



HAL
open science

Sur la répartition des coefficients des formes modulaires de poids demi-entier

Corentin Darreye

► **To cite this version:**

Corentin Darreye. Sur la répartition des coefficients des formes modulaires de poids demi-entier. Théorie des nombres [math.NT]. Université de Bordeaux, 2020. Français. NNT : 2020BORD0171 . tel-03066273

HAL Id: tel-03066273

<https://theses.hal.science/tel-03066273>

Submitted on 15 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
PRÉSENTÉE À
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE
par **Corentin DARREYE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR
SPÉCIALITÉ — MATHÉMATIQUES

**Sur la répartition des coefficients des formes modulaires
de poids demi-entier**

Date de soutenance : 6 novembre 2020

Devant la commission d'examen composée de :

Régis DE LA BRETÈCHE	Professeur, Université Paris Diderot, IMJ-PRG	Examinateur
Farrell BRUMLEY	Maître de Conférences, Université Sorbonne Paris Nord, LAGA	Rapporteur
Henri COHEN	Professeur, Université de Bordeaux, IMB	Examinateur
Étienne FOUVRY	Professeur, Université Paris-Saclay, LMO	Examinateur
Florent JOUVE	Professeur, Université de Bordeaux, IMB	Directeur
Guillaume RICOTTA	Maître de Conférences, Université de Bordeaux, IMB	Directeur
Emmanuel ROYER	Professeur, Université Clermont Auvergne, LMBP	Examinateur
Jie WU	Chargé de Recherche, Université Paris-Est Créteil, LAMA	Rapporteur

Sur la répartition des coefficients des formes modulaires de poids demi-entier

Résumé

Cette thèse traite de certains aspects analytiques liés aux coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier. On étudie en particulier deux problèmes a priori bien différents mais que l'on reliera.

Tout d'abord, on s'intéresse aux sommes des coefficients d'une forme cuspidale de poids demi-entier dans les progressions arithmétiques. Un tel problème fut étudié précédemment dans un article de Fouvry, Ganguly, Kowalski et Michel mais dans le cas d'une forme de poids entier. Les auteurs montrent notamment que, dans un certain régime de convergence, on a une équirépartition gaussienne des sommes des coefficients dans des progressions arithmétiques de module fixé.

Dans ce travail, on prouve un résultat analogue lorsque la forme modulaire est de poids demi-entier. On verra que, dans un régime de convergence plus fin, les sommes des coefficients en progression arithmétique s'équirépartissent selon une loi qui est différente de la loi normale obtenue par Fouvry, Ganguly, Kowalski et Michel en poids entier.

Dans un deuxième temps, on étudiera les signes des coefficients d'une forme de poids demi-entier f et des possibles minorations en valeur absolue de ces derniers. En utilisant certaines techniques issues du premier problème ainsi que des résultats classiques de la théorie des formes de poids demi-entier, comme la correspondance de Shimura, la formule de Waldspurger ou encore la récente théorie des formes nouvelles, on établit une borne inférieure sur le nombre de coefficients normalisés $\hat{f}(n)$ tels que $n \leq x$, où n est pris dans une progression arithmétique, et $\hat{f}(n) > n^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Mots-clés : forme modulaire, coefficient, poids demi-entier, équirépartition, progression arithmétique, signe.

Distribution of coefficients of half-integral weight modular forms

Abstract

This thesis deals with some analytic aspects of Fourier coefficients of half-integral weight modular forms. We study in particular two different problems which will be nonetheless connected.

On one hand, we are interested in sums of coefficients of half-integral weight cusp forms in arithmetic progressions. Such a problem was studied in a previous paper of Fouvry, Ganguly, Kowalski and Michel for an integral weight cusp form. They showed that, in a certain range of convergence, there is a Gaussian equidistribution of sums of coefficients in arithmetic progressions of fixed modulus.

In this work, we prove an analogous result in the case of a half-integral weight cusp form. We will see that, in a more restricted range of convergence, the sums of coefficients in arithmetic progressions equidistribute with respect to a distribution which is different from the normal distribution obtained by Fouvry, Ganguly, Kowalski and Michel in the integral weight case.

On the other hand, we study the signs of Fourier coefficients of a half-integral weight cusp form f and we provide lower bounds for these coefficients. Using techniques from the previous problem and classical results from the theory of half-integral weight modular forms, such as Shimura's correspondence, Waldspurger's formula and the recent theory of newforms, we establish a lower bound for the number of normalized coefficients $\hat{f}(n)$ such that $n \leq x$, where n is taken in an arithmetic progression, and $\hat{f}(n) > n^{-\alpha}$ for positive α .

Keywords : modular form, coefficient, half-integral weight, equidistribution, arithmetic progression, sign.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont évidemment à mes deux directeurs de thèse. Je souhaiterais leur exprimer ma profonde gratitude, à la fois pour leurs précieux conseils et les nombreuses relectures de mon travail mais aussi pour leur patience et leur qualité d'écoute. Je prends conscience à présent de la chance que j'ai eu de vous avoir comme encadrants. Plus particulièrement, merci à Guillaume de m'avoir pris en stage de master 1 en 2015 et merci à Florent de m'avoir convaincu de revenir à Bordeaux l'année d'après pour le master 2. J'étais loin de me douter à l'époque à quel point ces décisions seraient pour moi à l'origine de nombreuses rencontres qui ont enchanté ma vie bordelaise.

Je remercie Farrell Brumley et Jie Wu d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse ainsi que les autres membres du jury : Régis de la Bretèche, Henri Cohen, Étienne Fouvry et Emmanuel Royer.

Merci également à la team PARI/GP : à Henri, qui s'est intéressé à mon travail et qui a été une mine d'informations à propos des formes modulaires ; à Bill et Karim, qui m'ont prêté main forte lors des applications numériques de cette thèse.

Je tiens à remercier par ailleurs toute l'équipe administrative de l'IMB et en particulier Carole, Cathy, Ida, Karine, Muriel et Muriel qui ont été d'une aide précieuse lors de l'organisation du colloque Inter'Actions 2019.

On passe maintenant à des remerciements plus personnels, s'adressant à toutes ces personnes qui me sont chères et que j'ai eu la chance de côtoyer ces dernières années. À défaut d'un ordre d'importance, je vais tenter de remercier tout le monde en respectant la chronologie des moments où je vous ai rencontrés.

Je commence donc par remercier tous les membres de ma famille, pour leur soutien quelles que soient les circonstances et pour leur foi inébranlable en les décisions que j'ai pu prendre dans mes études. On peut dire que les réunions de famille sont toujours au top et j'attends avec impatience les prochaines ! Encore merci Maman, Papa, Camille, Apolline et sans oublier bien sûr les dernières recrues : Gabrielle, Marilou, Mathieu et Quentin. Merci aussi à ma ribambelle de cousins, cousines, oncles, tantes et grand-parents qui est aussi géniale que diverse.

Après la famille, viennent les amis et cela commence par ceux de Paris, les fameux « Suricates ». Merci à Valentin de m'avoir un jour prêté un sac de couchage sans même savoir que cet acte scellerait le début d'une longue amitié. Merci à Margo d'avoir été à l'initiative de moult soirées et voyages qui sont autant de bons souvenirs. Merci à Clément pour tous ces délicieux moments partagés, que ce soit au fond d'une salle de TD à ricaner ou au beau milieu de la nuit à danser. Merci Quentin pour tes innombrables anecdotes culturelles et autres fun facts linguistiques. Merci Jeanne pour ton hospitalité, ta bienveillance et pour m'avoir fait découvrir le welsh. Merci Sarah pour le nouvel an à Amsterdam (bitterballen = ♥) et pour la grande virée en Argentine. Merci Camille pour

ta pantagruélique gentillesse et merci Manon pour ces improbables soirées bordelaises improvisées qu'on n'oubliera pas de sitôt !

Je remercie aussi tous mes copains de la F[ens]foire : Alice, Claire, Loupio, Lulu, Pascal, Pierre, Romain, Simon et tous les autres qui font, plus que jamais, vivre le groupe.

Passons à présent aux amis de Bordeaux avec en premier lieu le crew de l'IMB et toujours dans un ordre chronologique d'apparition (ou presque). Merci d'abord à Niko de m'avoir invité dans le groupe des « doctorants cools » alors que je n'étais encore qu'une petite m**** stagiaire. Merci à Elsa de nous avoir fait tant rire avec ton « Tchip, tchip, tchip... Le mot magique?! », j'espère qu'un jour quelqu'un te paiera (vraiment) un restau pour ton anniversaire. Merci à Jo et Nico de m'avoir appris à sommer sur les entiers impairs (ou pairs, que sais-je?), ma soif de connaissance n'en a été que décuplée. Merci à Sami de m'avoir fait réaliser l'importance de n'oublier personne dans ses remerciements de thèse (désolé j'étais obligé :p). Merci à Manon et Guigui pour leurs soirées à renommée internationale et qui portent maintenant leurs noms. Merci à Roxane, grâce à qui je suis devenu fan du Bombay Sapphire. Merci aussi aux autres anciens que je vois hélas moins souvent : Alice, Bruno, Raphaël (tu danses?), Vassilis et Zoë.

Merci à Baptiste, l'ambassadeur du Porge, pour son swag absolu quand il danse. Merci à Thomas, le roi des traquenards et grand gagnant du marathon Grange-BT-Chat. Merci évidemment à son acolyte informatic(h)ien : alors Antonin, tu balances plutôt à gauche ou à droite ? Merci à Lara d'avoir tant égayé le bureau à la fois par ta présence mais aussi par tes nombreuses décorations qui respirent la joie de vivre (et quel bonheur d'avoir Les Méchants dans la tête lorsqu'on rédige hehe). Merci Léa d'avoir try hard Just Dance. Merci à Aurore (et non pas Malabar) et surtout bravo pour t'être intégrée au groupe avec une aisance digne de l'équipe féminine de l'Olympique Lyonnais. Merci Marc'Anto pour les après-midi chill en première année à parler de tout sauf de la thèse et merci Luming d'avoir réussi à rester impassible lorsqu'avec les autres gens du bureau on parlait de tout sauf de la thèse. Merci à Yann pour sa capacité extraordinaire à faire des siestes et merci à Antoine de préférer Motus à la sieste. Merci à la clique des Italiens et assimilés, toujours le sourire même en cas de coupe du monde : Bianca, Corentin, Davide, Marco, Roberto, Sergio et Stéphane. Merci aussi à tous les (quasi) nouveaux doctorants avec qui j'ai pu passer de nombreux déjeuners fort sympathiques : Adrien, Anne-Edgar, Emanuele, Jean, Lilian, Lucile, Nicoletta, Paul, Sebastián, Théo et Yiye. Je remercie également Dimitris et Richard pour tous leurs conseils et avec qui, j'espère, je pourrai entamer une collaboration fructueuse.

Enfin, j'adresse un immense merci à Alexandre, mon frère de thèse, pour sa culture mathématique sans égale, pour son soutien face à la complexité du monde académique et plus généralement pour ces quatre années de cours, de conf, de Haut-Carré, de thèse, de non-thèse et de musique. À mes yeux, tu es comme Lars Ulrich mais en mieux conservé !

C'est donc l'heure de remercier tous mes camarades de Los Teoporos, fanfare unique en son genre qui brille tant par sa qualité musicale que par l'énergie et le fun qu'elle dégage. Pour simplifier un peu, on va faire ça pupitre par pupitre. Merci Jojo de mettre si souvent un point d'honneur à être la dernière couchée en soirée ; merci Céroulite de n'être seulement qu'un tout petit peu maladroite ; merci Horti d'être toujours la best mais (presque) jamais Mortense et merci Molmol de savoir démarrer une chenille en toute circonstance. Merci Magdala d'avoir tenté le rapprochement avec les Lentilles Saucisses ;

merci Malaizard pour les plats et puis franchement pour tout le reste quoi ; merci Jenfle de nous rappeler que rive droite c'est cool aussi mais qu'on y attrape le Covid ; merci Georgette d'accepter nos défis les plus fous (et désolé pour ta langue) et merci François de nous avoir convaincus que la toutologie a peu de qualités mais par ailleurs aucun défaut ! Merci Rabia pour cette sombre histoire en Espagne (toi-même tu sais) ; merci Cagette pour les gros ciseaux ; merci Colin pour tes raps d'anthologie ; merci Fiston d'avoir habilement retardé le confinement afin que le carnaval de Dunkerke ait lieu ; merci Nestor de savoir mettre la b13 pile quand il faut ; merci Emma de ne pas avoir accusé Quentin quand tout le désignait comme coupable ; merci Julia d'avoir conclu le rapprochement avec les Lentilles Saucisses ; merci Maitre Vince pour les contre-la et merci Nicolasss pour tes solos qui ne sont pas sans rappeler ceux d'Arturo Sandoval. Merci Quentin de bien viser la prochaine fois ; merci Alix pour la démonstration fructueuse de renversement arrière avec partenaire à Captieux ; merci (cha)Maud pour les plaquages landais ; merci Falzar d'avoir soutenu Michel Sardou lors de la finale du boss des boomers et merci Anne d'avoir survécu à l'auberge de Trogir. Merci Maxence, toujours sympa de tomber sur tes blettes chez moi par hasard ; merci Noch de savoir danser le Gangnam style enceinte et merci Jiraf, ça me fait toujours plaisirrrr de te voirrr. Merci infiniment CQ d'avoir introduit le googlesheet dans ma vie et ssssss merci Paul (non c'est pas des pipes ces remerciements). Merci Morvette de ne plus avoir de volonté ; merci Guimouv pour l'after chez Simon (allez!) ; merci EUNYYYDEEEE pour tout ce zgueg qui émane de toi à chaque instant ; merci Ralex pour le plat de résistance et puis merci Gamin (team 93 rpz), l'enfer n'est pas si total finalement.

Un grand merci à tous les nouveaux qui vont assurer la relève comme des chefs et merci à nos vieilles biques préférées avec qui c'est toujours un plaisir de jouer à l'occasion : Poum, Jute, Tatie, Max, Christelle, Fred, Eloi, Gabite, Ama, Gaboule, Titou, Minch, Siamak et tous les autres !

Pour terminer, *last but not least* comme on dit, merci Chloé pour cette année rocambolesque pleine de g@ming et de poke bowls. Je crois que je n'aurais pas pu rêver meilleur confinement pour achever ce travail et rien que pour cela, merci encore. Il va donc falloir que tu trouves un autre running gag car cette fois je peux vraiment te le dire : j'ai fini ma thèse.

Table des matières

Introduction	5
1 Notations et propriétés élémentaires	15
1 Demi-plan de Poincaré et transformation de Möbius	15
1.1 Action d'un groupe de matrices	15
1.2 Sous-groupes de congruence	16
1.3 La courbe modulaire $\Gamma \backslash \mathcal{H}$	17
1.4 Compactification et pointes de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$	19
1.5 L'exemple de $\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}$	20
2 Formes modulaires de poids entier	21
2.1 Propriétés de base	21
2.2 Formes sur $\Gamma_1(N)$	23
2.3 Opérateurs de Hecke	24
2.4 Formes primitives	25
3 Quelques résultats de théorie multiplicative des nombres	27
3.1 Caractères de Dirichlet	27
3.2 Caractères quadratiques	28
3.3 Symbole de Jacobi étendu et racine carré dans \mathbb{C}	29
3.4 Résidus quadratiques	30
3.5 Entiers sans facteur carré	30
2 Formes modulaires de poids demi-entier	33
1 Généralités	33
1.1 Un objet ancien mais défini récemment	33
1.2 Premières propriétés	38
1.3 Opérateurs de Hecke	44
1.4 Adjoint des opérateurs de Hecke	48
1.5 Autres opérateurs	51
2 Du poids demi-entier au poids entier	54
2.1 Correspondance de Shimura	55
2.2 Espace de Kohnen	57
2.3 Le principe de multiplicité un	61
3 La question de Kohnen	63
3.1 Formule de Waldspurger	64
3.2 Signes des coefficients de formes de poids demi-entier	70

3	Coefficients de Fourier en progression arithmétique	73
1	Introduction	73
1.1	Le contexte mathématique	73
1.2	Énoncé des résultats principaux	75
1.3	Survol de la preuve du théorème 3.1.3	78
1.4	Notations	79
2	Outils issus de la théorie des formes de poids demi-entier	80
3	La formule sommatoire de Voronoï	83
4	Moments de sommes de Kloosterman-Salié	86
5	Faisceau de Salié et monodromie	90
5.1	Rappels sur la théorie des fonctions traces	90
5.2	Extension des scalaires	91
5.3	Faisceau de Salié	91
5.4	Calcul de moments	94
6	Évaluation asymptotique des moments	97
6.1	Application de la formule de Voronoï	98
6.2	Application du lemme 3.4.1	99
6.3	Aspect combinatoire	100
6.4	Application du lemme 3.4.2	101
6.5	Moments impairs	103
6.6	Moments pairs	104
7	La convergence des moments	106
7.1	Fonction génératrice des moments	106
7.2	Famille tendue de variables aléatoires	108
7.3	Convergence des moments	110
8	Variance	112
8.1	Variance lorsque p tend vers l'infini	112
8.2	Variance pour un nombre premier fixé	116
9	Forme de poids entier	117
10	Simulations numériques et conjecture	120
10.1	Retour sur la variance	120
10.2	Histogramme des valeurs de $E(X, p, a)$	121
10.3	Les quatrième et huitième moments	122
4	Signes et minoration des coefficients de formes de poids demi-entier	127
1	Introduction	127
1.1	Le signe des coefficients de Fourier	127
1.2	Résultats principaux	128
1.3	Structure du chapitre	130
1.4	Notations	131
2	Outils issus de la théorie des formes de poids demi-entier	131
2.1	Généralités	132
2.2	Correspondance de Shimura et formule de Waldspurger	132
2.3	Le quatrième moment	134
2.4	Bornes pour les coefficients de Fourier	136
3	Coefficients de Fourier en progression arithmétique	137
3.1	Formule sommatoire de Voronoï	137

3.2	Quelques estimations sur certaines sommes de coefficients de Fourier	138
3.3	Preuve du théorème 4.1.2	140
4	Preuve du théorème 4.1.1	143
4.1	Lemmes préliminaires	143
4.2	Cas où f est arbitraire	145
4.3	Cas où f est une forme propre	147
4.4	Résultat annexe	150
5	Quelques simulations numériques	151
5.1	Signes des formes de poids demi-entier	151
5.2	Majoration/minoration des coefficients	154
Bibliographie		157

Introduction

Depuis presque deux siècles, les formes modulaires apparaissent indépendamment dans différents contextes mathématiques et physiques. Leur étude est devenue un sujet à part entière qui constitue aujourd'hui un bagage d'outils analytiques particulièrement utiles en théorie des nombres. Pour ne citer qu'un exemple, les formes modulaires jouent un rôle crucial dans la preuve par Andrew Wiles du dernier théorème de Fermat.

Une forme modulaire possède trois paramètres importants : son niveau, son poids et son caractère. Dans une majorité de cas, les formes modulaires apparaissant dans des problèmes arithmétiques ont un poids entier. Pour autant, il est possible de définir en toute généralité des formes de poids k avec k rationnel. Cette définition est néanmoins plus complexe et l'étude des formes de poids rationnels amène généralement à de nombreuses difficultés techniques qui n'existent pas en poids entier. C'est sans doute pour cette raison que la littérature sur les formes modulaires se restreint très majoritairement au cas du poids entier.

Cependant, les formes de poids rationnels jouent aussi un rôle important dans certaines questions de théorie des nombres. C'est particulièrement vrai en ce qui concerne les formes de poids demi-entier. En effet, de telles formes sont utilisées dans la résolution de nombreux problèmes comme par exemple le comptage de point rationnels sur une courbe algébrique (voir [D] ou [DSP]) ou encore le problème des nombres congruents (voir [T]).

Dans cette thèse, on étudie certains aspects analytiques des formes modulaires de poids demi-entier. On s'intéresse notamment à deux problèmes d'apparence distincte mais qui pourtant seront reliés. Le premier concerne une question d'équirépartition liée aux coefficients de Fourier d'une forme de poids demi-entier sommés dans une progression arithmétique. Le deuxième porte sur les signes (positifs ou négatifs) de ces coefficients ainsi que des possibles bornes inférieures en valeur absolue pour une partie des coefficients. On retrouvera dans les chapitres 3 et 4 respectivement, le contenu de [D1] et [D2] avec bien sûr plus de détails, des résultats souvent plus généraux et des simulations numériques.

Le découpage de la thèse se fait en quatre chapitres. Ces derniers ne sont pas totalement indépendants mais il est tout à fait possible de lire et comprendre l'un d'entre eux sans avoir lu les chapitres précédents, les propriétés importantes et utiles étant en général rappelées. Dans un souci de clarté, on choisit de présenter le contenu de chaque chapitre dans leur ordre d'apparition.

Chapitre 1

Le premier chapitre a pour but de passer en revue de manière précise mais concise toutes les notions qu'on abordera au cours de cette thèse ainsi que la plupart des notations utilisées. L'avantage d'un tel chapitre est qu'il renforce le côté auto-référent du manuscrit : le lecteur pourra consulter rapidement et régulièrement les résultats qui y sont expliqués.

On commencera par présenter les aspects géométriques et algébriques des courbes modulaires $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ pour un sous-groupe de congruence Γ et avec \mathcal{H} le demi-plan de Poincaré. On insistera en particulier sur la notion de pointe d'une courbe modulaire et on traitera le cas de la courbe $\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}$, exemple fondamental pour la suite.

Puis, on parlera de formes modulaires de poids entier (l'étude des formes de poids demi-entier étant faite au deuxième chapitre). Bien qu'il ne s'agisse pas des objets centraux de cette thèse, on rencontrera des formes de poids entier assez régulièrement, ne serait-ce qu'à travers la correspondance de Shimura qui les relie aux formes de poids demi-entier mais aussi de manière plus anecdotique, comme à la fin du chapitre 3. On se concentrera surtout sur les propriétés algébriques des formes modulaires (opérateurs de Hecke, formes primitives...) car les propriétés analytiques (fonctions L , estimées sur les coefficients, moments...) prendront déjà une place particulièrement importante dans l'étude des formes de poids demi-entier au deuxième chapitre.

Enfin, on terminera ce chapitre en rappelant certaines propriétés bien connues de théorie multiplicative des nombres qui concernent notamment les caractères de Dirichlet et en particulier les caractères quadratiques (ces derniers étant fréquemment utilisés dans les problèmes liés aux formes de poids demi-entier).

Chapitre 2

Le deuxième chapitre donne un panorama détaillé de la théorie des formes modulaires de poids demi-entier, notion au coeur de cette thèse. Les références sur ce sujet sont assez foisonnantes. Elles sont essentiellement composées d'articles de recherche qui vont traiter de questions diverses et on trouve finalement assez peu de livres détaillant l'ensemble de la théorie avec toutes les preuves nécessaires. Cela s'explique en partie par le fait qu'il s'agit d'une théorie relativement récente (la définition standard due à Shimura date de 1973) bien qu'elle prenne ses racines au milieu du XIX^{ème} siècle avec l'apparition des fonctions thêta.

On s'efforcera donc de démontrer la plupart des propriétés citées ou, dans une moindre mesure, d'expliquer leur provenance. On commencera par introduire les notions nécessaires pour définir les formes de poids demi-entier puis on présentera quelques généralités. Ensuite, on démontrera les propriétés classiques sur les coefficients de Fourier de ces formes et sur leurs fonctions L . Dans un deuxième temps, on détaillera autant que possible la théorie des opérateurs de Hecke en poids demi-entier. C'est une partie très importante puisque c'est véritablement le premier point qui n'a plus rien à voir avec ce qu'il se passe en poids entier. On montre notamment pourquoi les opérateurs de Hecke en poids demi-entier T_n sont nuls dès que l'entier naturel n n'est pas un carré. Ce phénomène est la base d'un aspect majeur de la théorie que l'on ne rencontre pas en poids entier : les coefficients d'une forme propre, même après renormalisation, ne sont pas multiplicatifs en général *i.e.* la fonction L associée n'a pas de produit eulérien.

L'autre particularité du poids demi-entier est que le niveau d'une forme est nécessairement un multiple de quatre. L'opérateur T_4 est donc toujours un « mauvais » opérateur de

Hecke dans le sens où il n'est pas auto-adjoint (et rarement diagonalisable). On verra que le problème de la recherche d'une base de vecteurs propres communs à tous les opérateurs de Hecke peut alors se résoudre en se restreignant à un sous-espace des formes de poids demi-entier. Il s'agit de l'espace « plus » de Kohnen constitué des formes de poids $\ell + 1/2$, où ℓ est entier, dont les coefficients $a(n)$ sont nuls dès que $(-1)^\ell n$ est congru à 2 ou 3 modulo 4. Sur cet espace, il est possible de définir une nouvelle algèbre d'opérateurs de Hecke un peu différente de celle définie sur l'espace tout entier et pour laquelle il existe une base de co-diagonalisation.

La suite du chapitre abordera les deux résultats plus techniques mais néanmoins cruciaux que sont la correspondance de Shimura et la formule de Waldspurger. On n'en donne pas de démonstration mais on espère que la présentation faite sur ce sujet constituera un complément utile au manuscrit et en facilitera la lecture.

La correspondance de Shimura est une application explicite Sh_t , définie pour tout entier sans facteur carré t , qui envoie une forme cuspidale

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e^{2i\pi n z}$$

de poids demi-entier $\ell + 1/2$ sur une forme

$$\text{Sh}_t f(z) = \sum_{n \geq 1} b_t(n) e^{2i\pi n z}$$

de poids entier 2ℓ . Le lien entre les coefficients de f et de $\text{Sh}_t f$ est le suivant,

$$a(tn^2) = \sum_{d|n} \mu(d) \chi_t(d) d^{\ell-1} b_t(n/d)$$

pour tout entier n et avec μ la fonction de Möbius et χ_t un certain caractère de Dirichlet. Lorsque f est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, on a même $b_t(n) = a(t)b(n)$ pour tout n et où les $b(n)$ sont les coefficients d'une forme F , ne dépendant que de f , telle que $\text{Sh}_t f = a(t)F$ pour tout t .

Ainsi, on tire des résultats connus sur les formes de poids entier de nombreux résultats non-triviaux sur les coefficients de f . L'exemple le plus important provient de la borne de Deligne appliquée aux coefficients de F et de laquelle on déduit que

$$|a(tn^2)| \ll_{f,\varepsilon} |a(t)| n^{\ell-1/2+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout t sans facteur carré et pour tout entier n .

La formule de Waldspurger, quant à elle, met en lumière les liens possibles entre la valeur de $a(t)$ et F . Cette formule montre que $a(t)^2$ est essentiellement proportionnel à

$$L(1/2, F \times \chi_t) t^{\ell-1/2}$$

où $L(1/2, F \times \chi_t)$ est la valeur centrale de la fonction L (normalisée) associée à F tordue par le caractère χ_t . On entend par « essentiellement proportionnel » le fait que la constante de proportionnalité peut dépendre de t de façon contrôlée. Dans son article de 1981, Waldspurger rend cette constante assez peu explicite mais on peut quand même déduire de son résultat qu'elle est bornée en fonction de t . Ceci établit alors une équivalence entre la conjecture de Ramanujan-Petersson en poids demi-entier, à savoir

$$|a(t)| \ll_{f,\varepsilon} t^{\ell/2-1/4+\varepsilon}$$

et la conjecture de Lindelöf sur « l'aspect niveau » pour les fonctions L de forme de poids entier *i.e.*

$$|L(1/2, F \times \chi_t)| \ll_{F,\varepsilon} t^\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

La fin du deuxième chapitre traite de ce qui est couramment appelé la question de Kohnen. Ce problème datant de la fin des années 90 est le suivant. Étant donné $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$a(t)^2 = \alpha L(1/2, F \times \chi_t) t^{\ell-1/2},$$

quelle racine de $\alpha L(1/2, F \times \chi_t) t^{\ell-1/2}$ vaut $a(t)$? Si on note r l'une de ces racines, on a pour tout t sans facteur carré, $a(t) = \varepsilon(t)r$ avec $\varepsilon(t) \in \{\pm 1\}$. On peut alors se demander comment se répartissent les signes $\varepsilon(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

On conjecture qu'il y a une équirépartition de ces derniers mais à ce jour, aucune preuve complète n'a été apportée. Si on suppose que les coefficients de f sont réels alors la question de Kohnen revient à se demander quel est le signe de $a(t)$ et, plus généralement, de $a(n)$ pour tout entier n . On conjecture que

$$\frac{\left| \left\{ n \leq x \mid a(n) > 0 \right\} \right|}{\left| \left\{ n \leq x \mid a(n) \neq 0 \right\} \right|} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

et on répond partiellement à cette question à la fin du chapitre 2 en établissant une certaine proportion de signes positifs ou négatifs dans les coefficients de f . Le but du quatrième chapitre sera alors de montrer une propriété du même type sous des hypothèses plus faibles.

Chapitre 3

Lorsqu'on travaille avec des formes modulaires, on est généralement amené à contrôler la taille de leurs coefficients ou de certaines sommes de coefficients. Pour f une forme cuspidale de poids $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, dont on note les coefficients de Fourier $a(n)$, on a

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} c_f x^k \tag{1}$$

où c_f est une constante explicite ne dépendant que de f . Les coefficients $a(n)$ sont donc en moyenne bornés par $n^{\frac{k-1}{2}}$. Ponctuellement, on a seulement des estimations du type $a(n) = O_{f,\varepsilon}(n^{\frac{k-1}{2} + \alpha + \varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ avec $\alpha = 0$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = 3/14$ sinon. Il est donc souvent nécessaire (surtout en poids demi-entier) de faire appel à des estimations en moyenne sur les coefficients, comme en (1) par exemple, plutôt que d'utiliser des estimations ponctuelles qui sont loin d'être optimales. C'est tout l'intérêt de l'étude des moments de coefficients de formes modulaires. On peut, par exemple, se demander quel est l'ordre de grandeur de

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^\nu$$

avec $\nu \geq 1$. On montrera au chapitre 4 une majoration de cette quantité lorsque $\nu = 4$.

En revanche, dans le troisième chapitre, on s'intéressera à un autre type de moments. Il s'agit de subdiviser l'intervalle de sommation $\{n \leq x\}$ selon des progressions arithmétiques modulo un entier q , puis de considérer le moment des sommes des $a(n)$ selon ces subdivisions. Précisément, en notant $\hat{f}_\infty(n) = a(n)n^{-\frac{k-1}{2}}$ les coefficients normalisés de f , on regarde les moments suivants :

$$\sum_{a [q]}^\times \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n = a [q]}} \hat{f}_\infty(n) \right)^\nu$$

avec $\nu \geq 1$, q une puissance de nombre premier et où la première somme porte sur les classes inversibles a modulo q .

Récemment, de nombreux articles ont étudié ce genre de quantités lorsque le poids de la forme modulaire f est entier. L'un des résultats les plus importants en date est le suivant.

Théorème 1 ([FGKM],[LY]). *Soit f une forme primitive de niveau 1. Pour $X > 0$, un nombre premier p et une classe a modulo p , on pose*

$$E^*(X, p, a) = \frac{1}{\sqrt{X/p}} \sum_{\substack{n \leq X \\ n = a [p]}} \hat{f}_\infty(n).$$

Si p et X tendent vers $+\infty$ avec $X^{1/2} = o(p)$ et $p \ll_\varepsilon X^{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors

$$\frac{1}{p-1} \sum_{a=1}^{p-1} E^*(X, p, a)^\nu \longrightarrow \delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{2^{\nu/2}(\nu/2)!} c_f^{\nu/2} \quad (2)$$

pour tout entier $\nu \geq 1$ et où c_f est la même constante qu'en (1).

Une conséquence de ce théorème est le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Pour tout nombre premier p , on pose $X_p = p^2 / \log p$. Alors, la suite de variables aléatoires $E^*(X_p, p, \cdot)$ converge en loi quand $p \rightarrow +\infty$ vers $\mathcal{N}(0, c_f)$, la loi normale centrée de variance c_f .*

Ce théorème a été démontré à l'origine par Fouvry-Ganguly-Kowalski-Michel [FGKM] dans le cas où $E^*(X, p, a)$ est remplacé par la somme lisse

$$E(X, p, a) = \frac{1}{\sqrt{X/p}} \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/X) \quad (3)$$

avec w une fonction C^∞ à support compact dans $]0, +\infty[$. La suppression du poids lisse w est un fait non-trivial qui a été prouvé plus tard par Lester-Yesha [LY].

Le projet principal de ma thèse a été d'établir le Théorème 1 dans le cas où f est de poids demi-entier et avec un poids lisse w dans la somme. Cependant, dans ces conditions, la méthode utilisée dans [FGKM] ou [LY] ne fonctionne plus et on trouve alors par d'autres moyens que l'estimation (2) sur les moments de $E(X, p, a)$ est différente. On obtient en particulier le théorème suivant.

Théorème 2. [D1, Theorem 3] *Soit f une forme propre de poids $\ell+1/2$ et de niveau 4. On définit $E(X, q, a)$ comme en (3). Soit $\nu > 0$ un entier et $e \in \{\pm 1\}$. Il existe une constante explicite C_ν dépendant seulement de ν telle que pour toute puissance d'un nombre premier $q = p^N$ avec p impair, tout $X > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ vérifiant*

$$1 \leq Y^{(1+\varepsilon)2^{\nu-2}} < C_\nu q$$

où $Y = 4q^2/X$, on a

$$\frac{2}{\varphi(q)} \sum_{\substack{a \in [q] \\ \left(\frac{a}{p}\right) = e}} E(X, q, a)^\nu = \delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m \leq Y^{1+\varepsilon} \\ \left(\frac{m}{p}\right) = e}} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) \right)^{\nu/2} + O \left(Y^{-2/7+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p} \right)$$

où $\hat{f}_0(n)$ est le n -ième coefficient de Fourier normalisé de f à la pointe 0 et B est une fonction C^∞ à décroissance rapide ne dépendant que de w et ℓ .

Ce théorème n'assure donc pas la convergence des moments comme en (2). Néanmoins, on peut en déduire la convergence en loi d'une sous-suite de $E(X, p, \cdot)$. Ce résultat est à comparer avec le corollaire 1.

Corollaire 2. [D1, Corollary 1] *On suppose les mêmes hypothèses que le théorème précédent. Soit $(X_p)_p$ une suite de réels positifs indexés sur les nombres premiers et tels que*

$$\frac{p^2}{X_p} = o(\log \log p) \quad \text{et} \quad X_p = o(p^2).$$

Alors, il existe une sous-suite de $E(X_p, p, \cdot)$ qui converge en loi vers la loi mixte

$$\frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, 2c_f)$$

avec δ_0 la masse de Dirac en zéro.

Les théorèmes 1 et 2 résultent de propriétés d'équirépartition de certaines sommes d'exponentielles. Précisément, on réduit le problème à l'étude des moments de la forme

$$\frac{1}{p-1} \sum_{a=1}^{p-1} \prod_{i=1}^{\nu} \text{Kl}_p(m_i a; \chi) \tag{4}$$

où m_1, \dots, m_ν sont des entiers positifs et où l'on a posé

$$\text{Kl}_p(a; \chi) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{u=1}^{p-1} \chi(u) e^{2i\pi(au + \bar{u})/p} \in [-2, 2]$$

avec $u\bar{u} = 1 [p]$. De plus, ici $\chi(u)$ vaut 1 ou $\left(\frac{u}{p}\right)$ suivant si on se place dans le cas du poids entier ou demi-entier *i.e.* en poids entier, $\text{Kl}_p(a; \chi)$ est une somme de Kloosterman classique tandis qu'en poids demi-entier c'est une somme de Salié. La différence dans

l'énoncé des deux théorèmes et des deux corollaires vient de la différence de comportement asymptotique de (4) entre le cas où $\chi = 1$ et celui où $\chi = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$.

Lorsque f est de poids entier, et donc pour prouver le théorème 1, on peut utiliser la théorie des fonctions traces pour donner un développement asymptotique, dont le premier terme est constant, de la quantité (4).

En revanche, lorsque f est de poids demi-entier, les moments définis en (4) ne convergent pas en général et la théorie des fonctions traces n'apporte pas plus d'information supplémentaire qu'un calcul direct (qui utilise la formule explicite pour les sommes de Salié). À l'aide de certaines techniques combinatoires, on parvient à contourner ce problème et à établir le théorème 2.

La quasi-totalité du chapitre 3 est consacrée à la preuve du théorème 2 et du corollaire 2. On établira en fait un résultat plus général incluant le cas des formes de niveau quelconque et on montrera aussi des propriétés analogues lorsque la forme modulaire est de poids entier. On expliquera aussi en détail pourquoi la théorie des fonctions traces échoue à donner un développement asymptotique intéressant de (4).

Par ailleurs, pour prouver le corollaire 2, on démontrera une condition nécessaire et suffisante pour que la convergence des moments d'une variable aléatoire implique sa convergence en loi. Ce fait est bien connu des probabilistes mais cependant, la preuve semble difficile à trouver dans la littérature.

Enfin, on donnera une conjecture dont le corollaire 2 n'est qu'un cas particulier. On s'appuiera notamment sur des simulations numériques et on expliquera pourquoi on ne peut pas s'attendre à avoir la convergence des moments de $E(X, p, \cdot)$ comme en (2) lorsque f est de poids demi-entier.

Chapitre 4

On considère encore une forme cuspidale

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e^{2i\pi n z}$$

de poids demi-entier $\ell + 1/2$.

On a vu qu'il existait des majorations ponctuelles ou en moyenne de différentes sortes sur les coefficients de f . Néanmoins, peu de choses sont connues sur les minoration possibles de $|\hat{f}_\infty(n)|$. Une approche possible serait d'utiliser des estimées du type (1) où l'on sommerait sur un ensemble plus petit, par exemple une progression arithmétique.

D'un autre côté, puisqu'on s'attend à ce que les signes des $\hat{f}_\infty(n)$ s'équirépartissent, on peut même se demander dans quelle proportion les coefficients normalisés vérifient $\hat{f}_\infty(n) > m$ et dans quelle proportion ils vérifient $\hat{f}_\infty(n) < -m$ pour une borne m pouvant dépendre de n .

La finalité du dernier chapitre de cette thèse est alors d'exploiter l'étude faite au chapitre 3 sur les sommes de coefficients dans les progressions arithmétiques pour donner des minoration sur les $\pm \hat{f}_\infty(n)$ lorsque ces derniers sont réels.

Précisément, on établit une borne inférieure pour

$$\mathcal{T}_{a,p}^\pm(x; \alpha) = \left| \left\{ n \leq x \mid n = a [p] \text{ et } \pm \hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha} \right\} \right| \quad (5)$$

avec $\alpha > 0$ et quand p , un nombre premier, et $x > 0$ tendent vers $+\infty$ dans un certain domaine de convergence.

Théorème 3. [D2, Theorem 1] *Soit f une forme non-nulle de poids demi-entier $\ell + 1/2$ avec $\ell \geq 2$ et de niveau $4N$ avec N impair et sans facteur carré. On suppose que ses coefficients de Fourier sont réels et on définit $\mathcal{T}_{a,p}^{\pm}(x; \alpha)$ comme en (5).*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in]3/14, 1/4]$, il existe une constante $x_0 = x_0(f, \varepsilon, \alpha)$ telle que pour tout p premier et tout $x > 0$ satisfaisant $x_0 \leq x^{1-2\alpha+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$, on a

$$\mathcal{T}_{a,p}^+(x; \alpha) \geq 1$$

pour une proportion positive de $a [p]$. Aussi, on a le même résultat pour $\mathcal{T}_{a,p}^-(x; \alpha)$.

Si de plus on suppose que f est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\delta > 0$ assez petit et tout $\alpha \in]1/8, 1/7]$, il existe une constante $x_0 = x_0(f, \varepsilon, \delta, \alpha)$ telle que pour tout p premier et tout $x > 0$ satisfaisant $x_0 \leq x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4\alpha-\varepsilon}$, on a

$$\mathcal{T}_{a,p}^{\pm}(x; \alpha) \gg \frac{x^{1-2\delta}}{p^{7/4}}$$

pour un nombre de $a [p]$ qui est $\gg_{f,\delta} \frac{p^{3/4}}{x^{\delta/2}}$.

On distingue donc deux cas suivant si f est une forme quelconque ou si c'est une forme propre pour les opérateurs de Hecke. Dans le deuxième, la borne obtenue est meilleure car il est possible d'utiliser la formule de Waldspurger et un résultat déjà connu sur le deuxième moment des valeurs centrales de fonctions L tordues par des caractères quadratiques.

Cependant, le premier cas présente en lui-même un intérêt particulier puisqu'à notre connaissance, c'est le premier résultat obtenu sur les signes d'une forme de poids demi-entier qui se passe de l'hypothèse que celle-ci est une forme propre. On en déduit notamment le corollaire suivant.

Corollaire 3. [D2, Corollary 1] *Soit f une forme non-nulle de poids demi-entier $\ell + 1/2$ avec $\ell \geq 2$ et de niveau $4N$ avec N impair et sans facteur carré. Alors, pour x assez grand,*

$$\left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_{\infty}(n) > n^{-(3/14+\varepsilon)} \right\} \right| \gg_{f,\varepsilon} x^{4/7-\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

De plus, indépendamment du théorème 3, on montrera aussi une propriété analogue au corollaire 3 lorsque la forme f considérée est propre.

Proposition 1. *Soit f une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, de poids demi-entier $\ell + 1/2$ avec $\ell \geq 2$ et de niveau $4N$ avec N impair et sans facteur carré.*

Alors, pour x assez grand, on a

$$\left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_{\infty}(n) > n^{-\varepsilon} \right\} \right| \gg_{f,\varepsilon} x^{1-\varepsilon}$$

et de même

$$\left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_{\infty}(n) < -n^{-\varepsilon} \right\} \right| \gg_{f,\varepsilon} x^{1-\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Ces résultats non-triviaux mettent en évidence le caractère oscillatoire des coefficients de Fourier d'une forme modulaire, principe à la base de nombreuses propriétés arithmétiques.

Comme au chapitre 3, on finira cette étude en présentant certaines applications numériques liées à ce problème. On donnera les proportions des signes positifs et négatifs dans la suite $(\hat{f}_\infty(n))_{n \leq x}$ pour différentes valeurs de x et pour des f de poids différents, certaines étant des formes propres, d'autres non. On s'intéressera aussi au nombre de changements de signe dans la suite des coefficients.

Ensuite, on tracera

$$\mathcal{T}^+(x; \alpha) = \left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha} \right\} \right|$$

en fonction de x pour deux formes modulaires (une propre et une quelconque) et pour différents α . On fera alors une conjecture sur le développement asymptotique de $\mathcal{T}^+(x; \alpha)$.

Chapitre 1

Notations et propriétés élémentaires

Le but de ce chapitre est d'introduire rapidement les notations et résultats standard que l'on utilisera tout au long du manuscrit de thèse. Dans un souci de concision et puisque les propriétés énoncées sont très classiques, on préférera souvent renvoyer le lecteur à des références précises plutôt que de refaire les démonstrations ici.

1 Demi-plan de Poincaré et transformation de Möbius

1.1 Action d'un groupe de matrices

On note \mathcal{H} le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive et on note $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2 réelles à déterminant strictement positif. Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, on pose

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}$$

où $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ceci est bien défini car $\mathrm{Im}(cz + d) \neq 0$ et puisque $\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\det \gamma \mathrm{Im} z}{|cz+d|^2}$, on a $\gamma z \in \mathcal{H}$. On vérifie alors facilement que l'application qui à (γ, z) associe γz définit une action (à gauche) du groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} . Cette action s'étend naturellement aux $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec la convention $\frac{az+b}{0} = \infty$ et $\gamma \infty = a/c$ (notons que si $cz + d = 0$ alors $c(az + b) = -\det \gamma \neq 0$).

Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors on a $\alpha I_2 \gamma z = (\alpha \gamma) z = \gamma z$ pour tout $(\gamma, z) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et où I_2 désigne la matrice identité de taille 2. On peut donc voir cette action comme une action de $\mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, le quotient de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ (ou de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$) par son centre.

L'action de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ n'est en général pas isométrique pour la distance euclidienne sur \mathcal{H} . Précisément, on a

$$|\gamma z - \gamma w| = \frac{|z - w|}{|j(\gamma, z)j(\gamma, w)|} \tag{1.1.1}$$

pour tout $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, tout $z, w \in \mathcal{H}$ et où l'on a posé $j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = cz + d$. En revanche, la métrique définie par

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

est $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ -invariante. Cela signifie que la distance

$$\rho(z, w) = \min_L \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \frac{dt}{y(t)}$$

où $L : t \mapsto x(t) + iy(t)$ décrit les chemins dans \mathcal{H} de classe C^1 reliant z à w , vérifie $\rho(\gamma z, \gamma w) = \rho(z, w)$.

Cette distance peut même être calculée explicitement (voir [I3]) puisque

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\mathrm{Im}z \mathrm{Im}w}$$

ce qui montre que la topologie induite par cette distance sur \mathcal{H} est la même que sa topologie usuelle en tant qu'ouvert de \mathbb{C} . Par ailleurs, la métrique ds^2 confère à \mathcal{H} une structure de variété riemannienne dont les isométries directes sont exactement celles données par les $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Une compactification possible de cette variété est $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Pour finir, \mathcal{H} est munie d'une unique (à un facteur multiplicatif près) mesure borelienne $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ -invariante. Celle-ci vaut

$$\frac{dx dy}{y^2}$$

avec $dx dy$ la mesure de Lebesgue classique sur \mathbb{C} identifié à \mathbb{R}^2 .

1.2 Sous-groupes de congruence

Parmi les sous-groupes importants de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ vis-à-vis de leur action sur \mathcal{H} , il y a la classe très large des groupes fuchsien. On dit qu'un sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ est fuchsien s'il agit discontinument sur \mathcal{H} *i.e.* pour tout $z \in \mathcal{H}$, l'orbite

$$\Gamma z = \{\gamma z \mid \gamma \in \Gamma\}$$

n'a pas de point d'accumulation dans \mathcal{H} . Quitte à renormaliser les matrices, il n'est pas restrictif de considérer seulement des sous-groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dans ce cas, Poincaré [P1] a montré qu'un sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est fuchsien si et seulement si il est discret dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Aussi, on a le résultat remarquable suivant.

Proposition 1.1.1. [I3, Proposition 2.1] *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un groupe fuchsien et $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On définit*

$$\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$$

le sous-groupe stabilisateur de z dans Γ et on note $\tilde{\Gamma}_z$ son image dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Alors, $\tilde{\Gamma}_z$ est un groupe monogène. Si de plus $z \in \mathcal{H}$, alors il est cyclique. En conséquence, il existe $\gamma \in \Gamma_z$ tel que

$$\Gamma_z = \begin{cases} \langle \gamma \rangle & \text{si } -I_2 \notin \Gamma_z, \\ \langle \pm \gamma \rangle & \text{si } -I_2 \in \Gamma_z, \end{cases}$$

et γ est d'ordre fini si $z \in \mathcal{H}$.

Dans cette thèse, on n'abordera que des questions liées à des cas particuliers de groupes fuchsien que sont les sous-groupes de congruence. Il s'agit des sous-groupes $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ qui contiennent

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma = I_2 \pmod{N}\}$$

pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$ (le plus petit de ces N s'appelle le niveau du sous-groupe de congruence). Plus particulièrement, on s'intéressera aux sous-groupes de congruence suivant

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma = \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma = \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

où \star signifie que l'on n'impose aucune restriction supplémentaire sur le coefficient en question.

Il est clair que

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N)$$

pour tout $N \geq 1$, avec égalité dans la première inclusion si et seulement si $N = 1$ (dans ce cas, les trois sous-groupes sont égaux à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) et égalité dans la deuxième inclusion si et seulement si $N \in \{1, 2\}$.

Un exercice classique (voir par exemple [FGN, exercice 3.24]) montre que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices de transvection ou de manière équivalente, par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En conséquence, le morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ \gamma &\mapsto \gamma \pmod{N} \end{aligned}$$

est surjectif de noyau $\Gamma(N)$. Ainsi, $\Gamma(N)$ est un sous-groupe distingué d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On peut même prouver facilement (voir [DS, exercice 1.2.3]) que

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^3 \prod_{p|N} (1 - 1/p^2)$$

où le produit est pris sur les nombres premiers divisant N .

En particulier, tout sous-groupe de congruence Γ est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et n'importe lequel de ses conjugués $\alpha\Gamma\alpha^{-1}$, avec $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, est encore un sous-groupe de congruence et de même niveau.

Pour finir, on rappelle que pour tout d divisant N , on a les inclusions naturelles suivantes :

$$\Gamma(N) \subset \Gamma(d) \quad \text{et} \quad \Gamma_i(N) \subset \Gamma_i(d)$$

pour $i \in \{0, 1\}$. Inversement, si l'une des inclusions précédentes est vérifiée alors $d \mid N$.

1.3 La courbe modulaire $\Gamma \backslash \mathcal{H}$

Fixons $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe de congruence et notons \mathcal{E} l'ensemble des points elliptiques pour Γ , c'est-à-dire l'ensemble des $z \in \mathcal{H}$ tels que le groupe $\tilde{\Gamma}_z$ est non-trivial. On considère $\Gamma \backslash \mathcal{H} = \{\Gamma z \mid z \in \mathcal{H}\}$ l'espace des orbites pour l'action de Γ sur \mathcal{H} . Cet ensemble est muni de la topologie la plus fine rendant continue la projection naturelle $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{H}$. En fait, on peut montrer que π est localement un homéomorphisme au voisinage de tout point $\tau \in \mathcal{H} \backslash \mathcal{E}$ (l'ensemble \mathcal{H} privé de \mathcal{E}), ce qui donne un ensemble de cartes locales pour $\Gamma \backslash (\mathcal{H} \backslash \mathcal{E})$.

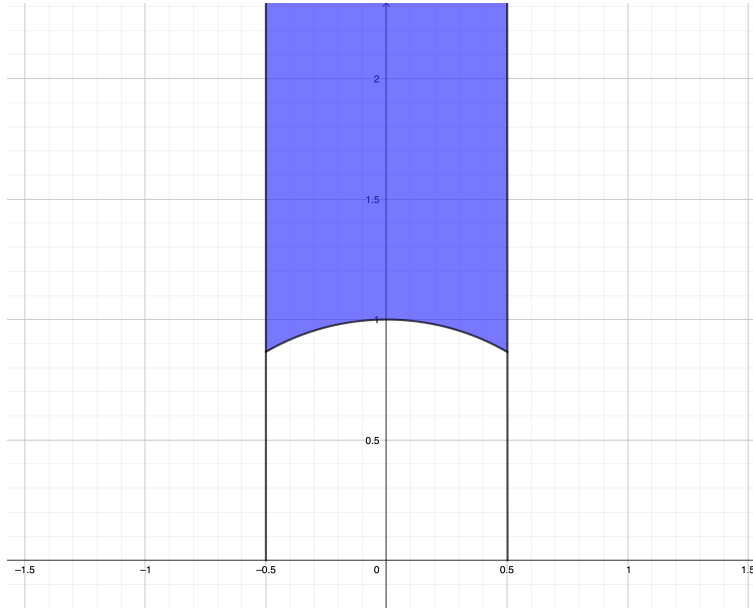
On peut même en construire sur tout $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ de la façon suivante. Pour $\tau \in \mathcal{E}$, notons m l'ordre de $\tilde{\Gamma}_\tau$ (proposition 1.1.1). On remarque que l'application $z \mapsto \delta z = \frac{z-\tau}{z-\bar{\tau}}$, où $\delta = \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 1 & -\bar{\tau} \end{pmatrix}$, envoie tout voisinage U de τ sur un voisinage de 0. Quitte à prendre U plus petit, on peut supposer que δU est inclu dans le disque unité et que $\gamma U \cap U = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_\tau$. Ainsi, pour $z_1, z_2 \in U$, on a $z_1 \in \Gamma z_2$ si et seulement si il existe $\gamma \in \delta \Gamma_\tau \delta^{-1}$ tel que $\delta z_1 = \gamma \delta z_2$. Les éléments de $\delta \Gamma_\tau \delta^{-1}$ sont des matrices qui stabilisent 0 et ∞ et donc correspondent à des transformations de la forme $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. De plus, ici a décrit les racines m -ième de l'unité puisque l'image de $\delta \Gamma_\tau \delta^{-1}$ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe cyclique d'ordre m . En résumé, on a $z_1 \in \Gamma z_2$ si et seulement si $(\delta z_1)^m = (\delta z_2)^m$. On peut alors montrer que l'application définie de $\pi(U)$ dans $\rho(\delta U)$, avec ρ la mise à la puissance m , qui à $\pi(z)$ associe $(\delta z)^m$, pour $z \in U$, est un homéomorphisme (tout ceci est fait en détail dans [DS, Part 2.2]).

En conclusion, on a des cartes locales sur $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ qui lui confèrent une structure de variété différentielle complexe de dimension un qui de plus, munie de la métrique induite par ds^2 , est une surface de Riemann (on parle de courbe modulaire).

Une manière assez commode de visualiser $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ est d'utiliser ce qu'on appelle un domaine fondamental. Il s'agit d'un ouvert connexe $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ à bord régulier (disons C^1 par morceaux) tel que deux éléments distincts $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ sont toujours distincts modulo Γ , *i.e.* $z_1 \notin \Gamma z_2$, et de plus pour tout $z \in \mathcal{H}$, il existe un élément de Γz dans l'adhérence $\overline{\mathcal{D}}$. Par exemple, l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ x + iy \in \mathcal{H} \mid -1/2 < x < 1/2 \text{ et } |x + iy| > 1 \right\}$$

est un domaine fondamental de la courbe $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ (voir figure 1.1).

 FIGURE 1.1 – Domaine fondamental de $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$


Le domaine est représenté en bleu. Deux points distincts z_1 et z_2 du bord sont $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -équivalents si et seulement si $z_1 = -\bar{z}_2$.

1.4 Compactification et pointes de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$

Une notion importante attachée à la courbe $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ est sa compactification. Puisque $\widehat{\mathcal{H}}$ est compact, on voit qu'on peut compactifier $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ en rajoutant certaines orbites de $\Gamma \backslash (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ qu'on appelle des pointes. Dans le cas d'un sous-groupe de congruence, ces pointes correspondent en fait aux orbites de $\Gamma \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ et sont en nombre fini.

Considérons d'abord le cas $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Il est facile de voir que $\Gamma \infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et donc que

$$\Gamma \backslash (\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}) = \pi(D^*) \quad (1.1.2)$$

où $D^* = \overline{\mathcal{D}} \cup \{\infty\}$. On munit alors $\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ de la topologie engendrée par les ouverts de \mathcal{H} et les ensembles de la forme $\gamma \mathcal{H}^Y$, pour $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et où

$$\mathcal{H}^Y = \{x + iy \mid y > Y\} \cup \{\infty\}$$

avec $Y > 0$. Ces ensembles forment une base de voisinages ouverts de $\gamma \infty$. Cette topologie induit une topologie sur $\Gamma \backslash (\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ contenant celle de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ et rendant la projection canonique π continue. On montre alors que D^* est compact et donc que $\Gamma \backslash (\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ l'est aussi d'après (1.1.2).

Pour Γ un sous-groupe de congruence quelconque, on procède de la même façon et on remarque que puisque Γ est d'indice fini n dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a une union disjointe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{j=1}^n \Gamma \gamma_j \quad (1.1.3)$$

et donc que $\Gamma \backslash (\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}) = \bigcup_{j=1}^n \pi(\gamma_j D^*)$ est bien compact.

On a même l'existence de cartes locales en chaque pointe de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ qui étendent sa structure de surface de Riemann à $\Gamma \backslash (\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ (voir [DS, 2.4]).

Généralement, on identifie les pointes à un ensemble de représentants du quotient $\Gamma \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ dont on note les éléments avec des lettres gothiques. Soient $\mathfrak{a} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ un tel élément et $g_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $g_{\mathfrak{a}} \infty = \mathfrak{a}$. Alors, $g_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}}$ est un sous-groupe de

$$\Gamma_{\infty} = \left\langle \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(remarquons que pour tout sous-groupe de congruence contenant $-I_2$, le stabilisateur de ∞ est identique; de même pour les sous-groupes de congruence ne contenant pas $-I_2$).

Ainsi, il existe un entier $m_{\mathfrak{a}} \geq 1$ tel que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m_{\mathfrak{a}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendre $g_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}}$ modulo

$\{\pm I_2\} \cap \Gamma$. Il s'agit en fait du plus petit entier $m \geq 1$ tel que $g_{\mathfrak{a}} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{\mathfrak{a}}^{-1} \in \Gamma$. Il est donc indépendant du choix de $g_{\mathfrak{a}}$ ou du représentant de la pointe \mathfrak{a} . On l'appelle la largeur de la pointe. On pose alors

$$\sigma_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_{\mathfrak{a}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_{\mathfrak{a}}}} \end{pmatrix},$$

une telle matrice vérifie

$$\sigma_{\mathfrak{a}} \infty = \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathfrak{a}} := \sigma_{\mathfrak{a}} T \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \in \Gamma \quad (1.1.4)$$

et $\gamma_{\mathfrak{a}}$ est indépendant du choix de $g_{\mathfrak{a}}$ mais pas du choix du représentant de la pointe \mathfrak{a} .

1.5 L'exemple de $\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}$

Illustrons en détail ce que l'on vient d'énoncer sur un exemple primordial lorsqu'on parle de forme de poids demi-entier, la courbe $\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}$.

D'après [I3, Proposition 2.6], les pointes de $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$ pour tout N , sont données par les rationnels de la forme u/v avec $v \mid N$ positif, $(u, v) = 1$ et $0 \leq u < (v, N/v)$ (le pgcd de v et N/v). Dans notre cas, cela signifie que $\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}$ possède trois pointes représentées par 0 , $1/2$ et $1/4$ (mais cette dernière correspond à la pointe ∞). On pose alors

$$g_\infty = I_2, \quad g_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi le coefficient en bas à gauche de la matrice $g_\alpha \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\alpha^{-1}$ vaut 0 , $-m$ ou $-4m$ suivant si $\alpha = \infty$, 0 ou $1/2$ respectivement. On en déduit que $m_\infty = m_{\frac{1}{2}} = 1$ et que $m_0 = 4$. On a donc

$$\sigma_\infty = I_2, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On va maintenant expliquer la construction d'un domaine fondamental de $\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}$. Tout d'abord, on choisit des matrices γ_j dans chaque classe du quotient $\Gamma_0(4)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ pour avoir une décomposition du type (1.1.3). Ensuite, on calcule l'image de \mathcal{D} par l'action de γ_j puis on recolle certains bords (cette construction ne donne pas quelque chose de connexe en général donc il faut bien choisir les γ_j).

D'après [S5, Proposition 3.10], le quotient $\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est décrit par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ avec $(c, d, N) = 1$. De plus, deux telles matrices (notons la deuxième $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$) sont dans la même classe si et seulement si il existe $u \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$ (les inversibles modulo N) tel que $c' = uc[N]$ et $d' = ud[N]$.

Cela montre que $\Gamma_0(4)$ est d'indice 6 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et qu'un ensemble de représentants pour le quotient est donné par

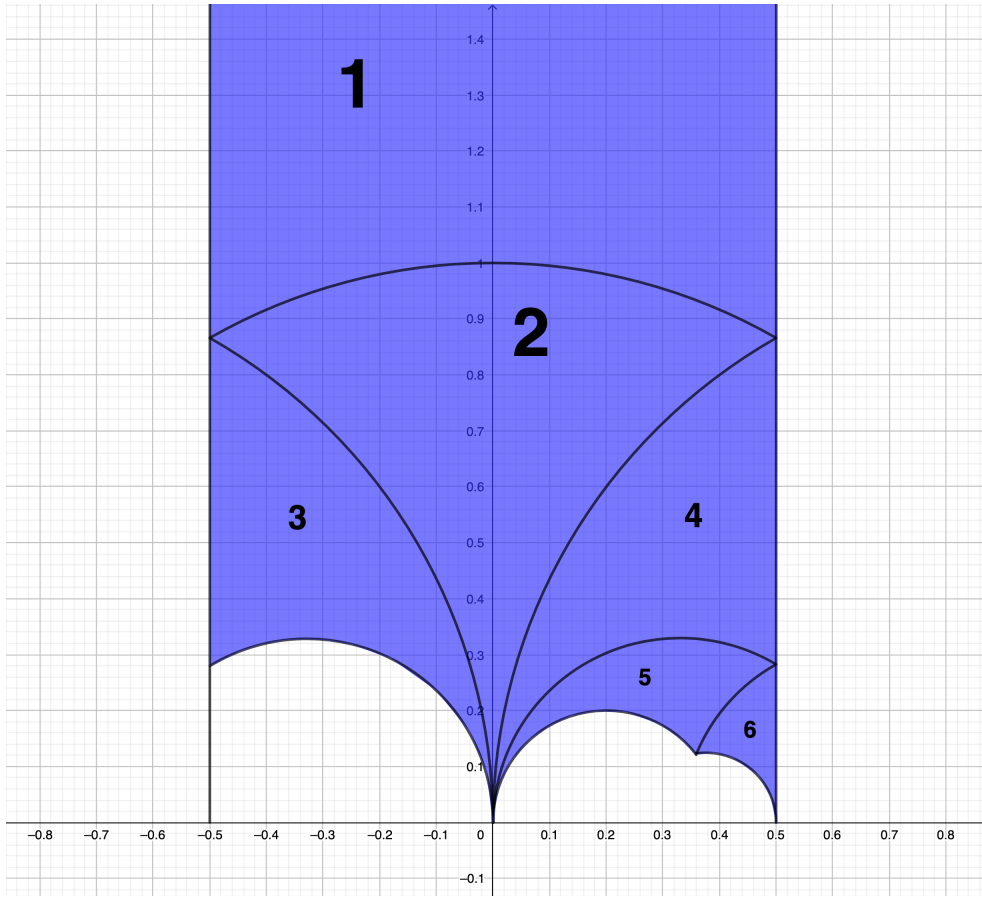
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= I_2 & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \gamma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mais évidemment ce choix n'est pas fait au hasard. Pour déterminer $\gamma_j\mathcal{D}$ on utilise le fait que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, l'action de γ_j est une isométrie directe qui envoie la géodésique $\{\alpha, \beta\}$ sur la géodésique $\{\gamma\alpha, \gamma\beta\}$ et que \mathcal{D} est déterminé par le tracé des géodésiques $\{-1, 1\}$, $\{-1/2, \infty\}$ et $\{1/2, \infty\}$.

Par géodésique, on entend bien sûr le plus court chemin entre α et β . Si $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, il s'agit du cercle centré sur l'axe des abscisses passant par α , β et si $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\beta = \infty$, alors il s'agit de la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par α .

Par exemple, $\gamma_6\mathcal{D}$ correspond à la zone « interne » délimitée par $C(2/3, 1/3)$ (le cercle de centre $2/3$ et de rayon $1/3$), par la droite verticale passant par $1/2$ et par $C(3/8, 1/8)$. L'union des $\gamma_j\mathcal{D}$ est représentée en bleu sur la figure 1.2.

FIGURE 1.2 – Domaine fondamental de $\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}$



Pour tout $1 \leq j \leq 6$, la zone j correspond à $\gamma_j \mathcal{D}$.

Le fait qu'il y ait quatre zones touchant la pointe 0 illustre bien la largeur de celle-ci.

2 Formes modulaires de poids entier

Avant de parler de formes modulaires de poids demi-entier, qui seront au coeur de l'étude faite dans les chapitres suivants, il apparait opportun de rappeler les notions classiques à avoir en tête lorsqu'on parle de formes modulaires. Le cas du poids entier, en particulier, est traité de manière exhaustive dans de nombreux ouvrages comme par exemple [I3], [DS] et [O]. On en donne ici l'essentiel.

2.1 Propriétés de base

Fixons un entier k . Pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ et pour toute fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, on pose

$$f|_k \gamma(z) = \left(\frac{\sqrt{\det \gamma}}{cz + d} \right)^k f(\gamma z)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Cela définit bien un opérateur linéaire sur l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathcal{H} qui à f associe $f|_k \gamma$. De plus, cela définit sur cet ensemble une action

à droite du groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ i.e. $f|_k(\gamma_1\gamma_2) = (f|_k\gamma_1)|_k\gamma_2$ pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

Le centre de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ étant égal au noyau de cette action, on identifiera souvent une matrice γ avec l'opérateur $|_k\gamma$ (deux matrices ayant même opérateur sont égales à multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ près).

Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe de congruence. Si on considère une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est Γ -invariante, c'est-à-dire $f|_k\gamma = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, alors on a une notion d'holomorphicité aux pointes de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$. En effet, soient \mathfrak{a} une pointe de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ et $\sigma_{\mathfrak{a}}$ une matrice vérifiant (1.1.4). La fonction $g = f|_k\sigma_{\mathfrak{a}}$ est alors holomorphe sur \mathcal{H} et vérifie

$$g(z+1) = g|_kT(z) = f|_k\sigma_{\mathfrak{a}}T\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\sigma_{\mathfrak{a}}(z) = g(z)$$

car $\sigma_{\mathfrak{a}}T\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \in \Gamma$. Par conséquent, le changement de variable $q = e(z) := e^{2i\pi z}$ permet de définir une fonction $\tilde{g}(q) = g(z)$ holomorphe sur le disque unité ouvert privé de son centre. Cette fonction admet donc un développement en série de Laurent de la forme

$$\tilde{g}(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)q^n$$

avec $0 \neq |q| < 1$ et $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n) \in \mathbb{C}$ pour tout n . Ainsi,

$$g(z) = f|_k\sigma_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)e(nz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Cette écriture s'appelle le développement en série de Fourier de f en la pointe \mathfrak{a} ou (de manière équivalente) de g en la pointe ∞ . Elle dépend du choix du représentant de \mathfrak{a} dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et du choix de $\sigma_{\mathfrak{a}}$ de la façon suivante. Si $\mathfrak{b} = \gamma\mathfrak{a}$ avec $\gamma \in \Gamma$ et si $\sigma_{\mathfrak{b}}$ vérifie (1.1.4) (en y remplaçant \mathfrak{a} par \mathfrak{b}), alors il existe un entier r tel que $\hat{f}_{\mathfrak{b}}(n) = e(nr/m_{\mathfrak{a}})\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et où $m_{\mathfrak{a}}$ désigne la largeur de la pointe \mathfrak{a} .

On dit que f est holomorphe en \mathfrak{a} si $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n) = 0$ pour tout $n < 0$ (ce qui correspond évidemment à \tilde{g} holomorphe sur le disque). Si de plus $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(0) = 0$, alors on dit que f est cuspidale en \mathfrak{a} . D'après ce qui précède, ces propriétés ne dépendent ni du choix de $\sigma_{\mathfrak{a}}$, ni du choix du représentant de la pointe \mathfrak{a} .

Une caractérisation intéressante est que f est holomorphe en chaque pointe de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ si et seulement si pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $f|_k\gamma$ est bornée sur un voisinage de ∞ dans \mathcal{H} .

Remarque 1.2.1. Il est important de souligner à ce stade que si $k \neq 0$, alors f n'est pas Γ -périodique et donc ne peut pas être vue comme une fonction de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$. En revanche, $z \mapsto y^{k/2}|f(z)|$ (on adopte toujours la convention $y = \mathrm{Im} z$ dans ce genre de contexte) est Γ -périodique mais n'est pas holomorphe sur $\Gamma \backslash \mathcal{H}$.

On note $M_k(\Gamma)$ (respectivement $S_k(\Gamma)$) l'ensemble des formes modulaires (respectivement cuspidales) de poids k pour Γ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions holomorphes $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont Γ -invariantes et holomorphes (respectivement cuspidales) en chaque pointe de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$. D'après le théorème de Riemann-Roch (voir [DS, Theorem 3.4.1]), l'holomorphicité aux pointes implique que $M_k(\Gamma)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Il est clair que si $\Gamma' \subset \Gamma$ est un autre sous-groupe de congruence, alors $M_k(\Gamma) \subset M_k(\Gamma')$ et $S_k(\Gamma) \subset S_k(\Gamma')$. Enfin, l'holomorphicité aux pointes et le théorème de Liouville impliquent que si $k < 0$, alors $M_k(\Gamma) = 0$ et si $k = 0$, alors $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions constantes, et $S_0(\Gamma) = \{0\}$. On suppose donc par la suite que $k > 0$.

2.2 Formes sur $\Gamma_1(N)$

Les espaces de formes modulaires les plus importants et les plus étudiés sont sans doute les $M_k(\Gamma_1(N))$ pour tout entier $N \geq 1$. En effet, la littérature regorge d'exemples et d'applications liées à ces espaces (voir par exemple [S5]). En général, on étudie plus particulièrement certains de leurs sous-espaces dont la construction est la suivante. L'application

$$\begin{aligned} \Gamma_0(N) &\rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto d [N] \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe surjectif dont le noyau est égal à $\Gamma_1(N)$. De ce fait, ce dernier est un sous-groupe distingué de $\Gamma_0(N)$ et pour tout $d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$, on peut définir l'opérateur $\langle d \rangle$ sur $M_k(\Gamma_1(N))$ par

$$\langle d \rangle f = f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d' \end{pmatrix}$$

pour tout $f \in M_k(\Gamma_1(N))$ et avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ et $d' = d [N]$ (une telle définition étant indépendante du choix de la matrice). Ces opérateurs sont en fait ceux d'une représentation du groupe abélien fini $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$ sur le \mathbb{C} -espace vectoriel $M_k(\Gamma_1(N))$ *i.e.* $\langle d_1 d_2 \rangle = \langle d_1 \rangle \langle d_2 \rangle$ pour tout $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$. Ainsi, on a la décomposition

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi} M_k(N, \chi)$$

où χ décrit les caractères de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$ et

$$M_k(N, \chi) = \left\{ f \in M_k(\Gamma_1(N)) \mid \forall d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times, \langle d \rangle f = \chi(d) f \right\}.$$

En fait, si $f \in M_k(N, \chi)$ alors $f|_k \gamma = \chi(\gamma) f$ pour toute matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ et avec $\chi(\gamma) := \chi(d)$. Par conséquent, pour toute pointe \mathfrak{a} de $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$, en prenant $\sigma_{\mathfrak{a}}$ et $\gamma_{\mathfrak{a}}$ comme en (1.1.4) (avec $\Gamma = \Gamma_0(N)$), on a $f|_k \sigma_{\mathfrak{a}}(z+1) = \chi(\gamma_{\mathfrak{a}}) f|_k \sigma_{\mathfrak{a}}(z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}$. La fonction $f|_k \sigma_{\mathfrak{a}}$ n'est donc pas 1-périodique en général (elle l'est si et seulement si $\chi(\gamma_{\mathfrak{a}}) = 1$ et dans ce cas on parle de pointe singulière pour χ). En revanche, si on pose $\chi(\gamma_{\mathfrak{a}}) = e(r_{\mathfrak{a}})$ avec $r_{\mathfrak{a}} \in [0, 1[$ indépendant du choix de $\sigma_{\mathfrak{a}}$ et du représentant de \mathfrak{a} , alors $z \mapsto e(-r_{\mathfrak{a}} z) f|_k \sigma_{\mathfrak{a}}(z)$ est bien 1-périodique et admet, d'après la sous-section précédente, un développement en série de Fourier en ∞ . Puisque f est holomorphe aux pointes de $\Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H}$, cette série de Fourier doit être bornée sur un voisinage de ∞ . Ainsi, il existe des nombres complexes $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)$ pour tout entier $n \geq 0$ tels que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}_{\mathfrak{a}}(n) e((n + r_{\mathfrak{a}})z)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Ceci est une définition plus générale de l'holomorphie en \mathfrak{a} . On dit même que f est cuspidale en \mathfrak{a} si $r_{\mathfrak{a}} > 0$ ou si $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(0) = 0$ lorsque $r_{\mathfrak{a}} = 0$. De ce fait, la caractérisation suivante est souvent utilisée comme définition de $M_k(N, \chi)$ et $S_k(N, \chi)$.

On a $f \in M_k(N, \chi)$ (respectivement $f \in S_k(N, \chi)$) si et seulement si f est holomorphe sur \mathcal{H} , $f|_k \gamma = \chi(\gamma) f$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$ et f est holomorphe (respectivement cuspidale) en chaque pointe de $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$.

En particulier, puisque $-I_2 \in \Gamma_0(N)$, si $f \in M_k(N, \chi)$ alors $(-1)^k f = f|_k(-I_2) = \chi(-1) f$. Il s'en suit que $M_k(N, \chi) = \{0\}$ si $\chi(-1) \neq (-1)^k$.

2.3 Opérateurs de Hecke

On rappelle ici la définition des opérateurs de Hecke sur $M_k(\Gamma_1(N))$. On pose $\Gamma = \Gamma_1(N)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'ensemble des matrices entières $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant n telles que $N \mid c$ et $a = 1 \pmod{N}$. L'ensemble Δ^n étant stable par multiplication à gauche par un élément de Γ , il peut s'écrire comme une union disjointe d'orbites pour cette action *i.e.*

$$\Delta^n = \bigsqcup_i \Gamma \alpha_i$$

avec $\alpha_i \in \Delta^n$. On peut même montrer que cette union est finie, ce qui permet de définir le n -ième opérateur de Hecke sur $M_k(\Gamma)$ par

$$T_n f = n^{k/2-1} \sum_i f|_k \alpha_i$$

pour tout $f \in M_k(\Gamma)$. Cette définition est évidemment indépendante du choix des représentants de $\Gamma \backslash \Delta^n$. Puisque Δ^n est aussi stable par multiplication à droite par un élément de Γ , on a bien $T_n f \in M_k(\Gamma)$.

D'après [K4, Lemma p. 167], on a de manière plus explicite

$$T_n f(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ (a,N)=1 \\ 0 \leq b < d}} a^k \langle a \rangle f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

et donc en particulier $M_k(N, \chi)$ et $S_k(N, \chi)$ sont stables par T_n pour tout χ et

$$T_n f(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ (a,N)=1 \\ 0 \leq b < d}} \chi(a) a^k f\left(\frac{az+b}{d}\right) \quad (1.2.1)$$

pour tout $f \in M_k(N, \chi)$. En général on notera encore T_n la restriction de l'opérateur de Hecke à $M_k(N, \chi)$ ou $S_k(N, \chi)$. En cas de possible confusion concernant l'espace sous-jacent, on adoptera plutôt la notation $T_n^{k,N,\chi}$.

La proposition suivante est tirée de [DS, Part 5.3].

Proposition 1.2.1. *Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et χ un caractère de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n le n -ième opérateur de Hecke sur $M_k(N, \chi)$. Alors :*

- (i) T_1 est l'opérateur identité sur $M_k(N, \chi)$.
- (ii) Pour tous entiers m et n , on a $T_m T_n = T_n T_m$ et de plus, si $(m, n) = 1$ alors $T_{mn} = T_m T_n$.
- (ii) Pour tout nombre premier p et pour tout entier $r \geq 2$, on a

$$T_{p^r} = T_p T_{p^{r-1}} - \chi(p) p^{k-1} T_{p^{r-2}}$$

avec, par convention, $\chi(p) = 0$ si $p \mid N$.

2.4 Formes primitives

On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et χ un caractère de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$ tel que $\chi(-1) = (-1)^k$. Il est souvent pratique d'étudier l'espace $M_k(N, \chi)$ en exhibant une base de formes propres, c'est-à-dire des éléments $f \in M_k(N, \chi)$ qui sont des vecteurs propres communs aux opérateurs de Hecke. On peut montrer (voir la fin de la partie 5.9 de [DS]) que

$$M_k(N, \chi) = \mathcal{E}_k(N, \chi) \oplus S_k(N, \chi)$$

où $\mathcal{E}_k(N, \chi)$ est l'espace engendré par les séries d'Eisenstein de la forme

$$E_k^{\psi, \phi, t}(z) = \delta(\psi)L(1-k, \phi) + \mathbf{1}_{k=1}\delta(\phi)L(1-k, \psi) + 2 \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}^{\psi, \phi}(n)e(ntz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Ici, ψ et ϕ sont des caractères primitifs modulo u et v respectivement, tels que $tuv \mid N$ (si $k = 2$, on impose en plus $tuv > 1$) et $\psi\phi = \chi$ (modulo N). Par ailleurs, $\delta(\psi) = 1$ ou 0 suivant si ψ est trivial ou non et

$$\sigma_{k-1}^{\psi, \phi}(n) = \sum_{d \mid n} \psi(n/d)\phi(d)d^{k-1}$$

pour tout $n \geq 1$. Pour être exact, si $(k, u, v) = (2, 1, 1)$ alors on doit redéfinir $E_2^{1,1,t}(z)$ par $E_2^{1,1,1}(z) - tE_2^{1,1,1}(tz)$.

Il se trouve que ces séries d'Eisenstein sont des formes propres pour tous les T_n avec $(n, N) = 1$. En ce qui concerne les T_n avec $(n, N) > 1$, ils stabilisent le sous-espace $\mathcal{E}_k(N, \chi)$ mais les $E_k^{\psi, \phi, t}$ ne sont en général pas des vecteurs propres pour T_n .

Les choses sont un peu moins explicites sur $S_k(N, \chi)$. Si $(n, N) = 1$ alors T_n est un opérateur normal de $S_k(N, \chi)$ (*i.e.* qui commute avec son adjoint) pour le produit hermitien de Petersson défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}$$

pour tout $f, g \in S_k(N, \chi)$. L'intégrale est prise sur un domaine fondamental de $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$ et sa valeur ne dépend pas du choix de ce domaine puisque la fonction intégrée est $\Gamma_0(N)$ -périodique. De plus, la convergence de l'intégrale est assurée par la cuspidalité de f et g en chaque pointe de $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$.

Par conséquent, et puisque les T_n commutent, il existe une base de $S_k(N, \chi)$ constituée de formes propres pour tous les opérateurs T_n avec $(n, N) = 1$. En revanche, les T_n , pour $(n, N) > 1$, ne sont en général pas diagonalisables sur $S_k(N, \chi)$. Il est cependant possible de les diagonaliser sur un sous-espace de $S_k(N, \chi)$.

Pour tout entier $d \geq 1$, on note B_d l'opérateur défini par $B_d f = f(d \cdot)$ pour tout f . On peut montrer que si $M \mid N$ et $d \mid N/M$ alors B_d réalise une injection de $S_k(M, \chi)$ dans $S_k(N, \chi)$. De plus, on rappelle qu'on a une injection naturelle donnée par l'inclusion $S_k(M, \chi) \subset S_k(N, \chi)$ pour $M \mid N$. Notons que $S_k(M, \chi)$ est bien défini seulement si χ est engendré par un caractère de niveau M *i.e.* son conducteur $c(\chi)$ divise M .

On note alors $S_k^{\text{new}}(N, \chi)$ l'espace des formes nouvelles de $S_k(N, \chi)$, c'est-à-dire l'orthogonal pour le produit hermitien de Petersson du sous-espace de $S_k(N, \chi)$ engendré par les $B_d S_k(M, \chi)$ où $c(\chi) \mid M \mid N$, $M < N$ et $d \mid N/M$.

Théorème 1.2.1 ([AL1],[L1]). *L'espace $S_k^{\text{new}}(N, \chi)$ est stable par T_n pour tout entier $n \geq 1$. De plus, il possède une base de formes propres pour tous les T_n avec $(n, N) = 1$. Chacune de ces formes est unique à un scalaire multiplicatif près i.e. si $f, g \in S_k^{\text{new}}(N, \chi) \setminus \{0\}$ vérifient $T_n f = \lambda(n)f$ et $T_n g = \lambda(n)g$ avec $\lambda(n) \in \mathbb{C}$ pour tout n premier avec N , alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = \alpha g$.*

Soit $f \in S_k^{\text{new}}(N, \chi) \setminus \{0\}$ telle que $T_n f = \lambda(n)f$ pour tout n premier avec N et où $\lambda(n) \in \mathbb{C}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(m, N) > 1$. Puisque T_m commute avec les opérateurs T_n , pour tout n , alors la forme $g := T_m f$ vérifie $T_n g = \lambda(n)g$ pour tout n premier avec N . D'après le théorème précédent, il existe $\lambda(m) \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda(m)f$. Une forme propre de $S_k^{\text{new}}(N, \chi)$ pour les opérateurs $(T_n)_{(n, N)=1}$ est donc une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke.

Notons $a_n(f)$ le n -ième coefficient de Fourier à l'infini d'une forme modulaire f quelconque. Autrement dit, on a

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n(f) e(nz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$ (on utilisera en fait assez peu cette notation par la suite). D'après l'équation (1.2.1), pour tout $f \in S_k(N, \chi)$ et tout $n \geq 1$, on a $a_1(T_n f) = a_n(f)$. Ainsi, si $T_n f = \lambda(n)f$ pour tout n , alors $a_n(f) = a_1(f)\lambda(n)$ et donc si $f \neq 0$, alors $a_1(f) \neq 0$.

On appelle forme primitive une forme propre de $S_k^{\text{new}}(N, \chi)$ pour tous les $(T_n)_{n \geq 1}$ telle que $a_1(f) = 1$. Ses coefficients de Fourier coïncident donc avec ses valeurs propres associées. Aussi, le théorème précédent assure que les formes primitives forment une base de $S_k^{\text{new}}(N, \chi)$.

D'une certaine façon, les formes primitives engendrent l'espace $S_k(N, \chi)$ tout entier. Les auteurs de [AL1] et [L1] établissent la somme directe suivante,

$$S_k(N, \chi) = \bigoplus_{\substack{c(\chi) \mid M \mid N \\ d \mid N/M}} B_d S_k^{\text{new}}(M, \chi).$$

Il s'agit même d'une décomposition en tant que module de Hecke i.e. les sous-espaces $B_d S_k^{\text{new}}(M, \chi)$ sont tous stables par les opérateurs $(T_n)_{(n, N)=1}$. On a même un isomorphisme de modules de Hecke entre $S_k^{\text{new}}(M, \chi)$ et $B_d S_k^{\text{new}}(M, \chi)$ pour tout $d \mid N/M$.

De plus, pour tout système de valeurs propres $(\lambda(n))_{(n, N)=1}$, notons $S_k(N, \chi, \lambda)$ l'ensemble des $f \in S_k(N, \chi)$ telles que $T_n f = \lambda(n)f$ pour tout n premier avec N . Alors, il existe un unique M tel que $c(\chi) \mid M \mid N$ et

$$S_k(N, \chi, \lambda) = \bigoplus_{d \mid N/M} B_d S_k^{\text{new}}(M, \chi, \lambda).$$

Autrement dit, si $f \in S_k(N, \chi, \lambda)$ alors il existe un unique M tel que $c(\chi) \mid M \mid N$ et une unique forme primitive $g \in S_k^{\text{new}}(M, \chi)$ telle que $T_n g = \lambda(n)g$ pour tout n premier avec N et

$$f(z) = \sum_{d \mid N/M} \alpha_d g(dz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$ et avec $\alpha_d \in \mathbb{C}$.

3 Quelques résultats de théorie multiplicative des nombres

Dans cette section, on propose un résumé des propriétés liées aux caractères de Dirichlet, aux caractères et résidus quadratiques ainsi qu'aux entiers sans facteur carré.

3.1 Caractères de Dirichlet

On appelle caractère de Dirichlet toute fonction $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ induite par un caractère linéaire du groupe des inversibles modulo un entier $N \geq 1$. Précisément, si

$$\tilde{\chi} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times \rightarrow \mathbb{C}^*$$

est un morphisme de groupes, alors il induit un caractère de Dirichlet χ défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$\chi(n) = \begin{cases} \tilde{\chi}(n [N]) & \text{si } (n, N) = 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où on note $n [N]$ la classe de n modulo N . Par convention, si $N = 1$ alors $\chi(n) = 1$ pour tout n .

Ainsi, χ est une fonction N -périodique et totalement multiplicative. De plus, on dit que χ est de niveau N . S'il existe $d \mid N$ et un caractère $\tilde{\chi}' : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^\times \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}' \circ p$ où p est la surjection canonique de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$ dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^\times$ (on dit que $\tilde{\chi}$ est induit par $\tilde{\chi}'$) alors on a l'égalité des caractères de Dirichlet suivantes :

$$\chi = \chi' \chi_0,$$

où χ_0 est le caractère principal modulo N/d *i.e.* le caractère de Dirichlet induit par le morphisme trivial de $\mathbb{Z}/(N/d)\mathbb{Z}^\times$ ou autrement dit, $\chi_0(n) = 1$ si $(n, N/d) = 1$ et $\chi_0(n) = 0$ sinon. En général, $\tilde{\chi}$ et $\tilde{\chi}'$ n'induisent donc pas le même caractère de Dirichlet mais si par exemple $d = N/p$, où p est un nombre premier tel que $p^2 \mid N$, alors $\chi = \chi'$.

Le plus souvent, lorsqu'aucune confusion n'est possible et que le niveau N de χ est précisé, on identifie χ et $\tilde{\chi}$ puisque ce dernier est l'unique caractère du groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$ induisant χ . On parle alors de caractère modulo N . Par ailleurs, on appelle conducteur de χ le plus petit entier positif $d \mid N$ tel qu'il existe un caractère χ' modulo d induisant χ (en tant que caractère de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$). Un caractère modulo N est dit primitif s'il est de conducteur N .

Le plus souvent, on notera

$$\sum_{\chi [N]}$$

une somme portant sur tous les caractères modulo N . De tels caractères sont au nombre de $\varphi(N) = |\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times|$, l'indicatrice d'Euler. On rappelle aussi la relation d'orthogonalité suivante, si a et b sont des entiers premiers avec N , alors

$$\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi [N]} \chi(a) \overline{\chi}(b) = \delta_n(a - b)$$

où $\delta_n(x) = 1$ si $x = 0 [N]$ et $\delta_n(x) = 0$ sinon.

3.2 Caractères quadratiques

Parmi les caractères de Dirichlet que l'on rencontrera au cours cette thèse, les caractères quadratiques prennent une place particulièrement importante. On dit qu'un caractère χ modulo N est quadratique s'il est d'ordre deux en tant que caractère de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times$. De manière équivalente, χ (défini sur \mathbb{Z}) est quadratique si son image dans \mathbb{C} vaut $\{-1, 0, 1\}$.

On a une description assez explicite des caractères quadratiques que l'on tire de [MV2, Part 9.3]. Tout d'abord, écrivons la décomposition de N en produit de facteurs premiers *i.e.* $N = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ où les p_i , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, sont des entiers premiers distincts. Le théorème des restes chinois assure que χ s'écrit de manière unique sous la forme $\chi = \chi_1 \dots \chi_r$ où les χ_i , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, sont des caractères modulo $p_i^{n_i}$ et que de plus, χ est quadratique si et seulement si les χ_i sont réels (quadratiques ou principaux) avec au moins l'un d'entre eux quadratique.

On peut donc se ramener au cas où χ est un caractère quadratique primitif modulo $N = p^n$, une puissance de nombre premier. Si p est impair alors on peut montrer que nécessairement $n = 1$ et χ est le symbole de Legendre, à savoir, pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$\chi(a) = \left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \mid a, \\ 1 & \text{s'il existe un entier } b \neq 0 [p] \text{ tel que } a = b^2 [p], \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $p = 2$ alors $n = 2$ ou 3 . Les caractères de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}^\times$ sont χ_0 (le caractère principal) et χ_4 l'unique caractère primitif modulo 4 défini, pour $2 \nmid a$, par

$$\chi_4(a) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 [4], \\ -1 & \text{si } a = 3 [4]. \end{cases}$$

Ils induisent alors deux caractères modulo 8 qu'on note encore χ_0 et χ_4 . Il existe exactement deux autres caractères modulo 8 (*a fortiori* primitifs) qui sont χ_8 et $\chi_8\chi_4$, où χ_8 est défini, pour $2 \nmid a$, par

$$\chi_8(a) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = \pm 1 [8], \\ -1 & \text{si } a = \pm 3 [8]. \end{cases}$$

Ainsi, si χ est un caractère quadratique primitif de niveau N , alors $N = 2^n p_1 \dots p_r$ avec $n \in \{0, 2, 3\}$ et où les p_i , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, sont des nombres premiers impairs et distincts. De plus χ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\chi = \prod_{p|N} \chi_p$$

où $\chi_p = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ si p est impair, $\chi_2 = \chi_4$ (modulo 4) si $n = 2$ et $\chi_2 = \chi_8$ ou $\chi_8\chi_4$ si $n = 3$.

Une façon très commode de décrire les caractères quadratiques primitifs est la suivante. On appelle discriminant fondamental tout entier D tel que l'une des deux assertions suivantes est vraie :

1. $D = 1 [4]$ et D est sans facteur carré.
2. $D = 0 [4]$, $D/4 = 2, 3 [4]$ et $D/4$ est sans facteur carré.

On définit alors le symbole de Kronecker $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$, pour tout discriminant fondamental D , par

- $\left(\frac{D}{p}\right)$ correspond au symbole de Legendre pour p un nombre premier impair.
- $\left(\frac{D}{2}\right) = 0$ si $2 \mid D$ et $\left(\frac{D}{2}\right) = \chi_8(D)$ sinon.
- $\left(\frac{D}{-1}\right) = 1$ si $D > 0$ et $\left(\frac{D}{-1}\right) = -1$ si $D < 0$.
- $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ est une fonction totalement multiplicative avec par convention $\left(\frac{1}{0}\right) = 1$.

D'après [MV2, Theorem 9.13], $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ est un caractère quadratique primitif modulo $|D|$. Il est pair si et seulement si $D > 0$. Inversement, pour tout caractère quadratique primitif χ , il existe un unique discriminant fondamental D tel que $\chi = \left(\frac{D}{\cdot}\right)$. Dans ce cas $|D|$ est le niveau de χ et donc D est entièrement déterminé par la parité de χ .

De manière plus précise, si χ est de niveau q , un entier impair sans facteur carré, alors $\chi = \left(\frac{\varepsilon q}{\cdot}\right)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $q = \varepsilon [4]$. En particulier, un tel caractère est unique et coïncide en fait avec le symbole de Jacobi usuel $\left(\frac{\cdot}{q}\right)$ d'après la loi de réciprocité quadratique. Si χ est de niveau $4q$ alors de la même façon, il est unique et vaut $\left(\frac{-\varepsilon 4q}{\cdot}\right)$. En revanche, il existe deux caractères quadratiques primitifs modulo $8q$.

Enfin, pour faire le lien avec les notations précédentes, on a $\chi_4 = \left(\frac{-4}{\cdot}\right)$, $\chi_8 = \left(\frac{8}{\cdot}\right)$ et $\chi_8 \chi_4 = \left(\frac{-8}{\cdot}\right)$.

3.3 Symbole de Jacobi étendu et racine carré dans \mathbb{C}

On définit ici les notations essentielles pour parler de formes modulaires de poids demi-entier. Tout abord, on étend pour tous entiers c et d , avec d impair, la définition de $\left(\frac{c}{d}\right)$. Si $d > 0$ alors il s'agit du symbole de Jacobi usuel avec la convention $\left(\frac{c}{1}\right) = 1$. Si $d < 0$ alors on pose

$$\left(\frac{c}{d}\right) = \begin{cases} \left(\frac{c}{|d|}\right) & \text{si } c \geq 0, \\ -\left(\frac{c}{|d|}\right) & \text{si } c < 0, \end{cases}$$

et pour finir, $\left(\frac{0}{\pm 1}\right) = 1$. Notons que cette notation est cohérente avec celle pour le caractère quadratique associé à un discriminant fondamental.

Par ailleurs, toujours pour un entier d impair, on note ε_d la somme de Gauss normalisée :

$$\varepsilon_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{x \pmod{d}} e\left(\frac{x^2}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 [4], \\ i & \text{si } d = 3 [4]. \end{cases}$$

Une preuve de l'égalité précédente peut se trouver par exemple dans [I3, Lemma 4.8].

Pour finir, rappelons que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. On note alors $\log z = \log \rho + i\theta$ la détermination principale du logarithme de z . C'est cette dernière qu'on utilise pour définir les puissances non-entières de z . Précisément, si $q \in \mathbb{C}$, alors on pose

$$z^q = e^{q \log z} = \rho^q e^{iq\theta}.$$

En particulier, pour $q \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ un demi-entier, on a $z^q = (\sqrt{z})^{2q}$, où on note $\sqrt{z} = z^{1/2}$. On utilisera souvent cette notation pour extraire des racines carrées dans \mathbb{C} . Elle prolonge la notation usuelle \sqrt{x} pour un nombre réel positif x . De plus, elle vérifie les relations de multiplicativité élémentaires suivantes.

Lemme 1.3.1. *On note \mathcal{H}^- l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Im } z < 0$. Alors,*

1. $(z \in \mathcal{H} \cup \mathbb{R}^* \text{ et } z' \in \mathcal{H}^-) \Rightarrow \sqrt{zz'} = \sqrt{z}\sqrt{z'}$,
2. $(z \in \mathcal{H} \cup \mathbb{R}^* \text{ et } z' \in \mathcal{H}) \Rightarrow \sqrt{z/z'} = \sqrt{z}/\sqrt{z'}$,
3. $(z \in \mathcal{H}^- \cup \mathbb{R}^* \text{ et } z' \in \mathcal{H}^-) \Rightarrow \sqrt{z/z'} = \sqrt{z}/\sqrt{z'}$.

3.4 Résidus quadratiques

On termine cette section en rappelant quelques résultats sur les résidus quadratiques *i.e.* les carrés modulo un entier N . Ces rappels seront utiles au chapitre 3, ce qui, comme on le verra, permet de nous restreindre au cas des carrés inversibles modulo $N = p^n$, avec p un nombre premier impair et n un entier strictement positif.

Considérons le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^\times &\rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^\times \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Premièrement, si $n = 1$ alors, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ étant un corps, $\text{Ker } \phi_1 = \{\pm 1\}$. De ce fait, chaque carré inversible $a = b^2 \in \text{Im } \phi_1$ possède deux racines carrées modulo p , c'est-à-dire deux antécédents par ϕ_1 , qui sont b et $-b$.

Ceci se généralise à tout $n \geq 1$ de la manière suivante. Supposons que $\text{Ker } \phi_n = \{\pm 1\}$. Alors, la congruence $x^2 = 1 [p^{n+1}]$ implique que $x^2 = 1 [p^n]$ et donc que $x = \pm 1 + kp^n [p^{n+1}]$ avec $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Ainsi, $x^2 = 1 \pm 2kp^n [p^{n+1}]$, ce qui donne $k = 0$. D'où, $\text{Ker } \phi_{n+1} = \{\pm 1\}$ et par récurrence, on a $\text{Ker } \phi_n = \{\pm 1\}$ pour tout $n \geq 1$.

En particulier, il y a $\varphi(q)/2 = p^{n-1}(p-1)/2$ carrés inversibles modulo $q = p^n$. Un tel élément possède exactement deux racines carrées. Parmi leurs représentants dans l'intervalle $\llbracket -\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2} \rrbracket$, l'un est dans $\llbracket 1, \frac{q-1}{2} \rrbracket$ tandis que l'autre est dans $\llbracket -\frac{q-1}{2}, -1 \rrbracket$.

En outre, on note \mathbb{Z}_p l'anneau des entiers p -adiques (et \mathbb{Q}_p son corps des fractions). Le lemme de Hensel montre que si $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ est un carré modulo p alors c'est un carré dans \mathbb{Z}_p . Ainsi, $a \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^\times$ est un carré modulo p^n si et seulement si c'est un carré modulo p . C'est pour cela qu'on écrira souvent cette condition $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$.

3.5 Entiers sans facteur carré

Au cours de cette thèse, on rencontrera souvent la notion d'entier sans facteur carré. Il s'agit des éléments (qu'on notera souvent) $t \in \mathbb{Z}$ tels que $n^2 \nmid t$ pour tout entier $n \neq \pm 1$. De manière équivalente, la décomposition de t en produit de facteurs premiers est de la forme $t = \pm p_1 \dots p_r$ où les p_i , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, sont distincts et où, par convention, le produit $p_1 \dots p_r = 1$ si $r = 0$. On note \mathbb{N}^\flat l'ensemble des entiers positifs sans facteur carré.

On utilisera régulièrement le résultat suivant qui est une simple conséquence du théorème fondamental de l'arithmétique.

Proposition 1.3.1. *Soit m un entier non-nul. Alors il existe un unique entier t sans facteur carré et un unique entier n tels que $m = tn^2$.*

Remarque 1.3.1. Les entiers t et n de la proposition précédente ne sont en général pas premiers entre eux. Ainsi, l'entier t ne doit pas être confondu avec le plus grand entier sans facteur carré divisant m (souvent nommé radical de m). Par commodité, on redéfinit le radical sans facteur carré de m comme étant t .

Pour finir, un des points clés de la démonstration du théorème principal du chapitre 3 est l'indépendance linéaire sur \mathbb{Q} des racines carrées d'éléments distincts de \mathbb{N}^b . On trouve diverses preuves de ce résultat dans la littérature. On peut, par exemple, aisément le déduire du résultat plus général issu de [B1]. On donne ici une preuve directe largement inspirée de [K3].

Proposition 1.3.2. *Soient t_1, \dots, t_r des éléments de \mathbb{N}^b distincts deux à deux. Alors la famille $(\sqrt{t_1}, \dots, \sqrt{t_r})$ est libre sur \mathbb{Q} .*

Preuve. Pour toute famille d'entiers $(t_n)_{n \geq 1}$ et pour toute partie $I \subset \mathbb{N}^*$, on pose $t_I = \prod_{i \in I} t_i$ avec par convention $t_\emptyset = 1$.

Quitte à considérer l'ensemble des nombres premiers p qui divisent au moins l'un des t_i , il est clair que la proposition est équivalente à montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour toute famille $(p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de nombres premiers distincts, la famille $(\sqrt{p_I})_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre sur \mathbb{Q} . Pour des raisons techniques, on va en fait montrer par récurrence sur $n \geq 1$ la proposition suivante un peu plus générale : pour toute famille $(t_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ d'entiers > 1 premiers entre eux deux à deux et sans facteur carré, la famille $(\sqrt{t_I})_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre sur \mathbb{Q} .

Pour $n = 1$, on sait que $(1, \sqrt{t_1})$ est libre car $\sqrt{t_1} \notin \mathbb{Q}$ pour tout $t_1 \in \mathbb{N}^b \setminus \{1\}$ (on peut voir cela comme une conséquence de la proposition 1.3.1 par exemple).

Soit $n \geq 2$. On suppose donc que pour toute famille $(t_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ d'entiers > 1 premiers entre eux deux à deux et sans facteur carré, $(\sqrt{t_I})_{I \subset \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est libre. Fixons n entiers de la sorte qu'on note encore $(t_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. S'il existe des rationnels $\alpha_I \in \mathbb{Q}$, pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, tels que

$$\sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} \alpha_I \sqrt{t_I} = 0$$

alors on réécrit cette égalité sous la forme $a + b\sqrt{t_n} = 0$ avec $a = \sum_{I \subset \llbracket 1, n-1 \rrbracket} \alpha_I \sqrt{t_I}$ et

$b = \sum_{I \subset \llbracket 1, n-1 \rrbracket} \alpha_{I \cup \{n\}} \sqrt{t_I}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il suffit de vérifier que $a = b = 0$

pour en déduire que $\alpha_I = 0$ pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrons donc que $b = 0$. Par l'absurde, si $b \neq 0$ alors on a $\sqrt{t_n} = -a/b \in K_{n-1}$ où pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $K_r = \mathbb{Q}(\sqrt{t_1}, \dots, \sqrt{t_r})$ et $K_0 = \mathbb{Q}$. Or, puisqu'ici $n \geq 2$, on a $K_{n-1} = K_{n-2}(\sqrt{t_{n-1}})$ et donc on peut écrire $\sqrt{t_n} = c + d\sqrt{t_{n-1}}$ avec $c, d \in K_{n-2}$.

Ainsi, $t_n = c^2 + d^2 t_{n-1} + 2cd\sqrt{t_{n-1}}$. L'hypothèse de récurrence implique que $\sqrt{t_{n-1}} \notin K_{n-2}$ et donc que $cd = 0$. Si $d = 0$, alors $\sqrt{t_n} = \pm c \in K_{n-2}$ ce qui contredit l'hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(t_1, \dots, t_{n-2}, t_n)$. Si $c = 0$, alors $\sqrt{t_n t_{n-1}} = \pm d t_{n-1} \in K_{n-2}$ ce qui contredit l'hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(t_1, \dots, t_{n-2}, t_n t_{n-1})$. Dans tous les cas, on obtient une absurdité donc $b = 0$, ce qui implique immédiatement que $a = 0$. □

Chapitre 2

Formes modulaires de poids demi-entier

Dans ce chapitre nous allons introduire les formes modulaires de poids demi-entier et étudier certains résultats récents les concernant. Néanmoins, on supposera connus les résultats classiques sur les formes modulaire de poids entier, des rappels ayant été fait au chapitre précédent. Une bonne introduction sur les formes de poids demi-entier peut d'ailleurs être trouvée dans [K4], [O] ou encore [S1].

1 Généralités

1.1 Un objet ancien mais défini récemment

Étonnamment, les premières formes modulaires à apparaître furent de poids demi-entier avec notamment la fonction thêta de Jacobi [J1] définie pour $z \in \mathcal{H}$ par

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z).$$

Cependant, les relations de modularité (*i.e.* le rapport $\theta(\gamma z)/\theta(z)$ pour certaines matrices $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) de cette fonction et des autres séries thêta analogues furent un frein au développement d'une théorie riche comme celle que l'on connaît sur les espaces de formes de poids entier. En particulier, comme le fit remarquer Hecke (voir l'introduction de [GPS]), il est impossible d'appliquer la théorie des opérateurs qui portent son nom pour construire des formes de poids demi-entier dont les coefficients de Fourier sont multiplicatifs, de sorte que la fonction L associée possède un produit eulérien.

En fait, il aura même fallu attendre le début des années 70 dans [S1] pour voir apparaître la définition actuelle des formes de poids demi-entier, analogue à celle qu'on donne pour les formes de poids entier et qui, de ce fait, englobe des objets plus généraux que les séries thêta.

Cela est certainement dû au fait que le groupe qui agit « au-dessus » des séries thêta n'est pas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. En effet, si on pose pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ et $z \in \mathcal{H}$,

$$J(\gamma, z) = \theta(\gamma z)/\theta(z),$$

alors on peut montrer que $J(\gamma, z)^2 = \chi_4(d)(cz + d)$ où χ_4 est le caractère primitif modulo 4.

Le lemme suivant permet même d'expliciter laquelle des racines carrées de $\chi_4(d)(cz + d)$ est égale à $J(\gamma, z)$. Ce lemme utilise des notations définies dans la sous-section 3.3.

Lemme 2.1.1. [SS, Introduction] *Pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a*

$$J(\gamma, z) = \varepsilon_d^{-1} \left(\frac{c}{d} \right) \sqrt{cz + d}.$$

Ainsi, on est tenté de définir, comme dans le cas du poids entier, l'opérateur $|\frac{1}{2}\gamma$ par

$$f|_{\frac{1}{2}\gamma}(z) = J(\gamma, z)^{-1} f(\gamma z)$$

pour tout $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma \in \Gamma_0(4)$. On définirait alors les formes de poids 1/2 et de niveau 4 comme les fonctions holomorphes $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

1. $f|_{\frac{1}{2}\gamma} = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(4)$,
2. (holomorphie aux pointes) pour tout $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $f|_{\frac{1}{2}\sigma}$ admet un développement de Fourier sans termes négatifs *i.e.* est holomorphe à l'infini.

L'ennui c'est que l'application qui à γ associe $f \mapsto f|_{\frac{1}{2}\gamma}$ n'est pas une action (à droite) de groupe si on considère des $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Le point clé est alors de faire agir un groupe plus gros que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, à savoir une extension de ce dernier.

La définition suivante est donnée par Shimura dans [S1] et semble servir de référence dans de nombreux articles sur le sujet. On la retrouve par exemple dans [B3].

On rappelle qu'on note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ l'ensemble des matrices réelles 2×2 à déterminant strictement positif. Soit G l'ensemble des couples $\xi = (\gamma, \phi)$ avec $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ et $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\phi(z)^2 = t(\det \gamma)^{-1/2}(cz + d)$ pour $t = t_\xi$ de module 1 et indépendant de $z \in \mathcal{H}$.

G est muni de la loi de groupe suivante, pour tout $\xi = (\gamma, \phi)$ et $\xi' = (\gamma', \phi')$ dans G , on pose

$$\xi \xi' = (\gamma \gamma', \phi(\gamma' \cdot) \phi').$$

On a alors la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{U} \rightarrow G \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \rightarrow 1$$

où $\mathbb{U} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$. Le groupe $\Gamma_0(4)$ possède donc une section particulièrement importante donnée par

$$s_J : \gamma \mapsto (\gamma, J(\gamma, \cdot))$$

et donc pour tout N divisible par 4, on a un isomorphisme entre le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$ et son image par s_J que l'on note $\Delta_0(N)$.

On rappelle que si χ est un caractère modulo N , on définit naturellement sur $\Gamma_0(N)$ le caractère suivant, encore noté χ , par

$$\chi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \chi(d)$$

et en fait tout caractère de $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ est de cette forme. On peut de la même façon voir χ comme un caractère du groupe $\Delta_0(N)$ lorsque $4 \mid N$ en posant

$$\chi(\xi) = \chi(\gamma)$$

pour $\xi = (\gamma, \phi) \in \Delta_0(N)$.

Soit k un entier impair, on définit un nouvel opérateur « slash » pour le poids demi-entier $k/2$ par

$$f|_{\frac{k}{2}}\xi(z) = \phi(z)^{-k} f(\gamma z)$$

pour $\xi = (\gamma, \phi) \in G$ et $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$.

On vérifie que pour tout ξ et ξ' dans G , on a $(f|_{\frac{k}{2}}\xi)|_{\frac{k}{2}}\xi' = f|_{\frac{k}{2}}\xi\xi'$. On étend l'action de G en une action de $\mathbb{C}[G]$ par linéarité.

On peut alors faire la définition suivante.

Définition 2.1.1. Soit G défini comme précédemment, k un entier impair, N un entier divisible par 4 et χ un caractère modulo N . Une forme modulaire de poids $k/2$, de niveau N et de caractère χ est une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que

1. $f|_{\frac{k}{2}}\xi = \chi(\xi)f$ pour tout $\xi \in \Delta_0(N)$,
2. f est holomorphe aux pointes.

Si de plus,

3. f est cuspidale aux pointes,

alors on dit que f est une forme cuspidale.

On note $M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$) l'ensemble des formes modulaires (respectivement cuspidales) de poids $k/2$, de niveau N et de caractère χ . Si χ est le caractère principal modulo N alors on notera simplement $M_{\frac{k}{2}}(N)$ et $S_{\frac{k}{2}}(N)$ ces espaces.

Remarque 2.1.1. Comme $s_J(-I_2) = (-I_2, 1)$, la condition 1 impose que si $\chi(-1) \neq 1$ alors $M_{\frac{k}{2}}(N, \chi) = \{0\}$.

Expliquons en détail ce que signifient les points 2 et 3 dans la définition précédente. Pour chaque pointe \mathfrak{a} associée à l'espace quotient $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$, on fixe un élément $\xi_{\mathfrak{a}} = (\sigma_{\mathfrak{a}}, \phi_{\mathfrak{a}})$ de G tel que la matrice $\sigma_{\mathfrak{a}}$ vérifie

$$\sigma_{\mathfrak{a}}\infty = \mathfrak{a} \text{ et } \gamma_{\mathfrak{a}} := \sigma_{\mathfrak{a}}T\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \in \Gamma_0(N)$$

où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque ces conditions sont invariantes lorsqu'on multiplie la matrice par une constante, on peut toujours prendre $\sigma_{\mathfrak{a}}$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, il existe $t_{\mathfrak{a}}$ de module 1 tel que $\xi_{\mathfrak{a}}^{-1}s_J(\gamma_{\mathfrak{a}})\xi_{\mathfrak{a}} = (T, t_{\mathfrak{a}})$ et on a alors

$$t_{\mathfrak{a}}^{-k}f|_{\frac{k}{2}}\xi_{\mathfrak{a}}(z+1) = \left(f|_{\frac{k}{2}}\xi_{\mathfrak{a}}|_{\frac{k}{2}}(T, t_{\mathfrak{a}})\right)(z) = \chi(\gamma_{\mathfrak{a}})f|_{\frac{k}{2}}\xi_{\mathfrak{a}}(z).$$

En posant $e(r_{\mathfrak{a}}) = \chi(\gamma_{\mathfrak{a}})t_{\mathfrak{a}}^k$ avec $r_{\mathfrak{a}} \in [0, 1[$ et puisque $f|_{\frac{k}{2}}\xi_{\mathfrak{a}}$ est holomorphe sur \mathcal{H} , elle admet un développement de Fourier de la forme suivante :

$$f_{\mathfrak{a}}(z) := f|_{\frac{k}{2}}\xi_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)e((n+r_{\mathfrak{a}})z)$$

avec $\hat{f}_a(n) \in \mathbb{C}$ pour tout n . On dit alors que f est holomorphe en \mathfrak{a} si ce développement n'a pas de terme strictement négatif *i.e.*

$$f_a(z) = \sum_{n+r_a \geq 0} \hat{f}_a(n) e((n+r_a)z)$$

et on dit que f est cuspidale en \mathfrak{a} si l'inégalité dans l'indice de sommation est prise stricte.

Par exemple, lorsque $N = 4$ et donc χ est le caractère principal, on a la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Soit $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f|_{\frac{k}{2}}\xi = f$ pour tout $\xi \in \Delta_0(4)$. Alors $f \in M_{\frac{k}{2}}(4)$ si et seulement si on a des développements de Fourier aux pointes ∞ , 0 et $1/2$ de la forme*

$$\begin{aligned} f|_{\frac{k}{2}}\xi_\infty(z) &= \sum_{n \geq 0} \hat{f}_\infty(n) e(nz), \\ f|_{\frac{k}{2}}\xi_0(z) &= \sum_{n \geq 0} \hat{f}_0(n) e(nz), \\ f|_{\frac{k}{2}}\xi_{\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{n \geq 0} \hat{f}_{\frac{1}{2}}(n) e((n+r_{\frac{1}{2}})z) \end{aligned}$$

avec $e(r_{\frac{1}{2}}) = i^k$, $\xi_\infty = (I_2, 1)$, $\xi_0 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{-2iz} \right)$ et $\xi_{\frac{1}{2}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{2z+1} \right)$.

De plus, $f \in S_{\frac{k}{2}}(4)$ si et seulement si $\hat{f}_\infty(0) = \hat{f}_0(0) = 0$.

Remarque 2.1.2. Évidemment, toute forme $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ possède un développement de Fourier à l'infini de la forme

$$f(z) = f|_{\frac{k}{2}}\xi_\infty(z) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}_\infty(n) e(nz).$$

Pour prouver cette proposition, on va avoir recours au lemme suivant.

Lemme 2.1.2. *Soit $\xi = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \phi \right) \in G$ tel que $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$. On suppose que*

$$\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma_0(4).$$

Alors

$$\xi^{-1} s_J(\gamma) \xi = \left(T, \varepsilon_{d'}^{-1} \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right).$$

Preuve. Tout d'abord, il existe $t \in \mathbb{U}$ tel que $\phi(z) = t\sqrt{cz+d}$. Ainsi, l'inverse de ξ vaut

$$\xi^{-1} = \left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \frac{1}{t\sqrt{c\frac{dz-b}{-cz+a}+d}} \right) = \left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \frac{1}{t}\sqrt{-cz+a} \right)$$

car $ad - bc = 1$ et en utilisant le lemme 1.3.1.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} s_J(\gamma)\xi &= \left(\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}, \varepsilon_{d'}^{-1} \left(\frac{c'}{d'} \right) \sqrt{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} \phi(z) \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}, \varepsilon_{d'}^{-1} \left(\frac{c'}{d'} \right) \sqrt{\frac{(ac' + cd')z + bc' + dd'}{cz+d}} \phi(z) \right). \end{aligned}$$

Un calcul rapide montre que $c' = -c^2$ et $d' = 1+ac$. On en déduit alors que $ac' + cd' = c$ et $bc' + dd' = c + d$, ce qui permet d'appliquer le lemme 1.3.1 et d'obtenir

$$s_J(\gamma)\xi = \left(\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}, \varepsilon_{d'}^{-1} \left(\frac{c'}{d'} \right) t\sqrt{cz+c+d} \right).$$

Par conséquent, on a

$$\xi^{-1} s_J(\gamma)\xi = \left(T, \frac{1}{t} \sqrt{-c \frac{az+a+b}{cz+c+d} + a} \varepsilon_{d'}^{-1} \left(\frac{c'}{d'} \right) t\sqrt{cz+c+d} \right) = \left(T, \varepsilon_{d'}^{-1} \left(\frac{c'}{d'} \right) \right).$$

□

Preuve de la proposition 2.1.1. Le groupe $\Gamma_0(4)$ a trois pointes associées dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$: ∞ , 0 et $1/2$. Il suffit donc de calculer, avec le choix des $\xi_{\mathbf{a}}$ donnés à la fin de l'énoncé de la proposition, la valeur des $t_{\mathbf{a}}$ pour tout \mathbf{a} . Pour $\mathbf{a} = \infty$, il est clair que $t_{\infty} = 1$. Pour les autres pointes, on a

$$\gamma_0 = \sigma_0 T \sigma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_{\frac{1}{2}} = \sigma_{\frac{1}{2}} T \sigma_{\frac{1}{2}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le facteur $\varepsilon_{d'}^{-1} \left(\frac{c'}{d'} \right)$ du lemme 2.1.2 vaut respectivement 1 et i et cela correspond à la valeur de t_0 et $t_{\frac{1}{2}}$ d'après ce lemme.

□

Donnons à présent quelques exemples de formes de poids demi-entier.

Définition 2.1.2. Soit χ un caractère de Dirichlet. On pose

$$\theta_{\chi}(z) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e(n^2 z) & \text{si } \chi \text{ est pair,} \\ \sum_{n \geq 1} \chi(n) n e(n^2 z) & \text{si } \chi \text{ est impair,} \end{cases}$$

avec bien sûr $\theta_{\chi_0} = \theta$, défini au début de cette section (où χ_0 est le caractère de Dirichlet modulo 1).

Proposition 2.1.2. [O, Theorem 1.44] Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur r .

1. Si χ est pair alors $\theta_{\chi} \in M_{\frac{1}{2}}(4r^2, \chi)$.
2. Si χ est impair alors $\theta_{\chi} \in S_{\frac{3}{2}}(4r^2, \chi\chi_4)$.

En fait, Serre et Stark ([SS]) ont montré que tout élément de $M_{\frac{1}{2}}(N, \chi)$ s'écrit comme combinaison linéaire des séries $\theta_{\psi}(d \cdot)$ pour certains caractères ψ et certains entiers d . La question du poids $1/2$ est donc essentiellement réglée par l'étude des séries thêta. On verra qu'en poids supérieur d'autres types de formes peuvent apparaître.

1.2 Premières propriétés

On expose ici quelques propriétés bien connues des espaces de formes de poids demi-entier, analogues au cas des formes de poids entier. Tout d'abord, ce sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie et $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ est muni du produit hermitien suivant, dit de Petersson,

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H})} \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^{k/2} \frac{dx dy}{y^2} \quad (2.1.1)$$

pour f et g dans $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$.

La première question traitée est celle de la dimension. Il existe plusieurs méthodes pour calculer $\dim M_k(N, \chi)$ ou $\dim S_k(N, \chi)$ avec $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, comme par exemple le théorème de Riemann-Roch ou certaines formules de traces données par Shimura dans [S3]. On peut en déduire une certaine quantité de formules dont un aperçu est donné dans [O, sections 1.3.2 and 1.3.3] et [CO]. Le cas du niveau minimal ($N = 4$) est particulièrement explicite.

Proposition 2.1.3. [O, Theorem 1.49] *Soit k un entier impair, on a*

$$\dim M_{\frac{k}{2}}(4) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0, \\ \lfloor k/4 \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\dim S_{\frac{k}{2}}(4) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 4, \\ \lfloor k/4 \rfloor - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque alors qu'en particulier $S_{\frac{k}{2}}(4)$ est nul pour $k \leq 7$ et il n'existe, à un facteur multiplicatif près, qu'un élément de $S_{\frac{9}{2}}(4)$. Celui-ci peut être décrit de manière simple et la construction qui suit est tirée de [S1, Section 4]. On pose pour $z \in \mathcal{H}$

$$\eta(z) = e(z/24) \prod_{n \geq 1} (1 - e(nz))$$

la fonction êta de Dedekind. Alors, la fonction

$$z \mapsto \frac{\eta(2z)^{12}}{\theta(z)^3}$$

est bien définie sur \mathcal{H} et appartient à $S_{\frac{9}{2}}(4)$.

Par ailleurs, les séries de Cohen-Eisenstein sont des exemples de formes non-cuspidales de poids demi-entier dont on donne la construction suivante (voir [C3] pour plus de détails).

Soient ℓ et N des entiers naturels avec $\ell \geq 2$. Si $(-1)^\ell N = 2, 3$ [4] alors on pose $H(\ell, N) = 0$. Si $N = 0$ alors on pose

$$H(\ell, 0) = \zeta(1 - 2\ell)$$

la valeur spéciale de la fonction ζ de Riemann. Sinon, il existe un discriminant fondamental D et un entier n tels que $(-1)^\ell N = Dn^2$. On pose alors

$$H(\ell, N) = L(1 - \ell, \chi_D) \sum_{d|n} \mu(d) \chi_D(d) d^{\ell-1} \sigma_{2\ell-1}(n/d)$$

où $\chi_D = \left(\frac{D}{\cdot}\right)$ est le caractère quadratique associé à D de fonction L de Dirichlet $L(s, \chi_D)$ et $\sigma_{2\ell-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2\ell-1}$.

On définit alors la série de Cohen-Eisenstein de poids $\ell + 1/2$ par

$$H_{\ell+1/2}(z) = \sum_{N \geq 0} H(\ell, N) e(Nz) \quad (2.1.2)$$

pour $z \in \mathcal{H}$.

Théorème 2.1.1. [C3, Theorem 3.1] *Soit $\ell \geq 2$, alors*

$$H_{\ell+1/2} \in M_{\ell+1/2}(4).$$

L'autre aspect important des formes modulaires est leurs transformées de Mellin *i.e.* leurs fonctions L associées. Pour le reste de cette partie on va fixer $N > 1$ un entier divisible par 4 et χ un caractère modulo N . On fixe aussi k un entier impair et $f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$. Pour toute pointe \mathfrak{a} de $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$, on fixe $\xi_{\mathfrak{a}} = (\sigma_{\mathfrak{a}}, \phi_{\mathfrak{a}}) \in G$ et $r_{\mathfrak{a}} \in [0, 1[$ comme précédemment, de sorte que le développement en série de Fourier de f en \mathfrak{a} s'écrive

$$f_{\mathfrak{a}}(z) := f|_{\frac{k}{2}} \xi_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{n+r_{\mathfrak{a}} > 0} \hat{f}_{\mathfrak{a}}(n) e((n+r_{\mathfrak{a}})z). \quad (2.1.3)$$

Puisque l'on n'a *a priori* aucune estimation sur les coefficients $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)$, on va d'abord remonter le lemme classique suivant puis passer à l'étude de la fonction L associée à la transformée de Rankin-Selberg de f .

Lemme 2.1.3. *En reprenant les notations ci-dessus, on a*

$$|\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)| \ll_f n^{\frac{k}{4}}$$

pour tout entier n .

Preuve. Pour tout entier n et tout $y > 0$, on a

$$\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n) = \int_0^1 f_{\mathfrak{a}}(z) e(-(n+r_{\mathfrak{a}})z) dx$$

avec $z = x + iy$. Ainsi, $|\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)| \ll_{f,\varepsilon} e^{\varepsilon n}$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'après (2.1.3), on en déduit que

$$|f_{\mathfrak{a}}(z)| \ll_f e^{-Ay} \quad (2.1.4)$$

avec $A = \begin{cases} 2\pi r_{\mathfrak{a}} & \text{si } r_{\mathfrak{a}} > 0, \\ 2\pi & \text{sinon.} \end{cases}$

À présent, remarquons que la fonction $\varphi(z) := |f_{\mathfrak{a}}(z)| y^{\frac{k}{4}} = |f(\sigma_{\mathfrak{a}} z)| (\text{Im } \sigma_{\mathfrak{a}} z)^{\frac{k}{4}}$ est $\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(N) \sigma_{\mathfrak{a}}$ -périodique. Si D_N est un domaine fondamental de $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$ alors $\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} D_N$ en est un pour $\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(N) \sigma_{\mathfrak{a}} \backslash \mathcal{H}$. Le fait que (2.1.4) soit vraie pour toute pointe montre que φ est bornée au voisinage de toute les pointes de $\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} D_N$ et qu'elle est donc bornée sur \mathcal{H} . Ainsi, pour tout $y > 0$,

$$|f_{\mathfrak{a}}(n)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_{\mathfrak{a}}(x + iy)| e(2\pi(n+r_{\mathfrak{a}})y) \ll_f y^{-\frac{k}{4}} e(2\pi(n+r_{\mathfrak{a}})y)$$

ce qui, en prenant $y = 1/n$, permet de conclure. □

Soit \mathfrak{a} une pointe de $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$. On définit sa série d'Eisenstein associée par

$$E_{\mathfrak{a}}(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}} \backslash \Gamma_0(N)} (\text{Im } \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \gamma z)^s \quad (2.1.5)$$

pour $z \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbb{C}$. On rappelle que $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ est le stabilisateur de \mathfrak{a} sous l'action de $\Gamma_0(N)$. En particulier, on a

$$\Gamma_{\infty} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{a}} \Gamma_{\infty} \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}.$$

D'après [12, Théorèmes 6.9 et 6.10, Proposition 6.13], la série $E_{\mathfrak{a}}(\cdot, s)$ converge pour $\text{Re } s > 1$ et admet un prolongement méromorphe sur \mathbb{C} . Dans le demi-plan $\text{Re } s \geq 1/2$, ses pôles se situent uniquement dans $]1/2, 1]$ et sont en nombre fini. De plus, la série possède un pôle en $s = 1$ dont le résidu vaut

$$\text{Res}_{s=1} E_{\mathfrak{a}}(z, s) = \text{Vol}(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})^{-1}.$$

Proposition 2.1.4. *Pour $s \in \mathbb{C}$, on pose lorsque la série converge*

$$R(s, f_{\mathfrak{a}} \times \bar{f}_{\mathfrak{a}}) = (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n+r_{\mathfrak{a}} > 0} |\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)|^2 (n+r_{\mathfrak{a}})^{-s}. \quad (2.1.6)$$

Alors on a

$$R(s + k/2 - 1, f_{\mathfrak{a}} \times \bar{f}_{\mathfrak{a}}) = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}} |f(z)|^2 y^{k/2} E_{\mathfrak{a}}(z, s) \frac{dx dy}{y^2}.$$

En particulier, $R(s, f_{\mathfrak{a}} \times \bar{f}_{\mathfrak{a}})$ converge absolument pour $\text{Re } s > k/2$ et admet un prolongement méromorphe sur \mathbb{C} . De plus,

$$\text{Res}_{s=k/2} R(s, f_{\mathfrak{a}} \times \bar{f}_{\mathfrak{a}}) = \langle f, f \rangle.$$

Preuve. Le calcul est assez classique, toutes les interversions de sommes et d'intégrales se justifient en prenant s réel et en invoquant le lemme 2.1.3.

D'une part, on a pour $\text{Re } s > 1$

$$(4\pi)^{-s} \Gamma(s) (n+r_{\mathfrak{a}})^{-s} = \int_0^{+\infty} e^{-4\pi(n+r_{\mathfrak{a}})y} y^s \frac{dy}{y}$$

donc en sommant sur les $n+r_{\mathfrak{a}} > 0$,

$$\begin{aligned} R(s + k/2 - 1, f_{\mathfrak{a}} \times \bar{f}_{\mathfrak{a}}) &= \int_0^{+\infty} \sum_{n+r_{\mathfrak{a}} > 0} |\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)|^2 e^{-4\pi(n+r_{\mathfrak{a}})y} y^{s+k/2} \frac{dy}{y^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n,m} \hat{f}_{\mathfrak{a}}(n) \overline{\hat{f}_{\mathfrak{a}}(m)} e^{-2\pi(n+m+2r_{\mathfrak{a}})y} \int_0^1 e((n-m)x) dx y^{s+k/2} \frac{dy}{y^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 |f_{\mathfrak{a}}(z)|^2 y^{s+k/2} \frac{dx dy}{y^2} \end{aligned}$$

avec $z = x + iy$ dans l'intégrale.

Puisque la fonction intégrée est Γ_∞ -périodique et que $z \mapsto |f_a(z)|^2 y^{k/2}$ est $\sigma_a^{-1}\Gamma_0(N)\sigma_a$ -périodique, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^1 |f_a(z)|^2 y^{s+k/2} \frac{dx dy}{y^2} &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \sigma_a^{-1}\Gamma_0(N)\sigma_a} \int_{D_N^a} |f_a(\gamma z)|^2 (\operatorname{Im} \gamma z)^{s+k/2} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{D_N^a} |f_a(z)|^2 y^{k/2} E_a(\sigma_a z, s) \frac{dx dy}{y^2} \end{aligned}$$

où D_N^a est un domaine fondamental de $\sigma_a^{-1}\Gamma_0(N)\sigma_a \setminus \mathcal{H}$.

On remarque alors que $|f_a(z)|^2 y^{k/2} = |f(\sigma_a z)|^2 (\operatorname{Im} \sigma_a z)^{k/2}$ et on obtient le résultat voulu. L'intégrale converge bien pour $\operatorname{Re} s > 1$ car f décroît exponentiellement à l'infini et la série d'Eisenstein croît polynomialement. \square

On peut alors déduire de cela une estimation plus précise sur les coefficients de Fourier de f que l'on va déduire de l'énoncé suivant, plus général.

Proposition 2.1.5. *Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs tels que la série de Dirichlet*

$$L(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

ait comme abscisse de convergence $\sigma_c = 1$. On suppose de plus qu'il existe $\sigma_1 < 1$ tel que L admet un prolongement méromorphe dans un voisinage de $\operatorname{Re} s \geq \sigma_1$ avec un unique pôle en $s = 1$ et que pour $t \in \mathbb{R}$ et $s = \sigma_1 + it$, on a

$$|L(s)| \ll 1 + |t|^A$$

où A est une constante strictement positive.

Alors on a

$$\sum_{n \leq x} a_n \sim cx \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

où $c = \operatorname{Res}_{s=1} L(s)$.

Preuve. On va en fait déduire ce résultat du théorème taubérien d'Hardy-Littlewood dont on donne une démonstration rapide issue de [K1].

Soit $r \in]0, 1[$. La fonction $t \mapsto r^t$ est C^∞ à décroissance rapide sur $]0, +\infty[$ donc sa transformée de Mellin

$$s \mapsto \int_0^{+\infty} r^t t^s \frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(s)}{(\log(1/r))^s}$$

est bien définie pour $\operatorname{Re} s > 0$ et est à décroissance rapide sur les bandes verticales.

Ainsi, en utilisant la transformée de Mellin inverse, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} a_n r^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} L(s) \frac{\Gamma(s)}{(\log(1/r))^s} ds \tag{2.1.7}$$

pour tout $c > 1$ puisque $L(s)$ est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 0$.

Par ailleurs, la croissance polynomiale de L sur la bande $\operatorname{Re} s = \sigma_1$ et le principe de convexité de Phragmén-Lindelöf (voir par exemple [G2, Théorème 8.2.1]) montrent que pour tout $\sigma \in [\sigma_1, 1 + \varepsilon]$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geq 1$, on a

$$|L(\sigma + it)| \ll |t|^{A \max\left(\frac{1-\sigma}{1-\sigma_1}, 0\right) + \varepsilon}.$$

On peut donc décaler le contour d'intégration dans (2.1.7) en $c = \sigma_0 = \max(\sigma_1, \varepsilon)$ (avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit) car l'intégrale est absolument convergente. Le théorème des résidus donne alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n r^n &= \frac{c}{-\log r} + \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma_0)} L(s) \frac{\Gamma(s)}{(\log(1/r))^s} ds \\ &= \frac{c}{1-r} + O\left(\frac{1}{(1-r)^{\sigma_0}}\right) \end{aligned}$$

quand $r \rightarrow 1$. Notons à présent \mathcal{S} l'ensemble des fonctions g continues par morceaux sur $]0, 1[$ telles que

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_{n \geq 1} a_n r^n g(r^n) = c \int_0^1 g(t) dt.$$

D'après ce qui précède, les fonctions $g(t) = 1$ et même $g(t) = t^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à \mathcal{S} . Par linéarité, les fonctions polynomiales appartiennent à \mathcal{S} et la positivité des a_n ainsi que le théorème de Stone-Weierstrass impliquent que \mathcal{S} contient toutes les fonctions continues par morceaux. En particulier, en posant $g(t) = \frac{1}{t}$ pour $1/e \leq t < 1$ et $g(t) = 0$ sinon, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n &= \sum_{n \geq 1} a_n r^n g(r^n) \quad \text{avec } r = e^{-1/x} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{1-r} \int_{1/e}^1 \frac{dt}{t} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} cx. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.1. *Soit $x > 0$, alors*

$$\sum_{n \leq x} |\hat{f}_a(n)|^2 \sim c_f x^{k/2} \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

et où $c_f = \frac{(4\pi)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \langle f, f \rangle$.

Preuve. Soit $y \in]\lfloor x \rfloor + r_a, \lfloor x \rfloor + 1 + r_a[$. D'après la formule de Perron pour les séries de Dirichlet généralisées ([V, page 9]), on a

$$\sum_{n \leq x} |\hat{f}_a(n)|^2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} D(s + k/2 - 1, f_a \times \bar{f}_a) y^s \frac{ds}{s}$$

pour $\sigma > k/2$ et avec $D(s, f_a \times \bar{f}_a) = \sum_{n+r_a > 0} |\hat{f}_a(n)|^2 (n+r_a)^{-(s+k/2-1)}$.

On voit ainsi que la propriété précédente reste vraie en remplaçant $L(s)$ par $D(s, f_a \times \bar{f}_a)$ si cette dernière croît polynomialement sur les bandes verticales. Cette dernière propriété découle de l'équation fonctionnelle vérifiée par $D(s, f_a \times \bar{f}_a)$. En effet, si on note $\mathcal{D}(s)$ le vecteur des $D(s, f_a \times \bar{f}_a)$ où \mathbf{a} décrit toutes les pointes associées à $\Gamma_0(N)$, alors d'après la proposition 2.1.4 et [12, Theorem 6.5], \mathcal{D} vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$\mathcal{D}(s) = \Phi(s) \mathcal{D}(1-s)$$

où $\Phi(s)$ est une matrice ne dépendant que de s et N .

Dans le cas du groupe modulaire, la matrice $\Phi(s)$ a été calculée explicitement [H] et on sait qu'elle croît polynomialement dans les bandes critiques. On en déduit donc la propriété voulue par le principe de Phragmén-Lindelöf.

On a ainsi montré que

$$\sum_{n \leq x} |\hat{f}_a(n)|^2 \sim c_f x^{k/2}$$

où, d'après la proposition 2.1.4, c_f est bien la constante donnée dans l'énoncé du corollaire. \square

Bien sûr, la borne $|\hat{f}_\infty(n)| \ll n^{k/4}$ est loin d'être optimale et de meilleures estimations des coefficients sont connues. Citons le très célèbre résultat d'Iwaniec, qui a l'avantage d'être valable pour tout niveau N .

Théorème 2.1.2. [I1, Theoreme 1] *Soit $k \geq 5$ un entier impair, N un entier naturel divisible par 4 et $f \in S_{\frac{k}{2}}(N)$. Alors, pour tout entier t sans facteur carré*

$$|\hat{f}_\infty(t)| \ll_{f,\varepsilon} t^{k/4-2/7+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

On va maintenant terminer cette sous-section en établissant l'équation fonctionnelle des fonctions L associées à f et f_0 . Ces dernières sont définies par

$$L(s, f_a) := \sum_{n \geq 1} \hat{f}_a(n) n^{-(s+k/4-1/2)}$$

où $\mathbf{a} \in \{\infty, 0\}$. La convergence absolue de cette série pour $\text{Re } s > 1$ est assurée par le corollaire 2.1.1. Avant d'énoncer l'équation fonctionnelle, il est commode de fixer une convention pour f_a qui dépend du choix de la matrice ξ_a . Ces conventions seront toujours valables par la suite. D'une part, $f_\infty = f$ et d'autre part

$$f_0 = f|_{\frac{k}{2}} W_N$$

où $W_N = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}, N^{1/4} \sqrt{-iz} \right)$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.1.3. *Les fonctions $L(s, f_a)$ pour $\mathbf{a} \in \{\infty, 0\}$ se prolongent en des fonctions entières et pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$\Lambda(s, f) := N^{s/2} \Gamma_{\frac{k}{2}}(s) L(s, f) = \Lambda(1-s, f_0)$$

où $\Gamma_{\frac{k}{2}}(s) := (2\pi)^{-(s+k/4-1/2)} \Gamma(s+k/4-1/2)$.

Preuve. Pour $\text{Re } s > 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} f(iy) y^{s+k/4-1/2} \frac{dy}{y} = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e^{-2\pi n y} y^{s+k/4-1/2} \frac{dy}{y} \quad (2.1.8)$$

$$= \Gamma_{\frac{k}{2}}(s) L(s, f) \quad (2.1.9)$$

en permutant somme et intégrale en faisant le changement de variable $y' = 2\pi ny$. Puisque f est cuspidale, l'intégral dans le membre de gauche converge en l'infini pour tout $s \in \mathbb{C}$ et de même en $y = 0$ car $|f_0(z)| = N^{-\frac{k}{4}}|z|^{-\frac{k}{2}}|f(-1/Nz)|$ décroît exponentiellement quand $\text{Im}z \rightarrow +\infty$ d'après (2.1.4).

On obtient ainsi le prolongement analytique de $\Lambda(s, f)$ (la dérivation sous le signe intégrale étant assurée par l'argument précédent pour s réel). De plus, un changement de variable montre que

$$\begin{aligned}\Lambda(s, f) &= N^{-s/2+1/2} \int_0^{+\infty} f(i/Ny)(\sqrt{Ny})^{-\frac{k}{2}} y^{-s+k/4+1/2} \frac{dy}{y} \\ &= N^{\frac{1-s}{2}} \int_0^{+\infty} f_0(iy) y^{1-s+k/4-1/2} \frac{dy}{y} \\ &= \Lambda(1-s, f_0)\end{aligned}$$

d'après le calcul précédent en remplaçant f par f_0 . □

1.3 Opérateurs de Hecke

Tout comme pour le poids entier, on définit les opérateurs de Hecke sur $M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ en faisant agir une matrice (vue comme élément de G) de déterminant > 1 et en moyennant sur le groupe modulaire. Précisément, si $m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\alpha_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \text{ et } \xi_m = (\alpha_m, m^{1/4}).$$

Il existe alors une décomposition finie en orbites de $\Delta_0(N)\xi_m\Delta_0(N)$ modulo l'action à gauche de $\Delta_0(N)$ sous la forme

$$\Delta_0(N)\xi_m\Delta_0(N) = \bigsqcup_i \Delta_0(N)\xi_{m,i} \tag{2.1.10}$$

avec $\xi_{m,i} = \left(\begin{pmatrix} a_{m,i} & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}, \star \right) \in G$.

On peut ainsi définir l'opérateur T_m pour $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ par

$$T_m f = m^{k/4-1} \sum_i \chi(a_{m,i}) f|_{\frac{k}{2}} \xi_{m,i}$$

et ceci est indépendant du choix des représentants de $\Delta_0(N)\backslash\Delta_0(N)\xi_m\Delta_0(N)$. Bien sûr, cette définition dépend aussi du choix de N , k et χ mais, sauf en cas de potentielle ambiguïté, on gardera la notation allégée T_m . Dans le cas contraire, on notera plutôt $T_m^{\frac{k}{2}, N, \chi}$.

Les premières propriétés sont les suivantes.

Proposition 2.1.6. *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :*

1. $T_m \left(M_{\frac{k}{2}}(N, \chi) \right) \subset M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ et $T_m \left(S_{\frac{k}{2}}(N, \chi) \right) \subset S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$,
2. si $(m, n) = 1$ alors $T_m T_n = T_{mn}$,

3. si m n'est pas un carré alors $T_m = 0$.

Preuve. Si $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ (respectivement $f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$) alors $T_m f$ est bien $(\chi, \Delta_0(N))$ -invariant par définition. De plus, pour tout $\eta = (\sigma, \phi) \in G$ tel que $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$, $f|_{\frac{k}{2}} \eta$ est holomorphe (respectivement cuspidale) en l'infini donc $T_m f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ (respectivement $T_m f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$).

Le point 2 se déduit du fait que d'après [S1, Proposition 1.6], pour $(m, n) = 1$, on a

$$\Delta_0(N)\xi_m\xi_n\Delta_0(N) = \Delta_0(N)\xi_m\Delta_0(N) \cdot \Delta_0(N)\xi_n\Delta_0(N).$$

Pour le point 3, il suffit de remarquer que pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ tel que $m \mid b$ (ce qui existe dès que $(d, mN) = 1$), on a la relation suivante :

$$\xi_m s_J(\gamma) \xi_m^{-1} = \left(\begin{pmatrix} a & b/m \\ mc & d \end{pmatrix}, J(\gamma, mz) \right) = s_J(\alpha_m \gamma \alpha_m^{-1}) \cdot \left(1, \left(\frac{m}{d} \right) \right). \quad (2.1.11)$$

Ainsi, pour tout $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$, $T_m f = \left(\frac{m}{d} \right) T_m f$ donc si m n'est pas un carré, il existe un d tel que $\left(\frac{m}{d} \right) = -1$ d'où $T_m f = 0$. □

La plupart des propriétés de base des opérateurs de Hecke restent donc vraies en passant du poids entier au poids demi-entier. Étonnamment, en poids demi-entier, ces opérateurs sont souvent nuls ! La conséquence étant que les coefficients d'une forme vecteur propre des opérateurs de Hecke (dénommée simplement forme propre par la suite) ne seront pas *a priori* multiplicatifs et donc on n'aura pas de produit eulérien de la fonction L associée.

Par ailleurs, on peut donner une description explicite de T_{p^2} , pour p premier, en terme de coefficients de Fourier. Le point technique est de trouver une décomposition de la forme (2.1.10) suffisamment pratique. Le lemme suivant permet de passer d'une telle décomposition dans $\Gamma_0(N)\alpha_m\Gamma_0(N)$ à une décomposition dans $\Delta_0(N)\xi_m\Delta_0(N)$.

Lemme 2.1.4. *Soit $m \in \mathbb{N}$ un carré. Si on a une décomposition matricielle de la forme*

$$\Gamma_0(N)\alpha_m\Gamma_0(N) = \bigsqcup_i \Gamma_0(N)\alpha_m\alpha_{m,i}$$

avec $\alpha_{m,i} \in \Gamma_0(N)$ alors on a la décomposition dans G

$$\Delta_0(N)\xi_m\Delta_0(N) = \bigsqcup_i \Delta_0(N)\xi_m s_J(\alpha_{m,i}).$$

Preuve. Soit $\xi = s_J(\alpha) \in \Delta_0(N)$. Il suffit de montrer qu'il existe un unique i tel que $\xi_m \xi$ est de la forme $\xi' \xi_m s_J(\alpha_{m,i})$ avec $\xi' \in \Delta_0(N)$.

L'unicité découle directement de l'unicité dans la décomposition matricielle et d'après celle-ci, on sait qu'il existe i et $\alpha' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ tels que $\alpha_m \alpha = \alpha' \alpha_m \alpha_{m,i}$.

Or, comme $\alpha_m^{-1}\alpha'\alpha_m = \begin{pmatrix} a & bm \\ c/m & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ (donc $m \mid c$), en posant $z_i = \alpha_{m,i}z$ pour $z \in \mathcal{H}$ on a

$$\begin{aligned} J(\alpha, z) &= J(\alpha_m^{-1}\alpha'\alpha_m, z_i)J(\alpha_{m,i}, z) \\ &= \varepsilon_d^{-1} \left(\frac{c/m}{d} \right) \sqrt{cz_i/m + d} J(\alpha_{m,i}, z) \\ &= \varepsilon_d^{-1} \left(\frac{c}{d} \right) \sqrt{c\alpha_m z_i + d} J(\alpha_{m,i}, z) \end{aligned}$$

car m est un carré. Ainsi, $J(\alpha, z) = J(\alpha', \alpha_m \alpha_{m,i} z) J(\alpha_{m,i}, z)$ ce qui suffit pour montrer que $\xi_m \xi = s_J(\alpha') \xi_m s_J(\alpha_{m,i})$. □

On commence par traiter le cas plus facile des « mauvais » opérateurs de Hecke. C'est-à-dire lorsque $p \mid N$.

Proposition 2.1.7. *Soit p un nombre premier divisant N et $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ dont on écrit le développement en série de Fourier à l'infini sous la forme*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) e(nz).$$

Alors,

$$T_{p^2} f(z) = \sum_{n \geq 0} a(p^2 n) e(nz).$$

Preuve. Pour tout entier h et tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, on a

$$\alpha_{p^2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & (b - ah)/p^2 \\ p^2 c & d - ch \end{pmatrix}.$$

Or, a est inversible modulo p^2 donc il existe un unique h modulo p^2 tel que le membre de droite de l'égalité précédente appartienne à $\Gamma_0(N)$. Dans ce cas, on a $\alpha_{p^2} \gamma = \gamma' \alpha_{p^2}$ $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\gamma' \in \Gamma_0(N)$, ce qui signifie que

$$\Gamma_0(N) \alpha_{p^2} \Gamma_0(N) = \bigsqcup_{h=0}^{p^2-1} \Gamma_0(N) \alpha_{p^2} \tau_h$$

avec $\tau_h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, d'après le lemme 2.1.4,

$$\begin{aligned}
 T_{p^2}f(z) &= p^{k/2-2} \sum_{h=0}^{p^2-1} \chi(1) f|_{\frac{k}{2}} \xi_{p^2} s_J(\tau_h)(z) \\
 &= p^{-2} \sum_{h=0}^{p^2-1} f\left(\frac{z+h}{p^2}\right) \\
 &= p^{-2} \sum_{n \geq 0} a(n) e(nz/p^2) \sum_{h=0}^{p^2-1} e(nh/p^2) \\
 &= \sum_{n \geq 0} a(p^2 n) e(nz).
 \end{aligned}$$

□

Le cas où $p \nmid N$ est plus technique mais la démonstration est relativement similaire. Elle est donnée dans [S1, Théorème 1.7]. La difficulté principale provient de montrer la chose suivante.

Proposition 2.1.8. *Soit p un nombre premier ne divisant pas N . Alors, on a la décomposition matricielle*

$$\Gamma_0(N) \alpha_{p^2} \Gamma_0(N) = \bigsqcup_{j=0}^{p^2-1} \Gamma_0(N) \alpha_{p^2} \tau_j \sqcup \bigsqcup_{h=1}^{p-1} \Gamma_0(N) \beta_h \sqcup \Gamma_0(N) \omega$$

avec

$$\begin{aligned}
 \tau_j &= \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \beta_h &= \begin{pmatrix} p & h \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pNv & 1 \end{pmatrix} \alpha_{p^2} \begin{pmatrix} p & h \\ -Nv & u \end{pmatrix}, \\
 \omega &= \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & -d \\ N & c \end{pmatrix} \alpha_{p^2} \begin{pmatrix} p^2 c & d \\ -N & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et où pour tout $h \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a choisi u et v de sorte que $up + vhN = 1$ et on a choisi c et d de sorte que $cp^2 + dN = 1$.

Ainsi, on peut calculer facilement $T_{p^2}f$ car d'après le lemme 2.1.4, on a

$$p^{2-k/2} T_{p^2}f = \sum_{j=0}^{p^2-1} f|_{\frac{k}{2}} \xi_{p^2} s_J(\tau_j) + \chi(p) \sum_{h=1}^{p-1} f|_{\frac{k}{2}} \xi_{p^2} s_J \left(\begin{pmatrix} p & h \\ -Nv & u \end{pmatrix} \right) + f|_{\frac{k}{2}} \xi_{p^2} s_J \left(\begin{pmatrix} p^2 c & d \\ -N & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{2.1.12}$$

Pour évaluer le dernier terme, on remarque que

$$\begin{aligned}
 f|_{\frac{k}{2}} \xi_{p^2} s_J \left(\begin{pmatrix} p^2 c & d \\ -N & 1 \end{pmatrix} \right) &= \bar{\chi}(c) f|_{\frac{k}{2}} s_J \left(\begin{pmatrix} p^2 & -d \\ N & c \end{pmatrix} \right) \xi_{p^2} s_J \left(\begin{pmatrix} p^2 c & d \\ -N & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \chi(p^2) f|_{\frac{k}{2}}(\omega, p^{-1/2})
 \end{aligned}$$

la dernière étape se justifiant par un calcul direct qu'on ne fera pas ici. On procède de la même façon avec la deuxième somme du membre de droite de (2.1.12). Cette fois on obtient

$$f|_{\frac{k}{2}} \xi_{p^2} S_J \left(\begin{pmatrix} p & h \\ -Nv & u \end{pmatrix} \right) = f|_{\frac{k}{2}} \left(\beta_h, \varepsilon_p^{-1} \left(\frac{-h}{p} \right) \right).$$

On peut ainsi énoncer le théorème principal de cette partie.

Théorème 2.1.4. *Soit p un nombre premier et $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ dont on écrit le développement en série de Fourier à l'infini sous la forme*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) e(nz).$$

Alors,

$$T_{p^2} f(z) = \sum_{n \geq 0} b(n) e(nz)$$

où

$$b(n) = a(p^2 n) + \chi(p) \left(\frac{(-1)^\ell n}{p} \right) p^{\ell-1} a(n) + \chi(p^2) p^{k-2} a(n/p^2)$$

et avec $\ell = (k-1)/2$ et $a(n/p^2) = 0$ si $p^2 \nmid n$.

Shimura [S1, Theorem 1.9] en déduit alors le théorème suivant très important.

Théorème 2.1.5. *Soit $t > 0$ un entier sans facteur carré premier avec N i.e. pour tout p premier, $p^2 \mid t \Rightarrow p \mid N$. Soit $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ dont on écrit le développement en série de Fourier à l'infini sous la forme*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) e(nz).$$

Supposons que f est une forme propre i.e. $T_{p^2} f = \omega_p f$ avec $\omega_p \in \mathbb{C}$ pour tout p premier. Alors, on a formellement

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a(tn^2)}{n^s} = a(t) \prod_p \left(1 - \chi(p) \left(\frac{(-1)^\ell t}{p} \right) p^{\ell-1-s} \right) \left(1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p)^2 p^{k-2-2s} \right)^{-1}$$

avec $\ell = (k-1)/2$. En particulier, si m et n sont deux entiers premiers entre eux et si $a(t) = 1$, alors

$$a(tm^2 n^2) = a(tm^2) a(tn^2).$$

1.4 Adjoints des opérateurs de Hecke

Dans cette sous-section, on calcule, pour un nombre premier $p \nmid N$, l'adjoint de l'opérateur T_{p^2} sur $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ par rapport au produit hermitien de Petersson. On montre en particulier qu'il s'agit d'un opérateur normal, c'est-à-dire qui commute avec son adjoint. On aura besoin des deux lemmes classiques suivant.

Lemme 2.1.5. *Soit $\xi = (\alpha, \phi) \in G$ avec $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Delta_0(N) \xi \Delta_0(N)$ tels que*

$$\Delta_0(N) \xi \Delta_0(N) = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_0(N) \beta_i = \bigsqcup_{i=1}^n \beta_i \Delta_0(N).$$

Preuve. En considérant les orbites pour les actions à gauche et à droite de l'action de $\Delta_0(N)$ sur $\Delta_0(N)\xi\Delta_0(N)$, on obtient

$$\Delta_0(N)\xi\Delta_0(N) = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_0(N)\gamma_i = \bigsqcup_{j=1}^m \gamma'_j\Delta_0(N) \quad (2.1.13)$$

pour certains $\gamma_i, \gamma'_j \in \Delta_0(N)\xi\Delta_0(N)$. Posons $\Delta_\xi = \xi\Delta_0(N)\xi^{-1} \cap \Delta_0(N)$ et de même pour $\Delta_{\xi^{-1}}$. Les applications

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\xi^{-1}} \backslash \Delta_0(N) & \rightarrow & \Delta_0(N) \backslash \Delta_0(N)\xi\Delta_0(N) \\ \gamma & \mapsto & \Delta_0(N)\xi\gamma \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Delta_0(N)/\Delta_\xi & \rightarrow & \Delta_0(N)\xi\Delta_0(N)/\Delta_0(N) \\ \gamma & \mapsto & \gamma\xi\Delta_0(N) \end{array}$$

sont bien définies et bijectives. De plus, par isomorphisme entre $\Gamma_0(N)$ et $\Delta_0(N)$, le lemme 5.5.1 de [DS] montre que les sous-groupes Δ_ξ et $\Delta_{\xi^{-1}}$ ont même indice dans $\Delta_0(N)$. Ainsi, on a $n = m$ dans (2.1.13).

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrons que $\Delta_0(N)\gamma_i$ intersecte $\gamma'_i\Delta_0(N)$. Si ce n'était pas le cas, alors on aurait

$$\Delta_0(N)\gamma_i \subset \bigsqcup_{j \neq i} \gamma'_j\Delta_0(N)$$

ce qui en multipliant à droite par $\Delta_0(N)$ donne

$$\Delta_0(N)\xi\Delta_0(N) \subset \bigsqcup_{j \neq i} \gamma'_j\Delta_0(N)$$

et on aboutit à une contradiction. Par conséquent, on peut choisir $\beta_i \in \Delta_0(N)\gamma_i \cap \gamma'_i\Delta_0(N)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on obtient le résultat voulu. \square

Lemme 2.1.6. *Soit $\beta = (\alpha, \phi) \in \Delta_0(N)\xi_{p^2}\Delta_0(N)$. Alors, pour tout $\gamma \in \alpha^{-1}\Gamma_0(N)\alpha \cap \Gamma_0(N)$, on a*

$$\beta s_J(\gamma)\beta^{-1} = s_J(\alpha\gamma\alpha^{-1}).$$

Preuve. Supposons d'abord que le résultat est vrai pour $\beta = \xi_{p^2} = (\alpha_{p^2}, p^{1/2})$. Alors, pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0(N)$ et tout $\gamma \in \alpha^{-1}\Gamma_0(N)\alpha \cap \Gamma_0(N)$ avec $\alpha = \gamma_1\alpha_{p^2}\gamma_2$ et $\beta = s_J(\gamma_1)\xi_{p^2}s_J(\gamma_2)$, on a

$$\beta s_J(\gamma)\beta^{-1} = s_J(\gamma_1)\xi_{p^2}s_J(\gamma_2\gamma\gamma_2^{-1})\xi_{p^2}^{-1}s_J(\gamma_1)^{-1}.$$

Or, $\gamma_2\gamma\gamma_2^{-1} \in \alpha_{p^2}^{-1}\Gamma_0(N)\alpha_{p^2} \cap \Gamma_0(N)$ donc $\xi_{p^2}s_J(\gamma_2\gamma\gamma_2^{-1})\xi_{p^2}^{-1} = s_J(\alpha_{p^2}\gamma_2\gamma\gamma_2^{-1}\alpha_{p^2}^{-1})$ et ainsi $\beta s_J(\gamma)\beta^{-1} = s_J(\alpha\gamma\alpha^{-1})$.

Il suffit donc de prouver la proposition avec $\beta = \xi_{p^2}$, mais ceci est clair d'après l'équation (2.1.11). \square

Avant de passer au calcul de l'adjoint de T_{p^2} , fixons d'abord quelques notations. Si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_0(N)$ et que f et g appartiennent à $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$, alors on note

$$\langle f, g \rangle_\Gamma := \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathcal{H})} \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z)\overline{g(z)}y^{k/2} \frac{dx dy}{y^2}$$

leur produit hermitien par rapport à Γ . Le facteur de renormalisation $\frac{1}{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathcal{H})}$ permet d'avoir $\langle f, g \rangle_\Gamma = \langle f, g \rangle_{\Gamma_0(N)}$. Plus généralement on peut définir $\langle f, g \rangle_\Gamma$ pour f et g tels que $f(z)\overline{g(z)}y^{k/2}$ est Γ -périodique et intégrable.

Par ailleurs, pour $\beta = (\alpha, \phi) \in G$, on pose $\beta' = \det \alpha \beta^{-1} = ((\det \alpha)\alpha^{-1}, \phi(\alpha^{-1}\cdot)^{-1})$ et on note $a(\beta)$ ou $a(\alpha)$ le coefficient en haut à gauche de α .

Proposition 2.1.9. *Soit p un nombre premier ne divisant pas N . Alors l'adjoint de T_{p^2} sur $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ vaut*

$$T_{p^2}^* = \bar{\chi}(p^2)T_{p^2}.$$

En particulier, T_{p^2} est un opérateur normal et même auto-adjoint dans le cas où χ est réel.

Preuve. Prenons $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Delta_0(N)\xi_{p^2}\Delta_0(N)$ comme dans le lemme 2.1.5 avec $\xi = \xi_{p^2}$ et $\beta_i = (\alpha_i, \phi_i)$. D'après [DS, Lemme 5.1.1], pour tout i , $\alpha_i\Gamma_1(N)\alpha_i^{-1} \cap \Gamma_1(N)$ est un sous-groupe de congruence *i.e.* contient $\Gamma = \Gamma(N')$ pour un certain N' . Quitte à prendre N' assez grand, on peut supposer que Γ est contenu dans tous les $\Gamma_{\alpha_i} = \alpha_i\Gamma_1(N)\alpha_i^{-1} \cap \Gamma_1(N)$ et tous les $\Gamma_{\alpha_i^{-1}} = \alpha_i^{-1}\Gamma_1(N)\alpha_i \cap \Gamma_1(N)$.

Aussi, pour f et g dans $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ et pour tout $\gamma \in \Gamma_{\alpha_i^{-1}}$,

$$\begin{aligned} f|_{\frac{k}{2}}\beta_i(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}\text{Im}(\gamma z)^{k/2} &= f|_{\frac{k}{2}}\beta_i s_J(\gamma)(z)\overline{g|_{\frac{k}{2}}s_J(\gamma)(z)}y^{k/2} \\ &= f|_{\frac{k}{2}}s_J(\alpha_i\gamma\alpha_i^{-1})\beta_i(z)\overline{g(z)}y^{k/2} \\ &= f|_{\frac{k}{2}}\beta_i(z)\overline{g(z)}y^{k/2} \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.1.6. Ainsi, $f|_{\frac{k}{2}}\beta_i(z)\overline{g(z)}y^{k/2}$ est $\Gamma_{\alpha_i^{-1}}$ -périodique et on peut écrire

$$\langle T_{p^2}f, g \rangle_{\Gamma_0(N)} = p^{k/2-2} \sum_{i=1}^n \chi(a(\beta_i)) \langle f|_{\frac{k}{2}}\beta_i, g \rangle_\Gamma = p^{k/2-2} \sum_{i=1}^n \chi(a(\beta_i)) \langle f|_{\frac{k}{2}}\beta_i, g \rangle_{\Gamma_{\alpha_i^{-1}}}.$$

Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\alpha_i^{-1}} \backslash \mathcal{H}} f|_{\frac{k}{2}}\beta_i(z)\overline{g(z)}y^{k/2} \frac{dx dy}{y^2} &= \int_{\Gamma_{\alpha_i} \backslash \mathcal{H}} f|_{\frac{k}{2}}\beta_i(\alpha_i^{-1}z)\overline{g(\alpha_i^{-1}z)}\text{Im}(\alpha_i^{-1}z)^{k/2} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{\Gamma_{\alpha_i} \backslash \mathcal{H}} f(z)\overline{g|_{\frac{k}{2}}\beta'_i}y^{k/2} \frac{dx dy}{y^2} \end{aligned}$$

car $\text{Im}(\alpha_i^{-1}z) = y|\phi(\alpha_i^{-1}z)|^4$ compte tenu du lien entre ϕ et α .

En remplaçant la fonction intégrée par 1 on obtient même $\text{Vol}(\Gamma_{\alpha_i^{-1}} \backslash \mathcal{H}) = \text{Vol}(\Gamma_{\alpha_i} \backslash \mathcal{H})$ et donc

$$\langle T_{p^2}f, g \rangle_{\Gamma_0(N)} = p^{k/2-2} \sum_{i=1}^n \chi(a(\beta_i)) \langle f, g|_{\frac{k}{2}}\beta'_i \rangle_{\Gamma_{\alpha_i}} = \left\langle f, p^{k/2-2} \sum_{i=1}^n \bar{\chi}(a(\beta_i)) g|_{\frac{k}{2}}\beta'_i \right\rangle_\Gamma.$$

En passant à l'inverse dans les égalités du lemme 2.1.5 et en multipliant par $p^2 = \det \alpha_i$, on a

$$\Delta_0(N)\xi'_{p^2}\Delta_0(N) = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_0(N)\beta'_i.$$

Or, on vérifie facilement que

$$\xi'_{p^2} = \left(\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p^{-1/2} \right) = s_J \left(\begin{pmatrix} up^2 & -v \\ -N & 1 \end{pmatrix} \right) \xi_{p^2} s_J \left(\begin{pmatrix} p^2 & v \\ N & u \end{pmatrix} \right)$$

où u et v sont des entiers tels que $up^2 - vN = 1$ (on rappelle que $p \nmid N$). De plus, en posant $\alpha_i = \gamma_i \alpha_{p^2} \tilde{\gamma}_i$ avec $\gamma_i, \tilde{\gamma}_i \in \Gamma_0(N)$, on a

$$a(\beta'_i) = a \left(\tilde{\gamma}_i^{-1} \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma_i^{-1} \right) = p^2 a(\tilde{\gamma}_i^{-1} \gamma_i^{-1}) [N]$$

et de même, $a(\beta_i) = a(\gamma_i \tilde{\gamma}_i) [N]$.

Ainsi, on a $\Delta_0(N) \xi_{p^2} \Delta_0(N) = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_0(N) \beta'_i$ et $\chi(a(\beta_i)) = \chi(p^2) \bar{\chi}(a(\beta'_i))$, ce qui donne

$$p^{k/2-2} \sum_{i=1}^n \bar{\chi}(a(\beta_i)) g|_{\frac{k}{2}} \beta'_i = \bar{\chi}(p^2) T_{p^2} g$$

et termine la preuve. □

1.5 Autres opérateurs

Avant de conclure cette section, on va définir les autres opérateurs classiques des espaces de formes de poids demi-entier et donner quelques propriétés en rapport avec les opérateurs de Hecke.

Définition 2.1.3. Pour m et N des entiers positifs avec $4 \mid N$ et r un nombre réel, on pose

$$\begin{aligned} W_N &= \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}, N^{1/4} \sqrt{-iz} \right), \\ U_m &= m^{k/4-1} \sum_{u[m]} \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & m \end{pmatrix}, m^{1/4} \right) \in \mathbb{C}[G], \\ V_m &= m^{-k/4} \left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m^{-1/4} \right) \in \mathbb{C}[G], \\ \tau(r) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right). \end{aligned}$$

Soit $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$, on définit alors l'involution de Fricke (de niveau N et de poids $k/2$) par

$$f \mapsto f|_{\frac{k}{2}} W_N,$$

puis on définit aussi les deux types d'opérateurs shifts par

$$f \mapsto f|_{\frac{k}{2}} U_m,$$

$$f \mapsto f|_{\frac{k}{2}} V_m,$$

et si ψ est un caractère primitif de Dirichlet modulo m , alors on définit le twist de f par ψ

$$f_\psi = f|_{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{g(\bar{\psi})} \sum_{u[m]} \bar{\psi}(u) \tau(u/m) \right)$$

où $g(\bar{\psi}) = \sum_{u[m]} \bar{\psi}(u) e(u/m)$ est la somme de Gauss associée à $\bar{\psi}$.

Proposition 2.1.10. *Soit $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$) avec*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) e(nz).$$

Alors,

1. $f|_{\frac{k}{2}} W_N \in M_{\frac{k}{2}} \left(N, \left(\frac{N}{\cdot} \right) \bar{\chi} \right)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}} \left(N, \left(\frac{N}{\cdot} \right) \bar{\chi} \right)$).
2. Si $m \mid N$ alors $f|_{\frac{k}{2}} U_m \in M_{\frac{k}{2}} \left(N, \left(\frac{m}{\cdot} \right) \chi \right)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}} \left(N, \left(\frac{m}{\cdot} \right) \chi \right)$). De plus,

$$f|_{\frac{k}{2}} U_m(z) = \sum_{n \geq 0} a(mn) e(nz)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. En particulier, si $m \mid N$ et que m est sans facteur carré, alors $f|_{\frac{k}{2}} U_{m^2} = T_{m^2} f$.

3. $f|_{\frac{k}{2}} V_m \in M_{\frac{k}{2}} \left(\text{ppcm}(m, N), \left(\frac{m}{\cdot} \right) \chi \right)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}} \left(\text{ppcm}(m, N), \left(\frac{m}{\cdot} \right) \chi \right)$) et de plus,

$$f|_{\frac{k}{2}} V_m(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) e(mnz).$$

4. Si ψ est un caractère primitif de Dirichlet modulo m alors $f_\psi \in M_{\frac{k}{2}}(Nm^2, \chi\psi^2)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}}(Nm^2, \chi\psi^2)$) et de plus,

$$f_\psi(z) = \sum_{n \geq 0} \psi(n) a(n) e(nz)$$

Preuve. Le fait que l'holomorphie (respectivement l'annulation) aux pointes soit conservée est évident. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, on a

$$\begin{aligned} W_N s_J(\gamma) W_N^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} d & -c/N \\ -bN & a \end{pmatrix}, \varepsilon_d^{-1} \left(\frac{c}{d} \right) \sqrt{-bNz + a} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} d & -c/N \\ -bN & a \end{pmatrix}, \left(\frac{N}{d} \right) \left(\frac{-bc}{ad} \right) J \left(\begin{pmatrix} d & -c/N \\ -bN & a \end{pmatrix}, z \right) \right) \\ &= s_J \left(\begin{pmatrix} d & -c/N \\ -bN & a \end{pmatrix}, z \right) \left(1, \left(\frac{N}{d} \right) \right) \end{aligned}$$

car $ad = 1 [N]$ donc $\varepsilon_a = \varepsilon_d$ et $\left(\frac{N}{a} \right) = \left(\frac{N}{d} \right)$.

Ainsi, $f|_{\frac{k}{2}} W_N |_{\frac{k}{2}} \gamma = \chi(a) \left(\frac{N}{d} \right) f|_{\frac{k}{2}} W_N = \bar{\chi}(d) \left(\frac{N}{d} \right) f|_{\frac{k}{2}} W_N$.

Si de plus on suppose que $m \mid N$ alors $(a, m) = 1$ et pour tout $u \in [m]$, il existe un unique $u' \in [m]$ tel que $au' = b + ud \pmod{m}$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & m \end{pmatrix}, m^{1/4} \right) s_J(\gamma) \left(\begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & m \end{pmatrix}, m^{1/4} \right)^{-1} \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + uc & (b + ud - u'a)/m + uu'c/m \\ mc & d - cu' \end{pmatrix}, J(\gamma, mz - u') \right) \\ &= s_J \left(\begin{pmatrix} a + uc & (b + ud - u'a)/m + uu'c/m \\ mc & d - cu' \end{pmatrix} \right) \left(1, \left(\frac{m}{d} \right) \right) \end{aligned}$$

et donc $f|_{\frac{k}{2}} U_m |_{\frac{k}{2}} \gamma = \chi(d) \left(\frac{m}{d} \right) f|_{\frac{k}{2}} U_m$. Par ailleurs,

$$f|_{\frac{k}{2}} U_m(z) = \frac{1}{m} \sum_{u \in [m]} f \left(\frac{z + u}{m} \right) = \sum_{n \geq 0} a(mn) e(nz)$$

et la fin du point 2 se déduit facilement de la proposition 2.1.7.

De même, on montre que

$$\begin{aligned} m^{k/4} V_m s_J(\gamma) (m^{k/4} V_m)^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} a & bm \\ c/m & d \end{pmatrix}, J(\gamma, z/m) \right) \\ &= s_J \left(\begin{pmatrix} a & bm \\ c/m & d \end{pmatrix} \right) \left(1, \left(\frac{m}{d} \right) \right) \end{aligned}$$

et donc $f|_{\frac{k}{2}} V_m |_{\frac{k}{2}} \gamma = \chi(d) \left(\frac{m}{d} \right) f|_{\frac{k}{2}} V_m$. Par ailleurs,

$$f|_{\frac{k}{2}} V_m(z) = f(mz) = \sum_{n \geq 0} a(n) e(mnz).$$

Enfin, si $Nm^2 \mid c$ alors pour tout $0 \leq u, u' < m$, on a

$$\begin{aligned} \tau(u/m) s_J(\gamma) \tau(u'/m)^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} a + uc/m & b + (ud - u'a)/m + uu'c/m^2 \\ c & d - u'c/m \end{pmatrix}, J(\gamma, z - u'/m) \right) \\ &= s_J \left(\begin{pmatrix} a + uc/m & b + (ud - u'a)/m + uu'c/m^2 \\ c & d - u'c/m \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

en imposant $ud = u'a \pmod{m}$, ce qui est possible puisque a et d sont inversibles modulo m et si u est fixé alors u' est unique modulo m . Ainsi,

$$f_\psi|_{\frac{k}{2}} \gamma = \frac{1}{g(\bar{\psi})} \sum_{u \in [m]} \bar{\psi}(u) \chi(d) f|_{\frac{k}{2}} \tau(u'/m) = \chi(d) \psi(d)^2 f_\psi$$

et un simple calcul permet de vérifier que les coefficients de f_ψ sont bien les $(\psi(n)a(n))_{n \geq 0}$. \square

Donnons à présent les relations de commutativité entre ces opérateurs et les opérateurs de Hecke.

Proposition 2.1.11. Soit m un entier strictement positif et $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$.

1. Si $p \nmid N$ alors

$$T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \left(\frac{N}{\cdot}\right)\chi}(f|_{\frac{k}{2}} W_N) = \bar{\chi}(p)^2 \left(T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi} f \right) \Big|_{\frac{k}{2}} W_N.$$

2. Si m est un carré et $p \nmid m$, alors

$$T_{p^2}^{\frac{k}{2}, \text{ppcm}(N, m), \chi}(f|_{\frac{k}{2}} V_m) = \left(T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi} f \right) \Big|_{\frac{k}{2}} V_m.$$

3. Soit ψ un caractère primitif de Dirichlet modulo m . Alors, pour tout p ,

$$T_{p^2}^{\frac{k}{2}, Nm^2, \chi\psi^2} f_\psi = \psi(p)^2 \left(T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi} f \right) \Big|_{\psi}.$$

Preuve. Le premier point se démontre en écrivant la décomposition

$$\Delta_0(N)\xi_{p^2}\Delta_0(N) = \bigsqcup_i \Delta_0(N)\xi_{p^2, i}$$

et en montrant que pour tout i , il existe j tel que

$$\eta_{i, j} := W_N \xi_{p^2, i} W_N^{-1} \xi_{p^2, j}^{-1} \in \Delta_0(N)$$

et que $\chi(a_{p^2, i})\chi(\eta_{i, j}) = \chi(p)^2\chi(a_{p^2, j})$ avec $a_{p^2, i}$ le premier coefficient de $\xi_{p^2, i}$. Les valeurs explicites des $\xi_{p^2, i}$ sont données juste avant l'énoncé du théorème 2.1.4.

Les points 2 et 3 se démontrent très facilement, avec le théorème 2.1.4 et la proposition 2.1.10, en identifiant les coefficients de Fourier de chaque membre des égalités. □

2 Du poids demi-entier au poids entier

Compte tenu des analogies entre les formes modulaires de poids entier et demi-entier, il est légitime de penser qu'il existe un lien fort entre les deux. Bien sûr, si $f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ et $g \in M_{\frac{k'}{2}}(N', \chi')$ où k et k' sont des entiers impairs, alors le produit

$$fg \in M_{\frac{k+k'}{2}} \left(\text{ppcm}(N, N'), \left(\frac{-4}{\cdot} \right) \chi\chi' \right)$$

est une forme de poids entier. Cette relation n'est malheureusement pas exploitable si l'on veut, par exemple dans le cas où $(k, N, \chi) = (k', N', \chi')$, utiliser les propriétés connues de $M_k \left(N, \left(\frac{-4}{\cdot} \right) \chi^2 \right)$ pour en déduire certaines de $M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$.

La première étape vers un lien à double sens fut donnée par Shimura qui introduisit la célèbre correspondance qui porte son nom.

2.1 Correspondance de Shimura

Dans son article de 1973, Shimura [S1] construisit, à partir d'une forme propre de $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$, une forme propre de $M_{k-1}(N', \chi^2)$ avec N' inconnu. Quelques années plus tard, Niwa [N] et Shintani [S4] donnèrent une description plus directe de ce résultat, sans passer par les opérateurs de Hecke, et Niwa prouve même qu'on peut prendre $N' = N/2$.

On fixe $k > 1$ un entier impair, $N > 0$ un entier divisible par 4, χ un caractère de Dirichlet (pair) modulo N et $f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ dont on écrit le développement en série de Fourier sous la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$.

On fixe $t > 0$ un entier sans facteur carré qui soit premier avec N . Généralement on prend pour t un entier sans facteur carré ou la valeur absolue d'un discriminant fondamental. On pose

$$\chi_t = \left(\frac{(-1)^{\ell t}}{\cdot} \right) \chi$$

avec $\ell = (k-1)/2$.

On définit alors formellement la suite $(A_t(n))_{n \geq 1}$ par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{A_t(n)}{n^s} = L(s+1-\ell, \chi_t) \sum_{n \geq 1} \frac{a(tn^2)}{n^s} \quad (2.2.1)$$

où $L(s, \chi_t) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_t(n)}{n^s}$ est la série de Dirichlet associée à χ_t .

Théorème 2.2.1. *Avec les notations précédentes, soit $f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ telle que*

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$.

On pose

$$\text{Sh}_t f(z) = \sum_{n \geq 1} A_t(n)e(nz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Alors,

1. $\text{Sh}_t f \in S_{k-1}(N/2, \chi^2)$ si $k \geq 5$,
2. $\text{Sh}_t f \in M_2(N/2, \chi^2)$ si $k = 3$,
3. $\text{Sh}_t f \in S_2(N/2, \chi^2)$ si $k = 3$ et si f appartient à l'orthogonal du sous-espace vectoriel de $S_{\frac{3}{2}}(N, \chi)$ engendré par les séries thêta de la forme $\theta_\psi(d \cdot) \in S_{\frac{3}{2}}(N, \chi)$ avec ψ impair.

De plus, les opérateurs de Hecke commutent avec Sh_t . Précisément, si pour tout p premier on note $T_p^{\frac{k}{2}, N, \chi}$ le p^2 -ième opérateur de Hecke sur $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ et par $T_p^{k-1, \frac{N}{2}, \chi^2}$ le p -ième opérateur de Hecke sur $S_{k-1}(N/2, \chi^2)$ alors on a

$$\text{Sh}_t T_p^{\frac{k}{2}, N, \chi} f = T_p^{k-1, \frac{N}{2}, \chi^2} \text{Sh}_t f$$

pour tout $f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$.

Remarque 2.2.1. Cet énoncé tiré de [O, Théorème 3.14] résume les énoncés de [S1, Section 3, Main Theorem] et de [N, Section 3]. Le fait que Sh_t commute avec tous les opérateurs de Hecke et pas seulement ceux tels que $p \nmid tN$ est une amélioration due à Purkait (voir [P2, Proposition 3.4]).

Si on suppose en plus que f est une forme propre i.e. $T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi} f = \omega_p f$ avec $\omega_p \in \mathbb{C}$, alors le théorème 2.1.5 implique que pour $\text{Re } s > k/2$,

$$L(s, \text{Sh}_t f) := \sum_{n \geq 1} \frac{A_t(n)}{n^s} = a(t) \prod_p (1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p)^2 p^{k-2-2s})^{-1}. \quad (2.2.2)$$

On note alors $\text{Sh}f$ la forme définie par le produit eulérien de droite de sorte que

$$\text{Sh}_t f = a(t) \text{Sh}f$$

pour tout t sans facteur carré premier avec N . Comme $f \neq 0$, d'après le théorème 2.1.5, il existe t tel que $a(t)$ est non-nul et donc $\text{Sh}f$ vérifie les trois points du théorème 2.2.1 ainsi que la relation $T_p^{k-1, \frac{N}{2}, \chi^2} \text{Sh}f = \omega_p \text{Sh}f$.

De plus, les équations (2.2.1) et (2.2.2) impliquent que pour tout $n \geq 1$,

$$a(tn^2) = a(t) \sum_{d|n} \mu(d) \chi_t(d) d^{\ell-1} \omega_{n/d} \quad (2.2.3)$$

avec $(\omega_n)_{n \geq 1}$ la suite des coefficients de $\text{Sh}f$. Notons qu'*a priori*, les coefficients ω_n ne correspondent pas aux valeurs propres (associées à f) des opérateurs $T_{n^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi}$ pour tout n . En effet, il faudrait pour cela que les opérateurs $T_{p^{2r}}^{\frac{k}{2}, N, \chi}$ vérifient la relation

$$T_{p^{2r+2}}^{\frac{k}{2}, N, \chi} = T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi} T_{p^{2r}}^{\frac{k}{2}, N, \chi} - \chi^2(p) p^{k-2} T_{p^{2r-2}}^{\frac{k}{2}, N, \chi}$$

pour tout entier $r \geq 1$.

Or, on peut montrer [P2] que ceci n'est en fait vrai que pour $r \geq 2$ alors que pour $r = 1$, on a

$$T_{p^4}^{\frac{k}{2}, N, \chi} = (T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi})^2 - \chi^2(p)(p^{k-3} + p^{k-2}).$$

À la fin de son article [S1], Shimura dresse une liste de questions ouvertes auxquelles il répond de manière conjecturale. La première traite de la surjectivité et de l'injectivité potentielle de Sh_t . Si l'on compare les dimensions des espaces, la correspondance pourrait être bijective dans de nombreux cas. Par exemple, les théorèmes 1.34 et 1.49 de [O] montrent que

$$\dim S_{\frac{k}{2}}(4) = \dim S_{k-1}(2)$$

pour $k \geq 5$. Cependant, ce n'est plus vrai en niveau supérieur. L'obstruction semble venir des possibles facteurs carrés du niveau. On peut montrer notamment (voir [S1, Section 4]) que

$$\dim S_{\frac{k}{2}}(4p^2) - \dim S_{k-1}(2p^2) = (-1)^\ell (p \pm 1)/4$$

où p est un nombre premier impair tel que $p \pm 1 = 0 \pmod{4}$ et $\ell = (k-1)/2$.

On se restreindra donc souvent au cas où le niveau $N = 4M$ avec M sans facteur carré. La première réponse à cette question de Shimura sur la surjectivité fut donnée par Flicker en 1980 [F] qui, via le langage des représentations automorphes, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de $S_{k-1}(N/2, \chi^2)$ soit l'image par Sh_t d'un élément de $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$. En particulier on a la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. [P, Proposition 2.8] *Soient M et t des entiers positifs sans facteur carré avec M impair. On considère la correspondance de Shimura*

$$\text{Sh}_t : S_{\frac{k}{2}}(4M) \rightarrow S_{k-1}(2M)$$

construite au théorème 2.2.1. Alors $S_{k-1}(M)$ vu comme sous-espace de $S_{k-1}(2M)$ est inclus dans l'image de Sh_t .

On est ainsi tenté de restreindre l'ensemble de départ pour espérer obtenir une correspondance bijective. C'est en particulier pour cette raison que Kohnen introduisit l'espace qui porte son nom.

2.2 Espace de Kohnen

Dans son article de 1980 [K6], Kohnen définit un sous-espace de $M_{\frac{k}{2}}(4)$ qu'il note $M_{\frac{k}{2}}^+(4)$ et sur lequel il rend explicite la correspondance de Shimura notamment en terme de sous-espaces propres pour les opérateurs de Hecke. Quelques années plus tard [K7], il généralisera son travail en introduisant la notion de forme nouvelle sur l'espace $S_{\frac{k}{2}}(4M, \chi)$ avec $\chi^2 = 1$ et M sans facteur carré et impair.

Définition 2.2.1. Soit $N = 2^\alpha M$ un entier positif avec $\alpha \geq 2$ et M impair sans facteur carré. Soient χ_0 et χ_1 des caractères modulo 2^α et M respectivement et tels que

$$\varepsilon := \chi_0(-1) = \chi_1(-1).$$

On pose $\chi = \chi_0 \chi_1$. On définit alors le sous-espace de Kohnen de $M_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ par

$$M_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi) = \left\{ f \in M_{\frac{k}{2}}(N, \chi) \mid a_f(n) = 0 \text{ pour } (-1)^\ell \varepsilon n = 2 \text{ ou } 3 [4] \right\}$$

les $a_f(n)$ désignant ici les coefficients de Fourier à l'infini de f et bien sûr $\ell = (k-1)/2$.

De même, on définit le sous-espace de Kohnen des formes cuspidales en posant

$$S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi) = M_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi) \cap S_{\frac{k}{2}}(N, \chi).$$

La série θ ainsi que les séries de Cohen-Eisenstein, définies en (2.1.2), sont donc des exemples d'éléments non-triviaux de $M_{\frac{k}{2}}^+(4)$.

Les propriétés importantes de cet espace ne sont connues que dans le cas où $N = 4M$ avec M sans facteur carré et χ est un caractère réel. En fait, on peut même souvent se restreindre au cas où χ est trivial car d'après [UY, Remark 6], si χ est un caractère quadratique modulo N et de conducteur q alors

$$M_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi) = M_{\frac{k}{2}}^+(N) \Big|_{\frac{k}{2}} U_{q'} \tag{2.2.4}$$

avec $q' = q$ ou $q/4$ selon si q est impair ou pair.

Si M est impair alors on définit l'opérateur Q sur $S_{\frac{k}{2}}(N)$ par

$$Qf = \sum_{u=0}^3 f \Big|_{\frac{k}{2}} \eta_u$$

avec $\eta_u = \left(\begin{pmatrix} Nu + 4 & 1 \\ 4Nu & 4 \end{pmatrix}, e^{i\pi/4} \sqrt{4Nuz + 1} \right).$

Proposition 2.2.2. [K7, Proposition 1] *On suppose que $N = 4M$ avec M impair et sans facteur carré. Alors, l'opérateur Q défini ci-dessus stabilise $S_{\frac{k}{2}}(N)$. De plus, il est hermitien et satisfait l'équation fonctionnelle suivante*

$$(Q - \alpha)(Q - \beta) = 0$$

avec $\alpha = (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor} 2\sqrt{2}$ et $\beta = -\alpha/2$. Par ailleurs, $S_{\frac{k}{2}}^+(N)$ est le sous-espace propre associé à Q pour la valeur propre α .

Si M est pair alors on définit la projection \mathcal{P}_+ par

$$\mathcal{P}_+ : \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \mapsto \sum_{(-1)^\ell n=0,1 [4]} a(n)e(nz)$$

pour $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \in S_{\frac{k}{2}}(N)$.

Proposition 2.2.3. [UY, Proposition 6] *On suppose que $N = 4M$ avec M pair et sans facteur carré. Alors la projection \mathcal{P}_+ définie ci-dessus envoie $S_{\frac{k}{2}}(N)$ sur $S_{\frac{k}{2}}^+(N)$. De plus, elle induit un isomorphisme entre $S_{\frac{k}{2}}(N/2)$ et $S_{\frac{k}{2}}^+(N)$.*

Remarque 2.2.2. La plupart de ces résultats restent valables dans $M_{\frac{k}{2}}(N)$ (voir [UY, Partie 3] pour plus de détails).

L'espace de Kohnen a même une meilleure interprétation en terme de correspondance de Shimura. Pour commencer, restreignons-nous au cas où $N = 4$. L'espace $M_{\frac{k}{2}}^+(4)$ peut se construire explicitement à partir de formes de poids entier, de la série θ et de séries de Cohen-Eisenstein.

Proposition 2.2.4. [K6, Proposition 1] *Soit ℓ un entier naturel. Si ℓ est pair alors l'application*

$$\begin{aligned} M_\ell(1) \oplus M_{\ell-2}(1) &\rightarrow M_{\ell+1/2}^+(4) \\ (f, g) &\mapsto f(4z)\theta(z) + g(4z)H_{\frac{5}{2}}(z) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Si ℓ est impair alors l'application

$$\begin{aligned} M_{\ell-3}(1) \oplus M_{\ell-5}(1) &\rightarrow M_{\ell+1/2}^+(4) \\ (f, g) &\mapsto f(4z)H_{\frac{7}{2}}(z) + g(4z)H_{\frac{11}{2}}(z) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. De plus,

$$M_{\ell+1/2}^+(4) = \mathbb{C}H_{\ell+1/2} \oplus S_{\ell+1/2}^+(4).$$

D'après la proposition 2.2.1, tout élément de $S_{k-1} := S_{k-1}(1)$ est l'image par Sh_t d'un élément de $S_{\frac{k}{2}}(4)$. Le prochain théorème montre qu'en fait $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ et S_{k-1} sont isomorphes en tant que modules de Hecke. Une subtilité est qu'il faut définir un nouvel opérateur de Hecke T_4^+ sur $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ qui va correspondre à l'opérateur de Hecke classique T_2 sur S_{k-1} .

Définition 2.2.2. Pour $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \in S_{\frac{k}{2}}^+(4M, \chi)$ (en reprenant les notations de la définition 2.2.1) avec χ réel, on pose

$$T_4^{\frac{k}{2}, 4M, \chi, +} f(z) = \sum_{(-1)^\ell \varepsilon n = 0, 1 \text{ [4]}} \left(a(4n) + \chi_1(2) \left(\frac{(-1)^\ell \varepsilon n}{2} \right) 2^{\ell-1} a(n) + 2^{k-2} a(n/4) \right) e(nz).$$

Par ailleurs, pour p un nombre premier impair, on définit $T_{p^2}^{\frac{k}{2}, 4M, \chi, +}$ comme la restriction de $T_{p^2}^{\frac{k}{2}, 4M, \chi}$ à $S_{\frac{k}{2}}^+(4M, \chi)$. Comme précédemment, si aucune confusion n'est possible, on allégera la notation en écrivant seulement $T_{p^2}^+$.

Il est clair que les opérateurs T_{p^2} pour p impair stabilisent $S_{\frac{k}{2}}^+(4M, \chi)$ et donc restent hermitiens sur cet espace. Ceci est aussi vrai pour T_4^+ et ce fait non-trivial est prouvé dans [K7, Partie 3].

L'espace $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ est donc muni d'une structure d'algèbre de Hecke pour laquelle T_4^+ n'est pas un « mauvais » opérateur. On s'attend donc à ce qu'une forme propre pour cette espace corresponde à une forme propre pour l'espace S_{k-1} via la correspondance de Shimura. Or, le facteur pour $p = 2$ du produit eulérien (2.2.2) associée à $\text{Sh} f$ n'est pas polynomial de degré deux en p^{-s} . Ainsi, $\text{Sh} f$ ne peut correspondre à une forme propre de niveau 1. Pour parer à cela, Kohlen a adapté la définition de Sh_t vis-à-vis de l'espace plus, vu comme espace de formes niveau 1. Comme pour l'opérateur T_4^+ , on donne ici la définition de la correspondance de Kohlen-Shimura dans un contexte plus général.

Définition 2.2.3. Pour $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \in S_{\frac{k}{2}}^+(4M, \chi)$ (en reprenant les notations de la définition 2.2.1) avec χ réel et pour D un discriminant fondamental tel que $(-1)^\ell \varepsilon D > 0$, on pose formellement

$$\sum_{n \geq 1} \frac{A_D^+(n)}{n^s} = L \left(s + 1 - \ell, \left(\frac{D}{\cdot} \right) \chi_1 \right) \sum_{n \geq 1} \frac{a(|D|n^2)}{n^s}$$

et on définit alors l'image de f par la correspondance de Kohlen-Shimura comme étant

$$\text{Sh}_D^+ f(z) = \sum_{n \geq 1} A_D^+(n) e(nz).$$

De plus, si $T_{p^2}^+ f = \omega_p f$ pour tout p alors on note $\text{Sh}^+ f = \sum_{n \geq 1} \omega_n e(nz)$ la fonction associée au produit eulérien

$$\prod_p \left(1 - \omega_p p^{-s} + \chi_1(p)^2 p^{k-2-2s} \right)^{-1}$$

qui a bien un facteur de degré 2 pour $p = 2$.

Remarque 2.2.3. Si dans la définition précédente on suppose que D est pair, alors on vérifie facilement que $\left(\frac{D}{\cdot} \right) \chi_1$ et $\left(\frac{(-1)^\ell |D|}{\cdot} \right) \chi$ coïncident sur tous les nombres premiers et donc que Sh_D^+ correspond à la restriction de $\text{Sh}_{|D|}$ sur $S_{\frac{k}{2}}^+(4M, \chi)$. Une telle égalité n'est plus vraie en dehors de l'hypothèse où D est pair.

On peut donc à présent énoncer le célèbre théorème de Kohnen sur la correspondance entre les espaces $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ et S_{k-1} .

Théorème 2.2.2. [K6, Theorem 1] *Si D est un discriminant fondamental tel que $(-1)^\ell D > 0$ et si f appartient à $S_{\ell+1/2}^+(4)$, alors $\text{Sh}_D^+ f \in S_{2\ell}$. De plus, Sh_D^+ commutent avec les opérateurs de Hecke i.e.*

$$\text{Sh}_D^+ T_p^+ f = T_p \text{Sh}_D^+ f$$

pour tout p . Si f est vecteur propre commun à tous les T_p^+ alors $\text{Sh}_D^+ f = a(|D|)\text{Sh}^+ f$ avec $a(|D|)$ le $|D|$ -ième coefficient de f .

Par ailleurs, il existe un isomorphisme

$$\Phi : S_{\ell+1/2}^+(4) \rightarrow S_{2\ell}$$

qui est égal à une combinaison linéaire des opérateurs Sh_D^+ (pour les différents D) et qui commute avec les T_p^+ .

En particulier, l'espace $S_{\ell+1/2}^+(4)$ possède une base orthogonale de vecteurs propres communs à tous les opérateurs T_p^+ avec p premier. Chacun de ces vecteurs est unique à un facteur multiplicatif près.

On dit que $f \in S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ est une forme propre si elle est vecteur propre commun à tous les opérateurs T_p^+ avec p premier.

Corollaire 2.2.1. *Soit $f \in S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ une forme propre. Alors f est unique à un facteur multiplicatif près et il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que pour tout $z \in \mathcal{H}$,*

$$\alpha f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e(nz)$$

avec $a(n)$ réel et algébrique pour tout $n \geq 1$.

Pour prouver ce corollaire, on a d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.1. *Les espaces vectoriels $M_{\ell+1/2}^+(4)$ et $S_{\ell+1/2}^+(4)$ (s'ils sont non-nuls) possèdent des bases dont les éléments sont des formes à coefficients rationnels.*

Preuve. On considère l'isomorphisme

$$\phi : V \rightarrow M_{\ell+1/2}^+(4)$$

donné dans la proposition 2.2.4, avec $V := M_\ell \oplus M_{\ell-2}$ si ℓ est pair et $V := M_{\ell-3} \oplus M_{\ell-5}$ si ℓ est impair.

Comme il existe une base de V composée de couples de formes (f, g) à coefficients rationnels (voir [BC]) et que ϕ préserve la rationalité des coefficients, il existe une base \mathcal{B} de $M_{\ell+1/2}^+(4)$ à coefficients rationnels. On en déduit alors qu'il existe une base de $S_{\ell+1/2}^+(4)$ à coefficients rationnels. En effet, cet espace est l'intersection des noyaux des formes linéaires

$$L_{\mathbf{a}} : f \mapsto a_0(f|_{\frac{k}{2}} \xi_{\mathbf{a}})$$

avec $\mathfrak{a} \in \{\infty, 0, 1/2\}$ et $a_0(f)$ le coefficient constant de f . Mais la fin de la proposition 2.2.4 montre aussi que $\dim S_{\ell+1/2}^+(4) = \dim M_{\ell+1/2}^+(4) - 1$ ce qui signifie que les formes $L_{\mathfrak{a}}$ sont toutes proportionnelles sur $M_{\ell+1/2}^+(4)$ et donc

$$S_{\ell+1/2}^+(4) = \text{Ker } L_{\infty}.$$

Comme L_{∞} est définie sur \mathbb{Q} (*i.e.* sa matrice dans la base \mathcal{B} est à coefficients rationnels), on peut construire une base de son noyau dont les éléments seront des combinaisons linéaires rationnelles d'éléments de \mathcal{B} et leurs coefficients de Fourier seront donc rationnels. \square

Preuve du corollaire 2.2.1. Le fait que f soit unique à un facteur multiplicatif près est une conséquence immédiate de la deuxième partie du théorème 2.2.2 et du fait qu'une forme propre dans S_{k-1} est unique à un facteur multiplicatif près.

Pour la deuxième assertion du corollaire, on remarque que les opérateurs de Hecke préservent la rationalité des coefficients de Fourier d'après le théorème 2.1.4 et la définition 2.2.2. De plus, $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ possède une base \mathcal{B}' de formes à coefficients rationnels d'après le lemme précédent. Les matrices des T_p^+ dans la base \mathcal{B}' sont donc rationnelles, commutent entre elles et possèdent les mêmes valeurs propres que les opérateurs de Hecke sur S_{k-1} (qui sont réelles et algébriques). Ainsi, il existe une base de vecteurs propres communs aux T_p^+ qui sont des combinaisons linéaires sur K d'éléments de \mathcal{B}' , où K est le corps de nombre engendré par les valeurs propres des T_p . \square

Remarque 2.2.4. Comme mentionné dans [O, Remark 3.26], il n'existe pas *a priori* une façon standard de renormaliser une forme propre $f \in S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ de sorte que ses coefficients soient réels et algébriques. Par exemple, imposer $a(1) = 1$ (si ce dernier est non-nul) ne garantit pas en général que tous les coefficients soient réels et algébriques.

2.3 Le principe de multiplicité un

Par principe de multiplicité un, on entend bien sûr une propriété du type

si f est vecteur propre des opérateurs de Hecke T_p pour p ne divisant pas le niveau, alors f est unique à un facteur multiplicatif près.

Le théorème 2.2.2 montre donc que ce principe s'applique dans l'espace $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ qui correspond en fait au niveau 1. Si l'on veut étendre ce genre de résultat à tout l'espace des formes de poids $k/2$ et en augmentant le niveau, alors il sera nécessaire d'introduire la notion de forme nouvelle à l'instar des espaces de formes de poids entier.

Définition 2.2.4. Soient N et M des entiers positifs tels que $N = 4M$ et M est sans facteur carré. Soient χ un caractère modulo N et k un entier impair. Si M est impair, on définit (de deux façons équivalentes) l'espace des formes anciennes de $S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi)$ et de $S_{\frac{k}{2}}^-(N, \chi)$ respectivement comme

$$\begin{aligned} S_{\frac{k}{2}}^{\text{old}}(N, \chi) &= \sum_{\substack{dd' = M \\ d > 1}} \left(S_{\frac{k}{2}}^+(4d', \chi) + S_{\frac{k}{2}}^+(4d', \chi)|_{\frac{k}{2}} U_{d^2} \right) \\ &= \sum_{p|M} \left(S_{\frac{k}{2}}^+(N/p, \chi) + S_{\frac{k}{2}}^+(N/p, \chi)|_{\frac{k}{2}} U_{p^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\frac{k}{2}}^{\text{old}}(N, \chi) &= \sum_{\substack{dd' = M \\ d > 1}} \left(S_{\frac{k}{2}}(4d', \chi) + S_{\frac{k}{2}}(4d', \chi)|_{\frac{k}{2}} U_{d^2} \right) + S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi) + S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi)|_{\frac{k}{2}} U_4 \\
 &= \sum_{p|M} \left(S_{\frac{k}{2}}(N/p, \chi) + S_{\frac{k}{2}}(N/p, \chi)|_{\frac{k}{2}} U_{p^2} \right) + S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi) + S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi)|_{\frac{k}{2}} U_4.
 \end{aligned}$$

Si M est pair, on pose

$$\begin{aligned}
 S_{\frac{k}{2}}^{+\text{old}}(N, \chi) &= \sum_{\substack{dd' = M \\ d > 1}} \left(S_{\frac{k}{2}}^+(4d', \chi) + S_{\frac{k}{2}}^+(4d', \chi)|_{\frac{k}{2}} U_{d^2}^* \right) \\
 &= \sum_{p|N} \left(S_{\frac{k}{2}}^+(N/p, \chi) + S_{\frac{k}{2}}^+(N/p, \chi)|_{\frac{k}{2}} U_{p^2}^* \right)
 \end{aligned}$$

avec $f|_{\frac{k}{2}} U_m^* = \mathcal{P}_+(f|_{\frac{k}{2}} U_m)$.

D'après le deuxième point de la proposition 2.1.10, ce sont bien des sous-espaces de $S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$) dans tous les cas. On définit alors l'espace des formes nouvelles de $S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi)$ comme

$$S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(N, \chi) = S_{\frac{k}{2}}^{+\text{old}}(N, \chi)^\perp$$

où l'exposant \perp désigne l'orthogonal dans $S_{\frac{k}{2}}^+(N, \chi)$ pour le produit hermitien de Petersson.

De même, si M est impair, on pose

$$S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(N, \chi) = S_{\frac{k}{2}}^{\text{old}}(N, \chi)^\perp$$

tandis que si M est pair on pose simplement

$$S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(N, \chi) = S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(N, \chi).$$

Des principes de multiplicité un ne sont connus pour l'essentiel que de le cas où $N = 4M$ avec M sans facteur carré et χ est réel. Le premier résultat dans ce sens est dû à Kohnen [K6], [K7] pour l'espace $S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(N, \chi)$ lorsque M est impair puis Manickam, Ramakrishnan et Vasudevan [MRV] généralisèrent ce résultat à l'espace $S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(N, \chi)$. Pour M pair, il aura fallu attendre les articles de Ueda et Yamana [UY] et Manickam [M] pour avoir un principe de multiplicité un sur $S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(N, \chi)$ et $S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(N, \chi)$. Un bon historique sur le sujet peut être trouvé dans [MMR].

Le théorème suivant omet le cas où M est pair. Néanmoins, si tel est le cas, on déduit facilement de la proposition 2.2.3 que $S_{\frac{k}{2}}^{+\text{old}}(4M) = \mathcal{P}_+ S_{\frac{k}{2}}^{\text{old}}(2M)$ et le corollaire 1 de [UY] montre alors que $S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(4M) = \mathcal{P}_+ S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(2M)$. Compte tenu de leur action sur les coefficients de Fourier, il est clair que les T_{p^2} ou $T_{p^2}^+$ avec $p \nmid M$ commutent avec \mathcal{P}_+ . Ainsi, $S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(4M)$ est isomorphe à $S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(2M)$ en tant que module de Hecke.

Théorème 2.2.3. [MRV, Theorems 5 and 6][K7, Theorem 2]

On pose $N = 4M$ avec M impair sans facteur carré. Si t est sans facteur carré alors pour tout $f \in S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(N)$, on a $\text{Sh}_t f \in S_{k-1}^{\text{new}}(2M)$. Si D est un discriminant fondamental tel que $(-1)^\ell D > 0$ alors pour tout $f \in S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(N)$, on a $\text{Sh}_D^+ f \in S_{k-1}^{\text{new}}(M)$.

De plus, il existe des isomorphismes

$$\Phi_1 : S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(N) \rightarrow S_{k-1}^{\text{new}}(2M)$$

et

$$\Phi_2 : S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(N) \rightarrow S_{k-1}^{\text{new}}(M)$$

qui sont des combinaisons linéaires des opérateurs Sh_t et Sh_D^+ respectivement. Ces deux isomorphismes commutent avec les opérateurs de Hecke.

En particulier, l'espace $S_{\frac{k}{2}}^{\text{new}}(N)$ (respectivement $S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(N)$) possède une base orthogonale de vecteurs propres communs aux opérateurs T_{p^2} pour $p \nmid N$ (respectivement $T_{p^2}^+$ pour $p \nmid M$). Chacun de ces vecteurs est unique à un facteur multiplicatif près et est donc vecteur propre des autres opérateurs de Hecke T_{p^2} ou $T_{p^2}^+$ pour $p \mid N$.

Par ailleurs, si $f \in S_{\frac{k}{2}}^+(N)$ vérifie $T_{p^2}^+ f = \omega_p f$ avec $\omega_p \in \mathbb{C}$ pour tout nombre premier p , alors pour tout discriminant fondamental D tel que $(-1)^\ell D > 0$ et tout entier n , on a

$$a(|D|n^2) = a(|D|) \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{D}{d}\right) d^{\ell-1} \omega_{n/d} \quad (2.2.5)$$

avec $(\omega_n)_n$ la suite des coefficients de $\text{Sh}^+ f$.

La différence entre les relations (2.2.3) et (2.2.5) vient du fait que l'algèbre de Hecke sur l'espace de Kohnen n'est pas simplement la restriction de celle sur l'espace tout entier. En général, les coefficients d'une forme propre dans $S_{\frac{k}{2}}^+(N)$ ne vérifient pas la relation (2.2.3). Il faut donc faire attention lorsqu'on parle de forme propre à bien préciser l'espace sur lequel on travaille.

3 La question de Kohnen

La correspondance de Shimura donne un lien fort entre les coefficients d'une forme de poids demi-entier et une forme de poids entier. Si $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$ est une forme propre telle que

$$T_{p^2} f = \omega_p f$$

pour tout p premier, alors les ω_p sont des valeurs propres d'opérateurs de Hecke sur $S_{2\ell}(N/2, \chi^2)$ donc vérifient la borne de Deligne [D4]

$$|\omega_p| \leq 2p^{\ell-1/2}$$

pour $p \nmid N/2$. Des calculs plus élémentaires montrent qu'on a même $|\omega_p| \ll p^{\ell-1/2}$ pour tout p (voir par exemple [STW, Theorem 2.1]).

En particulier, d'après (2.2.3),

$$|a(tn^2)| \ll_\varepsilon |a(t)|n^{\ell-1/2+\varepsilon} \quad (2.3.1)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$. De la même façon, si $f \in S_{\ell+1/2}^+(N)$ est une forme propre de l'espace de Kohnen, d'après (2.2.5) on a

$$|a(|D|n^2)| \ll_\varepsilon |a(|D|)|n^{\ell-1/2+\varepsilon} \quad (2.3.2)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout discriminant fondamental D tel que $(-1)^\ell D > 0$.

Estimer les coefficients de f revient donc à estimer ses coefficients $a(t)$ ou $a(|D|)$ suivant le cas. Malheureusement, telle qu'on l'a présentée, la correspondance de Shimura échoue à donner des informations sur ces coefficients.

3.1 Formule de Waldspurger

En 1981, Waldspurger [W2] établit la célèbre formule qui porte son nom et qui fait le lien entre la valeur du coefficient $a(t)$ (t sans facteur carré) d'une forme propre f de poids demi-entier et la valeur centrale de la fonction L associée à $\text{Sh}f$ tordue par un caractère quadratique. La même année, Kohnen et Zagier [KZ] rendent encore plus explicite cette formule dans le cas d'une forme propre de $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$.

Soit $N \geq 1$ un entier divisible par 4, χ un caractère modulo N et $k \geq 3$ un entier. On rappelle que pour t un entier sans facteur carré, on note χ_t le caractère défini par

$$\chi_t(n) = \left(\frac{(-1)^\ell t}{n} \right) \chi(n)$$

pour tout entier n et avec $\ell = (k-1)/2$.

Soit $F \in S_{k-1}(M, \chi^2)$, pour un certain entier $M \mid N/2$, de série de Fourier

$$F(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Alors la forme tordue définie par

$$F_{\bar{\chi}_t}(z) = \sum_{n \geq 1} \bar{\chi}_t(n)a(n)e(nz)$$

appartient à $S_{k-1}(16t^2N^2)$ d'après [AL2, Proposition 3.1]. Si on suppose de plus que F est vecteur propre des opérateurs de Hecke T_p pour presque tout p premier (*i.e.* sauf éventuellement un nombre fini), alors il en est de même pour $F_{\bar{\chi}_t}$ et il existe ainsi une unique forme nouvelle $\tilde{F}_{\bar{\chi}_t}$ de poids $k-1$ dont les coefficients de Fourier $(b(n))_{n \geq 1}$ vérifient

$$b(p) = \bar{\chi}_t(p)a(p)$$

pour presque tout p premier.

Théorème 2.3.1. *Si $N/4$ est pair alors on suppose que le conducteur de χ est divisible par 16. Soit $f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi) \setminus \{0\}$ de série de Fourier*

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz)$$

et telle que $T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi} f = \omega_p f$ pour tout p premier avec $p \nmid N$. Si $k = 3$ alors on suppose de plus que f est dans l'orthogonal de l'espace engendré par les séries thêta.

Soit $F \in S_{k-1}^{\text{new}}(M, \chi^2)$ telle que $M \mid N/2$ et $T_p^{k-1, M, \chi^2} F = \omega_p F$ pour tout $p \nmid M$ (l'existence d'une telle forme est assurée par la correspondance de Shimura).

Alors, il existe une fonction bornée $c_f : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{C}$, ne dépendant que de f , telle que pour tout entier t sans facteur carré,

$$a(t)^2 = c_f(t) L(1/2, \tilde{F}_{\chi_t}) t^{k/2-1}$$

avec \tilde{F}_{χ_t} définie comme précédemment, de coefficients de Fourier $(b(n)_{n \geq 1})$, et

$$L(s, \tilde{F}_{\chi_t}) = \sum_{n \geq 1} \frac{b(n)}{n^{s+k/2-1}}.$$

Preuve. Expliquons rapidement comment ce théorème se déduit du théorème 1 de [W2]. On remarque déjà que pour f fixée, la forme F du théorème 2.3.1 est unique à un facteur multiplicatif près d'après le principe de multiplicité un en poids entier. Donc on en fixe une et ainsi, toute constante dépendante de F ne dépend en fait que de f .

Dans l'introduction de [W2], Waldspurger définit deux hypothèses associées à F qui permettent d'appliquer son théorème. On rappelle leurs définitions. On note ρ la représentation automorphe de $\text{GL}_2(\mathbb{A})$ associée à F , avec \mathbb{A} l'anneau des adèles de \mathbb{Q} . Pour p un nombre premier, on note alors ρ_p la représentation locale de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à p . Si μ_1 et μ_2 sont des caractères de \mathbb{Q}_p^\times , alors on note $\pi(\mu_1, \mu_2)$ la représentation de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induite par le caractère du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures défini par

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \mu_1(a)\mu_2(b).$$

Pour tout p sauf éventuellement un nombre fini, ρ_p est de la forme $\pi(\mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_1 \neq \mu_2 \cdot | \cdot |_p^{\pm 1}$. Dans ce cas, on dit que ρ_p est principale. Dans les autres cas, ρ_p peut être soit une sous-représentation irréductible d'une représentation de la forme $\pi(\mu_1, \mu_1 \cdot | \cdot |_p^{\pm 1})$ (on dit alors que ρ_p est spécial), soit ρ_p est dite supercuspidale. Cette dernière notion signifie en particulier que les coefficients $a_F(n)$ de F sont nuls dès que $p \mid n$ et ceci ne peut arriver que si $p^2 \mid M$ (voir [K4, Theorem 9.27] par exemple). Pour plus de détails sur ces notions, le lecteur est renvoyé à [GH].

On pose alors

(H1) Pour tout p premier, si $\rho_p = \pi(\mu_1, \mu_2)$ est principale alors $\mu_1(-1) = \mu_2(-1)$.

(H2) L'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (a) ρ_2 n'est pas supercuspidale,
- (b) 16 divise le conducteur de $\left(\frac{(-1)^\ell}{\cdot}\right) \chi$,
- (c) 16 divise M .

La première hypothèse du théorème 2.3.1 implique que F vérifie bien les hypothèses (H1) et (H2). En effet, (H1) est automatiquement vérifiée d'après le résultat de Flicker [W2, Proposition 2] car F est l'image par la correspondance de Shimura d'une forme de poids demi-entier non-nulle. De plus, si $N/4$ est impair, alors 4 ne peut diviser M donc F n'est pas supercuspidale en 2.

Ainsi, le théorème de Waldspurger implique que $a(t)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$a(t) = \sum_j \lambda_j A^F(t) t^{(k-2)/4} \prod_p c_p^{(j)}(t)$$

où $A^F : \mathbb{N}^\flat \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie pour tout t sans facteur carré

$$A^F(t)^2 = \varepsilon(1/2, \bar{\chi}_t) L(1/2, \tilde{F}_{\bar{\chi}_t})$$

avec $\varepsilon(1/2, \bar{\chi}_t) = i^e G(\chi_t)$ et où $G(\chi_t)$ est la somme de Gauss normalisée associée à χ_t et $e = 0$ ou -1 suivant si ℓ est pair ou non.

Les fonctions c_p^j sont définies dans [W2, Partie VIII]. Elles ne sont pas tout à fait constantes sur \mathbb{N}^\flat mais on peut montrer qu'elles sont bornées (c'est un peu long mais élémentaire). En posant $c(t) = \varepsilon(1/2, \bar{\chi}_t) \left(\sum_j \lambda_j \prod_p c_p^{(j)}(t) \right)^2$, on obtient le résultat voulu. \square

La fonction c_f du théorème n'est pas explicite mais on peut contourner ce problème comme l'a fait Waldspurger en établissant la formule suivante.

Corollaire 2.3.1. [W2, Corollaire 2] *On reprend les notations du théorème précédent. Soient t_1 et t_2 des entiers positifs sans facteur carré tels que $t_1/t_2 \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ pour tout $p \nmid N$. Alors,*

$$a(t_1)^2 L(1/2, F \times \bar{\chi}_{t_2}) t_2^{k/2-1} = \chi(t_1/t_2) a(t_2)^2 L(1/2, F \times \bar{\chi}_{t_1}) t_1^{k/2-1}.$$

Une conséquence très importante de ce théorème est que si l'on veut majorer les coefficients $a(t)$ de f avec t sans facteur carré, il suffit d'obtenir des bornes pour les valeurs centrales de fonctions L de formes de poids entier tordues par un caractère quadratique. C'est l'objet du corollaire suivant. On suppose connue l'existence d'un $\rho > 0$ tel que pour toute forme propre $F \in S_{k-1}(N, \chi^2)$ et tout caractère réel ψ de conducteur q , on a

$$|L(1/2, \tilde{F}_\psi)| \ll_F q^\rho. \tag{2.3.3}$$

Alors le théorème 2.3.1 implique immédiatement que

Corollaire 2.3.2. *Si $N/4$ est pair alors on suppose que le conducteur de χ est divisible par 16. Soit $f \in S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$ de série de Fourier*

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e(nz).$$

Si $k = 3$ alors on suppose que f est dans l'orthogonal de l'espace engendré par les séries thêta.

Soit $t \geq 1$ un entier sans facteur carré, on a

$$|a(t)|^2 \ll_f t^{k/2-1+\rho}$$

où ρ est défini comme dans l'inégalité (2.3.3).

Preuve. Puisque les opérateurs de $T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi}$ pour $p \nmid N$ sont simultanément diagonalisables sur $S_{\frac{k}{2}}(N, \chi)$, il suffit de vérifier l'inégalité du corollaire pour f vecteur propre des $T_{p^2}^{\frac{k}{2}, N, \chi}$ avec $p \nmid N$, c'est-à-dire que f vérifie les conditions du théorème 2.3.1 et donc on a le résultat d'après l'inégalité (2.3.3). \square

L'étude de la valeur centrale $L(1/2, \tilde{F}_\psi)$ est un sujet de recherche à part entière toujours actif actuellement. En particulier, trouver des bornes non-triviales de cette quantité en fonction du conducteur de ψ est une tâche difficile.

Tout d'abord, compte tenu du théorème 2.3.1, il suffit d'étudier le cas où $F \in S_k^{\text{new}}(N, \chi)$ est vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke. Si le conducteur de ψ , noté $c(\psi)$, est premier avec N , alors

$$\tilde{F}_\psi = F_{\tilde{\psi}}$$

avec $\tilde{\psi}$ le caractère primitif modulo $c(\psi)$ qui engendre ψ . En effet, les deux membres de cette égalité sont des formes nouvelles propres ayant les mêmes p -ièmes coefficients pour presque tout p premier. On peut ainsi souvent se ramener au cas où ψ est primitif modulo q , premier avec N . La fonction $L(s, F_\psi)$ satisfait alors une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(s, F_\psi) := N^{s/2} \left(\frac{q}{2\pi}\right)^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L(s, F_\psi) = C_\psi \Lambda(1-s, F_{\tilde{\psi}})$$

avec C_ψ une constante de module 1 et explicite en fonction des paramètres (voir par exemple [L1, Theorem 6]).

Une première majoration « simple » serait d'obtenir une inégalité du type (2.3.3) en appliquant le principe de Phragmén-Lindelöf ([G2, Theorem 8.2.1]) à $\Lambda(s, F_\psi)$. Dans ce cas, on montre qu'on peut prendre $\rho = 1/2 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ce qu'on entend donc par bonne majoration, c'est une inégalité du type (2.3.3) avec $\rho < 1/2$. Ce type d'inégalités est plus généralement appelée borne sous-convexe dans la littérature. L'hypothèse de Riemann généralisée implique que $\rho = \varepsilon$ et cette propriété est appelée conjecture de Lindelöf. Une bonne introduction sur ce sujet peut être trouvée dans [DFI1], [DFI2], [DFI3] et [MV1].

Dans le cas où F est une forme modulaire cuspidale, nous allons citer le meilleur résultat que l'on connaisse à ce jour dû à Conrey et Iwaniec. Si q est un entier impair sans facteur carré, alors il existe un unique caractère primitif réel modulo q qui est $\left(\frac{\pm q}{\cdot}\right)$ avec $\pm q = 1$ [4]. Dans tous les cas, ce caractère coïncide en fait avec le symbole de Jacobi *i.e.* pour tout p premier ne divisant pas q , on a

$$\left(\frac{\pm q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Le lemme suivant montre même que si $\psi = \left(\frac{\cdot}{q}\right)$ alors $\tilde{F}_\psi = F_\psi$ pour toute forme propre F de niveau q .

Lemme 2.3.1. *Soient k et q des entiers avec q impair sans facteur carré. Si $F \in S_k(q)$ (pas nécessairement nouvelle), de coefficients $(a(n))_{n \geq 1}$, est vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke, alors $F_q \in S_k^{\text{new}}(q^2)$. Ici, F_q désigne la forme tordue de F par $\left(\frac{\cdot}{q}\right)$ *i.e.**

$$F_q(z) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{q}\right) a(n) e(nz).$$

Preuve. Quitte à renormaliser F , on peut supposer que $a(1) = 1$. On sait déjà que F_q vérifie

$$T_p F_q = \left(\frac{p}{q}\right) a(p) F_q \quad \text{pour } p \nmid q,$$

$$T_p F_q = 0 \quad \text{pour } p \mid q.$$

D'après [L1, Theorem 9], pour montrer que F_q est une forme nouvelle, il suffit alors de prouver l'existence d'un $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$F_q|_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^2 & 0 \end{pmatrix} = \gamma F_q$$

car ici les coefficients sont réels. Ceci est élémentaire lorsqu'on remarque que pour tout u et u' inversibles modulo q tels que $uu' = -1 [q]$, on a

$$\begin{pmatrix} q & u \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^2 & 0 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} u & -(uu' + 1)/q \\ q & -u' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & u' \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} F_q|_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^2 & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\varepsilon_q \sqrt{q}} \sum_{u [m]} \times \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} F_q|_k \begin{pmatrix} q & u \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_q \sqrt{q}} \sum_{u [m]} \times \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} F_q|_k \begin{pmatrix} q & u' \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-1}{q}\right) F_q. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.2. [CI, Corollary 1.2] *Soient k, N et q des entiers positifs avec $k \geq 12$, q impair sans facteur carré et $N \mid q$. Soit $F \in S_k^{\text{new}}(N)$ une forme propre. Alors,*

$$L(1/2, F_q) \ll_{k, \varepsilon} q^{1/3+\varepsilon}$$

où F_q est la forme cuspidale tordue par le symbole de Jacobi $\left(\frac{\cdot}{q}\right)$

On en déduit alors l'estimation suivante sur certains coefficients de Fourier de formes de poids demi-entier.

Proposition 2.3.1. *Soient $k \geq 13$, M en entier impair sans facteur carré, χ un caractère quadratique modulo $4M$ de conducteur $4^e q$ ($e \in \{0, 1\}$ et $q \mid M$) et $f \in S_{\frac{k}{2}}^+(4M, \chi)$ de coefficients de Fourier $(a(n))_{n \geq 1}$. Alors,*

$$|a(n)| \ll_{f, \varepsilon} n^{k/4-1/2+1/6+\varepsilon} \tag{2.3.4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $n = |D|m^2$ avec $m \in \mathbb{N}$ et D un discriminant fondamental impair tel que $(-1)^\ell D > 0$ et M/q divise D .

Preuve. D'après la relation (2.2.4) qui est encore vraie pour les formes cuspidales, on a $f = g|_{\frac{k}{2}} U_q$ avec $g \in S_{\frac{k}{2}}^+(4M)$. Par ailleurs, d'après [K7, Partie 5], on a

$$S_{\frac{k}{2}}^+(4M) = \bigoplus_{dr|M} S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(4d)|_{\frac{k}{2}} U_{r,2}$$

donc il suffit de montrer le résultat pour $g \in S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(4M)$ (avec M quelconque mais impair et sans facteur carré). D'après le théorème 2.2.3, on peut même supposer que f est vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke puisque ceux-ci engendrent $S_{\frac{k}{2}}^{+\text{new}}(4M)$.

Dans ce cas, on a $F = \text{Sh}^+ g \in S_{k-1}^{\text{new}}(M)$ d'après le théorème 2.2.3. D'après le théorème 2.3.2, on a

$$L(1/2, F_t) \ll_{k,\varepsilon} t^{1/3+\varepsilon}$$

pour tout t impair sans facteur carré et tel que $M | t$.

Soit D un discriminant fondamental impair tel que $(-1)^\ell D > 0$, alors $t = |D|$ est impair et sans facteur carré. De plus, le caractère $\chi_t = \left(\frac{D}{\cdot}\right) \chi_0$ (avec χ_0 le caractère trivial modulo 4) est engendré par le caractère $\left(\frac{\cdot}{t}\right)$. La formule de Waldspurger implique alors que

$$|a(t)| \ll_{f,\varepsilon} t^{k/4-1/2+1/6+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et donc pour tout t impair sans facteur carré tel que $M | t$.

D'après la relation (2.2.5), on en déduit le résultat pour les entiers $n = tm^2$ avec m quelconque. □

À notre connaissance, il n'existe pas de moyen de généraliser l'inégalité (2.3.4) à tout entier n . Le théorème 2.1.2 reste donc une meilleure estimation dans bien des cas.

Une autre application du théorème, plus liée au corollaire 2.3.1, est que l'annulation des coefficients $a(t)$ avec t sans facteur carré est équivalente à l'annulation de la valeur centrale de certaines fonctions L de formes modulaires. Plusieurs résultats sur ce sujet peuvent se trouver dans [BFH] ou [J2].

Finissons cette partie en citant le résultat de Kohnen et Zagier qui explicite la fonction (constante) c_f dans le cas où $f \in S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ (on peut alors supposer que $k \geq 13$ sinon cet espace est nul [K6, Proposition 1]). Leur formule pour $c_f(t)$ n'est valable que dans le cas où $t = |D|$ avec D un discriminant fondamental tel que $(-1)^\ell D > 0$. Ceci n'est pas une restriction puisque les coefficients $a(n)$ de f sont nuls dès que $(-1)^\ell n = 2$ ou $3 \pmod{4}$. Ainsi, pour $(-1)^\ell n = 0, 1 \pmod{4}$ on écrit $n = tm^2$ avec t sans facteur carré. On pose alors

$$D = \begin{cases} (-1)^\ell t & \text{si } (-1)^\ell t = 1 \pmod{4} \\ (-1)^\ell 4t & \text{si } (-1)^\ell t = 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

et on voit que l'entier n s'écrit de manière unique $n = |D|m^2$ avec D un discriminant fondamental tel que $(-1)^\ell D > 0$. D'après l'égalité (2.2.5), connaître les coefficients $a(|D|)$ et les valeurs propres associées à une forme propre f revient à connaître tous ses coefficients.

Théorème 2.3.3. [KZ, Theorem 1] Soit $f \in S_{\ell+1/2}^+(4)$ vecteur propre pour tous les opérateurs T_p^+ . On note $a(n)$ ses coefficients de Fourier et on pose $F = \text{Sh}^+ f$ (voir définition 2.2.3). Soit D un discriminant fondamental tel que $(-1)^\ell D > 0$. Alors,

$$|a(|D|)|^2 = \frac{(\ell-1)! \langle f, f \rangle}{\pi^\ell \langle F, F \rangle} |D|^{\ell-1/2} L(1/2, F, D)$$

où $L(s, F, D) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{D}{n}\right) a_F(n) n^{-(s+\ell-1/2)}$ et

$$\langle F, F \rangle = \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma_0(1) \backslash \mathcal{H})} \int_{\Gamma_0(1) \backslash \mathcal{H}} |F(z)|^2 y^{2\ell} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Remarque 2.3.1. Kohnen [K5] a généralisé ce résultat à toute forme propre de $S_{\ell+1/2}^+(4M)$ avec M impair et sans facteur carré.

D’après le corollaire 2.2.1 et le théorème 2.3.3, si f est une forme propre de $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$, normalisée de sorte que ses coefficients $a(n)$ soient réels pour tout n , alors

$$a(|D|)^2 = cL(1/2, \text{Sh}^+ f, D) \geq 0$$

avec $c > 0$ et pour tout discriminant fondamental D . La question de Kohnen peut donc se formuler ainsi : quelle racine carrée de $cL(1/2, \text{Sh}^+ f, D)$ est-elle égale à $a(|D|)$? Autrement dit, quel est le signe du coefficient $a(|D|)$?

3.2 Signes des coefficients de formes de poids demi-entier

De manière générale, et par extension de la question de Kohnen, on peut s’intéresser au signe, c’est-à-dire au caractère positif ou négatif, des coefficients des formes de poids demi-entier. C’est un aspect de la théorie des formes modulaires qui est devenu un sujet d’étude à part entière. De nombreux articles traitent notamment des changements de signe dans la suite des coefficients d’une forme de poids entier (voir [HKKL], [LRW], [JLL⁺2] ou [LR]). Soit

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e(nz) \tag{2.3.5}$$

une forme propre de $S_{\ell+1/2}(N)$ avec $\ell \geq 2$. On suppose que les coefficients $a(n)$ sont tous réels. Pour $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d’entiers naturels, on appelle changement de signe dans la suite $(a(n_k))_k$ un couple d’entiers positifs (k_1, k_2) tel que $k_1 < k_2$, $a(n_{k_1})a(n_{k_2}) < 0$ et $a(n_k) = 0$ pour tout entier k tel que $k_1 < k < k_2$.

Soit t un entier positif sans facteur carré tel que $a(t) \neq 0$. Bruinier et Kohnen [BK] ont d’abord montré sous certaines hypothèses qu’il y a une infinité de changements de signe dans la suite $(a(tn^2))_{n \geq 1}$ et des résultats d’équirépartition ont été établis dans [IW] et [AdRIW] à propos des signes des $a(tn^2)$ pour $n \geq 1$. Dans [HKKL] et [LRW], les auteurs étudient le cas de $(a(t))_{t \in \mathbb{N}^b}$ et prouvent aussi l’existence d’une infinité de changements de signe mais cette fois dans une version quantitative.

Puis, Meher et Murty [MRM] ont tourné leur attention sur la suite complète $(a(n))_{n \geq 1}$ et ont obtenu un résultat similaire lorsque f est une forme propre de $S_{\ell+1/2}^+(4)$. En détectant des changements de signes, ils ont prouvé en particulier que

$$\left| \left\{ n \leq x \mid a(n) \leq 0 \right\} \right| \gg_{f,\varepsilon} x^{27/70-\varepsilon} \tag{2.3.6}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et x assez grand. Dans [JLL+2], les auteurs améliorent cette estimation en remplaçant l'exposant $27/70 - \varepsilon$ par $1/2$ et ils généralisent cela lorsque n est restreint à une progression arithmétique de module fixé.

D'importants progrès ont été faits très récemment sur le sujet dans [LR]. En effet, sous les mêmes hypothèses, Lester et Radziwiłł montrent que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour x assez grand, il y a au moins $x^{1-\varepsilon}$ changements de signe dans la suite $(a(n))_n$ avec $1 \leq n \leq x$ et où n décrit les discriminants fondamentaux de la forme $n = 4t$ avec t pair et sans facteur carré. Cela améliore donc énormément l'estimation en (2.3.6) mais en fait, en ce qui concerne la quantité de signes plus ou moins, les auteurs vont plus loin. En utilisant un résultat d'Ono et Skinner [OS], ils prouvent le théorème suivant.

Théorème 2.3.4. *Soit $\ell \geq 2$ un entier et soit $f \in S_{\ell+1/2}^+(4)$ une forme propre de l'espace de Kohnen normalisée de sorte que ses coefficients $(a(n))_{n \geq 1}$ soient algébriques et réels (voir corollaire 2.2.1). Alors, pour x suffisamment grand, on a*

$$\left| \left\{ n \leq x \mid a(n) > 0 \right\} \right| \gg_f \frac{x}{\log x} \quad \text{et} \quad \left| \left\{ n \leq x \mid a(n) < 0 \right\} \right| \gg_f \frac{x}{\log x}.$$

Lester et Radziwiłł donnent une preuve assez rapide de ce résultat en passant sous silence certains détails techniques. On reprend ici cette preuve en détaillant les choses au maximum. On aura notamment besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3.2. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$ dont on écrit le développement en série de Fourier comme en (2.3.5). On suppose que f est soit une forme propre (pour tous les opérateurs de Hecke) de $S_{\ell+1/2}(N, \chi)$, soit une forme propre de $S_{\ell+1/2}^+(N, \chi)$. Si $a(n) = 0$ dès que n n'est pas un carré alors $f = 0$.*

Preuve. D'après l'inégalité (2.3.1) ou (2.3.2), on a $|a(n^2)| \ll_{f,\varepsilon} n^{\ell-1/2+\varepsilon}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, pour tout $x \geq 1$, on obtient

$$\sum_{n \leq \sqrt{x}} |a(n^2)|^2 \ll_{f,\varepsilon} x^{\ell+\varepsilon}$$

mais cette dernière inégalité rentre en contradiction avec le corollaire 2.1.1 si $f \neq 0$. En effet, par hypothèse sur les coefficients de f , le membre de gauche de l'inégalité vaut $\sum_{n \leq x} |a(n)|^2$. □

Preuve du théorème 2.3.4. La preuve se base sur le lemme fondamental de [OS]. Ce lemme stipule en particulier que si f est une forme de poids demi-entier et de niveau N telle que ses coefficients $a(n)$ sont algébriques et que $a(t) \neq 0$ pour au moins un $t \in \mathbb{N}^b \setminus \{1\}$ premier avec N , alors pour x assez grand,

$$\left| \left\{ D \in \mathbb{D} \mid 1 \leq |D| \leq x \text{ et } a(|D|) \neq 0 \right\} \right| \gg_f \frac{x}{\log x} \tag{2.3.7}$$

où \mathbb{D} désigne l'ensemble des discriminants fondamentaux.

Pour pouvoir appliquer ce lemme, il nous faut d'abord vérifier ses hypothèses. On sait déjà que les coefficients de f sont algébriques donc on va montrer qu'il existe $t \in \mathbb{N}^b \setminus \{1\}$ impair tel que $a(t) \neq 0$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas et considérons un entier $n \geq 1$. Puisque f appartient à l'espace plus, on sait déjà que $a(n) = 0$ si

$(-1)^\ell n = 2, 3$ [4]. Si $(-1)^\ell n = 1$ [4], alors n s'écrit sous la forme $n = |D|m^2$ avec $D \in \mathbb{D}$ impair. Ainsi, l'équation (2.2.5) implique que $a(n) = 0$ sauf éventuellement si $|D| = 1$. Maintenant, si $n = 0$ [4] alors n s'écrit sous la forme $n = 4^j n'$ avec $4 \nmid n'$. D'après ce qui précède, $a(n') = 0$ sauf éventuellement si n' est un carré. Or, puisque f est une forme propre pour T_4^+ , on a, d'après la définition 2.2.2,

$$a(4^j n') = \left(\lambda(2) - \left(\frac{(-1)^\ell n}{2} \right) 2^{\ell-1} \right) a(4^{j-1} n') - 2^{k-1} a(4^{j-2} n')$$

où $\lambda(2)$ désigne la valeur propre pour T_4^+ associée à f . On montre ainsi par récurrence que si $a(n') = 0$ alors $a(n) = 0$.

Par conséquent, les coefficients $a(n)$ sont nuls dès que n n'est pas un carré, ce qui, d'après le lemme 2.3.2, entraîne que $f = 0$ et aboutit à une absurdité. On a donc vérifié les hypothèses du lemme fondamental de [OS], il reste alors à montrer que (2.3.7) implique le résultat.

Soit $D \in \mathbb{D}$ tel que $a(|D|) \neq 0$. Pour tout nombre premier p , d'après la relation (2.2.5), on a

$$a(|D|p^2) = a(|D|) \left(\lambda(p) - \left(\frac{D}{p} \right) p^{\ell-1} \right)$$

où $\lambda(p)$ est la valeur propre associée à T_p^+ . Le théorème 2.2.3 montre que $\lambda(p)$ est en fait une valeur propre d'un opérateur de Hecke T_p en poids 2ℓ . Cela implique notamment qu'il existe $p > 2$ tel que $\lambda(p) < -p^{\ell-1}$. En effet, on peut voir cela comme une conséquence de l'équirépartition des valeurs propres normalisées $\lambda(p)p^{-(\ell-1/2)}$ dans $[-2, 2]$ selon la mesure de Sato-Tate (voir [BLGHT]). Ainsi, $a(|D|)$ et $a(|D|p^2)$ ont des signes opposés et ce pour tout D tel que $a(|D|) \neq 0$ (mais p reste fixe). De plus, $|D|p^2$ n'est pas égal à la valeur absolue d'un discriminant fondamental donc pour chaque D tel que $a(|D|) \neq 0$, on peut associer de manière injective un coefficient strictement positif et un coefficient strictement négatif. Puisque le nombre de $|D| \leq x/p^2$ en question est $\gg \frac{x/p^2}{\log(x/p^2)}$ pour x assez grand d'après (2.3.7), on obtient la conclusion souhaitée. □

Remarque 2.3.2. Dans [LR], les auteurs ne prennent pas la peine de vérifier que $a(t) \neq 0$ pour un certain $t \in \mathbb{N}^{\flat} \setminus \{1\}$. Ce genre de résultat bien connu peut notamment se déduire de la correspondance de Shimura et de l'étude des moments des valeurs centrales de fonctions L associées à une forme de poids entier tordue par des caractères quadratiques. Notre contribution ici provient donc de l'utilisation du lemme 2.3.2.

Le théorème 2.3.4 est le résultat le plus proche de la réponse conjecturale à la question de Kohnen, qui est que les signes des $a(n)$ s'équirépartissent. En fait, on conjecture même que la proportion de changements de signe tend vers $1/2$.

On étudiera ce genre problème au chapitre 4. En particulier, on s'appliquera à détecter une certaine proportion de signes positifs ou négatifs dans la suite $(a(n))_n$ où les n sont pris dans une progression arithmétique. De plus, l'hypothèse que f est une forme propre sera enlevée, ce qui constitue un progrès majeur comparé aux précédents résultats puisque dans ce cas, on ne peut pas utiliser la formule de Waldspurger ainsi que la quasi-multiplicativité des coefficients de Fourier.

Chapitre 3

Coefficients de Fourier en progression arithmétique

Nous allons à présent étudier le comportement probabiliste des sommes de coefficients de Fourier de formes modulaires de poids demi-entier dans les progressions arithmétiques. Il sera établi un résultat analogue à ceux issus des précédents travaux de Fouvry-Ganguly-Kowalski-Michel et de Kowalski-Ricotta dans le cas du poids entier. On montre en fait que les sommes que l'on considère s'équirépartissent selon un mélange de lois gaussiennes lorsque les paramètres tendent vers l'infini et dans un domaine de convergence précis. Ce résultat apparaît comme une conséquence de l'équirépartition asymptotique des sommes de Salié.

1 Introduction

1.1 Le contexte mathématique

Soit f une forme cuspidale de poids $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Dans tout le chapitre, on s'intéresse aux sommes dans les progressions arithmétiques de ses coefficients de Fourier normalisés $\hat{f}_\infty(n)$ à la pointe infinie. Soient q un entier, $w : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact et X un nombre réel strictement positif. Posons

$$S(X, q, a) = \sum_{n=a[q]} \hat{f}_\infty(n) w\left(\frac{n}{X}\right) \quad (3.1.1)$$

pour tout entier a premier avec q .

Selon la *square root cancellation philosophy*, on s'attend à ce que le module de $S(X, q, a)$ soit du même ordre de grandeur que $\sqrt{X/q}$ puisque la taille de l'intervalle de sommation vaut essentiellement X/q et que les termes de la somme sont bornés en moyenne. Cette philosophie nous amène ainsi à considérer

$$E(X, q, a) = \frac{S(X, q, a)}{\sqrt{X/q}}. \quad (3.1.2)$$

Dans [FGKM], une étude probabiliste de cette quantité est réalisée lorsque q est un nombre premier et les deux paramètres q et X tendent vers l'infini dans un certain domaine

de convergence. Précisément, les auteurs calculent les différents moments de $E(X, q, a)$ et l'introduction du poids lisse w dans (3.1.1) assure la convergence de ces moments. En particulier, le résultat suivant est prouvé.

Théorème 3.1.1 (Fouvry, Ganguly, Kowalski, Michel [FGKM]). *Soient p un nombre premier impair et f une forme propre de Hecke de niveau 1 et de poids entier k . Si X vérifie $p^{2-\varepsilon} \ll_\varepsilon X = o(p^2)$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite de variables aléatoires*

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto E(X, p, a) \end{aligned}$$

définies en (3.1.2), converge en loi quand $p \rightarrow +\infty$ vers une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et de variance explicite en fonction de la norme de Petersson de f et de la norme L^2 de w .

Remarque 3.1.1.

- En fait, les auteurs de [FGKM] établissent la convergence du terme d'erreur « naturel »

$$\frac{S(X, p, \cdot) - M_p}{\sqrt{X/p}}$$

avec $M_p = \frac{1}{p} \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) w\left(\frac{n}{X}\right)$. Cependant, le terme principal M_p tend très rapidement vers 0 (c'est d'ailleurs bien précisé au début de leur article).

- Quitte à les multiplier par un même scalaire, les coefficients de Fourier de f sont réels puisque, dans ce cas, les valeurs propres des opérateurs de Hecke le sont.

Certaines propriétés analytiques des sommes de type (3.1.1) sans poids lisse w ont été étudiées dans plusieurs travaux antérieurs à [FGKM]. Le calcul de la variance lorsque le poids k est un entier a d'ailleurs été l'objet de nombreux articles (voir par exemple [B2], [L2] ou [LZ]).

Évidemment, la somme (3.1.1) n'est intéressante que si $q < X$. Dans [LZ], la variance devient même très explicite lorsque $X^{1/2} < q < X$ tandis que le cas où $q < X^{1/2}$ reste plus mystérieux. Précisément, Lau et Zhao montrent que pour $X^{1/2+\varepsilon} \ll q \ll X^{1-\varepsilon}$, on a

$$\sum_{a=1}^q \left| \sum_{\substack{n \leq X \\ n = a [q]}} \hat{f}_\infty(n) \right|^2 \sim c_f X \quad \text{quand } X \rightarrow +\infty \quad (3.1.3)$$

et où c_f est le résidu en $s = 1$ de la fonction L de Rankin-Selberg de f .

En revanche, si $X^{1/4+\varepsilon} \ll q \ll X^{1/2-\varepsilon}$ alors la somme estimée dans (3.1.3) est bornée, à constante multiplicative près, par $qX^{1/2} = o(X)$.

En fait, si on enlève le poids lisse w dans la définition de $E(X, p, a)$ alors le théorème 3.1.1 reste vrai. Ce fait non-trivial est démontré dans [LY].

Le théorème 3.1.1 a été généralisé dans [KR] à toute forme propre de Hecke-Maass pour le groupe GL_d . Ceci dit, dans ce cas les coefficients de Fourier ne sont pas nécessairement réels (même après renormalisation). La loi asymptotique que l'on trouve est toujours gaussienne mais potentiellement à valeurs complexes (où \mathbb{C} est identifié à \mathbb{R}^2).

Rappelons que si f est une forme propre de Hecke-Maass pour GL_d alors elle a des coefficients de Fourier de la forme

$$a_f(m_1, \dots, m_{d-1})$$

pour tous entiers $m_1, \dots, m_{d-2} > 0$ et $m_{d-1} \neq 0$. Si, dans ce cas, on pose

$$\hat{f}_\infty(n) = a_f(n) = a_f(n, 1, \dots, 1)$$

pour tout $n \geq 1$, alors ces coefficients vérifient

$$\overline{a_f(m)} = a_{f^*}(m)$$

où f^* est la forme duale de f . Ainsi, ces coefficients sont réels si f est auto-duale *i.e.* $f^* = f$.

Le résultat suivant est établi dans [KR].

Théorème 3.1.2 (Kowalski, Ricotta [KR]). *Soient p un nombre premier impair et f une forme propre de Hecke-Maass pour GL_d (paire ou impaire) de coefficients de Fourier $\hat{f}_\infty(n) = a_f(n, 1, \dots, 1)$ avec $\hat{f}_\infty(1) = 1$. Si X vérifie $p^{d-\varepsilon} \ll_\varepsilon X = o(p^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite de variables aléatoires*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p^* & \rightarrow & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & E(X, p, a) \end{array}$$

définies en (3.1.2), converge en loi lorsque $p \rightarrow +\infty$ vers une variable aléatoire gaussienne réelle ou complexe suivant si f est auto-duale ou non. Cette gaussienne est d'espérance nulle et de matrice de covariance explicite en fonction de la norme de Petersson de f et de la norme L^2 de w .

Dans le cas du théorème 3.1.2 pour $d > 2$, la méthode utilisée dans [LY] ne s'applique plus mais on conjecture que le poids lisse dans la définition de $E(X, p, a)$ peut encore être enlevé.

1.2 Énoncé des résultats principaux

À la fois dans [FGKM] et dans [KR], les auteurs établissent un développement asymptotique du ν -ième moment de $E(X, q, \cdot)$ et montrent que le terme principal vaut

$$\delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{2^{\nu/2} (\nu/2)!} V^{\nu/2}$$

pour un certain $V > 0$. Ceci correspond bien au ν -ième moment d'une loi normale de variance V .

Le but de cette étude est de calculer ces moments dans le cas d'une forme de poids demi-entier et où le module q de la progression arithmétique est une puissance de nombre premier. On verra alors que le comportement asymptotique mis en évidence dans ce cas est bien différent de ceux rencontrés dans [FGKM] et [KR].

Notre première contribution se concentre uniquement sur les moments de $E(X, q, \cdot)$. Afin d'exploiter la multiplicativité des coefficients de f , on aura besoin de faire l'hypothèse suivante. On rappelle que pour $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$ (respectivement $S_{\ell+1/2}^+(N, \chi)$), on dit que f est une forme propre si elle est vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke $T_{p^2}^{\ell+1/2, N, \chi}$ (respectivement $T_{p^2}^{\ell+1/2, N, \chi, +}$) avec p premier. De plus, on note $f_0 = f|_{\ell+1/2} W_N \in S_{\ell+1/2} \left(N, \left(\frac{N}{\cdot} \right) \bar{\chi} \right)$ l'image de f par l'involution de Fricke.

Hypothèse 3.1.1. Pour $f \in S_{\ell+1/2}(N)$, avec $\ell \geq 1$, on suppose qu'au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $N = 4$ et f est une forme propre.
2. f_0 est une forme propre.
3. $f_0 \in S_{\ell+1/2}^+(N, \left(\frac{N}{\cdot}\right))$ est une forme propre de l'espace de Kohnen.

Par ailleurs, dans le cas où $\ell = 1$, on suppose que f est dans l'orthogonal du sous-espace engendré par les séries thêta.

Dans l'énoncé qui suit, la dépendance exacte en les paramètres initiaux est omise. Cet aspect sera traité plus tard. Pour éviter des problèmes de notation, on notera plutôt N' le niveau de la forme.

Théorème 3.1.3. Soit $f \in S_{\ell+1/2}(N')$ une forme cuspidale de poids demi-entier vérifiant l'hypothèse 3.1.1. On définit $E(X, q, a)$ comme en (3.1.2). Soit $\nu > 0$ un entier et $e \in \{\pm 1\}$. Il existe une constante explicite C_ν dépendant seulement de ν telle que pour toute puissance d'un nombre premier $q = p^N$ avec $p \nmid N'$, tout $X > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$1 \leq Y^{(1+\varepsilon)2^{\nu-2}} < C_\nu q$$

où $Y = N'q^2/X$, on a

$$\frac{2}{\varphi(q)} \sum_{\substack{a \in [q] \\ \left(\frac{a}{p}\right) = e}} E(X, q, a)^\nu = \delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m < Y^{1+\varepsilon} \\ \left(\frac{m}{p}\right) = e}} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^{\nu/2} + O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p}\right) \quad (3.1.4)$$

où $\alpha \in [0, 1/2[$ est défini en (3.2.3), $\hat{f}_0(n)$ est le n -ième coefficient de Fourier normalisé de f à la pointe 0 et B est une fonction C^∞ à décroissance rapide et ne dépendant que de w et ℓ .

On prouvera même une version plus élaborée de ce théorème avec plus de flexibilité en les paramètres (voir théorèmes 3.6.1 et 3.6.2). Le fait que le terme d'erreur soit non borné lorsque p est fixé et $Y \rightarrow +\infty$ est une des premières complications. On verra que dans ce régime de convergence, on peut définir à partir de $S(X, q, a)$ un analogue de $E(X, q, a)$ qui converge.

En revanche, si on veut rendre ce terme d'erreur négligeable pour tout ν , alors Y doit croître moins vite que toute puissance de p . Ce faisant, le symbole de Legendre tordant la somme du terme principal engendre une difficulté supplémentaire. En effet, contrôler une somme courte tordue par un caractère de grand conducteur est un problème très délicat en général. En fait, différents comportements peuvent apparaître et on explicitera précisément l'un d'entre eux dans la proposition 3.8.1. On reviendra en détail sur cet aspect du problème dans la section 8 et on en déduira un analogue des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 pour une sous-suite de $E(X, q, a)$.

Corollaire 3.1.1. Soit $f \in S_{\ell+1/2}(N')$ une forme cuspidale de poids demi-entier vérifiant l'hypothèse 3.1.1. On suppose que ses coefficients de Fourier à la pointe 0 sont réels (i.e. $\hat{f}_0(n) \in \mathbb{R}$ pour tout n). On définit $E(X, q, a)$ comme en (3.1.2). Soit $(q_k)_{k \geq 1}$ une suite de puissances de nombres premiers, disons $q_k = p_k^{N_k}$, où $(p_k)_k$ est la suite des nombres premiers. Si $(X_k)_k$ est une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{q_k^2}{X_k} = o(\log \log p_k) \quad \text{et} \quad X_k = o(q_k^2) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty \quad (3.1.5)$$

alors il existe une sous-suite de la suite de variables aléatoires

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/q_k \mathbb{Z}^\times & \rightarrow & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & E(X_k, q_k, a) \end{array}$$

qui converge en loi vers la loi mixte

$$\frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, 2V_{f,w})$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 et $\mathcal{N}(0, 2V_{f,w})$ est une loi normale d'espérance nulle et de variance $2V_{f,w} = 2 \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f, f \rangle \|w\|_2^2$ avec $\langle f, f \rangle$ défini comme en (2.1.1).

Remarque 3.1.2.

- Le régime de convergence (3.1.5) peut être élargi si on suppose certaines conjectures classiques. Par exemple, sous GRH il suffit d'avoir seulement $q_k^2/X_k = o(\log p_k)$.
- Supposer que les coefficients sont réels est crucial. C'est cependant une hypothèse relativement classique que l'on fait souvent dans les articles qui traitent des formes de poids demi-entier. Notamment dans l'étude des changements de signes de $(\hat{f}_\infty(n))_{n \geq 1}$ (voir [BK], [HKKL] ou [LRW]). De plus, l'hypothèse que f ou f_0 est une forme propre entraîne souvent qu'à renormalisation près, ses coefficients sont réels (voir par exemple le corollaire 2.2.1). Des exemples explicites de telles formes sont donnés dans [BK, page 7] et [C2, page 109] mais aussi après la proposition 2.1.3.

Ce résultat est plutôt surprenant si on compare au cas du poids entier. On est tenté de se demander pourquoi la convergence n'est établie que pour une sous-suite de nombres premiers. On verra en quoi c'est une restriction naturelle dans la section 8.

L'apparition d'un mélange de deux lois distinctes dans le corollaire 3.1.1 est une conséquence de l'équirépartition asymptotique des sommes de Salié. Celle-ci est elle-même mixte puisque (comme on le verra) on a deux comportements différents suivant que a est un carré modulo q ou non. Pour cette raison, on va décomposer les moments en une moyenne entre un moment sur les carrés et un moment sur les non-carrés modulo q .

Dans la dernière section, on verra que la preuve du théorème 3.1.3 peut être adaptée pour traiter le cas de coefficients de Fourier d'une forme modulaire de poids entier en progression arithmétique de module $q = p^N$ où p est un nombre premier impair et $N > 1$. On donnera un schéma de preuve du théorème suivant.

Théorème 3.1.4. Soit f une forme cuspidale quelconque de niveau N' et de poids (pair) κ . On définit $E(X, q, a)$ comme en (3.1.2). Soit $\nu > 0$ un entier et $e \in \{\pm 1\}$. Il existe une constante explicite C_ν , dépendant seulement de ν telle que pour toute puissance de nombre premier $q = p^N$ avec $p \nmid 2N'$ et $N \geq 2$, tout $X > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ satisfaisant

$$1 \leq Y^{(1+\varepsilon)2^{\nu-2}} < C_\nu q$$

où $Y = N'q^2/X$, on a

$$\frac{2}{\varphi(q)} \sum_{\substack{a \in [q] \\ \left(\frac{a}{p}\right) = e}} E(X, q, a)^\nu = \delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m < Y^{1+\varepsilon} \\ \left(\frac{m}{p}\right) = e}} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^{\nu/2} \quad (3.1.6)$$

$$+ O\left(Y^{-1/2+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p}\right)$$

où B est une fonction C^∞ à décroissance rapide et ne dépendant que de w et κ .

Comme précédemment, on en déduira le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.2. Soit f une forme cuspidale non-nulle de niveau N' et de poids (pair) κ . On suppose que ses coefficients de Fourier à l'infini sont réels. On définit $E(X, q, a)$ comme en (3.1.2). Soit $(q_k)_{k \geq 1}$ une suite de puissances de nombres premiers, disons $q_k = p_k^{N_k}$, où $(p_k)_k$ est la suite des nombres premiers et $N_k \geq 2$. Si $(X_k)_k$ est une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{q_k^2}{X_k} = o(\log \log p_k) \quad \text{et} \quad X_k = o(q_k^2) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty \quad (3.1.7)$$

alors il existe une sous-suite de la suite de variables aléatoires

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/q_k \mathbb{Z}^\times & \rightarrow & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & E(X_k, q_k, a) \end{array}$$

qui converge en loi vers la loi mixte

$$\frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, 2V_{f,w})$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 et $\mathcal{N}(0, 2V_{f,w})$ est une loi normale d'espérance nulle et de variance $2V_{f,w} = 2 \frac{(4\pi)^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \langle f, f \rangle \|w\|_2^2$.

1.3 Survol de la preuve du théorème 3.1.3

De manière élémentaire, on commence par détecter la congruence et appliquer une formule Voronoï pour montrer que $E(X, q, a)$ est essentiellement égal à

$$\frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) \text{Sa}_q(ma) B\left(\frac{m}{Y}\right) \quad (3.1.8)$$

où $Y = N'q^2/X$, la fonction B est C^∞ à décroissance rapide et ne dépend que de w et k , les $\hat{f}_0(n)$ sont les coefficients normalisés de f à la pointe 0 et

$$\text{Sa}_q(x) = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{2\pi y}{q}\right) & \text{si } \left(\frac{x}{p}\right) = 1 \text{ et où } y^2 = x [q], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui est, à un facteur près, la valeur d'une somme de Salié normalisée comme on le verra dans la section 4.

De ce fait, calculer les moments de $E(X, q, \cdot)$ implique de calculer les moments de sommes de Salié et c'est là d'où provient la principale différence entre cette étude et la preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. En effet, dans [FGKM] et [KR] les sommes de Salié sont remplacées par des sommes de Kloosterman. Les auteurs font alors appel à la théorie des fonctions traces pour évaluer les moments de telles sommes. Ils utilisent de manière cruciale le fait que les groupes de monodromie associés à différentes sommes sont d'une certaine manière indépendants deux-à-deux et indépendants de p .

Ceci n'est plus le cas ici puisque premièrement, q n'est pas nécessairement un nombre premier p et deuxièmement, même si c'était le cas, le groupe de monodromie d'une somme de Salié est le groupe diédral d'ordre $2p$ (ce qui dépend de p) et il n'y a pas indépendance de ces groupes lorsqu'on opère un décalage multiplicatif dans les sommes. Ainsi, comme on le verra plus en détail, les moments de sommes de Salié ne convergent pas. On tâchera néanmoins de contourner ce problème.

1.4 Notations

Avant de rentrer dans le vif du sujet, on va introduire certaines notations propres à ce chapitre. Si u est un entier premier avec q alors \bar{u} est un entier tel que $u\bar{u} = 1[q]$ et si q est une puissance d'un nombre premier impair et u un carré inversible modulo q alors on note \sqrt{u}^q sa racine carrée modulo q dans $\llbracket 1, (q-1)/2 \rrbracket$. De plus, on rappelle que $\varepsilon_q = 1$ ou i suivant si $q = 1$ ou 3 modulo 4.

Les symboles \sum^\times et \sum^\square signifient que l'on restreint l'intervalle de sommation respectivement aux classes inversibles modulo q et aux carrés inversibles modulo q .

Si \mathcal{M} est une fonction définie sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$ alors on note \mathbb{E}, \mathbb{E}^+ et \mathbb{E}^- son espérance respectivement sur les classes inversibles, les carrés inversibles et les non-carrés inversibles modulo q . Précisément,

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{a[q]}^\times \mathcal{M}(a) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\pm(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varphi(q)} \sum_{\substack{a[q] \\ \left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1}}^\times \mathcal{M}(a)$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

Soit δ_q la fonction de Dirac en 0 modulo q i.e. pour tout entier x , on a

$$\delta_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 [q], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note aussi δ_0 pour la fonction de Dirac en 0 classique.

Pour alléger un peu les notations, on ne notera pas la dépendance en X dans les sommes S et E introduites précédemment. On adopte les notations suivantes.

$$S_q := S(X, q, \cdot), \quad (3.1.9)$$

$$E_q := E(X, q, \cdot). \quad (3.1.10)$$

2 Outils issus de la théorie des formes de poids demi-entier

On va évidemment utiliser certaines propriétés vues au deuxième chapitre. Néanmoins, d'autres aspects de la théorie des formes de poids demi-entier nous seront utiles ici. De plus, certaines notations vont légèrement différer.

Soit ℓ un entier. On rappelle qu'une forme cuspidale f de $S_{\ell+1/2}(N, \chi)$ possède des développements en série de Fourier aux pointes ∞ et 0 sous la forme

$$f_\infty(z) = f(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e(nz), \quad (3.2.1)$$

$$f_0(z) = (-i\sqrt{N}z)^{-(\ell+1/2)} f\left(-\frac{1}{Nz}\right) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_0(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e(nz). \quad (3.2.2)$$

Donc les coefficients $\hat{f}_\mathfrak{a}(n)$ que l'on considère ici seront toujours les coefficients normalisés de f aux différentes pointes \mathfrak{a} . Puisque $S_{\ell+1/2}(4) = \{0\}$ pour $\ell \leq 3$ (proposition 2.1.3), on peut même supposer par la suite que $\ell \geq 4$ si on se place dans le cas 1 de l'hypothèse 3.1.1.

Remarque 3.2.1. Remarquons que si les coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ sont réels alors les coefficients $\hat{f}_0(n)$ le sont aussi et inversement.

On note T_m le m -ième opérateur de Hecke introduit au premier chapitre. On rappelle que si $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$ et si p est un nombre premier alors d'après la proposition 2.1.4

$$T_{p^2} f(z) = \sum_{n \geq 1} \left(p^{\ell-1/2} \hat{f}_\infty(p^2 n) + \chi_n(p) p^{\ell-1} \hat{f}_\infty(n) + \chi(p^2) p^{\ell-1/2} \hat{f}_\infty(n/p^2) \right) n^{\ell/2-1/4} e(nz)$$

avec

$$\chi_n(p) = \chi(p) \left(\frac{(-1)^\ell n}{p} \right)$$

et par convention, $\hat{f}_\infty(n/p^2) = 0$ si $p^2 \nmid n$. Aussi, d'après la proposition 2.1.6,

$$T_{m^2 n^2} = T_{m^2} T_{n^2}$$

pour tous entiers m et n premiers entre eux.

Soit $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$ et tout $t \in \mathbb{N}^\flat$,

$$|\hat{f}_\infty(t)| \ll_{f, \varepsilon} t^{\alpha + \varepsilon} \quad (3.2.3)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 2.1.2, on peut prendre $\alpha = 3/14$ voire $\alpha = 1/6$ dans certains cas (voir la proposition 2.3.1). La valeur $\alpha = 0$ reste conjecturale (voir l'introduction de [CI]).

Si f est une forme propre alors d'après (2.3.1), ses coefficients de Fourier vérifient

$$|\hat{f}_\infty(n)| \ll_{f,\varepsilon} n^{\alpha+\varepsilon} \quad (3.2.4)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n . De la même façon, on a une borne analogue lorsque f est une forme propre de l'espace de Kohnen.

Dans le but d'établir une formule de Voronoï pour le poids demi-entier, on va avoir besoin d'une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction L de f tordue par un caractère additif. Une telle équation est obtenue dans [HKKL, lemma 4.3]. On démontre ici une version plus générale. On a vu au chapitre précédent que la fonction L associée à f est définie par

$$L(s, f) := \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{-s}$$

pour $\operatorname{Re} s > 1$ (la convergence absolue étant une conséquence du corollaire 2.1.1). Elle se prolonge de manière holomorphe sur l'ensemble du plan complexe et vérifie pour tout $s \in \mathbb{C}$

$$\Lambda(s, f) := N^{s/2} \Gamma_\ell(s) L(s, f) = \Lambda(1-s, f_0)$$

où $\Gamma_\ell(s) := (2\pi)^{-(s+\ell/2-1/4)} \Gamma(s + \ell/2 - 1/4)$.

Lemme 3.2.1. *Soient N un entier divisible par 4, χ un caractère modulo N et $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$. Soient u et q deux entiers premiers entre eux avec $(N, q) = 1$. On pose*

$$L(s, f, u/q) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_q(un) n^{-s}$$

alors $L(s, f, u/q)$ converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ et se prolonge en une fonction entière vérifiant l'équation fonctionnelle suivante,

$$(\sqrt{Nq})^s \Gamma_\ell(s) L(s, f, u/q) = \varepsilon_q^{-(2\ell+1)} \left(\frac{-\bar{u}}{q} \right) \chi(q) (\sqrt{Nq})^{1-s} \Gamma_\ell(1-s) L(1-s, f_0, -\bar{N}u/q)$$

avec $u\bar{u} = 1 [q]$ et $f_0 = f|_{\ell+1/2} W_N$.

De plus, cette fonction L croît polynomialement sur les bandes verticales i.e. pour tous $\sigma_1 < \sigma_2$, il existe $A > 0$ tel que

$$|L(s, f, u/q)| \ll_{f,q,\sigma_1,\sigma_2} (1 + |t|)^A$$

pour tout $s = \sigma + it$ avec $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ et $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. Posons

$$\Lambda(s, f, u/q) := (\sqrt{Nq})^s \Gamma_\ell(s) L(s, f, u/q).$$

Pour $\operatorname{Re} s > 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} f(iy + u/q) y^{s+\ell/2-1/4} \frac{dy}{y} = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{\ell/2-1/4} e_q(un) e^{-2\pi n y} y^{s+\ell/2-1/4} \frac{dy}{y} \quad (3.2.5)$$

$$= \Gamma_\ell(s) L(s, f, u/q) \quad (3.2.6)$$

en permutant somme et intégrale en faisant le changement de variable $y' = 2\pi ny$. L'intégral dans le membre de gauche converge en l'infini pour tout $s \in \mathbb{C}$. On va montrer qu'il en est de même pour la convergence en $y = 0$.

Soient v et e des entiers tel que $Nuv - eq = -1$. On a l'identité matricielle suivante,

$$\begin{pmatrix} 1 & u/q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} W_N = \xi W_N \begin{pmatrix} 1 & v/q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\xi = \begin{pmatrix} e & u \\ Nv & q \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ et où pour simplifier, on identifie $W_N \in G$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$. Cette relation montre en particulier qu'il existe des nombres complexes c et d tels que

$$f(iy + u/q) = f_0 \left(\frac{i}{Nq^2y} + v/q \right) (ciy + d)^{-(\ell+1/2)} = O(e^{-A/y})$$

lorsque $y \rightarrow 0^+$ car f est cuspidale en 0 et avec $A > 0$ une constante qu'on n'explicitera pas.

Tout ceci montre bien que le membre de gauche de (3.2.5) converge absolument pour tout s et on en déduit alors le prolongement de $L(s, f, u/q)$ en une fonction entière. De plus, la formule de Stirling permet aisément d'obtenir la croissance polynomiale de $L(s, f, u/q)$ dans les bandes verticales.

Ainsi, en posant $s' = s + \ell/2 - 1/4$ et faisant le changement de variable $y \mapsto \frac{1}{Nq^2y}$, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(s, f, u/q) &= (\sqrt{Nq})^{-s-\ell+1/2} \int_0^{+\infty} f \left(-\frac{1}{Nq^2iy} + u/q \right) y^{-s'} \frac{dy}{y} \\ &= (\sqrt{Nq})^{-s-\ell+1/2} \int_0^{+\infty} f(\xi W_N(iy + v/q)) y^{-s'} \frac{dy}{y} \\ &= (\sqrt{Nq})^{-s-\ell+1/2} \int_0^{+\infty} f|_{\ell+1/2} \xi W_N(iy + v/q) \varepsilon_q^{-(2\ell+1)} \left(\frac{Nv}{q} \right) (\sqrt{Nq}y)^{\ell+1/2} y^{-s'} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

car on a $\xi W_N = \left(\star, \varepsilon_q^{-1} \left(\frac{Nv}{q} \right) N^{1/4} \sqrt{i(v - qz)} \right)$ dans G . Puisque $f|_{\ell+1/2} \xi = \chi(q)f$, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(s, f, u/q) &= \varepsilon_q^{-(2\ell+1)} \left(\frac{-\bar{u}}{q} \right) \chi(q) (\sqrt{Nq})^{1-s} \int_0^{+\infty} f_0(iy + v/q) y^{1-s+\ell/2-1/4} \\ &= \varepsilon_q^{-(2\ell+1)} \left(\frac{-\bar{u}}{q} \right) \chi(q) (\sqrt{Nq})^{1-s} \Gamma_\ell(1-s) L(1-s, f_0, v/q) \end{aligned}$$

d'après ce qui précède. □

On finit cette section en énonçant les résultats liés à la transformée de Rankin-Selberg de f mais adaptés à la notation $\hat{f}_\infty(n)$ des coefficients normalisés (voir la proposition 2.1.4 et le corollaire 2.1.1).

Proposition 3.2.1. Soient $f, g \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$, $s \in \mathbb{C}$ et posons

$$D(s, f \times \bar{g}) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) \overline{\hat{g}_\infty(n)} n^{-s}.$$

Soit $E_\infty(z, s)$ la série d'Eisenstein classique définie en (2.1.5).

La série $D(s, f \times \bar{g})$ converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ et vérifie

$$(4\pi)^{-(s+\ell-1/2)} \Gamma(s + \ell - 1/2) D(s, f \times \bar{g}) = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^{\ell+1/2} E_\infty(z, s) \frac{dx dy}{y^2}$$

donc $D(s, f \times \bar{g})$ admet un prolongement méromorphe sur \mathbb{C} . Dans la région $\operatorname{Re} s \geq 1/2$, elle admet au maximum un pôle, localisé en $s = 1$. De plus,

$$(4\pi)^{-(\ell+1/2)} \Gamma(\ell + 1/2) \operatorname{Res}_{s=1} D(s, f \times \bar{g}) = \langle f, g \rangle$$

où $\langle f, g \rangle$ est défini comme en (2.1.1).

On aura aussi besoin des deux résultats suivants que l'on énonce en un seul lemme.

Lemme 3.2.2. Soit $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$ et $Y > 0$. Il existe une constante c_f telle que

$$\sum_{m \leq Y} |\hat{f}_\infty(m)|^2 \sim c_f Y$$

lorsque $Y \rightarrow +\infty$. De plus, on a

$$\sum_{m \leq Y} \frac{|\hat{f}_\infty(m)|^2}{\sqrt{m}} \ll_f \sqrt{Y}.$$

Preuve. La première assertion est simplement une réécriture du corollaire 2.1.1. La deuxième découle de la première par une sommation par parties. \square

3 La formule sommatoire de Voronoï

De manière assez classique, pour étudier les coefficients de Fourier dans les progressions arithmétiques, on utilise une généralisation de la formule sommatoire de Poisson impliquant la transformée de Mellin de la fonction test utilisée. Ce genre de formule s'appelle formule sommatoire de Voronoï en hommage au premier mathématicien à avoir utilisé cette technique (voir par exemple [MS] pour plus de détails).

Proposition 3.3.1 (Formule de Voronoï). Soit $f \in S_{\ell+1/2}(N, \chi)$. Soient u et q deux entiers avec $(N, q) = 1$ et $(u, q) = 1$. Soit $X > 0$ et $w : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact. Alors,

$$\sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_q(un) w\left(\frac{n}{X}\right) = \varepsilon_q^{-(2\ell+1)} \left(\frac{-\bar{u}}{q}\right) \chi(q) \frac{X}{\sqrt{N}q} \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) e_q(-\bar{N}um) B\left(\frac{m}{Nq^2/X}\right) \quad (3.3.1)$$

avec

$$B(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma_\ell(s)}{\Gamma_\ell(1-s)} \hat{w}(1-s) x^{-s} ds \quad (3.3.2)$$

pour $x > 0$, $\sigma > 1$ et $\hat{w}(s) = \int_0^{+\infty} w(x) x^s \frac{dx}{x}$.

Preuve. En utilisant la transformée de Mellin inverse de w , on obtient

$$A := \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_q(un) w \left(\frac{n}{X} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} L(s, f, u/q) X^s \hat{w}(s) ds$$

pour $\sigma > 1$. La régularité de w implique que \hat{w} est à décroissance rapide sur les bandes verticales et puisque la fonction L y croît polynomialement, on peut décaler le contour d'intégration en $\text{Re } s = 1 - \sigma$ puis appliquer l'équation fonctionnelle pour obtenir

$$A = \frac{\omega}{2i\pi} \int_{(1-\sigma)} (\sqrt{N}q)^{1-2s} \frac{\Gamma_\ell(1-s)}{\Gamma_\ell(s)} L(1-s, f_0, -\overline{N}u/q) X^s \hat{w}(s) ds$$

avec $\omega = \varepsilon_q^{-(2\ell+1)} \left(\frac{-\bar{u}}{q} \right) \chi(q)$. En faisant le changement de variable $s \mapsto 1-s$, on a

$$A = \frac{\omega}{2i\pi} \int_{(\sigma)} (\sqrt{N}q)^{-1+2s} \frac{\Gamma_\ell(s)}{\Gamma_\ell(1-s)} L(s, f_0, -\overline{N}u/q) X^{1-s} \hat{w}(1-s) ds$$

ce qui suffit pour conclure puisque la fonction L dans l'intégrale converge absolument pour $\text{Re } s > 1$. □

Remarque 3.3.1. Bien sûr, B dépend de w et ℓ . Pour alléger les notations, on ne notera pas cette dépendance.

Prouvons maintenant quelques propriétés fondamentales de la fonction B .

Lemme 3.3.1. *La fonction B est C^∞ et réelle sur \mathbb{R}_+^* .*

Si $x > 0$ alors

$$|B(x)| \ll_{A,\ell,w} x^{-A}$$

pour tout $A > 0$.

Si $0 < x \leq 1$ alors

$$|B(x)| \ll_{\varepsilon,w} x^{-(1/4-\ell/2+\varepsilon)}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

En particulier,

$$|B(x)| \ll_{\ell,w,\varepsilon} 1$$

pour $x > 0$ et la transformée de Mellin de B est bien définie pour $\text{Re } s > -(\ell/2 - 1/4)$ et à décroissance rapide sur les bandes verticales.

Preuve. Soit $x > 0$. Il est clair que $\overline{B(x)} = B(x)$. La régularité de w implique que \hat{w} est à décroissance rapide sur les bandes verticales et donc en décalant le domaine d'intégration de $\sigma > 1$ à tout $A > 0$, on a

$$|B(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Gamma_\ell(A+it)|}{|\Gamma_\ell(1-A-it)|(1+|t|)^r} x^{-A} dt$$

pour tout $r > 0$. En appliquant la formule de Stirling à Γ_ℓ , on obtient la première inégalité du lemme.

On applique la même méthode pour obtenir la seconde inégalité, en rappelant que $\frac{\Gamma_\ell(s)}{\Gamma_\ell(1-s)}$ n'a pas de pôle dans le domaine $\text{Re } s > -(\ell/2 - 1/4)$ donc on peut décaler le contour d'intégration en $\sigma = -(\ell/2 - 1/4) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. □

On va alors en déduire la proposition suivante

Proposition 3.3.2. *Soit $\eta > 0$. Si $Y \geq 1$ alors*

$$\sum_{m \geq Y^{1+\eta}} |\hat{f}_0(m)B\left(\frac{m}{Y}\right)| \ll_{\eta,A} Y^{-A}$$

pour tout $A \geq 1$. De plus, si $Y > 0$ alors

$$\sum_{m \geq 1} |\hat{f}_0(m)B\left(\frac{m}{Y}\right)| \ll_{\varepsilon} Y^{1+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Les constantes implicites ne dépendent que de f et w .

Preuve. Soit $Z \geq 1$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant la proposition 3.2.1 pour $f = g = f_0$ combinée avec le lemme 3.3.1, on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m \geq Z} |\hat{f}_0(m)B\left(\frac{m}{Y}\right)| \right)^2 &\leq \sum_{m \geq Z} |\hat{f}_0(m)|^2 m^{-(1+\varepsilon)} \sum_{m \geq Z} B^2\left(\frac{m}{Y}\right) m^{1+\varepsilon} \\ &\ll_{A,\varepsilon} Y^A \sum_{m \geq Z} \frac{1}{m^{A-1-\varepsilon}} \\ &\ll_{A,\varepsilon} \frac{Y^A}{Z^{A-2-2\varepsilon}} \end{aligned}$$

En prenant ε fixé, $Z = Y^{1+\eta}$ et A suffisamment grand, on obtient la première inégalité. On prend $Z = 1$ pour avoir la deuxième lorsque $0 < Y < 1$.

Sinon, si $Y \geq 1$ alors on prend $Z = Y$ et ainsi

$$\sum_{m \geq Y} |\hat{f}_0(m)B\left(\frac{m}{Y}\right)| \ll_{\varepsilon} Y^{1+\varepsilon}$$

mais on a aussi

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq Y} |\hat{f}_0(m)B\left(\frac{m}{Y}\right)| &\ll \left(\sum_{m \leq Y} |\hat{f}_0(m)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m \leq Y} \left(\frac{m}{Y}\right)^{\ell-1/2-\varepsilon} \right)^{1/2} && \text{d'après le lemme 3.3.1} \\ &\ll Y^{1/2} \cdot Y^{1/2} \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 3.2.2. □

On finit cette section en prouvant l'identité de Plancherel suivante.

Lemme 3.3.2. *On a*

$$\|w\|_2 = \|B\|_2 \tag{3.3.3}$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme L^2 sur \mathbb{R}_+^* .

Preuve. Remarquons d'abord que B la transformée de Mellin inverse de la fonction $s \mapsto \frac{\Gamma_\ell(s)}{\Gamma_\ell(1-s)}\hat{w}(1-s)$. De ce fait, pour $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} B(x)^2 dx &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma_\ell(s)}{\Gamma_\ell(1-s)} \hat{w}(1-s) \int_0^{+\infty} B(x) x^{1-s} \frac{dx}{x} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma_\ell(s)}{\Gamma_\ell(1-s)} \hat{w}(1-s) \frac{\Gamma_\ell(1-s)}{\Gamma_\ell(s)} \hat{w}(s) ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \int_0^{+\infty} w(x) x^{1-s} \hat{w}(s) \frac{dx}{x} ds \\ &= \int_0^{+\infty} w(x)^2 dx. \end{aligned}$$

□

4 Moments de sommes de Kloosterman-Salié

Dans le but de calculer leurs moments, on donne la valeur exacte des sommes de Kloosterman-Salié modulo une puissance d'un nombre premier impair. Tous les résultats suivants seront utilisés dans les prochaines sections

Soit p un nombre premier impair. Soient N , m et n des entiers avec $N \geq 1$ et soit $q = p^N$. On définit les sommes de Kloosterman et Salié normalisées respectivement par

$$\begin{aligned} \text{Kl}_q(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x \in [q]}^\times e_q(mx + n\bar{x}), \\ \text{Sal}_q(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x \in [q]}^\times \left(\frac{x}{q}\right) e_q(mx + n\bar{x}). \end{aligned}$$

Avant d'énoncer la prochaine proposition, on rappelle que $\varepsilon_q = 1$ si $q = 1$ [4] et $\varepsilon_q = i$ si $q = 3$ [4].

Proposition 3.4.1. *Si m et n sont premiers avec p , alors*

$$\text{Sal}_q(m, n) = \left(\frac{m}{q}\right) \varepsilon_q \sum_{x^2 = mn} e_q(2x)$$

et si $N \geq 2$,

$$\text{Kl}_q(m, n) = \varepsilon_q \sum_{x^2 = mn} \left(\frac{x}{q}\right) e_q(2x).$$

De plus, toujours pour $N \geq 2$, si m est premier avec p et $p \mid n$ (ou l'inverse) alors les sommes sont nulles. Bien sûr, lorsque N est pair, ces sommes coïncident.

Preuve. Le cas $N = 1$ est démontré dans [K, lemme 8.4.3]. Redémontrons ce résultat lorsque $N \geq 2$ via la méthode de la phase stationnaire. On remarque déjà que

$$\text{Sal}_q(m, n) = \left(\frac{m}{q}\right) \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x \in [q]}^\times \left(\frac{x}{q}\right) e_q(x + mn\bar{x}).$$

On pose $g(x) = x + mn\bar{x}$ avec x inversible modulo q . Alors, pour tout $j \leq N/2$ et tout $y [p^j]$, l'entier $x + yp^{N-j}$ est inversible modulo q et

$$g(x + yp^{N-j}) = g(x) + g'(x)yp^{N-j} [q]$$

où $g'(x) = 1 - mn\bar{x}^2$.

Puisque le changement de variable $x \mapsto x + yp^{N-j}$ ne change pas la valeur de la somme ni du symbole de Jacobi, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x [q]}^{\times} \left(\frac{x}{q}\right) e_q(g(x)) &= \frac{1}{p^j} \sum_{y [p^j]} \sum_{x [q]}^{\times} \left(\frac{x}{q}\right) e_q(g(x) + g'(x)yp^{N-j}) \\ &= \sum_{\substack{x [q] \\ g'(x) = 0 [p^j]}}^{\times} \left(\frac{x}{q}\right) e_q(g(x)). \end{aligned}$$

Si $p \mid n$ alors la condition dans la somme n'est jamais remplie et celle-ci est nulle. Sinon, puisqu'être un carré modulo p^j est équivalent à être un carré modulo q , la dernière somme se fait sur les $x = x_0 + yp^j$ avec $x_0^2 = mn [q]$ (*i.e.* $g'(x_0) = 0$) et y une classe modulo p^{N-j} . Distinguons deux cas :

Si N est pair, on prend $j = N/2$ et la dernière somme vaut alors

$$\sum_{x_0^2 = mn [q]} \sum_{y [p^{N/2}]} e_q(g(x_0) + g'(x_0)yp^{N/2}) = p^{N/2} \sum_{x_0^2 = mn} e_q(g(x_0)).$$

En remarquant ici que $g(x_0) = x_0 + mn\bar{x}_0 = 2x_0 [q]$ et que $\varepsilon_q = 1$ pour N pair, on obtient le résultat.

Si N est impair, on prend $j = (N - 1)/2$ et on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x [q] \\ g'(x) = 0 [p^j]}}^{\times} \left(\frac{x}{q}\right) e_q(g(x)) &= \sum_{x_0^2 = mn [q]} \left(\frac{x_0}{q}\right) \sum_{y [p^{(N+1)/2}]} e_q(g(x_0) + g'(x_0)yp^{(N-1)/2} + g''(x_0)y^2p^{N-1}) \\ &= \sum_{x_0^2 = mn [q]} \left(\frac{x_0}{q}\right) e_q(2x_0)p^{(N-1)/2} \sum_{y [p]} e_p(g''(x_0)y^2) \end{aligned}$$

avec $g''(x_0) = mn\bar{x}_0^3$. De plus on a

$$\sum_{y [p]} e_p(ay^2) = \left(\frac{a}{p}\right) \varepsilon_p \sqrt{p}$$

et $\varepsilon_p = \varepsilon_q$ quand N est impair. On remarque alors qu'ici soit $\left(\frac{mn}{q}\right) = 1$, soit la somme est nulle et on obtient le résultat.

Un raisonnement similaire permet d'obtenir le résultat pour les sommes de Kloosterman. □

Remarquons que si m et n sont des entiers tels que $\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right) = 1$ alors

$$\text{Sal}_q(m, n) = 2\varepsilon_q \cos\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}^q}{q}\right).$$

Par la suite, les résultats impliquant la notation $\sqrt{x^q}$ ne dépendront pas du choix de la racine de x modulo q . On rappelle la notation suivante que l'on a déjà introduite dans la section 1. Pour tout x modulo q ,

$$\text{Sa}_q(x) = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{2\pi\sqrt{x^q}}{q}\right) & \text{si } \left(\frac{x}{p}\right) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

On va alors calculer les moments de ces quantités.

Lemme 3.4.1. *Soient p et q définis comme précédemment et soient m_1, \dots, m_ν des entiers strictement positifs avec $\nu \geq 1$. On suppose que $\left(\frac{m_i}{p}\right) = \left(\frac{m_1}{p}\right) = \pm 1$ pour tout $2 \leq i \leq \nu$. Alors,*

$$\mathbb{E}^\mp \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Sa}_q(m_i \cdot) \right) = 0$$

et

$$\mathbb{E}^\pm \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Sa}_q(m_i \cdot) \right) = \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^\nu} \left(\delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \sqrt{\mu_p m_i^q} \right) - \frac{1}{p} \delta_{q/p} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \sqrt{\mu_p m_i^{q/p}} \right) \right)$$

où μ_p est n'importe quel entier fixé tel que $\left(\frac{\mu_p}{p}\right) = \left(\frac{m_1}{p}\right)$ et où, par convention, $\delta_{q/p} = 1$ si $q = p$.

Évidemment, si $\left(\frac{m_1}{p}\right) \neq \left(\frac{m_i}{p}\right)$ pour un certain i alors le membre de gauche de l'égalité est nul.

Preuve. Remarquons d'abord que $\text{Sa}_q(m_i a) = 0$ si $\left(\frac{a}{p}\right) \neq \left(\frac{m_i}{p}\right) = \left(\frac{\mu_p}{p}\right)$ donc il suffit juste de montrer la deuxième égalité pour laquelle l'espérance peut être vue comme la moitié de la somme prise sur les $a = \mu_p b^2$ pour tout $b [q]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\pm \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Sa}_q(m_i \cdot) \right) &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{b [q]}^\times \prod_{i=1}^{\nu} \text{Sa}_q(m_i \mu_p b^2) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{b [q]}^\times \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^\nu} e_q \left(b \sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \sqrt{\mu_p m_i^q} \right). \end{aligned}$$

En utilisant la formule explicite pour la somme de Ramanujan ([K, page 50]), on obtient le résultat souhaité. \square

Comme dans [KR, section 4], on aimerait écrire ce moment comme la somme d'un terme principal (indépendant de m_i et q) et d'un terme d'erreur négligeable quand $q \rightarrow +\infty$. Cependant, ceci semble impossible car, en tant que variables aléatoires, les $(\text{Sa}_q(m_i \cdot))_i$ ne se comportent pas indépendamment les unes des autres lorsque $q \rightarrow +\infty$. En effet, on a

$$\text{Sa}_q(mx) = 2T_{\sqrt{m^q}}(\text{Sa}_q(x)/2)$$

avec $\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{x}{p}\right) = 1$ et où T_n est le polynôme de Tchebychev de degré n .

Néanmoins, on va donner une approximation des moments de Salié dont la preuve nécessite l'introduction de polynômes définis comme suit.

Définition 3.4.1. Soient $r \geq 2$ et \mathcal{E}_1 l'ensemble de tous les $\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^r$ tels que $e_1 = 1$. On définit le polynôme à r variables Q_r à coefficients dans \mathbb{Z} par

$$Q_r(x_1^2, \dots, x_r^2) = \prod_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_1} \sum_{i=1}^r e_i x_i.$$

Il est bien défini puisque le polynôme du membre de droite de l'égalité est pair en chaque variable x_i . De plus, $\deg Q_r = 2^{r-2}$. Pour $r \in \{0, 1\}$, on pose $Q_1(x) = x$ et $Q_0 = 0$.

Lemme 3.4.2. Soit $Y > 0$ tel que $(\nu^2 Y)^{2^{\nu-2}} < q/2$ si $\nu \geq 2$ et $Y \leq q$ si $\nu = 1$. Alors, pour tous entiers naturels $m_1, \dots, m_\nu < Y$ avec $\binom{m_i}{p} = 1$ pour tout i , on a

$$\sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_q \left(\sum_{i=1}^\nu e_i \sqrt{m_i}^q \right) \leq 2^\nu \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_0 \left(\sum_{i=1}^\nu e_i \sqrt{m_i} \right)$$

où $\sqrt{m_i}$ est la racine carré positive de m_i dans \mathbb{R} .

Preuve. Puisque $\sqrt{m_1}^q = 0 [q]$ si et seulement si $m_1 = 0 [q]$ et donc $m_1 = 0$ d'après l'hypothèse, le résultat est clair pour $\nu = 1$. On suppose donc que $\nu \geq 2$.

Si $\sum_{i=1}^\nu e_i \sqrt{m_i}^q = 0 [q]$ alors $Q_\nu(m_1, \dots, m_\nu) = 0 [q]$. Ainsi,

$$\sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_q \left(\sum_{i=1}^\nu e_i \sqrt{m_i}^q \right) \leq 2^\nu \delta_q (Q_\nu(m_1, \dots, m_\nu)). \quad (3.4.2)$$

Le degré et les coefficients du polynôme Q_ν ne dépendent pas de q . De plus, on a

$$|Q_\nu(m_1, \dots, m_\nu)| = \prod_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_1} \left| \sum_{i=1}^\nu e_i \sqrt{m_i} \right| \leq (\nu \sqrt{Y})^{2^{\nu-1}} < q/2$$

donc on peut remplacer δ_q par δ_0 dans le membre de droite de l'inégalité (3.4.2). Mais si $Q_\nu(m_1, \dots, m_\nu) = 0$ alors il existe $\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu$ tel que $\sum_{i=1}^\nu e_i \sqrt{m_i} = 0$ et on obtient le résultat voulu. □

Remarque 3.4.1. L'utilisation du polynôme Q_ν pour étudier la quantité $\prod_{i=1}^\nu \text{Sa}_q(m_i a)$ est faite dans [RR, Proposition 4.7] où les auteurs calculent les moments des produits de sommes de Salié avec décalage additif *i.e.* de la forme $\text{Sa}_q(m_i + a)$. Dans ce cas, et contrairement au cas du décalage multiplicatif, les moments peuvent s'écrire comme la somme d'un terme principal constant plus un terme d'erreur négligeable.

Par ailleurs, on retrouve de manière surprenante une utilisation de Q_ν dans un contexte très différent dans [HR, Lemma 3.4].

5 Faisceau de Salié et monodromie

La section précédente montre que l'on peut évaluer les moments de sommes de Kloosterman-Salié de manière approchée en utilisant la formule exacte pour ces sommes. C'est donc une approche calculatoire et essentiellement élémentaire. Compte tenu des techniques employées dans [FGKM] et [KR], on peut se demander si les outils de la géométrie algébrique et précisément la théorie des fonctions traces seraient à même d'améliorer nos résultats. On adopte donc cette approche dans cette section mais on montre qu'elle est en fait inopérante pour notre étude.

5.1 Rappels sur la théorie des fonctions traces

La théorie des fonctions traces est un outil de théorie analytique des nombres se basant sur les travaux de Deligne [D4][D5] et Katz [K2] dont on peut trouver un large développement dans les travaux de Fouvry-Kowalski-Michel ([FKM] notamment, sera particulièrement pertinent pour notre étude). Cette théorie se base sur l'étude des représentations ℓ -adiques du groupe de Galois absolu du corps de fonctions associé à une courbe sur un corps fini ou, dans un langage plus géométrique, aux faisceaux lisses ℓ -adiques définis sur cette courbe.

Dans ce qui suit, p désigne un nombre premier impair et q une puissance de celui-ci. On pose $K = \mathbb{F}_q(t)$ le corps des fractions rationnelles en t qu'on peut voir comme le corps de fonctions de la courbe $\mathcal{C} = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1$. On dénote par \overline{K} une clôture séparable de K et par $\overline{\mathbb{F}_q}$ une clôture algébrique de \mathbb{F}_q .

Pour chaque $x \in \overline{\mathbb{F}_q}$, on peut associer un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[t]$ défini par

$$P_x = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_q)} (t - \sigma(x))$$

qui correspond naturellement à une place de K ou, en d'autres termes, à un point fermé de \mathcal{C} . On peut alors définir dans $\text{Gal}(\overline{K}/K)$, comme dans le cas d'une extension finie, les sous-groupes de décomposition et d'inertie notés respectivement D_x et I_x . Par exemple, un élément $\sigma \in D_x$ définit, pour toute extension galoisienne finie L/K et tout idéal premier $\mathfrak{P}_x \supset (P_x)$ avec $\mathfrak{P}_x \subset L$, un élément du groupe de décomposition

$$D(\mathfrak{P}_x/(P_x)) \subset \text{Gal}(L/K)$$

à conjugaison près. Par ailleurs, toutes ces notions peuvent se définir en prenant $x = \infty$, le point à l'infini de \mathcal{C} , via le changement de variable $t \mapsto 1/t$.

Soient U un ouvert de Zariski non-vide de \mathcal{C} et N_U le plus petit sous-groupe normal fermé de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ contenant tous les I_x avec x dans U . On pose alors

$$\pi_1(U) = \text{Gal}(\overline{K}/K)/N_U$$

qui correspond au groupe fondamental étale de l'ouvert U autour du point générique ∞ .

Soit ℓ un nombre premier différent de p . Il existe une équivalence de catégorie entre les faisceaux lisses ℓ -adiques sur U (faisceaux localement constants de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -espaces vectoriels de dimension finie) et les $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -représentations continues finies de $\pi_1(U)$. Cette équivalence se fait via le foncteur qui à un faisceau \mathcal{F} associe sa fibre \mathcal{F}_∞ au-dessus de ∞ (voir [K2, Chapter 2]).

Soit \mathcal{F} un faisceau ℓ -adique lisse de U . Pour tout $x \in \mathbb{F}_q$, le Frobenius géométrique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, défini comme étant l'inverse de $a \mapsto a^q$, se remonte en un élément $\text{Frob}_x \in D_x$ défini modulo I_x . Si on note ρ la représentation associée à \mathcal{F} *i.e.*

$$\rho : \pi_1(U) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}_\infty)$$

alors $F_x := \rho(\text{Frob}_x)$ est bien défini à conjugaison près dans $\text{GL}(\mathcal{F}_\infty)$ car I_x agit trivialement sur \mathcal{F}_∞ .

On fixe un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \rightarrow \mathbb{C}$ et on définit alors la fonction trace f associée à \mathcal{F} par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \iota \circ \text{tr}(F_x) \end{array}$$

De nombreux exemples de fonctions traces classiques (comme certaines sommes d'exponentielles) sont donnés dans [FKM].

On termine cette sous-section en rappelant la définition du groupe de monodromie associé au faisceau \mathcal{F} . On fixe d'abord une base de \mathcal{F}_∞ de manière à pouvoir identifier $\text{GL}(\mathcal{F}_\infty)$ et $\text{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ avec d la dimension de \mathcal{F}_∞ . Le groupe de monodromie (arithmétique) de \mathcal{F} correspond alors à l'adhérence de $\rho(\pi_1(U))$ dans $\text{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ au sens de la topologie de Zariski (on voit GL_d comme un groupe algébrique). On peut d'ailleurs voir ce groupe comme un sous-groupe de $\text{GL}_d(\mathbb{C})$ via ι . De plus, on le note $G_{arith}(\mathcal{F})$.

5.2 Extension des scalaires

Une courbe définie sur \mathbb{F}_q étant *a fortiori* défini sur toute extension algébrique k/\mathbb{F}_q , on peut redéfinir les notions précédentes en remplaçant \mathcal{C} et U par $\mathcal{C} \otimes k$ et $U \otimes k$ respectivement. Une différence majeure est que si on prend x dans $\bar{k} = \overline{\mathbb{F}}_q$, alors le polynôme $\tilde{P}_x \in k[t]$ associé à sa clôture \bar{x} dans l'ouvert $U \otimes k$ va diviser (mais sans être égal en général) le polynôme $P_x \in \mathbb{F}_q[t]$ défini précédemment.

Un exemple fondamental est lorsqu'on prend $k = \overline{\mathbb{F}}_q$. On peut alors définir $\pi_1(U \otimes k)$ comme précédemment et le lien entre représentation ℓ -adiques de $\pi_1(U \otimes k)$ et les faisceaux ℓ -adiques lisses de $U \otimes k$ est le même. Pour un tel faisceau, son groupe de monodromie est dit géométrique pour spécifier qu'on se place dans le cas d'un corps de base algébriquement clos. On le note alors $G_{geom}(\mathcal{F})$. Notons qu'un faisceau \mathcal{F} de U peut naturellement être vu comme un faisceau de $U \otimes k$ et dans ce cas on a $G_{arith}(\mathcal{F}) \supset G_{geom}(\mathcal{F})$.

Tous ces rappels étant faits, on va maintenant passer à l'étude des faisceaux associés aux sommes de Salié.

5.3 Faisceau de Salié

On s'intéresse ici aux sommes de Salié normalisées dont on donne une définition un peu plus générale que celle vue à la section précédente. Pour $a \in \mathbb{F}_q^\times$ et pour ψ et χ des caractères respectivement additif et multiplicatif de \mathbb{F}_q , on pose

$$\text{Sal}(\chi, \psi)(\mathbb{F}_q, a) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{x, y \in \mathbb{F}_q \\ xy = a}} \chi(x)\psi(x + y).$$

Dans le but de calculer le développement asymptotique d'un moment de sommes de Salié, on peut voir cette somme comme la trace d'un faisceau lisse sur $\mathbb{G}_m/\mathbb{F}_q$ avec $\mathbb{G}_m = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$. Un tel faisceau est construit dans [K2].

Ce genre de faisceau appartient à la grande famille des faisceaux hypergéométriques, notamment étudiés dans [FKM]. Les groupes de monodromie ainsi que des critères du type Goursat-Kolchin-Ribet sont bien connus pour ces faisceaux sauf dans quelques cas particuliers. Parmi eux se trouvent les faisceaux Kummer induit (définition 3.5 de [FKM]) et donc la somme de Salié classique (qui est 2-Kummer induite) :

$$\text{Sal}(a) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\substack{x, y \in \mathbb{F}_p \\ xy = a}} \left(\frac{x}{p}\right) e_p(x + y)$$

avec $a \in \mathbb{F}_p^\times$.

Ceci dit, un avantage de ces sommes est qu'on peut les calculer explicitement. On a vu dans la section précédente que

$$\text{Sal}(a) = \varepsilon_p \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_p \\ x^2 = a}} e_p(2x) \tag{3.5.1}$$

$$\text{où } \varepsilon_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ i & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

C'est aussi un résultat qu'on peut déduire de [K2] propositions 5.6.1 et 5.6.2. Quitte à retordre le faisceau, étudier cette somme revient à étudier le faisceau ℓ -adique suivant

$$\mathcal{G} = [2]_* \mathcal{L}_\psi \tag{3.5.2}$$

où ψ est un caractère additif non trivial de \mathbb{F}_p , \mathcal{L}_ψ son faisceau d'Artin-Schreier (voir [FW] pour une définition) et

$$[2] : \begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m & \rightarrow & \mathbb{G}_m \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

D'après [FW, page 8], on a une description explicite de la représentation de $\pi_1(\mathbb{G}_m)$ associée à \mathcal{G} .

En effet, soient $K = \mathbb{F}_p(t)$ et $(z, y) \in \overline{K}^2$ tel que $y^2 = t$ et $z^p - z = y$. Les corps $K(z)$ et $K(y)$ sont deux extensions galoisiennes de K et de plus

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p & \xrightarrow{\sim} & H := \text{Gal}(K(z)/K(y)) & \{\pm 1\} & \xrightarrow{\sim} & \text{Gal}(K(y)/K) \\ a & \mapsto & \sigma \text{ tel que } \sigma(z) = z + a & b & \mapsto & \sigma \text{ tel que } \sigma(y) = by \end{array}$$

Ainsi $G := \text{Gal}(K(z)/K) \simeq \mathbb{F}_p \rtimes \{\pm 1\} = D_p$ le groupe diédral à $2p$ éléments. La représentation associée à \mathcal{G} se remonte en une représentation de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$. Cette dernière est alors isomorphe à

$$\text{Ind}_H^G \rho \circ \text{pr}$$

où $\rho : H \simeq \mathbb{F}_p \xrightarrow{\psi^{-1}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ et avec $\text{Gal}(\overline{K}/K) \xrightarrow{\text{pr}} G$ la surjection canonique.

On peut alors calculer la monodromie de \mathcal{G} dans $\text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Proposition 3.5.1. *Soit \mathcal{G} le faisceau ℓ -adique défini en (3.5.2). On a*

$$G_{geom}(\mathcal{G}) = G_{arith}(\mathcal{G}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \xi & 0 \\ 0 & \bar{\xi} \end{array} \right) \middle| \xi^p = 1 \right\} \sqcup \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & \xi \\ \bar{\xi} & 0 \end{array} \right) \middle| \xi^p = 1 \right\}. \quad (3.5.3)$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{F}_p^*$, l'image du Frobenius Frob_x par la représentation associée à \mathcal{G} correspond (i.e. est égal à conjugaison près) à

$$\begin{pmatrix} \psi(\sqrt{x^p}) & 0 \\ 0 & \psi(-\sqrt{x^p}) \end{pmatrix}$$

si $\left(\frac{x}{p}\right) = 1$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sinon.

Preuve. D'après ce qui précède, l'image de $\pi_1(\mathbb{G}_m)$ par la représentation associée à \mathcal{G} est égale à l'image de $\rho_{\mathcal{G}} = \text{Ind}_H^G \rho$. Ceci suffit *a priori* pour établir (3.5.3) mais puisqu'on veut être plus précis sur la nature de l'image d'un Frobenius dans $G_{arith}(\mathcal{G})$, on va rentrer dans les détails.

Soient $x \in \mathbb{F}_p^*$ et $\rho_{\mathcal{G}} : \text{Gal}(K(z)/K) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ la représentation (fidèle) associée à \mathcal{G} . Considérons une place au dessus de la valuation en x à chaque niveau des extensions $K \subset K(y) \subset K(z)$. Sa tour d'extensions résiduelles est

$$\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_p(\bar{y}) \subset \mathbb{F}_p(\bar{z})$$

avec $\bar{y}^2 = x$ et $\bar{z}^p - \bar{z} = \bar{y}$ (la barre signifie qu'on se place "modulo x ").

Si x est un carré dans \mathbb{F}_p alors les degrés de ces extensions sont respectivement 1 et p et de plus $t - x = (y - \sqrt{x^p})(y + \sqrt{x^p})$ donc il ne peut y avoir de ramification. Le Frobenius géométrique de $\text{Gal}(\mathbb{F}_p(\bar{z})/\mathbb{F}_p)$ se remonte à conjugaison près en un $\text{Frob}_x \in \text{Gal}(K(z)/K)$ qui vérifie $\text{Frob}_x(z) = z + a$ pour un certain $a \in \mathbb{F}_p$ puisque $\text{Frob}_x(z)^p - \text{Frob}_x(z) = \text{Frob}_x(y) = y$ (le groupe de décomposition de $K(y)/K$ associé à x est trivial). On a alors $\bar{z} - a = \bar{z}^p = \bar{z} + \bar{y}$ donc on peut prendre $a = -\sqrt{x^p}$ et

$$\rho_{\mathcal{G}}(\text{Frob}_x) = \begin{pmatrix} \psi(\sqrt{x^p}) & 0 \\ 0 & \psi(-\sqrt{x^p}) \end{pmatrix}$$

car $\text{Frob}_x \in H$.

Si x n'est pas un carré dans \mathbb{F}_p alors $\mathbb{F}_p(\bar{y})/\mathbb{F}_p$ est de degré 2 tandis que $\mathbb{F}_p(\bar{z})/\mathbb{F}_p(\bar{y})$ est de degré 1 car $\bar{z}^p = \bar{z} + \bar{y} + \bar{y}^p = \bar{z}$. De plus il n'y a pas de ramification dans la première extension (l'idéal $(t - x)$ reste premier dans $K(y)$) ni dans la deuxième car $T^p - T - \bar{y}$ est scindé sur $\mathbb{F}_p(\bar{y})$. Le Frobenius géométrique de $\text{Gal}(\mathbb{F}_p(\bar{z})/\mathbb{F}_p)$ (d'ordre 2) se remonte à conjugaison près en un $\text{Frob}_x \in \text{Gal}(K(z)/K)$ qui vérifie (par exemple) $\text{Frob}_x(z) = -z$ car $\bar{z}^p = -\bar{z}$. D'où

$$\rho_{\mathcal{G}}(\text{Frob}_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tout cela prouve bien en particulier que l'image de $\rho_{\mathcal{G}}$ est égale au membre de droite de (3.5.3). Puisque ce sous-groupe de $\text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ (qui est en fait isomorphe à D_p) est défini par des relations polynomiales, c'est un fermé de Zariski et on en déduit que le groupe de monodromie arithmétique de \mathcal{G} est

$$G_{arith}(\mathcal{G}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \xi & 0 \\ 0 & \bar{\xi} \end{array} \right) \middle| \xi^p = 1 \right\} \sqcup \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & \xi \\ \bar{\xi} & 0 \end{array} \right) \middle| \xi^p = 1 \right\} \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

Le groupe de monodromie géométrique étant un sous-groupe de $G_{arith}(\mathcal{G})$ contenant la première composante ainsi que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (puisque'il existe $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/\overline{\mathbb{F}}_p(t))$ tel que $\sigma(z) = -z$) on a

$$G_{geom}(\mathcal{G}) = G_{arith}(\mathcal{G}).$$

□

5.4 Calcul de moments

On fixe maintenant des entiers m_1, \dots, m_s distincts deux à deux et qu'on suppose être tous des carrés modulo p et on fixe aussi des entiers $n_1, \dots, n_s > 0$. On veut estimer asymptotiquement (lorsque $p \rightarrow +\infty$) le moment

$$M_p = \frac{1}{p} \sum_{a \in \mathbb{F}_p^*} \prod_{i=1}^s \text{Sal}(m_i a)^{n_i}.$$

On a vu qu'en utilisant (3.5.1) on peut obtenir une formule plus explicite pour ce moment. L'ennui c'est qu'on n'arrive pas à faire ressortir un terme principal indépendant de p . Les simulations numériques suggèrent néanmoins qu'en dehors de certains cas pathologiques (du type m_i est un carré dans \mathbb{Z} pour tout i) on devrait avoir

$$M_p \approx \frac{\delta(\forall i, 2|n_i)}{2} \prod_{i=1}^s \binom{n_i}{n_i/2} \quad (3.5.4)$$

avec $\delta(P) = 1$ si P est vérifié et 0 sinon (voir la fin de cette section).

L'idée est alors d'étudier M_p par le biais des faisceaux de Salié. La formule des traces de Grothendieck-Lefschetz (voir par exemple [PG, théorème 2.5]) donne

$$M_p = \text{tr}(\text{Frob}_p | \mathcal{F}_{\pi_{1,p}^{geom}}) + O(1/\sqrt{p}) \quad (3.5.5)$$

avec Frob_p le Frobenius géométrique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$, $\pi_{1,p}^{geom} := \pi_1(\mathbb{G}_m \otimes \overline{\mathbb{F}}_p)$ et $\mathcal{F}_{\pi_{1,p}^{geom}}$ l'espace co-invariant de la représentation associée au faisceau

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^s \mathcal{F}_i^{\otimes n_i}$$

où $\mathcal{F}_i = [\times m_i]^* \mathcal{G}$. Puisque $\pi_{1,p}^{geom}$ et donc $\text{Gal}(\overline{K}/\overline{\mathbb{F}}_q[t])$ agissent trivialement sur $\mathcal{F}_{\pi_{1,p}^{geom}}$, alors l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \simeq \text{Gal}(\overline{K}/\mathbb{F}_q[t]) / \text{Gal}(\overline{K}/\overline{\mathbb{F}}_q[t])$ y est bien définie.

Le plus souvent, on a $\pi_{1,p}^{geom} = \pi_{1,p}^{arith} := \pi_1(\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p)$ et donc le terme principal de (3.5.5) vaut $\dim V_{G_{arith}(\mathcal{F})}$ où V est la représentation standard du groupe de monodromie géométrique de \mathcal{F} et $V_{G_{arith}(\mathcal{F})}$ son espace co-invariant.

La sous-catégorie des faisceaux « engendrés » par les \mathcal{F}_i i.e. les sous-quotients de produits tensoriels de copies de $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{F}_i$ (vu en tant que $\pi_{1,p}^{arith}$ -représentation) et de

sa représentation duale est équivalente à la catégorie des représentations finies du groupe $G_{arith}(\mathcal{H})$ via le foncteur qui a

$$\Lambda : G_{arith}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

associe $\Lambda \circ \rho_{\mathcal{H}}$ où $\rho_{\mathcal{H}} : \pi_{1,p}^{arith} \rightarrow G_{arith}(\mathcal{H})$ est la représentation associée à \mathcal{H} . La même discussion vaut pour les faisceaux géométriques.

Généralement, sous couvert d'une certaine hypothèse sur les m_i , le groupe de monodromie $G_{arith}(\mathcal{H})$ est maximal dans $\prod_{i=1}^s \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il est isomorphe au produit cartésien $\prod_{i=1}^s G_{arith}(\mathcal{F}_i)$. Ici on pourrait s'attendre à un résultat similaire mais si l'on considère les images d'un Frobenius $F_x^{(i)} = \rho_{\mathcal{F}_i}(\mathrm{Frob}_x)$ par les représentations associées aux \mathcal{F}_i , on a deux choix possibles d'après la proposition 3.5.1 :

- soit $F_x^{(i)} \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \bar{\xi} \end{pmatrix} \mid \xi^p = 1 \right\}$ pour tout i ,
- soit $F_x^{(i)} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \bar{\xi} & 0 \end{pmatrix} \mid \xi^p = 1 \right\}$ pour tout i .

Ainsi, dans l'idéal, $G_{arith}(\mathcal{H})$ est maximal dans $\prod_{i=1}^s \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ si on a

$$\begin{aligned} G_{arith}(\mathcal{H}) &= \left\{ \mathrm{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \left(\begin{pmatrix} \xi_i & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_i \end{pmatrix} \right) \mid \xi_i^p = 1 \right\} \sqcup \left\{ \mathrm{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \left(\begin{pmatrix} 0 & \xi_i \\ \bar{\xi}_i & 0 \end{pmatrix} \right) \mid \xi_i^p = 1 \right\} \\ &\simeq \mathbb{F}_p^s \rtimes \{\pm 1\} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

avec $\mathrm{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket}(A_i)$ la matrice diagonale par blocs associée aux A_i .

Dans ce cas, la représentation associée à \mathcal{F} se factorise alors par $\Lambda = \bigotimes_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \mathrm{Std}_i^{\otimes n_i}$ avec $\mathrm{Std}_i = \mathrm{Vect}(e_i^+, e_i^-)$ désignant une copie de la représentation standard de D_p et où l'action sur un tenseur de la forme $\bigotimes_{i=1}^s e_i^{\varepsilon_{i,1}} \otimes \dots \otimes e_i^{\varepsilon_{i,n_i}}$, avec $\varepsilon_{i,j} \in \{\pm 1\}$, se décrit comme suit

$$\Lambda \left(\mathrm{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \left(\begin{pmatrix} \xi_i & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_i \end{pmatrix} \right) \right) \left(\bigotimes_{i=1}^s e_i^{\varepsilon_{i,1}} \otimes \dots \otimes e_i^{\varepsilon_{i,n_i}} \right) = \prod_{i=1}^s \xi_i^{\varepsilon_{i,1}} \dots \xi_i^{\varepsilon_{i,n_i}} \bigotimes_{i=1}^s e_i^{\varepsilon_{i,1}} \otimes \dots \otimes e_i^{\varepsilon_{i,n_i}}$$

et

$$\Lambda \left(\mathrm{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \left(\begin{pmatrix} 0 & \bar{\xi}_i \\ \xi_i & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \left(\bigotimes_{i=1}^s e_i^{\varepsilon_{i,1}} \otimes \dots \otimes e_i^{\varepsilon_{i,n_i}} \right) = \prod_{i=1}^s \xi_i^{\varepsilon_{i,1}} \dots \xi_i^{\varepsilon_{i,n_i}} \bigotimes_{i=1}^s e_i^{-\varepsilon_{i,1}} \otimes \dots \otimes e_i^{-\varepsilon_{i,n_i}}.$$

On peut ensuite montrer que la dimension de l'espace invariant *i.e.* la multiplicité de la représentation triviale dans Λ (qui est toujours égale à la dimension de l'espace co-invariant pour une représentation semi-simple) vaut exactement le terme principal de (3.5.4) et on en déduit alors le résultat voulu avec (3.5.5).

Malheureusement, l'égalité (3.5.6) n'est pas vraie! En effet, on montre que le groupe de monodromie $G_{arith}(\mathcal{H})$ est bien plus petit car les images du Frobenius $F_x^{(i)}$ ne se comportent pas indépendamment.

Proposition 3.5.2. *Si $m_i = b_i^2 \pmod p$ alors*

$$G_{geom}(\mathcal{H}) = G_{arith}(\mathcal{H}) = \left\{ \text{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \left(\begin{pmatrix} e_p(b_i x) & 0 \\ 0 & e_p(-b_i x) \end{pmatrix} \right) \mid x \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket \right\} \sqcup \left\{ \text{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \left(\begin{pmatrix} 0 & e_p(b_i x) \\ e_p(-b_i x) & 0 \end{pmatrix} \right) \mid x \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket \right\}. \quad (3.5.7)$$

Preuve. On va déduire ce résultat de la preuve de la proposition 3.5.1. Remarquons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{F}_p$, l'action d'un Frobenius $\text{Frob}_x \in \pi_{1,p}^{arith} = \pi_1(\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p)$ sur la fibre \mathcal{H}_∞ se décrit via celle de $\text{Frob}_p \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ sur

$$\mathcal{H}_{\bar{x}} = \bigoplus_{i=1}^s (\mathcal{F}_i)_{\bar{x}} = \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{G}_{m_i \bar{x}}.$$

Or pour tout i , l'action de Frob_p sur $\mathcal{G}_{\bar{x}}|_{m_i \bar{x}}$ est la même que celle de $\text{Frob}_{m_i x} \in \pi_{1,p}^{arith}$ sur \mathcal{G}_∞ donc la même que son image dans $\text{Gal}(K(z)/K)$, noté encore $\text{Frob}_{m_i x}$ pour faire le lien avec la preuve de la proposition 3.5.1.

Ainsi Frob_x agit sous la forme $\text{diag}_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} (F_{m_i x})$ sur \mathcal{H}_∞ avec $F_{m_i x} = \rho_{\mathcal{G}}(\text{Frob}_{m_i x})$, ce qui permet d'obtenir (3.5.7) avec ce qui précède car de plus $\pi_{1,p}^{geom} \rightarrow \text{Gal}(K(z)/K)$ donc $G_{geom}(\mathcal{H}) = G_{arith}(\mathcal{H})$. □

En d'autres termes, on a jamais indépendance des faisceaux \mathcal{F}_i même pour des m_i différents. Ceci n'a rien d'étonnant puisque leurs fonctions traces valent, pour x un carré dans \mathbb{F}_p^* ,

$$t_{\mathcal{F}_i}(x) = 2 \cos \left(\frac{2\pi b_i \sqrt{x^p}}{p} \right)$$

qui est un polynôme de Tchebychev en $t_{\mathcal{G}}(x)$. La figure 3.1 illustre bien le fait que dans le cas où les m_i sont des carrés dans \mathbb{Z} , il ne peut y avoir indépendance entre les $t_{\mathcal{F}_i}$.

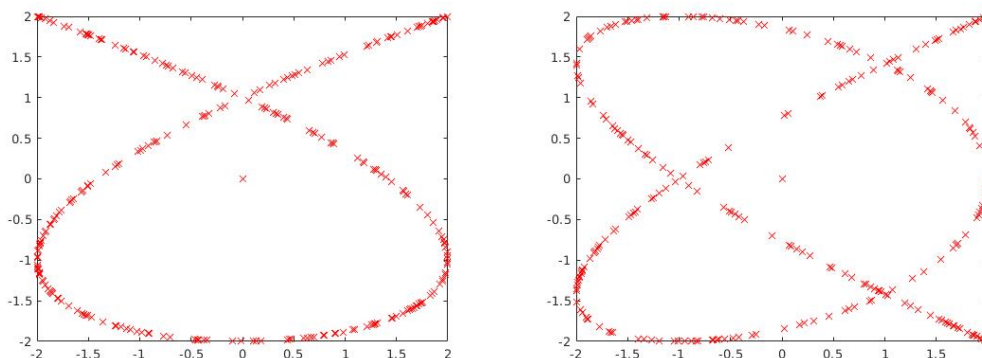
En revanche, en dehors de ce cas, les simulations suggèrent que la variable aléatoire

$$x \mapsto (t_{\mathcal{F}_1}(x), \dots, t_{\mathcal{F}_s}(x))$$

se comporte quasiment comme $(2 \cos(\mathcal{U}_1), \dots, 2 \cos(\mathcal{U}_s))$ où les \mathcal{U}_i sont des variables i.i.d de loi uniforme sur $[0; 2\pi]$ (voir figure 3.2). Ceci s'explique par le fait que les polynômes de Tchebychev reliant les $t_{\mathcal{F}_i}$ seront en général de très haut degré.

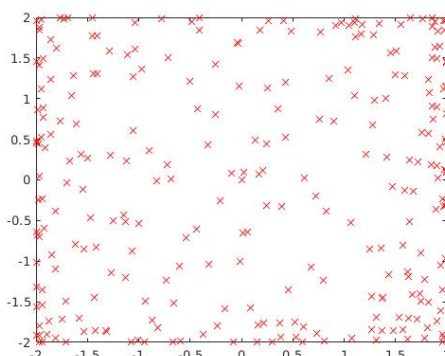
La conclusion reste quand même que la théorie des fonctions traces n'aide pas pour montrer un résultat de type (3.5.4). Néanmoins les résultats de la section précédente vont suffire à estimer les moments de la somme de coefficients de Fourier E_q .

FIGURE 3.1 – Cas pathologiques



Simulations de la variable aléatoire $(t_{\mathcal{F}_1}, t_{\mathcal{F}_2})$ avec $(m_1, m_2) = (9, 4)$ puis $(m_1, m_2) = (16, 9)$, $p = 2741$ et 600 points (mais la moitié sont situés sur l'origine).

FIGURE 3.2 – Cas quasi-indépendant



Même chose mais avec cette fois $m_1 = 19$ et $m_2 = 33$ qui n'ont rien de particulier en commun à part le fait d'être des carrés modulo $p = 2741$.

6 Évaluation asymptotique des moments

Dans cette section, on va prouver une version plus forte du théorème 3.1.3. On fixe $f \in S_{\ell+1/2}(N')$ vérifiant l'hypothèse 3.1.1. Soit $q = p^N$ une puissance d'un nombre premier ne divisant pas N' et pour a premier avec q , on définit $S_q(a)$ et $E_q(a)$ comme en (3.1.9), (3.1.10) et (3.1.1), (3.1.2). Par ailleurs, on rappelle la définition de la somme de Salié normalisée en (3.4.1).

On va calculer les moments de E_q en utilisant les résultats des sections 2, 3 et 4. Tout d'abord, on applique la formule sommatoire de Voronoï pour faire le lien avec les sommes de Salié. Ensuite, on va utiliser la formule explicite vue à la section 4 pour les moments de sommes de Salié (lemme 3.4.1) et on va appliquer le lemme d'approximation 3.4.2.

6.1 Application de la formule de Voronoï

Proposition 3.6.1. *Soit ν un entier strictement positif et posons $Y = N'q^2/X$. Pour tout $\eta > 0$, $A > 0$, $\varepsilon > 0$ et a premier avec q , on a*

$$E_q(a)^\nu = \left(\frac{\varepsilon_q^{-2\ell} \left(\frac{a}{q}\right)}{\sqrt{Y}} \sum_{1 \leq m < Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m) \text{Sa}_q(4\overline{N'}ma) B\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^\nu + O\left(Y^{\nu/2+\varepsilon} p^{-3/2} + Y^{-A}\right), \quad (3.6.1)$$

la constante implicite dépendant seulement de f, w, η, ε et A .

Preuve. On introduit d'abord les caractères additifs pour pouvoir écrire

$$\begin{aligned} S_q(a) &= \frac{1}{q} \sum_{b[q]} e_q(-ab) \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_q(nb) w\left(\frac{n}{X}\right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{b[q]}^\times e_q(-ab) \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_q(nb) w\left(\frac{n}{X}\right) \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{q} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{b[p^r]}^\times e_{p^r}(-ab) \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_{p^r}(nb) w\left(\frac{n}{X}\right)}_{= \frac{1}{p} S_{p^{N-1}}(a)}. \end{aligned}$$

On va montrer que le dernier terme est en fait négligeable.

En appliquant la formule de Voronoï, on a pour tout $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et b premier avec p^r ,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q} \sum_{b[p^r]}^\times e_{p^r}(-ab) \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_{p^r}(nb) w\left(\frac{n}{X}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_{p^r}^{-(2\ell+1)} X}{\sqrt{N'p^{N+r}}} \sum_{b[p^r]}^\times e_{p^r}(-ab) \left(\frac{-\bar{b}}{p^r}\right) \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) e_{p^r}(-\overline{N'}bm) B\left(\frac{m}{N'p^{2r}/X}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_{p^r}^{-(2\ell+1)} X}{\sqrt{N'p^{N+r/2}}} \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) \text{Sal}_{p^r}(a, \overline{N'}m) B\left(\frac{m}{N'p^{2r}/X}\right) \\ &= \sqrt{\frac{X}{q}} \frac{\varepsilon_{p^r}^{-(2\ell+1)} p^{(N-r)/2}}{\sqrt{Y}} \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) \text{Sal}_{p^r}(a, \overline{N'}m) B\left(\frac{mp^{2(N-r)}}{Y}\right). \end{aligned}$$

La proposition 3.3.2 montre que cette dernière quantité est $\ll_\varepsilon \sqrt{\frac{X}{q}} Y^{1/2+\varepsilon} p^{-\frac{3}{2}(N-r)}$ et qu'il en est de même pour $r = 0$ en utilisant directement la transformée de Mellin. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} E_q(a) &= \frac{\varepsilon_q^{-(2\ell+1)}}{\sqrt{Y}} \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) \text{Sal}_q(a, \overline{N'}m) B\left(\frac{m}{Y}\right) + O(Y^{1/2+\varepsilon} p^{-3/2}) \\ &= \frac{\varepsilon_q^{-2\ell} \left(\frac{a}{q}\right)}{\sqrt{Y}} \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) \text{Sa}_q(4\overline{N'}ma) B\left(\frac{m}{Y}\right) + O(Y^{1/2+\varepsilon} p^{-3/2}) \\ &= \frac{\varepsilon_q^{-2\ell} \left(\frac{a}{q}\right)}{\sqrt{Y}} \sum_{1 \leq m < Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m) \text{Sa}_q(4\overline{N'}ma) B\left(\frac{m}{Y}\right) + O(Y^{1/2+\varepsilon} p^{-3/2} + Y^{-A}) \end{aligned}$$

en utilisant encore la proposition 3.3.2 pour tout $\eta > 0$ et $A \geq 1$. La première somme est $\ll Y^{1/2+\varepsilon}$ donc en élevant E_q à la puissance ν , on a (3.6.1). \square

Remarque 3.6.1.

- Le terme d'erreur pour $r = 0$ dans la preuve est vu dans [FGKM] et [KR] comme un « faux » terme principal qui correspond à l'espérance de S_q et qui est donc indépendant de a . Évidemment, le fait de l'inclure ou non dans la définition de S_q ne change pas le résultat.
- On a aussi prouvé que

$$\frac{S_{p^N}(a) - \frac{1}{p}S_{p^{N-1}}(a)}{\sqrt{X/p^N}} = \frac{\varepsilon_q^{-2\ell} \left(\frac{a}{q}\right)}{\sqrt{Y}} \sum_{1 \leq m < Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m) \text{Sa}_q(4N'ma) B\left(\frac{m}{Y}\right) + O(Y^{-A}) \quad (3.6.2)$$

ce qui apparaît comme étant la « bonne » normalisation de S_{p^N} si on cherche un développement asymptotique lorsque p est fixé et que $N \rightarrow +\infty$.

6.2 Application du lemme 3.4.1

On voudrait établir une formule asymptotique pour l'espérance du terme principal dans (3.6.1) lorsque Y et q tendent vers $+\infty$. Pour ce faire, on va définir

$$\mathcal{M}_q(a) := \frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{1 \leq m < Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m) \text{Sa}_q(ma) B\left(\frac{m}{Y}\right). \quad (3.6.3)$$

Remarquons d'abord que puisque $4N'$ est premier avec q et d'après la proposition 3.6.1,

$$\mathbb{E}(E_q^\nu) = \left(\varepsilon_q^{-2\ell} \left(\frac{a}{q}\right)\right)^\nu \mathbb{E}(\mathcal{M}_q^\nu) + O\left(Y^{\nu/2+\varepsilon} p^{-3/2} + Y^{-A}\right) \quad (3.6.4)$$

De plus,

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_q^\nu) = \frac{1}{2} \mathbb{E}^+(\mathcal{M}_q^\nu) + \frac{1}{2} \mathbb{E}^-(\mathcal{M}_q^\nu). \quad (3.6.5)$$

Puisque le calcul de \mathbb{E}^- est essentiellement le même que pour \mathbb{E}^+ , on va se concentrer sur ce dernier.

$$\mathbb{E}^+(\mathcal{M}_q^\nu) = \mathbb{E}^+ \left(\frac{1}{Y^{\nu/2}} \left(\sum_{1 \leq m < Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m) \text{Sa}_q(ma) B\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^\nu \right) \quad (3.6.6)$$

$$= \frac{1}{Y^{\nu/2}} \sum_{1 \leq m_1, \dots, m_\nu < Y^{1+\eta}} \prod_{i=1}^{\nu} \hat{f}_0(m_i) B\left(\frac{m_i}{Y}\right) \mathbb{E}^+ \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Sa}_q(m_i a) \right) \quad (3.6.7)$$

D'après le lemme 3.4.1, si $\left(\frac{m_i}{p}\right) = 1$ pour tout i alors

$$\mathbb{E}^+ \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Sa}_q(m_i a) \right) = (1 - 1/p)^{-1} \sum_{e \in \{\pm 1\}^\nu} \left(\delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i}^q \right) - \frac{1}{p} \delta_{q/p} \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i}^{q/p} \right) \right) \quad (3.6.8)$$

sinon cette quantité est nulle.

Ainsi, on cherche un terme principal dans

$$\sum_{\substack{1 \leq m_i < Y^{1+\eta} \\ 1 \leq i \leq \nu}}^{\square} \prod_{i=1}^{\nu} \hat{f}_0(m_i) B\left(\frac{m_i}{Y}\right) \sum_{e \in \{\pm 1\}^{\nu}} \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i}^q \right) \quad (3.6.9)$$

et rappelons que le \square dans la somme signifie que l'on impose la condition $\left(\frac{m_i}{p}\right) = 1$ pour tout i .

On va montrer en étudiant les radicaux sans facteur carré des m_i que le terme principal provient des ν -uplets (m_1, \dots, m_{ν}) tels que $|\{m_i, i \in \llbracket 1, \nu \rrbracket\}| = \nu/2$ pour des ν pairs.

On va d'abord réarranger l'expression en (3.6.9) de manière à appliquer intelligemment le résultat principal de la section 4 pour obtenir des formules précises pour les moments pairs et impairs.

6.3 Aspect combinatoire

Comme dans [KR, lemma 7.1] on va réordonner la somme dans (3.6.9) selon la valeur des radicaux sans facteurs carré des m_i . Cependant, on utilise une approche et des notations un peu différentes. Pour $s \in \llbracket 1, \nu \rrbracket$, on note $S(\nu, s)$ l'ensemble des fonctions surjectives de $\llbracket 1, \nu \rrbracket$ dans $\llbracket 1, s \rrbracket$. Pour $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on pose

$$\sigma^{-1}(j) = \{i \in \llbracket 1, \nu \rrbracket \mid \sigma(i) = j\}$$

et $|\sigma^{-1}(j)|$ son cardinal. Pour $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on pose

$$\sigma_k = |\{j \in \llbracket 1, s \rrbracket : |\sigma^{-1}(j)| = k\}|.$$

Si $m \in \mathbb{N}^*$ alors il peut s'écrire de manière unique comme $m = r^2 t$ avec $t \in \mathbb{N}^b$ et $r \geq 1$. Désormais, si $\sigma \in S(\nu, s)$ alors pour $1 \leq i \leq \nu$ et $1 \leq j \leq s$ les lettres t_j , r_i et m_i référeront toujours à des entiers strictement positifs tels que $t_j \in \mathbb{N}^b$ et $1 \leq m_i < Y^{1+\eta}$. Aussi, le symbole \ll sera utilisé au sens où la constante implicite ne dépend pas de p , q ou Y mais peut dépendre bien sûr des autres paramètres.

Avant de revenir à notre problème, remarquons que pour tout ensemble d'entiers M , toute fonction à valeurs complexes F définie sur M^{ν} , on a

$$\sum_{\mathbf{m} \in M^{\nu}} F(m_1, \dots, m_{\nu}) = \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\sigma \in S(\nu, s)} \sum_{t_1 < \dots < t_s} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in M^{\nu} \\ m_i = r_i^2 t_{\sigma(i)}}} F(m_1, \dots, m_{\nu}). \quad (3.6.10)$$

Ainsi, d'après les équations (3.6.7), (3.6.8) et (3.6.10), on obtient

$$\mathbb{E}^+(\mathcal{M}_q^{\nu}) = \frac{(1 - 1/p)^{-1}}{Y^{\nu/2}} \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\sigma \in S(\nu, s)} \left(\Sigma_{\sigma}(q) - \frac{1}{p} \Sigma_{\sigma}(q/p) \right) \quad (3.6.11)$$

où

$$\Sigma_{\sigma}(q) = \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_s \\ m_i = r_i^2 t_{\sigma(i)}}}^{\square} \prod_{i=1}^{\nu} \hat{f}_0(m_i) B\left(\frac{m_i}{Y}\right) \sum_{e \in \{\pm 1\}^{\nu}} \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i}^q \right).$$

pour tout $s \in \llbracket 1, \nu \rrbracket$ et $\sigma \in S(\nu, s)$.

6.4 Application du lemme 3.4.2

On va montrer la proposition suivante.

Proposition 3.6.2. *Soit $C_\nu = (2\nu^{2\nu-1})^{-1}$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $Y^{2\nu-2+\delta} < C_\nu q$. Alors, pour η suffisamment petit¹ :*

- *S'il existe $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que $|\sigma^{-1}(j)| = 1$ alors $\Sigma_\sigma(q) = 0$.*
- *Sinon,*

$$|\Sigma_\sigma(q)| \ll Y^{(1+\eta)(\frac{\nu}{2} - (1/2-\alpha)(s-\sigma_2)) + \varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Ainsi, si $\sigma_2 < s$ (par exemple, si on est pas dans le cas où ν est pair et $s = \nu/2$), alors

$$\frac{1}{Y^{\nu/2}} |\Sigma_\sigma(q)| \ll Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon}$$

pour η assez petit donc ce terme devient une contribution négligeable dans le calcul de $\mathbb{E}(\mathcal{M}_q^\nu)$ lorsque $Y \rightarrow +\infty$.

Preuve. Prenons $\eta < \delta 2^{2-\nu}$ de manière à ce que la condition du lemme 3.4.2 soit vérifiée pour $Y^{1+\eta}$ (le cas $\nu = 1$ étant trivial, on peut supposer que $\nu \geq 2$). D'après le lemme 3.3.1 et 3.4.2, on a

$$\begin{aligned} |\Sigma_\sigma(q)| &\ll \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_s \\ m_i = r_i^2 t_{\sigma(i)}}} \prod_{i=1}^{\nu} |\hat{f}_0(m_i)| \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_0 \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu} \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_s \\ m_i = r_i^2 t_{\sigma(i)}}} \prod_{i=1}^{\nu} |\hat{f}_0(m_i)| \delta_0 \left(\sum_{j=1}^s \lambda_j(\mathbf{e}, \mathbf{r}) \sqrt{t_j} \right) \end{aligned}$$

avec $\lambda_j(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} e_i r_i$.

Les racines carrées d'entiers distincts sans facteur carré sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} (proposition 1.3.2) donc

$$\sum_{j=1}^s \lambda_j(\mathbf{e}, \mathbf{r}) \sqrt{t_j} = 0 \iff \lambda_j(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} e_i r_i = 0 \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, s \rrbracket.$$

Si $|\sigma^{-1}(j)| = 1$ pour un certain $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ alors l'égalité précédente n'est jamais vérifiée car les r_i sont strictement positifs. Ceci prouve la première assertion de la proposition.

Sinon, pour tout j et pour tout t_j fixé, on a $|\sigma^{-1}(j)| - 1$ degrés de liberté dans le choix des $r_i \leq \sqrt{Y^{1+\eta}/t_{\sigma(i)}}$. D'après [JLL+1, lemma 3.3], si on se place dans le premier cas de l'hypothèse 3.1.1, on a

$$|\hat{f}_0(t_j r_i^2)| \ll_\varepsilon |\hat{f}_0(t_j)| r_i^\varepsilon + |\hat{f}_\infty(t_j)| r_i^\varepsilon \quad (3.6.12)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci est de plus trivialement vrai dans le deuxième cas d'après (2.3.1). Dans le troisième cas, on a $|\hat{f}_0(t_j r_i^2)| \ll_\varepsilon |\hat{f}_0(t_j)| r_i^\varepsilon$ d'après (2.3.2) mais ici on a décomposé

1. Insistons sur le fait qu'il n'est pas nécessaire d'avoir $\eta \rightarrow 0$. Ici, η est une constante fixée (indépendante de q et de Y) qu'on pourra optimiser plus tard.

les entiers m_i sous la forme $m_i = t_i r_i^2$ avec $t_i = (-1)^\ell D_i > 0$ et D_i un discriminant fondamental. Puisque les différentes valeurs de $\sqrt{t_i}$ sont encore linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , la discussion précédente reste inchangée.

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_s \\ m_i = r_i^2 t_{\sigma(i)}}} \prod_{i=1}^{\nu} |\hat{f}_0(m_i)| \delta_0 \left(\sum_{j=1}^s \lambda_j(e, r) \sqrt{t_j} \right) \\ & \ll \sum_{t_1 < \dots < t_s} \sum_{\substack{r_i^2 t_{\sigma(i)} < Y^{1+\eta} \\ \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} e_i r_i = 0}} \prod_{j=1}^s \prod_{i \in \sigma^{-1}(j)} (|\hat{f}_0(t_j)| + |\hat{f}_\infty(t_j)|) r_i^\varepsilon \\ & \ll Y^{(1+\eta)\varepsilon s} \sum_t \prod_{j=1}^s (|\hat{f}_0(t_j)| + |\hat{f}_\infty(t_j)|)^{|\sigma^{-1}(j)|} \left(\sum_{r^2 t_j < Y^{1+\eta}} r^\varepsilon \right)^{|\sigma^{-1}(j)|-1} \end{aligned}$$

puisque pour tout j , on fixe les premières $|\sigma^{-1}(j)| - 1$ valeurs des r_i et on majore la dernière valeur (déterminée par la relation linéaire) par $Y^{1+\eta}$. On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_t \prod_{j=1}^s (|\hat{f}_0(t_j)| + |\hat{f}_\infty(t_j)|)^{|\sigma^{-1}(j)|} \left(\sum_{r^2 t_j < Y^{1+\eta}} r^\varepsilon \right)^{|\sigma^{-1}(j)|-1} \\ & \ll \sum_t \prod_{j=1}^s (|\hat{f}_0(t_j)| + |\hat{f}_\infty(t_j)|)^{|\sigma^{-1}(j)|} \left(\frac{Y^{1+\eta}}{t_j} \right)^{(1/2+\varepsilon)(|\sigma^{-1}(j)|-1)} \\ & \ll Y^{(1+\eta)(1/2+\varepsilon)(\nu-s)} \prod_{j=1}^s \sum_{1 \leq t < Y^{1+\eta}} (|\hat{f}_0(t)| + |\hat{f}_\infty(t)|)^{|\sigma^{-1}(j)|} t^{-(|\sigma^{-1}(j)|-1)/2}. \end{aligned}$$

Pour traiter la dernière somme, on va différencier les cas suivant la valeur de $|\sigma^{-1}(j)|$ (qui est un entier ≥ 2).

- Si $|\sigma^{-1}(j)| = 2$ alors, puisque $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, en utilisant le lemme 3.2.2,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq t < Y^{1+\eta}} \frac{(|\hat{f}_0(t)| + |\hat{f}_\infty(t)|)^2}{\sqrt{t}} & \ll \sum_{a \in \{0, \infty\}} \sum_{1 \leq t < Y^{1+\eta}} \frac{|\hat{f}_a(t)|^2}{\sqrt{t}} \\ & \ll Y^{(1+\eta)/2} \end{aligned}$$

- Si $|\sigma^{-1}(j)| = 3$ alors en utilisant (3.2.3), on a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq t < Y^{1+\eta}} \frac{(|\hat{f}_0(t)| + |\hat{f}_\infty(t)|)^3}{t} & \ll Y^{(1+\eta)\alpha+\varepsilon} \sum_{1 \leq t < Y^{1+\eta}} \frac{(|\hat{f}_0(t)| + |\hat{f}_\infty(t)|)^2}{t} \\ & \ll Y^{(1+\eta)\alpha+\varepsilon} \sum_{a \in \{0, \infty\}} \sum_{1 \leq t < Y^{1+\eta}} \frac{|\hat{f}_a(t)|^2}{t} \\ & \ll Y^{(1+\eta)\alpha+\varepsilon} \end{aligned}$$

où l'on s'est servi une nouvelle fois du lemme 3.2.2 et d'une sommation par parties.

- Si $|\sigma^{-1}(j)| \geq 4$ alors la somme est bornée uniformément en q et Y .

De ce fait, on a

$$\begin{aligned} \Sigma_\sigma(q) &\ll Y^{(1+\eta)(\frac{\nu-s}{2}+\frac{\sigma_2}{2}+\alpha\sigma_3)+\varepsilon} \\ &\ll Y^{(1+\eta)(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}-\alpha)(s-\sigma_2)+\varepsilon} \end{aligned}$$

puisque $\sigma_2 + \sigma_3 \leq s$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. \square

Remarque 3.6.2.

- Le second terme du membre de droite de (3.6.12) provient du fait que f_0 n'est *a priori* que vecteur propre des opérateurs de Hecke T_{p^2} avec p impair. Pour avoir $|\hat{f}_0(r^2t)| \ll_\varepsilon |\hat{f}_0(t)|r^\varepsilon$, il aurait fallu supposer que f_0 soit propre.
- Dans le cas de \mathbb{E}^- , on remplace juste les m_i par $\mu_p m_i$ dans la fonction indicatrice (avec μ_p positif) et on remarque que

$$\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{\mu_p m_i} = 0 \iff \sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i} = 0$$

donc on obtient le même résultat que pour \mathbb{E}^+ .

6.5 Moments impairs

On peut à présent énoncer le résultat principal concernant les moments impairs.

Théorème 3.6.1. *Soient $\nu > 0$ un entier impair et $C_\nu = (2\nu^{2\nu-1})^{-1}$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$1 \leq Y^{2\nu-2+\delta} < C_\nu q$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}(E_q^\nu) = O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p}\right) \quad (3.6.13)$$

où la constante implicite ne dépend que de f, w, ν, ε et δ .

Si on suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$1 \leq Y^{2\nu-2+\delta} < C_\nu q/p$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}(E_q^\nu) = O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p^{3/2}}\right) \quad (3.6.14)$$

où la constante implicite ne dépend que de f, w, ν, ε et δ .

Preuve. Dans le premier cas, la condition de croissance en Y nous permet d'appliquer la proposition 3.6.2 pour $\Sigma_\sigma(q)$ dans (3.6.11) mais on ne peut appliquer que la proposition 3.3.2 pour traiter le cas de $\Sigma_\sigma(q/p)$.

On obtient ainsi

$$\mathbb{E}^+(\mathcal{M}_q^\nu) \ll Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p}$$

et de même pour \mathbb{E}^- comme précisé dans la dernière remarque. D'après l'équation (3.6.4), on en déduit la conclusion.

Dans le second cas, on peut appliquer la proposition 3.6.2 à la fois à $\Sigma_\sigma(q)$ et $\Sigma_\sigma(q/p)$ dans (3.6.11). On obtient ainsi

$$\mathbb{E}^\pm(\mathcal{M}_q^\nu) \ll Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon}$$

et d'après l'équation (3.6.4), on en déduit la conclusion. \square

Remarque 3.6.3. On peut voir que la seconde condition de croissance en Y dans le théorème 3.6.1 n'est intéressante que dans le cas où $q = p^N$ avec $N > 1$.

6.6 Moments pairs

On suppose à présent que ν est pair. Pour l'instant, on a seulement montré que le terme principal de (3.6.9) provient des ν -uplets $m_i = r_i^2 t_i$ tels que $|\{t_i, i \in \llbracket 1, \nu \rrbracket\}| = \nu/2$ donc il nous faut être plus précis. On note $S^*(\nu, \nu/2)$ l'ensemble des surjections $\sigma \in S(\nu, \nu/2)$ telles que tout $j \in \llbracket 1, \nu/2 \rrbracket$ a exactement deux antécédents par σ (i.e. $\sigma_2 = \nu/2$).

Proposition 3.6.3. Soient $\nu > 0$ un entier pair et $\sigma \in S^*(\nu, \nu/2)$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $Y^{2\nu-2+\delta} < C_\nu q$ avec $C_\nu = (2\nu^{2\nu-1})^{-1}$. Alors, pour $0 < \eta < \delta 2^{2-\nu}$,

$$\Sigma_\sigma(q) = 2^{\nu/2} \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_{\nu/2} \\ m_i = r_i^2 t_i}}^\square \prod_{i=1}^{\nu/2} \hat{f}_0(m_i)^2 B\left(\frac{m_i}{Y}\right)^2$$

Preuve. Soient $t_1, \dots, t_{\nu/2}$ des entiers positifs distincts sans facteur carré et posons $m_i = r_i^2 t_{\sigma(i)}$ comme précédemment. Quitte à changer un peu les notations, on peut supposer que $m_{2i-1} = r_i^2 t_i$ et $m_{2i} = r_i'^2 t_i$ pour $i \in \llbracket 1, \nu/2 \rrbracket$. Ainsi,

$$\sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu/2} e_i \sqrt{m_i^q} \right) = \sum_{\mathbf{e}' \in \{\pm 1\}^{\nu/2}} \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^{\nu/2}} \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu/2} e_i (r_i + e'_i r'_i) \sqrt{t_i^q} \right).$$

Fixons \mathbf{e}' et appliquons le lemme 3.4.2 aux $(r_i + e'_i r'_i)^2 t_i \leq 4Y^{1+\eta}$. Ceci est possible car $\left((\nu/2)^2 4Y^{1+\eta} \right)^{2^{\nu/2-2}} \leq (\nu^2 Y^{1+\eta})^{2^{\nu-2}} < q/2$ pour $\nu > 2$ et $4Y^{1+\eta} < q/2$ pour $\nu = 2$.

De ce fait,

$$\sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^{\nu/2}} \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu/2} e_i (r_i + e'_i r'_i) \sqrt{t_i^q} \right) \leq 2^{\nu/2} \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^{\nu/2}} \delta_0 \left(\sum_{i=1}^{\nu/2} e_i (r_i + e'_i r'_i) \sqrt{t_i} \right).$$

Le membre de droite s'annule sauf si $\sum_{i=1}^{\nu/2} e_i(r_i + e'_i r'_i) \sqrt{t_i} = 0$ pour un certain e . Dans ce cas, $r_i + e'_i r'_i = 0$ pour tout i puisque les t_i sont sans facteur carré et distincts. On en déduit alors que $r_i = r'_i$ et $e'_i = -1$ pour tout i (car $r_i, r'_i \geq 1$). Ainsi, on a $m_{2i-1} = m_{2i}$ et en fait

$$\sum_{e \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i^q} \right) = 2^{\nu/2}$$

ce qui permet de conclure. □

On peut à présent énoncer le résultat principal pour les moments pairs.

Théorème 3.6.2. *Soient $\nu > 0$ un entier pair et $C_\nu = (2\nu^{2\nu-1})^{-1}$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$1 \leq Y^{2\nu-2+\delta} < C_\nu q$$

alors pour tout $0 < \eta < \delta 2^{2-\nu}$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}^\pm(E_q^\nu) = \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m < Y^{1+\eta} \\ \binom{m}{p} = \pm 1}} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^{\nu/2} + O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p}\right) \quad (3.6.15)$$

où la constante implicite ne dépend que de f, w, ν, ε et η .

Si on suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$1 \leq Y^{2\nu-2+\delta} < C_\nu q/p$$

alors le terme d'erreur dans (3.6.15) est $O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p^{3/2}}\right)$ où la constante implicite ne dépend que de f, w, ν, ε et η .

Preuve. Commençons par le second cas. En appliquant les propositions 3.6.2 et 3.6.3 à la fois pour $\Sigma_\sigma(q)$ et $\Sigma_\sigma(q/p)$ dans (3.6.11), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^+(\mathcal{M}_q^\nu) &= \frac{(1-1/p)^{-1}}{Y^{\nu/2}} \sum_{\sigma \in S^*(\nu, \nu/2)} 2^{\nu/2} \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_{\nu/2} \\ m_i = r_i^2 t_i}} \prod_{i=1}^{\nu/2} \hat{f}_0(m_i)^2 B\left(\frac{m_i}{Y}\right)^2 \\ &\quad - \frac{(1-1/p)^{-1}}{pY^{\nu/2}} \sum_{\sigma \in S^*(\nu, \nu/2)} 2^{\nu/2} \sum_{\substack{t_1 < \dots < t_{\nu/2} \\ m_i = r_i^2 t_i}} \prod_{i=1}^{\nu/2} \hat{f}_0(m_i)^2 B\left(\frac{m_i}{Y}\right)^2 + O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

et puisque la quantité dans le produit est indépendante de l'ordre des t_i , on obtient

$$\begin{aligned} Y^{\nu/2} \mathbb{E}^+(\mathcal{M}_q^\nu) &= 2^{\nu/2} \frac{|S^*(\nu, \nu/2)|}{(\nu/2)!} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_{\nu/2} \text{ distincts} \\ m_i = r_i^2 t_i}} \prod_{i=1}^{\nu/2} \hat{f}_0(m_i)^2 B\left(\frac{m_i}{Y}\right)^2 + O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon}\right) \\ &= \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_{\nu/2} \\ m_i = r_i^2 t_i}} \prod_{i=1}^{\nu/2} \hat{f}_0(m_i)^2 B\left(\frac{m_i}{Y}\right)^2 + O\left(Y^{-(1/2-\alpha)+\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

car les termes ajoutés sont négligeables d'après la proposition 3.6.2. On obtient le résultat analogue pour \mathbb{E}^- (où la somme est prise sur les non-carrés modulo p) et on en déduit la conclusion désirée.

On procède essentiellement de la même façon dans le premier cas puisqu'il suffit d'appliquer les propositions 3.6.2 et 3.6.3 seulement pour $\Sigma_\sigma(q)$ et utiliser une fois de plus que

$$\sum_{m_1, \dots, m_\nu} \prod_{i=1}^{\nu} |\hat{f}_0(m_i) B\left(\frac{m_i}{Y}\right)| \ll Y^{\nu+\varepsilon}.$$

□

7 La convergence des moments

Puisque les corollaires 3.1.1 et 3.1.2 sont établis via la convergence des moments des variables aléatoires E_{q_k} , il apparaît opportun de rappeler pourquoi dans de nombreux cas, la convergence des moments d'une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r) entraîne sa convergence en loi. Étonnamment, on trouve assez peu de démonstrations de ce résultat dans la littérature bien que celui-ci soit très connu des spécialistes, particulièrement en théorie analytique des nombres.

La plupart des résultats suivants sont issus de [G].

7.1 Fonction génératrice des moments

On dit qu'une v.a.r X admet un moment d'ordre $\nu \in \mathbb{N}$ si $\mathbb{E}(|X|^\nu) < +\infty$ et on définit alors ce moment comme étant $\mathbb{E}(X^\nu)$. Par convention, le moment d'ordre 0 vaut 1.

Définition 3.7.1. Soit X une v.a.r. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose lorsque l'intégrale converge

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Cette fonction s'appelle la fonction génératrice des moments de X .

La première propriété fondamentale de cette fonction est que son existence sur un voisinage de 0 assure l'existence de tous les moments de X et que ceux-ci déterminent φ_X .

Proposition 3.7.1. Soit X une v.a.r. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $\varphi_X(t)$ soit bien définie pour $t \in]-h, +h[$. Alors,

- (i) $\varphi_{|X|}(t) < +\infty$ pour tout $t \in]-h, +h[$,
- (ii) $\mathbb{E}(|X|^\nu) < +\infty$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$,
- (iii) $\varphi_X(t) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{t^\nu}{\nu!} \mathbb{E}(X^\nu)$ pour tout $t \in]-h, +h[$.

Preuve. Pour $t \in]-h, +h[$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{t|X|}) &= \mathbb{E}(e^{tX} \mathbf{1}_{X \geq 0}) + \mathbb{E}(e^{-tX} \mathbf{1}_{X < 0}) \\ &\leq \varphi_X(t) + \varphi_X(-t) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

ce qui montre (i).

Ainsi,

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{|t|^\nu}{\nu!} \mathbb{E}(|X|^\nu) = \mathbb{E}\left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{|tX|^\nu}{\nu!}\right) = \mathbb{E}(e^{|tX|}) < +\infty$$

pour $t \in]-h, +h[$, ce qui montre (ii) et qui justifie l'interversion série-intégrale pour montrer (iii). □

Lorsqu'elle existe, la fonction génératrice des moments vérifie des propriétés analogues à celles de la fonction caractéristique de X (qu'on définit par $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$). On a notamment le fait que φ_X caractérise la loi de X .

Proposition 3.7.2. *Soient X et Y des v.a.r telles que $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$ soient bien définies pour $t \in]-h, +h[$, avec $h > 0$, et vérifient*

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$$

sur cet intervalle. Alors, on a l'égalité des lois : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.

Preuve. La convergence de $\varphi_X(t)$ sur $] - h, +h[$ entraîne que la fonction

$$s \mapsto \mathbb{E}(e^{sX})$$

est holomorphe sur le domaine $-h < \operatorname{Re} s < h$ (en majorant $|e^{sX}|$ par $e^{|\operatorname{Re} sX|}$) et de même pour $s \mapsto \mathbb{E}(e^{sY})$. Puisque ces deux fonctions coïncident sur $] - h, +h[$, elles coïncident nécessairement sur tout le domaine et donc en particulier pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(e^{itY}) = \phi_Y(t)$$

donc on a égalité des fonctions caractéristiques, ce qui implique l'égalité des lois de X et Y . □

On peut à présent démontrer la proposition principale de cette partie.

Proposition 3.7.3. *Soit X une v.a.r telle que $\varphi_X(t)$ soit bien définie pour $t \in]-h, +h[$, avec $h > 0$. Alors la loi de X est déterminée par ses moments i.e. pour toute v.a.r Y , si*

$$\mathbb{E}(X^\nu) = \mathbb{E}(Y^\nu)$$

pour tout entier $\nu \geq 1$ alors $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.

Preuve. D'après les propositions 3.7.1 et 3.7.2, il suffit de montrer que $\varphi_Y(t) < +\infty$ sur un voisinage de 0. Soit $t \in]-h, +h[$, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\varphi_Y(t) \leq \sum_{\nu \geq 0} \frac{|t|^\nu}{\nu!} \mathbb{E}(|Y|^\nu).$$

Or, pour tout $\nu \geq 0$, $\mathbb{E}(|Y|^{2\nu}) = \mathbb{E}(|X|^{2\nu})$ et

$$\mathbb{E}(|Y|^{2\nu+1}) \leq \mathbb{E}(|Y|^{2\nu} \mathbf{1}_{|Y| < 1}) + \mathbb{E}(|Y|^{2\nu+2} \mathbf{1}_{|Y| > 1}) \leq \mathbb{E}(|Y|^{2\nu}) + \mathbb{E}(|Y|^{2\nu+2}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \varphi_Y(t) &\leq \sum_{\nu \geq 0} \frac{|t|^{2\nu}}{(2\nu)!} \mathbb{E}(|X|^{2\nu}) + \sum_{\nu \geq 0} \frac{|t|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \mathbb{E}(|Y|^{2\nu+1}) \\
 &\ll_t \sum_{\nu \geq 0} \frac{|t|^{2\nu}}{(2\nu)!} \mathbb{E}(|X|^{2\nu}) + \sum_{\nu \geq 0} \frac{|t|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \mathbb{E}(|X|^{2\nu+2}) \\
 &\ll_t \varphi_{|X|}(|t|) + \varphi'_{|X|}(t) \\
 &< +\infty
 \end{aligned}$$

car $\varphi_{|X|}$ est bien dérivable et même analytique sur $] -h, h[$. □

Remarque 3.7.1. Il existe d'autres critères plus généraux pour montrer qu'une loi est déterminée par ses moments. Par exemple la condition de Carleman [C1] stipule que pour une v.a.r X de moments $(m_\nu)_{\nu \geq 0}$, si

$$\sum_{\nu \geq 1} m_{2\nu}^{-\frac{1}{2\nu}} = +\infty$$

alors la loi de X est déterminée par ses moments.

La plupart des lois usuelles (uniformes, de Poisson, exponentielles, normales...) possèdent une fonction génératrice des moments qui converge sur un voisinage de 0 et sont donc déterminées par leurs moments. Puisqu'ici on s'intéresse particulièrement aux lois normales, on va redémontrer ce résultat pour celles-ci.

Proposition 3.7.4. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $V > 0$. Soit $X \sim \mathcal{N}(m, V)$ une v.a.r gaussienne de moyenne m et de variance V . Alors $\varphi_X(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, si $m = 0$, on a

$$\mathbb{E}(X^\nu) = \delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{2^{\nu/2} (\nu/2)!} V^{\nu/2}$$

pour tout entier $\nu \geq 0$.

Preuve. Puisque $e^{tx - \frac{(x-m)^2}{2V}} \ll_t \frac{1}{1+x^2}$ pour tout x , on montre directement que l'intégrale $\mathbb{E}(e^{tX})$ converge et ce pour tout t .

Soit $\nu \in \mathbb{N}$. Si ν est impair alors $\mathbb{E}(X^\nu) = 0$ par imparité de la fonction intégrée. Si ν est pair, une intégration par parties montre que

$$\mathbb{E}(X^\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \int_{\mathbb{R}} x^\nu e^{-\frac{x^2}{2V}} dx = (\nu - 1)V \mathbb{E}(X^{\nu-2}).$$

En répétant ce procédé $\nu/2$ fois, on obtient le résultat voulu. □

7.2 Famille tendue de variables aléatoires

Le caractère tendu ou non d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a.r est un concept important pour savoir si on peut en extraire une sous-suite qui converge en loi. L'idée générale est que la masse des X_n ne peut pas s'échapper à l'infini quand $n \rightarrow +\infty$.

Définition 3.7.2. On dit qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de v.a.r est tendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $\inf_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in K) \geq 1 - \varepsilon$.

Dans le cas d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a.r, cette définition est équivalente à

$$\sup_n \mathbb{P}(|X_n| > a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0.$$

On énonce maintenant le célèbre théorème d'extraction pour une suite tendue de v.a.r. Ce théorème nous sera utile par la suite pour caractériser la convergence des moments.

Théorème 3.7.1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r tendue. Alors on peut en extraire une sous-suite qui converge en loi.

Avant de passer à la preuve de ce théorème, faisons quelques rappels d'analyse fonctionnelle.

Lemme 3.7.1. On note $C_b(\mathbb{R})$ (respectivement $C_0(\mathbb{R})$) l'espace des fonctions continues bornées (respectivement tendant vers 0 en $\pm\infty$) sur \mathbb{R} et à valeurs réelles. On munit ces espaces de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Alors, ce sont tout deux des espaces de Banach et $C_0(\mathbb{R})$ est séparable mais $C_b(\mathbb{R})$ ne l'est pas. De plus, on a l'inclusion continue suivante :

$$C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}).$$

Preuve. Ce sont des résultats très classiques dont on peut trouver une démonstration dans [HL] par exemple. □

Théorème 3.7.2 (Riesz-Radon). Soit $C_0(\mathbb{R})'$ le dual topologique i.e. l'ensemble des formes linéaires continues de $C_0(\mathbb{R})$. Cet espace peut s'identifier à celui des mesures boréliennes finies de \mathbb{R} , noté $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$, via l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b(\mathbb{R}) &\rightarrow C_0(\mathbb{R})' \\ \mu &\rightarrow \left(f \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu \right) \end{aligned}$$

On peut désormais prouver le théorème qui nous intéresse.

Preuve du théorème 3.7.1. Notons $\mu_n = \mathcal{L}(X_n)$ la loi de X_n . D'après le théorème 3.7.2, $(\mu_n)_n$ est une suite de $B^1(C_0(\mathbb{R})')$, la boule unité (pour la norme d'opérateur) de $C_0(\mathbb{R})'$. Or, $C_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach séparable d'après le lemme 3.7.1. On en déduit d'une part, que $B^1(C_0(\mathbb{R})')$ est compacte pour la topologie faible- \star d'après le théorème de Banach-Alaoglu, et d'autre part qu'elle est métrisable pour cette topologie.

Ainsi, il existe une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ qui converge vers un élément $\mu \in B^1(C_0(\mathbb{R})')$ (ce qui définit une mesure borélienne bornée sur \mathbb{R}) au sens où

$$\mu_{n_k}(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu = \mu(f)$$

pour tout $f \in C_0(\mathbb{R})$. Montrons qu'en fait, ceci reste vrai pour $f \in C_b(\mathbb{R})$.

Soient $f \in C_b(\mathbb{R})$ et $(\chi_n)_n$ une suite de fonctions continues telles que $0 \leq \chi_n \leq 1$, $\chi_n|_{[-n,n]} = 1$ et $\text{supp}(\chi_n) \subset]-n-1, n+1[$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $r \in \mathbb{N}$ de telle sorte que

$$\mu(\mathbb{R} \setminus [-r, r]) < \varepsilon \text{ et } \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-r, r]) < \varepsilon$$

pour tout n . Ceci est possible puisque μ est de masse finie et $(X_n)_n$ est tendue.

On a alors, pour k assez grand,

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \mu_{n_k}(f)| &\leq |\mu(f(1 - \chi_r))| + |(\mu - \mu_{n_k})(f\chi_r)| + |\mu_{n_k}(f(\chi_r - 1))| \\ &\leq \|f\|_\infty \varepsilon + \varepsilon + \|f\|_\infty \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. En particulier, pour $f = 1$, on a $\mu(\mathbb{R}) = \mu(1) = \lim_k \mu_{n_k}(1) = 1$. De plus, la positivité des μ_{n_k} entraîne celle de μ . Ainsi, μ est une loi de probabilité et on a bien $X_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ pour toute v.a.r X de loi μ . □

7.3 Convergence des moments

On va maintenant établir le résultat de la théorie des probabilités qui nous intéresse principalement. À savoir, à quelle condition la convergence des moments d'une suite $(X_n)_n$ de v.a.r implique sa convergence en loi. Il est clair qu'une condition nécessaire est que les limites des moments $m_\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n^\nu)$ doivent d'une part correspondre aux moments d'une certaine v.a.r X et d'autre part caractériser la loi de X . On va montrer que cette condition est en fait suffisante.

Avant tout, énonçons un lemme très classique souvent nommé lemme des sous-sous-suites puis un autre qui correspond au lemme de Fatou pour la convergence en loi.

Lemme 3.7.2. *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r telle que de toute sous-suite, on peut extraire une sous-sous-suite qui converge en loi vers une même v.a.r X . Alors X_n converge en loi vers X .*

Preuve. Montrons la contraposée. Si $X_n \not\xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors il existe $f \in C_b(\mathbb{R})$ tel que

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$$

donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ ainsi qu'une sous-suite $(X_{n_k})_k$ telle que $|\mathbb{E}(f(X_{n_k})) - \mathbb{E}(f(X))| \geq \varepsilon_0$ pour tout k .

On ne peut donc pas extraire de cette sous-suite une sous-sous-suite qui converge en loi vers X . □

Lemme 3.7.3. *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r qui converge en loi vers une v.a.r X . Alors, pour toute fonction continue positive sur \mathbb{R} ,*

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X_n)).$$

Preuve. Soit $(\chi_r)_r$ une suite de fonctions continues positives à support compact qui tend en croissant vers 1. D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\chi_r(X)f(X)).$$

Or, pour tous entiers positifs r et n , $\mathbb{E}(\chi_r(X_n)f(X_n)) \leq \mathbb{E}(f(X_n))$ donc en passant à la limite inférieure sur n on a

$$\mathbb{E}(\chi_r(X)f(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\chi_r(X_n)f(X_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X_n))$$

ce qui permet de conclure en passant à la limite sur r à gauche. □

Théorème 3.7.3. Soient $(X_n)_n$ et X des v.a.r admettant des moments à tous les ordres et telles que pour tout entier $\nu \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_n^\nu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X^\nu) \quad (3.7.1)$$

Si, de plus, la loi de X est déterminée par ses moments alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Preuve. Montrons d'abord que la suite $(X_n)_n$ est tendue. En effet, puisque $\mathbb{E}(X_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X^2)$, on a $\mathbb{E}(X_n^2) \ll 1$ et donc

$$\mathbb{P}(|X_n| > a) \ll \frac{1}{a^2}$$

d'après l'inégalité de Tchebychev. Ceci montre bien que $(X_n)_n$ est tendue.

On va maintenant appliquer le critère de convergence du lemme 3.7.2. Soit $(X_{n_k})_k$ une sous-suite de $(X_n)_n$. Comme elle est elle-même tendue, d'après le théorème 3.7.1, il existe une sous-sous-suite $(X_{n_{\phi(k)}})_k$ qui converge en loi vers une v.a.r Y .

Montrons que

$$\mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^\nu) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y^\nu)$$

pour tout $\nu \geq 1$. Ceci permettra de conclure car on aura alors $\mathbb{E}(Y^\nu) = \mathbb{E}(X^\nu)$ pour tout $\nu \geq 1$ et donc $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X)$ d'après les hypothèses du théorème.

Notons que d'après le lemme 3.7.3,

$$\mathbb{E}(|Y|^\nu) \leq \liminf_k \mathbb{E}(|X_{n_{\phi(k)}}|^\nu) \leq \sup_k \mathbb{E}(|X_{n_{\phi(k)}}|^\nu) < +\infty$$

car pour ν pair, on a $\mathbb{E}(|X_{n_{\phi(k)}}|^\nu) = \mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^\nu)$ et pour ν impair, on a $\mathbb{E}(|X_{n_{\phi(k)}}|^\nu) \leq \mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^{\nu-1}) + \mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^{\nu+1})$.

Soient $\nu \geq 1$, $\varepsilon > 0$ et $(\chi_n)_n$ une suite de fonctions continues telles que $0 \leq \chi_n \leq 1$, $\chi_n|_{[-n,n]} = 1$ et $\text{supp}(\chi_n) \subset]-n-1, n+1[$. Choisissons $r \in \mathbb{N}$ de tel sorte que

$$r^{-\nu} \mathbb{E}(Y^{2\nu}) < \varepsilon \quad \text{et} \quad r^{-\nu} \sup_n \mathbb{E}(X_n^{2\nu}) < \varepsilon.$$

Ainsi, puisque $X_{n_{\phi(k)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, pour k assez grand on a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^\nu) - \mathbb{E}(Y^\nu) \right| &\leq \left| \mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^\nu \chi_r(X_{n_{\phi(k)}})) - \mathbb{E}(Y^\nu \chi_r(Y)) \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^\nu (1 - \chi_r(X_{n_{\phi(k)}})) \right| + \left| \mathbb{E}(Y^\nu (1 - \chi_r(Y))) \right| \\ &\leq \varepsilon + r^{-\nu} \sup_k \mathbb{E}(X_{n_{\phi(k)}}^{2\nu}) + r^{-\nu} \mathbb{E}(Y^{2\nu}) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 3.7.2. Quitte à adapter légèrement la démonstration du théorème 3.7.3, on remarque que la condition (3.7.1) peut être relaxée en ne la supposant vraie que pour un nombre infini de ν pair.

Corollaire 3.7.1. Soient $(X_n)_n$ une suite de v.a.r admettant des moments à tous les ordres et telles que pour tout entier $\nu \geq 1$

$$\mathbb{E}(X_n^\nu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{2^{\nu/2}(\nu/2)!} V^{\nu/2}$$

avec $V > 0$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V)$.

Preuve. D'après la proposition 3.7.4, les moments de $(X_n)_n$ convergent vers ceux d'une loi normale centrée de variance V . Or celle-ci est déterminée par ses moments d'après les propositions 3.7.3 et 3.7.4, donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V)$ d'après le théorème 3.7.3. □

8 Variance

Le but de cette section est de donner un développement asymptotique pour la somme dans le terme principal de l'égalité (3.6.15). Celle-ci peut être vue comme la variance de E_q . On va distinguer deux types de convergence. Le premier, lorsque $p \rightarrow +\infty$, nous mènera à la preuve du corollaire 3.1.1. Le deuxième, lorsque p est fixé, donnera seulement un résultat partiel sur le comportement asymptotique de S_q .

Remarquons d'abord que par une sommation par parties et d'après les lemmes 3.2.2 et 3.3.1,

$$\frac{1}{Y} \left| \sum_{m \geq Z} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) \right| \ll \left(\frac{Y}{Z} \right)^A \quad (3.8.1)$$

pour tout $A > 1$. Ainsi, on souhaite contrôler la quantité suivante.

$$\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m < Z \\ \left(\frac{m}{p} \right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) \quad (3.8.2)$$

lorsque p et Z tendent vers l'infini dans un certain domaine ou lorsque p est fixé et $Z \rightarrow +\infty$.

8.1 Variance lorsque p tend vers l'infini

On va à présent prouver le corollaire 3.1.1. Si on enlève la condition $\left(\frac{m}{p} \right) = \pm 1$ dans la somme en (3.8.2), en utilisant la transformée de Mellin inverse, la proposition 3.2.1 et le lemme 3.3.2, on obtient que les moments pairs convergent sous certaines conditions en q et Y vers

$$\frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f, f \rangle \|w\|_2^2 \right)^{\nu/2} \quad (3.8.3)$$

ce qui correspond au moment d'ordre ν d'une loi normale centrée de variance $2V_{f,w}$ avec

$$V_{f,w} = \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f, f \rangle \|w\|_2^2.$$

Cependant, la présence du symbole de Legendre dans la somme rend les choses bien plus complexes. En effet, c'est un caractère de conducteur p , potentiellement bien plus gros que Y , la taille de l'intervalle de sommation (comme dans [FGKM] et [KR] où l'on suppose que $Y \ll_\varepsilon p^\varepsilon$ pour tout ε).

Néanmoins, on va montrer qu'en supposant une condition de croissance plus restrictive en Z et p , il existe une infinité de nombres premiers p tels que

$$\left(\frac{m}{p}\right) = 1 \quad \text{pour tout } 1 \leq m < Z. \quad (3.8.4)$$

Proposition 3.8.1. *Soit $Z : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante non-bornée. Posons*

$$N_x = \left| \left\{ p \leq x \mid \left(\frac{m}{p}\right) = 1 \text{ pour tout } 1 \leq m \leq Z(p) \right\} \right|.$$

Alors $N_x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ dès que :

1. $Z \ll \log \log x$ sans condition,
2. $Z \leq c\sqrt{\log x}$ avec c strictement inférieur à une constante absolue si on suppose que les fonctions L de Dirichlet $L(s, \chi)$ (avec χ un caractère réel) n'ont pas de zéros de Siegel,
3. $Z \leq c \log x$ avec $c < 1/4$ si on suppose l'hypothèse de Riemann pour ces mêmes fonctions L .

Ceci est une conséquence du théorème de Siegel-Walfisz pour lequel on donne la version suivante prise dans [MV2, theorem 11.16]. Le point (3) de la proposition 3.8.1 se déduit facilement de la preuve de [MV2, theorem 11.16].

Théorème 3.8.1. *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo q réel et non-principal. Posons $\psi_\chi(x) = \sum_{p \leq x} \chi(p)\Lambda(p)$ avec Λ la fonction de von Mangoldt. Alors, avec les hypothèses respectives de l'énoncé de la proposition 3.8.1 :*

1. $|\psi_\chi(x)| \ll x e^{-c_A \sqrt{\log x}}$ si $q \ll (\log x)^A$, avec c_A ne dépendant que de A .
2. $|\psi_\chi(x)| \ll x e^{-c' \sqrt{\log x}}$ si $q \ll e^{2c' \sqrt{\log x}}$ et c' une constante absolue.
3. $|\psi_\chi(x)| \ll x^{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et si $q \ll x$.

Les autres constantes implicites sont absolues.

Aussi, on aura besoin du lemme classique suivant.

Lemme 3.8.1. *Soit χ un caractère de Dirichlet et posons $\pi_\chi(x) = \sum_{p \leq x} \chi(p)$. Alors,*

$$|\pi_\chi(x)| \ll \frac{\max_{t \leq x} |\psi_\chi(t)|}{\log x} + \sqrt{x}.$$

En particulier, $|\pi_\chi(x)| \log x$ satisfait les mêmes inégalités que celles du théorème 3.8.1 lorsque χ est réel et non-principal.

Preuve. On écrit d'abord

$$\pi_\chi(x) - \pi_\chi(\sqrt{x}) = \sum_{\sqrt{x} < n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \chi(n) - \sum_{\substack{\sqrt{x} < p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{\chi(p^k)}{k}$$

puis en sommant par parties on obtient le résultat. \square

On va maintenant prouver la proposition 3.8.1.

Preuve de la proposition 3.8.1. Posons $g(t) = 2^{\pi(Z(t))}$ et notons $(p_i)_i$ la suite des nombres premiers. On a

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{p \leq x} \prod_{p_i \leq Z(p)} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{p_i}{p} \right) \right) \\ &= \sum_{p \leq x} \frac{1}{g(p)} \sum_{I \subset [1; \pi(Z(p))]} \left(\frac{q_I}{p} \right) \quad \text{avec } q_I = \prod_{i \in I} p_i \\ &= \sum_{I \subset [1; \pi(Z(x))]} \sum_{\substack{p \leq x \\ \max I \leq \pi(Z(p))}} \frac{1}{g(p)} \left(\frac{q_I}{p} \right) \\ &= \sum_{p \leq x} \frac{1}{g(p)} + \sum_{\emptyset \neq I \subset [1; \pi(Z(x))]} \sum_{\substack{p \leq x \\ \max I \leq \pi(Z(p))}} \frac{1}{g(p)} \left(\frac{q_I}{p} \right). \end{aligned}$$

Une sommation par parties donne

$$\sum_{m \leq j \leq n} \frac{1}{g(p_j)} \left(\frac{q_I}{p_j} \right) = \frac{\pi_I(p_n)}{g(p_n)} - \frac{\pi_I(p_{m-1})}{g(p_{m-1})} + \sum_{m \leq j < n} \left(\frac{1}{g(p_j)} - \frac{1}{g(p_{j+1})} \right) \pi_I(p_j)$$

avec $\pi_I(t) = \sum_{p \leq t} \left(\frac{q_I}{p} \right)$ et bien sûr $\pi_\emptyset = \pi$.

Le terme principal de N_x est supérieur à $\frac{\pi(x)}{g(x)}$ et les autres termes sont bornés par $O\left(\max_{t \leq x} |\pi_I(t)|\right)$. De plus, le log du conducteur de $\left(\frac{q_I}{\cdot}\right)$ est majoré par

$$\sum_{p \leq Z(x)} \log p \leq (1 + \varepsilon)Z(x) \quad \text{pour } x \text{ assez grand.}$$

Ainsi,

$$N_x \geq \frac{\pi(x)}{g(x)} + O\left(g(x) \max_{t \leq x, I} |\pi_I(t)|\right).$$

D'après le théorème 3.8.1 et le lemme 3.8.1, si $Z(x) \leq \frac{A}{1+\varepsilon} \log \log x$ alors $g(x)$ et q_I sont $\leq (\log x)^A$ donc on a

$$N_x \geq \frac{\pi(x)}{(\log x)^A} \left(1 + O\left((\log x)^{2A} e^{-c_A \sqrt{\log x}}\right) \right) \rightarrow +\infty.$$

Dans le deuxième cas (*i.e.* $L(s, \chi)$ n'a pas de zéro exceptionnel), avec $c < c'/2$ on obtient $q_I \leq e^{2c' \sqrt{\log x}}$ et $|\pi_I(x)| \ll \frac{x}{\log x} e^{-c' \sqrt{\log x}}$ donc

$$N_x \geq \pi(x) e^{-c\sqrt{\log x}} \left(1 + O\left(e^{2c\sqrt{\log x} - c'\sqrt{\log x}}\right)\right) \rightarrow +\infty.$$

Dans le dernier cas (*i.e.* sous GRH), on a

$$N_x \geq \frac{\pi(x)}{x^c} \left(1 + O\left(x^{2c-1/2+\varepsilon} \log x\right)\right) \rightarrow +\infty$$

en prenant ε assez petit. □

Remarque 3.8.1. Malheureusement, on n'a pas une densité naturelle positive de nombres premiers p qui vérifient (3.8.4) car

$$\begin{aligned} \frac{N_x}{\pi(x)} &\ll \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{g(p)} + \frac{x^{1/2}}{\pi(x)} + o(1) \\ &\ll \frac{1}{g(\sqrt{x})} + o(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dans tous les cas.

On va maintenant expliquer comment on obtient (3.8.3) dans le cas où aucun symbole de Legendre ne tord la somme en (3.8.2).

Proposition 3.8.2. *On suppose que les coefficients $(\hat{f}_0(n))_{n \geq 1}$ sont tous réels, alors*

$$\frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m < Z} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) = \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f, f \rangle \|w\|_2^2 + o(1).$$

lorsque $Y, Z \rightarrow +\infty$ avec $Y = o(Z)$.

Remarque 3.8.2.

- Le fait que les coefficients de Fourier de f en la pointe 0 (ou de manière équivalente en ∞) soient réels est utile uniquement ici. C'est toutefois une hypothèse cruciale.
- De plus, un simple changement de variable montre que $\langle f_0, f_0 \rangle = \langle f, f \rangle$.

Preuve. On a $\hat{f}_0(m)^2 = |\hat{f}_0(m)|^2$ donc à partir de (3.8.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m < Z} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) &= \frac{1}{Y} \sum_{m \geq 1} |\hat{f}_0(m)|^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) + o(1) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} D(s, f_0 \times \bar{f}_0) Y^{s-1} \widehat{B^2}(s) ds + o(1) \quad \text{pour } \sigma > 1 \\ &= \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f_0, f_0 \rangle \widehat{B^2}(1) + o(1) \end{aligned}$$

en décalant le contour d'intégration et en utilisant le théorème des résidus. On applique alors le lemme 3.3.2 pour obtenir le résultat souhaité. □

On a ainsi essentiellement montré le corollaire 3.1.1 puisque sous ses hypothèses, on a $Y \ll_\varepsilon p^\varepsilon$ et on peut appliquer le théorème 3.6.1 pour les moments impairs. Pour les ν pairs et strictement positifs, d'après le théorème 3.6.2, (3.6.5) et (3.8.1) on a

$$\mathbb{E}(E_{q_k}^\nu) = \frac{1}{2} \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m < Z(p_k)} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) + o(1) \right)^{\nu/2} + \frac{1}{2} \times 0 + o(1)$$

avec $Z(p_k) = \log \log p_k$ et p_k vérifiant (3.8.4). D'après la proposition 3.8.1, il existe une infinité de nombres premiers vérifiant (3.8.4) donc les moments convergent vers

$$\frac{1}{2} \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f, f \rangle \|w\|_2^2 \right)^{\nu/2}$$

d'après la proposition 3.8.2 pour une sous-suite de E_{q_k} .

Il est facile de voir que ces moments (pairs comme impairs) sont bien ceux de la loi mixte

$$\frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, 2V_{f,w})$$

définie dans l'énoncé du corollaire 3.1.1. Puisque qu'une loi normale possède une fonction génératrice des moments finie sur \mathbb{R} , il en est de même pour cette loi qui est donc déterminée par ses moments. Le théorème 3.7.3 permet alors de finir la preuve du corollaire 3.1.1.

On remarque aussi comment la condition de croissance en X_k et p_k du corollaire 3.1.1 peut être améliorée suivant le cas de la proposition 3.8.1 dans lequel on se place.

8.2 Variance pour un nombre premier fixé

En général, si on fixe un nombre premier p ne divisant pas le niveau N' de f , on peut écrire que

$$\sum_{\substack{1 \leq m < Z \\ \left(\frac{m}{p}\right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) = \frac{1}{2} \sum_{m < Z} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) \pm \frac{1}{2} \sum_{m < Z} \left(\frac{m}{p} \right) \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right).$$

On rappelle que si χ est un caractère réel primitif de Dirichlet modulo p , alors d'après la proposition 2.1.10,

$$f_{0,\chi}(z) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) \hat{f}_0(n) n^{\ell/2-1/4} e(nz)$$

est une forme cuspidale de poids $\ell + 1/2$ et de niveau $N'p^2$. Cependant, la proposition 3.2.1 reste vraie pour de telles formes (rappelons que f_0 en est une *a fortiori*). Pour noter la dépendance en p , on va redéfinir le produit hermitien de f et g dans $S_{\ell+1/2} \left(N'p^2, \left(\frac{N'}{\cdot} \right) \right)$ comme suit

$$\langle f, g \rangle_p := \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma_0(4p^2) \backslash \mathcal{H})} \int_{\Gamma_0(4p^2) \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^{\ell+1/2} \frac{dx dy}{y^2}.$$

On obtient ainsi un analogue de la proposition 3.8.2 :

$$\frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m < Z} \chi(m) \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) = \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f_0, f_{0,\chi} \rangle_p \|w\|_2^2 + o(1).$$

où $\chi = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ et lorsque $Y, Z \rightarrow +\infty$ avec $Y = o(Z)$.

D'où, en fixant p mais en faisant tendre Y et $q = p^N$ vers l'infini avec $Y \ll_\varepsilon q^\varepsilon$ pour tout ε , on obtient la convergence de tous les moments de la quantité définie en (3.6.2) qui ainsi, toujours sous ces hypothèses, converge en loi vers la loi mixte

$$\frac{1}{2}\mathcal{N}(0, V_{f,w} + V_{f,w}^{(p)}) + \frac{1}{2}\mathcal{N}(0, V_{f,w} - V_{f,w}^{(p)})$$

avec $V_{f,w}^{(p)} = \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f_{0,\chi}, f_0 \rangle_p \|w\|_2^2$ et $\chi = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$.

9 Forme de poids entier

Le travail précédent peut en fait être adapté pour déduire un résultat similaire lorsque la forme modulaire f est de poids entier. Précisément, comme dans [FGKM], on cherche à calculer les moments des sommes des coefficients de f en progression arithmétique mais avec un module $q = p^N$ où p est un nombre premier et $N > 1$.

Soit

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) n^{(\kappa-1)/2} e(nz)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$, une forme cuspidale de niveau N' quelconque et de poids (pair) κ .

On rappelle que si f est propre (*i.e.* vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke) alors ses coefficients de Fourier normalisés vérifient la borne de Deligne [D4]

$$|a(n)| \ll_{f,\varepsilon} n^\varepsilon \tag{3.9.1}$$

pour tout entier $n > 0$. Grâce à la théorie des formes nouvelles sur $S_\kappa(N')$ [AL1], l'inégalité précédente est toujours vraie pour f quelconque.

Pour toute fonction \mathcal{C}^∞ à support compact $w : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$, tout $X > 0$, toute puissance d'un nombre premier $q = p^N$ avec $p \nmid N'$ et tout entier a premier avec q , on définit une nouvelle fois les quantités suivantes

$$S(X, q, a) = \sum_{n=a[q]} a(n) w\left(\frac{n}{X}\right), \tag{3.9.2}$$

$$E(X, q, a) = \frac{S(X, q, a)}{\sqrt{X/q}}. \tag{3.9.3}$$

Lorsque q n'est pas premier (donc on est pas sous les hypothèses du théorème 3.1.1), on obtient un analogue du théorème 3.1.3 qui implique évidemment le théorème 3.1.4.

Théorème 3.9.1. *Soit $f \in S_k(N')$ une forme cuspidale quelconque de niveau N' et de poids (pair) κ . Soit $X > 0$ et $q = p^N$ une puissance d'un nombre premier avec $p \nmid 2N'$ et $N \geq 2$. On définit $E(X, q, a)$ comme en (3.9.3). Soient $\nu > 0$ un entier, $C_\nu = \left(2\nu^{2\nu-1}\right)^{-1}$ et $e \in \{\pm 1\}$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$1 \leq Y^{2\nu-2+\delta} < C_\nu q$$

où $Y = N'q^2/X$. Alors, pour tout $0 < \eta < \delta 2^{2-\nu}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{2}{\varphi(q)} \sum_{\substack{a \in [q] \\ \left(\frac{a}{p}\right) = e}} E(X, q, a)^\nu = \delta_{2|\nu} \frac{\nu!}{(\nu/2)!} \left(\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m < Y^{1+\eta} \\ \left(\frac{m}{p}\right) = e}} a_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^{\nu/2} + O\left(Y^{-1/2+\varepsilon} + \frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p}\right) \quad (3.9.4)$$

où les $(a_0(m))_{m \geq 1}$ sont les coefficients de Fourier normalisés de $f_0 = f|_\kappa \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N' & 0 \end{pmatrix}$, l'image de f par l'involution de Fricke sur $S_\kappa(N')$, et B est une fonction C^∞ à décroissance rapide ne dépendant que de w et κ .

On va donner un schéma de preuve pour le calcul des moments sur les carrés modulo q puisque c'est essentiellement la même chose que dans la preuve du théorème 3.1.3. Certains détails techniques sont même plus simples en utilisant la borne de Deligne (3.9.1).

Preuve. Tout d'abord, on donne la formule de Voronoï suivante pour les formes cuspidales de poids entier. Cette version est équivalente à celle issue de [G1, Theorem 2.2] mais en niveau supérieur. On la déduit très facilement en adaptant la preuve de la proposition 3.3.1. Pour $(b, q) = 1$ et $(N', q) = 1$, on a

$$\sum_{n \geq 1} a(n) e_q(bn) w\left(\frac{n}{X}\right) = i^\kappa \frac{X}{\sqrt{N'q}} \sum_{m \geq 1} a_0(m) e_q(-\overline{N'b}m) B\left(\frac{m}{N'q^2/X}\right)$$

avec

$$B(x) = \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma_\kappa(s)}{\Gamma_\kappa(1-s)} \hat{w}(1-s) x^{-s} ds$$

pour $x > 0$, $\sigma > -(\kappa - 1)/2$ et $\Gamma_\kappa(s) = (2\pi)^{-(s+(\kappa-1)/2)} \Gamma(s + (\kappa - 1)/2)$. On remarque alors que B vérifie les mêmes propriétés que celles montrées à la section 3.

Ainsi, comme dans la preuve de la proposition 3.6.1, on obtient

$$E(X, q, a) = \frac{i^\kappa}{\sqrt{Y}} \sum_{m \geq 1} a_0(m) \text{Kl}_q(m, \overline{N'a}) B\left(\frac{m}{Y}\right) + O(Y^{\nu/2+\varepsilon} p^{-3/2})$$

donc on doit estimer les moments de sommes de Kloosterman. Lorsque $N > 1$, ces sommes sont très similaires aux sommes de Salié. Précisément, soient m_1, \dots, m_ν des entiers strictement positifs tels que $\left(\frac{m_i}{p}\right) = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, \nu \rrbracket$. D'après la proposition 3.4.1, on a pour N pair,

$$\mathbb{E}^+ \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Kl}_q(m_i, \cdot) \right) = \sum_{e \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i^q} \right) + O(1/p).$$

Tandis que si N est impair et $p = 1$ [4],

$$\mathbb{E}^+ \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Kl}_q(m_i, \cdot) \right) = \sum_{e \in \{\pm 1\}^\nu} \left(\frac{\sqrt{m_1 \cdots m_\nu^q}}{p} \right) G \left(\left(\frac{\cdot}{q} \right)^\nu, \sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i^q} \right) + O(1/p)$$

avec $G(\chi, a) = \frac{1}{q} \sum_{x \pmod{q}} \chi(x) e_q(ax)$ la somme de Gauss classique divisée par q et définie pour tout caractère multiplicatif χ et tout a modulo q .

Finalement, si N est impair et $p = 3$ [4],

$$\mathbb{E}^+ \left(\prod_{i=1}^{\nu} \text{Kl}_q(m_i, \cdot) \right) = i^{\nu} \sum_{e \in \{\pm 1\}^{\nu}} \left(\frac{e_1 \sqrt{m_1}^q \cdots e_{\nu} \sqrt{m_{\nu}}^q}{p} \right) G \left(\left(\frac{\cdot}{q} \right)^{\nu}, \sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i}^q \right) + O(1/p).$$

Si N est pair alors la preuve est identique. On a même pas besoin du lemme 3.2.2 pour obtenir l'analogie de la proposition 3.6.2 car en majorant directement les coefficients avec (3.9.1) on obtient un meilleur terme d'erreur.

Si N est impair alors pour ν impair et $a \pmod{q}$, on a $G \left(\left(\frac{\cdot}{q} \right)^{\nu}, a \right) \ll q^{-1/2} \ll 1/p$ car $N > 1$. Donc on peut borner trivialement le moment d'ordre ν .

Si N est impair, ν est pair et $p = 3$ [4] (le cas $p = 1$ [4] est similaire) alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^+ (E(X, q, \cdot)^{\nu}) = & \\ & \frac{i^{\nu}}{Y^{\nu/2}} \sum_{e \in \{\pm 1\}^{\nu}} \sum_{1 \leq m_1, \dots, m_{\nu} < Y^{1+\eta}} \prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{e_i \sqrt{m_i}^q}{p} \right) a_0(m_i) B \left(\frac{m_i}{Y} \right) \delta_q \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{m_i}^q \right) \\ & + O \left(\frac{Y^{\nu/2+\varepsilon}}{p} + Y^{-A} \right). \end{aligned}$$

Comme pour la proposition 3.6.3, on prouve que le terme principal provient des ν -uplets \mathbf{m} qui prennent exactement $\nu/2$ valeurs et avec exactement la moitié des e_1, \dots, e_{ν} négatifs.

On obtient ainsi la conclusion cherchée. □

Le corollaire 3.1.2 se déduit facilement de la section 8, en adaptant la discussion à une forme de poids entier.

10 Simulations numériques et conjecture

On discute dans cette dernière section d'une possible amélioration du corollaire 3.1.1. On s'appuie notamment sur certaines simulations numériques liées à ce problème et réalisées avec PARI/GP.

10.1 Retour sur la variance

Le corollaire 3.1.1 apparaît comme une conséquence directe de l'étude faite à la section 8. On rappelle qu'il s'agissait de trouver la limite de

$$\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m < Z \\ \left(\frac{m}{p}\right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y}\right) = \frac{1}{2Y} \sum_{1 \leq m < Z} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y}\right) \quad (3.10.1)$$

$$\pm \frac{1}{2Y} \sum_{1 \leq m < Z} \left(\frac{m}{p}\right) \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y}\right) \quad (3.10.2)$$

quand p et Y tendent vers l'infini et avec $Y \ll_\varepsilon p^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $Y = o(Z)$.

Comme nous l'avons déjà expliqué, le comportement d'une somme courte tordue par un caractère de grand conducteur est très chaotique. En effet, deux caractères distincts peuvent coïncider sur leurs premières valeurs et c'est exactement cela qui est exploité dans la proposition 3.8.1. On y montre que si la croissance de Z est suffisamment modérée alors, pour une infinité de p , la somme en (3.10.2) tordue par le symbole de Legendre est égale à la même somme mais tordue par le caractère principal. L'avantage de cette dernière somme, comme on l'a vu, est qu'elle possède une limite facilement calculable via la transformée de Rankin-Selberg.

Cependant, rien dans la preuve de la proposition 3.8.1 n'empêche de remplacer le caractère principal par n'importe quelle fonction totalement multiplicative à laquelle on a prescrit une suite de valeurs ± 1 sur les nombres premiers. Par exemple, sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 3.8.1, on a

$$N_x^\lambda := \left| \left\{ p \leq x \mid \left(\frac{p'}{p}\right) = -1 \text{ pour tout premier } p' \leq Z(p) \right\} \right| \longrightarrow +\infty$$

quand $x \rightarrow +\infty$. Ainsi, pour une infinité de p , le membre de gauche de (3.10.1) vaut

$$\frac{1}{2Y} \sum_{1 \leq m < Z} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y}\right) \pm \frac{1}{2Y} \sum_{1 \leq m < Z} \lambda(m) \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y}\right)$$

où l'on note λ la fonction de Liouville *i.e.* la fonction totalement multiplicative telle que $\lambda(p) = -1$ pour tout p . Or, il est tout à fait envisageable que le membre de droite de

$$\frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m < Z} \lambda(m) \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y}\right) = \frac{1}{Y} \sum_{m \geq 1} \lambda(m) \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y}\right) + o(1)$$

possède une limite quand $Y, p \rightarrow +\infty$ liée à un possible résidu en $s = 1$ de la fonction L de la transformée de Rankin-Selberg généralisée $f_0 \times f_0 \times \lambda$. À ce jour, on ne connaît pas de méthode efficace pour aborder ce genre de problème. Si on note $V_{f,w}^\lambda$ cette limite potentielle, alors on obtiendrait la convergence de $E(X, p, \cdot)$ vers

$$\frac{1}{2} \mathcal{N}(0, V_{f,w} + V_{f,w}^\lambda) + \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, V_{f,w} - V_{f,w}^\lambda) \quad (3.10.3)$$

dans un certain régime en p et X et lorsque p décrit une certaine suite de nombres premiers. On rappelle aussi que l'on a posé

$$V_{f,w} = \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f, f \rangle \|w\|_2^2.$$

Tout ceci montre que le corollaire 3.1.1 n'est sans doute qu'un cas particulier des différentes limites que peuvent avoir certaines sous-suites de $E(X, p, \cdot)$ quand $p \rightarrow +\infty$ (ou de la même façon $E(X, q, \cdot)$ avec $q = p^{N_p}$ et $p \rightarrow +\infty$). Ces valeurs d'adhérence seront toujours de la forme (3.10.3) avec $V_{f,w}^\lambda \in [0, V_{f,w}]$ (ici λ peut désigner plus généralement n'importe quelle fonction totalement multiplicative valant ± 1 sur les nombres premiers). Le corollaire 3.1.1 correspond donc au cas où $V_{f,w}^\lambda = V_{f,w}$.

Ainsi, on propose la conjecture suivante.

Conjecture 3.10.1. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(N')$ une forme vérifiant l'hypothèse 3.1.1 et dont les coefficients de Fourier sont réels et soit $w \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On définit $E(X, q, \cdot)$ comme en (3.1.2). Pour tout $V^* \in [0, V_{f,w}]$, il existe une suite $(p_k)_k$ de nombres premiers telle que*

$$E(X_k, q_k, \cdot) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, V_{f,w} + V^*) + \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, V_{f,w} - V^*)$$

pour toutes suites $(X_k)_k \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(q_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $q_k = p_k^{N_k}$ avec $N_k \geq 1$ et

$$\frac{q_k^2}{X_k} = o(\log p_k) \quad \text{et} \quad X_k = o(q_k^2)$$

quand $k \rightarrow +\infty$.

10.2 Histogramme des valeurs de $E(X, p, a)$

On présente ici comme premières applications numériques les histogrammes des fonctions $a \mapsto E(X, p, a)$, définies en (3.1.2), pour différentes valeurs de p et avec toujours $X = p^2 / \log(p)$. On fixe d'abord la forme modulaire f . Pour limiter les temps de calcul, on a pris une forme cuspidale non-nulle de niveau 4 de poids minimal. Précisément, on pose

$$f(z) = \frac{\eta(2z)^{12}}{\theta(z)^3} = \sum_{n \geq 1} a(n) e(nz)$$

pour $z \in \mathcal{H}$ et avec η la fonction de Dedekind et θ la fonction de Jacobi. On a vu au deuxième chapitre que $f \in S_{\frac{9}{2}}(4)$ et que cet espace de formes cuspidales est de dimension un, ce qui implique que f est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke. Par ailleurs, les coefficients de η et de θ étant entiers et puisque le premier coefficient de θ vaut un, les coefficients $a(n)$ de f sont entiers. Pour fixer les idées, on en donne ici les premières valeurs :

$$f(z) = q - 6q^2 + 12q^3 - 8q^4 + 12q^6 - 48q^7 + 48q^8 - 15q^9 + 60q^{10} + O(q^{11})$$

où l'on a posé $q = e(z)$.

On a besoin également de fixer le poids lisse w intervenant dans la définition de $E(X, p, a)$. Pour cela, et toujours dans un souci de simplification des calculs à faire dans PARI/GP, on peut considérer que l'on prend n'importe quelle fonction lisse w à support

compact dans $[0, 1]$ et qui coïncide suffisamment bien avec la fonction $x \mapsto x^{7/4}$ de façon à avoir

$$E(X, p, a) = \frac{\sqrt{p}}{X^{9/4}} \sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv a \pmod{q}}} a(n) \quad (3.10.4)$$

dans nos applications numériques.

La figure 3.3 montre une série d'histogrammes des valeurs de $E(X, p, \cdot)$ pour plusieurs nombres premiers p relativement grand. Pour chaque valeur de p *i.e.* pour chaque ligne de la figure 3.3, on donne deux copies de l'histogramme normalisé (la somme des aires des rectangles bleus vaut 1) des valeurs de $E(X, p, a)$ avec a décrivant \mathbb{F}_p^* . Sur celui de gauche, on a représenté en rouge la densité gaussienne de variance V

$$\rho_V : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-\frac{t^2}{2V}\right)$$

où V est choisi de sorte que $\rho_V(0)$ coïncide avec la valeur centrale de l'histogramme. Sur celui de droite, on a représenté en rouge la densité de probabilité ρ_{f,w,V^*} d'une loi mixte de la forme

$$\frac{1}{2}\mathcal{N}(0, V_{f,w} + V^*) + \frac{1}{2}\mathcal{N}(0, V_{f,w} - V^*).$$

Ici, compte tenu du choix de w , on a

$$\|w\|_2^2 \simeq \int_0^1 x^{7/2} dx = \frac{2}{9}.$$

Un rapide calcul avec PARI/GP montre qu'alors $V_{f,w} \simeq 0,263$ et c'est cette valeur qu'on prend pour tracer ρ_{f,w,V^*} . De plus, V^* est choisi de manière à ce que $\rho_{f,w,V^*}(0)$ coïncide avec la valeur centrale de l'histogramme.

On peut remarquer alors que les courbes rouges de droite épousent un peu mieux la forme des histogrammes et cela particulièrement sur les plus grandes valeurs de $E(X, p, a)$ (les « bords » des cloches). Ce qui est le plus frappant, c'est surtout que la forme de la cloche change à chaque fois. En effet, le sommet de celle-ci ne semble pas se stabiliser vers une valeur fixe et peut varier jusqu'à 30% de sa valeur pour différents p .

Tout ceci met évidemment en lumière la conjecture 3.10.1. Dans une moindre mesure, cela nous conforte dans l'idée qu'il est peu probable que la suite de variables aléatoires $E(X, p, \cdot)$ admette une limite au sens de la convergence en loi lorsque p tend vers $+\infty$. On propose dans la sous-section suivante une autre application numérique étayant la discussion précédant la conjecture 3.10.1.

10.3 Les quatrième et huitième moments

On s'intéresse maintenant à l'évolution des moments de $E(X, p, \cdot)$ en fonction de p . On garde la même forme modulaire f et le même poids lisse w que précédemment, si bien que $E(X, p, a)$ peut être définie comme en (3.10.4). De plus, on garde toujours la convention $X = p^2 / \log(p)$.

On rappelle que pour ν en entier pair, le moment d'ordre ν de $E(X, p, \cdot)$ vaut

$$\frac{1}{p-1} \sum_{a=1}^{p-1} E(X, p, a)^\nu$$

et que d'après le théorème 3.6.2, il est égal, à un $o(1)$ près, à

$$\frac{\nu!}{2^{\nu/2+1}(\nu/2)!} \left(V_{f,w} + V^*(Y) \right)^{\nu/2} + \frac{\nu!}{2^{\nu/2+1}(\nu/2)!} \left(V_{f,w} - V^*(Y) \right)^{\nu/2}$$

avec $Y = 4p^2/X$ et $V^*(Y) = \frac{1}{Y} \sum_{m \geq 1} \binom{m}{p} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right)$.

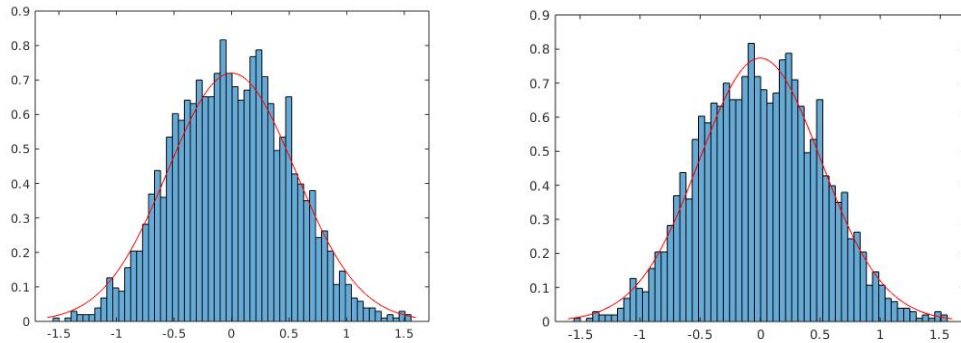
On a expliqué en début de section pourquoi on conjecture que $V^*(Y)$ possède comme valeurs d'adhérence possibles tout l'intervalle $[0, V_{f,w}]$. Pour $\nu = 4$, cela donne un moment d'ordre 4 qui possède toutes les valeurs d'adhérence de la forme

$$3(V_{f,w}^2 + V^{*2})$$

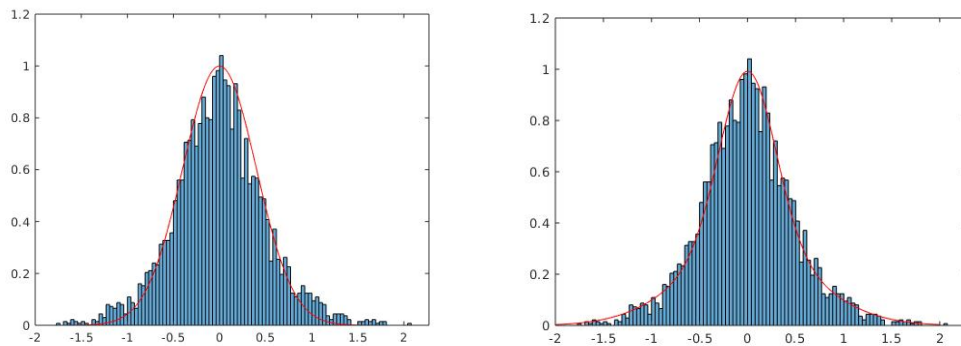
avec $V^* \in [0, V_{f,w}]$. Autrement dit, le quatrième moment de $E(X, p, \cdot)$ va osciller asymptotiquement entre $3V_{f,w}^2$ et $6V_{f,w}^2$. Numériquement, cela correspond environ à l'intervalle $[0.2, 0.4]$. Ceci dit, on rappelle qu'on a approché la valeur de $\|w\|_2^2$ par $2/9 = 0,222\dots$ mais en vérité elle est plus petite puisque w doit être à support compact dans $[0, 1]$. Si par exemple on prend $\|w\|_2^2 = 0,2$ alors on a $3V_{f,w}^2 = 0,17$. Pour $\nu = 8$, on peut faire une analyse similaire et obtenir un intervalle de valeurs d'adhérence qui vaut $[0.33, 2.64]$.

La figure 3.4 représente le tracé des valeurs des moments d'ordre 4 et 8 (en ordonnée) en fonction de p (en abscisse). Sur la première courbe, on a représenté en rouge l'intervalle potentiel des différentes valeurs d'adhérence pour le quatrième moment. Comme prévu, la deuxième courbe oscille avec une plus grande amplitude que la première et on remarque que les pics des deux courbes se font pour les mêmes valeurs de p (qui correspondent à celles pour lesquelles $V^*(Y)$ est grand).

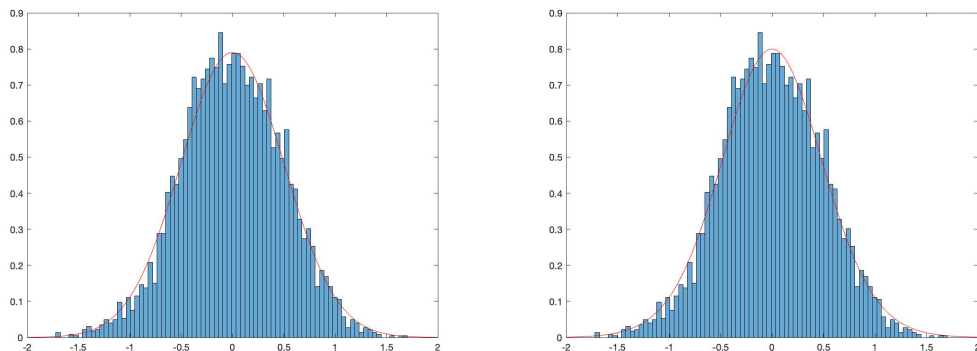
FIGURE 3.3 – Histogrammes des valeurs de $E(X, p, a)$ avec à gauche le tracé en rouge d'une fonction ρ_V et à droite celui d'une fonction ρ_{f,w,V^*}



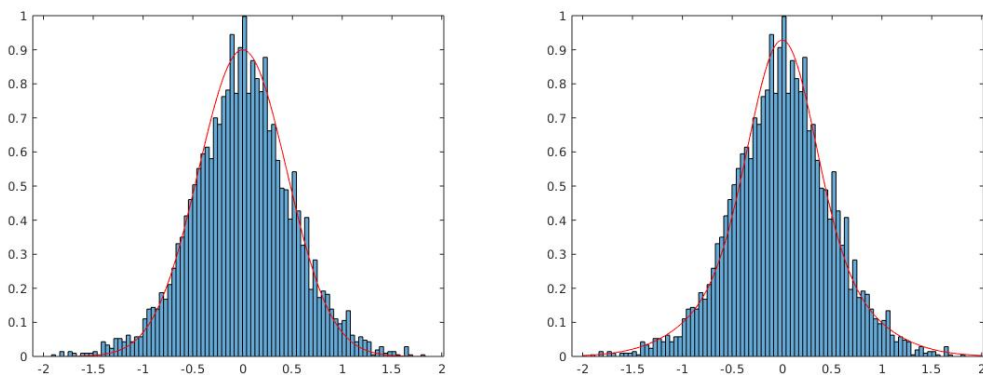
Simulations avec $p = 1987$, $V = 0,31$ et $V^* = 0,05$.



Simulations avec $p = 3571$, $V = 0,16$ et $V^* = 0,18$.

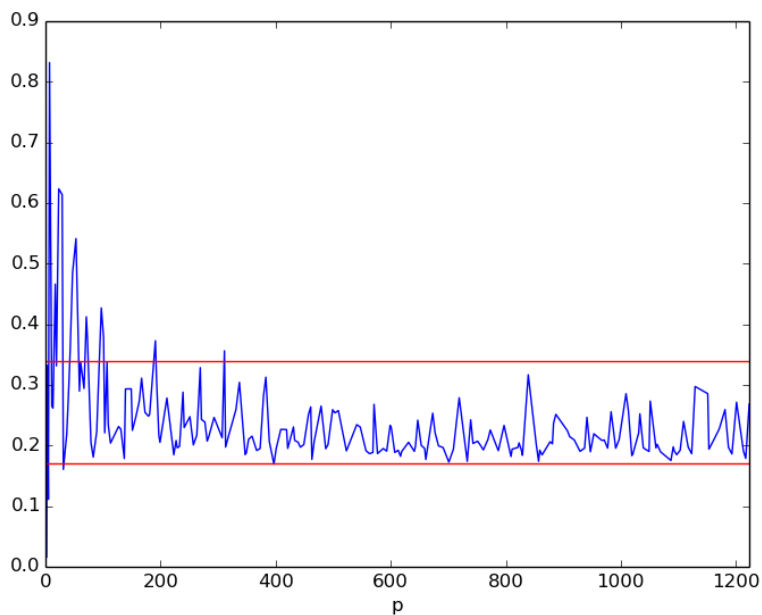


Simulations avec $p = 5279$, $V = 0,26$ et $V^* = 0,07$.

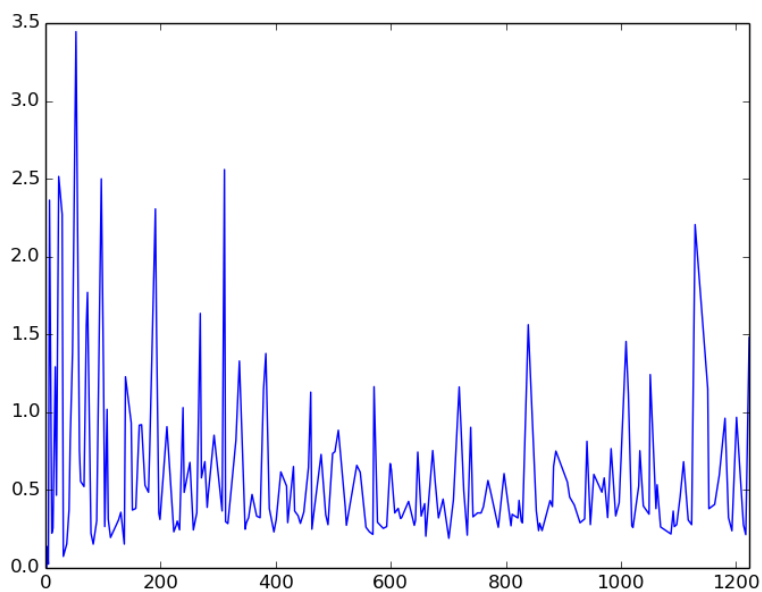


Simulations avec $p = 12553$, $V = 0,20$ et $V^* = 0,16$.

FIGURE 3.4 – Évolution des moments de $E(X, p, \cdot)$ en fonction de p



Quatrième moment.



Huitième moment.

Chapitre 4

Signes et minoration des coefficients de formes de poids demi-entier

Soit f une forme cuspidale de poids demi-entier et de niveau $4N$ avec N impair et sans facteur carré. On note $\hat{f}_\infty(n)$ son n -ième coefficient normalisé à la pointe infinie et on suppose que tous les $\hat{f}_\infty(n)$ sont réels. On étudie dans ce chapitre les signes des coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ lorsque n est pris dans une progression arithmétique. On obtient notamment une borne inférieure pour le nombre d'entiers $n \leq x$ tels que $\hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha}$ avec x et α strictement positifs et où f n'est pas nécessairement une forme propre.

1 Introduction

Soit f dans $S_{\ell+1/2}(4N)$. Écrivons son développement en série de Fourier sous la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e(nz)$$

pour $z \in \mathcal{H}$. Étant donnés α et x strictement positifs ainsi qu'une classe a modulo un nombre premier p , on cherche à établir une minoration sur le nombre d'entiers $n \leq x$ tels que $n = a [p]$ et $\hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha}$ (ou $\hat{f}_\infty(n) < -n^{-\alpha}$ respectivement). À notre connaissance, cette question spécifique pour une forme de poids demi-entier n'a jamais été étudiée auparavant. Pour une forme de poids entier en revanche, des réponses partielles peuvent être apportées en utilisant par exemple la loi de Sato-Tate sur les valeurs propres des opérateurs de Hecke (voir [BLGHT, Theorem B]).

1.1 Le signe des coefficients de Fourier

Depuis quelques années, l'étude des signes des coefficients d'une forme de poids demi-entier est devenu un sujet de recherche très prisé et la littérature le concernant est relativement riche. Comme on l'a vu au chapitre 2, c'est une thématique qui tient son origine d'une question posée par Kohnen. Prenons f comme précédemment et supposons que ses coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ sont tous réels. Si t est un entier sans facteur carré et si f est une forme propre, alors on a vu que d'après la formule de Waldspurger, $\hat{f}_\infty(t)^2$ est essentiellement proportionnel à $L(1/2, \text{Sh}f \times \chi_t)$ où χ_t est un caractère quadratique. Il apparaît donc légitime de se demander à quelle racine de $L(1/2, \text{Sh}f \times \chi_t)$ correspond $\hat{f}_\infty(t)$ *i.e.* quel est

le signe de $\hat{f}_\infty(t)$ et, par extension, comment évoluent les signes de tous les coefficients $\hat{f}_\infty(n)$.

On a fait dans la sous-section 3.2 du chapitre 2 une rapide présentation des résultats déjà existant sur ce sujet. On a vu notamment qu'on était encore loin d'être parvenu à établir la réponse conjecturale à la question de Kohnen qui est que les signes des $\hat{f}_\infty(n)$ (lorsqu'ils sont non-nuls) s'équirépartissent et que la proportion de changements de signe tend vers 1/2.

Le meilleur résultat démontré à ce jour est le théorème 2.3.4 dû à Lester et Radziwiłł [LR]. Ce théorème montre que si $f \in S_{\ell+1/2}^+(4)$ est une forme propre de l'espace de Kohnen à coefficient réels alors

$$\left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_\infty(n) \leq 0 \right\} \right| \gg_f \frac{x}{\log x}$$

et la preuve peut être facilement adaptée à une forme propre de $S_{\ell+1/2}^+(4N)$ ou $S_{\ell+1/2}(4N)$ pour tout N du moment que les hypothèses du lemme fondamental de [OS] sont vérifiées (voir la démonstration du théorème 2.3.4 pour plus de détails).

1.2 Résultats principaux

Fixons f comme précédemment. Soit $\alpha > 0$ et soit a une classe modulo un entier q . On considère les quantités suivantes,

$$\mathcal{T}_{a,q}^+(x; \alpha) = \left| \left\{ n \leq x \mid n = a [q] \text{ et } \hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha} \right\} \right|, \quad (4.1.1)$$

$$\mathcal{T}_{a,q}^-(x; \alpha) = \left| \left\{ n \leq x \mid n = a [q] \text{ et } \hat{f}_\infty(n) < -n^{-\alpha} \right\} \right| \quad (4.1.2)$$

pour tout $x > 0$. Aussi, on pose $\mathcal{T}^\pm(x; \alpha) = \mathcal{T}_{0,1}^\pm(x; \alpha)$.

Les résultats issus du chapitre précédent permettent de mettre en lumière le caractère oscillatoire des coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ lorsque n est pris dans une progression arithmétique. En utilisant cela, on établit une borne inférieure sur $\mathcal{T}_{a,p}^\pm(x; \alpha)$ pour certains α et pour une proportion explicite de $a [p]$. Ici, p est un nombre premier tel que p et x tendent tous deux vers l'infini dans un régime de convergence que l'on précisera.

On distinguera deux cas. Le premier est lorsque f est une forme quelconque (non-nulle) et pas nécessairement une forme propre. On montre alors qu'il existe une proportion positive de $a [p]$ ¹ pour lesquels au moins un coefficient $\hat{f}_\infty(n)$ avec $n = a [p]$ et $n \leq x$ satisfait $\hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha}$ pour certains $\alpha > 0$.

Dans le second cas, on suppose que f est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke. On établit alors une borne inférieure sur le nombre de $a [p]$ pour lesquels à la fois $\mathcal{T}_{a,p}^+(x; \alpha)$ et $\mathcal{T}_{a,p}^-(x; \alpha)$ sont supérieurs à $\frac{x^{1-\varepsilon}}{p^{7/4}}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

L'intérêt de ce travail est donc double. D'une part, on ne se contente pas d'étudier simplement le signe de $\hat{f}_\infty(n)$ puisqu'on s'attache aussi à donner une minoration en valeur absolue de ce dernier pour certains n . D'autre part, on inclut dans cette étude le cas où f n'est pas nécessairement propre ce qui marque une différence non-triviale avec les articles précédents étudiant la question des signes des $\hat{f}_\infty(n)$. En effet, dans tous les travaux présentés dans la sous-section 3.2 du chapitre 2, l'hypothèse que f est une forme propre est

1. Une proportion positive signifie un nombre de classes a modulo p qui est $\gg p$.

cruciale. Elle permet tout d'abord d'avoir une quasi-multiplicativité des coefficients, ce qui implique la présence de changements de signe comme on l'a vu dans la preuve du théorème 2.3.4. Aussi, cette hypothèse est nécessaire pour utiliser la formule de Waldspurger et ainsi tirer le maximum d'informations à partir de ce qui est déjà connu pour les formes de poids entier.

On énonce maintenant le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 4.1.1. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N) \setminus \{0\}$ où ℓ et N sont deux entiers strictement positifs et avec N impair et sans facteur carré. Si $\ell = 1$, on suppose que f appartient à l'orthogonal du sous-espace engendré par les séries thêta. On suppose par ailleurs que les coefficients de f sont réels.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in]3/14, 1/4]$, il existe une constante $x_0 = x_0(f, \varepsilon, \alpha)$ telle que pour tout p premier et tout $x > 0$ satisfaisant $x_0 \leq x^{1-2\alpha+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$, on a

$$\mathcal{T}_{a,p}^+(x; \alpha) \geq 1$$

pour une proportion positive de $a [p]$ et où $\mathcal{T}_{a,p}^+(x; \alpha)$ est défini en (4.1.1). Aussi, on a le même résultat pour $\mathcal{T}_{a,p}^-(x; \alpha)$.

Si de plus on suppose que f est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\delta > 0$ assez petit et tout $\alpha \in]1/8, 1/7]$, il existe une constante $x_0 = x_0(f, \varepsilon, \delta, \alpha)$ telle que pour tout p premier et tout $x > 0$ satisfaisant $x_0 \leq x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4\alpha-\varepsilon}$, on a

$$\mathcal{T}_{a,p}^\pm(x; \alpha) \gg \frac{x^{1-2\delta}}{p^{7/4}}$$

pour un nombre de $a [p]$ qui est $\gg_{f,\delta} \frac{p^{3/4}}{x^{\delta/2}}$.

On en déduira alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.1. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N) \setminus \{0\}$ comme dans le théorème 4.1.1 avec N impair et sans facteur carré mais f n'étant pas nécessairement une forme propre. Alors,*

$$\mathcal{T}^\pm(x, 3/14 + \varepsilon) \gg x^{4/7-\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour x assez grand.

Remarque 4.1.1. On déduit immédiatement du corollaire précédent une estimation en grand oméga sur les valeurs de $|\hat{f}_\infty(n)|$. Cependant cette estimation reste bien inférieure à ce qui a été établi très récemment dans [D3] et [GKS]. L'intérêt d'un tel corollaire provient du fait qu'on tienne compte du signe de $\hat{f}_\infty(n)$ et que le résultat est établi dans une plus grande généralité.

La preuve de la première assertion du théorème 4.1.1 repose sur des estimations de sommes de coefficients de formes de poids demi-entier en progression arithmétique. Ce type de sommes a été étudié en détail au chapitre 3 mais on aura besoin ici de démontrer la chose suivante.

Théorème 4.1.2. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N) \setminus \{0\}$ et w une fonction C^∞ à support compact dans $]0, +\infty[$. On définit pour tout $x > 0$, tout nombre premier p et toute classe a modulo p ,*

$$E(x, p, a) = \frac{1}{\sqrt{x/p}} \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x).$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{p} \sum_{a \in [p]}^\times |E(x, p, a)|^2 \sim c_f \|w\|_2^2$$

dès que $x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{1-\varepsilon}$. Le symbole \sum^\times signifie que l'on restreint la somme aux classes inversibles modulo p , $\|w\|_2$ est la norme L^2 de w et c_f est une constante positive ne dépendant que de f .

De plus, si on suppose que N est impair et sans facteur carré, que f est dans l'orthogonal du sous-espace engendré par les séries thêta lorsque $\ell = 1$ et que ses coefficients sont réels, alors

$$\frac{1}{p} \sum_{a \in [p]}^\times E(x, p, a)^4 \leq 12(c_f \|w\|_2^2)^2 + o(1)$$

dès que $x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$.

Ce théorème apparaît comme un cas particulier du théorème 3.1.3. Cependant, on y a retiré l'hypothèse selon laquelle f est une forme propre et on a étendu le domaine de convergence en p et x (c'est un détail très important ici). De ce fait, on fera une démonstration relativement détaillée de ce résultat bien que les aspects techniques soient assez similaires à ce qui a été fait au troisième chapitre.

Dans le but de prouver la seconde assertion du théorème 4.1.1, on aura besoin d'un résultat sur le quatrième moment des coefficients de Fourier de f . Contrairement au second moment qui est plutôt simple à estimer à l'aide de la transformée de Rankin-Selberg, le quatrième moment nécessite une stratégie plus complexe. En s'inspirant de ce qui est fait dans [LR], on utilisera la formule de Waldspurger ainsi qu'une inégalité de grand crible due à Heath-Brown [HB] pour les caractères quadratiques. On prouvera alors la chose suivante dont l'intérêt va évidemment au-delà des applications vues dans ce chapitre.

Proposition 4.1.1. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N)$ une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke et avec N impair et sans facteur carré. Si $\ell = 1$, on suppose que f est dans l'orthogonal du sous-espace engendré par les séries thêta. Alors,*

$$\sum_{n \leq x} |\hat{f}_\infty(n)|^4 \ll_{f,\varepsilon} x^{1+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x > 0$.

Remarque 4.1.2. L'hypothèse selon laquelle N est impair et sans facteur carré dans le théorème 4.1.2 vient du fait qu'on a besoin d'une théorie sur les formes nouvelles suffisamment développée. On a vu au chapitre 2 que l'essentiel de ce qui est connu pour cette théorie en poids demi-entier contraint d'imposer cette restriction sur N .

On aura aussi besoin de cette hypothèse pour prouver la proposition 4.1.1 car elle permet de rendre la formule de Waldspurger plus explicite.

1.3 Structure du chapitre

Puisqu'on s'apprête à travailler avec des sommes lisses, on va considérer seulement des coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ avec n/x dans le support d'une fonction lisse w à support compact dans $]0, +\infty[$ et prouver une borne inférieure pour

$$\mathcal{T}_{a,q}^+(x, \alpha; w) = \left| \left\{ n \geq 1 \mid n = a[q] \text{ et } \hat{f}_\infty(n)w(n/x) > n^{-\alpha}w(n/x) \right\} \right| \quad (4.1.3)$$

et pour $\mathcal{T}_{a,q}^-(x, \alpha; w)$ défini de la même manière en remplaçant f par $-f$.

Sans perte de généralités, on peut supposer que w est à support dans $]0, 1[$ et prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

Nous allons procéder de la manière suivante. Après avoir prouvé le théorème 4.1.2, on le combinera avec l'inégalité de Hölder pour montrer que

$$\sum_{a \in [p]} |E(x, p, a)| \gg p$$

ce qui implique que $E(x, p, a) \gg 1$ pour une proportion positive de $a \in [p]$ puisque $\sum_{a \in [p]} E(x, p, a)$ est petit.

Ensuite, la première assertion du théorème 4.1.2 découlera d'un argument combinatoire relativement élémentaire. On prouvera aussi de la même façon la deuxième assertion du théorème 4.1.2 mais on utilisera la proposition 4.1.1 plutôt que l'estimation sur le quatrième moment des sommes de coefficients en progression arithmétique.

On commencera par récapituler les outils de la théorie des formes de poids demi-entier dont on aura besoin et on prouvera la proposition 4.1.1 dans la section 2. La section 3, quant à elle, est destinée à démontrer le théorème 4.1.2 tandis que le théorème 4.1.1 sera établi dans la section 4.

1.4 Notations

Comme d'habitude, on écrira $a \in [p]$ pour une classe a modulo p et bien sûr on pose $e_p(a) = e(a/p)$.

On rappelle que pour tout entier impair d , on définit ε_d comme étant la somme de Gauss normalisée *i.e.*

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & \text{if } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ i & \text{if } d \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

et pour tout discriminant fondamental D , on note $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ le caractère quadratique qui lui est associé. Plus généralement, on utilisera le symbole $\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$ comme défini dans la sous-section 3.3 du premier chapitre.

Si x est un carré modulo un nombre premier impair p , on note \sqrt{x}^p l'unique entier $y \in [1, (p-1)/2]$ tel que $x = y^2 \pmod{p}$.

Pour finir, le symbole \sum^b signifie que l'on restreint l'intervalle de sommation aux entiers positifs sans facteur carré et par ailleurs, on pose $\delta_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2 Outils issus de la théorie des formes de poids demi-entier

Dans cette section on commence par rappeler les principales propriétés des formes de poids demi-entier qui nous seront utiles tout au long du chapitre. Ensuite, on prouvera la proposition 4.1.1 ainsi qu'une borne non-triviale pour les coefficients d'une telle forme.

2.1 Généralités

On considère l'espace $S_{\ell+1/2}(4N, \chi)$ des formes de poids $\ell + 1/2$, de niveau $4N$ et de caractère χ . Sur cet espace, on note simplement T_{p^2} le p^2 -ième opérateur de Hecke. Pour $p \nmid 4N$, on rappelle, d'après la sous-section 1.4 du chapitre 2, que T_{p^2} est un opérateur normal pour le produit hermitien de Petersson (il est même auto-adjoint lorsque χ est réel) et que, puisque ces opérateurs commutent entre eux, il existe une base de formes propres.

Dans le cas où N est impair et sans facteur carré, on a vu à la sous-section 2.3 du chapitre 2, qu'en se restreignant à l'espace $S_{\ell+1/2}^{\text{new}}(4N)$, une base de formes propres est nécessairement composée de formes qui sont des vecteurs propres pour tous les opérateurs de Hecke. On appelle de telles formes des formes complètes. De plus, puisqu'il existe une base de $S_{\ell+1/2}(4N)$ composée de formes à coefficients rationnels (voir par exemple [BC]) et que les matrices des opérateurs de Hecke dans cette base sont rationnelles, on peut toujours trouver une base de $S_{\ell+1/2}^{\text{new}}(4N)$ composée de formes complètes à coefficients réels et algébriques. On voit ainsi que l'hypothèse du théorème 4.1.1 et du corollaire 4.1.1 imposant que les coefficients de f soient réels n'est pas vraiment restrictive, qu'on soit dans le cas d'une forme complète ou non.

Par ailleurs, pour $f \in S_{\ell+1/2}(4N, \chi)$, on rappelle qu'on note f_0 l'image de f par l'involution de Fricke *i.e.*

$$f_0 = f|_{\ell+1/2}W_{4N}$$

où $W_{4N} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4N & 0 \end{pmatrix}, (4N)^{1/4}\sqrt{-iz} \right)$. Aussi, on a $f_0 \in S_{\ell+1/2}\left(4N, \left(\frac{4N}{\cdot}\right)\bar{\chi}\right)$.

2.2 Correspondance de Shimura et formule de Waldspurger

On rappelle ici l'essentiel de ce qui a été expliqué en détail au chapitre 2 sur la correspondance de Shimura et la formule de Waldspurger.

Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N, \chi)$ une forme complète de valeurs propres $(\lambda(p))_p$ *i.e.*

$$T_{p^2}f = \lambda(p)f$$

pour tout p . On définit alors formellement $\lambda(n)$ pour tout entier n via la relation

$$\sum_{n \geq 1} \lambda(n)n^{-s} = \prod_p \left(1 - \lambda(p)p^{-s} + \chi^2(p)p^{2\ell-1-2s}\right)^{-1}.$$

Alors, la fonction définie par

$$\text{Sh}f(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda(n)e(nz)$$

pour $z \in \mathcal{H}$ appartient à $S_{2\ell}(2N, \chi^2)$ dès que $\ell \geq 2$. Pour $\ell = 1$, c'est encore vrai si on suppose que f appartient à l'orthogonal du sous-espace engendré par les séries thêta (cette hypothèse sera toujours valable par la suite). La forme $\text{Sh}f$ est alors elle-même une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke et, pour tout p premier, sa valeur propre associée au p -ième opérateur de Hecke sur $S_{2\ell}(2N, \chi^2)$ n'est autre que $\lambda(p)$.

De plus, pour tout entier t sans facteur carré premier avec $4N$ (c'est-à-dire $p^2 \mid t \Rightarrow p \mid 4N$), on a

$$\hat{f}_\infty(tn^2)n^{\ell-1/2} = \hat{f}_\infty(t) \sum_{d \mid n} \mu(d) \left(\frac{(-1)^\ell t}{d} \right) \chi(d) d^{\ell-1} \lambda(n/d)$$

pour tout entier n et où $\hat{f}_\infty(n)$ désigne le n -ième coefficient de Fourier normalisé de f .

Ainsi, d'après la borne de Deligne pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke en poids entier [D4], on a

$$|\hat{f}_\infty(tn^2)| \ll_\varepsilon |\hat{f}_\infty(t)| n^\varepsilon \quad (4.2.1)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

La formule de Waldspurger relie la valeur de $\hat{f}_\infty(t)$ à la valeur centrale $L(1/2, \text{Sh}f \times \chi_t)$. On donne ici une version un peu simplifiée du théorème 2.3.1 ainsi que les notations nécessaires à introduire et qu'on réutilisera plus tard dans ce chapitre.

On rappelle toutefois qu'il existe des énoncés de la formule de Waldspurger plus précis que celui qu'on donne. On pense par exemple à ceux issus de [KZ], [K8] ou [S2].

Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N, \chi)$ comme précédemment et supposons que N est impair. Pour tout t sans facteur carré, on considère le caractère réel

$$\chi_t = \left(\frac{(-1)^\ell t}{\cdot} \right) \chi \quad (4.2.2)$$

dont le conducteur divise $4Nt$.

D'après la correspondance de Shimura et la théorie d'Atkin-Lehner [AL1], il existe une unique forme primitive (voir la sous-section 2.4 du premier chapitre pour une définition)

$$F(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{F}_\infty(n) n^{\ell-1/2} e(nz)$$

dans $S_{2\ell}(M, \chi^2)$ pour un certain $M \mid 2N$ telle que $\hat{F}_\infty(p) p^{\ell-1/2} = \lambda(p)$ pour tout $p \nmid 2N$. On définit alors la forme tordue F_t par

$$F_t(z) = \sum_{n \geq 1} \bar{\chi}_t(n) \hat{F}_\infty(n) n^{\ell-1/2} e(nz)$$

qui appartient à $S_{2\ell}(16N^2t^2)$ (voir [AL2, Proposition 3.1]). C'est encore une forme propre pour le p -ième opérateur de Hecke avec $p \nmid 2Nt$ et dont la valeur propre associée est $\bar{\chi}_t(p) \lambda(p)$.

Ainsi, il existe une unique forme primitive

$$\tilde{F}_t(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{F}_{t,\infty}(n) n^{\ell-1/2} e(nz)$$

dans $S_{2\ell}(M')$ pour un certain $M' \mid 16N^2t^2$ telle que $\hat{F}_{t,\infty}(p) p^{\ell-1/2} = \bar{\chi}_t(p) \lambda(p)$ pour tout $p \nmid 2Nt$. On définit sa fonction L associée par

$$L(s, \tilde{F}_t) = \sum_{n \geq 1} \frac{\hat{F}_{t,\infty}(n)}{n^s}$$

qui converge absolument pour $\text{Re } s > 1$.

Théorème 4.2.1. *Avec les notations précédentes, il existe une fonction bornée $c_f(t)$ définie sur \mathbb{N}^b et ne dépendant que de f telle que pour tout $t \in \mathbb{N}^b$,*

$$\hat{f}_\infty(t)^2 = c_f(t)L(1/2, \tilde{F}_t).$$

On va déduire de ce théorème l'estimation nécessaire sur le quatrième moment des coefficients $\hat{f}_\infty(n)$.

2.3 Le quatrième moment

Le but de cette sous-section est de prouver la proposition 4.1.1. L'idée est d'exploiter la relation (4.2.1) et le théorème 4.2.1 pour réduire le problème à la recherche d'une estimation de

$$\sum_{\psi} L(1/2, g \times \psi)^2 \tag{4.2.3}$$

où la somme porte sur des caractères quadratiques ψ de conducteurs inférieurs à une borne fixée et où g est une forme primitive de poids entier.

Puisque la forme \tilde{F}_t n'est pas égale en général à F_t (leurs fonctions L coïncident à un nombre fini de facteurs eulériens près, mais ce nombre croît avec t), on va imposer que \tilde{F}_t soit exactement la forme F tordue par un caractère quadratique. Pour cela, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *Soit $F(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda(n)e(nz) \in S_k^{\text{new}}(N)$ une forme primitive et soit ψ un caractère quadratique primitif modulo M . Si N est sans facteur carré, alors la forme*

$$F_\psi(z) = \sum_{n \geq 1} \psi(n)\lambda(n)e(nz)$$

est une forme primitive.

Preuve. Par hypothèse, soit M est sans facteur carré soit il s'écrit $M = 4t$ avec t sans facteur carré. Ainsi, ψ se décompose en un produit de caractères primitifs

$$\psi = \prod_{p|M} \psi_p$$

où $\psi_p = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ pour les premiers p impairs et ψ_2 est l'un des trois caractères quadratiques primitifs modulo 4 ou 8.

D'après [AL1, Theorem 6], pour toute forme nouvelle G de niveau N' de valuation p -adique $v_p(N') = 0$ ou 1, on a $G_{\psi_p} \in S_k^{\text{new}}(N'p^{2-v_p(N')})$ pour p impair. La référence suggère que cela est aussi vrai en ce qui concerne les caractères quadratiques primitifs modulo 4 et 8 mais puisque ce n'est pas montré explicitement, on préfère se référer à [AL2, Theorem 3.1 and Corollary 3.1]. On en déduit alors que si $M = 2^\alpha M'$ avec $\alpha \in \{2, 3\}$ et M' impair, alors $F_{\psi_2} \in S_k^{\text{new}}(2^{2\alpha-v_2(N)}N)$. Ainsi, on obtient facilement que F_ψ est une forme nouvelle et puisque c'est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke T_p sauf éventuellement un nombre fini, c'est une forme primitive. □

On montre alors l'estimation classique suivante pour les moments de type (4.2.3).

Proposition 4.2.1. Soit $F(z) = \sum_{n \geq 1} \widehat{F}_\infty(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz) \in S_k^{\text{new}}(N)$ une forme primitive avec N sans facteur carré. Pour $x > 0$, on note $\Psi(x)$ l'ensemble des caractères quadratiques primitifs de conducteurs inférieurs à x . Alors

$$\sum_{\psi \in \Psi(x)} |L(1/2, F_\psi)|^2 \ll_{F, \varepsilon} x^{1+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et où $L(s, F_\psi) = \sum_{n \geq 1} \psi(n) \widehat{F}_\infty(n) n^{-s}$ pour $\text{Re } s > 1$.

Preuve. D'après le lemme 4.2.1, pour tout $\psi \in \Psi(x)$, F_ψ est une forme primitive et donc sa fonction L satisfait une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(s, F_\psi) := N_\psi^{s/2} (2\pi)^{-s} \Gamma(s + (k-1)/2) L(s, F_\psi) = \varepsilon(F_\psi) \Lambda(1-s, F_\psi)$$

pour un certain $\varepsilon(F_\psi) \in \{\pm 1\}$ et où $N_\psi \leq Nx^2$ est le niveau de F_ψ .

De ce fait, en utilisant l'équation fonctionnelle approchée (voir [IK, Theorem 5.3]) on obtient

$$L(1/2, F_\psi) = (1 + \varepsilon(F_\psi)) \sum_{n \geq 1} \frac{\psi(n) \widehat{F}_\infty(n)}{\sqrt{n}} V_{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{N_\psi}} \right) \quad (4.2.4)$$

où

$$V_{\frac{1}{2}}(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma(s + k/2)}{s\Gamma(k/2)} (2\pi y)^{-s} ds$$

pour tout $\sigma > 0$.

Soit $\eta > 0$, en séparant la somme en (4.2.4) selon si $n < x^{1+\eta}$ ou non, et en remarquant que $V_{\frac{1}{2}}(y) \ll_{k,A} y^{-A}$ pour tout $A > 0$, on a

$$\sum_{\psi \in \Psi(x)} |L(1/2, F_\psi)|^2 \ll_{F, \eta} \sum_{\psi \in \Psi(x)} \left| \sum_{n < x^{1+\eta}} \frac{\psi(n) \widehat{F}_\infty(n)}{\sqrt{n}} V_{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{N_\psi}} \right) \right|^2.$$

Maintenant, d'après [HB, Corollary 2], le membre de droite de l'inégalité précédente est

$$\ll_\varepsilon x^{(2+\eta)\varepsilon+1+\eta} \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq x^{1+\eta} \\ \sqrt{n_1 n_2} \in \mathbb{Z}}} \frac{|\widehat{F}_\infty(n_1) \widehat{F}_\infty(n_2)|}{\sqrt{n_1 n_2}}$$

et cette dernière somme est bornée par $\sum_{n < x^{1+\eta}} \frac{\sigma_0(n^2)}{n^{1-\eta}}$ avec σ_0 la fonction du nombre de diviseurs. Puisque que η peut être pris arbitrairement petit, on en déduit la conclusion. \square

On peut à présent prouver la proposition 4.1.1.

Preuve de la proposition 4.1.1. Posons $f(z) = \sum_{n \geq 1} \widehat{f}_\infty(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e(nz) \in S_{\ell+1/2}(4N)$ comme d'habitude.

Puisque N est impair, d'après le théorème 4.2.1, on a

$$|\widehat{f}_\infty(t)|^2 \ll_f |L(1/2, \widetilde{F}_t)|$$

pour tout t sans facteur carré et où \widetilde{F}_t est définie avant l'énoncé du théorème.

Soit D_t le discriminant fondamental tel que $\left(\frac{D_t}{\cdot}\right)$ induit χ_t (défini en (4.2.2) mais notons qu'ici χ est trivial). La discussion précédant le théorème 4.2.1 et le lemme 4.2.1 montrent que \tilde{F}_t est égale à F (qui ne dépend que de f) tordue par $\left(\frac{D_t}{\cdot}\right)$.

Ainsi, d'après l'inégalité (4.2.1), on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} |\hat{f}_\infty(n)|^4 &\ll_{f,\varepsilon} \sum_{t \leq x}^b |L(1/2, F_{\left(\frac{D_t}{\cdot}\right)})|^2 \sum_{m \leq \sqrt{\frac{x}{t}}} m^{2\varepsilon} \\ &\ll_{f,\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon} \sum_{t \leq x}^b |L(1/2, F_{\left(\frac{D_t}{\cdot}\right)})|^2 t^{-1/2-\varepsilon} \end{aligned}$$

et puisque $|D_t| \leq 4t$, une sommation par parties et la proposition 4.2.1 donnent le résultat. \square

2.4 Bornes pour les coefficients de Fourier

Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N, \chi)$ et posons

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e(nz)$$

pour $z \in \mathcal{H}$. Dans la preuve du théorème 4.1.2, on aura besoin d'une borne ponctuelle sur chaque coefficient $\hat{f}_\infty(n)$ et qui doit être vérifiée pour f quelconque.

Si $\ell \geq 2$ et t est sans facteur carré, on rappelle la borne d'Iwaniec (théorème 2.1.2 mais notons qu'ici on considère les coefficients normalisés) :

$$|\hat{f}_\infty(t)| \ll_{f,\varepsilon} t^{3/14+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En fait, ceci est encore vrai lorsque t est divisible par p^2 avec $p \mid 4N$. Précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 4.2.2. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N, \chi)$ où ℓ et N sont des entiers positifs. Si $\ell = 1$, on suppose que f appartient à l'orthogonal du sous-espace engendré par les séries thêta. Pour tout entier $n = tm^2$ avec t sans facteur carré et $m \mid 4N$, on a*

$$|\hat{f}_\infty(n)| \ll_{f,\varepsilon} n^{3/14+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve. C'est une conséquence directe de [W1, Theorem 1]. \square

À partir de cela, on va déduire la borne suivante plus générale.

Proposition 4.2.3. *On se place dans les mêmes hypothèses que la proposition précédente. Si de plus N est impair et sans facteur carré et χ est réel, alors pour tout $t \in \mathbb{N}^b$ et tout entier $n \geq 1$,*

$$|\hat{f}_\infty(tn^2)| \ll_{f,\varepsilon} t^{3/14}(tn)^\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve. D'après [MRV, Theorems 7], f peut se décomposer en une somme finie

$$f = \sum_i U(r_i^2) f_i$$

où $r_i \mid 2N$, $U(r_i^2) : \sum_{n \geq 1} c(n) e(nz) \mapsto \sum_{n \geq 1} c(r_i^2 n) e(nz)$ et f_i est soit une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke de $S_{\ell+1/2}(M, \chi)$ pour un certain M divisant $4N$, soit une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke de $S_{\ell+1/2}^+(M, \chi)$ pour un certain M divisant $4N$. Ainsi,

$$\hat{f}_\infty(tn^2) = \sum_i \hat{f}_{\infty,i}(t(r_i n)^2)$$

avec $\hat{f}_{\infty,i}(m)$ le m -ième coefficient normalisé de f_i . Si f_i est une forme propre classique, alors d'après (4.2.1) et la proposition 4.2.2, on a $|\hat{f}_{\infty,i}(t(r_i n)^2)| \ll_{i,\varepsilon} t^{3/14} (tr_i n)^\varepsilon$.

Si f_i est une forme propre de l'espace plus, alors la relation (4.2.1) reste vraie en remplaçant t par $|D|$ où D est un discriminant fondamental tel que $(-1)^\ell D > 0$. Dans ce cas, on a

$$|\hat{f}_{\infty,i}(t(r_i n)^2)| \ll_{i,\varepsilon} |\hat{f}_{\infty,i}(t)|(r_i n)^\varepsilon \quad \text{ou} \quad |\hat{f}_{\infty,i}(t(r_i n)^2)| \ll_{i,\varepsilon} |\hat{f}_{\infty,i}(4t)|(r_i n/2)^\varepsilon.$$

De ce fait, on peut toujours appliquer la proposition 4.2.2 et obtenir $|\hat{f}_{\infty,i}(t(r_i n)^2)| \ll_{i,\varepsilon} t^{3/14} (tr_i n)^\varepsilon$ ce qui suffit pour conclure. □

3 Coefficients de Fourier en progression arithmétique

Dans cette section, on prouve le théorème 4.1.2. Puisqu'on va utiliser les mêmes outils qu'au chapitre 3, on ira assez vite dans les preuves mais on rappellera néanmoins les propriétés importantes.

3.1 Formule sommatoire de Voronoï

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e(nz) \in S_{\ell+1/2}(4N)$ une forme cuspidale et soit w une fonction C^∞ à support compact dans $]0, 1[$ et à valeurs dans $[0, 1]$. On définit pour tout $x > 0$, tout nombre premier $p \leq x$ et toute classe $a \pmod{p}$

$$E(x, p, a) = \frac{1}{\sqrt{x/p}} \sum_{n \equiv a \pmod{p}} \hat{f}_\infty(n) w(n/x). \tag{4.3.1}$$

On a montré au chapitre précédent que $\frac{1}{\sqrt{x/p}}$ est la bonne normalisation de la somme ci-dessus puisqu'une *squareroot cancellation* apparait lorsque x et p tendent vers l'infini dans un certain domaine de convergence.

On commence par rappeler l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction de L de f tordue par un caractère additif (voir lemme 3.2.1).

Lemme 4.3.1. Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N)$ comme précédemment. Soient u et q deux entiers premiers entre eux tels que $(q, 4N) = 1$. On pose

$$L(s, f, u/q) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_q(un) n^{-s}.$$

Alors, $L(s, f, u/q)$ converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ et se prolonge en une fonction entière satisfaisant

$$\Lambda(s, f, u/q) := \left(\frac{\sqrt{4Nq}}{2\pi} \right)^s \Gamma \left(s + \frac{\ell - 1/2}{2} \right) L(s, f, u/q) = \omega_q(u) \Lambda(1 - s, f_0, -\overline{4Nu}/q)$$

avec $u\bar{u} = 1 [q]$ et $\omega_q(u) = \varepsilon_q^{-(2\ell+1)} \left(\frac{-\bar{u}}{q} \right)$.

De plus, cette fonction L croît polynomialement sur les bandes verticales.

En utilisant la transformée de Mellin, on en déduit la formule sommatoire de Voronoï.

Proposition 4.3.1. Soient f, u et q comme précédemment. Alors, pour tout $x > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_q(un) w(n/x) = \omega_q(u) \frac{x}{\sqrt{4Nq}} \sum_{m \geq 1} \hat{f}_0(m) e_q(-\overline{4Nu} m) B \left(\frac{m}{4Nq^2/x} \right)$$

où B est une fonction lisse à décroissance rapide définie dans la section 3 du chapitre 3.

Comme au dernier chapitre, il découle de cette formule la relation suivante, valable pour tout $p \nmid 4N$ et pour tout $\eta > 0$,

$$E(x, p, a) = \varepsilon_p^{-2\ell} \left(\frac{a}{p} \right) \frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{1 \leq m \leq Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m) \operatorname{Sa}_p(\overline{Nma}) B \left(\frac{m}{Y} \right) + O_{f,A}(Y^{-A}) \quad (4.3.2)$$

avec $Y = 4Np^2/x$, qu'on suppose vérifier $Y^{1+\eta} < p$, et où

$$\operatorname{Sa}_p(y) = \begin{cases} e_p(\sqrt{y^p}) + e_p(-\sqrt{y^p}) & \text{si } \left(\frac{y}{p} \right) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2 Quelques estimations sur certaines sommes de coefficients de Fourier

Avant de prouver le théorème 4.1.2, on souhaite rappeler quelques estimations classiques sur certaines sommes liées aux $\hat{f}_\infty(n)$.

Lemme 4.3.2. Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N)$ comme précédemment. alors

$$\sum_{n \geq 1} |\hat{f}_\infty(n)|^2 w(n/x)^2 \sim c_f \|w\|_2^2 x \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty$$

avec $c_f = \frac{(4\pi)^{\ell+1/2}}{\Gamma(\ell+1/2)} \langle f, f \rangle$ et où le produit hermitien est défini comme en (2.1.1).

Preuve. Pour tout $\sigma > 1$, on a

$$\sum_{n \geq 1} |\hat{f}_\infty(n)|^2 w(n/x)^2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} D(s, f \times \bar{f}) \widehat{w}^2(s) x^s ds$$

où $D(s, f \times \bar{f}) = \sum_{n \geq 1} |\hat{f}_\infty(n)|^2 n^{-s}$ et $\widehat{w}^2(s) = \int_0^{+\infty} w^2(t) t^{s-1} dt$ est la transformée de Mellin w^2 . Puisque w est lisse à support compact, $\widehat{w}^2(s)$ (de même que $\hat{w}(s)$) est bien définie sur \mathbb{C} et est à décroissance rapide sur les bandes verticales.

D'après la proposition 2.1.4, $D(s, f \times \bar{f})$ se prolonge en une fonction méromorphe pour $\operatorname{Re} s \geq 1/2$ avec exactement un pôle en $s = 1$. Celui-ci est simple et son résidu associé vaut c_f . En décalant le contour d'intégration en $\sigma = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} |\hat{f}_\infty(n)|^2 w(n/x)^2 = c_f \widehat{w}^2(1) x + \frac{1}{2i\pi} \int_{(1-\varepsilon)} D(s, f \times \bar{f}) \widehat{w}^2(s) x^s ds$$

et puisque $D(s, f \times \bar{f})$ croît polynomialement sur les bandes verticales, on a la conclusion. \square

Lemme 4.3.3. *Soit $f \in S_{\ell+1/2}(4N)$ comme précédemment et soit a une classe modulo p . Alors,*

$$\sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) = O_{f,w,\varepsilon}(x^{-\varepsilon} p^{1+2\varepsilon})$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve. On commence par écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) &= \frac{1}{p} \sum_{b [p]} e_p(-ba) \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) e_p(bn) w(n/x) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{b [p]} e_p(-ba) \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} L(s, f, b/p) \hat{w}(s) x^s ds \end{aligned}$$

pour tout $\sigma > 1$. En décalant le contour d'intégration en $\sigma = -\varepsilon$, on obtient

$$\sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) = \frac{1}{p} \sum_{b [p]} e_p(-ba) \frac{1}{2i\pi} \int_{(-\varepsilon)} L(s, f, b/p) \hat{w}(s) x^s ds$$

car les fonctions intégrées sont entières. En utilisant l'équation fonctionnelle donnée dans le lemme 4.3.1 (pour $b \neq 0 [p]$), on déduit facilement le résultat. \square

On aura aussi besoin de comparer les sommes de coefficients de Fourier à des séries de Dirichlet en progression arithmétique.

Lemme 4.3.4. *Soit $0 < \alpha < 1/2$ et soit a une classe modulo p . Alors,*

$$\sum_{n=a [p]} n^{-\alpha} w(n/x) = O\left(\frac{x^{1-\alpha}}{p}\right).$$

Preuve. Comme w est à support dans $]0, 1[$ et prend ses valeurs dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=a}^{x/p} n^{-\alpha} w(n/x) \right| &\leq \sum_{n \leq x/p} \frac{1}{(a+np)^\alpha} \\ &\ll \int_1^{x/p} \frac{dt}{(a+tp)^\alpha} \\ &\ll \frac{x^{1-\alpha}}{p}. \end{aligned}$$

□

On a maintenant toutes les clés en notre possession pour prouver le théorème 4.1.2.

3.3 Preuve du théorème 4.1.2

Puisque le calcul du moment d'ordre deux est le même, que les coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ soient réels ou pas, on suppose par la suite qu'ils le sont (et donc les $\hat{f}_0(n)$ sont réels eux aussi). Soit $\nu \in \{2, 4\}$. Pour tout $p \nmid 4N$, on pose

$$\frac{1}{p} \sum_{a \in [p]}^\times E(x, p, a)^\nu = \frac{1}{2} M_\nu^+ + \frac{1}{2} M_\nu^-$$

avec

$$M_\nu^\pm = \frac{2}{p} \sum_{\left(\frac{a}{p}\right)=1} E(x, p, N\mu_\pm a)^\nu = \frac{1}{p} \sum_{b \in [p]}^\times E(x, p, N\mu_\pm b^2)^\nu$$

et μ_\pm est n'importe quel entier positif tel que $\left(\frac{\mu_\pm}{p}\right) = \pm 1$.

Ainsi, d'après l'équation (4.3.2) et le lemme 3.4.1, on a

$$\begin{aligned} M_\nu^\pm &= \frac{1}{Y^{\nu/2}} \sum_{\substack{1 \leq m_i \leq Y^{1+\eta} \\ 1 \leq i \leq \nu, \left(\frac{m_i}{p}\right) = \pm 1}} \prod_{i=1}^{\nu} \hat{f}_0(m_i) B\left(\frac{m_i}{Y}\right) \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^\nu} \delta_p \left(\sum_{i=1}^{\nu} e_i \sqrt{\mu_\pm m_i^p} \right) \\ &\quad + O_{f,A} \left(\frac{Y^{\nu/2}}{p} + Y^{-A} \right) \end{aligned}$$

avec $Y = 4Np^2/x$. Si $\nu = 2$ alors on remarque que

$$e_1 \sqrt{\mu_\pm m_1^p} + e_2 \sqrt{\mu_\pm m_2^p} = 0 [p] \iff \begin{cases} m_1 = m_2 \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$$

car $1 \leq \sqrt{\mu_\pm m_i^p} < p/2$ et $1 \leq m_i < p$. Par conséquent,

$$M_2^\pm = \frac{2}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m \leq Y^{1+\eta} \\ \left(\frac{m}{p}\right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) + O_{f,A} \left(\frac{Y}{p} + Y^{-A} \right)$$

et

$$\frac{1}{p} \sum_{a \in [p]}^\times E(x, p, a)^2 = \frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m \leq Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) + O_{f,A} \left(\frac{Y}{p} + Y^{-A} \right)$$

donc si $Y \rightarrow +\infty$ avec $Y^{1+\eta} < p$, on obtient la première assertion du théorème 4.1.2 car, d'après les lemmes 4.3.2 et 3.3.2, on a

$$\frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m \leq Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m)^2 B^2 \left(\frac{m}{Y} \right) \sim c_f \|w\|_2^2 \quad \text{lorsque } Y \rightarrow +\infty \quad (4.3.3)$$

et la constante c_f est la même que dans le lemme 4.3.2 puisque par un changement de variable, on sait que f et f_0 ont la même norme de Petersson.

Les choses sont plus délicates lorsque $\nu = 4$. Comme au dernier chapitre, on introduit le polynôme suivant

$$Q_4(\mathbf{x}) = \prod_{\substack{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4 \\ e_1 = 1}} \sum_{i=1}^4 e_i \sqrt{x_i}$$

qu'on définit d'abord comme fonction polynomiale de x_1, x_2, x_3, x_4 positifs. On rappelle que la parité en chaque variable $\sqrt{x_i}$ du membre de droite de l'égalité précédente permet de considérer $Q_4(\mathbf{x})$ en tant que polynôme homogène de $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ (les variables étant formelles).

Pour $1 \leq m_1, m_2, m_3, m_4 \leq Y^{1+\eta}$, on a

$$|Q_4(m_1, m_2, m_3, m_4)| \leq \prod_{\substack{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4 \\ e_1 = 1}} 4Y^{\frac{1+\eta}{2}} \leq 2^{16} Y^{4(1+\eta)}.$$

Ainsi, si $p \ll x^{4/7-\varepsilon}$ alors il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $p^{7/4+2\varepsilon'} \ll x$, ce qui implique que $p^{2(1+\varepsilon')}/x \ll p^{1/4}$ et donc, en prenant $0 < \eta < \varepsilon'$, on obtient

$$2^{16} Y^{4(1+\eta)} < p/2$$

pour Y assez grand. Supposons donc que c'est le cas. Pour tout $\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4$ et tout $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ avec $1 \leq m_i \leq Y^{1+\eta}$ et $\left(\frac{m_i}{p}\right) = \pm 1$, on a

$$\sum_{i=1}^4 e_i \sqrt{\mu_{\pm} m_i}^p = 0[p] \Rightarrow Q_4(\mu_{\pm} \mathbf{m}) = 0[p] \Rightarrow Q_4(\mathbf{m}) = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{e}' \in \{\pm 1\}^4, \sum_{i=1}^4 e'_i \sqrt{m_i} = 0.$$

Pour tout $1 \leq i \leq 4$ et tout $1 \leq m_i \leq Y^{1+\eta}$, posons $m_i = t_i r_i^2$ avec t_i sans facteur carré et $r_i \geq 1$. Puisque les différentes valeurs des $\sqrt{t_i}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} (voir la proposition 1.3.2), alors $\sum_{i=1}^4 e'_i \sqrt{m_i} = 0$ seulement si $|\{t_1, t_2, t_3, t_4\}| = 1$ ou 2. Dans le deuxième cas, disons $t_1 = t_2 \neq t_3 = t_4$, on a

$$\sum_{i=1}^4 e'_i \sqrt{m_i} = 0 \Rightarrow (e'_1 r_1 + e'_2 r_2) \sqrt{t_1} + (e'_3 r_3 + e'_4 r_4) \sqrt{t_3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ e'_1 e'_2 = -1 \\ r_3 = r_4 \\ e'_3 e'_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = m_2 \\ m_3 = m_4 \end{cases}$$

car $r_i \geq 1$ pour tout i . Mais si $m_1 = m_2 \neq m_3 = m_4$ alors

$$(e_1 + e_2) \sqrt{\mu_{\pm} m_1}^p + (e_3 + e_4) \sqrt{\mu_{\pm} m_3}^p = 0[p] \iff e_1 = -e_2 \text{ et } e_3 = -e_4.$$

En effet, si par exemple $e_1 + e_2 \neq 0$ i.e. $e_1 + e_2 \in \{\pm 2\}$, alors $e_3 + e_4 \neq 0$ (autrement on aurait $\sqrt{\mu_{\pm} m_1}^p = 0[p]$) et $\mu_{\pm} m_1 = \mu_{\pm} m_3 [p]$ ce qui implique que $m_1 = m_3$ mais

on a exclu ce cas. Ceci prouve la condition nécessaire de l'équivalence précédente et la condition suffisante est triviale.

De ce fait,

$$\sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4} \delta_p \left(\sum_{i=1}^4 e_i \sqrt{\mu_{\pm} m_i^p} \right) = 4.$$

Puisque cette discussion est la même si $m_1 = m_3 \neq m_2 = m_4$ ou si $m_1 = m_4 \neq m_2 = m_3$, on a montré que

$$M_4^{\pm} = \frac{12}{Y^2} \sum_{\substack{1 \leq m_1, m_2 \leq Y^{1+\eta} \\ t_1 \neq t_2, \left(\frac{m_i}{p}\right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m_1)^2 B^2 \left(\frac{m_1}{Y} \right) \hat{f}_0(m_2)^2 B^2 \left(\frac{m_2}{Y} \right) + \frac{R}{Y^2} + O_{f,A} \left(\frac{Y^2}{p} + Y^{-A} \right) \quad (4.3.4)$$

où

$$R = \sum_{\substack{t \leq Y^{1+\eta} \\ \left(\frac{t}{p}\right) = \pm 1}}^b \sum_{\substack{1 \leq tr_i^2 \leq Y^{1+\eta} \\ 1 \leq i \leq 4}} \prod_{i=1}^4 \hat{f}_0(tr_i^2) B \left(\frac{tr_i^2}{Y} \right) \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4} \delta_p \left(\sum_{i=1}^4 e_i \sqrt{\mu_{\pm} tr_i^2} \right). \quad (4.3.5)$$

On va maintenant montrer que ce dernier terme est négligeable.

Proposition 4.3.2. *On définit R comme en (4.3.5). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout η assez petit*

$$|R| \ll_{f,\varepsilon} Y^{2-1/7+\varepsilon}.$$

Preuve. D'après le lemme 3.4.2, on a

$$\sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4} \delta_p \left(\sum_{i=1}^4 e_i \sqrt{\mu_{\pm} tr_i^2} \right) \ll \sum_{\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4} \delta_0 \left(\sum_{i=1}^4 e_i r_i \right)$$

donc, puisque B est bornée, il suffit de prouver que

$$R' := \sum_{t \leq Y^{1+\eta}}^b \sum_{\substack{1 \leq tr_i^2 \leq Y^{1+\eta} \\ \sum_{i=1}^4 e_i r_i = 0}} \prod_{i=1}^4 |\hat{f}_0(tr_i^2)| \ll_{f,\varepsilon} Y^{2-1/7+\varepsilon} \quad (4.3.6)$$

pour tout $\mathbf{e} \in \{\pm 1\}^4$ et tout $\varepsilon > 0$. Fixons de tels \mathbf{e} et ε . Pour tout t , la somme interne dans R' vaut

$$\sum_{\substack{1 \leq tr_i^2 \leq Y^{1+\eta} \\ 1 \leq i \leq 3}} \left| \hat{f}_0 \left(t \left(\sum_{i=1}^3 e_i r_i \right)^2 \right) \right| \prod_{i=1}^3 |\hat{f}_0(tr_i^2)| \ll_{f,\varepsilon} t^{6/7+\varepsilon} Y^{\varepsilon(1+\eta)} \sum_{\substack{1 \leq tr_i^2 \leq Y^{1+\eta} \\ 1 \leq i \leq 3}} \prod_{i=1}^3 r_i^{\varepsilon}$$

d'après la proposition 4.2.3. Ainsi, pour η suffisamment petit,

$$\begin{aligned} R' &\ll_{f,\varepsilon} Y^{\varepsilon(1+\eta)} \sum_{t \leq Y^{1+\eta}}^b t^{6/7+\varepsilon} \left(\frac{Y^{1+\eta}}{t} \right)^{\frac{3}{2}(1+\varepsilon)} \\ &\ll_{f,\varepsilon} Y^{3/2+6\varepsilon} \sum_{t \leq Y^{1+\eta}}^b t^{5/14-1} \\ &\ll_{f,\varepsilon} Y^{2-1/7+7\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

Pour finir la preuve du théorème 4.1.2, on remarque que

$$\sum_{\substack{1 \leq m_1, m_2 \leq Y^{1+\eta} \\ t_1 = t_2, \left(\frac{m_i}{p}\right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m_1)^2 B^2\left(\frac{m_1}{Y}\right) \hat{f}_0(m_2)^2 B^2\left(\frac{m_2}{Y}\right)$$

est majoré par R' , défini en (4.3.6) (avec $\mathbf{e} = (1, -1, 1, -1)$ par exemple), et donc on déduit de l'équation (4.3.4) et de la proposition 4.3.2 que

$$\begin{aligned} M_4^\pm &= \frac{12}{Y^2} \sum_{\substack{1 \leq m_1, m_2 \leq Y^{1+\eta} \\ \left(\frac{m_i}{p}\right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m_1)^2 B^2\left(\frac{m_1}{Y}\right) \hat{f}_0(m_2)^2 B^2\left(\frac{m_2}{Y}\right) + O_{f,\varepsilon}\left(Y^{-1/7+\varepsilon} + \frac{Y^2}{p}\right) \\ &= 12 \left(\frac{1}{Y} \sum_{\substack{1 \leq m \leq Y^{1+\eta} \\ \left(\frac{m}{p}\right) = \pm 1}} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^2 + O_{f,\varepsilon}\left(Y^{-1/7+\varepsilon} + \frac{Y^2}{p}\right) \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Rappelons que $x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$, donc le terme d'erreur ci-dessus est un $o(1)$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$|M_4^\pm| \leq 12 \left(\frac{1}{Y} \sum_{1 \leq m \leq Y^{1+\eta}} \hat{f}_0(m)^2 B^2\left(\frac{m}{Y}\right) \right)^2 + o(1)$$

et en utilisant encore l'équation (4.3.3), on obtient la conclusion.

4 Preuve du théorème 4.1.1

On va maintenant prouver un analogue du théorème 4.1.1 pour $\mathcal{T}_{a,q}^+(x, \alpha; w)$ défini en (4.1.3). Ce résultat sera même un peu plus fort que le théorème 4.1.1 car il compte le nombre de n tels que $\hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha}$ avec n/x dans le support de w .

4.1 Lemmes préliminaires

On commence par prouver deux lemmes plutôt standard que l'on utilisera plusieurs fois.

Lemme 4.4.1. *Soit $(b(n))_n$ une suite de nombres réels tels que*

$$\sum_{n \leq x} b(n) = o\left(\sum_{n \leq x} |b(n)|\right)$$

quand $x \rightarrow +\infty$. Posons

$$\sum^+(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ b(n) > 0}} b(n) \quad \text{et} \quad \sum^-(x) = - \sum_{\substack{n \leq x \\ b(n) < 0}} b(n).$$

Alors,

$$\sum^\pm(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} |b(n)|$$

quand $x \rightarrow +\infty$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \sum^+(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum^+(x) + \sum^-(x) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum^+(x) - \sum^-(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} |b(n)| + \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} b(n) \\ &\sim \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} |b(n)| \end{aligned}$$

par hypothèse. La démonstration est la même pour $\sum^-(x)$. □

Lemme 4.4.2. Soit X un ensemble fini d'entiers positifs. Pour tout $n \in X$, soient $b(n)$ et $c(n)$ deux réels avec $c(n) \geq 0$. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $V > 0$ tels que

$$\sum_{n \in X} c(n) \leq M \leq \sum_{n \in X} b(n)$$

et

$$\sum_{n \in X} b(n)^2 \leq V.$$

Alors,

$$|\{n \in X \mid b(n) > c(n)\}| \geq \left(M - \sum_{n \in X} c(n) \right)^2 V^{-1}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} M &\leq \sum_{\substack{n \in X \\ b(n) \leq c(n)}} b(n) + \sum_{\substack{n \in X \\ b(n) > c(n)}} b(n) \\ &\leq \sum_{n \in X} c(n) + \left(\sum_{\substack{n \in X \\ b(n) > c(n)}} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in X} b(n)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la deuxième somme.

Puisque $\sum_{n \in X} c(n) \leq M$ et $\sum_{n \in X} b(n)^2 \leq V$, on obtient facilement la conclusion. □

4.2 Cas où f est arbitraire

Fixons une forme cuspidale f vérifiant les mêmes hypothèses que celles du théorème 4.1.1 mais où f n'est pas nécessairement une forme propre. Pour $x > 0$ et un nombre premier p , on supposera toujours que l'on a $x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Ainsi, si x tend vers l'infini alors il en est de même pour p mais restreint à ce domaine délimité par x . On commence par établir la proposition suivante.

Proposition 4.4.1. *Si $0 < m < \frac{\|w\|_2\sqrt{c_f}}{4\sqrt{3}}$ alors*

$$\left| \{a [p] \mid E(x, p, a) > m\} \right| \geq \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{m}{\|w\|_2\sqrt{c_f}} \right)^2 p + o(p)$$

quand $x \rightarrow +\infty$.

Preuve. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\frac{1}{p} \sum_{a [p]}^\times E(x, p, a)^2 \leq \left(\frac{1}{p} \sum_{a [p]}^\times |E(x, p, a)| \right)^{2/3} \left(\frac{1}{p} \sum_{a [p]}^\times E(x, p, a)^4 \right)^{1/3}$$

donc en appliquant le théorème 4.1.2, on obtient

$$c_f \|w\|_2^2 + o(1) \leq \left(\frac{1}{p} \sum_{a [p]}^\times |E(x, p, a)| \right)^{2/3} \left(12(c_f \|w\|_2^2)^2 + o(1) \right)^{1/3}$$

et ainsi,

$$\sum_{a [p]}^\times |E(x, p, a)| \geq \frac{\|w\|_2\sqrt{c_f}}{2\sqrt{3}} p + o(p).$$

De plus, d'après le lemme 4.3.3, on sait que

$$\begin{aligned} \sum_{a [p]}^\times E(x, p, a) &= \frac{1}{\sqrt{x/p}} \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) - \frac{1}{\sqrt{x/p}} \sum_{n=0 [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) \\ &= O_f(x^{-1/2} p^{3/2+\varepsilon}) \\ &= O_f(p^{1-\delta}) \end{aligned}$$

pour un certain $\delta > 0$ car $p \ll x^{4/7-\varepsilon}$.

Par conséquent, le lemme 4.4.1 entraîne que

$$\sum_{a [p]}^+ E(x, p, a) \geq \frac{\|w\|_2\sqrt{c_f}}{4\sqrt{3}} p + o(p) \tag{4.4.1}$$

où $\sum_{a [p]}^+$ signifie que l'on restreint l'ensemble de sommation aux classes inversibles $a [p]$ telles que $E(x, p, a) > 0$.

À présent, on va utiliser le lemme 4.4.2 avec $X = \{0 < a < p \mid E(x, p, a) > 0\}$ et, pour $a \in X$, avec $b(a) = E(x, p, a)$ et $c(a) = m < \frac{\|w\|_2\sqrt{c_f}}{4\sqrt{3}}$. D'après (4.4.1) et le théorème 4.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \{a [p] \mid E(x, p, a) > m\} \right| &\geq \left(\frac{\|w\|_2\sqrt{c_f}}{4\sqrt{3}} p - mp + o(p) \right)^2 \left(c_f \|w\|_2^2 p + o(p) \right)^{-1} \\ &\geq \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{m}{\|w\|_2\sqrt{c_f}} \right)^2 p + o(p). \end{aligned}$$

□

La proposition 4.4.1 nous permet alors de minorer $\sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)w(n/x)$ pour un certain nombre de $a[p]$. On va maintenant majorer $\sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^2w(n/x)^2$ pour un grand nombre de $a[p]$ dans le but de pouvoir appliquer une fois de plus le lemme 4.4.2.

Proposition 4.4.2. *Soit $m > 0$. Alors,*

$$\left| \left\{ a[p] \mid \sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^2w(n/x)^2 > mx/p \right\} \right| \leq \left(\frac{c_f \|w\|_2^2}{m} + o(1) \right) p.$$

Preuve. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Markov et du lemme 4.3.2. \square

À présent, prouvons le résultat principal de cette sous-section.

Théorème 4.4.1. *Soient f , x et p choisis comme précédemment. Pour tout $a[p]$, on définit $\mathcal{T}_{a,p}^+(x, \alpha; w)$ comme en (4.1.3). Soient $\alpha \in]3/14, 1/4]$ et $r < 1/48$. Alors, pour x assez grand,*

$$\left| \left\{ a[p] \mid \mathcal{T}_{a,p}^+(x, \alpha; w) \geq 1 \right\} \right| \geq rp$$

dès que $x^{1-2\alpha+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Preuve. Soient $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$ tels que

$$\sqrt{r} < \frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{m_1}{\|w\|_2 \sqrt{c_f}}$$

et

$$\frac{c_f \|w\|_2^2}{m_2} < \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{m_1}{\|w\|_2 \sqrt{c_f}} \right)^2 - r.$$

En appliquant les propositions 4.4.1 et 4.4.2, on remarque que

$$\sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)w(n/x) \geq m_1 \sqrt{x/p} \quad \text{et} \quad \sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^2w(n/x)^2 \leq m_2 x/p \quad (4.4.2)$$

pour un nombre de $a[p]$ qui est supérieur à rp dès que p est assez grand *i.e.* dès que x est assez grand.

Aussi, d'après le lemme 4.3.4,

$$\sum_{n=a[p]} n^{-\alpha}w(n/x) \ll \frac{x^{1-\alpha}}{p}.$$

Le membre de droite de l'inégalité précédente est un $o\left(\sqrt{x/p}\right)$ car $\frac{x^{1-\alpha}}{p} = \frac{x^{1/2-\alpha}}{p^{1/2}} \sqrt{x/p}$ et $x^{1-2\alpha+\varepsilon} \ll p$.

Ainsi, pour toutes ces classes inversibles $a[p]$ vérifiant (4.4.2), on applique le lemme 4.4.2 avec

$$X = \{n = a[p] \mid w(n/x) \neq 0\},$$

avec $b(n) = \hat{f}_\infty(n)w(n/x)$ et avec $c(n) = n^{-\alpha}w(n/x)$. On obtient alors, pour x assez grand,

$$\mathcal{T}_{a,p}^+(x, \alpha; w) \geq \frac{1}{m_2 x/p} \left(m_1 \sqrt{x/p} + o\left(\sqrt{x/p}\right) \right)^2 > 0$$

et puisque $\mathcal{T}_{a,p}^+(x, \alpha; w)$ est un entier, on a la conclusion. \square

Le théorème 4.4.1 implique facilement la première assertion du théorème 4.1.1 (remplacer f par $-f$ pour obtenir la même chose avec $\mathcal{T}_{a,p}^-(x, \alpha; w)$).

Malheureusement, la borne inférieure établie pour $\mathcal{T}_{a,p}^+(x, \alpha)$ ne peut être améliorée avec notre méthode puisque qu'elle donne seulement

$$\mathcal{T}_{a,p}^+(x, \alpha) \geq \frac{m_1^2}{m_2} = \frac{m_1^2}{c_f \|w\|_2} \frac{c_f \|w\|_2}{m_2}$$

avec $\frac{m_1^2}{c_f \|w\|_2}$ et $\frac{c_f \|w\|_2}{m_2}$ tous deux inférieurs à $\frac{1}{4\sqrt{3}}$. Le membre de droite de l'inégalité précédente ne peut donc pas être plus grand que un.

On déduit aussi le corollaire 4.1.1 à partir du théorème 4.4.1.

Preuve du corollaire 4.1.1. Soient $\varepsilon > 0$ et $x > 0$. Pour x suffisamment grand, il existe toujours un nombre premier p dans l'intervalle $[x^{4/7-2\varepsilon}, x^{4/7-\varepsilon}]$ d'après le postulat de Bertrand. Ainsi, en appliquant le théorème 4.4.1 avec $\alpha = 3/14 + 2\varepsilon$ et ε assez petit, on voit que le nombre de $n \in [1, x]$ tels que $\hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha}$ est supérieur à $rp \geq rx^{4/7-2\varepsilon}$ pour un $r < 1/48$ fixé. □

On tourne à présent notre attention vers la seconde assertion du théorème 4.1.1. On la prouve en utilisant essentiellement les mêmes techniques que précédemment.

4.3 Cas où f est une forme propre

À partir de maintenant, on suppose que f est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke et que x et p satisfont toujours $x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On commence par montrer la proposition suivante.

Proposition 4.4.3. *Pour $m > 0$ et $\delta > 0$, on pose*

$$\mathcal{A}(x, p, m, \delta) = \left\{ a [p] \left| \begin{array}{l} \sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 > mx/p \\ \sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^4 w(n/x)^4 \leq \frac{x^{1+\delta}}{\sqrt{p}} \end{array} \right. \right\}. \quad (4.4.3)$$

Alors, pour m assez petit et x assez grand, on a

$$|\mathcal{A}(x, p, m, \delta)| \gg_{f,\delta} x^{-\delta/2} p^{3/4}.$$

Preuve. Remarquons d'abord que d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 \leq \sqrt{x/p} \left(\sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^4 w(n/x)^4 \right)^{1/2}$$

puisque w est à support compact dans $]0, 1[$. Comme elle est aussi à valeurs dans $[0, 1]$, en utilisant la proposition 4.1.1, on obtient

$$\sum_{n=a[p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 \ll_{f,\delta_1} \frac{x^{1+\delta_1}}{\sqrt{p}}$$

pour tout $\delta_1 > 0$ et tout $a [p]$. Cependant, si $a \in \mathcal{A}(x, p, m, \delta)$ alors on a même

$$\sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 \ll_{f, \delta} \frac{x^{1+\delta/2}}{p^{3/4}}.$$

D'après l'inégalité de Markov et la proposition 4.1.1, on a aussi

$$\left| \left\{ a [p] \left| \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^4 w(n/x)^4 > \frac{x^{1+\delta}}{\sqrt{p}} \right. \right\} \right| \leq \frac{\sqrt{p}}{x^{\delta_2}}$$

pour tout $0 < \delta_2 < \delta$.

Par conséquent, en utilisant le lemme 4.3.2,

$$x \ll_f \sum_{a \notin \mathcal{A}(x, p, m, \delta)} \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 + \sum_{a \in \mathcal{A}(x, p, m, \delta)} \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2$$

et en coupant la première somme selon si $\sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 \leq mx/p$ ou non, on a

$$x \ll_{f, \delta, \delta_1} mx + \frac{x^{1+\delta_1}}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{p}}{x^{\delta_2}} + \frac{x^{1+\delta/2}}{p^{3/4}} |\mathcal{A}(x, p, m, \delta)|$$

et on obtient le résultat en choisissant $\delta_1 < \delta_2$ et m assez petit. □

On va alors prouver que pour la plupart des $a \in \mathcal{A}(x, p, m, \delta)$, un certain nombre de coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ avec $n = a [p]$ ont des signes positifs ou négatifs. Pour cela, on a besoin de majorer le nombre de $a [p]$ tels que $\left| \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) \right|$ ou $\sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2$ est trop grand.

Proposition 4.4.4. *Pour $\delta > 0$, on pose*

$$\mathcal{B}(x, p, \delta) = \left\{ a [p] \left| \left| \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) \right| > \frac{x^{1-\delta}}{p^{5/4}} \text{ ou } \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 > \frac{x^{1+\delta}}{p^{3/4}} \right. \right\}. \quad (4.4.4)$$

Alors, pour $m > 0$ et $\delta > 0$ assez petits, on a

$$|\mathcal{B}(x, p, \delta)| = o(|\mathcal{A}(x, p, m, \delta)|)$$

dès que $x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4/7-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$

Preuve. D'après l'inégalité de Tchebychev et le théorème 4.1.2, le nombre de $a [p]$ tels que

$$\left| \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) \right| > \frac{x^{1-\delta}}{p^{5/4}}$$

est inférieur à

$$\frac{(c_f \|w\|_2^2 + o(1))x}{x^{2-2\delta} p^{-5/2}} \ll_f \frac{p^{5/2}}{x^{1-2\delta}} = x^{-\delta/2} p^{3/4} \frac{p^{7/4}}{x^{1-5\delta/2}}$$

et $\frac{p^{7/4}}{x^{1-5\delta/2}} = o(1)$ pour δ assez petit puisque $p \ll x^{4/7-\varepsilon}$.

De la même façon, d'après l'inégalité de Markov et le lemme 4.3.2, le nombre de $a [p]$ tels que

$$\sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 > \frac{x^{1+\delta}}{p^{3/4}}$$

est inférieur à

$$\frac{(c_f \|w\|_2^2 + o(1))x}{x^{1+\delta} p^{-3/4}} \ll_f \frac{p^{3/4}}{x^\delta}$$

ce qui est un $o(x^{-\delta/2} p^{3/4})$. □

Comme précédemment, lorsque $a \in \mathcal{A}(x, p, m, \delta)$, on utilise l'inégalité de Hölder pour minorer $\sum_{n=a [p]} |\hat{f}_\infty(n)| w(n/x)$.

Lemme 4.4.3. *Soit $a \in \mathcal{A}(x, p, m, \delta)$ défini en (4.4.3). Alors,*

$$\sum_{n=a [p]} |\hat{f}_\infty(n)| w(n/x) \geq m^{3/2} \frac{x^{1-\delta/2}}{p^{5/4}}.$$

Preuve. L'inégalité de Hölder entraîne que

$$mx/p < \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^2 w(n/x)^2 \leq \left(\sum_{n=a [p]} |\hat{f}_\infty(n)| w(n/x) \right)^{2/3} \left(\sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n)^4 w(n/x)^4 \right)^{1/3}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=a [p]} |\hat{f}_\infty(n)| w(n/x) \geq (mx/p)^{3/2} \left(\frac{x^{1+\delta}}{\sqrt{p}} \right)^{-1/2} \geq m^{3/2} \frac{x^{1-\delta/2}}{p^{5/4}}.$$

□

On est maintenant à même de démontrer le théorème principal de cette sous-section et qui implique la deuxième assertion du théorème 4.1.1.

Théorème 4.4.2. *Soient f , x et p choisis comme précédemment. On suppose que f est une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke. Pour tout $a [p]$, on définit $\mathcal{T}_{a,p}^\pm(x, \alpha; w)$ comme en (4.1.3). Soit $\alpha \in]1/8, 1/7]$. Alors, pour tout $\delta > 0$ assez petit et tout x assez grand,*

$$\left| \left\{ a [p] \mid \min \left(\mathcal{T}_{a,p}^+(x, \alpha; w), \mathcal{T}_{a,p}^-(x, \alpha; w) \right) \gg \frac{x^{1-2\delta}}{p^{7/4}} \right\} \right| \gg_{f,\delta} \frac{p^{3/4}}{x^{\delta/2}}$$

dès que $x^{1/2+\varepsilon} \ll p \ll x^{4\alpha-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Preuve. Soit $a \in \mathcal{A}(x, p, m, \delta) \setminus \mathcal{B}(x, p, \delta)$. D'après les propositions 4.4.3 et 4.4.4, de tels $a [p]$ existent pour m et δ assez petits et leur nombre est $\gg_{f,\delta} x^{-\delta/2} p^{3/4}$.

Le lemme 4.4.3 implique que

$$\left| \sum_{n=a [p]} \hat{f}_\infty(n) w(n/x) \right| \leq \frac{x^{1-\delta}}{p^{5/4}} = o \left(\sum_{n=a [p]} |\hat{f}_\infty(n)| w(n/x) \right)$$

donc, d'après le lemme 4.4.1 et pour x assez grand,

$$\pm \sum_{n=a[p]}^{\pm} \hat{f}_{\infty}(n)w(n/x) \gg \frac{x^{1-\delta/2}}{p^{5/4}}$$

où $\sum_{n=a[p]}^{\pm}$ signifie que l'on restreint la somme aux $n = a[p]$ tel que $\hat{f}_{\infty}(n) > 0$ ou $\hat{f}_{\infty}(n) < 0$ respectivement.

De plus, d'après le lemme 4.3.4,

$$\sum_{n=a[p]} n^{-\alpha}w(n/x) \ll \frac{x^{1-\alpha}}{p} = \frac{x^{1-\delta/2}}{p^{5/4}} \frac{p^{1/4}}{x^{\alpha-\delta/2}} = o\left(\frac{x^{1-\delta/2}}{p^{5/4}}\right)$$

pour δ assez petit puisque $p \ll x^{4\alpha-\varepsilon}$. De ce fait, en rappelant que $a \notin \mathcal{B}(x, p, \delta)$, on peut appliquer le lemme 4.4.2 et obtenir

$$\mathcal{T}_{a,p}^{\pm}(x, \alpha; w) \gg \frac{x^{2-\delta}p^{-5/2}}{x^{1+\delta}p^{-3/4}} = \frac{x^{1-2\delta}}{p^{7/4}}.$$

□

4.4 Résultat annexe

Avant de conclure ce chapitre, on profite d'avoir établi certains lemmes et propositions précédents pour montrer très simplement un résultat intéressant concernant les signes et les minoration en valeur absolue des coefficients $\hat{f}_{\infty}(n)$. La proposition suivante n'est pas aussi forte que le théorème 2.3.4 sur les signes des $\hat{f}_{\infty}(n)$ mais présente l'avantage, une fois de plus, de tenir compte d'une borne inférieure lorsque $\hat{f}_{\infty}(n)$ est positif et d'une borne supérieure lorsqu'il est négatif.

Proposition 4.4.5. *Soit f vérifiant toutes les hypothèses du théorème 4.4.2. Alors, pour x assez grand, on a*

$$\left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_{\infty}(n) > n^{-\varepsilon} \right\} \right| \gg_{f,\varepsilon} x^{1-\varepsilon}$$

et de même

$$\left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_{\infty}(n) < -n^{-\varepsilon} \right\} \right| \gg_{f,\varepsilon} x^{1-\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve. On rappelle d'une part que d'après le lemme 4.3.2, on a

$$\sum_{n \geq 1} \hat{f}_{\infty}(n)^2 w(n/x)^2 \gg_{f,w} x$$

et d'autre part, d'après la proposition 4.1.1,

$$\sum_{n \leq x} \hat{f}_{\infty}(n)^4 \ll_{f,\varepsilon} x^{1+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder comme précédemment, on en déduit que

$$\sum_{n \leq x} |\hat{f}_{\infty}(n)| w(n/x) \gg_{f,w,\varepsilon} x^{1-\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 4.4.1 et le fait que $\sum_{n \leq x} \hat{f}_\infty(n)w(n/x)$ soit négligeable, on a même

$$\pm \sum_{n \geq 1}^{\pm} \hat{f}_\infty(n)w(n/x) \gg_{f,w,\varepsilon} x^{1-\varepsilon}$$

où l'on restreint la somme aux coefficients positifs (respectivement négatifs).

Ainsi, en fixant w comme précédemment et en appliquant le lemme 4.4.2 avec

$$X = \{n = a [p] \mid w(n/x) \neq 0\},$$

avec $c(n) = n^{-2\varepsilon}w(n/x)$ et avec $b(n) = \hat{f}_\infty(n)w(n/x)$, on a pour x assez grand,

$$\left| \left\{ n \in X \mid \hat{f}_\infty(n)w(n/x) > n^{-2\varepsilon}w(n/x) \right\} \right| \gg_{f,w,\varepsilon} x^{1-2\varepsilon}$$

ce qui implique la première inégalité de la proposition. La deuxième se déduit de la même manière en remplaçant f par $-f$.

□

5 Quelques simulations numériques

Dans cette dernière section, on présente plusieurs applications numériques répondant à la question initiale de savoir comment se répartissent les signes d'une forme de poids demi-entier et dans quelle proportion ces derniers sont-ils grand en valeur absolue. Comme pour le chapitre précédent, ces simulations ont été faites avec PARI/GP. Dans toute la suite, pour $f \in S_{\ell+1/2}(N)$, on note

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\infty(n) n^{\frac{\ell-1/2}{2}} e(nz)$$

son développement en série de Fourier.

5.1 Signes des formes de poids demi-entier

On commence d'abord par présenter quelques données numériques sur la proportion de signes positifs et négatifs ainsi que la proportion de changements de signe dans la suite $(\hat{f}_\infty(n))_{n \leq x}$ pour différents f . On rappelle qu'un changement de signe est défini comme étant une paire d'entiers $n < m$ tels que $\hat{f}_\infty(n)\hat{f}_\infty(m) < 0$ et $\hat{f}_\infty(k) = 0$ pour tout entier $k \in]n, m[$ (s'il en existe). Dans ce cas, on dit qu'il y a changement de signe en n .

On note alors

$$\begin{aligned} N_f^+(x) &= \frac{1}{x} \left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_\infty(n) > 0 \right\} \right|, \\ N_f^-(x) &= \frac{1}{x} \left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_\infty(n) < 0 \right\} \right|, \\ N_f^\pm(x) &= \frac{1}{x} \left| \left\{ n \leq x \mid \text{il y a changement de signe en } n \right\} \right| \end{aligned}$$

pour tout $x > 0$.

Comme précédemment, on considérera deux cas suivant si f est une forme propre ou non. On a vu que pour une forme propre, on conjecture que les signes s'équirépartissent et que la proportion de changements de signe parmi les coefficients non-nuls tend vers $1/2$. Autrement dit, on doit avoir

$$\frac{N_f^+(x)}{N_f^+(x) + N_f^-(x)}, \quad \frac{N_f^-(x)}{N_f^+(x) + N_f^-(x)} \quad \text{et} \quad \frac{N_f^\pm(x)}{N_f^+(x) + N_f^-(x)}$$

qui tendent tous les trois vers $1/2$. L'objectif de ces simulations est de corroborer cette conjecture et de montrer qu'elle peut vraisemblablement se généraliser à toute forme f non nécessairement propre. Elles suggèrent même quelque chose de plus fort, à savoir que $N_f^+(x)$, $N_f^-(x)$ et $N_f^\pm(x)$ convergent tous les trois vers la même valeur.

On construit deux tableaux. Le premier traite le cas des formes quelconques et l'autre des formes propres. On se placera toujours en niveau 4 dans les simulations. Pour chaque poids $k/2$, avec $k = 9, 11, 13, \dots, 25$, on choisit « au hasard » un élément f de $S_{\frac{k}{2}}(4)$ à l'aide de la fonction `mfbasis` de PARI/GP. Celle-ci ne tient absolument pas compte dans sa construction de l'algèbre de Hecke sur $S_{\frac{k}{2}}(4)$. Il est donc quasi-impossible que le résultat rendu soit une forme propre sauf bien sûr dans le cas où $k = 9$ car alors l'espace $S_{\frac{k}{2}}(4)$ est de dimension un. Pour se donner bonne conscience, on a bien vérifié que la forme f obtenue dans $S_{\frac{15}{2}}(4)$ ne vérifie pas

$$\hat{f}_\infty(1)\hat{f}_\infty(n^2m^2) = \hat{f}_\infty(n^2)\hat{f}_\infty(m^2)$$

pour certains entiers m et n .

Pour les formes propres, puisque la fonction `mfeigenbasis` de PARI/GP ne fonctionne pas encore pour les espaces de poids demi-entier, on a utilisé la librairie disponible pour construire des formes propres (pour tous les opérateurs de Hecke) de $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$.

Dans les deux cas, on obtient toujours des formes à coefficients réels et, à part pour $f \in S_{\frac{25}{2}}^+(4)$, les coefficients non-normalisés sont même entiers. Les tableaux 4.1 et 4.2 donnent, pour différentes valeurs de x et pour les différents f calculés, les valeurs approchées de $N_f^+(x)$, $N_f^-(x)$ et $N_f^\pm(x)$. On remarque dans le premier que la proportion de coefficients nuls ($1 - N_f^+(x) - N_f^-(x)$) ne tend pas toujours vers 0. Elle semble tendre vers $1/6$ en poids $9/2$ et $11/2$, vers $1/2$ en poids $13/2$ et $17/2$ (c'est parce que dans ce cas les formes données par PARI/GP sont dans l'espace plus) et vers 0 sinon. Par ailleurs, les quantités $N_f^+(x)$, $N_f^-(x)$ et $N_f^\pm(x)$ semblent bien tendre vers une même valeur.

Le deuxième tableau suggère, quant à lui, que la proportion de coefficients nuls d'une forme propre de $S_{\frac{k}{2}}^+(4)$ tend toujours vers $1/2$ et que $N_f^+(x)$, $N_f^-(x)$ et $N_f^\pm(x)$ tendent tous les trois vers $1/4$.

On précise aussi qu'il n'y a pas de données pour des formes propres de l'espace de Kohnen en poids $9/2$, $11/2$ et $15/2$ car les espaces en question sont triviaux pour ces poids-là.

Tableau 4.1 – Pour chaque x et chaque f , on donne dans l'ordre les trois valeurs approchées de $N_f^+(x)$, $N_f^-(x)$ et $N_f^\pm(x)$

	$x = 10^3$			$x = 10^4$			$x = 10^5$			$x = 10^6$		
$f \in S_{9/2}(4)$	0.41200	0.42200	0.40600	0.41720	0.41630	0.41630	0.41644	0.41690	0.41515	0.41665	0.41669	0.41620
$f \in S_{11/2}(4)$	0.41500	0.42000	0.41200	0.41510	0.41840	0.41770	0.41694	0.41642	0.41687	0.41693	0.41640	0.41698
$f \in S_{13/2}(4)$	0.25900	0.24100	0.26000	0.25230	0.24770	0.25480	0.24980	0.25020	0.25084	0.24991	0.25009	0.25084
$f \in S_{15/2}(4)$	0.49500	0.50200	0.48900	0.49760	0.50200	0.49930	0.50012	0.49984	0.49884	0.50018	0.49981	0.49989
$f \in S_{17/2}(4)$	0.25500	0.24500	0.26100	0.24970	0.25030	0.24640	0.24914	0.25086	0.24936	0.24972	0.25028	0.24958
$f \in S_{19/2}(4)$	0.49900	0.49900	0.49500	0.50350	0.49630	0.50100	0.49999	0.49999	0.50027	0.50025	0.49975	0.50031
$f \in S_{21/2}(4)$	0.49300	0.50400	0.49900	0.50160	0.49810	0.49520	0.50014	0.49983	0.49984	0.50010	0.49990	0.50012
$f \in S_{23/2}(4)$	0.49400	0.50300	0.50400	0.50150	0.49820	0.49740	0.49827	0.50170	0.49786	0.49977	0.50023	0.50010
$f \in S_{25/2}(4)$	0.50400	0.49200	0.53600	0.50190	0.49770	0.51110	0.49938	0.50058	0.50284	0.49999	0.50001	0.50179

Tableau 4.2 – Même chose mais en considérant des formes propres de l'espace de Kohnen

	$x = 10^3$			$x = 10^4$			$x = 10^5$			$x = 10^6$		
$f \in S_{13/2}^+(4)$	0.25900	0.24100	0.26000	0.25230	0.24770	0.25480	0.24980	0.25020	0.25084	0.24991	0.25009	0.25084
$f \in S_{17/2}^+(4)$	0.25500	0.24500	0.26100	0.24970	0.25030	0.24640	0.24914	0.25086	0.24936	0.24972	0.25028	0.24958
$f \in S_{19/2}^+(4)$	0.25500	0.24500	0.26700	0.25060	0.24940	0.25100	0.24910	0.25090	0.25057	0.25019	0.24981	0.24978
$f \in S_{21/2}^+(4)$	0.25600	0.24400	0.26800	0.24790	0.25210	0.25740	0.24933	0.25067	0.25144	0.24997	0.25003	0.24995
$f \in S_{23/2}^+(4)$	0.25100	0.24900	0.24000	0.25060	0.24940	0.24800	0.24984	0.25016	0.24826	0.24996	0.25004	0.24962
$f \in S_{25/2}^+(4)$	0.24800	0.25200	0.28600	0.25010	0.24990	0.25430	0.24989	0.25011	0.25152	0.24998	0.25002	0.25023

5.2 Majoration/minoration des coefficients

À présent, on étudie numériquement la quantité suivante, définie pour tout $f \in S_{\frac{k}{2}}(4)$ et tout $\alpha > 0$, par

$$\mathcal{T}_f^+(x; \alpha) := \left| \left\{ n \leq x \mid \hat{f}_\infty(n) > n^{-\alpha} \right\} \right|.$$

Une borne inférieure de cette quantité est établie au corollaire 4.1.1 pour une forme quelconque et à la proposition 4.4.5 pour une forme propre. On va voir que dans les deux cas, ces résultats sont encore loin de ce qu'on peut conjecturer.

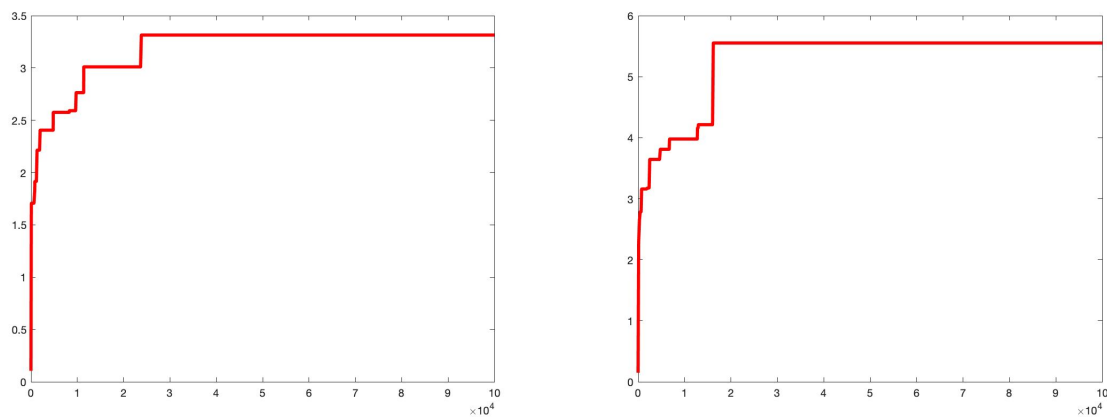
Pour nos calculs, on a fixé deux formes de poids demi-entier. La première, qu'on note simplement f , est la forme de $S_{\frac{15}{2}}(4)$ calculée comme précédemment à l'aide de la fonction `mfbasis`. On rappelle qu'elle *n'est pas* une forme propre et que sa proportion de coefficients nuls est microscopique. En revanche, la deuxième forme considérée est l'unique forme de $S_{\frac{13}{2}}^+(4)$ dont le premier coefficient vaut un. C'est donc une forme propre dont l'image par la correspondance de Kohnen-Shimura Sh^+ (voir définition 2.2.3) est la fonction Δ de Ramanujan. On note cette forme δ et d'après [BK], on a

$$\delta(z) = \frac{1}{8}[E_4(4\cdot), \theta](z) = \frac{1}{8i\pi} \left(2E_4(4z)\theta'(z) - E_4'(4z)\theta(z) \right)$$

pour $z \in \mathcal{H}$, avec $E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)e(nz)$ et où ici $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Rankin-Cohen.

On a alors calculé les valeurs de $\mathcal{T}_f^+(x; \alpha)$ et $\mathcal{T}_\delta^+(x; \alpha)$ pour différents α et pour $x \in [1, 10^5]$. Tout d'abord, comme présenté sur la figure 4.1, on remarque que les coefficients normalisés de f et de δ sont relativement petits puisque ceux de f ne dépassent pas 3,5 en valeur absolue et ceux de δ ne dépassent pas 6.

FIGURE 4.1 – $\max_{n \leq x} \{|\hat{f}_\infty(n)|\}$ et $\max_{n \leq x} \{|\hat{\delta}_\infty(n)|\}$ (de gauche à droite) en fonction de x



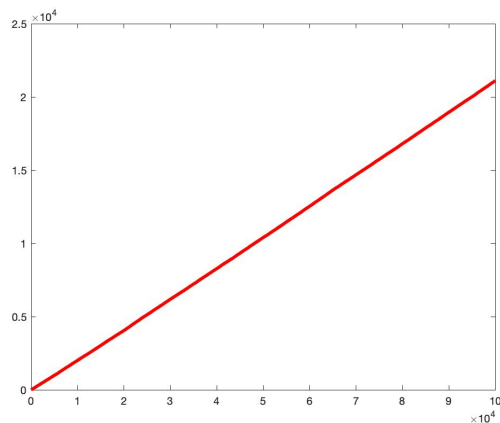
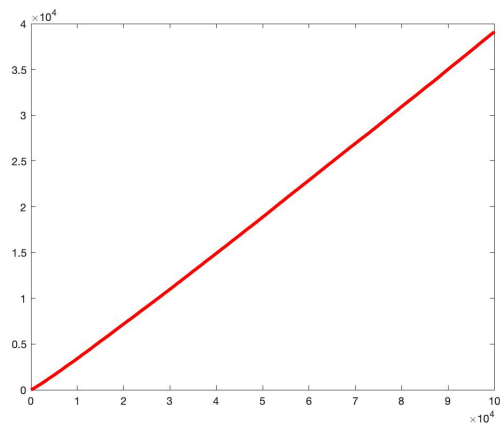
Cependant, la figure 4.2 montre que les coefficients $\hat{f}_\infty(n)$ et $\hat{\delta}_\infty(n)$ sont plus grands que $n^{-\alpha}$ dans une proportion non-négligeable. Précisément, pour $\alpha = 3/14$, $\alpha = 1/20$ et même $\alpha = 0$, il semblerait que l'on ait

$$\mathcal{T}_g^+(x; \alpha) = \rho_g(\alpha)x + o(x) \tag{4.5.1}$$

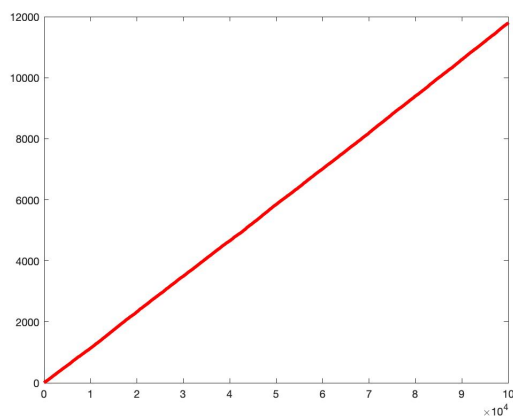
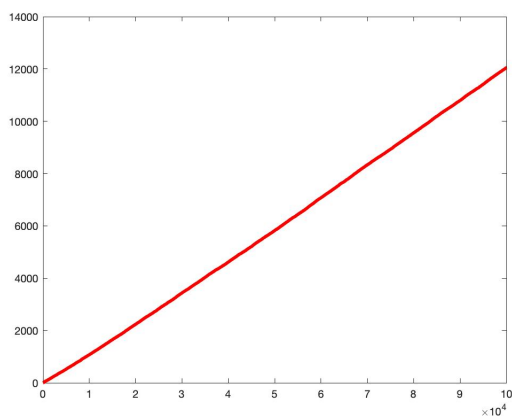
avec $g \in \{f, \delta\}$ et où $\rho_g(\alpha)$ est une certaine fonction de α dépendant de g . On peut alors conjecturer que (4.5.1) est valable pour tout α et pour tout $g \in S_{\frac{k}{2}}(N)$ à coefficient réels. Les courbes de la figure 4.2 semblent tellement droites qu'il est probable que le $o(x)$ dans (4.5.1) puisse être remplacé par un terme d'erreur très faible comme par exemple $O(\sqrt{x})$.

De la même manière, on peut définir $\mathcal{T}_g^-(x; \alpha)$ comme étant la même chose que $\mathcal{T}_g^+(x; \alpha)$ mais en remplaçant g par $-g$ dans la définition. Sans surprise, les simulations donnent les mêmes courbes que celles de la figure 4.2 et on peut donc conjecturer en plus que $\rho_g(\alpha) = \rho_{-g}(\alpha)$.

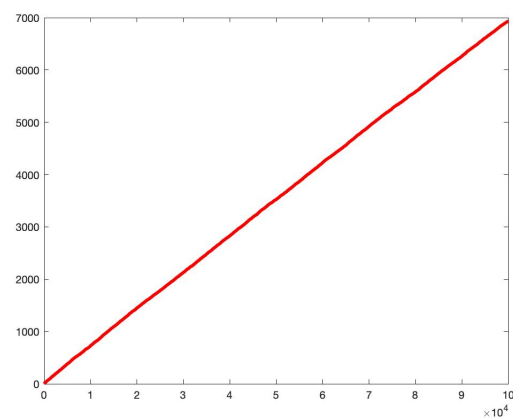
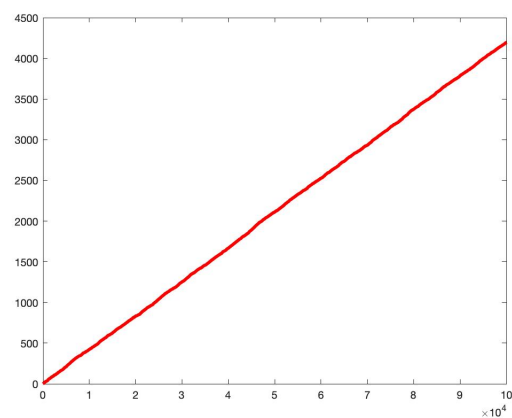
FIGURE 4.2 – Valeurs de $\mathcal{T}_f^+(x; \alpha)$ (à gauche) et de $\mathcal{T}_\delta^+(x; \alpha)$ (à droite) pour $x \leq 10^5$



$$\alpha = 3/14$$



$$\alpha = 1/20$$



$$\alpha = 0$$

Bibliographie

- [AdRIW] Sara Arias-de-Reyna, Ilker Inam, and Gabor Wiese, *On conjectures of Sato-Tate and Bruinier-Kohnen*, Ramanujan J. **36** (2015), no. 3, 455–481.
- [AL1] A. O. L. Atkin and J. Lehner, *Hecke operators on $\Gamma_0(m)$* , Math. Ann. **185** (1970), 134–160.
- [AL2] A. O. L. Atkin and Wen Ch'ing Winnie Li, *Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W -operators*, Invent. Math. **48** (1978), no. 3, 221–243.
- [BLGHT] Tom Barnet-Lamb, David Geraghty, Michael Harris, and Richard Taylor, *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 1, 29–98.
- [BC] Karim Belabas and Henri Cohen, *Modular forms in Pari/GP*, Res. Math. Sci. **5** (2018), no. 3, Paper No. 37, 19.
- [B1] A. S. Besicovitch, *On the linear independence of fractional powers of integers*, J. London Math. Soc. **15** (1940), 3–6.
- [B2] V. Blomer, *The average value of divisor sums in arithmetic progressions*, Q. J. Math. **59** (2008).
- [B3] Jan Hendrik Bruinier, *Nonvanishing modulo l of Fourier coefficients of half-integral weight modular forms*, Duke Math. J. **98** (1999).
- [BK] Jan Hendrik Bruinier and Winfried Kohnen, *Sign changes of coefficients of half integral weight modular forms*, Modular forms on Schiermonnikoog, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [BFH] Daniel Bump, Solomon Friedberg, and Jeffrey Hoffstein, *Nonvanishing theorems for L -functions of modular forms and their derivatives*, Invent. Math. **102** (1990), no. 3.
- [C1] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Collection Borel, Gauthiers-Villars, Paris, 1926.
- [C2] Barry A. Cipra, *On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms*, Nagoya Math. J. **91** (1983).
- [C3] Henri Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L -functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975).
- [CO] H. Cohen and J. Oesterlé, *Dimensions des espaces de formes modulaires*, Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), Springer, Berlin, 1977 (French).
- [CI] J. B. Conrey and H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L -functions*, Ann. of Math. (2) **151** (2000).
- [D1] Corentin Darreye, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight in arithmetic progressions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2020).
- [D2] ———, *Sign of Fourier coefficients of half-integral weight modular forms in arithmetic progressions*, Res. Number Theory (2020).
- [D3] Soumya Das, *Omega result for Fourier coefficients of half-integral weight and Siegel modular forms*, Preprint (2019).
- [D4] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1974) (French).
- [D5] ———, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52** (1980), 137–252 (French).
- [DS] Fred Diamond and Jerry Shurman, *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 228, Springer-Verlag, New York, 2005.

- [D] W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*, Invent. Math. **92** (1988), no. 1, 73–90.
- [DSP] William Duke and Rainer Schulze-Pillot, *Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids*, Invent. Math. **99** (1990), no. 1, 49–57.
- [DFI1] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions*, Invent. Math. **112** (1993), no. 1.
- [DFI2] ———, *Bounds for automorphic L-functions. II*, Invent. Math. **115** (1994), no. 2.
- [DFI3] ———, *Bounds for automorphic L-functions. III*, Invent. Math. **143** (2001), no. 2.
- [F] Yuval Z. Flicker, *Automorphic forms on covering groups of $GL(2)$* , Invent. Math. **57** (1980).
- [FGKM] Étienne Fouvry, Satadal Ganguly, Emmanuel Kowalski, and Philippe Michel, *Gaussian distribution for the divisor function and Hecke eigenvalues in arithmetic progressions*, Comment. Math. Helv. **89** (2014).
- [FKM] Étienne Fouvry, Emmanuel Kowalski, and Philippe Michel, *A study in sums of products*, Philos. Trans. Roy. Soc. A **373** (2015).
- [FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 2*, Enseignement des mathématiques, vol. 12, Cassini, 2009.
- [FW] Lei Fu and Daqing Wan, *L-functions for symmetric products of Kloosterman sums*, J. Reine Angew. Math. **589** (2005).
- [GPS] Stephen Gelbart and I. I. Piatetski-Shapiro, *Distinguished representations and modular forms of half-integral weight*, Invent. Math. **59** (1980).
- [G1] Daniel Godber, *Additive twists of Fourier coefficients of modular forms*, J. Number Theory **133** (2013), no. 1, 83–104.
- [G2] Dorian Goldfeld, *Automorphic forms and L-functions for the group $GL(n, \mathbb{R})$* , Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 99, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. With an appendix by Kevin A. Broughan; Paperback edition of the 2006 original [MR2254662].
- [GH] Dorian Goldfeld and Joseph Hundley, *Automorphic representations and L-functions for the general linear group. Volume I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 129, Cambridge University Press, Cambridge, 2011. With exercises and a preface by Xander Faber.
- [GKS] S. Gun, W. Kohlen, and K. Soundararajan, *Large Fourier coefficients of half-integer weight modular forms* (2020), available at <https://arxiv.org/pdf/2004.14450.pdf>.
- [G] Allan Gut, *Probability : a graduate course*, 2nd ed., Springer Texts in Statistics, Springer, New York, 2013.
- [HB] D. R. Heath-Brown, *A mean value estimate for real character sums*, Acta Arith. **72** (1995), no. 3, 235–275.
- [HL] Francis Hirsch and Gilles Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Enseignement des Mathématiques. [The Teaching of Mathematics], Masson, Paris, 1997 (French, with French summary). Cours et exercices. [Course and exercises].
- [HR] C. P. Hughes and Z. Rudnick, *On the distribution of lattice points in thin annuli*, Int. Math. Res. Not. **13** (2004), 637–658.
- [HKKL] Thomas A. Hulse, E. Mehmet Kiral, Chan Jeong Kuan, and Li-Mei Lim, *The sign of Fourier coefficients of half-integral weight cusp forms*, Int. J. Number Theory **8** (2012).
- [H] M. N. Huxley, *Scattering matrices for congruence subgroups*, Modular forms (Durham, 1983), Ellis Horwood Ser. Math. Appl. : Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984.
- [IW] Ilker Inam and Gabor Wiese, *Equidistribution of signs for modular eigenforms of half integral weight*, Arch. Math. (Basel) **101** (2013), no. 4, 331–339.
- [I1] Henryk Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Invent. Math. **87** (1987).
- [I2] ———, *Spectral methods of automorphic forms*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 2002.

- [I3] ———, *Topics in classical automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [IK] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [J1] Carl G. J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Regiomonti, Sumtibus fratrum Borntraeger, 1829.
- [J2] Hervé Jacquet, *On the nonvanishing of some L -functions*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **97** (1987), no. 1-3.
- [JLL⁺1] Y.-J. Jiang, Y.-K. Lau, G.-S. Lü, E. Royer, and J. Wu, *On Fourier coefficients of modular forms of half integral weight at squarefree integers*, Math. Z. **293** (2019), no. 1-2, 789–808.
- [JLL⁺2] Y.-J. Jiang, Yuk-Kam Lau, G.-S. Lü, Emmanuel Royer, and Jie Wu, *Sign changes of Fourier coefficients of modular forms of half integral weight, 2* (2018), available at <https://arxiv.org/abs/1602.08922>.
- [K1] J. Karamata, *Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes*, Math. Z. **32** (1930), no. 1, 319–320 (German).
- [K2] Nicholas M. Katz, *Gauss sums, Kloosterman sums, and monodromy groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 116, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.
- [K3] Martin Klazar, *A question on linear independence of square roots* (2009), available at https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/tomek_pr.pdf.
- [K4] Anthony W. Knap, *Elliptic curves*, Mathematical Notes, vol. 40, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [K5] Winfried Kohnen, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Math. Ann. **271** (1985), no. 2, 237–268.
- [K6] ———, *Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$* , Math. Ann. **248** (1980).
- [K7] ———, *Newforms of half-integral weight*, J. Reine Angew. Math. **333** (1982).
- [K8] ———, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Math. Ann. **271** (1985), no. 2, 237–268.
- [KZ] W. Kohnen and D. Zagier, *Values of L -series of modular forms at the center of the critical strip*, Invent. Math. **64** (1981), no. 2.
- [K] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 13, Société Mathématique de France, Paris, 2004 (French).
- [KR] Emmanuel Kowalski and Guillaume Ricotta, *Fourier coefficients of $GL(N)$ automorphic forms in arithmetic progressions*, Geom. Funct. Anal. **24** (2014).
- [LRW] Yuk-kam Lau, Emmanuel Royer, and Jie Wu, *Sign of Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Mathematika **62** (2016).
- [LZ] Yuk-Kam Lau and Lilu Zhao, *On a variance of Hecke eigenvalues in arithmetic progressions*, J. Number Theory **132** (2012).
- [LR] Stephen Lester and Maksym Radziwiłł, *Signs of Fourier coefficients of half-integral weight modular forms* (2019), available at <https://arxiv.org/pdf/1903.05811.pdf>.
- [LY] Stephen Lester and Nadav Yesha, *On the distribution of the divisor function and Hecke eigenvalues*, Israel J. Math. **212** (2016).
- [L1] Wen Ch'ing Winnie Li, *Newforms and functional equations*, Math. Ann. **212** (1975), 285–315.
- [L2] Guangshi Lü, *The average value of Fourier coefficients of cusp forms in arithmetic progressions*, J. Number Theory **129** (2009).
- [MRV] M. Manickam, B. Ramakrishnan, and T. C. Vasudevan, *On the theory of newforms of half-integral weight*, J. Number Theory **34** (1990).
- [M] M. Manickam, *Newforms of half-integral weight on $\Gamma_0(8N)$* , Number theory, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., vol. 15, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2011, pp. 63–71.
- [MMR] Murugesan Manickam, Jaban Meher, and Balakrishnan Ramakrishnan, *Theory of newforms of half-integral weight*, Pacific J. Math. **274** (2015).

- [MRM] Jaban Meher and M. Ram Murty, *Sign changes of Fourier coefficients of half-integral weight cusp forms*, Int. J. Number Theory **10** (2014), no. 4, 905–914.
- [MS] Stephen D. Miller and Wilfried Schmid, *Summation formulas, from Poisson and Voronoi to the present*, Noncommutative harmonic analysis, Progr. Math., vol. 220, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [MV1] Philippe Michel and Akshay Venkatesh, *The subconvexity problem for GL_2* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **111** (2010).
- [MV2] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan, *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [N] Shinji Niwa, *Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions*, Nagoya Math. J. **56** (1975).
- [O] Ken Ono, *The web of modularity : arithmetic of the coefficients of modular forms and q -series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 102, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [OS] Ken Ono and Christopher Skinner, *Non-vanishing of quadratic twists of modular L -functions*, Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 651–660.
- [P] Ariel Pacetti, *Shimura correspondence and central values of twisted L -series*, Proceedings of the “Segundas Jornadas de Teoría de Números”, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 2008, pp. 221–242.
- [PG] Corentin Perret-Gentil, *Gaussian distribution of short sums of trace functions over finite fields*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **163** (2017).
- [P1] H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsien*s, Acta Math. **1** (1882), no. 1, 1–76 (French).
- [P2] Soma Purkait, *Hecke operators in half-integral weight*, J. Théor. Nombres Bordeaux **26** (2014) (English, with English and French summaries).
- [RR] Guillaume Ricotta and Emmanuel Royer, *Kloosterman paths of prime powers moduli*, Comment. Math. Helv. **93** (2018), no. 3, 493–532.
- [SS] J.-P. Serre and H. M. Stark, *Modular forms of weight $1/2$* , Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), Springer, Berlin, 1977.
- [STW] T. Shemanske, S. Treneer, and L. Walling, *Constructing simultaneous Hecke eigenforms*, Int. J. Number Theory **6** (2010), no. 5, 1117–1137.
- [S1] Goro Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. (2) **97** (1973).
- [S2] ———, *On the Fourier coefficients of Hilbert modular forms of half-integral weight*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 2, 501–557.
- [S3] ———, *On the trace formula for Hecke operators*, Acta Math. **132** (1974).
- [S4] Takuro Shintani, *On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight*, Nagoya Math. J. **58** (1975).
- [S5] William Stein, *Modular forms, a computational approach*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 79, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. With an appendix by Paul E. Gunnells.
- [T] J. B. Tunnell, *A classical Diophantine problem and modular forms of weight $3/2$* , Invent. Math. **72** (1983), no. 2, 323–334.
- [UY] Masaru Ueda and Shunsuke Yamana, *On newforms for Kohnen plus spaces*, Math. Z. **264** (2010).
- [V] Georges Valiron, *Théorie générale des séries de Dirichlet*, Mémorial des sciences mathématiques, vol. 17, GAUTHIER-VILLARS et Cie, ÉDITEURS, 1926.
- [W1] Fabian Waibel, *Fourier coefficients of half-integral weight cusp forms and Waring’s problem*, Ramanujan J. **47** (2018), no. 1, 185–200.
- [W2] J.-L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pures Appl. (9) **60** (1981) (French).