthode induit également une famille de problèmes vérifiés par les parties externe et interne des termes du développement qui est indépendante de  $\delta$ . Elle a déjà été appliquée au problème du petit obstacle pour l'élasticité linéaire dans [Brancherie et al. \(2008\)](#) en deux dimensions, pour l'équation des ondes dans [Korikov \(2014\)](#) en trois dimensions ou récemment pour l'électromagnétisme [Korikov et Plamenevskii \(2016\)](#) en trois dimensions.

### 2.2.1 Les développements raccordés

La méthode des développements asymptotiques raccordés n'a jamais été jusqu'à présent appliquée au problème de diffraction des ondes électromagnétiques en régime harmonique par de petits obstacles. Nous présentons ici d'un point de vue formel la méthode appliquée au problème de Maxwell (2.8). La justification mathématique qui comprend les résultats d'existence et d'unicité des termes des développements, la justification du raccord par les développements modaux et l'analyse de Mellin, ainsi que les estimations d'erreur, sera fournie dans le Chapitre 3.

Dans le domaine de champ lointain  $\tilde{\Omega}_\delta$ , les champs électromagnétiques  $\mathbf{E}_\delta$  et  $\mathbf{H}_\delta$  vérifiant (2.8) sont approchés par les développements externes notés  $\tilde{\mathbf{E}}_\delta$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_\delta$ ,

$$\mathbf{E}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \tilde{\mathbf{E}}_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \tilde{\mathbf{H}}_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \tilde{\mathbf{H}}_p(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

Le domaine de validité  $\tilde{\Omega}_\delta$  du développement externe est défini par

$$\tilde{\Omega}_\delta = \{\mathbf{x} \in \Omega_\delta, |\mathbf{x} - \mathbf{c}| > \tilde{\eta}(\delta)\}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\eta}(\delta) \rightarrow 0 & \text{lorsque } \delta \rightarrow 0, \\ \frac{\tilde{\eta}(\delta)}{\delta} \rightarrow +\infty & \text{lorsque } \delta \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{c}$  désigne le centre de l'obstacle. Les termes du développement asymptotiques  $\tilde{\mathbf{E}}_p$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_p$  sont définis dans le domaine  $\Omega^*$  qui est la limite formelle de  $\tilde{\Omega}_\delta$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{c}\}. \quad (2.12)$$

Cela est illustré sur la Figure 2.2.

Dans le domaine de champ proche  $\hat{\Omega}_\delta$ , les champs électromagnétiques  $\mathbf{E}_\delta$  et  $\mathbf{H}_\delta$  vérifiant (2.8) sont approchés par les développements internes notés  $\hat{\mathbf{E}}_\delta$  et  $\hat{\mathbf{H}}_\delta$ ,

$$\mathbf{E}_\delta(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \hat{\mathbf{E}}_\delta(\mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \hat{\mathbf{E}}_p(\mathbf{X}), \quad \mathbf{H}_\delta(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \hat{\mathbf{H}}_\delta(\mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \hat{\mathbf{H}}_p(\mathbf{X}). \quad (2.13)$$

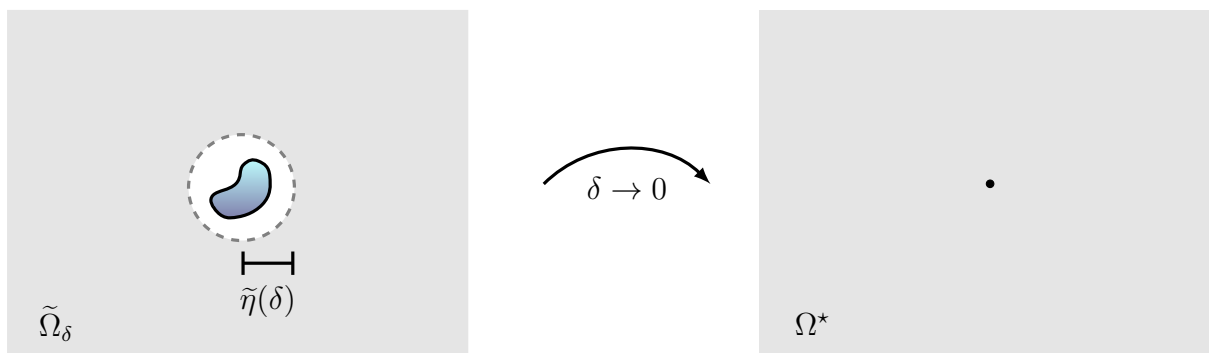


FIGURE 2.2 – Domaine de validité du développement externe à gauche et domaine de champ lointain à droite.

Ils sont exprimés dans le système de coordonnées rapides,

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}}{\delta}. \quad (2.14)$$

De plus, le domaine de validité  $\hat{\Omega}_\delta$  du développement interne est défini par

$$\hat{\Omega}_\delta = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x} - \mathbf{c}| < \hat{\eta}(\delta) \right\}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \hat{\eta}(\delta) \rightarrow 0 & \text{lorsque } \delta \rightarrow 0, \\ \frac{\hat{\eta}(\delta)}{\delta} \rightarrow +\infty & \text{lorsque } \delta \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

Les termes du développement interne  $\hat{\mathbf{E}}_p$  et  $\hat{\mathbf{H}}_p$  sont définis dans le domaine  $\hat{\Omega}$  qui est la limite formelle de la transformation du domaine  $\hat{\Omega}_\delta$  induite par la mise à l'échelle exprimée dans la variable rapide, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\hat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\hat{\mathcal{B}}}, \quad (2.16)$$

où  $\hat{\mathcal{B}}$  désigne l'obstacle de référence introduit dans la Section 2.1.2. Cela est illustré sur la Figure 2.3.

**Remarque 2.7.** *Le problème du petit obstacle fait partie de l'analyse asymptotique singulière. En effet, au vu des domaines (2.12) et (2.16), les termes des développements asymptotiques sont moins réguliers que la solution du problème initial. La singularité géométrique du champ lointain suggère un comportement singulier en l'origine des termes du développement externe. Au contraire, les termes du développement interne sont a priori autorisés à croître à l'infini.*

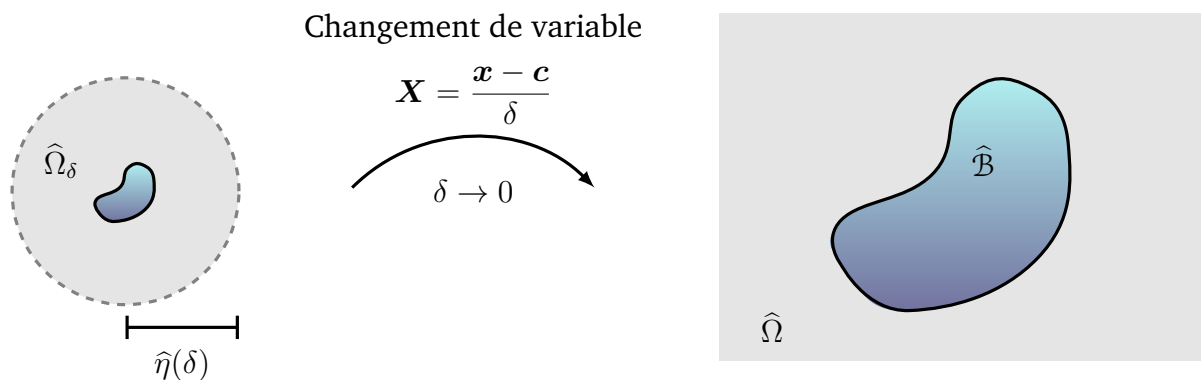


FIGURE 2.3 – Domaine de validité du développement interne à gauche et domaine de champ proche à droite.

Nous supposons que l'intersection entre les domaines de champ proche et de champ lointain est non vide, c'est-à-dire que  $\hat{\eta}(\delta) > \tilde{\eta}(\delta)$ . La zone de raccord  $\Sigma_\delta$  dans la variable rapide s'écrit

$$\Sigma_\delta = \left\{ \mathbf{X} \in \hat{\Omega}, \frac{\tilde{\eta}(\delta)}{\delta} < |\mathbf{X}| < \frac{\hat{\eta}(\delta)}{\delta} \right\}.$$

La zone de raccord est illustrée sur la Figure 2.4. Lorsque  $\delta$  tend vers zéro, la zone

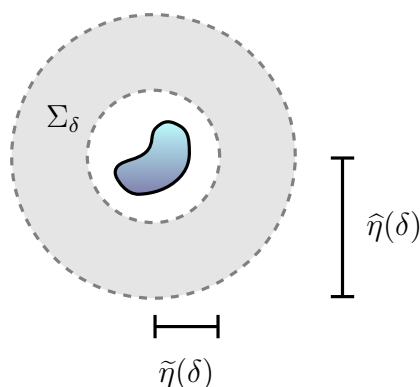


FIGURE 2.4 – Zone de raccord.

s'étend à l'infini. Nous écrivons le développement radial à variables séparées des termes du développement interne à l'infini,

$$\widehat{\mathbf{E}}_p(\mathbf{X}) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (\kappa R)^q \widehat{\mathbf{E}}_p^q(\hat{x}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_p(\mathbf{X}) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (\kappa R)^q \widehat{\mathbf{H}}_p^q(\hat{x}),$$

où  $\mathbf{X} = R\hat{x}$  avec  $R = |\mathbf{X}|$ . Les termes angulaires  $\widehat{\mathbf{E}}_p^q$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^q$  sont supposés nuls pour tout  $q > \tilde{q}_0$  avec  $\tilde{q}_0 \in \mathbb{Z}$ . Le nombre relatif  $\tilde{q}_0$  est potentiellement positif car nous autorisons les termes du développement interne à croître à l'infini. Ces développements sont

ensuite injectés dans les développements internes (2.13),

$$\widehat{\mathbf{E}}_\delta(\mathbf{X}) \underset{\mathbb{R} \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta^p (\kappa R)^q \widehat{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_\delta(\mathbf{X}) \underset{\mathbb{R} \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta^p (\kappa R)^q \widehat{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}), \quad (2.17)$$

où les termes angulaires  $\widehat{\mathbf{E}}_p^q$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^q$  sont supposés nuls pour tout  $p < 0$ . Dans la variable cartésienne, la zone de raccord  $\Sigma_\delta$  est rejetée au centre de l'obstacle lorsque  $\delta$  tend vers zéro. Nous écrivons le développement radial des termes du développement externe dans un voisinage de  $\mathbf{c}$ ,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{x}) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (\kappa r)^q \widetilde{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_p(\mathbf{x}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (\kappa r)^q \widetilde{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}),$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{c} + r\widehat{x}$  avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{c}| = \delta R$ . Les termes angulaires sont supposés nuls pour tout  $q < \widehat{q}_0$  avec  $\widehat{q}_0 \in \mathbb{R}$ . Le nombre relatif  $\widehat{q}_0$  est potentiellement négatif car nous autorisons les termes du développement interne à être singulier au centre de l'obstacle, c'est-à-dire à tendre vers  $+\infty$ . Ces développements sont ensuite injectés dans les développements externes (2.10) et ramenés à la variable rapide grâce à la relation  $r = \delta R$ ,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_\delta(\mathbf{x}) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta^{p+q} (\kappa R)^q \widetilde{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\mathbb{R} \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta^{p+q} (\kappa R)^q \widetilde{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}), \quad (2.18)$$

où les termes angulaires  $\widetilde{\mathbf{E}}_p^q$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^q$  sont supposés nuls pour tout  $p < 0$ . Le principe de raccordement de [Van Dyke \(1975\)](#) consiste à postuler l'égalité des développements (2.17) et (2.18). En effectuant un changement d'indice sur les sommes indexées par  $p \leftrightarrow p + q$ , nous obtenons les conditions de raccord pour tout  $p \geq 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } 0 \leq q \leq p : & \widehat{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) = \widetilde{\mathbf{E}}_{p-q}^q(\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}) = \widetilde{\mathbf{H}}_{p-q}^q(\widehat{x}), \\ \text{pour } q > p : & \widehat{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}) = 0, \\ \text{pour } -p \leq q < 0 : & \widetilde{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) = \widehat{\mathbf{E}}_{p+q}^q(\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}) = \widehat{\mathbf{H}}_{p+q}^q(\widehat{x}), \\ \text{pour } q < -p : & \widetilde{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}) = 0. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Les conditions de raccord permettent de résoudre les parties singulières des termes des développements asymptotiques, connaissant les parties régulières. Les parties régulières peuvent quant à elles être déterminées à partir de problèmes aux limites bien posés comme cela est présenté dans la Section 3.1.2. Les problèmes de champ loin-

tain sont obtenus en substituant les développements externes (2.10) dans le problème (2.8) en se restreignant aux équations posées dans  $\tilde{\Omega}_\delta$ , puis en identifiant les équations suivant les puissances de  $\delta$  successives. Ainsi, pour  $p \geq 0$ ,

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_p - i\kappa \tilde{\mathbf{H}}_p = 0 & \text{dans } \Omega^*, \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_p + i\kappa \tilde{\mathbf{E}}_p = 0 & \text{dans } \Omega^*, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r (\tilde{\mathbf{H}}_p \times \hat{x} - \tilde{\mathbf{E}}_p) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Les problèmes de champ proche sont obtenus en injectant les développements internes (2.13) dans le problème (2.8) en se restreignant aux équations posées dans  $\hat{\Omega}_\delta$ , puis en identifiant les équations suivant les puissances de  $\delta$  successives. En exprimant le rotationnel dans la coordonnée rapide  $\nabla_{\mathbf{X}} \times \mathbf{u} = \delta \nabla_x \times \mathbf{u}$ , nous obtenons pour  $p \geq 0$ ,

$$\begin{cases} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_p - i\kappa \hat{\mathbf{H}}_{p-1} = 0 & \text{dans } \hat{\Omega}, \\ \nabla \times \hat{\mathbf{H}}_p + i\kappa \hat{\mathbf{E}}_{p-1} = 0 & \text{dans } \hat{\Omega}, \\ \mathcal{B}(\hat{\mathbf{E}}_p, \hat{\mathbf{H}}_p) = -\mathcal{B}(\hat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}}, \hat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}}) & \text{sur } \hat{\Gamma}, \end{cases} \quad (2.21)$$

en utilisant la convention  $\hat{\mathbf{E}}_{-1} = 0$  et  $\hat{\mathbf{H}}_{-1} = 0$ . La condition de frontière est obtenue en effectuant le développement de Taylor des champs incidents dans la variable rapide puis en identifiant suivant les puissances de  $\delta$  successives,

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} [D^{|\alpha|} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})](\mathbf{X}^\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \hat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}}(\mathbf{X}), \\ \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} [D^{|\alpha|} \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})](\mathbf{X}^\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \hat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}}(\mathbf{X}). \end{cases} \quad (2.22)$$

En particulier, les premiers termes du développements s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \delta \mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \mathbf{X} + \frac{\delta^2}{2} \mathbf{X}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \mathbf{X} + \dots, \\ \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \delta \mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \mathbf{X} + \frac{\delta^2}{2} \mathbf{X}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \mathbf{X} + \dots, \end{cases}$$

où  $\mathbb{J}_f$  désigne la matrice jacobienne, de taille  $3 \times 3$ , du champ  $f = \mathbf{E}^{\text{inc}}$  ou  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  et  $\mathbb{H}_f$  désigne le tenseur hessien d'ordre 3 du champ  $f = \mathbf{E}^{\text{inc}}$  ou  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$ .

**Remarque 2.8.** Les équations volumiques obtenues pour les termes des développements internes sont découplées en champ électrique et champ magnétique à  $p$  fixé. Les termes d'ordre  $p - 1$  sont vus comme des sources volumiques pour les termes d'ordre  $p$ . La résolution de



ces problèmes quasi-statiques nécessite des équations portant sur la divergence des champs, qui peuvent être obtenues à l'ordre  $p$  en prenant la divergence des équations d'ordre  $p + 1$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p = 0 \quad \text{dans } \widehat{\Omega} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p = 0 \quad \text{dans } \widehat{\Omega}. \quad (2.23)$$

Dans le cas d'un conducteur parfait, les conditions de frontière s'écrivent  $\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_p = -\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}}$  sur  $\widehat{\Gamma}$  et  $\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p = -\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}}$  sur  $\widehat{\Gamma}$ . Nous verrons que la condition portant sur la trace tangentielle du champ électrique n'est pas suffisante pour garantir l'unicité des termes du développement interne. Il faut également considérer la condition de charge nulle

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{\mathbf{E}}_p \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \forall p \geq 0. \quad (2.24)$$

Cette condition est déduite de la propriété de charge nulle vérifiée par  $\mathbf{E}_\delta$  la solution du problème (2.8) en notant que  $\mathbf{E}_\delta = (i\kappa)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_\delta$  puis en utilisant la formule de Stokes,

$$\int_{\Gamma_\delta} \mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n} \, ds = -\frac{1}{i\kappa} \int_{\Gamma_\delta} (\nabla \times \mathbf{H}_\delta) \cdot \mathbf{n} \, ds = -\frac{1}{i\kappa} \int_{\Gamma_\delta} \text{rot}_{\Gamma_\delta}((\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\delta) \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{1} \, ds = 0.$$

La justification des développements asymptotiques raccordés comprend l'existence et l'unicité aux problèmes de champ lointain et de champ proche dans un cadre fonctionnel défini, la justification des conditions de raccord à l'aide développements modaux des solutions ainsi que des estimations d'erreur sur les approximations locales. Cela est présenté dans le Chapitre 3.

**Remarque 2.9.** Pour un obstacle sphérique, les termes de champ proche et de champ lointain peuvent être résolus analytiquement. Dans la section 3.3.2, nous explicitons les développements intérieurs jusqu'au deuxième ordre et les développements extérieurs jusqu'au cinquième ordre.

## 2.2.2 Les développements multi-échelles

La méthode des développements multi-échelles a été appliquée au problème de Maxwell dans Korikov et Plamenevskii (2016). Les auteurs se placent dans le cadre suivant : ils considèrent le problème de Maxwell temporel dans un domaine borné  $\Omega(\delta)$  contenant un petit obstacle de taille caractéristique  $\delta$  et dont la frontière est régulière. Par transformée de Fourier temporelle, ils se ramènent au problème de Maxwell harmonique en temps, pour lequel sont établis des développements asymptotiques de la solution. De plus, des estimations d'erreur uniformes en  $\kappa$  sont démontrées, permettant d'en dé-

duire des développements asymptotiques avec estimations d'erreur pour le problème temporel. Pour la démonstration des estimations d'erreur en domaine fréquentiel, les auteurs considèrent un nombre d'onde admettant une partie imaginaire strictement positive et mettent en place une régularisation elliptique du problème de Maxwell qui consiste à ajouter des termes dans les équations dans le but régulariser l'opérateur de Maxwell et afin qu'il devienne un opérateur elliptique. Par ailleurs, les résultats associés au problème de Maxwell « non-étendu » sont retrouvés en imposant des conditions de compatibilité sur les termes sources correspondant à la conservation de la charge et à une condition de charge nulle.

Nous présentons ici les principes généraux de la méthode appliquée au problème de Maxwell (2.8) et les correspondances avec la méthode des développements asymptotiques raccordés. En contraste avec cette dernière, la méthode des développements multi-échelles met en jeu une approximation globale des champs électromagnétiques diffractés de la forme

$$\mathbf{E}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \left( \tilde{\mathcal{E}}_p(\mathbf{x}) + \chi(r) \hat{\mathcal{E}}_p(\mathbf{X}) \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \left( \tilde{\mathcal{H}}_p(\mathbf{x}) + \chi(r) \hat{\mathcal{H}}_p(\mathbf{X}) \right),$$

où les champs  $\tilde{\mathcal{E}}_p$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_p$  jouent – plus ou moins – le rôle des termes des développements externes introduits dans (2.10) et  $\hat{\mathcal{E}}_p$  et  $\hat{\mathcal{H}}_p$  celui des termes des développements internes introduits dans (2.13). La fonction  $\chi$  est une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage de l'obstacle et 0 à l'infini. La partie du développement comprenant les termes  $\hat{\mathcal{E}}_p$  et  $\hat{\mathcal{H}}_p$  vise à corriger le comportement des champs au voisinage de l'obstacle. Cette correction est effectuée à partir des termes successifs des développements en série de Taylor des termes des développements asymptotiques.

Le premier terme  $(\tilde{\mathcal{E}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_0)$  du développement asymptotique est défini comme la solution du problème limite donné par

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathcal{E}}_0 - i\kappa \tilde{\mathcal{H}}_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times \tilde{\mathcal{H}}_0 + i\kappa \tilde{\mathcal{E}}_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \tilde{\mathcal{H}}_0 \times \hat{x} - \tilde{\mathcal{E}}_0 \right) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}. \end{cases}$$

Cela implique que  $\tilde{\mathcal{E}}_0 = 0$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_0 = 0$ . La condition au bord de l'obstacle dans (2.8) n'est pas vérifiée et l'introduction du champ correcteur est nécessaire. En particulier, nous

considérons  $\widehat{\mathcal{E}}_0$  et  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  vérifiant le problème statique dans la variable rapide,

$$\begin{cases} \nabla \times \widehat{\mathcal{E}}_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}, \\ \nabla \times \widehat{\mathcal{H}}_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathcal{E}}_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathcal{H}}_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}, \\ \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{E}}_0, \widehat{\mathcal{H}}_0) = -\mathcal{B}(\widehat{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}}, \widehat{\mathbf{H}}_0^{\text{inc}}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \end{cases}$$

où  $(\widehat{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}}, \widehat{\mathbf{H}}_0^{\text{inc}})$  désignent les premiers termes des développements (2.22).

**Remarque 2.10.** *Le développement en série de Taylor des champs incidents est utilisé pour obtenir une condition de frontière indépendante du paramètre  $\delta$ . Le premier terme uniquement est retenu car il correspond à la puissance zéro de  $\delta$ .*

Les termes suivants sont définis de manière à compenser leur comportement singulier, proche de l'origine pour les termes externes et à l'infini pour les termes internes. Pour ce faire, nous introduisons les développements de Taylor des termes successifs des développements, l'un au voisinage de l'origine, l'autre lorsque  $R$  tend vers l'infini,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{E}}_p(\mathbf{x}) &\underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sum_{q=0}^{\infty} r^q \widetilde{\mathcal{E}}_p^q(\widehat{x}) & \text{et} & \quad \widetilde{\mathcal{H}}_p(\mathbf{x}) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sum_{q=0}^{\infty} r^q \widetilde{\mathcal{H}}_p^q(\widehat{x}), \\ \widehat{\mathcal{E}}_p(\mathbf{x}) &\underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{R^q} \widehat{\mathcal{E}}_p^q(\widehat{x}) & \text{et} & \quad \widehat{\mathcal{H}}_p(\mathbf{x}) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{R^q} \widehat{\mathcal{H}}_p^q(\widehat{x}). \end{aligned}$$

Pour  $p \geq 1$ , les termes  $(\widetilde{\mathcal{E}}_p, \widetilde{\mathcal{H}}_p)$  associés au développement externe vérifient les problèmes harmoniques suivants :

$$\begin{cases} \nabla \times \widetilde{\mathcal{E}}_p - i\kappa \widetilde{\mathcal{H}}_p = \frac{i\kappa}{r} \chi(r) \widehat{\mathcal{H}}_{p-1}^1(\theta, \varphi) - [\nabla \times, \chi(r)] \sum_{k=1}^p \frac{1}{r^k} \widehat{\mathcal{H}}_{p-k}^k & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times \widetilde{\mathcal{H}}_p + i\kappa \widetilde{\mathcal{E}}_p = \frac{i\kappa}{r} \chi(r) \widehat{\mathcal{E}}_{p-1}^1(\theta, \varphi) - [\nabla \times, \chi(r)] \sum_{k=1}^p \frac{1}{r^k} \widehat{\mathcal{E}}_{p-k}^k & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{E}}_p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{H}}_p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r (\widetilde{\mathcal{H}}_0 \times \widehat{x} - \widetilde{\mathcal{E}}_0) = 0 & \text{uniformément en } \widehat{x}, \end{cases}$$

où  $[\nabla \times, \chi(r)]$  désigne le commutateur entre l'opérateur rotationnel et la fonction de

troncature  $\chi$ . Ces problèmes sont définis, de sorte que les champs  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p, \widetilde{\mathbf{H}}_p)$  définis par

$$\widetilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathfrak{E}}_p(\mathbf{x}) + \chi(r) \sum_{k=1}^p \frac{1}{r^k} \widehat{\mathfrak{E}}_{p-k}^k(\theta, \varphi) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_p(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathfrak{H}}_p(\mathbf{x}) + \chi(r) \sum_{k=1}^p \frac{1}{r^k} \widehat{\mathfrak{H}}_{p-k}^k(\theta, \varphi),$$

vérifient les problèmes de champ lointain donnés par (2.20) dans le domaine pointé  $\Omega^*$ .

**Remarque 2.11.** La notation des champs électromagnétiques  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p, \widetilde{\mathbf{H}}_p)$  n'est pas anodine. En effet, nous avons donné la relation permettant de passer des développements issus de la méthode des développements multi-échelles aux développements externes associés à la méthode des développements asymptotiques raccordés à ceux, et réciproquement.

Pour  $p \geq 1$ , les termes  $(\widehat{\mathfrak{E}}_p, \widehat{\mathfrak{H}}_p)$  associés au développement interne vérifient les problèmes statiques suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathfrak{E}}_p = i\kappa \left( \widehat{\mathfrak{H}}_{p-1} - \frac{1}{R} \widehat{\mathfrak{H}}_{p-1}^1 \right) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\widehat{\mathcal{B}}}, \\ \nabla \times \widehat{\mathfrak{H}}_p = -i\kappa \left( \widehat{\mathfrak{E}}_{p-1} - \frac{1}{R} \widehat{\mathfrak{E}}_{p-1}^1 \right) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\widehat{\mathcal{B}}}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathfrak{E}}_p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\widehat{\mathcal{B}}}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathfrak{H}}_p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\widehat{\mathcal{B}}}, \\ \mathcal{B}(\widehat{\mathfrak{E}}_p, \widehat{\mathfrak{H}}_p) = -\mathcal{B}(\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}}) - \sum_{k=1}^p \mathcal{B}(\widetilde{\mathfrak{E}}_{p-k}^k(\theta, \varphi)_{\mathbb{R}^k}, \widetilde{\mathfrak{H}}_{p-k}^k(\theta, \varphi)_{\mathbb{R}^k}) & \text{sur } \partial\widehat{\mathcal{B}}, \end{array} \right.$$

où  $(\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}})$  sont les termes d'ordre  $p$  dans le développement de Taylor (2.22) des champs incidents.

## 2.3 Les modèles réduits de diffraction multiple

Les développements asymptotiques définis dans le cadre de la diffraction simple par un petit obstacle peuvent faire l'objet d'une extension au cadre de la diffraction multiple. Il y a deux points de vue possibles, menant à des approximations identiques :

- le premier consiste à considérer dans le problème initial de multiples obstacles  $\mathcal{B}_\delta^k = \mathbf{c}_k + \delta\widehat{\mathcal{B}}$  pour  $k = 1, \dots, K$  et réécrire l'analyse asymptotique de ce problème avec la méthode de notre choix,
- le second consiste, à partir des développements obtenus dans le cadre de la diffraction simple, à en déduire des modèles réduits pour la diffraction multiple.

Le premier point de vue engendre, dans le contexte des développements asymptotiques raccordés, des changements dans la définition des domaines asymptotiques. Le domaine asymptotique de champ lointain  $\Omega^*$  sera l'espace libre privé des centres des obstacles

$$\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^K \{c_k\}.$$

En champ proche, si la distance caractéristique  $d_{\min}$ , qui est la distance minimale séparant deux obstacles, est supérieure à  $\delta$  ( $d \gg \delta$ ), il y aura  $K$  développements internes distincts définis dans la variable rapide associée, donnée par

$$\mathbf{X}^k = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_k}{\delta}.$$

Dans la variable  $\mathbf{X}^k$ , le domaine de champ proche associé reste  $\hat{\Omega}$ , voir Figure 2.3. Par ailleurs, le principe de raccord sera exprimé dans  $K$  zones intermédiaires distinctes comme cela est illustré sur la Figure 2.5.

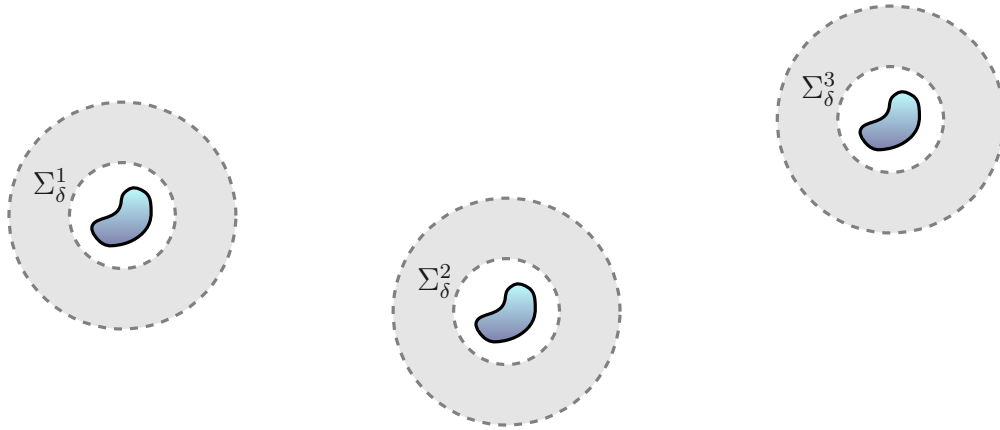


FIGURE 2.5 – Zone de raccordement dans le contexte de multiples obstacles ( $K = 3$ ).

Le second point de vue ne reprend pas la mise en œuvre complète de la méthode asymptotique. En suivant l'idée de Foldy (1945), revue par Challa *et al.* (2014) dans le contexte de l'électromagnétisme, les champs totaux  $\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{tot}}$  sont représentés par un principe de superposition

$$\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \sum_{k=1}^K \mathbb{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) A_k \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} = \mathbf{H}^{\text{inc}} + \sum_{k=1}^K \mathbb{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) B_k, \quad (2.25)$$

où  $\mathbb{G}$  désigne le tenseur de Green introduit dans (1.24) et  $A_k$  et  $B_k$  désignent des vecteurs constants à déterminer pour  $k = 1, \dots, K$ . Les champs  $\mathbf{E}_{\delta,k}^I$  et  $\mathbf{H}_{\delta,k}^I$  définis par

$$\mathbf{E}_{\delta,k}^I = \mathbf{E}_{\delta}^{\text{tot}} - \mathbb{G}(\cdot, \mathbf{c}_k)A_k \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{\delta,k}^I = \mathbf{H}_{\delta}^{\text{tot}} - \mathbb{G}(\cdot, \mathbf{c}_k)B_k \quad (2.26)$$

correspondent aux champs incidents vus par le  $k$ -ième obstacle en la présence des  $K$  obstacles. L'hypothèse de ...

« [...] making the strength of the scattered wave from a scatterer proportional to the external field acting on it [...] » [Foldy \(1945\)](#),

suggère que les amplitudes  $A_k$  et  $B_k$  soient respectivement proportionnelles aux champs incidents locaux  $\mathbf{E}_{\delta,k}^I$  et  $\mathbf{H}_{\delta,k}^I$  évalués en le centre de l'obstacle, c'est-à-dire

$$A_k = g_k^e \mathbf{E}_{\delta,k}^I(\mathbf{c}_k) \quad \text{et} \quad B_k = g_k^h \mathbf{H}_{\delta,k}^I(\mathbf{c}_k),$$

où les coefficients  $g_k^e$  et  $g_k^h$  sont appelés coefficients de diffraction associés au  $k$ -ième obstacle. D'après (2.25) et (2.26), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\delta,k}^I(\mathbf{c}_k) &= \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K g_{\ell}^e \mathbb{G}(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{\ell}) \mathbf{E}_{\delta,\ell}^I(\mathbf{c}_{\ell}), \\ \mathbf{H}_{\delta,k}^I(\mathbf{c}_k) &= \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K g_{\ell}^h \mathbb{G}(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{\ell}) \mathbf{H}_{\delta,\ell}^I(\mathbf{c}_{\ell}). \end{aligned}$$

Ainsi, l'approximation des champs totaux  $\mathbf{E}_{\delta}^{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\delta}^{\text{tot}}$  s'écrit

$$\mathbf{E}_{\delta}^{\text{tot}} \approx \mathbf{E}^{\text{inc}} + \sum_{k=1}^K g_k^e \mathbb{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) \mathbf{E}_{\delta,k}^I(\mathbf{c}_k) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{\delta}^{\text{tot}} \approx \mathbf{H}^{\text{inc}} + \sum_{k=1}^K g_k^h \mathbb{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) \mathbf{H}_{\delta,k}^I(\mathbf{c}_k).$$

**Remarque 2.12.** L'hypothèse selon laquelle les amplitudes sont proportionnelles aux champs incidents locaux évalués au centre de l'obstacle est valable seulement dans le cas de la diffraction par des sphères. Dans un cadre plus général, il est nécessaire d'introduire des tenseurs spécifiques à l'électromagnétisme comme dans [Ammari et al. \(2005\)](#) ou [Bouzekri et Sini \(2019\)](#). Ces tenseurs sont introduits dans la Section 3.3.3.

Dans le cadre de l'approximation asymptotique, les champs totaux  $\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{tot}}$  sont approchés, d'après le principe de superposition, par

$$\mathbf{E}_\delta^{\text{tot}} \approx \mathbf{E}^{\text{inc}} + \sum_{k=1}^K \mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta^{\text{tot}} \approx \mathbf{H}^{\text{inc}} + \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}},$$

où les champs  $\mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}}$  et  $\mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}}$  désignent des approximations des champs électromagnétiques diffractés autour du  $k$ -ième obstacle, obtenues avec une méthode asymptotique d'approximation. Nous supposons que pour le problème de diffraction simple, il existe une application  $\Xi_k$  linéaire en chacune de ses variables, qui, aux champs incidents, associe une approximation  $(\mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}}, \mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}})$  des champs diffractés dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_\delta^k}$ ,

$$\Xi_k : (\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}) \mapsto (\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k), \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k)) \mapsto (\mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}}, \mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}}).$$

En particulier, il existe une matrice  $\mathbb{X}_k$  telle que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}} \\ \mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}} \end{pmatrix} = \mathbb{X}_k \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \\ \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

**Remarque 2.13.** Cette formulation peut être généralisée en considérant que  $\Xi_k^1 = \Xi_k$  correspond à l'application linéaire qui aux champs incidents associe une approximation à l'ordre 1. Ainsi, si  $\Xi_k^P$  est l'application linéaire en chacune de ses variables, qui, aux champs incidents, associe une approximation des champs diffractés à l'ordre  $P$ ,

$$\begin{aligned} \Xi_k^P : (\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}) &\mapsto (\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k), \dots, \mathbb{D}^P \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k), \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k), \dots, \mathbb{D}^P \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k)) \\ &\mapsto (\mathbf{E}_{\delta,k}^{P,\text{app}}, \mathbf{H}_{\delta,k}^{P,\text{app}}). \end{aligned}$$

alors il existe une matrice  $\mathbb{X}_k^P$  telle que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}} \\ \mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}} \end{pmatrix} = \mathbb{X}_k^P \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \\ \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \\ \vdots \\ \mathbb{D}^P \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \\ \mathbb{D}^P \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix}.$$

L'écriture précédente est abusive dans le sens où les dérivées  $P$ -ièmes des champs incidents ne sont pas des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Il faut rigoureusement écrire les différentes composantes de

ces tenseurs les uns en dessous des autres.

Dans le contexte de la diffraction multiple, les champs incidents  $\mathbf{E}_{\delta,k}^I$  et  $\mathbf{H}_{\delta,k}^I$  vus par le  $k$ -ième obstacle sont donnés par

$$\mathbf{E}_{\delta,k}^I = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{E}_{\delta,\ell}^{\text{app}}, \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{\delta,k}^I = \mathbf{H}^{\text{inc}} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{H}_{\delta,\ell}^{\text{app}}. \quad (2.28)$$

Ainsi, en substituant les expressions (2.28) dans le système (2.27), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}} \\ \mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}} \end{pmatrix} = \mathbb{X}_k \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{E}_{\delta,\ell}^{\text{app}}(\mathbf{c}_k) \\ \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{H}_{\delta,\ell}^{\text{app}}(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix}.$$

Ce système implicite fait intervenir de part et d'autre de l'égalité les champs de vecteurs inconnus  $\mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}}$  et  $\mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}}$ . En réordonnant les termes de l'équation, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\delta,k}^{\text{app}} \\ \mathbf{H}_{\delta,k}^{\text{app}} \end{pmatrix} - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbb{X}_k \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\delta,\ell}^{\text{app}}(\mathbf{c}_k) \\ \mathbf{H}_{\delta,\ell}^{\text{app}}(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix} = \mathbb{X}_k \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \\ \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix}.$$

C'est l'approche que nous détaillerons dans la Section 4.3.2.

**Remarque 2.14.** *L'approximation de Born considère simplement que les champs diffractés locaux ne sont affectés que par les champs incidents,*

$$\mathbf{E}_{\delta,k}^I = \mathbf{E}^{\text{inc}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{\delta,k}^I = \mathbf{H}^{\text{inc}}.$$

*Cette approximation néglige les interactions entre les différents obstacles. Elle définit une bonne approximation de la solution uniquement si les obstacles sont suffisamment éloignés les uns des autres, en comparaison avec la longueur d'onde.*

## 2.4 Conclusion

Les différentes méthodes asymptotiques, comme la méthode des développements asymptotiques raccordés ou la méthode des développements multi-échelles, permettent d'obtenir des approximations des champs électromagnétiques pour le problème de diffraction par un petit obstacle. Dans le Chapitre 3, nous mettons en œuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés appliqué à ce problème. Dans la Section



3.3, nous explicitons les premiers termes des développements dans le cadre d'une géométrie sphérique, jusqu'au deuxième ordre pour le développement interne et jusqu'au cinquième ordre pour le développement externe. Ces développements donnent lieu, dans la Section 3.3.3, à une généralisation des premiers termes non-nuls dans le cadre non-sphérique.

Les modèles asymptotiques pour la diffraction multiple apparaissent simples à mettre en œuvre à partir des développements asymptotiques pour la diffraction simple. L'approximation de Born peut être considérée comme l'approximation d'ordre zéro des modèles de Foldy. Ces méthodes ont déjà donné lieu à différents travaux comme [Challa et al. \(2014\)](#) ou [Bouzekri et Sini \(2019\)](#). Les modèles de Born et de Foldy-Lax du premier ordre sont détaillés dans la Section 4.3, utilisant les développements asymptotiques raccordés.

# CHAPITRE 3

## LES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS

### Sommaire

---

<b>3.1 Construction des développements</b> . . . . .	<b>72</b>
3.1.1 Rappel des notations . . . . .	72
3.1.2 Algorithme de construction . . . . .	74
3.1.3 Existence et unicité des termes des développements asymptotiques	80
<b>3.2 Justification du raccord</b> . . . . .	<b>84</b>
3.2.1 Décomposition modale harmonique . . . . .	84
3.2.2 Décomposition modale statique . . . . .	86
3.2.3 Décomposition modale emboîtée . . . . .	88
3.2.4 Raccord des solutions . . . . .	91
<b>3.3 Premiers termes</b> . . . . .	<b>93</b>
3.3.1 Lemmes préliminaires . . . . .	93
3.3.2 Cas sphérique . . . . .	94
3.3.3 Cas général . . . . .	107
<b>3.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>110</b>

---

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un état de l'art autour du problème de diffraction par un obstacle dont la taille caractéristique est petite en comparaison avec la longueur d'onde. Dans la Section 2.2, nous avons introduit les principes généraux des méthodes d'analyse asymptotique, puis, présenté de manière formelle l'application des deux grandes méthodes issues de cette branche de l'analyse qui sont la méthode des développements asymptotiques raccordés et la méthode des développements

multi-échelles. Nous avons vu que ces deux méthodes mènent à des développements similaires ; toutefois leur analyse apparaît légèrement différente.

Dans ce chapitre, nous présentons de manière rigoureuse les développements asymptotiques raccordés dans le cadre de la diffraction d'une onde électromagnétique par un petit obstacle de forme arbitraire. Après avoir rappelé les notations introduites dans la Section 2.2.1, nous présentons dans la Section 3.1.2 un algorithme de construction des développements asymptotiques. Ensuite, nous établissons dans la Section 3.1.3 des résultats d'existence et d'unicité d'une solution aux problèmes locaux vérifiés par chacun des termes des développements en champ lointain et en champ proche, aussi appelés développements externe et internes. Dans la Section 3.2, nous justifions le raccord entre les développements en champ proche et en champ lointain à l'aide des décompositions modales des champs électromagnétiques associées aux problèmes respectifs. Enfin, dans la Section 3.3, nous donnons un cadre pratique d'utilisation et en particulier, nous explicitons de manière analytique les trois premiers termes des développements internes et externes dans le cas sphérique.

## 3.1 Construction des développements

Dans un premier temps, nous présentons le problème étudié et nous résumons les notations introduites dans la Section 2.2.1 concernant les développements asymptotiques raccordés. Dans un second temps, nous présentons l'algorithme récursif utilisé pour construire les termes successifs dans les développements asymptotiques.

### 3.1.1 Rappel des notations

Nous considérons le problème de diffraction (2.8) d'une onde électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda$  par un petit obstacle  $\mathcal{B}_\delta$  parfaitement conducteur, contenant l'élément  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  et de taille caractéristique  $\delta > 0$  telle que

$$\kappa \delta \ll 1 \quad \text{avec } \kappa = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Sa frontière est notée  $\Gamma_\delta$ . Une telle géométrie est introduite dans la Section 2.1.2. Le problème vérifié par les champs électromagnétiques diffractés, notés  $\mathbf{E}_\delta$  et  $\mathbf{H}_\delta$ , dans le

domaine extérieur  $\Omega_\delta = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_\delta}$  est donné par

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_\delta - i\kappa \mathbf{H}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega_\delta, \\ \nabla \times \mathbf{H}_\delta + i\kappa \mathbf{E}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega_\delta, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_\delta = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_\delta = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r (\mathbf{H}_\delta \times \hat{x} - \mathbf{E}_\delta) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}. \end{cases}$$

Dans le domaine de champ lointain  $\tilde{\Omega}_\delta$  défini par (2.11), les champs électromagnétiques diffractés  $\mathbf{E}_\delta$  et  $\mathbf{H}_\delta$  sont approchés par un développement externe, donné par

$$\mathbf{E}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \tilde{\mathbf{E}}_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta(\mathbf{x}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \tilde{\mathbf{H}}_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \tilde{\mathbf{H}}_p(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

où chaque terme des développements externes sont définis dans le domaine épointé  $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{c}\}$ . Dans le domaine de champ proche  $\hat{\Omega}_\delta$  défini par (2.15), les champs électromagnétiques diffractés sont approchés par un développement interne, donné par

$$\mathbf{E}_\delta(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \hat{\mathbf{E}}_\delta(\mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \hat{\mathbf{E}}_p(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta(\mathbf{c} + \delta \mathbf{X}) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \hat{\mathbf{H}}_\delta(\mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \hat{\mathbf{H}}_p(\mathbf{X}),$$

où  $\mathbf{X}$  désigne la variable rapide (2.14). Chacun des termes des développements internes sont définis dans le domaine mis à l'échelle  $\hat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\hat{\mathcal{B}}}$ , où  $\hat{\mathcal{B}}$  désigne l'obstacle de référence contenant l'origine.

Les deux approximations locales, approchant la même solution, sont raccordées en un sens asymptotique de sorte à exhiber et résoudre les comportements singuliers de chacun des termes issus des développements asymptotiques. Les conditions de raccord obtenues dans (2.19) sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{pour } -p \leq q < 0 : & \tilde{\mathbf{E}}_p^q(\hat{x}) = \hat{\mathbf{E}}_{p+q}^q(\hat{x}) & \text{et} & \tilde{\mathbf{H}}_p^q(\hat{x}) = \hat{\mathbf{H}}_{p+q}^q(\hat{x}), \\ \text{pour } q < -p : & \tilde{\mathbf{E}}_p^q(\hat{x}) = 0 & \text{et} & \tilde{\mathbf{H}}_p^q(\hat{x}) = 0, \\ \text{pour } 0 \leq q \leq p : & \hat{\mathbf{E}}_p^q(\hat{x}) = \tilde{\mathbf{E}}_{p-q}^q(\hat{x}) & \text{et} & \hat{\mathbf{H}}_p^q(\hat{x}) = \tilde{\mathbf{H}}_{p-q}^q(\hat{x}), \\ \text{pour } q > p : & \hat{\mathbf{E}}_p^q(\hat{x}) = 0 & \text{et} & \hat{\mathbf{H}}_p^q(\hat{x}) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans les expressions précédentes, les termes  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^q, \widetilde{\mathbf{E}}_p^q)$  et  $(\widehat{\mathbf{E}}_p^q, \widehat{\mathbf{E}}_p^q)$  désignent les champs angulaires issus des développements de Taylor (2.17) et (2.18) apparaissant comme facteur d'une puissance de  $\kappa r$  (ou de  $\kappa R$ ) d'ordre  $q$  – où  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{c}|$  et  $R = \frac{r}{\delta}$ . Les deux premières conditions de raccord permettent de déterminer la partie singulière, c'est-à-dire croissante vers l'infini en  $\mathbf{c}$ , des termes successifs du développement externe. En effet, ces conditions impliquent que l'ordre de la singularité associé au  $p$ -ième terme du développement externe est au minimum égal à  $-p$  et de plus, ce comportement est déterminé à l'aide des  $(p+q)$ -ièmes termes du développement interne pour  $-p \leq q < 0$ . Ainsi, pour  $q$  négatif, les  $(p+q)$ -ièmes termes font référence à des termes apparaissant en amont dans les développements internes, c'est-à-dire strictement avant les  $p$ -ièmes termes. Réciproquement, les deux dernières conditions de raccord permettent de déterminer la partie singulière, c'est-à-dire croissante à l'infini, des termes successifs du développement interne. Elles impliquent notamment que l'ordre de la singularité associé au  $p$ -ième terme du développement interne est au plus égal à  $p$  et par ailleurs, ce comportement est relié aux  $(p-q)$ -ièmes termes du développement externe pour  $0 \leq q \leq p$ . Les entiers  $q$  sont positifs ou nuls donc les  $(p-q)$ -ièmes termes font référence aux termes précédents (pour  $q > 0$ ) ou au terme du même ordre (pour  $q = 0$ ) issus des développements externes. De là, nous comprenons que les termes des développements asymptotiques seront déterminés de manière successive et récurrente en champ lointain puis en champ proche.

### 3.1.2 Algorithme de construction

Les termes successifs des développements asymptotiques sont construits selon un procédé de récurrence sur les indices  $p$  qui nous est dicté par le principe de raccord (3.2). L'initialisation a lieu pour  $p = 0$ ; en particulier, les conditions de raccord (3.2) à l'ordre zéro, sont données par

$$\begin{cases} (\widetilde{\mathbf{E}}_0^q, \widetilde{\mathbf{H}}_0^q) = (0, 0) & \text{pour tout } q < 0, \\ (\widehat{\mathbf{E}}_0^0, \widehat{\mathbf{H}}_0^0) = (\widetilde{\mathbf{E}}_0^0, \widetilde{\mathbf{H}}_0^0), \\ (\widehat{\mathbf{E}}_0^q, \widehat{\mathbf{H}}_0^q) = (0, 0) & \text{pour tout } q > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous en déduisons que le terme d'ordre zéro dans les développements externes n'admet pas de singularité en  $c$ , et par conséquent, vérifie le problème (2.20) pour  $p = 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widetilde{\mathbf{E}}_0 - i\kappa \widetilde{\mathbf{H}}_0 = 0 & \text{dans } \Omega^*, \\ \nabla \times \widetilde{\mathbf{H}}_0 + i\kappa \widetilde{\mathbf{E}}_0 = 0 & \text{dans } \Omega^*, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \widetilde{\mathbf{H}}_0 \times \hat{x} - \widetilde{\mathbf{E}}_0 \right) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}, \\ (\widetilde{\mathbf{E}}_0, \widetilde{\mathbf{H}}_0) = O(1) & \text{lorsque } r \rightarrow 0, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

auquel nous avons ajouté le comportement en  $c$  donné par le raccord. Ce problème admet une unique solution dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \mathbb{R}^3)$  qui est la solution identiquement nulle. Cela implique également que  $(\widetilde{\mathbf{E}}_0^0, \widetilde{\mathbf{H}}_0^0) = (0, 0)$ . Ainsi, toujours d'après (3.3) et ce qui précède, le terme d'ordre zéro dans les développements internes n'admet pas de partie ni constante, ni croissante à l'infini, et par conséquent, vérifie le problème muni des équations (2.21), (2.23) et (2.24) pour  $p = 0$ , donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(c) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_0 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(c) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{\mathbf{E}}_0 \cdot \mathbf{n} \, d\widehat{\Gamma} = 0, \\ (\widehat{\mathbf{E}}_0, \widehat{\mathbf{H}}_0) = O(R^{-1}) & \text{lorsque } R \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

auquel nous avons ajouté le comportement à l'infini donné par le raccord. Ces équations sont découplées en  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  et les problèmes se réécrivent indépendamment

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(c) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_0 \, d\widehat{\Gamma} = 0, \\ \widehat{\mathbf{E}}_0 = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

et

$$\begin{cases} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_0 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_0 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_0 = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.6)$$

L'existence et l'unicité d'une solution à chacun de ces deux problèmes dans l'espace  $\mathbf{L}^2(\widehat{\Omega}) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega})$  est démontrée dans les Théorèmes 2 et 3.

Soit  $p$  un entier strictement positif fixé. Nous supposons que les termes des développements asymptotiques ont été calculés pour  $s = 0, \dots, p-1$ . Nous cherchons à calculer les  $p$ -ièmes termes. Les conditions de raccord (3.2) associées aux termes du développement externe sont données par

$$\begin{cases} (\widetilde{\mathbf{E}}_p^q, \widetilde{\mathbf{H}}_p^q) = (\widehat{\mathbf{E}}_{p+q}^q, \widehat{\mathbf{H}}_{p+q}^q), & \text{pour tout } -p \leq q < 0, \\ (\widetilde{\mathbf{E}}_p^q, \widetilde{\mathbf{H}}_p^q) = (0, 0), & \text{pour tout } q < -p. \end{cases}$$

En décomposant les termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_p$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_p$  en la somme de deux champs,

- $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}$ , respectivement  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$ , appelés partie singulière au centre  $\mathbf{c}$  des  $p$ -ièmes termes du développement externe, correspondant à des champs sortants à l'infini,
- $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$ , respectivement  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$ , obtenus comme la différence entre  $\widetilde{\mathbf{E}}_p$ , respectivement  $\widetilde{\mathbf{H}}_p$ , avec les parties singulières  $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$ ,

nous observons, d'après les conditions de raccord que la partie singulière en  $\mathbf{c}$  de  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p, \widetilde{\mathbf{H}}_p)$ , notée  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}})$ , admet le développement de Taylor suivant

$$\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sum_{q=1}^p \frac{1}{(\kappa r)^q} \widehat{\mathbf{E}}_{p-q}^{-q}(\widehat{\mathbf{x}}) + O(1) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sum_{q=1}^p \frac{1}{(\kappa r)^q} \widehat{\mathbf{H}}_{p-q}^{-q}(\widehat{\mathbf{x}}) + O(1). \quad (3.7)$$

Les champs  $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = \widetilde{\mathbf{E}}_p - \widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = \widetilde{\mathbf{H}}_p - \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$  admettent le comportement asymptotique suivant

$$(\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}, \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}) = O(1) \quad \text{lorsque } r \rightarrow 0.$$

Ainsi, la partie régulière des  $p$ -ièmes termes du développement externe vérifient le problème (3.4) dans l'espace libre tout entier, donné par

$$\begin{cases} \nabla \times \widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} - i\kappa \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} + i\kappa \widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} \times \hat{x} - \widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} \right) = 0 & \text{uniformément en } \hat{x}. \end{cases}$$

Cela implique que  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}, \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}) = (0, 0)$ .

**Proposition 3.1.** *Pour tout  $p \geq 0$ , les parties régulières  $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$  issues des termes des développements externes sont identiquement nulles.*

Les conditions de raccord (3.2) associées aux termes du développement interne sont données par

$$\begin{cases} (\widehat{\mathbf{E}}_p^q, \widehat{\mathbf{H}}_p^q) = (\widetilde{\mathbf{E}}_{p-q}^q, \widetilde{\mathbf{H}}_{p-q}^q), & \text{pour tout } 0 \leq q \leq p, \\ (\widehat{\mathbf{E}}_p^q, \widehat{\mathbf{H}}_p^q) = (0, 0), & \text{pour tout } q > p. \end{cases}$$

En décomposant les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p$  en la somme de deux champs,

- $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}$ , respectivement  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$ , appelés partie croissante à l'infini des  $p$ -ièmes termes du développement interne, correspondant à des champs croissant à l'infini,
- $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$ , respectivement  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$ , correspondant à la différence entre  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}$ , respectivement entre  $\widehat{\mathbf{H}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$ ,

nous déduisons, d'après le raccord, que la partie croissante à l'infini de  $(\widehat{\mathbf{E}}_p, \widehat{\mathbf{H}}_p)$  admet le développement asymptotique suivant à l'infini

$$\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{q=0}^p (\kappa R)^q \widetilde{\mathbf{E}}_{p-q}^q(\hat{x}) + O(R^{-1}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{q=0}^p (\kappa R)^q \widetilde{\mathbf{H}}_{p-q}^q(\hat{x}) + O(R^{-1}).$$

Les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = \widehat{\mathbf{E}}_p - \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = \widehat{\mathbf{H}}_p - \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$  admettent quant à eux le comportement asymptotique suivant

$$(\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}) = O(R^{-1}) \quad \text{lorsque } R \rightarrow +\infty.$$



La partie régulière des  $p$ -ièmes termes du développement interne vérifient les problèmes découplés munis des équations (2.21), (2.23) et (2.24), donnés par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_{p-1} - \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = -\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = -\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}} - \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} d\widehat{\Gamma} = -\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} d\widehat{\Gamma}, \\ \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_{p-1} - \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = -\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = -\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}} - \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Pour que ces problèmes soient bien posés dans  $L^2(\widehat{\Omega}) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega})$ , nous imposons que les parties singulières associées aux  $p$ -ièmes termes des développements internes vérifient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\widehat{\Gamma}}, \widehat{\Gamma}), \\ \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_{p-1} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} d\widehat{\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}), \\ \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_{p-1} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Ainsi, les problèmes réguliers de champ proche deviennent

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = -\mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}} + \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} d\widehat{\Gamma} = 0, \\ \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

et

$$\begin{cases} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = -\mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}} + \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.12)$$

L'existence et l'unicité d'une solution à ces deux problèmes dans  $L^2(\widehat{\Omega}) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega})$  est démontrée dans les Théorèmes 2 et 3. Par ailleurs, les parties singulières  $(\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}})$  sont des solutions particulières des équations (3.10). Pour la résolution, nous introduisons une décomposition de la partie singulière  $(\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}})$  de la forme

$$\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}} = \sum_{\ell=1}^p \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}} = \sum_{\ell=1}^p \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell},$$

où pour  $\ell = 1, \dots, p$ , chaque terme  $(\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}, \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell})$  admet le comportement asymptotique suivant,

$$(\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}, \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell}) = O(R^{\ell-3}) \quad \text{lorsque } R \rightarrow +\infty.$$

En notant de plus  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,0} = \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{p,0} = \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$ , nous définissons les équations récurrentes vérifiées par chacun des sous-termes issus de la partie singulière. Pour tout  $\ell = 1, \dots, p$ , nous avons

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\widehat{\Omega}), \\ \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_{p-1,\ell-1} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \, d\widehat{\Gamma} = 0, \\ \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} = O(R^{\ell-3}) & R \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad \begin{cases} \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\widehat{\Omega}), \\ \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell} = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_{p-1,\ell-1} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell} = O(R^{\ell-3}) & R \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.13)$$

**Proposition 3.2.** *Si, pour  $\ell = 1, \dots, p$ , les termes successifs  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell}$  vérifient les équations de Maxwell emboîtées (3.13) alors les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p$  issus des développements internes vérifient les problèmes emboîtés (3.8) et (3.9).*

*Démonstration.* Nous avons décomposé les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p$  associés aux développements internes sous la forme

$$\widehat{\mathbf{E}}_p = \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} + \sum_{\ell=1}^p \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} = \sum_{\ell=0}^p \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_p = \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} + \sum_{\ell=1}^p \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell} = \sum_{\ell=0}^p \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell}$$

en identifiant  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} = \widehat{\mathbf{E}}_{p,0}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} = \widehat{\mathbf{H}}_{p,0}$ . Supposons que pour  $\ell = 1, \dots, p$ , les termes

successifs  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell}$  vérifient les équations volumiques de Maxwell emboîtées (3.13). Alors, les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p$  vérifient les équations volumiques issues de (3.8) et (3.9),

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_p = \sum_{\ell=1}^p \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} = i\kappa \sum_{\ell=1}^p \widehat{\mathbf{H}}_{p-1,\ell-1} = i\kappa \left( \widehat{\mathbf{H}}_{p-1}^{\text{reg}} + \sum_{\ell=1}^{p-1} \widehat{\mathbf{H}}_{p-1,\ell} \right) = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_{p-1}, \\ \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_p = \sum_{\ell=1}^p \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell} = -i\kappa \sum_{\ell=1}^p \widehat{\mathbf{E}}_{p-1,\ell-1} = -i\kappa \left( \widehat{\mathbf{E}}_{p-1}^{\text{reg}} + \sum_{\ell=1}^{p-1} \widehat{\mathbf{E}}_{p-1,\ell} \right) = i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_{p-1}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p = \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} + \sum_{\ell=1}^p \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} = 0 \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p = \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} + \sum_{\ell=1}^p \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell} = 0. \end{array} \right.$$

□

### 3.1.3 Existence et unicité des termes des développements asymptotiques

L'existence et l'unicité des termes des développements externes et internes est garantie par l'existence et l'unicité de leurs parties régulières  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}, \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}})$  et  $(\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}})$ . Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Pour tout  $p \geq 0$ , les parties régulières  $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$  issues des termes des développements externes sont uniques et identiquement nulles. Pour tout  $p \geq 0$ , les parties régulières  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$  issues des termes des développements internes existent et sont uniques dans  $\mathbf{L}^2(\widehat{\Omega}) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega})$ .*

Le résultat concernant le développement externe est obtenu dans la Proposition 3.1. Le résultat concernant le développement interne est détaillé ci-dessous, dans les Théorèmes 2 et 3.

Les problèmes en champ proche s'articulent autour du problème de Maxwell statique

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{u} = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

muni d'une des conditions de frontière suivantes

$$(a) \begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \hat{\Gamma}, \\ \int_{\hat{\Gamma}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\hat{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad (b) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{sur } \hat{\Gamma}, \quad (3.15)$$

avec  $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\hat{\Gamma}}, \hat{\Gamma})$  ou  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma})$ , où nous ajoutons une condition de charge nulle uniformément sur la surface  $\hat{\Gamma}$  pour la condition (a). Nous introduisons l'espace de Sobolev à poids pour les fonctions scalaires donné par

$$\mathcal{W}(\hat{\Omega}) = \left\{ v : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^3, \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} v \in L^2(\hat{\Omega}), \nabla v \in L^2(\hat{\Omega}) \right\}, \quad (3.16)$$

muni de la norme du graphe associée

$$\|v\|_{\mathcal{W}(\hat{\Omega})}^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\hat{\Omega})}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} v \right\|_{L^2(\hat{\Omega})}^2.$$

**Théorème 2.** *Étant donnée  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma})$ , le problème (3.14) muni de la condition de frontière (b) issue de (3.15) admet une unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\hat{\Omega}) \cap \mathbf{H}_{loc}^1(\hat{\Omega})$ . De plus,  $\mathbf{u}$  admet la décomposition  $\mathbf{u} = -\nabla V$  où  $V \in \mathcal{W}(\hat{\Omega})$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  dans  $\hat{\Omega}$ , une décomposition en potentiel comme celle présentée dans [Amrouche et al. \(1998\)](#) a lieu ; en particulier, il existe un potentiel scalaire  $V$  tel que

$$\mathbf{u} = -\nabla V.$$

Puisque  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  dans  $\hat{\Omega}$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g$  sur  $\hat{\Gamma}$ , le potentiel scalaire  $V$  vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \hat{\Omega}, \\ \partial_n V = -g & \text{sur } \hat{\Gamma}, \end{cases}$$

qui, pour  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma})$ , admet une unique solution  $V$  dans l'espace  $\mathcal{W}(\hat{\Omega})$  défini par (3.16). En effet, comme l'application trace qui à  $u$  associe  $\partial_n u$  est surjective depuis l'espace  $H^1(\Delta, \hat{\Omega})$ , défini par

$$H^1(\Delta, \hat{\Omega}) = \left\{ v \in H^1(\hat{\Omega}), \Delta v \in L^2(\hat{\Omega}) \right\},$$

dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma})$ , nous considérons un relèvement  $w \in H^1(\Delta, \hat{\Omega})$  de la trace Neumann  $g$  tel que  $\partial_n w = -g$ . Nous considérons une fonction de troncature  $\chi$  qui vaut 1 dans un voisinage ouvert contenant l'obstacle  $\hat{\mathcal{B}}$  et vaut 0 à l'infini, de sorte à ce que  $\chi w$

appartienne à  $H^1(\Delta, \widehat{\Omega})$  et soit à support compact dans  $\widehat{\Omega}$ . Ainsi, la différence  $\widetilde{V} = V - \chi w$  vérifie le problème suivant au sens des distributions

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{V} = \Delta(\chi w) & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \partial_n \widetilde{V} = 0 & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \end{cases} \quad (3.17)$$

qui est équivalent à rechercher  $\widetilde{V} \in \mathcal{W}(\widehat{\Omega})$  vérifiant la formulation variationnelle

$$a_0(\widetilde{V}, \psi) = \ell(\psi) \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{W}(\widehat{\Omega}),$$

où

$$a_0(\widetilde{V}, \psi) = \int_{\widehat{\Omega}} \nabla \widetilde{V} \cdot \nabla \psi \, d\widehat{\Omega} \quad \text{et} \quad \ell(\psi) = - \int_{\widehat{\Omega}} \Delta(\chi w) \psi \, d\widehat{\Omega}.$$

D'après l'inégalité de [Hardy et al. \(1952\)](#), nous avons la coercivité de l'application bilinéaire  $a_0$  dans  $\mathcal{W}(\widehat{\Omega})$ ,

$$a_0(\widetilde{V}, \widetilde{V}) \geq c \|\widetilde{V}\|_{\mathcal{W}(\widehat{\Omega})}^2,$$

et de plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque  $\chi w$  est à support compact dans  $\widehat{\Omega}$ , nous obtenons la continuité de  $\ell$  dans  $\mathcal{W}(\widehat{\Omega})$ ,

$$\ell(\psi) \leq \|\sqrt{1 + R^2} \Delta(\chi w)\|_{L^2(\widehat{\Omega})} \left\| \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}} \psi \right\|_{L^2(\widehat{\Omega})} \leq c \|\psi\|_{\mathcal{W}(\widehat{\Omega})}.$$

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (3.17) admet une unique solution  $V \in \mathcal{W}(\widehat{\Omega})$ . Ainsi, il existe une unique solution  $\mathbf{u}$  de (3.14) muni de la condition de frontière (b) vérifiant

$$\mathbf{u} = -\nabla V \in \mathbf{L}^2(\widehat{\Omega}).$$

De plus,  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\nabla \times, \widehat{\Omega}) \cap \mathbf{H}(\nabla \cdot, \widehat{\Omega})$  donc  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega}) \cap \mathbf{L}^2(\widehat{\Omega})$ .  $\square$

**Théorème 3.** *Étant donné  $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\widehat{\Gamma}}, \widehat{\Gamma})$ , le problème (3.14) muni de la condition de frontière (a) issue de (3.15) admet une unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\widehat{\Omega})$ . De plus,  $\mathbf{u}$  admet la décomposition  $\mathbf{u} = -\nabla V$  avec  $V \in \mathcal{W}(\widehat{\Omega})$ .*

*Démonstration.* Nous procédons comme dans la démonstration précédente et nous introduisons le potentiel scalaire  $V$  tel que  $\mathbf{u} = -\nabla V$  vérifiant le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla_{\widehat{\Gamma}} V = \mathbf{n} \times \mathbf{g} & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \partial_n V \, d\widehat{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

avec  $\mathbf{n} \times \mathbf{g} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\widehat{\Gamma}}, \widehat{\Gamma})$ . Les deux dernières équations engendrent un problème vérifié sur la surface  $\widehat{\Gamma}$  par le potentiel  $V$  au sens des distributions

$$-\Delta_{\widehat{\Gamma}} V = \text{div}_{\widehat{\Gamma}}(\mathbf{g} \times \mathbf{n}) \quad \text{sur } \widehat{\Gamma}, \quad (3.19)$$

D'après la théorie des problèmes hyper-faibles présentée dans [Lions et Magenes \(1968\)](#), il existe  $V^* \in H^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma})$  solution de (3.19), car  $\text{div}_{\widehat{\Gamma}}(\mathbf{g} \times \mathbf{n})$  vérifie la condition de compatibilité au sens des distributions,

$$\langle \text{div}_{\widehat{\Gamma}}(\mathbf{g} \times \mathbf{n}), 1 \rangle_{\widehat{\Gamma}} = 0.$$

D'autre part, toute solution  $V_c \in H^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma})$  de ce problème est donnée par

$$V_c = V^* + c,$$

avec  $c \in \mathbb{C}$ . En résolvant le problème de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta V_c = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ V_c = V^* + c & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \end{cases}$$

nous considérons  $V_c = V^* + cV^0 \in \mathcal{W}(\widehat{\Omega})$  le relèvement de la trace  $V_c \in H^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma})$ . Enfin, la constante  $c$  est déterminée en exploitant la condition

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \partial_n V_c \, d\widehat{\Gamma} = 0.$$

En effet,

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \partial_n V^* + c \partial_n V^0 \, d\widehat{\Gamma} = 0.$$

Comme  $V_0 = 1$  sur  $\widehat{\Gamma}$ ,

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \partial_n V^* \, d\widehat{\Gamma} = -c \int_{\widehat{\Gamma}} V^0 \partial_n V^0 \, d\widehat{\Gamma} = -c \int_{\widehat{\Omega}} \underbrace{|\nabla V^0|^2}_{\neq 0} \, d\widehat{\Omega}$$

à l'aide d'une intégration par parties. Cette relation détermine bien la constante  $c$  car  $V^0$  n'est pas identiquement nul. Ainsi, il existe un unique potentiel scalaire  $V \in \mathcal{W}(\widehat{\Omega})$  solution du problème (3.18), puis une unique solution  $\mathbf{u}$  de (3.14) muni de la condition de frontière (a) vérifiant

$$\mathbf{u} = -\nabla V \in \mathbf{L}^2(\widehat{\Omega}).$$

De plus, comme  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\nabla \times, \hat{\Omega}) \cap \mathbf{H}(\nabla \cdot, \hat{\Omega})$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\hat{\Omega}) \cap \mathbf{L}^2(\hat{\Omega})$ .  $\square$

## 3.2 Justification du raccord

Dans cette section, nous présentons les décompositions modales pour les termes successifs des développements asymptotiques externe et interne. Elles sont issues de la résolution des différents problèmes – harmonique, statique et emboîté – de Maxwell, par la technique de séparation de variables dans une géométrie sphérique, voir par exemple [Nédélec \(2001\)](#). Ces décompositions, qui font intervenir les coefficients spectraux associés aux différents champs, permettent d’expliciter les conditions de raccord (3.2) en fonction de ces coefficients spectraux, en considérant les développements de Taylor des décompositions.

### 3.2.1 Décomposition modale harmonique

Les termes  $\tilde{\mathbf{E}}_p$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_p$  associés au développement externe vérifient le problème harmonique de Maxwell (2.20) dans le domaine épointé  $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{c}\}$ . Dans la Section 3.1.2, nous avons vu que ces champs se décomposent en la somme d’un champ identiquement nul ( $\tilde{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}, \tilde{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$ ), voir Proposition 3.1 et d’un champ sortant ( $\tilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \tilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$ ) admettant le comportement asymptotique (3.7). Puisque ce sont des champs sortants, ils admettent la décomposition modale (6.13) dans tout domaine extérieur  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(\mathbf{c}, r)}$  à la boule  $\mathcal{B}(\mathbf{c}, r)$  centrée en  $\mathbf{c}$  de rayon  $r > 0$ , donnée par

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \tilde{\mathbf{h}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \\ \tilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -\tilde{\mathbf{h}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \tilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \end{cases} \quad (3.20)$$

avec  $\tilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p$  et  $\tilde{\mathbf{h}}_{n,m}^p \in \mathbb{C}$  désignent les coefficients spectraux (6.15) associés à la décomposition, et

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{y}) &= \frac{h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|)}{i\kappa|\mathbf{y}|} n(n+1) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) \hat{\mathbf{y}} + \tilde{h}_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) \nabla_s Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}), \\ \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{y}) &= h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) \text{rot}_s Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}), \end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$  et où la définition des harmoniques sphériques  $Y_{n,m}$  est donnée par (6.3), et celle des fonctions spéciales de Hankel est donnée par (6.6)-(6.16). Le principe de raccord est basé sur le développement de Taylor des champs lorsque  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{c}|$  tend vers

zéro. En particulier, les  $p$ -ièmes termes  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}})$  issus du développement externe admettent le développement de Taylor suivant, lorsque  $r \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \sum_{\ell=-n-2}^{\infty} (\kappa r)^\ell \widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell+1}}{i} \left( n(n+1)Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}})\widehat{\mathbf{x}} + (\ell+2)\nabla_s Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\ell=-n-1}^{\infty} (\kappa r)^\ell \widetilde{\mathbf{h}}_{n,m}^p \mathfrak{h}_{n,\ell} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \sum_{\ell=-n-2}^{\infty} (\kappa r)^\ell \widetilde{\mathfrak{h}}_{n,m}^p i \mathfrak{h}_{n,\ell+1} \left( n(n+1)Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}})\widehat{\mathbf{x}} + (\ell+2)\nabla_s Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\ell=-n-1}^{\infty} (\kappa r)^\ell \widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \mathfrak{h}_{n,\ell} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}, \end{aligned}$$

où les coefficients  $\mathfrak{h}_{n,\ell}$  désignent les coefficients issus du développement de Taylor des fonctions de Hankel définis par (6.7).

Dans le développement (3.7), le comportement radial *le plus singulier* du  $p$ -ième terme associé au développement externe est de l'ordre de  $r^{-p}$ . Ci-dessus et à  $n$  fixé, le comportement *le plus singulier* est de l'ordre de  $r^{-n-2}$ . Par identification de ces deux expressions, il vient que  $-n-2 \geq -p$ , c'est-à-dire  $n \leq p-2$ . Ainsi, les séries infinies (3.20) comportent un nombre fini de coefficients  $\widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p$  et  $\widetilde{\mathfrak{h}}_{n,m}^p$  non-nuls. En particulier, les développements modaux (3.20) des termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}$  deviennent

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{p-2} \sum_{m=-n}^n \widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \widetilde{\mathfrak{h}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \\ \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{p-2} \sum_{m=-n}^n -\widetilde{\mathfrak{h}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \end{cases} \quad (3.21)$$

**Remarque 3.1.** Comme nous avons vu que les termes  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p, \widetilde{\mathbf{H}}_p)$  associés au développement externe sont égaux à  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}})$ , et d'après (3.21), nous déduisons que le développement



externe  $(\widetilde{\mathbf{E}}_\delta, \widetilde{\mathbf{H}}_\delta)$  défini par (3.1) commence à partir du troisième ordre, c'est-à-dire

$$\widetilde{\mathbf{E}}_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{p=3}^{\infty} \delta^p \widetilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_\delta(\mathbf{x}) = \sum_{p=3}^{\infty} \delta^p \widetilde{\mathbf{H}}_p(\mathbf{x}).$$

**Proposition 3.3.** Les  $p$ -ièmes termes  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}})$  issus du développement externe admettent le développement de Taylor suivant, lorsque  $r \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = & \sum_{\ell=-p}^{\infty} (\kappa r)^\ell \left\{ \sum_{n=1}^{p-2} \sum_{m=-n}^n \widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell+1}}{\mathfrak{i}} \left( n(n+1)Y_{n,m}(\widehat{x})\widehat{x} + (\ell+2)\nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right) \right. \\ & \left. + \widetilde{\mathfrak{h}}_{n,m}^p \mathfrak{h}_{n,\ell} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}}(\mathbf{x}) = & \sum_{\ell=-p}^{\infty} (\kappa r)^\ell \left\{ \sum_{n=1}^{p-2} \sum_{m=-n}^n \widetilde{\mathfrak{h}}_{n,m}^p \mathfrak{i} \mathfrak{h}_{n,\ell+1} \left( n(n+1)Y_{n,m}(\widehat{x})\widehat{x} + (\ell+2)\nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right) \right. \\ & \left. + \widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \mathfrak{h}_{n,\ell} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\ell \geq -n-2$  et  $n \leq p-2$  impliquent  $\ell \geq -p$ .  $\square$

### 3.2.2 Décomposition modale statique

Les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p$  issus du développement interne sont décomposés en une partie  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$  qui vérifient les problèmes de Maxwell statiques (3.11) et (3.12) et une combinaison de champs  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell}$  vérifiant les problèmes emboîtés (3.13). Dans cette section, nous nous intéressons à la décomposition modale des solutions du problème de Maxwell statique s'appliquant à la partie régulière  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$ . Dans le cas le plus général où l'obstacle n'est pas de forme sphérique, nous introduisons le sous-domaine  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(0,r)}$  de  $\widehat{\Omega}$ , où  $r$  est choisi de sorte que  $\widehat{\mathcal{B}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\widehat{\Omega}}$  soit strictement inclus dans  $\overline{\mathcal{B}(0,r)}$ . Ce sous-domaine correspond au domaine de validité des décompositions modales pour les champs électromagnétiques statiques.

**Proposition 3.4.** Les champs électromagnétiques  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$  vérifiant les équations de

Maxwell statique (3.14) dans  $\widehat{\Omega}$  admettent la décomposition suivante dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(0, r)})$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}(\mathbf{X}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p}{R^{n+2}} \left( \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) - (n+1)Y_{n,m}(\widehat{x})\widehat{x} \right), \\ \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}(\mathbf{X}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p}{R^{n+2}} \left( \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) - (n+1)Y_{n,m}(\widehat{x})\widehat{x} \right),\end{aligned}\tag{3.24}$$

où les coefficients spectraux  $\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p$  et  $\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p$  sont définis par les projections de ces champs sur la base des harmoniques sphériques sur la sphère  $\partial\mathcal{B}(\mathbf{c}, r)$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p &= -\frac{r^n}{n(n+1)} \int_{\partial\mathcal{B}(0,r)} \left( \widehat{x} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}} \right) \cdot \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \, d\partial\mathcal{B}(\mathbf{c}, r), \\ \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p &= -\frac{r^n}{(n+1)} \int_{\partial\mathcal{B}(0,r)} \left( \widehat{x} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}} \right) Y_{n,m}(\widehat{x}) \, d\partial\mathcal{B}(\mathbf{c}, r).\end{aligned}\tag{3.25}$$

*Démonstration.* Nous montrons que le champ électrique  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  donné par (3.24) est à rotationnel et à divergence nuls, le calcul étant identique en champ magnétique. Nous supposons que le centre  $\mathbf{c}$  est l'origine afin de simplifier les calculs. Nous introduisons les formules intrinsèques du rotationnel et de la divergence appliqués à un champ de vecteurs régulier  $\mathbf{u} = u_r \widehat{x} + \mathbf{u}_t$ , où  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} \cdot \widehat{x}$  désigne la partie radiale de  $\mathbf{u}$  relativement à l'origine et  $\mathbf{u}_t$  la partie tangentielle  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_r \widehat{x}$  de  $\mathbf{u}$ , qui sont données par

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{R} (\mathbf{rot}_s \mathbf{u}_t) \widehat{x} + \frac{1}{R} \mathbf{rot}_s u_r + \frac{1}{R} \partial_R (R \widehat{x} \times \mathbf{u}_t), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{R^2} \partial_R (R^2 u_r) + \frac{1}{R} \text{div}_s \mathbf{u}_t,$$

afin de les appliquer à (3.24). Nous obtenons

$$\begin{aligned}\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p}{R^{n+2}} \left( -(n+1) \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{x}) - (n+1) \widehat{x} \times \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right) = 0, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p}{R^{n+1}} \left( n(n+1) Y_{n,m}(\widehat{x}) + \text{div}_s \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right) = 0.\end{aligned}$$

Ces égalités sont obtenues en utilisant les propriétés suivantes, concernant les opérateurs surfaciques et les harmoniques sphériques,

$$\mathbf{rot}_s \nabla_s Y_{n,m} = 0, \quad \widehat{x} \times \nabla_s Y_{n,m} = -\mathbf{rot}_s Y_{n,m}, \quad \text{div}_s \nabla_s Y_{n,m} = -n(n+1) Y_{n,m}. \tag{3.26}$$

□

### 3.2.3 Décomposition modale emboîtée

Dans cette Section, nous nous intéressons à la décomposition modale des solutions des problèmes de Maxwell emboîtés (3.13), s'appliquant aux différents termes issus de la partie singulière  $(\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{sing}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{sing}})$  de  $(\widehat{\mathbf{E}}_p, \widehat{\mathbf{H}}_p)$ . Les décompositions modales sont introduites dans le domaine  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(0, r)}$  défini comme dans le Paragraphe précédent.

**Proposition 3.5.** *Pour tout  $p \geq 1$  et pour tout  $\ell = 1, \dots, p$ , les champs électromagnétiques  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell}$  vérifiant les équations emboîtées (3.13) dans  $\widehat{\Omega}$  admettent la décomposition modale suivante dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(0, r)})$ ,*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}(\mathbf{X}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,1}(\mathbf{R}) \text{rot}_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,2}(\mathbf{R}) \nabla_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,3}(\mathbf{R}) Y_{n,m}(\widehat{x}) \widehat{x}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_{p,\ell}(\mathbf{X}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,\ell,1}(\mathbf{R}) \text{rot}_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,\ell,2}(\mathbf{R}) \nabla_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,\ell,3}(\mathbf{R}) Y_{n,m}(\widehat{x}) \widehat{x},\end{aligned}\tag{3.27}$$

où les coefficients radiaux  $\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,k}$  et  $\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,\ell,k}$  pour  $k = 1, 2, 3$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,1}(\mathbf{R}) &= -\frac{i\kappa^\ell}{\mathbf{R}^{n+2-\ell}} \frac{1}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-2}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-\ell}, & \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,\ell,1}(\mathbf{R}) &= \frac{i\kappa^\ell}{\mathbf{R}^{n+2-\ell}} \frac{1}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-2}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p-\ell}, \\ \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,2}(\mathbf{R}) &= -\frac{\kappa^\ell}{\mathbf{R}^{n+2-\ell}} \frac{\ell-n}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p-\ell}, & \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,\ell,2}(\mathbf{R}) &= -\frac{\kappa^\ell}{\mathbf{R}^{n+2-\ell}} \frac{\ell-n}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-\ell}, \\ \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,3}(\mathbf{R}) &= -\frac{\kappa^\ell}{\mathbf{R}^{n+2-\ell}} (n+1) \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p-\ell}, & \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,\ell,3}(\mathbf{R}) &= -\frac{\kappa^\ell}{\mathbf{R}^{n+2-\ell}} (n+1) \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-\ell}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

*Démonstration.* Nous montrons que le champ électrique  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$  défini par (3.27) vérifie les équations issues du premier système de (3.13), le calcul pouvant être calqué à partir de celui-ci pour le champ magnétique. Nous supposons que le centre  $c$  est l'origine du

repère. Nous exprimons le rotationnel de  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$  sous la forme suivante

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^1 \mathbf{rot}_S Y_{n,m} + \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^2 \nabla_S Y_{n,m} + \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^3 Y_{n,m} \hat{x},$$

que nous cherchons à identifier avec la décomposition modale de  $i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_{p-1,\ell-1}$ . Les coefficients radiaux associés à  $\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$  peuvent être explicités de la manière suivante

$$\begin{aligned} \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^1 &= \frac{1}{R} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,3} - \frac{1}{R} \partial_R \left[ R \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,2} \right] = i\kappa \frac{i\kappa^{\ell-1}}{R^{n+2-(\ell-1)}} \frac{1}{n} \frac{\ell(1+2n-\ell) \mathfrak{h}_{n,\ell-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p-\ell}, \\ \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^2 &= \frac{1}{R} \partial_R \left[ R \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,1} \right] = -i\kappa \frac{\kappa^{\ell-1}}{R^{n+2-(\ell-1)}} \frac{(\ell-1)-n}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,(\ell-1)-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-\ell} \\ \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^3 &= \frac{n(n+1)}{R} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,\ell,1} = -i\kappa \frac{\kappa^{\ell-1}}{R^{n+2-(\ell-1)}} \frac{\mathfrak{h}_{(\ell-1)-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} (n+1) \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-\ell} \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés (3.26) ainsi que  $\mathbf{rot}_{S^2} \mathbf{rot}_S Y_{n,m} = n(n+1)Y_{n,m}$ . En vérifiant de plus que  $\ell(1+2n-\ell)\mathfrak{h}_{n,\ell-n-1} = \mathfrak{h}_{n,\ell-n-3}$ , il suit que

$$\left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^1 = i\kappa \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-1,\ell-1,1}, \quad \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^2 = i\kappa \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-1,\ell-1,2}, \quad \left( \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell} \right)_{n,m}^3 = i\kappa \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-1,\ell-1,3}.$$

□

**Remarque 3.2.** Dans les expressions (3.28), interviennent les coefficients spectraux  $\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p$  et  $\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p$  issus des décompositions modales associées aux parties régulières  $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{reg}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{reg}}$ . Par ailleurs, nous observons que les décompositions modales introduites ci-dessus peuvent également s'appliquer lorsque  $\ell = 0$  et celles-ci correspondent aux décompositions modales (3.24) d'après les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,0,1}(R) &= 0, & \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,0,2}(R) &= \frac{\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p}{R^{n+2}}, & \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,0,3}(R) &= -(n+1) \frac{\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p}{R^{n+2}}, \\ \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,0,1}(R) &= 0, & \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,0,2}(R) &= \frac{\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p}{R^{n+2}}, & \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,0,3}(R) &= -(n+1) \frac{\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p}{R^{n+2}}. \end{aligned}$$

La remarque précédente nous permet de généraliser la décomposition modale des solutions  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_p$  des problèmes emboîtés (3.11)-(3.12).

**Proposition 3.6.** Les  $p$ -ièmes termes  $(\widehat{\mathbf{E}}_p, \widehat{\mathbf{H}}_p)$  issus du développement interne admettent

le développement de Taylor suivant, lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\widehat{\mathbf{E}}_p(\mathbf{X}) = \sum_{q=-\infty}^{p-3} \sum_{n=-q-2}^{p-q-2} \sum_{m=-n}^n \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,q+n+2,1}(R) \mathbf{rot}_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,q+n+2,2}(R) \nabla_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p,q+n+2,3}(R) Y_{n,m}(\widehat{x}) \widehat{x} \quad (3.29)$$

et

$$\widehat{\mathbf{H}}_p(\mathbf{X}) = \sum_{q=-\infty}^{p-3} \sum_{n=-q-2}^{p-q-2} \sum_{m=-n}^n \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,q+n+2,1}(R) \mathbf{rot}_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,q+n+2,2}(R) \nabla_S Y_{n,m}(\widehat{x}) + \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p,q+n+2,3}(R) Y_{n,m}(\widehat{x}) \widehat{x}. \quad (3.30)$$

**Remarque 3.3.** Dans les développements en série de Taylor précédents, nous avons pour  $a = \widehat{e}$  ou  $\widehat{h}$  et pour  $k = 1, 2, 3$ ,

$$\mathbf{a}_{n,m}^{p,q+n+2,k}(R) = O(R^q) \quad \text{lorsque } R \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* Nous nous intéressons au champ électrique. D'après la Proposition 3.5 et la Remarque 3.2, les  $p$ -ièmes termes issus du développement interne admettent la décomposition modale suivante,

$$\widehat{\mathbf{E}}_p = \sum_{\ell=0}^p \widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$$

où pour tout  $\ell = 0, \dots, p$ ,  $\widehat{\mathbf{E}}_{p,\ell}$  se décompose sous la forme (3.27). Pour obtenir le résultat, nous échangeons dans un premier temps, les sommes portant sur l'indice  $\ell = 0, \dots, p$  et sur l'indice  $n = 1, \dots, \infty$ , puis nous effectuons le changement d'indice  $q = \ell - n - 2$ , de sorte à faire apparaître une puissance  $q$ -ième de  $R$  dans les coefficients radiaux. Il apparaît la série sur

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=-n-2}^{p-n-2} R^q \{ \dots \}.$$

Enfin, il suffit de remarquer que  $n \geq 1$  et  $-n - 2 \leq q \leq p - n - 2$  est équivalent à  $q \leq p - 3$  et  $-q - 2 \leq n \leq p - q - 2$ .  $\square$

**Remarque 3.4.** Lorsque l'obstacle est de forme sphérique, le domaine de validité des décompositions modales (3.27) est le domaine extérieur  $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(0, 1)}$  et de plus, l'intégrale dans les coefficients spectraux (3.25) est effectuée sur la sphère unité  $\mathcal{S}$  qui est également la frontière du domaine  $\widehat{\Gamma}$ . Ainsi, en vue d'obtenir les conditions à la frontière suggérées dans

les problèmes (3.11) et (3.12), les coefficients spectraux  $\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p$  et  $\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p$  peuvent être exprimés sous la forme

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} \int_{\widehat{\Gamma}} (\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}}(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{rot}_s \overline{Y_{n,m}}(\widehat{\mathbf{x}}) d\widehat{\Gamma} - \sum_{\ell=1}^p \kappa^\ell \frac{\ell-n}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p-\ell}, \\ \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p &= \frac{1}{n+1} \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} \int_{\widehat{\Gamma}} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}}(\mathbf{X})) \overline{Y_{n,m}}(\widehat{\mathbf{x}}) d\widehat{\Gamma} - \sum_{\ell=1}^p \kappa^\ell \frac{\mathfrak{h}_{n,\ell-n-1}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-\ell}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Dans les expressions précédentes, la première partie correspond à la contribution du champ incident ( $\widehat{\mathbf{E}}_p^{\text{inc}}, \widehat{\mathbf{H}}_p^{\text{inc}}$ ) défini par (2.22). Les termes intervenant sous le signe somme allant de  $\ell = 1$  à  $p$  proviennent de la contribution de la partie site singulière, provenant des solutions particulières des équations emboîtées.

### 3.2.4 Raccord des solutions

Le principe de raccord est basé sur l'identification des séries (3.22)-(3.23) avec les séries (3.29)-(3.30). Les conditions de raccord (3.2) qui portent explicitement sur les champs angulaires ( $\widetilde{\mathbf{E}}_p^q, \widetilde{\mathbf{H}}_p^q$ ) et ( $\widehat{\mathbf{E}}_p^q, \widehat{\mathbf{H}}_p^q$ ) issus des développements de Taylor des  $p$ -ièmes termes des développements asymptotiques, associés à la  $q$ -ième puissance de  $r$  (ou de  $R$ ), peuvent être transférées sur les coefficients spectraux  $\widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p, \widetilde{\mathbf{h}}_{n,m}^p$  et  $\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^p, \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^p$ .

**Proposition 3.7.** *Les conditions de raccord (3.2) sont équivalentes à*

$$\widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p = \frac{\kappa^{n+2}}{in\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^{p-n-2} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{h}}_{n,m}^p = \frac{\kappa^{n+2}}{in\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^{p-n-2}.\tag{3.32}$$

*Démonstration.* Il s'agit d'expliciter les champs angulaires ( $\widetilde{\mathbf{E}}_p^q, \widetilde{\mathbf{H}}_p^q$ ) et ( $\widehat{\mathbf{E}}_p^q, \widehat{\mathbf{H}}_p^q$ ) et de les identifier à l'aide de (3.2). Nous supposons que  $c$  correspond à l'origine. D'après la Proposition 3.3, nous avons, pour  $q \geq -p$ ,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{\mathbf{x}}) &= \sum_{n=1}^{p-2} \sum_{m=-n}^n \widetilde{\mathbf{e}}_{n,m}^p \frac{\mathfrak{h}_{n,q+1}}{i} \left( n(n+1) Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\mathbf{x}} + (q+2) \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right) \\ &\quad + \widetilde{\mathbf{h}}_{n,m}^p \mathfrak{h}_{n,q} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}) = \sum_{n=1}^{p-2} \sum_{m=-n}^n \widetilde{\mathfrak{h}}_{n,m}^p i \mathfrak{h}_{n,q+1} \left( n(n+1) Y_{n,m}(\widehat{x}) \widehat{x} + (q+2) \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right) \\ + \widetilde{\mathfrak{e}}_{n,m}^p \mathfrak{h}_{n,q} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{x}). \end{aligned}$$

De plus, d'après la Proposition 3.6, nous avons pour tout  $q \leq p-3$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_p^q(\widehat{x}) = \sum_{n=-q-2}^{p-q-2} \sum_{m=-n}^n -\widehat{\mathfrak{e}}_{n,m}^{p-q-n-2} \frac{\kappa^{n+2} \mathfrak{h}_{n,q+1}}{n \mathfrak{h}_{n,-n-1}} \left( n(n+1) Y_{n,m}(\widehat{x}) \widehat{x} + (q+2) \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right) \\ - \widehat{\mathfrak{h}}_{n,m}^{p-q-n-2} \frac{i \kappa^{n+2}}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,q}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_p^q(\widehat{x}) = \sum_{n=-q-2}^{p-q-2} \sum_{m=-n}^n \widehat{\mathfrak{h}}_{n,m}^{p-q-n-2} \frac{\kappa^{n+2} \mathfrak{h}_{n,q+1}}{n \mathfrak{h}_{n,-n-1}} \left( n(n+1) Y_{n,m}(\widehat{x}) \widehat{x} + (q+2) \nabla_s Y_{n,m}(\widehat{x}) \right) \\ - \widehat{\mathfrak{e}}_{n,m}^{p-q-n-2} \frac{i \kappa^{n+2}}{n} \frac{\mathfrak{h}_{n,q}}{\mathfrak{h}_{n,-n-1}} \mathbf{rot}_s Y_{n,m}(\widehat{x}), \end{aligned}$$

où, par convention, nous imposons la nullité des coefficients spectraux lorsque  $n < 1$ . Ainsi, en identifiant, pour  $q = -p, \dots, -1$ , les champs  $(\widetilde{\mathbf{E}}_p^q, \widetilde{\mathbf{H}}_p^q)$  avec  $(\widehat{\mathbf{E}}_{p+q}^q, \widehat{\mathbf{H}}_{p+q}^q)$ , et d'après l'orthogonalité des harmoniques sphériques vectorielles, nous obtenons l'identité (3.32) indépendante de  $q$ . Nous obtenons cette même identité en pour le raccord concernant les champs  $(\widehat{\mathbf{E}}_p^q, \widehat{\mathbf{H}}_p^q)$  avec  $(\widetilde{\mathbf{E}}_{p-q}^q, \widetilde{\mathbf{H}}_{p-q}^q)$ .  $\square$

La condition de raccord (3.32) montre que, puisque  $n \geq 1$ , les  $p$ -ièmes termes du développement externe sont reliés aux termes du développement interne de l'ordre 0 à l'ordre  $p-3$ . Nous observons un décalage de trois termes dans les développements ce qui signifie que le troisième terme du développement externe est relié au terme d'ordre zéro du développement interne, le quatrième terme du développement externe aux termes d'ordre zéro et un du développement interne et ainsi de suite.

### 3.3 Premiers termes

Dans la section précédente, nous avons déterminé les décompositions modales des termes successifs associés aux développements externe et interne sans tenir compte des conditions de frontière. Leur prise en compte permet de déterminer l'ensemble des coefficients spectraux associés aux différentes décompositions modales et par conséquent l'expression des termes successifs des développements asymptotiques. Dans cette Section, nous explicitons les premiers termes, d'abord dans le cas sphérique, puis dans un cadre général. Nous rappelons que le développement interne  $(\widehat{\mathbf{E}}_\delta, \widehat{\mathbf{H}}_\delta)$  s'exprime sous la forme

$$\widehat{\mathbf{E}}_\delta = \widehat{\mathbf{E}}_0 + \delta \widehat{\mathbf{E}}_1 + \delta^2 \widehat{\mathbf{E}}_2 + \dots, \quad \widehat{\mathbf{H}}_\delta = \widehat{\mathbf{H}}_0 + \delta \widehat{\mathbf{H}}_1 + \delta^2 \widehat{\mathbf{H}}_2 + \dots,$$

tandis que le développement externe  $(\widetilde{\mathbf{E}}_\delta, \widetilde{\mathbf{H}}_\delta)$  s'écrit

$$\widetilde{\mathbf{E}}_\delta = \delta^3 \widetilde{\mathbf{E}}_3 + \delta^4 \widetilde{\mathbf{E}}_4 + \delta^5 \widetilde{\mathbf{E}}_5 + \dots, \quad \widetilde{\mathbf{H}}_\delta = \delta^3 \widetilde{\mathbf{H}}_3 + \delta^4 \widetilde{\mathbf{H}}_4 + \delta^5 \widetilde{\mathbf{H}}_5 + \dots$$

Dans cette Section, nous nous intéressons donc à ces quatre fois trois termes.

#### 3.3.1 Lemmes préliminaires

Dans ce Paragraphe, nous introduisons deux lemmes techniques ayant pour but de faciliter le calcul des projections (3.31) dans la suite.

**Lemme 1.** Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur constant de  $\mathbb{C}^3$  et notons  $(u_k)$  pour  $k = 1, 2, 3$  ses coordonnées cartésiennes. Pour tout  $\hat{x} \in \mathcal{S}$ , les parties radiales et tangentielles de  $\mathbf{u}$  s'expriment dans la base des harmoniques sphériques sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \mathbf{u} &= \frac{u_1 + iu_2}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1,-1} + \frac{u_1 - iu_2}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1,1} + u_3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}, \\ (\hat{x} \times \mathbf{u}) \times \hat{x} &= \frac{u_1 + iu_2}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \nabla_{\mathcal{S}} Y_{1,-1} + \frac{u_1 - iu_2}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \nabla_{\mathcal{S}} Y_{1,1} + u_3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \nabla_{\mathcal{S}} Y_{1,0}. \end{aligned}$$

**Lemme 2.** Soit  $\mathbb{M}$  une matrice carrée d'ordre 3 à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et notons  $(m_{ij})$  pour  $i, j = 1, 2, 3$  ses coordonnées dans la base canonique. Pour tout  $\hat{x} \in \mathcal{S}$ , les parties radiales et tangentielles du vecteur  $\mathbb{M} \hat{x}$  s'expriment dans la base des harmoniques sphériques sous



la forme

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot (\mathbb{M} \hat{x}) &= \frac{m_{1,1} - m_{2,2}}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{2,2} + Y_{2,-2}) + \frac{m_{1,2} + m_{2,1}}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{2,2} - Y_{2,-2}) + \\ &\quad \frac{m_{1,3} + m_{3,1}}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{2,1} + Y_{2,-1}) + \frac{m_{2,3} + m_{3,2}}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{2,1} - Y_{2,-1}) + \frac{m_{3,3}}{2} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{2,0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\hat{x} \times (\mathbb{M} \hat{x})) \times \hat{x} &= \\ &\quad \frac{2m_{3,3} - m_{1,1} - m_{2,2}}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{45}} \nabla_s Y_{2,0} + \frac{m_{1,1} - m_{2,2}}{4} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\nabla_s Y_{2,-2} + \nabla_s Y_{2,2}) \\ &\quad + \frac{m_{1,3} + m_{3,1}}{4} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\nabla_s Y_{2,-1} + \nabla_s Y_{2,1}) + \frac{m_{2,3} + m_{3,2}}{4i} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\nabla_s Y_{2,1} - \nabla_s Y_{2,-1}) \\ &\quad + \frac{m_{1,2} + m_{2,1}}{4i} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\nabla_s Y_{2,2} - \nabla_s Y_{2,-2}) + \frac{m_{3,1} - m_{1,3}}{4i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (\mathbf{rot}_s Y_{1,1} - \mathbf{rot}_s Y_{1,-1}) \\ &\quad + \frac{m_{3,2} - m_{2,3}}{4} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (\mathbf{rot}_s Y_{1,1} + \mathbf{rot}_s Y_{1,-1}) + \frac{m_{2,1} - m_{1,2}}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \mathbf{rot}_s Y_{1,0}. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Cas sphérique

Nous supposons que l'obstacle  $\mathcal{B}_\delta$  est la boule  $\mathcal{B}(\mathbf{c}, \delta)$ . Nous rappelons que dans ce cas, les domaines de champ proche et de champ lointain sont donnés par

$$\hat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(0, 1)} \quad \text{et} \quad \Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{c}\},$$

et de plus  $\mathbf{x} = \mathbf{c} + r\hat{x}$  et  $\mathbf{X} = R\hat{x}$  avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{c}|$ ,  $R = \frac{r}{\delta}$  et  $\hat{x} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}}{r}$ . Puisque le développement externe commence au troisième ordre, nous nous intéressons d'abord au développement interne.

Les termes d'ordre zéro dans le développement interne vérifient les problèmes (3.5) et (3.6). En résolvant ce problème à l'aide de la séparation de variables, nous obtenons la Proposition suivante.

**Proposition 3.8.** Les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  issus du développement interne sont donnés par

$$\widehat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{X}) = \frac{1}{\mathbb{R}^3} \left( 3(\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right), \quad \widehat{\mathbf{H}}_0(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2\mathbb{R}^3} \left( 3(\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right). \quad (3.33)$$

*Démonstration.* Comme  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  vérifient les problèmes de Maxwell statiques (3.8)-(3.9), les décompositions modales (3.24) ont lieu. De plus, les conditions  $\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  et  $\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_0 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  sur la frontière  $\widehat{\Gamma}$  nous donnent, d'après (3.31) et le Lemme 1,

$$\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^0 = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left( E_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + iE_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) & \text{si } n = 1 \text{ et } m = -1, \\ -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_3^{\text{inc}}(\mathbf{c}) & \text{si } n = 1 \text{ et } m = 0, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left( E_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - iE_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) & \text{si } n = 1 \text{ et } m = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1, \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^0 = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left( H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + iH_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) & \text{si } n = 1 \text{ et } m = -1, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} H_3^{\text{inc}}(\mathbf{c}) & \text{si } n = 1 \text{ et } m = 0, \\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left( H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - iH_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) & \text{si } n = 1 \text{ et } m = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

où  $E_k^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  et  $H_k^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  désignent les  $k$ -ièmes composantes de  $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  et  $\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$ . Ainsi, les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  s'écrivent sous la forme de sommes finies

$$\widehat{\mathbf{E}}_0 = \frac{1}{\mathbb{R}^3} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^0 \left[ \nabla_s Y_{1,m} - 2Y_{1,m} \mathbf{e}_r \right] \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_0 = \frac{1}{\mathbb{R}^3} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^{(0)} \left[ \nabla_s Y_{1,m} - 2Y_{1,m} \mathbf{e}_r \right]. \quad (3.35)$$

En injectant l'expression des coefficients spectraux à l'intérieur des développements, puis en regroupant les termes suivant les différents composantes  $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  et en remplaçant les harmoniques sphériques par leur expression dans les coordonnées sphériques,

nous obtenons pour le champ électrique

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_0 = \frac{E_1^{\text{inc}}(\mathbf{c})}{R^3} & \left[ 2 \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r - \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta + \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \right] \\ & + \frac{E_2^{\text{inc}}(\mathbf{c})}{R^3} \left[ 2 \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r - \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta - \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \right] \\ & + \frac{E_3^{\text{inc}}(\mathbf{c})}{R^3} \left[ 2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right]. \end{aligned}$$

Enfin, pour chaque expression entre crochets, nous reconnaissons  $3(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{e}_k$ , pour  $k = 1, 2, 3$  ce qui nous amène au résultat (3.33). Le calcul est similaire pour le champ magnétique  $\widehat{\mathbf{H}}_0$ .  $\square$

Les termes du premier ordre dans le développement interne vérifient les problèmes de Maxwell emboîtés donnés par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_1 = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_1 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_1 = -\mathbf{n} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\widehat{x}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_1 \, d\widehat{\Gamma} = 0, & \\ \widehat{\mathbf{E}}_1 = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_1 = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_1 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_1 = -\mathbf{n} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\widehat{x}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_1 = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

où  $\mathbb{J}_f$  désigne la matrice jacobienne de  $f$ . La résolution par séparation de variables nous mène à la Proposition suivante :

**Proposition 3.9.** *Les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_1$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_1$  issus du développement interne sont donnés par*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R^4} \left( -(\widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\widehat{x})) \times \widehat{x} + \frac{3}{2} \widehat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\widehat{x})\widehat{x} \right) + \frac{i\kappa}{2R^2} \widehat{x} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}), \\ \widehat{\mathbf{H}}_1(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R^4} \left( \frac{2}{3} (\widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\widehat{x})) \times \widehat{x} - \widehat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\widehat{x})\widehat{x} \right) + \frac{i\kappa}{R^2} \widehat{x} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{J}_f^{\text{sym}}$  désigne la partie symétrique de  $\mathbb{J}_f$  définie par  $\mathbb{J}_f^{\text{sym}} = \frac{1}{2} (\mathbb{J}_f + \mathbb{J}_f^\top)$ .

Pour démontrer cette Proposition, nous suivons la stratégie présentée dans la Section 3.1.2 et nous décomposons les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_1$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_1$  sous la forme

$$\widehat{\mathbf{E}}_1 = \widehat{\mathbf{E}}_{1,0} + \widehat{\mathbf{E}}_{1,1} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_1 = \widehat{\mathbf{H}}_{1,0} + \widehat{\mathbf{H}}_{1,1}$$

où  $\widehat{\mathbf{E}}_{1,0}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{1,0}$  (ou  $\widehat{\mathbf{E}}_1^{\text{reg}}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_1^{\text{reg}}$ ) vérifient les problèmes statiques (3.11)-(3.12) pour  $p = 1$  et les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_{1,1}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{1,1}$  sont des solutions particulières des problèmes (3.13) pour  $p = 1$  et  $\ell = 1$ , donnés par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{1,1} = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{1,1} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{1,1} \, d\widehat{\Gamma} = 0, \\ \widehat{\mathbf{E}}_{1,1} = O(R^{-1}) & R \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_{1,1} = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{1,1} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_{1,1} = O(R^{-1}) & R \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

en remarquant que  $\widehat{\mathbf{E}}_{0,0} = \widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{0,0} = \widehat{\mathbf{H}}_0$ . Nous énonçons deux résultats intermédiaires qui permettent de démontrer la Proposition 3.9.

**Proposition 3.10.** *Une solution particulière  $(\widehat{\mathbf{E}}_{1,1}, \widehat{\mathbf{H}}_{1,1})$  de (3.36) est donnée par*

$$\widehat{\mathbf{E}}_{1,1}(\mathbf{X}) = \frac{i\kappa}{2R^2} \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}), \quad \widehat{\mathbf{H}}_{1,1}(\mathbf{X}) = \frac{i\kappa}{R^2} \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}).$$

*Démonstration.* D'après la Proposition 3.5 et les expressions (3.34), nous déduisons que les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_{1,1}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{1,1}$  admettent la décomposition modale suivante

$$\widehat{\mathbf{E}}_{1,1} = -\frac{i\kappa}{R^2} \sum_{m=-1}^1 \widehat{h}_{1,m}^0 \text{rot}_S Y_{1,m} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{1,1} = \frac{i\kappa}{R^2} \sum_{m=-1}^1 \widehat{e}_{1,m}^0 \text{rot}_S Y_{1,m}.$$

De plus, d'après (3.35), nous avons

$$\sum_{m=-1}^1 \widehat{e}_{1,m}^0 \text{rot}_S Y_{1,m} = \widehat{\mathbf{E}}_0(\widehat{\mathbf{x}}) \times \widehat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-1}^1 \widehat{h}_{1,m}^0 \text{rot}_S Y_{1,m} = \widehat{\mathbf{H}}_0(\widehat{\mathbf{x}}) \times \widehat{\mathbf{x}}. \quad (3.37)$$

Nous obtenons le résultat en notant que  $\widehat{\mathbf{E}}_0(\widehat{\mathbf{x}}) \times \widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0(\widehat{\mathbf{x}}) \times \widehat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$  d'après la Proposition 3.8.  $\square$

La Proposition suivante concerne la partie régulière  $\widehat{\mathbf{E}}_{1,0}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{1,0}$ , qui vérifie les équations de Maxwell statiques homogènes munies des conditions de frontière respectives

$$\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_{1,0} = -\mathbf{n} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{1,0} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \quad \text{sur } \widehat{\Gamma}. \quad (3.38)$$

**Remarque 3.5.** *La première condition est obtenue à partir de l'identité suivante*

$$\frac{i\kappa}{2} \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \times \widehat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) - \mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})^\top). \quad (3.39)$$

**Proposition 3.11.** La solution  $(\widehat{\mathbf{E}}_{1,0}, \widehat{\mathbf{H}}_{1,0})$  des problèmes respectifs (3.11)-(3.12) où les conditions à la frontière s'expriment sous la forme (3.38), est donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_{1,0}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{\mathbb{R}^4} \left( -(\widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c})\widehat{x})) \times \widehat{x} + \frac{3}{2}(\widehat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}(\mathbf{c})\widehat{x})\widehat{x}) \right), \\ \widehat{\mathbf{H}}_{1,0}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{\mathbb{R}^4} \left( \frac{2}{3}(\widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c})\widehat{x})) \times \widehat{x} - \widehat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}(\mathbf{c})\widehat{x})\widehat{x} \right).\end{aligned}\tag{3.40}$$

*Démonstration.* Comme  $\widehat{\mathbf{E}}_{1,0}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{1,0}$  vérifient les problèmes de Maxwell statiques (3.11)-(3.12), les décompositions modales (3.24) ont lieu. De plus, les conditions à la frontière (3.38) qui s'expriment comme la trace d'un produit d'une matrice constante et du vecteur  $\widehat{x}$ , il suit, d'après le Lemme 2 et les expressions (3.31), que

$$\widehat{\mathbf{e}}_{n,m}^1 = \begin{cases} -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_1 E_1^{inc}(\mathbf{c}) - \partial_2 E_2^{inc}(\mathbf{c}) + i \left( \partial_2 E_1^{inc}(\mathbf{c}) + \partial_1 E_2^{inc}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, -2), \\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_3 E_1^{inc}(\mathbf{c}) + \partial_1 E_3^{inc}(\mathbf{c}) + i \left( \partial_3 E_2^{inc}(\mathbf{c}) + \partial_2 E_3^{inc}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, -1), \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{45}} \left( \partial_1 E_1^{inc}(\mathbf{c}) + \partial_2 E_2^{inc}(\mathbf{c}) - 2\partial_3 E_3^{inc}(\mathbf{c}) \right) & \text{si } (n, m) = (2, 0), \\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_3 E_1^{inc}(\mathbf{c}) - \partial_1 E_3^{inc}(\mathbf{c}) - i \left( \partial_2 E_2^{inc}(\mathbf{c}) + \partial_2 E_3^{inc}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, 1), \\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_1 E_1^{inc}(\mathbf{c}) - \partial_2 E_2^{inc}(\mathbf{c}) - i \left( \partial_2 E_1^{inc}(\mathbf{c}) + \partial_1 E_2^{inc}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, 2), \\ 0 & \text{si } n = 1 \text{ ou } n > 2, \end{cases}$$

(3.41)

et

$$\widehat{\mathbf{h}}_{n,m}^1 = \begin{cases} \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_1 H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - \partial_2 H_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + i \left( \partial_2 H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \partial_1 H_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, -2), \\ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_3 H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \partial_1 H_3^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + i \left( \partial_3 H_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \partial_2 H_3^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, -1), \\ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4\pi}{45}} \partial_3 H_3^{\text{inc}}(\mathbf{c}) & \text{si } (n, m) = (2, 0), \\ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_3 H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - \partial_1 H_3^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - i \left( \partial_3 H_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \partial_2 H_3^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, 1), \\ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left( \partial_1 H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - \partial_2 H_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - i \left( \partial_2 H_1^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \partial_1 H_2^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) \right) & \text{si } (n, m) = (2, 2), \\ 0 & \text{si } n = 1 \text{ ou } n > 2, \end{cases}$$

(3.42)

où  $\partial_j E_k^{\text{inc}}$  et  $\partial_j H_k^{\text{inc}}$  désignent les dérivées partielles de  $E_k^{\text{inc}}$  et  $H_k^{\text{inc}}$  par rapport à la  $j$ -ième variable  $x_j$ . Ainsi, les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_{1,0}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{1,0}$  s'écrivent sous la forme de sommes finies

$$\widehat{\mathbf{E}}_{1,0} = \frac{1}{\mathbb{R}^4} \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{e}}_{2,m}^1 [\nabla_s Y_{2,m} - 3Y_{2,m} \widehat{\mathbf{x}}] \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{1,0} = \frac{1}{\mathbb{R}^4} \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{h}}_{2,m}^1 [\nabla_s Y_{2,m} - 3Y_{2,m} \widehat{\mathbf{x}}].$$

(3.43)

Nous séparons le calcul en deux parties : partie tangentielle et partie normale. En injectant l'expression des coefficients spectraux et l'expression des harmoniques sphériques à l'intérieur des décompositions modales, nous obtenons pour la partie tangentielle du

champ électrique

$$\begin{aligned}
 (\hat{x} \times \widehat{\mathbf{E}}_{1,0}) \times \hat{x} = & -\frac{1}{2R^4} \left\{ \left( \partial_1 E_1^{\text{inc}}(0) - \partial_2 E_2^{\text{inc}}(0) \right) \left[ \cos \theta \sin \theta \cos 2\varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \sin 2\varphi \mathbf{e}_\varphi \right] \right. \\
 & + \left( \partial_2 E_1^{\text{inc}}(0) + \partial_1 E_2^{\text{inc}}(0) \right) \left[ \cos \theta \sin \theta \sin 2\varphi \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \cos 2\varphi \mathbf{e}_\varphi \right] \\
 & + \left( \partial_3 E_1^{\text{inc}}(0) + \partial_1 E_3^{\text{inc}}(0) \right) \left[ \cos 2\theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \right] \\
 & + \left( \partial_3 E_2^{\text{inc}}(0) + \partial_2 E_3^{\text{inc}}(0) \right) \left[ \cos 2\theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \right] \\
 & \left. + \left( \partial_1 E_1^{\text{inc}}(0) + \partial_2 E_2^{\text{inc}}(0) - 2\partial_3 E_3^{\text{inc}}(0) \right) \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right\}
 \end{aligned}$$

et pour sa partie normale

$$\begin{aligned}
 \hat{x} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{1,0} = & \frac{3}{4R^4} \left\{ \left( \partial_1 E_1^{\text{inc}}(0) - \partial_2 E_2^{\text{inc}}(0) \right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi + \left( \partial_2 E_1^{\text{inc}}(0) + \partial_1 E_2^{\text{inc}}(0) \right) \sin^2 \theta \sin 2\varphi \right. \\
 & + 2 \left( \partial_1 E_3^{\text{inc}}(0) + \partial_3 E_1^{\text{inc}}(0) \right) \cos \theta \sin \theta \cos \varphi + 2 \left( \partial_3 E_2^{\text{inc}}(0) + \partial_2 E_3^{\text{inc}}(0) \right) \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \\
 & \left. - \frac{1}{3} \left( \partial_1 E_1^{\text{inc}}(0) + \partial_2 E_2^{\text{inc}}(0) - 2\partial_3 E_3^{\text{inc}}(0) \right) (3 \cos^2 \theta - 1) \right\}.
 \end{aligned}$$

Pour la partie tangentielle, nous cherchons à factoriser par les différentes composantes des vecteurs  $\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\hat{x}$  et à faire apparaître le rotationnel  $\nabla \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$ . Après simplifications, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (\hat{x} \times \widehat{\mathbf{E}}_{1,0}) \times \hat{x} = & -\frac{1}{R^4} (\hat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\hat{x})) \times \hat{x} + \frac{1}{2R^4} (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \hat{x}, \\
 = & -\frac{1}{R^4} (\hat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\hat{x})) \times \hat{x}.
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant l'identité (3.39). De même pour la partie normale, et en utilisant par ailleurs le fait que  $\nabla \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) = 0$ , nous obtenons

$$\hat{x} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{1,0} = \frac{3}{4R^4} \left( -\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + 2 \hat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\hat{x}) \right) = \frac{3}{2R^4} \hat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\hat{x}).$$

□

Les termes du second ordre dans le développement interne vérifient les problèmes de Maxwell emboîtés donnés par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_2 = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_1 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_2 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{E}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_2 \, d\widehat{\Gamma} = 0, & \\ \widehat{\mathbf{E}}_2 = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_2 = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_1 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_2 = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{H}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_2 = O(R^{-1}) & R \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

où  $\mathbb{H}_f$  désigne le tenseur hessien du second ordre associé au champ de vecteurs  $f$ . La résolution par séparation de variables mène à la Proposition suivante :

**Proposition 3.12.** *Les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_2$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_2$  issus du développement interne sont donnés par*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_2(\mathbf{X}) = & \frac{1}{R^5} \left( \frac{2}{3} \widehat{\mathbf{x}} \cdot (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{E}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\mathbf{x}} + \frac{2\kappa^2}{15} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{x}} \times (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{E}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} \right. \\ & \left. - \frac{i\kappa}{3} \widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) - \frac{\kappa^2}{5} (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} \right) + \frac{i\kappa}{3R^3} \widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \\ & - \frac{3\kappa^2}{10R^3} (\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c}) - 3(\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}}) + \frac{\kappa^2}{2R} (\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c}) + (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_2(\mathbf{X}) = & \frac{1}{R^5} \left( -\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}} \cdot (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{H}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\mathbf{x}} - \frac{\kappa^2}{10} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} + \frac{3}{8} (\widehat{\mathbf{x}} \times (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{H}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} \right. \\ & \left. - \frac{i\kappa}{4} \widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) + \frac{3\kappa^2}{20} (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} \right) + \frac{i\kappa}{2R^3} \widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \\ & + \frac{3\kappa^2}{10R^3} (3(\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c})) - \frac{\kappa^2}{4R} (\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c}) + (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$



Comme pour les termes précédents, nous décomposons la démonstration en trois parties en décomposant les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_2$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_2$  sous la forme

$$\widehat{\mathbf{E}}_2 = \widehat{\mathbf{E}}_{2,0} + \widehat{\mathbf{E}}_{2,1} + \widehat{\mathbf{E}}_{2,2} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_2 = \widehat{\mathbf{H}}_{2,0} + \widehat{\mathbf{H}}_{2,1} + \widehat{\mathbf{H}}_{2,2},$$

où les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_{2,0}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,0}$  vérifient les problèmes (3.11)-(3.12) pour  $p = 2$  et les champs  $(\widehat{\mathbf{E}}_{2,1}, \widehat{\mathbf{H}}_{2,1})$  et  $(\widehat{\mathbf{E}}_{2,2}, \widehat{\mathbf{H}}_{2,2})$  sont des solutions particulières de (3.13) pour  $p = 2$  et  $\ell = 1, 2$ , explicités ci-dessous,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{2,1} = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_{1,0} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{2,1} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{2,1} \, d\widehat{\Gamma} = 0, \\ \widehat{\mathbf{E}}_{2,1} = O(R^{-1}) & R \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_{2,1} = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_{1,0} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{2,1} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_{2,1} = O(R^{-1}) & R \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad (3.44)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_{2,2} = i\kappa \widehat{\mathbf{H}}_{1,1} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{2,2} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{2,2} \, d\widehat{\Gamma} = 0, \\ \widehat{\mathbf{E}}_{2,2} = O(R^{-1}) & R \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_{2,2} = -i\kappa \widehat{\mathbf{E}}_{1,1} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{2,2} = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{\mathbf{H}}_{2,2} = O(R^{-1}) & R \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

La Proposition suivante caractérise des solutions particulières des équations (3.44) et (3.45).

**Proposition 3.13.** *Une solution particulière  $(\widehat{\mathbf{E}}_{2,1}, \widehat{\mathbf{H}}_{2,1})$  de (3.44) est donnée par*

$$\widehat{\mathbf{E}}_{2,1}(\mathbf{X}) = \frac{i\kappa}{3R^3} \widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}(\mathbf{c})\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{2,1}(\mathbf{X}) = \frac{i\kappa}{2R^3} \widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}(\mathbf{c})\widehat{x}).$$

*Une solution particulière  $(\widehat{\mathbf{E}}_{2,2}, \widehat{\mathbf{H}}_{2,2})$  de (3.45) est donnée par*

$$\widehat{\mathbf{E}}_{2,2}(\mathbf{X}) = \frac{\kappa^2}{2R} \left( \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c}) + (\widehat{x} \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c}))\widehat{x} \right) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{2,2}(\mathbf{X}) = -\frac{\kappa^2}{4R} \left( \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c}) + (\widehat{x} \cdot \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c}))\widehat{x} \right).$$

*Démonstration.* Calcul de  $(\widehat{\mathbf{E}}_{2,1}, \widehat{\mathbf{H}}_{2,1})$ . D'après la Proposition 3.5 et les expressions (3.41)-

(3.42), les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_{2,1}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,1}$  admettent la décomposition modale suivante

$$\widehat{\mathbf{E}}_{2,1} = -\frac{i\kappa}{2R^3} \sum_{m=-2}^2 \widehat{h}_{2,m}^1 \mathbf{rot}_S Y_{2,m} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{2,1} = \frac{i\kappa}{2R^3} \sum_{m=-2}^2 \widehat{e}_{2,m}^1 \mathbf{rot}_S Y_{2,m}.$$

De plus, d'après (3.43), nous obtenons

$$\sum_{m=-2}^2 \widehat{e}_{n,m}^1 \mathbf{rot}_S Y_{2,m} = \widehat{\mathbf{E}}_{1,0}(\widehat{x}) \times \widehat{x} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-2}^2 \widehat{h}_{n,m}^1 \mathbf{rot}_S Y_{2,m} = \widehat{\mathbf{H}}_{1,0}(\widehat{x}) \times \widehat{x},$$

qui, d'après (3.40), sont donnés par

$$\widehat{\mathbf{E}}_{1,0}(\widehat{x}) \times \widehat{x} = -\frac{2}{3} \widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{1,0}(\widehat{x}) \times \widehat{x} = \widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\widehat{x}).$$

Calcul de  $(\widehat{\mathbf{E}}_{2,2}, \widehat{\mathbf{H}}_{2,2})$ . D'après la Proposition 3.5 et les expressions (3.34), les champs  $\widehat{\mathbf{E}}_{2,2}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,2}$  admettent la décomposition modale suivante

$$\widehat{\mathbf{E}}_{2,2} = -\frac{\kappa^2}{2R} \sum_{m=-1}^1 \widehat{e}_{1,m}^0 [\nabla_S Y_{1,m} + 2Y_{1,m} \widehat{x}] \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_{2,2} = -\frac{\kappa^2}{2R} \sum_{m=-1}^1 \widehat{h}_{1,m}^0 [\nabla_S Y_{1,m} + 2Y_{1,m} \widehat{x}].$$

En utilisant (3.35), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^1 \widehat{e}_{1,m}^0 \nabla_S Y_{1,m} &= (\widehat{x} \times \widehat{\mathbf{E}}_0(\widehat{x})) \times \widehat{x}, & \sum_{m=-1}^1 \widehat{h}_{1,m}^0 \nabla_S Y_{1,m} &= (\widehat{x} \times \widehat{\mathbf{H}}_0(\widehat{x})) \times \widehat{x}, \\ 2 \sum_{m=-1}^1 \widehat{e}_{1,m}^0 Y_{1,m} &= -\widehat{x} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_0(\widehat{x}) & \text{et} & \quad 2 \sum_{m=-1}^1 \widehat{h}_{1,m}^0 Y_{1,m} \widehat{x} = -\widehat{x} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_0(\widehat{x}). \end{aligned}$$

(3.46)

Finalement, d'après (3.33), nous avons

$$\begin{aligned} (\widehat{x} \times \widehat{\mathbf{E}}_0(\widehat{x})) \times \widehat{x} &= -(\widehat{x} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{x}, & (\widehat{x} \times \widehat{\mathbf{H}}_0(\widehat{x})) \times \widehat{x} &= \frac{1}{2}(\widehat{x} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{x}, \\ -\widehat{x} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_0(\widehat{x}) &= -3\widehat{x} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}), & \text{et} & \quad -\widehat{x} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_0(\widehat{x}) = \frac{3}{2}\widehat{x} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}). \end{aligned}$$

□

La partie régulière  $\widehat{\mathbf{E}}_{2,0}$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,0}$  vérifie les équations de Maxwell statiques homogènes munies des conditions de frontière respectives

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}_{2,0} &= -\frac{1}{2} \mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) + \frac{i\kappa}{3} \widehat{\mathbf{x}} \times ((\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \times \widehat{\mathbf{x}}) - \frac{\kappa^2}{2} \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) && \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{2,0} &= -\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}} \cdot (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) + \frac{\kappa^2}{2} \widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) && \text{sur } \widehat{\Gamma}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

**Proposition 3.14.** *La solution  $(\widehat{\mathbf{E}}_{2,0}, \widehat{\mathbf{H}}_{2,0})$  des problèmes respectifs (3.11)-(3.12) munis des conditions de frontière (3.47), est donnée par*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_{2,0}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R^5} \left( -\frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{x}} \times (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} + \frac{i\kappa}{3} (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \times \widehat{\mathbf{x}} - \frac{\kappa^2}{5} (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \widehat{\mathbf{x}} + \frac{2\kappa^2}{15} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} \right) + \frac{3\kappa^2}{10R^3} \left( 3(\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_{2,0}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R^5} \left( \frac{3}{8} (\widehat{\mathbf{x}} \times (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} + \frac{i\kappa}{4} (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) \times \widehat{\mathbf{x}} + \frac{3\kappa^2}{20} (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot (\widehat{\mathbf{x}}^\top \mathbb{H}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \widehat{\mathbf{x}} - \frac{\kappa^2}{10} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} \right) + \frac{3\kappa^2}{10R^3} \left( 3(\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{H}^{\text{inc}}(0) \right). \end{aligned}$$

À présent, nous passons à la description des termes issus du développement externe. Les termes successifs du développement externe sont obtenus à partir de la décomposition modale (3.21) et les conditions de raccord (3.32).

**Proposition 3.15.** *Les termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_3$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_3$  issus du développement externe sont donnés par*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}) &= -\frac{\kappa^3}{2} h_1^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) - \kappa^3 \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} - 2\kappa^3 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}}, \\ \widetilde{\mathbf{H}}_3(\mathbf{x}) &= -\kappa^3 h_1^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + \frac{\kappa^3}{2} \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} + \kappa^3 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* En substituant les expressions (3.32) à l'intérieur des décompositions

modales (3.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}) &= \kappa^3 h_1^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^0 \mathbf{rot}_S Y_{1,m} \\ &\quad + \frac{\kappa^2 h_1^{(1)}(\kappa r) + \kappa r h_1^{(1)' }(\kappa r)}{i r} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^0 \nabla_S Y_{1,m} + \frac{2\kappa^2 h_1^{(1)}(\kappa r)}{i r} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^0 Y_{1,m} \widehat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_3(\mathbf{x}) &= -\kappa^3 h_1^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^0 \mathbf{rot}_S Y_{1,m} \\ &\quad + \frac{\kappa^2 h_1^{(1)}(\kappa r) + \kappa r h_1^{(1)' }(\kappa r)}{i r} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^0 \nabla_S Y_{1,m} + \frac{2\kappa^2 h_1^{(1)}(\kappa r)}{i r} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^0 Y_{1,m} \widehat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en utilisant les relations (3.37) et (3.46).  $\square$

En reproduisant ce raisonnement pour les termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_4$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_4$ , nous obtenons  $\widetilde{\mathbf{E}}_4 = 0$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_4 = 0$  car  $\widehat{\mathbf{h}}_{2,m}^0 = \widehat{\mathbf{e}}_{2,m}^0 = \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^1 = \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^1 = 0$  pour tout  $-n \leq m \leq n$ , avec  $n = 1$  ou  $n = 2$ . En revanche, il vient que les termes du cinquième ordre sont non-nuls comme cela est montré dans la Proposition suivante.

**Proposition 3.16.** *Les termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_5$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_5$  issus du développement externe sont donnés par*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_5(\mathbf{x}) &= \frac{3\kappa^5}{10} h_1^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c}) - \frac{3\kappa^5}{10} \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} - \frac{3\kappa^5}{5} \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} \\ &\quad - \frac{\kappa^4}{9} h_2^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) - \frac{\kappa^4}{6} \widetilde{h}_2^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} - \frac{\kappa^4}{2} \frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \widehat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_5(\mathbf{x}) &= -\frac{3\kappa^5}{10} h_1^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c}) - \frac{3\kappa^5}{10} \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c})) \times \widehat{\mathbf{x}} - \frac{3\kappa^5}{5} \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c})) \widehat{\mathbf{x}} \\ &\quad - \frac{\kappa^4}{6} h_2^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}}) + \frac{\kappa^4}{9} \widetilde{h}_2^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}^{sym}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} + \frac{\kappa^4}{3} \frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{inc}}(\mathbf{c}) \widehat{\mathbf{x}})) \widehat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* En substituant les expressions (3.32) dans les décompositions modales

(3.21) et en notant que  $\widehat{\mathbf{e}}_{3,m}^0 = \widehat{\mathbf{h}}_{3,m}^0 = 0$  pour tout  $-3 \leq m \leq 3$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_5(\mathbf{x}) &= \frac{\kappa^4}{6} h_2^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{h}}_{2,m}^1 \mathbf{rot}_s Y_{2,m} + \frac{\kappa^4}{6} \widetilde{h}_2^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{e}}_{2,m}^1 \nabla_s Y_{2,m} \\ &\quad + \kappa^4 \frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{e}}_{2,m}^1 Y_{2,m} \widehat{\mathbf{x}} + \kappa^3 h_1^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^2 \mathbf{rot}_s Y_{1,m} \\ &\quad + \kappa^3 \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^2 \nabla_s Y_{1,m} + 2\kappa^3 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^2 Y_{1,m} \widehat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_5(\mathbf{x}) &= -\frac{\kappa^4}{6} h_2^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{e}}_{2,m}^1 \mathbf{rot}_s Y_{2,m} + \frac{\kappa^4}{6} \widetilde{h}_2^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{h}}_{2,m}^1 \nabla_s Y_{2,m} \\ &\quad + \kappa^4 \frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{h}}_{2,m}^1 Y_{2,m} \widehat{\mathbf{x}} - \kappa^3 h_1^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{e}}_{1,m}^2 \mathbf{rot}_s Y_{1,m} \\ &\quad + \kappa^3 \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^2 \nabla_s Y_{1,m} + 2\kappa^2 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} \sum_{m=-1}^1 \widehat{\mathbf{h}}_{1,m}^2 Y_{1,m} \widehat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat, il faut ensuite utiliser les relations (3.37), (3.46) et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{e}}_{2,m}^1 \nabla_s Y_{2,m} &= (\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{E}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}}, & \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{h}}_{2,m}^1 \nabla_s Y_{2,m} &= (\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{H}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}}, \\ 3 \sum_{m=-2}^2 \widehat{\mathbf{e}}_{2,m}^1 Y_{2,m} &= -\widehat{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}}) & \text{et} & \quad 3 \sum_{m=-2}^3 \widehat{\mathbf{h}}_{2,m}^1 Y_{2,m} \widehat{\mathbf{x}} = -\widehat{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

obtenues à l'aide de (3.43), qui, d'après (3.40), sont données par

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{E}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} &= -(\widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}}, & (\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{H}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} &= \frac{2}{3}(\widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}}, \\ -\widehat{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}}) &= -\frac{3}{2} \widehat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})\widehat{\mathbf{x}}), & -\widehat{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_{1,0}(\widehat{\mathbf{x}}) &= \widehat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\widehat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

□

### 3.3.3 Cas général

Nous supposons que l'obstacle  $\mathcal{B}_\delta = \mathbf{c} + \delta\widehat{\mathcal{B}}$  a une forme arbitraire. Dans ce cas, les termes issus du développement interne n'ont plus de forme analytique. Il est toujours possible d'écrire le développement externe de manière semi-analytique car les termes successifs sont définis dans le domaine épointé qui est une géométrie à caractère sphérique. En revanche, les coefficients spectraux ne peuvent plus être explicités analytiquement. Il est nécessaire d'introduire la notion de tenseurs de polarisation et de masse virtuelle (*virtual mass* en anglais) comme cela est présenté dans Keller *et al.* (1972) par exemple.

Nous considérons le potentiel scalaire statique  $V_e$  vérifiant le problème

$$\begin{cases} \Delta V_e = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ V_e = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \cdot \widehat{\mathbf{x}} + c & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ \int_{\widehat{\Gamma}} \frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{n}} d\widehat{\Gamma} = 0, \\ V_e = O(R^{-2}) & \text{lorsque } R \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Ce potentiel peut être décomposé sous la forme suivante

$$V_e = (\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_1)\phi_1 + (\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_2)\phi_2 + (\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_3)\phi_3,$$

où pour  $k = 1, 2, 3$ , les fonctions  $\phi_k$  désignent des potentiels statiques vérifiant l'équation de Laplace homogène dans le domaine extérieur  $\widehat{\Omega}$ , une condition de décroissance à l'infini et la condition à la frontière suivante

$$\phi_k = x_k + c_k \quad \text{sur } \widehat{\Gamma},$$

avec  $x_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k$  et les constantes  $c_k$  sont déterminées à l'aide de la condition de charge nulle

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_k d\widehat{\Gamma} = 0.$$

À partir de ces potentiels élémentaires  $\phi_k$ , nous définissons le tenseur de polarisation.

**Définition 3.1.** Le tenseur de polarisation  $\mathbb{P}$  est défini à partir de ses composantes  $(P_{ij})$  données par

$$P_{ij} = - \int_{\widehat{\Gamma}} x_i (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_j) d\widehat{\Gamma} = \int_{\widehat{\Omega}} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\widehat{\Omega}.$$

À présent, nous considérons le potentiel scalaire statique  $V_h$  vérifiant le problème

$$\begin{cases} \Delta V_h = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \frac{\partial V_h}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) & \text{sur } \widehat{\Gamma}, \\ V_h = O(R^{-2}) & \text{lorsque } R \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

De la même manière que pour  $V_e$ , nous décomposons  $V_h$  sous la forme suivante,

$$V_h = (\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_1)\psi_1 + (\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_2)\psi_2 + (\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_3)\psi_3,$$

où pour  $k = 1, 2, 3$ , les fonctions  $\psi_k$  désignent des potentiels statiques vérifiant l'équation de Laplace homogène dans le domaine extérieur  $\widehat{\Omega}$ , une condition de décroissance à l'infini et la condition à la frontière suivante

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k \quad \text{sur } \widehat{\Gamma}.$$

À partir de ces considérations, nous définissons le tenseur de masse virtuelle, introduit pour la première fois dans [Schiffer et Szego \(1949\)](#) pour l'étude de l'écoulement irrotationnel d'un fluide non-visqueux incompressible au travers d'une surface rigide.

**Définition 3.2.** *Le tenseur de masse virtuelle  $\mathbb{W}$  est défini à partir de ses composantes  $(W_{ij})$  données par*

$$W_{ij} = - \int_{\widehat{\Gamma}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)\psi_j \, d\widehat{\Gamma} = \int_{\widehat{\Omega}} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\widehat{\Omega}.$$

**Remarque 3.6.** *Les potentiels  $V_e$  et  $V_h$  sont ceux introduits lors de la démonstration d'existence et l'unicité d'une solution aux problèmes en champ proche dans la Section 3.1.3, pour  $p = 0$ . En particulier, nous avons  $\widehat{\mathbf{E}}_0 = -\nabla V_e$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0 = -\nabla V_h$ .*

Les tenseurs de polarisation  $\mathbb{P}$  et de masse virtuelle  $\mathbb{W}$  peuvent s'écrire sous une forme alternative faisant intervenir une intégration sur le volume  $\mathcal{V}$  défini comme l'intersection du domaine extérieur  $\widehat{\Omega}$  avec la plus petite boule ouverte contenant  $\widehat{\mathcal{B}}$ . Cette propriété est énoncée dans la Proposition suivante.

**Proposition 3.17.** *Les tenseurs de polarisation  $\mathbb{P}$  et de masse virtuelle  $\mathbb{W}$  peuvent s'écrire sous la forme*

$$P_{ij} = 2|\widehat{\mathcal{B}}|\delta_{ij} + 3 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_i \cdot \nabla \phi_j \, d\mathcal{V} \quad \text{et} \quad W_{ij} = \frac{1}{2}|\widehat{\mathcal{B}}|\delta_{ij} + \frac{3}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathcal{V},$$

où  $|\widehat{\mathcal{B}}|$  désigne le volume de  $\widehat{\mathcal{B}}$ ,  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Krönecker et  $\mathcal{V}$  désigne l'intersection du domaine extérieur  $\widehat{\Omega}$  avec la plus petite boule ouverte contenant  $\widehat{\mathcal{B}}$ .

*Démonstration.* Cela est démontré par Keller *et al.* (1972) en utilisant le Théorème suivant : « Si  $B$  est une surface fermée et régulière de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  est la plus petite sphère contenant  $B$ ,  $\delta V$  est le volume intérieur à  $S$  et extérieur à  $B$  et  $u$  est un potentiel statique régulier à l'extérieur de  $B$ , alors

$$\int_B \mathbf{x}(\mathbf{n} \cdot \nabla u) \, dB + 2 \int_B \mathbf{n}u \, dB + 3 \int_{\delta V} \nabla u \, d\delta V = 0,$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de  $B$  ». □

Nous définissons enfin le tenseur de polarisabilité électrique et le tenseur de polarisabilité magnétique à partir des tenseurs de polarisation et de masse virtuelle.

**Définition 3.3.** Le tenseur de polarisabilité électrique  $\mathbb{P}^e$  est défini par

$$\mathbb{P}^e = |\widehat{\mathcal{B}}|\mathbb{I} + \mathbb{P},$$

où  $|\widehat{\mathcal{B}}|$  désigne le volume de  $\widehat{\mathcal{B}}$ ,  $\mathbb{I}$  désigne la matrice identité d'ordre 3 et  $\mathbb{P}$  désigne le tenseur de polarisation. De plus, ses différentes composantes  $(P_{ij}^e)$  sont données par

$$P_{ij}^e = 3 \left( |\widehat{\mathcal{B}}|\delta_{ij} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_i \cdot \nabla \phi_j \, d\mathcal{V} \right),$$

où  $\mathcal{V}$  désigne l'intersection du domaine extérieur  $\widehat{\Omega}$  avec la plus petite boule ouverte contenant  $\widehat{\mathcal{B}}$ . Le tenseur de polarisabilité magnétique  $\mathbb{P}^m$  est défini par

$$\mathbb{P}^m = |\widehat{\mathcal{B}}|\mathbb{I} + \mathbb{W},$$

où  $\mathbb{W}$  désigne le tenseur de masse virtuelle. De plus, ses différentes composantes  $(P_{ij}^m)$  sont données par

$$P_{ij}^m = \frac{3}{2} \left( |\widehat{\mathcal{B}}|\delta_{ij} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathcal{V} \right).$$

**Remarque 3.7.** Dans le cas d'un obstacle de forme sphérique, nous observons que  $\mathcal{V} = \emptyset$  car la plus petite boule ouverte contenant  $\widehat{\mathcal{B}}$  est  $\widehat{\mathcal{B}}$ . De plus, nous avons  $|\widehat{\mathcal{B}}| = \frac{4\pi}{3}$ . Ainsi, les tenseurs de polarisabilité électrique et magnétique se simplifient et sont donnés par

$$\mathbb{P}^e = 4\pi\mathbb{I} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^m = 2\pi\mathbb{I}.$$



Les termes du troisième ordre issus du développement externe peuvent s'exprimer à l'aide des tenseurs de polarisabilité électrique et de polarisabilité magnétique, introduits dans la Définition 3.3. En particulier, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 3.18.** *Les termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_3$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_3$  issus du développement externe sont donnés par*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}) &= \frac{\kappa^3}{4\pi} \left( h_1^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}_h - \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}_e) \times \widehat{\mathbf{x}} - 2 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}_e) \widehat{\mathbf{x}} \right), \\ \widetilde{\mathbf{H}}_3(\mathbf{x}) &= \frac{\kappa^3}{4\pi} \left( -h_1^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}_e - \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}_h) \times \widehat{\mathbf{x}} - 2 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}_h) \widehat{\mathbf{x}} \right),\end{aligned}$$

où  $\mathbf{d}_e$  et  $\mathbf{d}_h$  sont deux éléments de  $\mathbb{C}^3$  donnés par

$$\mathbf{d}_e = \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{c}) \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_h = -\mathbb{P}^m \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{c}).$$

Cela est une généralisation du cas isotrope.

En général, les termes du quatrième ordre  $\widetilde{\mathbf{E}}_4$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_4$  dans les développements externes sont non-nuls. En effet, les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  vont générer un terme quadripolaire et les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_1$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_1$  vont générer un terme dipolaire. De même, dans le cas général, les termes d'ordre zéro  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  génèrent un terme octopolaire dans les termes du cinquième ordre des développements externes.

### 3.4 Conclusion

La méthode des développements asymptotiques raccordés permet d'obtenir des approximations des champs électromagnétiques à tout ordre. La justification théorique passe par la démonstration de résultats d'existence et d'unicité d'une solution aux problèmes locaux et indépendants de  $\delta$  vérifiés par les termes successifs des développements. Des estimations d'erreur, comme établies dans [Korikov et Plamenevskii \(2016\)](#) pour les développements issus de la méthode multi-échelles, sont nécessaires et difficiles à mettre en œuvre pour justifier que les développements asymptotiques définissent de bonnes approximations de la solution exacte et que l'ordre de troncature fournit un ordre d'approximation relié à une puissance de  $\delta$ . D'après la Section 2.2.2, mais aussi comme cela est présenté dans [Dauge et al. \(2010\)](#) pour un problème de coin, les développements asymptotiques issus des deux méthodes (multi-échelles et raccordés) sont reliés. En particulier, il est possible d'obtenir des estimations des développements

asymptotiques raccordés à partir de leurs estimations sur les développements multi-échelles. Toutefois, les ordres que les auteurs obtiennent apparaissent non-optimaux vis-à-vis de nos résultats numériques qui seront présentés dans le Chapitre 5, mais aussi des résultats obtenus dans [Ammari \*et al.\* \(2001\)](#) pour le premier ordre qui corrobore nos résultats. Un relèvement d'ordre théorique reste donc à mettre en place.

Par ailleurs, les développements asymptotiques raccordés fournissent des approximations analytiques dans le cadre d'un obstacle de forme particulière comme une sphère ou un ellipsoïde – toute géométrie qui admet un système de coordonnées dans lequel l'équation est séparable. Les problèmes locaux sont alors résolus à l'aide de la technique de séparation de variables. Les notions de tenseur de polarisabilité électrique et de polarisabilité magnétique permettent de généraliser sans encombre, de manière semi-analytique, les développements asymptotiques – au moins au premier ordre – pour le problème de diffraction par un obstacle de forme arbitraire.



## CHAPITRE 4

# APPLICATIONS DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Interprétation physique</b>	<b>114</b>
4.1.1	Développement interne	114
4.1.2	Développement externe	117
<b>4.2</b>	<b>Modèles réduits pour la diffraction simple</b>	<b>118</b>
4.2.1	Les modèles collectés	119
4.2.2	Les modèles modifiés	120
<b>4.3</b>	<b>La diffraction multiple</b>	<b>122</b>
4.3.1	Approximation de Born	123
4.3.2	Modèle de Foldy-Lax	124
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>128</b>

---

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la méthode des développements asymptotiques raccordés dans son ensemble. Nous avons introduit un algorithme permettant de construire successivement les différents termes des développements asymptotiques puis démontré l'existence et l'unicité de solutions aux problèmes induits en champ proche et en champ lointain. Le raccord des développements a été justifié à l'aide des décompositions modales associées aux problèmes de Maxwell harmoniques, statiques et emboîtés. Enfin, nous avons détaillé l'obtention des premiers termes issus de chacun des développements (interne et externe) et explicité analytiquement les trois premiers termes dans le cas d'une géométrie sphérique.

Ce chapitre est dédié aux applications des développements asymptotiques que nous avons obtenus. Dans un premier temps, nous donnons une interprétation physique des termes successifs des développements asymptotiques. Cela permet, d'une part, d'identifier ces termes comme une combinaison de champs générés par des multipôles, qui désignent des sources ponctuelles pour les équations de Maxwell et sont présentés dans la Section 1.4. D'autre part, cette identification permet d'écrire sous une forme plus synthétique les termes successifs des développements ce qui permettra en l'occurrence de simplifier les applications induites. Dans un deuxième temps, nous introduisons des modèles asymptotiques réduits qui permettent de capturer le comportement principal des développements et qui ne requiert pas la connaissance des dérivées successives associées aux champs incidents. Dans un troisième temps, nous étendons les résultats précédents au problème de la diffraction multiple, d'une part, en considérant le problème de diffraction simple par de multiples obstacles et qui correspond à la théorie de Born, d'autre part, en incluant également les interactions entre obstacles à l'aide de la théorie de Foldy-Lax.

## 4.1 Interprétation physique

Les termes successifs des développements asymptotiques sont caractérisés comme une combinaison de champs qui correspondent à des champs générés par des multipôles électromagnétiques, voir Section 1.4. Dans le Paragraphe 4.1.1, nous nous intéressons aux termes issus du développement interne qui sont caractérisés par une combinaison de champs statiques dans le cas d'une géométrie sphérique. Dans le Paragraphe 4.1.2, nous nous intéressons aux termes issus du développement externe, caractérisés, pour n'importe quelle configuration géométrique, par une combinaison de champs générés par des multipôles oscillants.

### 4.1.1 Développement interne

Dans le cadre d'une géométrie sphérique, les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  sont donnés par

$$\widehat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{X}) = \frac{1}{R^3} \left( 3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right), \quad \widehat{\mathbf{H}}_0(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2R^3} \left( 3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) \right),$$

où  $\mathbf{X} = R\hat{\mathbf{x}}$  avec  $R = |\mathbf{X}|$ , comme cela est démontré dans la Proposition 3.8. En comparant ce résultat avec la Proposition 1.1 et son équivalent, donné dans le Corollaire 1,

pour des sources magnétiques, nous en déduisons le corollaire suivant.

**Corollaire 6.** *Le terme  $\widehat{\mathbf{E}}_0$  issu du développement interne peut être identifié à un champ électrique généré par un dipôle électrique statique de moment  $\mathbf{d}_e = 4\pi \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$ . Le terme  $\widehat{\mathbf{H}}_0$  issu du développement interne peut être identifié à un champ magnétique généré par un dipôle magnétique statique de moment  $\mathbf{d}_h = -2\pi \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})$ . De plus, nous avons l'écriture suivante*

$$\widehat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e](\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h](\mathbf{X}).$$

Dans le cadre d'une géométrie sphérique, les termes  $\widehat{\mathbf{E}}_1$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_1$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R^4} \left( -(\hat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c}) \hat{x})) \times \hat{x} + \frac{3}{2} \hat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \hat{x}) \hat{x} \right) + \frac{i\kappa}{2R^2} \hat{x} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}), \\ \widehat{\mathbf{H}}_1(\mathbf{X}) &= \frac{1}{R^4} \left( \frac{2}{3} (\hat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c}) \hat{x})) \times \hat{x} - \hat{x} \cdot (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c}) \hat{x}) \hat{x} \right) + \frac{i\kappa}{R^2} \hat{x} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}), \end{aligned}$$

comme cela est démontré dans la Proposition 3.9. En comparant ce résultat avec les expressions issues des Propositions 1.2 et 1.4 et des Corollaires 2 et 3, nous déduisons le Corollaire suivant.

**Corollaire 7.** *Le terme  $\widehat{\mathbf{E}}_1$  issu du développement interne peut être identifié tel une combinaison de champs électriques, le premier étant généré par un dipôle magnétique statique de moment  $\mathbf{d}_h$ , défini dans le Corollaire 6, le second étant généré par un quadripôle électrique statique de moment  $\mathbf{Q}_e = -\frac{8\pi}{3} \mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})$ . Le terme  $\widehat{\mathbf{H}}_1$  issu du développement interne peut être identifié tel une combinaison de champs magnétiques, le premier étant généré par un dipôle électrique statique de moment  $\mathbf{d}_e$ , défini dans le Corollaire 6, le second étant généré par un quadripôle magnétique statique de moment  $\mathbf{Q}_h = \frac{16\pi}{9} \mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})$ . De plus, nous avons l'écriture suivante*

$$\widehat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h](\mathbf{X}) + \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e](\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e](\mathbf{X}) + \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h](\mathbf{X}).$$

Les termes suivants peuvent également être représentés par une combinaison de champs générés par des multipôles statiques. Cependant, il apparaît de nouveaux termes correspondant à des corrections, ou « ombres », issues des termes précédents, appelées *shadows* en anglais. En particulier, ces « ombres » corrigent les traces des champs sur la frontière  $\widehat{\Gamma}$  et tiennent également compte du caractère emboîté des équations. Dans cette dernière assertion, il y a beaucoup de choses à comprendre : nous expliquons le

cas électrique. À un ordre  $p$  fixé, le problème vérifié par le  $p$ -ième terme électrique du développement asymptotique vérifie une équation emboîtée munie d'une condition portant sur la trace tangentielle du champ électrique. Cela ne donne pas d'information sur la partie normale. Par conséquent, il faut regarder le problème magnétique à l'ordre  $(p+1)$  pour déterminer une condition sur la partie normale du  $p$ -ième terme électrique, par le biais de l'équation emboîtée vérifiée par  $\widehat{\mathbf{H}}_{p+1}$  et  $\widehat{\mathbf{E}}_p$  et de la condition à la frontière portant sur la trace normale du champ magnétique. Ainsi, nous pouvons prévoir une partie octopolaire, une partie quadripolaire et une partie dipolaire, sans compter les « ombres ». Toujours dans le cadre d'une géométrie sphérique, nous avons l'écriture suivante

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_2(\mathbf{X}) &= \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{O}_e](\mathbf{X}) + \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h](\mathbf{X}) + \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}\left[\frac{3\kappa^2}{10}\mathbf{d}_e\right](\mathbf{X}) + \mathbf{R}^e(\mathbf{X}), \\ \widehat{\mathbf{H}}_2(\mathbf{X}) &= \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{O}_h](\mathbf{X}) + \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e](\mathbf{X}) + \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}\left[-\frac{3\kappa^2}{5}\mathbf{d}_h\right](\mathbf{X}) + \mathbf{R}^m(\mathbf{X}),\end{aligned}\tag{4.1}$$

où les termes restants  $\mathbf{R}^e$  et  $\mathbf{R}^m$  sont donnés par

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^m = \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e],$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e](\mathbf{X}) &= \frac{\kappa^2}{5\mathbb{R}^5} \left( \frac{2}{3}(\widehat{x} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\widehat{x} - (\widehat{x} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{x} \right) \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{2\mathbb{R}} \left( \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + (\widehat{x} \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\widehat{x} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h](\mathbf{X}) &= -\frac{\kappa^2}{10\mathbb{R}^5} \left( (\widehat{x} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\widehat{x} - \frac{3}{2}(\widehat{x} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c})) \times \widehat{x} \right) \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{4\mathbb{R}} \left( \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}) + (\widehat{x} \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}))\widehat{x} \right)\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h](\mathbf{X}) = -\frac{i\kappa}{3\mathbb{R}^5}\widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\widehat{x}), \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e](\mathbf{X}) = -\frac{i\kappa}{4\mathbb{R}^5}\widehat{x} \times (\mathbb{J}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}^{\text{sym}}(\mathbf{c})\widehat{x}).$$

Dans les expressions (4.1),  $\mathbf{O}_e$  et  $\mathbf{O}_h$  désignent des tenseurs d'ordre 3 dépendant respectivement de  $\mathbb{H}_{\mathbf{E}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})$  et  $\mathbb{H}_{\mathbf{H}^{\text{inc}}}(\mathbf{c})$  et laissant au lecteur le soin de les expliciter,  $\mathbf{Q}_e$  et  $\mathbf{Q}_h$  sont définis dans le Corollaire 7 et  $\mathbf{d}_e$  et  $\mathbf{d}_h$  sont donnés par le Corollaire 6. En ce

qui concerne les « ombres », le terme  $\mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e]$  est engendré par  $\widehat{\mathbf{E}}_0$ , le terme  $\mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h]$  est engendré par  $\widehat{\mathbf{H}}_0$ , le terme  $\mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e]$  par  $\widehat{\mathbf{E}}_1$  et enfin, le terme  $\mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h]$  par  $\widehat{\mathbf{H}}_1$ .

### 4.1.2 Développement externe

Rappelons que  $\mathbf{x} = \mathbf{c} + r\hat{x}$ . Les termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_3$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_3$  issus du développement externe peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}) &= -\frac{\kappa^3}{4\pi} \left( -h_1^{(1)}(\kappa r)\hat{x} \times \mathbf{d}_h + \tilde{h}_1^{(1)}(\kappa r)(\hat{x} \times \mathbf{d}_e) \times \hat{x} + 2\frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r}(\hat{x} \cdot \mathbf{d}_e)\hat{x} \right), \\ \widetilde{\mathbf{H}}_3(\mathbf{x}) &= -\frac{\kappa^3}{4\pi} \left( h_1^{(1)}(\kappa r)\hat{x} \times \mathbf{d}_e + \tilde{h}_1^{(1)}(\kappa r)(\hat{x} \times \mathbf{d}_h) \times \hat{x} + 2\frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r}(\hat{x} \cdot \mathbf{d}_h)\hat{x} \right),\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{d}_e, \mathbf{d}_h \in \mathbb{C}^3$ , d'après la Proposition 3.18. En comparant ces expressions à celles issues de la Proposition 1.3 et du Corollaire 4, nous déduisons le résultat suivant.

**Corollaire 8.** *Le terme  $\widetilde{\mathbf{E}}_3$  issu du développement externe peut être identifié tel une combinaison de champs électriques, le premier étant généré par un dipôle électrique oscillant de moment  $\mathbf{d}_e$ , le second par un dipôle magnétique oscillant de moment  $\mathbf{d}_h$ . De même, le terme  $\widetilde{\mathbf{H}}_3$  issu du développement externe peut être identifié tel une combinaison de champs magnétiques, le premier étant généré par le dipôle électrique oscillant, le second par le dipôle magnétique oscillant. De plus, nous avons l'écriture suivante*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e](\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h](\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ \widetilde{\mathbf{H}}_3(\mathbf{x}) &= \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e](\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h](\mathbf{x} - \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Les moments dipolaires  $\mathbf{d}_e$  et  $\mathbf{d}_h$  sont définis dans la Proposition 3.18.

Dans le cadre d'une géométrie sphérique, les termes  $\widetilde{\mathbf{E}}_5$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_5$  issus du développement externe peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_5(\mathbf{x}) &= \frac{\kappa^4}{16\pi} \left( h_2^{(1)}(\kappa r)\hat{x} \times (\mathbf{Q}_h\hat{x}) + \tilde{h}_2^{(1)}(\kappa r)(\hat{x} \times (\mathbf{Q}_e\hat{x})) \times \hat{x} + 3\frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r}(\hat{x} \cdot (\mathbf{Q}_e\hat{x}))\hat{x} \right) \\ &\quad - \frac{\kappa^3}{4\pi} \left( h_1^{(1)}(\kappa r)\hat{x} \times \left(-\frac{3\kappa^2}{5}\mathbf{d}_h\right) + \tilde{h}_1^{(1)}(\kappa r)(\hat{x} \times \left(\frac{3\kappa^2}{10}\mathbf{d}_e\right)) \times \hat{x} + 2\frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r}(\hat{x} \cdot \left(\frac{3\kappa^2}{10}\mathbf{d}_e\right))\hat{x} \right)\end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_5(\mathbf{x}) = & \frac{\kappa^4}{16\pi} \left( -h_2^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{Q}_e \widehat{\mathbf{x}}) + \widetilde{h}_2^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{Q}_h \widehat{\mathbf{x}})) \times \widehat{\mathbf{x}} + 3 \frac{h_2^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{Q}_h \widehat{\mathbf{x}})) \widehat{\mathbf{x}} \right) \\ & - \frac{\kappa^3}{4\pi} \left( h_1^{(1)}(\kappa r) \widehat{\mathbf{x}} \times \left( \frac{3\kappa^2}{10} \mathbf{d}_e \right) + \widetilde{h}_1^{(1)}(\kappa r) (\widehat{\mathbf{x}} \times \left( -\frac{3\kappa^2}{5} \mathbf{d}_h \right)) \times \widehat{\mathbf{x}} + 2 \frac{h_1^{(1)}(\kappa r)}{i\kappa r} (\widehat{\mathbf{x}} \cdot \left( -\frac{3\kappa^2}{5} \mathbf{d}_h \right)) \widehat{\mathbf{x}} \right). \end{aligned}$$

En comparant ces expressions à celles issues des Propositions 1.3 et 1.6 et des Corollaires 4 et 5, nous déduisons le Corollaire suivant.

**Corollaire 9.** Si  $\widehat{\Gamma} = \mathcal{S}$ , le terme  $\widetilde{\mathbf{E}}_5$  issu du développement externe peut être identifié tel une combinaison de quatre champs électriques, les deux premiers étant générés par des quadripôles électrique et magnétique, les deux derniers étant générés par des dipôles électrique et magnétique. Le terme  $\widetilde{\mathbf{H}}_5$  issu du développement externe peut être identifié tel une combinaison de quatre champs magnétiques générés par ces mêmes multipôles. De plus, nous avons l'écriture suivante

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_5(\mathbf{x}) = & \mathbf{E}^{elec} \left[ \frac{3\kappa^2}{10} \mathbf{d}_e \right] (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{E}^{mag} \left[ -\frac{3\kappa^2}{5} \mathbf{d}_h \right] (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{E}^{elec} [\mathbf{Q}_e] (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ & + \mathbf{E}^{mag} [\mathbf{Q}_h] (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_5(\mathbf{x}) = & \mathbf{H}^{elec} \left[ \frac{3\kappa^2}{10} \mathbf{d}_e \right] (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{H}^{mag} \left[ -\frac{3\kappa^2}{5} \mathbf{d}_h \right] (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{H}^{elec} [\mathbf{Q}_e] (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ & + \mathbf{H}^{mag} [\mathbf{Q}_h] (\mathbf{x} - \mathbf{c}). \end{aligned}$$

**Remarque 4.1.** Les opérateurs de champ électrique et de champ magnétique  $\mathbf{E}^{elec}$ ,  $\mathbf{E}^{mag}$ ,  $\mathbf{H}^{elec}$  et  $\mathbf{H}^{mag}$  appliqués à un moment dipolaire  $\mathbf{d}$  ou un moment quadripolaire  $\mathbf{Q}$  sont définis dans les Propositions 1.3 et 1.6 et dans les Corollaires 4 et 5.

## 4.2 Modèles réduits pour la diffraction simple

Les développements asymptotiques nécessitent la connaissance de la valeur en le centre  $\mathbf{c}$  de l'obstacle des dérivées des champs incidents. Pour le développement interne, nous constatons qu'il intervient à l'ordre zéro la valeur des champs incidents en  $\mathbf{c}$ , au premier ordre, la valeur de leurs matrices jacobiennes en  $\mathbf{c}$ , au deuxième ordre, celle

de leurs matrices hessiennes, et ainsi de suite. Pour le développement externe, cette dépendance est décalée de trois termes. Ainsi, les troisièmes termes font appel à la valeur en  $c$  des champs incidents, les quatrièmes, celles de leur matrice jacobienne *et cetera*.

Les développements obtenus constituent déjà des modèles réduits pour la diffraction simple. Toutefois, les dérivées des champs incidents peuvent ne pas toujours être calculables analytiquement ou numériquement. C'est pourquoi, nous introduisons dans cette section, deux autres types de modèles réduits : les modèles collectés et les modèles modifiés. Ce sont des modèles approchés pour la diffraction simple qui permettent de capturer et reproduire les propriétés principales des développements asymptotiques en s'abstenant de la connaissance des dérivées des champs incidents à partir d'un certain ordre.

### 4.2.1 Les modèles collectés

Comme leur nom l'indique, les modèles collectés sont basés sur un réarrangement des termes successifs dans les développements asymptotiques puis sur la collecte des termes d'intérêt. Si les développements asymptotiques s'écrivent sous la forme d'une série suivant les puissances successives de  $\delta$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_\delta &= \widehat{\mathbf{E}}_0 + \delta \widehat{\mathbf{E}}_1 + \delta^2 \widehat{\mathbf{E}}_2 + \dots & \widehat{\mathbf{H}}_\delta &= \widehat{\mathbf{H}}_0 + \delta \widehat{\mathbf{H}}_1 + \delta^2 \widehat{\mathbf{H}}_2 + \dots, \\ \widetilde{\mathbf{E}}_\delta &= \delta^3 \widetilde{\mathbf{E}}_3 + \delta^4 \widetilde{\mathbf{E}}_4 + \delta^5 \widetilde{\mathbf{E}}_5 + \dots & \widetilde{\mathbf{H}}_\delta &= \delta^3 \widetilde{\mathbf{H}}_3 + \delta^4 \widetilde{\mathbf{H}}_4 + \delta^5 \widetilde{\mathbf{H}}_5 + \dots,\end{aligned}$$

ils peuvent également s'écrire, d'après les Sections 4.1.1 et 4.1.2, sous la forme de développements multipolaires donnés, dans le cas sphérique, par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_\delta &= \alpha_e(\delta) \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \delta^2 \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] \\ &\quad + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] + \delta^2 \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{O}_e] + \dots, \\ \widehat{\mathbf{H}}_\delta &= \alpha_h(\delta) \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] + \delta^2 \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] \\ &\quad + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \delta^2 \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{O}_h] + \dots, \\ \widetilde{\mathbf{E}}_\delta &= \delta^3 \alpha_e(\delta) \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^3 \alpha_h(\delta) \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^5 \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \delta^5 \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] + \dots, \\ \widetilde{\mathbf{H}}_\delta &= \delta^3 \alpha_e(\delta) \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^3 \alpha_h(\delta) \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^5 \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \delta^5 \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] + \dots,\end{aligned}$$

où

$$\alpha_e(\delta) = \left(1 + \frac{3\kappa^2 \delta^2}{10}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_h(\delta) = \left(1 - \frac{3\kappa^2 \delta^2}{5}\right). \quad (4.2)$$

Nous nous intéressons à deux types de modèles collectés : les modèles dipolaires et les modèles quadripolaires, en champ proche et en champ lointain.

Les modèles dipolaires consistent à conserver dans les développements tous les termes issus de dipôles et négliger les termes de différente nature. En champ proche, les champs électromagnétiques sont approchés par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_\delta &\approx \alpha_e(\delta) \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h], \\ \widehat{\mathbf{H}}_\delta &\approx \alpha_h(\delta) \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e].\end{aligned}$$

En champ lointain, les champs électromagnétiques sont approchés par

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_\delta &\approx \delta^3 \alpha_e(\delta) \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^3 \alpha_h(\delta) \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h], \\ \widetilde{\mathbf{H}}_\delta &\approx \delta^3 \alpha_e(\delta) \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^3 \alpha_h(\delta) \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h].\end{aligned}\tag{4.3}$$

Les modèles quadripolaires consistent à conserver dans les développements tous les termes issus de dipôles et de quadripôles et négliger les termes issus des multipôles d'ordre plus élevé. En champ proche, les champs électromagnétiques sont approchés par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_\delta &\approx \alpha_e(\delta) \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \delta^2 \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] \\ &\quad + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h], \\ \widehat{\mathbf{H}}_\delta &\approx \alpha_h(\delta) \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h] + \delta^2 \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] \\ &\quad + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{quad}}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e].\end{aligned}$$

En champ lointain, les champs électromagnétiques sont approchés par

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_\delta &\approx \delta^3 \alpha_e(\delta) \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^3 \alpha_h(\delta) \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^5 \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \delta^5 \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h], \\ \widetilde{\mathbf{H}}_\delta &\approx \delta^3 \alpha_e(\delta) \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^3 \alpha_h(\delta) \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^5 \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \delta^5 \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h].\end{aligned}$$

## 4.2.2 Les modèles modifiés

À partir des modèles collectés, nous définissons les modèles modifiés pour la diffraction simple. Ils permettent d'améliorer la précision des modèles réduits en régime pré-asymptotique, c'est-à-dire lorsque  $\kappa\delta$  se rapproche de 1. Pour la diffraction simple par une sphère, ces modèles modifiés peuvent être assimilés aux approximations issues de la théorie de Mie. L'avantage des modèles basés sur la théorie asymptotique, en com-

paraison avec ceux issus de la théorie de Mie, est qu'ils ne font pas intervenir, au final, le calcul numérique des harmoniques sphériques vectorielles et des coefficients spectraux. De plus, les modèles asymptotiques peuvent être adaptés à la diffraction simple par un obstacle de forme arbitraire en introduisant les tenseurs de polarisabilité électrique et magnétique. En revanche, la théorie de Mie, basée sur la théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère, nécessite, pour être adaptée à des obstacles de forme plus générale, le calcul numérique des fonctions propres de cet opérateur surfacique défini sur la surface arbitraire. Ce type de calcul s'avère quasiment impossible à mettre en œuvre sur des géométries complexes.

La définition des modèles modifiés consiste à identifier des fonctions scalaires bien choisies telles que leur développement de Taylor coïncident avec les coefficients des modèles collectés. En particulier, en remarquant que

$$\frac{3i}{2\kappa^3\delta^3} \frac{\tilde{j}_1(\kappa\delta)}{\tilde{h}_1^{(1)}(\kappa\delta)} = 1 + \frac{3\kappa^2\delta^2}{10} + O(\delta^3) \quad \text{et} \quad \frac{3i}{\kappa^3\delta^3} \frac{j_1(\kappa\delta)}{h_1^{(1)}(\kappa\delta)} = 1 - \frac{3\kappa^2\delta^2}{5} + O(\delta^3),$$

nous remplaçons, dans les modèles dipolaires les coefficients collectés par ces fonctions scalaires. En champ proche, les champs électromagnétiques sont approchés par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_\delta &\approx \beta_e(\delta) \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \delta \mathbf{E}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h], \\ \widehat{\mathbf{H}}_\delta &\approx \beta_h(\delta) \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta^2 \mathbf{R}_{\text{dip}}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] + \delta \mathbf{H}_{\text{stat}}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e], \end{aligned}$$

où

$$\beta_e(\delta) = \frac{3i}{2\kappa^3} \frac{\tilde{j}_1(\kappa\delta)}{\tilde{h}_1^{(1)}(\kappa\delta)} \quad \text{et} \quad \beta_h(\delta) = \frac{3i}{\kappa^3} \frac{j_1(\kappa\delta)}{h_1^{(1)}(\kappa\delta)}. \quad (4.4)$$

En champ lointain, les champs électromagnétiques sont approchés par

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_\delta &\approx \beta_e(\delta) \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \beta_h(\delta) \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h], \\ \widetilde{\mathbf{H}}_\delta &\approx \beta_e(\delta) \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \beta_h(\delta) \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les modèles quadripolaires que nous avons obtenus ne permettent *a priori* pas de définir un modèle modifié quadripolaire. Cela est dû au fait que nous n'avons pas suffisamment d'information sur le comportement asymptotique, lorsque  $\delta$  tend vers zéro, de la fonction scalaire ; en effet nous ne connaissons que le comportement principal qui est en  $\delta^5$ . Toutefois, il est quand même possible de prévoir ce comportement, et ce, grâce à

la théorie de Mie. En particulier, nous avons

$$-\frac{30i}{\kappa^5 \delta^5} \frac{\tilde{j}_2(\kappa\delta)}{\tilde{h}_2^{(1)}(\kappa\delta)} = 1 + O(\delta^2) \quad \text{et} \quad \frac{45i}{\kappa^5 \delta^5} \frac{j_2(\kappa\delta)}{h_2^{(1)}(\kappa\delta)} = 1 + O(\delta^2).$$

Bien sûr, il existe un grand nombre de fonctions scalaires admettant ce développement de Taylor, à l'exception que ces fonctions-ci interviennent également dans la solution issue de la théorie de Mie. Nous remplaçons alors les coefficients collectés issus des modèles quadripolaires par ces fonctions scalaires. En champ lointain, les champs électromagnétiques sont approchés par

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_\delta &\approx \beta_e(\delta) \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \beta_h(\delta) \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] - \frac{30i}{\kappa^5} \frac{\tilde{j}_2(\kappa\delta)}{\tilde{h}_2^{(1)}(\kappa\delta)} \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \frac{45i}{\kappa^5 \delta^5} \frac{j_2(\kappa\delta)}{h_2^{(1)}(\kappa\delta)} \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h], \\ \widetilde{\mathbf{H}}_\delta &\approx \beta_e(\delta) \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e] + \beta_h(\delta) \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h] - \frac{30i}{\kappa^5} \frac{\tilde{j}_2(\kappa\delta)}{\tilde{h}_2^{(1)}(\kappa\delta)} \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{Q}_e] + \frac{45i}{\kappa^5 \delta^5} \frac{j_2(\kappa\delta)}{h_2^{(1)}(\kappa\delta)} \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{Q}_h]. \end{aligned}$$

Nous verrons dans les Sections 5.1.3 et 5.2 que ces modifications permettent d'améliorer, en régime pré-asymptotique, la précision des modèles asymptotiques pour la diffraction simple comme pour la diffraction multiple, en les illustrant sur des exemples par des courbes de convergence. Nous pouvons tout de même notifier que la théorie de Mie mène à de pareilles approximations. Cependant, nous évitons l'introduction, et par conséquent le coût, des harmoniques sphériques vectorielles.

### 4.3 La diffraction multiple

La troisième application des développements asymptotiques concerne l'extension au phénomène de diffraction multiple. Nous définissons deux approximations : l'approximation de Born et le modèle de Foldy-Lax du premier ordre, introduits dans la Section 2.3. La première est basée sur un principe de superposition ne tenant pas compte des différentes interactions entre les obstacles. Quant au modèle de Foldy-Lax, la prise en compte des interactions entre les champs dipolaires issus des développements asymptotiques permet de décrire précisément la diffraction multiple. Dans la suite, nous considérons  $K$  obstacles  $\mathcal{B}_\delta^1, \dots, \mathcal{B}_\delta^K$  disjoints, définis de manière auto-similaire,

$$\mathcal{B}_\delta^k = \mathbf{c}_k + \delta \widehat{\mathcal{B}},$$

où  $\mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^3$  désigne le centre de l'obstacle  $\mathcal{B}_\delta^k$  et  $\delta > 0$  désigne son rayon. Nous nous intéressons principalement aux approximations en champ lointain. Dans le cadre des développements asymptotiques raccordés, le domaine  $\Omega^*$  de champ lointain, dans lequel sont définis les termes successifs du développement externe, est le domaine extérieur

$$\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^K \{\mathbf{c}_k\}.$$

Les obstacles sont représentés comme des obstacles ponctuels – ce sont des *point-like obstacles* en anglais. D'un point de vue du champ proche, le couplage n'est pas si évident que cela. Il faut inclure, dans les conditions sur la frontière, la prise en compte des champs lointains issus des obstacles alentour.

### 4.3.1 Approximation de Born

L'approximation de Born décrit la diffraction simple par de multiples obstacles. Elle est basée sur un principe de superposition des champs diffractés générés dans le cadre de la diffraction simple. La solution  $\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta$  est donnée par une somme

$$\mathbf{E}_\delta = \sum_{k=1}^K \mathbf{E}_\delta^k(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta = \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_\delta^k(\mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{c}_k + r_k \hat{\mathbf{x}}_k$  et chaque champ diffracté  $\mathbf{E}_\delta^k, \mathbf{H}_\delta^k$ , relativement au  $k$ -ième obstacle, est approché par une des approximations externes définies au préalable dans les Sections 4.1 et 4.2. Les approximations de  $\mathbf{E}_\delta^k$  et  $\mathbf{H}_\delta^k$ , peuvent se faire suivant les puissances de  $\delta$  en tronquant les séries à l'ordre  $P$  ou suivant les multipôles de même nature dans le cadre des modèles collectés et modifiés. Dans le cadre de l'approximation dipolaire, nous écrivons les champs diffractés sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\delta^k(\mathbf{x}) &\approx \gamma_e(\delta) \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + \gamma_h(\delta) \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k), \\ \mathbf{H}_\delta^k(\mathbf{x}) &\approx \gamma_e(\delta) \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + \gamma_h(\delta) \mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k). \end{aligned}$$

Les coefficients  $\gamma_e(\delta)$  et  $\gamma_h(\delta)$  dépendent de  $\delta$  et de l'approximation considérée. En particulier, nous définissons

- pour l'approximation du troisième ordre,

$$\gamma_e(\delta) = \delta^3 \quad \text{et} \quad \gamma_h(\delta) = \delta^3, \quad (4.6)$$

- pour l'approximation collectée,

$$\gamma_e(\delta) = \delta^3 \alpha_e(\delta) \quad \text{et} \quad \gamma_h(\delta) = \delta^3 \alpha_h(\delta), \quad (4.7)$$

où  $\alpha_e$  et  $\alpha_h$  sont donnés par (4.2),

- et enfin, pour l'approximation modifiée

$$\gamma_e(\delta) = \beta_e(\delta) \quad \text{et} \quad \gamma_h(\delta) = \beta_h(\delta), \quad (4.8)$$

où  $\beta_e$  et  $\beta_h$  sont donnés par (4.4),

Les moments dipolaires associés, notés  $\mathbf{d}_e^k$  et  $\mathbf{d}_h^k$ , sont donnés par

$$\mathbf{d}_e^k = \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_h^k = -\mathbb{P}^m \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k), \quad (4.9)$$

où  $\mathbb{P}^e$  et  $\mathbb{P}^m$  désignent les tenseurs de polarisabilité électrique et de polarisabilité magnétique introduits dans la Définition 3.3.

**Remarque 4.2.** Dans le contexte d'obstacles sphériques, les moments dipolaires sont plus simplement donnés par

$$\mathbf{d}_e^k = 4\pi \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_h^k = -2\pi \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k).$$

Comme nous pouvons le constater, les interactions entre les différents obstacles ne sont pas prises en compte ici. En effet, les champs diffractés relativement à chacun des obstacles sont définis de manière indépendante des autres champs diffractés. Pour outrepasser ce défaut, nous mettons en place, dans la section suivante, le modèle de Foldy-Lax.

### 4.3.2 Modèle de Foldy-Lax

Le modèle de Foldy-Lax permet de décrire le phénomène de diffraction multiple par de multiples obstacles. Tout comme l'approximation de Born, le modèle de Foldy est basée sur un principe de superposition,

$$\mathbf{E}_\delta = \sum_{k=1}^K \mathbf{E}_\delta^k(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta = \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_\delta^k(\mathbf{x}),$$

où les champs  $\mathbf{E}_\delta^k$  et  $\mathbf{H}_\delta^k$  sont approchés, dans le cadre de l'approximation dipolaire, par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\delta^k(\mathbf{x}) &\approx \gamma_e(\delta)\mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + \gamma_h(\delta)\mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k), \\ \mathbf{H}_\delta^k(\mathbf{x}) &\approx \gamma_e(\delta)\mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{d}_e^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + \gamma_h(\delta)\mathbf{H}^{\text{mag}}[\mathbf{d}_h^k](\mathbf{x} - \mathbf{c}_k);\end{aligned}\tag{4.10}$$

les coefficients  $\gamma_e(\delta)$  et  $\gamma_h(\delta)$  étant définis par l'une des expressions (4.6), (4.7) ou (4.8). L'interaction du  $k$ -ième champ diffracté avec les autres champs diffractés est exprimée à travers les moments dipolaires  $\mathbf{d}_e^k$  et  $\mathbf{d}_h^k$ . Si, lors de l'approximation de Born, les moments dipolaires sont donnés par (4.9), alors pour le modèle de Foldy-Lax, nous avons pour tout  $k = 1, \dots, K$ ,

$$\mathbf{d}_e^k = \mathbb{P}^e \left( \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{E}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_h^k = -\mathbb{P}^m \left( \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{H}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) \right).\tag{4.11}$$

Nous constatons qu'il y a non seulement les champs incidents  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  qui font office de source pour le  $k$ -ième obstacle, mais aussi tous les autres champs diffractés, pour  $\ell \neq k$ , sont considérés comme de nouvelles sources pour ce  $k$ -ième obstacle.

**Remarque 4.3.** Si les obstacles sont de forme sphérique, alors les systèmes (4.11) s'expriment à l'aide d'une relation de proportionnalité,

$$\mathbf{d}_e^k = 4\pi \left( \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{E}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_h^k = -2\pi \left( \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K \mathbf{H}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) \right).$$

Dans ce dernier paragraphe, nous explicitons le système muni des équations (4.11) pour  $k = 1, \dots, K$ , sous la forme

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A}_\delta) \mathbf{d} = \mathbf{f}.$$

où  $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^{6K}$  désigne le vecteur contenant l'ensemble des moments dipolaires,

$$\mathbf{d} = \left( \mathbf{d}_e^1 \quad \dots \quad \mathbf{d}_e^K \quad \mathbf{d}_h^1 \quad \dots \quad \mathbf{d}_h^K \right)^\top.$$



Le second membre  $\mathbf{f}$  est le vecteur de  $\mathbb{C}^{6K}$  constitué des différentes contributions des champs incidents,

$$\mathbf{f}_{i_{\text{glob}}} = \begin{cases} (\mathbb{P}^e \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k))_{i_{\text{loc}}} & \text{pour } i_{\text{glob}} = (k-1)K + i_{\text{loc}}, \\ - (\mathbb{P}^m \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{c}_k))_{i_{\text{loc}}} & \text{pour } i_{\text{glob}} = 3K + (k-1)K + i_{\text{loc}}, \end{cases}$$

où  $i_{\text{loc}}$  varie entre 1 et 3. Afin d'introduire la matrice  $\mathbb{A}_\delta$ , nous notons  $i_{\text{glob}}$  et  $j_{\text{glob}}$  ses indices globaux. Par ailleurs, nous notons  $i_{\text{loc}}$  et  $j_{\text{loc}}$  variant entre 1 et 3 les indices locaux issus du bloc correspondant à une interaction à  $k$  et  $\ell$  fixés entre 1 et  $K$ , puis  $i = 3(k-1) + i_{\text{loc}}$  et  $j = 3(\ell-1) + j_{\text{loc}}$  les indices à l'intérieur d'une partie correspondant aux interactions électrique-électrique (E-E) ou électrique-magnétique (E-M) ou magnétique-électrique (M-E) ou magnétique-magnétique (M-M). Ainsi, les indices globaux  $i_{\text{glob}}$  et  $j_{\text{glob}}$  sont donnés par

$$i_{\text{glob}} = \begin{cases} i & \text{pour une interaction E-E ou M-E,} \\ 3K + i & \text{pour une interaction E-M ou M-M,} \end{cases}$$

$$j_{\text{glob}} = \begin{cases} j & \text{pour une interaction E-E ou E-M,} \\ 3K + j & \text{pour une interaction M-E ou M-M.} \end{cases}$$

**Proposition 4.1.** *La matrice  $\mathbb{A}_\delta$  issu du système de Foldy, s'exprime sous la forme suivante*

- pour tout  $i_{\text{glob}}$  et  $j_{\text{glob}}$  tels que  $k = \ell$ ,

$$(\mathbb{A}_\delta)_{i_{\text{glob}}, j_{\text{glob}}} = 0,$$

- pour tout  $i_{\text{glob}}$  et  $j_{\text{glob}}$  associés aux interactions E-E avec  $k \neq \ell$  et  $i_{\text{loc}}, j_{\text{loc}} = 1, 2, 3$ ,

$$(\mathbb{A}_\delta)_{i_{\text{glob}}, j_{\text{glob}}} = \gamma_e(\delta) \left( \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{\text{elec}}[\mathbf{e}_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right)_{i_{\text{loc}}},$$

- pour tout  $i_{\text{glob}}$  et  $j_{\text{glob}}$  associés aux interactions M-E avec  $k \neq \ell$  et  $i_{\text{loc}}, j_{\text{loc}} = 1, 2, 3$ ,

$$(\mathbb{A}_\delta)_{i_{\text{glob}}, j_{\text{glob}}} = \gamma_h(\delta) \left( \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{\text{mag}}[\mathbf{e}_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right)_{i_{\text{loc}}},$$

- pour tout  $i_{\text{glob}}$  et  $j_{\text{glob}}$  associés aux interactions E-M avec  $k \neq \ell$  et  $i_{\text{loc}}, j_{\text{loc}} = 1, 2, 3$ ,

$$(\mathbb{A}_\delta)_{i_{\text{glob}}, j_{\text{glob}}} = -\gamma_e(\delta) \left( \mathbb{P}^m \mathbf{H}^{\text{elec}}[\mathbf{e}_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right)_{i_{\text{loc}}},$$

- pour tout  $i_{glob}$  et  $j_{glob}$  associés aux interactions M-M avec  $k \neq \ell$  et  $i_{loc}, j_{loc} = 1, 2, 3$ ,

$$(\mathbb{A}_\delta)_{i_{glob}, j_{glob}} = -\gamma_h(\delta) (\mathbb{P}^m \mathbf{H}^{mag}[e_{j_{loc}}])(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell)_{i_{loc}}.$$

**Remarque 4.4.** Le produit matrice-vecteur entre l'un des tenseurs de polarisabilité  $\mathbb{P}^\diamond = \mathbb{P}^e$  ou  $\mathbb{P}^m$  et l'un des quatre champs dipolaires élémentaires  $\mathbf{u} = \mathbf{E}^{elec}[e_{j_{loc}}]$ ,  $\mathbf{E}^{mag}[e_{j_{loc}}]$ ,  $\mathbf{H}^{elec}[e_{j_{loc}}]$  ou  $\mathbf{H}^{mag}[e_{j_{loc}}]$  est décrit par ses composantes pour  $i_{loc} = 1, 2, 3$ ,

$$(\mathbb{P}^\diamond \mathbf{u})_{i_{loc}} = \sum_{j_{loc}=1}^3 (\mathbb{P}^\diamond)_{i_{loc}, j_{loc}} \mathbf{u}_{j_{loc}}$$

Pour des obstacles de forme sphérique, les produits matrice-vecteur s'écrivent plus simplement sous la forme

$$\mathbb{P}^e \mathbf{u} = 4\pi \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^m \mathbf{u} = 2\pi \mathbf{u}.$$

*Démonstration.* En partant du système (4.11), nous exprimons le produit matrice-vecteur  $\mathbb{A}_\delta \mathbf{d}$  sous la forme

$$(\mathbb{A}_\delta \mathbf{d})_{i_{glob}} = \begin{cases} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K (\mathbb{P}^e \mathbf{E}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k))_{i_{loc}} & \text{pour } i_{glob} = (k-1)K + i_{loc}, \\ - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^K (\mathbb{P}^m \mathbf{H}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k))_{i_{loc}} & \text{pour } i_{glob} = 3K + (k-1)K + i_{loc}. \end{cases}$$

De plus, d'après les identités (4.10), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^e \mathbf{E}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) &= \gamma_e(\delta) \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{elec}[\mathbf{d}_e^\ell](\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) + \gamma_h(\delta) \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{mag}[\mathbf{d}_h^\ell](\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell), \\ \mathbb{P}^m \mathbf{H}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) &= \gamma_e(\delta) \mathbb{P}^m \mathbf{H}^{elec}[\mathbf{d}_e^\ell](\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) + \gamma_h(\delta) \mathbb{P}^m \mathbf{H}^{mag}[\mathbf{d}_h^\ell](\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell). \end{aligned}$$

Nous observons qu'une partie de  $\mathbb{P}^e \mathbf{E}_\delta^k$ , respectivement de  $\mathbb{P}^m \mathbf{H}_\delta^\ell$ , s'applique aux moments dipolaires électriques  $\mathbf{d}_e^\ell$ , tandis que l'autre s'applique aux moments dipolaires magnétiques  $\mathbf{d}_h^\ell$ . Puisque les opérateurs  $\mathbf{E}^{elec}[\mathbf{d}]$ ,  $\mathbf{E}^{mag}[\mathbf{d}]$ ,  $\mathbf{H}^{elec}[\mathbf{d}]$  et  $\mathbf{H}^{mag}[\mathbf{d}]$  sont linéaires par rapport à  $\mathbf{d}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^e \mathbf{E}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) &= \sum_{j_{loc}=1}^3 (\mathbf{d}_e^\ell)_{j_{loc}} (\alpha_e(\delta) \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{elec}[e_{j_{loc}}](\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell)) \\ &\quad + (\mathbf{d}_h^\ell)_{j_{loc}} (\alpha_h(\delta) \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{mag}[e_{j_{loc}}](\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^m \mathbf{H}_\delta^\ell(\mathbf{c}_k) &= \sum_{j_{\text{loc}}=1}^3 (\mathbf{d}_e^\ell)_{j_{\text{loc}}} \left( \alpha_e(\delta) \mathbb{P}^m \mathbf{H}^{\text{elec}}[e_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right) \\ &\quad + (\mathbf{d}_h^\ell)_{j_{\text{loc}}} \left( \alpha_h(\delta) \mathbb{P}^m \mathbf{H}^{\text{mag}}[e_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right). \end{aligned}$$

Enfin, en remarquant que  $(\mathbf{d}_e^\ell)_{j_{\text{loc}}} = \mathbf{d}_{j_{\text{glob}}}$  avec  $j_{\text{glob}} = (\ell - 1)K + j_{\text{loc}}$  et  $(\mathbf{d}_h^\ell)_{j_{\text{loc}}} = \mathbf{d}_{3K+j_{\text{glob}}}$ , nous identifions la matrice  $\mathbb{A}_\delta$  avec

$$\begin{pmatrix} \left[ \gamma_e(\delta) \left( \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{\text{elec}}[e_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right)_{i_{\text{loc}}} \right]_{i_{\text{loc}}, j_{\text{loc}}}^{k, \ell} & \left[ \gamma_h(\delta) \left( \mathbb{P}^e \mathbf{E}^{\text{mag}}[e_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right)_{i_{\text{loc}}} \right]_{i_{\text{loc}}, j_{\text{loc}}}^{k, \ell} \\ \left[ -\gamma_e(\delta) \left( \mathbb{P}^m \mathbf{H}^{\text{elec}}[e_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right)_{i_{\text{loc}}} \right]_{i_{\text{loc}}, j_{\text{loc}}}^{k, \ell} & \left[ -\gamma_h(\delta) \left( \mathbb{P}^m \mathbf{H}^{\text{mag}}[e_{j_{\text{loc}}}] (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell) \right)_{i_{\text{loc}}} \right]_{i_{\text{loc}}, j_{\text{loc}}}^{k, \ell} \end{pmatrix},$$

avec 0 lorsque  $k = \ell$ . □

## 4.4 Conclusion

Les développements asymptotiques en champ proche et en champ lointain peuvent être identifiés à des développements par multipôles dans le cadre d'une géométrie sphérique. L'écriture multipolaire apparaît vraiment commode d'un point de vue du champ lointain car, au premier ordre, l'introduction implicite des tenseurs de polarisabilité électrique et de polarisabilité magnétique dans la définition des moments dipolaires permet de considérer un obstacle de forme arbitraire. Par ailleurs, nous verrons dans les Sections 5.1.2 et 5.1.3 que les modèles collectés et les modèles modifiés permettent d'améliorer légèrement la précision des développements asymptotiques pour un coût de calcul équivalent.

À partir des développements asymptotiques, nous avons défini l'approximation de Born et le modèle de Foldy-Lax. En contraste avec l'approximation de Born, le modèle de Foldy du premier ordre permet de prendre en compte les interactions à caractère dipolaire entre les champs diffractés locaux. Des illustrations numériques seront présentées dans la Section 5.2.

## CHAPITRE 5

# RÉSULTATS NUMÉRIQUES

### Sommaire

<b>5.1 Validation des développements asymptotiques raccordés</b>	<b>130</b>
5.1.1 Description des tests numériques	130
5.1.2 Convergence en champ proche	137
5.1.3 Convergence en champ lointain	139
<b>5.2 Validation des modèles réduits pour la diffraction multiple</b>	<b>143</b>
5.2.1 Description des tests numériques	143
5.2.2 Comparaison des modèles asymptotiques	146
5.2.3 Comparaison des surfaces équivalentes radar	152
<b>5.3 Conclusion</b>	<b>153</b>

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté différentes applications des développements asymptotiques raccordés introduits dans le Chapitre 3. Nous avons définis différents modèles réduits permettant de décrire la diffraction simple des ondes électromagnétiques par un obstacle dont la taille caractéristique est petite devant la longueur d'onde de l'onde incidente. Puis, à l'aide du modèle de Foldy-Lax, nous avons explicité des modèles réduits dipolaires pour traiter le phénomène de diffraction multiple.

Dans ce chapitre, nous validons numériquement les modèles obtenus. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux développements asymptotiques obtenus dans le contexte de la diffraction simple par un obstacle sphérique et parfaitement conducteur. Nous vérifions numériquement les ordres de convergence en fonction de la taille

$\delta$  de l'obstacle en s'adressant à deux types d'ondes incidentes. Dans un second temps, nous comparons les modèles réduits pour la diffraction multiple par une onde plane électromagnétique, issus de la théorie de Foldy-Lax avec les modèles de type Born pour lesquels les interactions entre les différents obstacles ne sont pas prises en compte. Les comparaisons seront effectuées en fonction de la taille  $\delta$  des obstacles mais aussi en fonction de la distance entre deux obstacles. Dans cette partie, les cas-tests considérés comportent de petits nombres d'obstacles, le but n'étant pas de tirer de conclusions sur la performance et l'efficacité des modèles réduits. Cette étude fera l'objet du Chapitre 9.

## 5.1 Validation des développements asymptotiques raccordés

Dans cette section, nous étudions la convergence des développements asymptotiques raccordés et ses déclinaisons en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère, pour deux types d'onde incidente : une onde plane électromagnétique et un faisceau gaussien. Les solutions sont validées à l'aide d'approximations obtenues grâce à la théorie de Mie tronquée à l'ordre  $N_{\text{mod}} = 8$ .

### 5.1.1 Description des tests numériques

Nous considérons le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par la boule ouverte  $\mathcal{B}(0, \delta)$  centrée en l'origine et de rayon  $\delta$ . L'onde électromagnétique incidente est caractérisée par les champs électromagnétiques incidents  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  dont la longueur d'onde  $\lambda$  est choisie égale à 5.0 pour chaque cas-test. De plus, elle se propage dans l'espace libre de permittivité électrique  $\varepsilon = 1.0$  et de perméabilité magnétique  $\mu = 1.0$ . Le domaine de visualisation est le sous-domaine de  $\mathbb{R}^3$  donné par  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ .

**Onde incidente n°1** Nous considérons une onde plane électromagnétique dirigée selon l'axe des  $z$  et polarisée selon l'axe des  $x$ . Les champs électromagnétiques incidents s'écrivent

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa} (\mathbf{k} \times \mathbf{p}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{p}$  désigne le vecteur de polarisation et  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde donnés par

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\kappa \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

avec  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Les Figures 5.1 et 5.2 représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une des composantes des champs électromagnétiques incidents dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . La solution exacte est calculée à partir de la

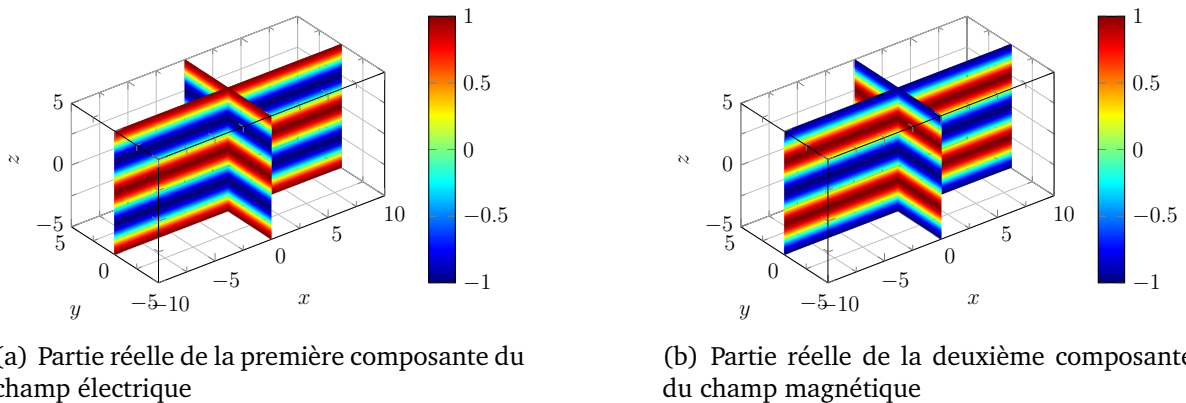


FIGURE 5.1 – Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques incidents associés à l'onde plane électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 5.0$  se propageant à la vitesse  $c = 1.0$ .

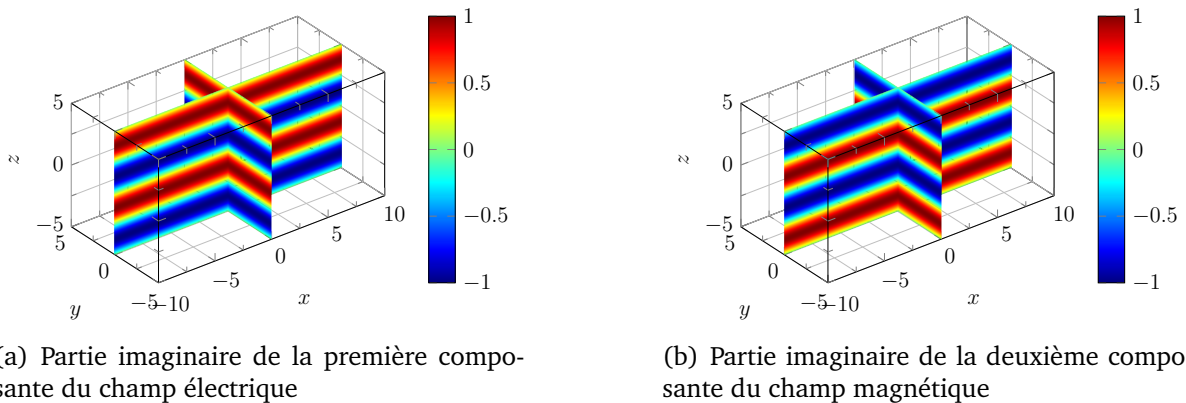
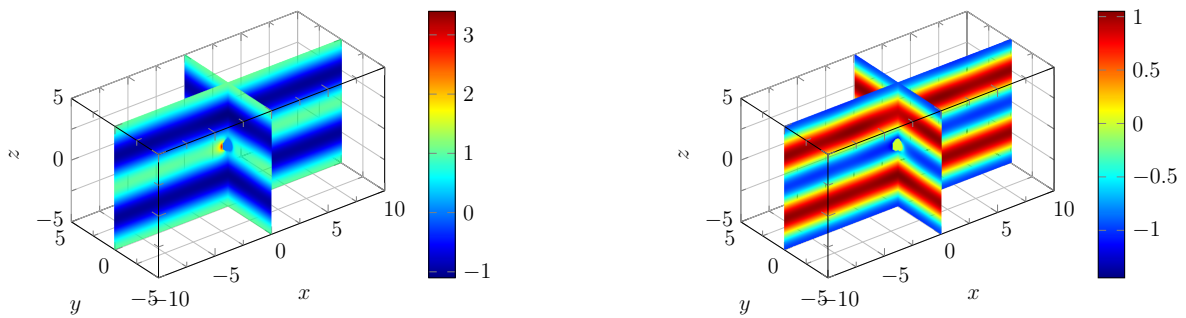


FIGURE 5.2 – Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques associés à l'onde plane électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 5.0$  se propageant à la vitesse  $c = 1.0$ .

théorie de Mie comme cela est présenté dans les Sections 6.2.2 et 6.2.3. Les coefficients spectraux associés à l'onde plane (5.1) y sont explicités analytiquement et par conséquent, il y a une expression analytique de la solution exacte. La solution de référence

est alors la solution exacte tronquée à un certain ordre, en particulier, nous choisissons une troncature à l'ordre  $N_{\text{mod}} = 8$ . Les Figures 5.3 à 5.5 représentent les champs électromagnétiques totaux pour  $\delta = 0.5$  dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . La Figure 5.3 représente la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. La Figure 5.4 représente la partie imaginaire de l'une des composantes

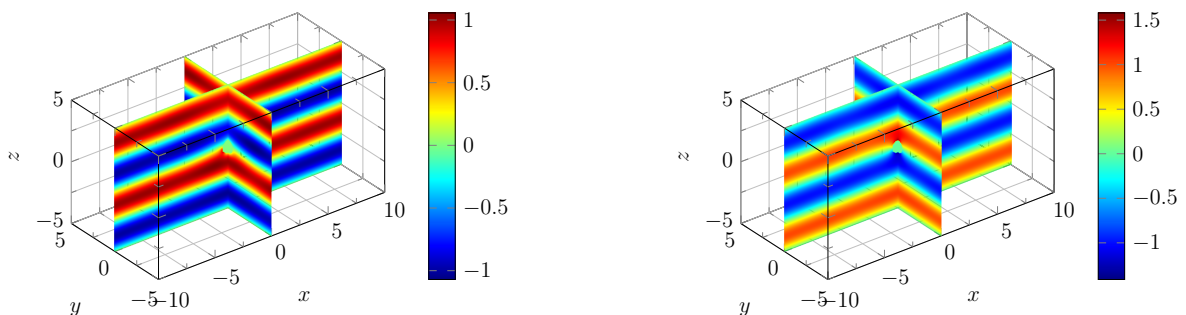


(a) Partie réelle de la première composante du champ électrique total

(b) Partie réelle de la deuxième composante du champ magnétique total

FIGURE 5.3 – Représentation de la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux.

des champs électromagnétiques totaux. La Figure 5.5 représente le module des champs



(a) Partie imaginaire de la première composante du champ électrique total

(b) Partie imaginaire de la deuxième composante du champ magnétique total

FIGURE 5.4 – Représentation de la partie imaginaire de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux.

électromagnétiques totaux. Enfin, la Figure 5.6 représente le module des champs électromagnétiques diffractés pour  $\delta = 0.5$  dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ , en échelle logarithmique.

**Onde incidente n°2** Nous considérons un faisceau gaussien électromagnétique de rayon de gorge  $w_0$ , voir par exemple Kogelnik et Li (1966) ou Davis (1979), dirigé selon

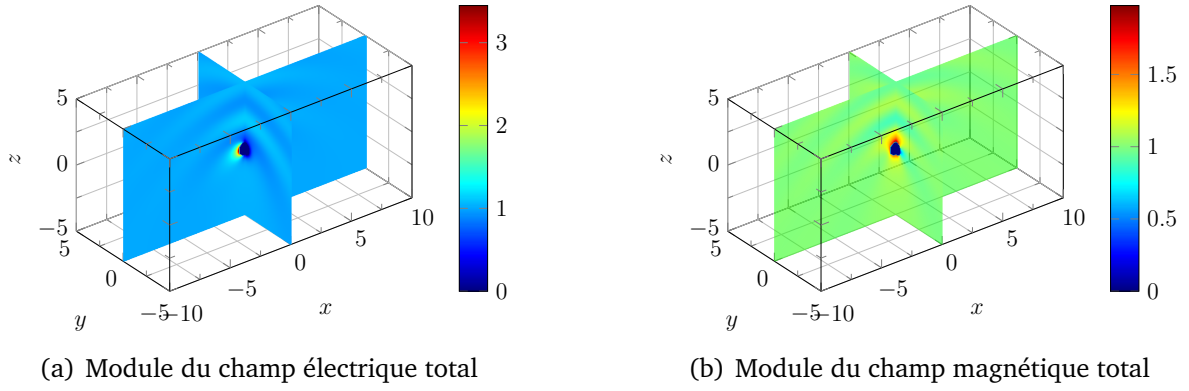


FIGURE 5.5 – Représentation du module des champs électromagnétiques totaux.

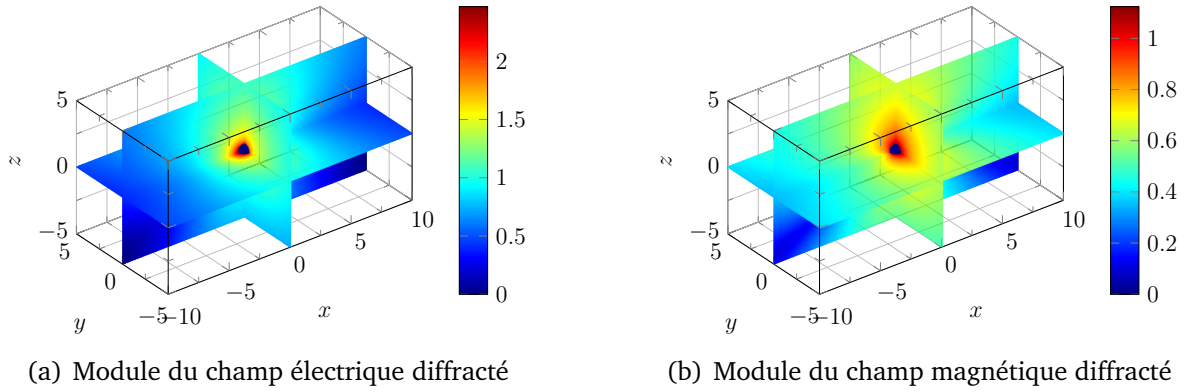


FIGURE 5.6 – Représentation du module des champs électromagnétiques diffractés en échelle logarithmique.

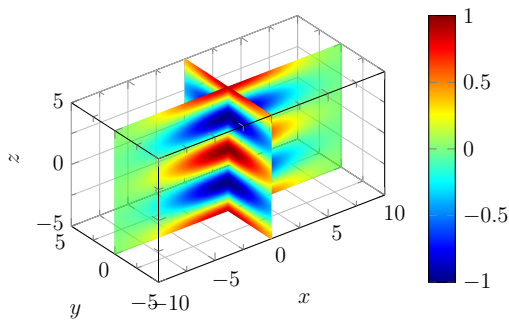
l'axe des  $z$  et polarisé selon l'axe des  $x$ . Une approximation analytique de ce faisceau gaussien est donnée pour  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \frac{z_0 \exp(i\kappa z)}{z_0 + iz} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\kappa(x^2 + y^2)}{z_0 + iz}\right) \mathbf{p},$$

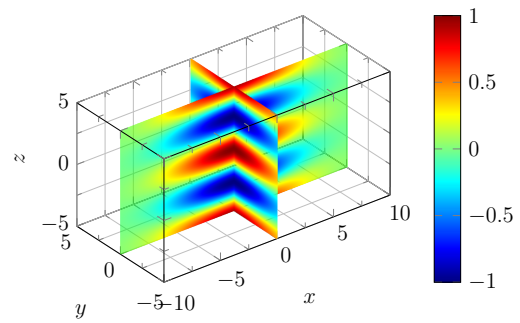
$$\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \frac{z_0 \exp(i\kappa z)}{z_0 + iz} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\kappa(x^2 + y^2)}{z_0 + iz}\right) \begin{pmatrix} \frac{ix}{z_0 + iz} \\ \frac{iy}{z_0 + iz} \\ 1 - \frac{1}{\kappa(z_0 + iz)} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{(z_0 + iz)^2} \end{pmatrix} \times \mathbf{p},$$

où  $z_0 = \frac{\kappa w_0^2}{2}$  désigne la portée de Rayleigh et  $\mathbf{p}$  désigne le vecteur de polarisation donné par (5.2). Dans les simulations numériques, nous choisissons de plus  $w_0 = 5.0$ . Les Figures 5.7 et 5.8 représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une des composantes des champs électromagnétiques dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . Pour ce cas-test, il n'y a pas de solution exacte analytique à proprement



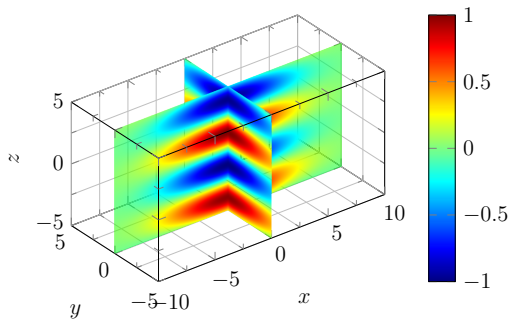


(a) Partie réelle de la première composante du champ électrique

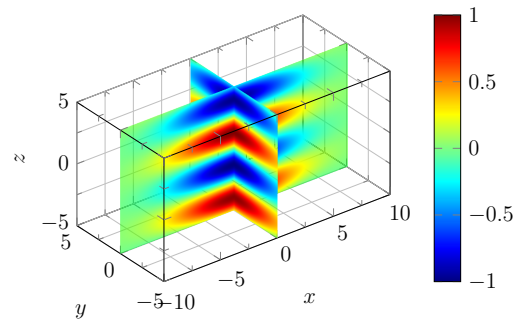


(b) Partie réelle de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 5.7 – Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques incidents associés au faisceau gaussien électromagnétique de longueur d’onde  $\lambda = 5.0$  de rayon de gorge  $w_0 = 5.0$ , se propageant à la vitesse  $c = 1.0$ .



(a) Partie imaginaire de la première composante du champ électrique



(b) Partie imaginaire de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 5.8 – Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques incidents associés au faisceau gaussien électromagnétique de longueur d’onde  $\lambda = 5.0$  de rayon de gorge  $w_0 = 5.0$  et se propageant à la vitesse  $c = 1.0$ .

parler. La solution de référence est calculée à partir de la série de Mie associée au champ diffracté, comme cela est présenté dans la Section 6.2.2, tronquée à l’ordre  $N_{\text{mod}} = 8$  et où les coefficients spectraux (6.12) associés aux champs incidents sont calculés numériquement. Nous utilisons une formule d’intégration numérique sur la sphère de

rayon  $\delta$  basée sur la méthode de Simpson,

$$\begin{aligned} \int_{|x|=\delta} u(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(\delta \sin \theta \cos \varphi, \delta \sin \theta \sin \varphi, \delta \cos \theta) \delta^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi, \\ &\approx \frac{2\pi^2}{N_\theta N_\varphi} \sum_{m=1}^{N_\varphi} \sum_{n=1}^{N_\theta} \left\{ \frac{1}{3} u(\delta \sin \theta_n \cos \varphi_m, \delta \sin \theta_n \sin \varphi_m, \delta \cos \theta_n) \sin \theta_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} u(\delta \sin \theta_{n-\frac{1}{2}} \cos \varphi_m, \delta \sin \theta_{n-\frac{1}{2}} \sin \varphi_m, \delta \cos \theta_{n-\frac{1}{2}}) \sin \theta_{n-\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

où  $\theta_s = \frac{s\pi}{N_\theta}$  pour tout  $s$  entier ou semi-entier compris entre  $\frac{1}{2}$  et  $N_\theta - \frac{1}{2}$  et  $\varphi_m = \frac{2m\pi}{N_\varphi}$  pour tout  $m = 1, \dots, N_\varphi$ . Les nombres entiers  $N_\theta$  et  $N_\varphi$  désignent respectivement le nombre d'intervalles de  $[0, \pi]$  et de  $[0, 2\pi]$ . Les Figures 5.9 à 5.11 illustrent les champs électromagnétiques totaux pour  $\delta = 0.5$  dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . La Figure 5.9 représente la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. La Figure 5.10 représente la partie imaginaire de l'une des composantes des

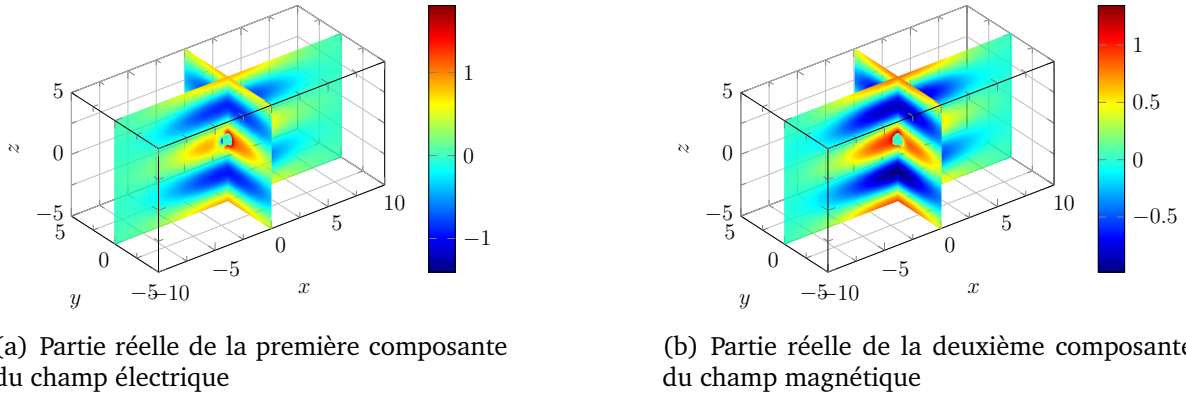


FIGURE 5.9 – Représentation de la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux.

champs électromagnétiques totaux. La Figure 5.11 représente le module des champs électromagnétiques totaux. Enfin, la Figure 5.12 représente le module des champs électromagnétiques diffractés pour  $\delta = 0.5$  dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ , en échelle logarithmique.

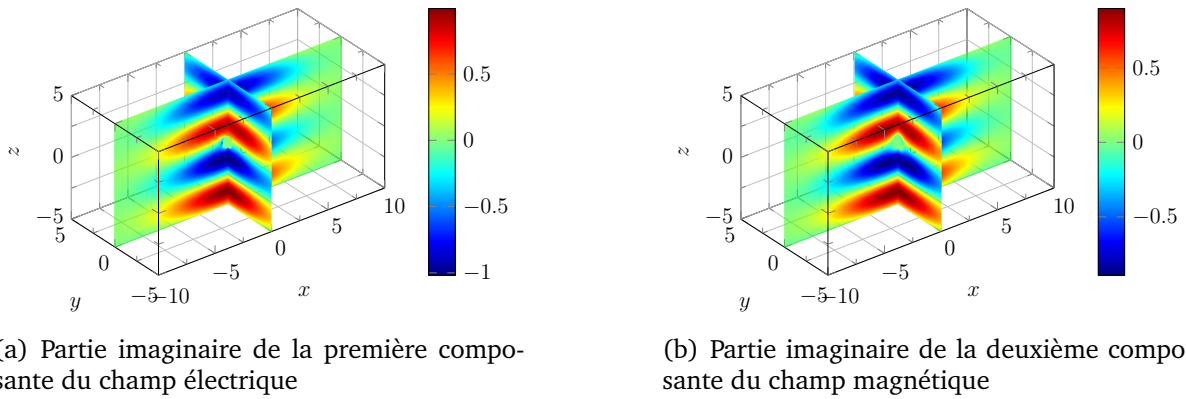


FIGURE 5.10 – Représentation de la partie imaginaire de l’une des champs électromagnétiques totaux.

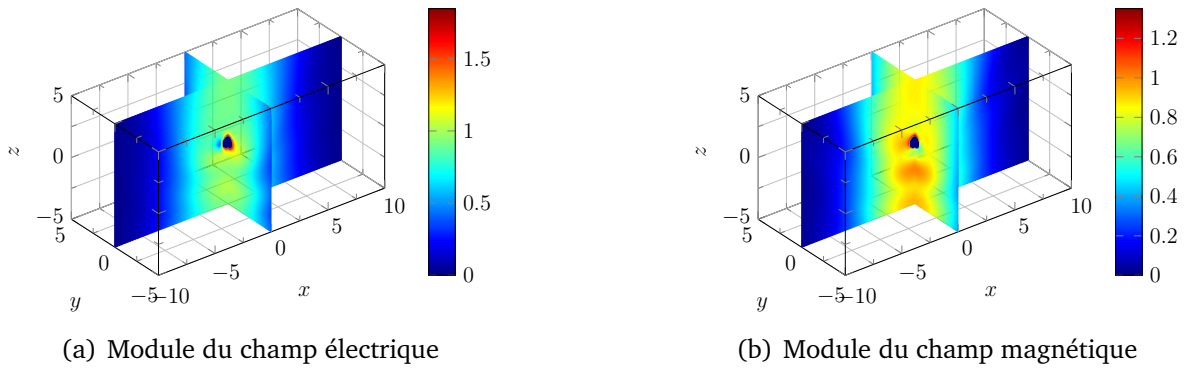


FIGURE 5.11 – Représentation du module des champs électromagnétiques totaux.

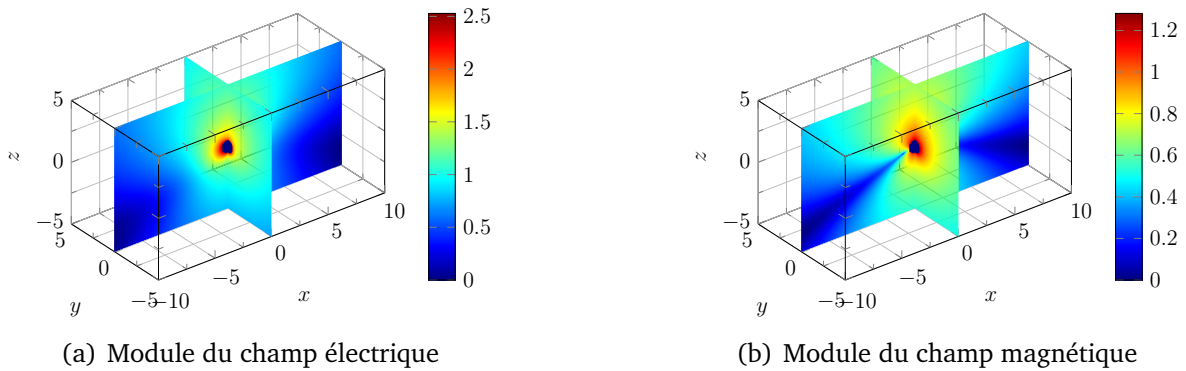


FIGURE 5.12 – Représentation du module des composantes des champs électromagnétiques diffractés en échelle logarithmique.

Pour la validation numérique, nous calculons pour chaque cas-test, l’erreur relative commise entre la solution de référence et une solution approchée, *i.e.* les quantités

$$\frac{\|E_{\delta}^{\text{ref}} - E_{\delta}^{\text{app}}\|}{\|E_{\delta}^{\text{ref}} + E_{\delta}^{\text{inc}}\|} \quad \text{et} \quad \frac{\|H_{\delta}^{\text{ref}} - H_{\delta}^{\text{app}}\|}{\|H_{\delta}^{\text{ref}} + H_{\delta}^{\text{inc}}\|} \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{E}_\delta^{\text{ref}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{ref}}$  désignent les champs diffractés associés à la solution de référence et  $\mathbf{E}_\delta^{\text{app}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{app}}$  désignent les champs électromagnétiques diffractés associés à la solution approchée. La norme utilisée dans les comparaisons est la norme  $\mathbf{L}^2$  calculée dans des domaines appropriés qui seront définis dans chacune des sections suivantes.

### 5.1.2 Convergence en champ proche

Nous cherchons à mettre en évidence les ordres de convergence des différentes approximations en champ proche, en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère. L'erreur est calculée en norme  $\mathbf{L}^2$  dans un voisinage de l'obstacle, indépendant de  $\delta$  dans la variable rapide  $\mathbf{X}$ . Nous notons  $\Omega_\delta^{2\delta}$  et  $\Omega_1^2$  les domaines définis par

$$\mathbf{x} \in \Omega_\delta^{2\delta} = \mathcal{B}(0, 2\delta) \setminus \overline{\mathcal{B}(0, \delta)} \quad \iff \quad \mathbf{X} \in \Omega_1^2 = \mathcal{B}(0, 2) \setminus \overline{\mathcal{B}(0, 1)}.$$

Pour obtenir les données de chaque cas-test, nous calculons :

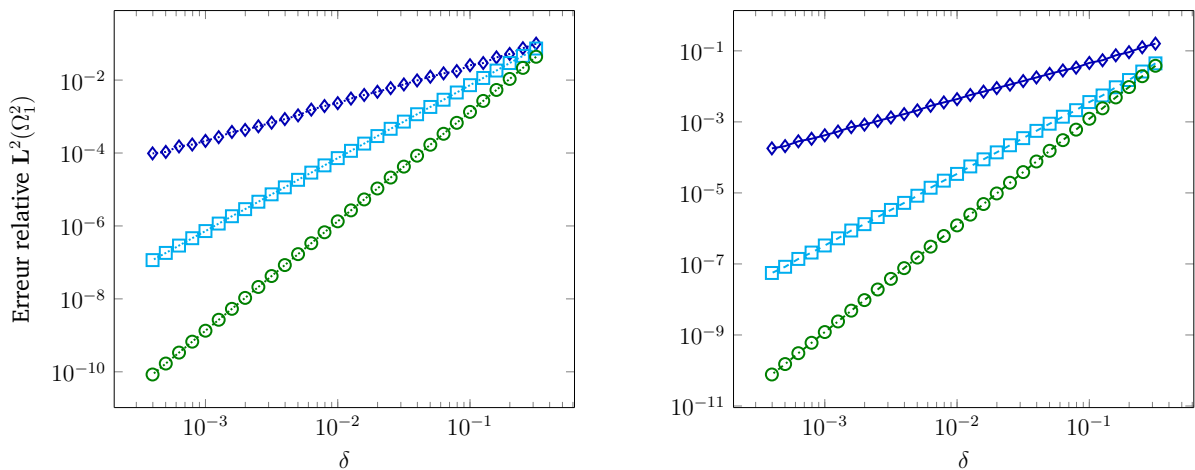
- la solution de référence  $\mathbf{E}_\delta^{\text{ref}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{ref}}$  dans le domaine  $\Omega_\delta^{2\delta}$  dont la mise en œuvre numérique est décrite dans la Section 5.1.1,
- les solutions approchées  $\widehat{\mathbf{E}}_\delta^P$  et  $\widehat{\mathbf{H}}_\delta^P$  dans le domaine  $\Omega_1^2$  pour  $P = 0, 1, 2$ ; ces champs de vecteurs désignent les séries tronquées à l'ordre  $P$  des développements internes,

$$\widehat{\mathbf{E}}_\delta^P(\mathbf{X}) = \sum_{p=1}^P \delta^p \widehat{\mathbf{E}}_p(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{H}}_\delta^P(\mathbf{X}) = \sum_{p=1}^P \delta^p \widehat{\mathbf{H}}_p(\mathbf{X}),$$

- les erreurs relatives (5.4) dans le domaine  $\Omega_1^2$ , données plus précisément par

$$\frac{\|\mathbf{E}_\delta^{\text{ref}}(\delta \cdot) - \widehat{\mathbf{E}}_\delta^P\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_1^2)}}{\|\mathbf{E}_\delta^{\text{ref}}(\delta \cdot) + \mathbf{E}^{\text{inc}}(\delta \cdot)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_1^2)}} \quad \text{et} \quad \frac{\|\mathbf{H}_\delta^{\text{ref}}(\delta \cdot) - \widehat{\mathbf{H}}_\delta^P\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_1^2)}}{\|\mathbf{H}_\delta^{\text{ref}}(\delta \cdot) + \mathbf{H}^{\text{inc}}(\delta \cdot)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_1^2)}}.$$

Les Figures 5.13 et 5.14 montrent les ordres de convergence associés aux différentes approximations obtenues à partir du développement interne pour les deux cas-tests. La Figure 5.13 représente l'erreur relative commise sur les champs électromagnétiques générés par l'onde plane électromagnétique, en échelle logarithmique. Nous observons que l'erreur diminue lorsque le rayon de la sphère  $\delta$  diminue ou lorsque nous augmentons le nombre de termes dans le développement. Les ordres de convergence numériques sont récapitulés dans le Tableau 5.1. Ces ordres sont en accord avec la théorie. La Figure 5.14 représente l'erreur relative commise sur les champs électromagnétiques générés par le faisceau gaussien électromagnétique, en échelle logarithmique. Les conclu-


 (a) Erreur relative  $L^2(\Omega_1^2)$  du champ électrique

 (b) Erreur relative  $L^2(\Omega_1^2)$  du champ magnétique

FIGURE 5.13 – Évolution de l’erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_1^2)$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère pour le cas de l’onde incidente  $n^\circ 1$ . La courbe  $\cdots\blacklozenge\cdots$  correspond au développement interne tronqué à l’ordre  $P = 0$ . La courbe  $\cdots\blacksquare\cdots$  correspond au développement interne tronqué à l’ordre  $P = 1$ . La courbe  $\cdots\odot\cdots$  correspond au développement interne tronqué à l’ordre  $P = 2$ .

	$\cdots\blacklozenge\cdots$	$\cdots\blacksquare\cdots$	$\cdots\odot\cdots$
Ordre (Champ électrique)	1.03	2.00	3.00
Ordre (Champ magnétique)	1.02	2.02	3.00

TABLE 5.1 – Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ proche pour le cas d’une onde plane électromagnétique incidente.

sions à tirer de ces courbes de convergence sont similaires à celles du premier cas-test pour le champ électrique, excepté le fait que nous observons un palier à partir de  $10^{-5}$ . Pour le champ magnétique, nous avons une perte de convergence. Il y a deux origines possibles à cela ; la première est due à l’approximation analytique des champs incidents associés au faisceau gaussien et la seconde à la méthode de quadrature utilisée pour approcher numériquement les coefficients spectraux des champs incidents.

**Remarque 5.1.** Nous avons comparé les résultats en utilisant une formule de quadrature d’ordre plus élevé que la formule (5.3) et cela n’a pas eu d’impact sur la convergence pour  $\delta < 10^{-2}$ . Ainsi, nous pensons que cela est dû à l’approximation analytique des champs incidents.

Les ordres de convergence numériques sont récapitulés dans le Tableau 5.2.

**Remarque 5.2.** Il est normal d’obtenir une moins bonne convergence pour le champ magnétique que pour le champ électrique. En effet, c’est le champ électrique qui résulte de l’ap-

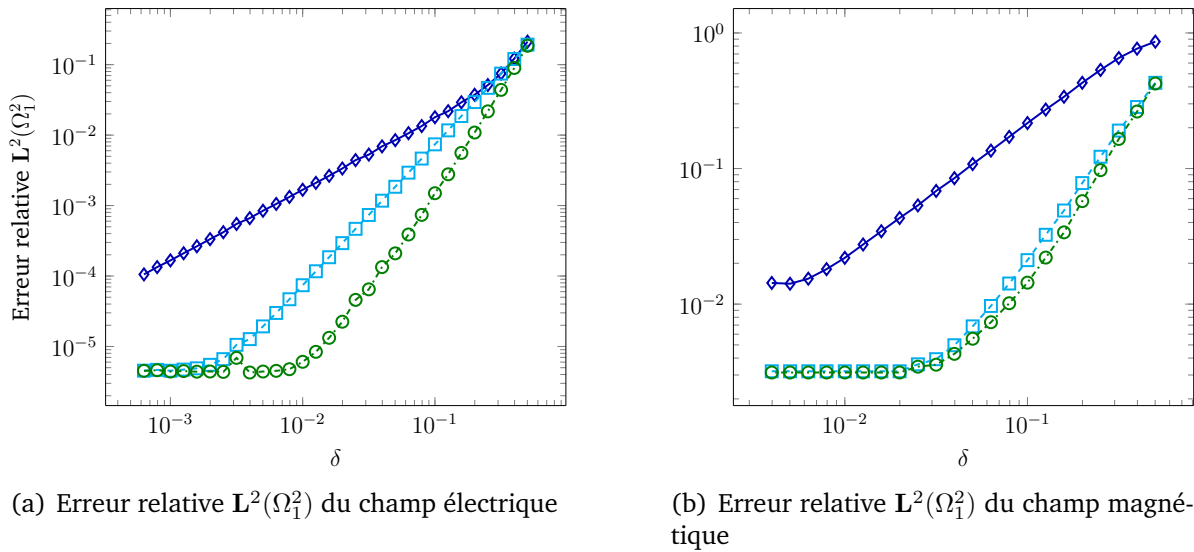


FIGURE 5.14 – Évolution de l’erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_1^2)$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère, pour le cas de l’onde incidente  $n^{\circ}2$ . La courbe  $\text{---}\diamond\text{---}$  correspond au développement interne tronqué à l’ordre  $P = 0$ . La courbe  $\text{---}\square\text{---}$  correspond au développement interne tronqué à l’ordre  $P = 1$ . La courbe  $\text{---}\ominus\text{---}$  correspond au développement interne tronqué à l’ordre  $P = 2$ .

	$\text{---}\diamond\text{---}$	$\text{---}\square\text{---}$	$\text{---}\ominus\text{---}$
Ordre (Champ électrique)	1.06	1.97	2.79
Ordre (Champ magnétique)	0.97	1.87	2.20

TABLE 5.2 – Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ proche pour le cas d’un faisceau gaussien électromagnétique incident.

*proximation du faisceau gaussien. Le champ magnétique est ensuite obtenu en calculant son rotationnel. Nous retrouvons l’ordre théorique pour l’approximation à l’ordre zéro. Les approximations suivantes utilisent de plus l’expression analytique de la matrice jacobienne et du tenseur hessien du champ magnétique, sur lesquels des erreurs supplémentaires sont commises, par rapport aux exacts. Cette accumulation d’erreurs engendre une perte de la convergence.*

### 5.1.3 Convergence en champ lointain

Nous cherchons à mettre en évidence les ordres de convergence associés aux différentes approximations en champ lointain, en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère. L’erreur est calculée en norme  $L^2$  dans un domaine extérieur au voisinage de l’obstacle, indépendant de  $\delta$  dans la variable lente  $x$ . Nous notons  $\Omega_\lambda^{2\lambda}$  la couronne délimitée par les

deux sphères de rayon respectif  $\lambda$  et  $2\lambda$ , donnée par

$$\Omega_\lambda^{2\lambda} = \mathcal{B}(0, 2\lambda) \setminus \overline{\mathcal{B}(0, \lambda)}. \quad (5.5)$$

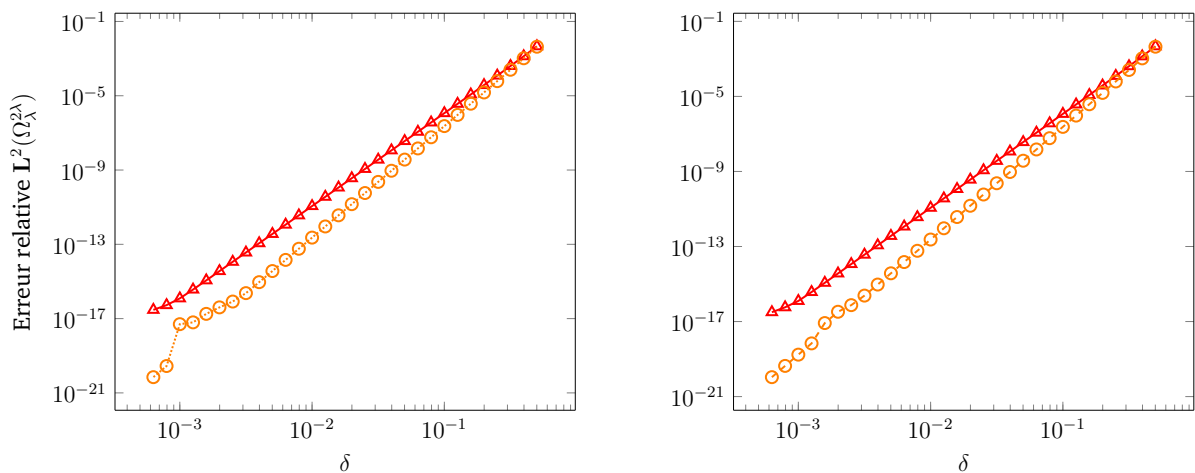
Pour obtenir les données, nous calculons :

- la solution de référence  $\mathbf{E}_\delta^{\text{ref}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{ref}}$  dans le domaine  $\Omega_\lambda^{2\lambda}$  dont la mise en œuvre numérique est décrite dans la Section 5.1.1,
- les solutions approchées  $\widetilde{\mathbf{E}}_\delta^P$  et  $\widetilde{\mathbf{H}}_\delta^P$  dans le domaine  $\Omega_\lambda^{2\lambda}$  pour  $P = 3$  et 5 ; de même ces champs de vecteurs désignent les séries tronquées à l'ordre  $P$  des développements externes,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_\delta^P(\mathbf{x}) = \sum_{p=3}^P \delta^p \widetilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{H}}_\delta^P(\mathbf{x}) = \sum_{p=3}^P \delta^p \widetilde{\mathbf{H}}_p(\mathbf{x}),$$

- les erreurs relatives (5.4) dans le domaine  $\Omega_\lambda^{2\lambda}$ .

Les Figures 5.15 et 5.16 illustrent les ordres de convergence associés aux différentes approximations issues du développement externe pour les deux cas-tests. La Figure 5.15 représente l'erreur relative commise sur les champs électromagnétiques générés par l'onde plane électromagnétique incidente, en échelle logarithmique. Nous obser-



(a) Erreur relative  $\mathbf{L}^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  du champ électrique

(b) Erreur relative  $\mathbf{L}^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  du champ magnétique

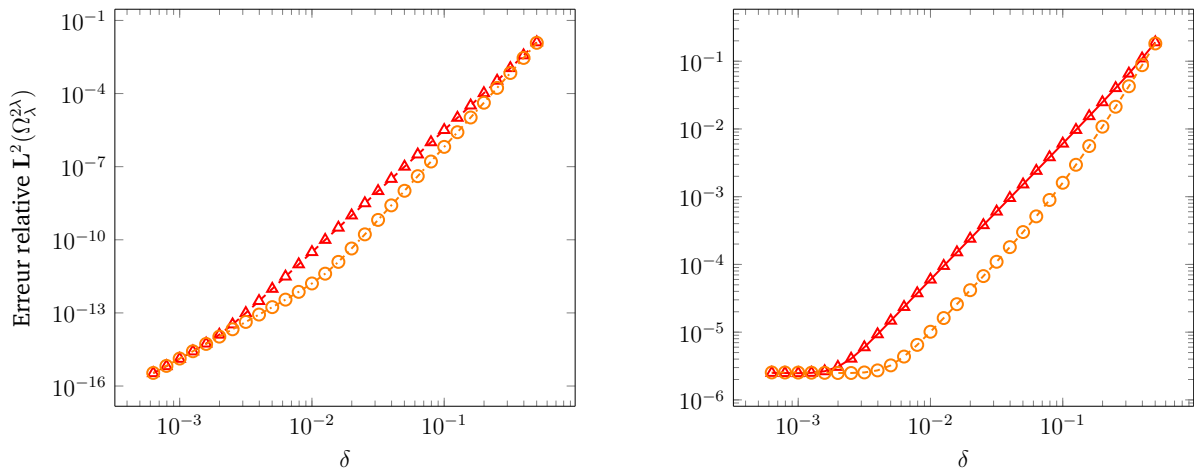
FIGURE 5.15 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $\mathbf{L}^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère pour le cas de l'onde incidente n°1. La courbe  $\blacktriangle$  correspond au développement externe tronqué à l'ordre  $P = 3$ . La courbe  $\circ$  correspond au développement externe tronqué à l'ordre  $P = 5$ .

vons que l'erreur diminue lorsque le rayon de la sphère  $\delta$  diminue ou lorsque nous augmentons le nombre de termes dans le développement. Les ordres de convergence numériques sont récapitulés dans le Tableau 5.3. La Figure 5.16 représente l'erreur

	-▲-	-○-
Ordre (Champ électrique)	5.00	6.04
Ordre (Champ magnétique)	5.00	6.00

TABLE 5.3 – Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ lointain pour le cas d'une onde plane électromagnétique incidente.

relative commise sur les champs électromagnétiques générés par le faisceau gaussien électromagnétique, en échelle logarithmique. Les conclusions sont similaires à celles du



(a) Erreur relative  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  du champ électrique

(b) Erreur relative  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  du champ magnétique

FIGURE 5.16 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère, pour le cas de l'onde incidente  $n^\circ 2$ . La courbe -▲- correspond au développement externe tronqué à l'ordre  $P = 3$ . La courbe -○- correspond au développement externe tronqué à l'ordre  $P = 5$ .

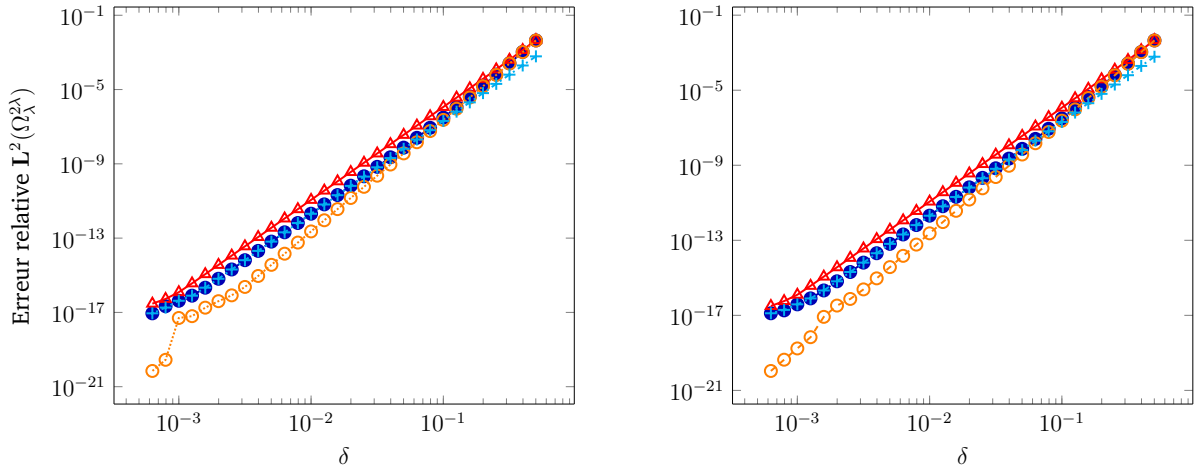
premier cas-test, excepté le fait que nous observons une perte de convergence, pour les mêmes raisons que pour le champ proche, lorsque  $\delta < 10^{-2}$ . Les ordres de convergence numériques sont récapitulés dans le Tableau 5.4.

	-▲-	-○-
Ordre (Champ électrique)	5.05	6.01
Ordre (Champ magnétique)	2.21	3.07

TABLE 5.4 – Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ lointain pour le cas d'un faisceau gaussien électromagnétique incident.



Dans ce dernier paragraphe, nous comparons les précédentes approximations avec les approximations dipolaires collectées (4.3) et modifiées (4.5) introduites dans la Section 4.2, en considérant une onde plane électromagnétique incidente. Sur la Figure 5.17, nous représentons, en plus des erreurs commises sur les approximations externes, les erreurs relatives obtenues pour les approximations dipolaires collectées et modifiées, pour les champs électromagnétiques. Nous constatons que l'approximation dipolaire



(a) Erreur relative  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  du champ électrique

(b) Erreur relative  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  du champ magnétique

FIGURE 5.17 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère pour le cas de l'onde incidente  $n^\circ 1$ . Les courbes  $\color{red}{\blacktriangle}$  et  $\color{orange}{\circ}$  correspondent respectivement aux développements externes tronqués aux ordres  $P = 3$  et  $P = 5$ . La courbe  $\color{blue}{\bullet}$  correspond à l'approximation dipolaire collectée. La courbe  $\color{blue}{+}$  correspond à l'approximation dipolaire modifiée.

collectée, représentée par la courbe  $\color{blue}{\bullet}$ , est plus précise que l'approximation externe constituée du premier terme du développement. En particulier, pour des rayons supérieurs à  $10^{-1}$ , c'est-à-dire, en régime pré-asymptotique – bien sûr, cela n'est pas valable pour des  $\delta$  trop grands – l'approximation collectée est aussi précise que l'approximation externe composée des deux premiers termes du développement. Cela n'est plus le cas lorsque  $\delta$  diminue mais l'approximation reste plus précise que celle donnée par la courbe  $\color{red}{\blacktriangle}$ . En plus de satisfaire à ces premières remarques, l'approximation dipolaire modifiée, représentée par la courbe  $\color{blue}{+}$ , permet d'améliorer, en régime pré-asymptotique, les approximations externes définies suivant les puissances de  $\delta$  successives, qu'elle soit composée du premier ou des deux premiers termes du développement.

**Remarque 5.3.** En fait, l'approximation dipolaire modifiée dans le cadre de la diffraction simple par une sphère correspond exactement à la solution de Mie tronquée à l'ordre  $N_{mod} =$

1. Cela est dû aux identités suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^1 \mathbf{e}_{n,m}^{inc} \nabla_s Y_{1,m}(\hat{x}) &= \frac{3i}{2} (\hat{x} \times \mathbf{E}^{inc}(0)) \times \hat{x}, & \sum_{m=-1}^1 \mathbf{e}_{n,m}^{inc} Y_{1,m}(\hat{x}) &= \frac{3i}{2} \hat{x} \cdot \mathbf{E}^{inc}(0), \\ \sum_{m=-1}^1 \mathbf{h}_{n,m}^{inc} \nabla_s Y_{1,m}(\hat{x}) &= \frac{3i}{2} (\hat{x} \times \mathbf{H}^{inc}(0)) \times \hat{x} & \text{et} & \sum_{m=-1}^1 \mathbf{h}_{n,m}^{inc} Y_{1,m}(\hat{x}) &= \frac{3i}{2} \hat{x} \cdot \mathbf{H}^{inc}(0). \end{aligned}$$

## 5.2 Validation des modèles réduits pour la diffraction multiple

Dans cette section, nous comparons les modèles asymptotiques – à savoir, les modèles de Born et les modèles de Foldy-Lax dipolaires : classiques, collectés et modifiés – introduits dans la Section 4.3 pour la diffraction multiple par de multiples sphères. Dans un premier temps, nous investiguons la précision en norme  $L^2$  des différentes approximations. Dans un second temps, nous comparons ponctuellement nos solutions à l'aide des *surfaces équivalentes radar*. Ce dernier paragraphe est ajouté pour introduire la Section 9.2 où nous comparons les surfaces équivalentes radar associées sur des cas-tests comportant un grand nombre d'obstacles.

### 5.2.1 Description des tests numériques

Nous considérons le problème de diffraction d'une onde plane électromagnétique par  $K$  sphères disjointes de même rayon  $\delta$ . L'onde plane électromagnétique, définie par (5.1), est dirigée selon l'axe des  $z$  et polarisée selon l'axe des  $x$ . Elle se propage dans un milieu diélectrique de permittivité électrique  $\varepsilon = 1.0$  et de perméabilité magnétique  $\mu = 1.0$ . Les Figures 5.1 et 5.2 représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire des champs électromagnétiques incidents associés, dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . Nous introduisons deux types de géométrie : la première est une configuration linéaire d'obstacles et la seconde, une agglomération d'obstacles autour de l'origine, positionnés suivant toutes les directions. Pour les solutions de référence, nous utilisons la solution calculée à partir de la méthode spectrale faisant l'objet de la Partie II, avec  $N_{\text{mod}} = 8$  modes.

**Géométrie n°1** Nous considérons  $K$  sphères de rayon  $\delta$  uniformément distribuées sur l'axe des  $y$ , où, pour  $k = 1, \dots, K$ , les centres  $\mathbf{c}_k$  sont donnés par

$$\mathbf{c}_k = \left( 0 \quad \left( \frac{K-1}{2} + k - 1 \right) d \quad 0 \right).$$

Le nombre réel  $d > 2\delta$  désigne la distance entre deux centres consécutifs. Selon les cas-tests considérés, la distance  $d$  sera choisie de l'ordre de  $\lambda$ , ou bien de l'ordre de  $\delta$ , ou encore de l'ordre intermédiaire de  $\sqrt{\delta\lambda}$ . Les Figures 5.18 à 5.20 illustrent les champs électromagnétiques totaux pour  $K = 5$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\lambda = 5.0$  et  $d = 3.0$ , dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . La Figure 5.18 représente la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. La Figure 5.19 représente la partie

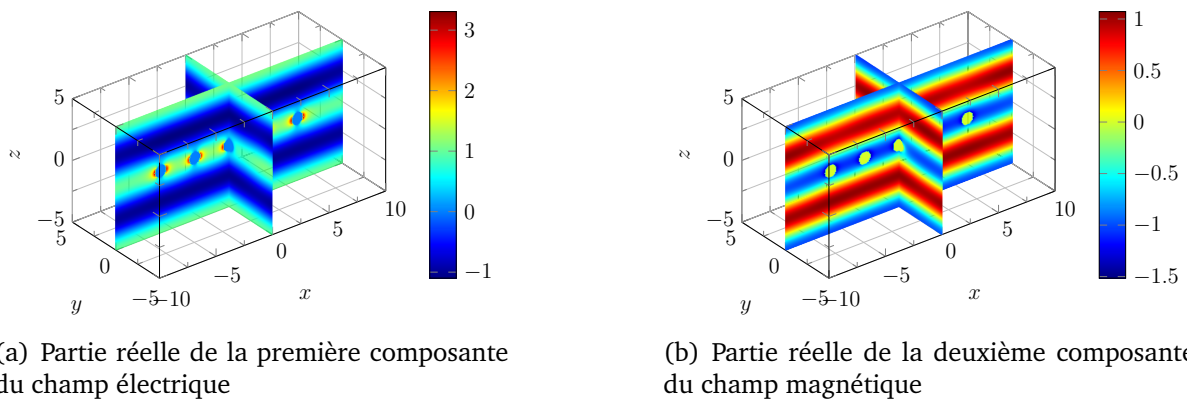


FIGURE 5.18 – Représentation de la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux.

imaginaires de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. La Figure

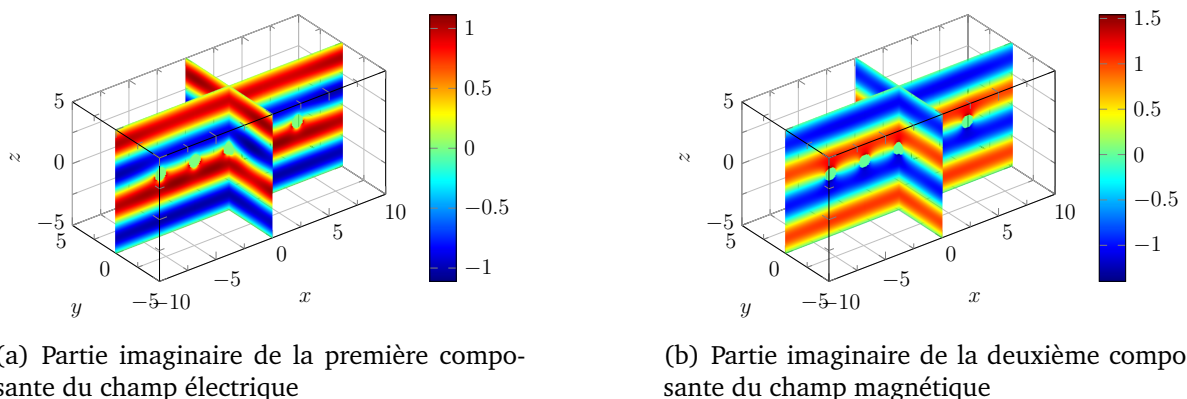


FIGURE 5.19 – Représentation de la partie imaginaire de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux.

5.20 représente le module des champs électromagnétiques totaux. Enfin, la Figure 5.21

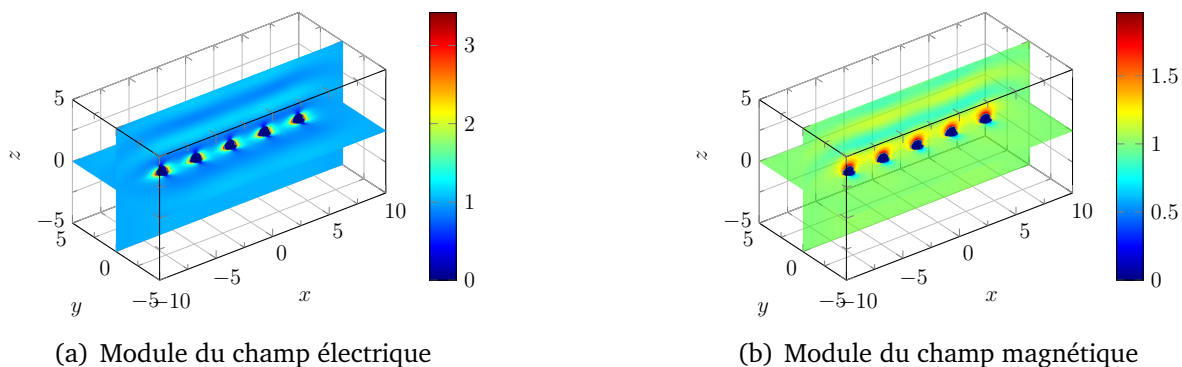


FIGURE 5.20 – Représentation du module des champs électromagnétiques diffractés.

représente le module des champs diffractés dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ .

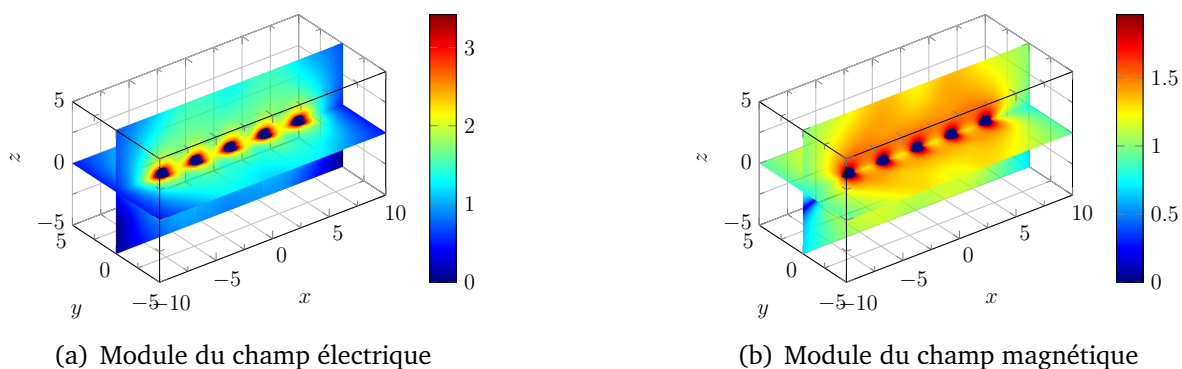
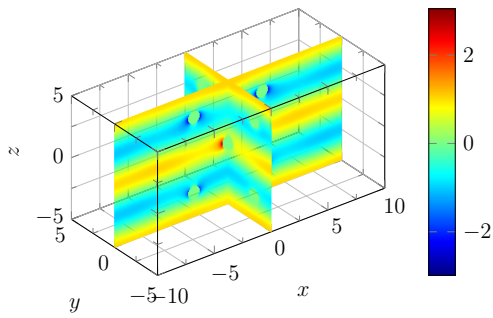
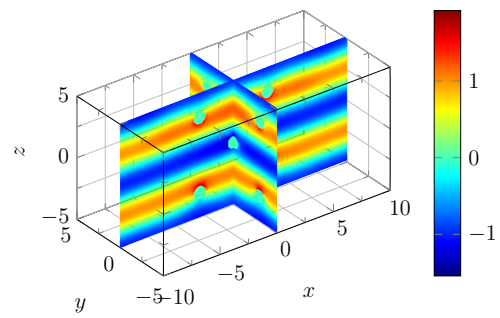


FIGURE 5.21 – Représentation du module des champs électromagnétiques diffractés.

**Géométrie n°2** Nous considérons  $K$  sphères disjointes de rayon  $\delta$  qui s'agglomèrent autour de l'origine. Nous prenons  $\mathbf{c}_1 = (0 \ 0 \ 0)$  et  $\mathbf{c}_k$  tel que  $|\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_1| = d\sqrt{2}$ , où  $d$  peut varier selon les cas-tests envisagés. Les Figures 5.22 à 5.24 représentent les champs électromagnétiques totaux pour  $K = 13$ ,  $\delta = 0.5$  et  $d = 2.0$ , dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . La Figure 5.22 représente la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. La Figure 5.23 représente la partie imaginaire de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. La Figure 5.24 représente le module des champs électromagnétiques totaux. Enfin, la Figure 5.25 représente le module des champs diffractés dans le domaine  $[-10, 10] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ .

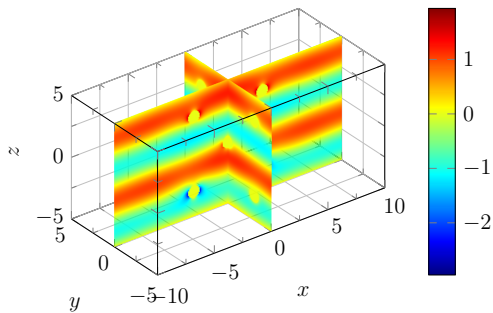


(a) Partie réelle de la première composante du champ électrique

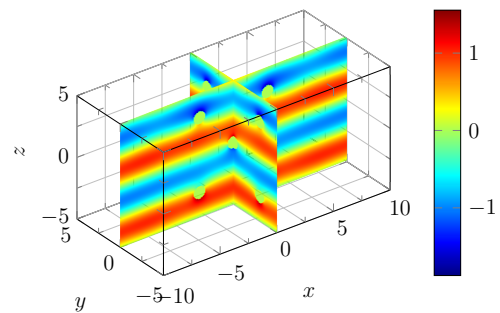


(b) Partie réelle de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 5.22 – Représentation de la partie réelle de l’une des composantes des champs électromagnétiques totaux.

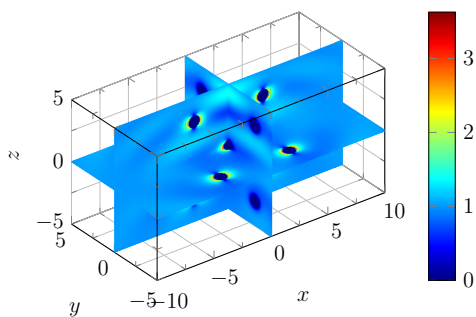


(a) Partie imaginaire de la première composante du champ électrique

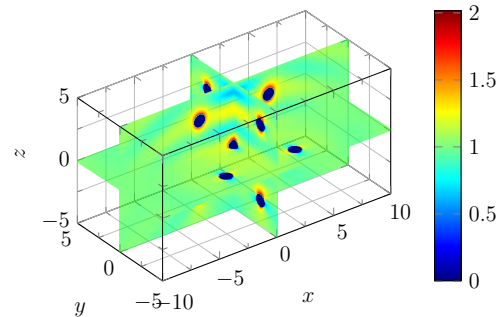


(b) Partie imaginaire de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 5.23 – Représentation de la partie imaginaire de l’une des composantes des champs électromagnétiques totaux.



(a) Module du champ électrique



(b) Module du champ magnétique

FIGURE 5.24 – Représentation du module des champs électromagnétiques totaux.

## 5.2.2 Comparaison des modèles asymptotiques

Nous comparons la précision des modèles asymptotiques de diffraction multiple introduits dans la Section 4.3, en norme  $L^2$  dans le domaine  $\Omega_{2\lambda}^{3\lambda} \subset \mathbb{R}^3$  défini par (5.5).

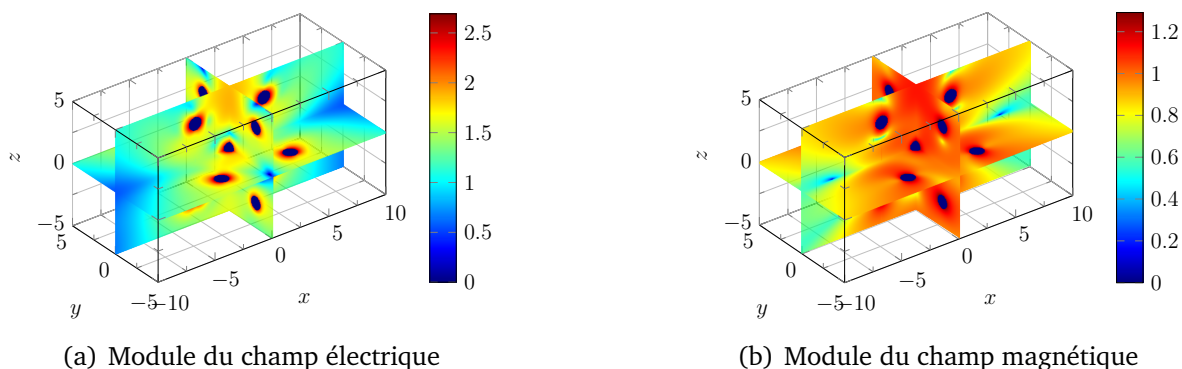


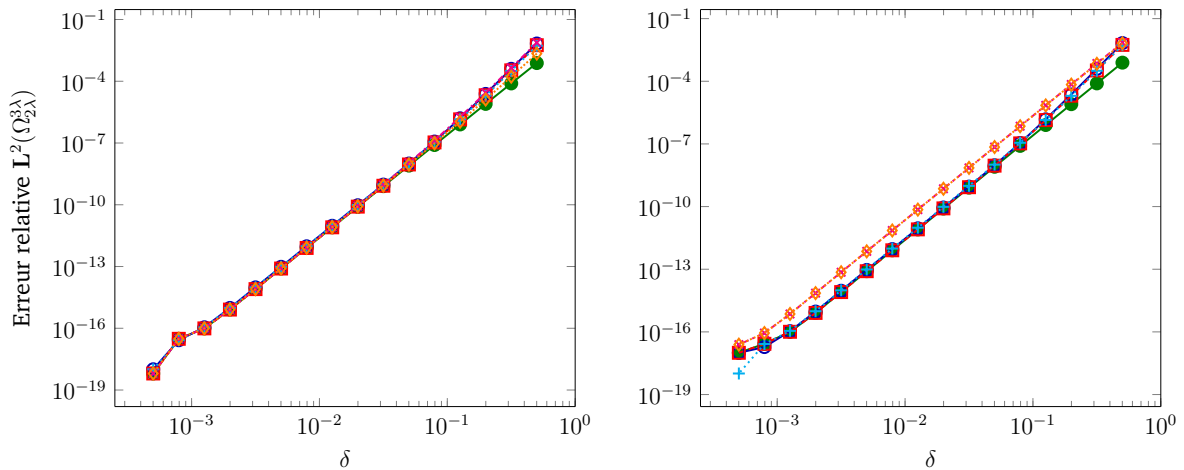
FIGURE 5.25 – Représentation du module des champs électromagnétiques totaux.

Pour obtenir les données, nous calculons :

- les solutions de référence  $\mathbf{E}_\delta^{\text{ref}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{ref}}$  associées à la solution spectrale pour  $N_{\text{mod}} = 8$  modes (voir Partie II),
- les solutions approchées  $\mathbf{E}_\delta^{\text{app}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{\text{app}}$  faisant référence aux solutions obtenues à partir des modèles asymptotiques,
- les erreurs relatives (5.4) pour la norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$ .

Une première série de tests est réalisée dans le cas de la Géométrie n°1, une seconde, dans le cas de la Géométrie n°2.

Les Figures 5.26 à 5.28 illustrent la précision des modèles asymptotiques introduits dans la Section 4.3.2 en prenant  $\lambda = 5.0$  et pour différentes valeurs de  $d$  (grandeur caractérisant la distance qui sépare deux obstacles). Les comparaisons sont effectuées dans le cadre de la Géométrie n°1. La Figure 5.26 représente l'erreur relative dans  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  entre deux centres consécutifs est fixe et égale à  $d = 3.0$ . Nous remarquons premièrement que, pour chaque approximation, l'erreur diminue lorsque la taille de l'obstacle  $\delta$  diminue. Deuxièmement, notamment sur les erreurs associées au champ électrique, les différentes courbes se chevauchent. Les erreurs d'approximation semblent se démarquer dans un régime pré-asymptotique c'est-à-dire lorsque  $\delta$  est assez grand. Il semble apparaître – et les tests suivants le confirmeront – une hiérarchie entre les différentes approximations qui irait de l'approximation de Born dipolaire jusqu'à l'approximation de Foldy dipolaire modifiée. Nous constatons par ailleurs que toutes les approximations sont du même ordre relativement au rayon de la sphère. En particulier, nous avons pour



(a) Erreur relative  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  du champ électrique (b) Erreur relative  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  du champ magnétique

FIGURE 5.26 – Évolution de l’erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = 3.0$ , associée à la Géométrie n°1. La courbe  $\text{---}\circ\text{---}$  correspond à l’approximation de Born dipolaire. La courbe  $\text{---}\ast\text{---}$  correspond à l’approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\diamond\text{---}$  correspond à l’approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\text{---}\ast\text{---}$  correspond à l’approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\text{---}\square\text{---}$  correspond à l’approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\bullet\text{---}$  correspond à l’approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée.

chaque approximation

$$\frac{\|\mathbf{E}^{\text{ref}} - \mathbf{E}^{\text{app}}\|_{L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})}}{\|\mathbf{E}^{\text{ref}} + \mathbf{E}^{\text{inc}}\|_{L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})}} \leq c \delta^5 \quad \text{et} \quad \frac{\|\mathbf{H}^{\text{ref}} - \mathbf{H}^{\text{app}}\|_{L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})}}{\|\mathbf{H}^{\text{ref}} + \mathbf{H}^{\text{inc}}\|_{L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})}} \leq c \delta^5.$$

L’approximation de Born apparaît comme une bonne approximation lorsque la distance entre les obstacles est de l’ordre de la longueur d’onde  $\lambda$ . La Figure 5.27 représente l’erreur relative dans  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  entre deux centres consécutifs varie, de la forme  $d = \sqrt{\lambda}\delta$ . Sur cet exemple, nous pouvons distinguer plus facilement les différentes erreurs d’approximation. À la différence du test précédent, toutes les approximations de Born apparaissent être moins précises que les approximations de Foldy. Cela montre la nécessité de prendre en compte les différentes interactions entre les obstacles, lorsque la distance entre deux obstacles consécutifs est plus petite que la longueur d’onde et en particulier lorsqu’elle dépend de  $\sqrt{\delta}$ . Par ailleurs, les ordres d’approximations obtenus sont inférieurs à 5. En effet, il apparaît un facteur d’échelle dans la distance ce qui engendre de nouveaux termes dans les développements asymptotiques qui n’étaient pas présents jusqu’à maintenant et que nous n’avons pas pris en compte. C’est pour cette raison que nous avons une perte de



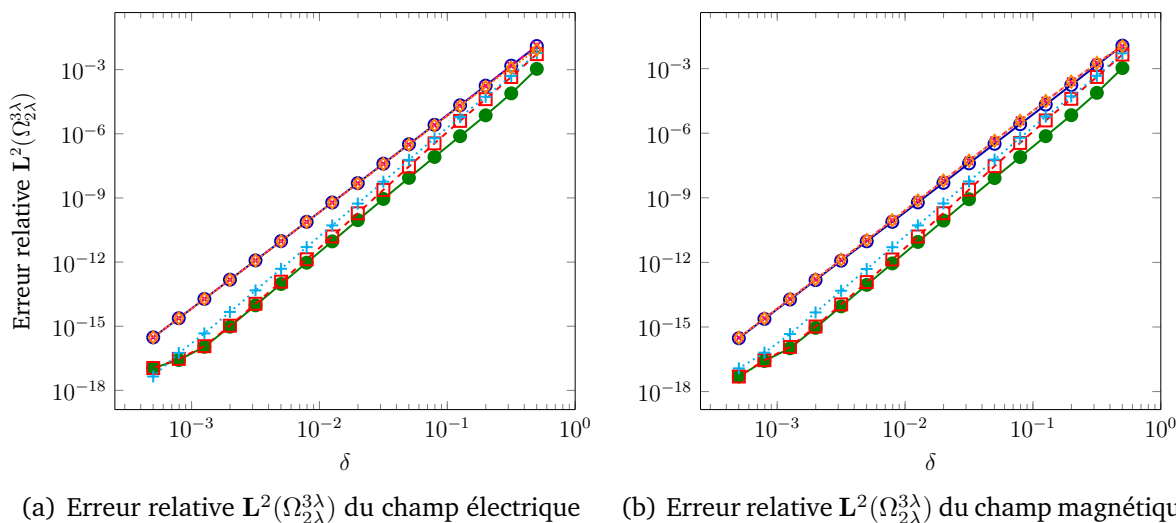


FIGURE 5.27 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = \sqrt{\delta\lambda}$ , associée à la Géométrie n°1. La courbe  $\text{---}\circ\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\text{---}\times\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\diamond\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\text{---}\text{+}\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\text{---}\square\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\bullet\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée.

convergence et que l'ordre 5 n'est plus atteint. La Figure 5.28 représente l'erreur relative dans  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  entre deux centres consécutifs varie, de la forme  $d = 3\delta$ . Ici encore, les approximations issues du modèle de Born apparaissent moins précises que celles issues du modèle de Foldy-Lax. L'ordre cinq n'est atteint par aucune des approximations à cause du facteur d'échelle intervenant dans la distance qui sépare deux obstacles consécutifs. De plus, en régime pré-asymptotique, même les approximations de Born dipolaire collectée et modifiée apparaissent moins précises que l'approximation du premier ordre de Foldy. En accord avec les précédentes simulations, l'approximation de Foldy dipolaire modifiée ( $\text{---}\bullet\text{---}$ ) se démarque de toutes les autres – au moins dans un régime pré-asymptotique.

Les Figures 5.29 et 5.30 illustrent la précision des modèles asymptotiques introduits dans la Section 4.3.2 en prenant  $\lambda = 5.0$  et pour différentes valeurs de  $d$  (grandeur caractérisant la distance qui sépare deux obstacles). Les comparaisons sont effectuées dans le contexte de la Géométrie n°2. La Figure 5.29 représente l'erreur relative dans  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  est fixe et égale à  $d = 3.0$ . En comparaison avec les résultats représentés dans la Figure 5.26



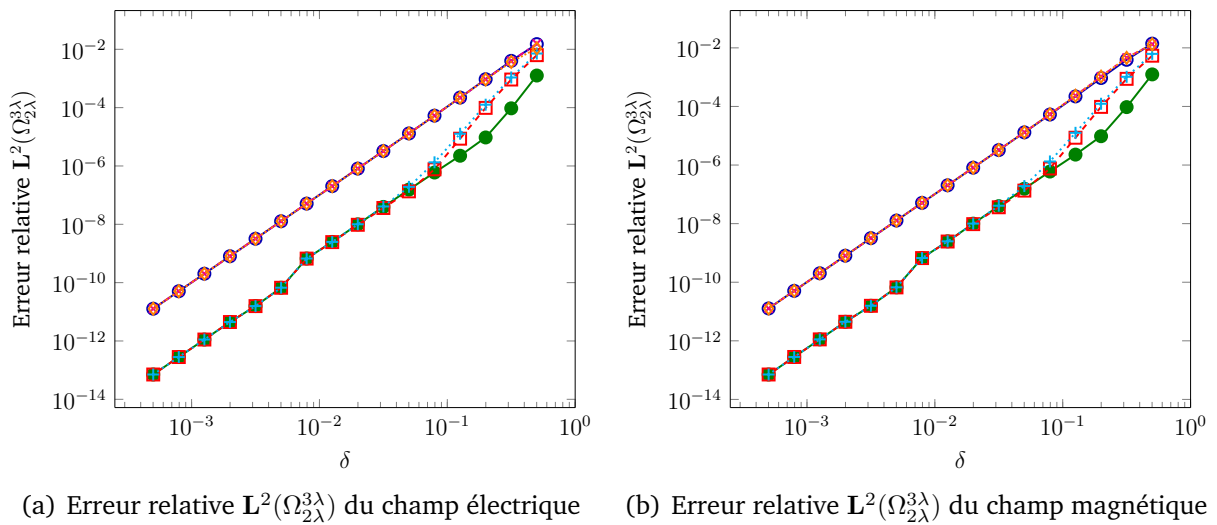


FIGURE 5.28 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = 3\delta$ , associée à la Géométrie n°1. La courbe  $\text{---}\ominus\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\text{---}\times\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\diamond\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\text{---}\oplus\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\text{---}\boxplus\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\bullet\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée.

associés à la Géométrie n°1, les erreurs sont plus distinctes globalement mais beaucoup moins en régime pré-asymptotique. Les interactions semblent donc plus importantes lorsque les obstacles sont disposés dans toutes les directions de  $\mathbb{R}^3$ . Les approximations de Foldy dipolaires collectées et modifiées apparaissent plus précises lorsque  $\delta$  est petit. Les conclusions concernant l'ordre d'approximation sont confirmées. La Figure 5.30 représente l'erreur relative dans  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  admet une dépendance en fonction de  $\delta$  de la forme  $d = \sqrt{\lambda}\delta$ . Les conclusions ne sont pas tout à fait similaires à celles issues du premier cas-test. L'approximation modifiée n'apparaît pas plus précise que l'approximation collectée, ni en régime pré-asymptotique ni pour des plus petits rayons.

Les simulations numériques effectuées valident la convergence des différents modèles asymptotiques pour la diffraction multiple en considérant différentes configurations géométriques, ce qui valide notre code de calcul.

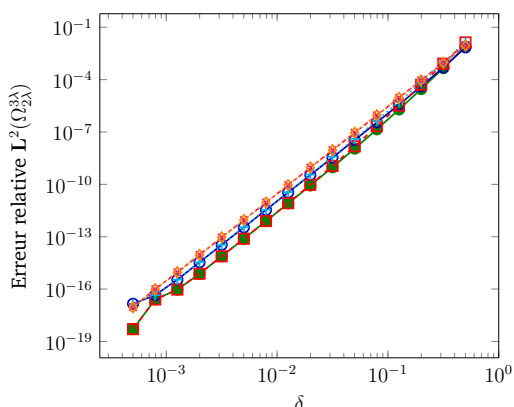
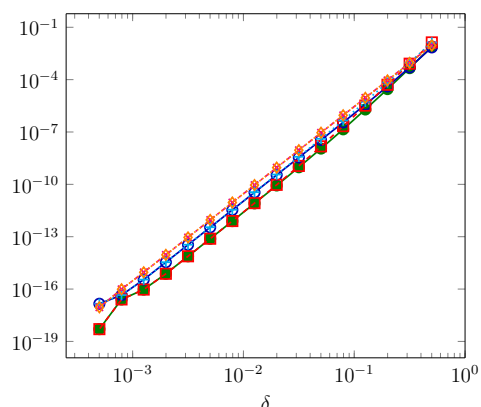

 (a) Erreur relative  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  du champ électrique

 (b) Erreur relative  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  du champ magnétique

FIGURE 5.29 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = 3.0$ , associée à la Géométrie n°2. La courbe  $\text{---}\circ\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\text{---}\times\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\diamond\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\text{---}\text{+}\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\text{---}\square\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\bullet\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée.

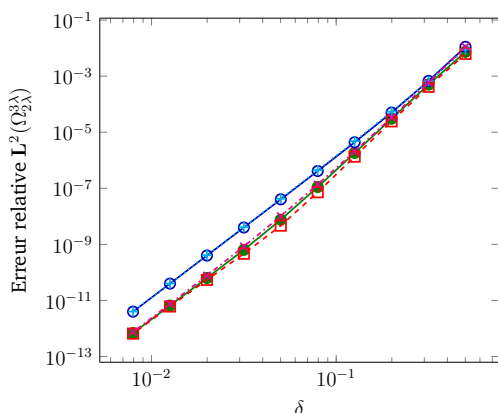
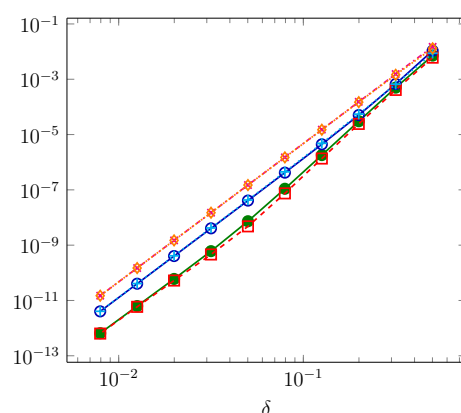

 (a) Erreur relative  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  du champ électrique

 (b) Erreur relative  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  du champ magnétique

FIGURE 5.30 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = \sqrt{\lambda\delta}$ , associée à la Géométrie n°2. La courbe  $\text{---}\circ\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\text{---}\times\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\diamond\text{---}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\text{---}\text{+}\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\text{---}\square\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\text{---}\bullet\text{---}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée.

### 5.2.3 Comparaison des surfaces équivalentes radar

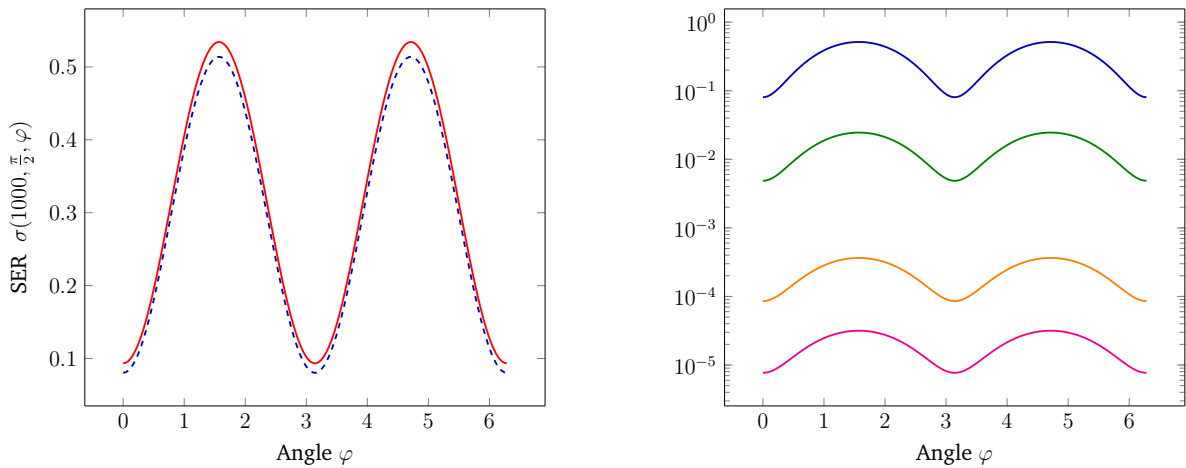
Dans cette section, nous nous intéressons à la sensibilité des *surfaces équivalentes radar* sur différents types de géométrie. Dans toutes les illustrations, nous prendrons  $\lambda = 5.0$ . La définition de la surface équivalente radar découle des propriétés du vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  introduit dans l'équation (1.10).

**Définition 5.1.** La surface équivalente radar, ou SER, est l'application  $\sigma$  allant de  $(0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\sigma : (r, \theta, \varphi) \mapsto \sigma(r, \theta, \varphi) = r^2 \operatorname{Re} [(\mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{H}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{e}_r],$$

avec  $\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^\top$  et  $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$ .

Sur la Figure 5.31, nous comparons les surfaces équivalentes radar d'un obstacle sphérique centré en l'origine de rayon  $\delta$ . Sur la gauche, nous comparons la SER calculée à partir du modèle de Foldy dipolaire modifié avec la SER de référence pour  $\delta = 0.5$ . Sur la droite, nous comparons la SER calculée à partir du modèle de Foldy dipolaire modifié pour différentes valeurs de  $\delta$ . La SER calculée à partir du modèle de Foldy est proche



(a) SER Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.5$ .

(b) SER Foldy dipolaire modifié pour différentes valeurs de  $\delta$ .

FIGURE 5.31 – Représentation des surfaces équivalentes radar. La courbe — correspond à la SER de référence pour  $\delta = 0.5$ . Les courbes - - - et — correspondent à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.5$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.3$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.15$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.1$ .

de la SER de référence pour  $\delta = 0.5$ . Par ailleurs, nous observons que la dépendance

à la taille de l'obstacle n'apparaît que dans l'amplitude globale des SER. En effet, plus le rayon  $\delta$  de l'obstacle diminue et plus l'amplitude de la SER est faible. La Figure 5.32 montre les surfaces équivalentes radar d'un obstacle sphérique de rayon  $\delta = 0.5$  pour différentes positions de son centre. Nous constatons que le centre de l'obstacle joue

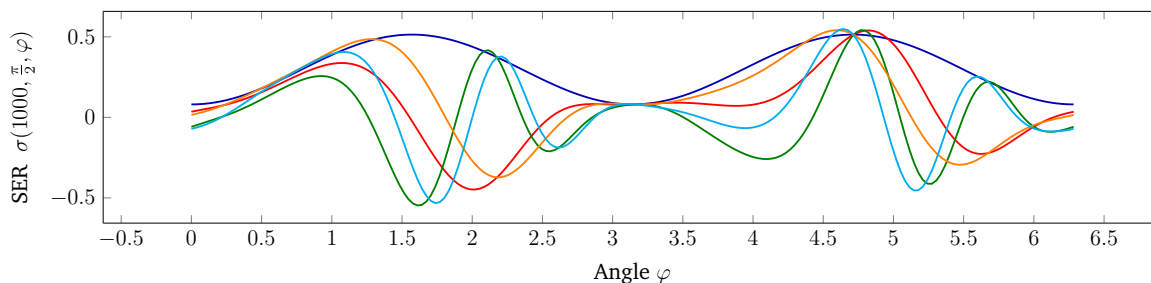
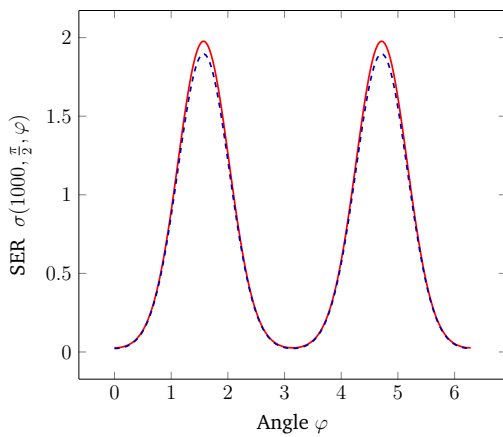


FIGURE 5.32 – Représentation des surfaces équivalentes radar avec  $\delta = 0.5$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (0, 0, 0)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (1, 1, 1)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (2, 2, 2)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (-1, -1, -1)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (-2, -2, -2)$ .

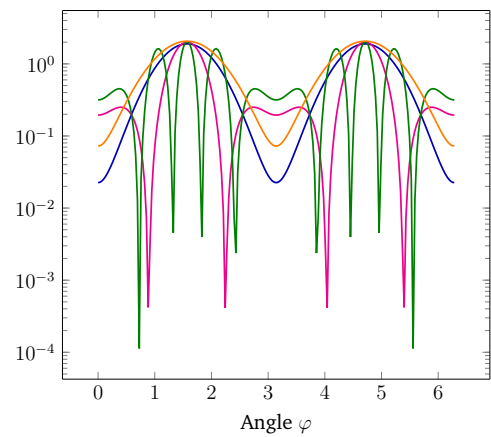
énormément sur la SER. De plus, les SER n'admettent plus l'axe de symétrie  $\varphi = \pi$  dû à l'asymétrie de la géométrie. L'amplitude maximale de la SER semble tout de même être associée à la taille de l'obstacle et le changement de centre ne l'affecte pas. La Figure 5.33 illustre les surfaces équivalentes radar de deux obstacles sphériques de rayon  $\delta = 0.5$  séparés d'une distance  $d$ . Sur la gauche, nous comparons la SER calculée à partir du modèle de Foldy dipolaire modifié avec la SER de référence avec  $c_1 = (-\frac{d}{2}, 0, 0)$  et  $c_2 = (\frac{d}{2}, 0, 0)$  avec  $d = 2.0$ . Nous observons que la distance qui sépare les obstacles va jouer un rôle important dans les SER. Les configurations géométriques testées admettent toutes un centre de symétrie qui est l'origine du repère et nous observons ici une symétrie des SER par rapport à  $\varphi = \pi$ . L'amplitude maximale semble encore dépendre de la taille des obstacles, voire du nombre d'obstacles, mais n'apparaît pas dépendante de la distance qui les sépare. La Figure 5.34 représente les surfaces équivalentes radar de  $K$  obstacles sphériques de rayon  $\delta = 0.5$  distribués de manière uniforme sur l'axe des  $x = -5, \dots, 5$ . Sur ce dernier exemple, nous faisons varier le nombre  $K$  d'obstacles. La Figure 5.34 confirme la corrélation entre le nombre d'obstacles et l'amplitude maximale des SER.

## 5.3 Conclusion

Les simulations numériques de la Section 5.1 dans le cadre de la diffraction simple par un petit obstacle sphérique ont montré la convergence des développements asymptotiques obtenus dans la Section 3.3.2 et ont permis de mettre en évidence les dif-

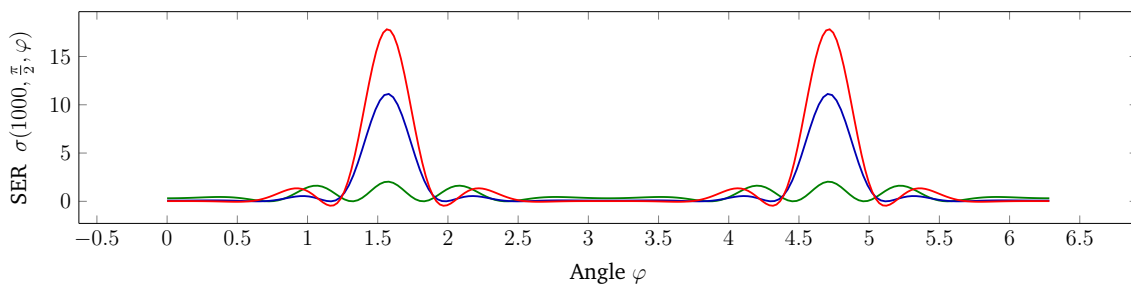


(a) SER Foldy dipolaire modifié pour  $d = 2.0$ .

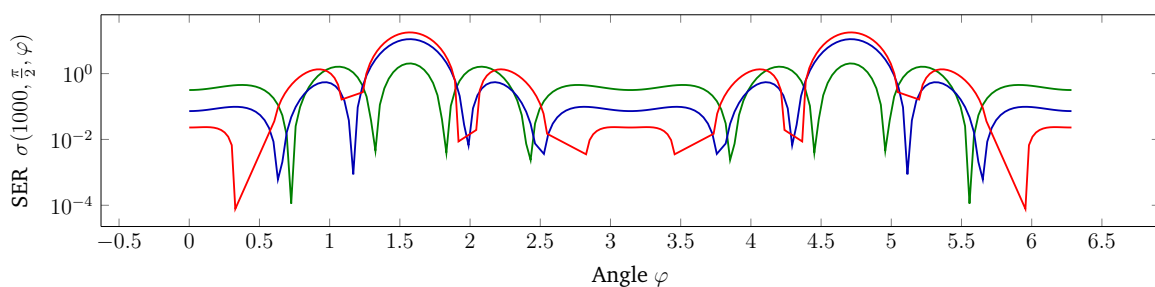


(b) SER Foldy dipolaire modifié pour différentes valeurs de  $d$ .

FIGURE 5.33 – Représentation des surfaces équivalentes radar. La courbe — correspond à la SER de référence pour  $\delta = 0.5$ . Les courbes --- et — correspondent à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 2.0$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 1.5$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 4.0$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 10.0$ .



(a) SER pour différentes valeurs de  $K$



(b) SER pour différentes valeurs de  $K$  représentées en échelle logarithmique

FIGURE 5.34 – Représentation des surfaces équivalentes radar avec  $\delta = 0.5$ . La courbe — correspond à la SER issue du modèle de Foldy dipolaire modifié pour  $K = 2$  et  $d = 10.0$ . La courbe — correspond à la SER issue du modèle de Foldy dipolaire modifié pour  $K = 5$  et  $d = 2.5$ . La courbe — correspond à la SER issue du modèle de Foldy dipolaire modifié pour  $K = 9$  et  $d = 1.25$ .

férents ordres de convergence associés. Les résultats numériques issus de la Section 5.2.2 permettent de valider numériquement les différents modèles asymptotiques dans le contexte de la diffraction multiple par de multiples sphères, où nous avons considéré un nombre de sphères relativement petit. Bien que les modèles développés soient tous du même ordre, les modèles issus de la théorie de Foldy apparaissent plus précis et mieux adaptés au phénomène de diffraction multiple que ceux issus de la théorie de Born.

Nous avons comparé nos modèles asymptotiques avec une solution de référence calculée à partir de la méthode spectrale qui fait l'objet la Partie II. Dans les Sections 9.1.4, 9.2 et 9.3, nous parlerons à nouveau des modèles asymptotiques. Nous établirons l'équivalence entre le modèle de Foldy dipolaire modifié et la solution spectrale associée à  $N = 1$  mode. Puis, nous comparerons les surfaces équivalentes radar issues des méthodes asymptotique et spectrale sur des gros cas-tests dont la stratégie de résolution est présentée dans le Chapitre 8. Enfin, nous comparerons les coûts de calcul engendrés par les deux méthodes et nous verrons que les modèles asymptotiques restent très avantageux en termes de temps de calcul.



## **Deuxième partie**

### **Méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple : Justification et résolution itérative rapide**





# CHAPITRE 6

## THÉORIE DE MIE GÉNÉRALISÉE À LA DIFFRACTION MULTIPLE

### Sommaire

---

<b>6.1 Le problème de diffraction multiple</b> . . . . .	<b>161</b>
6.1.1 La géométrie . . . . .	161
6.1.2 Formulation du problème . . . . .	163
6.1.3 Note sur l'espace des champs tangents sur la sphère . . . . .	163
<b>6.2 La diffraction par une sphère</b> . . . . .	<b>166</b>
6.2.1 Potentiels de Debye et de Hertz . . . . .	166
6.2.2 Décomposition modale des champs électromagnétiques . . . . .	168
6.2.3 Décomposition modale d'une onde plane . . . . .	169
6.2.4 Formalisme de Xu (1995) . . . . .	170
<b>6.3 Méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple</b> . . . . .	<b>171</b>
6.3.1 Décomposition modale du champ diffracté . . . . .	172
6.3.2 Le lemme de translation à deux centres . . . . .	173
6.3.3 Calcul des coefficients de translation . . . . .	177
6.3.4 Comparaison avec la littérature . . . . .	180
<b>6.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>181</b>

---

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressés à la modélisation asymptotique de la diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles. Dans le Chapitre 2, nous avons présenté différentes méthodes asymptotiques appliquées au problème de diffraction des ondes électromagnétiques par un petit obstacle. Nous avons

vu dans le Chapitre 3 qu'il est possible de définir des développements asymptotiques d'ordre élevé de la solution pour le problème de diffraction simple. De plus, nous avons présenté dans la Section 4.3.2 deux modèles de diffraction multiple de bas ordre, toujours appliqué au cas des petits obstacles. Le développement de modèles asymptotiques d'ordre élevé pour la diffraction multiple apparaît plus difficile à mettre en place.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la définition d'une méthode d'ordre élevé pour la diffraction multiple des ondes électromagnétiques par un nombre fini de sphères (non nécessairement petites comparées à la longueur d'onde), appelée méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple<sup>1</sup> et introduite par Yu-Lin Xu (1995) dans un formalisme de collocation. Il généralise les travaux de Bruning et Lo (1971), de Borghese *et al.* (1984) et Fuller et Kattawar (1988) qui se limitent à des systèmes à deux sphères. Nous renvoyons le lecteur à Fuller (1991) pour une présentation historique de cette méthode. Comme son nom l'indique, elle constitue une généralisation de la théorie de Mie, qui décrit les champs électromagnétiques en géométrie sphérique. Cette méthode a ensuite été adaptée au formalisme des matrices de transfert (T-matrices) par Mackowski et Mishchenko (1996) puis implémentée dans un code Fortran, voir Mackowski et Mishchenko (2011). Cette méthode semblait dénuée d'intérêt jusqu'aux récents travaux de Egel *et al.* (2017), où les auteurs ont amélioré les performances numériques de la résolution du problème en considérant, d'une part, un solveur itératif et un préconditionnement bloc diagonal du système, d'autre part, en implémentant la méthode dans un code massivement parallèle sur la plateforme de calcul CUDA. Nous remettons au goût du jour la méthode généralisée de Mie à la diffraction multiple dans le formalisme des potentiels de Debye (Peter Debye, 1884-1966) que nous justifierons rigoureusement dans le Chapitre 7. Dans le Chapitre 8, nous introduisons, après un changement de variable approprié, un préconditionneur qui semble plus efficace que celui proposé par Egel *et al.* (2017). De plus, pour des configurations particulières où les sphères sont uniformément réparties sur un segment, dans une section du plan ou dans un volume de l'espace, nous proposerons un algorithme qui permet de réduire drastiquement les coûts de calcul.

Un agrégat de sphères est généralement utilisé pour modéliser d'une manière simplifiée un ensemble de particules disjointes ordonnées ou désordonnées dans un matériau comme cela est présenté dans Born *et al.* (2015) pour des matériaux granulaires, dans Galisteo-López *et al.* (2011) pour des structures photoniques ou dans Bakhti *et al.*

---

1. traduit de l'anglais *Generalized Multiparticle Mie-solution method*

(2016) pour des nanoparticules d'or. Lorsque les sphères sont *suffisamment loin* les unes des autres, c'est-à-dire lorsque les interactions entre les sphères sont négligeables, la théorie classique de Mie et un principe de superposition, en analogie avec l'approximation de Born pour les modèles asymptotiques, apporte une bonne compréhension du phénomène de diffraction. Dans le cas contraire, il est nécessaire de caractériser les interactions entre les différents obstacles comme cela est mis en évidence dans [Okada et Kokhanovsky \(2009\)](#) et dans [Naraghi et al. \(2015\)](#). Cela est justement l'objectif de la méthode de Mie généralisée, analogiquement au modèle de Foldy du premier ordre pour les modèles asymptotiques.

La méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple est issue de la classe des *méthodes spectrales* qui tirent leur nom de la théorie spectrale. En effet, les nouvelles inconnues dans ce problème sont les coefficients spectraux associés aux décompositions modales des champs électromagnétiques, qui sont elles-mêmes basées sur la décomposition de l'espace (2.9) présentée dans [de La Bourdonnaye \(1993\)](#). Sa justification mathématique passe par la *discrétisation* d'une équation intégrale dans la base des harmoniques sphériques vectorielles et sera présentée dans la Section 7.3. Cette vision a déjà été utilisée en acoustique en deux dimensions dans [Thierry \(2011\)](#) ou [Barucq et al. \(2018a\)](#) pour la diffraction par des disques mais aussi en électromagnétisme en trois dimensions dans [Ganesh et Hawkins \(2008\)](#) ou [Ganesh et Hawkins \(2009\)](#) pour la diffraction par des obstacles de forme arbitraire mais dont la taille est comparable ou supérieure à la longueur d'onde. En géométrie sphérique, l'avantage principal de cette méthode est que les coefficients de la matrice associée au système linéaire à résoudre, peuvent être explicités analytiquement grâce aux théorèmes d'addition vectoriels introduits dans [Stein \(1961\)](#) puis dans [Cruzan \(1962\)](#).

## 6.1 Le problème de diffraction multiple

Nous introduisons le problème de diffraction multiple des ondes électromagnétiques en régime harmonique par un ensemble fini d'obstacles tridimensionnels bornés, simplement connexes et deux à deux disjoints. Nous étudierons ensuite le cas où les obstacles sont des sphères.

### 6.1.1 La géométrie

Nous introduisons la définition de rayon caractéristique d'un domaine borné.

**Définition 6.1.** Soit  $\Omega$  un domaine borné et régulier contenant un élément  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ . Nous appellerons rayon caractéristique du domaine relativement à  $\mathbf{c}$ , le nombre réel strictement positif  $r$  tel que l'adhérence de  $\Omega$ , notée  $\overline{\Omega}$ , soit incluse dans la boule fermée de centre  $\mathbf{c}$  et de rayon  $r$  notée  $\overline{\mathcal{B}(\mathbf{c}, r)}$  et tel que pour tout  $r < r$ , l'intersection entre  $\overline{\Omega}$  et  $\overline{\mathcal{B}(\mathbf{c}, r)}$  soit non vide.

Soit  $\widehat{\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^3$  un domaine de référence borné, simplement connexe, de rayon caractéristique égal à 1 relativement à l'origine, de frontière  $\widehat{\Gamma}$  régulière. Nous introduisons  $K$  obstacles  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_K$  définis de manière autosimilaire,

$$\mathcal{B}_k = \mathbf{c}_k + r_k \widehat{\mathcal{B}},$$

où  $\mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^3$  désigne son centre et  $r_k > 0$  son rayon caractéristique relativement à  $\mathbf{c}_k$ . Leur frontière est notée  $\Gamma_k$ . Nous supposons que les obstacles sont deux à deux disjoints,

$$|\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_j| > r_k + r_j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k.$$

**Remarque 6.1.** Les obstacles peuvent avoir des rayons caractéristiques différents.

Nous notons  $\Omega^e$  le domaine extérieur aux obstacles, défini par

$$\Omega^e = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^K \overline{\mathcal{B}_k}$$

Cette configuration géométrique est illustrée dans la Figure 6.1.

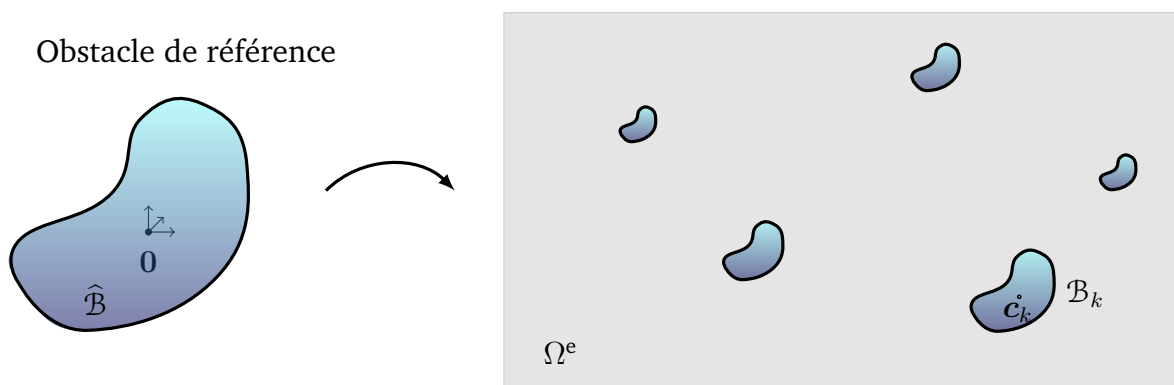


FIGURE 6.1 – Géométrie du problème.

### 6.1.2 Formulation du problème

Nous définissons les champs incidents  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  de la même manière que dans la Section 2.1.1. Pour une source  $\mathbf{J}_a \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact et disjoint de l'union des obstacles, les champs incidents  $\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}$  appartiennent à  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \cdot, \mathbb{R}^3)$ , voir par exemple dans Labat (2016, Proposition 3.26). Nous considérons le problème de Maxwell (2.8) dans le domaine  $\Omega^e$ , qui consiste à rechercher les champs électromagnétiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \Omega^e)$  vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H} = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\kappa \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma_k, \quad (k = 1, \dots, K) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}) = 0 & \text{uniformément en } \hat{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Nous supposons que la condition de frontière est une condition de conducteur parfait.

### 6.1.3 Note sur l'espace des champs tangents sur la sphère

En préambule, nous rappelons la définition des opérateurs surfaciques  $\nabla_{\Gamma}$ ,  $\text{div}_{\Gamma}$ ,  $\text{rot}_{\Gamma}$  et  $\text{rot}_{\Gamma}$  et celles des opérateurs de Laplace-Beltrami scalaire  $\Delta_{\Gamma}$  et vectoriel  $\Delta_{\Gamma}$ . Ces définitions sont issues de Nédélec (2001) ou Le Louër (2009).

**Définition 6.2.** Soit  $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction scalaire infinie différentiable définie sur une surface  $\Gamma$  simplement connexe et régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Nous notons  $\tilde{v}$  le prolongement de cette fonction dans  $\mathbb{R}^3$ . Le gradient tangentiel de  $v$ , noté  $\nabla_{\Gamma} v$ , est défini par

$$\nabla_{\Gamma} v = \nabla \tilde{v} - (\mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{v}) \mathbf{n}.$$

Le rotationnel tangentiel de  $v$ , noté  $\text{rot}_{\Gamma} v$  est défini par

$$\text{rot}_{\Gamma} v = (\nabla_{\Gamma} v) \times \mathbf{n}.$$

Les opérateurs surfaciques  $\text{div}_{\Gamma}$  et  $\text{rot}_{\Gamma}$  sont respectivement les opérateurs duaux de  $(-\nabla_{\Gamma})$  et  $\text{rot}_{\Gamma}$ .

**Définition 6.3.** Soit  $\mathbf{v} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs infiniment différentiable défini sur une surface  $\Gamma$  simplement connexe et régulière de  $\mathbb{R}^3$ . La divergence surfacique de  $\mathbf{v}$ ,

notée  $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}$ , est définie par

$$\int_\Gamma (\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}) \varphi \, d\Gamma = - \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \nabla_\Gamma \varphi, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma).$$

Le rotationnel surfacique de  $\mathbf{v}$ , noté  $\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v}$ , est défini par

$$\int_\Gamma (\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v}) \varphi \, d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot}_\Gamma \varphi, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma).$$

Enfin, les opérateurs de Laplace-Beltrami scalaire et vectoriel sont définis à partir de ces quatre opérateurs surfaciques.

**Définition 6.4.** Soit  $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction scalaire infiniment différentiable définie sur une surface  $\Gamma$  simplement connexe et régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Le Laplacien surfacique de  $v$ , noté  $\Delta_\Gamma v$  est défini par

$$\Delta_\Gamma v = \operatorname{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma v) = -\operatorname{rot}_\Gamma(\operatorname{rot}_\Gamma v).$$

Soit  $\mathbf{v} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs infiniment différentiable défini sur une surface  $\Gamma$  simplement connexe et régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Le Laplacien surfacique de  $\mathbf{v}$ , noté  $\Delta_\Gamma \mathbf{v}$  est défini par

$$\Delta_\Gamma \mathbf{v} = \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}) - \operatorname{rot}_\Gamma(\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v}).$$

L'espace de traces associé à chaque condition de frontière est  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . [de La Bourdonnaye \(1993\)](#) démontre que si  $\Gamma_k$  est difféomorphe à la sphère unité, cet espace se décompose en une somme directe et orthogonale<sup>2</sup>,

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k) = \nabla_{\Gamma_k} H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_k) \oplus \operatorname{rot}_{\Gamma_k} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k), \quad (6.2)$$

où  $\nabla_{\Gamma_k}$  et  $\operatorname{rot}_{\Gamma_k}$  désignent respectivement les opérateurs de gradient tangentiel et rotationnel tangentiel introduits dans la Définition 6.2. Ainsi, connaissant  $(\mathcal{Y}_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  la base hilbertienne constituée des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\Gamma_k$ , il est possible de définir  $(\nabla_{\Gamma_k} \mathcal{Y}_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(\operatorname{rot}_{\Gamma_k} \mathcal{Y}_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la base hilbertienne des champs tangents. De plus, ces vecteurs correspondent aux vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel.

2. au sens du crochet de dualité entre les espaces duaux  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ .

Sur la sphère unité  $\mathcal{S}$ , les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sont les *harmoniques sphériques*  $Y_{n,m}$  données dans les coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$  par

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_{n,|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (6.3)$$

pour  $n \geq 0$  et  $m = -n, \dots, n$ . Les polynômes  $P_{n,m}$  définis pour  $n \geq 0$  et  $m \geq 0$  sont les fonctions associées aux polynômes de Legendre  $P_n$ , donnés par

$$P_{n,m}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^m P_n(t), \quad P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (1-t^2)^n, \quad t \in [-1, 1].$$

**Remarque 6.2.** Dans la suite, nous noterons pour  $\hat{x} \in \mathcal{S}$ ,  $Y_{n,m}(\theta, \varphi) = Y_{n,m}(\hat{x})$  où  $(\theta, \varphi)$  correspondent aux coordonnées sphériques de  $\hat{x}$ . De plus, sur une sphère centrée en  $\mathbf{c}_k$  de rayon  $r_k$ , nous définissons les *harmoniques sphériques translatées*  $Y_{n,m}^k(\hat{\mathbf{y}}) = Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{y} - \mathbf{c}_k})$ , où  $\mathbf{y} = \mathbf{c}_k + r_k \hat{\mathbf{y}}$ .

Les harmoniques sphériques  $Y_{n,m}$  constituent une base orthonormale de  $L^2(\mathcal{S})$ . De plus, cette famille constitue une base orthogonale de  $H^s(\mathcal{S})$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . D'après (6.2), nous définissons les *harmoniques sphériques vectorielles*  $\nabla_{\mathcal{S}} Y_{n,m}$  et  $\text{rot}_{\mathcal{S}} Y_{n,m}$  et regroupons des propriétés les concernant dans la proposition suivante, issue de [Colton et Kress \(1998\)](#) par exemple.

**Proposition 6.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les harmoniques sphériques vectorielles  $\nabla_{\mathcal{S}} Y_{n,m}$  et  $\text{rot}_{\mathcal{S}} Y_{n,m}$  forment une base orthogonale de  $\mathbf{H}_t^s(\mathcal{S})$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Ce sont les vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel  $-\Delta_{\mathcal{S}}$  (Définition 6.4) de multiplicité  $2n+1$  associées à la valeur propre  $n(n+1)$ . En particulier, les relations suivantes ont lieu

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}} Y_{n,m} \cdot \nabla_{\mathcal{S}} Y_{n',m'} \, ds = n(n+1) \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}, \quad \int_{\mathcal{S}} \text{rot}_{\mathcal{S}} Y_{n,m} \cdot \text{rot}_{\mathcal{S}} Y_{n',m'} \, ds = n(n+1) \delta_n^{n'} \delta_m^{m'},$$

où  $\delta_a^a$  désigne le symbole de Krönecker et  $ds = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ .

**Remarque 6.3.** Nous utilisons la convention où les harmoniques sphériques sont à valeurs complexes comme dans [Colton et Kress \(1998\)](#) ou [Monk \(2003\)](#), contrairement à [Van Bladel \(2007\)](#) ou [Cancès et al. \(2013\)](#), où est utilisée une autre convention des harmoniques sphériques qui sont à valeurs réelles.



## 6.2 La diffraction par une sphère

Nous rappelons les résultats concernant les décompositions modales des champs électromagnétiques à l'extérieur d'une sphère. La technique de séparation de variables est utilisée pour résoudre le problème de Maxwell (6.1) avec  $K = 1$ , où l'obstacle de référence est  $\widehat{\mathcal{B}} = \mathcal{S}$  c'est-à-dire  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(c_1, r_1)$ . Nous omettrons l'indexation de l'obstacle dans le cas de la diffraction simple et nous noterons  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(c, r)$ .

### 6.2.1 Potentiels de Debye et de Hertz

Les potentiels de Debye sont les solutions de l'équation de Helmholtz en géométrie sphérique : à l'intérieur ou à l'extérieur d'une sphère. Ils sont obtenus en résolvant l'équation de Helmholtz

$$-\Delta u - \kappa^2 u = 0 \quad (6.4)$$

par séparation de variables. Nous introduisons la définition des fonctions sphériques de Bessel  $j_n$  et de Hankel de première espèce  $h_n^{(1)}$ , qui, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , sont solutions de

$$\frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{d}{dz} f_n \right] + (z^2 - n(n+1)) f_n = 0. \quad (6.5)$$

**Proposition 6.2.** *Pour tout entier naturel  $n$ , la fonction de Bessel  $j_n$  d'ordre  $n$  est une solution régulière en zéro de l'équation (6.5) et la fonction de Hankel de première espèce  $h_n^{(1)}$  d'ordre  $n$  est une solution sortante de l'équation (6.5). Elles sont données par les formules de Rayleigh, par exemple dans [Olver et al. \(2010\)](#),*

$$\begin{aligned} j_n(z) &= z^n \left( -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, & z \in \mathbb{C}, \\ h_n^{(1)}(z) &= z^n \left( -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\exp(iz)}{iz}, & z \in \mathbb{C}^*. \end{aligned} \quad (6.6)$$

**Proposition 6.3.** *La fonction de Hankel de première espèce  $h_n^{(1)}$  d'ordre  $n$  admet le développement suivant au voisinage de l'origine,*

$$h_n^{(1)}(z) = \sum_{\ell=-n-1}^{\infty} \mathfrak{h}_{n,\ell} z^\ell,$$

où les coefficients  $\mathfrak{h}_{n,\ell}$  sont donnés par

$$\mathfrak{h}_{n,\ell} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\ell+1}} \frac{(-1)^{\frac{\ell-n}{2}}}{(\frac{\ell-n}{2})! \Gamma(\frac{\ell+n+1}{2} + 1)} & \text{quad si } \ell - n \text{ est pair et } \ell \geq n, \\ i(-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\ell+1}} \frac{(-1)^{\frac{\ell+n+1}{2}}}{(\frac{\ell+n+1}{2})! \Gamma(\frac{\ell-n}{2} + 1)} & \text{si } \ell - n \text{ est impair et } \ell \geq -n - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.7)$$

À l'intérieur de  $\mathcal{B}$ , toute solution régulière  $u^r \in H^1(\mathcal{B})$  de l'équation de Helmholtz (Remarque 1.8) peut être décomposée dans la base des harmoniques sphériques  $Y_{n,m}$ ,

$$u^r(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^r R_{n,m}(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \quad \text{avec} \quad R_{n,m}(\mathbf{y}) = j_n(\kappa|\mathbf{y}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}). \quad (6.8)$$

Les coefficients  $u_{n,m}^r$  sont les coefficients spectraux associés à la projection de  $u^r$  sur  $Y_{n,m}$ ,

$$u_{n,m}^r = \frac{1}{j_n(\kappa r)} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r} u(\mathbf{x}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \, ds.$$

À l'extérieur de  $\mathcal{B}$ , toute solution sortante  $u^s \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^e)$  de l'équation de Helmholtz peut être décomposée sous la forme

$$u^s(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^s S_{n,m}(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \quad \text{avec} \quad S_{n,m}(\mathbf{y}) = h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}). \quad (6.9)$$

Les coefficients  $u_{n,m}^s$  sont les coefficients spectraux associés à la projection de  $u^s$  sur  $Y_{n,m}$ ,

$$u_{n,m}^s = \frac{1}{h_n^{(1)}(\kappa r)} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r} u^s(\mathbf{x}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \, ds.$$

Les potentiels de Hertz sont les champs de vecteurs réguliers  $u^r \mathbf{x}$  et singuliers  $u^s \mathbf{x}$  utilisés pour le calcul des décompositions modales des champs électromagnétiques. En effet, si  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz (6.4) alors

$$\nabla \times (u\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{i\kappa} \nabla \times (\nabla \times (u\mathbf{x})) \quad (6.10)$$

vérifient l'équation de Maxwell du second ordre

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \kappa^2 \mathbf{u} = 0.$$

Si de plus  $u$  vérifie la condition de Sommerfeld (1.26) alors les champs de vecteurs (6.10) vérifient la condition de Silver-Müller (1.22). Cela est démontré dans Monk (2003) par exemple.

### 6.2.2 Décomposition modale des champs électromagnétiques

Les champs incidents  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  admettent la représentation modale dans  $\mathbf{H}(\nabla \times, \mathcal{B})$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \mathbf{e}_{n,m}^{\text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^{\text{h}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{h}_{n,m}^{\text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^{\text{e}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \\ \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -\mathbf{h}_{n,m}^{\text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^{\text{h}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{e}_{n,m}^{\text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^{\text{e}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}),\end{aligned}\tag{6.11}$$

où les modes réguliers  $\mathbf{R}_{n,m}^{\text{e}}$  et  $\mathbf{R}_{n,m}^{\text{h}}$  associés aux équations des Maxwell sont donnés par

$$\mathbf{R}_{n,m}^{\text{h}}(\mathbf{y}) = \nabla \times (R_{n,m}(\mathbf{y}) \mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{n,m}^{\text{e}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{R}_{n,m}^{\text{h}}(\mathbf{y}).$$

Les coefficients spectraux  $\mathbf{e}_{n,m}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{h}_{n,m}^{\text{inc}}$  sont les projections de  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  sur les harmoniques sphériques vectorielles  $\nabla_{\text{s}} Y_{n,m}$  et  $\text{rot}_{\text{s}} Y_{n,m}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{n,m}^{\text{inc}} &= \frac{1}{n(n+1)j_n(\kappa r)} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot}_{\text{s}} \overline{Y_{n,m}}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{c}}) \, ds, \\ \mathbf{h}_{n,m}^{\text{inc}} &= \frac{1}{n(n+1)\tilde{j}_n(\kappa r)} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\text{s}} \overline{Y_{n,m}}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{c}}) \, ds.\end{aligned}\tag{6.12}$$

où nous avons introduit la notation  $\tilde{j}_n$  définie par

$$\tilde{j}_n(z) = \frac{j_n(z)}{iz} - i \frac{d}{dz} [j_n(z)].$$

**Remarque 6.4.** Plus que dans  $\mathcal{B}$ , les champs incidents admettent cette même décomposition modale dans toute boule ouverte  $\mathcal{B}(\mathbf{c}, R)$ . En particulier, les coefficients spectraux  $\mathbf{e}_{n,m}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{h}_{n,m}^{\text{inc}}$  sont indépendants de  $r$ .

Les champs électromagnétiques diffractés vérifiant (6.1) dans  $\Omega^{\text{e}}$  admettent la décomposition modale dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \Omega^{\text{e}})$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \mathbf{e}_{n,m} \mathbf{S}_{n,m}^{\text{h}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{h}_{n,m} \mathbf{S}_{n,m}^{\text{e}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -\mathbf{h}_{n,m} \mathbf{S}_{n,m}^{\text{h}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{e}_{n,m} \mathbf{S}_{n,m}^{\text{e}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}),\end{aligned}\tag{6.13}$$

où les *modes singuliers*  $\mathbf{S}_{n,m}^e$  et  $\mathbf{S}_{n,m}^h$  associés aux équations de Maxwell sont donnés par

$$\mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{y}) = \nabla \times (S_{n,m}(\mathbf{y}) \mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{y}) = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{y}). \quad (6.14)$$

Les coefficients spectraux  $e_{n,m}$  et  $h_{n,m}$  sont les projections de  $\mathbf{E}$  sur les harmoniques sphériques vectorielles  $\nabla_S Y_{n,m}$  et  $\text{rot}_S Y_{n,m}$ ,

$$\begin{aligned} e_{n,m} &= \frac{1}{n(n+1)h_n^{(1)}(\kappa r)} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot}_S \overline{Y_{n,m}}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{c}}) \, dS, \\ h_{n,m} &= \frac{1}{n(n+1)\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r)} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_S \overline{Y_{n,m}}(\widehat{\mathbf{x}-\mathbf{c}}) \, dS, \end{aligned} \quad (6.15)$$

où nous avons introduit la fonction  $\tilde{h}_n^{(1)}$  définie par

$$\tilde{h}_n^{(1)}(z) = \frac{h_n^{(1)}(z)}{iz} - i \frac{d}{dz} [h_n^{(1)}(z)]. \quad (6.16)$$

Les coefficients spectraux  $e_{n,m}$  et  $h_{n,m}$  associés aux champs électromagnétiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont reliés aux coefficients spectraux  $e_{n,m}^{\text{inc}}$  et  $h_{n,m}^{\text{inc}}$  associés aux champs incidents  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  par les relations

$$e_{n,m} = -\frac{j_n(\kappa r)}{h_n^{(1)}(\kappa r)} e_{n,m}^{\text{inc}} \quad \text{et} \quad h_{n,m} = -\frac{\tilde{j}_n(\kappa r)}{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r)} h_{n,m}^{\text{inc}}. \quad (6.17)$$

### 6.2.3 Décomposition modale d'une onde plane

Un onde plane électromagnétique est caractérisée par des champs électromagnétiques vérifiant les équations (2.1) dans l'espace libre où le second membre est égal à zéro,

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \mathbf{p} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{H}^{\text{inc}} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{inc}} \quad \mathbf{p} \perp \mathbf{k}. \quad (6.18)$$

**Proposition 6.4.** Pour  $\mathbf{p} = (1 \ 0 \ 0)^\top$  et  $\mathbf{k} = (0 \ 0 \ -\kappa)^\top$ , le champ électrique incident (6.18) admet la décomposition modale dans  $\mathbf{H}(\nabla \times, \mathcal{B})$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \sqrt{\pi} \exp(-i\kappa \mathbf{c}) \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}} \left\{ \mathbf{R}_{n,1}^h(\mathbf{x}-\mathbf{c}) - \mathbf{R}_{n,-1}^h(\mathbf{x}-\mathbf{c}) \right. \\ \left. - i\mathbf{R}_{n,1}^e(\mathbf{x}-\mathbf{c}) - i\mathbf{R}_{n,-1}^e(\mathbf{x}-\mathbf{c}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

La démonstration est basée sur la décomposition de Anger-Jacobi, voir [Colton et](#)

Kress (1998) par exemple,

$$\exp(i\kappa z) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(\kappa|z|) P_n(\cos \theta).$$

**Remarque 6.5.** Les coefficients  $e_{n,m}^{inc}$  et  $h_{n,m}^{inc}$  peuvent être explicités dans le cas d'une onde plane. Nous avons

$$\begin{cases} e_{n,m}^{inc} = \sqrt{\pi} \exp(-i\kappa c) (-i)^{n+1} m \delta_{|m|}^1 \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}}, \\ h_{n,m}^{inc} = \sqrt{\pi} \exp(-i\kappa c) (-i)^{n+2} |m| \delta_{|m|}^1 \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}}. \end{cases} \quad (6.20)$$

Ainsi, les champs électromagnétiques diffractés par l'onde plane admettent une décomposition modale qui est complètement analytique, obtenue en substituant (6.20) dans (6.17), puis en injectant le résultat dans (6.13).

#### 6.2.4 Formalisme de Xu (1995)

Xu (1995) introduit un formalisme légèrement différent. Il utilise une autre convention que (6.3) pour les harmoniques sphériques, ne prenant pas en compte le coefficient de normalisation, noté  $c_n^{|m|}$ , donné par

$$c_n^m = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}. \quad (6.21)$$

Il introduit de plus les fonctions angulaires  $\pi_{n,m}(\cos \theta)$  et  $\tau_{n,m}(\cos \theta)$  données par

$$\pi_{n,m}(t) = \frac{m P_{n,m}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{et} \quad \tau_{n,m}(t) = \sqrt{1-t^2} \frac{d}{dt} P_{n,m}(t)$$

et telles que

$$\begin{aligned} \nabla_s Y_{n,m} &= (-1)^n c_n^m \exp(im\varphi) [\tau_{n,m}(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta + i\pi_{n,m}(\cos \theta) \mathbf{e}_\varphi], \\ \text{rot}_s Y_{n,m} &= (-1)^n c_n^m \exp(im\varphi) [i\pi_{n,m}(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta - \tau_{n,m}(\cos \theta) \mathbf{e}_\varphi], \end{aligned}$$

puis les modes Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{n,m}^{(1)} = \frac{(-1)^n}{c_n^m} \mathbf{R}_{n,m}^h, & \mathbf{N}_{n,m}^{(1)} = \frac{i(-1)^n}{c_n^m} \mathbf{R}_{n,m}^e, \\ \mathbf{M}_{n,m}^{(3)} = \frac{(-1)^n}{c_n^m} \mathbf{S}_{n,m}^h, & \mathbf{N}_{n,m}^{(3)} = \frac{i(-1)^n}{c_n^m} \mathbf{S}_{n,m}^e. \end{cases}$$

**Proposition 6.5.** *Le champ électrique admet la décomposition modale dans  $\mathbf{H}(\nabla \times, \Omega^e)$*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \exp(-i\kappa\mathbf{c}) \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{2n(n+1)} \left\{ \frac{j_n(\kappa r)}{h_n^{(1)}(\kappa r)} \left( \mathbf{M}_{n,1}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) - \mathbf{M}_{n,-1}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \right) - \frac{\tilde{j}_n(\kappa r)}{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r)} \left( \mathbf{N}_{n,1}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{N}_{n,-1}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \right) \right\}.$$

*Démonstration.* Les représentations modales des champs électromagnétiques diffractés (6.13) s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^n c_n^m \left\{ \mathbf{e}_{n,m} \mathbf{M}_{n,m}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) - i h_{n,m} \mathbf{N}_{n,m}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \right\}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^n c_n^m \left\{ -h_{n,m} \mathbf{M}_{n,m}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) - i \mathbf{e}_{n,m} \mathbf{N}_{n,m}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \right\}, \end{aligned}$$

tandis que le champ électrique incident associé à l'onde plane (6.18) est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) &= \exp(-i\kappa\mathbf{c}) \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{2n(n+1)} \left\{ -\mathbf{M}_{n,1}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{M}_{n,-1}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{N}_{n,1}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{N}_{n,-1}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \right\}. \end{aligned}$$

□

## 6.3 Méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple

Nous considérons le problème de diffraction des ondes électromagnétiques par  $K$  sphères centrées en  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_K$  de rayons respectifs  $r_1, \dots, r_K$ . La généralisation de la méthode de Mie consiste à prendre en compte les phénomènes de diffraction multiple en considérant une onde plane incidente. Cette méthode peut être généralisée à tout type d'onde incidente. Selon l'idée de [Foldy \(1945\)](#) présentée dans la Section 2.3, cela

consiste à considérer localement, les champs diffractés autour d'un obstacle comme un champ incident vis-à-vis des autres obstacles. En géométrie sphérique, cela suggère de décomposer les ondes sortantes centrées autour d'un obstacle donné, en la superposition d'ondes entrantes centrées autour d'un autre obstacle donné et ce pour chacun des obstacles.

### 6.3.1 Décomposition modale du champ diffracté

Le champ diffracté total  $\mathbf{E}$  est recherché comme la superposition de champs diffractés centrés autour des différents obstacles,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{E}^{(k)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{E}^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e_{n,m}^k \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + h_{n,m}^k \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k). \quad (6.22)$$

Dans le cas de la diffraction simple, les coefficients spectraux  $e_{n,m}^k$  et  $h_{n,m}^k$  sont reliés aux coefficients du champ incident par la relation de proportionnalité (6.17). Dans le cas de la diffraction multiple, il faut définir les champs incidents locaux centrés autour des différents obstacles.

Autour du  $k$ -ième obstacle, le champ incident total  $\mathbf{E}_k^l$  est décomposé sous la forme

$$\mathbf{E}_k^l(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_k^{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \sum_{\ell \neq k} \mathbf{E}_k^{(\ell)}(\mathbf{x}).$$

Les champs incidents  $\mathbf{E}_k^{\text{inc}}$  sont représentés à l'aide de leur décomposition modale (6.11) autour du centre  $\mathbf{c}_k$ ,

$$\mathbf{E}_k^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e_{n,m}^{k,\text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + h_{n,m}^{k,\text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k).$$

Si l'onde incidente est une onde plane électromagnétique polarisée en  $e_x$  et dirigée selon l'axe  $-e_z$ , voir Proposition 6.4, les coefficients  $e_{n,m}^{k,\text{inc}}$  et  $h_{n,m}^{k,\text{inc}}$  sont les coefficients spectraux issus de la décomposition (6.19) donnés par

$$\begin{cases} e_{n,m}^{k,\text{inc}} = \sqrt{\pi} \exp(-i\kappa \mathbf{c}_k) (-i)^{n+1} m \delta_{|m|}^1 \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}}, \\ h_{n,m}^{k,\text{inc}} = \sqrt{\pi} \exp(-i\kappa \mathbf{c}_k) (-i)^{n+2} |m| \delta_{|m|}^1 \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Pour  $\ell \neq k$ , les champs  $\mathbf{E}_k^{(\ell)}$  sont les champs diffractés associés au  $\ell$ -ième obstacle exprimés dans le référentiel associé au  $k$ -ième obstacle,

$$\mathbf{E}_k^{(\ell)}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \mathbf{e}_{n,m}^{k,\ell} \mathbf{R}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + \mathbf{h}_{n,m}^{k,\ell} \mathbf{R}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k). \quad (6.24)$$

Le passage de (6.22) à (6.24) est une conséquence du lemme de translation à deux centres présenté dans la Section 6.3.2.

Les coefficients spectraux  $\mathbf{e}_{n,m}^k$  et  $\mathbf{h}_{n,m}^k$  sont obtenus en suivant l'idée de Mie où  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  est assimilé à l'ensemble des  $\mathbf{E}_k^{\text{l}}$ ,

$$\mathbf{e}_{n,m}^k = -\frac{j_n(\kappa r_k)}{h_n^{(1)}(\kappa r_k)} \left[ \mathbf{e}_{n,m}^{k,\text{inc}} + \sum_{\ell \neq k} \mathbf{e}_{n,m}^{k,\ell} \right] \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_{n,m}^k = -\frac{\tilde{j}_n(\kappa r_k)}{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)} \left[ \mathbf{h}_{n,m}^{k,\text{inc}} + \sum_{\ell \neq k} \mathbf{h}_{n,m}^{k,\ell} \right].$$

Les coefficients  $\mathbf{e}_{n,m}^{k,\ell}$  et  $\mathbf{h}_{n,m}^{k,\ell}$  sont exprimés comme combinaison linéaire des  $\mathbf{e}_{\nu,\mu}^\ell$  et  $\mathbf{h}_{\nu,\mu}^\ell$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{n,m}^{k,\ell} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \mathbf{e}_{\nu,\mu}^\ell S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) - \mathbf{h}_{\nu,\mu}^\ell S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}), \\ \mathbf{h}_{n,m}^{k,\ell} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \mathbf{e}_{\nu,\mu}^\ell S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) + \mathbf{h}_{\nu,\mu}^\ell S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}), \end{cases} \quad \text{avec } \mathbf{d}_{k,\ell} = \mathbf{c}_\ell - \mathbf{c}_k.$$

Les coefficients  $S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell})$  et  $S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell})$ , appelés coefficients de translation, sont définis par (6.26) et (6.27).

### 6.3.2 Le lemme de translation à deux centres

Le lemme de translation à deux centres fournit une représentation locale de toute onde sortante autour d'un obstacle par des ondes entrantes décentrées. Dans le langage de la méthode de multipôle rapide (*Fast Multipole Method* en anglais), ces types de lemmes sont utilisés entre autres pour définir les opérateurs Multipôle-vers-Local (M2L), Multipôle-vers-Multipôle (M2M) ou Local-vers-Local (L2L), voir par exemple ?.

**Proposition 6.6.** *Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m = -n, \dots, n$ , il existe des coefficients complexes  $S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{\ell,k})$  et  $S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{\ell,k})$  pour tous  $k \neq \ell$ , appelés coefficients de translation, tels que pour*



tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  vérifiant  $|\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell| < |\mathbf{d}_{k,\ell}|$  nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{R}_{\nu,\mu}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) + S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{R}_{\nu,\mu}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell), \\ \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} -S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{R}_{\nu,\mu}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) + S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{R}_{\nu,\mu}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Les coefficients de translation ont été calculés historiquement par [Stein \(1961\)](#), [Cruzan \(1962\)](#) et [Mackowski \(1991\)](#). Les expressions de [Stein \(1961\)](#) et [Mackowski \(1991\)](#) font intervenir les coefficients de translation scalaires tandis que les expressions de [Cruzan](#) font intervenir les symboles de Wigner  $3j$ . Comme l'a remarqué [Xu \(1996\)](#) page 292, l'expression de  $S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{x}_0)$  obtenue par [Cruzan \(1962\)](#) prête à confusion et mène numériquement à des résultats incorrects. Pour le calcul numérique, nous avons choisi d'utiliser les coefficients  $S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{x}_0)$  obtenus par [Cruzan \(1962\)](#) en y incluant notre convention des harmoniques sphériques. L'expression des coefficients  $S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{x}_0)$ , démontrée dans la Section 6.3.3, se rapproche de celle de [Mackowski \(1991\)](#). Nous avons

$$\begin{aligned} S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{x}_0) &= \frac{2\pi}{n(n+1)} \sum_{p=|\nu-n|}^{\nu+n} \left\{ (-i)^{n-\nu+p} \int_{\mathcal{S}} Y_{n,m}(\hat{x}) \overline{Y_{\nu,\mu}(\hat{x})} Y_{p,-m+\mu}(\hat{x}) \, ds \right. \\ &\quad \left. \times [n(n+1) + \nu(\nu+1) - p(p+1)] S_{p,\mu-m}(\mathbf{x}_0) \right\}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{x}_0) &= \frac{i\kappa}{n(n+1)} \sum_{\mu_2=m-1}^{m+1} S_{n\mu_2}^{\nu\mu}(\mathbf{x}_0) q_{nm}^{n\mu_2}(\mathbf{x}_0) \\ &\quad \text{avec } q_{nm}^{n\mu_2}(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{S}} (\nabla_{\mathcal{S}} Y_{n,\mu_2} \times \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_r \overline{Y_{n,m}} \, ds. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Les coefficients  $S_{n\mu_2}^{\nu\mu}(\mathbf{x}_0)$  sont les coefficients de translation scalaire, donnés par

$$S_{n\mu_2}^{\nu\mu}(\mathbf{x}_0) = 4\pi \sum_{p=|n-\nu|}^{n+\nu} i^{n-\nu+p} S_{p,\mu-m}(\mathbf{x}_0) \int_{\mathcal{S}} Y_{\nu,\mu}(\hat{x}) \overline{Y_{n,m}(\hat{x})} Y_{p,-\mu+m}(\hat{x}) \, ds, \quad (6.28)$$

voir [Martin \(2006\)](#) page 95 par exemple. Les fonctions d'ondes  $S_{p,m-\mu}$  sont définies par (6.9). De plus, les intégrales  $q_{nm}^{n\mu_2}(\mathbf{x}_0)$  peuvent être calculées analytiquement. En particulier, nous avons la Proposition suivante.

**Proposition 6.7.** *Soit  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un élément de  $\mathbb{R}^3$ . Les intégrales  $q_{nm}^{\nu_2\mu_2}(\mathbf{x}_0)$  sont identiquement nulles excepté pour  $\nu_2 = n$  et  $\mu_2 = m - 1, m$  ou  $m + 1$ . En particulier, pour*

tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout entier relatif  $m = -n, \dots, n$ , nous avons

$$\begin{cases} q_{nm}^{nm}(\mathbf{x}_0) = imz_0, \\ q_{nm}^{nm-1}(\mathbf{x}_0) = -i \frac{x_0 - iy_0}{2} \sqrt{(n-m+1)(n+m)}, & m \geq 1, \\ q_{nm}^{nm-1}(\mathbf{x}_0) = i \frac{x_0 - iy_0}{2} \sqrt{(n-m+1)(n+m)}, & m \leq 0, \\ q_{nm}^{nm+1}(\mathbf{x}_0) = -i \frac{x_0 + iy_0}{2} \sqrt{(n+m+1)(n-m)}, & m \geq 0, \\ q_{nm}^{nm+1}(\mathbf{x}_0) = i \frac{x_0 + iy_0}{2} \sqrt{(n+m+1)(n-m)}, & m \leq -1. \end{cases}$$

Cette proposition est démontrée dans la Section 6.3.3.

Subsistent dans les coefficients de translation  $S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{x}_0)$  et  $S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{x}_0)$ , les intégrales

$$\int_S Y_{n,m}(\hat{x}) \overline{Y_{\nu,\mu}(\hat{x})} Y_{p,-m+\mu}(\hat{x}) ds.$$

Elles sont appelées intégrales de **Gaunt (1929)** et vérifient l'identité

$$\int_S Y_{n,m} \overline{Y_{\nu,\mu}} Y_{p,q} ds = (-1)^{n-\nu+p+q} i^{|q|-|\mu|-|m|} \times \sqrt{\frac{(2n+1)(2\nu+1)(2p+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \nu & n & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu & n & p \\ \mu & -m & -q \end{pmatrix},$$

où le second membre est un *coefficient de Gaunt*<sup>3</sup>. Le symbole  $\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$  désigne le symbole de Wigner 3j. Les nombres quantiques  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  sont appelés les moments angulaires et  $m_1, m_2$  et  $m_3$  sont leurs projections. Le symbole est nul sauf si les inégalités triangulaires, schématisées en Figure 6.2 et données par

$$\begin{cases} |l_i - l_j| \leq l_k \leq l_i + l_j & \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3), \\ m_1 + m_2 + m_3 = 0, \\ |m_k| \leq l_k & \text{pour } k = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (6.29)$$

sont vérifiées. Les symboles de Wigner 3j sont reliés aux coefficients de Clebsch-Gordan

3. Dans la littérature, on ne retrouve pas une convention unique pour les coefficients de Gaunt.

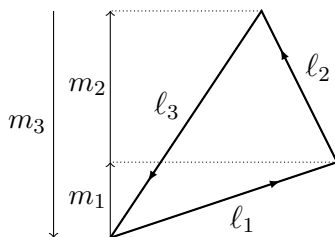


FIGURE 6.2 – Schéma représentant les moments angulaires  $\ell_k$  et leurs projections  $m_k$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

$\langle \ell_1, m_1, \ell_2, m_2 | \ell_3, m_3 \rangle$  qui interviennent en mécanique quantique, selon la relation

$$\langle \ell_1, m_1, \ell_2, m_2 | \ell_3, m_3 \rangle = (-1)^{\ell_1 - \ell_2 + m_3} \sqrt{2\ell_3 + 1} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan apparaissent lorsque nous effectuons l'addition de deux moments cinétiques,

$$|\ell_1, \ell_2, \ell_3, m_3\rangle = \sum_{m_1=-\ell_1}^{\ell_1} \sum_{m_2=-\ell_2}^{\ell_2} |\ell_1, \ell_2, m_1, m_2\rangle \langle \ell_1, \ell_2, m_1, m_2 | \ell_3, m_3 \rangle. \quad (6.30)$$

Ces notations sont expliquées dans la Remarque 6.6.

**Remarque 6.6.** Dans [Tannoudji et al. \(1980\)](#) et plus généralement en mécanique quantique, sont introduites les notations dites de Dirac. Elles consistent à substituer la notation d'un vecteur  $\mathbf{u}$  en la notation  $|\mathbf{u}\rangle$  appelé « ket », la notation  $\bar{\mathbf{u}}^\top$  en  $\langle \mathbf{u}|$  appelé « bra » et le produit scalaire  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  en  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$  (nommé bracket en anglais). Cette notation s'avère pratique pour mettre en évidence la dépendance d'un vecteur à certaines quantités par le biais d'un symbole. Cela est typiquement le cas lorsque nous introduisons la notion de moment cinétique en physique quantique. Il existe deux types fondamentaux de moments cinétiques : le moment cinétique orbital et le moment cinétique de spin. Tout moment cinétique est ensuite combinaison linéaire de ces deux types de moments cinétiques. Le moment cinétique orbital retrouve son équivalent en physique classique défini par  $\ell = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  où  $\mathbf{p}$  désigne la quantité de mouvement. Le principe des opérateurs associés mène à la définition de l'opérateur de moment cinétique orbital  $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y, \mathfrak{L}_z\}$  tel que

$$\mathfrak{L} = i\hbar \mathbf{x} \times \nabla,$$

où  $\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Js désigne la constante de Planck. Les propriétés de ces opérateurs impliquent l'existence d'une base de vecteurs propres communs à  $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L} \circ \mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{L}_z$ . Ces

vecteurs sont notés  $|\ell, m\rangle$  en référence aux nombres quantiques  $\ell$  et  $m$  intervenant dans les valeurs propres de  $\mathfrak{L}^2$  et  $\mathfrak{L}_z$ ,

$$\mathfrak{L}^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell + 1)|\ell, m\rangle \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}_z|\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle.$$

À  $\ell$  fixé, le sous-espace propre  $\mathfrak{E}_\ell$  des états associés au nombre quantique  $\ell$  est de dimension  $2\ell + 1$ . Nous reconnaissons ici les propriétés vérifiées par les fonctions harmoniques sphériques  $Y_{\ell,m}$ . Les coefficients de Clebsch-Gordan apparaissent alors lors de l'addition de moments cinétiques. Nous considérons à présent un opérateur de moment cinétique  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$  défini comme la somme de deux opérateurs de moments cinétiques  $\mathfrak{L}_1$  et  $\mathfrak{L}_2$ , qui pour  $k = 1$  ou  $2$ , sont associés aux vecteurs propres  $|\ell_k, m_k\rangle$  communs à  $\mathfrak{L}_k^2$  et  $\mathfrak{L}_{k_z}$ . L'addition de moments cinétiques consiste à exprimer les vecteurs propres  $|\ell_1, \ell_2, \ell, m\rangle$  communs à  $\mathfrak{L}^2$  et  $\mathfrak{L}_z$  comme combinaison linéaire des vecteurs de base  $|\ell_1, m_1, \ell_2, m_2\rangle$  associés à l'espace produit  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \otimes \mathfrak{E}_2$ , où pour  $k = 1$  ou  $2$ ,  $\mathfrak{E}_k$  désigne le sous-espace propre des états associés au nombre quantique  $\ell_k$ . Cela est mis en évidence dans l'équation (6.30).

Il est intéressant de connaître l'origine des symboles de Wigner  $3j$  mais il est surtout commode de les calculer analytiquement. Pour  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$  et  $(m_1, m_2, m_3)$  vérifiant (6.29), le symbole de Wigner  $3j$  peut être exprimé à partir de la formule de Racah comme cela est énoncé dans [Olver et al. \(2010\)](#),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = & (-1)^{\ell_1 - \ell_2 - m_3} \Delta[\ell_1 \ell_2 \ell_3] \sqrt{(\ell_1 + m_1)!(\ell_1 - m_1)!(\ell_2 + m_2)!(\ell_2 - m_2)!(\ell_3 + m_3)!(\ell_3 - m_3)!} \\ & \times \sum_q \frac{(-1)^q}{q!(\ell_1 + \ell_2 - \ell_3 - q)!(\ell_1 - m_1 - q)!(\ell_2 + m_2 - q)!(\ell_1 - \ell_2 + \ell_3 + q)!(\ell_3 - \ell_1 - m_2 + q)!} \end{aligned}$$

où la somme est effectuée sur les indices dont les arguments à l'intérieur des factorielles sont non-nuls, et  $\Delta[\ell_1 \ell_2 \ell_3]$  désigne le coefficient triangulaire défini par

$$\Delta[\ell_1 \ell_2 \ell_3] = \sqrt{\frac{(\ell_1 + \ell_2 - \ell_3)!(\ell_1 - \ell_2 + \ell_3)!(-\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)!}{(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)!}}.$$

### 6.3.3 Calcul des coefficients de translation

Dans cette section, nous démontrons l'identité (6.27) en s'appuyant sur la projection sur la sphère de centre  $\mathbf{c}_\ell$  de rayon  $r_\ell$  du mode  $\mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k)$  sur les vecteurs de base

$(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell)Y_{\nu,\mu}^\ell$ . Soit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$  avec  $|\mathbf{x}'| < x_0$  de sorte que (6.25) ait lieu. Les coefficients de translation  $S_{\nu\mu}^{nm,h}$  sont donnés par

$$S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{x}_0) = \frac{i\kappa}{\nu(\nu+1)r_\ell^2 j_\nu(\kappa r_\ell)} \int_{|\mathbf{x}'|=r_\ell} \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}' \overline{Y_{\nu,\mu}} ds'. \quad (6.31)$$

La démonstration est ensuite basée sur la définition (6.14) du mode  $S_{n,m}^e$  à partir du potentiel de Debye  $S_{n,m}$  et sur le lemme de translation scalaire pour  $|\mathbf{x}'| < |\mathbf{x}_0|$ ,

$$S_{n,m}(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu\mu}^{nm}(\mathbf{x}_0) R_{\nu,\mu}(\mathbf{x}'),$$

où le mode  $R_{\nu,\mu}$  est défini par (6.8) et les coefficients de translation scalaires  $S_{\nu\mu}^{nm}(\mathbf{x}_0)$  sont donnés par (6.28). Ce lemme est démontré dans Friedman et Russek (1954) ou Stein (1961) et énoncé dans Martin (2006) avec une convention proche de la nôtre. Ainsi, nous avons

$$\mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x}) = \nabla \times (S_{n,m} \mathbf{x}) = \nabla S_{n,m} \times \mathbf{x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu\mu}^{nm}(\mathbf{x}_0) \nabla R_{\nu,\mu}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'),$$

avec

$$\nabla R_{\nu,\mu}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}') = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [j_\nu(\kappa r)] Y_{\nu,\mu} \mathbf{x}' \times \mathbf{x}_0 + j_\nu(\kappa r) \mathbf{rot}_S Y_{\nu,\mu} + \frac{j_\nu(\kappa r)}{r} \nabla_S Y_{\nu,\mu} \times \mathbf{x}_0.$$

La projection de  $\mathbf{S}_{n,m}^h$  sur le mode  $\mathbf{x}' Y_{\nu,\mu}$  nous donne

$$\int_{|\mathbf{x}'|=r_\ell} \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x}) \cdot i\kappa \mathbf{x}' \overline{Y_{\nu,\mu}} ds' = i\kappa r_\ell^2 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=-\nu_2}^{\nu_2} S_{\nu_2\mu_2}^{nm}(\mathbf{x}_0) j_{\nu_2}(\kappa r_\ell) q_{\nu\mu}^{\nu_2\mu_2}(\mathbf{x}_0), \quad (6.32)$$

où les coefficients  $q_{\nu\mu}^{\nu_2\mu_2}(\mathbf{x}_0)$  sont donnés par (6.27). D'après les propriétés du produit mixte, en particulier  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ , nous obtenons

$$q_{\nu\mu}^{\nu_2\mu_2}(\mathbf{x}_0) = \int_S (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{e}_r) \cdot \nabla_S Y_{\nu_2,\mu_2} \overline{Y_{\nu,\mu}} ds \quad (6.33)$$

Les équations (6.31) et (6.32) impliquent

$$S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{x}_0) = \frac{i\kappa}{\nu(\nu+1)} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=-\nu_2}^{\nu_2} S_{\nu_2\mu_2}^{nm}(\mathbf{x}_0) \frac{j_{\nu_2}(\kappa r_\ell)}{j_\nu(\kappa r_\ell)} q_{\nu\mu}^{\nu_2\mu_2}(\mathbf{x}_0).$$

Ainsi, les coefficients  $S_{nm}^{\nu\mu,h}$  sont donnés par (6.27) si et seulement la Proposition 6.7 est vérifiée.

*Démonstration de la Proposition 6.7.* Les coefficients  $q_{\nu\mu}^{\nu_2\mu_2}(\mathbf{x}_0)$  étant linéaires par rapport à  $\mathbf{x}_0$ , nous décomposons l'élément  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans la base associée aux harmoniques sphériques exprimée à travers les éléments de la base cartésienne,

$$\mathbf{x}_0 = \frac{x_0 - iy_0}{2}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) + \frac{x_0 + iy_0}{2}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) + z_0\mathbf{e}_z. \quad (6.34)$$

Ces éléments de base sont exprimés dans la base des harmoniques sphériques,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}} [Y_{1,1}\mathbf{e}_r + \nabla_S Y_{1,1}], & \mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}} [Y_{1,-1}\mathbf{e}_r + \nabla_S Y_{1,-1}], \\ \mathbf{e}_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} [Y_{1,0}\mathbf{e}_r + \nabla_S Y_{1,0}]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Ainsi, en utilisant (6.33), (6.34) et (6.35), nous obtenons

$$\begin{aligned} q_{\nu\mu}^{\nu_2\mu_2}(\mathbf{x}_0) &= \frac{x_0 - iy_0}{2} \int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2,\mu_2}) \overline{Y_{\nu,\mu}} \, ds \\ &+ \frac{x_0 + iy_0}{2} \int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,-1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2,\mu_2}) \overline{Y_{\nu,\mu}} \, ds + z_0 \int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,0} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2,\mu_2}) \overline{Y_{\nu,\mu}} \, ds. \end{aligned}$$

La troisième intégrale est triviale car le produit scalaire entre les deux harmoniques sphériques vectorielles filtre les dérivées partielles en  $\theta$ . En prenant en compte la relation  $\partial_\varphi Y_{\nu_2,\mu_2} = i\mu_2 Y_{\nu_2,\mu_2}$  et l'orthogonalité des harmoniques sphériques, nous obtenons

$$\int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,0} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2,\mu_2}) \overline{Y_{\nu,\mu}} \, ds = \int_S (\partial_\varphi Y_{\nu_2,\mu_2}) \overline{Y_{\nu,\mu}} \, ds = i\mu_2 \int_S Y_{\nu_2,\mu_2} \overline{Y_{\nu,\mu}} \, ds = i\mu_2 \delta_{\nu_2}^\nu \delta_{\mu_2}^\mu.$$

Les deux premières intégrales nécessitent un traitement différent selon si  $\mu_2 > 0$ ,  $\mu_2 = 0$  ou  $\mu_2 < 0$ . En particulier, les formules de récurrence suivantes ont lieu

$$\begin{cases} \mathbf{rot}_S Y_{1,1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2,\mu_2} = -i \frac{C_{\nu_2}^{\mu_2}}{C_{\nu_2}^{\mu_2+1}} Y_{\nu_2,\mu_2+1} & \text{si } \mu_2 \geq 0, \\ \mathbf{rot}_S Y_{1,-1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2,\mu_2} = i \frac{C_{\nu_2}^{-\mu_2}}{C_{\nu_2}^{-\mu_2+1}} Y_{\nu_2,\mu_2-1} & \text{si } \mu_2 \leq 0, \end{cases} \quad (6.36)$$

où  $c_n^{|m|}$  est défini par (6.21). Ainsi, nous obtenons

$$\begin{cases} \int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2, \mu_2}) \overline{Y_{\nu, \mu}} \, dS = -i \frac{c_{\nu_2}^{\mu_2}}{c_{\nu_2}^{\mu_2+1}} \delta_{\nu_2}^{\nu} \delta_{\mu_2+1}^{\mu} & \text{si } \mu_2 \geq 0, \\ \int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,-1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2, \mu_2}) \overline{Y_{\nu, \mu}} \, dS = i \frac{c_{\nu_2}^{-\mu_2}}{c_{\nu_2}^{-\mu_2+1}} \delta_{\nu_2}^{\nu} \delta_{\mu_2-1}^{\mu} & \text{si } \mu_2 \leq 0. \end{cases}$$

Les formules de récurrence (6.36) ne permettent *a priori* pas de calculer la première intégrale lorsque  $\mu_2 < 0$  et la seconde intégrale lorsque  $\mu_2 > 0$ . Pour y remédier, il suffit d'appliquer au préalable la formule de Stokes sur la surface  $\mathcal{S}$ , qui s'écrit

$$\int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,m} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2, \mu_2}) \overline{Y_{\nu, \mu}} \, dS = - \int_S (\nabla_S \overline{Y_{\nu, \mu}} \cdot \mathbf{rot}_S Y_{1,m}) Y_{\nu_2, \mu_2} \, dS,$$

puis d'utiliser les formules de récurrence pour  $-\mu \geq 0$  lorsque  $m = 1$  et pour  $-\mu \leq 0$  lorsque  $m = -1$ . Nous obtenons

$$\begin{cases} \int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2, \mu_2}) \overline{Y_{\nu, \mu}} \, dS = i \frac{c_{\nu}^{-\mu}}{c_{\nu}^{-\mu+1}} \delta_{\nu_2}^{\nu} \delta_{\mu_2}^{\mu-1} & \text{si } \mu \leq 0, \\ \int_S (\mathbf{rot}_S Y_{1,-1} \cdot \nabla_S Y_{\nu_2, \mu_2}) \overline{Y_{\nu, \mu}} \, dS = -i \frac{c_{\nu}^{\mu}}{c_{\nu}^{\mu+1}} \delta_{\nu_2}^{\nu} \delta_{\mu_2}^{\mu+1} & \text{si } \mu \geq 0. \end{cases}$$

□

### 6.3.4 Comparaison avec la littérature

Le lemme de translation à deux centres est un résultat bien ancré dans la théorie de la diffraction. Nous avons développé des expressions des coefficients de translation qui se rapprochent de celles de Stein (1961). Nous avons utilisé un formalisme plus contemporain que nous pouvons retrouver dans les livres de Colton et Kress (1998), Nédélec (2001) ou encore Monk (2003). Le premier coefficient de translation  $S_{nm}^{\nu\mu, e}$  diffère seulement de par la normalisation utilisée. En ce qui concerne le second coefficient de translation  $S_{nm}^{\nu\mu, h}$ , nous avons démontré, dans la Section 6.3.3, une expression alternative à l'expression de Cruzan (1962) donnée par

$$S_{nm}^{\nu\mu, h} = (-1)^{\mu-1} \gamma_n^{\nu} \sum_{p=|\nu-n|}^{\nu+n} \left\{ (-i)^{p+1} \sqrt{p^2 - (n-\nu)^2} \sqrt{(n+\nu+1)^2 - p^2} \right. \\ \left. \sqrt{2p+1} \begin{pmatrix} \nu & n & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu & n & p \\ \mu & -m & -\mu+m \end{pmatrix} S_{p, \mu-m} \right\},$$

que nous avons ré-exprimée avec notre formalisme, où  $S_{n,m}$  désigne la fonction d'onde sortante scalaire définie par (6.9) et le coefficient  $\gamma_n^\nu$  désigne un coefficient de normalisation donné par

$$\gamma_n^\nu = \sqrt{\pi} i^{n-\nu} \frac{\sqrt{(2n+1)(2\nu+1)}}{n(n+1)}.$$

Cette dernière expression comporte une anomalie comme l'a remarqué Xu (1996), qui peut se vérifier numériquement. En effet, le symbole de Wigner  $3j$  admet la propriété de symétrie suivante

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix},$$

donc, pour  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$  et lorsque  $j_1 + j_2 + j_3$  est impair, nous avons

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

En particulier, si  $p = n + \nu - 2q$  pour  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $p \geq |n - \nu|$ , alors  $n + \nu + p - 1$  est impair et nous avons

$$\begin{pmatrix} n & \nu & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

## 6.4 Conclusion

La méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple permet de prendre en compte le phénomène de diffraction multiple par de multiples sphères. Les outils déployés, comme le lemme d'addition à deux centres, sont des notions bien établies de la théorie de la diffraction en électromagnétisme. L'extension de cette méthode à des obstacles de forme arbitraire passe par la mise en place d'une méthode d'équations intégrales de frontière et par la théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une surface de forme arbitraire comme cela est présenté dans Ganesh et Hawkins (2009) pour des obstacles dont la taille caractéristique est comparable ou grande par rapport à la longueur d'onde. Dans le Chapitre 7, nous mettons en place le développement de la méthode spectrale par le biais des équations intégrales de frontière, nous l'explicitons dans le cas de multiples sphères afin de montrer l'équivalence avec la méthode de Xu (1995).





# CHAPITRE 7

## MÉTHODE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES POUR LA DIFFRACTION MULTIPLE EN ÉLECTROMAGNÉTISME

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Représentation intégrale de Stratton-Chu</b>	<b>184</b>
7.1.1	Rappel des notations	184
7.1.2	Opérateurs intégraux volumiques	185
7.1.3	Représentation intégrale	186
7.1.4	Décomposition modale des potentiels électromagnétiques	187
<b>7.2</b>	<b>Équations intégrales de frontière</b>	<b>189</b>
7.2.1	Prolongement de la solution	189
7.2.2	Opérateurs intégraux de frontière	191
7.2.3	Formulation faible de l'équation intégrale	192
7.2.4	Discrétisation de l'équation intégrale	194
<b>7.3</b>	<b>Formulation dans le cas sphérique</b>	<b>195</b>
7.3.1	Discrétisation	195
7.3.2	Normalisation	199
7.3.3	Systèmes linéaires	201
<b>7.4</b>	<b>Justification de la méthode</b>	<b>205</b>
7.4.1	Existence et unicité des problèmes continus	206
7.4.2	Stabilité et convergence	209
7.4.3	Cas des petits obstacles	210
7.4.4	Équivalence avec la méthode de Mie généralisée	211
<b>7.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>211</b>

---

Dans le Chapitre 6, nous avons présenté la méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple qui est l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par de multiples sphères, générées par une onde plane. Nous avons présenté le formalisme modal utilisé par Xu (1995).

Ce chapitre relate la justification de la méthode par la mise en place d'une méthode d'équations intégrales pour la diffraction multiple en électromagnétisme, où la solution du problème est discrétisée dans une base des vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami défini sur la surface d'intérêt. Les algorithmes spectraux pour la diffraction multiple ont déjà donné lieu à de nombreux travaux comme Ganesh et Hawkins (2008), Ganesh et Hawkins (2009) ou Ganesh *et al.* (2012) en électromagnétisme et Barucq *et al.* (2018a) ou Thierry (2011) en acoustique. Nous présentons cette méthode spectrale appliquée au problème de diffraction multiple, d'abord dans le cas d'obstacles de forme arbitraire, ensuite, nous l'explicitons analytiquement dans le cas sphérique.

## 7.1 Représentation intégrale de Stratton-Chu

Nous introduisons le problème de diffraction multiple des ondes électromagnétiques en régime harmonique par un ensemble fini de domaines tridimensionnels bornés, simplement connexes et deux à deux disjoints. Ensuite, nous rappelons la représentation intégrale des champs électromagnétiques de Stratton et Chu (1939) (Julius Adams Stratton, 1901-1994 et Lan Jen Chu, 1913-1973).

### 7.1.1 Rappel des notations

Nous considérons  $K$  domaines bornés, simplement connexes, deux à deux disjoints, notés  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_K \subset \mathbb{R}^3$  définis de manière autosimilaire comme dans la Section 6.1.1, de frontières respectives  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$  régulières. Le domaine de propagation des ondes est le domaine extérieur  $\Omega^e$  de frontière  $\Gamma$  défini par

$$\Omega^e = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^K \overline{\mathcal{B}_k} \quad \text{avec } \Gamma = \bigcup_{k=1}^K \Gamma_k.$$

Nous étudions le problème de Maxwell (6.1) présenté dans la Section 6.1.2. Il consiste, étant donné un champ électrique incident  $\mathbf{E}^i \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  à rechercher les champs

électromagnétiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \Omega^e)$  vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H} = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\kappa \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i & \text{sur } \Gamma_k, \quad (k = 1, \dots, K) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}) = 0 & \text{uniformément en } \hat{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (7.1)$$

### 7.1.2 Opérateurs intégraux volumiques

Les définitions et propriétés suivantes sont issues de [Le Louër \(2009\)](#), [Colton et Kress \(2013\)](#) et [Bendali \(2013\)](#).

Nous rappelons l'expression de la fonction de Green sortante  $G$  associée à l'équation de Helmholtz, définie pour  $r > 0$  par

$$G(r) = \frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r}.$$

Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , nous introduisons l'opérateur de simple couche  $\tilde{S}_{\Gamma_k}$  appliqué à une densité vectorielle  $\mathbf{p} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_k)$ , qui, en tant qu'opérateur appliqué à une densité scalaire, est généralement associé à l'acoustique,

$$\tilde{S}_{\Gamma_k} \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{p}(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_k. \quad (7.2)$$

L'opérateur  $\tilde{S}_{\Gamma_k}$  peut être prolongé en un opérateur linéaire et continu de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  dans  $\mathbf{H}(\nabla \times, \mathcal{B}_k) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_k})$  que nous noterons de la même manière.

**Remarque 7.1.** Pour  $\mathbf{p} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ , l'intégrale (7.2) n'est pas définie au sens classique de Lebesgue. En toute rigueur, nous devrions la noter avec le crochet de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entre les espaces  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ .

Nous définissons les opérateurs intégraux de potentiel électrique et de potentiel magnétique.

**Définition 7.1.** L'opérateur de potentiel électrique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  appliqué à une densité vectorielle  $\mathbf{j} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_k)$  tangente à  $\Gamma_k$  est défini par

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \nabla \times (\nabla \times \tilde{S}_{\Gamma_k} \mathbf{j})(\mathbf{x}).$$

L'opérateur de potentiel magnétique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m$  appliqué à une densité vectorielle  $\mathbf{m} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_k)$  tangente à  $\Gamma_k$  est défini par

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \nabla \times \tilde{S}_{\Gamma_k} \mathbf{m}(\mathbf{x}).$$

Les opérateurs  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  et  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m$  peuvent être étendus en des opérateurs linéaires et continus de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  dans  $\mathbf{H}(\nabla \times, \mathcal{B}_k) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_k})$  que nous noterons de la même manière.

**Remarque 7.2.** D'après [Bendali \(2013\)](#), l'opérateur de potentiel électrique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  est le potentiel de simple couche associé à l'opérateur de Maxwell,

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \kappa^2 \mathbb{G} * \mathbf{j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{j} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_k),$$

où  $\mathbb{G}$  désigne le tenseur de Maxwell défini par (1.24) et  $*$  le produit de convolution défini par (1.23). De plus, il est possible de réécrire  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}$  sous la forme

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\nabla \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \text{div}_{\Gamma_k} \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k + \kappa^2 \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k. \quad (7.3)$$

Le potentiel magnétique peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_k} \nabla_x G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \times \mathbf{m}_k(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k. \quad (7.4)$$

### 7.1.3 Représentation intégrale

Le principe général d'une équation intégrale est de rechercher les champs diffractés sous la forme d'une combinaison d'un potentiel de « simple couche » et d'un potentiel de « double couche » puis de fixer un prolongement de la solution dans les composantes connexes où nous ne recherchons pas la solution. En général, cela donne une relation portant sur la trace de la solution : c'est une équation intégrale de frontière. Pour l'acoustique, la représentation est donnée par le théorème de représentation de Green, voir [Colton et Kress \(2013\)](#). Dans la section précédente, nous avons introduit les potentiels électrique et magnétique, qui sont les analogues des potentiels de simple et double couche en acoustique. Ils interviennent en particulier dans la représentation intégrale de Stratton-Chu.

Nous prolongeons, à l'intérieur des obstacles  $\mathcal{B}_k$ , les champs électromagnétiques diffractés  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  vérifiant (7.1) de manière arbitraire – cela est possible grâce à la surjectivité de l'opérateur de trace tangentielle tournée de  $\mathbf{H}(\nabla \times, \mathcal{B}_k)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . Nous introduisons le saut des traces tangentielles des champs à travers chaque interface  $\Gamma_k$  défini par (2.4),

$$\mathbf{m}_k = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_k} \quad \text{et} \quad \mathbf{j}_k = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_{\Gamma_k} \quad (k = 1, \dots, K). \quad (7.5)$$

**Proposition 7.1.** *Les champs électromagnétiques admettent la représentation intégrale*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \left\{ \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) - \frac{1}{i\kappa} \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \left\{ \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{i\kappa} \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) \right\}, \quad (7.6)$$

pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ .

### 7.1.4 Décomposition modale des potentiels électromagnétiques

Les potentiels électriques  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  et les potentiels magnétiques  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m$  peuvent être décomposés dans la base des harmoniques sphériques vectorielles dans un sous-domaine de  $\Omega^e$ . Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , nous considérons  $R_k > 0$  tel que

$$\mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}(\mathbf{c}_k, R_k)$$

et nous notons  $\Omega_R^e$  le domaine extérieur inclus dans  $\Omega^e$  défini par

$$\Omega_R^e = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^K \overline{\mathcal{B}(\mathbf{c}_k, R_k)}.$$

La Figure 7.1 illustre la configuration géométrique considérée.

La Proposition 7.2 est une conséquence directe du lemme d'addition vectoriel. Le lemme d'addition vectoriel permet de décomposer la solution fondamentale  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{p}} = G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)_{\mathbf{p}}$ , pour  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ , de l'équation de Helmholtz vectorielle dans la base des modes entrants et sortants associés au problème de Maxwell. Pour  $\kappa \in \mathbb{R}^*$ , il est donné pour

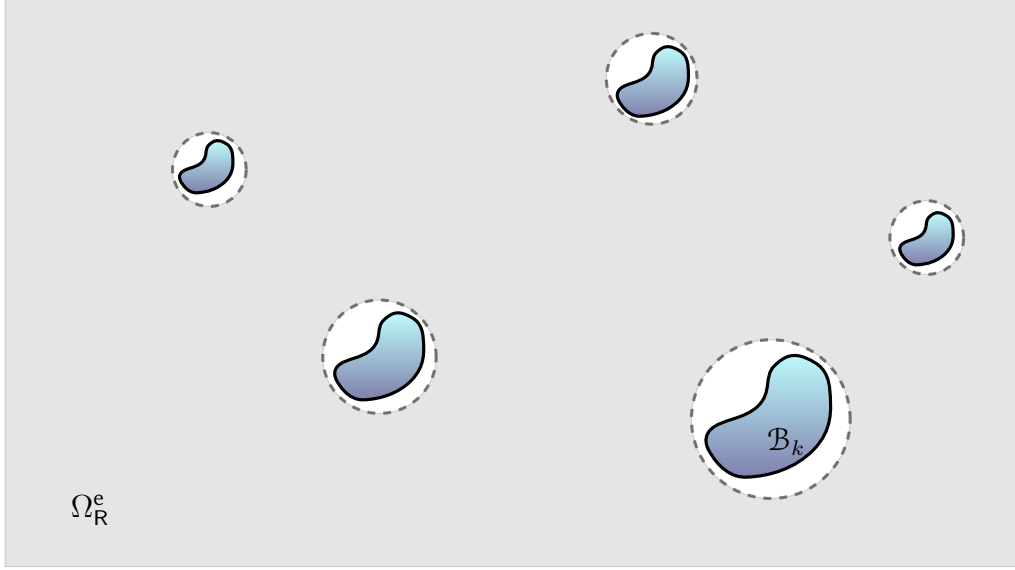


FIGURE 7.1 – Représentation du domaine extérieur  $\Omega_{\mathbb{R}}^e$ .

tout  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  dans  $\mathbb{R}^3$  tels que  $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| > 0$ , par

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} \left[ \left( \overline{\mathbf{R}_{n,m}^e(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x}) - \left( \overline{\mathbf{R}_{n,m}^h(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x}) \right] + \frac{i}{\kappa} \left( \nabla \overline{R_{n,m}(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p} \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\}. \quad (7.7)$$

Ce lemme technique est démontré dans [Colton et Kress \(1998\)](#) par exemple, avec des résultats de convergence affinés dans [Labat \(2016\)](#).

**Proposition 7.2.** Les potentiels électriques  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k$  admettent la décomposition modale suivante dans  $\Omega_{\mathbb{R}}^e$

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) = i\kappa^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n(n+1)} \left\{ \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) \int_{\Gamma_k} \overline{\mathbf{R}_{n,m}^e(\mathbf{y} - \mathbf{c}_k)} \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k(\mathbf{y}) - \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) \int_{\Gamma_k} \overline{\mathbf{R}_{n,m}^h(\mathbf{y} - \mathbf{c}_k)} \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k(\mathbf{y}) \right\}.$$

Les potentiels magnétiques  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k$  admettent la décomposition modale suivante dans  $\Omega_{\mathbb{R}}^e$

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) = -\kappa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n(n+1)} \left\{ \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) \int_{\Gamma_k} \overline{\mathbf{R}_{n,m}^h(\mathbf{y} - \mathbf{c}_k)} \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k(\mathbf{y}) \right. \\ \left. + \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) \int_{\Gamma_k} \overline{\mathbf{R}_{n,m}^e(\mathbf{y} - \mathbf{c}_k)} \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k(\mathbf{y}) \right\}.$$

## 7.2 Équations intégrales de frontière

L'obtention de l'équation intégrale s'appuie sur la représentation intégrale volumique des champs électromagnétiques de Stratton-Chu donnée par la proposition 7.1 puis sur le choix d'un prolongement de la solution à l'intérieur des obstacles  $\mathcal{B}_k$ .

### 7.2.1 Prolongement de la solution

Nous présentons trois prolongements possibles des champs électromagnétiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  vérifiant (7.1), qui donnent lieu à différentes équations intégrales.

Le premier consiste à prolonger les champs électromagnétiques par zéro à l'intérieur de l'obstacle :  $\mathbf{E} = 0$  et  $\mathbf{H} = 0$  dans  $\mathcal{B}_k$  pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Dans ce cas, les densités de courants surfaciques  $\mathbf{m}_k$  et  $\mathbf{j}_k$  dans (7.5) s'écrivent

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma_k} \quad \text{et} \quad \mathbf{j}_k = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_k} \quad (k = 1, \dots, K).$$

Pour une condition de conducteur parfait, la donnée  $\mathbf{m}_k$  n'est pas une inconnue du problème. En revanche, la densité  $\mathbf{j}_k$  est inconnue. La représentation intégrale de la solution est identique à (7.6) pour  $\mathbf{x} \in \Omega^e$ . Ce prolongement est assez naturel mais n'est pas vraiment pratique car il ne simplifie pas la formule de représentation des champs électromagnétiques. Nous préférons à celui-ci l'un des deux prolongements suivants.

Le deuxième consiste à prolonger les champs électromagnétiques en imposant la continuité de la trace tangentielle du champ électrique  $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_k} = 0$  à travers chacune des interfaces  $\Gamma_k$ . Cela est équivalent à fixer  $\mathbf{m}_k = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, K$  dans (7.5). Dans ce cas, la représentation intégrale (7.6) devient

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{j}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^e. \quad (7.8)$$



Ce prolongement simplifie la représentation intégrale en n'y faisant plus qu'intervenir un des deux potentiels.

Le troisième consiste à prolonger les champs électromagnétiques en imposant la continuité de la trace tangentielle du champ magnétique  $[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_{\Gamma_k} = 0$  à travers chacune des interfaces  $\Gamma_k$ . Cela est équivalent à fixer  $\mathbf{j}_k = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, K$  dans (7.5). Dans ce cas, la représentation intégrale (7.6) se simplifie

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{m}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^e. \quad (7.9)$$

Ces trois prolongements permettent de définir trois équations intégrales faisant intervenir trois inconnues différentes, donnant pourtant lieu aux mêmes champs électromagnétiques vérifiant (7.1). L'idée générale est, compte tenu de la condition de frontière qui est ici une condition de conducteur parfait, de noter que si l'on applique l'opérateur de trace tangentielle tournée à une des représentations du champ électrique alors l'inconnue de l'équation obtenue est la densité surfacique inconnue mise en jeu. Nous explicitons cette démarche pour les deux derniers prolongements présentés. En particulier, le prolongement par continuité de la trace tangentielle du champ électrique donne

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k \right)_{|\Gamma_\ell} & \text{sur } \Gamma_\ell \quad (\ell = 1, \dots, K), \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma_\ell \quad (\ell = 1, \dots, K). \end{cases} \quad (7.10)$$

Le prolongement par continuité de la trace tangentielle du champ magnétique implique

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \sum_{k=1}^K \mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k \right)_{|\Gamma_\ell} & \text{sur } \Gamma_\ell \quad (\ell = 1, \dots, K), \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma_\ell \quad (\ell = 1, \dots, K). \end{cases} \quad (7.11)$$

Les opérateurs volumiques  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  et  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m$  sont à valeurs dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \Omega^e)$ . La trace tangentielle tournée des potentiels  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k$  et  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k$  sur  $\Gamma_\ell$  a donc du sens dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\ell}, \Gamma_\ell)$ . Les propriétés de ces opérateurs intégraux de frontière sont rappelées dans la section suivante.

**Remarque 7.3.** *Ce sont les identités considérées pour une condition de conducteur parfait. La condition d'isolant parfait (2.3) s'étudie de manière analogue en considérant les représentations intégrales du champ magnétique et la condition de frontière portant sur la trace*

tangentielle du champ magnétique.

## 7.2.2 Opérateurs intégraux de frontière

Nous définissons les opérateurs intégraux de frontière à partir des opérateurs de potentiels volumiques puis nous rappelons quelques propriétés associées. Nous fixons deux entiers naturels  $k, \ell \in \{1, \dots, K\}$ .

**Définition 7.2.** L'opérateur  $P_{k,\ell}^e$  appliqué à une densité vectorielle  $\mathbf{j} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_k)$  tangente à  $\Gamma_k$  est défini par

$$P_{k,\ell}^e \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_k} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \{G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{j}(\mathbf{y})\})) \, d\Gamma_k(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\ell. \quad (7.12)$$

L'opérateur  $P_{k,\ell}^m$  appliqué à une densité vectorielle  $\mathbf{m} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_k)$  tangente à  $\Gamma_k$  est défini par

$$P_{k,\ell}^m \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_k} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \{G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{m}(\mathbf{y})\}) \, d\Gamma_k(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\ell. \quad (7.13)$$

Les opérateurs  $P_{k,\ell}^e$  et  $P_{k,\ell}^m$  peuvent être prolongés en des opérateurs linéaires et continus de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\ell}, \Gamma_\ell)$  que nous noterons de la même manière. D'après les relations (7.3) et (7.4), nous avons aussi les égalités suivantes

$$\begin{aligned} P_{k,\ell}^e \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= -\text{rot}_{\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \text{div}_{\Gamma_k} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k + \kappa^2 \mathbf{n} \times \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{j}(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k, \\ P_{k,\ell}^m \mathbf{m}(\mathbf{x}) &= \mathbf{n} \times \int_{\Gamma_k} \nabla_{\mathbf{x}} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \times \mathbf{m}(\mathbf{y}) \, d\Gamma_k. \end{aligned}$$

Les relations de saut, voir par exemple [Le Louër \(2009\)](#), fournissent des propriétés reliant les opérateurs de potentiels électrique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  et magnétique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m$  aux opérateurs intégraux de frontière  $P_{k,\ell}^e$  et  $P_{k,\ell}^m$ .

**Proposition 7.3.** La composante tangentielle de l'opérateur de potentiel électrique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}$  appliqué à une densité tangentielle  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  est continue à travers  $\Gamma_\ell$  pour tout  $\ell = 1, \dots, K$ . La composante normale de l'opérateur de potentiel électrique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}$  est continue à travers  $\Gamma_\ell$  pour tout  $\ell \neq k$  et discontinue à travers  $\Gamma_k$ . De plus, nous avons

$$\left[ \mathbf{n} \times (\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j})_{\Gamma_\ell} \right] = 0 \quad \text{et} \quad \left[ \mathbf{n} \cdot (\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j})_{\Gamma_\ell} \right] = \begin{cases} -\text{div}_{\Gamma_k} \mathbf{j} & \text{si } \ell = k, \\ 0 & \text{si } \ell \neq k, \end{cases}$$

La composante normale de l'opérateur de potentiel magnétique appliqué à une densité tangentielle  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  est continue à travers  $\Gamma_\ell$  pour tout  $\ell = 1, \dots, K$ . La composante tangentielle de l'opérateur de potentiel magnétique est continue à travers  $\Gamma_\ell$  pour tout  $\ell \neq k$  mais discontinue à travers  $\Gamma_k$ . De plus, nous avons

$$\left[ \mathbf{n} \times (\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m})_{\Gamma_\ell} \right] = \begin{cases} \mathbf{m} & \text{si } \ell = k, \\ 0 & \text{si } \ell \neq k, \end{cases} \quad \text{et} \quad \left[ \mathbf{n} \cdot (\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m})_{\Gamma_\ell} \right] = 0. \quad (7.14)$$

**Corollaire 10.** La trace tangentielle « tournée » extérieure du potentiel électrique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}$  appliqué à une densité tangentielle  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  est donnée par

$$\mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j} \right)_{|\Gamma_\ell} = P_{k,\ell}^e \mathbf{j} \quad (\ell = 1, \dots, K).$$

La trace tangentielle « tournée » extérieure du potentiel magnétique  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{j}$  appliqué à une densité tangentielle  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  est donnée par

$$\mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m} \right)_{|\Gamma_\ell} = \begin{cases} P_{k,\ell}^m \mathbf{m} & \text{si } \ell \neq k, \\ \frac{1}{2} \mathbf{m} + P_{k,k}^m \mathbf{m} & \text{si } \ell = k. \end{cases}$$

### 7.2.3 Formulation faible de l'équation intégrale

Lorsque la solution est suffisamment régulière, la formulation variationnelle est obtenue en fixant l'espace variationnel dans lequel la solution est recherchée, puis en multipliant l'équation par une fonction test qui se trouve dans le même espace que la solution et enfin, en intégrant l'équation dans le domaine d'intérêt. Cela n'est pas possible lorsque la solution est trop peu régulière. En effet, ici, notre espace de solutions pour les densités surfaciques  $\mathbf{j}_k$  ou  $\mathbf{m}_k$  est l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . Écrire l'intégrale du produit de deux densités de cet espace n'a pas plus de sens que d'écrire le crochet de dualité entre solution et fonction test.

Pour  $k = 1, \dots, K$ , nous considérons, en référence à la remarque 2.4, les espaces duaux de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  donnés par  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . Par ailleurs, nous notons  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  et  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{rot})$  les espaces variationnels donnés par

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\Gamma(\text{div}) &= \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_1}, \Gamma_1) \times \dots \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_K}, \Gamma_K), \\ \mathbb{H}_\Gamma(\text{rot}) &= \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_1}, \Gamma_1) \times \dots \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_K}, \Gamma_K). \end{aligned} \quad (7.15)$$

La formulation faible du problème associé à (7.10) s'écrit : chercher  $(\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_K) \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  tel que pour tout  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K) \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{rot})$ , nous avons

$$-\frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \left\langle \mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k \right)_{|\Gamma_\ell}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} = - \left\langle \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} \quad (\ell = 1, \dots, K). \quad (7.16)$$

Si de plus le champ inconnu  $\mathbf{j}_k$  appartient à  $L_t^2(\Gamma_k)$  avec  $\text{div}_{\Gamma_k} \mathbf{j}_k \in L^2(\Gamma_k)$  et la fonction test  $\mathbf{v}_\ell$  est dans  $L_t^2(\Gamma_\ell)$  avec  $\text{rot}_{\Gamma_\ell} \mathbf{v}_\ell \in L^2(\Gamma_\ell)$ , les crochets de dualité peuvent être remplacés par des signes intégrales et nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \text{div}_{\Gamma_k} \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \text{rot}_{\Gamma_\ell} \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x}) \, d\Gamma_k d\Gamma_\ell \\ + i\kappa \int_{\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x}) \, d\Gamma_k d\Gamma_\ell = - \int_{\Gamma_\ell} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}) \cdot \mathbf{v}_\ell \, d\Gamma_\ell. \end{aligned} \quad (7.17)$$

**Remarque 7.4.** Généralement dans la littérature, nous ne retrouvons pas exactement cette formulation-ci, mais plutôt : chercher  $(\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_K) \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  tel que pour tout  $(\mathbf{v}_1^t, \dots, \mathbf{v}_K^t) \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \text{div}_{\Gamma_k} \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \text{div}_{\Gamma_\ell} \mathbf{v}_\ell^t(\mathbf{x}) \, d\Gamma_k d\Gamma_\ell \\ + i\kappa \int_{\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_k} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{j}_k(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}_\ell^t(\mathbf{x}) \, d\Gamma_k d\Gamma_\ell = - \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}_\ell^t(\mathbf{y}) \, d\Gamma_\ell, \end{aligned} \quad (7.18)$$

voir par exemple [Bendali \(2013\)](#) ou [Ganesh et al. \(2012\)](#). Les formulations (7.17) et (7.18) sont équivalentes et leur obtention dépend de l'expression sur laquelle est appliquée l'opérateur trace  $\mathbf{n} \times \cdot$ . En effet, d'après l'égalité  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ , l'équation (7.16) est équivalente à

$$-\frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \left\langle \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k \right)_{|\Gamma_\ell}, \mathbf{v}_\ell^t \right\rangle_{\Gamma_\ell} = - \left\langle \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{v}_\ell^t \right\rangle_{\Gamma_\ell} \quad (\ell = 1, \dots, K). \quad (7.19)$$

De plus, si  $\mathbf{v}_\ell \in \mathbf{H}_\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_\ell}, \Gamma_\ell)$  alors  $\mathbf{v}_\ell^t = \mathbf{v}_\ell \times \mathbf{n} \in \mathbf{H}_\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\ell}, \Gamma_\ell)$ . Ainsi, en utilisant les expressions (7.3) et (7.10) puis en intégrant par parties, nous obtenons la formulation variationnelle (7.19).

La formulation faible du problème associé à (7.11) s'écrit : chercher  $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_K) \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  tel que pour tout  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K) \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{rot})$ , nous avons

$$\sum_{k=1}^K \left\langle \mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k \right)_{|\Gamma_\ell}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} = - \left\langle \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} \quad (\ell = 1, \dots, K). \quad (7.20)$$

Si de plus le champ  $\mathbf{m}_k$  appartient à  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_k)$  et la fonction test  $\mathbf{v}_\ell$  à  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_\ell)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{m}_\ell \cdot \mathbf{v}_\ell \, d\Gamma_\ell + \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_\ell} \int_{\Gamma_k} [\nabla_{\mathbf{x}} G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \times \mathbf{m}_k(\mathbf{y})] \cdot (\mathbf{v}_\ell(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \, d\Gamma_k \, d\Gamma_\ell \\ = - \int_{\Gamma_\ell} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}) \cdot \mathbf{v}_\ell \, d\Gamma_\ell. \end{aligned}$$

## 7.2.4 Discrétisation de l'équation intégrale

Les solutions des équations intégrales (7.16) et (7.20) sont recherchées sous une forme particulière qui permet d'obtenir une version discrète des problèmes. D'après [de La Bourdonnaye \(1993\)](#) et comme cela est rappelé dans l'équation (6.2), si la surface  $\Gamma_k$  est difféomorphe à la sphère unité, l'espace des champs tangents à cette surface peut être décomposé dans la base des vecteurs propres associés à l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel défini sur cette surface. C'est aussi l'idée développée dans [Ganesh et Hawkins \(2008\)](#) et [Ganesh et Hawkins \(2009\)](#).

Nous supposons que  $\Gamma_k$  est difféomorphe à  $\mathcal{S}$  pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Nous considérons  $\Upsilon : \mathcal{S} \rightarrow \hat{\Gamma}$  le difféomorphisme transformant la sphère unité  $\mathcal{S}$  en la frontière  $\hat{\Gamma}$  du domaine de référence, tel que

$$\Gamma_k = \mathbf{c}_k + r_k \Upsilon(\mathcal{S}).$$

La base hilbertienne de  $L^2(\hat{\Gamma})$ , notée  $(\mathcal{Y}_{n,m})$  peut être exprimée sous la forme

$$\mathcal{Y}_{n,m}(\mathbf{x}) = \Upsilon(Y_{n,m}(\hat{x})),$$

où les harmoniques sphériques  $Y_{n,m}$  sont définies par (6.3). Ainsi, les champs tangents de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  peuvent être décomposés sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \mathbf{u}_{n,m}^{\parallel} \nabla_{\hat{\Gamma}} \mathcal{Y}_{n,m}^k(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{n,m}^{\times} \mathbf{rot}_{\hat{\Gamma}} \mathcal{Y}_{n,m}^k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_k, \quad (7.21)$$

où les fonctions harmoniques  $\mathcal{Y}_{n,m}^k$  sont les fonctions  $\mathcal{Y}_{n,m}$  translatées autour du centre  $\mathbf{c}_k$ , comme cela est introduit dans la Remarque 6.2 dans le cas sphérique.

Les espaces d'approximation de la solution et des fonctions tests sont basés sur la décomposition des champs tangents (7.21) tronquée à l'ordre  $N$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_N(\text{div}) &= \left\{ \mathbf{J} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div}), \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \mathbf{j}_{n,m}^{k,\parallel} \nabla_{\hat{\Gamma}} \mathcal{Y}_{n,m}^k(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_{n,m}^{k,\times} \mathbf{rot}_{\hat{\Gamma}} \mathcal{Y}_{n,m}^k(\mathbf{x}) \right\}, \\ \mathcal{V}_N(\text{rot}) &= \left\{ \mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{rot}), \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \mathbf{v}_{n,m}^{\ell,\parallel} \nabla_{\hat{\Gamma}} \mathcal{Y}_{n,m}^\ell(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{n,m}^{\ell,\times} \mathbf{rot}_{\hat{\Gamma}} \mathcal{Y}_{n,m}^\ell(\mathbf{x}) \right\}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

où  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  et  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{rot})$  sont définis par (7.15). Les nouvelles inconnues dans la formulation faible (7.16) seront les coefficients spectraux  $\mathbf{j}_{n,m}^{k,\parallel}$ ,  $\mathbf{j}_{n,m}^{k,\times}$  associés à la densité vectorielle  $\mathbf{J} = (\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_K) \in \mathcal{V}_N(\text{div})$ . Les inconnues dans la formulation faible (7.20) seront les coefficients spectraux  $\mathbf{m}_{n,m}^{k,\parallel}$ ,  $\mathbf{m}_{n,m}^{k,\times}$  associés à la densité vectorielle  $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_K) \in \mathcal{V}_N(\text{div})$ .

## 7.3 Formulation dans le cas sphérique

Nous considérons le problème de diffraction multiple des ondes électromagnétiques par  $K$  sphères. Les domaines bornés  $\mathcal{B}_k$  sont les boules ouvertes de centre  $\mathbf{c}_k$  et de rayon  $r_k$  pour tout  $k = 1, \dots, K$ . La formulation discrète peut être explicitée de manière analytique en considérant comme base des champs tangents la base des harmoniques sphériques vectorielles décentrées.

### 7.3.1 Discrétisation

Nous considérons les espaces d'approximation (7.22) pour la solution et pour les fonctions tests, basés sur la décomposition des champs de vecteurs tangents dans la base des harmoniques sphériques vectorielles tronquée à l'ordre  $N$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_N(\text{div}) &= \left\{ \mathbf{J} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div}), \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \mathbf{j}_{n,m}^{k,\parallel} \nabla_{\mathcal{S}} Y_{n,m}^k(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{j}_{n,m}^{k,\times} \mathbf{rot}_{\mathcal{S}} Y_{n,m}^k(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \\ \mathcal{V}_N(\text{rot}) &= \left\{ \mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{rot}), \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \mathbf{v}_{n,m}^{\ell,\parallel} \nabla_{\mathcal{S}} Y_{n,m}^\ell(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}_{n,m}^{\ell,\times} \mathbf{rot}_{\mathcal{S}} Y_{n,m}^\ell(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

où  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  et  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{rot})$  sont définis par (7.15). Les nouvelles inconnues dans la formulation faible (7.16) seront les coefficients spectraux  $\mathbf{j}_{n,m}^{k,\parallel}$ ,  $\mathbf{j}_{n,m}^{k,\times}$  associés à la den-

sité vectorielle  $\mathbf{J} = (\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_K) \in \mathcal{V}_N(\text{div})$ . Les inconnues dans la formulation faible (7.20) seront les coefficients spectraux  $m_{n,m}^{k,\parallel}, m_{n,m}^{k,\times}$  associés à la densité vectorielle  $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_K) \in \mathcal{V}_N(\text{div})$ .

Les espaces d'approximation (7.23) permettent de préciser les décompositions modales données dans la Proposition 7.2.

**Proposition 7.4.** *Soit  $\mathbf{J} \in \mathcal{V}_N(\text{div})$ . Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , les potentiels électriques  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k$  admettent la décomposition modale suivante dans  $\Omega_{\mathbb{R}}^e = \Omega^e$ ,*

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) = i\kappa^3 r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n j_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) - j_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k). \quad (7.24)$$

Soit  $\mathbf{M} \in \mathcal{V}_N(\text{div})$ . Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , les potentiels magnétiques  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k$  admettent la décomposition modale suivante dans  $\Omega_{\mathbb{R}}^e = \Omega^e$ ,

$$\tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) = -\kappa^2 r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n m_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + m_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k). \quad (7.25)$$

Nous cherchons à passer à la limite dans (7.24) et (7.25) lorsque  $\mathbf{x}$  tend vers  $\Gamma_\ell$ , pour tout  $\ell = 1, \dots, K$ , puis à en prendre la trace tangentielle tournée sur  $\Gamma_\ell$ , comme cela est présent dans (7.16) et (7.20). Il s'agira ensuite de multiplier par une fonction test  $v_\ell$  puis d'intégrer sur  $\Gamma_\ell$ . Nous différencions les cas  $k = \ell$  et  $k \neq \ell$ . Le passage à la limite dans le cas  $k = \ell$  est trivial, la série étant tronquée à l'ordre  $N$ . Nous avons pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_k$ ,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i\kappa} \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{c}_k} \times \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) &= \kappa^2 r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n j_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) \tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k) \mathbf{rot}_S Y_{n,m}^k(\hat{x}) \\ &\quad + j_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) h_n^{(1)}(\kappa r_k) \nabla_S Y_{n,m}^k(\hat{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{c}_k} \times \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) &= \kappa^2 r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n -m_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) h_n^{(1)}(\kappa r_k) \nabla_S Y_{n,m}^k(\hat{x}) \\ &\quad + m_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) \tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k) \mathbf{rot}_S Y_{n,m}^k(\hat{x}). \end{aligned}$$

Lorsque  $k \neq \ell$ , la difficulté réside dans le changement de référentiel entre le champ de vecteurs décentré par rapport à  $\mathbf{c}_k$  et l'application de l'opérateur de trace tangentielle défini par rapport à  $\mathbf{c}_\ell$ . Dans ce cas, nous avons recours à l'utilisation du lemme de

translation à deux centres présenté dans la Section 6.3.2 qui permet de transformer les modes singuliers de Maxwell centrés en  $\mathbf{c}_k$  en une série de modes réguliers de Maxwell centrés en  $\mathbf{c}_\ell$ . Soit  $\mathbf{x} \in \Omega^e$  tel que  $|\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell| < |\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell|$ . En injectant les expressions (6.25) dans les décompositions modales (7.24) et (7.25) puis en passant à la limite, nous obtenons pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_\ell$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) &= i\kappa^3 r_k^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \\ &\quad \left\{ - \left[ j_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) + j_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] \mathbf{R}_{\nu,\mu}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) \right. \\ &\quad \left. + \left[ j_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) - j_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] \mathbf{R}_{\nu,\mu}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) &= -\kappa^2 r_k^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \\ &\quad \left\{ \left[ m_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) - m_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] \mathbf{R}_{\nu,\mu}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) \right. \\ &\quad \left. + \left[ m_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) + m_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] \mathbf{R}_{\nu,\mu}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) \right\}. \end{aligned}$$

L'application de l'opérateur de trace tangentielle tournée relativement à  $\mathbf{c}_\ell$  nous donne

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i\kappa} \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell} \times \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) &= \kappa^2 r_k^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \\ &\quad \left\{ \left[ j_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) + j_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] j_\nu(\kappa r_\ell) \nabla_S Y_{\nu,\mu}^\ell(\hat{x}) \right. \\ &\quad \left. + \left[ j_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) - j_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] \tilde{j}_\nu(\kappa r_\ell) \mathbf{rot}_S Y_{\nu,\mu}^\ell(\hat{x}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell} \times \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) &= \kappa^2 r_k^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \\ &\quad \left\{ \left[ -m_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) + m_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] j_\nu(\kappa r_\ell) \nabla_S Y_{\nu,\mu}^\ell(\hat{x}) \right. \\ &\quad \left. + \left[ m_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) + m_{n,m}^{k,\times} j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \right] \tilde{j}_\nu(\kappa r_\ell) \mathbf{rot}_S Y_{\nu,\mu}^\ell(\hat{x}) \right\}. \end{aligned}$$



Soit  $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_N(\text{rot})$ . La forme bilinéaire associée à la formulation faible continue (7.16) s'écrit de manière discrète et approchée sous la forme

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \left\langle \mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k \right)_{|\Gamma_\ell}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} = \\
 & \kappa^2 r_\ell^4 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n n(n+1) \left\{ \tilde{j}_n(\kappa r_\ell) \tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_\ell) \mathbf{j}_{n,m}^{\ell, \parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \times} + j_n(\kappa r_\ell) h_n^{(1)}(\kappa r_\ell) \mathbf{j}_{n,m}^{\ell, \times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \parallel} \right\} \\
 & + \kappa^2 r_\ell^2 \sum_{k \neq \ell} r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^N \sum_{m=-n}^n \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \nu(\nu+1) \left\{ \tilde{j}_n(\kappa r_k) j_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{j}_{n,m}^{k, \parallel} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel} \right. \\
 & + j_n(\kappa r_k) j_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{j}_{n,m}^{k, \times} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel} + \tilde{j}_n(\kappa r_k) \tilde{j}_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{j}_{n,m}^{k, \parallel} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \times} \\
 & \left. - j_n(\kappa r_k) \tilde{j}_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{j}_{n,m}^{k, \times} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \times} \right\}. \quad (7.26)
 \end{aligned}$$

La forme bilinéaire associée à la formulation faible continue (7.20) s'écrit de manière discrète et approchée sous la forme

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^K \left\langle \mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k \right)_{|\Gamma_\ell}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} = \\
 & \kappa^2 r_\ell^4 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n n(n+1) \left\{ -\tilde{j}_n(\kappa r_\ell) h_n^{(1)}(\kappa r_\ell) \mathbf{m}_{n,m}^{\ell, \parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \parallel} + j_n(\kappa r_\ell) \tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_\ell) \mathbf{m}_{n,m}^{\ell, \times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \times} \right\} \\
 & + \kappa^2 r_\ell^2 \sum_{k \neq \ell} r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^N \sum_{m=-n}^n \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \nu(\nu+1) \left\{ -\tilde{j}_n(\kappa r_k) j_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k, \parallel} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel} \right. \\
 & + j_n(\kappa r_k) j_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k, \times} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel} + \tilde{j}_n(\kappa r_k) \tilde{j}_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k, \parallel} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \times} \\
 & \left. + j_n(\kappa r_k) \tilde{j}_\nu(\kappa r_\ell) S_{\nu\mu}^{nm, e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k, \times} \bar{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \times} \right\}. \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

Nous considérons la décomposition modale (6.11) du champ électrique exprimée à l'aide des modes réguliers  $\mathbf{R}_{n,m}^e$  et  $\mathbf{R}_{n,m}^h$  décentrés autour de chaque obstacle,

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \mathbf{e}_{n,m}^{\ell, \text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell) + \mathbf{h}_{n,m}^{\ell, \text{inc}} \mathbf{R}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\ell).$$

Les seconds membres dans (7.16) et (7.20) sont les projections du champ électrique incident sur la base des harmoniques sphériques vectorielles. Nous avons

$$-\langle \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{v}_\ell \rangle_{\Gamma_\ell} = r_\ell^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n n(n+1) \left\{ -j_n(\kappa r_\ell) \mathbf{e}_{n,m}^{\ell, \text{inc}} \widehat{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \parallel} + \widetilde{j}_n(\kappa r_\ell) \mathbf{h}_{n,m}^{\ell, \text{inc}} \widehat{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \times} \right\}. \quad (7.28)$$

**Remarque 7.5.** Les expressions discrètes (7.26), (7.27) et (7.28) que nous avons obtenues peuvent être simplifiées en ajoutant des facteurs normalisant dans les espaces d'approximation (7.23). Cela est présenté dans la section suivante.

### 7.3.2 Normalisation

Afin de simplifier les formulations discrètes (7.26) et (7.27) faisant intervenir ou bien l'opérateur de potentiel électrique ou bien l'opérateur de potentiel magnétique, nous normalisons l'espace des fonctions tests  $\mathcal{V}_N(\text{rot})$ . Cette normalisation nous est dictée par la forme linéaire discrète (7.28). Nous posons

$$\mathbf{v}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel} = -\frac{1}{\nu(\nu+1) r_\ell^2 j_\nu(\kappa r_\ell)} \widehat{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel}, \quad \mathbf{v}_{\nu,\mu}^{\ell, \times} = \frac{1}{\nu(\nu+1) r_\ell^2 \widetilde{j}_\nu(\kappa r_\ell)} \widehat{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \times},$$

de sorte que (7.28) soit équivalent à

$$-\langle \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{v}_\ell \rangle_{\Gamma_\ell} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \left\{ \mathbf{e}_{n,m}^{\ell, \text{inc}} \widehat{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \parallel} + \mathbf{h}_{n,m}^{\ell, \text{inc}} \widehat{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \times} \right\}.$$

La forme bilinéaire discrète (7.26) devient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \left\langle \mathbf{n} \times \left( \widetilde{P}_{\Gamma_k}^{\text{e}} \mathbf{j}_k \right)_{|\Gamma_\ell}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} = & \\ & \kappa^2 r_\ell^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \left\{ \widetilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_\ell) j_{n,m}^{\ell, \parallel} \widehat{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \times} - h_n^{(1)}(\kappa r_\ell) j_{n,m}^{\ell, \times} \widehat{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell, \parallel} \right\} \\ & + \kappa^2 \sum_{k \neq \ell} r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^N \sum_{m=-n}^n \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left\{ -\widetilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm, \text{h}}(\mathbf{d}_{k,\ell}) j_{n,m}^{k, \parallel} \widehat{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel} \right. \\ & - j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm, \text{e}}(\mathbf{d}_{k,\ell}) j_{n,m}^{k, \times} \widehat{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \parallel} + \widetilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm, \text{e}}(\mathbf{d}_{k,\ell}) j_{n,m}^{k, \parallel} \widehat{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \times} \\ & \left. - j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm, \text{h}}(\mathbf{d}_{k,\ell}) j_{n,m}^{k, \times} \widehat{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell, \times} \right\}. \quad (7.29) \end{aligned}$$

La forme bilinéaire discrète (7.27) devient

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^K \left\langle \mathbf{n} \times \left( \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k \right) \Big|_{\Gamma_\ell}, \mathbf{v}_\ell \right\rangle_{\Gamma_\ell} = & \\
 \kappa^2 r_\ell^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{\tilde{j}_n(\kappa r_\ell)}{j_n(\kappa r_\ell)} h_n^{(1)}(\kappa r_\ell) \mathbf{m}_{n,m}^{\ell,\parallel} \tilde{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} + \frac{j_n(\kappa r_\ell)}{\tilde{j}_n(\kappa r_\ell)} \tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_\ell) \mathbf{m}_{n,m}^{\ell,\times} \tilde{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} \right\} & \\
 + \kappa^2 \sum_{k \neq \ell} r_k^2 \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^N \sum_{m=-n}^n \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left\{ \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell,\parallel} \right. & \\
 - j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k,\times} \tilde{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell,\parallel} + \tilde{j}_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k,\parallel} \tilde{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell,\times} & \\
 \left. + j_n(\kappa r_k) S_{\nu\mu}^{nm,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \mathbf{m}_{n,m}^{k,\times} \tilde{\mathbf{v}}_{\nu,\mu}^{\ell,\times} \right\}. & \quad (7.30)
 \end{aligned}$$

Nous cherchons encore à simplifier les formes bilinéaires discrètes (7.29) et (7.30). Nous agissons sur l'espace des inconnues  $\mathcal{V}_N(\text{div})$ . Selon que nous utilisons la formulation faisant intervenir le potentiel électrique ou celle faisant intervenir le potentiel magnétique, la normalisation choisie diffère légèrement. Elles sont dictées par les représentations modales (7.24) et (7.25). Nous posons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_{n,m}^{k,\parallel} &= \frac{1}{r_k^2 \tilde{j}_n(\kappa r_k)} \hat{\mathbf{j}}_{n,m}^{k,\parallel}, & \mathbf{j}_{n,m}^{k,\times} &= -\frac{1}{r_k^2 j_n(\kappa r_k)} \hat{\mathbf{j}}_{n,m}^{k,\times}, \\
 \mathbf{m}_{n,m}^{k,\parallel} &= \frac{1}{r_k^2 \tilde{j}_n(\kappa r_k)} \hat{\mathbf{m}}_{n,m}^{k,\parallel}, & \mathbf{m}_{n,m}^{k,\times} &= \frac{1}{r_k^2 j_n(\kappa r_k)} \hat{\mathbf{m}}_{n,m}^{k,\times},
 \end{aligned} \quad (7.31)$$

de sorte que les représentations (7.24) et (7.25) soient équivalentes à

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{j}_k(\mathbf{x}) &= i\kappa^3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \hat{\mathbf{j}}_{n,m}^{k,\parallel} \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + \hat{\mathbf{j}}_{n,m}^{k,\times} \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k), \\
 \tilde{P}_{\Gamma_k}^m \mathbf{m}_k(\mathbf{x}) &= -\kappa^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \hat{\mathbf{m}}_{n,m}^{k,\parallel} \mathbf{S}_{n,m}^h(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k) + \hat{\mathbf{m}}_{n,m}^{k,\times} \mathbf{S}_{n,m}^e(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k).
 \end{aligned}$$

Ainsi, en injectant les normalisations (7.31) dans les équations (7.29) et (7.30), nous obtenons la proposition suivante.

**Proposition 7.5.** *Les formulations discrètes des équations intégrales (7.16) et (7.20) pour*

tout  $\ell = 1, \dots, K$ , sont données par

$$\begin{aligned} \kappa^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)}{\tilde{j}_n(\kappa r_k)} \hat{j}_{n,m}^{\ell,\parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} + \frac{h_n^{(1)}(\kappa r_k)}{j_n(\kappa r_k)} \hat{j}_{n,m}^{\ell,\times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} + \sum_{k \neq \ell} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \right. \\ \left. \left[ -S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{j}_{\nu,\mu}^{k,\parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} + S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{j}_{\nu,\mu}^{k,\times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} + S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{j}_{\nu,\mu}^{k,\parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} \right. \right. \\ \left. \left. + S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{j}_{\nu,\mu}^{k,\times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} \right] \right\} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \left\{ \mathbf{e}_{n,m}^{\ell,\text{inc}} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} + \mathbf{h}_{n,m}^{\ell,\text{inc}} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} \right\} \quad (7.32) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \kappa^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{h_n^{(1)}(\kappa r_k)}{j_n(\kappa r_k)} \hat{m}_{n,m}^{\ell,\parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} + \frac{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)}{\tilde{j}_n(\kappa r_k)} \hat{m}_{n,m}^{\ell,\times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} + \sum_{k \neq \ell} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \right. \\ \left. \left[ S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{m}_{\nu,\mu}^{k,\parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} - S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{m}_{\nu,\mu}^{k,\times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} + S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{m}_{\nu,\mu}^{k,\parallel} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} \right. \right. \\ \left. \left. + S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) \hat{m}_{\nu,\mu}^{k,\times} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} \right] \right\} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \left\{ \mathbf{e}_{n,m}^{\ell,\text{inc}} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} + \mathbf{h}_{n,m}^{\ell,\text{inc}} \bar{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} \right\}. \quad (7.33) \end{aligned}$$

**Remarque 7.6.** Cette normalisation permet de réduire le nombre d'opérations dans le calcul numérique du second membre et de la représentation des champs électromagnétiques. Cette étape est nécessaire pour une accélération algorithmique.

### 7.3.3 Systèmes linéaires

Les formulations discrètes (7.32) et (7.33) sont vérifiées pour tout  $\ell = 1, \dots, K$  et peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire où les inconnues sont les coefficients spectraux  $\hat{j}_{n,m}^{\ell,\parallel}$  et  $\hat{j}_{n,m}^{\ell,\times}$ , respectivement  $\hat{m}_{n,m}^{\ell,\parallel}$  et  $\hat{m}_{n,m}^{\ell,\times}$ , pour tous  $\ell = 1, \dots, K$ ,  $n = 1, \dots, N$

et  $m = -n, \dots, n$ . Nous posons

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j^{1,\parallel} \\ \vdots \\ j^{K,\parallel} \\ j^{1,\times} \\ \vdots \\ j^{K,\times} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m^{1,\parallel} \\ \vdots \\ m^{K,\parallel} \\ m^{1,\times} \\ \vdots \\ m^{K,\times} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^{1,\parallel} \\ \vdots \\ v^{K,\parallel} \\ v^{1,\times} \\ \vdots \\ v^{K,\times} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \mathbf{x}^{\ell,\star} = \begin{pmatrix} x_1^{\ell,\star} \\ \vdots \\ x_N^{\ell,\star} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_n^{\ell,\star} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_{n,-n}^{\ell,\star} \\ \vdots \\ \widehat{x}_{n,n}^{\ell,\star} \end{pmatrix},$$

(7.34)

pour  $\times = j, m$  ou  $v$  et  $\star = \parallel$  ou  $\times$ . De plus,  $x_n^{\ell,\star} \in \mathbb{C}^{2\ell+1}$ ,  $\mathbf{x}^{\ell,\star} \in \mathbb{C}^{N(N+2)}$  et  $\mathbf{j}, \mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2KN(N+2)}$ .

Nous écrivons les équations (7.32) et (7.33) sous la forme

$$\langle \mathbb{M}^e \mathbf{j}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathbb{M}^m \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle,$$

où  $\mathbb{M}^e$  est la matrice associée à l'opérateur de potentiel électrique  $\widetilde{P}^e$ ,  $\mathbb{M}^m$  est la matrice associée à l'opérateur de potentiel magnétique  $\widetilde{P}^m$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire hermitien et  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{2KN(N+2)}$  désigne le vecteur composé des coefficients spectraux associés aux champs incidents,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} e^{1,\text{inc}} \\ \vdots \\ e^{K,\text{inc}} \\ h^{1,\text{inc}} \\ \vdots \\ h^{K,\text{inc}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{x}^{\ell,\text{inc}} = \begin{pmatrix} x_1^{\ell,\text{inc}} \\ \vdots \\ x_N^{\ell,\text{inc}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_n^{\ell,\text{inc}} = \begin{pmatrix} x_{n,-n}^{\ell,\text{inc}} \\ \vdots \\ x_{n,n}^{\ell,\text{inc}} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} = \mathbf{e} \text{ ou } \mathbf{h}).$$

**Remarque 7.7.** Pour une onde plane électromagnétique incidente, les coefficients  $e_{n,m}^{k,\text{inc}}$  et  $h_{n,m}^{k,\text{inc}}$  sont donnés par (6.23).

Conformément aux quatre termes de différente nature composant les sommes issues de (7.32) et (7.33) donnés par les produits

$$\widehat{\chi}_{n,m}^{k,\parallel} \overline{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel}, \quad \widehat{\chi}_{n,m}^{k,\parallel} \overline{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times}, \quad \widehat{\chi}_{n,m}^{k,\times} \overline{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} \quad \text{et} \quad \widehat{\chi}_{n,m}^{k,\times} \overline{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times},$$

les matrices de masse  $\mathbb{M}^e$  et  $\mathbb{M}^m$  peuvent être divisées en quatre parties, elles-mêmes décomposées en  $K \times K$  blocs correspondant respectivement aux différentes interactions entre obstacles

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^{\parallel\parallel} & \mathbb{M}^{\parallel\times} \\ \mathbb{M}^{\times\parallel} & \mathbb{M}^{\times\times} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{M}^{**} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{11}^{**} & \mathbb{M}_{12}^{**} & \cdots & \mathbb{M}_{1K-1}^{**} & \mathbb{M}_{1K}^{**} \\ \mathbb{M}_{21}^{**} & \mathbb{M}_{22}^{**} & \cdots & \mathbb{M}_{2K-1}^{**} & \mathbb{M}_{2K}^{**} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{M}_{K-11}^{**} & \mathbb{M}_{K-12}^{**} & \cdots & \mathbb{M}_{K-1K-1}^{**} & \mathbb{M}_{K-1K}^{**} \\ \mathbb{M}_{K1}^{**} & \mathbb{M}_{K2}^{**} & \cdots & \mathbb{M}_{KK-1}^{**} & \mathbb{M}_{KK}^{**} \end{pmatrix}.$$

Chaque bloc  $\mathbb{M}_{\ell k}^{**}$  est de taille  $N(N+2) \times N(N+2)$  et peut être indicé par quatre entiers relatifs  $n, \nu = 1, \dots, N$ ,  $m = -n, \dots, n$  et  $\mu = -\nu, \dots, \nu$  comme cela est illustré dans la Figure 7.2. Soient  $i_{\text{loc}}$  et  $j_{\text{loc}}$  les indices correspondant aux numéros de ligne et de colonne des coefficients d'un bloc  $\mathbb{M}_{\ell k}^{**}$  tels que

$$i_{\text{loc}} = n(n+1) + m \quad \text{et} \quad j_{\text{loc}} = \nu(\nu+1) + \mu.$$

Au sein d'une partie  $\mathbb{M}^{**}$ , les numéros de ligne  $i$  et de colonne  $j$  associés à un coefficient peuvent être exprimées à l'aide des numéros des obstacles  $\ell$  et  $k$  et des numéros de ligne et de colonne locaux  $i_{\text{loc}}$  et  $j_{\text{loc}}$  au sein d'une interaction considérée,

$$i = (\ell - 1)K + i_{\text{loc}} \quad \text{et} \quad j = (k - 1)K + j_{\text{loc}}.$$

Finalement, les numéros de ligne  $i_{\text{glob}}$  et de colonne  $j_{\text{glob}}$  globaux dépendent de la partie dans laquelle nous nous plaçons. En particulier,

$$i_{\text{glob}} = \begin{cases} i & \text{dans } \mathbb{M}^{\parallel*}, \\ KN(N+2) + i & \text{dans } \mathbb{M}^{\times*}, \end{cases} \quad j_{\text{glob}} = \begin{cases} j & \text{dans } \mathbb{M}^{*\parallel}, \\ KN(N+2) + j & \text{dans } \mathbb{M}^{*\times}. \end{cases}$$

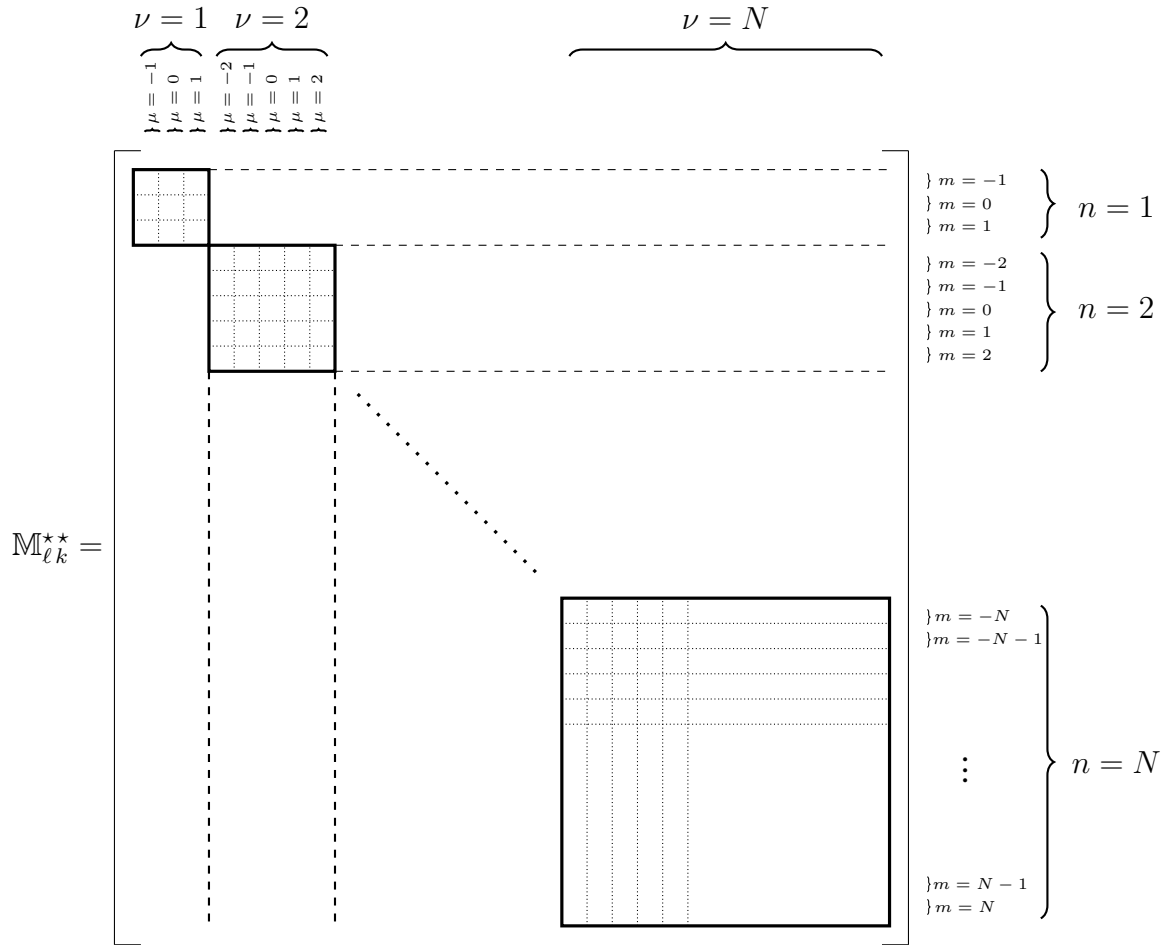


FIGURE 7.2 – Squelette associé au bloc  $\mathbb{M}_{\ell k}^{**}$  à l'intérieur des parties  $\mathbb{M}^{**}$

La matrice  $\mathbb{M}^e$  associée à la formulation électrique est calculée à partir de la formulation discrète (7.32). À  $k, \ell, n, \nu, m$  et  $\mu$  fixés, les coefficients à l'intérieur des différentes parties de  $\mathbb{M}^e$  sont donnés par

$$\begin{aligned}
 [(\mathbb{M}^e)_{\ell k}^{\parallel \parallel}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ -\kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
 [(\mathbb{M}^e)_{\ell k}^{\parallel \times}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \kappa^2 \frac{h_n^{(1)}(\kappa r_k)}{j_n(\kappa r_k)} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ \kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
 [(\mathbb{M}^e)_{\ell k}^{\times \parallel}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \kappa^2 \frac{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)}{\tilde{j}_n(\kappa r_k)} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ \kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
 [(\mathbb{M}^e)_{\ell k}^{\times \times}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ \kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

La matrice  $\mathbb{M}^m$  associée à la formulation magnétique est calculée à partir de la formulation discrète (7.33). À  $k, \ell, n, \nu, m$  et  $\mu$  fixés, les coefficients à l'intérieur des différentes parties de  $\mathbb{M}^m$  sont donnés par

$$\begin{aligned}
\left[ (\mathbb{M}^m)_{\ell k}^{\parallel \parallel} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ \kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
\left[ (\mathbb{M}^m)_{\ell k}^{\parallel \times} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \kappa^2 \frac{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)}{\tilde{j}_n(\kappa r_k)} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ -\kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
\left[ (\mathbb{M}^m)_{\ell k}^{\times \parallel} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \kappa^2 \frac{h_n^{(1)}(\kappa r_k)}{j_n(\kappa r_k)} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ \kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
\left[ (\mathbb{M}^m)_{\ell k}^{\times \times} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ \kappa^2 S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Les matrices  $\mathbb{M}^e$  et  $\mathbb{M}^m$  comportent des zéros dans les blocs diagonaux. Cela mène à des systèmes linéaires mal conditionnés. Pour y remédier, nous introduisons dans le Chapitre 8 un préconditionnement qui consiste à effectuer des transformations linéaires de part et d'autre des égalités dans les systèmes linéaires

$$\mathbb{M}^e \mathbf{j} = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathbb{M}^m \mathbf{m} = \mathbf{f}.$$

## 7.4 Justification de la méthode

Nous justifions théoriquement la méthode spectrale. Nous revenons dans un premier temps au problème continu donné par les formulations variationnelles (7.16) et (7.20). Nous démontrons que ces formulations admettent une solution unique en montrant que les opérateurs sont de Fredholm et sont inversibles sur la gamme des fréquences non-résonantes pour le problème du conducteur parfait (Dirichlet). Dans un deuxième temps, le lemme de Céa garantit que notre solution discrète définit une approximation de la solution du problème continu avec une précision contrôlée. Enfin, pour le cas particulier des petits obstacles sphériques, nous montrons que, sous certaines hypothèses, les fréquences de résonance ne sont jamais atteintes.



### 7.4.1 Existence et unicité des problèmes continus

Nous étudions les formulations électrique (7.16) et magnétique (7.20). Elles peuvent toutes deux s'écrire sous la forme : chercher  $\mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  vérifiant

$$\mathbf{P}^\diamond \mathbf{V} = \mathbf{F}, \quad (7.37)$$

pour  $\diamond = e$  ou  $h$ , où l'inconnue  $\mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  désigne le produit cartésien des densités tangentielles  $\mathbf{j}_k$  ou  $\mathbf{m}_k \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  telles que la représentation (7.8) ou (7.9) ait lieu. L'opérateur matriciel  $\mathbf{P}^\diamond : \mathbb{H}_\Gamma(\text{div}) \rightarrow \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  est défini par

$$\mathbf{P}^\diamond = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}^\diamond & \mathbf{P}_{12}^\diamond & \cdots & \mathbf{P}_{1K-1}^\diamond & \mathbf{P}_{1K}^\diamond \\ \mathbf{P}_{21}^\diamond & \mathbf{P}_{22}^\diamond & \cdots & \mathbf{P}_{2K-1}^\diamond & \mathbf{P}_{2K}^\diamond \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}_{K-11}^\diamond & \mathbf{P}_{K-12}^\diamond & \cdots & \mathbf{P}_{K-1K-1}^\diamond & \mathbf{P}_{K-1K}^\diamond \\ \mathbf{P}_{K1}^\diamond & \mathbf{P}_{K2}^\diamond & \cdots & \mathbf{P}_{KK-1}^\diamond & \mathbf{P}_{KK}^\diamond \end{pmatrix}.$$

Pour  $k = 1, \dots, K$ , les opérateurs diagonaux  $\mathbf{P}_{kk}^\diamond$  sont donnés par

$$\mathbf{P}_{kk}^\diamond = \begin{cases} P_{k,k}^e & \text{si } \diamond = e, \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} + P_{k,k}^m & \text{si } \diamond = m, \end{cases}$$

où les opérateurs intégraux de frontière  $P_{k,\ell}^e$  et  $P_{k,\ell}^m$  sont introduits dans la Définition 7.2, tandis que les opérateurs extra-diagonaux  $\mathbf{P}_{k\ell}^\diamond$  pour  $\ell \neq k$  sont donnés par

$$\mathbf{P}_{k\ell}^\diamond = \begin{cases} P_{k,\ell}^e & \text{si } \diamond = e, \\ P_{k,\ell}^m & \text{si } \diamond = m. \end{cases}$$

Enfin, le second membre  $\mathbf{F}$  contient les traces du champ incident,

$$\mathbf{F}_k = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}})|_{\Gamma_k}.$$

**Proposition 7.6.** *Pour  $\diamond = e$  ou  $h$ , l'opérateur  $\mathbf{P}^\diamond$  est de Fredholm.*

*Démonstration.* Pour  $\diamond = e$  ou  $h$ , nous montrons que l'opérateur  $\mathbf{P}^\diamond$  peut se décomposer en la somme d'un opérateur inversible  $\mathbf{B}^\diamond$  et d'un opérateur compact  $\mathbf{K}^\diamond$ ,

$$\mathbf{P}^\diamond = \mathbf{B}^\diamond (\mathbf{I} + \mathbf{K}^\diamond).$$

**Caractère de Fredholm pour  $P^e$ .** L'opérateur matriciel  $P^e$  se décompose sous la forme

$$P^e = B^e + C^e,$$

où l'opérateur matriciel  $B^e$  est donné par

$$B^e = \begin{pmatrix} P_{1,1}^{e,i} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_{2,2}^{e,i} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{K-1,K-1}^{e,i} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{K,K}^{e,i} \end{pmatrix},$$

avec  $P_{k,k}^{e,i}$  désignant l'opérateur intégral de frontière (7.12) en prenant comme fonction de Green  $G_i$  qui est la fonction de Green  $G$  avec  $\kappa = i$  donnée par

$$G_i(r) = \frac{\exp(-r)}{r}.$$

Pour  $k = 1, \dots, K$ , les opérateurs  $P_{k,k}^{e,i} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k) \longrightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  sont inversibles et leur opérateur inverse  $(P_{k,k}^{e,i})^{-1}$  est borné dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . Donc  $B^e$  est inversible et son opérateur inverse  $(B^e)^{-1}$  est borné dans  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$ . Les composantes de  $C^e$  sont données par

$$C_{k,\ell}^e = \begin{cases} P_{k,k}^e - P_{k,k}^{e,i} & \text{si } k = \ell, \\ P_{k,\ell}^e & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

Pour tout  $k, \ell = 1, \dots, K$ , l'opérateur  $P_{k,\ell}^e$  est borné et compact de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\ell}, \Gamma_\ell)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , l'opérateur  $P_{k,k}^e - P_{k,k}^{e,i}$  est borné et compact dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . Ainsi, l'opérateur matriciel  $C^e : \mathbb{H}_\Gamma(\text{div}) \longrightarrow \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  est borné et compact. D'où, l'opérateur  $K^e = (B^e)^{-1}C^e$  est compact dans  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$ . Donc  $P^e$  est de Fredholm.

**Caractère de Fredholm pour  $P^m$ .** L'opérateur matriciel  $P^m$  se décompose sous la forme

$$P^m = \frac{1}{2}(I + K^m),$$

où  $\mathbf{I}$  désigne l'opérateur matriciel identité et les composantes de  $\mathbf{K}^m$  sont données par

$$\mathbf{K}_{k,\ell}^m = 2 P_{k,\ell}^m,$$

où pour  $k, \ell = 1, \dots, K$ , l'opérateur  $P_{k,\ell}^m$  est défini par (7.13) et est borné et compact de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\ell}, \Gamma_\ell)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$ . Ainsi, l'opérateur  $\frac{1}{2}\mathbf{K}^m$  est compact dans  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$ , puis l'opérateur matriciel  $\mathbf{P}^m$  est de Fredholm.  $\square$

Le caractère de Fredholm (d'indice zéro) des opérateurs garantit leur inversibilité sous réserve de leur injectivité. Dans la Proposition suivante, nous établissons l'injectivité des opérateurs intégraux matriciels de frontière.

**Proposition 7.7.** *Si pour tout  $k = 1, \dots, K$ ,  $\kappa^2$  n'est pas une valeur propre associée à l'opérateur  $\nabla \times (\nabla \times)$  pour le problème intérieur posé dans  $\mathcal{B}_k$ , alors pour  $\diamond = e$  ou  $m$ , l'opérateur  $\mathbf{P}^\diamond$  est injectif.*

*Démonstration.* Nous considérons  $\mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  tel que pour  $\diamond = e$  ou  $h$ ,

$$\mathbf{P}^\diamond \mathbf{V} = 0.$$

Nous cherchons à montrer que  $\mathbf{V} = 0$ .

**Formulation électrique ( $\diamond = e$ ).** Soit  $\mathbf{E}$  le champ électrique représenté à l'aide des opérateurs de potentiel électrique dans  $\Omega^e$ ,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{i\kappa} \sum_{k=1}^K \tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K).$$

Nous montrons dans un premier temps que si  $\mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega^e$  alors  $\mathbf{V} = 0$  dans  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$ . Comme l'opérateur  $\tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  est linéaire et continu de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_k}, \Gamma_k)$  dans  $\mathbf{H}(\nabla \times, \mathcal{B}_k) \cup \mathbf{H}_{\text{loc}}(\nabla \times, \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_k})$ , le champ  $\mathbf{E}$  peut être étendu dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  et vérifie l'équation de Maxwell du second ordre

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \kappa^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma.$$

Si  $\mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega^e$  alors sa trace tangentielle « extérieure » notée  $\mathbf{n}_{\text{ext}} \times \mathbf{E}$ , est nulle sur  $\Gamma_k$  pour tout  $k = 1, \dots, K$ . De plus, puisque l'opérateur  $\mathbf{n} \times \tilde{P}_{\Gamma_k}^e$  est continu à travers  $\Gamma_k$  alors la trace tangentielle « intérieure » de  $\mathbf{E}$ , notée  $\mathbf{n}_{\text{int}} \times \mathbf{E}$ , est donnée par

$$\mathbf{n}_{\text{int}} \times \mathbf{E} = \mathbf{n}_{\text{ext}} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_k, \quad (k = 1, \dots, K).$$

Donc, dans  $\mathcal{B}_k$ , le champ  $\mathbf{E}$  vérifie le problème de Maxwell intérieur

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \kappa^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_k, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Gamma_k. \end{cases}$$

Or, si  $\kappa^2$  n'est pas une valeur propre associée à l'opérateur  $\nabla \times (\nabla \times)$  pour le problème intérieur posé dans  $\mathcal{B}_k$ , alors  $\mathbf{E} = 0$  dans  $\mathcal{B}_k$ , pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Cela implique également  $\mathbf{H} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E} = 0$  dans  $\mathcal{B}_k$  pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Puisque de plus  $\mathbf{H} = 0$  dans  $\Omega^e$  et  $\mathbf{H}$  admet la décomposition (7.8), nous avons d'après les relations de saut (7.14),

$$0 = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \sum_{k=1}^K [\mathbf{n} \times (\tilde{P}_{\Gamma_k}^e \mathbf{v}_k)_{\Gamma_\ell}] = \mathbf{v}_\ell \quad \text{sur } \Gamma_\ell,$$

pour tout  $\ell = 1, \dots, K$ . Donc  $\mathbf{V} = 0$ . Il reste à montrer que sous l'hypothèse portant sur  $\kappa^2$ ,  $\mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega^e$ . Comme  $\mathbf{V} \in \text{Ker } \mathbf{P}^e$ , nous avons

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E})|_{\Gamma_k} = (\mathbf{n}_{\text{int}} \times \mathbf{E})|_{\Gamma_k} = (\mathbf{n}_{\text{ext}} \times \mathbf{E})|_{\Gamma_k} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_k \quad (k = 1, \dots, K).$$

Donc  $\mathbf{E}$  vérifie le problème de Maxwell extérieur dans  $\Omega^e$  muni d'une condition de conducteur parfait homogène sur la frontière de chacun des obstacles et de la condition de Silver-Muller à l'infini. Donc  $\mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega^e$ .

**Formulation magnétique ( $\diamond = \mathbf{h}$ ).** La démonstration est similaire en inversant les rôles de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . □

D'après les Propositions 7.6 et 7.7, le problème (7.37) admet une unique solution lorsque  $\kappa^2$  n'est pas une valeur propre de l'opérateur  $\nabla \times (\nabla \times)$  pour les problèmes intérieurs posés dans  $\mathcal{B}_k$  pour  $k = 1, \dots, K$ . Pour plus de détails concernant le cas scalaire nous renvoyons aux travaux de Barucq *et al.* (2018a) et Thierry (2011).

## 7.4.2 Stabilité et convergence

La discrétisation du problème (7.37) est effectuée par le biais des espaces d'approximation  $((\mathcal{V}_N(\text{div}))_{N \in \mathbb{N}^*})$  définis par (7.22) qui est une suite de sous-espaces de  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$ , denses dans  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$ . Dans la Section précédente, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité sur le problème continu sous l'hypothèse que  $\kappa^2$  n'est pas une valeur propre de l'opérateur  $\nabla \times (\nabla \times)$  pour les problèmes intérieurs posés à l'intérieur des obstacles. Ainsi, en s'appuyant sur des résultats de densité, nous obtenons égale-

ment, sous cette même condition, le caractère bien posé du problème discret. De plus, le lemme de Céa, rappelé ci-dessous et énoncé dans [Sauter et Schwab \(2010\)](#), nous donne une erreur d'approximation.

**Théorème 4** (Lemme de Céa pour les problèmes coercifs perturbés). *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $(V_k)_k$  une suite de sous-espaces de dimension finie de  $H$ , dense dans  $H$ . Si*

- *la forme bilinéaire  $a$  est coercive :  $|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_H$  avec  $\alpha > 0$ ,*
- *l'opérateur linéaire  $T$  de  $H$  dans  $H'$  associée à une forme bilinéaire  $t$  est compact,*
- *le problème est injectif :  $a(u, v) + t(u, v) = 0$  pour tout  $v \in H$ , implique  $u = 0$ ,*

*alors il existe une constante  $k_0 > 0$  telle que pour tout  $k > k_0$ , le problème qui consiste, étant donné  $F \in H'$ , à rechercher  $u_k \in V_k$  telle que*

$$a(u_k, v_k) + t(u_k, v_k) = F(v_k) \quad \text{pour tout } v_k \in V_k,$$

*admet une unique solution  $u_k \in V_k$ . De plus,  $u_k$  converge vers  $u$  et l'estimation d'erreur suivante a lieu*

$$\|u - u_k\|_H \leq C \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_H.$$

### 7.4.3 Cas des petits obstacles

Dans la Section 7.4.1, nous avons montré que, si  $\kappa^2$  n'est pas une valeur propre associée à l'opérateur  $\nabla \times (\nabla \times \cdot)$  pour les problèmes intérieurs posés dans chacun des obstacles  $\mathcal{B}_k$  pour  $k = 1, \dots, K$ , alors les problèmes obtenus en considérant les formulations électrique ou magnétique admettent une unique solution. Dans le contexte des petits obstacles, en émettant une hypothèse portant sur la taille des obstacles, il faudrait démontrer que les fréquences de résonance ne sont jamais atteintes, comme dans le cas scalaire [Barucq et al. \(2018a\)](#).

**Conjecture 1.** *Si le nombre d'onde  $\kappa$  et le rayon caractéristique  $r_k$  relativement au centre  $c_k$  vérifient l'hypothèse suivante pour tout  $k = 1, \dots, K$ ,*

$$\kappa r_k < c_0,$$

*alors  $\kappa^2$  n'est pas une fréquence de résonance pour les problèmes intérieurs de Maxwell.*

**Remarque 7.8.** *La constante  $c_0$  reste à déterminer. Nous pensons qu'elle est reliée aux premiers zéros des fonctions de Bessel  $j_1$  et  $\tilde{j}_1$ .*

#### 7.4.4 Équivalence avec la méthode de Mie généralisée

La méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple présentée dans le Chapitre 6 est une méthode semi-analytique qui permet de prendre en compte la diffraction multiple d'une onde plane par de multiples sphères, développée initialement par Xu (1995). La méthode spectrale développée dans ce chapitre s'avère être équivalente à la méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple dans le cas sphérique. Nous résumons les étapes successives qui mènent aux systèmes linéaires, pour chaque méthode :

- la méthode spectrale s'appuie sur la représentation intégrale de Stratton-Chu des champs électromagnétiques à partir de laquelle nous mettons en place une équation intégrale pour la diffraction multiple ; dans le cas sphérique, l'espace d'approximation est l'espace issu de la théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel et des lemmes d'addition et de translation sont utilisés pour calculer analytiquement les intégrales surfaciques induites,
- la méthode de Mie généralisée à la diffraction multiple s'appuie sur les décompositions modales des champs électromagnétiques puis sur l'utilisation du lemme de translation vectoriel introduit dans la Proposition 6.6.

Or, les décompositions modales des champs électromagnétiques peuvent être démontrées entre autres, par la technique de séparation de variable, où est utilisée la base des harmoniques sphériques vectorielles, ou bien en utilisant la formule de représentation de Stratton-Chu et le lemme d'addition vectoriel donné par (7.7). Les deux méthodes mènent alors à des systèmes linéaires équivalents. Toutefois, nous avons choisi de normaliser les espaces d'approximation de la solution et des fonctions tests afin de simplifier à la fois la représentation discrète des champs électromagnétiques et le calcul du second membre. Dans le chapitre suivant, nous utilisons un préconditionneur de type bloc-diagonal (Jacobi) mais après avoir effectué les changements de variables adéquats.

## 7.5 Conclusion

La méthode spectrale permet de définir des modèles d'ordre élevé pour l'étude de la diffraction multiple des ondes électromagnétiques par de multiples obstacles. Dans le cas sphérique, cette méthode engendre des systèmes linéaires dont les coefficients peuvent être exprimés de manière analytique et dans ce cas, elle est équivalente à la méthode de Xu (1995).

L'avantage de cette méthode en comparaison avec les modèles asymptotiques présentés dans la Section 4.3.2 est l'ordre élevé. Cependant, les expressions obtenues à la fois pour la représentation des champs électromagnétiques et pour le système linéaire dans le cadre de la méthode spectrale sont beaucoup plus complexes, et par conséquent, vont demander beaucoup plus de temps de calcul, et ce même à bas ordre, que les modèles asymptotiques.

Cette méthode, issue de la théorie des équations intégrales de frontière, met en jeu des matrices denses dont la taille dépend directement du nombre d'obstacles et du nombre de modes, soit de l'ordre d'approximation. Elle atteint rapidement ses limites en termes de consommation de ressources mémoire si nous n'utilisons pas de parallélisation. Dans le Chapitre 8, nous décrivons une méthode astucieuse pour résoudre des gros problèmes en essayant de minimiser les ressources de calcul.

Cette méthode est validée numériquement dans le Chapitre 9 à l'aide d'une solution élément fini. De plus, nous mettons en évidence les différents coûts de calcul entre modèles spectraux et modèles asymptotiques.

## CHAPITRE 8

# IMPLÉMENTATION : ACCÉLÉRATION ALGORITHMIQUE ET RÉDUCTION MATÉRIELLE

### Sommaire

---

<b>8.1 La résolution</b>	<b>214</b>
8.1.1 Rappel des notations	214
8.1.2 Résolution directe	215
8.1.3 Résolution itérative	215
8.1.4 Stratégie	216
<b>8.2 Le préconditionnement</b>	<b>219</b>
8.2.1 Préconditionnement des systèmes	219
8.2.2 Conditionnement des matrices	222
8.2.3 Densité et extraction	227
<b>8.3 Le stockage et l'assemblage</b>	<b>235</b>
8.3.1 Stockage par bloc	235
8.3.2 Assemblage des matrices « blocs »	244
8.3.3 Action du produit matrice-vecteur	247
<b>8.4 Conclusion</b>	<b>250</b>

---

Dans le Chapitre 7, nous avons présenté une méthode d'équations intégrales pour le problème de diffraction multiple par des obstacles de forme arbitraire et nous avons justifié rigoureusement la méthode de collocation de Xu (1995) pour la diffraction multiple par des sphères en électromagnétisme.



Dans ce chapitre, nous décrivons l'implémentation numérique que nous avons mise en œuvre. Nous développons un algorithme itératif pour résoudre les systèmes issus de cette méthode, qui s'applique également pour la résolution du système issu du modèle de Foldy présenté dans la Section 4.3.2. Cette implémentation astucieuse permet notamment de considérer des cas-tests où sont mises en jeu des matrices denses de grande taille, par exemple comprenant  $60\,000 \times 60\,000$  éléments, et ce pouvant être lancés en séquentiel sur un ordinateur portable avec 16 Go de mémoire vive, avec des temps de calcul plus que raisonnables.

## 8.1 La résolution

Dans cette section, nous décrivons les stratégies numériques déployées pour résoudre les systèmes linéaires notamment issus de la méthode spectrale.

### 8.1.1 Rappel des notations

Nous nous proposons de résoudre les systèmes linéaires

$$\mathbb{M}^e \mathbf{j} = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathbb{M}^m \mathbf{m} = \mathbf{f}. \quad (8.1)$$

Ces systèmes sont tous deux issus de la méthode spectrale présentée dans le Chapitre 7, le premier correspond à une formulation électrique de l'équation intégrale, le second à une formulation magnétique. Les matrices sont de taille  $2KN(N+2) \times 2KN(N+2)$ , où  $K$  désigne le nombre d'obstacles et  $N$  l'ordre maximal des modes considéré dans l'espace variationnel  $\mathcal{V}_N(\text{div})$  défini par (7.23).

Dans la Section 8.2, nous nous intéresserons à ces deux systèmes indépendamment et définirons un préconditionneur adapté à chacune des formulations. Dans la Section 8.3, nous ne différencierons plus les formulations et nous noterons le système linéaire à résoudre, qui aura été préalablement préconditionné, sous la forme

$$\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (8.2)$$

En effet, l'algorithme présenté s'appliquera aussi bien à la formulation électrique qu'à la formulation magnétique, ainsi qu'aux systèmes de Foldy. Nous noterons  $\mathcal{N}$  la taille de la matrice égale à  $2KN(N+2)$  pour les matrices issues de la méthode spectrale et

égale à  $6K$  pour la matrice issue du système de Foldy. Nous rappelons que la solution du modèle de Foldy correspond à la solution de la méthode spectrale pour  $N = 1$ .

### 8.1.2 Résolution directe

La résolution directe du système (8.2) consiste à calculer l'inverse de la matrice  $\mathbb{A}$  et obtenir ainsi la solution

$$\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1} \mathbf{b}.$$

Les méthodes directes fournissent la solution  $\mathbf{x}$  en un nombre fini d'opérations élémentaires. Pour la méthode LU, la résolution passe par une factorisation LU de la matrice puis successivement l'utilisation d'algorithmes de descente et de remontée. Cela se traduit par

$$\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbb{L} \mathbb{U} \mathbf{x} = \mathbb{P} \mathbf{b} \iff \begin{cases} \mathbf{y} = \mathbb{L}^{-1} \mathbb{P} \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} = \mathbb{U}^{-1} \mathbf{y} \end{cases}$$

Cela permet d'obtenir la solution en  $O(N^3)$  opérations.

**Remarque 8.1.** *La précision dépend directement du nombre d'opérations effectuées. Donc, plus le système linéaire à résoudre est grand et plus les erreurs de calcul vont se répercuter dans la solution, jusqu'au point d'obtenir une erreur trop importante dans le résultat.*

### 8.1.3 Résolution itérative

Le principe général est de construire une suite  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\mathbf{x}$  la solution du système linéaire. Il s'agit de décomposer la matrice  $\mathbb{A}$  en une somme de matrices,

$$\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N},$$

où  $\mathbb{M}$  est une matrice facile à inverser. Il s'agit ensuite de choisir un élément de départ  $\mathbf{x}_0$  faisant office d'initialisation pour l'algorithme itératif et un critère d'arrêt de l'algorithme. La suite  $(\mathbf{x}_p)$  est construite en résolvant successivement les systèmes

$$\mathbb{M} \mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{b} + \mathbb{N} \mathbf{x}_p.$$

**Remarque 8.2.** *Les questions naturelles qui apparaissent suite à cette définition sont les suivantes. Comment choisir la matrice  $\mathbb{M}$ ? Comment choisir le vecteur initial  $\mathbf{x}_0$ ? Quel critère d'arrêt est pertinent pour affirmer que la suite a convergé vers la solution  $\mathbf{x}$ ?*

### 8.1.4 Stratégie

Nous étudions le conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  et  $\mathbb{M}^m$  définies par (7.35) et (7.36) qui sont engendrées par les formulations spectrales (7.32) et (7.33). À l'aide de transformations linéaires simples, nous améliorons le nombre de conditionnement des matrices à inverser dans les systèmes linéaires.

Plus le nombre d'obstacles augmente et plus le traitement numérique requiert des ressources conséquentes en espace mémoire. Nous devons tirer parti de la résolution itérative en évitant l'assemblage d'une matrice pleine. En particulier, le choix de la décomposition de la matrice  $\mathbb{A}$  est crucial pour la convergence du solveur itératif. La matrice est décomposée sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{D} + \mathbb{B} + \mathbb{C}, \quad (8.3)$$

où  $\mathbb{D}$  désigne la matrice diagonale extraite de  $\mathbb{A}$ . Les matrices  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{C}$  admettent des termes diagonaux nuls.

Nous mettons en place deux extractions permettant de construire la matrice  $\mathbb{B}$ . La première correspond à l'extraction des interactions principales associées au système. La factorisation de la matrice sous la forme

$$\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{D}^{-1}\mathbb{B} + \mathbb{D}^{-1}\mathbb{C}$$

fait intervenir des coefficients normalisés égaux à 1 sur la diagonale. Nous pouvons distinguer les interactions importantes des interactions négligeables à l'aide d'un critère de tolérance fixé. En particulier, nous proposons

$$[\mathbb{B}_{\ell k}^{**}]_{n,m}^{\nu,\mu} = \begin{cases} [\mathbb{A}_{\ell k}^{**}]_{n,m}^{\nu,\mu} & \text{si } \left| [(\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A})_{\ell k}^{**}]_{n,m}^{\nu,\mu} \right| \geq \epsilon \text{ et } \ell \neq k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (8.4)$$

où  $\epsilon \geq 0$  désigne la tolérance. La seconde extraction consiste à prendre en compte les interactions entre obstacles qui se situent dans un même voisinage. En particulier, nous négligeons les interactions lorsque la distance qui sépare deux obstacles est grande

comparée à un critère de tolérance fixé. Nous proposons

$$\mathbb{B}_{\ell k}^{**} = \begin{cases} \mathbb{A}_{\ell k}^{**} & \text{si } |\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell| \leq d_{\max} \text{ et } k \neq \ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.5)$$

**Remarque 8.3.** La tolérance  $\epsilon$  associée à la première extraction risque de dépendre du rayon des obstacles ainsi que de la distance les séparant à la différence de la seconde extraction où le critère de tolérance  $d_{\max}$  risque préférablement de dépendre de la longueur d'onde et être ainsi indépendante du rayon des obstacles. A contrario, de la première extraction résulte des blocs creux tandis que de la seconde résulte des blocs pleins. Nous pouvons coupler les deux extractions en imposant sur la seconde un critère  $\epsilon$  (moins restrictif que lors de la première) afin de négliger les coefficients proches de zéro à l'intérieur des blocs pleins.

**Remarque 8.4.** Dans [Egel et al. \(2017\)](#), le critère choisi est différent des deux présentés ci-dessus. Les auteurs mettent en place un découpage géométrique volumique uniforme du domaine et ne tiennent compte uniquement des interactions régnant au sein de chacune des cellules, ne considérant pas d'interaction entre obstacles provenant de cellules différentes.

Afin de traiter numériquement les cas-tests comprenant un grand nombre d'obstacles et notamment lorsque leur distribution est uniforme, nous mettons en place un stockage particulier de la matrice sous la forme d'une succession de blocs correspondant aux interactions associées aux distances  $\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell$  deux à deux différentes. La partie diagonale  $\mathbb{D}$  est stockée séparément. L'extraction est effectuée sur cette matrice « blocs » d'où résulte une matrice creuse « blocs » qui peut par la suite être assemblée en tant que matrice globale de type creux. Cette matrice correspond à la matrice  $\mathbb{B}$ . Nous notons  $N_{\text{dist}}$  le cardinal de l'ensemble constitué des éléments  $\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell$ ,

$$N_{\text{dist}} = \text{Card}(\{\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell \mid k, \ell = 1, \dots, K \text{ avec } \ell \neq k\}). \quad (8.6)$$

Ce nombre entier est borné supérieurement par  $K(K - 1)$  où  $K$  désigne le nombre de sphères. La matrice pleine « blocs » notée  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ , est de taille  $N(N + 2) \times 4 N_{\text{dist}} N(N + 2)$ , où  $N(N + 2) \times N(N + 2)$  correspond à la taille d'un bloc et  $N_{\text{dist}}$  correspond au nombre de blocs stockés par partie ( $\perp\perp$ ,  $\perp\times$ ,  $\times\perp$  et  $\times\times$ ). La matrice creusée « blocs » est notée  $\mathbb{B}_{\text{bloc}}$  et le reste « blocs », noté  $\mathbb{C}_{\text{bloc}}$  correspond à

$$\mathbb{C}_{\text{bloc}} = \mathbb{A}_{\text{bloc}} - \mathbb{B}_{\text{bloc}}. \quad (8.7)$$

**Remarque 8.5.** *Il est clair que ce stockage n'a aucun intérêt si nous nous retrouvons dans une configuration où*

$$\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell \neq \mathbf{c}_{k'} - \mathbf{c}_{\ell'} \quad \forall (k, \ell) \neq (k', \ell') \text{ tels que } k \neq \ell \text{ et } k' \neq \ell'.$$

*En revanche, pour des distributions uniformes d'obstacles, qu'ils soient sur une droite, dans un plan ou à l'intérieur d'un volume donné, ce stockage permet de réduire considérablement l'espace mémoire nécessaire à la simulation numérique.*

L'assemblage qui consiste à passer de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  à  $\mathbb{A}$  ou pareillement de  $\mathbb{B}_{\text{bloc}}$  à  $\mathbb{B}$ , s'appuie sur la connaissance *a priori* de la configuration géométrique et par conséquent de la disposition des blocs à l'intérieur de la matrice globale. Cet assemblage est présenté dans la Section 8.3 pour des configurations géométriques arbitraires et dans le cas particulier de distributions uniformes d'obstacles. Une fois la matrice  $\mathbb{B}_{\text{bloc}}$  assemblée, nous notons  $\mathbf{x}_0$  l'élément d'initialisation de l'algorithme itératif donné par

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbb{D} + \mathbb{B})^{-1} \mathbf{b}. \quad (8.8)$$

La suite  $(\mathbf{x}_p)$  est mise à jour en calculant successivement

$$\mathbf{x}_{p+1} = (\mathbb{D} + \mathbb{B})^{-1} (\mathbf{b} - \mathbb{C} \mathbf{x}_p). \quad (8.9)$$

**Remarque 8.6.** *L'inverse de la matrice  $\mathbb{D} + \mathbb{B}$  peut être calculé au préalable une fois pour toutes avant la mise en œuvre itérative.*

Il reste à déterminer une manière de calculer le produit matrice-vecteur  $\mathbb{C} \mathbf{x}_p$  à partir de la matrice  $\mathbb{C}_{\text{bloc}}$ . Toujours avec une connaissance *a priori* de la géométrie et de la répartition des blocs successifs, nous sommes en mesure de déterminer *qui agit sur qui* et ainsi, reproduire le produit matrice-vecteur  $\mathbb{C} \mathbf{x}_p$  sans ne jamais assembler la matrice  $\mathbb{C}_{\text{bloc}}$ . Ce traitement, appelé l'*action* de la matrice « blocs », est défini par l'opérateur  $\mathcal{A}$  vérifiant

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}_p) = \mathbb{C} \mathbf{x}_p. \quad (8.10)$$

Ceci est présenté en détail dans la Section 8.3.3.

L'algorithme itératif est interrompu lorsque le résidu entre deux itérations successives devient inférieur à une tolérance  $\epsilon_{\text{res}}$  ou si le nombre maximal  $N_{\text{it}}$  d'itérations est atteint

avant que la suite  $(\mathbf{x}_p)$  n'ait convergé. La solution peut être comparée avec celle obtenue par l'algorithme GMRES (*Generalized Minimal RESidual*) appliqué à la matrice  $\mathbb{D} + \mathbb{B}$ , négligeant complètement la matrice  $\mathbb{C}$ .

## 8.2 Le préconditionnement

À l'aide de transformations linéaires élémentaires, nous améliorons le conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  et  $\mathbb{M}^m$  issues des systèmes linéaires (8.1). Des illustrations du nombre de conditionnement en fonction du nombre d'obstacles, de la taille des obstacles et de la distance entre chacun des obstacles sont données. Par ailleurs, une étude sur la densité des matrices initiales et extraites est effectuée, en considérant les deux types d'extraction présentés dans la Section 8.1.4.

### 8.2.1 Préconditionnement des systèmes

Les zéros à l'intérieur des blocs diagonaux résultent du choix de l'espace variationnel discret  $\mathcal{V}_N(\text{rot})$  des fonctions tests donné par (7.23). Cet espace ne reflète pas la dualité entre les espaces de dimension infinie  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{div})$  et  $\mathbb{H}_\Gamma(\text{rot})$ . L'espace adéquat est l'espace  $\tilde{\mathcal{V}}_N(\text{rot})$  défini par

$$\tilde{\mathcal{V}}_N(\text{rot}) = \left\{ \mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Gamma(\text{rot}), \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \tilde{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\times} \nabla_S Y_{n,m}^\ell(\hat{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{v}}_{n,m}^{\ell,\parallel} \mathbf{rot}_S Y_{n,m}^\ell(\hat{\mathbf{x}}) \right\},$$

où les rôles de  $\mathbf{v}_{n,m}^{\ell,\parallel}$  et  $\mathbf{v}_{n,m}^{\ell,\times}$  ont été échangés. Au niveau algébrique, cela est équivalent à définir les matrices  $\tilde{\mathbb{M}}^e$  et  $\tilde{\mathbb{M}}^m$  telles que

$$\tilde{\mathbb{M}}^e = \mathbb{P} \mathbb{M}^e \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{M}}^m = \mathbb{P} \mathbb{M}^m \quad \text{avec} \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

puis résoudre les systèmes linéaires équivalents

$$\tilde{\mathbb{M}}^e \mathbf{j} = \mathbb{P} \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{M}}^m \mathbf{m} = \mathbb{P} \mathbf{f}. \quad (8.11)$$

La matrice  $\mathbb{P}$  est une matrice de permutation où les blocs identités  $\mathbb{I}$  et les blocs nuls  $\mathbf{0}$  sont de taille  $KN(N+2)$ . Les matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  et  $\widetilde{\mathbb{M}}^m$  sont alors données par

$$\begin{aligned} \left[ \left( \widetilde{\mathbb{M}}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\parallel \parallel} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \left[ \left( \mathbb{M}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\times \parallel} \right]_{n,m}^{\nu,\mu}, & \left[ \left( \widetilde{\mathbb{M}}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\parallel \times} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \left[ \left( \mathbb{M}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\times \times} \right]_{n,m}^{\nu,\mu}, \\ \left[ \left( \widetilde{\mathbb{M}}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\times \parallel} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \left[ \left( \mathbb{M}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\parallel \parallel} \right]_{n,m}^{\nu,\mu}, & \left[ \left( \widetilde{\mathbb{M}}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\times \times} \right]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \left[ \left( \mathbb{M}^{e/m} \right)_{\ell k}^{\parallel \times} \right]_{n,m}^{\nu,\mu}. \end{aligned}$$

Nous analysons les blocs diagonaux issus des matrices  $\mathbb{M}^e$  et  $\mathbb{M}^m$ . En particulier, lorsque le rayon des sphères  $r_k = \delta$  est petit devant la longueur d'onde, tel que

$$\delta < \frac{\lambda}{2\pi}$$

les coefficients diagonaux admettent le comportement asymptotique suivant

$$\frac{h_n^{(1)}(\kappa\delta)}{j_n(\kappa\delta)} = O\left(\frac{1}{\delta^{2n+1}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\widetilde{h}_n^{(1)}(\kappa\delta)}{\widetilde{j}_n(\kappa\delta)} = O\left(\frac{1}{\delta^{2n+1}}\right).$$

Nous introduisons les matrices diagonales inversibles  $\mathbb{D}^e$  et  $\mathbb{D}^m$  données par

$$\mathbb{D}^e = \kappa^2 \begin{pmatrix} \frac{\widetilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)}{\widetilde{j}_n(\kappa r_k)} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{h_n^{(1)}(\kappa r_k)}{j_n(\kappa r_k)} \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}^m = \kappa^2 \begin{pmatrix} \frac{h_n^{(1)}(\kappa r_k)}{j_n(\kappa r_k)} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\widetilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)}{\widetilde{j}_n(\kappa r_k)} \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

où les blocs identités  $\mathbb{I}$  et les blocs nuls  $\mathbf{0}$  sont de taille  $KN(N+2)$ , de sorte que les blocs diagonaux issues des deux parties diagonales de  $(\mathbb{D}^e)^{-1}\widetilde{\mathbb{M}}^e$  et de  $(\mathbb{D}^m)^{-1}\widetilde{\mathbb{M}}^m$  soient des matrices identités de taille  $N(N+2)$ . Nous notons

$$\mathbb{A}^e = (\mathbb{D}^e)^{-1}\widetilde{\mathbb{M}}^e \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^m = (\mathbb{D}^m)^{-1}\widetilde{\mathbb{M}}^m$$

qui sont données par

$$\begin{aligned}
 [(\mathbb{A}^e)_{\ell k}^{\parallel}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ \frac{\tilde{j}_n(\kappa r_k)}{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
 [(\mathbb{A}^e)_{\ell k}^{\parallel \times}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ \frac{\tilde{j}_n(\kappa r_k)}{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell. \end{cases} \\
 [(\mathbb{A}^e)_{\ell k}^{\times \parallel}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ -\frac{j_n(\kappa r_k)}{h_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
 [(\mathbb{A}^e)_{\ell k}^{\times \times}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ \frac{j_n(\kappa r_k)}{h_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 [(\mathbb{A}^m)_{\ell k}^{\parallel \parallel}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ -\frac{j_n(\kappa r_k)}{h_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
 [(\mathbb{A}^m)_{\ell k}^{\parallel \times}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ \frac{j_n(\kappa r_k)}{h_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell. \end{cases} \\
 [(\mathbb{A}^m)_{\ell k}^{\times \parallel}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell, \\ \frac{\tilde{j}_n(\kappa r_k)}{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,e}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \\
 [(\mathbb{A}^m)_{\ell k}^{\times \times}]_{n,m}^{\nu,\mu} &= \begin{cases} \delta_n^\nu \delta_m^\mu & \text{si } k = \ell, \\ \frac{\tilde{j}_n(\kappa r_k)}{\tilde{h}_n^{(1)}(\kappa r_k)} S_{nm}^{\nu\mu,h}(\mathbf{d}_{k,\ell}) & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement, la résolution des systèmes linéaires (8.11) est équivalente à résoudre

$$\mathbb{A}^e \mathbf{j} = \tilde{\mathbf{f}}^e \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^m \mathbf{m} = \tilde{\mathbf{f}}^m,$$



où les seconds membres  $\tilde{\mathbf{f}}^e = (\mathbb{D}^e)^{-1} \mathbb{P} \mathbf{f}$  et  $\tilde{\mathbf{f}}^m = (\mathbb{D}^m)^{-1} \mathbb{P} \mathbf{f}$  sont donnés par

$$\tilde{\mathbf{f}}^e = \frac{1}{\kappa^2} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_e^{1,\text{inc}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}_e^{K,\text{inc}} \\ \tilde{\mathbf{e}}_e^{1,\text{inc}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{e}}_e^{K,\text{inc}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{h}}_e^{\ell,\text{inc}} = \begin{pmatrix} \tilde{j}_1(\kappa r_k) \mathbf{h}_1^{\ell,\text{inc}} \\ \tilde{h}_1(\kappa r_k) \\ \vdots \\ \tilde{j}_N(\kappa r_k) \mathbf{h}_N^{\ell,\text{inc}} \\ \tilde{h}_N(\kappa r_k) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}}_e^{\ell,\text{inc}} = \begin{pmatrix} \frac{j_1(\kappa r_k)}{\tilde{h}_1(\kappa r_k)} \mathbf{e}_1^{\ell,\text{inc}} \\ \vdots \\ \frac{j_N(\kappa r_k)}{\tilde{h}_N(\kappa r_k)} \mathbf{e}_N^{\ell,\text{inc}} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{f}}^m = \frac{1}{\kappa^2} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_m^{1,\text{inc}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{e}}_m^{K,\text{inc}} \\ \tilde{\mathbf{h}}_m^{1,\text{inc}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}_m^{K,\text{inc}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{h}}_m^{\ell,\text{inc}} = \begin{pmatrix} j_1(\kappa r_k) \mathbf{h}_1^{\ell,\text{inc}} \\ \tilde{h}_1(\kappa r_k) \\ \vdots \\ j_N(\kappa r_k) \mathbf{h}_N^{\ell,\text{inc}} \\ \tilde{h}_N(\kappa r_k) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}}_m^{\ell,\text{inc}} = \begin{pmatrix} \tilde{j}_1(\kappa r_k) \mathbf{e}_1^{\ell,\text{inc}} \\ \tilde{h}_1(\kappa r_k) \\ \vdots \\ \tilde{j}_N(\kappa r_k) \mathbf{e}_N^{\ell,\text{inc}} \\ \tilde{h}_N(\kappa r_k) \end{pmatrix}.$$

## 8.2.2 Conditionnement des matrices

Nous comparons le conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  et  $\mathbb{M}^m$  avec celui des matrices  $\mathbb{A}^e$  et  $\mathbb{A}^m$ . Nous rappelons que le conditionnement d'une matrice est caractérisé par son nombre de conditionnement que nous définissons ci-après.

**Définition 8.1.** Soit  $\mathbb{A}$  une matrice de taille  $\mathcal{N}$  inversible. Le conditionnement  $C(\mathbb{A})$  de la matrice  $\mathbb{A}$  est définie relativement à la norme subordonnée, notée sans ambiguïté  $\|\cdot\|$ , par

$$C(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\mathbb{A}\|.$$

Nous considérons  $K$  sphères uniformément distribuées sur un segment de  $\mathbb{R}^3$ , de rayon  $\delta$  et de centre  $\mathbf{c}_k$  tel que

$$\mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} 0 & (k-1)d & 0 \end{pmatrix} \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad (8.12)$$

où  $d$  désigne la distance entre deux centres. Cela est illustré dans la Figure 8.1. Nous étudions le conditionnement des matrices induites en jouant sur les paramètres de taille  $\delta$ , de distance  $d$  et sur le nombre  $K$  d'obstacles. Pour la simulation numérique, l'onde incidente est une onde plane définie par (5.1) de longueur d'onde  $\lambda$ .

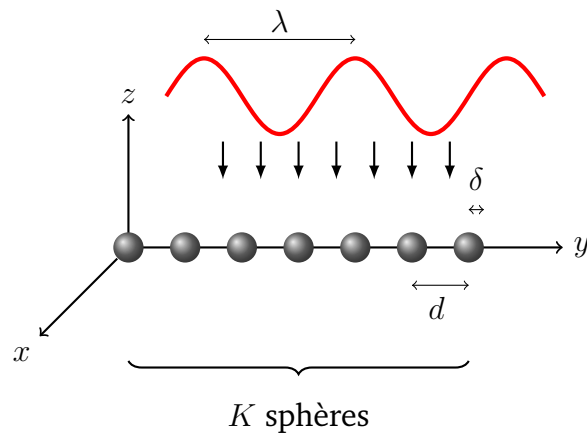


FIGURE 8.1 – Configuration géométrique :  $\delta$  désigne le rayon des sphères,  $d$  la distance entre deux centres et  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde incidente dirigée selon l'axe  $z$ .

Les Figures 8.2 à 8.4 illustrent le conditionnement de la matrice  $\mathbb{M}^e$  donnée par (7.35) et des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  et  $\mathbb{A}^e$  obtenues après permutation et normalisation, en fonction du nombre d'obstacles. Les graphiques sont représentés en échelle semi-logarithmique. La Figure 8.2 représente le conditionnement des matrices associées aux ordres 1 et 2, pour  $\delta = 0.1$ ,  $d = 1.0$  et  $\lambda = 10.0$ . Le rayon des sphères est dix fois plus petit que la distance les séparant, elle-même dix fois plus petite que la longueur d'onde. Le rapport entre le rayon  $\delta$  et la longueur d'onde  $\lambda$  est égal à 100. La Figure 8.3 représente celui des

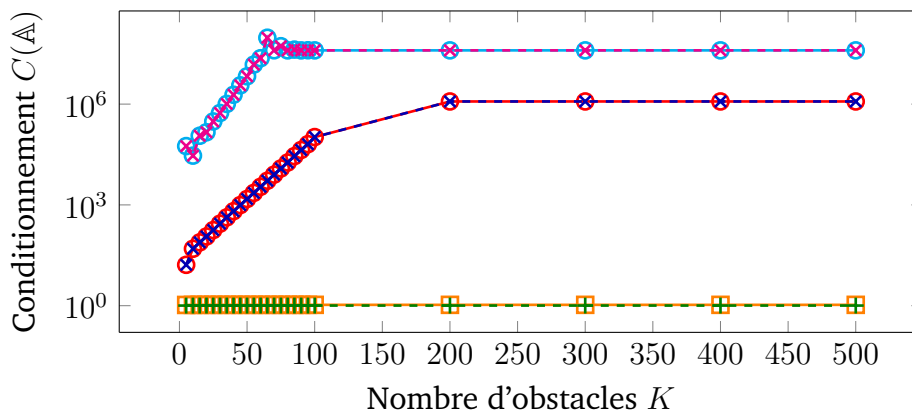


FIGURE 8.2 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}+\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\square\text{--}$ ), en fonction du nombre d'obstacles.

matrices associées aux ordres 1 et 2, pour  $\delta = 0.1$ ,  $d = 1.0$  et  $\lambda = 1.0$ . Le rapport entre le rayon  $\delta$  et la longueur d'onde  $\lambda$  est diminué à 10. La Figure 8.4 représente le conditionnement des matrices associées aux ordres 1 et 2, pour  $\delta = 0.1$ ,  $d = 0.3$  et  $\lambda = 1.0$ . Pour chaque test, nous constatons que le conditionnement des matrices  $\mathbb{A}^e$

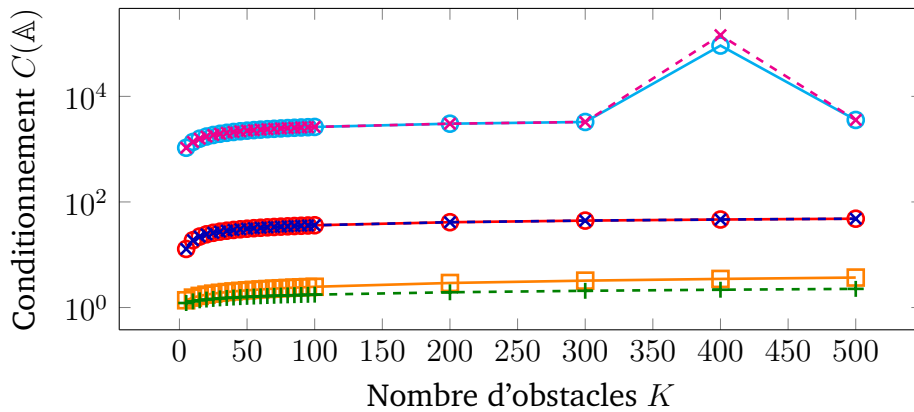


FIGURE 8.3 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\oplus\text{--}$ ), des matrices  $\tilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\ast\text{--}$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\text{+}\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\square\text{--}$ ), en fonction du nombre d’obstacles.

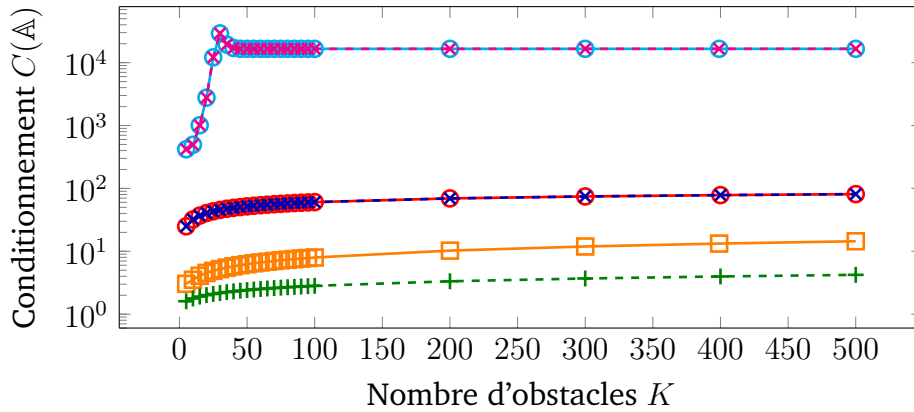


FIGURE 8.4 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\oplus\text{--}$ ), des matrices  $\tilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\ast\text{--}$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\text{+}\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\square\text{--}$ ), en fonction du nombre d’obstacles.

associées à la formulation préconditionnée se comporte mieux que celui associé aux matrices non-préconditionnées  $\mathbb{M}^e$  et  $\tilde{\mathbb{M}}^e$ .

Les Figures 8.5 à 8.7 illustrent le conditionnement de ces mêmes matrices en fonction de la taille des obstacles. Les graphiques sont représentés en échelle logarithmique. La Figure 8.5 représente le conditionnement des matrices associées aux ordres 1, 2 et 3 pour  $K = 10$ ,  $d = 1.0$  et  $\lambda = 1.0$ . Nous faisons varier le rayon des obstacles sphériques entre  $10^{-\frac{1}{2}} \approx 0.32$  à  $10^{-\frac{9}{2}} \approx 0.000032$ . La Figure 8.6 représente le conditionnement des matrices associées aux ordres 1 et 2 pour  $K = 10$ ,  $d = 1.0$  et où la longueur d’onde  $\lambda$  dépend de la taille des obstacles. Nous supposons que le rapport entre  $\delta$  et  $\lambda$  est constant et égal à 0.1, autrement dit  $\delta = \frac{\lambda}{10}$ . Les Figures 8.5 et 8.6 montrent – au moins

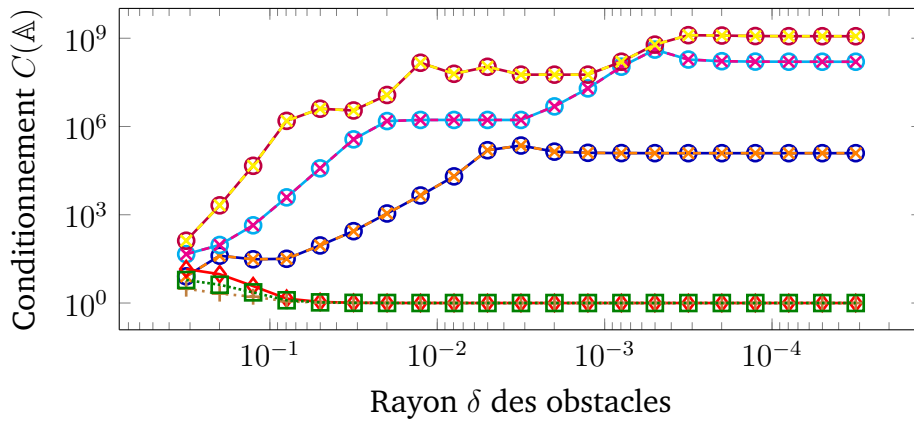


FIGURE 8.5 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\circ$ ),  $N = 2$  ( $\circ$ ) et  $N = 3$  ( $\circ$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ),  $N = 2$  ( $\times$ ) et  $N = 3$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $+$ ),  $N = 2$  ( $+$ ) et  $N = 3$  ( $+$ ), en fonction de la taille des obstacles.

pour les deux premiers ordres – que lorsque la distance entre les obstacles est fixe, le nombre de conditionnement associé à la matrice se rapproche de 1 lorsque la taille des sphères tend vers zéro tandis que celui associé aux matrices non-préconditionnées devient très grand. La Figure 8.7 représente le conditionnement des matrices associées

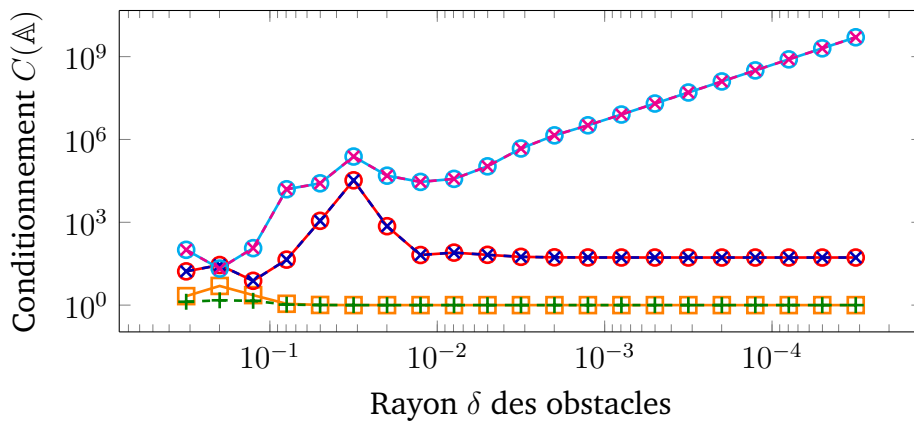


FIGURE 8.6 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\circ$ ) et  $N = 2$  ( $\circ$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ) et  $N = 2$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $+$ ) et  $N = 2$  ( $+$ ), en fonction de la taille des obstacles.

aux ordres 1 et 2 pour  $K = 10$ ,  $\lambda = 1.0$  et où la distance  $d$  séparant les obstacles dépend linéairement de la taille des obstacles. Nous supposons que le rapport entre  $\delta$  et  $\lambda$  est constant et égal à 5, autrement dit  $d = 5\delta$ . Nous observons que le conditionnement de la matrice  $\mathbb{A}^e$  avec  $N = 2$  ( $+$ ), à la différence de ce que nous avons observé précédemment, croît lorsque nous diminuons à la fois la taille des obstacles et la distance les séparant. Toutefois, le conditionnement associé reste meilleur que celui associé à la ma-

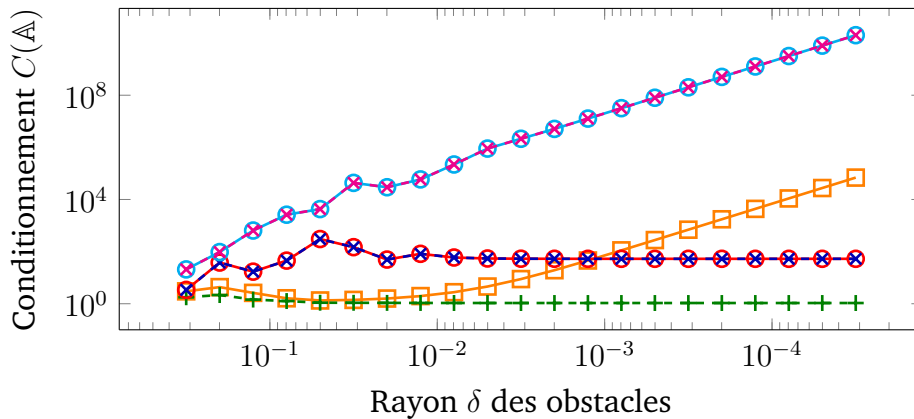


FIGURE 8.7 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}+\text{--}$ ) et  $N = 2$  ( $\text{--}\square\text{--}$ ), en fonction de la taille des obstacles.

trice non-préconditionnée pour  $N = 2$ . Il sera dans ce cas préférable de considérer des formulations du premier ordre, qui, pour un nombre plus élevé d'obstacles, s'avèrent plus stables que les formulations d'ordre supérieur.

Les Figures 8.8 et 8.9 illustrent le conditionnement des matrices en fonction de la distance  $d$  qui sépare les obstacles. Nous faisons varier  $d$  entre 0.3 et 10. Les graphiques sont représentés en échelle semi-logarithmique. La Figure 8.8 représente le conditionnement des matrices associées aux ordres 1, 2 et 3 pour  $K = 10$ ,  $\delta = 0.1$  et  $\lambda = 10$ . La distance séparant deux obstacles est considérée inférieure ou égale à la longueur d'onde  $\lambda$ . La Figure 8.9 représente le conditionnement des matrices associées aux ordres 1, 2

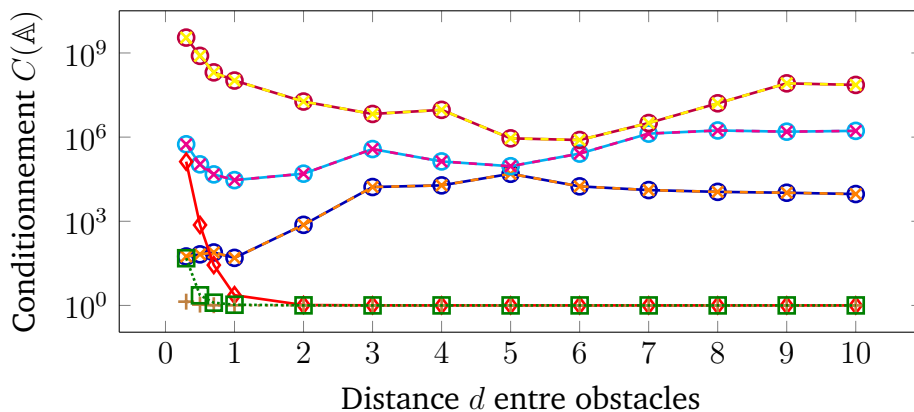


FIGURE 8.8 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ),  $N = 2$  ( $\text{--}\square\text{--}$ ) et  $N = 3$  ( $\text{--}\circ\text{--}$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ),  $N = 2$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ) et  $N = 3$  ( $\text{--}\times\text{--}$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{--}+\text{--}$ ),  $N = 2$  ( $\text{--}\square\text{--}$ ) et  $N = 3$  ( $\text{--}\diamond\text{--}$ ), en fonction de la taille des obstacles.

et 3 pour  $K = 10$ ,  $\delta = 0.1$  et  $\lambda = 1.0$ . Elle montre l'évolution du conditionnement lorsque la distance qui sépare deux obstacles est supérieure à la longueur d'onde  $\lambda$ . Nous constatons que le nombre de conditionnement associé aux formulations précon-

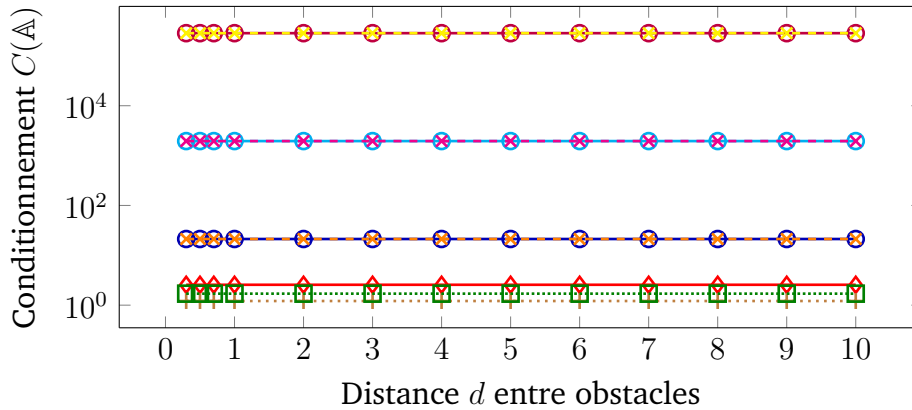


FIGURE 8.9 – Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{---}\circ\text{---}$ ),  $N = 2$  ( $\text{---}\circ\text{---}$ ) et  $N = 3$  ( $\text{---}\circ\text{---}$ ), des matrices  $\tilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{---}\times\text{---}$ ),  $N = 2$  ( $\text{---}\times\text{---}$ ) et  $N = 3$  ( $\text{---}\times\text{---}$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\text{---}\circ\text{---}$ ),  $N = 2$  ( $\text{---}\square\text{---}$ ) et  $N = 3$  ( $\text{---}\diamond\text{---}$ ), en fonction de la distance séparant les obstacles.

ditionnées est toujours meilleur que celui associé aux matrices non-préconditionnées, à ordre fixé. Lorsque la distance entre obstacles est de l'ordre de la longueur d'onde, le conditionnement des matrices  $\mathbb{A}^e$  est très proche de 1. Plus la distance entre obstacles diminue, plus le nombre de conditionnement augmente comme nous pouvons le voir sur la Figure 8.8 lorsque  $d$  se trouve entre 0 et 1. De plus, cela s'accroît lorsque nous montons en ordre dans l'espace d'approximation.

**Remarque 8.7.** *D'autres tests ont été réalisés pour des configurations géométriques plus générales : les conclusions sont les mêmes.*

Au moins pour les tests réalisés, les transformations linéaires, présentées dans la Section 8.2.1 et appliquées au système issu de la formulation électrique, améliorent le conditionnement de la matrice à inverser dans le système linéaire.

### 8.2.3 Densité et extraction

Comme nous l'avons dit précédemment, la méthode engendre des matrices denses. Pour un très grand nombre d'obstacles, il n'est plus possible de stocker intégralement les matrices  $\mathbb{A}^e$  et  $\mathbb{A}^m$ . L'objectif serait idéalement d'avoir seulement des matrices creuses à assembler tout en essayant de contenir l'information nécessaire à la prise en compte

des interactions. Après le préconditionnement, les matrices, notées indifféremment  $\mathbb{A}$ , sont décomposées sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{B} + \mathbb{C},$$

où  $\mathbb{D} = \mathbb{I}$  dans (8.3). Nous étudions la densité des matrices extraites  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$  où  $\mathbb{B}$  est définie selon l'un des critères (8.4) ou (8.5), en faisant varier les valeurs  $\epsilon$  et  $d_{\max}$ .

**Remarque 8.8.** Pour bénéficier des avantages de l'assemblage creux, le taux de remplissage des matrices devrait approximativement être inférieur à 33% – voire un peu plus en tenant compte du fait que le stockage d'un nombre réel en précision double nécessite plus de mémoire que le stockage d'un entier. En effet, l'assemblage creux nécessite la définition de vecteurs auxiliaires d'entiers, contenant les numéros de ligne et colonne associés aux coefficients non-nuls.

Nous considérons  $K_1 \times K_c$  sphères uniformément distribuées dans un plan de  $\mathbb{R}^3$ , de rayon  $\delta$  et de centre  $\mathbf{c}_{k_1}^{k_c}$  tel que

$$\mathbf{c}_{k_1}^{k_c} = (0 \quad (k_c - 1)d \quad (k_1 - 1)d),$$

où  $d$  désigne la distance entre deux obstacles consécutifs. Cela est illustré dans la Figure 8.10. Ce cas-test est plus riche que celui présenté dans la Section 8.2.2 avec des

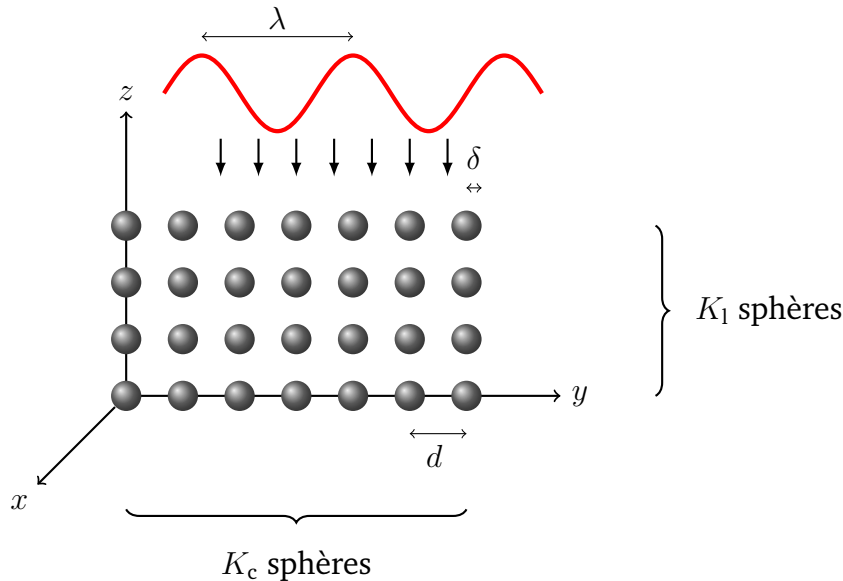


FIGURE 8.10 – Configuration géométrique :  $\delta$  désigne le rayon des sphères,  $d$  la distance entre deux centres et  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde incidente dirigée selon l'axe  $z$ .

obstacles alignés, car règne un plus grand nombre d'interactions non-négligeables entre les obstacles. Cela s'avère évidemment plus pertinent pour comparer les critères d'extraction. L'onde incidente est une onde plane électromagnétique définie par (5.1) de longueur d'onde  $\lambda$ . Nous étudions la densité des matrices extraites en faisant varier les critères de tolérance  $\epsilon$  et  $d_{\max}$  en jouant sur le rayon  $\delta$  des sphères, la distance les séparant  $d$  et le nombre  $K$  d'obstacles.

La Figure 8.11 représente le squelette de la matrice  $\mathbb{A}^\epsilon$  pour différentes valeurs de  $N$  et  $K$ , rappelant que la taille des matrices ne dépend que de ces deux grandeurs, l'ordre d'approximation et le nombre d'obstacles. Les matrices obtenues sont relatives

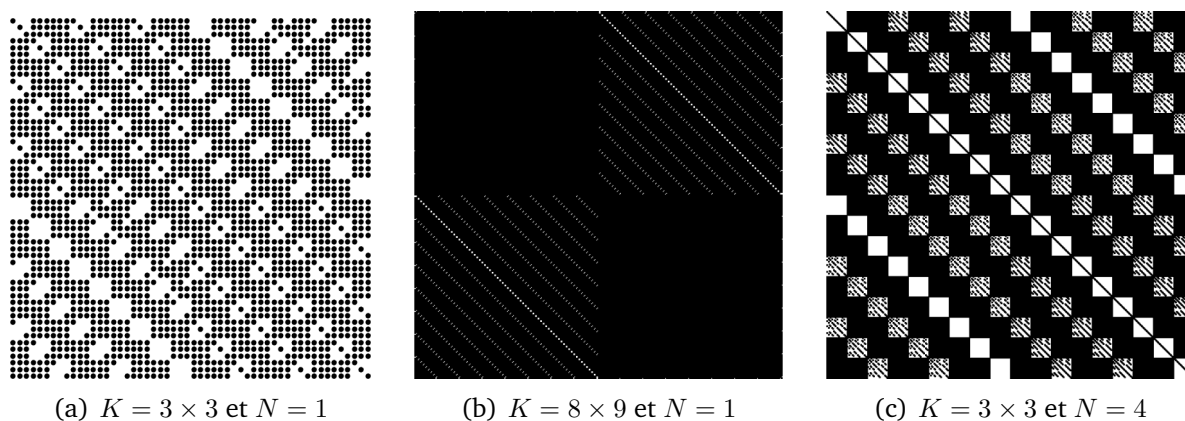


FIGURE 8.11 – Squelette des matrices  $\mathbb{A}^\epsilon$ .

à la numérotation des obstacles que nous avons choisie. Nous constatons effectivement que les matrices sont denses.

**Remarque 8.9.** Lorsque  $K = 9$  et  $N = 1$ , la taille de la matrice est donnée par  $4 \times 9 \times 1 \times 3 = 108$ . Les deux autres tests sont choisis tels que les tailles des matrices soient égales, c'est-à-dire telles que  $4 \times 72 \times 1 \times 3 = 4 \times 9 \times 4 \times 6 = 864$ , le premier, en augmentant le nombre d'obstacles, le second, en augmentant le nombre de modes.

Rappelons que la première extraction donnée par  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$  où  $\mathbb{B}$  est définie selon le critère (8.4) avec  $\mathbb{D} = \mathbb{I}$  se veut conserver les interactions principales et négliger les interactions secondaires. La Figure 8.12 représente le squelette de la matrice extraite  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$  pour  $K = 3 \times 3$ ,  $N = 1$  et différentes valeurs de  $\epsilon$ .

**Remarque 8.10.** Les matrices sont plus creuses dans la partie supérieure que dans la partie inférieure. Il serait intéressant de choisir un critère différent dans les parties supérieures et inférieures afin d'obtenir un squelette comportant des symétries.



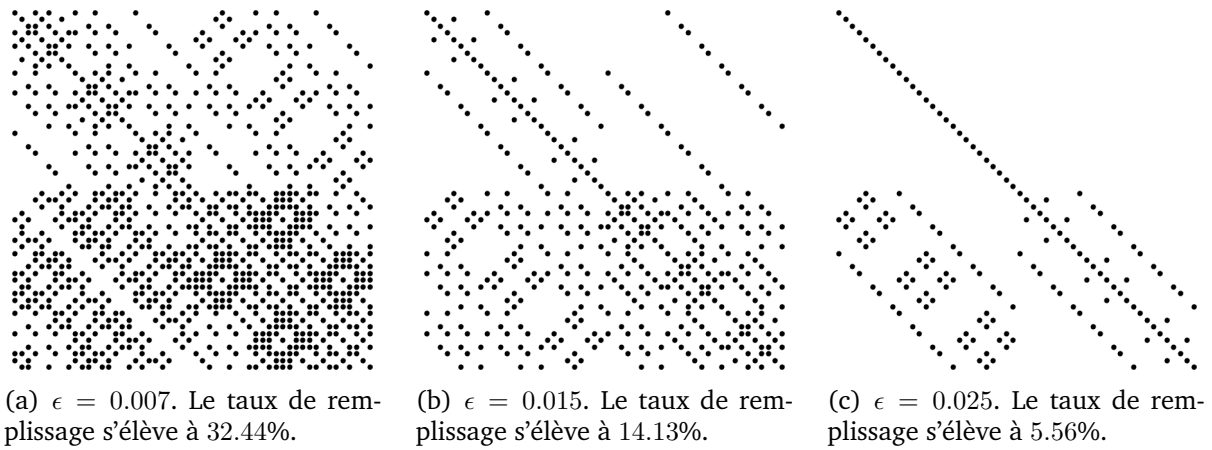


FIGURE 8.12 – Squelette des matrices extraites  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$ .

Les Figures 8.13 à 8.15 illustrent l'évolution du taux de remplissage de la matrice, exprimé en pourcentage, dépendant du critère de tolérance  $\epsilon$ . Les graphiques sont représentés en échelle semi-logarithmique. La Figure 8.13 représente les taux de remplissage des matrices associées à différents nombres d'obstacles pour  $\delta = 0.1$ ,  $d = 1.0$  et  $\lambda = 1.0$ . Les configurations géométriques sont choisies telles que  $K_c = K_1 = 3, 4, 5$  ou 6. Pour ex-

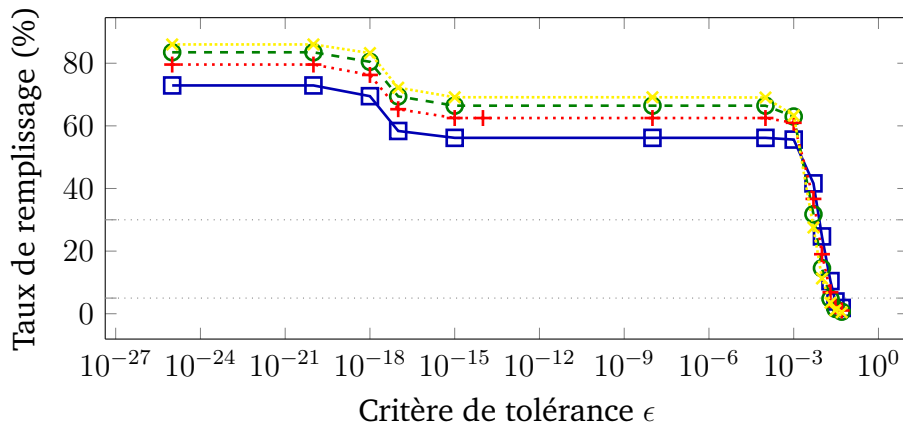


FIGURE 8.13 – Évolution du remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombres d'obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\square$  correspond à  $K = 3 \times 3$  obstacles, la courbe  $+$  correspond  $K = 4 \times 4$  obstacles, la courbe  $\ominus$  correspond à  $K = 5 \times 5$  obstacles et la courbe  $\times$  correspond à  $K = 6 \times 6$  obstacles.

traire une matrice dont le taux de remplissage est compris entre 5 et 30 pourcents, nous observons que le critère de tolérance n'est pas sensible au nombre d'obstacles choisi. La Figure 8.14 représente les taux de remplissage des matrices pour différents rayons d'obstacles, avec  $K = 3 \times 3$ ,  $d = 1.0$  et  $\lambda = 1.0$ . Les rayons  $\delta$  sont choisis tels que  $\delta = 10^{-p}$  pour  $p = 1, 2, 3$  et 4. Nous constatons que, pour extraire une matrice de den-

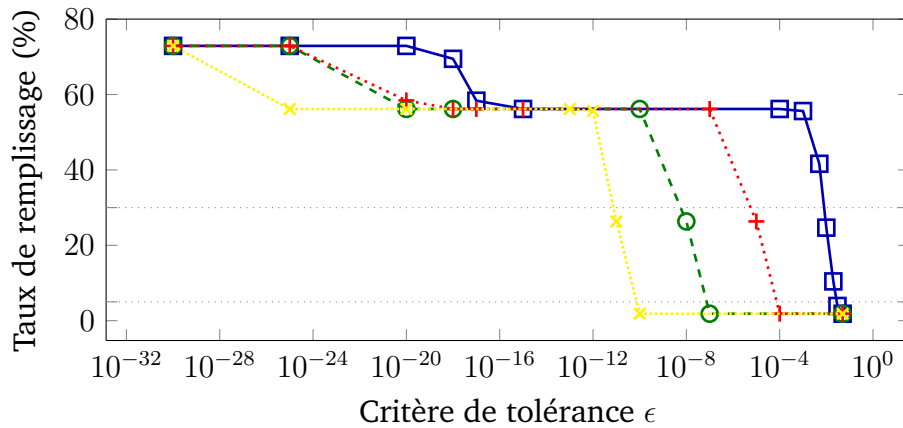


FIGURE 8.14 – Évolution du remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents rayons  $\delta$ , en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\square$  correspond à  $\delta = 0.1$ , la courbe  $\cdot+$  correspond à  $\delta = 0.01$ , la courbe  $\ominus$  correspond à  $\delta = 0.001$  et la courbe  $\cdot\times$  correspond à  $\delta = 0.0001$ .

sité donnée, le critère de tolérance  $\epsilon$  dépend méticuleusement de la taille des obstacles. Dans la tranche de pourcentages qui nous intéresse, à un rayon  $\delta$  et taux de remplissage donnés, le critère  $\epsilon$  apparaît proportionnel à  $\delta^3$ , ici  $10^{-3}$ ,

$$\epsilon = \text{cte } \delta^3 \quad (8.13)$$

La Figure 8.15 représente les taux de remplissage des matrices pour différentes distances séparant les obstacles, avec  $K = 3 \times 3$ ,  $\delta = 0.1$  et  $\lambda = 1$ . Les distances  $d$  sont choisies entre  $3\delta$  et  $10\lambda$ , telles que  $d = 0.3, 0.5, 1.0, 5.0$  et  $10.0$ . La Figure 8.15 montre que le critère de tolérance dépend également de la distance qui sépare les obstacles. En effet, plus les obstacles sont proches et plus les interactions sont importantes. En particulier, le critère  $\epsilon$  est inversement proportionnel à la distance qui sépare les obstacles, et comme (8.13) a lieu, nous déduisons que pour obtenir un taux de remplissage donné, le critère associé est donné par

$$\epsilon = \text{cte } \frac{\delta^3}{d},$$

où la constante cte joue sur le taux de remplissage en pourcentage. Plus le taux de remplissage est élevé et plus la constante est petite. Nous observons à la fois sur les Figures 8.14 et 8.15 que pour obtenir un taux remplissage voisin de 25%, la constante est à peu près égale à 10.

Nous étudions à présent la seconde extraction  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$  où  $\mathbb{B}$  est définie selon le critère (8.5). Nous rappelons que cette extraction consiste à tenir compte des interactions entre

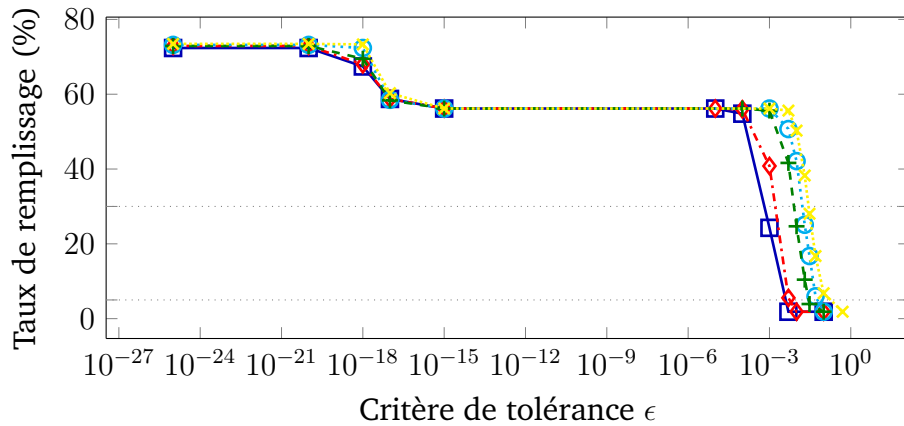


FIGURE 8.15 – Évolution du remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différentes distances entre obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\square$  correspond à  $d = 10.0$ , la courbe  $\diamond$  correspond  $d = 5.0$ , la courbe  $+$  correspond à  $d = 1.0$ , la courbe  $\circ$  correspond à  $d = 0.5$  et la courbe  $\times$  correspond à  $d = 0.3$ .

obstacles *voisins* uniquement. Nous ajoutons par ailleurs un filtre sur les coefficients de la matrice qui sont de l'ordre du zéro machine ( $10^{-17}$ ). La Figure 8.16 représente le squelette de la matrice extraite  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$  pour  $K = 3 \times 3$ ,  $N = 1$  et différentes valeurs de  $d_{\max}$ . À la différence de la première extraction, les matrices obtenues admettent des

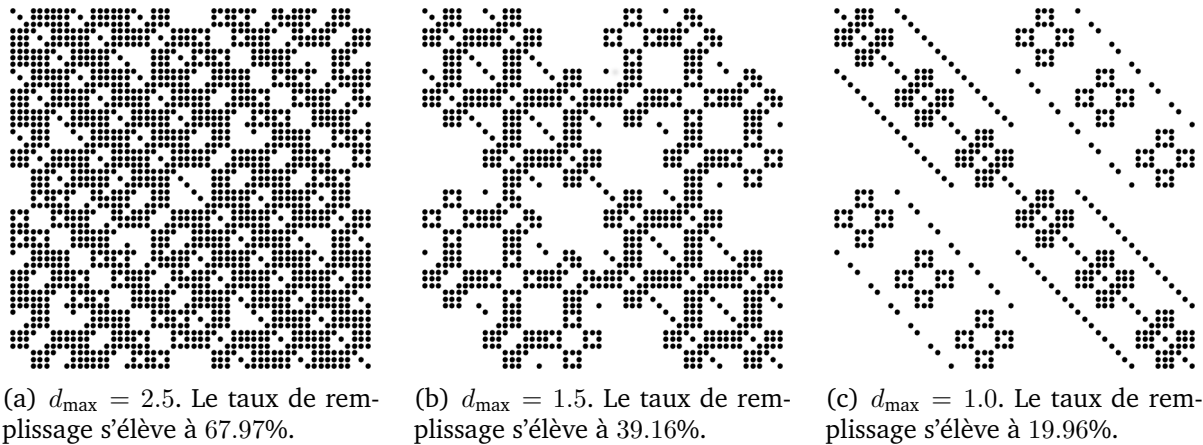


FIGURE 8.16 – Squelette des matrices extraites  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$ .

squelettes presque symétriques – ce qui est normal vis-à-vis du critère considéré. Tout du moins, le taux de remplissage de la partie supérieure est le même que celui de la partie inférieure. Les Figures 8.17 à 8.19 illustrent l'évolution du taux de remplissage de la matrice, exprimé en pourcentage, dépendant du critère de tolérance  $d_{\max}$ . La Figure 8.17 représente les taux de remplissage des matrices associées à différents nombres d'obstacles pour  $\delta = 0.1$ ,  $d = 1.0$  et  $\lambda = 1.0$ . Les configurations géométriques sont choi-

sies telles que  $K_c = K_1 = 3, 5, 7$  ou  $9$ . La Figure 8.17 montre que, lorsque la distance  $d$

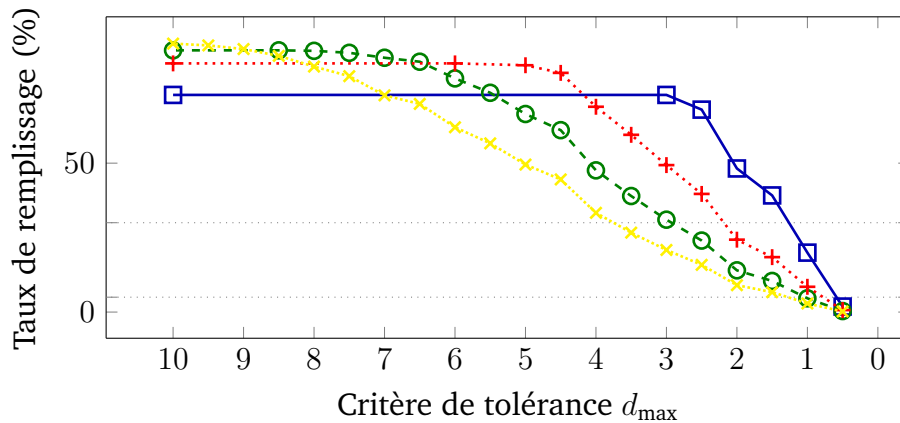


FIGURE 8.17 – Évolution du taux de remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombres d'obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\square$  correspond à  $K = 3 \times 3$  obstacles, la courbe  $\cdot+$  correspond  $K = 5 \times 5$  obstacles, la courbe  $\ominus$  correspond à  $K = 7 \times 7$  obstacles et la courbe  $\cdot\times$  correspond à  $K = 9 \times 9$  obstacles.

séparant les obstacles est fixée, le taux de remplissage dépend (évidemment) du nombre d'obstacles considéré. Pour éviter cela, il est nécessaire de tenir compte de la distance maximale entre deux centres dans la configuration géométrique, en représentant l'évolution du taux de remplissage en fonction de  $d_{\max}/\max(|d_{k,\ell}|)$ . Cela est illustré dans la Figure 8.18. Plus le nombre d'obstacles augmente et moins la dépendance du taux de

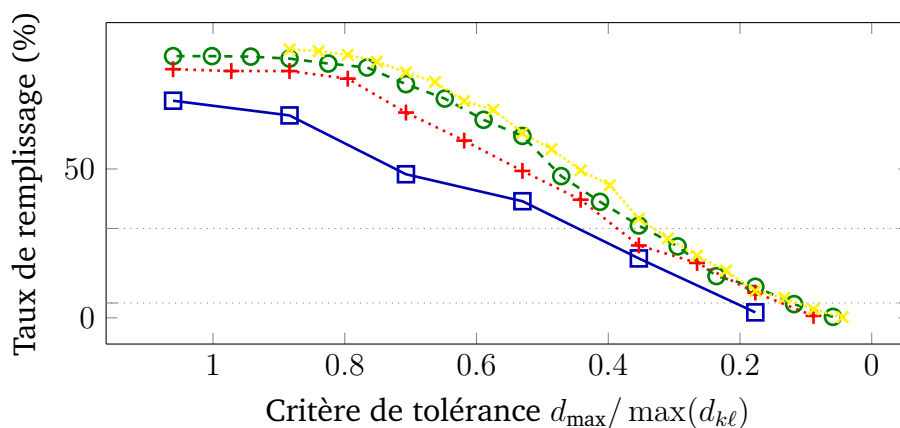


FIGURE 8.18 – Évolution du taux de remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombre d'obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\square$  correspond à  $K = 3 \times 3$  obstacles, la courbe  $\cdot+$  correspond  $K = 5 \times 5$  obstacles, la courbe  $\ominus$  correspond à  $K = 7 \times 7$  obstacles et la courbe  $\cdot\times$  correspond à  $K = 9 \times 9$  obstacles.

remplissage avec le nombre d'obstacles est accentuée. Ainsi, le critère  $d_{\max}$  peut être

choisi comme une proportion de la distance maximale,

$$d_{\max} = \text{cte} \max_{k,\ell=1,\dots,K} (|\mathbf{d}_{k,\ell}|), \quad \text{avec} \quad 0 < \text{cte} \leq 1.$$

La Figure 8.19 représente les taux de remplissage des matrices pour différentes distances  $d$  séparant les obstacles, avec  $K = 3 \times 3$ ,  $\delta = 0.1$  et  $\lambda = 1.0$ . Les distances  $\delta$  sont choisies entre  $3\delta$  et  $10\lambda$ , telles que  $d = 0.3, 0.5, 1.0, 5.0$  et  $10.0$ . Le taux de remplissage

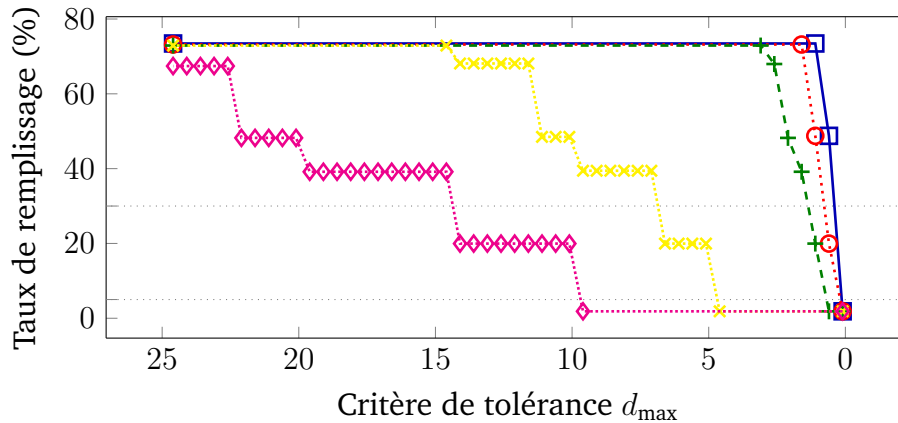


FIGURE 8.19 – Évolution du taux de remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombre d'obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\text{---}\square\text{---}$  correspond à  $d = 0.3$ , la courbe  $\text{---}\circ\text{---}$  correspond  $d = 0.5$ , la courbe  $\text{---}+\text{---}$  correspond à  $d = 1.0$ , la courbe  $\text{---}\times\text{---}$  correspond à  $d = 5.0$  et la courbe  $\text{---}\diamond\text{---}$  correspond à  $d = 10.0$ .

apparaît proportionnel à la distance  $d$  séparant deux obstacles voisins. En particulier, nous déduisons un critère pour la définition de  $d_{\max}$ , donné par

$$d_{\max} = \text{cte} \left( \max_{k,\ell=1,\dots,K} (|\mathbf{d}_{k,\ell}|) \right) d, \quad \text{avec} \quad 0 < \text{cte} \left( \max_{k,\ell=1,\dots,K} (|\mathbf{d}_{k,\ell}|) \right) \leq \frac{\max(|\mathbf{d}_{k,\ell}|)}{d}.$$

Pour obtenir un taux de remplissage de l'ordre de 20%,  $\text{cte}(\max(|\mathbf{d}_{k,\ell}|))$  peut être choisie entre 1.07 et 1.20.

Nous avons mis en place deux procédés d'extraction et mis en évidence la dépendance des critères de tolérance vis-à-vis des paramètres géométriques et physiques. Il reste à garantir et vérifier que ces matrices contiennent effectivement l'information nécessaire à l'obtention d'une bonne approximation de la solution.

## 8.3 Le stockage et l'assemblage

Dans la Section 8.2, nous avons étudié le conditionnement des matrices induites et nous avons mis en place deux extractions permettant – nous l'espérons – de collecter l'ensemble des interactions apparaissant comme plus importantes que d'autres. Dans cette section, nous décrivons la technique utilisée pour stocker de manière compacte ces matrices, puis les assembler. Une brève introduction est donnée dans la Section 8.1.4. Enfin, nous définirons l'action d'une matrice dite « blocs » sur un vecteur donné en vue de l'utilisation de l'algorithme de résolution itérative.

### 8.3.1 Stockage par bloc

Nous rappelons que la matrice  $\mathbb{A}$  issue d'une des formulations de la méthode spectrale, est de taille  $2KN(N+2) \times 2KN(N+2)$ , où  $K$  désigne le nombre d'obstacles et  $N$  le nombre de modes. La définition numérique d'une telle matrice devient rapidement fastidieuse car elle requiert beaucoup de mémoire RAM.

La technique de stockage requiert un pré-traitement de la géométrie. Nous introduisons  $\mathcal{O}_K$  le sous-ensemble de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{O}_K = \{(\ell, k, \mathbf{c}_\ell - \mathbf{c}_k) \mid k, \ell = 1, \dots, K, k \neq \ell\}.$$

Son cardinal est égal à  $K(K-1)$ . Nous notons  $\mathcal{O}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  qui contient l'ensemble des vecteurs deux à deux distincts reliant les centres des obstacles,

$$\mathcal{O} = \{\mathbf{c}_\ell - \mathbf{c}_k \mid k, \ell = 1, \dots, K, k \neq \ell\}.$$

Son cardinal, noté  $N_{\text{dist}}$  conformément à (8.6), est au plus égal à  $K(K-1)$ . À un élément de  $\mathcal{O}$  peut être associé plusieurs couples  $(k, \ell)$ . Nous considérons  $\Upsilon$  la fonction qui à un élément de  $\mathcal{O}$  associe un ou plusieurs éléments de  $\mathcal{O}_K$ , puis en extrait les deux premiers attributs dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Pour tout  $k, \ell = 1, \dots, K$  avec  $k \neq \ell$ , nous avons

$$\Upsilon(\mathbf{c}_\ell - \mathbf{c}_k) = \{(\ell, k) \mid (\ell, k, \mathbf{c}_\ell - \mathbf{c}_k) \in \mathcal{O}_K\}.$$

**Remarque 8.11.** La connaissance de  $\mathcal{O}$  et de son image par  $\Upsilon$  donnée par  $\Upsilon(\mathcal{O})$  entraîne la connaissance de  $\mathcal{O}_K$ .

Nous introduisons la matrice  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  de taille  $N(N+2) \times 4N_{\text{dist}}N(N+2)$  divisée en

quatre parties, chacune comportant  $N_{\text{dist}}$  blocs de taille  $N(N + 2) \times N(N + 2)$ ,

$$\mathbb{A}_{\text{bloc}} = \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel\parallel\parallel} \quad \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel\times} \quad \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times\parallel} \quad \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times\times} \right) \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\star\star} = \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\star\star,1} \quad \dots \quad \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\star\star,N_{\text{dist}}} \right).$$

Cette matrice est définie selon l'Algorithme 1. Cet algorithme peut être utilisé pour

---

**Algorithme 1** Construction de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  connaissant  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_K$

---

```

 $p \leftarrow 0$ 
for  $d \in \mathcal{O}$  do
     $p \leftarrow p + 1$ 
     $(\ell_0, k_0) \leftarrow$  un élément de  $\Upsilon(\{d\})$  choisi arbitrairement
     $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\star\star,p} \leftarrow \mathbb{A}_{\ell_0 k_0}^{\star\star}$ 
end for

```

---

n'importe quelle configuration géométrique. Cependant, il nécessite la connaissance *a priori* des sous-ensembles  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_K$ . Un deuxième algorithme peut être utilisé pour calculer la matrice « blocs » tout en construisant les sous-ensembles  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_K$  comme cela est présenté ci-après dans l'Algorithme 2. Cet algorithme est mieux adapté à une

---

**Algorithme 2** Construction de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ , de  $\mathcal{O}$  et de  $\mathcal{O}_K$

---

```

 $p \leftarrow 0$ 
 $\mathcal{O} \leftarrow \emptyset$ 
 $\mathcal{O}_K \leftarrow \emptyset$ 
for  $k = 1$  à  $K$  do
    for  $\ell = 1$  à  $K$  do
        if  $k \neq \ell$  then
             $d \leftarrow c_k - c_\ell$ 
             $\mathcal{O}_K \leftarrow \mathcal{O}_K \cup \{(k, \ell, d)\}$ 
            if  $d \notin \mathcal{O}$  then
                 $p \leftarrow p + 1$ 
                 $\mathcal{O} \leftarrow \mathcal{O} \cup \{d\}$ 
                 $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\star\star,p} \leftarrow \mathbb{A}_{\ell k}^{\star\star}$ 
            end if
        end if
    end for
end for

```

---

configuration arbitraire d'obstacles. Cependant, les  $K(K - 1)$  parcours de l'ensemble  $\mathcal{O}$ , effectués dans le but de déterminer si le bloc correspondant à l'interaction associée au vecteur  $d$  a déjà été calculée, sont des opérations coûteuses en temps de calcul.

**Remarque 8.12.** D'un point de vue numérique, l'ensemble  $\mathcal{O}$  est une liste ordonnée d'éléments de  $\mathbb{R}^3$  qui est ordonnée de la même manière que la succession de blocs à l'intérieur

de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ . En vue de l'assemblage, il est donc possible de déterminer pour chaque partie de  $\mathbb{A}$ , à  $k$  et  $\ell$  fixés, quel est l'indice associé au vecteur  $\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_\ell$  dans  $\mathcal{O}$  et par conséquent dans  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ . Il n'est donc pas nécessaire de stocker l'ensemble  $\mathcal{O}_K$ . Toutefois, à chaque itération, il sera obligatoire de parcourir la liste  $\mathcal{O}$  et d'identifier l'indice associé.

Nous mettons en place un procédé d'accélération algorithmique lorsque les obstacles sont uniformément répartis sur un segment, dans une section rectangulaire d'un plan, ou dans un volume parallélépipédique donné.

### Obstacles uniformément répartis sur un segment

Nous considérons  $K$  sphères de rayon  $\delta$  réparties uniformément sur un segment  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  de  $\mathbb{R}^3$  telles que leurs centres soient donnés par

$$\mathbf{c}_k = \left(1 - \frac{k-1}{K-1}\right) \mathbf{a} + \frac{k-1}{K-1} \mathbf{b}, \quad k = 1, \dots, K.$$

La configuration géométrique est illustrée sur la Figure 8.20 La distance séparant deux

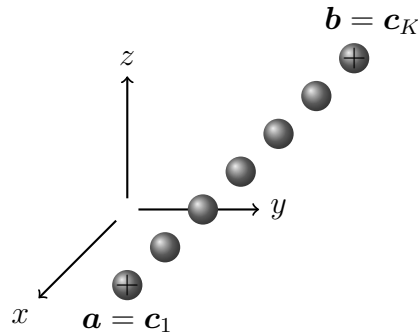


FIGURE 8.20 – Configuration géométrique :  $K$  sphères uniformément réparties sur le segment  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

obstacles consécutifs, notée  $d$ , est donnée par

$$d = \frac{|\mathbf{b} - \mathbf{a}|}{K - 1}.$$

Pour ce cas particulier, il est possible de prédire les sous-ensembles  $\mathcal{O}_K$  et  $\mathcal{O}$  sans n'avoir à faire aucun calcul. En effet, l'ensemble  $\mathcal{O}_{\text{ligne}}$  associé est donné par

$$\mathcal{O}_{\text{ligne}} = \{\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_k \mid k = 2, \dots, K\} \cup \{\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_1 \mid k = 2, \dots, K\}.$$



De plus, son image par  $\Upsilon$  est complètement décrite pour  $k = 2, \dots, K$  par

$$\begin{aligned}\Upsilon(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_k) &= \{(\ell, \ell + k - 1) \mid \ell = 1, \dots, K - k + 1\}, \\ \Upsilon(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_1) &= \{(\ell + k - 1, \ell) \mid \ell = 1, \dots, K - k + 1\}.\end{aligned}\tag{8.14}$$

La Figure 8.21 schématise une des parties  $\mathbb{A}^{**}$  associée à la matrice pour  $K = 6$  et ce qu'il advient de la partie  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**}$ . Chaque partie  $\mathbb{A}^{**}$  possède  $K^2$  blocs de taille  $N(N +$

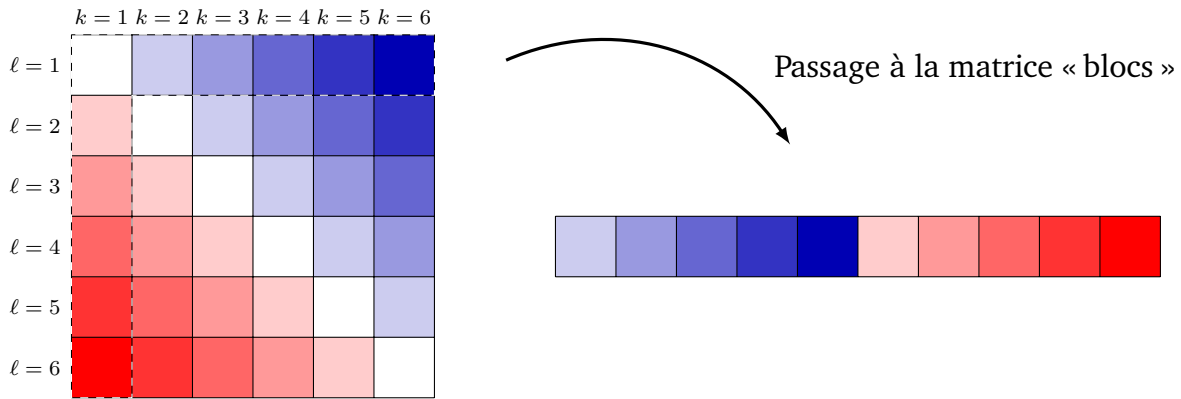


FIGURE 8.21 – À gauche, est schématisée une des parties de la matrice globale  $\mathbb{A}$  et à droite, la partie correspondante de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ . Les blocs ayant la même couleur sont identiques, les blocs de couleurs différentes sont deux à deux distincts.

$2) \times N(N + 2)$ , au total  $4K^2$  blocs dans  $\mathbb{A}$ , tandis que la matrice « blocs »  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  n'en possède que  $8(K - 1)$ . Nous passons d'une proportion quadratique du nombre de blocs en fonction de  $K$  à une proportion linéaire.

Le calcul numérique de cette matrice est réalisé à l'aide de l'Algorithme 1. L'ensemble  $\mathcal{O}$  n'est pas vraiment parcouru en tant que tel et n'est jamais assemblé. Cela est remplacé par une boucle parcourant l'ensemble des obstacles comme cela est présenté dans l'Algorithme 3. Par ailleurs, la connaissance de la fonction  $\Upsilon$  n'est plus nécessaire.

---

**Algorithme 3** Construction de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  pour une configuration linéaire d'obstacles

---

```

p ← 0
for k = 2 à K do
    p ← p + 1
     $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p}$  ←  $\mathbb{A}_{1k}^{**}$ 
     $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,K-1+p}$  ←  $\mathbb{A}_{k1}^{**}$ 
end for
    
```

---

### Obstacles uniformément répartis dans un plan

Nous considérons  $K_c \times K_1$  sphères de rayon  $\delta$  uniformément réparties dans un pavé de  $\mathbb{R}^2$  inclus dans un plan de vecteurs directeurs  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  et  $\mathbf{d} - \mathbf{a}$  tels que

$$|\mathbf{d} - \mathbf{a}| = \frac{K_1 - 1}{K_c - 1} |\mathbf{b} - \mathbf{a}|.$$

Les centres des sphères  $\mathbf{c}_k$  sont définis pour  $k = (k_1 - 1)K_c + k_c$  par

$$\mathbf{c}_k = \left(1 - \frac{k_c - 1}{K_c - 1} - \frac{k_1 - 1}{K_1 - 1}\right) \mathbf{a} + \frac{k_c - 1}{K_c - 1} \mathbf{b} + \frac{k_1 - 1}{K_1 - 1} \mathbf{d}, \quad k_c = 1, \dots, K_c, \quad k_1 = 1, \dots, K_1. \quad (8.15)$$

Cela est illustré sur la Figure 8.22. La distance séparant deux obstacles consécutifs, c'est-

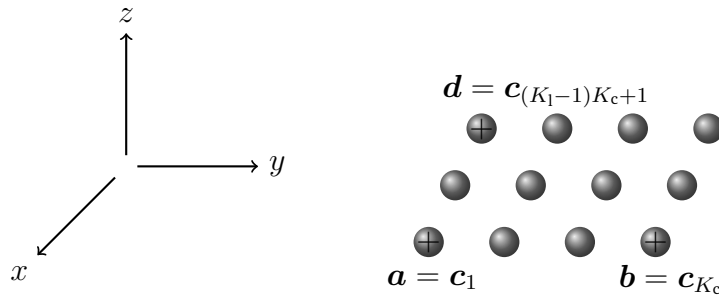


FIGURE 8.22 – Configuration géométrique :  $K_c \times K_1$  sphères uniformément réparties dans le pavé  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{d}]$ .

à-dire deux obstacles tels que  $k_1$  constant et  $k_c$  varie de 1 ou  $k_c$  constant et  $k_1$  varie de 1, est donnée par

$$d = \frac{|\mathbf{d} - \mathbf{a}|}{K_1 - 1} = \frac{|\mathbf{b} - \mathbf{a}|}{K_c - 1}.$$

Ici encore, les ensembles  $\mathcal{O}_K$  et  $\mathcal{O}$  peuvent être déterminés sans effectuer de calcul. Nous notons  $\mathcal{O}_{\text{plan}}$  l'ensemble associé, donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{plan}} = & \{ \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_1 \mid k = 2, \dots, K \} \cup \{ \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_k \mid k = 2, \dots, K \} \\ & \cup \{ \mathbf{c}_{\ell_c} - \mathbf{c}_k \mid k = (k_1 - 1)K_c + 1, \ell_c = 2, \dots, K_c, k_1 = 2, \dots, K_1 \} \\ & \cup \{ \mathbf{c}_{\ell} - \mathbf{c}_{k_c} \mid \ell = (\ell_1 - 1)K_c + 1, k_c = 2, \dots, K_c, \ell_1 = 2, \dots, K_1 \}. \end{aligned}$$

De plus, son image par  $\Upsilon$  est décrite à l'aide des expressions suivantes :

- pour tout  $k = 2, \dots, K$ ,

$$\begin{aligned}\Upsilon(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_k) &= \{(\ell, \ell + k - 1) + p K_c \mid \ell = 1, \dots, K_c - k_c + 1, p = 0, \dots, K_1 - k_1\}, \\ \Upsilon(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_1) &= \{(\ell + k - 1, \ell) + p K_c \mid \ell = 1, \dots, K_c - k_c + 1, p = 0, \dots, K_k - \ell_1\},\end{aligned}\tag{8.16}$$

- pour tout  $k = (k_1 - 1)K_c + 1$  avec  $k_1 = 2, \dots, K_1$ , pour tout  $\ell_c = 2, \dots, K_c$ ,

$$\Upsilon(\mathbf{c}_{\ell_c} - \mathbf{c}_k) = \{(\ell, \ell + k - 1) + p K_c \mid \ell = \ell_c, \dots, K_c - k_c + 1, p = 0, \dots, K_1 - k_1\},\tag{8.17}$$

- pour tout  $\ell = (\ell_1 - 1)K_c + 1$  tel que  $\ell_1 = 2, \dots, K_1$ , pour tout  $k_c = 2, \dots, K_c$ ,

$$\Upsilon(\mathbf{c}_\ell - \mathbf{c}_{k_c}) = \{(\ell + k - 1, \ell) + p K_c \mid \ell = k_c, \dots, K_c - \ell_c + 1, p = 0, \dots, K_1 - \ell_1\}.\tag{8.18}$$

La Figure 8.23 schématise une des parties  $\mathbb{A}^{**}$  associée à la matrice pour  $K_c = 4$  et  $K_1 = 3$  et illustre la manière dont sont répartis les blocs successifs à l'intérieur de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**}$ . La matrice  $\mathbb{A}$  se décompose en  $4 K^2 = 4 K_c^2 K_1^2$  blocs de taille  $N(N + 2) \times N(N + 2)$  tandis que la matrice « blocs »  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  n'en comporte que  $4 N_{\text{dist}}$ , où  $N_{\text{dist}}$  est égal à

$$N_{\text{dist}} = (2K_1 - 1)(2K_c - 1) - 1.$$

Donnons un exemple. Si nous considérons 100 par 100 obstacles, le nombre de blocs est réduit de 400 000 000 à 158 400.

**Remarque 8.13.** *La structure matricielle associée à une configuration linéaire d'obstacles est imbriquée dans la structure matricielle associée à la configuration planaire. En effet, nous retrouvons cette structure première ligne-première colonne se répétant sur la diagonale, d'une part, appliquée aux macro-blocs – définis en fixant  $k_1$  et  $\ell_1$  et faisant varier  $k_c$  et  $\ell_c$  –, d'autre part, à l'intérieur de chacun de ces macro-blocs.*

Le calcul numérique de la matrice « blocs » est basé sur l'Algorithme 1, où le parcours de l'ensemble  $\mathcal{O}$  est remplacé par le parcours des obstacles associés aux macro-blocs et aux blocs concernés. Cela est présenté dans l'Algorithme 4.

**Algorithm 4** Construction de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  pour une configuration planaire d'obstacles

---

```

 $p \leftarrow 0$ 
for  $k_c = 2$  à  $K_c$  do
   $p \leftarrow p + 1$ 
   $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p} \leftarrow \mathbb{A}_{1 k_c}^{**}$ 
   $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,K_c-1+p} \leftarrow \mathbb{A}_{k_c 1}^{**}$ 
end for
 $p \leftarrow p + K_c - 1$ 
for  $k_1 = 1$  à  $K_1$  do
  for  $k_c = 1$  à  $K_c$  do
     $p \leftarrow p + 1$ 
     $k \leftarrow (k_1 - 1)K_c + k_c$ 
     $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p} \leftarrow \mathbb{A}_{1 k}^{**}$ 
  end for
  for  $\ell_c = 2$  à  $K_c$  do
     $p \leftarrow p + 1$ 
     $k \leftarrow (k_1 - 1)K_c + 1$ 
     $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p} \leftarrow \mathbb{A}_{\ell_c k}^{**}$ 
  end for
end for
for  $\ell_1 = 2$  à  $K_1$  do
  for  $k_c = 1$  à  $K_c$  do
     $p \leftarrow p + 1$ 
     $\ell \leftarrow (\ell_1 - 1)K_c + 1$ 
     $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p} \leftarrow \mathbb{A}_{\ell k_c}^{**}$ 
  end for
  for  $\ell_c = 2$  à  $K_c$  do
     $p \leftarrow p + 1$ 
     $\ell \leftarrow (\ell_1 - 1)K_c + \ell_c$ 
     $\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p} \leftarrow \mathbb{A}_{\ell_c 1}^{**}$ 
  end for
end for

```

---

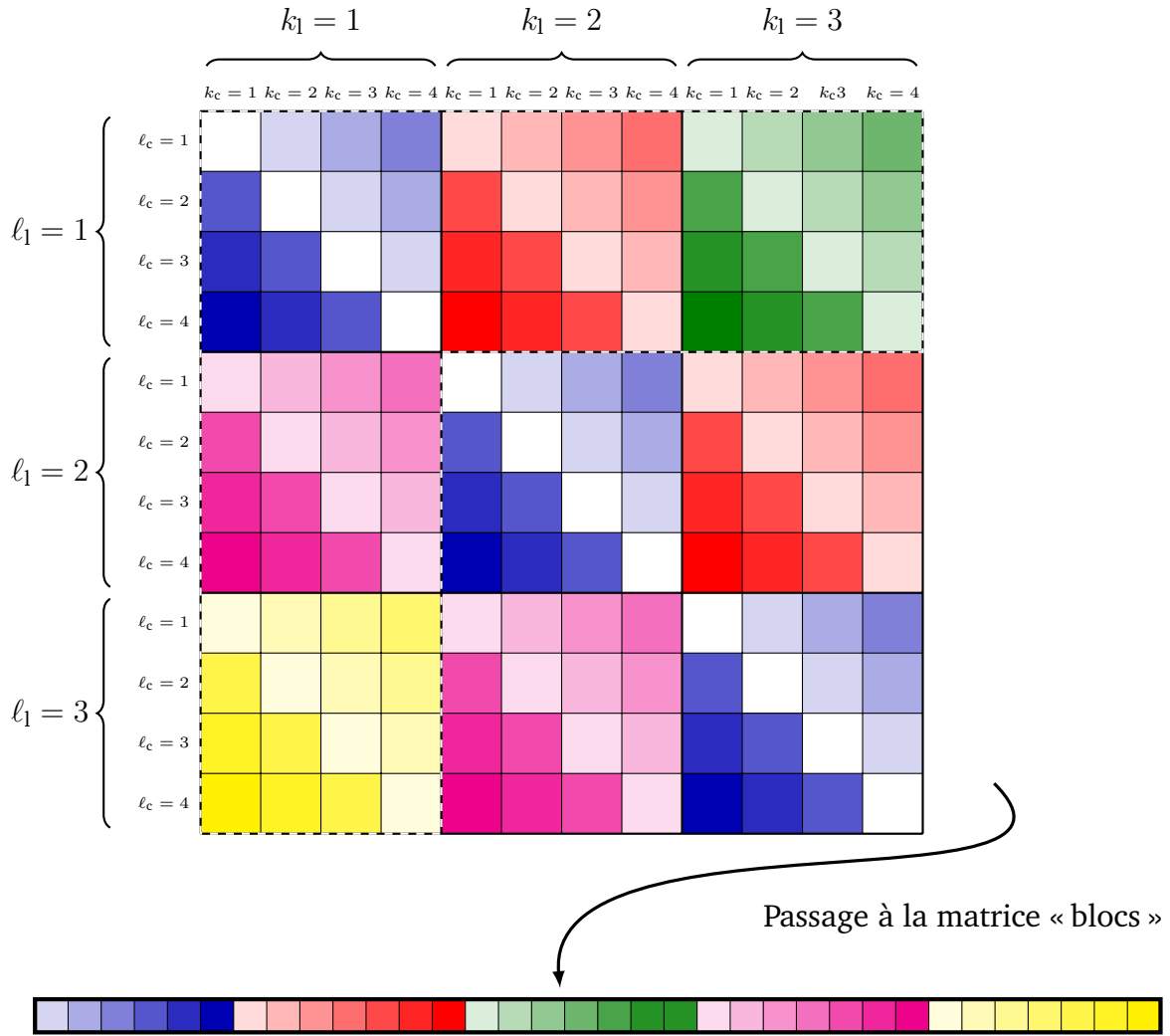


FIGURE 8.23 – Au dessus, est schématisée une des parties de la matrice globale  $\mathbb{A}$  et en dessous, la partie correspondante de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ . Les blocs ayant la même couleur sont identiques, les blocs de couleurs différentes sont deux à deux distincts.

### Obstacles uniformément répartis dans un volume parallélépipédique

Nous considérons  $K_h \times K_c \times K_l$  sphères de rayon  $\delta$  uniformément réparties dans un pavé de  $\mathbb{R}^3$  de vecteurs directeurs  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d} - \mathbf{a}$  et  $\mathbf{h} - \mathbf{a}$  tels que

$$|\mathbf{d} - \mathbf{a}| = \frac{K_l - 1}{K_c - 1} |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \quad \text{et} \quad |\mathbf{h} - \mathbf{a}| = \frac{K_h - 1}{K_c - 1} |\mathbf{b} - \mathbf{a}|.$$

Les centres des sphères  $\mathbf{c}_k$  sont définis pour  $k = (k_h - 1)K_l K_c + (k_l - 1)K_c + k_c$  par

$$\mathbf{c}_k = \left(1 - \frac{k_c - 1}{K_c - 1} - \frac{k_l - 1}{K_l - 1} - \frac{k_h - 1}{K_h - 1}\right) \mathbf{a} + \frac{k_c - 1}{K_c - 1} \mathbf{b} + \frac{k_l - 1}{K_l - 1} \mathbf{d} + \frac{k_h - 1}{K_h - 1} \mathbf{h},$$

où  $k_c = 1, \dots, K_c$ ,  $k_l = 1, \dots, K_l$  et  $k_h = 1, \dots, K_h$ . Cela est illustré sur la Figure 8.24 pour  $K_h = 2$ ,  $K_c = 4$  et  $K_l = 3$ . La distance séparant deux obstacles consécutifs est donnée

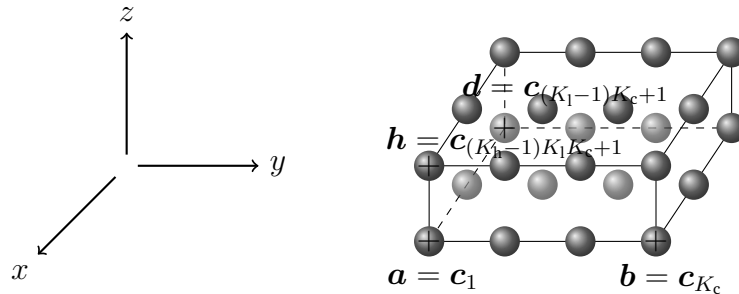


FIGURE 8.24 – Configuration géométrique :  $K_h \times K_c \times K_l$  sphères uniformément réparties dans le pavé  $[a, b] \times [a, d] \times [a, h]$ .

par

$$d = \frac{|d - a|}{K_l - 1} = \frac{|b - a|}{K_c - 1} = \frac{|h - a|}{K_h - 1}.$$

Comme pour le passage d'une configuration linéaire à une configuration planaire, la structure matricielle associée est une structure imbriquée où se retrouvent les structures plan et ligne. Cela est schématisé sur la Figure 8.25. Nous laissons au lecteur le soin de déterminer, s'il le désire, les ensembles  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_K$  associés. La matrice  $\mathbb{A}$  comporte  $4K^2 = 4K_h^2 K_c^2 K_l^2$  blocs tandis que la matrice blocs admet  $4N_{\text{dist}}$  blocs où

$$N_{\text{dist}} = (2K_h - 1)(2K_c - 1)(2K_l - 1) - 1.$$

Par exemple, pour  $10 \times 10 \times 10$  obstacles, le nombre de blocs passe de 4 000 000 à 27 432. L'algorithme de construction de la matrice « blocs » s'appuie sur l'Algorithme 4 auquel il faut ajouter un parcours sur  $k_h = 1, \dots, K_h$ .

Nous avons mis en place un moyen de stocker l'ensemble de l'information nécessaire à la résolution à moindre coût. Les techniques d'extraction présentées dans la Section 8.2.3 peuvent être appliquées directement sur les matrices « blocs ». La partie creuse extraite peut ensuite être assemblée comme matrice de type creux et demande beaucoup moins de ressources en mémoire que la matrice globale – surtout pour un très grand nombre d'obstacles. Ceci est l'objet de la section suivante.

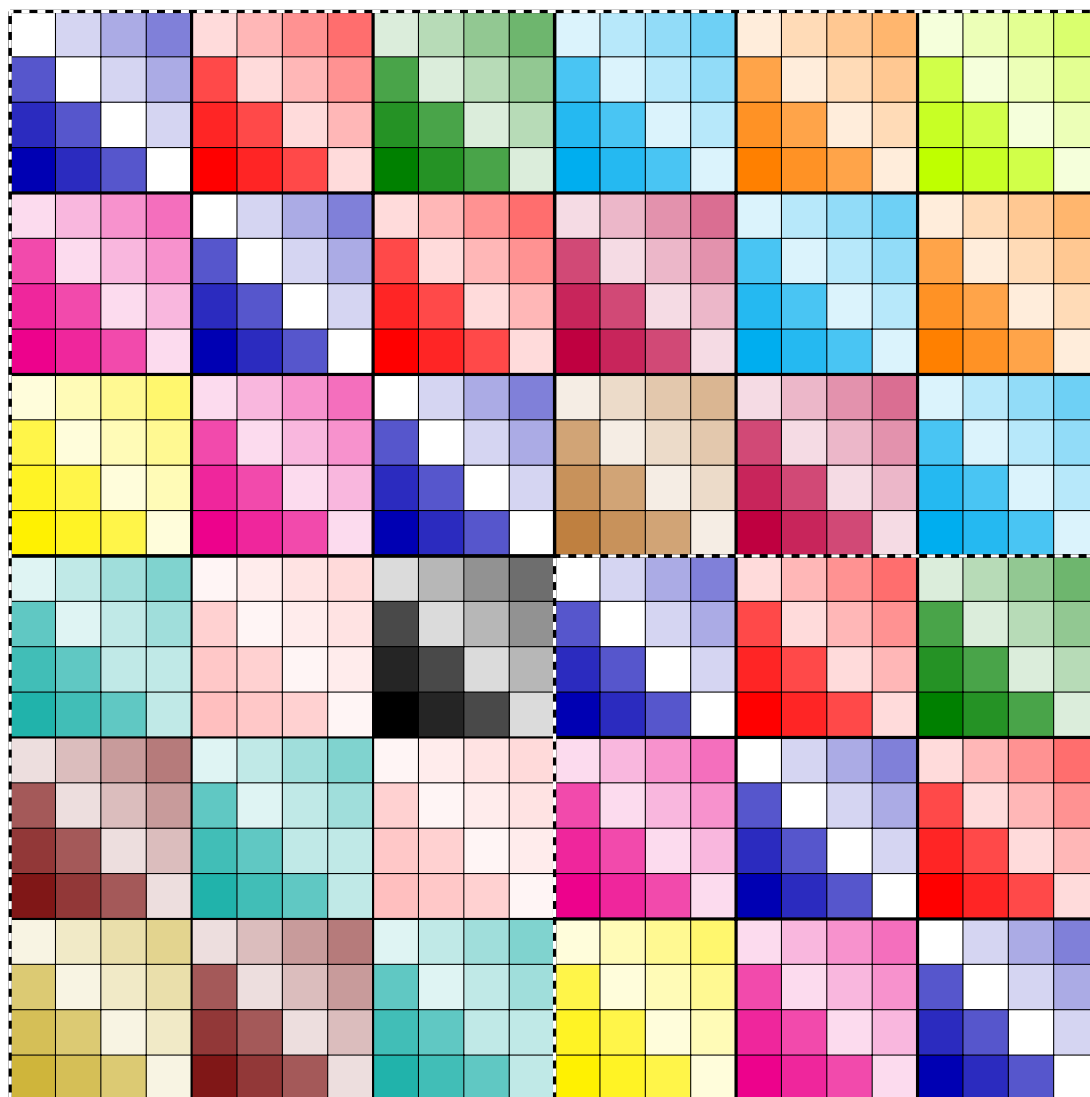


FIGURE 8.25 – Schéma d'une des parties de la matrice globale  $\mathbb{A}$ . Les blocs ayant la même couleur sont identiques, les blocs de couleurs différentes sont deux à deux distincts.

### 8.3.2 Assemblage des matrices « blocs »

Comme pour la technique de stockage, la méthode d'assemblage requiert une connaissance totale de la géométrie et des ensembles  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_K$  ou de l'ensemble  $\mathcal{O}$  et son image par  $\Upsilon$ , introduits dans la Section 8.3.1.

Nous considérons la matrice  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  obtenue par construction en suivant l'un des Algorithmes 1 à 4. Nous décomposons cette matrice « blocs » sous la forme

$$\mathbb{A}_{\text{bloc}} = \mathbb{B}_{\text{bloc}} + \mathbb{C}_{\text{bloc}}$$

où  $\mathbb{B}_{\text{bloc}}$  est définie selon l'un critère d'extraction (8.4) ou (8.5) adapté aux matrices « blocs » et  $\mathbb{C}_{\text{bloc}}$  désigne le reste (8.7). Nous supposons que le résultat de l'extraction nous donne une matrice  $\mathbb{B}_{\text{bloc}}$  dont le taux de remplissage est tel que le stockage de type creux soit plus avantageux qu'un stockage classique. La matrice  $\mathbb{B}_{\text{bloc}}$  peut être assemblée à l'aide de l'Algorithme 5. Cet algorithme peut être appliqué pour n'importe quelle

---

**Algorithm 5** Assemblage de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  connaissant  $\mathcal{O}$  et  $\Upsilon(\mathcal{O})$

---

```

 $q \leftarrow 0$ 
for  $i = 1$  à  $2KN(N+2)$  do
     $q \leftarrow q + 1$ 
     $i_q \leftarrow i$ 
     $j_q \leftarrow i$ 
     $a_q \leftarrow 1$ 
end for
 $p \leftarrow 0$ 
for  $d \in \mathcal{O}$  do
     $p \leftarrow p + 1$ 
    for  $n = 1$  à  $N$  do
        for  $m = -n$  à  $n$  do
            for  $\nu = 1$  à  $N$  do
                for  $\mu = -\nu$  à  $\nu$  do
                     $a_{q+1} \leftarrow [\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**p}]_{n,m}^{\nu,\mu}$ 
                    if  $|a_{q+1}| > \epsilon_{\text{machine}}$  then
                        for  $(\ell, k) \in \Upsilon(\{d\})$  do
                             $q \leftarrow q + 1$ 
                             $i_q \leftarrow (k-1)N(N+2) + n(n+1) + m$ 
                             $j_q \leftarrow (\ell-1)N(N+2) + \nu(\nu+1) + \mu$ 
                        end for
                    end if
                end for
            end for
        end for
    end for
end for
 $\mathbb{A} \leftarrow \text{SPARSE}(i_q, j_q, a_q, 2KN(N+2), 2KN(N+2))$ 

```

---

configuration géométrique. Cependant, il requiert la connaissance *a priori* de l'ensemble image  $\Upsilon(\mathcal{O})$ . L'algorithme 6 tient compte de l'ordre de construction des blocs successifs et de l'ensemble  $\mathcal{O}$  comme cela est fait dans l'Algorithme 2. Les fonctions SPARSE() et FIND() utilisées en pratique sont les fonctions issues de MATLAB. Cet algorithme ne nécessite ni la construction de  $\mathcal{O}_K$  ni celle de  $\Upsilon(\mathcal{O})$ .



---

**Algorithm 6** Assemblage de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  lorsque  $\mathcal{O}$  et  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  sont bien ordonnés

---

```

 $q \leftarrow 0$ 
for  $i = 1$  à  $2KN(N+2)$  do
     $q \leftarrow q + 1$ 
     $i_q \leftarrow i$ 
     $j_q \leftarrow i$ 
     $a_q \leftarrow 1$ 
end for
for  $k = 1$  à  $K$  do
    for  $\ell = 1$  à  $K$  do
        if  $k \neq \ell$  then
             $p \leftarrow \text{FIND}(p \mid \mathbf{d}_p \in \mathcal{O}, \mathbf{d}_p = \mathbf{c}_\ell - \mathbf{c}_k)$ 
            for  $n = 1$  à  $N$  do
                for  $m = -n$  à  $n$  do
                    for  $\nu = 1$  à  $N$  do
                        for  $\mu = -\nu$  à  $\nu$  do
                             $a_{q+1} \leftarrow [\mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**p}]_{n,m}^{\nu,\mu}$ 
                            if  $|a_{q+1}| > \epsilon_{\text{machine}}$  then
                                 $q \leftarrow q + 1$ 
                                 $i_q \leftarrow (k-1)N(N+2) + n(n+1) + m$ 
                                 $j_q \leftarrow (\ell-1)N(N+2) + \nu(\nu+1) + \mu$ 
                            end if
                        end for
                    end for
                end for
            end for
        end if
    end for
end for
end for
end for
 $\mathbb{A} \leftarrow \text{SPARSE}(i_q, j_q, a_q, 2KN(N+2), 2KN(N+2))$ 

```

---

Pour des distributions uniformes d'obstacles, des algorithmes spécifiques peuvent être utilisés afin d'accélérer le processus, comme les Algorithmes 3 et 4 introduits dans le cadre du stockage pour des configurations linéaires et planaires. Pour le procédé d'assemblage, ils sont basés sur l'Algorithme 5 où la boucle sur  $(\ell, k) \in \Upsilon(\{\mathbf{d}\})$  est remplacée par la ou les boucles appropriées qui nous sont dictées par (8.14) pour une ligne d'obstacles et (8.16), (8.17), (8.18) pour un plan.

### 8.3.3 Action du produit matrice-vecteur

La dernière étape nécessaire à la mise en place du procédé de résolution itérative introduit dans la Section 8.1.4 est l'action (8.10) des matrices « blocs » sur des vecteurs de  $\mathbb{C}^{2KN(N+2)}$  reproduisant le produit matrice-vecteur.

Analysons le produit matrice-vecteur  $\mathbb{A}\mathbf{x}$  où  $\mathbb{A}$  correspond à une matrice issue d'une formulation spectrale. En reprenant la notation (7.34), nous avons pour tout  $\ell = 1, \dots, K$ ,

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{A}\mathbf{x})_{(\ell-1)N(N+2)+1} \\ \vdots \\ (\mathbb{A}\mathbf{x})_{\ell N(N+2)} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\ell, \parallel} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^K \left( \mathbb{A}_{\ell k}^{\parallel \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell k}^{\parallel \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right)$$

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{A}\mathbf{x})_{(K+\ell-1)N(N+2)+1} \\ \vdots \\ (\mathbb{A}\mathbf{x})_{(K+\ell)N(N+2)} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\ell, \times} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^K \left( \mathbb{A}_{\ell k}^{\times \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell k}^{\times \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right).$$

Ainsi, il suffit d'être capable de récupérer les blocs  $\mathbb{A}_{\ell k}^{**}$  correspondants dans  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ , par exemple en utilisant une fonction de type FIND() comme dans l'Algorithme 6.

Lorsque nous considérons des distributions uniformes d'obstacles, il est possible d'éviter cette recherche d'indice.

**Proposition 8.1.** *Pour une configuration linéaire d'obstacles, l'action de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  sur un vec-*

teur  $\mathbf{x}$  est décrite pour tout  $\ell = 1, \dots, K$  par ses différentes composantes,

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{(\ell-1)N(N+2)+1} \\ \vdots \\ (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{\ell N(N+2)} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\ell, \parallel} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \parallel, K+\ell-k} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \times, K+\ell-k} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \\ + \sum_{k=\ell+1}^K \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \parallel, k-\ell} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \times, k-\ell} \mathbf{x}^{k, \times} \right)$$

et

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{(K+\ell-1)N(N+2)+1} \\ \vdots \\ (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{(K+\ell)N(N+2)} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\ell, \times} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \parallel, K+\ell-k} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \times, K+\ell-k} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \\ + \sum_{k=\ell+1}^K \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \parallel, k-\ell} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \times, k-\ell} \mathbf{x}^{k, \times} \right).$$

*Démonstration.* Pour une ligne d'obstacles, nous avons

$$\mathbb{A}_{\ell k}^{\star\star} = \begin{cases} \mathbb{A}_{1k-\ell+1}^{\star\star} & \ell < k, \\ \mathbb{A}_{\ell-k+1,1}^{\star\star} & \ell > k. \end{cases}$$

Ainsi, les indices des blocs associés dans la matrice  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  sont donnés par

$$\mathbb{A}_{1k-\ell+1}^{\star\star} = \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\star\star, k-\ell} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}_{\ell-k+1,1}^{\star\star} = \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\star\star, K+\ell-k}.$$

□

**Proposition 8.2.** Pour une configuration planaire d'obstacles, l'action de  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$  sur un vecteur  $\mathbf{x}$  est décrite pour tout  $\ell = 1, \dots, K$  par ses différentes composantes,

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{(\ell-1)N(N+2)+1} \\ \vdots \\ (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{\ell N(N+2)} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\ell, \parallel} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq \ell_1}}^{K_l} \sum_{k_c=1}^{K_c} \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \parallel, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \times, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \\ + \sum_{k_1=\ell_1}^{K_c} \sum_{k_c=1}^{K_c} \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \parallel, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\parallel \times, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \times} \right),$$

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{(K+\ell-1)N(N+2)+1} \\ \vdots \\ (\mathcal{A}(\mathbb{A}_{\text{bloc}}, \mathbf{x}))_{(K+\ell)N(N+2)} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\ell, \times} + \sum_{\substack{k_l=1 \\ k_l \neq \ell_l}}^{K_l} \sum_{k_c=1}^{K_c} \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \parallel, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \times, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \\ + \sum_{k_l=\ell_l}^{K_l} \sum_{k_c=1}^{K_c} \left( \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \parallel, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{\times \times, p_{\ell k}} \mathbf{x}^{k, \times} \right),$$

où les exposants  $p_{\ell k}$  sont définis par

$$p_{\ell k} = \begin{cases} 2(K_c - 1) + (K_l + \ell_l - k_l - 2)(2K_c - 1) + K_c + \ell_c - k_c & \text{si } k_l < \ell_l \text{ et } k_c < \ell_c, \\ 2(K_c - 1) + (K_l + \ell_l - k_l - 2)(2K_c - 1) + k_c - \ell_c + 1 & \text{si } k_l < \ell_l \text{ et } k_c \geq \ell_c, \\ K_c + \ell_c - k_c - 1 & \text{si } k_l = \ell_l \text{ et } k_c < \ell_c, \\ k_c - \ell_c & \text{si } k_l = \ell_l \text{ et } k_c \geq \ell_c, \\ 2(K_c - 1) + (k_l - \ell_l - 1)(2K_c - 1) + K_c + \ell_c - k_c & \text{si } k_l > \ell_l \text{ et } k_c < \ell_c, \\ 2(K_c - 1) + (k_l - \ell_l - 1)(2K_c - 1) + k_c - \ell_c + 1 & \text{si } k_l > \ell_l \text{ et } k_c \geq \ell_c. \end{cases}$$

*Démonstration.* Le produit matrice-vecteur s'écrit

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{A}\mathbf{x})_{(\ell-1)N(N+2)+1} \\ \vdots \\ (\mathbb{A}\mathbf{x})_{\ell N(N+2)} \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{\ell, \parallel} + \sum_{k_l=1}^{\ell_l-1} \left\{ \sum_{k_c=1}^{\ell_c-1} \left( \mathbb{A}_{\ell^{++} k^{++}}^{\parallel \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell^{++} k^{++}}^{\parallel \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \right. \\ \left. + \sum_{k_c=\ell_c}^{K_c} \left( \mathbb{A}_{\ell^{+-} k^{+-}}^{\parallel \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell^{+-} k^{+-}}^{\parallel \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \right\} \\ + \sum_{k_l=\ell_l}^{\ell_l-1} \left\{ \sum_{k_c=1}^{\ell_c-1} \left( \mathbb{A}_{\ell^+ k^+}^{\parallel \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell^+ k^+}^{\parallel \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \right. \\ \left. + \sum_{k_c=\ell_c+1}^{K_c} \left( \mathbb{A}_{\ell^- k^-}^{\parallel \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell^- k^-}^{\parallel \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \right\} \\ + \sum_{k_l=\ell_l+1}^{K_l} \left\{ \sum_{k_c=1}^{\ell_c-1} \left( \mathbb{A}_{\ell^{-+} k^{-+}}^{\parallel \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell^{-+} k^{-+}}^{\parallel \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \right. \\ \left. + \sum_{k_c=\ell_c}^{K_c} \left( \mathbb{A}_{\ell^{--} k^{--}}^{\parallel \parallel} \mathbf{x}^{k, \parallel} + \mathbb{A}_{\ell^{--} k^{--}}^{\parallel \times} \mathbf{x}^{k, \times} \right) \right\},$$

avec

$$\begin{aligned}
 \ell^{++} &= (\ell_1 - k_1)K_c + \ell_c - k_c + 1, & k^{++} &= 1, \\
 \ell^{+-} &= (\ell_1 - k_1)K_c + 1, & k^{+-} &= k_c - \ell_c + 1, \\
 \ell^{-+} &= \ell_c - k_c + 1, & k^{-+} &= (k_1 - \ell_1)K_c + 1, \\
 \ell^{--} &= 1, & k^{--} &= (k_1 - \ell_1)K_c + k_c - \ell_c + 1, \\
 \ell^+ &= \ell_c - k_c + 1, & k^+ &= 1, \\
 \ell^- &= 1, & k^- &= k_c - \ell_c + 1.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons la correspondance suivante entre blocs issus de la matrice  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{\ell^{++} k^{++}}^{**} &= \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p}, & p &= 2(K_c - 1) + (K_1 + \ell_1 - k_1 - 2)(2K_c - 1) + K_c + \ell_c - k_c, \\
 \mathbb{A}_{\ell^{+-} k^{+-}}^{**} &= \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p}, & p &= 2(K_c - 1) + (K_1 + \ell_1 - k_1 - 2)(2K_c - 1) + k_c - \ell_c + 1, \\
 \mathbb{A}_{\ell^{-+} k^{-+}}^{**} &= \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p}, & p &= K_c + \ell_c - k_c - 1, \\
 \mathbb{A}_{\ell^{--} k^{--}}^{**} &= \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p}, & p &= k_c - \ell_c, \\
 \mathbb{A}_{\ell^+ k^+}^{**} &= \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p}, & p &= 2(K_c - 1) + (k_1 - \ell_1 - 1)(2K_c - 1) + K_c + \ell_c - k_c, \\
 \mathbb{A}_{\ell^- k^-}^{**} &= \mathbb{A}_{\text{bloc}}^{**,p}, & p &= 2(K_c - 1) + (k_1 - \ell_1 - 1)(2K_c - 1) + k_c - \ell_c + 1.
 \end{aligned}$$

□

## 8.4 Conclusion

La résolution directe des systèmes linéaires obtenus à partir de la méthode spectrale, mais aussi pour ceux de Foldy, n'est pas toujours possible à cause de la quantité de ressources nécessaire au stockage global de la matrice de masse et à son inversion. Nous avons mis en place une méthode de résolution itérative qui permet de réduire drastiquement les coûts en mémoire. La matrice de masse n'est plus assemblée de manière globale mais nous extrayons une partie contenant les interactions principales entre les différents obstacles. Les interactions secondaires sont prises en compte dans l'algorithme itératif. Nous verrons dans la Section 9.2 que la prise en compte de ces interactions secondaires permet à l'algorithme itératif de converger plus rapidement vers une solution approchée, sur des cas-tests où nous ne pouvons pas calculer, à l'aide d'une résolution directe, la solution de référence. Le préconditionnement des systèmes linéaires renforce par ailleurs la stabilité des solutions numériques.

**Sommaire**

---

<b>9.1 Validation numérique : convergence</b>	<b>252</b>
9.1.1 Description des tests numériques	252
9.1.2 Ordre de la méthode	256
9.1.3 Comparaison avec des solutions aux éléments finis	259
9.1.4 Comparaison avec les modèles asymptotiques	265
<b>9.2 Résolution pour un grand nombre d'obstacles</b>	<b>267</b>
9.2.1 Description des tests numériques	267
9.2.2 Comparaison des surfaces équivalentes radar	270
9.2.3 Convergence des solveurs itératifs	274
<b>9.3 Coûts de calcul</b>	<b>277</b>
9.3.1 Comparaison avec les modèles asymptotiques	277
9.3.2 Comparaison avec les éléments finis	278
<b>9.4 Conclusion</b>	<b>280</b>

---

Dans le Chapitre 8, nous avons mis en place une méthode itérative requérant le moins de mémoire possible pour la résolution des systèmes linéaires issus de la méthode spectrale. Nous avons introduit un préconditionnement du système et étudié deux procédés de décomposition matricielle. Cela s'applique également aux modèles de Born et Foldy car les structures algébriques associées sont similaires.

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats numériques permettant de valider différents aspects numériques tels que la convergence de la méthode en fonction du paramètre  $\delta$  dans la Section 9.1 et la convergence des méthodes itératives, présentées dans le Chapitre 8, dans la Section 9.2. Une analyse des coûts de calcul est effectuée dans la Section 9.3.

## 9.1 Validation numérique : convergence

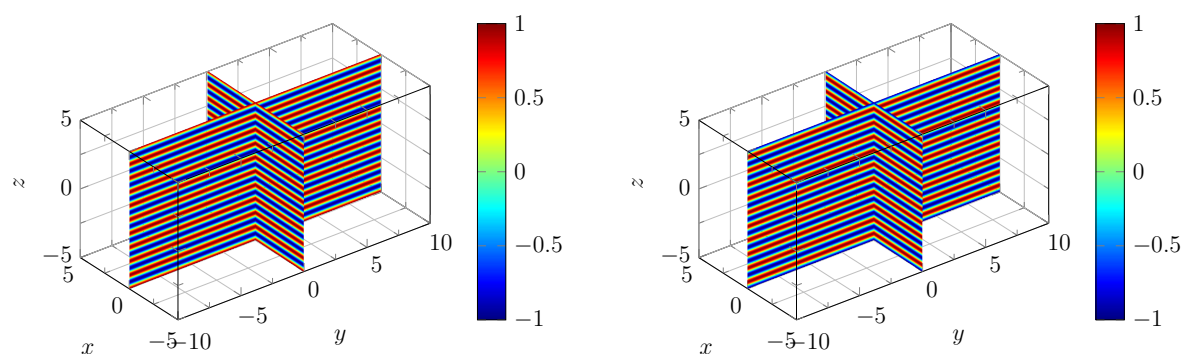
Dans cette section, nous étudions la précision de la méthode spectrale et sa convergence en fonction du rayon des sphères  $\delta$ , pour des géométries comportant un petit nombre d'obstacles – de sorte qu'un solveur direct puisse être utilisé. Les solutions sont ensuite validées à l'aide de solutions éléments finis calculées à l'aide du code Montjoie développé par Duruflé (2006). Enfin, nous mettons en évidence l'équivalence entre le modèle de Foldy modifié et la solution spectrale du premier ordre.

### 9.1.1 Description des tests numériques

Nous considérons le problème de diffraction d'une onde plane électromagnétique par  $K$  sphères de rayon  $\delta$ . L'onde plane incidente électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda$ , définie par (5.1), est dirigée selon l'axe des  $z$  et polarisée selon l'axe des  $x$ . Les Figures 9.1 et 9.2 représentent les champs électromagnétiques associés à l'onde plane de longueur d'onde  $\lambda = 1.0$  se propageant dans l'espace libre de permittivité électrique  $\varepsilon = 1.0$  et de perméabilité magnétique  $\mu = 1.0$ . La Figure 9.1 représente la partie réelle d'une des composantes des champs électromagnétiques dans le domaine  $[-5, 5] \times [-10, 10] \times [-5, 5]$ . La Figure 9.2 représente la partie imaginaire d'une des composantes des champs électromagnétiques dans le domaine  $[-5, 5] \times [-10, 10] \times [-5, 5]$ .

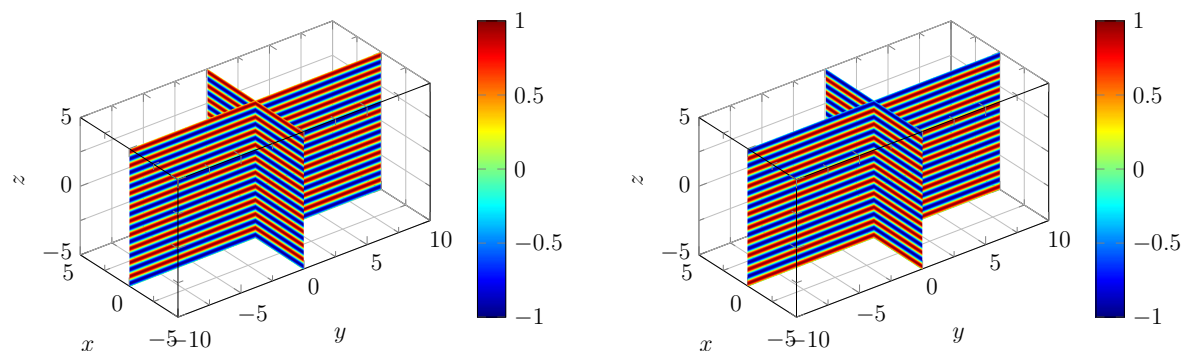
En vue de comparer les solutions avec à la fois des solutions éléments finis et les modèles asymptotiques, nous proposons deux types de géométries. La première est une configuration linéaire d'obstacles. Elle ne permet pas de valider l'ensemble des interactions. La seconde considère des obstacles dans toutes les directions. Elles sont décrites en détail ci-dessous.

**Géométrie n°1** Nous considérons  $K$  sphères de rayon  $\delta$  uniformément distribuées sur l'axe des  $y$ . Leur centre est défini par (8.12) où la distance  $d$  séparant deux obstacles



(a) Partie réelle de la première composante du champ électrique

(b) Partie réelle de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 9.1 – Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques associés à l'onde plane de longueur d'onde  $\lambda = 1.0$  se propageant à la vitesse  $c = 1.0$ .

(a) Partie imaginaire de la première composante du champ électrique

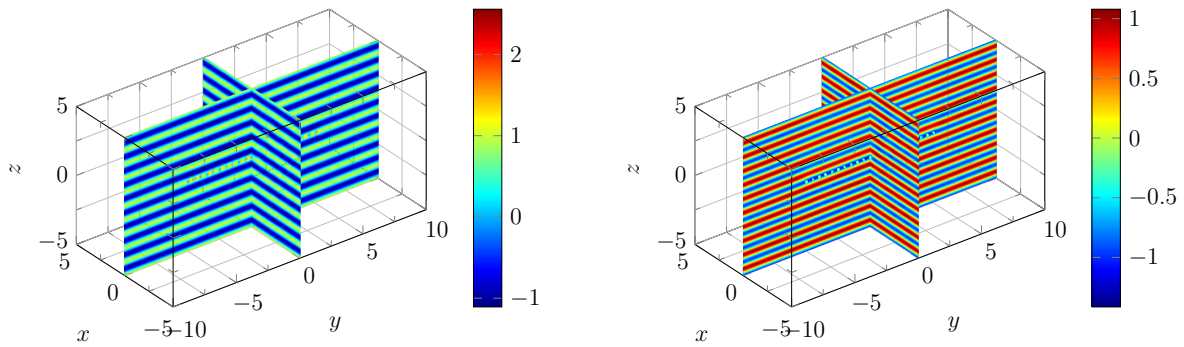
(b) Partie imaginaire de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 9.2 – Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques associés à l'onde plane de longueur d'onde  $\lambda = 1.0$  se propageant à la vitesse  $c = 1.0$ .

consécutifs sera choisie de l'ordre de  $\lambda$  ou de l'ordre de  $\delta$  ou encore de l'ordre intermédiaire  $\sqrt{\lambda\delta}$  selon les cas-tests considérés. Les Figures 9.3 à 9.5 représentent les champs électromagnétiques totaux pour  $K = 21$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\lambda = 1.0$  et  $d = 0.5$  dans le domaine  $[-5, 5] \times [-10, 10] \times [-5, 5]$ . La Figure 9.3 représente la partie réelle d'une des composantes des champs électromagnétiques. La Figure 9.4 représente la partie imaginaire d'une des composantes des champs électromagnétiques. La Figure 9.5 représente le module des champs électromagnétiques totaux.

**Géométrie n°2** Nous considérons  $K$  sphères de rayon  $\delta$  qui s'agglomèrent autour de l'origine. Nous prenons  $c_1 = (0,0,0)$  et choisissons les autres centres  $c_k$  tels que  $|c_k - c_1| = d$ , où  $d$  peut varier suivant les cas-tests considérés. Les Figures 9.6 à 9.8 illustrent les champs électromagnétiques totaux avec  $K = 13$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\lambda = 1.0$  et  $d = 1.0$ ,

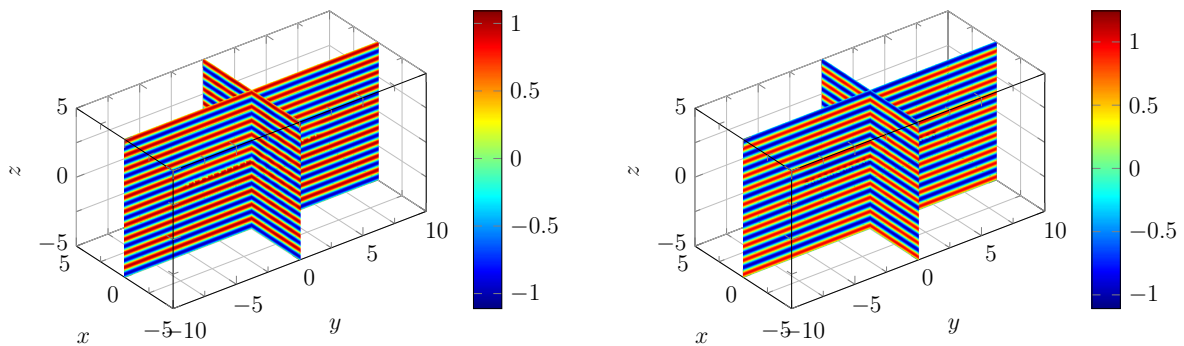




(a) Partie réelle de la première composante du champ électrique

(b) Partie réelle de la deuxième composante du champ magnétique

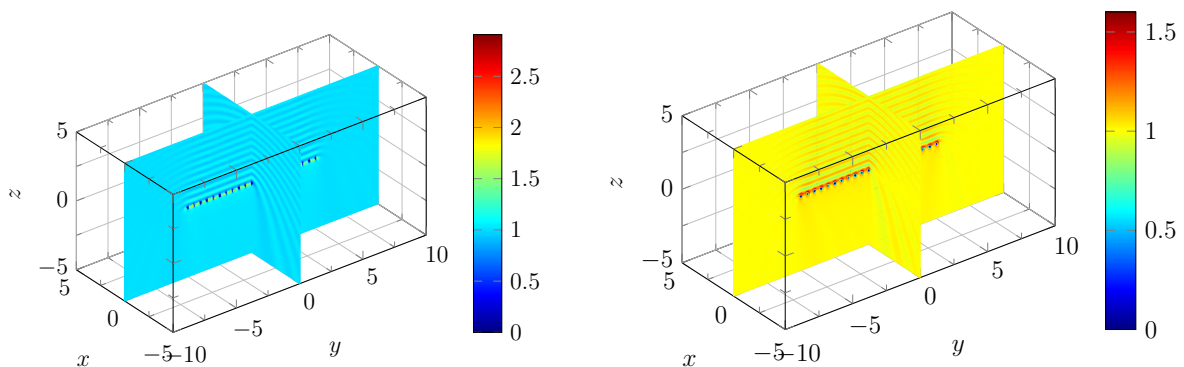
FIGURE 9.3 – Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques totaux.



(a) Partie imaginaire de la première composante du champ électrique

(b) Partie imaginaire de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 9.4 – Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques totaux.

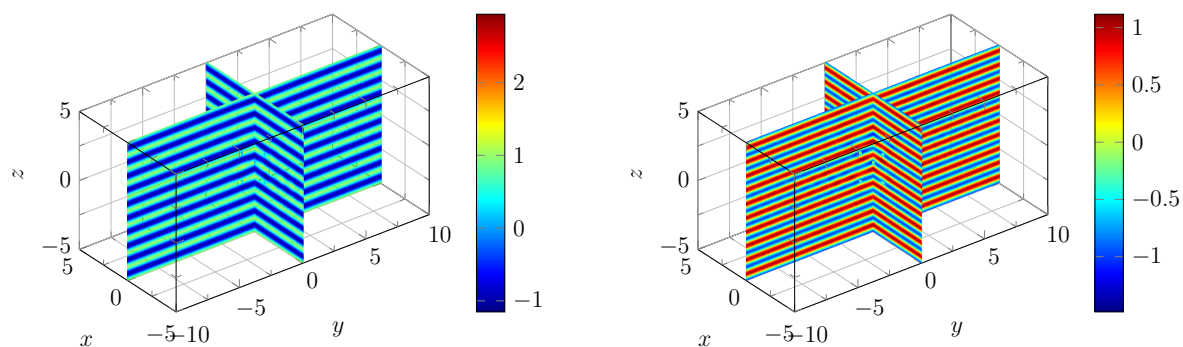


(a) Module du champ électrique

(b) Module du champ magnétique

FIGURE 9.5 – Représentation du module des champs électromagnétiques totaux.

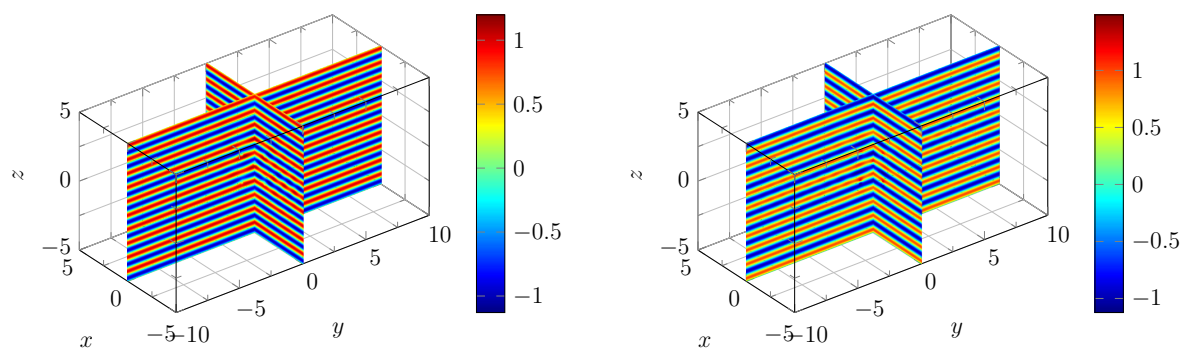
dans le domaine  $[-5, 5] \times [-10, 10] \times [-5, 5]$ . La Figure 9.6 représente la partie réelle d'une des composantes des champs électromagnétiques. La Figure 9.7 représente la partie imaginaire d'une des composantes des champs électromagnétiques. La Figure 9.8



(a) Partie réelle de la première composante du champ électrique

(b) Partie réelle de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 9.6 – Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques totaux.

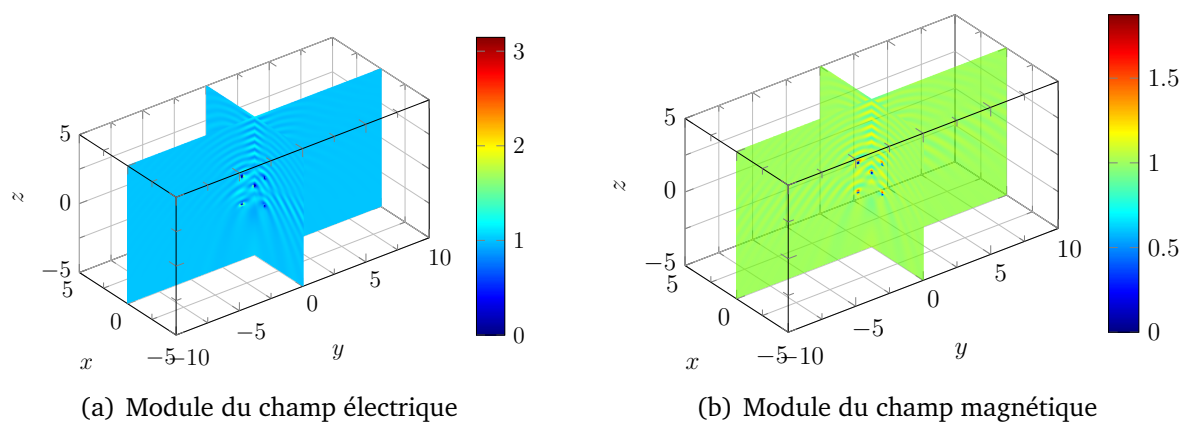


(a) Partie imaginaire de la première composante du champ électrique

(b) Partie imaginaire de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 9.7 – Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques totaux.

représente le module des champs électromagnétiques totaux.



(a) Module du champ électrique

(b) Module du champ magnétique

FIGURE 9.8 – Représentation du module des champs électromagnétiques totaux.

Pour la validation numérique, nous calculerons pour chaque cas, l'erreur relative commise entre une solution de référence et une solution approchée, *i.e.* les quantités

$$\frac{\|E_\delta^{\text{ref}} - E_\delta^{\text{app}}\|}{\|E_\delta^{\text{ref}} + E^{\text{inc}}\|} \quad \text{et} \quad \frac{\|H_\delta^{\text{ref}} - H_\delta^{\text{app}}\|}{\|H_\delta^{\text{ref}} + H^{\text{inc}}\|}, \quad (9.1)$$

où  $E_\delta^{\text{ref}}$  et  $H_\delta^{\text{ref}}$  désignent les champs électromagnétiques diffractés associés à la solution de référence et  $E_\delta^{\text{app}}$  et  $H_\delta^{\text{app}}$  désignent les champs électromagnétiques diffractés associés à la solution approchée. Les champs  $E^{\text{inc}}$  et  $H^{\text{inc}}$  désignent les champs électromagnétiques incidents. La norme utilisée dans les comparaisons est la norme  $L^2$  et elle sera calculée dans des domaines appropriés définis dans chaque section.

### 9.1.2 Ordre de la méthode

Nous cherchons à mettre en évidence les ordres de convergence des solutions spectrales en fonction du rayon des sphères  $\delta$  et de l'ordre d'approximation, en norme  $L^2$  calculée hors d'un voisinage des obstacles. Nous notons  $\Omega = [1.5\lambda, 2.5\lambda]^3 \subset \mathbb{R}^3$  le domaine dans lequel sera calculée l'erreur commise sur la solution approchée relativement à la solution de référence. Pour obtenir les données de chaque cas-test, nous calculons :

- les solutions de référence  $E_\delta^{N_{\text{ref}}}$  et  $H_\delta^{N_{\text{ref}}}$  qui sont les solutions données par la méthode spectrale pour  $N_{\text{ref}} = 8$  modes,
- les solutions approchées  $E_\delta^N$  et  $H_\delta^N$  d'ordre inférieur, calculées par la méthode spectrale pour  $N = 1$  à 7 modes,
- les erreurs (9.1) pour la norme  $L^2(\Omega)$ .

Une première série de tests est réalisée pour une configuration linéaire d'obstacles (Géométrie n°1) ; une seconde avec la Géométrie n°2.

Les Figures 9.9 et 9.10 montrent les ordres de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions spectrales, en fonction de la taille des sphères, pour  $K = 5$  sphères alignées selon l'axe des  $y$ . Les graphiques sont représentés en échelle logarithmique. La Figure 9.9 représente l'erreur relative dans  $L^2(\Omega)$  pour les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  entre deux obstacles consécutifs est fixe et égale à  $\lambda = 1.0$ . Nous observons d'une part, que l'erreur diminue lorsque nous diminuons le rayon  $\delta$  des obstacles, et d'autre part, qu'elle diminue lorsque nous augmentons le nombre de modes, c'est-à-dire l'ordre d'approximation. Les ordres de convergence expérimentaux sont récapitulés dans le Tableau 9.1. Nous remarquons que

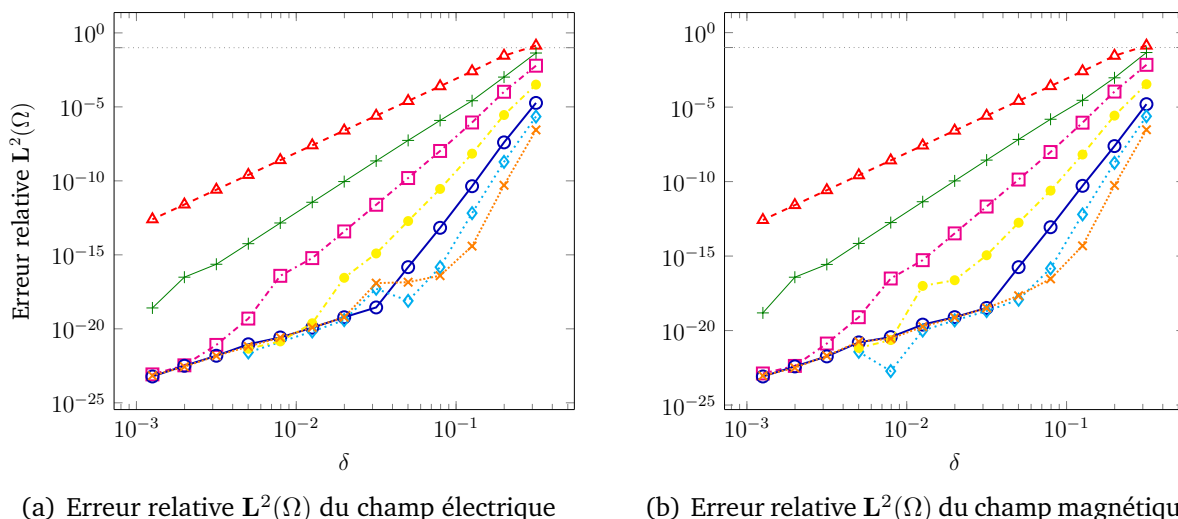


FIGURE 9.9 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre deux obstacles consécutifs est égale à  $d = 1.0$ . La courbe  $-\triangle-$  correspond à la solution pour  $N = 1$  mode. La courbe  $-\text{+}-$  correspond à la solution pour  $N = 2$  modes. La courbe  $-\square-$  correspond à la solution pour  $N = 3$  modes. La courbe  $-\bullet-$  correspond à la solution pour  $N = 4$  modes. La courbe  $-\circ-$  correspond à la solution pour  $N = 5$  modes. La courbe  $-\diamond-$  correspond à la solution pour  $N = 6$  modes. La courbe  $-\times-$  correspond à la solution pour  $N = 7$  modes.

	$-\triangle-$	$-\text{+}-$	$-\square-$	$-\bullet-$	$-\circ-$	$-\diamond-$	$-\times-$
Ordre (Champ électrique)	5.01	6.97	9.33	11.33	13.89	17.00	19.63
Ordre (Champ magnétique)	5.01	6.92	9.42	11.63	13.66	17.06	19.49

TABLE 9.1 – Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions spectrales.

les ordres de convergence relativement à  $\delta$  sont approximativement égaux à  $2N + 3$ , où  $N$  représente l'ordre maximal des modes utilisés dans l'approximation. La Figure 9.10 représente l'erreur relative dans  $L^2(\Omega)$  pour les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  entre deux obstacles consécutifs est proportionnelle à  $\sqrt{\delta\lambda}$  avec  $\lambda = 1.0$ . Ici encore, l'erreur diminue lorsque la taille des obstacles diminue ou lorsque nous augmentons le nombre de modes dans les approximations. Un facteur d'échelle, dû à la dépendance de la distance  $d$  par rapport à  $\delta$ , apparaît dans le calcul de l'erreur. Les ordres de convergence obtenus sont récapitulés dans le Tableau 9.2.

La Figure 9.11 montre les ordres de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions spectrales, en fonction de la taille des sphères, pour  $K = 13$  sphères distribuées autour de l'origine. L'erreur relative est calculée pour la norme  $L^2(\Omega)$

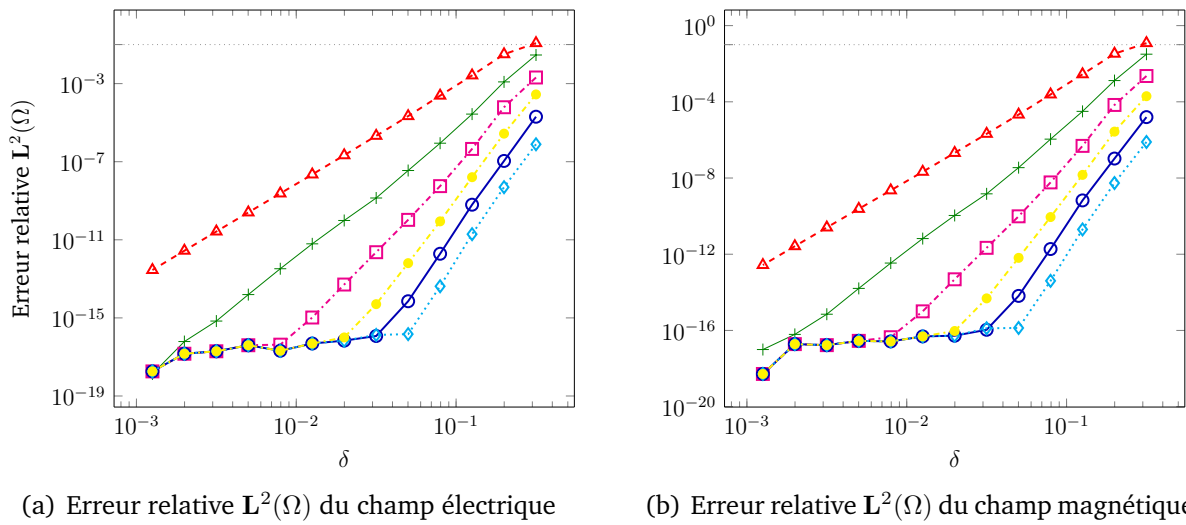


FIGURE 9.10 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre deux obstacles consécutifs est égale à  $d = 1.0$ . La courbe  $-\triangle-$  correspond à la solution pour  $N = 1$  mode. La courbe  $-\text{+}-$  correspond à la solution pour  $N = 2$  modes. La courbe  $-\square\cdots$  correspond à la solution pour  $N = 3$  modes. La courbe  $-\bullet\cdots$  correspond à la solution pour  $N = 4$  modes. La courbe  $-\circ-$  correspond à la solution pour  $N = 5$  modes. La courbe  $\cdots\diamond\cdots$  correspond à la solution pour  $N = 6$  modes.

	$-\triangle-$	$-\text{+}-$	$-\square\cdots$	$-\bullet\cdots$	$-\circ-$	$\cdots\diamond\cdots$
Ordre (Champ électrique)	4.94	6.79	8.69	10.84	11.83	12.26
Ordre (Champ magnétique)	4.96	6.76	8.73	10.74	11.77	12.34

TABLE 9.2 – Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions spectrales.

sur les champs électromagnétiques totaux, lorsque la distance  $d$  entre deux obstacles consécutifs est fixe et égale à  $\lambda = 1.0$ . Lorsqu'il y a des obstacles dans toutes les directions, l'erreur diminue encore lorsque le rayon  $\delta$  des obstacles diminue ou lorsque nous augmentons l'ordre d'approximation. Les ordres de convergence expérimentaux sont récapitulés dans le Tableau 9.3. Les ordres de convergence relativement à  $\delta$  sont

	$-\triangle-$	$-\text{+}-$	$-\square\cdots$	$-\bullet\cdots$	$-\circ-$
Ordre (Champ électrique)	5.05	7.00	9.17	12.32	14.58
Ordre (Champ magnétique)	5.05	7.00	9.17	12.31	14.57

TABLE 9.3 – Ordres numériques de convergence pour associés aux différents ordres d'approximation.

approximativement égaux à  $2N + 3$ , où  $N$  représente l'ordre maximal des modes utilisés dans l'approximation.

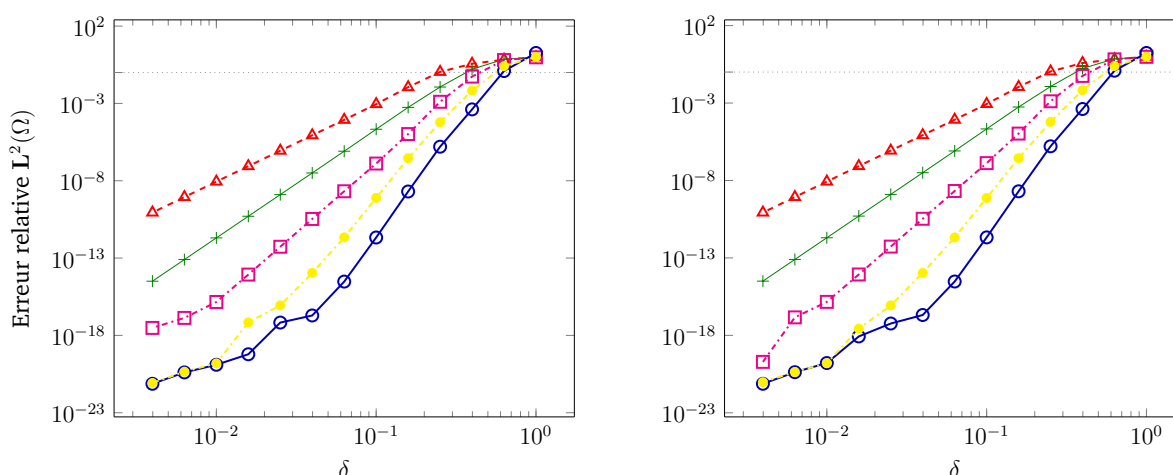
(a) Erreur relative  $L^2(\Omega)$  du champ électrique(b) Erreur relative  $L^2(\Omega)$  du champ magnétique

FIGURE 9.11 – Évolution de l’erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre deux obstacles consécutifs est égale à  $d = 1.0$ . La courbe  $\text{-}\triangle\text{-}$  correspond à la solution pour  $N = 1$  mode. La courbe  $\text{-}\text{+}\text{-}$  correspond à la solution pour  $N = 2$  modes. La courbe  $\text{-}\square\text{-}$  correspond à la solution pour  $N = 3$  modes. La courbe  $\text{-}\bullet\text{-}$  correspond à la solution pour  $N = 4$  modes. La courbe  $\text{-}\circ\text{-}$  correspond à la solution pour  $N = 5$  modes.

Les graphiques illustrent la convergence des approximations successives issues de la méthode spectrale présentée dans le Chapitre 7. Le système préconditionné, introduit dans la Section 8.2.1, a été considéré. Un stockage classique de la matrice et une résolution directe ont été utilisés ; les limitations en mémoire n’étant pas préoccupantes en considérant de petits nombres d’obstacles.

### 9.1.3 Comparaison avec des solutions aux éléments finis

La méthode spectrale est validée numériquement à l’aide du code de calcul Montjoie (<http://montjoie.gforge.inria.fr/>), développé par Duruflé (2006), qui permet de résoudre de nombreux problèmes d’ondes dont le problème de diffraction des ondes électromagnétiques, en utilisant, entre autres, la méthode des éléments finis. La méthode des éléments finis consiste à définir une approximation volumique et généralement polynomiale par morceaux de la solution en découpant le domaine de propagation en sous-domaines appelés mailles, et en approchant la solution dans chacune des mailles. La précision de cette méthode dépend directement de l’ordre d’approximation, correspondant à l’ordre maximal atteint par les fonctions de base polynomiales, et du maillage sur lequel la solution est calculée. À un maillage  $\mathcal{M}_h$ , où  $h$  représente le pas d’espace caractéristique, et un ordre  $p$  d’approximation, est associée une approximation

« élément fini » notée  $(\mathbf{E}_{p,h}, \mathbf{H}_{p,h})$ .

La solution élément fini est calculée sur des maillages composés d'hexaèdres en utilisant la première famille de Nédélec, voir [Cohen et Monk \(1998\)](#). La première famille de Nédélec définie sur les hexaèdres est constituée de fonctions de bases de

$$\mathcal{Q}_{p-1,p,p} \times \mathcal{Q}_{p,p-1,p} \times \mathcal{Q}_{p,p,p-1},$$

où les indices indiquent le nombre d'intervalles associés à la discrétisation. Les fonctions vectorielles de base  $(\widehat{\varphi}_i)$  définies pour  $\widehat{\mathbf{x}} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$  appartenant à l'élément de référence  $\widehat{K}$  vérifient pour tout  $j = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_i(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_j = & \widehat{\varphi}_{i_1}^G(\widehat{x}_1) \widehat{\varphi}_{i_2}^{\text{GL}}(\widehat{x}_2) \widehat{\varphi}_{i_3}^{\text{GL}}(\widehat{x}_3) \delta_{j1} + \widehat{\varphi}_{i_3}^{\text{GL}}(\widehat{x}_1) \widehat{\varphi}_{i_1}^G(\widehat{x}_2) \widehat{\varphi}_{i_2}^{\text{GL}}(\widehat{x}_3) \delta_{j2} \\ & + \widehat{\varphi}_{i_2}^{\text{GL}}(\widehat{x}_1) \widehat{\varphi}_{i_3}^{\text{GL}}(\widehat{x}_2) \widehat{\varphi}_{i_1}^G(\widehat{x}_3) \delta_{j3}, \end{aligned}$$

pour  $i_1 = 1, \dots, p$ ,  $i_2 = 1, \dots, p+1$  et  $i_3 = 1, \dots, p+1$ . Le symbole  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker, le vecteur  $\mathbf{e}_j$  est extrait de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et les fonctions  $\widehat{\varphi}_i^G \in \mathcal{P}_{p-1}$  et  $\widehat{\varphi}_i^{\text{GL}} \in \mathcal{P}_p$  désignent les fonctions de base lagrangienne associées respectivement aux points de Gauss et de Gauss-Lobatto que nous n'explicitons pas ici, voir par exemple [Duruflé \(2006\)](#). Théoriquement, nous avons les estimations d'erreur suivantes

$$\|\mathbf{E}_\delta - \mathbf{E}_{p,h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq c h^p \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H}_\delta - \mathbf{H}_{p,h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq c h^p, \quad (9.2)$$

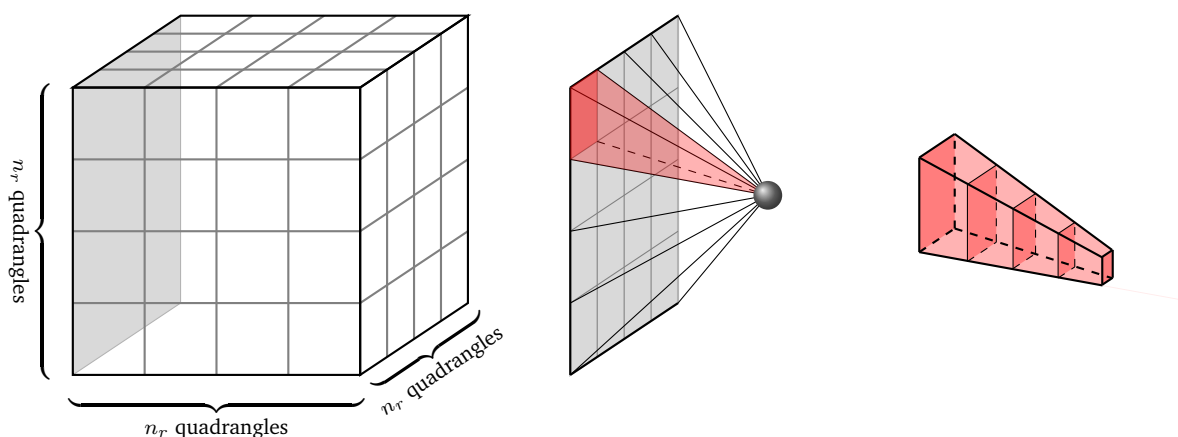
où  $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta)$  désigne la solution exacte et  $\Omega$  désigne le domaine de calcul.

Nous cherchons à vérifier numériquement la convergence des solutions éléments finis et en particulier les relations (9.2), en approchant la solution exacte par l'approximation  $(\mathbf{E}_\delta^{N_{\text{ref}}}, \mathbf{H}_\delta^{N_{\text{ref}}})$  issue de la méthode spectrale pour  $N_{\text{ref}} = 8$  modes. Nous étudions la convergence des solutions en fonction du pas d'espace  $h$ , c'est-à-dire en comparant les solutions sur des maillages de plus en plus raffinés, et ce, pour différents ordres  $p$  d'approximation. Nous considérons un domaine de référence  $\Omega_0$  qui est un pavé de  $\mathbb{R}^3$  privé de la boule  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \delta)$  centrée en l'origine et de rayon  $\delta$ ,

$$\Omega_0(a, \delta) = [-a, a]^3 \setminus \mathcal{B}(\mathbf{0}, \delta).$$



Pour construire le maillage élément fini du domaine de référence, nous choisissons un paramètre de raffinement  $n_{\text{raf}}$  correspondant au nombre de subdivisions de chaque arête du cube. Le maillage de la surface extérieure est un maillage uniforme et chaque face est composée de  $n_{\text{raf}}^2$  carrés. Dans le volume, nous utilisons une projection radiale sur le centre de la sphère et découpons les mailles parallèlement à chaque face respective, de sorte que le pas d'espace caractéristique soit respecté dans toutes les directions. La construction du maillage de référence est illustrée sur la Figure 9.12.



(a) Maillage uniforme de la surface extérieure du domaine de référence. Chaque face possède  $n_{\text{raf}}^2$  carrés.

(b) Projections radiales des nœuds associés à la face grise sur le centre de la sphère.

(c) Découpage volumique en trapèzes.

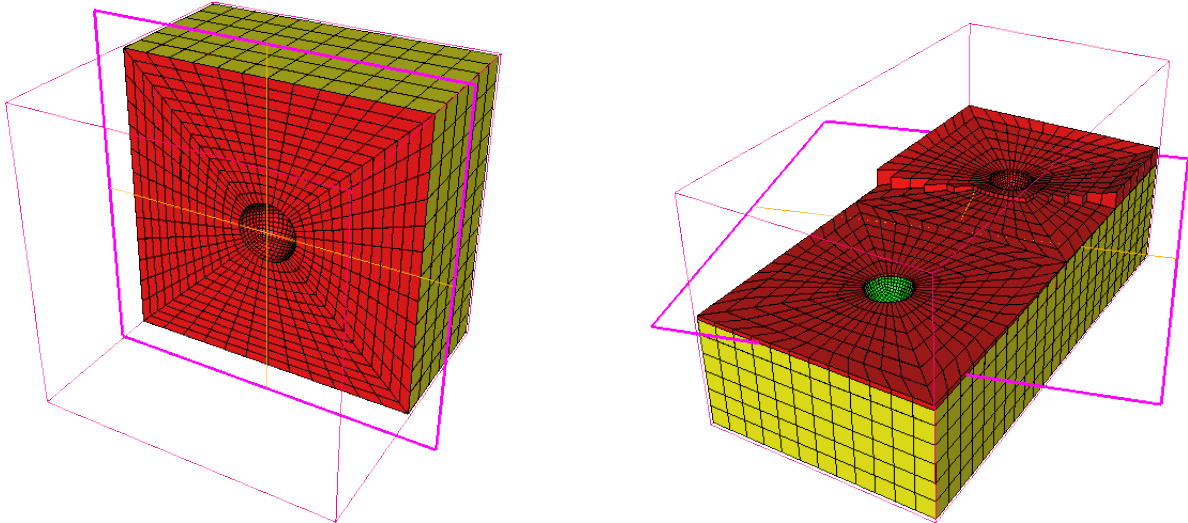
FIGURE 9.12 – Maillage du cube de référence  $\Omega_0 = [-a, a]^3 \setminus \mathcal{B}(0, \delta)$  de demi-côté  $a$ , privé de la boule de centre 0 et de rayon  $\delta$ .

Nous mettons en place deux cas-tests, traitant la diffraction d'une onde plane électromagnétique, le premier dans un domaine comportant un obstacle sphérique parfaitement conducteur, le second dans un domaine en comportant deux. Pour le premier cas-test, le domaine de propagation est le domaine  $\Omega = \Omega_0$  avec  $a = 0.5$  et  $\delta = 0.1$  ou  $0.3$ . Pour le second cas-test, nous considérons le domaine  $\Omega$  donné par

$$\Omega(d, \delta) = \Omega_0 \left( \frac{d}{2}, \delta \right) \cup \Omega_c \left( \frac{d}{2}, \delta \right),$$

où  $c = (d \ 0 \ 0)$  désigne le centre de la seconde sphère,  $d = 1.0$  désigne la distance entre l'origine et  $c$  et  $\delta = 0.1$  ou  $0.3$  le rayon des sphères. La Figure 9.13 montre un maillage associé à chacune des géométries considérées visualisés avec Medit, développé par Frey (2001). Pour la comparaison, l'erreur est calculée en norme  $L^2$  dans  $\Omega^i \subset \Omega$  qui est le domaine privé d'un voisinage des obstacles, excluant de  $\Omega$  le ou les cubes centrés en





(a) Maillage volumique du cube  $(-0.5, 0.5)^3$  avec un trou sphérique de rayon  $\delta = 0.1$ . Le maillage, composé d'hexaèdres, est associé à  $n_{\text{raf}} = 12$ .

(b) Maillage volumique du parallépipède  $(-0.5, 1.5) \times (-0.5, 0.5)^2$  avec deux trous sphériques de rayon  $\delta = 0.1$ . Le maillage, composé d'hexaèdres, est associé à  $n_{\text{raf}} = 12$ .

FIGURE 9.13 – Coupes des maillages volumiques utilisés pour la simulation des solutions éléments finis avec  $n_{\text{raf}} = 12$ .

le centre des obstacles et de demi-côtés  $\delta$ . Pour obtenir les données de chaque cas-test, nous calculons :

- la solution de référence  $\mathbf{E}_\delta^{N_{\text{ref}}}$  et  $\mathbf{H}_\delta^{N_{\text{ref}}}$  correspondant aux approximations spectrales associées à  $N_{\text{ref}} = 8$  modes, sur une grille régulière de  $\Omega$
- les solutions éléments finis sur les différents maillages  $\mathcal{M}_{h_{\text{raf}}}$  où  $h_{\text{raf}}$  désigne le volume caractéristique du pas d'espace associé au paramètre de raffinement  $n_{\text{raf}}$ , avec  $n_{\text{raf}} = 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$ , puis les interpolons sur la grille régulière de  $\Omega$  où sont définies les approximations de référence,
- et enfin, les erreurs (9.1) dans  $\mathbf{L}^2(\Omega^i)$ .

La Figure 9.14 représente le module de la différence, sur une grille grossière, des solutions de référence avec les solutions éléments finis d'ordre 2 calculées sur les maillages  $\mathcal{M}_{h_{\text{raf}}}$  associé à  $n_{\text{raf}} = 12$ , pour le premier cas-test. Sur les Figures 9.15 et 9.16, sont mis en évidence les ordres de convergence des différentes approximations issues de la méthode des éléments finis, en fonction du pas d'espace  $h$  sur les deux cas-tests proposés, à savoir le problème de diffraction par une sphère, puis par deux. La Figure 9.15 illustre la convergence des solutions éléments finis pour différents ordres d'approximation sur le premier cas-test, en fonction du pas d'espace caractéristique  $h_{\text{raf}}$  associé au paramètre de raffinement  $n_{\text{raf}}$ , respectivement pour  $\delta = 0.1$  et  $\delta = 0.3$ . Nous observons d'une part, que

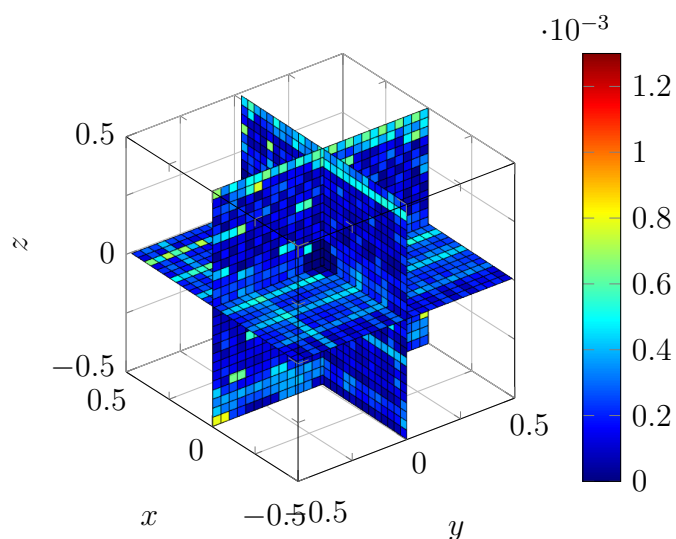
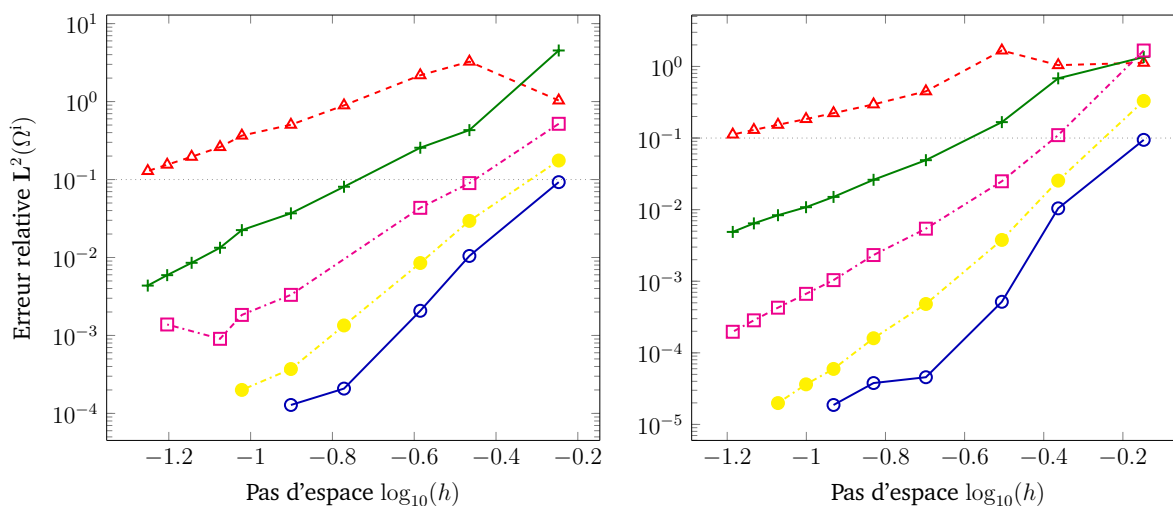


FIGURE 9.14 – Représentation de la différence ponctuelle entre les solutions de référence et les solutions éléments finis associées au premier cas-test. La solution élément fini est d'ordre 2 et la solution spectrale est d'ordre  $N_{\text{ref}} = 8$ . L'erreur  $L^2(\Omega^i)$  est égale à 0.01866.



(a) Erreur relative dans  $\Omega^i$  pour  $\delta = 0.1$ .

(b) Erreur relative dans  $\Omega^i$  pour  $\delta = 0.3$ .

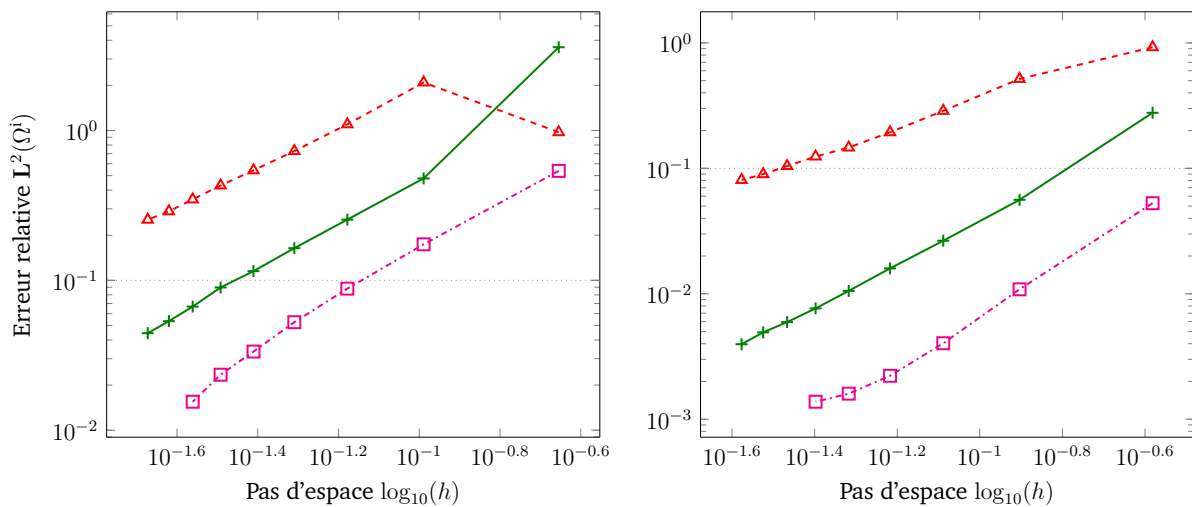
FIGURE 9.15 – Évolution de l'erreur relative  $L^2(\Omega^i)$  commise sur les champs électriques pour les différentes approximations éléments finis, en fonction de la taille caractéristique du maillage  $h$ . La courbe  $\text{-}\triangle\text{-}$  correspond à l'ordre 1 de discrétisation. La courbe  $\text{-}\text{+}\text{-}$  correspond à l'ordre 2 de discrétisation. La courbe  $\text{-}\square\text{-}$  correspond à l'ordre 3 de discrétisation. La courbe  $\text{-}\bullet\text{-}$  correspond à l'ordre 4 de discrétisation. La courbe  $\text{-}\circ\text{-}$  correspond à l'ordre 5 de discrétisation.

l'erreur diminue lorsque le pas d'espace  $h$ , associé au maillage élément fini, diminue, et d'autre part, qu'elle diminue également lorsque nous augmentons l'ordre  $p$  d'approximation. Les ordres de convergence sont récapitulés dans le Tableau 9.4. La Figure 9.16 montre la convergence des solutions éléments finis sur le second cas-test pour deux va-

	-▲-	+—	-□·	-●·	-○-
Ordre pour $\delta = 0.1$	1.80	2.53	3.24	4.34	5.53
Ordre pour $\delta = 0.3$	1.40	2.54	3.29	4.42	5.29

TABLE 9.4 – Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d’approximation des solutions éléments finis.

leurs de  $\delta = 0.1$  et  $\delta = 0.3$ , ce qui valide par ailleurs les coefficients d’interactions entre les différents obstacles. Ici encore, nous constatons que l’erreur diminue lorsque nous



(a) Erreur relative dans  $\Omega^i$  pour  $\delta = 0.1$ .

(b) Erreur relative dans  $\Omega^i$  pour  $\delta = 0.3$ .

FIGURE 9.16 – Évolution de l’erreur relative  $L^2(\Omega^i)$  commise sur les champs électriques pour les différentes approximations éléments finis, en fonction de la taille caractéristique du maillage  $h$ . La courbe -▲- correspond à l’ordre 1 de discrétisation. La courbe +— correspond à l’ordre 2 de discrétisation. La courbe -□· correspond à l’ordre 3 de discrétisation. La courbe -●· correspond à l’ordre 4 de discrétisation. La courbe -○- correspond à l’ordre 5 de discrétisation.

considérons des maillages de plus en plus raffinés ou lorsque l’ordre d’approximation augmente. De plus, les ordres numériques de convergence se confirment au regard du premier test, au moins pour les trois premiers ordres d’approximation, comme cela est établi dans le Tableau 9.5.

Les tests effectués permettent de valider la méthode spectrale avec la méthode des éléments finis. La méthode des éléments finis fournit des approximations précises de la solution sous réserve de choisir des maillages suffisamment raffinés. La convergence est assez lente, en comparaison avec les approximations spectrales successives. Évidemment, plus les maillages sont fins et plus les coûts de calcul sont élevés, au même titre

	-▲-	+■-	-□·
Ordre pour $\delta = 0.1$	1.28	1.69	2.61
Ordre pour $\delta = 0.3$	1.27	1.73	2.28

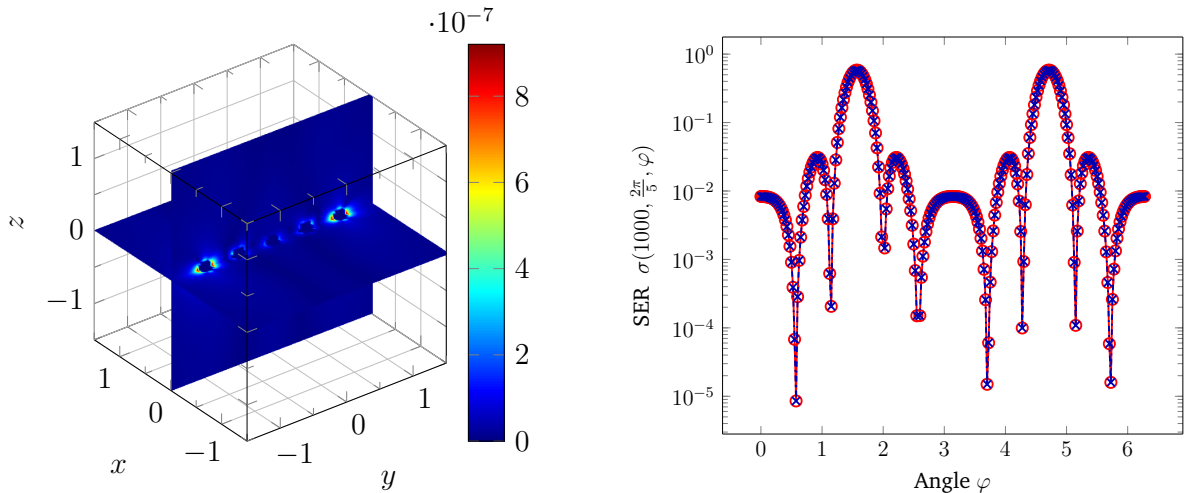
TABLE 9.5 – Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d’approximation des solutions éléments finis.

que la montée en ordre. Ce coût de calcul est principalement dû à la factorisation et à l’inversion de la matrice de masse. Dans la Section 9.3, nous montrerons qu’il est plus avantageux, en termes de coût, d’utiliser des méthodes qui ne nécessitent pas de mailler le domaine de calcul que la méthode des éléments finis, pour le problème de diffraction multiple par des sphères.

### 9.1.4 Comparaison avec les modèles asymptotiques

Dans les Sections 5.2 et 9.1.2, nous avons vérifié la convergence des solutions issues des modèles asymptotiques pour la diffraction multiple et des solutions obtenues avec la méthode spectrale. Ici, nous vérifions numériquement l’équivalence du modèle de Foldy modifié, présenté dans la Section 4.3.2, et de la méthode spectrale associée à  $N = 1$  mode. La solution de référence est la solution spectrale pour  $N = 8$  modes.

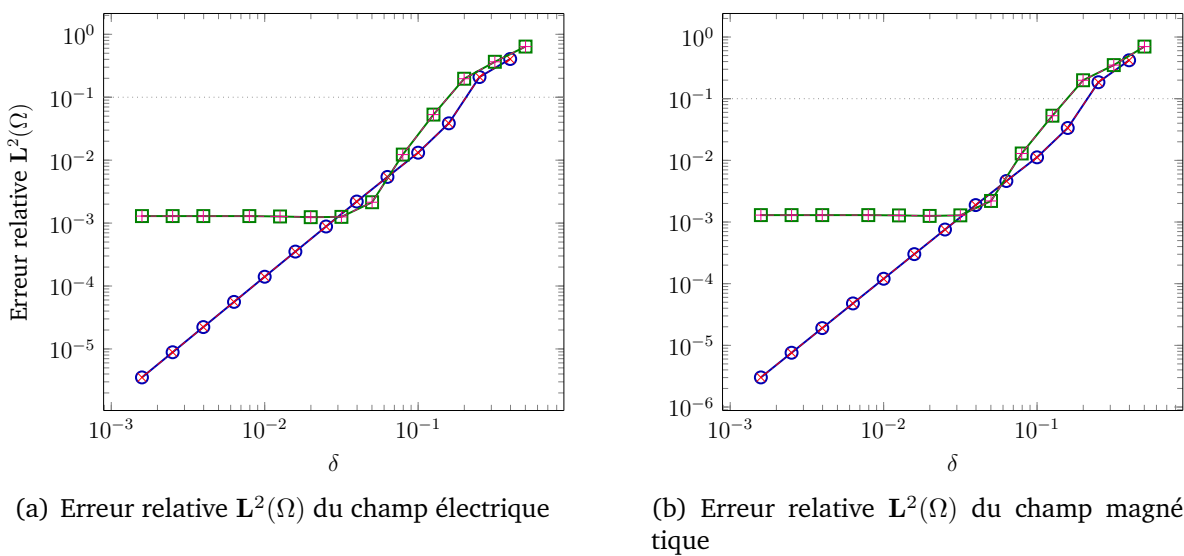
Nous considérons  $K = 5$  sphères uniformément distribuées selon l’axe des  $y$  (Géométrie n°1). Nous notons  $\mathbf{E}_\delta^1$  et  $\mathbf{H}_\delta^1$  les champs électromagnétiques calculés à partir de la méthode spectrale pour  $N = 1$ , et  $\mathbf{E}_\delta^F$  et  $\mathbf{H}_\delta^F$  les champs électromagnétiques approchés à partir du modèle de Foldy modifié. Nous comparons ponctuellement les solutions, d’une part, dans le domaine  $[-1.5, 1.5]^3$ , d’autre part, nous calculons la surface équivalente radar (SER) introduite dans la Définition 5.1. La comparaison de cette quantité, tenant à la fois compte du champ électrique et du champ magnétique s’avère pertinente pour valider les solutions ponctuellement. Par ailleurs, le coût de calcul, en comparaison avec une représentation volumique des champs, est amoindri. La Figure 9.17 illustre la comparaison ponctuelle des approximations  $(\mathbf{E}_\delta^1, \mathbf{H}_\delta^1)$  et  $(\mathbf{E}_\delta^F, \mathbf{H}_\delta^F)$  pour  $\delta = 0.1$  et  $d = 0.5$ . Nous observons que l’erreur ponctuelle est de l’ordre de  $10^{-7}$  et que les surfaces équivalentes radar sont confondues. De plus, nous pouvons comparer en norme  $L^2$  dans le domaine  $\Omega = [1.5\lambda, 2.5\lambda]^3$  (comme dans la Section 9.1.2). La Figure 9.18 montre les erreurs relatives commises sur le champ électrique lorsqu’il est approché par la méthode spectrale à l’ordre 1 et par le modèle de Foldy modifié, avec  $\lambda = 1.0$  et  $\delta$  variant. Sur les sous-figures, sont respectivement considérées les distances  $d = 1.0$  et  $d = 3\delta$ . Nous observons que les erreurs en norme  $L^2(\Omega)$  sont parfaitement identiques.



(a) Module de la différence ponctuelle entre la solution spectrale d'ordre 1 et la solution issue du modèle de Foldy modifié dans le domaine  $(-1.5, 1.5)^3$ .

(b) Surface équivalente radar avec  $R = 1000$  et  $\theta = \frac{2\pi}{5}$  en fonction de l'angle  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . La courbe  $\text{---}\circ\text{---}$  correspond à la solution spectrale d'ordre 1. La courbe  $\text{---}\times\text{---}$  correspond à la solution de Foldy modifié.

FIGURE 9.17 – À gauche, la représentation du module de la différence ponctuelle entre l'approximation spectrale d'ordre 1 et l'approximation de Foldy modifié. À droite, la représentation des surfaces équivalentes radar calculées à partir des deux approximations.



(a) Erreur relative  $L^2(\Omega)$  du champ électrique

(b) Erreur relative  $L^2(\Omega)$  du champ magnétique

FIGURE 9.18 – Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre les obstacles est choisie ou bien égale à la longueur d'onde ou bien dépend du rayon en  $\sqrt{\delta\lambda}$ . La courbe  $\text{---}\circ\text{---}$  correspond à la solution de Foldy avec  $d = 1.0$ . La courbe  $\text{---}\times\text{---}$  correspond à la solution spectrale d'ordre 1 avec  $d = 1.0$ . La courbe  $\text{---}\square\text{---}$  correspond à la solution de Foldy avec  $d = 3\delta$ . La courbe  $\text{---}+\text{---}$  correspond à la solution spectrale d'ordre 1 avec  $d = 3\delta$ .

Nous avons vérifié numériquement l'équivalence du modèle de Foldy, ayant subi une modification algébrique dictée par la théorie de Mie, avec la méthode spectrale d'ordre 1. Nous verrons dans la Section 9.3 qu'il est plus avantageux en termes de coûts de calcul, d'utiliser les modèles asymptotiques, incluant le modèle de Foldy modifié, que les approximations issues de la méthode spectrale. Par ailleurs, l'équivalence de ces deux méthodes est encourageante dans le sens où des modèles asymptotiques d'ordre supérieur avec modifications pourraient être mis en place en perspective.

## 9.2 Résolution pour un grand nombre d'obstacles

Dans cette section, nous mettons en œuvre et comparons la résolution itérative des systèmes linéaires engendrés par les modèles asymptotiques et la méthode spectrale associés au problème de diffraction des ondes électromagnétiques par un grand nombre d'obstacles. Plus le nombre d'obstacles augmente et plus la résolution du problème nécessite de ressources en mémoire. Pour pallier cette difficulté, nous utilisons la stratégie numérique présentée dans la Section 8.1.4.

### 9.2.1 Description des tests numériques

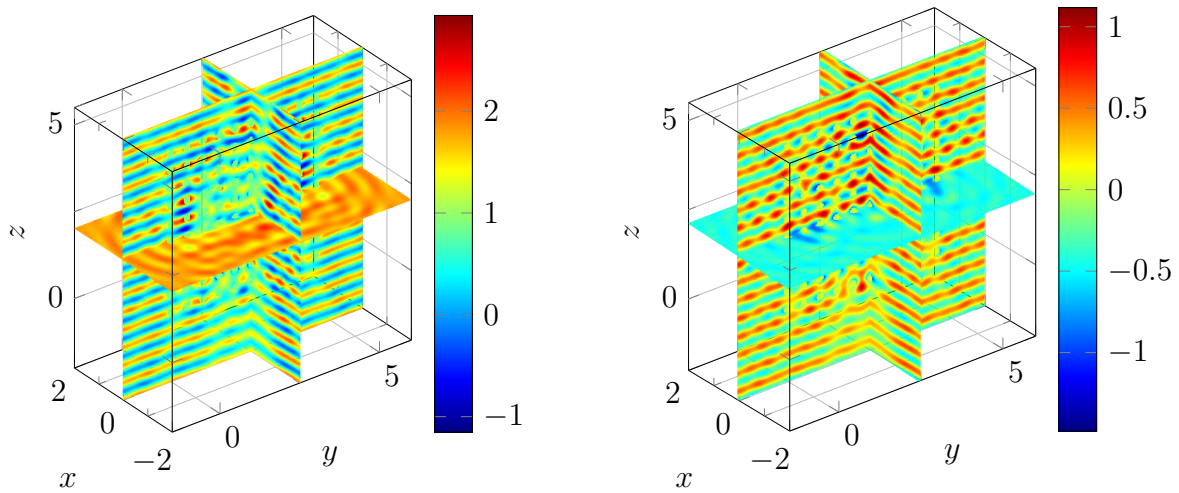
Nous considérons le problème de diffraction d'une onde plane électromagnétique par  $K$  sphères de rayon  $\delta = 0.1$ . L'onde plane électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 5.0$  est définie par (5.1) et se propage dans un milieu tel que  $\varepsilon = 1.0$  et  $\mu = 1.0$ , voir les Figures 9.1 et 9.2. Nous proposons deux types de géométrie. L'une est constituée de  $K$  sphères uniformément réparties sur un segment, l'autre constituée d'obstacles uniformément répartis dans une section du plan.

**Géométrie n°1** Nous avons déjà défini cette Géométrie à partir de la page 252. Ici, la distance entre les différents obstacles sera fixe et égale à  $d = 0.5$ . Nous renvoyons le lecteur aux Figures 5.18 à 5.20 pour une illustration des champs électromagnétiques totaux avec  $K = 21$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\lambda = 1.0$  et  $d = 0.5$ .

**Géométrie n°2** Nous considérons  $K_c \times K_l$  sphères de rayon  $\delta$  uniformément répartis dans la section du plan de vecteurs directeurs  $(0 \ 0 \ d(K_l - 1))$  et  $(0 \ d(K_c - 1) \ 0)$ . Les centres des sphères sont données par (8.15), c'est-à-dire

$$\mathbf{c}_k = \left( 0 \quad d(k_c - 1) \quad d(k_l - 1) \right), \quad k_c = 1, \dots, K_c, \quad k_l = 1, \dots, K_l.$$

Les Figures 9.19 à 9.21 représentent les champs électromagnétiques totaux avec  $K = 100$ ,  $\delta = 0.1 \lambda = 0.5$  et  $d = 0.5$ . La Figure 9.6 représente la partie réelle d'une des composantes des champs électromagnétiques. La Figure 9.20 représente la partie imaginaire

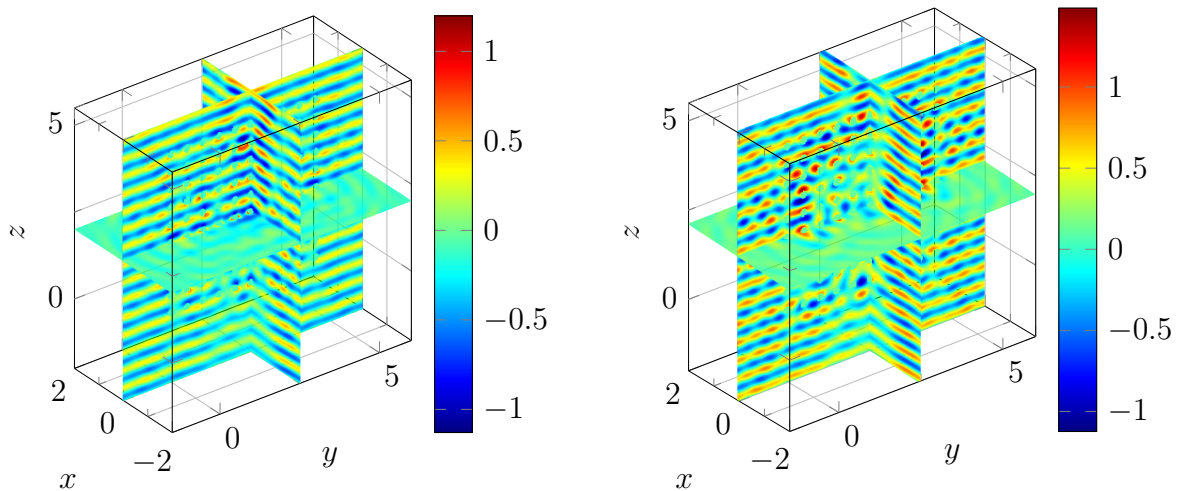


(a) Partie réelle de la première composante du champ électrique

(b) Partie réelle de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 9.19 – Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques totaux.

d'une des composantes des champs électromagnétiques. La Figure 9.21 représente le



(a) Partie imaginaire de la première composante du champ électrique

(b) Partie imaginaire de la deuxième composante du champ magnétique

FIGURE 9.20 – Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques totaux.

module des champs électromagnétiques totaux.



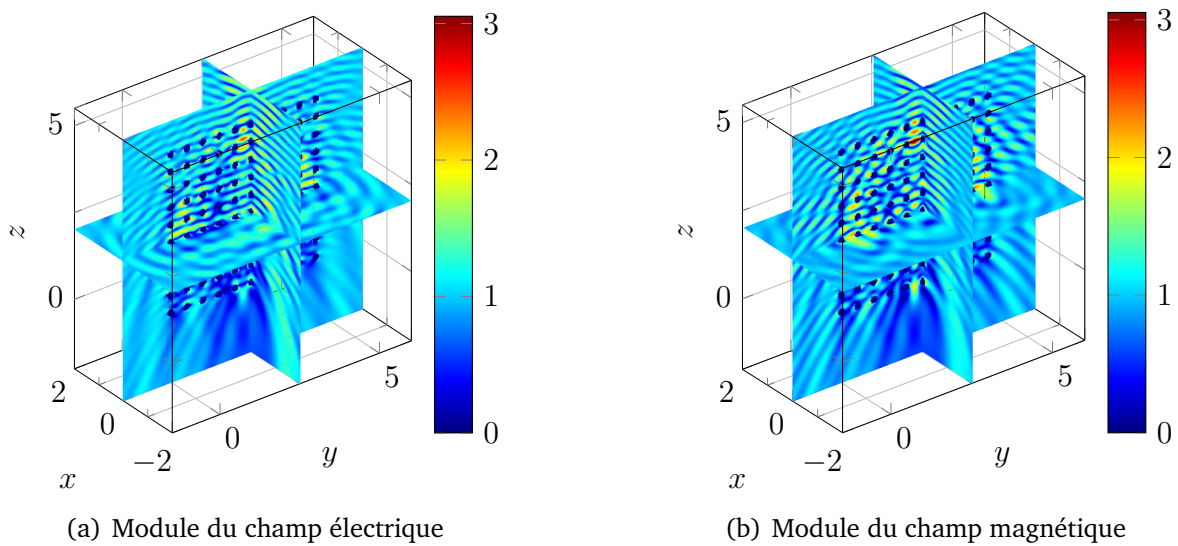


FIGURE 9.21 – Représentation du module des champs électromagnétiques totaux.

Les simulations numériques proposées font intervenir de grands nombres d'obstacles. Pour les réaliser, nous mettons en œuvre l'algorithme itératif présenté dans la Section 8.1.4. Pour chaque type de géométrie, nous mettons en place deux cas-tests. Pour le premier, nous aurons à notre disposition une solution de référence obtenue par une résolution directe. Pour le second, nous considérons une configuration géométrique pour laquelle la solution ne peut être calculée avec une résolution directe. Dans ce dernier cas, nous comparerons les résultats obtenus avec une solution calculée à l'aide de l'algorithme GMRES (de MATLAB). Lorsqu'il sera possible de calculer la solution de référence, nous calculerons les SER associées à

- la solution de référence qui correspond à la solution spectrale avec  $N = 2$  modes, obtenue par résolution directe,
- la solution issue du modèle de Foldy par résolution directe,
- la solution spectrale avec  $N = 1$  mode obtenue par résolution directe,
- ces mêmes solutions, calculées par la résolution itérative « maison » .

Dans le cas contraire, nous calculerons les les SER associées à

- la solution issue du modèle de Foldy obtenue à partir de la résolution itérative dont le procédé est rappelé ci-après,
- la solution calculée à partir de la méthode spectrale avec  $N = 1$  mode obtenue à partir de la résolution itérative « maison »,
- ces mêmes solutions, calculées à l'aide de l'algorithme GMRES.



En ce qui concerne la résolution directe, les matrices sont assemblées globalement. Pour obtenir les données de la résolution itérative, nous suivons les étapes suivantes :

1. calcul de la matrice bloc préconditionnée  $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ ,
2. extraction de la partie dite principale  $\mathbb{B}_{\text{bloc}}$  à une tolérance  $\epsilon$ ,
3. assemblage de la matrice creuse  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$ ,
4. application de l'algorithme itératif (8.8)-(8.9) où le produit matrice-vecteur  $\mathbb{C}\mathbf{x}_p$  est effectué à l'aide de l'action (8.10), voir Propositions 8.1 et 8.2.

### 9.2.2 Comparaison des surfaces équivalentes radar

Dans cette section, nous comparons les surfaces équivalentes radar calculées sur différentes géométries à l'aide des différentes méthodes et des différents types de résolution.

**Géométrie n°1** Nous considérons  $K = 1000$  sphères de rayon  $\delta = 0.1$  uniformément réparties selon l'axe des  $x$ . La distance entre deux obstacles consécutifs est égale à  $d = 1.0$ . Les Figures 9.22 et 9.23 illustrent les surfaces équivalentes radar associées à cette configuration géométrique, en échelle logarithmique. Sur la Figure 9.22, nous comparons les surfaces équivalentes radar obtenues à l'aide de la résolution directe des systèmes linéaires issus de la méthode spectrale pour  $N = 2$  modes avec celles obtenues à l'aide de la résolution directe des systèmes linéaires issus de la méthode spectrale pour  $N = 1$  mode et du modèle de Foldy dipolaire modifié. Les SER calculées à partir

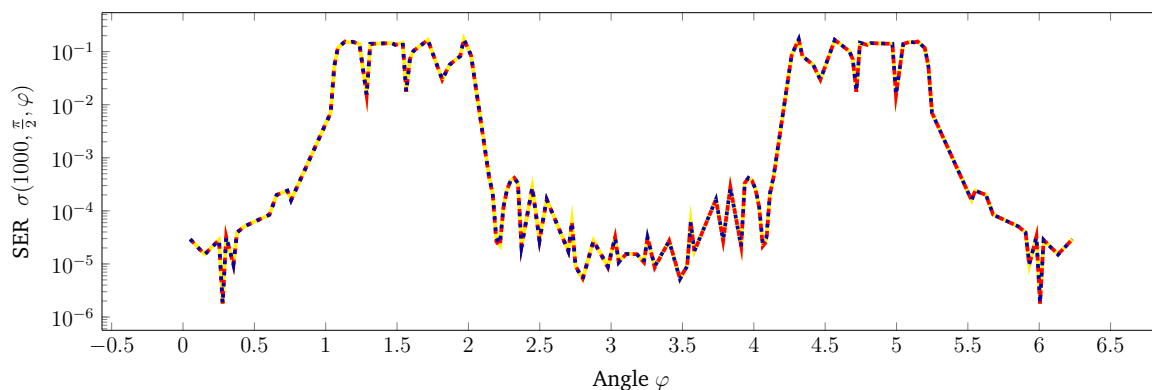
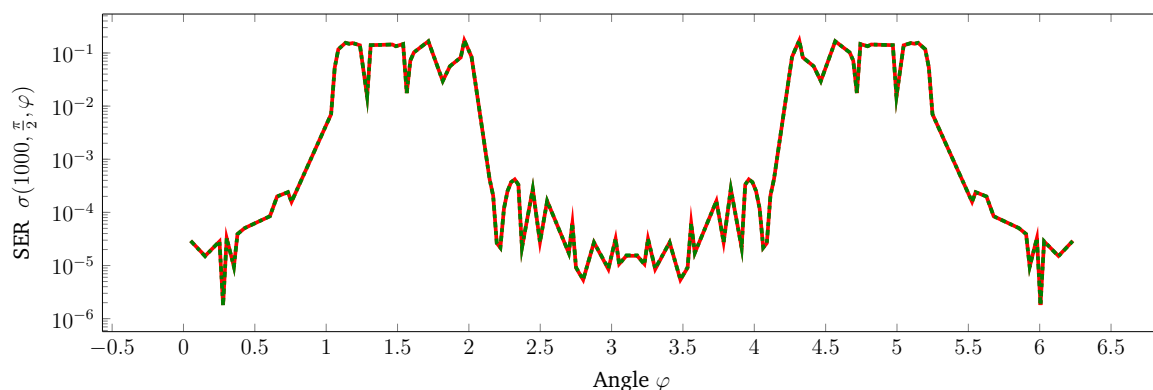


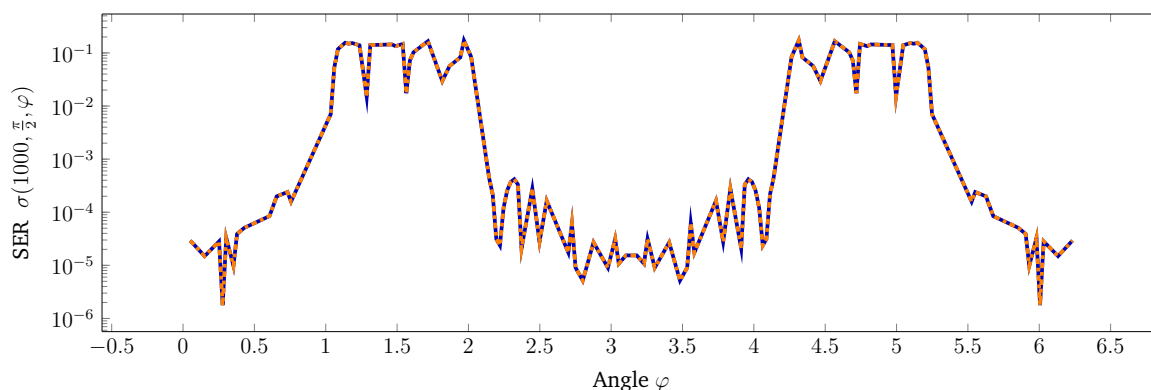
FIGURE 9.22 – Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K = 1000$  sphères obtenues par résolution directe. La courbe — correspond à la solution spectrale pour  $N = 2$  modes obtenue par résolution directe. La courbe ··· correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution directe. La courbe - - - correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution directe.

des différents modèles sont parfaitement confondues. La Figure 9.23 illustre les SER

calculées à l'aide de la méthode spectrale avec  $N = 1$  mode et du modèle de Foldy dipolaire modifié en utilisant la résolution directe ou la résolution itérative. Le critère



(a) Comparaison des solutions de Foldy obtenues par résolution directe et itérative



(b) Comparaison des solutions spectrales pour  $N = 1$  mode obtenues par résolution directe et itérative

FIGURE 9.23 – Comparaison des surfaces équivalentes radar pour  $K = 1000$  obtenues à l'aide des différentes méthodes par résolution directe et itérative. Les courbes — et — correspondent aux SER obtenues par résolution directe. Les courbes - - - et - - - correspondent aux SER obtenues par résolution itérative « maison ».

de tolérance  $\epsilon$  utilisé dans l'extraction des matrices principales est

- pour Foldy :  $\epsilon = 10^{-6}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 22.19%,
- pour Spectral :  $\epsilon = 10^{-5}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 19.27%.

La tolérance pour le résidu est choisie égale à  $10^{-6}$ . Nous observons que les résultats numériques concordent. Le second test comporte 10 000 sphères de rayon  $\delta = 0.1$  séparées d'une distance  $d = 1.0$ . La Figure 9.24 illustre les surfaces équivalentes radar associées à cette configuration géométrique, en échelle logarithmique pour les solutions spectrales avec  $N = 1$  mode obtenues à l'aide des algorithmes itératifs « maison » et GMRES, et la solution de Foldy obtenue à l'aide de la résolution itérative « maison ». Le critère de tolérance  $\epsilon$  utilisé dans l'extraction des matrices principales est

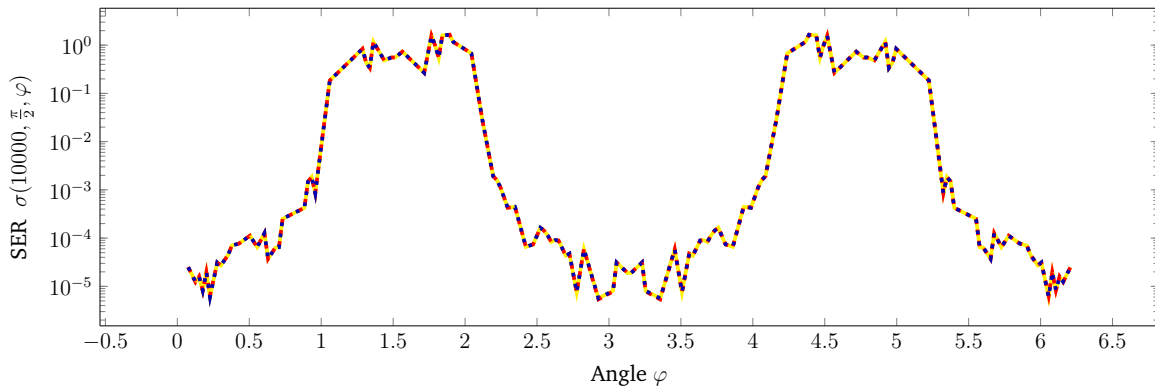


FIGURE 9.24 – Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K = 10\,000$  sphères obtenues par résolution itérative. La courbe — correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue avec GMRES. La courbe - - - correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution itérative « maison ». La courbe - - - correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution itérative « maison » .

- pour Foldy :  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-6}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 1.06%,
- pour Spectral :  $\epsilon = 10^{-5}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 0.76%.

La tolérance pour le résidu est choisi égal à  $10^{-6}$ . Sur la Figure 9.24, les résultats numériques concordent.

**Géométrie n°2** Nous considérons  $K_c \times K_l = 50 \times 50 = 2\,500$  sphères de rayon  $\delta = 0.1$  uniformément réparties dans le plan  $yOz$ . La distance entre deux obstacles consécutifs (sur une même ligne ou colonne) est égale à  $d = 1.0$ . Les Figures 9.25 et 9.26 illustrent les surfaces équivalentes radar associées à cette configuration géométrique, en échelle logarithmique. Sur la Figure 9.25, nous comparons les surfaces équivalentes radar obtenues à l'aide de la résolution directe des systèmes linéaires issus de la méthode spectrale pour  $N = 2$  modes avec celles obtenues à l'aide de la résolution directe des systèmes linéaires issus de la méthode spectrale pour  $N = 1$  mode et du modèle de Foldy dipolaire modifié. Les SER calculées à partir des différents modèles sont parfaitement confondues. La Figure 9.26 illustre les SER calculées à l'aide de la méthode spectrale avec  $N = 1$  mode et du modèle de Foldy dipolaire modifié en utilisant la résolution directe ou la résolution itérative. Le critère de tolérance  $\epsilon$  utilisé dans l'extraction des matrices principales est

- pour Foldy :  $\epsilon = 10^{-6}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 29.66%,
- pour Spectral :  $\epsilon = 10^{-5}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 27.72%.

La tolérance pour le résidu est choisie égale à  $10^{-6}$ . Les résultats restent tout à fait corrects. La dernière simulation numérique est composée de  $100 \times 100 = 10\,000$  sphères de

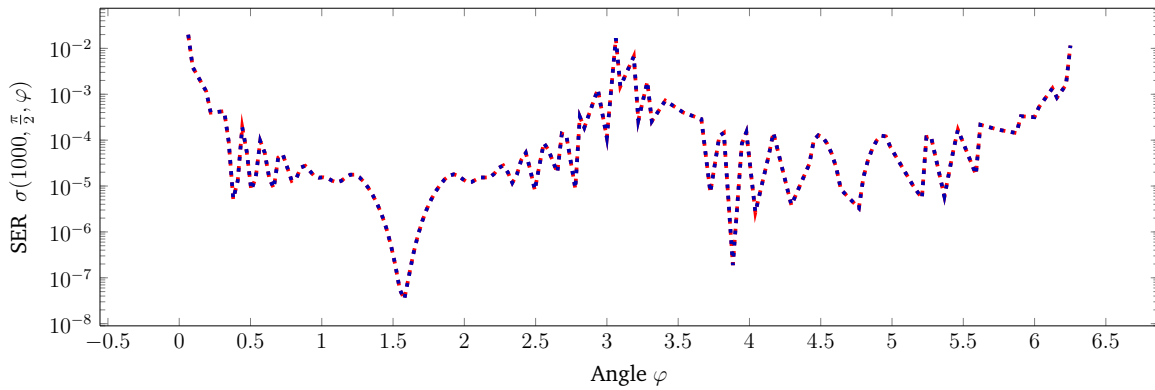
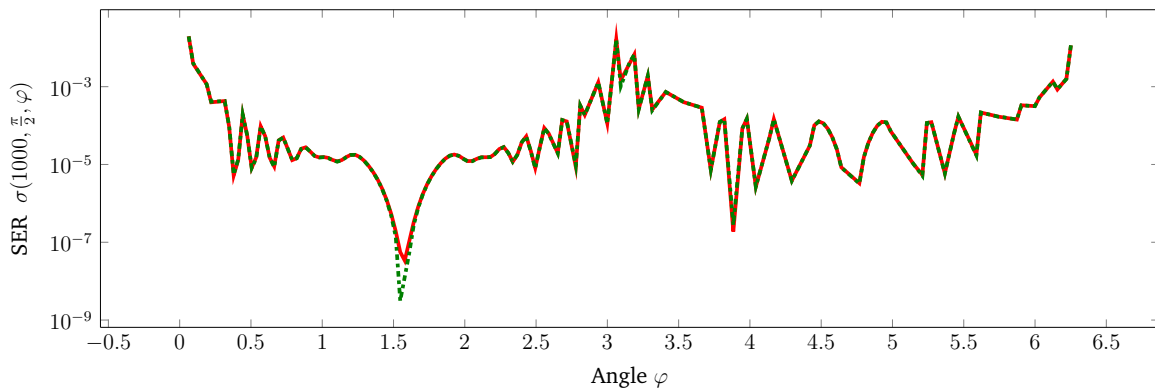
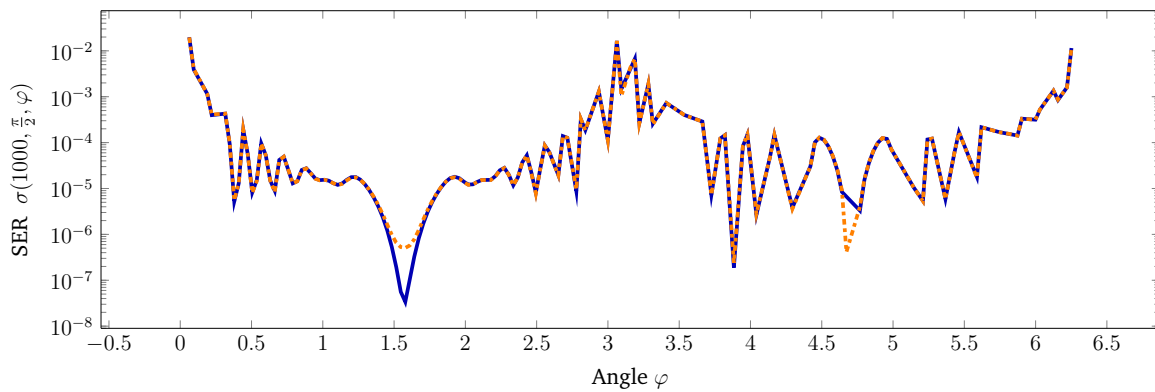


FIGURE 9.25 – Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K = 2500$  sphères obtenues par résolution directe. La courbe  $\text{---}$  correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution directe. La courbe  $\text{---}$  correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution directe.



(a) Comparaison des solutions de Foldy obtenues par résolution directe et itérative



(b) Comparaison des solutions spectrales pour  $N = 1$  mode obtenues par résolution directe et itérative

FIGURE 9.26 – Comparaison des surfaces équivalentes radar pour  $K = 2500$  obtenues à l'aide des différentes méthodes par résolution directe et itérative. Les courbes  $\text{---}$  et  $\text{---}$  correspondent aux SER obtenues par résolution directe. Les courbes  $\text{---}$  et  $\text{---}$  correspondent aux SER obtenues par résolution itérative « maison ».

rayon  $\delta = 0.1$  séparées d'une distance  $d = 1.0$ . La Figure 9.27 illustre les SER associées, en échelle logarithmique, pour les solutions spectrales avec  $N = 1$  mode obtenues par la résolution itérative « maison » et par GMRES, et la solution de Foldy obtenue par résolution itérative « maison ». Le critère de tolérance  $\epsilon$  utilisé dans l'extraction des matrices

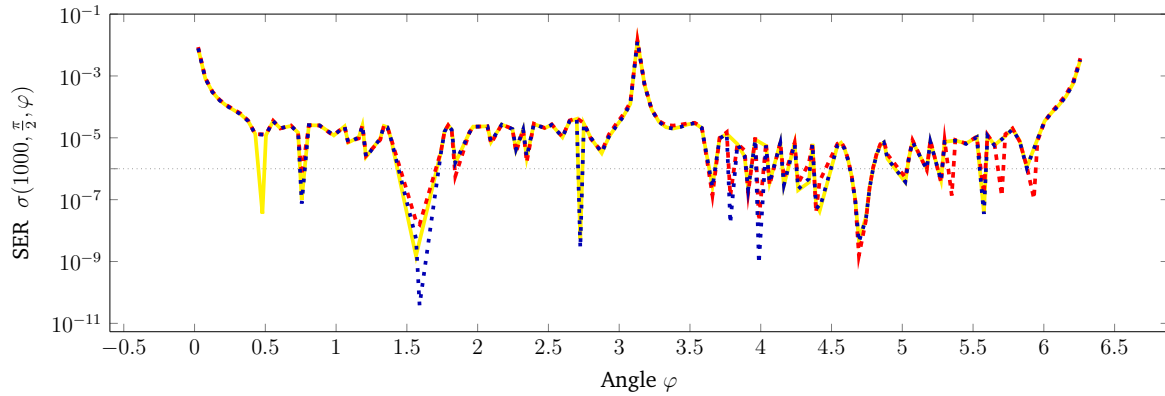


FIGURE 9.27 – Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K_c \times K_1 = 100 \times 100 = 10\,000$  sphères, obtenues par résolution itérative. La courbe — correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue avec GMRES. La courbe ··· correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution itérative « maison ». La courbe - - - correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution itérative « maison ».

principales est

- pour Foldy :  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 0.70%,
- pour Spectral :  $\epsilon = 7.5 \cdot 10^{-6}$  pour un taux de remplissage de la matrice de 0.0034%.

La tolérance sur le résidu est choisie égale  $10^{-6}$ . En règle générale, les résultats obtenus ne sont pas identiques mais sont assez proches. De plus, jusqu'au seuil de précision attendu, les résultats numériques concordent presque partout.

### 9.2.3 Convergence des solveurs itératifs

La convergence des solveurs itératifs dépend principalement du critère de tolérance  $\epsilon$  que nous choisissons pour définir la matrice des interactions principales  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$ . La différence entre la résolution itérative « maison » et la résolution à l'aide de GMRES se situe dans la prise en compte des interactions secondaires contenues dans la matrice  $\mathbb{C}_{\text{bloc}}$ . En effet, nous ne prenons pas en compte cette partie avec la méthode GMRES. Une question se pose : la prise en compte des interactions secondaires permet-elle d'améliorer la convergence de la résolution itérative ?

Nous comparons les résolutions itératives effectuées à l'aide de notre algorithme « maison » et de la méthode GMRES sur des configurations géométriques où les obstacles sont alignés. Nous nous intéressons au nombre d'itérations requises pour que le résidu de la solution atteigne la tolérance  $\text{tol}$  dans l'algorithme itératif, en fonction de différents paramètres, à savoir, le critère  $\epsilon$ , le nombre  $K$  d'obstacles et la distance  $d$  qui sépare deux obstacles consécutifs. Les Figures 9.28 à 9.30 illustrent la convergence des solveurs itératifs « maison » et GMRES. La Figure 9.28 montre leur convergence en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$  choisi pour extraire la matrice principale. La Figure

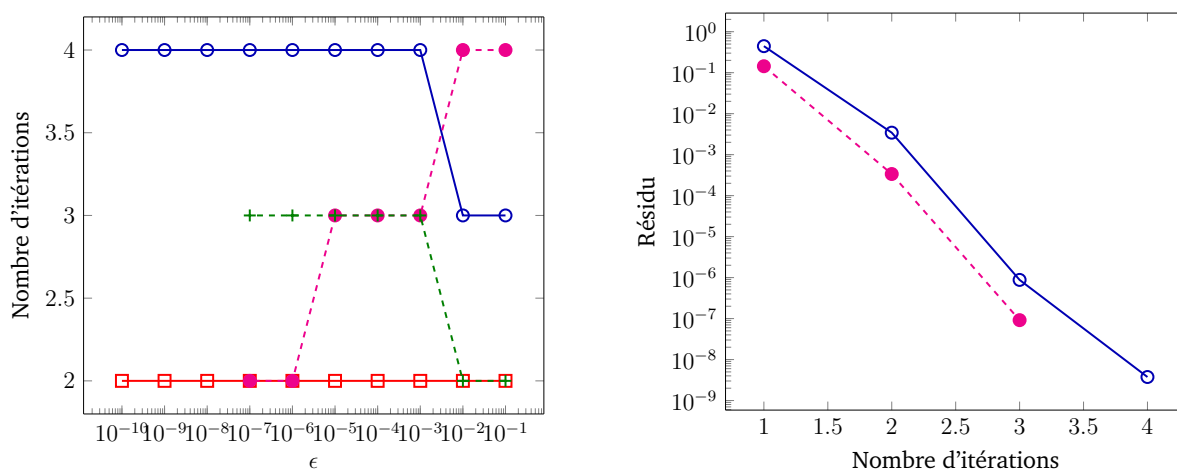
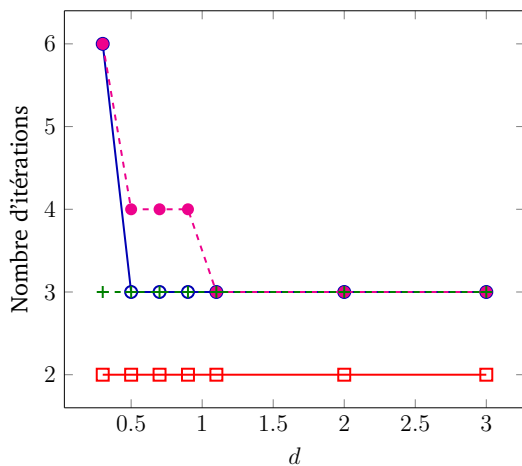
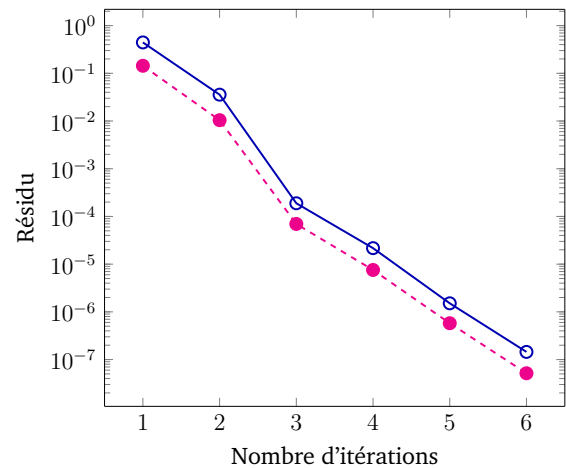
(a) Nombre d'itérations en fonction de  $\epsilon$ (b) Résidu en fonction du nombre d'itérations avec  $\epsilon = 10^{-6}$ .

FIGURE 9.28 – Évolution du nombre d'itérations en fonction du critère  $\epsilon$  à gauche et évolution du résidu en fonction du nombre d'itérations à droite. La courbe  $\text{--}\square\text{--}$  correspond à Foldy modifié « maison ». La courbe  $\text{--}\circ\text{--}$  correspond à Foldy modifié GMRES. La courbe  $\text{--}+\text{--}$  correspond à Spectral « maison » avec  $N = 1$  mode. La courbe  $\text{--}\bullet\text{--}$  correspond à Spectral GMRES avec  $N = 1$  mode.

9.29 montre la convergence des solveurs itératifs « maison » et GMRES en fonction de la distance  $d$  qui sépare deux obstacles consécutifs. La Figure 9.30 montre la convergence des solveurs itératifs « maison » et GMRES en fonction du nombre d'obstacles. Nous observons que la convergence des solveurs itératifs dépend de la densité des matrices considérées, de la distance qui sépare deux obstacles consécutifs mais elle ne semble pas dépendre du nombre d'obstacles. Pour infirmer ou confirmer cela, il faudrait comparer la convergence de ces solveurs sur une plus grande plage de nombre d'obstacles.

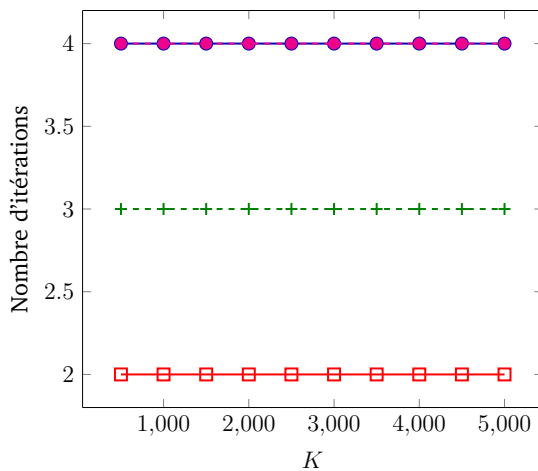


(a) Nombre d'itérations en fonction de  $d$  avec  $\epsilon = \frac{\delta^3}{d}$

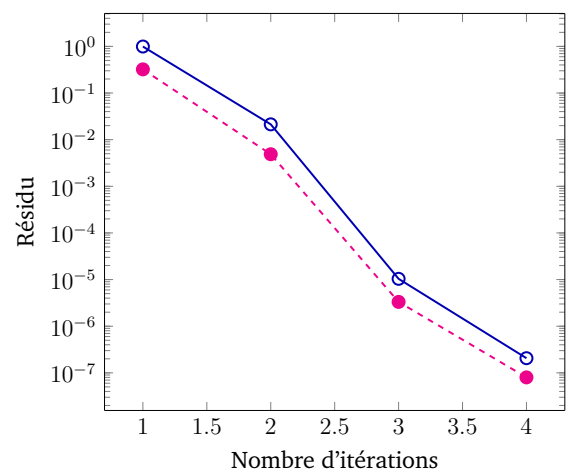


(b) Résidu en fonction du nombre d'itérations avec  $d = 0.3$

FIGURE 9.29 – Évolution du nombre d'itérations en fonction de la distance  $d$  entre obstacles à gauche et évolution du résidu en fonction du nombre d'itérations à droite. La courbe  $\square$  correspond à Foldy modifié « maison ». La courbe  $\circ$  correspond à Foldy modifié GMRES. La courbe  $+$  correspond à Spectral « maison » avec  $N = 1$  mode. La courbe  $\bullet$  correspond à Spectral GMRES avec  $N = 1$  mode.



(a) Nombre d'itérations en fonction de  $K$  avec  $\epsilon = \frac{\delta^3}{d}$



(b) Résidu en fonction du nombre d'itérations avec  $K = 5\,000$ .

FIGURE 9.30 – Évolution du nombre d'itérations en fonction du critère nombre  $K$  d'obstacles à gauche et évolution du résidu en fonction du nombre d'itérations à droite. La courbe  $\square$  correspond à Foldy modifié « maison ». La courbe  $\circ$  correspond à Foldy modifié GMRES. La courbe  $+$  correspond à Spectral « maison » avec  $N = 1$  mode. La courbe  $\bullet$  correspond à Spectral GMRES avec  $N = 1$  mode.

## 9.3 Coûts de calcul

Dans cette section, nous comparons les coûts de calcul, en termes de temps et d'espace mémoire, engendrés par la méthode spectrale avec ceux engendrés par les modèles asymptotiques puis avec ceux engendrés par les éléments finis.

### 9.3.1 Comparaison avec les modèles asymptotiques

Nous comparons les temps de calcul et l'espace mémoire nécessaires à la simulation numériques des solutions issues des modèles réduits et des modèles spectraux.

Dans les Tableaux 9.6 à 9.9, nous récapitulons les coûts de calcul associés aux cas-tests présentés dans la Section 9.2.2. Le Tableau 9.6 s'adresse au cas de 1 000 obstacles alignés. Le Tableau 9.7 s'adresse au cas de 10 000 obstacles alignés. Le Tableau 9.8 s'adresse

	Solveur	Système linéaire	Post-traitement	Temps total	Mémoire
Foldy modifié	Direct	21.25 s	16.12 s	37.37 s	1.1 Go
Spectral 1	Direct	44.59 s	21.19 s	65.78 s	1.1 Go

TABLE 9.6 – Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec  $N = 1$  mode sur le cas de 1 000 obstacles alignés.

	Solveur	Système linéaire	Post-traitement	Temps total	Mémoire
Foldy modifié	Itératif	29.74 s	76.64 s	106.46 s	< 1 Go
Spectral 1	Itératif	163.25 s	262.97 s	426.34 s	< 1 Go

TABLE 9.7 – Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec  $N = 1$  mode sur le cas de 10 000 obstacles alignés.

au cas de  $50 \times 50 = 2\,500$  obstacles uniformément répartis dans le plan. Le Tableau 9.9

	Solveur	Système linéaire	Post-traitement	Temps total	Mémoire
Foldy modifié	Direct	595.10 s	22.96 s	618.48 s	7 Go
Foldy modifié	Itératif	38.32 s	19.00 s	57.32 s	< 1 Go
Spectral 1	Direct	613.10 s	62.69 s	676.09 s	7 Go
Spectral 1	Itératif	234.84 s	58.47 s	293.31 s	< 1 Go

TABLE 9.8 – Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec  $N = 1$  mode sur le cas de  $50 \times 50 = 2\,500$  obstacles uniformément répartis dans un plan.

s'adresse au cas de  $100 \times 100 = 10\,000$  obstacles uniformément répartis dans le plan.



	Solveur	Système linéaire	Post-traitement	Temps total	Mémoire
Foldy modifié	Itératif	180.73 s	99.02 s	279.75 s	15.6 Go
Spectral 1	Itératif	1000.10 s	241.60 s	1512.96 s	12.8 Go

TABLE 9.9 – Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec  $N = 1$  mode sur le cas de  $100 \times 100 = 10\,000$  obstacles uniformément répartis dans un plan.

Pour une précision identique, les modèles réduits apparaissent vraiment plus rapides et efficaces que la méthode spectrale.

### 9.3.2 Comparaison avec les éléments finis

Nous comparons les temps de calcul et l’espace mémoire nécessaires à la simulation numérique d’une solution élément fini issue de Montjoie (<http://montjoie.gforge.inria.fr/>) en comparaison avec une solution spectrale sur trois cas-tests : le premier dans le contexte de la diffraction simple par une sphère, le deuxième en considérant deux obstacles et le troisième en considérant quatre obstacles alignés. Les simulations numériques sont effectuées sur la plateforme de calcul Plafrim – soutenue par Inria, CNRS (LABRI et IMB), Université de Bordeaux, Bordeaux INP et le Conseil Régional d’Aquitaine (<https://www.plafrim.fr/>) – lorsque cela n’est pas possible (en termes de mémoire) de les réaliser en local.

Pour les solutions éléments finis, les maillages  $\mathcal{M}_{h_{\text{raf}}}$  sont construits de la même manière que nous l’avons présenté dans la Section 9.1.3 avec  $n_{\text{raf}} = 10$ . La Figure 9.13 illustre les maillages pour un et deux obstacles. La Figure 9.31 illustre le maillage sur le cas des quatre obstacles.

Les temps de calcul et l’utilisation de la mémoire pour les solutions éléments finis à l’ordre 3 et les solutions spectrales avec  $N = 3$  modes sont récapitulés dans les Tableaux 9.10 à 9.12. Dans le Tableau 9.10, les coûts sont associés au cas de un obstacle. Dans le

	Nombre de d.d.l.	Précision ( $\mathbf{L}^2$ )	Temps	Mémoire
Élément fini 3	925 422	$0.28 \cdot 10^{-3}$	26.5 min	21.11 Go
Spectral 3	30	$4.77 \cdot 10^{-6}$	5.05 s	< 1 Go

TABLE 9.10 – Coûts de calcul associés aux solutions éléments finis d’ordre 3 et aux solutions spectrales avec  $N = 3$  modes sur le cas d’un obstacle.

Tableau 9.11, les coûts de calcul sont associés au cas de deux obstacles. Dans le Tableau

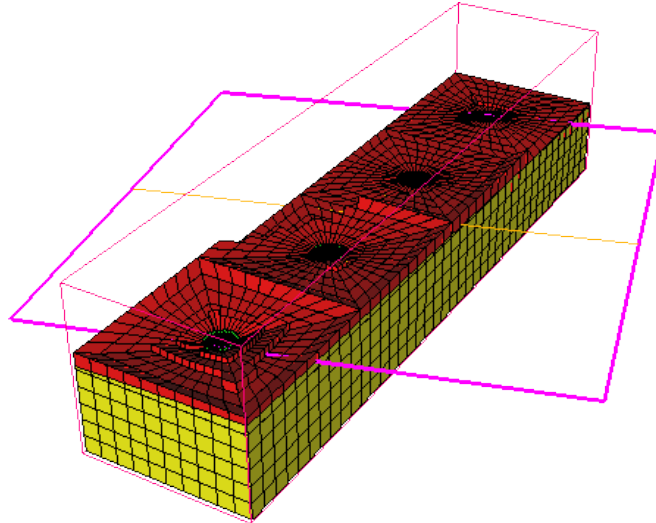


FIGURE 9.31 – Coupes du maillage volumique comportant quatre obstacles sphériques, utilisé pour la simulation des solutions éléments finis avec  $n_{\text{raf}} = 10$ .

	Nombre de d.d.l.	Précision ( $L^2$ )	Temps	Mémoire
Élément fini 3	1 972 800	$2.27 \cdot 10^{-3}$	54.25 min	36.97 Go
Spectral 3	60	$4.48 \cdot 10^{-6}$	9.45 s	< 1 Go

TABLE 9.11 – Coûts de calcul associés aux solutions éléments finis d'ordre 3 et aux solutions spectrales avec  $N = 3$  modes sur le cas des deux obstacles.

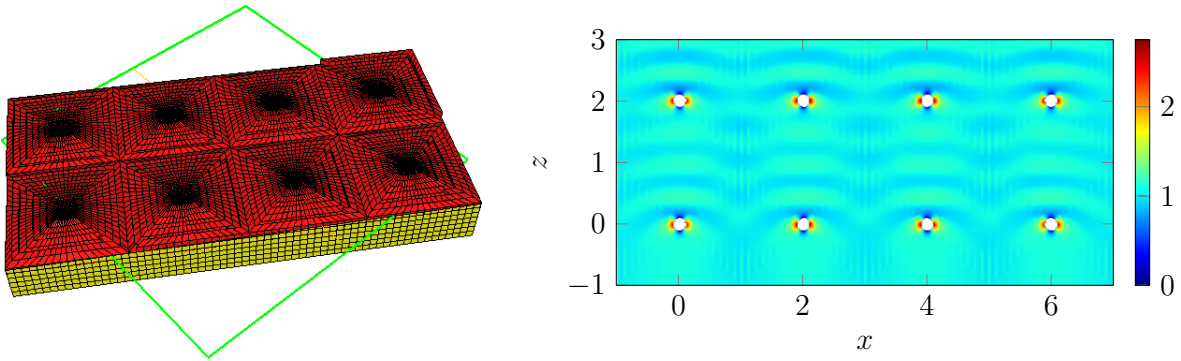
9.12, les coûts de calcul sont associés au cas de quatre obstacles. Les coûts de calcul des

	Nombre de d.d.l.	Précision ( $L^2$ )	Temps	Mémoire
Élément fini 3	3 942 936	$3.31 \cdot 10^{-3}$	147.25 min	75 Go
Spectral 3	120	$3.66 \cdot 10^{-6}$	18.31 s	< 1 Go

TABLE 9.12 – Coûts de calcul associés aux solutions éléments finis d'ordre 3 et aux solutions spectrales avec  $N = 3$  modes sur le cas de quatre obstacles.

éléments finis sont bien plus importants que ceux des solutions spectrales. Cela est en partie dû au nombre important de degrés de liberté engendré par les éléments finis, et plus généralement par les méthodes dont la précision dépend du maillage choisi.

Le dernier cas élément fini est composé de huit obstacles. L'ordre d'approximation des éléments finis est choisi égal à 2. La Figure 9.32 illustre le maillage associé est une coupe bidimensionnelle de la solution dans le plan  $xz$ . Ce cas qui comporte 2 436 832 degrés de liberté, a demandé environ 8h de calcul et 40 Go de mémoire.



(a) Coupe du maillage volumique comportant huit obstacles sphériques avec  $n_{\text{raf}} = 10$

(b) Coupe du champ électrique total dans le plan  $xz$

FIGURE 9.32 – Représentation du maillage et du champ électrique total issu de la simulation numérique élément fini avec huit obstacles.

## 9.4 Conclusion

La méthode spectrale développée dans le Chapitre 7 a été validée numériquement à l'aide de solutions éléments finis. Nous avons pu mettre en évidence numériquement un ordre de convergence pour les ordres  $N$  (le nombre de modes) successifs

$$\frac{\|\mathbf{E}_\delta - \mathbf{E}_\delta^N\|}{\|\mathbf{E}_\delta + \mathbf{E}^{\text{inc}}\|} \leq c \delta^{2N+3},$$

qui sont en accord avec l'estimation de [Ammari \*et al.\* \(2013b\)](#) obtenue dans le cadre de la diffraction simple.

La résolution itérative présentée dans le Chapitre 8 permet d'obtenir des approximations précises pour des cas qui comportent de grands nombres d'obstacles. Le calcul des approximations obtenues à partir de la méthode spectrale est beaucoup moins coûteux, en termes de temps de calcul et d'utilisation mémoire, que la méthode des éléments finis continus. Par ailleurs, les modèles réduits permettent encore de réduire les coûts de calcul, en comparaison avec la méthode spectrale, pour une précision identique à bas-ordre. Toutefois, le développement de modèles réduits d'ordre d'élevé semble compliqué à mettre en place.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Après avoir rappelé brièvement dans les Chapitres 1 et 2 les bases de l'électromagnétisme et la théorie de petits obstacles, nous avons développé dans les Chapitres 3 et 4 des modèles approchés par sources ponctuelles. Il s'avère que le formalisme associé à Maxwell est beaucoup plus compliqué que celui des ondes scalaires, par exemple acoustiques. Toutefois, les modèles réduits obtenus sont de même nature et aboutissent à des méthodes numériques similaires. Les modèles approchés ont été illustrés numériquement dans le Chapitre 5 et les résultats présentés sont cohérents avec la théorie. Dans une seconde partie, nous nous sommes intéressés à l'implémentation pratique de ces modèles et à l'extension d'une théorie proche : la méthode spectrale. Contrairement aux méthodes volumiques qui engendrent des systèmes mal-conditionnés, nous avons réussi à mettre en œuvre une stratégie d'inversion itérative à l'aide d'une méthode GMRES préconditionnée. Ceci nous a permis, pour huit obstacles dans le cadre d'une solution élément fini, de passer d'un temps de calcul de huit heures nécessitant 40 Go de mémoire vive, à une méthode interactive avec un temps de calcul négligeable et une utilisation mémoire très faible. Nous avons pu aussi calculer en moins de trois minutes le champ diffracté par dix mille obstacles. Il est bien entendu dans ce cas impensable de faire ce calcul en éléments finis.

L'extension numérique à des obstacles de forme arbitraire reste à être mise en œuvre. Par la suite, il serait aussi pertinent de s'intéresser aux problèmes suivants.

- Le problème inverse : il s'agit de déterminer la taille et la position de billes à l'aide de la mesure du champ lointain, en étendant les travaux de [Barucq et al. \(2018b\)](#) au cas électromagnétique.
- Le problème en temps : il semble possible de traduire en termes d'opérateurs en

temps et à l'aide de la transformation de Fourier inverse, en reproduisant l'approche de [Mattesi \(2014\)](#) ou [Marmorat \(2015\)](#). Nous aboutirons à un problème dipolaire. Il semble beaucoup plus difficile de développer une méthode spectrale.

- La dynamique de billes métalliques soumise à un champ électromagnétique : en simulation numérique il est rare de prendre en compte la rétro-action du champ électromagnétique sur les objets diffractants. Les champs électromagnétiques sont à l'origine de forces de Lorentz qui mettent les billes en mouvement. C'est un sujet qui a été très peu traité par la communauté mathématique.

## BIBLIOGRAPHIE

- AMMARI, H., IAKOVLEVA, E., LESSELIER, D. et PERRUSSON, G. (2007). Music-type electromagnetic imaging of a collection of small three-dimensional inclusions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(2):674–709.
- AMMARI, H. et KANG, H. (2004). *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*. Springer.
- AMMARI, H., KANG, H., LEE, H. et LIM, M. (2013a). Enhancement of near-cloaking. part ii : The helmholtz equation. *Communications in Mathematical Physics*, 317(2):485–502.
- AMMARI, H., KANG, H., LEE, H., LIM, M. et YU, S. (2013b). Enhancement of near cloaking for the full maxwell equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(6):2055–2076.
- AMMARI, H., KANG, H. et LIM, M. (2005). Polarization tensors and their applications. *In Journal of Physics : Conference Series*, volume 12, page 13. IOP Publishing.
- AMMARI, H., KANG, H., NAKAMURA, G. et TANUMA, K. (2002). Complete asymptotic expansions of solutions of the system of elastostatics in the presence of an inclusion of small diameter and detection of an inclusion. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 67(2):97–129.
- AMMARI, H. et KHELIFI, A. (2003). Electromagnetic scattering by small dielectric inhomogeneities. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 82(7):749–842.
- AMMARI, H., VOGELIUS, M. S. et VOLKOV, D. (2001). Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter II : The full Maxwell equations. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 80(8):769–814.

- AMROUCHE, C., BERNARDI, C., DAUGE, M. et GIRAULT, V. (1998). Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9):823–864.
- BAKHTI, S., TISHCHENKO, A. V., ZAMBRANA-PUYALTO, X., BONOD, N., DHUEY, S., SCHUCK, P. J., CABRINI, S., ALAYOGLU, S., DESTOUCHES, N., BAKHTI, S., TISHCHENKO, A. et DESTOUCHES, N. (2016). Fano-like resonance emerging from magnetic and electric plasmon mode coupling in small arrays of gold particles. *Scientific Reports*.
- BARUCQ, H., CHABASSIER, J., PHAM, H. et TORDEUX, S. (2018a). Numerical robustness of single-layer method with fourier basis for multiple obstacle acoustic scattering in homogeneous media. *Wave Motion*, 77:40–63.
- BARUCQ, H., FAUCHER, F. et PHAM, H. (2018b). Localization of small obstacles from back-scattered data at limited incident angles with full-waveform inversion. *Journal of Computational Physics*, 370:1–24.
- BENDALI, A. (2013). Equations intégrales en électromagnétisme. *Cours BEM INSA Toulouse*.
- BENDALI, A., COCQUET, P.-H. et TORDEUX, S. (2016). Approximation by multipoles of the multiple acoustic scattering by small obstacles in three dimensions and application to the foldy theory of isotropic scattering. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 219(3):1017–1059.
- BERETTA, E., BONNETIER, E., FRANCINI, E. *et al.* (2011a). An asymptotic formula for the displacement field in the presence of small anisotropic elastic inclusions. *arXiv preprint arXiv :1105.4111*.
- BERETTA, E., BONNETIER, E., FRANCINI, E. et MAZZUCATO, A. L. (2011b). Small volume asymptotics for anisotropic elastic inclusions. *Inverse Prob. Imaging*, 6:1–23.
- BLITZ, J. (2012). *Electrical and magnetic methods of non-destructive testing*, volume 3. Springer Science & Business Media.
- BORGHESE, F., DENTI, P., SAIJA, R., TOSCANO, G. et SINDONI, O. (1984). Multiple electromagnetic scattering from a cluster of spheres. i. theory. *Aerosol Science and Technology*, 3(2):227–235.
- BORN, P., HOLLDAK, K. et SPERL, M. (2015). Particle characterization using thz spectroscopy. *Granular Matter*, 17(5):531–536.
- BOUCHE, D. et MOLINET, F. (1994). *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*, volume 16. Springer Science & Business Media.

- BOUZEKRI, A. et SINI, M. (2019). The foldy–lax approximation for the full electromagnetic scattering by small conductive bodies of arbitrary shapes. *Multiscale Modeling & Simulation*, 17(1):344–398.
- BRANCHERIE, D., DAMBRINE, M., VIAL, G. et VILLON, P. (2008). Effect of surface defects on structure failure : a two-scale approach. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 17(5-7):613–624.
- BROWN, R. G. (2009). Classical electrodynamics. *Robert Brown*, URL <http://www.phy.duke.edu/~rgb/Class/phy319/phy319/phy319.html>.
- BRUNING, J. et LO, Y. (1971). Multiple scattering of em waves by spheres part i—multipole expansion and ray-optical solutions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 19(3):378–390.
- CANCÈS, E., MADAY, Y. et STAMM, B. (2013). Domain decomposition for implicit solvation models. *The Journal of chemical physics*, 139(5):054111.
- CHALLA, D. P., HU, G. et SINI, M. (2014). Multiple scattering of electromagnetic waves by finitely many point-like obstacles. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(05):863–899.
- CLAEYS, X. (2008). *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d’ondes par des fils minces*. Thèse de doctorat, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines.
- COHEN, G. et MONK, P. (1998). Gauss point mass lumping schemes for maxwell’s equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations : An International Journal*, 14(1):63–88.
- COLTON, D. et KRESS, R. (1998). *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, New York, second édition.
- COLTON, D. et KRESS, R. (2013). *Integral equation methods in scattering theory*, volume 72. SIAM.
- CRIGHTON, D. G., DOWLING, A. P., FFOWCS-WILLIAMS, J., HECKL, M., LEPPINGTON, F. et BARTRAM, J. F. (1992). *Modern methods in analytical acoustics lecture notes*.
- CRUZAN, O. R. (1962). Translational addition theorems for spherical vector wave functions. *Quarterly of Applied Mathematics*, 20(1):33–40.
- DAUGE, M. (1988). *Elliptic boundary value problems on corner domains*.
- DAUGE, M., PERUGIA, I. et PICHLER, A. (2019). A Trefftz discontinuous galerkin method for acoustic scattering by small circular obstacles. *In WAVES 2019 - Book of*



- Abstracts*, pages 440–441. Institute of Mechanics and Mechatronics, Faculty of Mechanical and Industrial Engineering. Institute of Analysis and Scientific Computing, Faculty of Mathematics and Geoinformation.
- DAUGE, M., TORDEUX, S. et VIAL, G. (2010). Selfsimilar perturbation near a corner : matching versus multiscale expansions for a model problem. *In Around the Research of Vladimir Maz'ya II*, pages 95–134. Springer.
- DAVIS, L. (1979). Theory of electromagnetic beams. *Physical Review A*, 19(3):1177.
- de LA BOURDONNAYE, A. (1993). Décomposition de  $H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 316(4):369–372.
- DE RHAM, G. (1973). *Variétés différentiables : formes, courants, formes harmoniques*, volume 3. Editions Hermann.
- DELOURME, B. (2010). *Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques en électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- DOLEAN, V., FOL, H., LANTERI, S. et PERRUSSEL, R. (2008). Solution of the time-harmonic maxwell equations using discontinuous galerkin methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218(2):435–445.
- DRAINE, B. T. (2003). Scattering by interstellar dust grains : I. Optical and ultraviolet. *The Astrophysical Journal*, 598(2):1017.
- DURUFLÉ, M. (2006). *Intégration numérique et éléments finis d'ordre élevé appliqués aux équations de Maxwell en régime harmonique*. Thèse de doctorat. Thèse de doctorat dirigée par Cohen, Gary Chalom Sciences. Mathématiques appliquées Paris 9 2006.
- ECKHAUS, W. (1973). Matched asymptotic expansions and singular perturbations.
- EGEL, A., PATTELLI, L., MAZZAMUTO, G., WIERSMA, D. S. et LEMMER, U. (2017). Celes : Cuda-accelerated simulation of electromagnetic scattering by large ensembles of spheres. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 199:103–110.
- FARADAY, M. (1832). Experimental Researches in Electricity. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (122):125–162.
- FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B. et SANDS, M. (1979). *The Feynman Lectures on Physics Volume II : Mainly Electromagnetism and Matter*. Addison-Wesley.
- FOLDY, L. L. (1945). The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Physical Review*, 67(3-4):107.
- FREY, P. J. (2001). An interactive mesh visualization software.

- FRIEDMAN, B. et RUSSEK, J. (1954). Addition theorems for spherical waves. *Quarterly of Applied Mathematics*, 12(1):13–23.
- FULLER, K. A. (1991). Optical resonances and two-sphere systems. *Applied optics*, 30(33):4716–4731.
- FULLER, K. A. et KATTAWAR, G. W. (1988). Consummate solution to the problem of classical electromagnetic scattering by an ensemble of spheres. i : Linear chains. *Optics letters*, 13(2):90–92.
- GALISTEO-LÓPEZ, J. F., IBISATE, M., SAPIENZA, R., FROUFE-PÉREZ, L. S., BLANCO, Á. et LÓPEZ, C. (2011). Self-assembled photonic structures. *Advanced Materials*, 23(1):30–69.
- GANESH, M. et HAWKINS, S. C. (2008). A high-order tangential basis algorithm for electromagnetic scattering by curved surfaces. *Journal of Computational Physics*, 227(9):4543–4562.
- GANESH, M. et HAWKINS, S. C. (2009). A high-order algorithm for multiple electromagnetic scattering in three dimensions. *Numerical Algorithms*, 50(4):469–510.
- GANESH, M., HESTHAVEN, J. S. et STAMM, B. (2012). A reduced basis method for electromagnetic scattering by multiple particles in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, 231(23):7756–7779.
- GAUNT, J. A. (1929). Iv. the triplets of helium. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 228(659-669):151–196.
- GAUSS, C. F. (1813). *Theoria Attractionis Corporum Sphaeroidicorum Ellipticorum Homogeneorum*. In *Werke*, pages 3–22. Springer.
- HARDY, G., LITTLEWOOD, J. et POLYA, G. (1952). *Inequalities* cambridge univ. Press, Cambridge, (1988).
- HODGE, W. V. D. (1989). *The theory and applications of harmonic integrals*. CUP Archive.
- HUTTUNEN, T., MALINEN, M. et MONK, P. (2007). Solving maxwell’s equations using the ultra weak variational formulation. *Journal of Computational Physics*, 223(2):731–758.
- IL’IN, A. M. (1992). *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, volume 102. American Mathematical Society Providence, RI.
- JACKSON, J. D. (1962). *Classical Electrodynamics*. Wiley.

- KELLER, J., KLEINMAN, R. et SENIOR, T. (1972). Dipole moments in rayleigh scattering. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 9(1):14–22.
- KOGELNIK, H. et LI, T. (1966). Laser beams and resonators. *Applied optics*, 5(10):1550–1567.
- KORIKOV, D. (2014). Asymptotic behavior of solutions to wave equation in domain with a small hole. *Algebra i Analiz*, 26(5):164–199.
- KORIKOV, D. et PLAMENEVSKII, B. A. (2016). Asymptotics of solutions for stationary and nonstationary maxwell systems in a domain with small holes. *Algebra i Analiz*, 28(4):102–170.
- LABAT, J. (2016). Représentations modales pour la diffraction d’ondes électromagnétiques. Mémoire de D.E.A., Université de Pau et des Pays de l’Adour.
- LANDAU, L. D. et LIFSHITZ, E. M. (1960). *Electrodynamics of Continuous Media*, volume 8 de *A Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press.
- LE LOUËR, F. (2009). *Optimisation de forme d’Antennes lentilles intégrées aux ondes millimétriques*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1.
- LI, L., LANTERI, S. et PERRUSSEL, R. (2013). Numerical investigation of a high order hybridizable discontinuous galerkin method for 2d time-harmonic maxwell’s equations. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 32(3):1112–1138.
- LIONS, J. L. et MAGENES, E. (1968). Problemes aux limites non homogenes et applications.
- MACKOWSKI, D. et MISHCHENKO, M. (2011). A multiple sphere t-matrix fortran code for use on parallel computer clusters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 112(13):2182–2192.
- MACKOWSKI, D. W. (1991). Analysis of radiative scattering for multiple sphere configurations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 433(1889):599–614.
- MACKOWSKI, D. W. et MISHCHENKO, M. I. (1996). Calculation of the t matrix and the scattering matrix for ensembles of spheres. *JOSA A*, 13(11):2266–2278.
- MARENIC, E., BRANCHERIE, D. et BONNET, M. (2015). Asymptotic analysis for the multiscale modeling of defects in mechanical structures. *In 12e Colloque national en calcul des structures*, Giens, France. CSMA.
- MARMORAT, S. (2015). *Asymptotic models and numerical simulation for the diffraction of waves by small defects*. Theses, Université Paris-Saclay.

- MARTIN, P. A. (2006). *Multiple scattering : interaction of time-harmonic waves with N obstacles*. Numéro 107. Cambridge University Press.
- MATTESI, V. (2014). *Propagation des ondes dans un domaine comportant des petites hétérogénéités : modélisation asymptotique et calcul numérique*. Thèse de doctorat, Pau.
- MAXWELL, J. C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 1. Oxford : Clarendon Press.
- MAZ'YA, V., NAZAROV, S. et PLAMENEVSKIJ, B. (2012). *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, volume 1. Birkhäuser.
- MIE, G. (1908). Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der physik*, 330(3):377–445.
- MISHCHENKO, M. I., HOVENIER, J. W. et TRAVIS, L. D. (1999). *Light scattering by nonspherical particles : theory, measurements, and applications*. Academic press.
- MONK, P. (2003). *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford University Press.
- NARAGHI, R. R., SUKHOV, S., SÁENZ, J. et DOGARIU, A. (2015). Near-field effects in mesoscopic light transport. *Physical review letters*, 115(20):203903.
- NÉDÉLEC, J.-C. (2001). *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer Science & Business Media.
- NGUYEN, N. C., PERAIRE, J. et COCKBURN, B. (2011). Hybridizable discontinuous galerkin methods for the time-harmonic maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 230(19):7151–7175.
- NOUSIAINEN, T. et MCFARQUHAR, G. M. (2004). Light scattering by quasi-spherical ice crystals. *Journal of the atmospheric sciences*, 61(18):2229–2248.
- OKADA, Y. et KOKHANOVSKY, A. (2009). Light scattering and absorption by densely packed groups of spherical particles. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 110(11):902–917.
- OLVER, F. W., LOZIER, D. W., BOISVERT, R. F. et CLARK, C. W. (2010). Nist handbook of mathematical functions, us department of commerce, national institute of standards and technology.
- PÉRON, V. (2009). *Modélisation mathématique de phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste*. Thèse de doctorat, Université Rennes 1.

- PHILLIPS, R. (1973). On the existence and uniqueness of the exterior helmholtz problem. In SPENCER, D. et SOCIETY, A. M., éditeurs : *Partial Differential Equations*, Proceedings of symposia in pure mathematics, pages 152–160. American Mathematical Society.
- PURCELL, E. M. et PENNYPACKER, C. R. (1973). Scattering and absorption of light by nonspherical dielectric grains. *The Astrophysical Journal*, 186:705–714.
- RAMM, A. G. (1986). *Scattering by Obstacles*. Springer.
- RAMM, A. G. (2005). *Wave scattering by small bodies of arbitrary shapes*. Springer.
- RAYLEIGH, L. (1897). V. On the incidence of aerial and electric waves upon small obstacles in the form of ellipsoids or elliptic cylinders, and on the passage of electric waves through a circular aperture in a conducting screen. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(266):28–52.
- REUSE, F. A. (2012). *Électrodynamique*. PPUR Presses Polytechniques.
- SAUTER, S. A. et SCHWAB, C. (2010). Boundary element methods. In *Boundary Element Methods*, pages 183–287. Springer.
- SCHIFFER, M. et SZEGO, G. (1949). Virtual mass and polarization. *Transactions of the American Mathematical Society*, 67(1):130–205.
- STEIN, S. (1961). Addition theorems for spherical wave functions. *Quarterly of Applied Mathematics*, 19(1):15–24.
- STRATTON, J. A. et CHU, L. (1939). Diffraction theory of electromagnetic waves. *Physical Review*, 56(1):99.
- TANNOUDJI, C. C., DIU, B. et LALOË, F. (1980). *Mécanique quantique*. Hermann.
- TATOUT, F. (1996). *Calculs asymptotiques de la propagation d'ondes en physique et applications :-propagation d'une onde electromagnetique dans une fente mince.- propagation d'ondes en elasticite, application au controle frontiere*. Thèse de doctorat, Cachan, Ecole normale supérieure.
- THIERRY, B. (2011). *Analysis and Numerical Simulations of Time Reversal and Multiple Scattering*. Theses, Université Henri Poincaré - Nancy I.
- TORDEUX, S. (2004). *Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes*. Theses, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines.
- VAN BLADEL, J. G. (2007). *Electromagnetic fields*, volume 19. John Wiley & Sons.
- VAN DYKE, M. (1975). *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Parabolic Press.









- VEIHELMANN, B., NOUSIAINEN, T., KAHNERT, M. et Van der ZANDE, W. (2006). Light scattering by small feldspar particles simulated using the gaussian random sphere geometry. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 100(1-3): 393–405.
- VIAL, G. (2003). *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. Thèse de doctorat.
- VOGELIUS, M. S. et VOLKOV, D. (2000). Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34(4):723–748.
- VOLKOV, D. (2003). *An inverse problem for the time harmonic Maxwell's equations*. Thèse de doctorat.
- WRIEDT, T., HELLMERS, J., EREMINA, E. et SCHUH, R. (2006). Light scattering by single erythrocyte : comparison of different methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 100(1-3):444–456.
- XU, Y.-L. (1995). Electromagnetic scattering by an aggregate of spheres. *Applied optics*, 34(21):4573–4588.
- XU, Y.-l. (1996). Calculation of the addition coefficients in electromagnetic multisphere-scattering theory. *Journal of Computational Physics*, 127(2):285–298.



## TABLE DES FIGURES

1.1	Illustration des éléments de volume $d\Omega$ et de surface $d\Sigma$ . . . . .	12
1.2	Courant filiforme. . . . .	28
1.3	Dipôle à gauche, quadrupôle au milieu et octupôle à droite . . . . .	29
1.4	Systèmes quadripolaires issus de la base $(\mathbf{Q}_k)$ . . . . .	35
2.1	Géométrie du problème. . . . .	49
2.2	Domaine de validité du développement externe à gauche et domaine de champ lointain à droite. . . . .	58
2.3	Domaine de validité du développement interne à gauche et domaine de champ proche à droite. . . . .	59
2.4	Zone de raccord. . . . .	59
2.5	Zone de raccordement dans le contexte de multiples obstacles ( $K = 3$ ). . . . .	66
5.1	Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques incidents associés à l'onde plane électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 5.0$ se propageant à la vitesse $c = 1.0$ . . . . .	131
5.2	Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques associés à l'onde plane électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 5.0$ se propageant à la vitesse $c = 1.0$ . . . . .	131
5.3	Représentation de la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. . . . .	132
5.4	Représentation de la partie imaginaire de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. . . . .	132
5.5	Représentation du module des champs électromagnétiques totaux. . . . .	133



5.6	Représentation du module des champs électromagnétiques diffractés en échelle logarithmique. . . . .	133
5.7	Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques incidents associés au faisceau gaussien électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 5.0$ de rayon de gorge $w_0 = 5.0$ , se propageant à la vitesse $c = 1.0$ . . . . .	134
5.8	Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques incidents associés au faisceau gaussien électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 5.0$ de rayon de gorge $w_0 = 5.0$ et se propageant à la vitesse $c = 1.0$ . . . . .	134
5.9	Représentation de la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. . . . .	135
5.10	Représentation de la partie imaginaire de l'une des champs électromagnétiques totaux. . . . .	136
5.11	Représentation du module des champs électromagnétiques totaux. . . . .	136
5.12	Représentation du module des composantes des champs électromagnétiques diffractés en échelle logarithmique. . . . .	136
5.13	Évolution de l'erreur relative calculée en norme $L^2(\Omega_1^2)$ commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon $\delta$ de la sphère pour le cas de l'onde incidente n°1. La courbe  correspond au développement interne tronqué à l'ordre $P = 0$ . La courbe  correspond au développement interne tronqué à l'ordre $P = 1$ . La courbe  correspond au développement interne tronqué à l'ordre $P = 2$ . . . . .	138
5.14	Évolution de l'erreur relative calculée en norme $L^2(\Omega_1^2)$ commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon $\delta$ de la sphère, pour le cas de l'onde incidente n°2. La courbe  correspond au développement interne tronqué à l'ordre $P = 0$ . La courbe  correspond au développement interne tronqué à l'ordre $P = 1$ . La courbe  correspond au développement interne tronqué à l'ordre $P = 2$ . . . . .	139
5.15	Évolution de l'erreur relative calculée en norme $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$ commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon $\delta$ de la sphère pour le cas de l'onde incidente n°1. La courbe  correspond au développement externe tronqué à l'ordre $P = 3$ . La courbe  correspond au développement externe tronqué à l'ordre $P = 5$ . . . . .	140

5.16 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère, pour le cas de l'onde incidente n°2. La courbe  $\text{-}\triangle\text{-}$  correspond au développement externe tronqué à l'ordre  $P = 3$ . La courbe  $\text{-}\ominus\text{-}$  correspond au développement externe tronqué à l'ordre  $P = 5$ . . . . . 141

5.17 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_\lambda^{2\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  de la sphère pour le cas de l'onde incidente n°1. Les courbes  $\text{-}\triangle\text{-}$  et  $\text{-}\ominus\text{-}$  correspondent respectivement aux développements externes tronqués aux ordres  $P = 3$  et  $P = 5$ . La courbe  $\text{-}\bullet\text{-}$  correspond à l'approximation dipolaire collectée. La courbe  $\text{-}\text{+}\text{-}$  correspond à l'approximation dipolaire modifiée. . . . . 142

5.18 Représentation de la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. . . . . 144

5.19 Représentation de la partie imaginaire de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. . . . . 144

5.20 Représentation du module des champs électromagnétiques diffractés. . . 145

5.21 Représentation du module des champs électromagnétiques diffractés. . . 145

5.22 Représentation de la partie réelle de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. . . . . 146

5.23 Représentation de la partie imaginaire de l'une des composantes des champs électromagnétiques totaux. . . . . 146

5.24 Représentation du module des champs électromagnétiques totaux. . . . 146

5.25 Représentation du module des champs électromagnétiques totaux. . . . 147

5.26 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = 3.0$ , associée à la Géométrie n°1. La courbe  $\text{-}\ominus\text{-}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\text{-}\times\text{-}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\text{-}\diamond\text{-}$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\text{-}\text{+}\text{-}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\text{-}\square\text{-}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\text{-}\bullet\text{-}$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée. . . . . 148

5.27 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = \sqrt{\delta\lambda}$ , associée à la Géométrie n°1. La courbe  $\ominus$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\times$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\diamond$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\oplus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\boxminus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\bullet$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée. . . . . 149

5.28 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = 3\delta$ , associée à la Géométrie n°1. La courbe  $\ominus$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\times$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\diamond$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\oplus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\boxminus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\bullet$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée. . . . . 150

5.29 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = 3.0$ , associée à la Géométrie n°2. La courbe  $\ominus$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\times$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\diamond$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\oplus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\boxminus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\bullet$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée. . . . . 151

5.30 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega_{2\lambda}^{3\lambda})$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères, avec  $d = \sqrt{\lambda\delta}$ , associée à la Géométrie n°2. La courbe  $\ominus$  correspond à l'approximation de Born dipolaire. La courbe  $\times$  correspond à l'approximation de Born dipolaire collectée. La courbe  $\diamond$  correspond à l'approximation de Born dipolaire modifiée. La courbe  $\oplus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire. La courbe  $\boxminus$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire collectée. La courbe  $\bullet$  correspond à l'approximation de Foldy-Lax dipolaire modifiée. . . . . 151

5.31 Représentation des surfaces équivalentes radar. La courbe — correspond à la SER de référence pour  $\delta = 0.5$ . Les courbes --- et — correspondent à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.5$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.3$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.15$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $\delta = 0.1$ . . . . . 152

5.32 Représentation des surfaces équivalentes radar avec  $\delta = 0.5$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (0, 0, 0)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (1, 1, 1)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (2, 2, 2)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (-1, -1, -1)$ . La courbe — correspond à la SER pour  $c = (-2, -2, -2)$ . . . . . 153

5.33 Représentation des surfaces équivalentes radar. La courbe — correspond à la SER de référence pour  $\delta = 0.5$ . Les courbes --- et — correspondent à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 2.0$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 1.5$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 4.0$ . La courbe — correspond à la SER issue de Foldy dipolaire modifié pour  $d = 10.0$ . . . . . 154

5.34 Représentation des surfaces équivalentes radar avec  $\delta = 0.5$ . La courbe — correspond à la SER issue du modèle de Foldy dipolaire modifié pour  $K = 2$  et  $d = 10.0$ . La courbe — correspond à la SER issue du modèle de Foldy dipolaire modifié pour  $K = 5$  et  $d = 2.5$ . La courbe — correspond à la SER issue du modèle de Foldy dipolaire modifié pour  $K = 9$  et  $d = 1.25$ . 154

6.1 Géométrie du problème. . . . . 162

6.2 Schéma représentant les moments angulaires  $\ell_k$  et leurs projections  $m_k$  pour  $k = 1, 2, 3$ . . . . . 176

7.1 Représentation du domaine extérieur  $\Omega_{\mathbb{R}}^e$ . . . . . 188

7.2 Squelette associé au bloc  $\mathbb{M}_{\ell_k}^{**}$  à l'intérieur des parties  $\mathbb{M}^{**}$  . . . . . 204

8.1 Configuration géométrique :  $\delta$  désigne le rayon des sphères,  $d$  la distance entre deux centres et  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde incidente dirigée selon l'axe  $z$ . . . . . 223

8.2 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ) et  $N = 2$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ) et  $N = 2$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ) et  $N = 2$  ( $\oplus$ ), en fonction du nombre d'obstacles. . . . . 223

8.3 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ) et  $N = 2$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ) et  $N = 2$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ) et  $N = 2$  ( $\oplus$ ), en fonction du nombre d'obstacles. . . . . 224

8.4 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ) et  $N = 2$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ) et  $N = 2$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ) et  $N = 2$  ( $\oplus$ ), en fonction du nombre d'obstacles. . . . . 224

8.5 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ),  $N = 2$  ( $\ominus$ ) et  $N = 3$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ),  $N = 2$  ( $\times$ ) et  $N = 3$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ),  $N = 2$  ( $\oplus$ ) et  $N = 3$  ( $\oplus$ ), en fonction de la taille des obstacles. . . . . 225

8.6 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ) et  $N = 2$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ) et  $N = 2$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ) et  $N = 2$  ( $\oplus$ ), en fonction de la taille des obstacles. . . . . 225

8.7 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ) et  $N = 2$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ) et  $N = 2$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ) et  $N = 2$  ( $\oplus$ ), en fonction de la taille des obstacles. . . . . 226

8.8 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ),  $N = 2$  ( $\ominus$ ) et  $N = 3$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ),  $N = 2$  ( $\times$ ) et  $N = 3$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ),  $N = 2$  ( $\oplus$ ) et  $N = 3$  ( $\oplus$ ), en fonction de la taille des obstacles. . . . . 226

8.9 Conditionnement des matrices  $\mathbb{M}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\ominus$ ),  $N = 2$  ( $\ominus$ ) et  $N = 3$  ( $\ominus$ ), des matrices  $\widetilde{\mathbb{M}}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\times$ ),  $N = 2$  ( $\times$ ) et  $N = 3$  ( $\times$ ), et des matrices  $\mathbb{A}^e$  associées à  $N = 1$  ( $\oplus$ ),  $N = 2$  ( $\oplus$ ) et  $N = 3$  ( $\oplus$ ), en fonction de la distance séparant les obstacles. . . . . 227

8.10 Configuration géométrique :  $\delta$  désigne le rayon des sphères,  $d$  la distance entre deux centres et  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde incidente dirigée selon l'axe  $z$ . . . . . 228

8.11 Squelette des matrices  $\mathbb{A}^e$ . . . . . 229

8.12 Squelette des matrices extraites  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$ . . . . . 230

8.13 Évolution du remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombres d'obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\text{---}\boxplus\text{---}$  correspond à  $K = 3 \times 3$  obstacles, la courbe  $\text{---}\color{red}{+}\text{---}$  correspond  $K = 4 \times 4$  obstacles, la courbe  $\text{---}\ominus\text{---}$  correspond à  $K = 5 \times 5$  obstacles et la courbe  $\text{---}\color{yellow}{\times}\text{---}$  correspond à  $K = 6 \times 6$  obstacles. . . . . 230

8.14 Évolution du remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents rayons  $\delta$ , en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\text{---}\boxplus\text{---}$  correspond à  $\delta = 0.1$ , la courbe  $\text{---}\color{red}{+}\text{---}$  correspond à  $\delta = 0.01$ , la courbe  $\text{---}\ominus\text{---}$  correspond à  $\delta = 0.001$  et la courbe  $\text{---}\color{yellow}{\times}\text{---}$  correspond à  $\delta = 0.0001$ . . . . . 231

8.15 Évolution du remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différentes distances entre obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\text{---}\boxplus\text{---}$  correspond à  $d = 10.0$ , la courbe  $\text{---}\color{red}{\diamond}\text{---}$  correspond  $d = 5.0$ , la courbe  $\text{---}\color{green}{+}\text{---}$  correspond à  $d = 1.0$ , la courbe  $\text{---}\color{blue}{\odot}\text{---}$  correspond à  $d = 0.5$  et la courbe  $\text{---}\color{yellow}{\times}\text{---}$  correspond à  $d = 0.3$ . . . . . 232

8.16 Squelette des matrices extraites  $\mathbb{I} + \mathbb{B}$ . . . . . 232

8.17 Évolution du taux de remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombres d'obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\text{---}\boxplus\text{---}$  correspond à  $K = 3 \times 3$  obstacles, la courbe  $\text{---}\color{red}{+}\text{---}$  correspond  $K = 5 \times 5$  obstacles, la courbe  $\text{---}\ominus\text{---}$  correspond à  $K = 7 \times 7$  obstacles et la courbe  $\text{---}\color{yellow}{\times}\text{---}$  correspond à  $K = 9 \times 9$  obstacles. . . . . 233

8.18 Évolution du taux de remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombre d'obstacles, en fonction du critère de tolérance  $\epsilon$ . La courbe  $\text{---}\boxplus\text{---}$  correspond à  $K = 3 \times 3$  obstacles, la courbe  $\text{---}\color{red}{+}\text{---}$  correspond  $K = 5 \times 5$  obstacles, la courbe  $\text{---}\ominus\text{---}$  correspond à  $K = 7 \times 7$  obstacles et la courbe  $\text{---}\color{yellow}{\times}\text{---}$  correspond à  $K = 9 \times 9$  obstacles. . . . . 233

8.19	Évolution du taux de remplissage de la matrice en pourcentage associée à l'extraction des interactions principales pour différents nombre d'obstacles, en fonction du critère de tolérance $\epsilon$ . La courbe $\text{---}\boxplus\text{---}$ correspond à $d = 0.3$ , la courbe $\text{---}\odot\text{---}$ correspond $d = 0.5$ , la courbe $\text{---}+\text{---}$ correspond à $d = 1.0$ , la courbe $\text{---}\times\text{---}$ correspond à $d = 5.0$ et la courbe $\text{---}\diamond\text{---}$ correspond à $d = 10.0$ . . . . .	234
8.20	Configuration géométrique : $K$ sphères uniformément réparties sur le segment $[a, b]$ . . . . .	237
8.21	À gauche, est schématisée une des parties de la matrice globale $\mathbb{A}$ et à droite, la partie correspondante de $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ . Les blocs ayant la même couleur sont identiques, les blocs de couleurs différentes sont deux à deux distincts.	238
8.22	Configuration géométrique : $K_c \times K_l$ sphères uniformément réparties dans le pavé $[a, b] \times [a, d]$ . . . . .	239
8.23	Au dessus, est schématisée une des parties de la matrice globale $\mathbb{A}$ et en dessous, la partie correspondante de $\mathbb{A}_{\text{bloc}}$ . Les blocs ayant la même couleur sont identiques, les blocs de couleurs différentes sont deux à deux distincts. . . . .	242
8.24	Configuration géométrique : $K_h \times K_c \times K_l$ sphères uniformément réparties dans le pavé $[a, b] \times [a, d] \times [a, h]$ . . . . .	243
8.25	Schéma d'une des parties de la matrice globale $\mathbb{A}$ . Les blocs ayant la même couleur sont identiques, les blocs de couleurs différentes sont deux à deux distincts. . . . .	244
9.1	Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques associés à l'onde plane de longueur d'onde $\lambda = 1.0$ se propageant à la vitesse $c = 1.0$ . . . . .	253
9.2	Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques associés à l'onde plane de longueur d'onde $\lambda = 1.0$ se propageant à la vitesse $c = 1.0$ . . . . .	253
9.3	Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques totaux.	254
9.4	Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques totaux. . . . .	254
9.5	Représentation du module des champs électromagnétiques totaux. . . . .	254
9.6	Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques totaux.	255
9.7	Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques totaux. . . . .	255



9.8 Représentation du module des champs électromagnétiques totaux. . . . 255

9.9 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre deux obstacles consécutifs est égale à  $d = 1.0$ . La courbe  $-\triangle-$  correspond à la solution pour  $N = 1$  mode. La courbe  $+\text{---}$  correspond à la solution pour  $N = 2$  modes. La courbe  $-\square-$  correspond à la solution pour  $N = 3$  modes. La courbe  $-\bullet-$  correspond à la solution pour  $N = 4$  modes. La courbe  $-\ominus-$  correspond à la solution pour  $N = 5$  modes. La courbe  $-\diamond-$  correspond à la solution pour  $N = 6$  modes. La courbe  $-\times-$  correspond à la solution pour  $N = 7$  modes. . . . . 257

9.10 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre deux obstacles consécutifs est égale à  $d = 1.0$ . La courbe  $-\triangle-$  correspond à la solution pour  $N = 1$  mode. La courbe  $+\text{---}$  correspond à la solution pour  $N = 2$  modes. La courbe  $-\square-$  correspond à la solution pour  $N = 3$  modes. La courbe  $-\bullet-$  correspond à la solution pour  $N = 4$  modes. La courbe  $-\ominus-$  correspond à la solution pour  $N = 5$  modes. La courbe  $-\diamond-$  correspond à la solution pour  $N = 6$  modes. . . . . 258

9.11 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre deux obstacles consécutifs est égale à  $d = 1.0$ . La courbe  $-\triangle-$  correspond à la solution pour  $N = 1$  mode. La courbe  $+\text{---}$  correspond à la solution pour  $N = 2$  modes. La courbe  $-\square-$  correspond à la solution pour  $N = 3$  modes. La courbe  $-\bullet-$  correspond à la solution pour  $N = 4$  modes. La courbe  $-\ominus-$  correspond à la solution pour  $N = 5$  modes. . . . 259

9.12 Maillage du cube de référence  $\Omega_0 = [-a, a]^3 \setminus \mathcal{B}(\mathbf{0}, \delta)$  de demi-côté  $a$ , privé de la boule de centre  $0$  et de rayon  $\delta$ . . . . . 261

9.13 Coupes des maillages volumiques utilisés pour la simulation des solutions éléments finis avec  $n_{\text{raf}} = 12$ . . . . . 262

9.14 Représentation de la différence ponctuelle entre les solutions de référence et les solutions éléments finis associées au premier cas-test. La solution élément fini est d'ordre 2 et la solution spectrale est d'ordre  $N_{\text{ref}} = 8$ . L'erreur  $L^2(\Omega^i)$  est égale à 0.01866. . . . . 263



9.15 Évolution de l'erreur relative  $L^2(\Omega^i)$  commise sur les champs électriques pour les différentes approximations éléments finis, en fonction de la taille caractéristique du maillage  $h$ . La courbe  $\blacktriangle$  correspond à l'ordre 1 de discrétisation. La courbe  $\blacktriangleleft$  correspond à l'ordre 2 de discrétisation. La courbe  $\blacksquare$  correspond à l'ordre 3 de discrétisation. La courbe  $\bullet$  correspond à l'ordre 4 de discrétisation. La courbe  $\ominus$  correspond à l'ordre 5 de discrétisation. . . . . 263

9.16 Évolution de l'erreur relative  $L^2(\Omega^i)$  commise sur les champs électriques pour les différentes approximations éléments finis, en fonction de la taille caractéristique du maillage  $h$ . La courbe  $\blacktriangle$  correspond à l'ordre 1 de discrétisation. La courbe  $\blacktriangleleft$  correspond à l'ordre 2 de discrétisation. La courbe  $\blacksquare$  correspond à l'ordre 3 de discrétisation. La courbe  $\bullet$  correspond à l'ordre 4 de discrétisation. La courbe  $\ominus$  correspond à l'ordre 5 de discrétisation. . . . . 264

9.17 À gauche, la représentation du module de la différence ponctuelle entre l'approximation spectrale d'ordre 1 et l'approximation de Foldy modifié. À droite, la représentation des surfaces équivalentes radar calculées à partir des deux approximations. . . . . 266

9.18 Évolution de l'erreur relative calculée en norme  $L^2(\Omega)$  commise sur les champs électromagnétiques, en fonction du rayon  $\delta$  des sphères. La distance entre les obstacles est choisie ou bien égale à la longueur d'onde ou bien dépend du rayon en  $\sqrt{\delta\lambda}$ . La courbe  $\ominus$  correspond à la solution de Foldy avec  $d = 1.0$ . La courbe  $\times$  correspond à la solution spectrale d'ordre 1 avec  $d = 1.0$ . La courbe  $\boxminus$  correspond à la solution de Foldy avec  $d = 3\delta$ . La courbe  $\blacktriangleleft$  correspond à la solution spectrale d'ordre 1 avec  $d = 3\delta$ . . . . . 266

9.19 Représentation de la partie réelle des champs électromagnétiques totaux. 268

9.20 Représentation de la partie imaginaire des champs électromagnétiques totaux. . . . . 268

9.21 Représentation du module des champs électromagnétiques totaux. . . . 269

9.22 Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K = 1000$  sphères obtenues par résolution directe. La courbe  $\text{---}$  correspond à la solution spectrale pour  $N = 2$  modes obtenue par résolution directe. La courbe  $\dots$  correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution directe. La courbe  $\text{---}$  correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution directe. . . . . 270

9.23 Comparaison des surfaces équivalentes radar pour  $K = 1\,000$  obtenues à l'aide des différentes méthodes par résolution directe et itérative. Les courbes — et — correspondent aux SER obtenues par résolution directe. Les courbes ... et ... correspondent aux SER obtenues par résolution itérative « maison ». . . . . 271









9.24 Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K = 10\,000$  sphères obtenues par résolution itérative. La courbe — correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue avec GMRES. La courbe ... correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution itérative « maison ». La courbe -.- correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution itérative « maison ». . . . . 272

9.25 Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K = 2\,500$  sphères obtenues par résolution directe. La courbe ... correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution directe. La courbe -.- correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution directe. . . . . 273

9.26 Comparaison des surfaces équivalentes radar pour  $K = 2\,500$  obtenues à l'aide des différentes méthodes par résolution directe et itérative. Les courbes — et — correspondent aux SER obtenues par résolution directe. Les courbes ... et ... correspondent aux SER obtenues par résolution itérative « maison ». . . . . 273

9.27 Représentation des surfaces équivalentes radar pour  $K_c \times K_l = 100 \times 100 = 10\,000$  sphères, obtenues par résolution itérative. La courbe — correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue avec GMRES. La courbe ... correspond à la solution spectrale pour  $N = 1$  mode obtenue par résolution itérative « maison ». La courbe -.- correspond à la solution de Foldy obtenue par résolution itérative « maison ». . . . . 274

9.28 Évolution du nombre d'itérations en fonction du critère  $\epsilon$  à gauche et évolution du résidu en fonction du nombre d'itérations à droite. La courbe -⊠- correspond à Foldy modifié « maison ». La courbe ⊖- correspond à Foldy modifié GMRES. La courbe -+- correspond à Spectral « maison » avec  $N = 1$  mode. La courbe -●- correspond à Spectral GMRES avec  $N = 1$  mode. . . . . 275

9.29	Évolution du nombre d'itérations en fonction de la distance $d$ entre obstacles à gauche et évolution du résidu en fonction du nombre d'itérations à droite. La courbe  correspond à Foldy modifié « maison ». La courbe  correspond à Foldy modifié GMRES. La courbe  correspond à Spectral « maison » avec $N = 1$ mode. La courbe  correspond à Spectral GMRES avec $N = 1$ mode. . . . .	276
9.30	Évolution du nombre d'itérations en fonction du critère nombre $K$ d'obstacles à gauche et évolution du résidu en fonction du nombre d'itérations à droite. La courbe  correspond à Foldy modifié « maison ». La courbe  correspond à Foldy modifié GMRES. La courbe  correspond à Spectral « maison » avec $N = 1$ mode. La courbe  correspond à Spectral GMRES avec $N = 1$ mode. . . . .	276
9.31	Coupes du maillage volumique comportant quatre obstacles sphériques, utilisé pour la simulation des solutions éléments finis avec $n_{\text{raf}} = 10$ . . . .	279
9.32	Représentation du maillage et du champ électrique total issu de la simulation numérique élément fini avec huit obstacles. . . . .	280

## LISTE DES TABLEAUX

1.1	Unités SI des quantités physiques intervenant en électromagnétisme. . .	9
5.1	Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ proche pour le cas d'une onde plane électromagnétique incidente. . . . .	138
5.2	Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ proche pour le cas d'un faisceau gaussien électromagnétique incident. . . . .	139
5.3	Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ lointain pour le cas d'une onde plane électromagnétique incidente. . . . .	141
5.4	Ordres numériques de convergence associés aux différentes approximations en champ lointain pour le cas d'un faisceau gaussien électromagnétique incident. . . . .	141
9.1	Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions spectrales. . . . .	257
9.2	Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions spectrales. . . . .	258
9.3	Ordres numériques de convergence pour associés aux différents ordres d'approximation. . . . .	258
9.4	Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions éléments finis. . . . .	264
9.5	Ordres numériques de convergence associés aux différents ordres d'approximation des solutions éléments finis. . . . .	265

---

9.6	Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec $N = 1$ mode sur le cas de 1 000 obstacles alignés. . . . .	277
9.7	Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec $N = 1$ mode sur le cas de 10 000 obstacles alignés. . . . .	277
9.8	Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec $N = 1$ mode sur le cas de $50 \times 50 = 2\,500$ obstacles uniformément répartis dans un plan. . . . .	277
9.9	Coûts de calcul associés aux solutions issues du modèle de Foldy dipolaire modifié et de la méthode spectrale avec $N = 1$ mode sur le cas de $100 \times 100 = 10\,000$ obstacles uniformément répartis dans un plan. . . . .	278
9.10	Coûts de calcul associés aux solutions éléments finis d'ordre 3 et aux solutions spectrales avec $N = 3$ modes sur le cas d'un obstacle. . . . .	278
9.11	Coûts de calcul associés aux solutions éléments finis d'ordre 3 et aux solutions spectrales avec $N = 3$ modes sur le cas des deux obstacles. . .	279
9.12	Coûts de calcul associés aux solutions éléments finis d'ordre 3 et aux solutions spectrales avec $N = 3$ modes sur le cas de quatre obstacles. . .	279

*Et voilà le travail*







**Résumé** Dans cette thèse, nous développons des méthodes numériques de résolution rapide, précise et efficace qui permettent de prendre en compte, dans des configurations tridimensionnelles, les phénomènes de diffraction d'ondes électromagnétiques en régime harmonique par une multitude d'obstacles, dans le cadre de calcul à basses et moyennes fréquences. Dans un premier temps, nous nous plaçons dans un cadre à basses fréquences et nous nous intéressons à une modélisation multi-échelle du phénomène de diffraction des ondes électromagnétiques par des obstacles dont la taille caractéristique est petite en comparaison avec la longueur d'onde. Nous mettons en œuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés qui s'avère vraiment efficace dans le cadre de la réduction de modèles, appliquée à l'électromagnétisme. Deux types de développements se distinguent : les approximations en champ proche ou quasi-statiques qui décrivent le phénomène à l'échelle microscopique et celles en champ lointain qui décrivent le phénomène à grande distance. Dans ce dernier contexte, les petits obstacles ne sont plus considérés comme des contraintes géométriques et peuvent être modélisés par des sources ponctuelles équivalentes que sont les multipôles électromagnétiques. Dans un second temps, nous nous plaçons dans un cadre à moyennes fréquences ; le domaine de calcul faisant quelques dizaines de longueurs d'ondes. Nous mettons en place une méthode spectrale pour le problème de diffraction multiple des ondes électromagnétiques par de multiples sphères. Cette méthode est basée sur la discrétisation d'une formulation par équations intégrales de frontière dans des bases locales et tangentielles, composées des fonctions harmoniques sphériques vectorielles. Il apparaît que les modèles réduits peuvent être adaptés au régime moyennes fréquences en incorporant des corrections non-triviales dictées par la théorie de Mie et portant sur les fonctions de jauge associées aux termes successifs des développements asymptotiques. Nous présentons une comparaison de ces différents modèles illustrant leur précision. Toutefois, la prise en compte d'un grand nombre d'hétérogénéités peut s'avérer coûteuse en termes de temps de calcul, mais surtout d'utilisation de la mémoire. Pour pallier cette difficulté, nous implémentons un algorithme astucieux pour la résolution itérative des problèmes linéaires induits, sans jamais avoir à assembler de manière globale les matrices associées à la discrétisation.

**Mot-clés** Développements asymptotiques, électromagnétisme, équations de Maxwell, modèles réduits, diffraction multiple, équations intégrales de frontière, méthode spectrale.

**Abstract** In this thesis, we develop fast, accurate and efficient numerical methods for solving the time-harmonic scattering problem of electromagnetic waves in 3D by a multitude of obstacles for low and medium frequencies. Taking into account a large number of heterogeneities can be costly in terms of computation time and memory usage, particularly in the construction process of the matrix. In the first part of our work, we consider a multi-scale diffraction problem in low-frequency regimes in which the characteristic length of the obstacles is small compared to the incident wavelength. We use the matched asymptotic expansion method which allows for the model reduction. Two types of approximations are distinguished : near-field or quasi-static approximations that describe the phenomenon at the microscopic scale and far-field approximations that describe the phenomenon at a long distance. In the latter one, small obstacles are no longer considered as geometric constraints and can be modelled by equivalent point-sources which are interpreted in terms of electromagnetic multipoles. The second part of this thesis also deals with the multiple scattering of electromagnetic waves by multiple spheres, however, at medium-frequencies. Here, the domain of computation is a few tens of wavelengths and we implement a spectral method which is based on the discretization of a boundary integral equation into local and tangential basis functions composed of the vectorial spherical harmonics. The reduced asymptotic models of the first problem can be adapted for this regime by incorporating non-trivial corrections appearing in the Mie theory. Specifically, the gauge functions in the asymptotics are modified. We then present a comparison of these different methods in terms of their accuracy. Finally, for both methods and to overcome difficulties related to computational cost, we solve the linear problems iteratively and implement a clever algorithm which avoids the global assembling of the matrices associated with the discretizations.

**Keywords** Asymptotic expansions, electromagnetism, Maxwell equations, reduced models, multiple scattering, boundary integral equations, spectral method.