



**HAL**  
open science

# El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos

Andrea Pizarro Canales

► **To cite this version:**

Andrea Pizarro Canales. El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos. Education. Université Sorbonne Paris Cité, 2018. Español. NNT: 2018USPCC336 . tel-03070293

**HAL Id: tel-03070293**

**<https://theses.hal.science/tel-03070293>**

Submitted on 15 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat  
de l'Université Sorbonne Paris Cité  
Préparée à l'Université Paris Diderot  
**Ecole doctorale** ED400 Savoir Scientifiques  
*Laboratoire André Revuz (EA 4434)/ETM*

# El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos

Par Andrea Pizarro Canales

Thèse de doctorat de Didactique des Disciplines

Dirigée par Alain Kuzniak

Présentée et soutenue publiquement à Valparaíso le 12 décembre 2018

Président du jury: Soto, Jorge / Professeur / Universidad de Chile. Chili

Rapporteur: Bloch, Isabelle / Professeur des Universités Émérite / Université de Bordeaux. France

Examineurs: Vivier, Laurent / Maître de conférences / Université Paris Diderot. France

Examineurs: Henríquez, Carolina/ Professeur / Universidad de Talca. Chili

Directeur de thèse: Kuzniak, Alain / Professeur des Universités / Université Paris Diderot. France

Membre invités:

Artigue, Michèle/ Professeur des Universités Émérite /Université Paris Diderot. France

**Título: El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos.**

**Resumen:**

Esta investigación busca determinar el Espacio de Trabajo Matemático de referencia e idóneo (Kuzniak, 2011) sobre la enseñanza de los triángulos en séptimo básico en Chile (13 años). El diseño de investigación es de tipo no experimental *ex post-facto*, de carácter observacional.

Primero, se realizan análisis preliminares de los objetivos de aprendizaje y las tareas matemáticas propuestas en los programas oficiales. Se analizan los textos escolares que utilizan dos profesoras para el diseño de sus clases, una profesora de primaria con mención, y otra, de secundaria.

Adicionalmente, se estudia el desarrollo de sus clases efectivas, analizando sus discursos: semiótico, tecnológico y teórico, a partir de un libro de códigos. En él se definen variables y categorías a la luz del ETM, cuantificando sus frecuencias de aparición. Al mismo tiempo, se describen las tareas implementadas según el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo desde una perspectiva cualitativa.

Los resultados muestran que el ETM<sub>G</sub> de referencia de triángulos no propicia el desarrollo de razonamiento matemático. Sobre 110 tareas analizadas, 8% solicita proceso de prueba, 18 % movilizan el semiplano [sem-ref], en el cual se pide observar, describir y nominar. 61% moviliza los planos [sem-ins] y epistemológico, pidiéndose constatar teoremas.

Se analizan 173 tareas de los textos escolares. 69 % movilizan los planos [sem-ins] y epistemológico, 24 % el semiplano [sem-ref] y 1 % corresponde al proceso de prueba.

Se evidencia en clases, una alta aparición del discurso tecnológico, baja presencia de instrumentos geométricos y ausencia del proceso de prueba.

Modificar los documentos oficiales, mejorará los procesos de enseñanza y aprendizaje. Y como consecuencia los resultados en mediciones internacionales.

**Palabras Claves:** Espacio de Trabajo Matemático, tarea matemática, semiplano [sem-ref], discurso tecnológico, discurso semiótico, discurso teórico.

**Titre: Le travail géométrique en classe de primaire au Chili: une étude de cas sur l'enseignement des triangles.**

**Résumé:**

Cette investigation cherche à déterminer l'Espace de Travail Mathématique de référence et idoine (Kuzniak, 2011) sur l'enseignement des triangles en septième année de primaire (13 ans). La méthodologie suivie a été de type *ex post-facto*, non-experimentale-observationale.

D'abord, nous avons fait une révision des objectifs et des tâches mathématiques offerts par les programmes officiels. Nous avons fait l'analyse des manuels scolaires que deux professeurs utilisent en vue de planifier leur cours, l'une est institutrice primaire spécialisée en mathématiques et l'autre est enseignant dans un lycée.

Ensuite, nous avons étudié les discours des enseignants pendant les cours ordinaires du point de vue sémiotique, technologique et théorique. Nous avons observé lors de ces classes l'utilisation d'un répertoire de codes, lesquelles définissent des variables et des catégories de l'ETM et nous avons quantifiées leurs fréquences d'apparition. En même temps, nous avons décrit les tâches selon l'ETM<sub>G</sub> idoine selon une perspective qualitative.

Les résultats montrent que l'ETM<sub>G</sub> de référence ne vise pas le développement du raisonnement mathématique. Sur 110 tâches analysées, le 8% traite le processus d'épreuve. Le 18% mobilise le semiplan [sem-ref], avec des tâches d'observation, de description et de désignation. Le 61% mobilise les plans [sem-ins] et épistémologique, avec des tâches de constatation des théorèmes.

Nous analysons 173 tâches des manuels scolaires. Le 69% mobilise les plans [sem-ins] et épistémologiques, le 24% mobilise le semi-plan [sem-ref] et le 1% correspond au processus d'épreuve.

Enfin, le discours technologique est très utilisé lors des classes, avec une présence discrète d'instruments géométriques et une absence du processus d'épreuve.

D'après nos conclusions, la modification des documents officiels pourrait améliorer les processus d'enseignement-apprentissage et les résultats de test internationaux.

**Mots clefs:** Espace de Travail Mathématique, tâche mathématique, semiplan [sem-ref], discours technologique, discours sémiotique, discours théorique.

**Title: Geometric Work in the Primary Classrooms in Chile: A case study of teaching triangles**

**Summary :**

This study aims to determine the reference and suitable Mathematical Working Space (MWS, ETM in French) (Kuzniak, 2011) regarding the teaching of triangles in Primary School (approximately 13-years-old students). The research design is observational, non-experimental or ex-post-facto.

First, a preliminary analysis of the learning objectives and mathematical tasks suggested in the national curriculum was conducted. The textbooks used by two teachers for designing their lesson plans were analysed. One of them was a Primary Teacher with specialisation and the other a Secondary Teacher.

Additionally, focus on the lessons' development, it was analysed the teachers' discourses named semiotic, technological, and theoretical based on a codebook, which defined the variables and categories emerging from the MWS. The frequencies of appearance of those variables were quantified. At the same time, the tasks implemented are described considering the suitable  $MWS_G$  effective from a qualitative perspective.

The results reveal that the  $MWS_G$  of triangles references does not favour mathematical reasoning. Over 110 analysed tasks, 8% demanded trial process, 18% mobilised the half-plane [sem-ref] in which it was asked to observe, describe, and nominate. 61% mobilised the [sem-ins] and the epistemological planes asking to verify theorems.

One hundred seventy-three (173) textbook tasks were analysed. 69% mobilised the [sem-ins] and epistemological planes, 24% the [sem-ref] half-plane and 1% corresponded to the trial process.

The classrooms evidenced a high appearance of technological discourse, low presence of geometric instruments and the absence of the trial process.

Modifying the official documents will improve teaching and learning processes and, in consequence, the international measurements' outcomes.

**Keywords:** Mathematical Work Space, mathematical task, half-plane [sem-ref], technological discourse, semiotic discourse, theoretical discourse.

*Dedicatoria*

Debes amar la arcilla  
que va en tus manos.  
Debes amar tu arena  
hasta la locura.  
Y si no,  
no la emprendas que será en vano.  
Sólo el amor  
alumbra lo que perdura,  
solo el amor  
convierte en milagro el barro.  
Debes amar el tiempo  
de los intentos.  
Debes amar la hora  
que nunca brilla.  
Y si no,  
no pretendas tocar lo yerto.  
Solo el amor  
engendra la maravilla,  
solo el amor  
consigue encender lo muerto.

(Lo que debes amar, poema de Jose Martí)

A mis padres Fresia y Andrés y a mis hijos, fuente de inspiración permanente en mi búsqueda diaria para construirme como una profesional comprometida con el desafío de contribuir a lograr avances significativos en el desarrollo de habilidades para el aprendizaje de la matemática en mi país. Son ustedes hijos; Pablo, Francisco, Pedro y Luz María quienes junto a Julio, mi marido, han compartido mis sueños, desafíos, obstáculos, victorias y derrotas con amor, generosidad y solidaridad que me emocionan y que fueron claves para permitir el desarrollo de esta tesis doctoral que hoy culmina.

A mis hermanos Viviana, Andrés y Maricela gracias por siempre estar y soñar conmigo.

A mi maravillosa familia que contiene y sostiene mil gracias, que el Señor los bendiga.

## Agradecimientos

Mi tesis es una profundización de mis aprendizajes, vertidos en una investigación que se proyecta al servicio de la formación inicial y continua de profesores de escuela primaria, retroalimentando con ello los saberes disciplinares, didácticos y pedagógicos.

Este proceso nace hace muchos años, fue interrumpido y retomado. Por ello, no puedo dejar de agradecer el apoyo y la confianza que depositó en mí, el Director de tesis, Alain Kuzniak, quien a pesar de la discontinuidad de mi trabajo, mantuvo su fe en mis competencias profesionales e investigativas, instándome siempre con sus palabras de aliento a culminar mi tesis. No tengo palabras para agradecer a Alain, por su apoyo fundamental, de tal forma que la relación profesor- estudiante, fue transformándose en una relación maestro-aprendiz, lo cual significó la profundización no sólo del aprendizaje sino la creación de una relación dialógica generadora de una hermandad muy profunda en los diferentes saberes. Gracias por tanta entrega.

Este doctorado también me permitió disfrutar de la solidaridad y apoyo de Michèle, quien junto a Francis me acogieron, lo que me permitió contar con una familia generosa que me abrió las puertas de su hogar. Igualmente, agradezco a Olivier, Karine, Vincent, Hélène, Clara, Paul, Tim y Lucy quienes siempre tuvieron conmigo un trato cariñoso y fraterno. Estaré eternamente agradecida con cada uno de ustedes por los paseos, las comidas, las conversaciones, las risas... cada momento que hemos compartido en todos estos años han sido muy especiales, me hicieron sentir en casa. Emocionada les doy las gracias, mi querida familia Artigue.

En la construcción de mi tesis doctoral también recibí importantes enseñanzas de Catherine Houdement, con quien aprendí especialmente a analizar secuencias de aprendizajes implementadas por docentes, competencias que me han permitido hasta el día de hoy

observar los diferentes procesos al interior de las aulas, desde el punto de vista investigativo. Gracias Catherine por todo tu tiempo y apoyo.

Una tesis doctoral se nutre de la retroalimentación que genera la comisión, es por ello que es momento de agradecer a quienes colaboraron con la corrección de mi tesis, Isabelle Bloch y Jorge Soto, quienes mostraron un interés especial en ella con la cuidadosa lectura de mi manuscrito y sus comentarios, lo que me permitió enriquecer mis reflexiones e incorporar otras perspectivas en el trabajo.

En este contexto, agradezco también a Michèle Artigue, Laurent Vivier y Carolina Henríquez quienes honran mi trabajo académico al participar como miembros constitutivos de mi jurado.

Mención importante tienen en el desarrollo de mi investigación los profesionales del Laboratorio de Didáctica André Revuz (LDAR) de la Université Paris-Diderôt, quienes en conjunto son más que un espacio de trabajo, es una verdadera comunidad de aprendizaje permanente, donde se construye conocimiento en la relación que se establecen entre los maestros o investigadores experimentados y aquellos que recién comenzamos.

El equipo administrativo entrega las condiciones para una buena ejecución de una tesis, ellos resultan fundamentales en el trabajo diario, por ello quiero agradecer a Jérôme, eficiente y dedicado bibliotecario del IREM de París, quien conmigo siempre manifestó disponibilidad para orientar y apoyar la búsqueda bibliográfica, con un espíritu de alegría y optimismo expresado no sólo en francés sino también en español, lo que muchas veces contribuyó a darme energía en el trabajo investigativo. Además, es importante incluir en los agradecimientos por su apoyo en cuestiones administrativas a Martine, Nadine y especialmente a Sandrine, quien incluso a distancia ha orientado y solucionado de manera muy diligente algunas problemáticas asociadas al desarrollo de mi post grado. Finalmente,

menciono en mis agradecimientos a Laetitia, especialista en audiovisuales, su trabajo fue clave al momento de mi defensa en Chile, con dos miembros del jurado a distancia.

A Catherine Taveau, una gran amiga a la cual agradezco las reiteradas oportunidades que me brindó para participar en los encuentros de la COPIRELEM (Comité Nacional Permanente de los IREM sobre la Educación Primaria), instancias únicas de gran desarrollo profesional y personal con formadores de profesores de matemática. Además, su generosidad traspasó los límites profesionales lo que es invaluable para mí.

En mi país, el trabajo de investigación continuó desarrollándose y en él, pude contar con el apoyo de mi equipo de ayudantes de investigación, conformado por: Gonzalo Soto, quien colaboró estrechamente con mi trabajo. También, agradezco a Issa Escobar, Eunice Riveros Paz Iturrieta y Claudia Paredes, en las diferentes labores que realizaron, todos ellos se caracterizaron por su dedicación, responsabilidad y compromiso con el desarrollo de este desafío, por lo que les estaré siempre agradecida. Este equipo seguirá investigando, estamos recién comenzando. Igualmente quiero agradecer a Paola Galviati por cada ilustración que le pedí que hiciera.

El trabajo de una tesis requiere de miradas profesionales complementarias, por ello la asesoría resulta fundamental. En este sentido, valoro profundamente la orientación metodológica de mi colega y gran amigo, Pablo Cáceres. Otras colegas amigas que me apoyaron en este proceso son: Grace Morales, Patricia López, Carla Muñoz y María Verónica Leiva, sin duda sus consejos, observaciones y orientaciones nutrieron mi trabajo. A mis colegas de la Escuela de Pedagogía, les agradezco cada palabra de aliento.

No puedo dejar de mencionar a mis profesoras en mi formación inicial, que con orgullo puedo llamar mis amigas: Lidia Consiguere, Ismenia Guzmán, Renate Laudien, Berta Aycinena, Gladys González, Inés Guerrero, María Angélica Maulén y Axa Rojas, mis queridas Matlovers gracias por cada palabra de aliento y contención, son ustedes una bendición en mi vida.

Al cerrar un proceso tan intenso como es la finalización de mi tesis doctoral, realizo una profunda reflexión de lo que para mi ha significado este gran logro profesional. Estoy orgullosa de ser profesora, dado que mi ser más íntimo disfruta día a día realizando las clases donde el encuentro con mis estudiantes reaviva mi espíritu y mi intelecto. Por ello, hoy al culminar estos estudios declaro feliz que puedo avanzar investigativamente en mi opción por educar, no en soledad sino cara a cara con quienes me motivan a continuar hacia adelante, mis estudiantes. Escribo estas palabras convencida honrando y agradeciendo a quien fue mi directora, colega y amiga María Luz Morillo, quien con su sabiduría pedagógica sin límites, me otorgó herramientas fundamentales para caminar cada vez más comprometida por la construcción de aprendizajes integrales y profundos. Amiga querida este cierre es por ambas.

Para finalizar, quiero mencionar que me formé como profesora de matemáticas en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), paralelamente fui ayudante, luego me incorporé como profesora. Han sido años de pertenecer a esta prestigiosa casa de estudios y hoy al finalizar un importante proceso de mi vida profesional, quiero agradecer el apoyo institucional, particularmente a su rector Claudio Elórtegui.

## Tabla de contenido

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>23</b>
<b>PRIMERA PARTE: CONTEXTUALIZACIÓN .....</b>	<b>27</b>
CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	28
1.1 Estructura del Sistema educativo chileno.....	28
1.2 Sistema de Desarrollo Nacional Profesional Docente.....	29
1.3 Antecedentes históricos de la educación en Chile .....	33
1.4 Marco para Buena Enseñanza en Chile .....	35
1.5 Resultados de aprendizajes de la Educación chilena, según pruebas estandarizadas .....	38
1.5.1 Sistema Nacional de Evaluación: SIMCE .....	38
1.5.2 Programme International of Students Assessment: PISA .....	42
1.5.3 Tendencia en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias: TIMMS .....	43
1.6 Motivación del Estudio .....	46
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	50
2.1 Espacio de Trabajo Matemático (ETM) .....	51
2.2 Paradigmas Geométricos .....	53
2.2.1 La geometría natural (GI).....	53
2.2.2 La geometría axiomática natural (GII).....	53
2.2.3 La geometría axiomática formalista (GIII).....	54
2.3 Tarea matemática .....	55
2.4 Componentes del Espacio de Trabajo Matemático .....	55
.....	57
2.5 Las Génesis del Espacio de Trabajo Geométrico ETM <sub>6</sub> .....	57
2.5.1 Génesis Semiótica .....	57
2.5.2 Génesis instrumental.....	59
2.5.3 Génesis discursiva .....	60
A. Tipos de validación según Balacheff (1987) .....	61
a. Explicación.....	61
b. Prueba .....	61
b.1. Tipos de pruebas pragmáticas .....	62
b.2. Tipos de pruebas intelectuales .....	62

2.6 La validación en el ETM <sub>G</sub> .....	64
2.7 Circulación del ETM .....	64
2.7.2 Plano Instrumental Discursivo [Ins – Dis] .....	66
2.7.3 Plano Semiótico Instrumental [Sem – Ins] .....	66
2.8 Diferentes niveles de ETM .....	67
2.8.1 ETM de referencia.....	68
2.8.2 ETM idóneo.....	68
.....	69
A. ETM <sub>G</sub> idóneo diseñado por los autores de textos escolares .....	69
B. ETM <sub>G</sub> idóneo efectivo del profesor .....	69
2.8.3 ETM personal .....	70
2.9 Objetivos de investigación .....	70
2.9.1 Objetivo general .....	71
2.9.2 Objetivos específicos .....	71
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA .....	72
3.1 Tipos de investigación .....	73
3.2 Método .....	74
3.2.1 Participantes .....	74
A. Criterios de inclusión .....	74
B. Criterios de exclusión .....	74
C. Descripción de las participantes .....	74
c.1. Profesora Caso 1: Ailén .....	77
c.2 Profesora Caso 2: Sayén .....	78
3.2.2 Diseño .....	78
A. Etapa Preparatoria .....	78
A.1 Cómo se realiza el análisis del ETM de Referencia .....	80
A.2 Como se realiza el análisis del ETM de Idóneo potencial .....	82
B. Estudio de Campo .....	83
C. Confrontación de los resultados.....	84
3.2.3 Instrumentos .....	85
A. Tipos de datos .....	85
B. Características del material fílmico .....	87
C. Instrumentos de filmación .....	88

3.2.4 Procedimientos .....	88
A. Herramientas utilizadas.....	89
a. Tablas e ilustraciones .....	89
B. Diagrama del Espacio de Trabajo .....	91
C. División en episodios .....	91
D. Transcripción .....	92
3.2.5 Análisis .....	94
A. Procesamiento preliminar de los datos.....	94
a.1 Libro de Códigos .....	94
a.2 Tabla de Frecuencias .....	97
a.2.1 Conteo de Frecuencias .....	98
a.2.2 Combinaciones en función de la variable fija tiempo .....	99
a.3 Gráficos .....	99
a.4 Informe con análisis descriptivo.....	100
B. Elementos del ETM que surgen en los análisis .....	100
b.1. Semiplano .....	100
b.2. El rol del discurso en el espacio de trabajo matemático .....	101
Discurso teórico .....	102
C. Análisis de datos de documentos preliminares (Programas de estudio y textos escolares).....	102
D. Caracterización del ETM <sub>G</sub> idóneo de las clases de las profesoras Ailén y Sayén. ....	103
E. Descripción del ETM <sub>G</sub> idóneo en la clase de cada profesora desde una perspectiva cuantitativa. ....	104
F. Cruce de los análisis de cada caso con el análisis ETM <sub>G</sub> de referencia y ETM <sub>G</sub> idóneo en los textos escolares. ....	104
<b>PARTE 2 CARACTERIZACIÓN, ANÁLISIS Y RESULTADOS .....</b>	<b>105</b>
CAPÍTULO 4: CARACTERIZACIÓN DEL ETM <sub>G</sub> DE REFERENCIA DE PRIMERO A SÉPTIMO BÁSICO EN TORNO A LOS TRIÁNGULOS .....	106
4.1 ETM <sub>G</sub> de referencia en los Objetivos de aprendizaje y actividades sugeridas en los programas chilenos para el tratamiento de triángulos. ....	107
4.1.1 Análisis Objetivo de Aprendizaje 12 .....	107
4.1.2 Actividades y tareas .....	108
<b>Categoría 1:</b> Actividades con más de una tarea, que movilizan distintos componentes .....	109
<b>Categoría 2:</b> Actividades con tareas de igual circulación, pero con distinta configuración de sus componentes. ....	113
<b>Categoría 3:</b> Actividades con una tarea.....	115

4.2 Caracterización por curso de las circulaciones del $ETM_G$ presentes en los OA y las actividades sugeridas.....	119
4.2.1 Primero Básico.....	119
4.2.2 Segundo Básico.....	120
4.2.3 Tercero Básico.....	121
4.2.4 Cuarto básico.....	122
4.2.5 Quinto Básico.....	123
4.2.6 Sexto básico.....	124
4.2.7 Séptimo Básico.....	126
4.3 Caracterización de las génesis del $ETM_G$ de referencia de primero a séptimo básico en torno a los triángulos en Chile.....	128
4.3.1 Génesis instrumental.....	128
A Deconstrucción.....	128
B Construcción con artefacto.....	128
b.1) la construcción con artefactos “no geométricos”.....	128
b.2) la construcción con artefactos geométricos.....	129
b.3) la construcción con software geométrico.....	129
C Construcción aritmética.....	129
4.3.2 Génesis discursiva.....	130
4.3.3 Génesis semiótica.....	131
4.4 Conclusiones.....	134
CAPÍTULO 5 CARACTERIZACIÓN DEL ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO IDÓNEO DE TEXTOS ESCOLARES.....	137
5.1 Circulación del $ETM_G$ idóneo potencial en las tareas geométricas para el tratamiento de triángulos en los textos escolares escogidos por Ailén y Sayén.....	138
5.1.1 Categoría 1: Actividades con más de una tarea, que movilizan distintos componentes.....	139
5.1.2 Categoría 2 Actividades con tareas de igual circulación, pero con distinta configuración de sus componentes.....	141
5.1.3 Categoría 3: Actividades con una tarea.....	143
5.2 Caracterización del $ETM_G$ idóneo de los textos escolares.....	144
5.2.1 Caracterización del $ETM_G$ idóneo del texto Santillana en torno a los triángulos.....	144
A. Plano Semiótico-discursivo.....	144
B. Plano Semiótico-Instrumental Y Epistemológico.....	145
C. Semiplano Semiótico-Referencial.....	145

5.2.2 Caracterización del ETM <sub>G</sub> idóneo del texto Galileo en torno a los triángulos.....	148
A. Semiplano Semiótico-Referencial .....	148
B. Plano Semiótico-instrumental Y Epistemológico.....	148
C Plano Semiótico-Discursivo .....	149
D. Circulación completa.....	150
5.2.3 Caracterización del ETM <sub>G</sub> idóneo del texto SM en torno a los triángulos .....	152
A. Semiplano Semiótico-Referencial .....	152
B. Plano semiótico-instrumental y epistemológico .....	152
5.3 <i>¿Qué relación existe entre el ETM<sub>G</sub> idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos    escolares con el ETM<sub>G</sub> de referencia en los programas de estudio?</i> .....	154
.....	155
5.4 <i>Conclusiones a partir de la caracterización de los componentes del ETM de Referencia e    Idóneo referente a los triángulos</i> .....	155
5.4.1 Artefactos .....	155
A. Material.....	155
B. Teórico.....	155
C. Digital .....	155
5.4.2 Construcción .....	156
A. Construir a partir de los elementos secundarios del triángulo .....	156
B. Calcular.....	156
C. Plegar.....	156
5.4.3 Representamen .....	157
A. Triángulo como dibujo .....	157
B. Triángulo con papel .....	157
C. Triángulo en software .....	157
D. Triángulo por medio de la medida de sus ángulos interiores expresados de manera numérica ..	157
E. Triángulo por medio de la medida de sus ángulos interiores expresados de manera algebraica .	158
F. Triángulo imposible de construir .....	158
H. Teorema de Pitágoras .....	158
I. Medidas numéricas de un triángulo imposible de construir, asociada a un triángulo ya construido	
.....	159
5.4.4 Visualización .....	159

5.4.5 Referencial .....	159
A. Familia de triángulos .....	159
B. Desigualdad triangular .....	159
C. Ángulos interiores y exteriores.....	160
D. Área de triángulos.....	160
E. Teorema de Pitágoras.....	160
5.4.6 Prueba.....	160
A. Argumentar, justificar y explicar .....	160
B. Demostrar .....	161
<b>CAPÍTULO 6 CARACTERIZACIÓN DEL ETM<sub>G</sub> IDÓNEO EFECTIVO EN LAS CLASES DE AILÉN Y SAYÉN PARA LA ENSEÑANZA DE</b>	
<b>LOS TRIÁNGULOS</b> .....	<b>162</b>
<i>6.1 Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas por Ailén para la enseñanza de los triángulos.</i> .....	<i>163</i>
6.1.1 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la primera clase de Ailén .....	163
A. Episodio 1: ¿Cómo puedo construir un ángulo de 45°? .....	163
B. Episodio 2: ¿Cómo se puede copiar el ángulo de 45° utilizando regla y compás? .....	165
C. Episodio 3: Institucionalización de la técnica para la copia de ángulos.....	165
D. Episodio 4: Dibujar con transportador un ángulo que mida 125° y copiarlo usando compás y regla. ....	166
E. Episodio 5: Institucionalización de la construcción de un triángulo a partir de dos lados y un ángulo comprendido entre ellos. ....	167
F. Episodio 6: Entrega una guía de trabajo donde deben construir un triángulo a partir de dos lados y un ángulo comprendido entre ellos. ....	168
6.1.2 Descripción del ETM <sub>G</sub> idóneo de Ailén desde una perspectiva cuantitativa .....	169
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	171
6.1.3 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la segunda Clase de Ailén. ....	175
A. Episodio 1: Construir un segmento y dos ángulos.....	175
B. Episodio 2: Aplicación de la técnica de construcción de triángulo con la medida de un lado y dos de sus ángulos, con ejercicios en la pizarra.....	177
C. Episodio 3: Aplicación de la técnica de construcción de triángulo con la medida de un lado y dos de sus ángulos, con ejercicios en una guía de trabajo. ....	178
6.1.4 Descripción del ETM <sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa .....	180
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	182
6.1.5 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la tercera Clase de Ailén .....	185

A. Episodio 1: Copia de segmentos.....	185
B. Episodio 2: Institucionalización de la técnica para la construcción del triángulo a partir de la medida de tres lados.....	187
C. Episodio 3: Aplicación de la técnica para la construcción del triángulo con ejercicios presentes en la pizarra.....	187
D. Episodio 4: Completar una tabla para comprobar la desigualdad triangular.....	188
E. Episodio 5: Aplicación de la técnica para la construcción del triángulo con ejercicios entregados en una guía.....	189
6.1.6 Descripción del ETM <sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa .....	192
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	194
6.1.7 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la cuarta Clase de Ailén .....	197
A. Episodio 1: dibujar 3 segmentos .....	198
B. Episodio 2: dibuja con transportador los ángulos .....	199
C. Episodio 3: construye triángulos utilizando artefacto regla y compás.....	200
D. Episodio 4: Estudio de la desigualdad triangular .....	201
E. Episodio 5: Aplicación de la propiedad de la desigualdad triangular.....	202
F. Episodio 6: Aplicación de la propiedad de la desigualdad triangular.....	203
G. Episodio 7: Copiar un dibujo usando procedimientos de construcción .....	204
6.1.8 Descripción del ETM <sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa .....	205
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	207
6.1.9 Conclusiones .....	209
A. Génesis semiótica.....	209
B. Génesis instrumental.....	209
C. Construcción con artefacto .....	209
6.2 Caracterización del ETM <sub>G</sub> idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas por Sayén para la enseñanza de los triángulos .....	211
6.2.1 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la primera Clase de Sayén .....	211
6.2.2 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la segunda Clase de Sayén .....	212
A. Episodio 1: Realizar las tareas de la página 180 del texto escolar de la Editorial SM.....	212
B. Episodio 2: Clasificación de triángulos según la medida de sus lados.....	213
C. Episodio 3: Institucionalización del concepto de triángulo y su clasificación según la medida de sus lados y ángulos.....	214
D. Episodio 4: Resolución de guía, a partir de la estimación y clasificación de triángulos en función de la medida de sus lados y sus ángulos. Y segunda tarea luego contar triángulos y cuadrados.....	215

6.2.3 Descripción del ETM <sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa .....	218
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	220
6.2.4 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la tercera Clase de Sayén. ....	223
A. Episodio 1: Comprobar la desigualdad triangular: Construir triángulos a partir de bombillas, deben cortar con las medidas que entrega la profesora: 6 cm, 3 cm, 10 cm .....	224
B. Episodio 2 Puesta en común de las construcciones realizadas .....	225
C. Episodio 3: Construir con nuevas medidas .....	225
D. Episodio 4: Puesta en común de ambas construcciones .....	226
E. Episodio 5: Institucionalización desigualdad triangular (Escribe en la pizarra), explica la desigualdad triangular a través de un ejemplo .....	226
F. Episodio 6: entrega una tarea donde los estudiantes deben ahora comprobar la desigualdad triangular. Anota las medidas en la pizarra .....	228
El episodio 6, la profesora solicita que ahora puedan comprobar la desigualdad triangular teniendo únicamente las medidas de cada uno de los lados del triángulo. Para esto, entre las siguientes medidas 3 cm, 4 cm y 5 cm, y anota en la pizarra lo siguiente: $a < b + c$ ; $b < a + c$ ; $c < a + b$ . ....	228
G. Episodio 7: Puesta en común de las condiciones para construir un triángulo .....	229
H. Episodio 8: Actividad donde deben comprobar la desigualdad triangular en una serie de tareas puestas en la pizarra. ....	229
I. Episodio 9: Revisión y puesta en común del trabajo realizado .....	230
6.2.5 Descripción del ETM <sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa .....	230
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	232
6.2.6 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la cuarta Clase de Sayén. ....	235
A. Episodio 1: Construir un triángulo conociendo la medida de sus tres lados (5,6,7). ....	236
B. Episodio 2: los estudiantes deben construir con medidas de 3,4 y 5 cm .....	237
C. Episodio 3: construir otro triángulo con las medidas 9, 6 y 5 cm .....	237
D. Episodio 4: Construir triángulo con las medidas, dos lados y un ángulo de 5, 7, y 68°. ....	238
6.2.7 Descripción del ETM <sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa .....	239
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	241
6.2.8 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la quinta Clase de Sayén .....	245
A. Episodio 1: Revisión de las tareas abordadas en la clase anterior .....	245
B. Episodio 2: “construir los siguientes triángulos” construcción de triángulo con la medida de tres lados (8,6, 10) y (7,9, 11) .....	246
C. Episodio 3: deben construir un triángulo conociendo la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (3,4 y 90°) .....	246

D. Episodio 4: construcción de un nuevo triángulo conociendo la medida de dos lados y uno de sus ángulos (7, 9 y 120°).....	247
6.2.9 Descripción del ETM <sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa.....	247
A. El objeto triángulo y su tratamiento .....	249
6.2.10 Conclusiones .....	253
A. Génesis semiótica.....	253
B. Génesis instrumental.....	254
C. Construcción con artefacto .....	254
D. Génesis discursiva .....	255
<b>6.3 Conclusiones del Capítulo .....</b>	<b>255</b>
<b>CAPITULO 7: CONCLUSIONES Y PROYECCIONES .....</b>	<b>258</b>
<b>7.2 Limitaciones del estudio .....</b>	<b>278</b>
<b>7.3 Proyecciones de la investigación .....</b>	<b>278</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>280</b>

## Tabla de ilustraciones

ILUSTRACIÓN 1 EVOLUCIÓN DE LOS PUNTAJES PROMEDIOS DE 8° BÁSICO EN MATEMÁTICAS. ....	39
ILUSTRACIÓN 2 EVOLUCIÓN PROMEDIO PUNTAJES MATEMÁTICA 8° BÁSICO SIMCE PERIODO 2004 – 2014, SEGÚN GSE. ....	41
ILUSTRACIÓN 3 PROGRESIÓN DE OS RESULTADOS CHILE EN TIMSS, SEGÚN TIPO DE DEPENDENCIA. ....	44
ILUSTRACIÓN 6 PLANO [INS-DIS] .....	65
ILUSTRACIÓN 7 PLANO [SEM-INS] .....	65
ILUSTRACIÓN 8 PLANO SALA, CASO 1 .....	76
ILUSTRACIÓN 9 PLANO SALA, CASO 2 .....	76
ILUSTRACIÓN 10 EJEMPLO DE TABLA DE ELECCIÓN OA'S .....	89
ILUSTRACIÓN 11 EJEMPLO DE ACTIVIDADES SUGERIDAS DE LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO.....	90
ILUSTRACIÓN 12 EJEMPLO DE ACTIVIDADES DE TEXTOS ESCOLARES .....	90
ILUSTRACIÓN 13 DIAGRAMA DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO.....	91
ILUSTRACIÓN 14 EJEMPLO DE DIVISIÓN DE EPISODIOS .....	92
ILUSTRACIÓN 15 EJEMPLO DE TRANSCRIPCIÓN .....	94
ILUSTRACIÓN 16 EJEMPLO DE TABLA DE FRECUENCIAS .....	98
ILUSTRACIÓN 17 EJEMPLO DE CONTEO DE FRECUENCIAS .....	98
ILUSTRACIÓN 18 COMBINACIONES SEGÚN OBJETO GEOMÉTRICO .....	99
ILUSTRACIÓN 19 EJEMPLO DE GRÁFICO .....	99
ILUSTRACIÓN 20 SEMIPLANO [SEM - REF] .....	100
ILUSTRACIÓN 21 DISCURSO EN EL ETM .....	101
ILUSTRACIÓN 22 OBJETIVO DE APRENDIZAJE 12 PARA SÉPTIMO BÁSICO.....	107
ILUSTRACIÓN 23 PLANOS SEMIÓTICO- INSTRUMENTAL Y EPISTEMOLÓGICO .....	108
ILUSTRACIÓN 24 ACTIVIDAD 3 PROPUESTA PARA EL MAT01 OA 14.....	110
ILUSTRACIÓN 25 ACTIVIDAD 3 PROPUESTA PARA EL MAT06 OA 12. PÁG. 110 .....	114
ILUSTRACIÓN 26 ACTIVIDAD 5 PROPUESTA PARA EL MAT 06 OA 12.....	116
ILUSTRACIÓN 27 ACTIVIDAD 2 PROPUESTA PARA MAT 07 OA 13. ....	117
ILUSTRACIÓN 28 ACTIVIDAD 1 LIBRO DEL ESTUDIANTE .....	139
ILUSTRACIÓN 29 ACTIVIDAD 2 LIBRO DEL ESTUDIANTE .....	141
ILUSTRACIÓN 30 ACTIVIDAD 2 LIBRO DEL ESTUDIANTE .....	142
ILUSTRACIÓN 31 ACTIVIDAD 3 LIBRO DEL ESTUDIANTE .....	143
ILUSTRACIÓN 32 INSTRUCCIÓN CON USO DE INSTRUMENTOS PARA LA COPIA DE UN ÁNGULO DE 45°.....	164
ILUSTRACIÓN 33 TAREA 1 GUIA DE TRABAJO N°1 .....	168

ILUSTRACIÓN 34 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, EN EL DISCURSO ORAL DE LA CLASE 1 POR CONTENIDO TRATADO. ....	170
ILUSTRACIÓN 35 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO, RECTA Y TRIÁNGULOS POR TIPO DE DISCURSO ORAL .....	171
ILUSTRACIÓN 36 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO POR TIPO DE DISCURSO ORAL. ....	172
ILUSTRACIÓN 37 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE INSTRUCCIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO. ....	173
ILUSTRACIÓN 38 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO. ....	174
ILUSTRACIÓN 39 DIBUJO A MANO ALZADA CON MEDIDA .....	176
ILUSTRACIÓN 40 CONSTRUCCIÓN MECÁNICA DE ÁNGULOS .....	177
ILUSTRACIÓN 41 TAREA 1 HOJA DE TRABAJON°2 .....	179
ILUSTRACIÓN 42 TAREA 2 HOJA DE TRABAJON°2 .....	179
ILUSTRACIÓN 43 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, EN EL DISCURSO ORAL DE LA CLASE 2 POR CONTENIDO TRATADO. ....	180
ILUSTRACIÓN 44 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO, SEGMENTO Y TRIÁNGULOS POR TIPO DE DISCURSO ORAL. ....	181
ILUSTRACIÓN 45 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO POR TIPO DE DISCURSO ORAL. ....	182
ILUSTRACIÓN 46 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE INSTRUCCIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO.183	
ILUSTRACIÓN 47 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO. ....	184
ILUSTRACIÓN 48 CONSTRUCCIÓN MECÁNICA DE UN TRIÁNGULO DADA LA MEDIDA DE SUS TRES LADOS.....	186
ILUSTRACIÓN 49 INTRODUCCIÓN A LA DESIGUALDAD TRIANGULAR .....	188
ILUSTRACIÓN 50 DESIGUALDAD TRIANGULAR.....	189
ILUSTRACIÓN 51 EXTRACTO DE LA ACTIVIDAD 1 HOJA DE TRABAJO N° 3 .....	190
ILUSTRACIÓN 52 ACTIVIDAD 2 HOJA DE TRABAJO N°3 .....	191
ILUSTRACIÓN 53 ACTIVIDAD 3 HOJA DE TRABAJO N°3 .....	191
ILUSTRACIÓN 54 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, EN EL DISCURSO ORAL DE LA CLASE 3 POR CONTENIDO TRATADO .....	192
ILUSTRACIÓN 55 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO, SEGMENTO Y TRIÁNGULOS POR TIPO DE DISCURSO ORAL .....	193
ILUSTRACIÓN 56 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO POR TIPO DE DISCURSO ORAL. ....	194
ILUSTRACIÓN 57 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE INSTRUCCIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO. ....	195

ILUSTRACIÓN 58 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO. ....	196
ILUSTRACIÓN 59 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE INSTRUCCIÓN REALIZADA PARA EL TRATAMIENTO DEL SEGMENTO. ....	197
ILUSTRACIÓN 60 ACTIVIDAD 1 HOJA DE TRABAJO N°4 .....	198
ILUSTRACIÓN 61 ACTIVIDAD 2 HOJA DE TRABAJO N°4 .....	199
ILUSTRACIÓN 62 ACTIVIDAD 3 HOJA DE TRABAJO N°4 .....	200
ILUSTRACIÓN 63 ACTIVIDAD 4 HOJA DE TRABAJO N°4 .....	201
ILUSTRACIÓN 64 ACTIVIDAD 5 HOJA DE TRABAJO N°4 .....	202
ILUSTRACIÓN 65 ACTIVIDAD 6 HOJA DE TRABAJO N°4 .....	203
ILUSTRACIÓN 66 ACTIVIDAD 7 HOJA DE TRABAJO N°4 .....	204
ILUSTRACIÓN 67 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, EN EL DISCURSO ORAL DE LA CLASE 4 POR CONTENIDO TRATADO. ....	205
ILUSTRACIÓN 68 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO, SEGMENTO Y TRIÁNGULOS POR TIPO DE DISCURSO ORAL. ....	206
ILUSTRACIÓN 69 TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS, PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO POR TIPO DE DISCURSO ORAL. ....	207
ILUSTRACIÓN 70 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO EN SEGUNDOS POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO. ....	208
ILUSTRACIÓN 71 EJEMPLIFICANDO A TRAVÉS DE INSTRUMENTOS GEOMÉTRICOS .....	213
ILUSTRACIÓN 72 DEFINICIÓN DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES A TRAVÉS DE INSTRUMENTOS GEOMÉTRICOS .....	214
ILUSTRACIÓN 73 HOJA DE TRABAJO CLASE 2 .....	216
ILUSTRACIÓN 74 CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS .....	216
ILUSTRACIÓN 75 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL PARA EL TRATAMIENTO DE CADA CONTENIDO .....	218
ILUSTRACIÓN 76 TIEMPO UTILIZADO PARA EL TRATAMIENTO DE CADA CONTENIDO SEGÚN EL TIPO DE DISCURSO ORAL .....	219
ILUSTRACIÓN 77 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL DEL TRATAMIENTO DE TRIÁNGULO.....	220
ILUSTRACIÓN 78 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE DEFINICIÓN PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO .....	221
ILUSTRACIÓN 79 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO .....	222
ILUSTRACIÓN 80 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR INSTRUCCIÓN PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO .....	223
ILUSTRACIÓN 81 DESIGUALDAD TRIANGULAR A TRAVÉS DE MATERIAL CONCRETO .....	224
ILUSTRACIÓN 82 EXPLICACIÓN CONCEPTO DESIGUALDAD TRIANGULAR .....	227
ILUSTRACIÓN 83 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL POR CADA CONTENIDO.....	231
ILUSTRACIÓN 84 TIEMPO UTILIZADO PARA EL TRATAMIENTO DE CADA ELEMENTO SEGÚN EL TIPO DE DISCURSO ORAL .....	231
ILUSTRACIÓN 85 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL DEL TRATAMIENTO DE TRIÁNGULO.....	232
ILUSTRACIÓN 86 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR TIPO DE INSTRUCCIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO....	233

ILUSTRACIÓN 87 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN REALIZADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO .....	234
ILUSTRACIÓN 88 PORCENTAJE DE TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE DEFINICIÓN REALIZADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO .....	235
ILUSTRACIÓN 89 CONSTRUCCIÓN DE UN SEGMENTO CON ARTEFACTO GEOMÉTRICO .....	236
ILUSTRACIÓN 90 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL POR CADA CONTENIDO.....	239
ILUSTRACIÓN 92 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL DEL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO .....	241
ILUSTRACIÓN 93 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE DEFINICIÓN REALIZADA PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO	242
ILUSTRACIÓN 94 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO .....	243
ILUSTRACIÓN 95 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR TIPO DE INSTRUCCIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO ...	244
ILUSTRACIÓN 96 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL POR CADA CONTENIDO.....	248
ILUSTRACIÓN 97 TIEMPO UTILIZADO PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO Y TRIÁNGULO POR TIPO DE DISCURSO ORAL.....	249
ILUSTRACIÓN 98 TIEMPO UTILIZADO EN EL DISCURSO ORAL DEL TRATAMIENTO DE TRIÁNGULO.....	250
ILUSTRACIÓN 99 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE EJEMPLIFICACIÓN REALIZADA PARA EL TRATAMIENTO DEL ÁNGULO .....	251
ILUSTRACIÓN 100 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR EL TIPO DE EXPLICACIÓN REALIZADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO .....	252
ILUSTRACIÓN 101 PORCENTAJE DEL TIEMPO UTILIZADO POR TIPO DE INSTRUCCIÓN DADA PARA EL TRATAMIENTO DEL TRIÁNGULO..	253

## Índice de tablas

TABLA 1	40
TABLA 2	65
TABLA 3	75
TABLA 4	76
TABLA 5	81
TABLA 6	85
TABLA 7	87
TABLA 8	93
TABLA 9	95
TABLA 10	96
TABLA 11.	118
TABLA 12	132
TABLA 12	146
TABLA 13	150
TABLA 14	153
TABLA 16	175
TABLA 17	185
TABLA 18	198
TABLA 18	212
TABLA 20	223
TABLA 21	236
TABLA 22	245
TABLA 23	262
TABLA 24	264
TABLA 25	266

## Introducción

---

La reforma de la enseñanza de las matemáticas se inicia a partir de los años setenta en los países desarrollados, sin embargo, en Chile comienza a mediados de los años noventa. El cambio que conlleva es profundo, desde un modelo tradicional con énfasis en la enseñanza entendida como instrucción, donde el profesor tiene todo el protagonismo, a un modelo con un enfoque en la construcción de los aprendizajes teniendo como actor principal al estudiante. En este escenario el docente tiene un rol fundamental. Chevallard (1998) señala que el profesor tiene la tarea de transformar el saber escolar en saber enseñado, disponiendo de numerosas variables didácticas que le permiten organizar la situación de aprendizaje. Las decisiones que éste tome tendrán consecuencias en los aprendizajes que adquieran sus estudiantes y en consecuencia en las concepciones que ellos van a forjar.

En este contexto, resulta importante investigar las formas de implementar el proceso de enseñanza y aprendizaje específicamente en la geometría y en lo particular en los triángulos, objeto observado en clases de séptimo básico en el curriculum chileno. Se decide observar este nivel, puesto que mediciones estandarizadas nacionales evalúan los cursos de segundo, cuarto, sexto y octavo básico, y las pruebas internacionales como PISA, que evalúa primero medio (fuera del rango de interés de estudio) y TIMSS que evalúa cuarto y octavo básico. Por lo tanto, observar séptimo básico aporta con información relevante para analizar al profesor en el ejercicio de sus clases, en torno a un objeto de estudio y las secuencias de aprendizajes planificadas por el profesor.

En el acompañamiento a los profesores en su trabajo de aula, se ha observado que el tipo de actividades matemáticas que privilegian para el tratamiento de la geometría son ejercicios, es decir, desarrollo y cálculo de algoritmos que frecuentemente encuentran en los textos

escolares. (Preiss, Larraín y Valenzuela, 2011; Preiss, San Martín, Alegría, Espinoza, Nuñez y Ponce, 2011 y Claro, Preiss, San Martín, Jara, Hinostraza, Valenzuela y Nussbaum, 2012).

Esta investigación centra su interés en determinar el espacio de trabajo matemático de referencia e idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile, para ello se organiza su presentación de la siguiente manera.

En el primer capítulo se muestran los antecedentes de contextualización e introducción a la problemática de investigación, ordenándolo en seis partes. En la primera, se presenta la contextualización de cómo se organiza la estructura del sistema educativo chileno. En la segunda, se abordan las reformas para alcanzar una educación de calidad con estándares internacionales. En la tercera, se presentan los antecedentes históricos de la educación chilena, la construcción de un marco curricular con enfoque constructivista, los niveles educativos y tipos de profesores que se encuentran en ejercicio. En la cuarta parte, se describe el Marco para la Buena Enseñanza, documento oficial que especifica los criterios observados en el desempeño del docente. En la quinta parte, se dan a conocer los resultados de aprendizaje de la educación chilena según pruebas estandarizadas, tanto en el ámbito nacional como internacional. Estos resultados muestran el bajo rendimiento alcanzado por los estudiantes y la brecha de desigualdad socioeconómica existente. Para finalizar, en la sexta parte, se explicita la motivación que inspira esta investigación a partir de la observación de los débiles conocimientos y prácticas pedagógicas en el ámbito de la geometría, en particular el objeto triángulo, tanto por profesores en formación como por docentes en ejercicio. La reflexión elaborada destaca ciertos elementos que permiten delimitar el alcance que presenta esta investigación.

El capítulo dos, presenta el marco teórico y los objetivos de esta investigación. Se considera como enfoque teórico central el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) desarrollado por

Kuzniak (2011), que amplía la noción del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) creado por Houdement y Kuzniak, (1996, 1999, 2006), puesto que el ETM permite describir y caracterizar el trabajo geométrico realizado por el profesor en el aula. Se aborda la concepción de tarea matemática entregada por Sierpinska (2004). Esta tarea geométrica, bajo la mirada del ETM presenta dos dimensiones: una cognitiva y una epistemológica, conteniendo entre ambos niveles seis componentes que integran trabajos de Duval (1993, 1995, 2003), Pierce (1975), Rabardel (1995) y Balacheff (1987). Con el desarrollo y evolución de esta teoría, emergen los planos verticales y sus génesis que articulan el Espacio de Trabajo Matemático. Se finaliza el capítulo con la exposición de los objetivos, tanto general como los tres específicos, que contempla este estudio.

El capítulo 3, está dedicado a la descripción metodológica de la investigación. Él cual se organiza en dos secciones. En la primera sección, titulada “Tipo de investigación”, se define y describe la investigación expo-facto, la cual corresponde al tipo no experimental y de carácter observacional. Este tipo de investigación se rige por el criterio de realidad, pues se asume que la intención es observar una situación o fenómeno sin intervención de los observadores, captando la realidad tal cual ocurre. La segunda sección de este capítulo, llamada “Método”, se articula en cinco puntos: Participantes, Diseño, Instrumentos, Procedimientos y Análisis.

El capítulo 4, aborda el estudio del Espacio de Trabajo Matemático de referencia de los triángulos que presenta el currículum nacional chileno, el cual se constituye a partir de dos instancias: la primera a partir de las bases curriculares, elaboradas por el Mineduc, en donde se encuentran los objetivos de aprendizaje del currículum nacional, que obligatoriamente deben ser tratados en cada uno de los años de escolaridad. La segunda instancia se conforma desde las mismas bases curriculares, en donde posteriormente se elaboran los programas de estudio a partir de éstas.

El capítulo 5, caracteriza el espacio de trabajo geométrico idóneo potencial de los textos escolares utilizados por los casos de estudio. Para lo anterior, se contempla el análisis de las actividades que abordan la enseñanza de los triángulos presentes en los textos escolares de séptimo básico utilizados por Sayén quien es profesora básica con mención en matemática y la profesora Ailén quien es especialista en matemática.

El capítulo 6 se denomina Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo en las clases de Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos. En este capítulo se presenta el análisis de las secuencias de clases implementadas por Ailén y Sayén.

El capítulo 7 se denomina Conclusiones y proyecciones, este capítulo se estructura en tres partes. En la primera se presentan los hallazgos de este estudio, estos se exponen a la luz de los objetivos trazados, en orden de aparición los tres objetivos específicos concluyendo con el objetivo general. Por su parte, la segunda parte relata las limitaciones de esta investigación y la tercera, señala las proyecciones que yacen a partir de la presente investigación.

## Primera parte: Contextualización

---

La primera parte de la presente tesis, abarca desde el capítulo uno hasta el tres para articular lo denominado “contextualización”.

El capítulo 1 corresponde al Planteamiento del problema, el cual se estructura en seis partes. En la primera, se presenta la contextualización de cómo se organiza la estructura administrativa del Sistema educativo chileno. En la segunda, se habla de las reformas para alcanzar una educación de calidad con estándares internacionales. En la tercera, se abordan los antecedentes históricos, la construcción de un marco curricular, niveles educativos y tipos de profesores que se encuentran en ejercicio en el sistema educacional chileno. En la cuarta, se describe el Marco para la Buena de la Enseñanza. En la quinta, se dan a conocer los resultados de aprendizaje de Chile, según pruebas estandarizadas, tanto en el ámbito nacional como internacional. Para finalizar, se explicita la motivación que inspira esta investigación.

El capítulo 2 presenta el marco teórico y los objetivos que sustentan esta investigación. El marco de referencia considera como enfoque teórico principal el de los Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Matemático (ETM), el cual amplía el concepto de Espacio de Trabajo Geométrico (ETG). Para finalmente exponer el objetivo general relacionado con la determinación del Espacio de Trabajo Matemático de referencia e idóneo en torno a triángulos en séptimo básico. De ello se desprenden los objetivos específicos que se organizan en tres niveles debido a la distinta naturaleza de las actividades realizadas.

El capítulo 3 presenta la metodología de investigación, el cual se organiza en dos secciones. En la primera, titulada “Tipo de investigación” se define y describe la investigación *expo-*

*facto* y la segunda sección de este capítulo, llamada “Método”, se articula en cinco puntos: Participantes, Diseño, Instrumentos, Procedimientos y Análisis.

## Capítulo 1: Planteamiento del problema

Este capítulo se estructura en seis partes. En la primera, se presenta la contextualización de cómo se organiza la estructura administrativa del Sistema educativo chileno. En la segunda parte, se habla de las reformas para alcanzar una educación de calidad con estándares internacionales. En la tercera, se abordan los antecedentes históricos de la educación chilena presentando la descentralización de la administración, la construcción de un marco curricular con enfoque constructivista, los niveles educativos y tipos de profesores que se encuentran en ejercicio. En la cuarta parte, se describe el Marco para la Buena de la Enseñanza, documento oficial que especifica los criterios observados en el desempeño del docente. En la quinta parte, se dan a conocer los resultados de aprendizaje de la educación chilena según pruebas estandarizadas, tanto en el ámbito nacional como internacional. Estos resultados muestran el bajo rendimiento alcanzado por los estudiantes y la brecha de desigualdad socioeconómica existente. Para finalizar, se explicita la motivación que inspira esta investigación a partir de la observación de los débiles conocimientos y prácticas pedagógicas en el ámbito de la geometría, en particular el objeto triángulo, tanto por profesores en formación como por docentes en ejercicio. La reflexión elaborada destaca ciertos elementos que permiten delimitar el alcance que presenta esta investigación.

### 1.1 Estructura del Sistema educativo chileno

El Estado de Chile está comprometido a nivel nacional e internacional en la generación de políticas y marcos legales para hacer efectivo el derecho universal a la educación que tienen todos los niños y niñas (Unicef, 1948). El derecho universal a la educación y a la libre enseñanza está resguardado en la Constitución política de la República. Por ende, es deber

del Estado asegurar el acceso a una educación de calidad con equidad para todos los estudiantes del país. Para ello, el año 2011 se crea el Sistema de Aseguramiento de Calidad de la Educación (SAC) por medio de la Ley N°20.529, que suma a los organismos ya existentes: Ministerio de Educación (Mineduc) y Consejo de Educación, dos nuevas instituciones, la Agencia de la Calidad de la Educación y la Superintendencia de Educación, consignando labores como la evaluación integral, la fiscalización pertinente y el apoyo y orientación constante a los establecimientos educacionales.

El Mineduc es el órgano rector del SAC, encargado de diseñar e implementar las políticas educacionales para todo el sistema educativo. La Agencia de Calidad tiene como fin evaluar los logros de aprendizaje, indicadores de desarrollo personal y social y el desempeño de las escuelas. La Superintendencia, tiene la tarea de fiscalizar el uso de recursos y el cumplimiento de la normativa educacional. Y, por último, el Consejo Nacional de Educación revisa y aprueba el currículum y el Plan Nacional de Evaluación, entre otras tareas.

## 1.2 Sistema de Desarrollo Nacional Profesional Docente

La actual Reforma Educacional crea, por medio de la Ley n° 20.903, el Sistema de Desarrollo Nacional Profesional Docente. En él se establecen transformaciones para dar solución e intervenir en materias propias de la profesión docente, reconocer la docencia, apoyar su ejercicio y aumentar su valoración. Así, se considera entre su labor la coordinación con la Agencia de Calidad de la Educación, la Superintendencia de Educación y el Consejo Nacional de Educación para asegurar que todos los aspectos que se estipulan en la ley cumplan con el objetivo de consolidar el rol de la profesión docente.

Bajo el objetivo de fortalecer la profesión docente y contribuir a la calidad de la educación, se lleva a cabo el Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente. Esta evaluación es de carácter obligatorio para los docentes de aula que se desempeñan en

establecimientos de dependencia municipal a lo largo del país. La Evaluación Docente está a cargo del Mineduc, a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP). Para su ejecución, el Mineduc ha encargado la asesoría técnica del Centro de Medición de la Universidad Católica de Chile (MIDE UC). En este centro se constituye el Equipo de Docentemas, responsable de desarrollar distintas acciones y materiales que requiere el proceso de evaluación, tanto en sus aspectos técnicos como operativos. (Docentemas, 2017)

Los docentes son evaluados a través de cuatro instrumentos (Autoevaluación, portafolio, entrevista realizada por un evaluador par e informes de “referencias de terceros”) que recogen información directa de su práctica, la visión que el propio evaluado tiene de su desempeño, la opinión de sus pares y la de sus superiores jerárquicos. Las respectivas evidencias, son analizadas por medio del Marco de la Buena Enseñanza (MBE), que provee un conjunto de criterios para cada dominio de la profesión docente.

De los cuatro instrumentos de evaluación, es mediante el portafolio, que cada docente evaluado da a conocer el desempeño profesional en el aula misma. Por ende, es en éste donde se reúnen materiales que dan cuenta de las prácticas pedagógicas, como de las reflexiones que están detrás de las decisiones que los docentes deben tomar en su diario accionar. El portafolio está compuesto por tres módulos: planificación, evaluación y reflexión, clase grabada y trabajo colaborativo. El módulo dos, clase grabada, corresponde a la evidencia del desempeño profesional a través de una grabación correspondiente a una clase de aproximadamente cuarenta minutos y a la ficha descriptiva de ésta.

Mediante la evaluación docente, se conocen los niveles de desempeño alcanzados por los docentes, que corresponden a los siguientes:

**Destacado:** Indica un desempeño profesional que clara y consistentemente sobresale con respecto a lo que se espera en el indicador evaluado. Suele manifestarse por un amplio repertorio de conductas respecto a lo que se está

evaluando, o bien, por la riqueza pedagógica que se agrega al cumplimiento del indicador.

Competente: Indica un desempeño profesional adecuado. Cumple con lo requerido para ejercer profesionalmente el rol docente. Aun cuando no es excepcional se trata de un buen desempeño. (Desempeño mínimo esperado).

Básico: Indica un desempeño profesional que cumple con lo esperado en el indicador evaluado, pero con cierta irregularidad (ocasionalmente).

Insatisfactorio: Indica un desempeño que presenta claras debilidades en el indicador evaluado y éstas afectan significativamente el quehacer docente. (Docentemas, 2017)

En relación al análisis de los videos presentes en la evaluación docente, Araya y Dartnell (2009) analizaron clases de segundo ciclo de enseñanza básica y media, concluyendo que en ellas hay una baja promoción de habilidades complejas y razonamiento matemático, no observando promoción de habilidades deductivas, y rara vez se incluyen demostraciones de contenidos trabajados. Otro estudio realizado en una muestra de ciento diecisiete clases de matemáticas de segundo ciclo básico, revela que el trabajo matemático de los profesores chilenos se basa en la presentación de procedimientos y definiciones que los estudiantes deben practicar posteriormente (Preiss, 2010). Dos estudios adicionales realizados con submuestras dan cuenta de una escasa participación de los estudiantes y seguimientos de bajo potencial metacognitivo (Radovic y Preiss, 2010) y que el habla pública de los profesores se focaliza mayormente en el entrenamiento de destrezas y procedimientos matemáticos mecánicos (Preiss, Larraín y Valenzuela, 2011). Hallazgos similares han sido observados en primer ciclo básico. Un estudio realizado con ciento veinte casos de proceso de evaluación docente del año 2007 de este ciclo de enseñanza mostró que la enseñanza de las matemáticas descansa en la práctica repetida de un grupo de problemas generalmente sacados de textos o guías, los cuales son por lo general trabajados de modo privado (Preiss, San Martín, Alegría, Espinoza, Nuñez & Ponce, 2011).

Finalmente, un estudio realizado por el Fondo de investigación y Desarrollo en Educación (Fonide, 2015) concluye que profesores de séptimo y octavo básico de nivel *destacado*, promueven estrategias de metacognición o la autorregulación de manera limitada, siendo las situaciones de protagonismo de los estudiantes bastante acotadas en frecuencia, duración y repertorio.

Dado lo anterior, el rol que el profesor cumple en el desarrollo y logro de los objetivos de aprendizaje es fundamental, tanto en lo que respecta a sus conocimientos, como también en lo que refiere a las instancias que genera dentro del aula para lograr el aprendizaje deseado en los estudiantes, ya que el docente es considerado el articulador del conocimiento oficial institucionalizado y de quien el alumno busca constantemente aprobación (Castorina, Ferreiro, Kobl de Oliveira y Lerner, 1996). Por lo tanto, contribuir al desarrollo de ciudadanos con un pensamiento crítico y autónomo, mediante la formación integral de los alumnos, desarrollando sus capacidades de acuerdo a los conocimientos, habilidades y actitudes definidos en las bases curriculares, es una de las tareas latentes por las que se encamina la educación en Chile. Desde allí, se declara como una preocupación permanente del Estado chileno desarrollar políticas públicas que garanticen la calidad de la educación conforme a los estándares internacionales.

A continuación, se ahonda en dos aspectos que dan relevancia a la investigación. Por un lado, se presenta la realidad institucional nacional comparada con las mediciones internacionales, y por el otro la motivación del presente estudio.

### 1.3 Antecedentes históricos de la educación en Chile

El sistema escolar chileno tiene históricamente un carácter muy centralizado, en el sentido que el Estado cumple un rol fundamental en su prestación, así como en la determinación de sus orientaciones y metas. En la década de los 80' durante el Gobierno Militar, la tradición se rompe abruptamente con la aplicación de una reforma educacional descentralizada y privatizadora. En este marco, el Estado pasó a tener un rol subsidiario, siendo el mercado el principal ente regulador de las actividades en el ámbito educacional. A partir de esta Reforma acontecen tres situaciones importantes: se descentraliza su administración, se cambió la modalidad de financiamiento y se promueve la adecuación del currículum nacional a las diferentes realidades.

La educación pública quedó a cargo de las Municipalidades, los profesores dejaron de ser empleados públicos dependientes del Mineduc para formar parte de las Corporaciones Municipales de cada comuna. Se incentivó la creación de colegios privados con financiamiento estatal, otorgando subsidios basados en el número de alumnos matriculados. El sistema de educación pasó a ser de naturaleza mixta, incluyendo una de propiedad y administración del Estado o sus órganos, y otra particular, sea ésta subvencionada o pagada, asegurándose a los padres y apoderados la libertad de elegir el establecimiento educativo para sus hijos. Quedando así, tres tipos de dependencias educacionales: municipalizados, subvencionados (con aporte del estado) y privados.

Con el advenimiento de la democracia, a mediados de los años noventa, el Ministerio de Educación plantea una nueva Reforma educativa a nivel curricular, pero manteniendo los tipos de administración de establecimientos educacionales. Inspirado en el enfoque constructivista, este nuevo Marco Curricular se organiza a partir de aprendizajes esperados, contenidos mínimos obligatorios y objetivos transversales que deben abordarse en la educación escolar. A partir de ellos se elaboraron los programas de estudio para cada curso con las sugerencias para el tratamiento de ellos.

La última gran reforma educacional, corresponde a la promulgación de la Ley General de Educación (LGE) en el año 2009. Esta norma fue dictada en reemplazo de la Ley N° 18.962, Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE) de 1990. Esta ley tiene por finalidad regular los derechos y deberes de los integrantes de la comunidad educativa; fijar los requisitos mínimos que deben exigirse en cada uno de los niveles educacionales, regular el deber del Estado de velar por su cumplimiento, y establecer los requisitos y proceso para el reconocimiento oficial de los establecimientos e instituciones educacionales de todos los niveles, con el objetivo de tener un sistema educativo caracterizado por la equidad y calidad de su servicio.

El artículo 17 de la LGE declara que la educación formal o regular está organizada en cuatro niveles: parvularia (3 meses-5 años), básica (6 a 14 años), media (15 a 18 años) y superior (sobre 18 años). La Educación General Básica (EGB) corresponde al primer nivel educacional obligatorio declarado constitucionalmente en la República de Chile, desde la reforma emanada en mil novecientos sesenta y cinco (1965). Y comprende ocho años de estudio, articulados en dos ciclos de cuatro cursos cada uno: EGB ciclo I, 1°, 2°, 3° y 4°; y EGB ciclo II, 5°, 6°, 7° y 8°. En ella, se proporciona la educación formal mínima que debe adquirir cada estudiante según lo establecido en las Bases Curriculares, promoviendo aprendizajes y conocimientos variados de las áreas humanistas, científicas y artísticas.

La LGE establece en el artículo 8° que, a partir del año 2018, la duración de los años de educación básica y media corresponderá a lo denominado  $6 + 6$ , es decir, 1° a 6° educación básica y 7°, 8° y 1° a 4° medio de educación media. Sin embargo, dadas las diversas problemáticas para la implementación de tal medida, es que se incorpora en el año 2017 un proyecto de ley que modifica el artículo mencionado para dar fecha de inicio el año 2027. Por ende, en la incertidumbre que acontece y en la preparación hacia el cambio, es que, en el segundo ciclo de EGB, es posible encontrar tres categorías de profesores en ejercicio:

- 1 Profesores de matemáticas: profesionales formados para desempeñarse en establecimientos educacionales que imparten clases en educación secundaria e instituciones de educación superior (Institutos profesionales y centros de formación técnica)
- 2 Profesores de Educación Básica con mención en Matemáticas: profesionales con especialización en el área de la matemática o en otra área del saber disciplinar, que lo habilita para ejercer la profesión docente de su especialización hasta segundo ciclo de EGB.
- 3 Profesores de Educación Básica sin especialización: Profesional formados para desempeñarse en todas las áreas requeridas en la Educación Primaria, pero sin especialización en matemática, esta categoría va en declive.

Los profesores, a partir de la actual Reforma Educacional, impulsada el año 2014 por medio de la Ley n°20.903 que crea el Sistema de Desarrollo Nacional Profesional Docente, que lleva a cabo el Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente, donde los profesores se someten a una evaluación mediante cuatro instrumentos que dan cuenta de su labor profesional mediante los criterios establecidos en el Marco para la Buena Enseñanza.

#### 1.4 Marco para Buena Enseñanza en Chile

En el año 2003 el Mineduc establece el Marco para la Buena Enseñanza, cuyo objetivo es normar el quehacer de los profesores con indicaciones más focalizadas para el desempeño de su docencia. Además de “representar todas las responsabilidades de un profesor en el desarrollo de su trabajo diario, tanto las que asume en el aula como en la escuela y su comunidad, que contribuyen significativamente al éxito de un profesor con sus alumnos” (Mineduc, 2003, p. 7).

Este contiene cuatro dominios en donde cada uno de ellos hace referencia a un aspecto distinto de la enseñanza: (Mineduc, 2003).

Dominio A: Preparación de la enseñanza.

Dominio B: Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje.

Dominio C: Enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes.

Dominio D: Responsabilidades profesionales.

Cada dominio hace referencia a un aspecto distinto de la enseñanza, en donde en relación a esta investigación, nos enfocaremos específicamente algunos aspectos de los dominios A y C, puesto que para el dominio A se identifican tanto la disciplina que enseña el profesor o profesora, como a los principios y competencias pedagógicas necesarios para organizar el proceso de enseñanza, principalmente en lo que respecta al dominio del profesor/a del marco curricular nacional; es decir, de los objetivos de aprendizaje y contenidos definidos por dicho marco, entendidos como los conocimientos, habilidades, competencias, actitudes y valores que sus alumnos y alumnas requieren alcanzar para desenvolverse en la sociedad actual, mediante el criterio A.1 “Domina los contenidos de las disciplinas que enseña y el marco curricular nacional”.

En tal sentido, el profesor/a debe poseer un profundo conocimiento y comprensión de las disciplinas que enseña y de los conocimientos, competencias y herramientas pedagógicas que faciliten una adecuada mediación entre los contenidos, los estudiantes y el respectivo contexto de aprendizaje (Mineduc, 2003), ya que cuando el conocimiento del profesor es rico, integrado y accesible, tienden a enseñar los contenidos de manera más dinámica utilizando formas más variadas y responden de manera más profunda y completa a las preguntas de los estudiantes (Brophy, 1991).

Asimismo, para el dominio C se declara que especial relevancia adquieren en este ámbito las habilidades del profesor para organizar situaciones interesantes y productivas que aprovechen el tiempo para el aprendizaje en forma efectiva y favorezcan la indagación, la

interacción y la socialización de los aprendizajes (Mineduc, 2003), es decir, el criterio C.2 “Las estrategias de enseñanza son desafiantes, coherentes y significativas para los estudiantes” y C.3 “El contenido de la clase es tratado con rigurosidad conceptual y es comprensible para los estudiantes”. Desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas (DDM), lo anterior se entiende como la transformación que realiza el profesor del saber enseñado en un saber aprendido, que corresponde al cuarto acto de la transposición didáctica según Chevallard (1998), en donde el actor es el profesor, quién debe administrar “el saber escolar”, adaptar a sus conocimientos los objetos a enseñar y organizarlos en el tiempo. Se trata de una transposición interna, ya que es él, el responsable de cada una de las decisiones tomadas respecto al qué y cómo aprenderán sus estudiantes, ya que estas decisiones tendrán consecuencias en el saber que adquirirán los alumnos y en las concepciones que ellos se van a forjar.

Resumiendo, son tres los criterios estudiados en esta investigación. Del dominio de “Preparación de la enseñanza” se trabaja el criterio *A.1: Domina los contenidos de las disciplinas que enseña y el marco curricular*. Y del dominio “Enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes” se abordan los criterios *C.2: Las estrategias de enseñanza son desafiantes, coherentes y significativas para los estudiantes*, y *C.3: El contenido de la clase es tratado con rigurosidad conceptual y es comprensible para los estudiantes*.

Si bien, esta investigación no presenta su foco en la persona que aprende, el saber de los estudiantes, es también, plasmado y analizado en pruebas estandarizadas, que permiten medir lo aprendido en ciertas áreas de interés, ya sea para estudiar la realidad nacional, como para comparar con el acontecer internacional. No obstante, los resultados aportan antecedentes significativos respecto al desempeño de los alumnos chilenos, y por ende, de las prácticas de los docentes, que conllevan un sin fin de decisiones respecto a las secuencias de aprendizajes diseñadas.

## 1.5 Resultados de aprendizajes de la Educación chilena, según pruebas estandarizadas

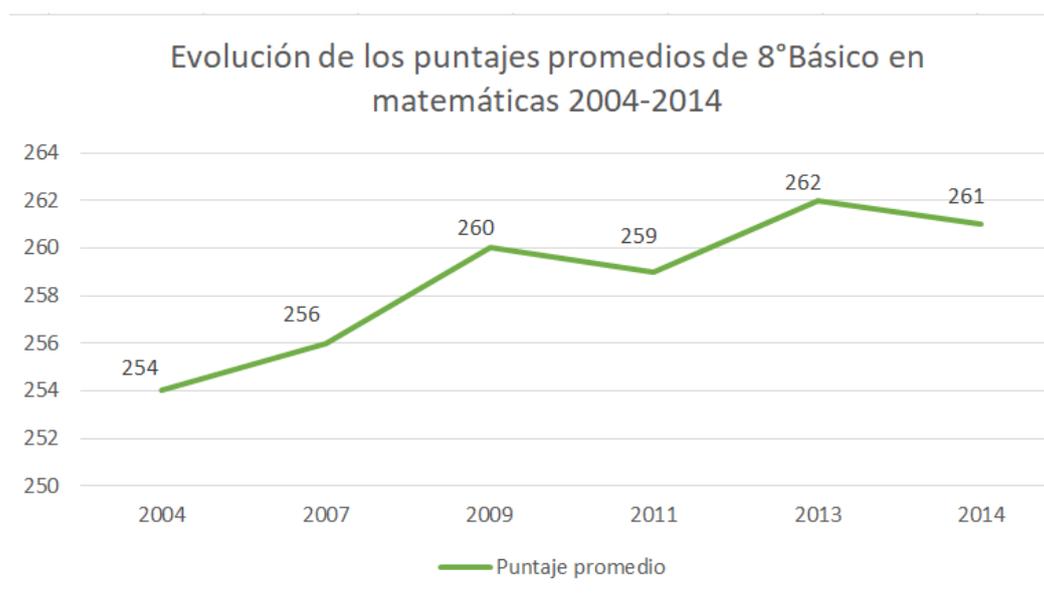
Como se ha mencionada anteriormente, esta investigación se centra en la toma de decisiones que los docentes chilenos plasman en la enseñanza de la geometría, es necesario presentar, por lo tanto, los resultados de las pruebas estandarizadas, tanto nacional (SIMCE) como internacionales (PISA y TIMSS), que nos permitan obtener una visión de cómo repercuten dichas decisiones de los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y cómo estas son evaluadas respecto de las mediciones nacionales e internacionales.

### 1.5.1 Sistema Nacional de Evaluación: SIMCE

Desde el año 2012, la prueba Simce pasó a ser el sistema de evaluación que la Agencia de Calidad de la Educación utiliza para evaluar los resultados de aprendizaje de los establecimientos, evaluando el logro de los contenidos y habilidades del currículo vigente en diferentes asignaturas o áreas de aprendizaje, a través de una medición que se aplica a todos los estudiantes del país que cursan los niveles evaluados (Agencia de la calidad, 2017). El gráfico presentado en la ilustración 1 indica la evolución de los puntajes promedios en el área matemática en los últimos trece años, aplicados a alumnos que cursaron octavo Básico.

El gráfico que se presenta a continuación, indica la evolución del promedio de los puntajes a nivel nacional obtenidos por los estudiantes que cursaron 8° Básico, de las últimas siete aplicaciones en el periodo transcurrido de trece años, en el área matemática. La clasificación de los resultados obtenidos del rendimiento Simce, de acuerdo al informe técnico 2014, se estratifica en tres rangos, llamados estándares de aprendizajes, siendo el primero el nivel insuficiente, donde se encuentran todos los puntajes inferiores a 247 puntos, el segundo nivel corresponde al elemental cuyo rango varía entre puntajes mayores o iguales a 247 y

menores a 297 puntos. Finalmente, el tercer nivel recae en aquellos puntajes mayores o iguales a 297 puntos, que se denomina nivel adecuado.



*Ilustración 1 Evolución de los puntajes promedios de 8° Básico en matemáticas.*

*Fuente: Gráfico adaptado del informe de resultados educativos 2014, publicado por la Agencia de Calidad de la Educación Chilena*

Por consiguiente, al ser observados estos resultados, no se presenta una variación significativa en el transcurso de los años, manteniéndose en nivel elemental los resultados promedios de los estudiantes.

Si bien, en los resultados obtenidos por los estudiantes inciden un número cuantioso de factores, existe uno en particular que es relevante para esta investigación, ya que, en concordancia con lo que señala Henríquez (2014) en su investigación, y de acuerdo a las orientaciones para profesores según los tópicos que SIMCE evalúa, es posible afirmar que la información que se entrega al profesor y las transposiciones que este desarrollará en relación a dichas orientaciones se presentan de un modo limitado, pues no se especifica en profundidad el tipo de tareas que se evalúan y las habilidades involucradas; por ejemplo, sobre uso de herramientas, el tipo de razonamiento discursivo que se debe favorecer, los procesos de prueba y de visualización, y la posibilidad de coordinarlos (Mineduc, 2009).

Otro aporte significativo que realiza el SIMCE, corresponde al análisis de la brecha de desigualdad que se presenta año tras año entre los colegios de distinta administración. El informe de Metodología de construcción de grupos socioeconómicos prueba Simce 2013, retrata a una sociedad que se divide en cinco grupos según características socioeconómicas declaradas por las familias mediante el cuestionario padres y apoderados entregado de manera paralela a las evaluaciones disciplinares del Simce. Dichas características se presentan en la siguiente tabla:

**Tabla 1**

*Caracterización de los Grupos socioeconómicos en Chile.*<sup>1</sup>

Grupo Socioeconómico	Promedio de años de esc. de la madre	Promedio de años de esc. del padre	Ingreso promedio del hogar	Índice de vulnerabilidad
Bajo	8 años	8 años	\$167.857 (227 €) <sup>2</sup>	89%
Medio-Bajo	10 años	10 años	\$248.797 (336 €)	72%
Medio	12 años	12 años	\$385.655 (521 €)	52%
Medio-Alto	14 años	14 años	\$765.028 (1.034 €)	26%
Alto	16 años	17 años	\$1.828.094 (2.470 €)	1% (4)

**Fuente:** Metodología de construcción de grupos socioeconómicos prueba Simce 2013. (2013), pág. 11.

Como se aprecia en la tabla 1, el grupo bajo, presenta menor promedio en los años de escolaridades de los padres, un ingreso promedio de hogar inferior al sueldo mínimo establecido a nivel nacional<sup>3</sup> y un alto índice de vulnerabilidad. Mientras que, un Grupo Socioeconómico (GSE) alto, concibe casi un nulo índice de vulnerabilidad, un ingreso promedio favorable y casi el doble de años de escolaridad de los padres que el GSE bajo. Así, la realidad, en base a lo establecido por los continuos resultados Simce (Ver ilustración 2), es que se puede afirmar que, los mejores resultados corresponden a colegios particulares,

<sup>1</sup> Si desea conocer mayor información respecto a la metodología de construcción de grupos socioeconómicos, diríjase a [http://archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca\\_digital\\_historica/metodologia/2013/gse\\_2013.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca_digital_historica/metodologia/2013/gse_2013.pdf) . Revisado el 15 febrero del 2018

<sup>2</sup> Valor euro (€) a la fecha 3 de abril del 2018, \$740

<sup>3</sup> Salario Mínimo vigente hasta el 30 de junio del 2018 corresponde a \$276.000, correspondiente a 373€

mientras que los resultados más descendidos competen a los colegios de dependencia Municipal, donde se distribuyen, por lo general, los integrantes del GSE bajo.

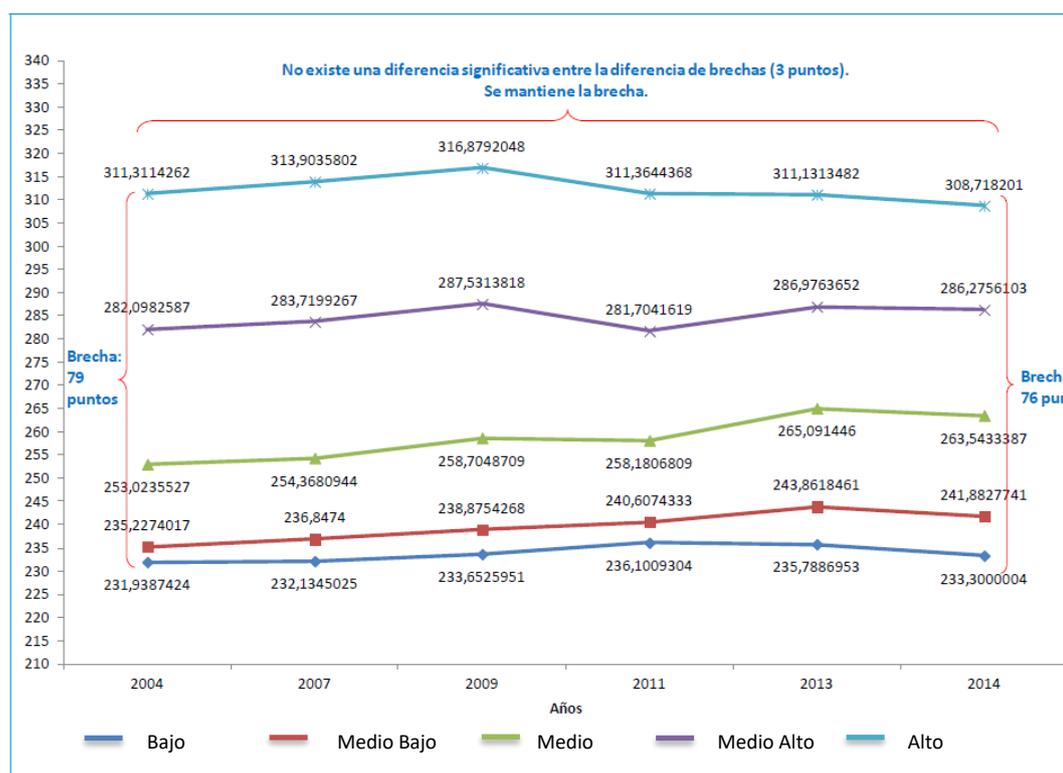


Ilustración 2 Evolución promedio puntajes matemática 8° básico Simce periodo 2004 – 2014, según GSE.  
 Fuente: Agencia de Calidad (2016). Informe técnico Simce 2014, pág. 173.

El puntaje promedio en matemáticas en los octavos años dado a conocer por la Agencia de Calidad de la Educación, tras la evaluación tomada el año dos mil quince, fue de 263 puntos. Donde se establece que el avance corresponde a diez puntos desde el dos mil cuatro, sin embargo, se estabiliza entre el dos mil trece y dos mil quince. No obstante, al considerar el periodo comprendido entre 2004-2015, la brecha de la desigualdad se mantiene con 79 puntos de diferencia entre el Grupo Socioeconómico (GSE) bajo y el GSE alto, siendo este último, el único que sobrepasa la brecha de los 300 puntos. No obstante, y de manera repetitiva esta brecha en los resultados de las pruebas estandarizadas internacionales, los mejores resultados están muy descendidos respecto al promedio de los demás países involucrados.

### 1.5.2 Programme International of Students Assessment: PISA

El programme International Of Students Assessment es realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), que busca evaluar las competencias adquiridas por los estudiantes a los quince años de edad en las áreas de matemáticas, lenguaje y ciencias. Pese a que es una prueba estandarizada aplicada a la secundaria, y que no corresponde al rango etario de la presente investigación, ésta nos da cuenta de las habilidades y aprendizajes adquiridos por los alumnos que ya han cursado los niveles en los que se centra esta investigación. Además, la prueba PISA, corrobora, desde la perspectiva internacional la brecha de desigualdad persistente en la educación chilena, concluida en el SIMCE.

En la mirada internacional, la educación chilena es una de las más avanzadas y reconocidas en Latinoamérica, logrando el primer lugar en todas las áreas de estudio (PISA<sup>4</sup>, 2012). La tasa de alfabetización supera el noventa seis por ciento (96%) de la población chilena, y siempre es el país de América del Sur mejor calificado en los informes del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). Precisamente, en el ítem de educación del informe de investigación “Más igualdad para los niños” de Unicef (2016), Chile pondera el primer lugar entre los países con menor brecha entre los buenos resultados y los malos resultados. Pero junto con ello, se informa también que los estudiantes poseen un bajo nivel de competencias necesarias para resolver ejercicios básicos de lectura, matemáticas y ciencias. De acuerdo a la base de datos de PISA (2009), el puntaje de Matemáticas es mayor mientras más alto es el nivel socioeconómico y cultural al que pertenece el estudiante y su familia. Tal como lo ratifican los resultados del informe PISA presentado en el 2016, Chile se ubica en el puesto 48 de un total de 70 países, ponderando 423 puntos en matemáticas,

---

<sup>4</sup> El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE de primero medio (15 años)

muy por debajo del promedio de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) que corresponde a 490 puntos. Así, tras una investigación cualitativa relativa a las percepciones que tienen los estudiantes chilenos de pedagogía sobre la prueba PISA, se observan algunos aspectos relacionados con posibles deficiencias en la formación docente, específicamente en lo que refiere a poder abordar las dificultades en el aprendizaje demostrado por los alumnos en este tipo de evaluaciones, por ejemplo, estrategias para la diversidad de niveles de logro de los distintos aprendizajes (Mineduc, 2009). Lo anterior permite dilucidar la perspectiva internacional de la educación chilena, y lo que es más relevante, los resultados de las prácticas docentes, ya que la efectividad en la enseñanza no depende simplemente en el conocimiento que el profesor posee, sino que también es crucial como ese conocimiento es usado en la sala de clases (Mapolelo, y Akinsola, 2015).

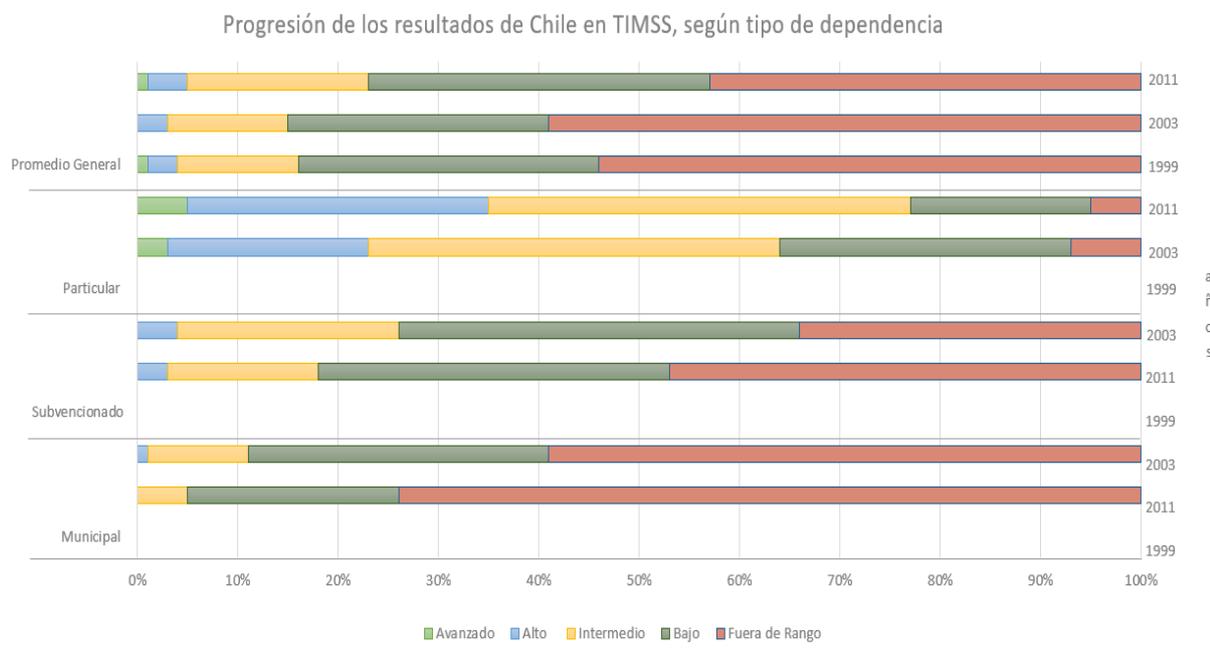
### 1.5.3 Tendencia en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias: TIMMS

La prueba TIMSS, es una evaluación de carácter curricular acerca de los conocimientos de matemática y ciencia de los estudiantes de cuarto (10 años) y octavo básico (14 años), en países alrededor de todo el mundo. Los objetivos de la prueba y los temas que cubre se explicitan en marcos de referencia que están en concordancia con la mayor parte de los currículos vigentes en los países participantes.

El siguiente gráfico (ver ilustración 3) muestra la progresión de los resultados en las tres evaluaciones en las que Chile ha participado: 1999, 2003 y 2011<sup>5</sup>. Se muestra la distribución de los estudiantes chilenos (en porcentajes de logro en cada nivel de desempeño), según la dependencia administrativa del establecimiento: municipal, particular subvencionado o particular pagado, además de una columna con los porcentajes promedio a nivel nacional.

---

<sup>5</sup> La última medición se tomó a finales del año 2015.



*Ilustración 3 Progresión de os resultados Chile en TIMSS, según tipo de dependencia.*

*Fuente: Elaboración propia (2018) a partir de los datos recopilados de información entregada en los informes TIMSS 1999, 2003 y 2011.*

En la prueba TIMSS del 2003 (Agencia de calidad de la educación, 2015) los resultados obtenidos en matemáticas por los estudiantes de los octavos básicos en Chile, muestran estar muy por debajo (387 puntos) del promedio de los estudiantes de los países participantes (467 puntos). Los estudiantes chilenos se sitúan en el ranking en la posición 38 de 46 países. El informe de la prueba TIMSS señala que el 59 % de nuestros alumnos no alcanza el estándar de desempeño más bajo. Y que los resultados más débiles están en geometría, y los mejores resultados en estadística y análisis de datos. La distribución de estudiantes de acuerdo al nivel de logro es el siguiente: 0% en el nivel avanzado (color verde en el gráfico), 3% en el nivel alto (color celeste), 12% en el nivel intermedio (color amarillo), 26% en el nivel bajo (color gris) y finalmente un 59% en el nivel inferior o fuera de rango (color rojo).

Es de relevancia acerca de la tarea docente, es que el informe TIMMS (1999) establece que “uno de cada cuatro profesores chilenos (25%) se siente con un bajo nivel de confianza en sus propias capacidades para enseñar matemáticas, proporción significativamente superior a la del resto de los países seleccionados y casi cinco veces más alta que el promedio general. Chile también cuenta con la proporción más baja –junto a Filipinas- de docentes que tienen un alto nivel de confianza en sí mismos en esta materia (14% de los docentes están en esta situación, en contraste con el 34% a nivel internacional)” (Mineduc, 2004)<sup>6</sup>

Estos resultados no muestran totalmente el nivel de conocimientos de los alumnos porque muchos de los contenidos abordados en las pruebas, no están contemplados en los programas de estudio de enseñanza básica. No obstante, lo alarmante responde a los niveles de bajo desempeño, ya sea en la prueba PISA o TIMSS. Ya que, si bien, las evaluaciones apuntan a clasificar los niveles de logro de los estudiantes, la tendencia observada en los bajos resultados nos indica que, para poder comprender esta situación, no basta solo con observar qué conocimientos poseen los estudiantes, sino que, es necesario entender este fenómeno como todos los elementos que participan. Específicamente para esta investigación y como se ha mencionado con anterioridad, es importante comprender también el rol que el docente cumple, puesto que la toma de decisiones de éste en conjunto con los conocimientos que posee, influye de manera directa en el desempeño de los estudiantes tanto a nivel nacional como internacional.

Por lo tanto, un pilar fundamental de la calidad educativa son las capacidades profesionales docentes: si los alumnos no se encuentran en sus aulas con docentes capaces de generar

---

<sup>6</sup> “Geometría y estadísticas son las sub-áreas en que los profesores se sienten menos confiados. En ambas hay tópicos donde menos de 30% de los alumnos son atendidos por profesores que se sienten muy bien preparados en ellos. En geometría estos temas son “traslación, reflexión, rotación y extensión”. En estadísticas, “probabilidad simple incluyendo el uso de datos de experimentos para estimar las probabilidades de resultados favorables” y “fuentes de error al recolectar y organizar datos”.

“En primer lugar, hay que recordar que geometría es una de las sub-áreas con menos preguntas TIMSS contempladas en el currículo chileno (58% de las preguntas de TIMSS 2003) y que ésta era todavía más baja antes de la reforma. El currículo reformado implicó un aumento en los temas tratados, por esta razón no sorprende que los profesores manifiestan sentirse poco preparados, ya que necesitan revisar lo que saben y añadir más conocimiento para poder enseñar el nuevo currículo”. (Mineduc, 2004, p. 103)

mayores oportunidades de aprendizaje, el genuino mejoramiento de la calidad educativa no se producirá. (UNESCO, 2012).

## 1.6 Motivación del Estudio

Dado lo anterior, son dos las principales motivaciones que han llevado a escoger la geometría como objeto de este estudio.

La primera motivación tiene relación con la propia experiencia en docencia universitaria en la formación inicial de profesores de educación básica, instancia a través de la cual se ha observado que los alumnos presentan débiles conocimientos geométricos, principalmente debido a su formación en la trayectoria escolar. Al comienzo de esta investigación (año 2004), el caso particular de la universidad donde desempeñé mi docencia en la formación inicial de profesores básicos, la geometría se presenta como una unidad dentro de una asignatura, lo que corresponde al 30% de los contenidos desarrollados en esta y a  $\frac{1}{6}$  de las unidades abordadas en los dos cursos de la malla curricular vigente hasta el año 2009. En ese momento los cursos tienen como propósito abordar metodologías para la enseñanza de los distintos objetos matemáticos, con la premisa que los estudiantes contaban con el conocimiento disciplinar necesario para ejercer, lo cual se observa que no era suficiente para llevar a cabo lo anterior, ya que un estudio del equipo Ecos<sup>7</sup> Chile-Francia (2004) constata un débil nivel matemático en los profesores básicos en formación inicial.

Siguiendo con la formación inicial universitaria en la universidad donde me desempeñé, a partir del año 2010, existe una nueva malla curricular que cuenta con seis asignaturas obligatorias dedicadas a la enseñanza de la matemática. Una de ellas se dedica al estudio de

---

<sup>7</sup>Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français (2006).

la geometría y su didáctica. Se espera que futuras investigaciones nos aporten sobre el impacto de estos cambios curriculares en el ejercicio docente.

Sin embargo, en esta trayectoria formativa, se observa que hasta la fecha este fenómeno se mantiene a pesar del cambio generacional en los nuevos estudiantes que ingresan a la carrera y de los cambios curriculares que el Ministerio ha impulsado desde los años 1990. Por lo tanto, siguen ingresando estudiantes con débiles conocimientos geométricos y razonamiento matemático. Un ejemplo de lo anteriormente señalado, es la propiedad de la desigualdad triangular, la cual determina las condiciones necesarias para construir un triángulo, propiedad que según el currículum nacional se estudia en sexto año de educación básica, pero que en la mayoría de los casos (85% de los estudiantes cohorte 2015), se descubre en el curso de geometría.

La segunda motivación se vincula con la experiencia en formación continua con cursos de perfeccionamiento para profesores en ejercicio realizados desde 1998. Esta instancia ha permitido tener un acercamiento al quehacer de docentes en las salas de clases, constatándose cuatro aspectos a destacar:

- 1 Al comenzar los cursos de perfeccionamiento los profesores expresan sentirse débiles en geometría, declarando en su mayoría, que en su formación inicial no se abordó como objeto de estudio.
- 2 Dado lo anterior, es decir, el bajo dominio que declaran en geometría, en la planificación de sus cursos se evidencia que los profesores planifican la enseñanza de la geometría como última unidad, por lo que su tratamiento ocurre en el mejor de los casos a fin de año.
- 3 La principal bibliografía utilizada por los profesores corresponde a los distintos textos escolares de estudio, en su mayoría los que el Ministerio envía a las escuelas.
- 4 El acompañamiento a los profesores al trabajo de aula, se ha observado que el tipo de actividades matemáticas que privilegian para el tratamiento de la geometría son

ejercicios, es decir, desarrollo y cálculo de algoritmos que frecuentemente encuentran en los textos de apoyo antes mencionados. (Preiss et al. 2011 y Preiss et al, 2011)

A partir de lo anteriormente expuesto, existen ciertos elementos que deben ser considerados para delimitar el alcance que presenta esta investigación:

- a. Los Programas de Estudio, para así poder evidenciar de qué manera se estructura a nivel Ministerial el trabajo del concepto de triángulo y, por ende, dar luces del por qué los nuevos profesores en formación presentan debilidades en esta área del conocimiento
- b. Selección de algunos textos escolares utilizados, ya que estos se constituyen como la principal herramienta utilizada por parte de los profesores para llevar a cabo su docencia en aula.
- c. Sumado a lo anterior, se decide observar el nivel de séptimo básico, puesto que la prueba Simce evalúa los cursos de segundo, cuarto, sexto y octavo básico, y las pruebas internacionales como PISA, que evalúa primero medio (está fuera de nuestro interés de estudio) y TIMSS cuarto y octavo básico. Por lo tanto, observar séptimo básico aporta con información relevante referida a analizar al docente en el ejercicio de sus clases, en torno a un objeto de estudio y las secuencias de aprendizajes planificadas por el docente.

Finalmente, al contrastar los resultados obtenidos en geometría por los estudiantes chilenos en las pruebas nacionales e internacionales, con lo observado a partir de la experiencia en la formación inicial y continua de profesores, se hace necesario centrar este estudio en el profesor en ejercicio considerando los tipos de escenarios que diseña, las tareas que privilegia, las interacciones con los alumnos y su relación con la Institución.

Lo descrito hasta el momento, permite reflexionar y cuestionar preguntas en dos niveles. El primero corresponde a la toma de decisiones que realizan los docentes hacia sus mismas

prácticas, qué es lo que hacen y cómo lo hacen, siendo posible articular preguntas como ¿Cuáles son los diseños de secuencias para la enseñanza y el aprendizaje de triángulos en séptimo básico? ¿Qué tareas se privilegian en éstas? y ¿Qué materiales concretos y/o artefactos son utilizados como recursos en el proceso?

El segundo nivel alude a la interpretación que los docentes dan desde los recursos que suministra el Ministerio, de tal modo que es posible cuestionarse ¿Qué es lo que interpretan los profesores respecto a los programas de estudios?, ¿Cómo los interpretan?, ¿Qué es lo que interpretan los profesores respecto a los textos escolares? y ¿Cómo lo interpretan?

## Capítulo 2: Marco teórico y Objetivos de la investigación

Actualmente las investigaciones sobre la enseñanza de la geometría para la Escuela Primaria se centran en analizar distintos tópicos (Sinclair y Bruce, 2015, p. 320-321)

- El rol del razonamiento espacial, su conexión con la matemática y la geometría escolar
- El rol que cumple el dibujo en la construcción de conocimientos geométricos.
- La utilización de tecnologías digitales en la geometría y el razonamiento espacial.
- La importancia de las transformaciones geométricas en el curriculum escolar, incluyendo transformaciones isométricas.
- Ampliando la geometría escolar de aquella que pone énfasis en el vocabulario (nombrar y clasificar formas según propiedades) hacia una geometría activa orientada en el aprender haciendo (construir y deconstruir, comparar y manipular mentalmente formas de 3 y 2 dimensiones, orientación espacial)

En relación a lo anterior, este estudio está en sintonía con los trabajos actuales de geometría en la escuela primaria. Se ha declarado que la atención de la investigación está en la enseñanza de los triángulos, específicamente en las tareas que escoge el profesor como significativas para el desarrollo de sus clases.

Es por ello, que para abordar la problemática se ha de necesitar un modelo de referencia, que dé cuenta de manera organizada del trabajo geométrico y su funcionamiento en el sistema educativo.

Esta investigación considera como enfoque teórico central el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) desarrollado por Kuzniak (2011), que amplía la noción del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) creado por Houdement y Kuzniak, (1996, 1999, 2006), puesto que el ETM permite describir y caracterizar el trabajo geométrico realizado por el profesor en el aula.

Se aborda la concepción de tarea matemática entregada por Sierpínska (2004). Esta corresponde a cualquier problema de matemáticas que contenga la hipótesis y preguntas claramente formuladas, las cuales se sabe que los estudiantes pueden resolver en un tiempo que se puede prever.

Esta tarea geométrica, bajo la mirada del ETM presenta dos dimensiones: una cognitiva y una epistemológica (dimensiones que provienen desde los primeros trabajos realizados por Houdement y Kuzniak sobre Espacio de Trabajo geométrico), contiendo entre ambos niveles seis componentes que integran trabajos de Duval (1993, 1995, 2003), Pierce (1974), Rabardel (1995) y Balacheff (1987). Con el desarrollo y evolución de esta teoría, emergen los planos verticales y sus génesis que articulan el Espacio de Trabajo Matemático, que a continuación se presenta.

Se finaliza el capítulo con la exposición de los objetivos, tanto general como específicos, que contempla este estudio.

## 2.1 Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

El Espacio de Trabajo Matemático Kuzniak (2011), se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas. Corresponde a un proceso complejo y progresivo en el que se articulan todos los elementos matemáticos para el desarrollo del pensamiento. Es decir, son todos los elementos que, desde el punto de vista didáctico, se movilizan con el fin de facilitar el trabajo del individuo en la resolución de situaciones problemáticas.

La manera en que un individuo resuelve problemas matemáticos depende de su paradigma puesto en juego, que va a hacer su paradigma de referencia. Para ello Houdement y Kuzniak (1999) introducen el término *Paradigmas Geométricos*, que viene de la noción de Paradigma acuñada por Kuhn (1962) es utilizada por los autores en sus dos sentidos.

Kuzniak (2004) cita a Kuhn:

La palabra paradigma, en su aspecto global, define el conjunto de creencias, de técnicas y de los valores que comparte un grupo científico. Fija la manera correcta de plantear un problema y de emprender la resolución. En este sentido Kuhn habla también de matriz disciplinaria que permite reagrupar las teorías y más generalmente los conocimientos de un grupo que trabaja en el mismo sujeto.

En el segundo sentido, es desde una perspectiva de enseñanza, caracteriza los ejemplos significativos que son entregados a los estudiantes para que los aprendan a reconocer, a aislar y a distinguir las diferentes entidades constitutivas del paradigma global. Esto reenvía la práctica por los individuos de este campo disciplinario (p. 15).

Gómez Chacón, Kuzniak, Vivier (2016) señalan que “gracias a la resolución de problemas los alumnos pondrán en práctica los conocimientos y las técnicas elegidas por cada paradigma” (p.5).

Ahora bien, de la teoría ETM en el dominio de la geometría  $ETM_G$ , la concepción de la noción de Paradigma Geométrico realizada por Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006) emerge de los trabajos de Gonseth (1945-1952)<sup>8</sup> quien señala que la dialéctica de la geometría se apoya en tres pilares fundamentales correspondientes a la intuición, la experiencia y la deducción, estos tres pilares ayudan a comprender la relación con el espacio y el mundo sensible. La intuición y la experiencia constituyen un polo empírico de la Geometría y la deducción participa del polo teórico. Bloch y Pressiat (2009) retoman el trabajo de Gonseth (1949) con el propósito de comprender el funcionamiento de las interacciones de estos tres

---

<sup>8</sup> Houdement et Kuzniak (1999) «Géométrie et Paradigmes Géométriques». Petit x n° 51.5-21. IREM Grenoble, traducción de la autora.

pilares para organizar situaciones adecuadas en la enseñanza de la geometría en la educación primaria.

Houdement y Kuzniak (2006) relevan que esta mirada presenta la ventaja de conciliar dos componentes en la formación de profesores. Por una parte, la integración en el paradigma de las creencias del saber compartidos por una comunidad científica. Y por otra, nos muestra una perspectiva de enseñanza al paradigma, haciendo referencia a las prácticas que en él se constituyen. A estas prácticas, Houdement y Kuzniak (1999) les llamaron «Paradigmas Geométricos», cada uno de ellos y con distintos modos de conocimientos.

## 2.2 Paradigmas Geométricos

A estos modos de conocimientos, con su coherencia interna los diferencian en tres tipos de geometrías: Geometría I (GI) a la geometría natural, es decir, la que considera los objetos físicos; Geometría II (GII) a la geometría axiomática natural de la cual la geometría Euclidiana es un ejemplo y Geometría III (GIII) a la geometría axiomática formalista.

A continuación, se presenta la descripción de cada uno de ellos:

### 2.2.1 La geometría natural (GI)

Es la fuente de validación de la realidad y del mundo sensible. En ella se encuentran los tres componentes previamente mencionados, la intuición, la experiencia y la deducción, aunque la deducción se trabaja fundamentalmente sobre objetos materiales con la ayuda de la percepción y la experiencia con artefactos.

### 2.2.2 La geometría axiomática natural (GII)

La geometría como esquema de la realidad. En esta geometría se conjugan la realidad, esquema y modelo. El principio de validación se basa en lo hipotético deductivo dentro de un sistema axiomático lo más preciso posible. En esta geometría es importante la explicación

de las acciones efectuadas. Es posible considerar una axiomatización parcial y se consideran dentro de ella los intentos de axiomatización ya que estos permiten el razonamiento y preparan el camino para la modelización.

### 2.2.3 La geometría axiomática formalista (GIII)

Hay una independencia entre la geometría y la realidad. Su fuente es el razonamiento hipotético deductivo y se diferencia de la geometría II por su clara voluntad de axiomatizar la geometría de manera completa. Este paradigma no lo encontraremos en la Enseñanza Básica de Chile, por lo que en lo sucesivo no se menciona.

Existen pasajes o deslizamientos entre dos paradigmas geométricos, ello se simboliza por GI/gII y GII/gI Kuzniak (2006), esto significa que se articula la geometría natural y la geometría axiomática natural, la letra mayúscula indica donde está el énfasis según se indica respectivamente (GI o GII).

Los paradigmas GI y GII y sus deslizamientos GI/gII y GII/gI son un aporte teórico necesario para los análisis de las tareas en torno a los triángulos presentes en esta investigación.

Por lo tanto, como se menciona anteriormente, los niveles que se observan dentro de la enseñanza básica chilena, son aquellos correspondientes a los paradigmas GI y GII, en donde la enseñanza en el aula para la articulación entre la geometría natural con la geometría axiomática natural. Se sustenta en lo señalado por Brousseau (2001), quien nos señala que:

La enseñanza de la geometría lleva consigo una epistemología espontánea: un conjunto de creencias y declaraciones sobre lo que son las matemáticas, sobre la manera de hacer, de buscar, de aprender, de encontrar, de organizarlas, etc. Que los estudiantes y profesores puedan usar y desarrollar juntos. Con esta epistemología se articula una "didáctica " bastante natural que establece un margen bastante amplio y sobre todo bastante maleable

para el profesor, entre lo que es enseñado y lo que es solicitado a los estudiantes, del ejercicio a los problemas más complejos [...] (p.67).

### 2.3 Tarea matemática

Esta actividad geométrica se observa bajo la concepción de tarea matemática. Sierpinska (2004) realiza una revisión exhaustiva de la noción de tarea matemática en investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas, definiéndola de la siguiente manera:

En un sentido amplio del término, para referirse a cualquier problema de matemáticas, los cuales tengan la hipótesis y preguntas que son claramente formuladas, y los cuales se sabe que los estudiantes pueden resolver en un tiempo que se puede prever (Sierpinska, 2004, p. 10<sup>9</sup>).

Adaptando la definición de Sierpinska al modelo de ETM, Nechache (2017) señala que la tarea matemática es todo ejercicio, pregunta o problema realizada en un tiempo limitado en un contexto dado. Las condiciones de realización de este trabajo matemático son definidas por el ETM en el cual la tarea es propuesta.

La tarea matemática, se configura a través de un verbo, quien señala el trabajo matemático a realizar, expresada de manera oral o escrita. En nuestro caso particular, es la tarea geométrica puesta en juego

### 2.4 Componentes del Espacio de Trabajo Matemático

Retomando los conceptos de niveles y componentes, para organizar el estudio del concepto de Espacio de Trabajo matemático Kuzniak (2011) se reconocen seis componentes (ver

---

<sup>9</sup> traducción de la autora.

ilustración 4) organizados en dos niveles o planos horizontales no jerarquizados: uno de naturaleza epistemológica y otro de naturaleza cognitiva. El primero, tiene relación con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado, donde se sitúan el *representamen*<sup>10</sup> que en geometría se constituye como *espacio real y local*, el cual corresponde a una cualidad material que está en representación de algo. Los artefactos<sup>11</sup> emergen como objetos destinados a dar sustento a la actividad matemática en la ejecución de un cierto tipo de tarea (material o simbólico); y el sistema referencial teórico está constituido por definiciones, propiedades y relaciones.

El segundo plano, de naturaleza cognitiva, se refiere al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas (Kuzniak y Richard, 2014), donde se ubican el proceso de visualización (Duval, 2005), es decir, la conexión entre lo que se percibe desde su representación y la imagen construida mentalmente a partir de esta. La construcción como proceso orientado por el uso de herramientas materiales (regla, compás, software...) y/o conceptuales (construir, medir, contar...) (Anastasiadis y Nikolantonakis, 2016), para elaborar una representación. Finalmente, la prueba como el proceso donde se generan argumentaciones para la resolución de la tarea. Existen dos tipos de pruebas: las pragmáticas, que requieren de la acción sobre los objetos para justificar afirmaciones y las intelectuales, que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión. (Balacheff, 2000).

---

<sup>10</sup> Es la representación de algo, o sea, es el signo como elemento inicial de toda semiósis. El *representamen* es simplemente el signo en sí mismo, tomado formalmente en un proceso concreto de semiósis, pero no debemos considerarlo un objeto, sino una realidad teórica y mental. (Pierce, 1974)

<sup>11</sup> La notion d'artefact désigne en anthropologie toute chose ayant subi une transformation, même minime, d'origine humaine, elle est donc compatible avec un point de vue anthropocentrique, sans spécifier celui-ci plus avant. Elle présente, d'autre part, l'avantage de ne pas restreindre la signification aux choses matérielles (du monde physique) en comprenant sans difficulté les systèmes symboliques qui peuvent aussi être des instruments (Rabardel, 1995, p.49)

A las relaciones bidireccionales entre los componentes de ambos planos horizontales se les denomina génesis. Kuzniak (2011) señala el surgimiento de las génesis Instrumental [Ins], Semiótica [Sem] y Discursiva [Dis]. Además, plantea el surgimiento de tres planos verticales, [Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis] en función de las génesis que los delimitan, como muestra la ilustración 4 y se especifica en la tabla 3, presentada más adelante.

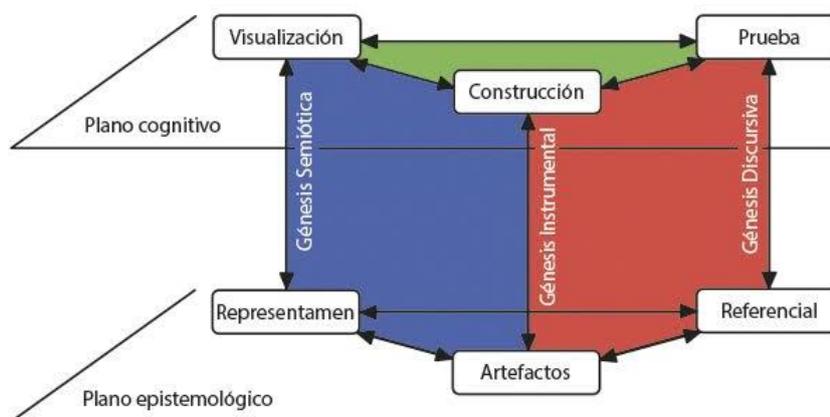


Ilustración 4 Diagrama General del Espacio de Trabajo Matemático  
 Fuente: Kuzniak, 2011

## 2.5 Las Génesis del Espacio de Trabajo Geométrico $ETM_G$

Si bien las génesis se definen de forma aislada, estas no son independientes entre sí, están en relación con las componentes del espacio de trabajo geométrico o con ciertos procesos cognitivos indispensables a su funcionamiento, Kuzniak (2011). La relación que existe entre los componentes, da origen a la génesis semiótica (figural), instrumental y discursiva.

### 2.5.1 Génesis Semiótica

Kuzniak (2011) define a esta génesis como la *entrada perceptiva*. Esta génesis relaciona los componentes del proceso de visualización y el representamen (espacio real y local).

Duval (1999) diferencia, desde un punto de vista psicológico, las nociones de visión y visualización. La primera noción está asociada a la percepción visual que provee un directo

acceso al objeto, mientras que la segunda está basada en la producción de una representación semiótica. Gómez Chacón, Kuzniak, Vivier (2016) la definen:

La génesis semiótica es el proceso asociado con signos y representamen que permite pasar de una perspectiva sintáctica a una perspectiva semántica de objetos matemáticos organizada en la representación semiótica. La génesis semiótica proporciona el estado de los objetos tangibles y sus operaciones. De esta manera, se asegura las relaciones entre la función y estructura en los signos (p.9).

Duval (2005), menciona dos niveles de las operaciones correspondientes al proceso de visualización en geometría. El primero, la visualización icónica, se asocia con el reconocimiento de percepción de las formas. El segundo, visualización no icónica, está relacionada con una interpretación más abstracta de los signos, con la idea principal de figura como un objeto simbólico. En cuanto a los objetos matemáticos estos no son accesibles físicamente, sino, a través de signos y representaciones semióticas, por lo tanto, en matemática no existe un solo sistema semiótico sino varios sistemas para el estudio de un contenido (Duval, 1999). Asimismo, Duval (1993) afirma que no es posible acceder a un objeto matemático sin tener una representación del mismo, debido a su alto nivel de abstracción y donde la distinción entre un objeto y su representación es entonces un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. Por lo tanto, un mismo objeto matemático posee diversas maneras de ser representado.

En relación a las representaciones, Duval señala que existe un tipo de representación mental, es decir, aquellas que cubren el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto Duval (1993), y otro tipo de representaciones semióticas, en donde estas están constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.).

### 2.5.2 Génesis instrumental

La génesis instrumental relaciona dos componentes el artefacto y el proceso de construcción. Gómez et al (2016) la definen:

La génesis instrumental permite hacer los artefactos operativos en el proceso de construcción en el Espacio de Trabajo Matemático. Seguimos la distinción realizada por Rabardel (1995) al considerar como un instrumento dos componentes: un artefacto, material o simbólica, y los esquemas de uso asociados. En esta perspectiva, la palabra instrumento tiene un valor cognoscitivo: un artefacto se convierte en un instrumento cuando el sujeto construye una serie de esquemas para su uso. En el modelo ETM, usamos la palabra herramienta para referirnos a las componentes del plano epistemológico, cuyo potencial de uso en la resolución de un problema generaliza la noción de instrumento de Rabardel (p.9).

El paradigma puesto en juego va a determinar el uso que se dé a los artefactos, en particular los instrumentos tradicionales de construcción como lo son el compás y la regla si se utilizan en GI su rol será esencialmente para verificar o ilustrar las propiedades de los objetos estudiados.

Los programas computacionales, como el cabri y geómetra, han revolucionado el rol de los instrumentos en la actividad geométrica. En el entorno informático, el punto puede tener cualquier ubicación en el plano, en cambio, si este punto tiene por construcción ciertos atributos, como, por ejemplo, ser el punto de intersección de dos rectas secantes. Esta génesis vista desde la geometría dinámica abre un sin número de posibilidades de trabajo geométrico que se articula con las otras génesis, como por ejemplo el probar una propiedad (génesis discursiva) Claramente, la geometría dinámica revoluciona esta génesis y las tareas que se pueden desarrollar en geometría para el logro de un aprendizaje.

### 2.5.3 Génesis discursiva

La génesis discursiva relaciona los componentes referenciales y el proceso de prueba, Gómez Chacón et al (2016) la definen

La génesis discursiva de la prueba matemática utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental. En la génesis discursiva de la prueba, las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático dan el significado. El propósito de esta génesis es proceder a la validación del proceso bidireccional: un razonamiento discursivo apoyado en las propiedades del referencial teórico y de otra, la identificación de propiedades y definiciones que se deben incluir en el marco de referencia después de ser realizado un tratamiento instrumental o semiótico.

La génesis discursiva de la prueba no agota todo lo relativo a las operaciones discursivas en matemáticas, donde es necesario distinguir tres niveles: la denominación de los objetos, el enunciado de propiedades y, finalmente, la deducción. La definición o la designación de los objetos es más una cuestión de registro del lenguaje y entra más en la dimensión puramente semiótica del trabajo matemático. (p.10)

En esta génesis discursiva, el razonamiento está ligado al proceso de prueba, la cual en el ETM se considera desde el trabajo de Balacheff (1987) quien considera que la interacción social del individuo es un instrumento potente, debido a que es el contexto que posibilita la discusión entre los alumnos con la intención de convencerse a sí mismos y de convencer al otro con los argumentos de cada uno.

Balacheff (1987) recalca, que, en estas interacciones entre alumnos, con diferentes niveles de razonamiento, es posible que surjan obstáculos debido a malas interpretaciones, a que no se llegue a establecer consensos y a querer que prevalezcan los puntos de vista de unos sobre los de los otros, frente a una tarea matemática, dependiendo de su naturaleza y los medios que pone en práctica para asegurar la validez de sus respuestas.

#### A. Tipos de validación según Balacheff (1987)

Existen dos tipos de validaciones, que a continuación se describen.

##### *a. Explicación*

Es un discurso subjetivo, enraizado en los propios conocimientos y en la racionalidad de quien lo expresa, desde sus reglas de decisión de la verdad. Quien explica pretende hacer inteligible a los demás la verdad de la proposición ya adquirida por él. La base de la explicación es esencialmente la lengua natural.

##### *b. Prueba*

El paso de la explicación a la prueba obedece a un proceso social por el cual un discurso sobre la validez de una proposición es aceptado por una comunidad. La prueba es una explicación socialmente aceptada, que puede evolucionar con el avance de los saberes en los cuales se apoya, debido a aquello que tiene un status no definitivo. Esto implica, que puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra. La prueba en matemáticas es considerada como una respuesta al deseo de comprender, a la búsqueda de la certeza y a una necesidad de comunicación. Balacheff distingue dos tipos de pruebas: las pragmáticas y las intelectuales.

La primera de ellas, llamadas pragmáticas, son aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y supone la posibilidad de tener acceso a la realización material de una tarea para justificar afirmaciones sobre ellos. Para la comprobación de una tarea, un ejemplo: Probar

que la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ . Esta tarea se realiza con diversos medios de comprobación, con cualquiera de ellos, es una prueba pragmática, que se utiliza para ejemplificar los distintos tres tipos de estas pruebas que serán descritas a continuación:

#### b.1. Tipos de pruebas pragmáticas

- a. **Empirismo ingenuo:** Cuando el sujeto que valida la afirmación lo hace después de verificarla para algunos casos particulares. El medir o presentar ejemplos sin que estos constituyan una generalización de la propiedad, constituyen pruebas de este tipo. En el ejemplo, si el estudiante mide los ángulos interiores de un triángulo y verifica que la suma de ellos es  $180^\circ$ .
- b. **Experiencia crucial:** Cuando el sujeto que valida la afirmación toma en cuenta la problemática de la generalidad y la resuelve mediante el uso de un caso particular, que reconoce como no especial. En el ejemplo citado, dibujar un arco en cada ángulo y luego recortarlos y comprobar que los tres ángulos forman un ángulo extendido. Luego, compara con los hallazgos de sus compañeros, para determinar la generalidad.
- c. **Ejemplo genérico:** Cuando el sujeto que valida, justifica la afirmación considerando al objeto concreto como un representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación. En el ejemplo citado, a partir de las explicaciones y hallazgos, el estudiante puede argumentar que  $180^\circ$  es la suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo.

#### b.2. Tipos de pruebas intelectuales

El segundo tipo, llamadas intelectuales, son aquellas que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos puestos en juego. Ellas están constituidas por una serie de enunciados organizados que siguen reglas determinadas. Un enunciado es tomado

como cierto o bien, es deducido de aquellos que le preceden con la ayuda de una regla de deducción tomada de un conjunto de reglas bien definidas.

En las pruebas intelectuales se articulan argumentos o cadena de ellos, lo que permite una forma particular de razonar.

- a. **La experiencia mental** aparece como medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación. Se libera de las situaciones particulares. La descontextualización es el proceso esencial de la generalización. Los conceptos implícitos están esencialmente basados en la experiencia perceptiva y en la acción. Las razones desarrolladas están ligadas a acciones, eventualmente interiorizadas, y a objetos. La expresión de una experiencia mental requiere construcciones cognitivas y lingüísticas complejas. El razonamiento del sujeto se independiza de un representante particular. Favorecer este tipo de pruebas, permite el desarrollo de habilidades cognitivas de razonamiento, las cuales se constituyen como la base para realizar demostraciones matemáticas.
- b. **Cálculo sobre el enunciado:** Estas pruebas son totalmente independientes de la experiencia. Estas son construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas de las nociones en juego en la solución de un problema. Estas pruebas aparecen como el resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados. Se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas. Esta prueba se encuentra entre la experiencia mental y la demostración.
- c. **Demostración:** Cuando la validación se apoya en conocimientos institucionales, un conjunto de definiciones, teoremas, reglas de deducción, donde la validez es socialmente aceptada y se funda sobre una lógica formal.

## 2.6 La validación en el ETM<sub>G</sub>

La validación en estas geometrías se concibe de manera diferente. En GI la validación se realiza por la experiencia sobre objetos materiales, ya sea objetos concretos o dibujos (trazos o con software). El dibujo puede ser un argumento para validar.

En G II la validación consiste en argumentar usando propiedades y teoremas. El dibujo es un apoyo para razonar, pero no puede ser sólo un argumento para validar.

En la GIII la validación es una demostración que se desarrolla apoyada en la lógica matemática y es la única manera admitida. A partir de la hipótesis se deduce la tesis siguiendo un razonamiento hipotético deductivo.

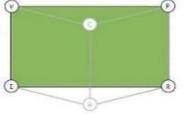
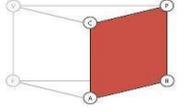
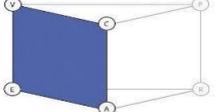
En la enseñanza de la geometría, podemos encontrar tres contextos para la naturaleza de este trabajo geométrico. El primero es un contexto de descubrimiento, en donde la intuición y la experimentación juegan un rol importante. Un segundo contexto es de justificación, donde las propiedades entran en acción para probar y demostrar los hallazgos y por último un contexto de comunicación, en donde no sólo se necesita comprender, sino que además explicar y presentar los resultados obtenidos (Kuzniak ,2011).

## 2.7 Circulación del ETM

Se considera *Circulación* a la movilización interna del ETM que provoca una tarea matemática, es decir, la articulación de los componentes y los procesos. Kuzniak y Nechache (2015) plantean que para que el trabajo geométrico sea considerado completo, debe existir una circulación completa a través de los tres planos verticales explicados a continuación.

**Tabla 2**

*Simbología diagramación de las circulaciones en el ETM Kuzniak y Nechache (2015)*

Símbolo		Significado
<b>Plano [Sem-Dis]</b>	 <p><i>Ilustración 5 Plano [Sem-Dis]</i></p>	Implica la Circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis Semiótica y Discursiva.
<b>Plano [Ins-Dis]</b>	 <p><i>Ilustración 6 Plano [Ins-Dis]</i></p>	Implica la Circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis Instrumental y Discursiva.
<b>Plano [Sem-Ins]</b>	 <p><i>Ilustración 7 Plano [Sem-Ins]</i></p>	Implica la Circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis Semiótica e Instrumental.

### 2.7.1 Plano Semiótico Discursivo [Sem-Dis]

El plano [Sem–Dis] está asociado a las génesis semiótica y discursiva. Los cuatro componentes que interactúan son: espacio real y local, visualización, referencial y prueba. Sus interacciones se orientan hacia la comunicación de las relaciones de los resultados encontrados en el desarrollo de la tarea geométrica. Gómez et al (2016) señalan que:

Una a estrecha relación entre la génesis semiótica y la génesis discursiva de la prueba es crucial en el desarrollo del trabajo matemático que supera una visión simple icónica de los objetos. De acuerdo a la prioridad dada a la dimensión semiótica y discursiva, son posibles dos tipos de enfoques. Cuando la atención se centra en el lado semiótico, transformaciones visuales estructuran la descripción de los signos y organizan un razonamiento

perceptivo. Por el contrario, si la atención se centra en una prueba o demostración el razonamiento hipotético y deductivo se basa en propiedades, signos y la visualización desempeña un papel heurístico. (p.11)

### 2.7.2 Plano Instrumental Discursivo [Ins – Dis]

El plano [Ins–Dis] está asociado a las génesis instrumental y discursiva. En este plano el trabajo matemático, privilegia las interacciones de cuatro componentes del ETM: artefacto, construcción, referencial y prueba. Las interacciones privilegian la justificación de la técnica de construcción y el desarrollo del razonamiento matemático. Gómez Chacón et al (2016) señalan que:

En este plano, el punto crucial es la cuestión de la prueba que se basa en experimentos o en la argumentación deductiva pura. Si se sacan conclusiones a partir de datos dados por instrumentos, vamos a hablar de una prueba experimental. De otra forma, si la prueba o demostración se basará en un referencial teórico, los instrumentos se utilizan para ilustrar o para la construcción de configuraciones geométricas. (p.11)

### 2.7.3 Plano Semiótico Instrumental [Sem – Ins]

El plano [Sem -Ins] está asociado a la génesis semiótica y a la génesis instrumental. En este plano el trabajo matemático, privilegia las interacciones de cuatro componentes del ETM: espacio real y local, visualización, artefacto y la construcción. En este plano la actividad matemática se concentra en el descubrimiento y exploración. Gómez Chacón et al (2016) señalan que:

Este plano ha recibido más importancia debido a la aparición de Software Digital. Las herramientas digitales aumentan la capacidad de explorar configuraciones y descubrir nuevas propiedades. El enfoque exploratorio ya existía, pero sólo con base en la experiencia de los estudiantes. En este caso

también, se pueden observar dos formas de trabajar: la que está más orientado hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) que cumplen algunas condiciones y otra hacia la interpretación de los datos aportados por los artefactos. (p.11)

A las distintas formas que puede circular la tarea geométrica Tanguay, Kuzniak, Gagatsis (2014) la definen como el concepto de fibración, esta puede ser interna o externa, indicando lo siguiente.

Modelizar con el modelo ETM puede facilitar el análisis de estas interdependencias, y el término fibración se ha sugerido como etiqueta para estos movimientos y transiciones entre diferentes elementos del modelo. De este modo tendríamos fibraciones internas (entre planos, entre polos, entre registros de representación...) y fibraciones externas (entre ETMs de diferentes campos). (p. 25)

El análisis de los distintos planos puestos en juego en el trabajo matemático, depende por una parte de la tarea dada y por otra del dominio matemático estudiado. Esto nos lleva a poder analizar las relaciones particulares entre los planos verticales del ETM.

## 2.8 Diferentes niveles de ETM

Los procesos de transposición didáctica realizados en cada país para la enseñanza de las matemáticas están articulados y relacionados con los diferentes niveles del Espacio de trabajo matemático. Houdement y Kuzniak (1999) introducen tres niveles de espacio de trabajo geométrico, y donde Kuzniak (2011) lo amplía al ETM, es decir, ETM de referencia, ETM idóneo y ETM personal: del profesor y del alumno.

### 2.8.1 ETM de referencia

Se concibe en sus orígenes como un espacio de trabajo definido de manera ideal en función de solo criterios matemáticos. Su utilizador es un individuo experto, llamado epistémico. En este espacio también se considera la comunidad de matemáticos.

Esta definición de ETG de referencia fue ampliada por Kuzniak (2011), considerando que esta referencia es entregada en cada país, por los Ministerios de Educación, quienes tienen la responsabilidad de declarar cuáles son los contenidos mínimos y obligatorios que cada alumno debe lograr en el transcurso de su formación escolar, entregando un marco curricular.

Particularmente en nuestro dominio de interés, en este marco curricular se encuentran los contenidos geométricos relativos a triángulos organizados de una cierta manera con sugerencias metodológicas para su tratamiento. Es la transposición que hace un equipo de personas designadas por los respectivos ministerios de educación de cada país. Este documento oficial posiblemente será trabajado por los profesores en cada uno de los respectivos niveles de la escolaridad. Este ETM<sub>G</sub> de referencia, describe un estilo particular de trabajo, con ciertas reglas en su discurso, tratamiento y razonamiento. Es en este ETM<sub>G</sub> de referencia donde se encuentran los objetos matemáticos a enseñar y el saber a enseñar. Aquí se encuentra las competencias matemáticas esperadas en los programas oficiales de cada país.

### 2.8.2 ETM idóneo

El ETM<sub>G</sub> de referencia debe ser acondicionado y organizado para volverse un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida.

El diseñador desempeña un rol parecido al del arquitecto que bosqueja un espacio de trabajo para usuarios potenciales. En el aula, el diseño de este espacio va a depender del

ETM<sub>G</sub> personal del profesor, por lo que no es fijo y necesita continuamente de modificaciones para ajustarse a las restricciones locales. Este espacio requiere, por una parte, posibilitar el trabajo geométrico en el paradigma correspondiente a la problemática considerada, y por otra estar “bien construido”, considerando que sus diferentes componentes están organizados de manera efectiva para la realización de la tarea matemática deseada.

#### A. ETM<sub>G</sub> idóneo diseñado por los autores de textos escolares

Los autores de los textos escolares elaboran textos que están a disposición de los profesores, algunos de estos son distribuidos por el ministerio de educación. Este ETM<sub>G</sub> idóneo potencial en los textos escolares, puede establecerse como cercano o distante, de la matemática presente en el ETM<sub>G</sub> de referencia.

#### B. ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo del profesor

El profesor realiza su propia interpretación del ETM<sub>G</sub> de referencia y del ETM<sub>G</sub> idóneo dispuesto en los textos escolares u otras fuentes de información, traduciéndolo en su diseño de clases.

Kuzniak (2006) recalca que los profesores deben tener “clara conciencia” de la naturaleza del trabajo matemático y el paradigma puesto en juego en el ETM<sub>G</sub> idóneo, con el fin de evitar malos entendidos.

Esta investigación, concentra su estudio en el ETM<sub>G</sub> idóneo que diseñan dos profesoras para la enseñanza de los triángulos para séptimo básico. Y su relación con el ETM<sub>G</sub> de referencia y el ETM<sub>G</sub> idóneo de los textos escolares que ellas utilizan para el diseño de sus clases.

### 2.8.3 ETM personal

La puesta en acción del ETM<sub>G</sub> idóneo ya sea por los alumnos o por los profesores, es lo que se llama ETM<sub>G</sub> personal.

El ETM<sub>G</sub> personal pone en juego los conocimientos y procesos cognitivos de cada individuo, ya sea el profesor o los estudiantes. A medida que estos vayan evolucionando su ETM<sub>G</sub> se enriquecerá. Cómo es personal y no colectivo, cada individuo desarrolla su propio ETM<sub>G</sub> personal.

Si bien nuestro foco no está en el ETM<sub>G</sub> personal del profesor, en el análisis de ETM<sub>G</sub> idóneo es posible identificar elementos de su ETM<sub>G</sub> personal.

Lo que antecede sintetiza, de manera resumida y no exhaustiva, algunos de los resultados y conceptos acuñados por los autores citados, los cuales nos van a permitir justificar y proporcionar un soporte teórico tanto del método de análisis que se efectúa, como de algunas de las decisiones que se han tomado para formular los objetivos de esta investigación y llevar a cabo los análisis.

## 2.9 Objetivos de investigación

Dada la motivación de este estudio, es fundamental el rol que cumple el profesor al momento de la selección, elaboración y planificación de determinadas tareas para el logro de los aprendizajes propuestos en la enseñanza de los triángulos. Lo anterior, permite caracterizar el ETM<sub>G</sub> idóneo y ETM<sub>G</sub> de referencia que orientan el desarrollo de las actividades matemáticas. Por lo tanto, se hace necesario observar en la enseñanza de la geometría referida a triángulos cuáles componentes, tanto cognitivos como epistemológicos son utilizados durante el desarrollo de las unidades de aprendizaje. De esta forma, para dar respuesta a esta necesidad de observar la enseñanza de los triángulos bajo la mirada del

Espacio de Trabajo Matemático, se han elaborado los siguientes objetivos que orientan el desarrollo de esta investigación:

### 2.9.1 Objetivo general

OG: Determinar el espacio de trabajo matemático de referencia e idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile.

Para responder al objetivo general, se han determinado tres objetivos específicos.

### 2.9.2 Objetivos específicos

- a. OE1: Caracterizar el  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemática.
- b. OE2: Determinar el grado de similitud entre el  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el  $ETM_G$  de referencia en el programa de estudio.
- c. OE3: Determinar el grado de similitud entre  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el  $ETM_G$  idóneo potencial en los textos escolares utilizados por las profesoras en la preparación de sus clases.

A continuación, se despliega el capítulo 3, en donde se presenta la metodología de esta investigación.

## Capítulo 3: Metodología

Este capítulo presenta la descripción metodológica de la investigación, con el propósito de dar respuesta a los tres objetivos específicos (mencionados anteriormente) y al objetivo general. Para ello, se elaboran cinco preguntas que orientan la búsqueda de hallazgos organizándose en dos secciones o partes, que se detallan a continuación.

En la primera sección, titulada “Tipo de investigación”, se define y describe la investigación *ex post-facto*, la cual corresponde al tipo no experimental y de carácter observacional. Este tipo de investigación se rige por el criterio de realidad, pues se asume que la intención es observar una situación o fenómeno sin que ella sea intervenida por los observadores.

La segunda sección de este capítulo, llamada “Método”, se articula en cinco puntos Participantes, Diseño, Instrumentos, Procedimientos y Análisis.

El primer punto, “Participantes”, detalla el procedimiento de selección, criterios de inclusión y exclusión, así como los antecedentes de las dos docentes participantes.

El segundo punto, “Diseño”, presenta el *setting* que sustenta los procesos de recogida y tratamiento de datos.

El tercer punto, “Instrumentos”, introduce una presentación y descripción de las herramientas de recogida y producción de datos.

El cuarto punto, “Procedimientos”, presenta otras herramientas que se han desarrollado y/o usado para disponer y organizar los datos a analizar.

El quinto punto, “Análisis”, expone algunos elementos sobre la forma de analizar los datos.

### 3.1 Tipos de investigación

El diseño de investigación es de tipo no experimental o *ex post facto*, de carácter observacional. El diseño se enmarca dentro de los estudios observacionales, el cual se rige con criterio de realidad (Montero y León, 2015). Esta es una técnica descriptiva, es decir, se observa y analiza para ver cómo ocurren ciertos eventos.

Es la investigación en la cual el investigador se vale de acontecimientos ya realizados, por lo tanto sus datos tienen fundamento en hechos cumplidos y de ahí su nombre. Después se analizan las posibles causas y consecuencias, debido a esto se trata de un tipo de investigación en donde no se modifica el fenómeno o situación objeto de análisis.

Kerlinger (1988, p. 394), define la investigación no experimental o *ex post facto* como:

una investigación sistemática empírica, en la cual el científico no tiene control directo sobre las variables independientes porque sus manifestaciones ya han ocurrido o porque son inherentemente no manipulables. Las inferencias acerca de las relaciones entre variables se hacen, sin intervención directa, a partir de la variación concomitante de las variables dependientes e independientes.

Para ello se escoge trabajar con *estudio de casos*, el cual, corresponde al estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas (Stake, 1998). Las unidades de análisis de los estudios de caso de esta investigación corresponden a profesoras seleccionadas a partir de criterios de inclusión y de exclusión que son detallados a continuación.

## 3.2 Método

### 3.2.1 Participantes

Se contacta y se consigue autorización de directores de dos colegios subvencionados mixtos para trabajar con las profesoras que realizan clases de matemáticas, entre una población de doce docentes. Se sigue un riguroso procedimiento en donde se entrevista a jefes de UTP y a los potenciales profesores-candidatos para solicitar su consentimiento de participación, basándose en los siguientes criterios:

#### A. Criterios de inclusión

- pertenecer a un colegio subvencionado mixto<sup>12</sup>
- ser profesor con 10 años de experiencia
- realizar clases en séptimo básico, teniendo formación de profesor de matemática.
- realizar clases en séptimo básico, teniendo formación de profesor básico con mención en matemática.

#### B. Criterios de exclusión

- Profesores con experiencia docente menor a 10 años.
- Realizar la docencia en establecimientos educacionales particulares
- Realizar la docencia en establecimientos educacionales municipales.

Conforme a estos criterios se seleccionan dos profesoras: una de educación básica con mención en matemática y una de matemática.

#### C. Descripción de las participantes

La información expuesta en la tabla 3 presenta los antecedentes generales de las dos docentes participantes.

---

12

En Chile hay más de seis mil colegios particulares subvencionados, lo que corresponde a un 50 % del sistema escolar. .... Declaración Ministra de Educación de Chile Sra. del Plano 31 de agosto 2015....extraído el 30 de septiembre de 2017 <http://www.t13.cl/noticia/nacional/mineduc-al-menos-577-colegios-eligieron-pasar-gratuidad>

**Tabla 3**

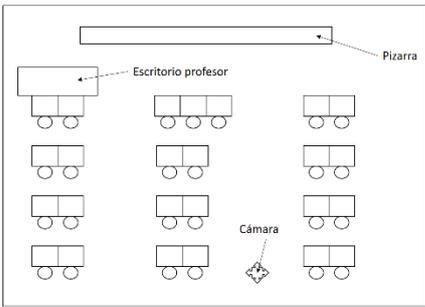
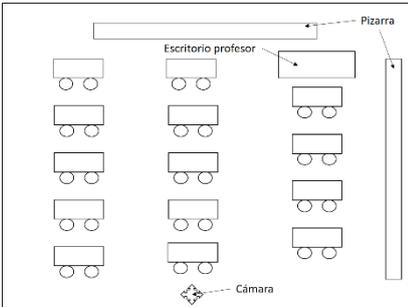
*Antecedentes generales de los dos casos de estudio*

Información	Profesora caso 1	Profesora caso 2
Seudónimo	Ailén	Sayén
Edad	38	40
Nacionalidad	Chilena	
Título	Profesor de matemática, licenciada en Educación	Profesora de Educación Básica, licenciada en Educación
Especialidad	-----	Mención Matemática
Años de experiencia	10	
Tipo de Establecimiento	Subvencionado mixto	
Región y comuna	Valparaíso - Viña del Mar	
Cursos de perfeccionamiento	Si	

A continuación, se presenta en la tabla 4, información que permite contextualizar ambos casos de estudio. Una breve descripción de este setting tendrá lugar después.

**Tabla 4**

*Elementos de contextualización de casos de estudio*

	<b>Caso de Estudio 1</b>	<b>Caso de Estudio 2</b>
<b>Profesor</b>	Ailén	Sayén
<b>N° de estudiantes</b>	25	22
<b>Nivel</b>	Séptimo (entre 12 y 13 años)	
<b>Lugar</b>	Viña del Mar Región Valparaíso País Chile	
<b>Plano de la sala</b>	 <p><i>Ilustración 8 Plano sala, caso 1</i></p>	 <p><i>Ilustración 9 Plano sala, caso 2</i></p>
<b>Disposición de cámara en la sala</b>	Se ubica la cámara sobre un trípode, al fondo de la sala, enfocando la pizarra. Se enfoca a la profesora en todo momento de su la clase.	
<b>Tiempo</b>	13 al 20 de octubre Segundo semestre 2016	1 al 11 de agosto Segundo semestre año 2017
<b>Duración</b>	Cuatro clases de 90 minutos	Cinco clases de 90 minutos
<b>Periodo de la jornada</b>	Mañana	
<b>Recursos</b>	Set de pizarra regla escuadra, compás, transportador. Textos escolares, guías en papel, cuadernos, instrumentos geométricos personales: regla escuadra, compás, transportador.	
<b>Modalidades de trabajo</b>	Individual, en parejas y grupo curso	Individual, en parejas y grupo curso

Tal como se aprecia en la tabla 4, ambos estudios de caso se desarrollan en grupos que oscilan entre 22 a 25 estudiantes, con 12 y 13 años de edad para ambos casos, en la región

de Valparaíso. Las clases filmadas se desarrollan en las mañanas en un periodo de 90 minutos diarios fijados institucionalmente. Cabe señalar que la secuencia de cuatro clases es filmada en el segundo semestre del año 2016, y la otra secuencia de cinco clases durante el primer semestre del año 2017. Entre los recursos que son empleados sistemáticamente por las docentes se encuentran: Set de pizarra, regla, escuadra, compás y transportador. Mientras que los estudiantes ocupan: Textos escolares y guías en papel, cuadernos, instrumentos geométricos personales: regla escuadra, compás y transportador.

El lugar donde se instala la cámara no es invasivo, pues se encuentra estratégicamente ubicada al fondo de la sala con un camarógrafo. Un micrófono de solapa es utilizado a partir de 2017 para disminuir la pérdida de información por ruido ambiental.

Llegado a acuerdo, cada clase es preparada por la profesora del curso, la cual es informada a la unidad técnica pedagógica (UTP) de cada colegio, sin ninguna intervención en el diseño por parte de la investigadora. Luego, el *modus operandis* de las acciones de investigación es el siguiente:

1. Grabación de la clase.
2. Transcripción del video de cada clase e identificación de *episodios* asociados a una tarea geométrica.
3. Análisis de cada tarea según marco de referencia ETM<sub>G</sub>.
4. Análisis empleando el libro de códigos.
5. Cruce entre análisis cuantitativo y cualitativo.

### *c.1. Profesora Caso 1: Ailén*

Ailén es una profesora de 38 años de edad, de nacionalidad chilena. Es licenciada en educación, especialista en Matemática, formada en una Universidad de la región de Valparaíso. Cuenta con 10 años de experiencia y se ha desempeñado siempre en el mismo establecimiento educacional. Trabaja en un colegio subvencionado mixto, realizando clases de matemática de séptimo básico a cuarto medio. En el transcurso de estos años realiza cursos de formación continua (charlas y seminarios).

### *c.2 Profesora Caso 2: Sayén*

Sayén tiene 40 años, es profesora de Educación Básica con mención en matemática, licenciada en educación con 10 años de experiencia. Trabaja en un colegio subvencionado mixto y se desempeña en segundo ciclo básico, es decir, realiza clases de matemática de sexto a octavo básico. En el transcurso de estos años realiza cursos de formación continua (charlas y seminarios)

Ambas profesoras son observadas en un séptimo básico específico. En el caso de la profesora Ailén participan 25 alumnos, y en el caso de la profesora Sayén 22 alumnos (entre 12 y 13 años para ambos casos).

#### 3.2.2 Diseño

Esta investigación tiene un diseño observacional y se rige por el criterio de realidad. Se realiza un estudio exhaustivo de dos casos, quienes desarrollan sus clases sin intervención de la investigadora, haciendo uso del principal instrumento que es la observación no participante.

Se caracteriza el diseño en tres etapas que pueden producirse en orden o paralelamente. Dichas etapas se describen a continuación.

##### A. Etapa Preparatoria

En la etapa, se prepara información preliminar y cualitativa relativa fundamentalmente a la caracterización del Espacio de Trabajo Matemático ETM<sub>6</sub> de referencia e idóneo potencial de los textos escolares.

Para dar respuesta a los objetivos planteados es necesario el planteamiento de preguntas que orienten el trabajo de investigación y que aporten desde los análisis y procesamientos de la información insumos para relevar los resultados en torno a los objetivos propuestos. Para ellos se diseñan 5 preguntas las cuales se presentan a continuación.

- P1: ¿Cómo se caracteriza el  $ETM_G$  de referencia en torno a los triángulos en Chile? Esta pregunta se responde en el capítulo 4.
- P2: ¿Cómo se caracteriza el  $ETM_G$  idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos escolares utilizados por Ailén y Sayén? Esta pregunta se responde en el capítulo 5.
- P3: ¿Qué relación existe entre el  $ETM_G$  idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos escolares con el  $ETM_G$  de referencia en los programas de estudio? Esta pregunta se responde en el capítulo 5.
- P4: ¿Cómo se caracteriza el  $ETM_G$  idóneo efectivo en las tareas implementadas por Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos? Esta pregunta se responde en el capítulo 6.
- P5: ¿Cómo se caracterizan los distintos componentes y génesis del  $ETM_G$  idóneo efectivo en las tareas implementadas para la enseñanza del objeto triángulo por Ailén y Sayén? Esta pregunta se responde en el capítulo 6.

Lo que se organiza de la siguiente manera, las preguntas 4 y 5, orientan la búsqueda de resultados para el Objetivo Específico 1.

(OE 1): Caracterizar el  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemática.

Los resultados del OE1 en conjunto con los hallazgos de la pregunta 1 permiten dar respuesta al el Objetivo Específico 2

(OE2): Determinar el grado de similitud entre el  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el  $ETM_G$  de referencia en el programa de estudio.

De igual manera, los resultados del OE1 en conjunto con los hallazgos de la pregunta 4 permiten dar respuesta al el Objetivo Específico 3

(OE3): Determinar el grado de similitud entre  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el  $ETM_G$  idóneo potencial en los textos escolares utilizados por las profesoras en la preparación de sus clases.

Todo lo anteriormente descrito sumado a las respuestas de la pregunta 3, proporciona los elementos para determinar el ETM de referencia e idóneo potencial de los triángulos en Chile, dando respuesta al objetivo general

(OG): Determinar el espacio de trabajo matemático de referencia e idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile.

#### *A.1 Cómo se realiza el análisis del ETM de Referencia*

Para el  $ETM_G$  de referencia, se realiza el análisis entre los objetivos de aprendizaje y las tareas sugeridas para el tratamiento de los triángulos de primero a séptimo básico y así, determinar potencial circulación de cada uno de estos.

A continuación, se presenta la Tabla 5, que muestra los objetivos de aprendizaje que se analizan en el capítulo 4.

**Tabla 5**

*Resumen de los elementos a analizar.*

CURSO	OBJETIVOS DE APRENDIZAJES QUE ABORDAN EL TRABAJO DE TRIÁNGULOS	CANTIDAD DE ACTIVIDADES DECLARADAS PARA CADA OA. <sup>13</sup>
Primero básico	<b>OA 14</b> Identificar en el entorno figuras 3d y figuras 2d y relacionarlas, usando material concreto. (Ministerio de Educación, 2013, p.100)	1
Segundo Básico	<b>OA 15</b> Describir, comparar y conseguir figuras 2D (triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos) con material concreto. (Ministerio de Educación 2013m, p.14)	6
Tercero Básico	<b>OA 15</b> Demostrar que comprenden la relación que existe entre figuras 3D y figuras 2D: > Construyendo una figura 3D a partir de una red (Plantilla). > Desplegando la figura 3D. (Ministerio de educación, 2013, p.108)	1
	<b>OA 17</b> Reconocer en el entorno figuras 2D que están trasladadas, reflejadas y rotadas. (Ministerio de Educación, 2013, p.108)	1
	<b>OA 21</b> Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular. > Midiendo y registrando el perímetro de figuras del entorno en el contexto de la resolución de problemas. (Ministerio de Educación, 2013, p. 109)	1
Cuarto básico	<b>OA 17</b> Demostrar que comprende una línea de simetría: > Identificando figuras simétricas 2D > Creando figuras simétricas 2D > Dibujando una o más líneas de simetría en figuras 2D. > Usando software geométrico (Ministerio de Educación, 2013, p.155)	1
	<b>OA 18</b> Trasladar, rotar y reflejar figuras 2D. (Ministerio de Educación, 2013, p.155)	1
Quinto básico	<b>OA 18</b> Demostrar que comprenden el concepto de congruencia, usando la traslación, la reflexión y la rotación en cuadrículas y mediante software geométrico. (Ministerio de Educación, 2013, p.121)	1
	<b>OA 22</b> Calcular áreas de triángulo, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares, aplicando las siguientes estrategias:	5

<sup>13</sup> La cantidad de actividades declaradas para cada OA, corresponden a las que trabajan el objeto matemático triángulo, propuestas por los Programas de Estudio del Ministerio de Educación.

	<ul style="list-style-type: none"> <li>&gt; Coteo de cuadrículas</li> <li>&gt; Comparación con el área de un rectángulo</li> <li>&gt; completar figuras por traslación (Ministerio de Educación, 2013, p. 121)</li> </ul>	
Sexto básico	<b>OA 12</b> Construir y comparar triángulo de acuerdo a la medida de sus lados y/o sus ángulos con instrumentos geométricos o software geométricos. (Ministerio de Educación, 2013, p.126)	9
	<b>OA 14</b> Realizar teselados de figuras 2D, usando traslaciones, reflexiones y rotaciones. (Ministerio de Educación, 2013, p.126)	3
	<b>OA 17</b> Demostrar de manera concreta, pictórica y simbólica que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180^\circ$ y de un cuadrilátero es $360^\circ$ . (Ministerio de Educación, 2013, p.126)	3
	<b>OA 21</b> Calcular ángulos en rectas paralelas cortadas por una transversal y en triángulos. (Ministerio de Educación, 2013, p.126)	2
Séptimo básico	<b>OA 10</b> Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos. (Ministerio de Educación, 2015, p.108)	6
	<b>OA 12</b> Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo: <ul style="list-style-type: none"> <li>&gt; Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros.</li> <li>&gt; Puntos, como el punto medio, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo.</li> <li>&gt; Triángulos y cuadriláteros congruentes. (Ministerio de Educación, 2015, p.108)</li> </ul>	1
	<b>OA 13</b> Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios. (Ministerio de Educación, 2015, p.108)	6

### *A.2 Como se realiza el análisis del ETM de Idóneo potencial*

Se pregunta a las profesoras cuales son los textos escolares que ocupan en la preparación de sus clases, de los textos mencionados por las profesoras se seleccionan las actividades relativas a triángulos, luego se analizan según marco teórico.

Ailén utiliza el texto escolar de *7° básico matemática* (2009), de la Editorial Santillana.

Sayén utiliza los textos escolares de *7° básico matemática* (2014), de la Editorial Galileo y *7° básico matemática* (2016), de la Editorial SM.

## B. Estudio de Campo

En el estudio de campo, a partir de los videos de cada clase, se prepara la información cualitativa utilizando la teoría del ETM como “un modelo dinámico que permite reflexionar sobre la acción del profesor en el aula” (Chacón y Kuzniak, 2016, p.17) Los ETM se construyen con base en el conocimiento matemático y la experiencia de las profesoras al hacer clases de triángulos. Esto se vislumbra en dos planos: el epistemológico y el cognitivo, que serán el centro de la discusión de esta investigación. El trabajo efectivo de las profesoras permite analizar las tareas matemáticas y sus circulaciones presentes en cada episodio (ver siguiente párrafo) de cada clase, cómo se van regulando en el transcurso de la clase y si hay cambios en los componentes, y su progresión en el desarrollo de la unidad.

En cuanto a la división por *episodios* de cada clase, nombrados en el párrafo anterior, se definen según Roditi (2001, p.30) de la siguiente manera:

Entendemos por episodio un encadenamiento de actos pedagógicos y de intercambios entre el profesor y los estudiantes en vista de llegar a un objetivo dado que es en general la realización de una tarea (comprendiendo, recordémoslo, el escuchar o el observar)...<sup>14</sup>

Bajo esta premisa, la investigadora identifica episodios en relación a cada tarea seleccionada por las profesoras, es decir, particionando cada clase cada vez que el profesor cambia de tarea, dando origen a una secuencia de episodios analizables.

Paralelamente se prepara la información cuantitativa utilizando el libro de códigos<sup>15</sup> elaborado para la observación de clases, el cual tiene por finalidad llevar a cabo la cuantificación de la frecuencia de aparición de los ciertos valores a lo largo de una variable de tiempo empleados por el docente que han sido determinadas en este estudio. Realizados los análisis de las secuencias de las clases realizadas por Ailén y Sayén. Se responde a la pregunta:

---

<sup>14</sup> Traducción de la autora

<sup>15</sup> Variables estudiadas: el contenido geométrico propuesto por la profesora, el tipo de discurso oral utilizado, las acciones geométricas puestas en juego, los artefactos y los recursos para la enseñanza y sus categorías internas.

P5: ¿Cómo se caracterizan los distintos componentes y génesis del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo en las tareas implementadas para la enseñanza del objeto triángulo por Ailén y Sayén? El estudio de campo se desarrolla completo en el capítulo 6: “Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo en las tareas implementadas por Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos”, dando respuesta a la OE1<sup>16</sup>.

### C. Confrontación de los resultados

Esta etapa integra los análisis anteriores que se desarrollan en el capítulo 7: “Conclusiones y proyecciones”. A partir de este estudio se presentan las conclusiones a partir del orden aparición de cada objetivo específico.

OE1: Caracterizar el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemáticas.

OE2: Determinar el grado de similitud entre el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el ETM<sub>G</sub> de referencia en el programa de estudio.

OE3: Determinar el grado de similitud entre ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el ETM<sub>G</sub> idóneo potencial en los textos escolares utilizados por las profesoras en la preparación de sus clases.

Con todas las caracterizaciones y los hallazgos de los objetivos de investigación antes mencionados, se responde el objetivo general planteado en esta investigación.

OG: Determinar el espacio de trabajo matemático de referencia e idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile.

---

<sup>16</sup> OE1: Caracterizar el ETMG idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemáticas.

### 3.2.3 Instrumentos

A continuación, se muestra una visión general de los elementos y herramientas empleadas para recoger las evidencias y producir los datos de esta investigación.

#### A. Tipos de datos

La tabla 6 muestra los distintos tipos de datos que se utilizaron en la investigación.

**Tabla 6**

*Evidencias recogidas para la investigación.*

Tipo de datos	Comentarios
Documentos institucionales	Programas oficiales de estudio, Bases Curriculares y Programas de estudio, emitidos por el Ministerio de Educación del Gobierno de Chile, de primero a sexto básico (2013) y de séptimo a octavo básico (2016).
Documentos escolares	Caso 1 : Ailén - 7° básico matemática (2009). Editorial Santillana.  Caso 2: Sayén - 7° básico matemática (2015). Editorial Galileo - 7° básico matemática (2017). Editorial SM.
Documentos elaborados por el docente	Caso 1 - 4 guías para las clases. Caso 2: - 2 guías para las clases.
Videos	Caso 1: 4 clases (90 minutos cada una). Caso 2: 5 clases (86 minutos cada una).

Como se muestra en la tabla 6, se recogen para esta investigación documentos de diferentes fuentes: institucionales, escolares y elaborados por el docente. Dichos documentos son la unidad de análisis que fundan, los capítulos 4 “Caracterización del ETM<sub>G</sub> de referencia de primero a séptimo en torno a los triángulos”, capítulo 5 “Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo en los textos escolares” y capítulo 6 “Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo en las tareas implementadas por Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos”.

En primer lugar, se analizan los programas de estudio chilenos, emitidos por el Ministerio de Educación, de primero a séptimo básico (capítulo 4). En ellos el análisis se focaliza sobre los objetivos de aprendizaje y actividades que están ligadas, explícita o implícitamente, al objeto matemático triángulos.

En segundo lugar, se analizan los textos escolares utilizados por las profesoras Ailén y Sayén (capítulo 5). De los tres textos escolares se estudian las *tareas* relativas a triángulos.

En tercer lugar, se revisan las planificaciones de las docentes, las cuales permiten saber cómo se organiza el contenido de la unidad de triángulos en las secuencias de clases. Sin embargo, la información aportada es muy general para encontrar elementos de respuesta para las preguntas abordadas en el capítulo 6.

En cuarto lugar, las dos secuencias de clases se filman con una cámara SONY NXCAM modelo XAVC-S DV. En el caso de estudio 2 se incorpora el uso de micrófonos de solapa lavalier PRO 88 W/T, esto facilita la transcripción de las sesiones al tener mejor audio.

Se sigue el protocolo para obtener las autorizaciones de consentimientos informados, las profesoras Ailén y Sayén permiten utilizar imágenes de sus clases con sus rostros y el de sus estudiantes pixelados.

## B. Características del material fílmico

La tabla 7 muestra las características del material fílmico, que luego será comentado.

**Tabla 7**

*Características del material fílmico*

	<b>Caso de estudio 1</b>	<b>Caso de estudio 2</b>
<b>Fechas</b>	13 al 20 de octubre año 2016	1 al 11 de agosto año 2017
<b>Horas filmadas por clase</b>	90 minutos	86 minutos
<b>Número de clases</b>	4	5
<b>Total de horas filmadas</b>	360 minutos, es decir, 6 horas	430 minutos, es decir, 7 horas 10 minutos
<b>Total de horas tratadas (transcripción)</b>	6 horas, es decir, 360 minutos	7 horas 10 minutos, es decir 430 minutos
<b>Duración efectiva de clases</b>	Clase 1: 80 minutos Clase 2: 81 minutos, 21 segundos Clase 3: 79 minutos Clase 4: 81 minutos, 5 segundos  Total, de horas efectivas de clases en el desarrollo de la unidad: 5 horas, 26 minutos. Con un total de 326 minutos	Clase 1: 75 minutos, 53 segundos Clase 2: 65 minutos, 33 segundos Clase 3: 75 minutos, 53 segundos Clase 4: 68 minutos, 12 segundos Clase 5: 66 minutos, 5 segundos  Total de horas efectivas de clase en el desarrollo de la unidad: 6 horas, 27 minutos. Con un total de 365 minutos

Las clases del primer caso de estudio, profesora Ailén, se filman durante el segundo semestre de 2016. Cada sesión tiene idealmente una duración de 90 minutos, sin embargo, en sus clases, son destinados 8 minutos en promedio a cuestiones disciplinares o de organización grupal fuera o dentro del aula. Por lo que se trabaja con 82 minutos aproximados de clase efectiva. En total, la cantidad de minutos efectivos de clase de Ailén en el estudio del desarrollo de su unidad es de 326 (perdiéndose 34 minutos de trabajo).

Las clases del segundo caso de estudio, profesora Sayén, se filman durante el primer semestre de 2017. Cada sesión tiene una duración de 90 minutos, sin embargo, el montaje de la filmación con la instalación de micrófonos, redujo en 4 minutos el tiempo destinado a la docencia, dejando 86 minutos disponibles. Cabe destacar que, 13 minutos aproximadamente, se distribuyen en formación de patio (acción que es realizada antes de ingresar a la sala después de cada recreo), desplazamiento y ubicación en la sala. Por lo que se trabaja con 73 minutos aproximados de clase efectiva. En total, la cantidad de minutos realizados de clase de Ailén en el estudio del desarrollo de su unidad es de 365 (perdiéndose 65 minutos de trabajo)

### C. Instrumentos de filmación

Para la filmación se utiliza una cámara fija sobre un trípode, la cual se ubica en la parte posterior de la sala, mirando a la pizarra, abarcando con el lente el escritorio de la profesora. El dispositivo puesto en juego depende del tipo de clase. Si en su diseño el profesor dispone trabajo en equipos, el lente enfoca a un grupo que le pediremos a la profesora que escoja. Por ejemplo, alumnos que trabajen en clases, comprometidos con la tarea entregada, no se solicita los mejores alumnos, sino que sólo disposición para trabajar. Por el contrario, si es una clase en donde cada estudiante trabaja en forma individual, se ubica la cámara mirando hacia la pizarra y el escritorio de la profesora, sin focalizar el lente en ningún estudiante en particular. Este dispositivo capta el trabajo de los alumnos más próximos a la cámara, pero se mantiene un panorama general de lo que ocurre en clases.

#### 3.2.4 Procedimientos

Se presentan ahora otras herramientas que se han desarrollado y/o usado para disponer y organizar los datos analizar. Se destaca el uso de tablas e ilustraciones, transcripciones y división en episodios.

## A. Herramientas utilizadas

### a. Tablas e ilustraciones

A partir de dos instancias, Bases Curriculares y Programas de estudio, se seleccionan todos los OA relativos a triángulos desde primero a séptimo básico. Luego, se disponen los objetivos en tablas para facilitar el análisis de la circulación de estos la ilustración 10 presenta una vista de la tabla.

**Tabla 7**

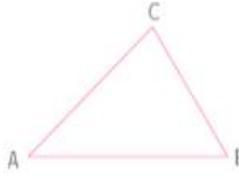
OA que involucran el trabajo de triángulo en tercer año básico

Curso	OA	Descripción
Tercero Básico	15	Demostrar que comprenden la relación que existe entre figuras 3d y figuras 2d: - Construyendo una figura 3d a partir de una red (plantilla). - Desplegando la figura 3d. (Ministerio de Educación, 2013, p.108)
	17	Reconocer en el entorno figuras 2d que están trasladadas, reflejadas y rotadas. (Ministerio de Educación, 2013, p.108)
	21	Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular: - Midiendo y registrando el perímetro de figuras del entorno en el contexto de la resolución de problemas. (Ministerio de Educación, 2013, p.109)

*Ilustración 10 Ejemplo de Tabla de elección OA's*

Para el análisis de *tareas* se extraen imágenes de las actividades relacionadas con la unidad de triángulos, tanto de los Programas de estudio como de los textos escolares. A continuación, se presentan dos ejemplos :

Comprueban congruencia de lados en triángulos trasladados.  
 Por ejemplo, en el triángulo de vértices A, B y C dibujado en una cuadrícula



> trasladan el triángulo 4 unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba  
 > llaman A', B' y C' a los vértices trasladados  
 > completan en los triángulos ABC y A'B'C':  
 a la medida de los lados AB y A'B' es \_\_\_\_\_  
 b la medida de los lados BC y B'C' es \_\_\_\_\_  
 c la medida de los lados AC y A'C' es \_\_\_\_\_  
 Contestan la siguiente pregunta:  
 > ¿qué concluye respecto de la longitud de los lados de los triángulos ABC y A'B'C'?

Ilustración 11 Ejemplo de actividades sugeridas de los Programas de Estudio  
 Fuente: Ministerio de Educación, 2013, p.97

### Construcción de triángulos

#### Construcción de un triángulo conociendo la medida de sus tres lados

A continuación se construirá un triángulo conociendo las medidas de sus segmentos **a**, **b** y **c**, utilizando solo regla y compás.

- Utilizando la regla, traza los tres segmentos **a**, **b** y **c**, respectivamente.
- Ajusta la abertura del compás según la medida de **b**. Apoya la punta del compás en uno de los extremos del segmento **a**, y traza un arco, como se muestra en la figura.
- Repite el procedimiento anterior, ajustando la abertura del compás según la medida de **c**, y traza el arco desde el otro extremo del segmento **a**.
- Utilizando la regla, une los puntos de intersección de los arcos trazados con cada extremo del segmento **a**. De este modo obtendrás un triángulo cuyos lados corresponden a la medida de los lados **a**, **b** y **c**, respectivamente.

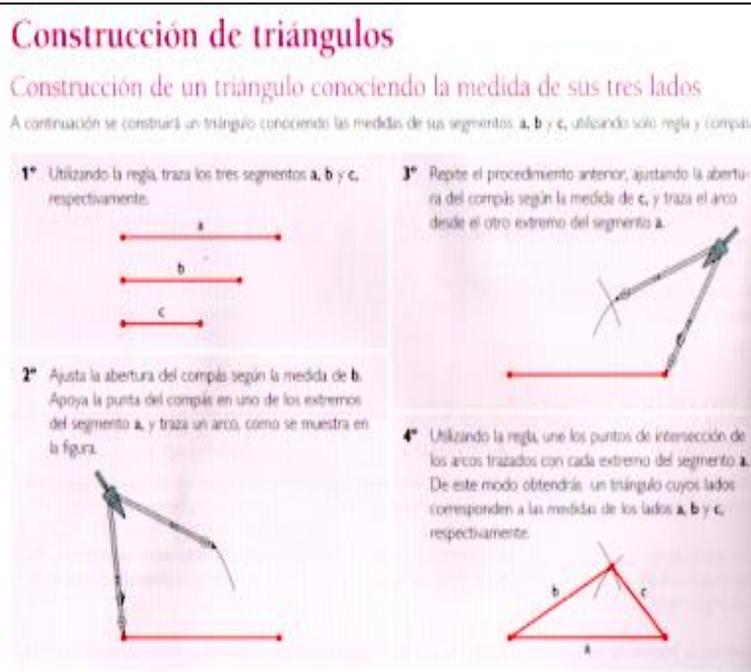


Ilustración 12 Ejemplo de actividades de Textos escolares  
 Fuente: Santillana 2009, p. 96.

## B. Diagrama del Espacio de Trabajo

La ilustración 13 presenta el Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011).



*Ilustración 13 Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático*

Las potenciales actividades matemáticas puestas en los programas de estudio y en los textos escolares se dividen en tareas a modo de poder, en una primera instancia, identificar el despliegue de los componentes del Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático en cada una de ellas (expuesto en el capítulo 2)

## C. División en episodios

Para facilitar el análisis de las clases es necesario dividir las para presentar configuraciones de datos bajo la figura de *episodio*. Por *episodio* se entiende como el momento en que el profesor entrega una tarea, también cuando el profesor modifica la tarea para mejorarla (aclarándola), cuando el profesor aumenta el grado de dificultad, cuando el profesor propicia una puesta en común o realiza una Institucionalización. Un ejemplo mostrado en la siguiente ilustración. Esta división se registra en una columna a la izquierda en cada transcripción de clase

#### Primera Clase Ailén

La clase consta de seis episodios, cuyo objetivo es Construir triángulos dados dos lados y un ángulo

Episodio 1: Evocar conocimientos previos: (0'00''-7'22'')

tarea: ¿cómo puedo construir un ángulo de 45°?

Episodio 2: (7'23''- 16'21'') Responden de manera oral a la pregunta ¿cómo se puede copiar el ángulo de 45°? Explicación de la técnica

Episodio 3: (16'23'' - 23'30'') La profesora dicta los pasos para la copia de ángulos , más ejemplos.

Episodio 4:(23'30'' - 41'34'') Tarea: Dibujar con transportador un ángulo que mida 125° y copiarlo usando compás y regla.

Episodio 5:(41'35'' - 49'49'') La profesora dicta los pasos de la construcción de un triángulo a partir de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Episodio 6: Entrega una guía de trabajo donde deben construir un triángulo a partir de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. (49'50''- 80'00'')

*Ilustración 14 Ejemplo de división de Episodios*

#### D. Transcripción

Para tratar los datos emanados de las grabaciones de clases se realizan transcripciones utilizando el Sistema de código Vion (1992) adaptado por la investigadora.

A continuación, se presentan los códigos.

**Tabla 8**  
*Códigos utilizados en la transcripción de los videos*

Código	Significado
/	Ruptura en el enunciado sin que haya realmente una pausa
\	Interrupción de un enunciado por la intervención de un interlocutor
+, ++, +++	Pausa muy breve, breve, mediana
(p. 15s)	Pausa de 15 segundos
¡,¿?	Indica la entonación
Si:, bueno::	Prolongación de la sílaba o de un fonema que precede. El número de “:” está en función de la prolongación
(risa)	Descripción de aspectos de comportamiento verbal. La duración de esto comporta puede ser marcado sobre la transcripción por la distancia entre 2* (Ejemplo: *(baja la cabeza)*).
<irónico>	comentario o interpretación del transcriptor
<de acuerdo?>	Secuencia inaudible o incomprensible
<mm>	Duda al transcribir de una u otra manera
A	A estudiante no identificado
A <sub>nombre</sub>	Estudiante identificado
“see”	“si” Representación fonético-ortográfico
#	Ausencia inhabitual de guión
PAILÉN O PSAYÉN	Palabras de las profesores respectivamente

La transcripción de cada clase se presenta de la siguiente manera, la primera columna corresponde al episodio de la clase, la segunda al número del turno de palabra ya sea de la profesora o de los estudiantes y la tercera a quién corresponde la intervención. La cuarta columna contiene la transcripción correspondiente al turno de palabra.

Las transcripciones de todas las clases se encuentran en los anexos 3. Un ejemplo de transcripción es ofrecido en la siguiente ilustración:

CLASE 1 AILÉN			
Episodio	TDP	Intervención	Desarrollo
Episodio 1	1	P <sub>Ailén</sub>	(p.48s) (La profesora dibuja un ángulo en la pizarra denominado CAB) Ya +, una acotación. Todo lo que aparezca en la pizarra; si son segmentos o son ángulos, tienen que ser con "medidas reales" en su cuaderno+, no sirve el que usted bosqueje una línea pequeñita y ponga ahí, esto mide dos centímetros, tienen que ser verdaderamente dos centímetros, tiene que ser cuarenta, tiene que ser noventa, ¿ya? ++ Medidas reales. Lo digo por este ángulo de cuarenta y cinco+. Ahora, si usted no trajo esto que+, ¿se llama ++? (Se dirige al curso).
	2	A <sub>todos</sub>	Transportador.
	3	P <sub>Ailén</sub>	¿Cómo puedo construir un ángulo de 45°?+
	4	A	Con el compás.
	5	A	Con escuadra.
	6	P <sub>Ailén</sub>	¿Con la escuadra? La escuadra tiene uno de noventa y yo quiero uno de cuarenta y cinco, ¿cómo lo hago?
	7	A	Por la mitad.
	8	P <sub>Ailén</sub>	¿Y cómo hago la mitad de noventa?
	9	A	Marcando el puntito del grado y que ahí ++ sacando el segmento.
	10		(P. 10s) <<...>> (Golpean la puerta & la profesora atiende).

*Ilustración 15 Ejemplo de transcripción*

### 3.2.5 Análisis

En coherencia al diseño metodológico el análisis del estudio se plantea desde dos ámbitos, el primero desde la información recogida desde las diversas fuentes de información (programas de estudio, textos escolares, clases observadas) y el segundo a partir de elementos teóricos desarrollados en esta investigación considerando los programas y las clases de Ailén y Sayén, emergen el semiplano (en los programas) y el discurso en el Espacio del Trabajo Matemático (clases). Lo que a continuación se detalla.

#### A. Procesamiento preliminar de los datos

##### a.1 Libro de Códigos

La creación del libro de códigos se realiza considerando las siguientes variables y categorías, presentes en la siguiente tabla:

**Tabla 9**

*Composición del libro de Códigos*

<b>Disciplinar</b>		
<b>Variable</b>	<b>Categoría</b>	<b>Código</b>
<b>1. Contenido geométrico</b>	Punto	1.1
	Recta	1.2
	Ángulo	1.3
	Triángulo	1.4
	Segmento	1.5
	Polígono	1.6
	Cuadrilátero	1.7
<b>2. Discurso Oral</b>	Definición	2.1
	Explicación	2.2
	Ejemplificación	2.3
	Instrucción	2.4
<b>3. Acción puesta en juego</b>	Dibujo mano alzada	3.1
	Construcción Armar/ desarmar	3.2
	Construcción mecánica	3.3
	Construcción geométrica	3.4
<b>4. Artefacto</b>	Tecnológico	4.1
	Geométrico	4.2
	“No matemático”	4.3
<b>5. Recurso</b>	Escrito	5.1
	Tecnológico	5.2

La tabla 10 presenta las definiciones de las variables y sus categorías en el área:

**Tabla 10**

*Definiciones de variables y categorías según área*

<b>1. Contenido Geométrico</b>	Conocimiento específico propio de la geometría.
<b>1.1 Punto</b>	Punto es un objeto primitivo de la geometría, no se define. Se les denota con letras mayúsculas.
<b>1.2 Recta</b>	Recta es un objeto primitivo de la geometría, no se define. Sin embargo, de ella podemos decir que está compuesta por infinitos puntos colineales. Además, dos puntos cualesquiera de la recta, determinan un segmento o trazo.
<b>1.3 Ángulo</b>	Un ángulo es una rotación, que se determina a partir de la unión de dos rayos de origen común, de tal manera que a cada punto de uno de los rayos le corresponde un único punto en el otro(en sentido reloj o anti reloj)
<b>1.4 Triángulo</b>	Polígono de tres lados. Sus elementos son: Ángulos, lados y vértices.
<b>1.5 Segmento</b>	Dos puntos cualesquiera de una recta y todos los puntos de la recta entre ellos, determinan un segmento.
<b>1.6 Polígono</b>	Un polígono es una figura geométrica plana compuesta por una colección finita de segmentos, de tal manera que dos segmentos adyacentes se interceptan solo en uno de sus extremos y, segmentos no adyacentes no se interceptan. Los segmentos son llamados lados, y los puntos en que se intersecan se llaman vértices.
<b>1.7 Cuadrilátero</b>	Polígono de cuatro lados
<b>2. Discurso Oral</b>	El profesor construye por medio del discurso oral. Está compuesto por definiciones, explicaciones, ejemplificaciones, instrucciones, comentarios, etc.
<b>2.1 Definición</b>	Describe el objeto matemático en función de sus características
<b>2.2 Explicación</b>	Secuencia simple de causas y efectos.
<b>2.3 Ejemplificaciones</b>	Utiliza los ejemplos para comprender un objeto matemático
<b>2.4 Instrucción</b>	Entrega de secuencias e indicaciones para realizar una tarea

<b>3. Acción puesta en juego</b>	Situación en donde se construyen representaciones geométricas, ya sean materiales o simbólicas por medio de: dibujo a mano alzada, armar/desarmar, construcción mecánica y/o construcción geométrica
<b>3.1 Dibujo a mano alzada</b>	Dibujo hecho a mano, sin uso instrumento.
<b>3.2 Construcción Armar/ desarmar</b>	Ejemplos: utilización de un triángulo para desarmarlo (2D /1D) o de una forma de una dimensión para formar una forma de 2D, en este caso, triángulos.
<b>3.3 Construcción mecánica</b>	Construcciones hechas con escuadra, regla graduada y transportador.
<b>3.4 Construcción geométrica</b>	Aquella construcción realizada con regla no graduada y compás.
<b>4. Artefacto</b>	Herramientas e instrumentos que están al servicio del trabajo geométrico.
<b>4.1 Artefacto Tecnológico</b>	Utilización de software o proyección de video
<b>4.2 Artefacto Geométrico</b>	Herramientas de medición y construcción propias de la geometría (regla, compás, transportador, etc.)
<b>4.3 Artefacto “no matemático”</b>	Utiliza material que fue hecho con otro fin, por ejemplo, palos de maqueta para “armar triángulos” (lana, bombillas, plastilina ...). Estos objetos pertenecen al mundo material, con otro uso, que son escogidos para modelizar. Este artefacto exterior, es exportado
<b>5 Recursos</b>	Materiales escogidos por el profesor, para el desarrollo de la clase
<b>5.1 Escrito</b>	Recursos escritos escogidos para la clase, por ejemplo, guías, textos escolares.
<b>5.2 Tecnológico</b>	Recursos tecnológicos escogidos para la clase, por ejemplo, presentaciones realizadas a través de un proyector.

La validación del instrumento la realiza una colega Magister en Matemática.

### *a.2 Tabla de Frecuencias*

Se utiliza el libro de códigos para confeccionar una tabla de frecuencias por cada video, con intervalos de 15 segundos, indicando cada vez que cada variable aparece, como lo muestra la siguiente ilustración:

	tiempo video	Contenido geométrico	Discurso oral	APJ	Artefacto	Recurso
0:00	11	1.6	2.1			
0:30						
0:15	29	1.6	2.1			
0:45						
1:00	14	1.6	2.1			
1:15						
1:30	20	1.6	2.1			
1:45	15	1.6	2.2			
2:00						
2:15						
2:30						
2:45	8	1.6	2.1			
	23	1.6	2.1			
3:00						
3:15	17	1.6	2.2			
3:30	62	1.5	2.1			4.3

*Ilustración 16 Ejemplo de tabla de frecuencias*

### a.2.1 Conteo de Frecuencias

A continuación, se realiza el conteo de las variables para determinar su frecuencia de aparición, como lo muestra la siguiente ilustración.

<b>Contenido Geométrico</b>	<b>Frecuencia</b>
Punto	0
Recta	1
Ángulo	27
Triángulo	14
<b>Discurso Oral</b>	<b>Frecuencia</b>
Definición	0
Explicación	25
Ejemplificación	5
Instrucción	13

*Ilustración 17 Ejemplo de conteo de frecuencias*

a.2.2 Combinaciones en función de la variable fija tiempo

Se contrasta la información obtenida para obtener las combinaciones en función de la variable fija tiempo. Como lo muestra la siguiente figura.

Contenido	Discurso	APJ	Artefacto	Recurso	Frecuencia	Porcentaje	Promedio	Tiempos	
Triángulo (1.4)	Explicación (2.2)				4			21	
								12	
								25	
								32	
	Explicación (2.2)	Dibujo a mano			Escrito (5.1)	2			28
									57
	Explicación				Escrito	1			30
	Explicación (2.2)	Construcción mecánica		Geométrico (4.2)	Escrito (5.1)	3			89
									92
									46
	Ejemplifica	Dibujo a			Escrito (5.1)	1			95
	Instrucción (2.4)					4			7
									3
									9
2									
Instrucción	Construcci	Geométric		Escrito	1			46	
Instrucción (2.4)				Escrito (5.1)	6			121	
								46	
								3	
								8	
								5	
1									

Ilustración 18 Combinaciones según objeto geométrico

a.3 Gráficos

Se elaboran los gráficos con el procesador de datos Excel

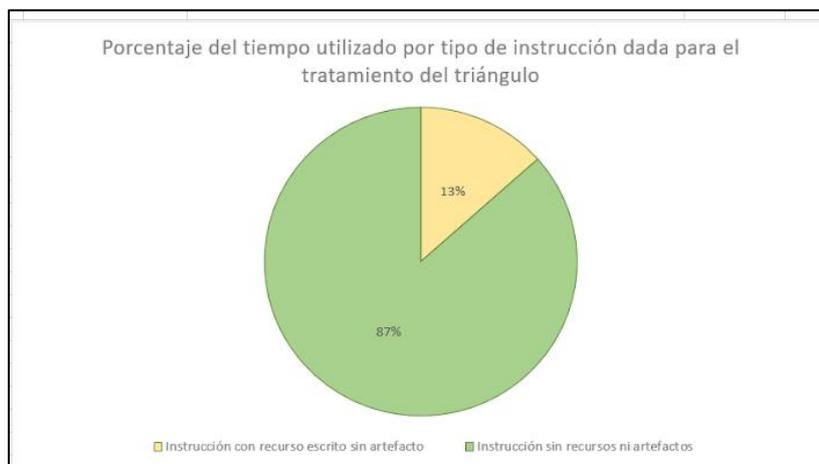


Ilustración 19 Ejemplo de gráfico

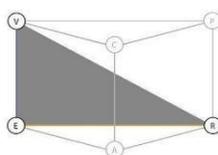
#### *a.4 Informe con análisis descriptivo*

Se escribe el análisis descriptivo en función del tiempo que la profesora destina durante la clase en la utilización de los elementos previamente mencionados en el libro de códigos. El análisis estadístico permite complementar desde una perspectiva cuantitativa la descripción del ETM<sub>G</sub> idóneo de ambas profesoras.

#### B. Elementos del ETM que surgen en los análisis

##### *b.1. Semiplano*

Los hallazgos de esta investigación indican la presencia de nuevas relaciones entre los componentes del plano epistemológico con el plano cognitivo. Estas nuevas relaciones emergen cuando se articulan sólo tres componentes de uno de los planos verticales del ETM<sub>G</sub>, es decir, se está en presencia de una génesis y un componente del ETM<sub>G</sub>. A esta nueva relación se le ha dado el nombre de Semiplano. A continuación, se presenta un ejemplo

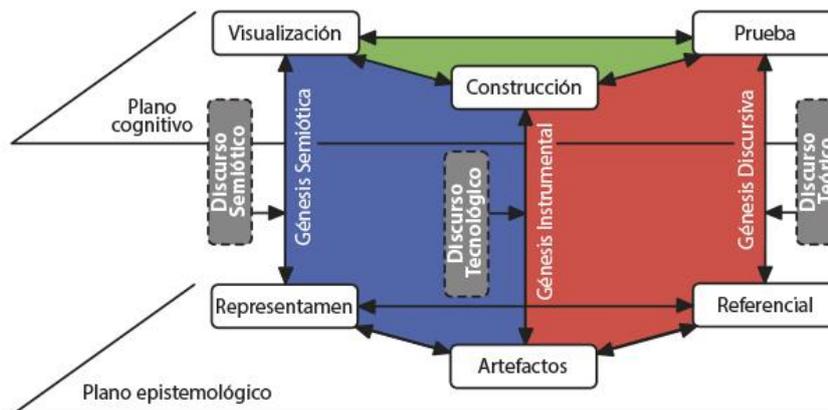


*Ilustración 20 Semiplano [sem - ref]  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018*

El caso corresponde a la ilustración 20 corresponde al semiplano semiótico-referencial (desde ahora [sem-ref]), ya que se observa la génesis semiótica en relación con el componente referencial.

*b.2. El rol del discurso en el espacio de trabajo matemático*

El discurso oral en el desarrollo de la clase toma especial relevancia, puesto que concentra gran parte de las interacciones para llevar a cabo la enseñanza de cualquier objeto matemático. En lo que respecta al ETM idóneo efectivo, esto se observa a partir de las distintas devoluciones que la profesora realiza, ya sea para entregar o solicitar explicaciones, definiciones, o nominación de elementos frente al trabajo de los triángulos. Por tal motivo, y en la lógica de mantener coherencia con el marco teórico del ETM, se decide incorporar tres elementos del lenguaje que hacen referencia a cada una de las génesis del modelo revisado: discurso tecnológico (génesis instrumental), discurso semiótico (génesis semiótica) y discurso teórico (génesis discursiva). A continuación, se presenta una ilustración que grafica la relación de los discursos con cada génesis:



*Ilustración 21 discurso en el ETM  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018*

### Discurso semiótico

El discurso semiótico está referido a la nominación de los objetos matemáticos a través del lenguaje oral y/o escrito. Esta nominación se constituye como el representamen del objeto que permite la evocación del mismo, es decir, la visualización en el plano cognitivo. La génesis semiótica puede originarse desde la visualización, para luego representarla a través del lenguaje oral y/o escrito o viceversa. Ejemplo: nombrar la circunferencia.

### Discurso tecnológico

El discurso tecnológico se entiende como la interacción del discurso oral y/o escrito sobre los elementos comprendidos en la génesis instrumental, ya sean pertenecientes al plano epistemológico y/o cognitivo.

Cuando el discurso describe el plano epistemológico, como por ejemplo si se declara: “tomamos el compás para dibujar una circunferencia”. Si el discurso apoya un hecho cognitivo, por ejemplo: “las indicaciones de como se debe utilizar el compás, haciendo centro en un punto...” aquí se está en presencia del uso del instrumento, que va a entrar en el proceso de construcción siguiendo los pasos de la técnica que se está utilizando, trabajando así el plano cognitivo.

### Discurso teórico

El discurso teórico corresponde a la evocación de los componentes de la génesis discursiva, es decir, las propiedades matemáticas de los objetos puestos en juego a partir del lenguaje oral y/o escrito. Dentro de este tipo de discurso, en el plano cognitivo se incorporan las explicaciones (Balacheff, 1987) las cuales permiten identificar en el plano epistemológico las características pertenecientes al referencial teórico. Si esto ocurre existe sólo una relación que va desde el referencial hasta la prueba, no existiendo génesis discursiva. Ejemplo: explicar por qué utilizar el compás.

C. Análisis de datos de documentos preliminares (Programas de estudio y textos escolares)

- a) Como se señala en los procedimientos, se seleccionan los OA que estén relacionados explícitamente o implícitamente con triángulos, luego se revisan las actividades que están vinculadas al tratamiento de los triángulos. Con esta información, se realiza el análisis según ETM<sub>G</sub>.
- b) Si la actividad tiene tres o más tareas con circulación distinta al finalizar el análisis se presenta un cuadro de desglose con la circulación de las tareas. Si las tareas tienen los mismos componentes y la misma circulación se muestra una sola circulación. Si tiene distintos componentes y la misma circulación se presenta el cuadro de desglose.
- c) Se categorizan las tareas por las circulaciones presentes para luego sumarlas y analizarlas.
- d) En los textos escolares se analizan las circulaciones de las tareas presentes en las clases de las profesoras Sayén y Ailén, según los ETM<sub>G</sub>.
- e) Análogamente, se realizan los análisis de acuerdo a las letras b) y c).
- f) Todos estos análisis detallados se encuentran en los anexos 1: Programas de Estudio y 2: Textos Escolares.

Los análisis anteriores, permiten responder a las preguntas P1, P2, P3 y P4.

D. Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo de las clases de las profesoras Ailén y Sayén.

El estudio se divide en tres partes:

- i. Determinar los episodios de cada clase:  
Primero se lee la transcripción, sobre ella se identifican las tareas que la profesora entrega a sus estudiantes. Luego se revisa el video para corroborar los episodios encontrados.
- ii. Análisis de cada tarea según el modelo de la teoría de los ETM<sub>G</sub>

Se analiza cada tarea utilizando el modelo del ETM<sub>G</sub>, luego se vuelve a mirar el video para observar cómo se regula la tarea y cómo progresa y se movilizan los componentes en el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo de cada profesora.

- iii. Se elabora el escrito con los hallazgos encontrados.  
Respondiendo a la P5 desarrollada en el capítulo 6.

E. Descripción del ETM<sub>G</sub> idóneo en la clase de cada profesora desde una perspectiva cuantitativa.

- Análisis de cada caso de Estudio: Esta sección analiza articuladamente la información cualitativa con la cuantitativa en torno a las tareas relativas a triángulos analizadas por las profesoras.

F. Cruce de los análisis de cada caso con el análisis ETM<sub>G</sub> de referencia y ETM<sub>G</sub> idóneo en los textos escolares.

Finalmente, todos los análisis anteriores permiten nutrir la búsqueda de respuestas para los objetivos de investigación planteados (ver capítulo 2). Estos resultados encontrados se reflejan en el capítulo 7.

## Parte 2 Caracterización, análisis y resultados

---

La segunda parte de la presente tesis, abarca desde el capítulo cuatro hasta el siete para articular lo denominado “caracterización, análisis y resultados”.

El capítulo 4 corresponde al estudio del Espacio de Trabajo Matemático de referencia de los triángulos que presenta el currículum nacional chileno, el cual se constituye a partir de dos instancias: la primera a partir de las bases curriculares, elaboradas por el Mineduc, en donde se encuentran los objetivos de aprendizaje del currículum nacional, que obligatoriamente deben ser tratados en cada uno de los años de escolaridad. La segunda instancia se conforma por los programas de estudio que se elaboran a partir de las bases curriculares.

El capítulo 5 tiene por objetivo caracterizar el Espacio de Trabajo Geométrico Idóneo potencial de los textos escolares utilizados por los casos de estudio. Para lo anterior se contempla el abordaje de los triángulos a partir de las actividades presentes en los textos escolares de séptimo básico utilizados por la profesora Sayén, quien es profesora básica con mención en matemática y la profesora Ailén, quien es especialista en matemática.

El capítulo 6 se denomina Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo en las clases de Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos. En este capítulo se presenta el análisis de las secuencias de clases diseñadas por una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemática.

El capítulo 7 se denomina Conclusiones y Proyecciones, este capítulo se estructura en tres partes. En la primera, se presentan los hallazgos de este estudio, estos se exponen a la luz de los objetivos trazados en orden de aparición, los tres objetivos específicos concluyendo con el objetivo general. La segunda parte relata las limitaciones de esta investigación y la tercera, señala las proyecciones.

## Capítulo 4: Caracterización del ETM<sub>G</sub> de referencia de primero a séptimo básico en torno a los triángulos

En este capítulo se aborda el estudio del Espacio de Trabajo Matemático de Referencia de los triángulos que presenta el currículum nacional chileno, el cual se constituye a partir de dos instancias señaladas anteriormente en la introducción de la parte dos.

Así se busca responder a la pregunta de esta investigación:

- P1: ¿Cómo se caracteriza el ETM<sub>G</sub> de referencia en torno a los triángulos en Chile?

Para esto se ha llevado a cabo el análisis de los documentos ministeriales oficiales de primero a séptimo básico, específicamente lo referente a los objetivos de aprendizaje y las actividades abordadas en torno a los triángulos. Dada la forma en que se realiza el tratamiento de los triángulos de acuerdo a los niveles presentados, se decide separar el análisis en cuatro instancias

1. Caracterización del ETM<sub>G</sub> de los OA y de las tareas identificadas en las actividades sugeridas por los programas de estudio.
2. Comparación por curso entre la potencial circulación de cada objetivo de aprendizaje y potencial circulación de las tareas identificadas en las actividades sugeridas por los programas de estudio.
3. Caracterización de las génesis semiótica, discursiva e instrumental de las tareas identificadas en las actividades sugeridas por los programas de estudio.
4. Conclusiones a partir de la caracterización de los ETM.

La caracterización del ETM<sub>G</sub> se presenta primero por medio de un ejemplo de circulación para el OA. Luego, para dar cuenta de los hallazgos respectivos a las tareas presentes en las actividades, se decide agrupar las tareas en categorías, las cuales surgen a partir de las circulaciones que emergen desde los análisis realizados, los detalles de estos análisis se encuentran en el anexo 1.

A continuación, se elabora un cuadro resumen con todas las circulaciones del  $ETM_G$  de cada curso para posteriormente caracterizar de manera individual el tratamiento de triángulos desde primero hasta séptimo básico en función de los componentes que movilizan.

Finalmente, se presentan las conclusiones del capítulo.

#### 4.1 $ETM_G$ de referencia en los Objetivos de aprendizaje y actividades sugeridas en los programas chilenos para el tratamiento de triángulos.

En la configuración del espacio de trabajo matemático de referencia, los objetivos de aprendizaje se constituyen como el eje paradigmático que determina posteriormente las actividades sugeridas por los programas de estudio.

Dada las características de cada uno de los objetivos de aprendizaje, estos se analizan en función de los potenciales componentes del  $ETM_G$  que se movilizan a partir de la redacción del OA.

A continuación, se presenta el análisis del Objetivo de aprendizaje 12 de séptimo básico, el cual permite ejemplificar la aparición de los componentes del  $ETM_G$ .

##### 4.1.1 Análisis Objetivo de Aprendizaje 12

**Objetivo de Aprendizaje**

**OA 12**  
Construir objetos geométricos de manera manual y/o con *software* educativo:

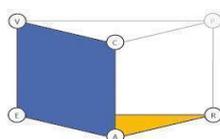
- › Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros.
- › Puntos, como el punto medio de un segmento, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito.
- › Triángulos y cuadriláteros congruentes.

*Ilustración 22 Objetivo de Aprendizaje 12 para séptimo básico  
Fuente: Ministerio de Educación, 2017, pág 47*

El potencial del OA 12 permite identificar los planos: a) semiótico-instrumental [sem-ins] y b) epistemológico.

a. El plano [sem-ins] es posible identificarlo por medio de “Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo...”, ya que primero da cuenta de la génesis instrumental mediante la solicitud del proceso de construcción por medio del verbo “construir” y, los artefactos se identifican por medio de “objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo...”. En segundo lugar, se evidencia la génesis semiótica por medio de los objetos geométricos construidos.

b. El plano epistemológico se observa en el objetivo al indicar como componente referencial a “...en triángulos y cuadriláteros...”, que, en conjunto con los componentes identificados en la génesis semiótica y la génesis instrumental, es posible conformar el plano epistemológico completo.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

#### 4.1.2 Actividades y tareas

Cada una de las actividades a lo largo del programa presenta una configuración determinada en torno a las tareas matemáticas que moviliza. Esta configuración permite que emerjan tres categorías que dan cuenta del comportamiento de las potenciales circulaciones del Espacio de Trabajo Matemático en las tareas previamente mencionadas. Por lo tanto, dichas categorías están diseñadas en función de las actividades y las tareas que éstas despliegan para el tratamiento del objeto triángulo.

Con la finalidad de explicitar y diferenciar cada categoría, a continuación, se explica cada una de ellas ejemplificando con una actividad que permita graficar cada caso.

**Categoría 1:** Actividades con más de una tarea, que movilizan distintos componentes

Esta categoría emerge a partir de actividades que permiten separar su consigna en diferentes tareas matemáticas. La particularidad de este tipo de actividad, es que las tareas identificadas presentan distintas potenciales circulaciones para llevar a cabo el tratamiento del triángulo. Dependiendo del tipo de actividad, las tareas pueden ser dependientes una de otra, es decir, existe una secuencia lógica que concatena las tareas realizadas. Por otro lado, existen aquellas actividades que presentan distintas tareas que no son interdependientes entre sí.

En la actividad 3 de primero básico, presentada a continuación, se observa una combinación entre estos dos tipos de actividades, las partes *a* y *b* no presentan dependencia una de la otra. Sin embargo, la parte *c* presenta dos tareas que se relacionan entre si.

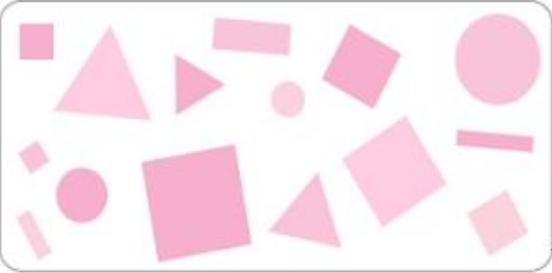
### Actividad 3

a Identifican figuras 2 D que tengan forma de cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo:

- > en la sala de clases
- > en el colegio

b Recortan de revistas figuras que tengan forma de cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo. En grupos de tres alumnos, forman con ellos diferentes figuras. (Tecnología, Artes Visuales)

c Observan la lámina siguiente:



> Recortan las figuras de la lámina

> Clasifican las figuras recortadas, usando un criterio, luego dos a la vez, y finalmente criterios propios.

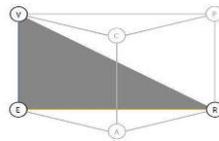
*Ilustración 24 Actividad 3 propuesta para el MAT01 OA 14.  
Fuente: Ministerio de Educación, 2013, p.91 - 92*

### Análisis Actividad 3

En esta actividad se presentan cinco tareas para llevar a cabo la identificación de distintas figuras geométricas, tanto en el entorno como por medio de material tangible.

Así, para la parte a se solicita identificar figuras geométricas en su contexto mediato, ya sea en la sala de clases o en el colegio. De esta manera, es posible observar la génesis semiótica por medio de las formas que identifican los estudiantes en su contexto, específicamente lo que refiere a triángulo, en donde el referencial corresponde al concepto de triángulo. Dada la naturaleza de la tarea, no se solicita la utilización de artefactos y por ende no existe proceso de construcción, como tampoco proceso de prueba. Así, la tarea privilegia el reconocimiento del objeto triángulo por medio de la percepción visual. Por lo tanto, al estar

en presencia únicamente de la génesis semiótica en conjunto con el componente referencial, emerge el semiplano semiótico-referencial (desde ahora semiplano [sem-ref]), lo anterior se observa en la siguiente ilustración 20.

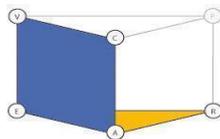


*Ilustración 20 semiplano [sem - ref]*

Dada las características que presenta la tarea, es posible encontrar una nueva forma de circulación del  $ETM_G$ , a esta nueva forma se le denomina semiplano, puesto que, de acuerdo a los componentes involucrados en la circulación y la relación entre estos, se produce una movilización del plano originalmente definido como Semiótico-Discursivo. Cabe señalar que la incorporación de este semiplano permite categorizar aquellas tareas que para cursos iniciales están asociadas sólo a la identificación o al reconocimiento perceptivo de objetos matemáticos y / o propiedades.

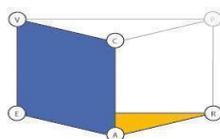
Luego de lo anterior, deben llevar a cabo la parte *b* en donde es posible identificar dos tareas matemáticas de forma simultánea: primero recortar figuras y luego con estas crear nuevas figuras.

De esta manera, recortar figuras es tarea matemática, en cuanto para realizarlo es necesario identificar el objeto triángulo, quien además es componente referencial. La génesis instrumental se constituye a partir del recorte de los triángulos, donde finalmente estos permiten identificar el representamen junto a la visualización del triángulo. Por lo tanto, en esta primera parte están presentes los planos semiótico-instrumental y epistemológico, lo que se muestra en la ilustración 23.



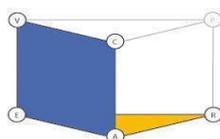
*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

A continuación, realizado los recortes, deben crear nuevas figuras por medio de la combinación de los mismos. Así la génesis semiótica está dada por las nuevas formas construidas, en donde éstas corresponden al representamen. La génesis instrumental está presente a partir de las figuras recortadas que se constituyen como artefactos y, el proceso de construcción se observa a partir de la manipulación de los recortes para formar las nuevas formas, en donde el concepto de triángulo corresponde al referencial. Dado lo anterior, está presente nuevamente el plano semiótico-instrumental y el epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

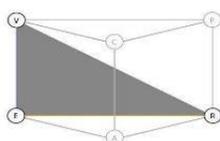
Finalmente, para la parte c se desprenden dos tareas que corresponden a recortar figuras presentes en una hoja de trabajo y luego clasificarlas. Por lo tanto, se identifican para la primera tarea los mismos componentes y planos que para la tarea descrita previamente con la excepción del representamen que es distinto en este caso (ficha de trabajo). Por lo tanto, se presenta el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

Por último, finalizado el recorte, deben clasificar las formas de acuerdo a ciertos criterios. Se identifica a las figuras recortadas como el representamen junto a su respectiva visualización, en donde el componente referencial corresponde al concepto de triángulo. Así, la génesis

semiótica se relaciona con el referencial y, por lo tanto, para esta segunda tarea se está en presencia del semiplano [sem-ref].



*Ilustración 20 Semiplano [sem - ref]*

**Categoría 2:** Actividades con tareas de igual circulación, pero con distinta configuración de sus componentes.

Esta categoría presenta una particularidad en el tipo de circulaciones identificadas, puesto que, la circulación del  $ETM_G$  de dos o más tareas distintas movilizan los mismos componentes y, por ende, los mismos planos. Sin embargo, cada componente está materializado de manera diferente, en función de los requerimientos que la tarea demande. Por ejemplo, solicitar que construyan un triángulo utilizando regla y compás o, utilizando regla y transportador. Para ambos casos está presente la génesis instrumental, pero varía el tipo de artefacto utilizado. Esta diferenciación puede evidenciarse en uno o más componentes, dependiendo del tipo de tarea.

Un ejemplo de lo anterior, corresponde a la actividad 3 propuesta para sexto básico en el OA 12.

### Actividad 3

Construyen triángulos con regla y con un transportador, teniendo información acerca de la medida de sus lados y ángulos interiores. Por ejemplo:

- › conociendo que dos de sus lados miden 6 cm y 8 cm y sabiendo que el ángulo entre esos lados mide  $40^\circ$
- › conociendo que un lado mide 10 cm y sabiendo que dos de sus ángulos interiores miden  $60^\circ$  y  $50^\circ$
- › construyen dos triángulos escalenos de ángulos interiores  $50^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $70^\circ$

registrando los pasos que dieron para la construcción de manera comprensible y ordenada.

*Ilustración 25 Actividad 3 propuesta para el MAT06 OA 12. Pág. 110  
Fuente: Ministerio de Educación, 2013*

### Análisis actividad 3

La actividad solicita la construcción de tres triángulos distintos, a partir de la entrega, para cada caso, de la medida de lados y/o ángulos interiores. Sin embargo, cabe hacer notar que en las dos primeras tareas las construcciones pedidas son únicas, salvo isometrías. A diferencia de la tarea 3, la cual tiene infinitas posibilidades de construcción.

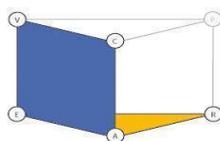
Dado lo anterior, se observa una misma tarea que se repite tres veces. Pero estas tareas se diferencian por una parte, debido al tipo de elementos que se entregan como información y por otra, a los elementos puestos en juego que permiten dichas construcciones. Perdiéndose de esta manera la posibilidad de abordar, por ejemplo, el concepto congruencia de triángulos y los teoremas que permiten construir un único triángulo (salvo congruencia). El concepto de congruencia de triángulos no es parte del programa en este nivel, aunque la actividad se presta para abordarlo.

Desde otra mirada, la actividad desperdicia la oportunidad de promover el desarrollo del razonamiento geométrico, puesto que no intenciona la comunicación de las construcciones realizadas.

Por esta razón, el referencial para cada caso corresponde al concepto de triángulo, junto a los conceptos de lado y ángulo. Además, la regla y el transportador cumplen el rol de

artefacto y su uso permite originar el proceso de construcción, observando así la génesis instrumental. Sumado a esto, los triángulos construidos corresponden al representamen junto a su respectiva visualización, dando paso así a la génesis semiótica.

Luego de lo anteriormente descrito, la circulación de las tres tareas activan el plano epistemológico y el plano semiótico-instrumental.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

Ahora bien, la diferenciación de componentes se observa en el representamen, puesto que, si bien en las tres tareas este componente corresponde al concepto de triángulo, para cada caso existe una representación distinta del mismo, debido a la diferenciación de la medida de los lados y los ángulos. Esto implica, entonces, que la tarea matemática está estructurada a partir del verbo que la actividad propone. Por lo tanto, para el verbo *construir* independientemente que la materialización de cada uno de los componentes sea distinta, siempre estará presente la misma circulación para este tipo de tarea.

### **Categoría 3:** Actividades con una tarea

Esta categoría se caracteriza específicamente por la presentación y extensión de la consigna de actividad, puesto que se presentan de manera breve en comparación con las otras dos categorías presentadas.

Un ejemplo de la descripción anterior corresponde a la Actividad 5 propuesta para el OA 12 de sexto básico, la cual se presenta a continuación.

### Actividad 5

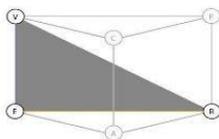
Comparan la longitud de los lados de un triángulo de acuerdo a la medida de sus ángulos interiores.

*Ilustración 26 Actividad 5 propuesta para el MAT 06 OA 12.  
 Fuente: Ministerio de Educación, 2013, p.111*

### Análisis actividad 5

En esta actividad, se espera que los estudiantes identifiquen relaciones existentes entre, por ejemplo, las medidas de sus lados con respecto a la medida de sus ángulos interiores que se oponen a estos, o que, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes, etc. En la consigna de la actividad no hay solicitud de algún tipo de argumentación que permite justificar o explicar las relaciones encontradas. La consigna de la actividad no presenta desafíos que permitan al estudiante obtener la mayor cantidad de relaciones con las debidas explicaciones ni menos argumentaciones que justifiquen sus hallazgos, no existiendo proceso de prueba. Como no se solicita algún tipo de construcción, la génesis instrumental no está presente.

De esta forma, el representamen se identifica por la representación de los triángulos. El componente referencial corresponde a los teoremas relativos a lados y ángulos en un triángulo. Por lo anterior, la génesis semiótica y el referencial permiten identificar el semiplano [sem-ref].

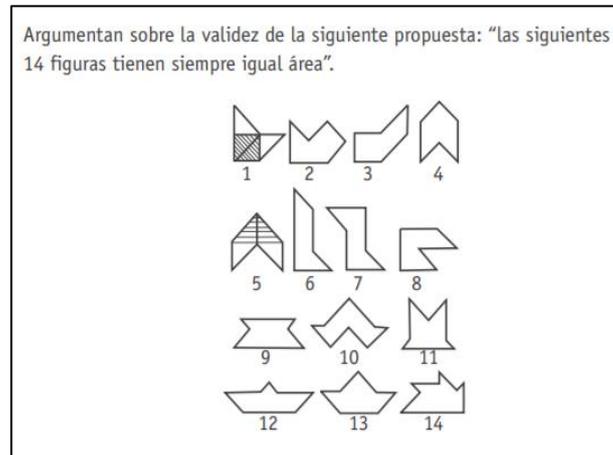


*Ilustración 20 Semiplano [sem - ref]*

Se observa entonces, que cada actividad es una tarea en sí misma.

Otro ejemplo de esta categoría se extrae del programa del séptimo básico.

## Actividad 2



*Ilustración 27 Actividad 2 propuesta para Mat 07 OA 13.  
 Fuente: Ministerio de Educación, 2016, p.153*

### Análisis actividad 2

Se espera que los estudiantes argumenten la igualdad o no de las áreas de todas las figuras. Cabe destacar, que en la consigna de la actividad lo temporal no es pertinente (“siempre”). Por otra parte, si bien no se solicita explícitamente, la idea es que por medio de la división de las figuras en triángulos, puedan establecer las argumentaciones solicitadas, por lo que la génesis instrumental también es posible identificarla. Así, las catorce figuras conforman el representamen, junto a la respectiva visualización que da paso a la génesis semiótica. Sumado a esto, el referencial se ve apoyado por la argumentación que se espera que los estudiantes realicen a partir de las áreas de las figuras, por lo tanto, la génesis discursiva también está presente.

Dada la presencia de la génesis semiótica, instrumental y la génesis discursiva, las interacciones de sus componentes permiten la circulación del plano completo, lo cual se ilustra continuación.



*Ilustración 13 Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático*

Las categorías antes mencionadas se observan en la siguiente tabla resumen, recordando que cada actividad del programa es una secuencia de tareas matemáticas

**Tabla 11.**

*Resumen de actividades y sus tareas matemáticas organizadas por categorías según curso*

Categoría Curso	Categoría 1		Categoría 2		Categoría 3
	Actividades	tareas	Actividades	tareas	tareas
1 ° Básico	1	5	0	0	0
2 ° Básico	1	3	3	9	2
3 ° Básico	0	0	1	5	2
4 ° Básico	1	2	0	0	1
5 ° Básico	2	9	2	4	2
6 ° Básico	3	9	11	28	3
7 ° Básico	5	14	4	8	4
Total	13	42	21	54	14
Porcentaje	27		44		29

De la información presente en la tabla se aprecia que el 44 % de las secuencias de tareas corresponden a la categoría dos, en donde se repite la misma tarea cambiando uno o más componentes del  $ETM_G$ . Esta categoría presenta 21 secuencias de tareas de primero a séptimo, sin embargo, el 52 % se concentra en sexto básico. Existe una diferencia de dos actividades entre la categoría tres y la uno. El 54,7 % de las secuencias de la categoría 1 se encuentran en sexto y séptimo básico.

## 4.2 Caracterización por curso de las circulaciones del ETM<sub>6</sub> presentes en los OA y las actividades sugeridas.

### 4.2.1 Primero Básico

Es posible constatar que al comparar el OA con la actividad presente, identificar y *recortar* corresponden a los principales verbos que orientan el trabajo matemático durante este curso. Esto debido, a que en este curso es la primera instancia en la que a los estudiantes se les presenta de manera formal el concepto de triángulo en la educación básica, se espera que sean capaces de identificarlo desde la experiencia perceptiva y manipulativa.

En cuanto a la relación que existe entre lo declarado por el OA y las actividades, se observa que en la actividad se trabaja el concepto de identificar las “figuras 2d” a lo largo de las tareas presentes, de la misma manera que en el OA, es decir, los conceptos de figuras y forma son presentados como sinónimos. Sin embargo, la acción de relacionar las “figuras 2d con las 3d”, como se declara en el OA, no aparece de manera explícita en el despliegue de tareas en la actividad analizada. Asimismo, no está presente la génesis discursiva, debido a la ausencia del componente prueba.

En lo que respecta a la génesis semiótica, en ambos casos emerge a partir de la utilización de material concreto, que en el caso de la actividad corresponde a los recortes de triángulos. Sin embargo, en lo que respecta a la génesis instrumental, está presente en las tareas por medio de los recortes realizados y luego a través de la agrupación de las figuras para formar nuevas. Lo anterior presenta una diferencia con lo declarado por el OA, ya que en este se establece el proceso de construcción por medio de la relación de figuras, lo cual no es posible observar en la actividad analizada.

#### 4.2.2 Segundo Básico

La relación entre el OA con el trabajo matemático a lo largo de las seis actividades, se observa a partir de la coherencia en la naturaleza de los verbos presentados como también al referencial teórico trabajado. En cuanto a la naturaleza de los verbos, se observa que *identificar*, *describir*, *nominar*, *comparar* y *construir* orientan el trabajo matemático a lo largo de las actividades presentadas en el curso. Lo anterior, permite observar que las tareas aumentan en el nivel de complejidad en función de los verbos. Así, comienzan con tareas que implican el describir e identificar, para posteriormente incorporar aquellas donde deben realizar la construcción de triángulos utilizando material concreto.

En lo que respecta al referencial teórico presentado en el OA, también se observa una coherencia en lo trabajado a lo largo de todas las actividades, ya que el concepto de triángulo es el que se mantiene de manera invariable durante todas las tareas del curso.

Observadas las génesis presentes en el OA, se identifica primero el semiplano [sem-ref] en relación a los verbos relacionados con el *identificar* y *describir* los triángulos. Este semi plano, también se encuentra en las actividades que solicitan el mismo tipo de tarea.

Por otro lado, se observan dos tipos de génesis instrumental. El primer tipo corresponde a la construcción de triángulos por medio del recorte, y el segundo tipo a la construcción de triángulos por medio de cuerdas de distinta medida.

Finalmente, se incorpora el proceso de prueba de tipo pragmática, con un carácter de empirismo ingenuo, debido a que se considera a la figura utilizada como un representante de la familia de triángulos, dando origen así a la génesis discursiva.

Sumado a esto, al igual que lo declarado en el OA, los conceptos de figura y forma son utilizados como sinónimos en el desarrollo de las actividades.

#### 4.2.3 Tercero Básico

A través de las tres actividades y los tres OA presentes para este curso, es posible determinar que, en términos de las génesis en los OA, en el OA 17 se observa solo el semiplano [sem-ref], puesto que solicita únicamente identificar perímetros. A diferencia como ocurre con el OA 21 que además solicita que demuestren que comprenden el concepto de perímetro. Por lo tanto, para el OA 21 se incorpora la génesis semiótica, ya que el verbo “demostrar” se asocia a la experiencia empírica de constatar.

Estos verbos, a su vez, orientan todo el trabajo matemático a lo largo de las actividades, específicamente por medio de los procesos de construcción, ya sean estos medir o construir formas.

En esta misma línea, el espacio real y local, es representado por medio de formas, y los artefactos no son especificados de manera explícita, aunque se infiere que se deben utilizar herramientas de dibujo o fórmula para realizar la medición y el cálculo de perímetro. Por otro lado, el referencial teórico en ambos OA, como en las actividades presentadas, corresponde al concepto de perímetro.

Cabe señalar, que, en tercero básico, el concepto de figura también es utilizado como sinónimo de forma. También es posible señalar la ausencia del proceso de prueba, tanto en los OA como en las actividades presentes.

Finalmente, se observa que el trabajo matemático sobre el cálculo de perímetro se realiza por medio de fibraciones externas, cuando se refiere específicamente a medir. Esto queda de manifiesto cuando se trabaja sobre triángulos con la medida en cada uno de sus lados, cuando el cálculo y posterior resultado de éste se expresa en términos numéricos.

#### 4.2.4 Cuarto básico

Se identifica que existe una progresión en torno a la complejidad en el referencial teórico en ambos OA presentes para este curso, ya que, para el OA 17 se realiza el trabajo matemático a partir de los verbos a *identificar* y *construir* simetrías en triángulos semejantes. Este trabajo permite posteriormente la incorporación del concepto de transformaciones isométricas en el OA 18, en donde, el trabajo está explícitamente orientado a realizar estas transformaciones a triángulos.

En lo que respecta a las génesis encontradas, existen dos tipos de circulaciones, la primera corresponde al semiplano [sem-ref], el cual se hace presente con el verbo *identificar* en conjunto con el concepto de simetría de triángulos como referencial teórico existiendo, además, ausencia del proceso de prueba; la segunda circulación se orienta a partir de la inclusión de la génesis instrumental, específicamente a lo que refiere al trazado los ejes de simetría para ambas actividades. Así, los verbos *identificar* y *construir* orientan el trabajo matemático, tanto de las actividades como de los OA.

Por otro lado, el espacio real y local es representado por medio de triángulos, ya sean identificados en el entorno o presentados en una hoja cuadriculada, la cual corresponde tanto a los artefactos a utilizar, como también a herramientas de dibujo para realizar el trazado de las líneas de simetría.

Sumado a lo anterior, también para este curso se utiliza nuevamente el concepto de figura como sinónimo de forma.

#### 4.2.5 Quinto Básico

Es posible observar que las acciones que orientan el trabajo matemático para quinto básico están estructuradas a partir de los verbos *demostrar* y *calcular*. El primero presenta la misma acepción utilizada para los cursos anteriores, es decir, constatar generalidades por medio de la experiencia empírica. Por otro lado, el verbo *calcular* presente en el OA 22, indica explícitamente que en esta segunda parte el trabajo matemático está orientado a trabajar el cálculo de áreas de triángulos.

De esta manera, el concepto de triángulo para este curso tiene una lógica referida a que, en primera instancia, el *demostrar que comprenden la congruencia*, se constituye posteriormente como el conocimiento previo para poder trabajar las transformaciones isométricas como estrategia válida en la realización del cálculo de área de triángulos representados en una cuadrícula.

Así, el espacio real y local que toma fuerza en este curso, corresponde al de triángulos en una cuadrícula, los que a su vez también se constituyen como artefacto para realizar las transformaciones isométricas y realizar los conteos o estrategias para calcular las áreas. Sin embargo, las diferencias significativas se encuentran cuando se comparan los componentes referenciales que son desplegados a lo largo del curso. Esto se debe a que para el OA 18, se declara trabajar la congruencia de triángulos. Sin embargo, las tareas presentes permiten sólo el trabajo de la congruencia de segmentos de un triángulo.

Caso contrario ocurre para el OA 22, en donde se declara y se trabaja con el referencial correspondiente a área de triángulo en donde las tareas se diferencian por medio de los artefactos puestos en juego, ya sea por medio del conteo de cuadros o la aplicación de transformaciones isométricas.

Así mismo, el proceso de prueba presente en este curso tiene relación exclusivamente con explicar las posibles estrategias utilizadas para realizar el cálculo de áreas de triángulos representados en la cuadrícula, las cuales corresponden a pruebas de tipo pragmáticas, con un carácter de empirismo ingenuo, es decir, se solicita explicar las propiedades presentes en los ejemplos que se muestran a los estudiantes.

Por lo tanto, al comparar los objetivos de aprendizaje que abordan los triángulos, se observa una diferencia en su circulación, específicamente por la ausencia del componente prueba para el OA 22, lo que significa la no inclusión de tres planos: [sem-dis], [ins-dis] y el plano cognitivo.

#### 4.2.6 Sexto básico

Analizadas las circulaciones de los OA, se observa que el trabajo matemático para este curso se origina a partir de los verbos *construir*, *comparar*, *teselar*, *demostrar* y *calcular*. El trabajo matemático en este curso, desde su planificación, está constituido por verbos o acciones que implican la construcción del objeto matemático en cuestión. Estas construcciones presentan dos tipos de naturaleza: una relacionada con la utilización de artefactos geométricos, como *lo son construir*, *teselar* y *demostrar*; y por otro lado aquellas asociadas al cálculo, las cuales están asociadas a procesos de medición de ángulos.

Así, el objeto triángulo es trabajado abordando de manera experimental diferentes teoremas: la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, el concepto congruencia de triángulos y los teoremas que permiten construir un único triángulo, sin embargo la manera como se plantean las tareas geométricas no potencian los teoremas citados. En este curso el tipo de tareas propuestas son muy sencillas, sin solicitar al estudiante las explicaciones ni argumentos de lo que realiza, desperdiciándose la oportunidad de focalizarse en teoremas fundamentales y desarrollando pensamiento crítico tan ausente en lo analizado hasta el momento. Caso aparte, es como se aborda la

desigualdad triangular, la actividad que presenta el programa<sup>17</sup> se intenciona el descubrimiento de que no todos los triángulos son posibles de construir a través de la presentación a través de dibujos de dos casos imposibles mostrados como posibles. En el primer dibujo, la suma de las medidas de dos de sus lados da como resultado un valor menor que el tercer lado dado y el segundo, la suma de las medidas de dos de sus lados es igual a la medida del tercer lado. Si el estudiante visualiza los dos triángulos y los asocia con las medidas respectivas a cada lado, se produce una contradicción entre el ver y el saber. Sobre todo, si intenta realizar la construcción de triángulos con medidas que son de casos imposibles de realizar, aquí hay una contradicción entre el ver y el resultado de la construcción. Si el profesor entrega esta tarea tal cual como está presentada puede generar obstáculos en los estudiantes.

Dado lo anterior, se evidencia que para este curso el representamen en todos los casos corresponde a la representación de un triángulo dibujado, exceptuando el caso en donde se debe comprobar con material concreto (papel) que la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , lo cual constituye el proceso de visualización. En esta misma línea, los verbos indican explícitamente el proceso de construcción solicitado. Sin embargo, los artefactos solicitados varían en función del objetivo de aprendizaje que oriente la tarea matemática. De esta manera los artefactos que se utilizan para llevar a cabo las construcciones corresponden a regla, compás, transportador y los mismos triángulos utilizados para teselar.

La regla, compás y transportador se utilizan como artefactos con un doble rol: medir y construir triángulos. Lo anterior a partir de la medida de los lados y/o ángulos interiores de triángulos. Sumado a esto, esta medición o construcción también es utilizada como mecanismo de comparación, clasificación, teselado o constatación para la resolución de problemas.

---

<sup>17</sup> Anexo p. 65

El proceso de prueba se constituye como la acción sobre objetos para justificar el teorema de la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo, es decir, pruebas pragmáticas del tipo empirismo ingenuo.

Finalmente, cabe destacar que en este curso se identifican cuatro circulaciones completas del  $ETM_G$ , en donde dos se encuentran presentes en los OA y la restante en una de las actividades.

#### 4.2.7 Séptimo Básico

El tratamiento de los triángulos se divide en dos referentes conceptuales: el primero, en torno a la relación entre los ángulos internos y externos, y el segundo sobre el área de triángulos y polígonos. De esta manera, los verbos que orientan el trabajo matemático corresponden a descubrir, construir y aplicar.

El verbo descubrir no declara específicamente a qué tarea matemática debería asociarse. Sin embargo, a lo largo de las tareas revisadas, es posible identificar que este verbo se relaciona con un trabajo experimental, que busca constatar de manera empírica, por medio de la manipulación, alguna propiedad. Como, por ejemplo, los casos de la suma de las medidas de los ángulos interiores y el cálculo del área de un triángulo.

En torno al espacio real y local presente en el curso, se observa que el triángulo se representa de manera pictórica, ya sea por sí solo o en conjunto con otros polígonos; y de manera concreta, para poder determinar la suma de los ángulos interiores.

En cuanto a los procesos de construcción, estos se delimitan nuevamente por los verbos previamente descritos. En el caso de los ángulos interiores y exteriores, los triángulos cumplen el doble rol de espacio real y local y también de artefacto, ya sea representados de manera figural o por un papel. Sumado a esto existen dos casos, en que, para comprobar la relación de los ángulos interiores con los exteriores, se realiza la utilización de varillas

móviles, es decir, se transita entre representaciones figurales a representaciones concretas del triángulo.

Finalmente, en lo que respecta al uso del software geométrico como artefacto, éste es utilizado para llevar a cabo una única tarea, la cual corresponde a dividir un polígono en triángulos de distintas medidas, y así, determinar la relación entre la suma de los ángulos interiores de los triángulos con el polígono.

En esta misma línea, cuando se habla del concepto de área, encontramos nuevamente al triángulo como artefacto, en conjunto con la fórmula de área de triángulo. Para estos casos se produce una fibración externa del ETM, ya que, se solicita que estas propiedades sean generalizadas por medio de lenguaje algebraico, pero con su origen en las formas presentadas, es decir, una transición entre el  $ETM_G$  al  $ETM_A$ .

En cuanto a los componentes referenciales, como se mencionó anteriormente, estos corresponden a los ángulos interiores y exteriores de un triángulo, y en una segunda instancia al concepto de área de triángulo. Por otro lado, el proceso de prueba pragmática, de tipo empirismo ingenuo se constituye de dos maneras: primero, en relación a los ángulos y la conjetura acerca de la relación de estos y, en segundo lugar, como una forma de generalización de propiedades por medio del lenguaje algebraico.

Continuando con el proceso de prueba, se identifican cinco circulaciones completas del  $ETM_G$ , las cuales se dividen en cuatro presentes en las actividades y una para el OA.

Cabe señalar que a lo largo de este curso se observa la presencia del semiplano [sem-ref], el cual emerge al momento de identificar o nombrar los puntos por los cuales pasa un triángulo.

### 4.3 Caracterización de las génesis del ETM<sub>G</sub> de referencia de primero a séptimo básico en torno a los triángulos en Chile.

A continuación, se lleva a cabo la caracterización del ETM<sub>G</sub> por medio de las génesis encontradas, permitiendo desglosar cada una de ellas en función de las características generales que se repiten a través de los cursos estudiados.

#### 4.3.1 Génesis instrumental

Se evidencia que el trabajo matemático que se desarrolla a lo largo de los cursos está condicionado por los verbos con los cuáles se delimita el tipo de construcción que debe llevarse a cabo. Estos verbos a su vez, condicionan la utilización de determinados artefactos para desarrollar la tarea matemática. Así es posible identificar tres tipos de construcciones:

##### A Deconstrucción

Este tipo de construcción se sustenta en el armado y desarmado de formas, en donde el material concreto y la manipulación de este material permite favorecer el aprendizaje de los conceptos geométricos, es decir, la experiencia empírica es la que sustenta, a posteriori, los teoremas puestos en juego en este primer momento. Este tipo de construcción se observa desde primero hasta tercero básico.

##### B Construcción con artefacto

En esta categoría podemos encontrar tres grupos

##### *b.1) la construcción con artefactos “no geométricos”*

En este grupo para construir se consideran como artefactos las lanas, varillas, papel y papel cuadriculado.

*b.2) la construcción con artefactos geométricos*

La construcción, se sustenta específicamente por medio de la incorporación de artefactos propios del trabajo geométrico, como lo son la regla, el compás y el transportador.

*b.3) la construcción con software geométrico*

Como su nombre lo indica, aquellas construcciones que se realizan utilizando un software en algún dispositivo tecnológico (computador, teléfono, tablet, etc.)

C Construcción aritmética

Este tipo de construcción está orientada al trabajo matemático relacionado con los conceptos de área, perímetro y ángulos, en donde específicamente se solicita su medición o cálculo. A diferencia de los otros dos tipos de construcción, este tipo implica una fibración externa, ya que el espacio real y local se constituye a partir de elementos geométricos (triángulos, ángulos, segmentos, etc.) y el trabajo aritmético, a partir de estos se implica necesariamente el cambio de registro. Por lo tanto, esto permite que este tipo de construcción siga considerándose dentro del ámbito de la geometría.

En relación a lo anterior, es importante destacar el hecho de que, a lo largo de los cursos revisados, el trabajo geométrico relativo a triángulos, y en particular las construcciones operan sobre la geometría axiomática natural (GI): todas las tareas propuestas se deben trabajar sobre objetos materiales, observándose a partir de sexto básico los primeros acercamientos a GII. Sin embargo, cabe señalar que a estos cambios se les ha considerado como deslizamientos entre paradigmas desde un transitar unidireccional de GI/gII, por la naturaleza de las tareas propuestas, las cuales solicitan descubrir propiedades a través de la manipulación de un artefacto privilegiando el trabajo perteneciente a los planos [sem-ins] y epistemológico. Finalmente, en algunos casos, se solicita argumentar los hallazgos, produciéndose una circulación completa.

#### 4.3.2 Génesis discursiva

Se observa a través de los cursos, una menor frecuencia de la génesis discursiva con respecto a las otras dos génesis. Esto se debe a que la solicitud del proceso de prueba suele estar ausente de manera explícita, ya sea como tarea o como elemento de los objetivos de aprendizaje.

En este sentido, se encuentra un tipo de prueba, la cual es descrita por Balacheff (1987), la cual es la prueba pragmática. Cabe señalar que las pruebas pragmáticas identificadas corresponden en su totalidad a las del tipo empirismo ingenuo. Este tipo de prueba está presente cuando entran en juego los verbos *demostrar*, *argumentar*, *comprobar*, *conjeturar*, entre otras. Es importante mencionar que estos verbos no varían según el nivel en el que se encuentren, ya que, se observan, de distinta manera tanto en los cursos iniciales como en sexto o séptimo.

Por otro lado, en lo que respecta al componente referencial teórico, los distintos casos identificados siempre se corresponden con alguna forma que permita realizar el tratamiento de triángulos.

Así, se identifica para los de primero y segundo básico, el componente referencial que orienta el trabajo matemático corresponde al de triángulo, puesto que se solicita únicamente que sean capaces de identificar éstos y conocer sus características. Luego en tercero básico se incorporan los conceptos de transformación isométrica y perímetro de triángulos. A estos conceptos, en cuarto básico, se les agrega el de simetría de triángulos, ya sea en el entorno o en un plano cartesiano. En quinto, sexto y séptimo año básico, se añade el concepto de congruencia de triángulos, segmentos y área de triángulos, y en donde además se repiten los conceptos de transformaciones isométricas.

Es importante señalar que, en el curso de sexto básico, también se aplica el tratamiento de triángulos por medio de la desigualdad triangular y la medida de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

Dado lo anterior, es importante destacar que, para el tratamiento de triángulos en geometría, el proceso de prueba, y, por ende, la presencia de la génesis discursiva no es considerada como eje fundamental dentro de los planes de estudio de la educación chilena, puesto que se ha entregado un énfasis mucho mayor a la habilidad para construir, mediante el seguimiento de instrucciones, y no así la argumentación y generalización de los aprendizajes adquiridos, lo que evidencia la simpleza de las tareas propuestas, no intencionando el desarrollo de habilidades cognitivas de nivel superior.

#### 4.3.3 Génesis semiótica

La representación del triángulo se hace presente a través de dos configuraciones distintas: material concreto y de manera pictórica. En lo que respecta a la representación con material concreto o tangible, se encuentran como representamen los triángulos presentes en el entorno de los estudiantes, como también aquellos representados con papel, lana, varillas móviles, entre otras.

Por otro lado, las representaciones de manera pictórica, se constituyen como dibujos de triángulos, con o sin ángulos demarcados; en cuadrículas o en el plano cartesiano (con coordenadas), ya sean presentados por la actividad misma, o como producto de ésta donde los estudiantes deben representarla.

Otro aspecto importante de la génesis semiótica presente, tiene relación con la aparición de fibraciones externas en algunas tareas específicas, en donde se solicita medir o calcular en función del triángulo previamente presentado y que este cálculo o medición debía expresarse en números.

Revisado cada uno de los OA y sus respectivas actividades para cada curso, es posible concluir lo siguiente con respecto a la relación que ambos presentan en función de las circulaciones del espacio de trabajo matemático.

**Tabla 12**

*Resumen de las circulaciones presentes en cada curso.*

Curso Circulación ETM	1° Básico	2° Básico	3° Básico	4° Básico	5° Básico	6° Básico	7° Básico	Total de circulaciones ETM	%
	2	7	1	1	4	3	2	20	18
	3	6	6	2	8	24	18	67	61
	0	1	0	0	2	10	1	14	13
	0	0	0	0	1	3	5	9	8
<b>Total de circulaciones</b>	5	14	7	3	15	40	26	110	100

La tabla resumen permite identificar, en relación a los tipos de tarea, que la mayor frecuencia absoluta corresponde a aquella donde se prioriza mayoritariamente la génesis instrumental. Por ende, la experiencia y el trabajo matemático en torno al objeto triángulo se realiza a partir de distintos tipos de construcciones. En esta línea es posible indicar, que

tercero, cuarto y sexto básico, presentan la menor y mayor cantidad de circulaciones respectivamente.

Asimismo, cuando las construcciones van asociadas a algún proceso de prueba, es decir, presentan una circulación completa, se identifica un contraste con la anterior, ya que este tipo de circulación es la que se presenta con menor frecuencia, tanto en la suma total de todos los cursos, como en cada uno de ellos de manera individual. Cabe señalar, que en torno al objeto triángulo, la presencia del proceso de prueba se observa por primera vez a partir de quinto año básico, y se mantiene en los otros niveles. Esto nos indica que, para los cursos iniciales, no se propicia el desarrollo de habilidades matemáticas como la argumentación, la explicación o la justificación, ya sea por medio de una circulación completa o por medio de pruebas en el plano semiótico-discursivo. Además, a partir de quinto existe sólo una actividad que solicita argumentación, en sexto son tres y séptimo son cinco, lo que corresponde al 8 % de los tipos de circulaciones encontradas en los programas.

Otro aspecto importante a señalar, tiene relación con la presencia del semiplano [sem-ref], el cual, es el segundo con mayor presencia a lo largo de los cursos revisados. La presencia de este semiplano se relaciona estrechamente con tareas como identificar o nominar, por lo que, luego de realizar construcciones a partir de las indicaciones, las tareas que más se repiten constituyen aquellas en las que se solicita únicamente la presencia de conocimiento declarativo por parte de los estudiantes. Este tópico cobra especial relevancia en torno a la incorporación de este semiplano, puesto que permite observar y configurar el trabajo matemático en los cursos iniciales, ya que, la tarea matemática en geometría no está enfocada exclusivamente a la manipulación de artefactos, construcción por medio de la manipulación o la realización de cálculos, sino que también se sustenta en el reconocimiento de los elementos referenciales que conforman al objeto matemático desde la experiencia perceptiva. Esto explica entonces, que la mayor presencia de este semiplano se concentre entre primero y cuarto año básico, puesto que, al favorecer este tipo de

circulación, permite generalizar posteriormente este conocimiento para la realización de las argumentaciones que son trabajadas en los cursos venideros. Sin embargo, preocupa

#### 4.4 Conclusiones

El tratamiento del concepto de triángulo presenta una alta presencia en los programas de estudio de educación básica, la cual está asociada básicamente a saberes, representaciones y acciones que se esperan que los estudiantes sean capaces de aprender, para así transitar por los distintos planos que el  $ETM_G$  moviliza.

Por lo tanto, para dar respuesta a la pregunta *P1: ¿Cómo se caracteriza el  $ETM_G$  de referencia en torno a los triángulos en Chile?*:

Se observa que los potenciales componentes presentes en los OA y en las actividades permiten determinar qué tipo de circulaciones están presentes para ambos casos, lo que a su vez permite establecer que tan cercanas o distantes se encuentra el espacio de trabajo matemático con su potencial tratamiento a través de las actividades. Así, se identifica que las potenciales circulaciones de los objetivos de aprendizaje se encuentran en concordancia con las circulaciones de las tareas presentes en las actividades sugeridas por el programa. Puesto que, si bien la frecuencia de aparición en las tareas es mucho mayor en las actividades que en los OA, todos los planos del Espacio de Trabajo Matemático están presentes en ambos casos.

El trabajo del objeto triángulo está fuertemente orientado a la utilización de artefactos, ya sean estos no geométricos, geométricos o software. En lo que respecta al uso del software, si bien se declara en los OA de aprendizaje como un artefacto que debe ser utilizado para el tratamiento del objeto triángulo, se evidencia que, a partir de las actividades sugeridas, el lugar que ocupa el software geométrico queda relegado, ya que es el tipo de artefacto que menos se utiliza. Asimismo, en función de la presencia de artefactos, emerge la figura del

proceso de construcción, lo cual permite la presencia de circulaciones completas o del plano semiótico-instrumental y epistemológico. Estas circulaciones a su vez, son las que muestran la presencia más alta, ya sea en la sumatoria de todos los cursos, como también en sexto y séptimo respectivamente.

Existe una particularidad en cuanto a lo que se entiende formal o matemáticamente por demostrar. Esto se debe específicamente a que la naturaleza de las tareas donde está presente este verbo, buscan que los estudiantes sean capaces de constatar ciertas aseveraciones. Un ejemplo de esto se observa en tareas donde, por ejemplo, se solicita constatar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , cuya consigna está iniciada a partir del verbo *demostrar*. Así, para este ejemplo podemos observar que la naturaleza del verbo configura a la tarea matemática como una constatación empírica, a través de la experiencia manipulativa de las propiedades matemáticas. Por lo tanto, al estar el proceso de prueba relacionado con el verbo demostrar, en estos niveles iniciales estaremos entonces en presencia de tareas manipulativas y no tanto frente a axiomas formales de la matemática. Por todo lo anteriormente señalado, queda de manifiesto que el paradigma puesto en juego es el GI.

Es importante indicar que a lo largo de los cursos se repite la utilización del concepto de figura como sinónimo de forma. Si bien en el desarrollo de cada tarea, esto no presenta un obstáculo en sí mismo, es posible que en nuevos contextos (por ejemplo, deconstruir formas), genere un obstáculo al momento de estudiar formas en distintas dimensiones.

Por otro lado, en lo que respecta a la génesis semiótica e instrumental, el trabajo se orienta fuertemente en las representaciones y en las construcciones. Lo anterior se traduce en una baja frecuencia de aparición de la génesis discursiva, debido a la escasa presencia del componente prueba, dejando en evidencia la falta de intención en formar a los estudiantes para comunicar sus ideas y argumentar sus hallazgos. Las tareas propuestas no promueven el desarrollo del razonamiento matemático.

Otro aspecto importante en cuanto a la caracterización del espacio de trabajo matemático, corresponde a que en los programas de estudio y en los objetivos de aprendizaje, se presenta un tipo de configuración que permite identificar el semiplano cuando están presentes tres componentes. En este caso se ha encontrado el semiplano [sem-ref], a partir de la presencia de los componentes referencial y representamen perteneciente al plano epistemológico, y la visualización del plano cognitivo. Este tipo de circulación se relaciona con aquellas tareas que no buscan la construcción ni la argumentación por parte del estudiante, sino más bien, favorecer el reconocimiento de objetos matemáticos por medio de la percepción visual, es decir, reconocer cuando se está en presencia del triángulo. El semiplano nos muestra que las tareas geométricas se concentran en la percepción del mundo tangible, quedando evidente la geometría axiomática natural I, mostrando que las tareas tienen una simpleza preocupante.

Este ETM de referencia tan débilmente construido, presenta tareas de baja demanda cognitiva, lo que lleva a no potenciar el desarrollo del razonamiento geométrico. Esto presenta una contradicción vital en lo que se espera de los programas oficiales de cada país. Si el ETM de referencia es poco ambicioso, con demasiadas ambigüedades, siendo lo que se espera construir de conocimiento en torno a los triángulos, deja muchas interrogantes sobre las interpretaciones que tanto los autores de textos escolares como los profesores puedan hacer de él.

## Capítulo 5 Caracterización del espacio de trabajo geométrico idóneo de textos escolares

Este capítulo tiene por objetivo caracterizar el espacio de trabajo geométrico idóneo potencial de los textos escolares utilizados en los casos de estudio. Para lo anterior se contempla el abordaje de los triángulos a partir de las actividades presentes en los textos escolares de séptimo básico empleado por la profesora Sayén, quien es profesora básica con mención en matemática y la profesora Ailén, quien es especialista en matemática.

Para la finalidad del análisis, se decide analizar las actividades en donde el eje central del trabajo matemático está en torno a los triángulos y no aquellas donde este tenga una participación satelital al desarrollo de la tarea. Por ejemplo, cuando se solicita dividir un polígono en triángulos para saber la medida de sus ángulos interiores, ya que en esta actividad el objeto triángulo sólo aparece como artefacto.

Dado la forma en que se despliega el tratamiento de los triángulos de acuerdo a la configuración de cada texto. Se presenta el análisis de cada texto escolar, con la siguiente secuencia: primero el texto que utiliza Ailén y, en segundo y tercer lugar los textos escolares que consulta la profesora Sayén.

Así, la presentación de este capítulo se divide en cuatro partes, en la primera se presentan las tres categorías<sup>18</sup> ejemplificando cada una de ellas con actividades de los textos escolares analizados, dando respuesta a la pregunta P2: ¿Cómo se caracteriza el ETM<sub>6</sub> idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos escolares utilizados por Ailén y Sayén?

---

<sup>18</sup> Recordemos que las categorías utilizadas en este análisis, corresponden a las mismas que fueron previamente definidas en el capítulo anterior.

La segunda parte relaciona los resultados encontrados en el  $ETM_G$  de referencia con el  $ETM_G$  idóneo potencial de los textos escolares, respondiendo a la pregunta P3: *¿Qué relación existe entre el  $ETM_G$  idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos escolares con el  $ETM_G$  de referencia en los programas de estudio?*

La tercera parte consiste en la relación existeten entre el  $ETM_G$  idóneo potencial en las tareas diseñadas en lo textos escolaes con el  $ETM_G$  de referencia que presentan los programas de estudio.

Finalmente, la cuarta parte, considera las conclusiones a partir de la caracterización de los componentes del ETM de Referencia e Idóneo referente a los triángulos.

### 5.1 Circulación del $ETM_G$ idóneo potencial en las tareas geométricas para el tratamiento de triángulos en los textos escolares escogidos por Ailén y Sayén.

A continuación, se presenta las tres categorías a través de algunos ejemplos recurrentes encontrados en los análisis de las circulaciones de las tareas presentes en las actividades de los tres textos utilizados por las profesoras presentes en esta investigación, el extenso de estos análisis se encuentra en el anexo 2.

#### Actividades y tareas

Cada una de las actividades de los textos en donde se trabaja el concepto de triángulo presenta una configuración determinada en torno a las tareas matemáticas que moviliza. Esta configuración permite que emerjan tres categorías que dan cuenta del comportamiento de las circulaciones del espacio de trabajo matemático en las tareas previamente mencionadas. Por lo tanto, dichas categorías están diseñadas en función de las actividades y las tareas que éstas despliegan para el tratamiento del objeto triángulo.

Cabe señalar, que se decide ejemplificar cada categoría con actividades de los textos escolares correspondientes a séptimo básico. Recordemos que el primer texto escolar analizado es el de la editorial Santillana 2009, el segundo es de la Editorial Galileo, 2015 y el tercero es de la Editorial SM, 2017.

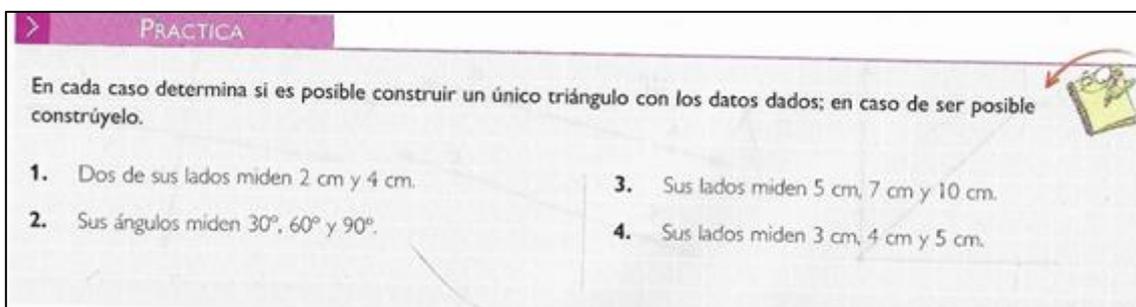
A continuación, se presenta cada categoría

### 5.1.1 Categoría 1: Actividades con más de una tarea, que movilizan distintos componentes

#### Ejemplo editorial Santillana

En la actividad que se presenta a continuación se identifican dos tipos de tareas distintas que se repiten. Por lo tanto, se ha escogido esta actividad para ejemplificar cómo circula en el texto aquellas que presentan más de una tarea con circulaciones distintas.

#### **Actividad**



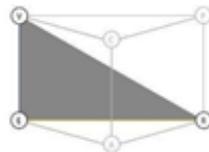
*Ilustración 28 Actividad 1 libro del estudiante  
Fuente: Blanco M. et al., 2009, p.96*

#### **Análisis actividad**

Esta actividad presenta dos tipos de tareas distintas que se repiten de acuerdo a si cumplen o no las condiciones solicitadas. Así, la primera tarea solicita determinar si es posible construir un triángulo en función de los datos, y la segunda a construirlo en caso de que sea posible.

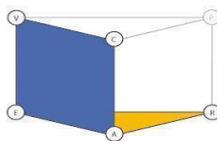
Para el primer tipo, se identifican cuatro tareas, en donde las medidas de los lados y/o ángulos se constituyen como el espacio real y local, la visualización como la posibilidad de

construir el triángulo solicitado y, el referencial teórico corresponde a las propiedades de un triángulo. Dado lo anterior, no se requiere prueba de manera explícita, ni tampoco construcción. Por lo que, para estas cuatro primeras tareas, se está en presencia del semiplano [sem-ref].



*Ilustración 20 Semiplano [sem - ref]*

En caso de que determinen que, si es posible, como segundo tipo de tarea deben llevar a cabo la construcción del triángulo, existiendo tres tareas de la misma naturaleza. Por lo tanto, está presente el proceso de construcción, utilizando algún artefacto para llevarlo a cabo, el cual no está determinado por la actividad. Luego, el espacio real y local, junto a la visualización corresponden al triángulo construido, por lo que está en presencia de una fibrición externa, al transitar desde un  $ETM_N$  a un  $ETM_G$ . Finalmente, el componente referencial corresponde al concepto de triángulo. Por lo tanto, está presente el plano semiótico-instrumental, y el epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

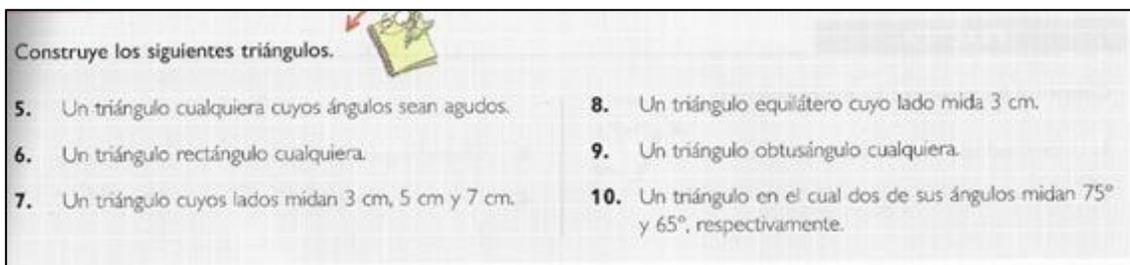
Dado lo anterior, se observa los dos tipos de tareas que circulan de manera diferente. La primera facilita el reconocimiento de las propiedades en el triángulo, y la segunda facilita el proceso de construcción de los mismos.

5.1.2 Categoría 2 Actividades con tareas de igual circulación, pero con distinta configuración de sus componentes.

Ejemplo editorial Santillana

A continuación, se presenta una actividad que da cuenta de la categoría dos, en donde se repite una misma circulación en distintas tareas.

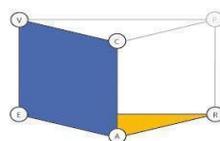
**Actividad**



*Ilustración 29 Actividad 2 libro del estudiante  
 Fuente: Blanco M. et al., 2009, p.97*

**Análisis actividad**

La presente actividad consta de seis tareas de la misma naturaleza, es decir, construir un triángulo con las medidas entregadas en donde se diferencian a partir de las distintas medidas entregadas por el texto. De esta manera, estamos en presencia de la génesis semiótica, en donde se observa una fibración externa, desde el ETM<sub>N</sub> hacia el ETM<sub>G</sub>. La génesis instrumental se observa por medio de la construcción del triángulo, utilizando algún artefacto geométrico, en donde el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. Así, nuevamente se observa el plano semiótico-instrumental, y el plano epistemológico.

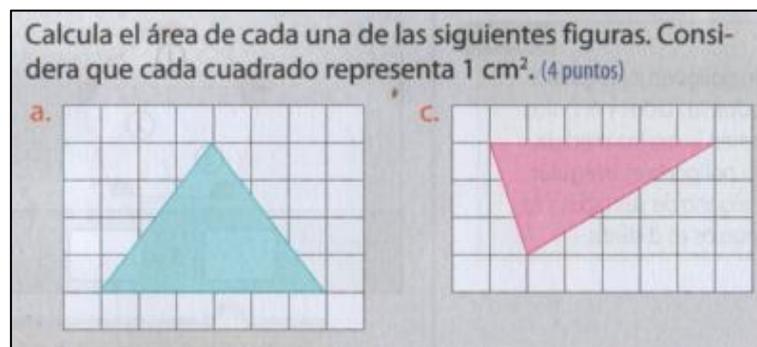


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

En función de lo anterior, se observa que la configuración del espacio real y local, varía en cada una de las tareas, es decir, las medidas del triángulo. Sin embargo, la circulación del  $ETM_G$  en cada tarea es la misma.

### Ejemplo editorial SM

#### **Actividad 2**



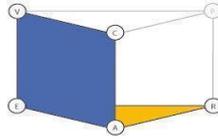
*Ilustración 30 Actividad 2 libro del estudiante  
Fuente: Editorial SM., 2017, p.181*

#### **Análisis actividad**

La actividad 2 presenta una misma tarea que se repite dos veces, es decir, deben calcular el área de los triángulos presentes en cada caso. Lo que cambia es el representamen. Para ambos casos, el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo y al concepto de área de manera simultánea. La génesis semiótica se observa a partir de los triángulos representados en la cuadrícula que permiten la visualización del área de éstos. Mientras que la génesis instrumental se compone del artefacto que corresponde a la fórmula de área y el proceso de construcción por medio del cálculo de área en ambos casos.

Es importante destacar que, para esa actividad, aparece nuevamente la utilización del concepto de figura como sinónimo de forma, para hacer referencia a los triángulos representados.

Dado lo anterior, se observa el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### 5.1.3 Categoría 3: Actividades con una tarea

#### Ejemplo editorial Santillana

La actividad 3 que se presenta a continuación permite ejemplificar la categoría 3

#### **Actividad 3**

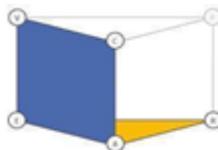
**Resuelve el siguiente problema.**

**1.** Construye un triángulo equilátero de lado 4 cm.

*Ilustración 31 Actividad 3 libro del estudiante  
Fuente: Blanco M. et al., 2009, p.102*

#### **Análisis actividad**

Para esta actividad se presenta la misma tarea que para la actividad anterior, en donde la diferencia radica en que el referencial teórico, para este caso, corresponde al concepto de triángulo equilátero. Por lo que se observa el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico. También se encuentra presente la fibración externa desde el  $ETM_N$  al  $ETM_G$ .



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

## 5.2 Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo de los textos escolares

A continuación, se presenta la caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo de los tres textos revisados. Lo anterior se realiza en base a los análisis de las tareas y la configuración de cada uno de los componentes, planos y génesis identificados.

### 5.2.1 Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo del texto Santillana en torno a los triángulos

Se observa que el Espacio de Trabajo Matemático identificado en las tareas geométricas propuestas en el texto configura tres tipos de circulaciones: aquellas que activan el plano semiótico-discursivo, otras el semiplano [sem-ref] y, finalmente aquellas que activan el plano semiótico-instrumental con el plano epistemológico. Siendo estas últimas las que presentan la mayor cantidad de apariciones en el texto.

Para este texto analizado, es posible identificar que cada plano y circulación están nuevamente determinados por los verbos presentes en cada actividad.

#### A. Plano Semiótico-discursivo

Así, para las tareas que presentan una circulación del tipo plano semiótico-discursivo, el verbo que orienta el trabajo matemático corresponde a *justificar*. Para los casos descritos, se observa que, frente a este tipo de circulación, este verbo delimita únicamente la identificación de las propiedades del objeto triángulo como proceso de prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo. Por otro lado, no se solicita ningún tipo de prueba. En esta misma línea, para los casos analizados, la génesis semiótica y la génesis discursiva están siempre asociadas al concepto de triángulo, por lo tanto, las justificaciones siempre se hacen en torno a las propiedades del concepto en cuestión.

## B. Plano Semiótico-Instrumental Y Epistemológico

Por otro lado, las tareas que propician las circulaciones del tipo semiótico-instrumental y epistemológico tienen en común que existe un único verbo que articula todas las tareas matemáticas, el cual corresponde al verbo *construye*. Este solicita de manera explícita la construcción en la tarea matemática. Esta construcción es posible observarla de dos formas: por medio de la utilización de artefactos geométricos o, a través del cálculo de la medida de ángulos y/o lados.

En lo que respecta a los artefactos geométricos, las tareas intencionan la utilización de regla y compás y/o software geométrico. Para cada caso se pide que la construcción se realice en función de ciertas medidas dadas por el texto, ya sean de los ángulos interiores o los lados que conforman el triángulo. En este sentido, la génesis instrumental estará situada en el contexto del uso de los artefactos previamente mencionados, no existiendo la utilización de material tangible en ninguno de los casos. Otro aspecto importante a señalar corresponde al hecho de que en la mayoría de los casos en los que se involucra la construcción del tipo aritmética se realiza con la finalidad de encontrar algún dato restante, ya sea ángulo o lado del triángulo.

Así, la génesis semiótica e instrumental se relaciona con la aparición de las fibraciones externas, ya sea desde el  $ETM_G$  al  $ETM_N$  o viceversa, siendo el triángulo construido el que se constituye como el espacio real y local de las tareas. Esto nos indica que las diferentes representaciones se establecen como un eje fundamental dentro del aprendizaje de este saber, y una habilidad transversal en el trabajo geométrico del curso analizado.

## C. Semiplano Semiótico-Referencial

Finalmente, en lo que respecta al tercer tipo de circulaciones presentes, estas corresponden a aquellas que movilizan el  $ETM_G$  en el semiplano [sem-ref]. En estos casos, en lo que respecta a la génesis semiótica, las representaciones corresponden a la medida de los lados y/o ángulos interiores del triángulo, en donde estos están presentes como  $ETM_G$  o  $ETM_N$ .

A diferencia de las otras circulaciones que emergieron del trabajo revisado, para estos casos existen verbos que no permiten identificar a priori los componentes que activan, ya que para su representación depende de lo que la consigna solicite. En esta línea, las tareas que movilizan el semiplano [sem-ref] están en su mayoría asociadas a los verbos *determinar*, *describir*, o *nombrar*. Sumado a esto, este tipo de tareas no solicitan de manera explícita que su resolución se lleve a cabo por medio de construcciones o procesos de prueba, por lo que no está presente la génesis instrumental ni la génesis discursiva. En lo que respecta al referencial teórico para este tipo de tareas, existen dos tipos: el concepto de triángulo y el concepto de desigualdad triangular, en donde éstas solicitan *indicar* si es posible o no llevar a cabo una construcción a partir de las medidas entregadas.

A continuación, se presenta la tabla 12 que indica la cantidad de circulaciones identificadas en el texto escolar de la editorial Santillana.

**Tabla 12**

*Resumen de las circulaciones presentes en el texto escolar Santillana*

	Total, de circulaciones	%
	25	26
	65	66
	8	8
	0	0%
<b>Total de tareas</b>	98	100

Al observar la tabla, es posible identificar que se repite la tendencia de tareas que priorizan el proceso de construcción.

Otro aspecto importante a señalar, tiene relación con la presencia del semiplano [sem-ref], el cual, es el segundo con mayor presencia a lo largo de los cursos revisados. Nuevamente la presencia de este semiplano está relacionada con las tareas que implican identificar o nominar.

Cabe señalar que no se observan a lo largo del texto analizado circulaciones completas que impliquen construcciones y procesos de prueba.

Por lo anterior, es posible indicar que existe una coherencia entre lo analizado en los programas de estudio con lo propuesto en los textos escolares, ya que la tendencia y distribución de los distintos tipos de circulaciones es la misma en ambos casos.

En este texto las 98 tareas, están repartidas en las distintas categorías. Se encuentran quince actividades en la categoría 3 (que contiene sólo una tarea), encontrando en esta categoría tareas movilizan el semiplano [sem-ref] y el plano semiótico- instrumental y plano epistemológico y una que moviliza el plano semiótico discursivo. En la categoría 2, se encuentran 8 actividades, desplegándose treinta y tres tareas matemáticas, todas ellas sólo presentan circulaciones en plano semiótico- instrumental y plano epistemológico. En la categoría 1, están presentes siete actividades, movilizandando en cada una de ellas sólo dos circulaciones distintas (tal como se muestra en el ejemplo de la categoría), sin embargo, se extraen cincuenta tareas. Esto se debe a que las dos tareas se repiten muchas veces, es por ello que de lo que más hay presencia es de la Categoría dos.

### 5.2.2 Caracterización del $ETM_G$ idóneo del texto Galileo en torno a los triángulos

El texto Galileo moviliza a un semiplano y a tres planos del ETM, los cuales corresponden al semiplano [sem-ref], el plano semiótico-referencial y epistemológico, el plano semiótico-discursivo y una circulación completa. Los cuáles serán explicados a continuación.

#### A. Semiplano Semiótico-Referencial

El semiplano semiótico-referencial emerge a partir del verbo *indica*. Este verbo configura la tarea matemática en función de determinar de manera verbal, si alguna condición se cumple o no, por ejemplo, indicar qué lado de un triángulo rectángulo es siempre el más largo. Esto delimita el trabajo matemático en función de demostrar por parte del estudiante el conocimiento conceptual de reconocimiento de los elementos puestos en juego. En esta misma línea, cuando nos referimos a estos elementos, se observa que el componente referencial teórico corresponde al de triángulo rectángulo y al de desigualdad triangular, en donde, en el caso específico del triángulo rectángulo viene asociado también con la identificación del teorema de Pitágoras.

En lo que respecta a la génesis semiótica, cuando estamos en presencia de este semiplano, el espacio real y local se identifica a partir de la medida de los lados del triángulo o la de sus ángulos interiores entregada por el texto, lo cual configura el  $ETM_N$ . En esta misma línea, también encontramos representaciones del triángulo en el  $ETM_G$  por medio de las formas presentes en el texto. Sin embargo, a pesar de estar estos dos ETM previamente mencionados, al no existir proceso de prueba, no es posible observar una fibración externa, puesto que no está presente el proceso de construcción.

#### B. Plano Semiótico-instrumental Y Epistemológico

En lo que respecta a la génesis semiótica, encontramos exactamente los mismos componentes que se observan para el semiplano semiótico-referencial. Entonces, lo que propicia el cambio de circulación y, la incorporación de otros componentes corresponde a

los verbos que articulan el trabajo matemático lo que en este caso específico corresponde a tres verbos que comparten igual naturaleza: *construye*, *hallar* y *usar*.

Para el verbo *construye*, se solicita explícitamente la utilización de artefactos geométricos como lo son la regla y compás en función de la medida de ángulos y/o lados entregados por el texto.

El verbo *hallar* en este caso implica aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de un lado del triángulo rectángulo. Por lo tanto, este cálculo implica el proceso de construcción con el teorema de Pitágoras como artefacto. Asimismo, el espacio real y local incluye simultáneamente la circulación del  $ETM_G$  y  $ETM_N$ , es decir, las medidas expresadas en centímetros del triángulo rectángulo presentado.

Finalmente, el verbo *usar* solicita explícitamente la aplicación del teorema de Pitágoras para encontrar el valor de un lado desconocido. Por lo tanto, se repiten los mismos componentes que para el verbo *hallar*.

#### C Plano Semiótico-Discursivo

El plano semiótico-discursivo se observa a partir del verbo *explicar*, en donde se intenciona que los estudiantes puedan explicar la posibilidad de construir un triángulo rectángulo bajo ciertas condiciones en función de la medida de los lados que la tarea entrega. Así, para los dos casos que este plano está presente, la génesis semiótica surge por la indicación del triángulo rectángulo en la consigna de las tareas o por medio de la entrega de las medidas de sus lados. El proceso de prueba en ambos casos está presente por medio de la prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo, donde deben realizar dicha explicación por medio de las propiedades del teorema de Pitágoras. Finalmente, en ambos casos, el referencial teórico corresponde al objeto de triángulo rectángulo.

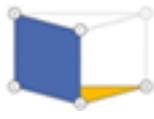
#### D. Circulación completa

A diferencia de las otras circulaciones, esta circulación está presente en un único caso, en donde se solicita encontrar un valor a partir del teorema de Pitágoras, y luego explicar cómo se realiza dicho proceso. Por lo tanto, los verbos que aplican para este caso son los mismos que conforman de manera separada la prueba y la construcción en el caso anterior, no obstante, en esta oportunidad se combinan dentro de la misma consigna, lo cual permite la aparición del plano descrito previamente.

A continuación, se presenta la tabla 13 que da cuenta de la cantidad de semiplanos, planos horizontales y verticales encontrados en el texto escolar de la Editorial Galileo.

**Tabla 13**

*Resumen de las circulaciones presentes en el texto escolar.*

	<b>Total de circulaciones</b>	<b>%</b>
	13	21
	44	72
	3	5
	1	2
<b>Total de tareas</b>	61	100

Al observar la tabla, se identifica que proporcionalmente la distribución de circulaciones, es la misma que en el texto 1, es decir, mayor presencia de tareas que implican la construcción, seguidas por el semiplano, la argumentación y, finalmente en menor medida, una circulación completa que engloba todas las circulaciones previamente descritas.

En lo que respecta al semiplano [sem-ref], su presencia está relacionada nuevamente con las tareas que implican *identificar* o *nominar*.

Por otro lado, la presencia del plano discursivo está asociada exclusivamente al verbo *explicar* por medio de pruebas pragmáticas del tipo empirismo ingenuo.

Por lo anterior, es posible señalar que existe una coherencia entre lo analizado en los programas de estudio, con lo propuesto en los textos escolares, ya que la tendencia y distribución de los distintos tipos de circulaciones es, nuevamente, la misma en ambos casos.

En este texto las 61 tareas, están repartidas en las distintas categorías, se encuentran trece actividades en la categoría 3 (que contiene sólo una tarea), encontrando en esta categoría tareas movilizan en su mayoría el plano semiótico- instrumental y plano epistemológico y una que moviliza el plano semiótico discursivo y una con circulación completa. En la categoría 2, se encuentran nueve actividades, desplegándose cuarenta y cinco tareas matemáticas, ellas presentan circulaciones las 13 tareas que movilizan el semiplano [sem-ref], 32 tareas se movilizan en el plano semiótico- instrumental y plano epistemológico. En la categoría 1, existe sólo una actividad, que contiene tres tareas, la primera moviliza el semiplano [sem-ref] al solicitar “indica que lado del triángulo rectángulo es siempre el más largo” (anexo 2, actividad 7 p.119), y dos tareas relativas que solicitan explicar sus respuestas por lo que movilizan el plano semiótico discursivo.

### 5.2.3 Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo del texto SM en torno a los triángulos

Finalmente, para el texto 3 se identifican dos tipos de circulaciones, el semiplano semiótico-referencial y el plano semiótico-instrumental y epistemológico, los cuales serán explicados a continuación respectivamente.

#### A. Semiplano Semiótico-Referencial

Para este tipo de circulación se observa que los verbos que articulan el trabajo matemático corresponden a *completar* y *comparar*. Estos verbos no implican llevar a cabo procesos de prueba ni tampoco procesos de construcción, puesto que en función de las comparaciones y completar, los atributos solicitados ya están presentes en las representaciones que el texto entrega. Por otro lado, se observa que las representaciones de los triángulos corresponden a presentarlo como forma o representado en un plano cartesiano.

Finalmente, lo que respecta al componente referencial, se constituye a partir de las propiedades que cumple un triángulo en función de la medida de sus ángulos interiores o la de áreas de triángulos.

#### B. Plano semiótico-instrumental y epistemológico

En lo que respecta a este plano, el trabajo matemático se orienta a partir de los verbos *calcular* y *construir*. Para el verbo *calcular*, la génesis instrumental está asociada al cálculo de áreas de triángulos o al de la medida de los ángulos interiores de éste, ya sea en el plano cartesiano o partir de las medidas de dos de sus lados en un triángulo rectángulo cuando se trata de área y, a partir de la medida de dos ángulos interiores cuando se trata de lo segundo. Por el contrario, cuando se trata del verbo *construir*, se solicita construir un triángulo por medio de la utilización de artefactos que no están especificados en la consigna de la tarea. Asimismo, encontramos que la génesis semiótica se comporta de dos formas: una por medio de la representación del triángulo en el plano cartesiano y otra, por medio de la representación del triángulo por con la medida de sus ángulos interiores.

Finalmente, en lo que respecta al componente referencial teórico, este corresponde al de área de triángulo y al de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

A continuación, se presenta la tabla 14 con las circulaciones encontradas en el texto escolar de la Editorial SM.

**Tabla 14**

*Resumen de las circulaciones presentes en el texto escolar.*

	<b>Total, de circulaciones</b>	<b>%</b>
	4	29
	10	71
	0	0
	0	0
<b>Total de tareas</b>	14	100

Finalmente, al revisar la distribución de circulaciones presentes en el texto escolar 3, se observa que nuevamente la mayor presencia está asociada a las construcciones, siendo luego las circulaciones con semiplano las que presentan la segunda mayor cantidad de apariciones. Es importante destacar que en el tercer libro se despliega una menor cantidad de circulaciones en relación a los otros textos, como también se observa la ausencia del plano semiótico-discursivo y también circulaciones completas. Por lo tanto, la configuración

de este tercer libro está enfocada exclusivamente a la construcción y a la identificación de propiedades.

En este texto las catorce tareas, están repartidas en dos categorías, las cuales se encuentran en ocho actividades, distribuidas de la siguiente manera: 5 actividades en la categoría 3 (que contiene sólo una tarea), encontrando en esta categoría las 4 tareas que movilizan el semiplano [sem-ref] y una tarea que corresponde al plano semiótico- instrumental y plano epistemológico. En la categoría 2, se encuentran tres actividades, desplegándose nueve tareas matemáticas, todas ellas sólo presentan circulaciones en plano semiótico-instrumental y plano epistemológico. No se presentan actividades vinculadas a la categoría 1.

### 5.3 ¿Qué relación existe entre el $ETM_G$ idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos escolares con el $ETM_G$ de referencia en los programas de estudio?

Independientemente de la cantidad de tareas de cada texto escolar, en ellos predominan los planos semiótico-instrumental y epistemológico, y los secundan el semiplano [sem-ref]. Estas circulaciones previamente mencionadas, son las únicas presentes en el texto tres (editorial SM). Asimismo, el texto uno (editorial Santillana) y dos (editorial Galileo) presentan en baja frecuencia en el plano semiótico discursivo. Por otro lado, la circulación completa solamente se observa en el texto dos, estando presente a partir de una única tarea, lo cual explica el bajo porcentaje de esta circulación en relación a las tareas totales del texto. Además, se incorpora a la caracterización en el OA 12 de sexto básico, puesto que ambas profesoras lo trabajan en sus clases.

A continuación, se presenta la caracterización de los componentes del ETM a partir de los textos escolares y las actividades de los programas de estudio, dando cuenta de cada uno de los elementos que permiten el tratamiento del objeto de triángulo.

Dado lo anterior se presenta la comparación de los componentes del ETM presentes en los programas de estudio con las actividades relacionadas con las clases de las profesoras de los tres textos de séptimo básico. Para llevar a cabo la caracterización, se indica cuando alguno de los componentes se encuentre únicamente en los textos escolares o en las actividades sugeridas por el programa de estudio.

## 5.4 Conclusiones a partir de la caracterización de los componentes del ETM de Referencia e Idóneo referente a los triángulos

### 5.4.1 Artefactos

Los artefactos utilizados para el tratamiento del objeto triángulos encontrados corresponden a tres tipos

#### A. Material

Regla, compás, transportador, triángulo de papel y varillas o piezas de mecano.

#### B. Teórico

Teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, fórmula de área de triángulo y teorema de Pitágoras.

#### C. Digital

Software geométrico.

Entre los tipos de artefactos, los materiales y digitales son empleados para llevar a cabo construcciones del objeto triángulo. Sin embargo, los artefactos teóricos se utilizan para hallar o calcular áreas, ángulos o la medida de lados solicitados por las tareas.

Los únicos artefactos que no son utilizados en los textos escolares, corresponden al triángulo de papel y las varillas o piezas de mecano. Estos dos artefactos son utilizados para realizar el tratamiento de ángulos: el primero para demostrar que las sumas de los ángulos interiores

de un triángulo forman un ángulo extendido, y el segundo para demostrar la relación entre los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

#### 5.4.2 Construcción

El proceso de construcción se configura en tres tipos distintos en los documentos revisados:

##### A. Construir a partir de los elementos secundarios del triángulo

Este proceso de construcción está presente en las tareas que entregan al estudiante, de manera parcial, la medida de los ángulos y/o los lados del triángulo, para que a partir de esta información lleven a cabo la construcción. Este tipo de construcción se enmarca dentro del tipo de construcción con artefacto geométrico descrito previamente.

##### B. Calcular

En lo que respecta a este tipo de construcción, el tratamiento del triángulo se realiza a partir de tres elementos: calcular la medida de un ángulo interior del triángulo (conociendo el valor de los otros dos), calcular el área de un triángulo en una hoja cuadriculada y finalmente, hallar el valor de la hipotenusa o de uno de los catetos por medio de la aplicación del teorema de Pitágoras. Para este caso, la construcción corresponde a aquella que se realiza con artefacto no geométrico.

##### C. Plegar

Por último, el plegado se lleva a cabo a partir de un cuadrado de papel, que por medio de algunas indicaciones, el estudiante debe realizar distintos plegados para obtener finalmente un triángulo de papel.

Ahora bien, al comparar las tareas presentes en las actividades sugeridas por el programa, con las de los textos escolares, es posible indicar que, en cuanto a la aplicación del teorema de Pitágoras, este no se encuentra presente en las tareas sugeridas por el programa de

estudio. Sin embargo, con los tipos restantes de construcción, los elementos previamente mencionados son trabajados de manera similar en ambas instancias.

#### 5.4.3 Representamen

Se ha identificado que el triángulo es representado a partir de distintas formas, las cuales se describen a continuación.

##### A. Triángulo como dibujo

Este tipo de representamen corresponde al más común encontrado tanto en las actividades sugeridas como en los textos escolares. Esta representación puede llevarse a cabo tanto en una hoja de papel ordinaria, como también en papel cuadriculado. En ambos casos, el triángulo puede corresponder a cualquier tipo del mismo.

##### B. Triángulo con papel

Representar al triángulo con papel está presente en las tareas donde se solicita que se construya un triángulo por medio de pliegues. Por lo tanto, para este caso la representación del triángulo quedará supeditada al producto realizado por el estudiante a partir del seguimiento de instrucciones y no a priori por los programas o el texto escolar.

##### C. Triángulo en software

Para este caso, ocurre lo mismo que para el triángulo de papel en donde, solo cambia el medio de representación. Por lo tanto, pasamos de una hoja de papel a la utilización de un medio digital.

##### D. Triángulo por medio de la medida de sus ángulos interiores expresados de manera numérica

Para este caso, tanto en el texto como en las actividades sugeridas, el triángulo es representado por medio de la suma de los ángulos interiores del mismo. Se establece para

ambos casos que al ser este teorema un conocimiento previo para los alumnos, al momento de identificar que los ángulos entregados suman 180 grados, será posible para ellos entender que se está en presencia de un triángulo.

E. Triángulo por medio de la medida de sus ángulos interiores expresados de manera algebraica

Ocurre lo mismo que para el caso anterior, con la diferencia que la medida de uno o dos ángulos interiores se expresa de manera algebraica.

F. Triángulo imposible de construir

Para este caso ocurre una particularidad en torno al representamen, puesto que para la desigualdad triangular se presenta una tarea donde se entregan tres segmentos de distintos tamaños para la comprobación de la desigualdad triangular. Por lo tanto, el representamen para este caso corresponde a la forma resultante que el estudiante construirá, la cual corresponderá a un triángulo imposible de construir.

G. Fórmula de área de un triángulo expresada en términos algebraicos

Existen tareas en donde se solicita calcular el área de un triángulo, por lo que el representamen para el concepto de triángulo se traduce a partir de la fórmula del área para un triángulo. Debido a que este objeto se constituye como un conocimiento previo, al estar en presencia de la fórmula permite comprender, por parte del alumno, que se está realizando el tratamiento del objeto triángulo.

H. Teorema de Pitágoras

Similar al caso anterior, el teorema de Pitágoras también cumple el doble rol de referencial y de representamen, puesto que, al posicionarse como un conocimiento previo para el estudiante, observar el teorema de Pitágoras permitirá que el estudiante asocie la fórmula escrita al concepto de triángulo.

I. Medidas numéricas de un triángulo imposible de construir, asociada a un triángulo ya construido

Este último caso presenta una particularidad en torno a los otros tipos de representación que se han encontrado durante el estudio, ya que, este representamen presenta dos tipos de registros: uno figural y uno numérico. El registro figural corresponde al dibujo de un triángulo cualquiera. Sin embargo, el registro numérico corresponde a la medida de tres lados que no permitirían llevar a cabo la construcción de un triángulo, para así comprender el concepto de desigualdad triangular.

#### 5.4.4 Visualización

Para el proceso de visualización, al estar analizando el objeto triángulo, para todos los casos la visualización dependerá específicamente del representamen utilizado en función de las características de cada tarea.

#### 5.4.5 Referencial

##### A. Familia de triángulos

Este referencial es donde se abarcan todos los tipos de triángulos que son utilizados como referencial teórico en algunas tareas específicas donde se solicita construir triángulos con distintas medidas. Por lo tanto, se incluyen en esta categoría a los triángulos rectángulos, escalenos, isósceles, etc.

##### B. Desigualdad triangular

Como ya se hizo mención anteriormente, la desigualdad triangular cumple un doble rol, el de representamen a partir de las medidas de los lados y, también el de referencial teórico, el cual en este caso es descubierto a partir del proceso de construcción de un triángulo imposible.

### C. Ángulos interiores y exteriores

La suma de los ángulos interiores se constituye como uno de los referenciales teóricos con mayor presencia a lo largo de las actividades revisadas. El tratamiento de este objeto se presenta a través de distintas modalidades de representación, que para las tareas descritas esto se constituye como un conocimiento previo que permite llevar a cabo el objetivo solicitado.

### D. Área de triángulos

El tratamiento para este referencial es llevado a cabo de dos maneras distintas: primero a través de la estimación y comparación de áreas de formas, y segundo realizando cálculos por medio de la aplicación de la fórmula para hallar el valor solicitado de área de triángulo.

### E. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras articula el trabajo matemático en las tareas donde se solicita hallar la medida de alguno de los lados de un triángulo rectángulo. Por lo tanto, el referencial también se posiciona como un conocimiento previo que permite operar en el espacio de trabajo matemático algebraico, es decir, llevar a cabo los cálculos solicitados.

#### 5.4.6 Prueba

A lo largo de las tareas analizadas, se ha identificado que los verbos presentes en las consignas permiten la activación del proceso de prueba en determinadas condiciones. A continuación, se describen los verbos encontrados.

#### A. Argumentar, justificar y explicar

Estos tres verbos presentan la misma naturaleza en lo que respecta al tratamiento del triángulo. De esta manera, para los tres tipos de verbos, lo que se solicita es que los estudiantes sean capaces de dar constancia de las estrategias utilizadas para llegar a un determinado resultado. Por ejemplo “argumentar cómo encontrar el área de un triángulo

rectángulo a partir de un rectángulo” o “explicar cómo encontrar un lado por medio de la utilización del teorema de Pitágoras”, dan cuenta de lo mencionado anteriormente, puesto que, si bien para ambos casos los verbos son distintos, solicitan el mismo tipo de tratamiento para objetos distintos.

#### B. Demostrar

El verbo demostrar en los niveles analizados, presenta una particularidad en cuanto a lo que se entiende formal o matemáticamente por demostrar. Esto se debe específicamente que en las tareas en donde está presente este verbo, su naturaleza busca que los estudiantes puedan constatar ciertas aseveraciones. Un ejemplo de esto se observa en una tarea donde deben trabajar con el recorte de un triángulo y donde la consigna solicita “*demostrar* que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ ”. Así, para este ejemplo podemos observar que la naturaleza del verbo demostrar configura a la tarea matemática como una constatación empírica, a través de la experiencia manipulativa de las propiedades, es decir, una prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo. Por lo tanto, al estar el proceso de prueba relacionado con el verbo demostrar, en estos niveles iniciales estaremos entonces en presencia de tareas manipulativas y no tanto frente a axiomas formales de la matemática.

## Capítulo 6 Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo en las clases de Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos

Este capítulo caracteriza el espacio de trabajo geométrico idóneo efectivo de las tareas matemáticas relativas a triángulos implementadas por las profesoras Ailén y Sayén.

El profesor condiciona y organiza el ETM<sub>G</sub> de referencia para volverse un espacio de trabajo idóneo efectivo de cada profesor. En los capítulos 4 y 5 se caracterizan el ETM de referencia y el ETM idóneo potencial de los textos escogidos por los casos de estudio. El profesor desempeña un rol indispensable en la articulación de los ETM. Este capítulo concentra su estudio en responder las siguientes preguntas:

P4: ¿Cómo se caracteriza el ETM<sub>e</sub> idóneo efectivo en las tareas implementadas por Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos?

P5: ¿Cómo se caracterizan los distintos componentes y génesis del ETM<sub>e</sub> idóneo efectivo en las tareas implementadas para la enseñanza del objeto triángulo por Ailén y Sayén?

Las preguntas 4 y 5, orientan la búsqueda de resultados para el Objetivo Específico 1

(OE 1): Caracterizar el ETM<sub>e</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemática.

Así, la presentación de este capítulo se divide en tres partes, en la primera se presentan el estudio de las cuatro clases de Ailén, en la segunda el análisis de las cinco clases de Sayén. Mientras que en la tercera parte se concluye con la caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico de Ailén y Sayén.

Como se plantea en el diseño metodológico, la clase se divide en episodios. Se analiza cada episodio bajo el enfoque de los ETM mostrando el trabajo matemático de las profesoras en

la sala de clases considerando además la descripción del ETM<sub>e</sub> idóneo de Ailén y Sayén desde una perspectiva cuantitativa.

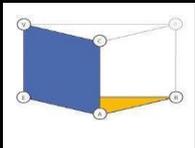
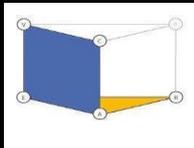
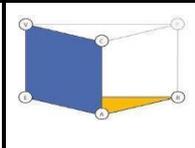
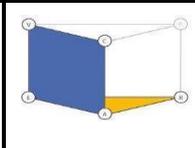
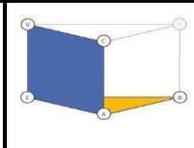
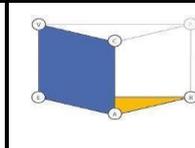
## 6.1 Caracterización del ETM<sub>e</sub> idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas por Ailén para la enseñanza de los triángulos.

### 6.1.1 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la primera clase de Ailén

La primera clase, cuyo objetivo es “Construir triángulo dados dos lados y un ángulo” consta de seis episodios, los cuales son caracterizados a través del siguiente cómic.

**Tabla 15**

*Desglose de circulación de los episodios de la clase 1*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3	Episodio 4	Episodio 5	Episodio 6
					

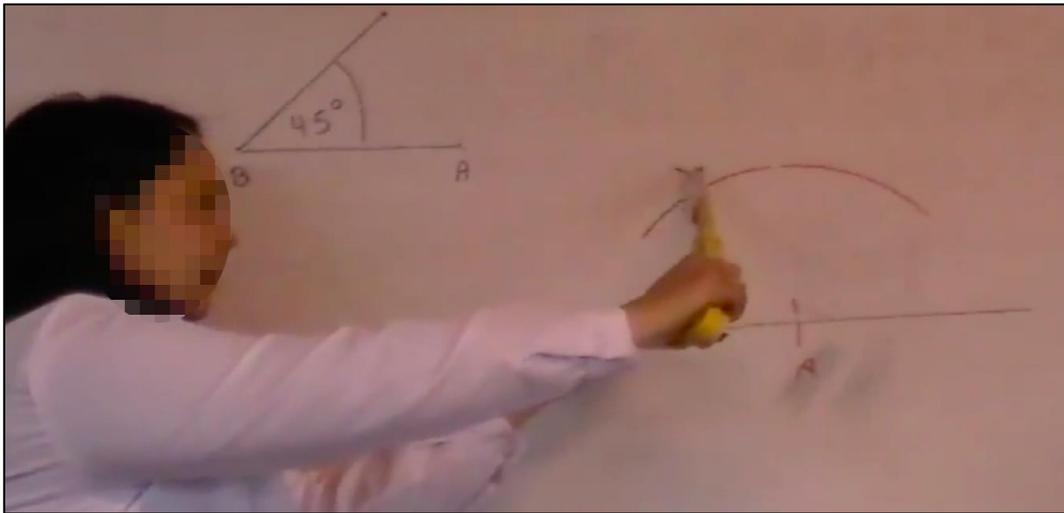
A continuación, se describe la circulación de cada uno de los episodios presentados anteriormente.

#### A. Episodio 1: ¿Cómo puedo construir un ángulo de 45°?

Construir un ángulo de 45° con regla y transportador o dibujando la bisectriz de un ángulo de 90°.

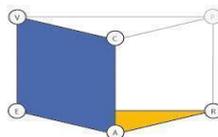
El primer episodio de esta clase se identifica a partir de la activación de conocimientos previos referidos a la construcción de un ángulo de 45°. De esta manera, Ailén pregunta a los estudiantes “¿cómo puedo construir un ángulo de 45°?” ( Anexo 3, clase 1, TDP 3, p.179), es decir, que le expliquen cómo se puede construir este ángulo, en palabras de la profesora,

con “medidas reales” (anexo 3, clase 1, TDP 1, p.179). Para esto, los estudiantes le explican de manera oral que deben utilizar la regla y compás para trazar la bisectriz.



*Ilustración 32: Instrucción con uso de instrumentos para la copia de un ángulo de 45°  
 Fuente: Ailen, 2016<sup>19</sup>*

Dado lo anterior, en el discurso semiótico se identifica la génesis semiótica a partir del ángulo solicitado como el representamen junto a su respectiva visualización. El discurso tecnológico permite identificar la regla y el compás como artefactos, mientras que la copia del ángulo se reconoce como de construcción. El componente referencial se identifica a partir del concepto de ángulo, no estando presente el proceso de prueba. Por tal motivo, la tarea que se solicita presenta una circulación por el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



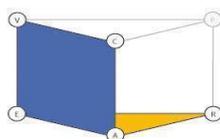
*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

<sup>19</sup> Revisar Anexo 3 clase 1 TDP 1 p. 179.

### B. Episodio 2: ¿Cómo se puede copiar el ángulo de 45° utilizando regla y compás?

En este segundo episodio, luego de construido el ángulo de 45°, Ailén solicita a los estudiantes que expliquen de manera oral “¿cómo se puede copiar un ángulo? utilizando regla y compás...” ( Anexo 3, clase 1, TDP 20, p.180). Sin embargo, es importante señalar que si bien la profesora indica cuáles son los artefactos que deben ser utilizados para explicar la técnica, estos no son manipulados por los estudiantes durante el desarrollo del episodio, ya que el objetivo de la profesora es que puedan explicar la técnica y los pasos de manera oral, para que así la profesora pueda seguir las instrucciones en la pizarra.

De esta forma, se evidencia un discurso semiótico, estando presente la génesis semiótica por medio del ángulo construido en la pizarra al que los estudiantes hacen referencia. Asimismo, la génesis discursiva emerge a partir del discurso tecnológico, en donde la explicación de la técnica de copiado permite identificar la génesis instrumental al hacer referencia a los artefactos y su uso, en donde el referencial teórico corresponde al de la copia de ángulos. Así, está presente el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

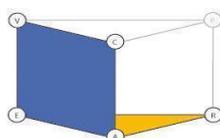
### C. Episodio 3: Institucionalización de la técnica para la copia de ángulos

Luego de que los estudiantes explican cómo copiar el ángulo de 45°, se da paso al episodio 3 en donde Ailén procede a institucionalizar, por medio del discurso oral, la técnica previamente trabajada por los estudiantes.

“...ponga ahí número 1, se copia el segmento BA sobre una recta dibujada anteriormente con el compás, aquí la regla es casi más para unir que para

copiar. Número 2, con el compás se toma la medida de la abertura del ángulo”. (Anexo 1, clase 1, TDP 70, p. 183)

Así, la profesora procede a realizar un dictado de todos los pasos requeridos para la copia de cualquier ángulo. Por lo tanto, desde el discurso semiótico se identifica la génesis semiótica a partir de la representación del ángulo en el lenguaje oral de la profesora. Sumado a esto, el concepto de ángulo se constituye como el componente referencial teórico de la tarea. Finalmente, el discurso tecnológico de la profesora permite identificar la génesis instrumental al hablar de los artefactos y la copia se constituye como el proceso de construcción. Al estar en presencia de un dictado, la profesora intenciona únicamente que los estudiantes registren en su cuaderno los pasos dados. Por tal motivo no existe para este episodio proceso de prueba. De esta manera este episodio presenta una circulación a través del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

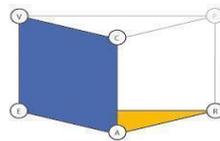


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

D. Episodio 4: Dibujar con transportador un ángulo que mida  $125^\circ$  y copiarlo usando compás y regla.

Finalizada la institucionalización de la técnica de la copia de ángulo, comienza el cuarto episodio en donde se evidencian dos tareas matemáticas con igual circulación: primero construir mecánicamente un ángulo de  $125^\circ$  y una segunda tarea que corresponde a la copia del mismo ángulo en el cuaderno (Anexo 3, clase 1, TDP 72, p. 184): “...Actividad: *dibuja con transportador un ángulo que mida  $125^\circ$ . Luego cópialo usando compás y regla. Listo, hágalo ahora ya, cuando lo tenga listo, lo muestra*”.

Para la primera y segunda tarea se identifica la génesis semiótica a partir del ángulo de  $125^\circ$  construido y copiado respectivamente. El componente referencial corresponde al concepto de ángulo. La génesis instrumental de la segunda tarea presenta una diferencia con respecto a la primera, puesto que la primera corresponde a la construcción mecánica del ángulo y la segunda a la posterior copia del mismo, utilizando el transportador, la regla y el compás, y solo los dos últimos para la segunda tarea. Así el presente episodio circula por el plano epistemológico y el plano semiótico-instrumental.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

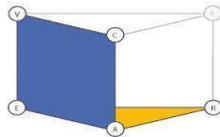
E. Episodio 5: Institucionalización de la construcción de un triángulo a partir de dos lados y un ángulo comprendido entre ellos.

Realizado las tareas del episodio 4, Ailén incorpora una nueva técnica, la cual consiste en construir un triángulo a partir de la medida de dos lados y un ángulo

“...Escriba ahí,... para construir un triángulo donde nos dan un ángulo y dos de sus lados, debemos: número 1, copiar el ángulo. Número 2, sobre cada uno de los rayos del ángulo se copia la medida de los lados del triángulo, entre paréntesis coloque, con el compás. Número 3, finalmente se unen los extremos de los lados anteriormente copiados, y así queda construido el triángulo.” ( Anexo 1, clase 1, TDP 108, p.186)

Al igual que en el episodio 3, la profesora realiza el dictado de la técnica. Siendo posible identificar en el discurso semiótico, la génesis semiótica por medio de la representación de los lados con el ángulo por medio del discurso oral. El referencial teórico se constituye como las propiedades para construir un triángulo dado dos lados y un ángulo. El discurso

tecnológico activa la génesis instrumental al momento de nombrar la regla y compás como artefactos para llevar a cabo el proceso de construcción. Al no existir proceso de prueba, se identifica entonces el semiótico-instrumental y el plano cognitivo.

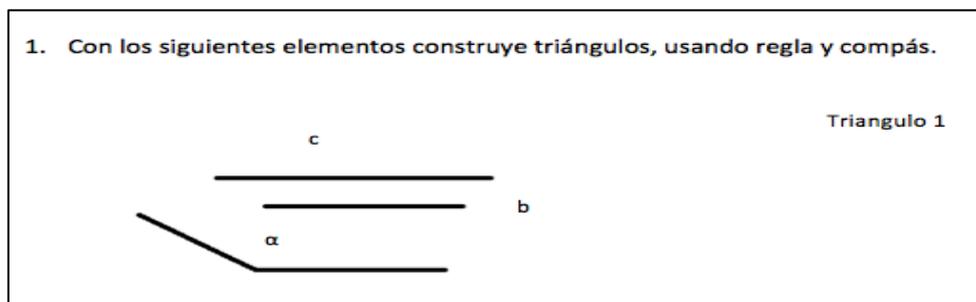


*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

F. Episodio 6: Entrega una guía de trabajo donde deben construir un triángulo a partir de dos lados y un ángulo comprendido entre ellos.

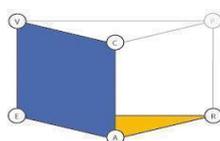
Por último, realizada la institucionalización de la técnica, la profesora entrega una guía de trabajo en donde los estudiantes deben realizar la construcción de los triángulos conociendo la medida de dos lados y uno de sus ángulos (anexo 1, clase 1, TDP 110, p. 187)

“...vamos a ponerlo a prueba entonces. (Profesora busca y entrega una guía. Esta consiste en tres ejercicios donde los estudiantes deben construir un triángulo, a partir de un ángulo y dos lados dados). Se supone que en el espacio de este lado de arriba usted va a copiar el ángulo y va a hacer el triángulo”. (Anexo 4, p.329)



*Ilustración 33, Tarea 1 guía de trabajo n°1  
 Fuente: Ailén, 2016, anexo 4, p.329*

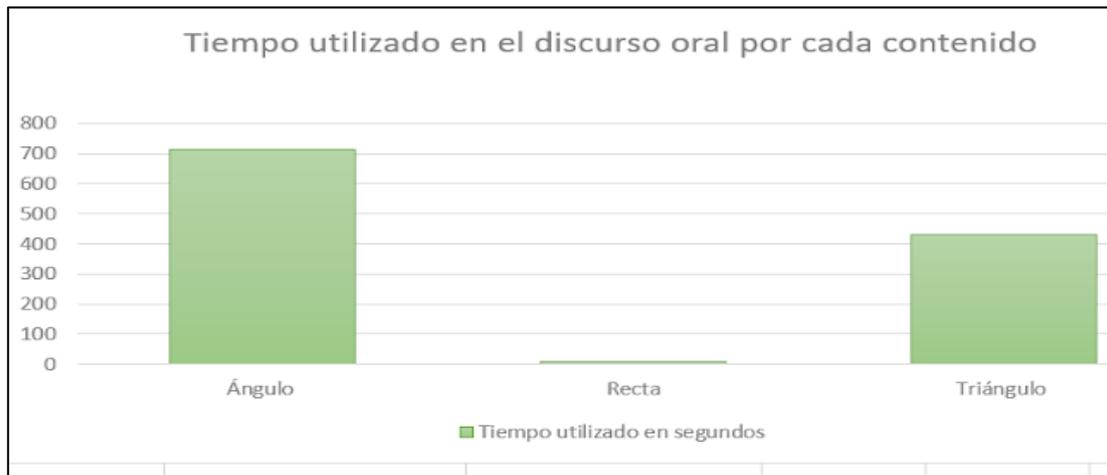
A partir de lo anterior se identifican tres tareas que circulan de la misma manera y que se diferencian en los distintos representámenes en cada una de ellas a partir de las medidas entregadas para construir los triángulos. De esta manera, la génesis instrumental y el componente referencial siguen siendo los mismos que para el episodio anterior, pero se incorpora a la tarea matemática la génesis instrumental por medio del uso de la regla y compás para llevar a cabo la construcción. Por lo tanto, se observa una circulación del plano epistemológico y el plano semiótico-instrumental.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### 6.1.2 Descripción del ETM<sub>c</sub> idóneo de Ailén desde una perspectiva cuantitativa

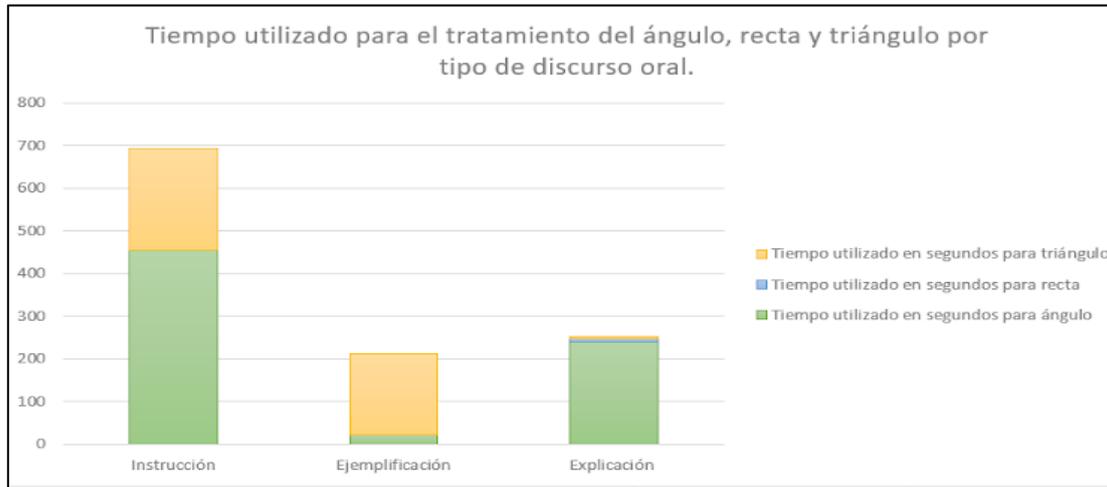
Revisados los seis episodios que presenta la primera clase, es posible observar que en lo que respecta al tratamiento del objeto triángulo, éste se realiza exclusivamente en los dos últimos episodios. Esto se debe específicamente a que, los primeros cuatro episodios se centran en activar conocimientos previos e institucionalizar la técnica de construcción y copia de ángulos. Lo anterior, queda de manifiesto en los segundos destinados para el tratamiento de los contenidos de ángulo, recta y triángulo. Esta distribución se observa en el siguiente gráfico.



*Ilustración 34 Tiempo utilizado en segundos, en el discurso oral de la clase 1 por contenido tratado.  
Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En este orden, se observa que el concepto de ángulo concentra un total de 715 segundos, recta un total de 8 y finalmente 433 segundos para el objeto triángulo. Lo anterior, obedece a la necesidad por parte de la profesora a que los estudiantes puedan comprender cómo construir un ángulo y luego a copiarlo, en donde este conocimiento se posiciona como un saber previo para la segunda mitad de la clase, es decir, construir un triángulo conociendo la medida de los lados y uno de sus ángulos.

En esta misma línea, estos dos grandes momentos de la clase, también se ven reflejados en los tipos de acciones que la profesora realiza para organizar la entrega de dichos contenidos.



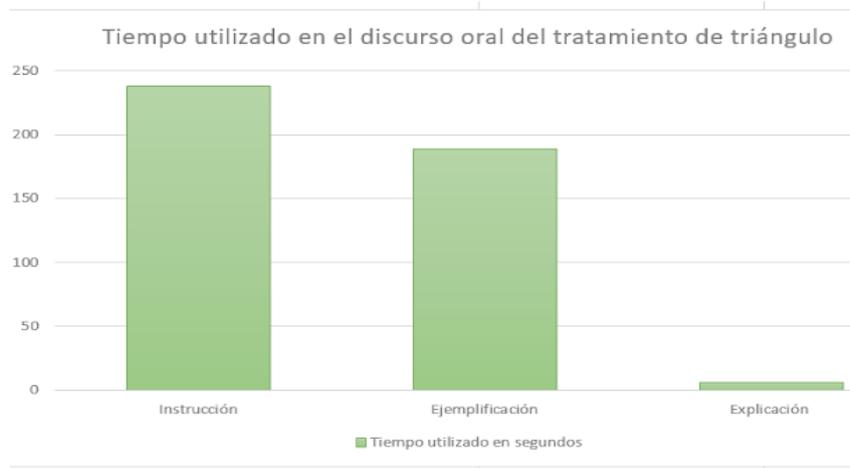
*Ilustración 35 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del ángulo, recta y triángulos por tipo de discurso oral.  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Así, al observar esto, del total de la clase la docente destina 692 segundos en la entrega de instrucciones, lo que en este caso corresponde al dictado de instrucciones, con el objetivo de institucionalizar la técnica de construcción y copia de ángulos. Lo anterior, tiene relación con la presencia del discurso tecnológico, puesto que en esta instancia no se prueba ni tampoco se construye, pero el énfasis está puesto en la explicación de la técnica en función del uso de los artefactos. Por otro lado, se destinan 253 segundos a la explicación, constituyéndose en este caso como un recurso para la enseñanza de una nueva técnica, la que corresponde para este caso a la construcción del triángulo previamente mencionado.

Finalmente, 211 segundos son destinados para realizar ejemplificaciones, los cuales se distribuyen tanto para las instrucciones como para las explicaciones.

#### A. El objeto triángulo y su tratamiento

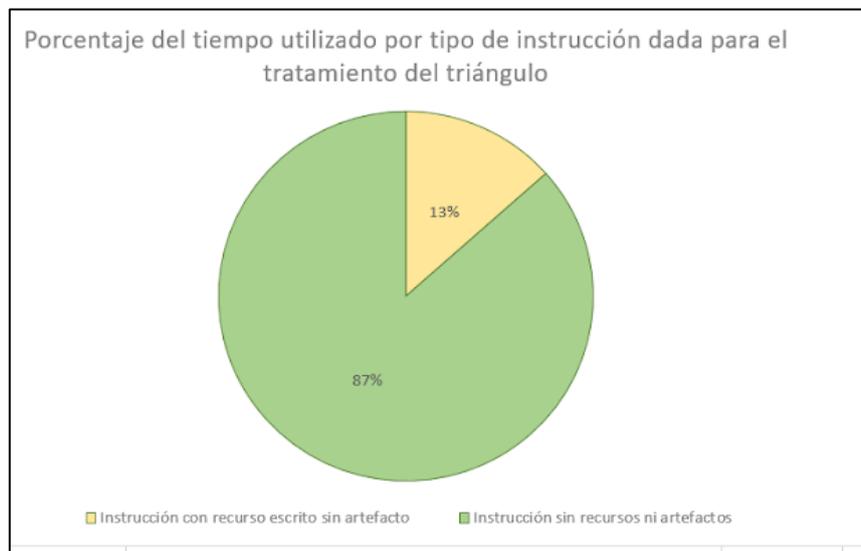
Al ser esta la primera clase, la profesora utiliza esta sesión para introducir la técnica de construcción de un triángulo a los estudiantes. Para llevar a cabo esto, se realizan ciertas acciones desde el discurso oral que delimitan el tratamiento de dicho objeto a lo largo de la clase, específicamente en los 433 segundos destinados a triángulo.



*Ilustración 36 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del triángulo por tipo de discurso oral.  
Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Así, 238 segundos son utilizados para la entrega de instrucciones, 189 para las ejemplificaciones y solamente 6 segundos para las explicaciones.

Al comparar estos resultados del triángulo, con las del total de la clase, se observa que en lo que respecta a las instrucciones, se mantiene la tendencia, puesto que también para este caso la instrucción es la que presenta la mayor cantidad de tiempo destinado durante la clase, lo cual se debe a que estas se distribuyen en el dictado y en las indicaciones para llevar a cabo la resolución de una guía de trabajo. De esta forma, se observa que la profesora entrega instrucciones por medio de la construcción mecánica y sin recursos ni artefactos.

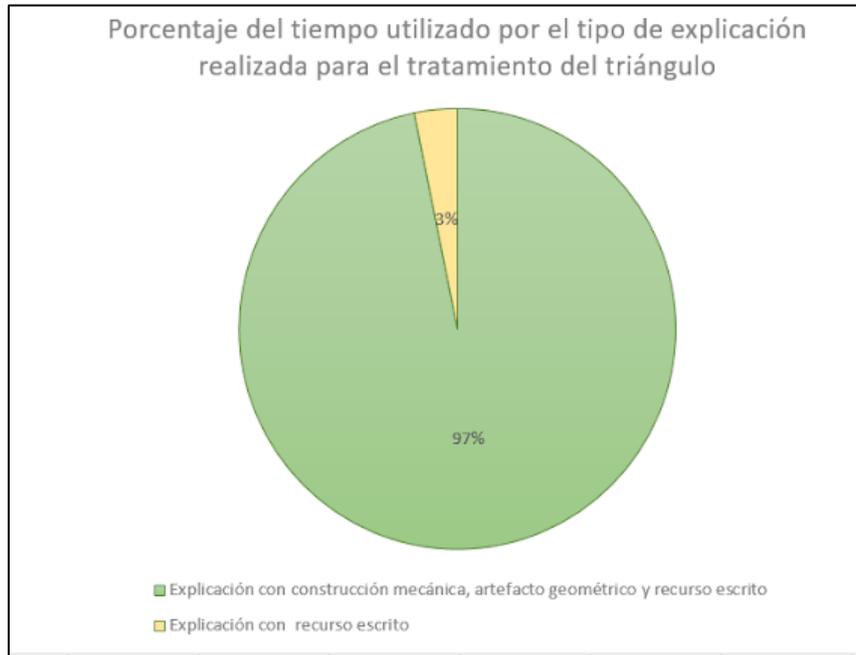


*Ilustración 37 Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de instrucción dada para el tratamiento del triángulo. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Por otro lado, la profesora utiliza solo un 13% del tiempo total para entregar instrucciones utilizando solo el recurso escrito, pero sin artefacto. La mayor cantidad de tiempo, un 87%, lo utiliza en la entrega de instrucciones mediante el uso del discurso oral, sin artefactos ni recurso escrito.

La proporción en cuanto a las explicaciones y las ejemplificaciones varía al contrastarlas con la clase en su totalidad, ya que para el trabajo del triángulo se destina más tiempo en las ejemplificaciones que en las explicaciones. Lo anterior, se debe nuevamente a que, para poder institucionalizar la construcción del triángulo, la profesora realiza un mayor número de ejemplificaciones, como un recurso que permite generalizar el aprendizaje.

Al observar las explicaciones, a pesar del breve tiempo que la profesora destina a ello para el tratamiento de triángulo, estas se dividen en función de si utilizan o no artefacto geométrico.



*Ilustración 38 Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de explicación dada para el tratamiento del triángulo. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Así, queda evidenciado que el 97% del tiempo que se destina para realizar explicaciones lo hace por medio de la utilización de artefactos geométricos y recurso escrito. Por lo anterior, también se observa la congruencia de esto con la aparición del plano semiótico-instrumental y epistemológico en todos los episodios.

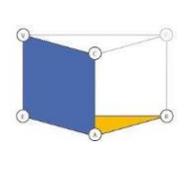
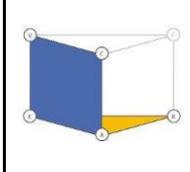
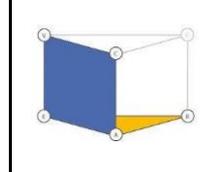
Finalmente, cabe señalar que para el objeto triángulo, y dada la distribución de las acciones presentes en el discurso oral de la profesora, la presencia del discurso tecnológico y semiótico es coherente con la alta presencia de instrucciones y ejemplificaciones. Por lo tanto, en el tratamiento de triángulo se evidencia la ausencia del proceso de prueba.

6.1.3 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la segunda Clase de Ailén.

La clase 2 tiene como objetivo *Construir triángulos dados un lado y dos ángulos adyacentes*. A partir de lo anterior, se identifican tres episodios, los cuales son caracterizados por medio del siguiente “cómic”.

**Tabla 16**

*Despliegue de la clase*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3
		

A continuación, se describe la circulación de cada episodio.

A. Episodio 1: Construir un segmento y dos ángulos.

Con esta consigna la profesora solicita a los estudiantes que puedan construir en su cuaderno, un segmento y dos ángulos con “medidas reales”, esto con la intención construir más adelante un triángulo a partir de la información entregada “...*Por favor con medidas reales ¿Estamos? Un segmento de 6 centímetros, y dibuja con medida real un ángulo de 60° y un ángulo de... ¿cuánto puede ser ahí?*” (Anexo 3, clase 2, TDP 6, p. 191).

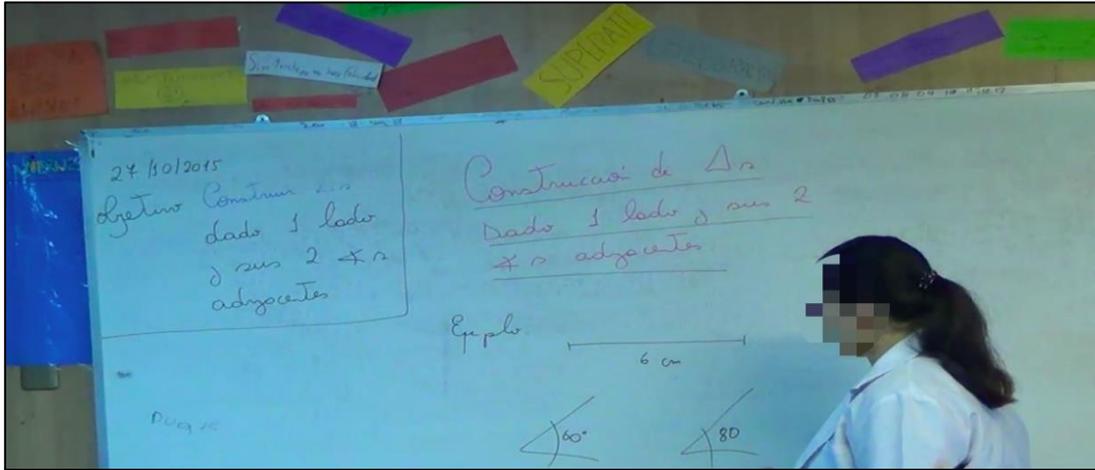


Ilustración 39 Dibujo a mano alzada con medida  
 Fuente: Ailen, 2016<sup>20</sup>

La representación del segmento con los dos ángulos permite la aparición de la génesis semiótica, la utilización de la regla y compás con la construcción de los elementos solicitados permite observar la génesis instrumental. Finalmente, el referencial teórico corresponde simultáneamente a los conceptos de ángulo y segmento.

Dado lo anterior, para este primer episodio al no solicitar prueba, está presente el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

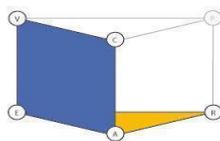


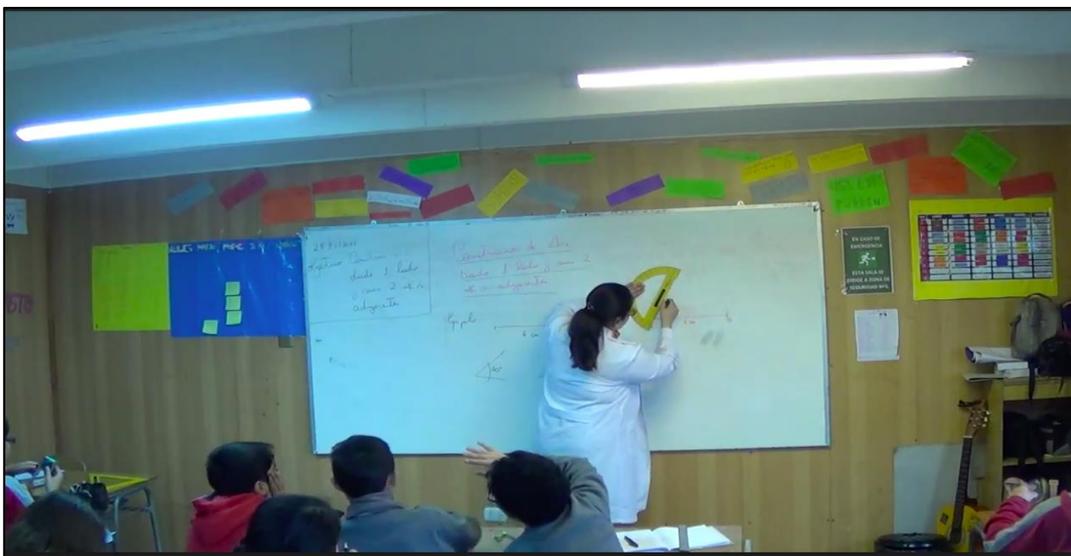
Ilustración 23 Planos semiótico-instrumental y epistemológico

<sup>20</sup> Ver Anexo 3, clase 2, TDP 6, p. 191.

B. Episodio 2: Aplicación de la técnica de construcción de triángulo con la medida de un lado y dos de sus ángulos, con ejercicios en la pizarra.

Para este segundo episodio, la profesora solicita a los estudiantes que construyan un triángulo en su cuaderno, a partir de la medida de un segmento y dos ángulos, esto por medio de medidas que ella entrega

*“Primero, dibuja un segmento cualquiera, quiere decir de cualquier medida en su cuaderno, usted decide la medida, como lo hicimos hace poco. Dos ángulos agudos, usted elige esos ángulos agudos, con el transportador, y después va a construir un triángulo con ellos, igual como lo acaba de hacer. La segunda, también dibuja un segmento cualquiera, que puede ser el mismo anterior, pero acá tiene un ángulo obtuso y uno agudo. Y con ellos tiene que construir un triángulo. ¿Estamos?” (Anexo 3, clase 2, TDP 59, p.195).*



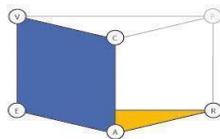
*Ilustración 40 Construcción mecánica de ángulos  
Fuente: Ailen, 2016<sup>21</sup>*

De esta manera la génesis semiótica está presente por medio de la representación del nuevo triángulo construido. La génesis instrumental se observa por medio de la utilización de la

<sup>21</sup> Ver Anexo 3, clase 2, TDP 59, p.195

regla y compás para la construcción del triángulo, en donde este último corresponde al referencial teórico de la tarea.

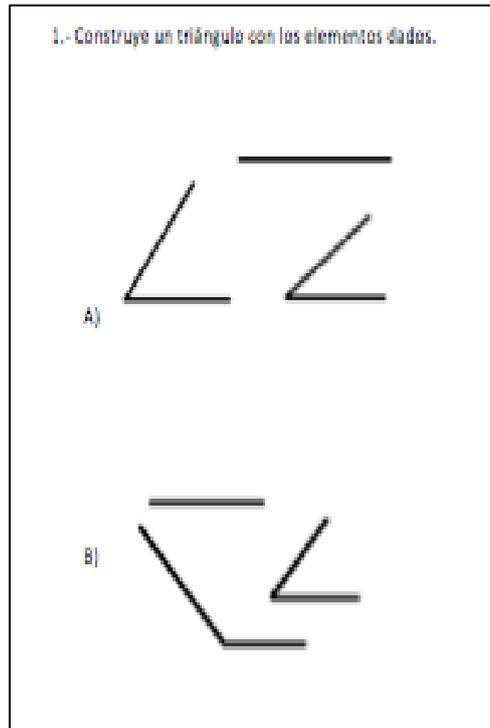
Al no existir prueba, nuevamente está presente el plano semiótico-instrumental y el epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

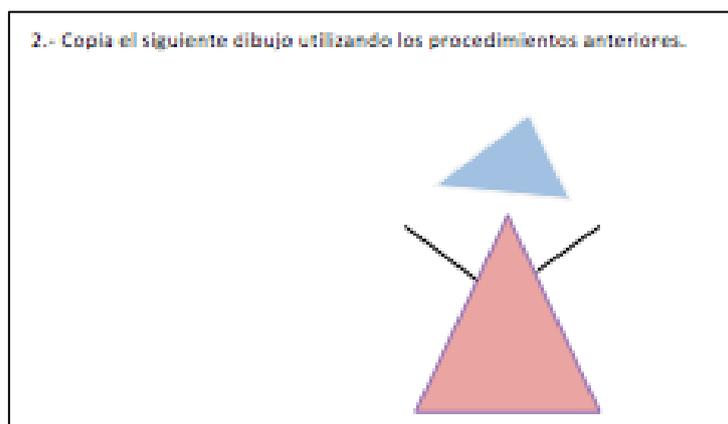
C. Episodio 3: Aplicación de la técnica de construcción de triángulo con la medida de un lado y dos de sus ángulos, con ejercicios en una guía de trabajo.

Finalmente, para este último episodio, deben desarrollar una guía de trabajo que contiene dos actividades: para la primera actividad, la cual está separada en dos tareas, se repite la misma tarea que en el episodio anterior, estando presentes los mismos componentes, en donde varía el representamen en cada una de ellas. *“Al que termina le voy a pasar la guía...”* (Anexo 3, clase 2, TDP 69, p.196).



*Ilustración 41 Tarea 1 Hoja de trabajo<sup>2</sup>  
Fuente: Ailén, 2016*

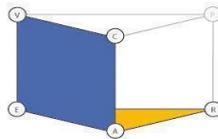
Para la segunda actividad, se solicita que los estudiantes copien un dibujo utilizando procedimientos vistos previamente.



*Ilustración 42 Tarea 2 Hoja de trabajo<sup>2</sup>  
Fuente: Ailén, 2016*

Por lo cual, se presentan los mismos componentes con la salvedad que el representamen varía al existir en este caso un dibujo.

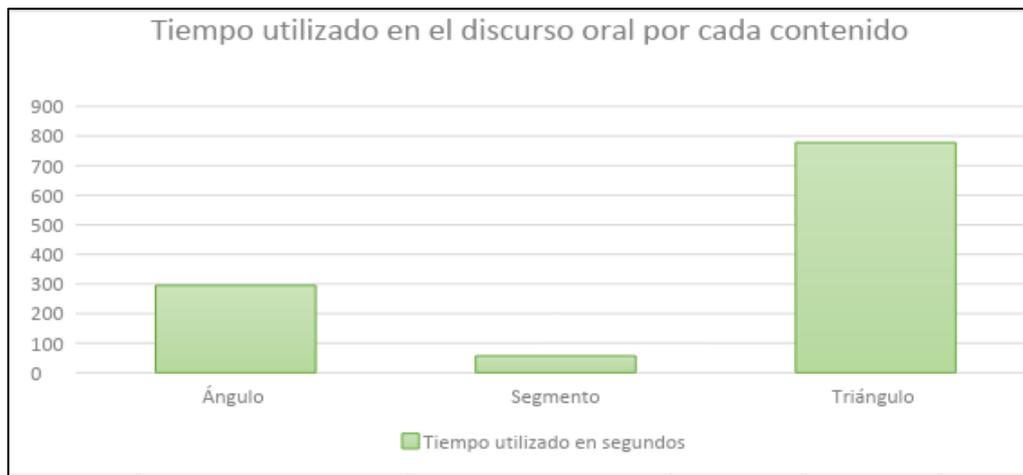
Por tal motivo, no reviste mayor análisis el presente episodio.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

#### 6.1.4 Descripción del ETM<sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa

En el siguiente gráfico se presenta el tiempo utilizado en segundos en relación al tipo de contenido geométrico trabajado por la profesora.

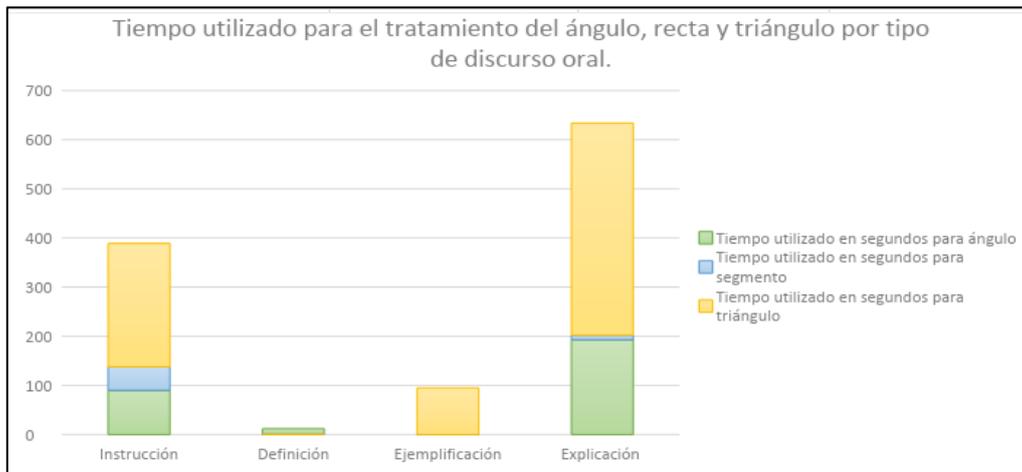


*Ilustración 43 Tiempo utilizado en segundos, en el discurso oral de la clase 2 por contenido tratado.  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

El gráfico permite identificar que el concepto de triángulo corresponde al contenido que concentra la mayor cantidad de tiempo en esta clase, es decir 778 segundos, seguido a continuación por 295 segundos en el concepto de ángulo y finalmente 57 segundos para el objeto segmento.

Esta segunda clase dedica dos episodios a la construcción del objeto triángulo, por lo que esto explica que este sea el concepto que presenta una mayor cantidad de tiempo en el discurso oral. En esta misma línea, el objeto ángulo y segmento aparecen en menor medida, ya que estos se mencionan principalmente en el primer episodio como parte de una tarea que permite la realización de los siguientes dos episodios. Así, estos dos últimos objetos en conjunto con la técnica de construcción, se posicionan como conocimientos previos para realizar el tratamiento del triángulo.

La proporción con la cual se desarrollan estos tres conceptos, también se observa en los tipos de acciones utilizadas por la profesora para el desarrollo de las tareas.



*Ilustración 44 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del ángulo, segmento y triángulos por tipo de discurso oral. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Entonces, el gráfico nos indica que la profesora invierte 643 segundos para llevar a cabo las explicaciones. Esto corresponde a la mayor cantidad de tiempo utilizado en la clase con el objetivo de explicar cómo llevar a cabo las distintas construcciones teniendo como información un segmento y dos ángulos adyacentes. Luego, las instrucciones utilizan 389 segundos de la clase, en donde también se observa que la proporción sigue siendo mayoritariamente sobre el concepto de triángulo, lo que se explica puesto que el objetivo de la sesión es construir un triángulo. En esta misma línea, las ejemplificaciones se realizan en

un total de 95 segundos, únicamente para el objeto triángulo. Finalmente, las definiciones son trabajadas durante 12 segundos para el concepto de ángulo.

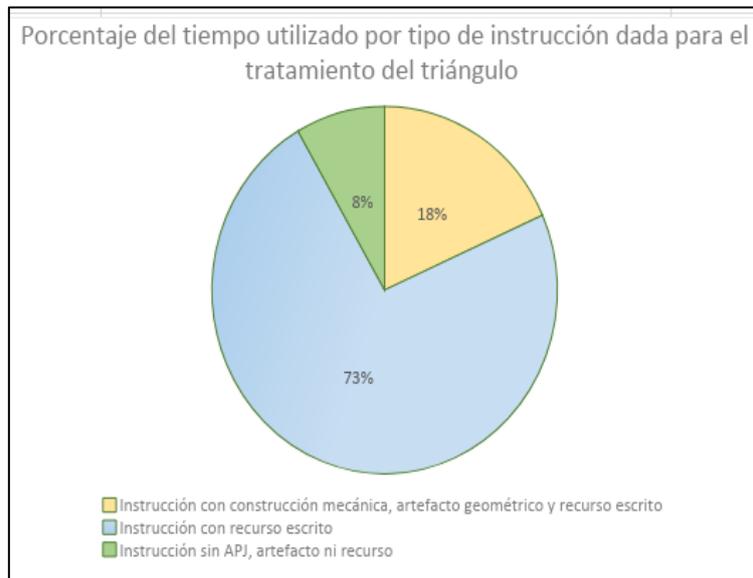
#### A. El objeto triángulo y su tratamiento

En esta clase, al tener como objetivo que los estudiantes construyan triángulos, la profesora utiliza 778 segundos del discurso oral para llevar a cabo el tratamiento de triángulos. A continuación, se desglosan las siguientes acciones



*Ilustración 45 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del triángulo por tipo de discurso oral.  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

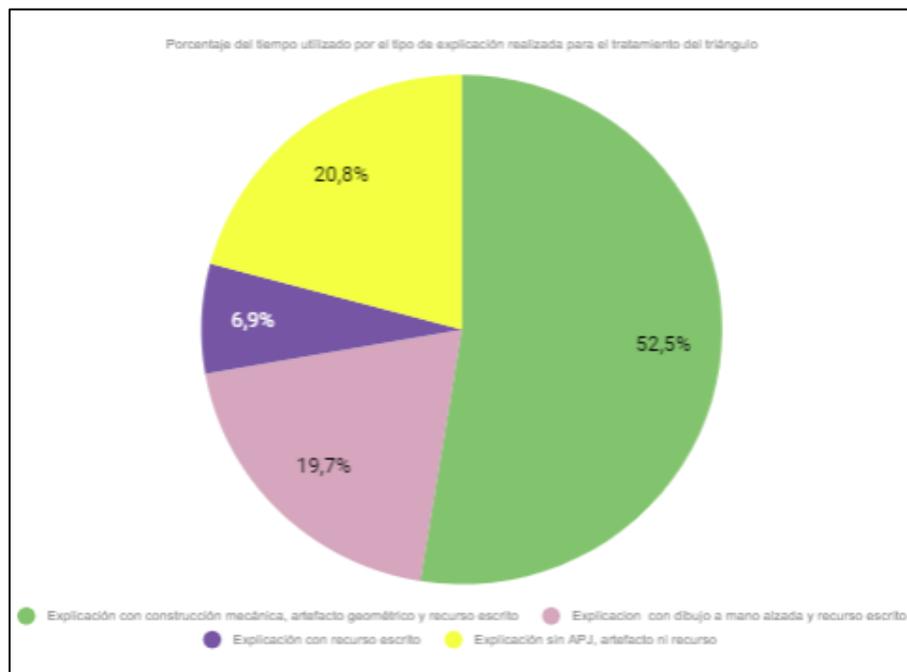
En este sentido, se observa que se destinan 432 segundos para realizar explicaciones, 251 para las instrucciones y solamente 95 para las ejemplificaciones. Nuevamente la distribución y proporción de los tiempos en relación a las acciones, comparadas con las del total de la clase, sigue siendo la misma. Estas explicaciones se relacionan con la construcción del triángulo, y las instrucciones también se distribuyen entre el dictado y las indicaciones para llevar a cabo las construcciones. En conclusión, en lo que respecta a las ejemplificaciones, estas se realizan mediante el proceso de construcción.



*Ilustración 46* Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de instrucción dada para el tratamiento del triángulo.  
*Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En lo que respecta a los tipos de instrucciones que la profesora entrega, el 73% de éstas corresponden a aquellas que son transmitidas por medio de recursos escritos, específicamente a través de guía de trabajo o anotadas en la pizarra. Por otra parte, las instrucciones con construcción mecánica, artefacto geométrico y recurso escrito utilizan un 18% de las instrucciones, esto se debe a los momentos en los que la profesora realiza las construcciones en la pizarra de manera simultánea a las instrucciones de lo que plasma en la pizarra. Por último, en lo que respecta al 8% de las instrucciones sin artefacto ni recurso, corresponden al dictado de instrucciones.

En lo que refiere a los tipos de explicación, estas se dividen en cuatro categorías que se explican a continuación.



*Ilustración 47 Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de explicación dada para el tratamiento del triángulo. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

El 52% de las explicaciones corresponden a aquellas que vienen acompañadas de una construcción mecánica, utilización de artefacto geométrico y recurso escrito. El 19,7% corresponde a aquellas realizadas a mano alzada y por medio de recursos escritos y el 6,9% a aquellas donde solo hay recurso escrito. Finalmente, el 20,8% corresponde a explicaciones utilizando solo la voz.

Como ya se observó con anterioridad, las explicaciones son las acciones que mayor tiempo la profesora utiliza. De esta manera, al tratarse de explicaciones sobre construcciones de triángulo a partir de segmentos y ángulos, la profesora intercala las explicaciones que realiza por el medio escrito, ya sea agregando o quitando artefactos o utilizando solo su voz.

Finalmente, todo el análisis anterior nos lleva a concluir que la tarea matemática se concentra en la construcción del triángulo dado un segmento y dos ángulos adyacentes. Así, se observa que todo el trabajo se centra en GI, puesto que la profesora indica que se utilicen

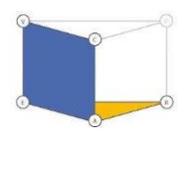
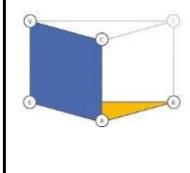
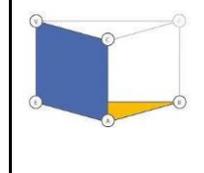
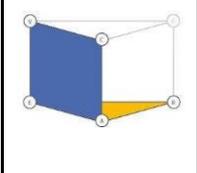
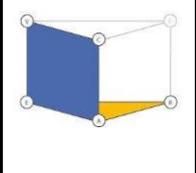
“medidas reales” para llevar a cabo las distintas construcciones. Todas las indicaciones que la profesora realiza de manera oral, se entregan de manera simultánea con estas construcciones que ella lleva a cabo en la pizarra o que solicita a los estudiantes realizar en sus cuadernos. Por tal motivo, al centrarse todo el trabajo únicamente en las construcciones es congruente que se repita la misma circulación para los tres episodios identificados en la clase.

### 6.1.5 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la tercera Clase de Ailén

La clase 3 tiene como objetivo Construir *triángulos dada la medida de sus tres lados*. A partir de esto, la clase se divide en 5 episodios, los cuales son caracterizados por medio del siguiente “cómic”.

**Tabla 17**

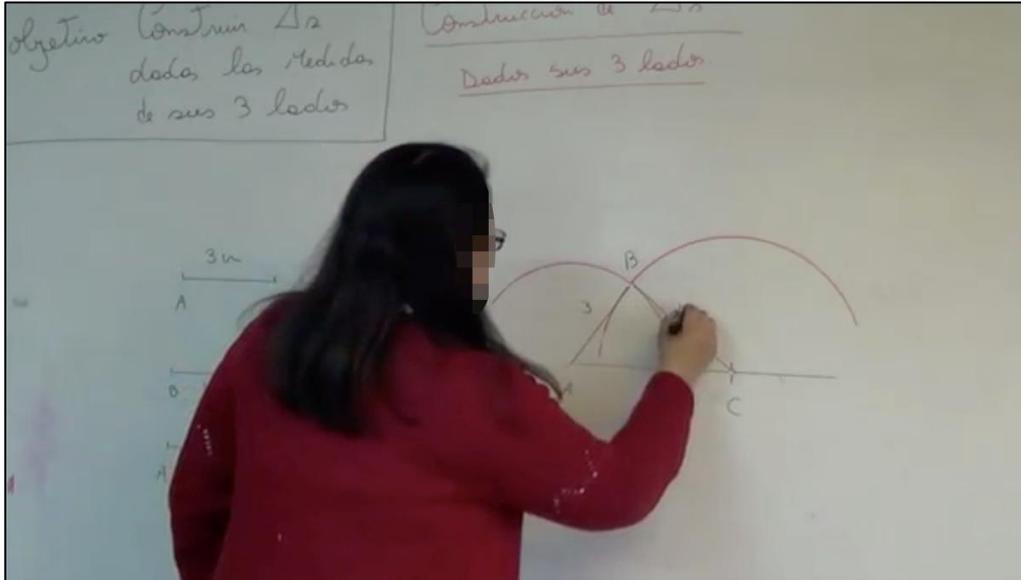
*Despliegue de la clase*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3	Episodio 4	Episodio 5
				

A continuación, se describe la circulación de cada episodio.

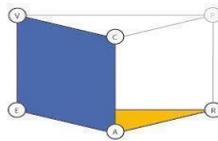
#### A. Episodio 1: Copia de segmentos

El primer episodio se constituye como la introducción al curso de las condiciones que deben cumplir tres segmentos para construir un triángulo, utilizando regla y compás. Por tal motivo, en este episodio solo se solicita que copien la información presente en la pizarra en sus cuadernos “... ¡Ya! con su regla, va a dibujar medidas reales de los lados que voy a poner en la pizarra.” (Anexo 3, clase 3, TDP 10, p .204).



*Ilustración 48 Construcción mecánica de un triángulo dada la medida de sus tres lados  
 Fuente: Ailén, 2016<sup>22</sup>*

Así, la génesis semiótica se observa a partir de los tres segmentos construidos en la pizarra que, a su vez, mediante la utilización de la regla y compás como artefactos, permiten la construcción del triángulo, emergiendo así la génesis instrumental. Al estar presente el objeto triángulo como referencial teórico y no el proceso de prueba, se configura el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



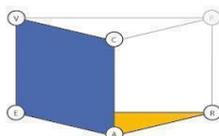
*Ilustración 23 Planos semiótico-instrumental y epistemológico*

<sup>22</sup> Ver Anexo 3, clase 3, TDP 10, p.204.

B. Episodio 2: Institucionalización de la técnica para la construcción del triángulo a partir de la medida de tres lados.

En este segundo episodio, la profesora procede a explicar cómo se puede construir un triángulo con tres segmentos dados, es decir, realiza la explicación de la técnica puesta en juego en el episodio 1 “...Dibujen los segmentos y usted mide y puede construir un triángulo ¿a quién se le ocurre cómo empezamos?” (Anexo3, clase 3, TDP 18, p.205).

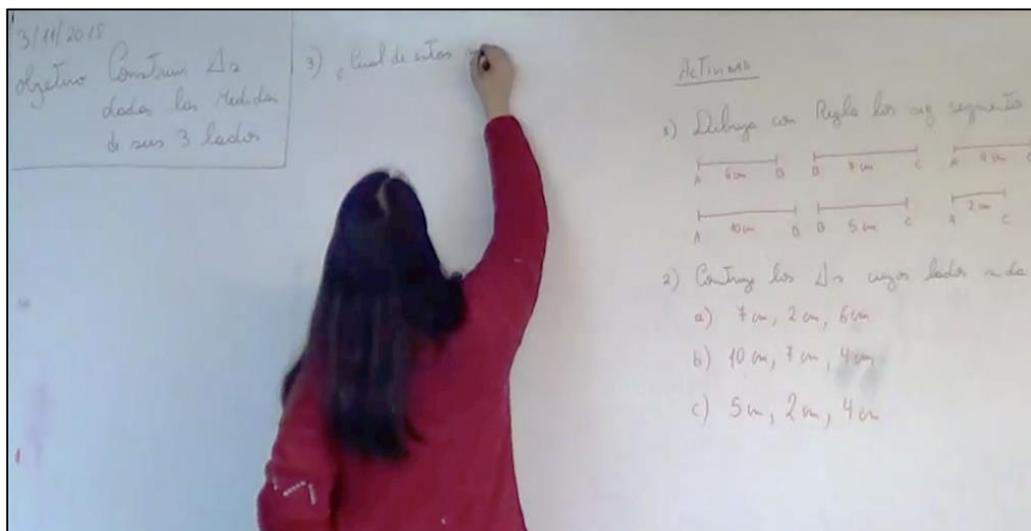
Lo anterior se lleva a cabo por medio del discurso, por lo que en primer lugar está presente el discurso semiótico, en donde el triángulo está presente a través del discurso oral, y su visualización permite observar la génesis semiótica. Asimismo, el discurso tecnológico sobre el uso de la técnica, permite identificar a la regla y el compás como artefactos que permiten llevar a cabo el proceso de construcción del triángulo. Por último, el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. Dado lo anterior, y al no solicitar proceso de prueba, se observa el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

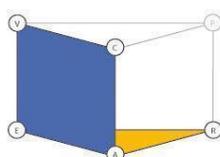
C. Episodio 3: Aplicación de la técnica para la construcción del triángulo con ejercicios presentes en la pizarra.

Luego de institucionalizar la técnica, la profesora solicita que resuelvan en sus cuadernos los ejercicios de construcción presentes en la pizarra “... ¿Cuál de estas medidas, de la A, de la B, de la C, puede formar un triángulo? ¿con cuál de ellos?” (Anexo 3, clase 3, TDP 64, p.208).



*Ilustración 49 Introducción a la desigualdad triangular  
 Ailén, 2016<sup>23</sup>*

En base a lo anterior, se observan cinco tareas que presentan igual circulación, pero que se diferencian por los distintos representamen en cada una de ellas. De esta forma, está presente la génesis semiótica a partir de la representación de los triángulos construidos, la utilización de la regla y el compás como artefactos permiten identificar la génesis instrumental, donde finalmente el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. Por lo tanto, está presente nuevamente el plano semiótico-instrumental y el epistemológico



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

D. Episodio 4: Completar una tabla para comprobar la desigualdad triangular.

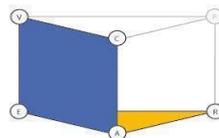
Para este último episodio, la profesora presenta una tabla en la pizarra para poder comprobar casos no posibles de desigualdad triangular.

<sup>23</sup> Ver Anexo 3, clase 3, TDP 64, p.208

$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_1+L_2$	$L_1+L_3$	$L_2+L_3$
5	2	4			
6	3	4			
6	2	1			
8	3	4			

*Ilustración 50 Desigualdad triangular  
 Fuente :Ailén, 2016*

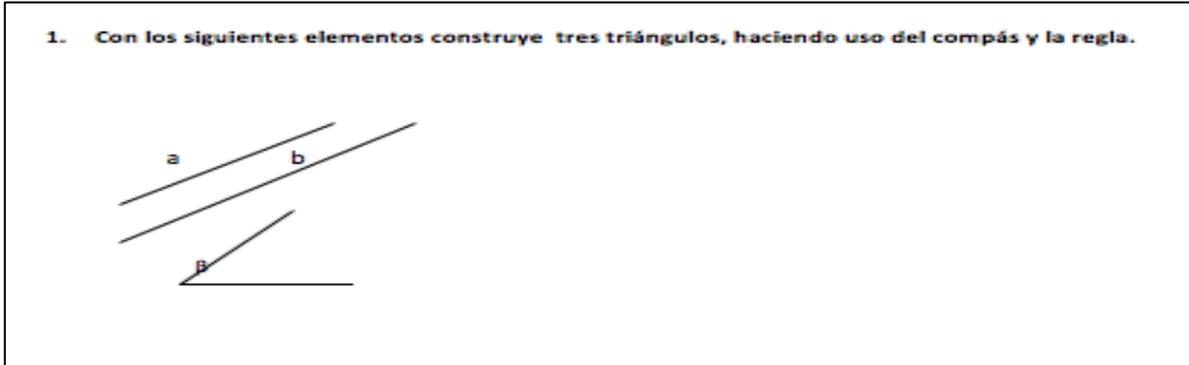
Así, solicita que realicen la suma de dos lados del triángulo y luego completen la tabla. Para lo anterior, se identifican cuatro tareas con igual circulación, diferenciándose a partir del representamen en cada una de ellas. Por lo tanto, la medida de cada lado permite observar la génesis semiótica, la realización de las sumas de los lados identifica a la génesis instrumental donde finalmente el referencial teórico corresponde al concepto de desigualdad triangular. Al no solicitar proceso de prueba, la tarea circula por el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

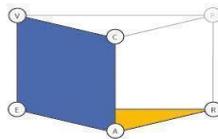
E. Episodio 5: Aplicación de la técnica para la construcción del triángulo con ejercicios entregados en una guía.

En este episodio, deben desarrollar por medio de una guía de trabajo tres actividades. La primera actividad consta de tres tareas en donde deben construir tres triángulos distintos a partir de la medida de tres lados.



*Ilustración 51 Extracto de la actividad 1 hoja de trabajo n° 3  
 Fuente: Ailén, 2016*

Para cada caso, de la primera actividad se presenta la misma circulación que en la guía anterior, diferenciándose únicamente en el representamen.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

Luego, para la segunda actividad, los estudiantes deben construir dos casos donde se cumpla la desigualdad triangular y dos casos donde esta no se cumpla. Por lo tanto, esta actividad presenta cuatro tareas con la misma circulación, en donde varía el representamen para cada caso, como también para las cuatro tareas el referencial teórico corresponde a desigualdad triangular.

2. ¿Explica en que consiste la desigualdad triangular?  
Dé dos ejemplos en que se cumpla la desigualdad triangular y dos ejemplos en donde no se cumpla la desigualdad triangular .

*Ilustración 52 Actividad 2 Hoja de trabajo n°3  
Fuente: Ailén, 2016*

Finalmente deben realizar una última actividad donde deben responder si las afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en el caso que sea falso.

3. Marca V si consideras que la afirmación es verdadera y F si la afirmación es falsa, justificando las falsas.

a) \_\_\_\_\_ El triángulo acutángulo es aquel que tiene tres ángulos interiores obtusos.  
b) \_\_\_\_\_ El triángulo rectángulo es aquel que posee un ángulo interior de  $90^\circ$ .  
c) \_\_\_\_\_ El triángulo obtusángulo es aquel que tiene un ángulo interior obtuso.  
d) \_\_\_\_\_ El triángulo isósceles acutángulo, es aquel que tiene dos ángulos interiores agudos y dos Lados de igual medida.  
e) \_\_\_\_\_ El triángulo isósceles obtusángulo, es aquel que tiene un ángulo interior obtuso y dos Lados de igual medida.  
f) \_\_\_\_\_ Cuando se aumentan dos lados del triángulo equilátero en la misma medida, este Siempre se convierte en triángulo rectángulo.  
g) \_\_\_\_\_ El triángulo isósceles rectángulo, es aquel que tiene dos ángulos interiores de igual medida y el tercero mide  $90^\circ$ .

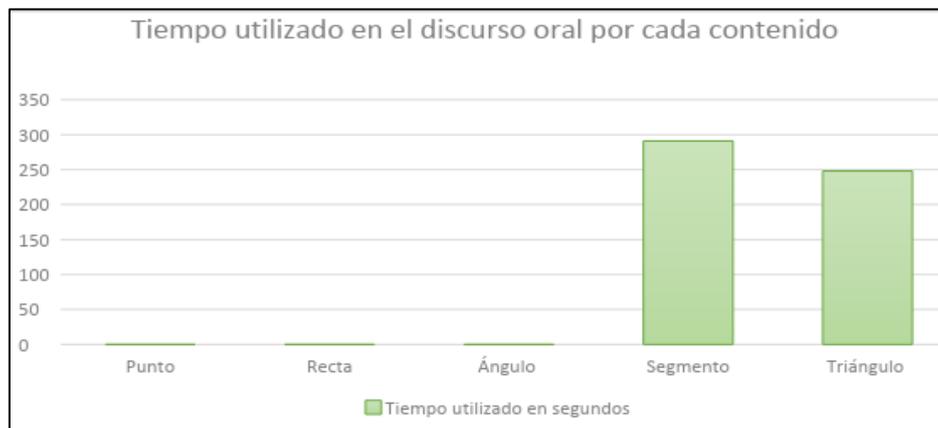
*Ilustración 53 Actividad 3 Hoja de trabajo n°3  
Fuente: Ailén, 2016*

Para poder responder al valor de verdad, se observan siete tareas en donde se presenta el semiplano [sem-ref], variando la génesis semiótica en cada caso, puesto que la representación escrita del triángulo cambia de una tarea a otra, y el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo.

En el caso de que la respuesta sea falsa y deban justificar, no es posible determinar la potencial circulación, puesto que la amplitud de la pregunta permite que las respuestas varíen en función del ETM<sub>G</sub> de cada estudiante.

#### 6.1.6 Descripción del ETM<sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa

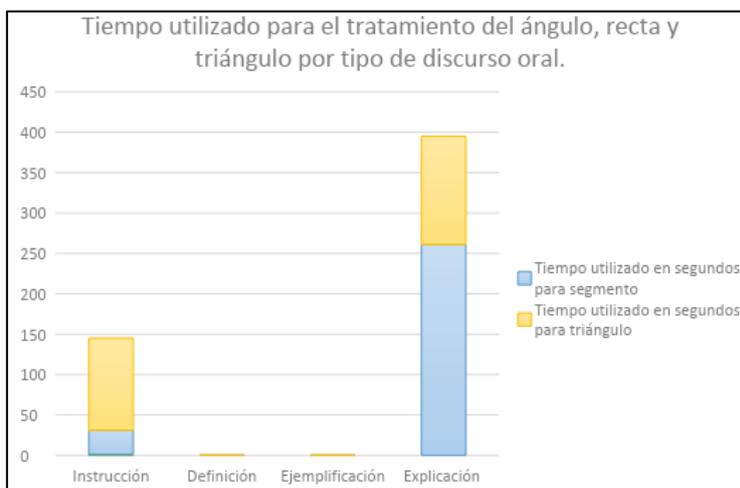
Esta distribución se observa en el siguiente gráfico.



*Ilustración 54 Tiempo utilizado en segundos, en el discurso oral de la clase 3 por contenido tratado  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En la presente clase se identifican dos tipos de contenidos tratados por la profesora, el primero corresponde al concepto de segmento en un total de 291 segundos, y luego el concepto de triángulo durante 248 segundos.

Lo anterior se explica debido a que la clase completa tiene como objetivo la construcción de triángulos a partir de la medida de segmentos y poder también desarrollar el concepto de desigualdad triangular. Por lo tanto, ambos conceptos son los únicos que se repiten a lo largo de los 5 episodios.

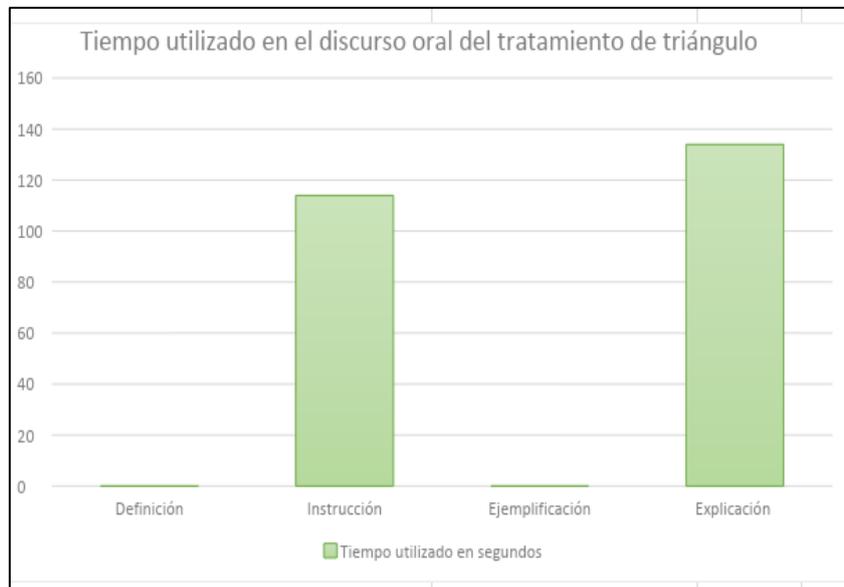


*Ilustración 55 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del ángulo, segmento y triángulos por tipo de discurso oral. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Como ya se mencionó previamente, esta clase tiene como objetivo la construcción de triángulos a partir de segmentos y también poder comprender el concepto de desigualdad triangular. Por esta razón, el tipo de discurso oral con el cual se desarrollan todos los episodios corresponden a explicación e instrucción. En lo que refiere a explicación, se utiliza mayor tiempo en el objeto de segmentos y un menor tiempo en triángulo, lo cual se explica porque la profesora explica por medio del discurso semiótico y tecnológico, cómo construir el triángulo a partir de la medida de distintos segmentos, como también posteriormente el trabajo que se realiza para completar la tabla de desigualdad triangular.

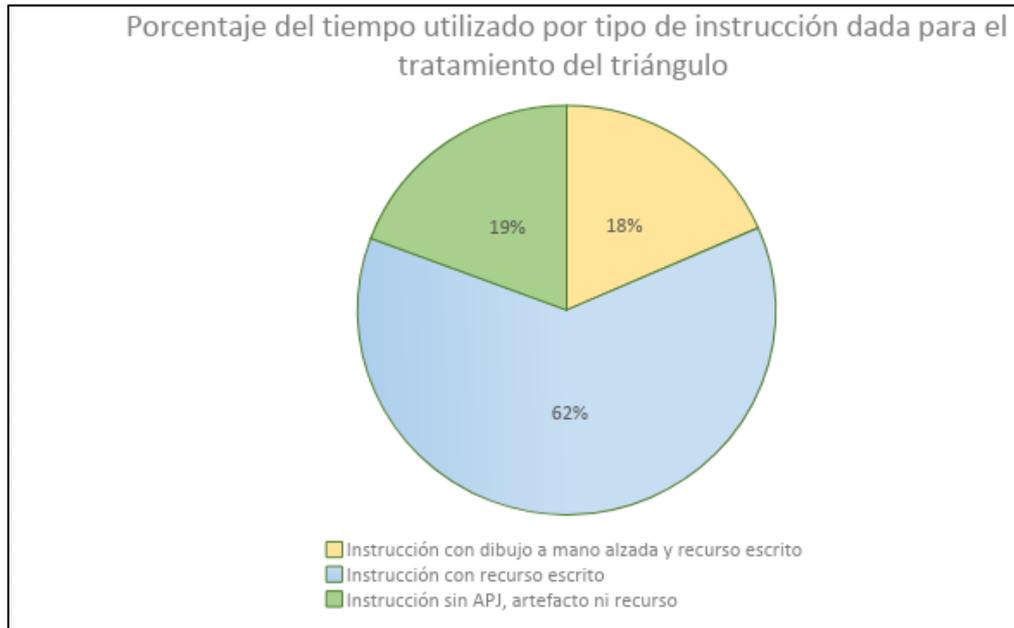
Por otro lado, el mayor tiempo en lo que refiere a instrucciones es utilizado para llevar a cabo el tratamiento del triángulo y, en menor medida el de segmentos. Estos tiempos se focalizan principalmente al momento del dictado de instrucciones para llevar a cabo la resolución de la guía o de las tareas puestas en la pizarra.

### A. El objeto triángulo y su tratamiento



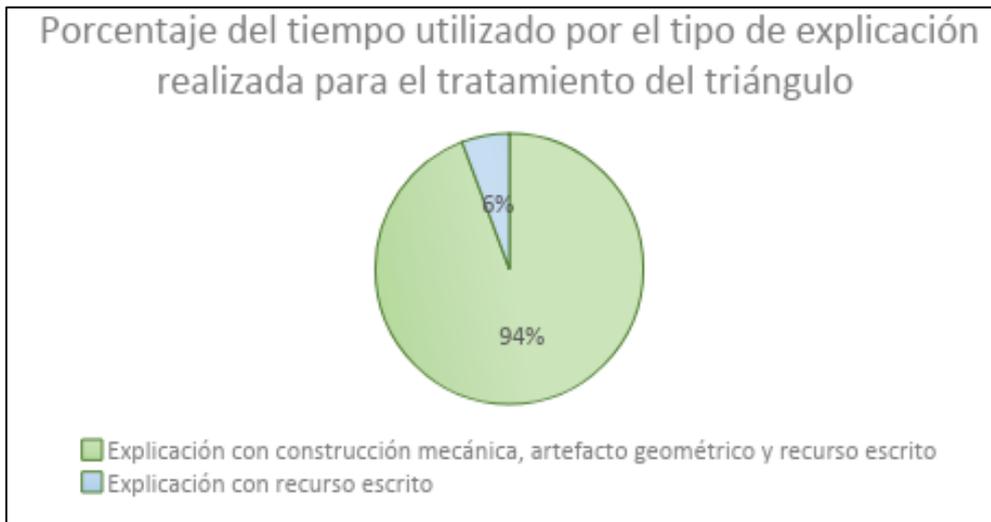
*Ilustración 56 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del triángulo por tipo de discurso oral.  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En relación a lo anterior, se observa que la tendencia se mantiene, es decir, las instrucciones y las explicaciones son las que concentran todo el discurso oral referido al discurso tecnológico para el tratamiento de triángulo. Cabe señalar que como esta es la tercera clase, existe ausencia de definiciones como también ejemplificaciones, lo que se explica por el hecho de que la profesora favorece la resolución autónoma de las tareas por parte de los estudiantes.



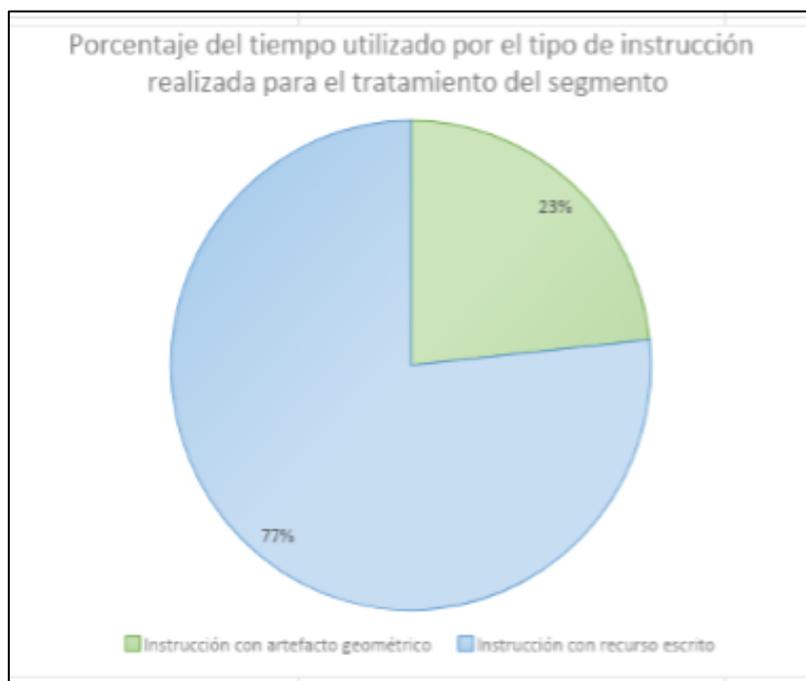
*Ilustración 57 Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de instrucción dada para el tratamiento del triángulo. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En lo que respecta a las instrucciones entregadas, se observa que el 62% de estas están dadas por medio del recurso escrito, específicamente presentes en la pizarra y en la guía de trabajo. Por otro lado, la profesora destina el 19% de las instrucciones a darlas solamente por medio del discurso oral, es decir, por medio del dictado, estando presentes elementos del discurso semiótico y discurso tecnológico. Finalmente, el 18% de las instrucciones están acompañadas por medio del dibujo a mano alzada y recurso escrito, es decir, mientras la profesora entrega dichas instrucciones realiza la construcción del triángulo en la pizarra.



*Ilustración 58 Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de explicación dada para el tratamiento del triángulo. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En lo que respecta a las explicaciones, se observa una distribución distinta a la vista en las instrucciones. Principalmente, en este caso el 94% de las explicaciones corresponden a aquellas que vienen acompañadas de construcción mecánica, artefacto geométrico y recurso escrito. Al tratarse de construcciones de triángulos, la profesora explica la técnica a los estudiantes mientras realiza el trabajo en la pizarra, combinando elementos del discurso tecnológico y de la génesis instrumental. Sumado a esto, el 6% del tiempo entrega explicaciones solamente con recurso escrito, es decir, escribe algunos pasos en la pizarra.



*Ilustración 59 Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de instrucción realizada para el tratamiento del segmento.*

*Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Finalmente, en cuanto al tratamiento del objeto segmento, las instrucciones se dividen en dos tipos: con artefacto geométrico y con recurso escrito, siendo la primera la que presenta un 77% y la segunda un 23%. Lo anterior nuevamente se expresa en que la profesora utiliza la mayoría del tiempo en la pizarra para entregar las instrucciones a los estudiantes mientras realiza las construcciones o anotándolas en la pizarra. Por lo tanto, están presentes los mismos tipos que para el objeto triángulo.

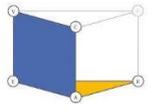
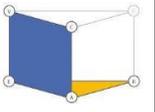
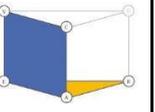
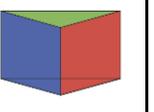
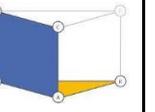
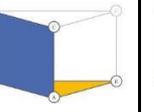
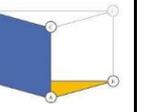
#### 6.1.7 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la cuarta Clase de Ailén

La clase 4 tiene como objetivo poner en juego lo aprendido en las sesiones anteriores a través del desarrollo de una guía que consta de siete actividades. Cada alumno responde la guía de manera individual, por lo que se ha considerado clasificar a cada una de las

actividades como un episodio independiente. Por lo tanto, la clase se divide en siete episodios, los cuales son caracterizados por medio del siguiente “cómic”.

**Tabla 18**

*Despliegue de la clase*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3	Episodio 4	Episodio 5	Episodio 6	Episodio 7
						

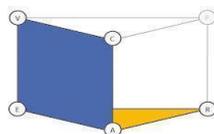
A continuación, se describe la circulación de cada episodio.

A. Episodio 1: dibujar 3 segmentos

**1. Dibuja tres segmentos, con regla, de las siguientes medidas.**  
 Lado a = 5 cm      Lado b = 4 cm      Lado c = 2 cm

*Ilustración 60 Actividad 1 Hoja de trabajo n°4*  
 Fuente: Ailén, 2016

El episodio consta de una actividad que presenta un total de tres tareas que circulan de igual manera, evidenciándose una diferencia en la representación del segmento en función de su medida. Por lo tanto, se identifica la génesis semiótica en donde cada medida del segmento corresponde a un representamen distinto junto a su respectiva visualización. La génesis instrumental es la misma para los tres casos, ya que el artefacto a utilizar es la regla y el proceso de construcción corresponde a trazar el segmento. Finalmente se identifica el concepto de segmento como referencial teórico. Al no estar presente el proceso de prueba, se observa la presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



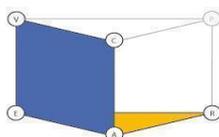
*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

B. Episodio 2: dibuja con transportador los ángulos

- 2. Dibuja con transportador lo siguientes ángulos.**  
 a)  $\sphericalangle\beta = 30^\circ$                       b)  $\sphericalangle\delta = 100^\circ$

*Ilustración 61 Actividad 2 Hoja de trabajo n°4  
 Fuente: Ailén, 2016*

El segundo episodio solicita que los estudiantes dibujen dos ángulos dados, utilizando un transportador. De esta manera, el episodio presenta dos tareas con la misma circulación, cambiando únicamente la medida de cada ángulo. Así, la génesis semiótica está presente a partir de la medida de los ángulos como representamen ( $30^\circ$  y  $100^\circ$  respectivamente) junto a su visualización. El proceso de construcción de cada ángulo se realiza por medio de la utilización del compás como artefacto, dando origen así a la génesis instrumental. Finalmente, el referencial teórico corresponde al concepto de ángulo. Nuevamente para ambas tareas no se observa la presencia del proceso de prueba. De tal manera, se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



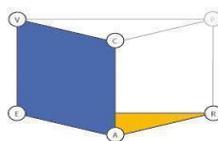
*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

C. Episodio 3: construye triángulos utilizando artefacto regla y compás.

- 3. Construye los siguientes triángulos utilizando los elementos anteriores.  
 (Nombra cada uno de sus lados y vértices)**
- a) Triangulo 1 : 5 cm , 4 cm , 2 cm
  - b) Triangulo 2 : 5 cm ,  $\alpha$  , 2cm
  - c) Triangulo 3 :  $\alpha$  , 4 cm ,  $\delta$

*Ilustración 62 Actividad 3 Hoja de trabajo n°4  
 Fuente: Ailén, 2016*

La actividad 3 presenta tres tareas con la misma circulación que se repite, en donde únicamente varía el representamen en cada una de ellas. Para cada tarea, los estudiantes deben construir un triángulo a partir de la medida de los lados y/o ángulos según corresponda. Para la génesis semiótica se observa al triángulo en conjunto con las medidas entregadas como el representamen y la respectiva visualización. Al indicar en la consigna de la tarea que deben llevarse a cabo con los elementos anteriores, la génesis instrumental está compuesta por el proceso de construcción de los triángulos, la regla y compás como los artefactos a utilizar. Finalmente, el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. Al no estar nuevamente presente el proceso de prueba, cada actividad circula en el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

#### D. Episodio 4: Estudio de la desigualdad triangular

4. Se tiene tres varillas de 4 cm, 1 cm y 8 cm de largo. Se quiere construir una figura triangular, utilizando dichas varillas, de modo que la longitud de los lados de la figura coincida con la longitud de las varillas.  
¿Es posible construir dicha figura? Si tu respuesta es Sí, fundamenta y construye con regla y compás una representación geométrica de ella. Si tu respuesta es no, argumenta por qué no es posible esa construcción.

*Ilustración 63 Actividad 4 Hoja de trabajo n°4  
Fuente: Ailén, 2016*

Para este cuarto episodio, se solicita que los estudiantes argumenten si es posible construir una figura a partir de la medida que tienen tres varillas. En este caso, el representamen corresponde al de la medidas entregadas en conjunto con la posible figura a construir, dando origen a la génesis semiótica. La génesis instrumental se encuentra presente por medio de la regla y compás, presentes en la consigna, que potencialmente podrían utilizarse en caso de que el estudiante intente construir para argumentar el caso imposible de desigualdad triangular. La génesis discursiva está presente por medio del proceso de prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo, puesto que los estudiantes deben justificar el por qué ese caso es posible o no de construir, a partir del referencial teórico que corresponde a desigualdad triangular. En función de los elementos previamente mencionados esta tarea moviliza los seis componentes del ETM lo que se observa en la ilustración siguiente.



*Ilustración 13 Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático*

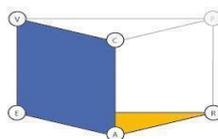
E. Episodio 5: Aplicación de la propiedad de la desigualdad triangular

5. Verifica mediante desigualdad triangular si los siguientes triángulos se pueden construir.

triángulo	Lado a	Lado b	Lado c	procedimiento	Respuesta
ABC	1 cm	5 cm	11 cm		
ABC	5 cm	2 cm	3 cm		
ABC	9 cm	5 cm	8 cm		

*Ilustración 64 Actividad 5 Hoja de trabajo n°4  
 Fuente: Ailén, 2016*

El episodio 5 cuenta de una actividad que presenta tres tareas que se repiten, cambiando solamente el representamen en cada una de ellas. Estas tareas solicitan que los estudiantes verifiquen la desigualdad triangular en tres casos distintos. Para aquello se pide que realicen la suma de dos lados del triángulo y luego completen la tabla. Para lo anterior, la medida de cada lado permite observar la génesis semiótica, la verificación de las desigualdades (ya sea sumando o construyendo) identifica a la génesis instrumental, donde finalmente el referencial teórico corresponde al concepto de desigualdad triangular. Al no solicitar proceso de prueba, la tarea circula por el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



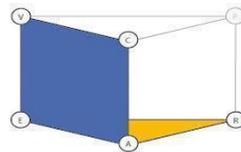
*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

F. Episodio 6: Aplicación de la propiedad de la desigualdad triangular

**6.** Da un ejemplo Geométrico donde **no** se cumpla la desigualdad triangular

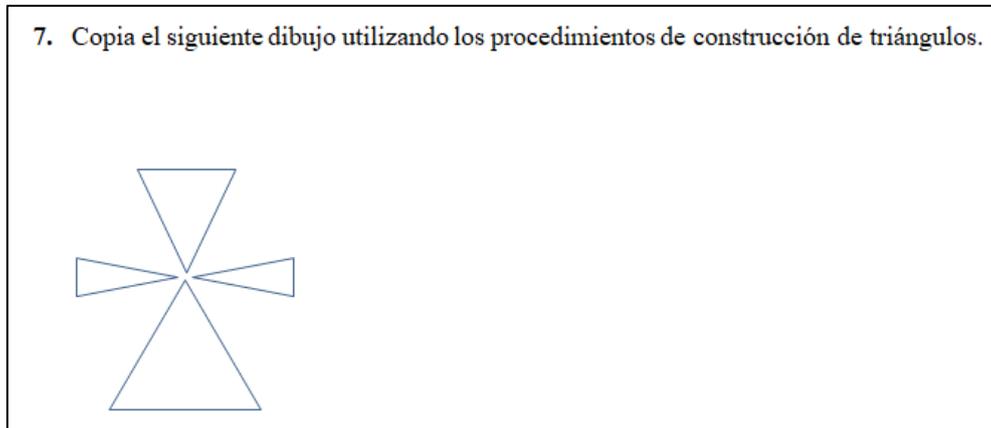
*Ilustración 65 Actividad 6 Hoja de trabajo n°4  
Fuente: Ailén, 2016*

El sexto episodio presenta una única tarea, en donde deben dar un ejemplo donde no se cumpla la desigualdad triangular. La génesis instrumental está presente por medio de los artefactos utilizados para llevar a cabo el proceso de construcción. La génesis semiótica corresponde a la representación del ejemplo construido en conjunto con su respectiva visualización. El referencial teórico corresponde al concepto de desigualdad triangular. Finalmente, al no estar presente el proceso de prueba, nuevamente se encuentran presentes el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



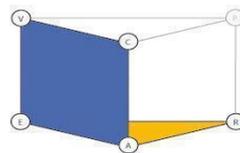
*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

G. Episodio 7: Copiar un dibujo usando procedimientos de construcción



*Ilustración 66 Actividad 7 Hoja de trabajo n°4  
 Fuente: Ailén, 2016*

Finalmente, este séptimo episodio solicita la copia del dibujo, utilizando las técnicas de construcción de triángulos previamente revisadas en las clases anteriores. Para llevar a cabo lo anterior, la génesis instrumental está presente por medio de la regla y compás como artefactos para llevar a cabo el proceso de copia de triángulos. El representamen corresponde a la figura presentada y posteriormente a la figura copiada, es decir se presenta una fibrición interna entre el  $ETM_G$ . En lo que respecta al referencial teórico, este corresponde al concepto de triángulo y a la técnica de copia de triángulos. Al no solicitar proceso de prueba, la circulación comprende el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

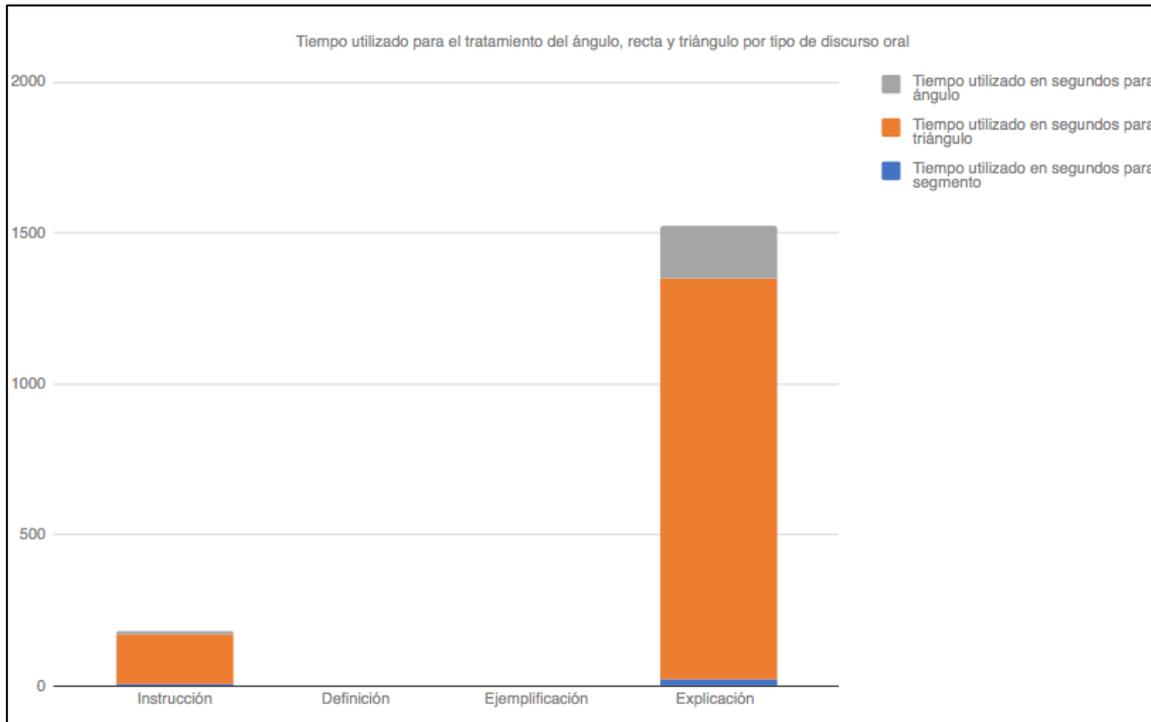
### 6.1.8 Descripción del ETM<sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa



*Ilustración 67 Tiempo utilizado en segundos, en el discurso oral de la clase 4 por contenido tratado.  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En la presente clase se identifican tres tipos de contenidos tratados por la profesora, el primero corresponde al concepto de ángulo en un total de 184 segundos, luego el concepto de segmento durante 27 segundos. Finalmente, el concepto de triángulo es trabajado durante 1.493 segundos.

Lo anterior se explica debido a que la clase completa tiene como objetivo la construcción de triángulos a partir de la medida de segmentos y ángulos, y así poder también desarrollar el concepto de desigualdad triangular en una guía de trabajo. Por lo tanto, estos tres conceptos se repiten a lo largo de los siete episodios de esta última clase.



*Ilustración 68 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del ángulo, segmento y triángulos por tipo de discurso oral. Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

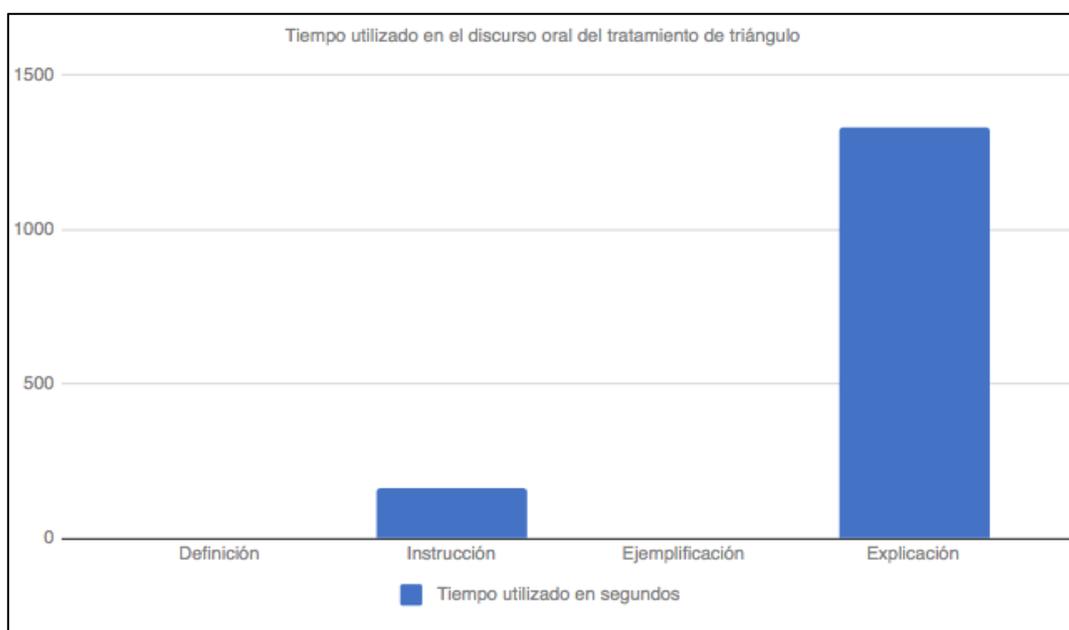
Esta última clase tiene como objetivo aplicar por medio de una guía de trabajo, los contenidos vistos previamente en las otras clases, es decir, construcción de triángulos a partir de segmentos y ángulos, y también reconocer si dado tres segmentos es posible construir un triángulo aplicando la desigualdad triangular. Por esta razón, el tipo de discurso oral con el cual se desarrollan todos los episodios corresponden a explicación e instrucción. En lo que refiere a explicación, se utiliza mayor tiempo (1.526 segundos) que el utilizado para instrucción (178 segundos). Esto se debe a que la clase al ser el cierre de la unidad, la profesora invierte mayor tiempo en realizar explicaciones con la finalidad de poder consolidar los aprendizajes vistos previamente, lo que a su vez explica que el tiempo utilizado en las instrucciones estén asociados únicamente a la consecución de la guía. En relación a los objetos matemáticos, hay un mayor tiempo en el objeto de triángulos y un menor tiempo en segmento y ángulo, lo cual se explica porque la profesora indica cómo se

construye un triángulo a partir de distintas estrategias, como también posteriormente el trabajo que se realiza para completar la tabla de desigualdad triangular.

Por otro lado, el tiempo en lo que refiere a instrucciones, es utilizado para llevar a cabo el tratamiento del triángulo, y en menor medida el de ángulos. Estos tiempos se focalizan principalmente al momento del dictado de instrucciones para realizar la guía.

Por lo anterior, cabe destacar que para el trabajo realizado durante esta sesión no presenta instancias donde se ponga en juego el discurso tecnológico, semiótico o discursivo, debido a que todo se concentra en el desarrollo de la guía.

#### A. El objeto triángulo y su tratamiento



*Ilustración 69 Tiempo utilizado en segundos, para el tratamiento del triángulo por tipo de discurso oral.  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En lo que respecta al gráfico presente, se observa que la tendencia continúa siendo la misma, las instrucciones y las explicaciones son las que concentran todo el discurso oral referido al tratamiento de triángulo. Cabe señalar que como esta es la última clase, existe

ausencia de definiciones como también ejemplificaciones, lo que se explica por el hecho de que la profesora favorece la resolución autónoma de las tareas por parte de los estudiantes.

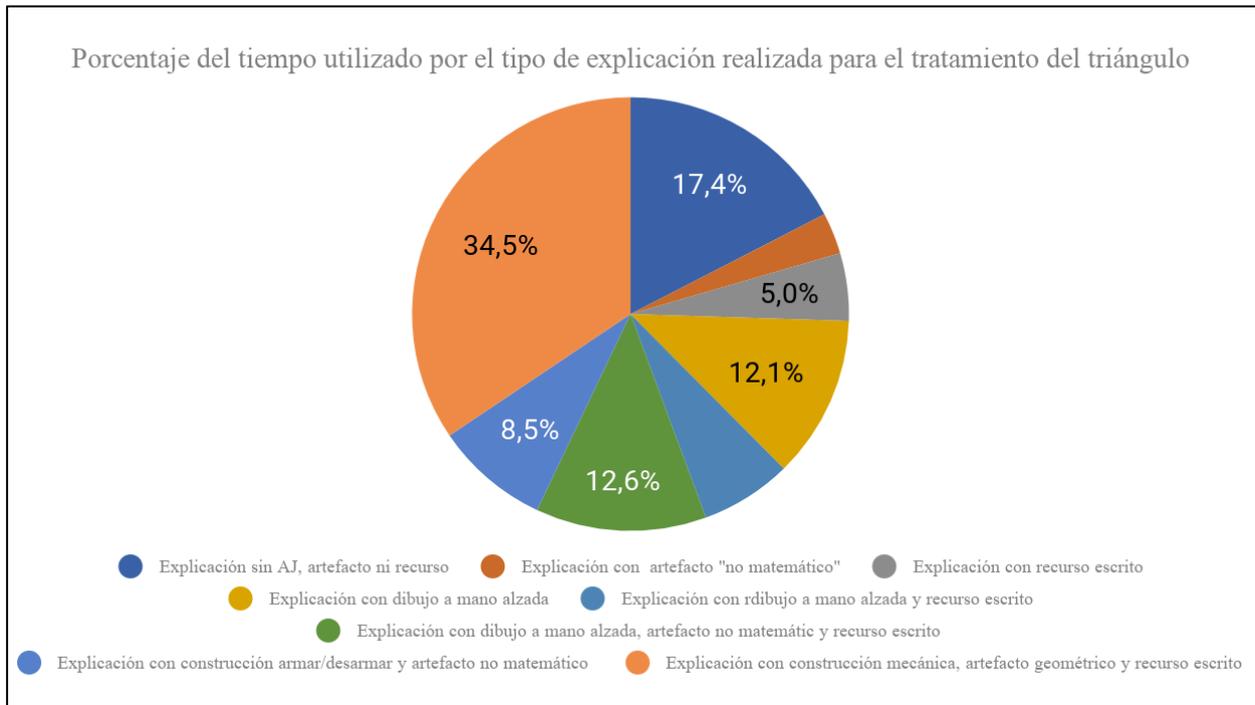


Ilustración 70 Porcentaje del tiempo utilizado en segundos por el tipo de explicación dada para el tratamiento del triángulo.  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.

Finalmente, en lo que respecta al desglose de los distintos tipos de explicaciones que la profesora realiza a lo largo de esta clase, la mayor cantidad de tiempo (458 segundos) la profesora lo invierte en realizar explicaciones mediante la construcción mecánica, utilización de artefacto geométrico y recurso escrito, es decir, acompaña dicha explicación mientras construye en la pizarra los triángulos utilizando regla y/o compás. Luego, la segunda mayor cantidad de tiempo se realiza por medio de discurso tecnológico y/o semiótico, ya que no utiliza artefactos ni tampoco construcciones para llevar a cabo dicha actividad durante 231 segundos. Por lo tanto, más de la mitad del tratamiento del objeto triángulo se realiza de dos maneras distintas, por medio de construcciones en la pizarra o a través del lenguaje oral.

Finalmente, la otra mitad del tratamiento de triángulo varía en la incorporación u omisión de artefactos geométricos o no matemáticos, o la por medio del recurso escrito.

#### 6.1.9 Conclusiones

A continuación, se lleva a cabo la caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo de Ailén por medio de las génesis encontradas, permitiendo desglosar cada una de ellas en función de las características generales que se repiten a través de las clases analizadas.

##### A. Génesis semiótica

La representación del triángulo se hace presente a través de dos formas de representación: pictórica y discursiva. En lo que respecta a la representación pictórica se encuentran como representamen los triángulos presentes en las guías de trabajo como también en la pizarra. Por otro lado, el discurso semiótico emerge al momento de nombrar los triángulos para la resolución de una tarea solicitada por parte de Ailén.

##### B. Génesis instrumental

Se evidencia que el trabajo matemático que se desarrolla en el transcurso de las clases está condicionado por los verbos con los cuáles se delimita el tipo de construcción que debe llevarse a cabo. Estos verbos a su vez, condicionan la utilización de determinados artefactos para llevar a cabo la tarea matemática. Así es posible identificar un tipo de construcción:

##### C. Construcción con artefacto

En esta categoría podemos encontrar tres grupos, i) la construcción con artefactos geométricos, ii) la construcción usando desigualdad triangular y iii) la construcción a través del discurso tecnológico.

- i) La construcción, se sustenta específicamente por medio de utilización de artefactos propios del trabajo geométrico, como lo son la regla, el compás y el transportador.
- ii) La construcción se realiza cuando se verifica utilizando la desigualdad triangular si es posible o no de construir un triángulo.
- iii) la construcción emerge cuando la profesora relata las técnicas de construcción de bisectriz, copia de ángulos, construcción de triángulos o la utilización de los artefactos geométricos

En relación a lo anterior, es importante destacar que en desarrollo de la secuencia de clases de Ailén, el trabajo geométrico relativo a triángulos está fuertemente orientado al uso de artefactos geométricos, ya sea por medio de la manipulación o a través del discurso oral sobre los mismos. Por lo tanto, la alta presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico queda de manifiesto en todas las secuencias de cada una de las clases.

#### D. Génesis discursiva

La génesis discursiva se observa en el desarrollo de la secuencia de clases en un sólo episodio. Es la que presenta una menor frecuencia de aparición con respecto a las otras dos génesis. Esto se debe a que la solicitud del proceso de prueba está casi ausente en las clases de Ailén. La prueba encontrada corresponde del proceso de prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo, puesto que los estudiantes deben justificar si es posible o no la construcción los triángulos pedidos. Que sólo se encuentre el proceso de prueba en una tarea matemática evidencia el tipo de secuencias que son privilegiadas para el trabajo geométrico, al igual que el programa de estudio este tipo de tareas no favorecen el desarrollo del razonamiento matemático. Ailén responde a lo que el programa espera que se desarrolle en clases.

Finalmente, el análisis estadístico cuantitativo permite observar la relación entre las tareas asociadas con el marco teórico. Puesto que el tratamiento realizado a través desde las

definiciones, ejemplificaciones, las explicaciones y las instrucciones concuerda con la presencia del plano semiótico-instrumental, puesto que desde el mismo discurso oral de la profesora no se evidencia la solicitud de argumentaciones. Por lo tanto, la ausencia del proceso de prueba tiene sentido en el desarrollo de las secuencias de tareas.

## 6.2 Caracterización del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas por Sayén para la enseñanza de los triángulos

### 6.2.1 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la primera Clase de Sayén

La primera clase, cuyo objetivo es “Identificar los polígonos y sus elementos” consta de cinco episodios: El primer episodio 1 corresponde a evocar conocimientos previos sobre polígonos. El episodio 2 a identificar los nombres de los polígonos en una sopa de letras. El episodio 3 corresponde a la institucionalización del concepto de polígono y sus elementos, escribiendo la definición en la pizarra. En el Episodio 4 deben llevar a cabo la resolución de una guía de trabajo que consta de dos tareas, en la primera deben identificar los elementos previamente revisados en los polígonos, pintando de color rojo los vértices en cada figura, de color verde los lados y de color azul los ángulos; en la segunda tarea, deben completar una tabla resumen, en donde deben contar la cantidad de vértices, lados y ángulos que tiene cada figura, en donde clasifican según la cantidad de lados y la medida de sus ángulos. Finalmente, para el episodio 5 se recuerda cómo se lleva a cabo la medición de ángulos por medio del uso de transportador.

Esta primera clase se constituye como una activación de conocimientos previos en torno al concepto de polígono y sus elementos. En esta misma línea, el concepto de triángulo no constituye el eje central del desarrollo del trabajo matemático, siendo nombrado únicamente como ejemplo para llevar a cabo la medición de ángulos y la clasificación de polígonos según el número de lados. Por lo tanto, se decide no analizar el ETM<sub>G</sub> de la clase

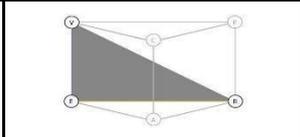
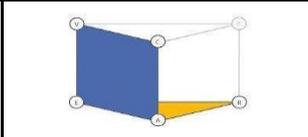
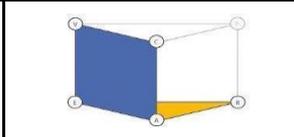
1, puesto que no aporta al análisis del trabajo matemático en torno al objeto triángulo. Sin embargo, esta primera clase permite contextualizar el desarrollo de las siguientes clases, y por lo tanto, de la unidad completa.

### 6.2.2 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la segunda Clase de Sayén

La segunda clase, inicia con una activación de los conocimientos previos en torno a triángulo, y una recapitulación de las tareas realizadas en la sesión anterior, específicamente en lo que refiere a la clasificación de ángulos de acuerdo a sus medidas y los elementos que componen los polígonos. Esta clase cuenta con un total de 4 episodios, que se presentan a continuación en el siguiente comic

**Tabla 18**

*Desglose de circulación de los episodios de la clase 2*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3	Episodio 4
			

A. Episodio 1: Realizar las tareas de la página 180 del texto escolar de la Editorial SM

En el primer episodio, deben realizar las tareas presentes en la página 180. “...Ya, ahora para poder resumir toda esa parte, vamos a usar el libro en su página 180. Dentro de estas tareas, se encuentran algunas relacionadas con las mismas vistas en la clase anterior...” (Anexo 3, clase 2, TDP 37, p.239).

Es decir, polígonos y ángulos. Por lo que, en el presente episodio no se vislumbra el trabajo matemático en torno a triángulo como eje central de la tarea.

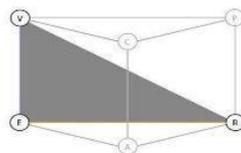
B. Episodio 2: Clasificación de triángulos según la medida de sus lados.

Para este segundo episodio, la profesora realiza una activación de conocimientos previos en torno a la clasificación de los triángulos en función de la medida de sus lados “...esa es la que vamos a trabajar hoy día. ¿Cómo se llama esa figura que tiene tres lados?” (Anexo 3, clase 2, TDP 143, p.246)



*Ilustración 71 Ejemplificando a través de instrumentos geométricos  
 Fuente: Sayén, 2017<sup>24</sup>*

Por lo anterior, se observa la presencia del semiplano [Sem-Ref], en donde se identifica la génesis semiótica a partir del representamen y la visualización, que está presente por medio del discurso semiótico junto al referencial teórico que corresponde al concepto de triángulo. Lo anterior, se observa en el siguiente diagrama :

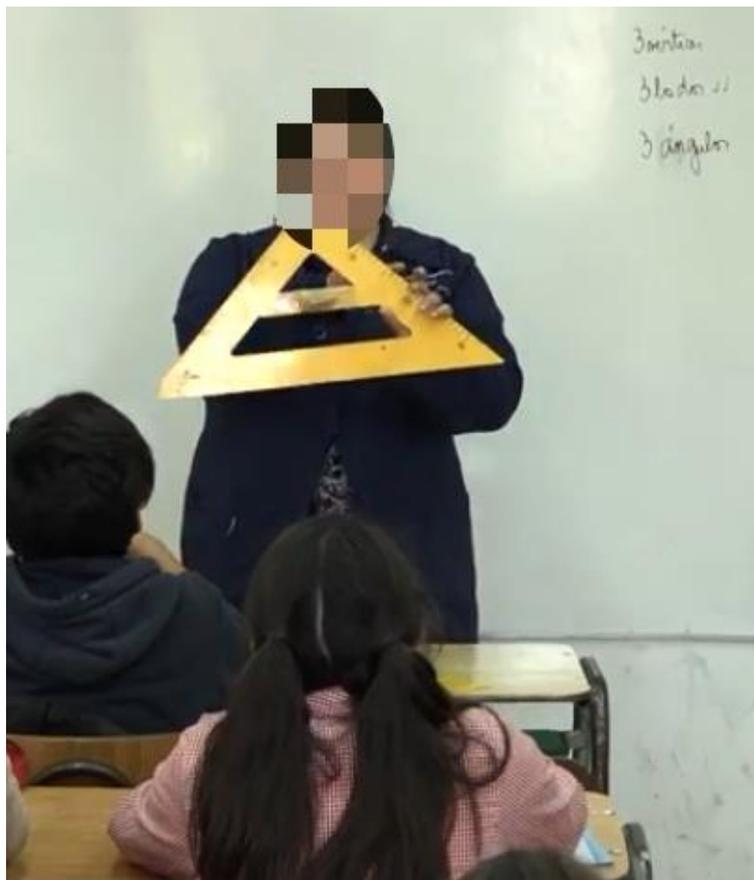


*Ilustración 20 Semiplano [sem - ref]*

<sup>24</sup> Ver Anexo 3, clase 2, TDP 143, p.246.

C. Episodio 3: Institucionalización del concepto de triángulo y su clasificación según la medida de sus lados y ángulos

El tercer episodio se configura como la institucionalización del concepto de triángulo. Este episodio se desarrolla por medio del discurso oral y escrito, ya que primero procede a escribir la definición en la pizarra, para posteriormente continuar explicando la misma definición a los estudiantes por medio del discurso oral “...Vamos a comenzar con la definición de triángulo que la vamos a escribir todos juntos con las ideas que me dijeron cuando comenzamos...” (Anexo 3, clase 2, TDP 189, p.250)

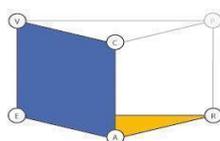


*Ilustración 72 Definición de un triángulo isósceles a través de instrumentos geométricos  
Fuente: Sayén, 2017<sup>25</sup>*

<sup>25</sup> Ver Anexo 3, clase 2, TDP 189, p.250.

Así, se identifica por medio del discurso semiótico, la génesis semiótica, al hablar o escribir sobre el triángulo se observa el representamen junto a su respectiva visualización, en donde el referencial teórico corresponde al objeto triángulo. Sumado a lo anterior, conjuntamente la profesora al explicar cada uno de los triángulos, realiza un dibujo a mano alzada de los mismos, en donde la regla y el transportador aparecen como artefactos para llevar a cabo la construcción, por medio del discurso tecnológico.

En función de lo anterior, se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

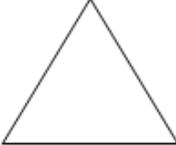


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

D. Episodio 4: Resolución de guía, a partir de la estimación y clasificación de triángulos en función de la medida de sus lados y sus ángulos. Y segunda tarea luego contar triángulos y cuadrados.

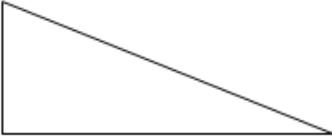
El cuarto episodio consta de la resolución de una guía que permite plasmar lo visto en los episodios anteriores. La guía consta de dos tareas: en la primera tarea deben estimar la medida de los lados y ángulos de un triángulo para poder clasificarlos y, en la segunda tarea deben contar en una hoja la cantidad de triángulos que están presentes “...Vamos a estimar según la medida de sus lados y escribir abajo como se llamaría y se guían de todo lo escrito en su cuaderno...” (Anexo 3, clase 2, TDP 264, p. 256)

- Mide los lados y ángulos de cada triángulo y escribe su clasificación:



Según medida de sus ángulos → .....

Según medida de sus lados → .....



Según medida de sus ángulos → .....

Según medida de sus lados → .....



Según medida de sus ángulos → .....

Según medida de sus lados → .....

Ilustración 73, Hoja de trabajo clase 2  
 Fuente: Sayén, 2017

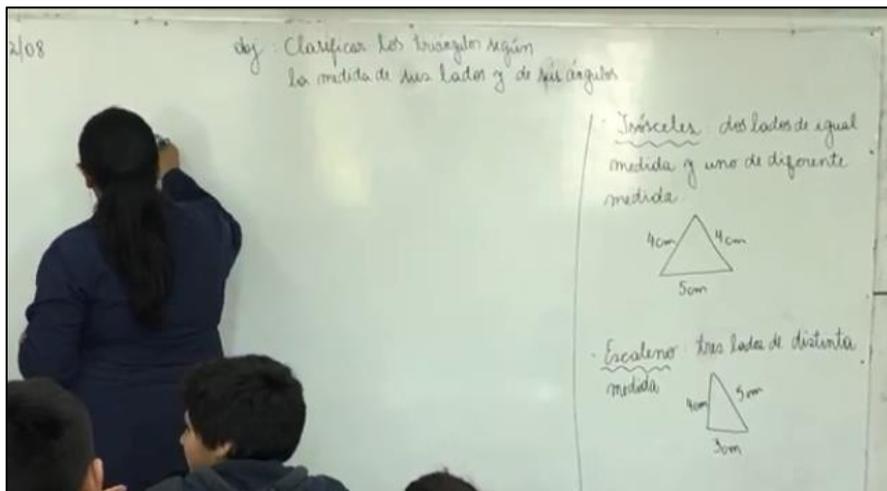
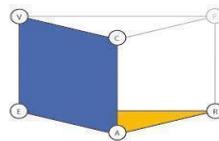


Ilustración 74 Clasificación de triángulos según la medida de sus lados  
 Fuente: Sayén, 2017

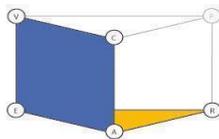
Para la primera tarea se identifica la génesis semiótica, a partir de los triángulos presentados en la guía, los que permiten su visualización. Junto a esto, el referencial teórico corresponde nuevamente al concepto de triángulo. El proceso de construcción esta dado al solicitar medidas, no existe proceso de prueba, Por lo que se esta en presencia de los planos [sem-ins] y epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

Para la segunda tarea la profesora indica “...ahora necesito que sean muy observadores ya que van a contar triángulos.” (Anexo 3, clase 2, TDP 341, p. 261)

Por lo tanto, se observa la génesis semiótica por medio de los triángulos presentes en la guía, cumpliendo estos el rol de representamen que permite la visualización de los mismos. La génesis instrumental emerge con el conteo de los triángulos, cumpliendo el rol de proceso de construcción para determinar la cantidad de los mismos. Finalmente, el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. Al no existir proceso de prueba, esta tarea presenta los planos semiótico-instrumental y en el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### 6.2.3 Descripción del ETM<sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa

Analizados los cuatro episodios que presenta la segunda clase, es posible observar que en lo que respecta al tratamiento del objeto triángulo, éste comienza en el segundo episodio. En el primer episodio Sayén activa conocimientos previos de polígonos y ángulos ya abordados en la clase anterior. El segundo objeto más mencionado es el ángulo y esto se debe a que además de abordarlo en el episodio 1, Sayén en el episodio 3 institucionaliza la clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos, comenzando con la definición y ejemplificación de cada ángulo y su relación con la clasificación de triángulos.

Los tiempos utilizados en el discurso oral en cada contenido se observa en el siguiente gráfico.



*Ilustración 75 Tiempo utilizado en el discurso oral para el tratamiento de cada contenido  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Sayén en el desarrollo de la clase, emplea distintos tipos de discurso oral y este va variando dependiendo de las tareas propuestas y la gestión que ella decide realizar para el logro del objetivo de la clase que es clasificar triángulos según la medida de sus lados y ángulos.

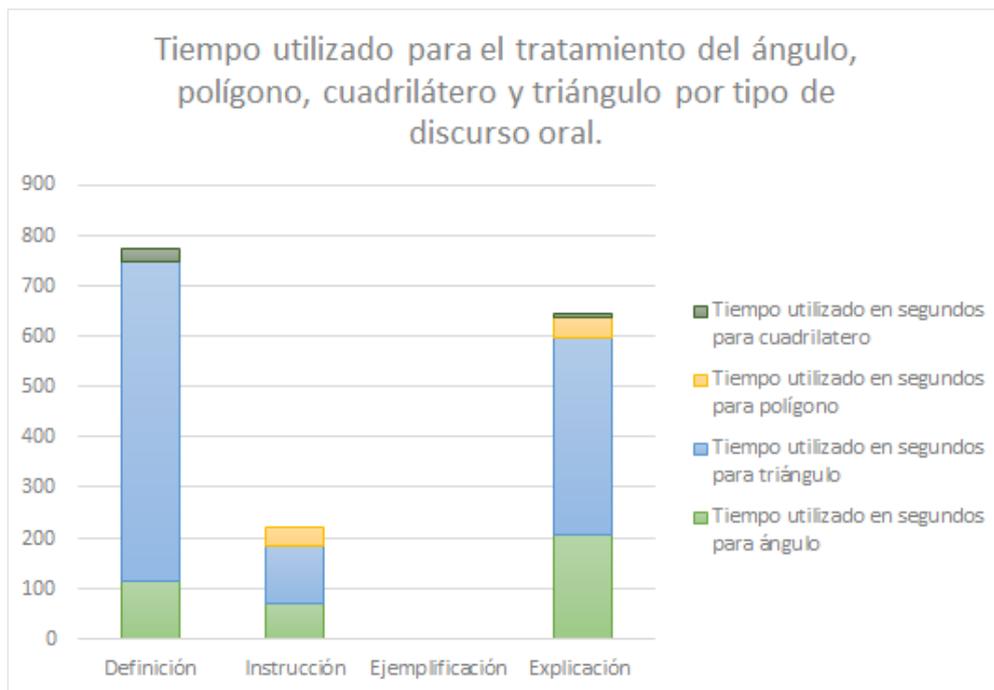
Así, al observar esto, del total de la clase la docente destina 775 segundos en la entrega de definiciones, lo que en este caso corresponden a las de ángulos, triángulos y

cuadriláteros, que están en relación directa con la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos y la clasificación de triángulos según la medida de sus lados.

El segundo discurso oral más utilizado es la explicación con 647 segundos, con la misma distribución que para la definición, es decir, mayor presencia para triángulo, luego ángulo, incorporando en este caso el concepto de polígono, y finalmente el concepto de cuadrilátero.

La instrucción abarca un total de 225 segundos, con la misma proporción anterior, pero con la salvedad de que no se utilizan instrucciones para el concepto de cuadrilátero.

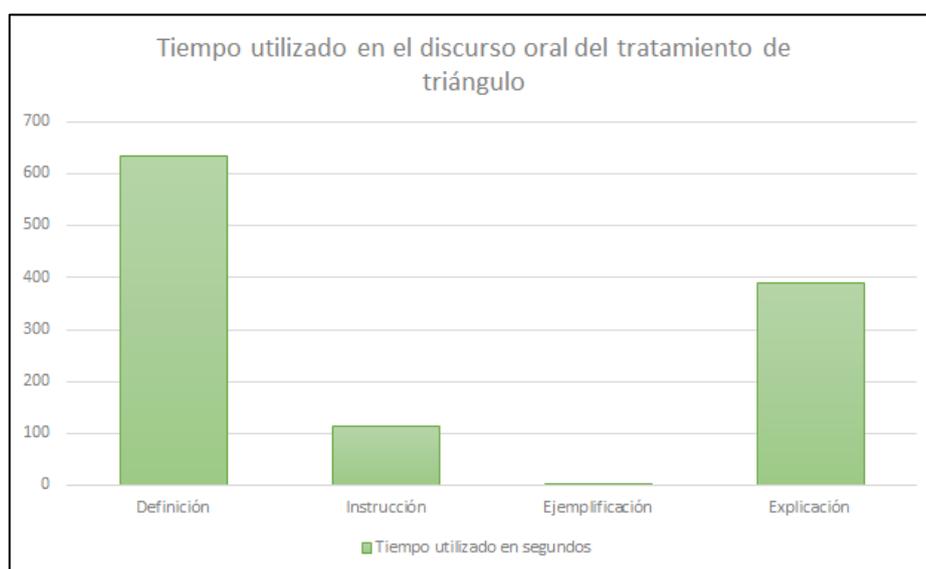
Finalmente, la ejemplificación solamente es llevada a cabo durante 2 segundos y es exclusiva del concepto de triángulo.



*Ilustración 76 Tiempo utilizado para el tratamiento de cada contenido según el tipo de discurso oral  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

### A. El objeto triángulo y su tratamiento

En la segunda clase, Sayén utiliza esta sesión para introducir la construcción de un triángulo a los estudiantes. Para llevar a cabo esto, se realizan ciertas acciones desde el discurso oral que delimitan el tratamiento de dicho objeto a lo largo de la clase, específicamente en los 1.142 segundos destinados a triángulo.



*Ilustración 77 Tiempo utilizado en el discurso oral del tratamiento de triángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

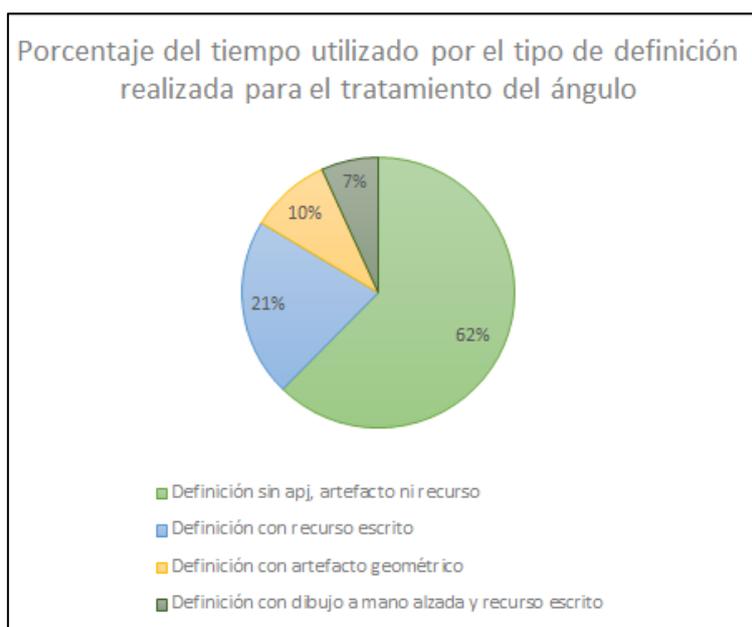
En torno a lo anterior, la mayor cantidad de tiempo durante la clase, la profesora destina 635 segundos para la definición del concepto de triángulo, 114 para entregar instrucciones, y finalmente 2 segundos para ejemplificar.

Se observa entonces, que la mayor tendencia corresponde al de las definiciones, esto se debe a que la profesora utiliza esta segunda sesión para enseñar cómo se clasifican los triángulos en función de la medida de sus lados y ángulos. Por tal motivo, al ser la temática central de esta sesión, la definición cobra mayor relevancia. Sumado a esto, los 391 segundos destinados a la explicación vienen acompañados simultáneamente de las

definiciones, es decir, se explica adecuadamente cómo poder identificar en los triángulos, los elementos entregados en la definición.

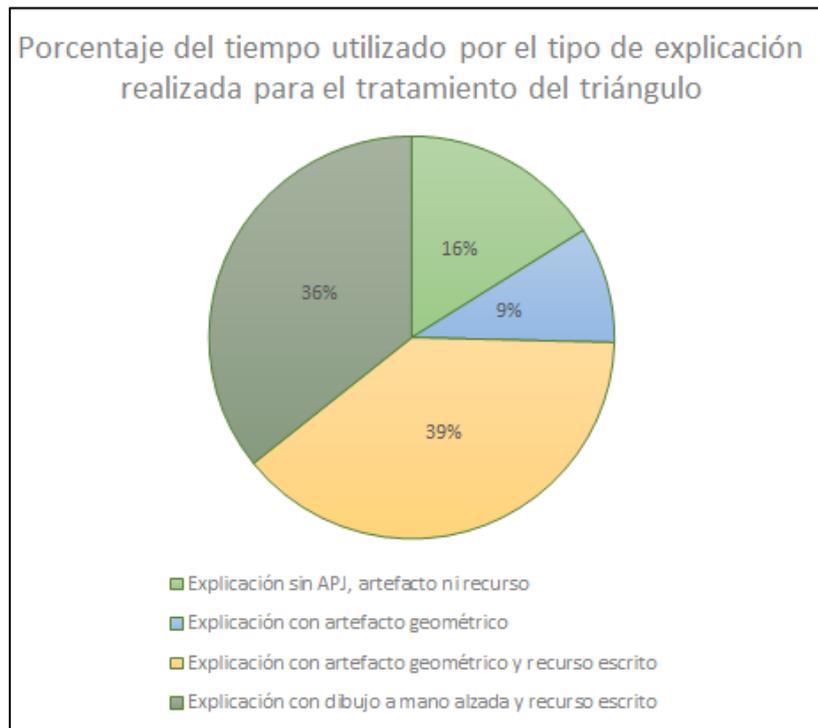
Por otro lado, la baja incidencia de las instrucciones y las ejemplificaciones se deben a que la primera, se realiza solamente para llevar a cabo las tareas a realizar tanto en el texto como en la pizarra, y la segunda corresponde a la ejemplificación de algunos de los triángulos definidos. Cabe señalar que únicamente la ejemplificación no se realiza de manera exclusiva por medio del lenguaje oral, ya que para ejemplificar también realiza dibujos a mano alzada en la pizarra.

De esta misma manera, en lo que respecta a las definiciones, la profesora destina la mayoría del tiempo (62%) en entregar instrucciones sin acción puesta en juego, ni artefacto ni recurso. Es decir, la definición es entregada únicamente por medio del discurso oral. En menor medida, el resto de las definiciones las realiza por medio del recurso escrito, es decir, anotar algunos elementos en la pizarra (21%), o definir por medio de la utilización de un artefacto (10%) o dibujo a mano alzada (7%).



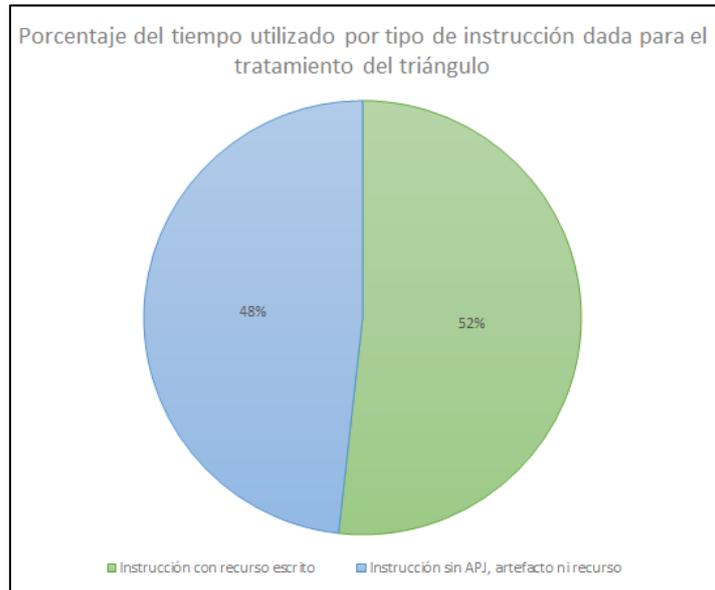
*Ilustración 78 Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de definición para el tratamiento del ángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

En lo que respecta a las explicaciones, el mayor porcentaje de estas se dividen en dos grandes momentos. El primero tiene relación con las realizadas por medio de la utilización del recurso escrito, con o sin artefacto geométrico. Lo cual se explica debido a que gran parte de la entrega del contenido entregado por la profesora se complementa mediante el trabajo realizado en la pizarra, ya sea utilizando regla y transportador, o dibujando algunos triángulos a mano alzada. Por otro lado, las explicaciones que no son por medio de recursos escritos, son entregadas por medio del discurso oral, en donde en breves ocasiones la profesora muestra al curso el transportador o la regla para complementar la explicación.



*Ilustración 79 Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de explicación para el tratamiento del triángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Finalmente, en lo que respecta a las instrucciones, la profesora divide estas en dos tipos: una utilizando el recurso escrito, y otra sin la utilización de artefacto, recurso escrito y acción puesta en juego, es decir, solamente por medio del discurso oral. De esta manera, la entrega de información siempre se realiza a través del discurso oral salvo que solamente la mitad del tiempo lo hace escribiendo en la pizarra.



*Ilustración 80 Porcentaje del tiempo utilizado por instrucción para el tratamiento del triángulo*  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018

#### 6.2.4 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la tercera Clase de Sayén.

La clase 3 también comienza con la recapitulación de las tareas realizadas en la clase anterior. Lo anterior con la finalidad de continuar el trabajo matemático en torno al triángulo, puesto que el objetivo de esta clase consiste en introducir el concepto de desigualdad triangular.

Así, la clase 3 cuenta con un total de 9 episodios que se describen a continuación en el siguiente comic.

**Tabla 20**

*Desglose de circulación de los episodios de la clase 3*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3	Episodio 4	Episodio 5	Episodio 6	Episodio 7	Episodio 8	Episodio 9

A Episodio 1: Comprobar la desigualdad triangular: Construir triángulos a partir de bombillas, deben cortar con las medidas que entrega la profesora: 6 cm, 3 cm, 10 cm (Anexo 3, clase 3, TDP 27, p.266)

“...De una bombilla van a cortar un trozo, la primera medida de 6 centímetros, 3 centímetros y el otro va hacer de 10 centímetros. La bombilla mide 20 centímetros por lo que les va a alcanzar, así que háganlo bien, ya vamos trabajando...” (Anexo 3, clase 3, TDP 33, p.266)

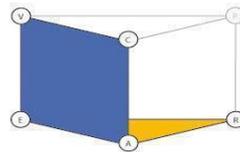


*Ilustración 81 Desigualdad triangular a través de material concreto  
Fuente: Sayén, 2017<sup>26</sup>*

En este primer episodio la profesora solicita que los estudiantes intenten construir un triángulo a partir de unas bombillas que ella hace entrega. Para esto solicita que corten las bombillas con las medidas 6 cm, 3 cm, 10 cm y así que intenten la construcción. Por lo tanto, el referencial teórico corresponde al concepto de desigualdad triangular. La génesis semiótica e instrumental está presente por medio de las bombillas, que cumplen el doble rol de representamen y artefacto, ya que con éstas deben intentar construir el triángulo. Asimismo, el proceso de visualización y el proceso de construcción también están relacionados por medio de la acción de tratar de construir el triángulo imposible de

<sup>26</sup> Ver Anexo 3, clase 3, TDP 33, p.266

construir. Al no existir proceso de prueba, se está en presencia únicamente del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

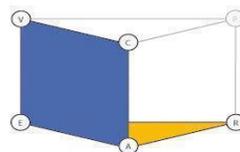


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### B. Episodio 2 Puesta en común de las construcciones realizadas

El segundo episodio corresponde a una puesta en común de los resultados obtenidos a partir de las construcciones realizadas en el primer episodio. “... ¿Quién dice que si se puede? Que levante la manito el que sí pudo formar el triángulo...” (Anexo 3, clase 3, TDP 76, p.268)

Para este segundo episodio, se está en presencia de los mismos componentes, planos y génesis que en el anterior, con la diferencia de que estos ahora emergen a partir del discurso, es decir, están presentes el discurso semiótico y el discurso tecnológico.

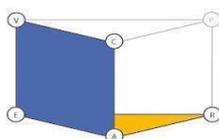


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### C. Episodio 3: Construir con nuevas medidas

El episodio 3 presenta la misma circulación que el episodio 1, existiendo una diferencia únicamente en el representamen, puesto que para este caso las medidas de las bombillas corresponden a 3 cm, 4 cm, 5 cm “...Y vamos a trabajar con la otra bombilla ahora. Ya con la otra bombilla, ahí están las medidas para las otras bombillas de 3,4 y 5 centímetros, ¿ya? No es lo mismo...” (Anexo 3, clase 3, TDP 94, p. 268)

Por lo tanto, nuevamente se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

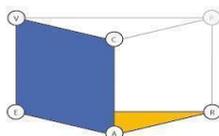


*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

#### D. Episodio 4: Puesta en común de ambas construcciones

Este episodio presenta la misma tarea que para el episodio 2, donde la única diferencia corresponde nuevamente a la medida de los lados del triángulo “...ya ahora, igual que el anterior, intente formar el triángulo...” (Anexo 3, clase 3, TDP 110, p.269)

Nuevamente los componentes están presentes por medio del discurso semiótico y discurso tecnológico.



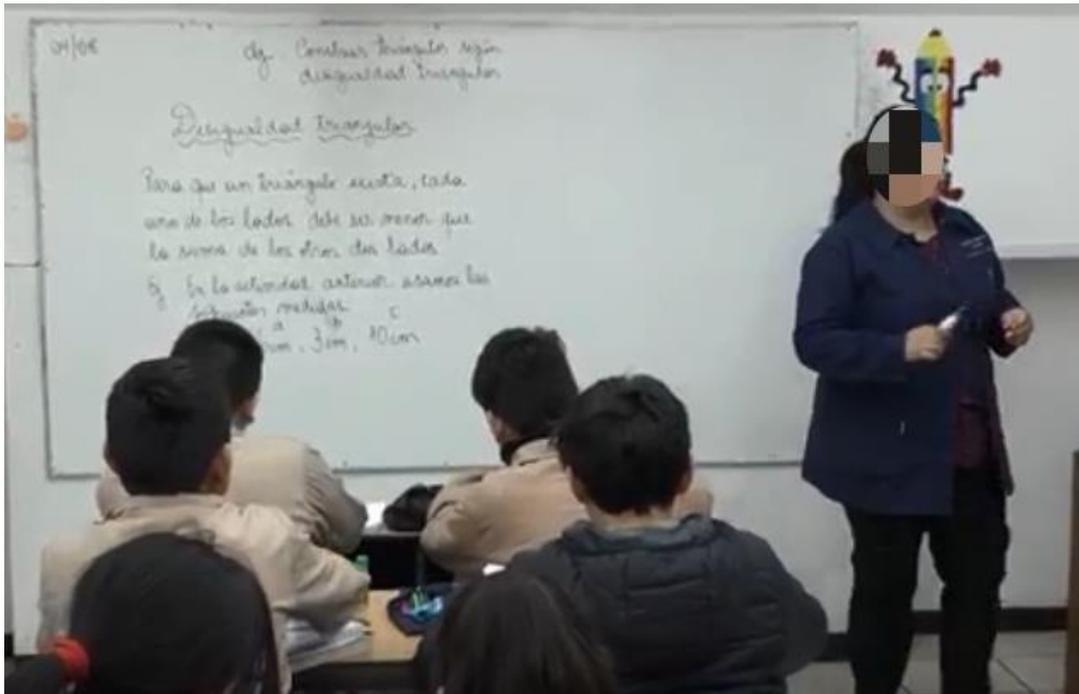
*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

#### E. Episodio 5: Institucionalización desigualdad triangular (Escribe en la pizarra), explica la desigualdad triangular a través de un ejemplo

Luego de realizada la puesta en común, la profesora se dispone a explicar la desigualdad triangular. Para lo anterior, utiliza el mismo procedimiento que lleva a cabo para la institucionalización en la clase anterior, es decir, primero escribe en la pizarra y luego explica mediante un ejemplo.

“...lo que ustedes hicieron recién va a ser lo que vamos a trabajar hoy y tiene relación con la desigualdad triangular, así se llama, y esa desigualdad triangular les va a dar las condiciones para que ustedes si

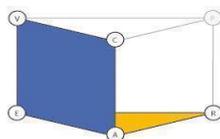
puedan construir triángulos según la medida de los lados, que si se puede o no dependiendo de esa medida, entonces en su cuaderno vamos anotar...” (Anexo 3, clase 3, TDP 109, p. 269)



*Ilustración 82 Institucionalización de la desigualdad triangular  
Fuente: Sayén, 2017<sup>27</sup>*

Así, el referencial teórico corresponde al de desigualdad triangular, el discurso semiótico permite identificar y visualizar la desigualdad triangular. Sumado a esto, el discurso tecnológico emerge cuando la profesora explica cómo técnica las condiciones que se deben cumplir para poder construir el triángulo, es decir cada uno de los lados debe ser menor que la suma de los otros dos lados. (Anexo 3, clase 3, TDP 121, p. 270). Dado lo anterior, al no estar presente el proceso de prueba, se observa el plano semiótico instrumental y el plano epistemológico.

<sup>27</sup> Ver Anexo 3, clase 3, TDP 33, p.266



*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

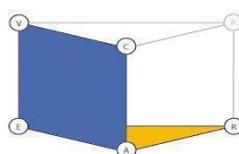
F. Episodio 6: entrega una tarea donde los estudiantes deben ahora comprobar la desigualdad triangular. Anota las medidas en la pizarra

El episodio 6, la profesora solicita que ahora puedan comprobar la desigualdad triangular teniendo únicamente las medidas de cada uno de los lados del triángulo. Para esto, entre las siguientes medidas 3 cm, 4 cm y 5 cm, y anota en la pizarra lo siguiente:  $a < b + c$ ;  $b < a + c$ ;  $c < a + b$ .

Con esa información, deben reemplazar los valores y determinar si se cumple o no la desigualdad triangular “...Ahora usaremos las medidas de 3,4 y 5cm, vamos a comprobar ahora sustituyendo, les voy a dejar el recuadro listo para completar y por último...” (Anexo 3, clase 3, TDP 144, p. 271).

Dado lo anterior, se está en presencia de la génesis semiótica, en donde las medidas de los lados permiten identificar el representamen y su correspondiente visualización. La génesis instrumental está presente por medio de la suma de las medidas de los lados, en donde las condiciones del teorema cumplen el rol de artefacto. Finalmente, el referencial teórico corresponde al concepto de desigualdad triangular.

Al estar en ausencia del proceso de prueba, se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

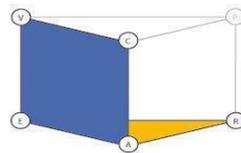


*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### G. Episodio 7: Puesta en común de las condiciones para construir un triángulo

El episodio 7 corresponde a una puesta en común de los resultados obtenidos a partir de los cálculos realizados en el episodio 6. “...Ya la Coni va a pasar a la pizarra y nos va a contar como lo hizo...” (Anexo 3, clase 3, TDP 152, p.252)

Para este séptimo episodio, se está en presencia de los mismos componentes, planos y génesis que en el anterior, con la diferencia de que estos emergen a partir del discurso, es decir, están presentes el discurso semiótico y el discurso tecnológico.

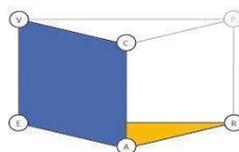


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

H. Episodio 8: Actividad donde deben comprobar la desigualdad triangular en una serie de tareas puestas en la pizarra.

Al igual que en el episodio 6, este episodio busca que los estudiantes puedan comprobar nuevamente si un triángulo es posible de construir de acuerdo a la desigualdad triangular. “...Yo le voy a dar las medidas todas juntas, pero usted deje un espacio de unos 3 cuadraditos para que lo pueda desarrollar o comprobar...” (Anexo 3, clase 3, TDP 156, p. 272).

De esta manera, el episodio 8 cuenta con una única tarea que se repite 6 veces, donde únicamente varía el representamen al presentar distintas medidas para cada triángulo. De esta manera, la circulación de cada tarea es la misma que para el episodio 6, es decir, se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

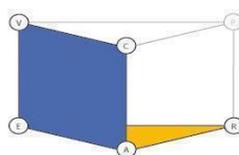


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### I. Episodio 9: Revisión y puesta en común del trabajo realizado

Finalmente, el episodio 9 corresponde nuevamente a una puesta en común de los resultados obtenidos a partir de los cálculos realizados en el episodio 8 “...Ya niños vamos a revisar, en los 6 ejercicios vamos a ir diciendo si se puede o si no se puede construir el triángulo...” (Anexo 3, clase 3, TDP 226, p.275)

Para este episodio, se está en presencia de los mismos componentes, planos y génesis que en el anterior, con la diferencia de que estos emergen a partir del discurso, es decir, están presentes el discurso semiótico y el discurso tecnológico.



*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### 6.2.5 Descripción del ETM<sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa

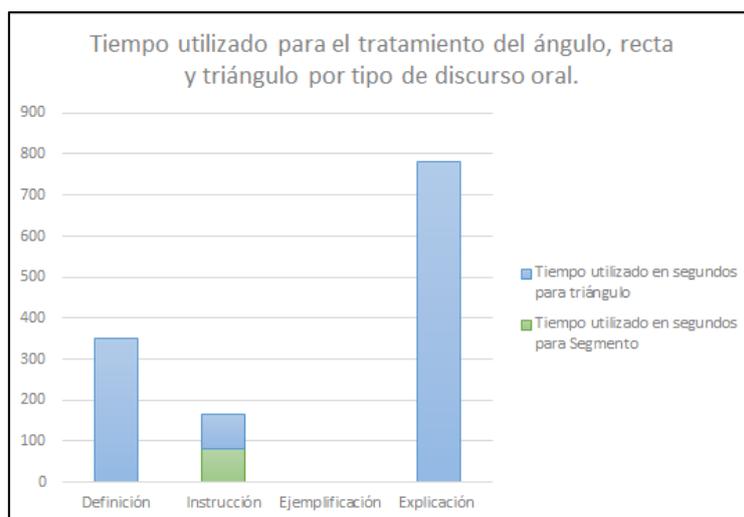
Esta tercera clase se centra en la introducción del concepto de desigualdad triangular. Para lo cual realiza una serie de tareas para llevar a cabo esto, como también la institucionalización del mismo concepto.



*Ilustración 83 Tiempo utilizado en el discurso oral por cada contenido  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Por lo tanto, para esta sesión, destina 1.215 segundos para el tratamiento de triángulo y 84 segundos para el tratamiento de segmento. Lo anterior obedece principalmente a que el concepto de triángulo es el que orquesta todo el desarrollo de la sesión, y el concepto de segmento es utilizado para introducir las medidas que cumplen estos en los casos que el triángulo no es posible de construir.

En relación a lo anterior, el tipo de discurso oral utilizado para cada contenido se desglosa de la siguiente manera.

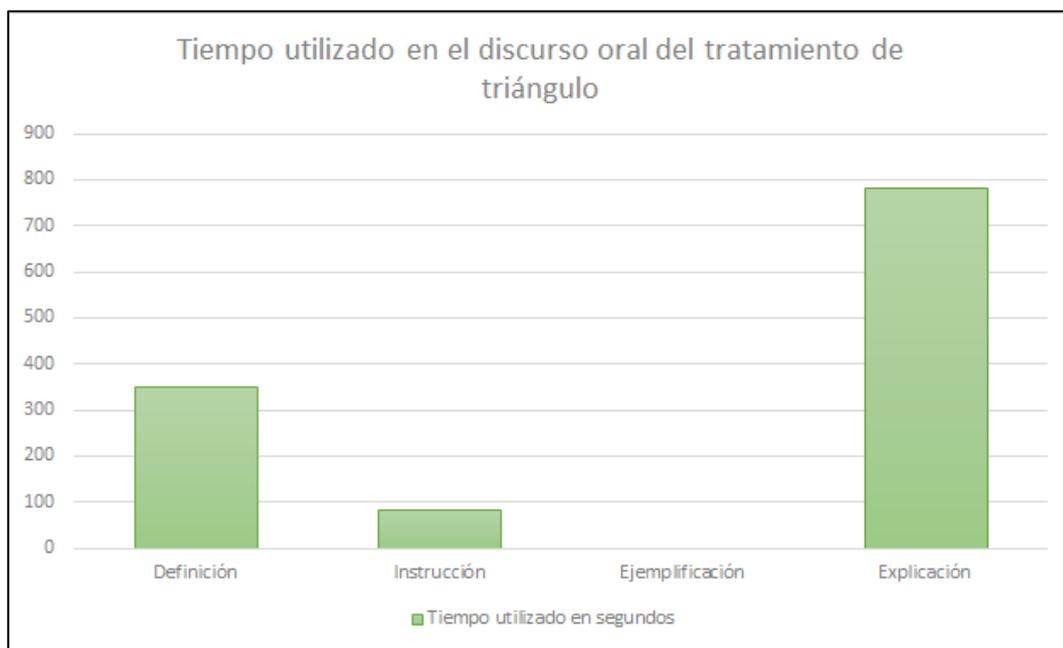


*Ilustración 84 Tiempo utilizado para el tratamiento de cada elemento según el tipo de discurso oral  
 Fuente; Pizarro-Canales, 2018.*

En este tipo de contenido, es importante señalar que el concepto segmento se hace presente únicamente por medio de la instrucción (84 segundos) teniendo 2 segundos más que el triángulo (82 segundos). Lo anterior se explica debido a que el concepto de segmento se menciona para llevar a cabo la construcción del triángulo imposible, por lo que al ser una instrucción muy específica, implica por lo tanto un período de tiempo reducido.

#### A. El objeto triángulo y su tratamiento

Como se explica anteriormente, al constituirse la desigualdad triangular como un nuevo concepto, la explicación y la definición constituyen el mayor volumen de tiempo para realizar el tratamiento de dicho objeto:

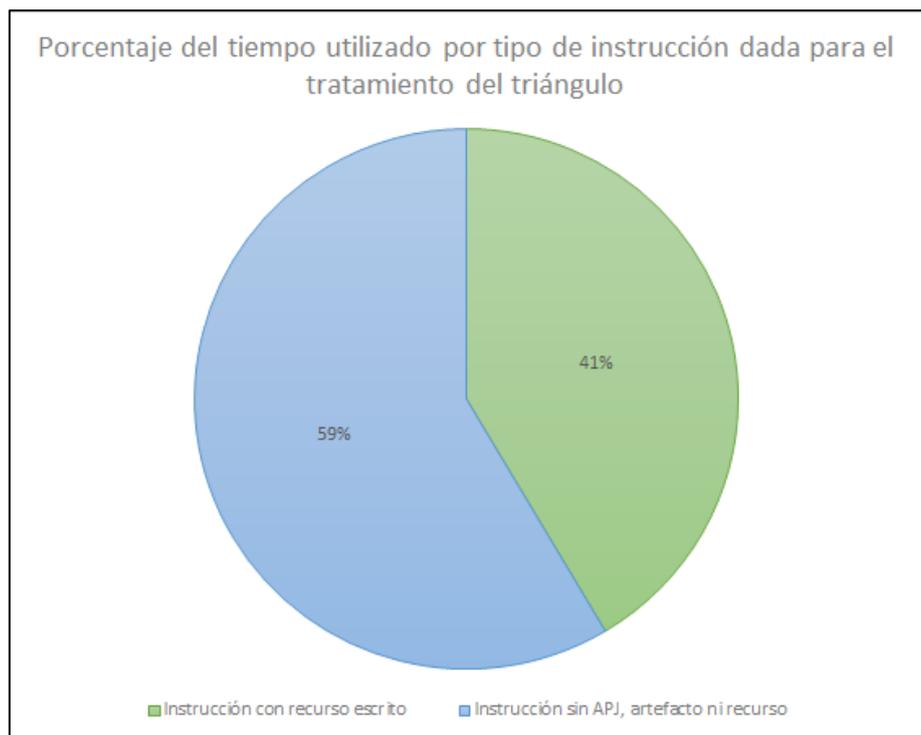


*Ilustración 85 Tiempo utilizado en el discurso oral del tratamiento de triángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Así, de los 1.215 segundos utilizados, 782 son destinados para la explicación de la desigualdad triangular, 351 para la definición y finalmente 82 segundos para la entrega de instrucciones.

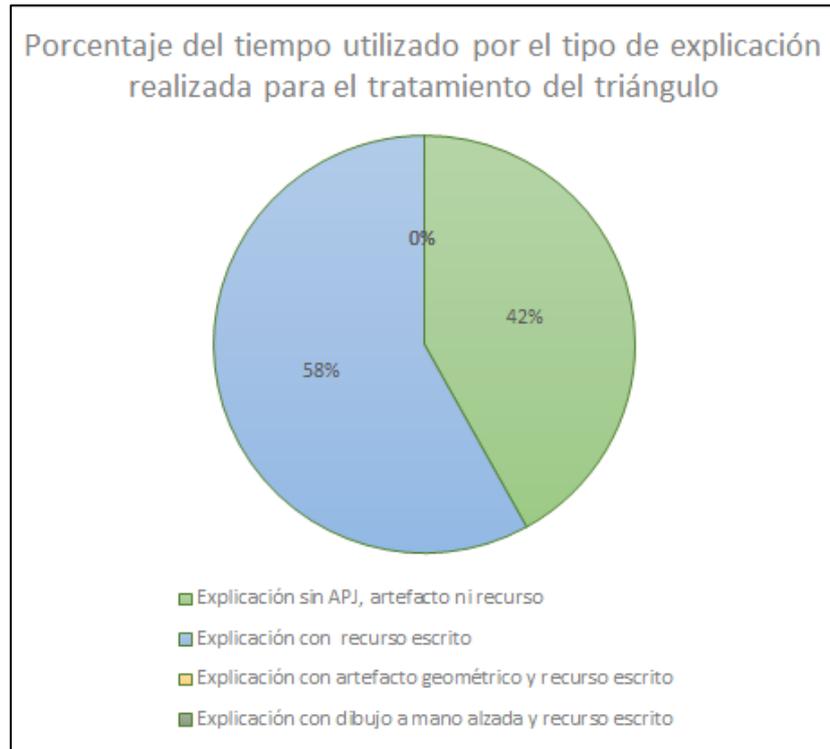
De esta manera, el mayor tiempo dedicado a la explicación y la definición, tiene relación con que este contenido se sitúa como un conocimiento nuevo para los estudiantes, por lo tanto, es primordial para la profesora que estos conceptos queden previamente aprendidos antes de poder realizar las tareas solicitadas.

En lo que respecta a las instrucciones, estas se dividen en dos tipos: utilizando recurso escrito (59%), y por medio del discurso oral (41%). Esto, al igual que en el caso anterior, se debe a que la profesora entrega las instrucciones para llevar a cabo la realización de las tareas que solicita. La distribución se explica porque primero anota en la pizarra algunas instrucciones y luego la entrega de manera oral a los estudiantes.



*Ilustración 86 Porcentaje del tiempo utilizado por tipo de instrucción dada para el tratamiento del triángulo  
Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

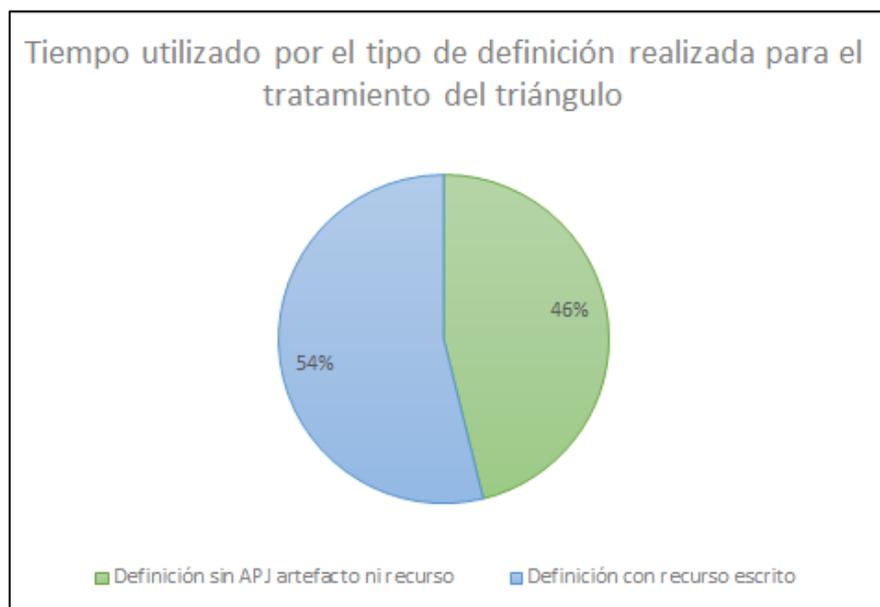
En lo referido a las explicaciones, estas también se dividen en dos tipos: con recurso escrito (58%) y por medio del discurso oral (42%).



*Ilustración 87 Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de explicación realizada para el tratamiento del triángulo  
 Fuente: Andrea Pizarro, 2018*

Al constituirse como una clase que introduce el concepto de desigualdad triangular utilizando dos casos imposibles de construir con bombillas, para ambos casos las explicaciones son entregadas por medio del discurso oral, en donde el 58% del tiempo este discurso es acompañado por la utilización de la pizarra como recurso escrito. Lo anterior con la finalidad de que los estudiantes puedan primero descubrir que no es posible construir los casos solicitados y luego comprender el concepto de desigualdad triangular a partir de las propiedades matemáticas que cumplen la suma de sus lados.

Finalmente, las definiciones, si bien se presentan en una cantidad menor en tiempo en relación a las explicaciones, ambos casos se presentan prácticamente en la misma proporción.



*Ilustración 88 Porcentaje de tiempo utilizado por el tipo de definición realizada para el tratamiento del triángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018*

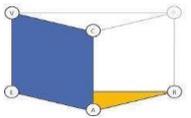
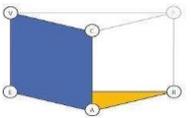
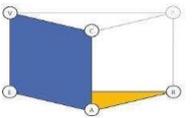
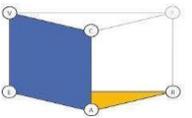
Lo anterior, también tiene sentido en el contexto de que la desigualdad triangular se presenta como un concepto nuevo, por lo que la profesora en sus definiciones tiene en ambos casos una alta presencia del lenguaje oral (46%), específicamente en lo que refiere al discurso semiótico, el cual complementa mediante la utilización de la pizarra como recurso escrito (54%).

#### 6.2.6 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la cuarta Clase de Sayén.

La clase 4 tiene por objetivo construir triángulos conociendo la medida de sus tres lados. Para esto, primero realiza una recapitulación, retomando los conocimientos previos en torno a lo visto en la clase anterior en torno a la desigualdad triangular. Por lo anterior, la clase 4 presenta un total de cuatro episodios, en donde cada episodio presenta la misma tarea, que se diferencia por medio de los distintos triángulos que deben construir. A continuación, se presenta el ETM<sub>G</sub> de los cuatro episodios en el siguiente cómic:

**Tabla 21**

*Desglose de circulación de los episodios de la clase 4*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3	Episodio 4
			

A. Episodio 1: Construir un triángulo conociendo la medida de sus tres lados (5,6,7).

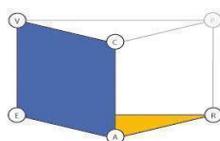
El primer episodio de esta clase consta de una única tarea, donde solicita a los estudiantes que construyan un triángulo, conociendo que la medida de sus lados corresponde a 5 cm, 6 cm y 7 cm “...Una de las formas en la que vamos a construir los primeros triángulos van hacer utilizando la medida de 3 de sus lados...” (Anexo 3, clase 4, TDP 57, p. 279), “... vamos a construir un triángulo que tenga 7,6 y 5 centímetros ¿ya?” (Anexo 3, clase 4, TDP 61, p. 279)



*Ilustración 89 Construcción de un segmento con artefacto geométrico  
 Fuente: Sayén, 2016<sup>28</sup>*

<sup>28</sup> Ver Anexo 3, clase 4, TDP 61, p. 279)

Para esta tarea, el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. La génesis semiótica está presente por medio de las medidas de los lados del triángulo, que permiten la visualización del mismo. El proceso de construcción del triángulo se lleva a cabo por medio de la utilización de la regla y el compás como artefactos. Al no solicitar proceso de prueba, se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

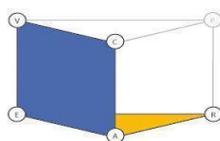


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

B. Episodio 2: los estudiantes deben construir con medidas de 3,4 y 5 cm

Para el segundo episodio, se repite la misma tarea que en el episodio 1, con la diferencia que para este caso existe un distinto representamen, ya que las medidas para llevar a cabo la construcción corresponden a 3 cm, 4 cm y 5 cm “...Ya, ahora usted solito (curso) va a construir uno de 3, 4, 5 centímetros...” (Anexo 3, clase 4, TDP 264, p. 288).

Por tal motivo, al ser la misma tarea, están presentes nuevamente el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

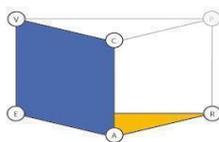


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

C. Episodio 3: construir otro triángulo con las medidas 9, 6 y 5 cm

Para el tercer episodio, se repite la misma tarea que en el episodio 1 y 2, con la diferencia que para este caso existe un distinto representamen, ya que las medidas para llevar a cabo la construcción corresponden a 9 cm, 6 cm y 5 cm “... ¡ya listo otra medida!” (Anexo 3, clase 4, TDP 351, p. 291)

Por tal motivo, al ser la misma tarea, están presentes nuevamente el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

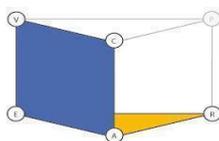


*Ilustración 23 Planos semiótico- instrumental y epistemológico*

D. Episodio 4: Construir triángulo con las medidas, dos lados y un ángulo de 5, 7, y  $68^\circ$ .

Finalmente, el episodio 4 incorpora una nueva forma de construcción de triángulos, en donde se solicita que los estudiantes puedan construirlo con la medida de dos de sus lados y uno de sus ángulos interiores “...ahora vamos a construir conociendo la medida de dos lados y un ángulo...” (Anexo 3, clase 4, TDP 423, p. 294).

Para este caso, el representamen corresponde al triángulo construido a partir de las nuevas medidas entregadas, lo que permite su visualización y por lo tanto la aparición de la génesis semiótica. La génesis instrumental está presente por medio de la utilización de la regla y el transportador como artefactos que permiten llevar a cabo el proceso de construcción del triángulo. Por último, el referencial teórico corresponde nuevamente al concepto de triángulo. Al no estar presente el proceso de prueba, estamos en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### 6.2.7 Descripción del ETM<sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa

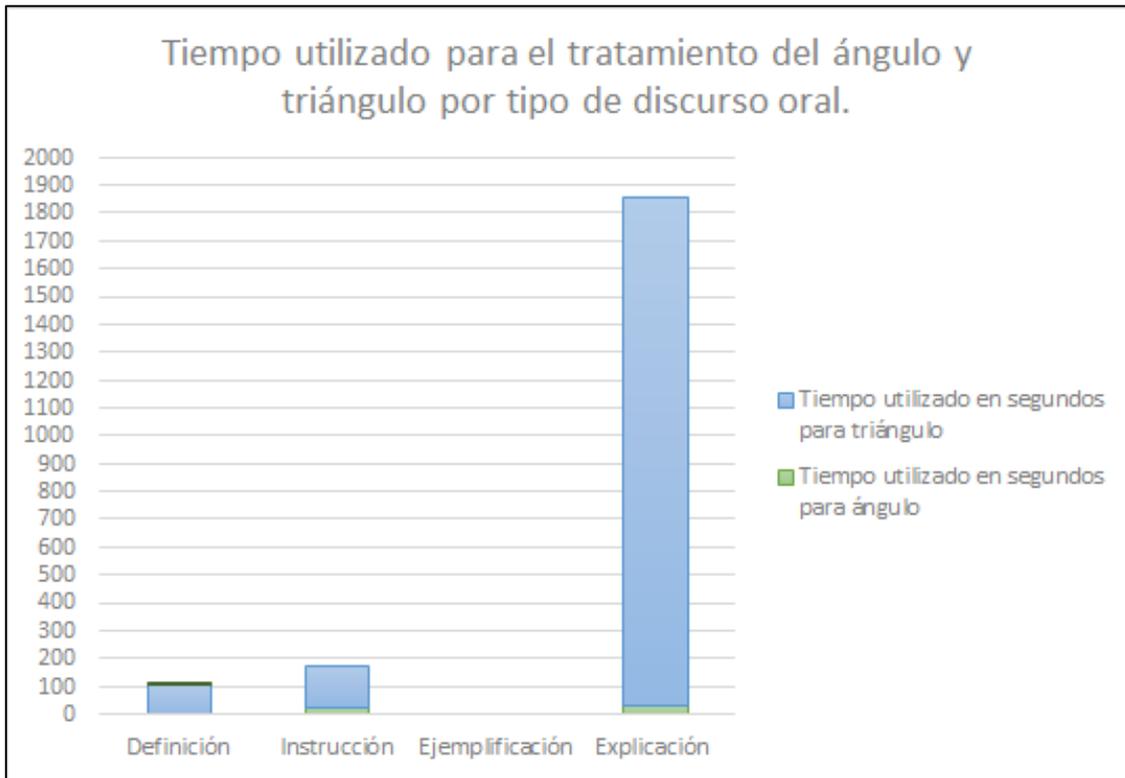
A partir del discurso oral de la profesora, se observa la siguiente información:



*Ilustración 90 Tiempo utilizado en el discurso oral por cada contenido  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Como se aprecia en el gráfico, el tiempo utilizado en el objeto triángulo corresponde a 2.089 segundos, mientras que para el concepto de ángulo utiliza un total de 64 segundos. Lo anterior explica nuevamente la tendencia de las clases anteriores, al trabajar la construcción del triángulo como eje central, confirma entonces la mayor presencia de dicho objeto por parte del discurso oral. La presencia del objeto ángulo tiene relación con que la segunda mitad de la clase la profesora solicita a los estudiantes que construyan conociendo la medida de dos lados y uno de los ángulos del triángulo. De ahí se explica entonces su baja presencia en el desarrollo de la clase.

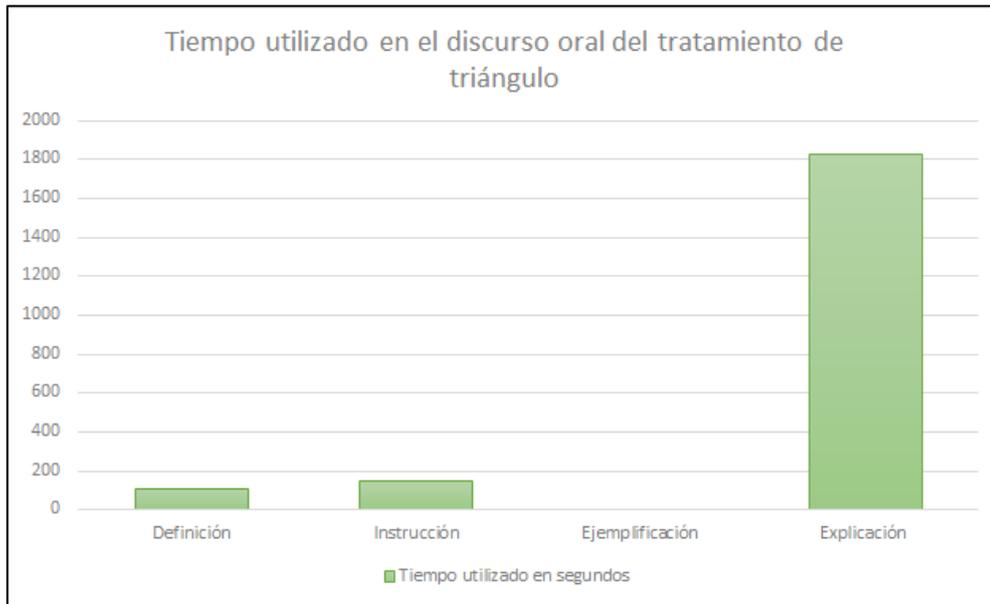
En relación con lo anterior, a continuación, se observa la distribución del tiempo utilizado para el tratamiento de cada uno de los contenidos en función del tipo de discurso oral.



*Ilustración 91 Tiempo utilizado para el tratamiento del ángulo y triángulo por tipo de discurso oral  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

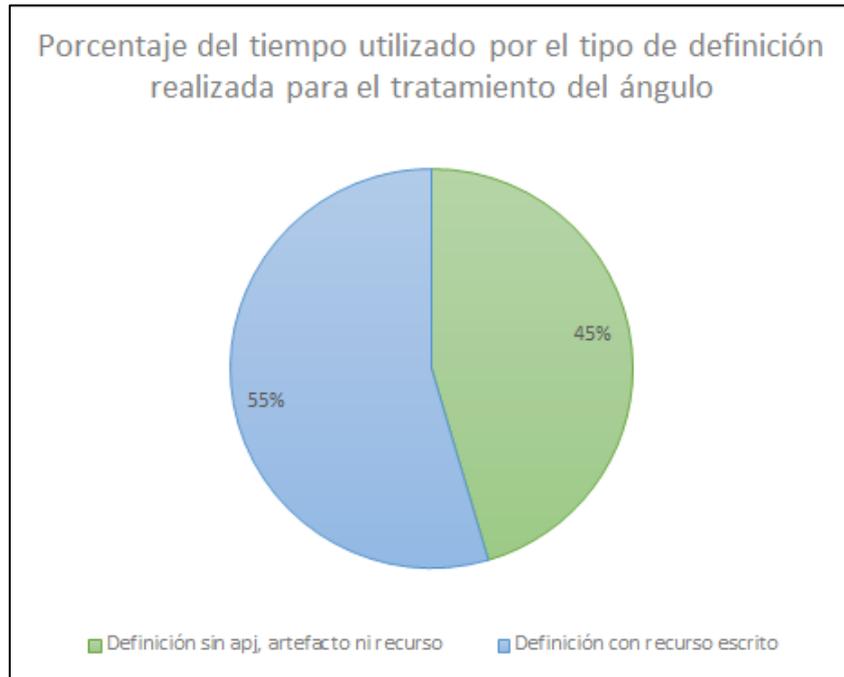
Dada la distribución observada para ambos objetos, la tendencia en cuanto a la mayor presencia del triángulo se sigue manteniendo al momento de desglosar el tipo del lenguaje oral utilizado por la profesora. Así, está presente para triángulo, la definición (110 segundos), la instrucción (150 segundos) y en mayor medida la explicación con un total de 1.829 segundos. Por otro lado, para el objeto ángulo, está presente solamente la instrucción (27 segundos) y la explicación (37 segundos). Se observa también la ausencia de ejemplificación para ambos casos, lo cual se debe a que la clase se centra en la institucionalización y en el trabajo de los estudiantes.

A. El objeto triángulo y su tratamiento



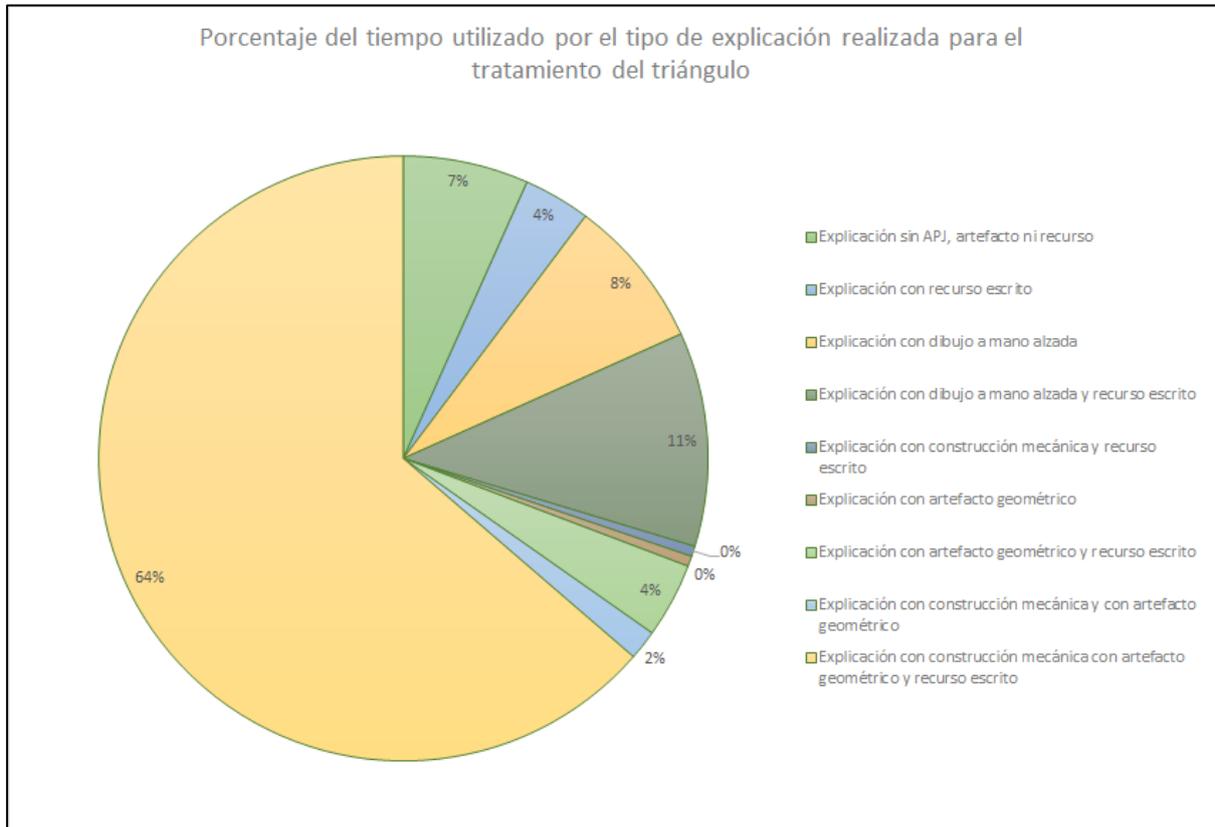
*Ilustración 92 Tiempo utilizado en el discurso oral del tratamiento del triángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018*

En cuanto a la definición, solamente está presente para el objeto triángulo en un total de 110 segundos, específicamente en lo que refiere a los tipos de triángulos en función de las tareas relacionadas con la medida de sus lados. En lo que respecta a las instrucciones, estas nuevamente presentan la misma tendencia anteriormente mencionada, utilizando 150 para triángulo. Lo anterior nuevamente se explica en función de la cantidad de tiempo utilizado para la realización de los episodios en donde se debe construir primero conociendo la medida de los lados, y luego en los últimos episodios la medida de los lados y de uno de sus ángulos. Finalmente, la explicación es la que presenta mayor tiempo, utilizando 1.829 segundos para triángulo, ya que la profesora explica a los estudiantes cómo construir el triángulo a partir de las dos formas previamente mencionadas.



*Ilustración 93 Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de definición realizada para el tratamiento del ángulo  
Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

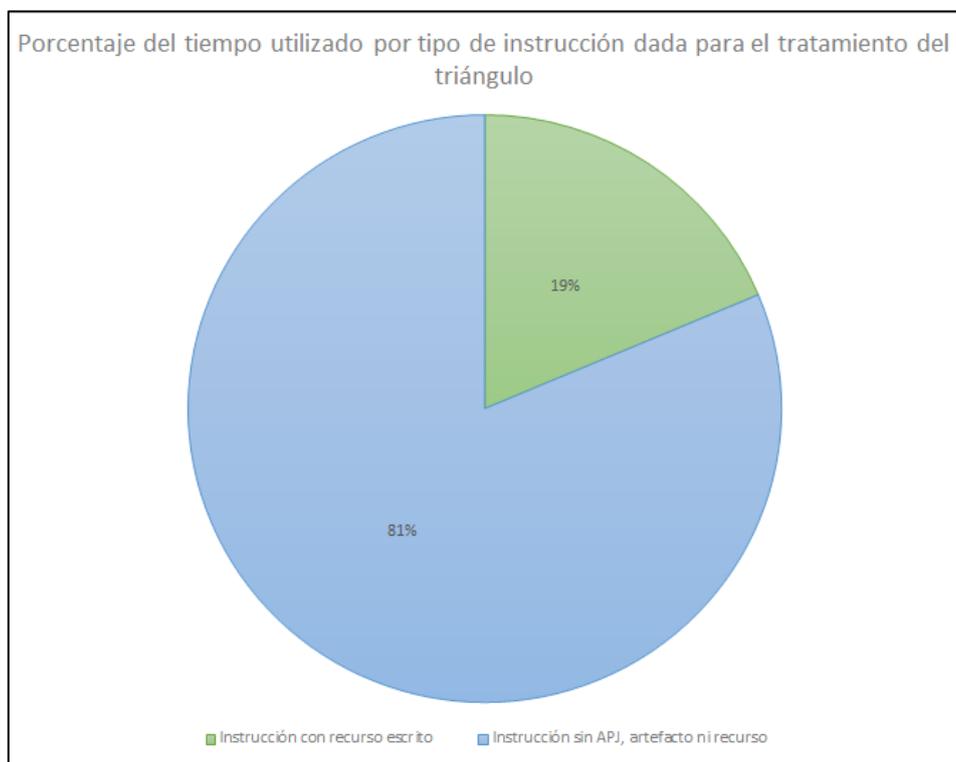
Al observar la distribución del tiempo utilizado para las definiciones, se repite nuevamente la tendencia en relación a las clases anteriores, es decir, la definición utilizando la pizarra corresponde al 55% y la definición únicamente por medio del discurso oral equivale al 45%.



*Ilustración 94 Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de explicación para el tratamiento del triángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

A diferencia de las otras clases analizadas, las explicaciones para esta sesión presentan una mayor variedad. Así observamos que la mayor parte del tiempo (64%), las explicaciones las entrega a través de dibujos a mano alzada. Lo anterior se explica por el hecho de que esta clase se ubica como una introducción de nuevas técnicas y el repaso de otras vistas en las clases anteriores, por ende, la profesora utiliza el dibujo a mano alzada como un recurso que le permite explicar de manera rápida al curso el desarrollo de cada una de las tareas que los estudiantes deben realizar. Sumado a esto, debido a que cada una de las tareas apunta a una técnica en específico, la manera de llevar a cabo la construcción en cada tarea dependerá también de los artefactos que la profesora solicite a los estudiantes. Por tal motivo, se observa en menor medida y en un porcentaje similar las otras explicaciones desarrolladas. Lo anterior se debe específicamente a que la profesora utiliza un periodo de

tiempo breve para explicar la desigualdad triangular con las bombillas (retomando el trabajo de la clase anterior), otro periodo breve para explicar la construcción con las dos medidas de los lados y el ángulo interior. Así, se observa entonces que solamente se utilice el 7% del tiempo solo utilizando la voz, 11% utilizando el recurso escrito y la construcción mecánica, 8% por medio de construcción mecánica, artefacto geométrico y recurso escrito.



*Ilustración 95 Porcentaje del tiempo utilizado por tipo de instrucción dada para el tratamiento del triángulo  
Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

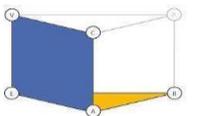
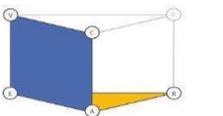
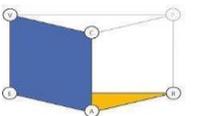
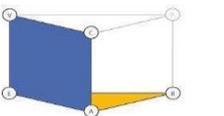
Finalmente, en lo que respecta a las instrucciones, estas nuevamente presentan la misma tendencia que en las clases anteriores, es decir, mayor tiempo (81%) destinado a entregar las instrucciones de manera oral, y luego estas instrucciones son anotadas en la pizarra, utilizando el 19% del tiempo en esta actividad.

### 6.2.8 Caracterización del ETM idóneo efectivo a través del análisis de las tareas implementadas en la quinta Clase de Sayén

La clase 5 tiene por objetivo reforzar lo trabajado previamente en las clases anteriores, razón por lo cual cuenta con un total de 5 episodios, de los cuales se muestra su circulación a continuación

**Tabla 22**

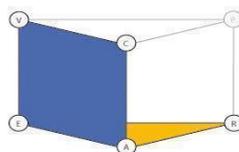
*Desglose de circulación de los episodios de la clase 5*

Episodio 1	Episodio 2	Episodio 3	Episodio 4
			

#### A. Episodio 1: Revisión de las tareas abordadas en la clase anterior

El primer episodio corresponde a la continuación de las actividades realizadas en la clase anterior, por lo que se repite la tarea de construir un triángulo conociendo que las medidas de sus tres lados corresponden a 3 cm, 4 m, y 5 cm “...Cómo construir amos los triángulos conociendo la medida de los tres lados ¿Quién me puede ayudar? ...” (Anexo 3, clase 5, TDP 18, p.304).

Por lo anterior, la representación del triángulo junto a su respectiva visualización permite que emerja la génesis semiótica. En esta misma línea, la génesis instrumental aparece a través de la utilización de la regla y el compás como artefactos para la construcción, donde el referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. Al no existir proceso de prueba, están presentes el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

B. Episodio 2: “construir los siguientes triángulos” construcción de triángulo con la medida de tres lados (8,6, 10) y (7,9, 11)

Para el segundo episodio, se repite la misma tarea que en el episodio anterior, pero con medidas nuevas “...Ya, triángulos, entonces, les voy a anotar las condiciones ¿ya? ...

1) 8 cm, 6 cm, 10 cm, 2) 7 cm, 9 cm, 11 centímetros” (Anexo 3, clase 5, TDP 61 y 62, p.307)

Así, encontramos dos tareas con igual circulación, pero que varían en su representamen, ya que para el primer caso deben construir con las medidas de 8 cm, 6 cm y 10 cm; y para el segundo caso utilizar las medidas de 7 cm, 9 cm 11 cm. Por lo tanto, se está en presencia de los mismos componentes que para el episodio anterior, donde varía únicamente en el representamen.

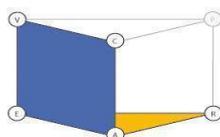


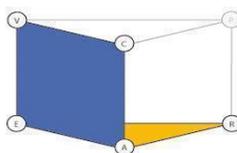
Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico

C. Episodio 3: deben construir un triángulo conociendo la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (3,4 y 90°), se entrega la tarea en el (Anexo3, clase 5, TDP 220, p.313)

Luego de haber construido los triángulos con la medida de tres lados, se incorpora nuevamente la construcción de un triángulo conociendo la medida de dos de sus lados y uno de sus ángulos. “...ya seguimos, tercer triángulo que van a construir, ahora vamos a utilizar dos medidas conocidas y el ángulo comprendido entre ellos ¿ya? ...” (Anexo 3, clase 5, TDP 220, p.313)

Entonces, está presente la génesis instrumental por medio de la utilización de la regla y el transportador para llevar a cabo la construcción del triángulo, el cual permite al representamen y la visualización, emergiendo así la génesis semiótica, en donde el

referencial teórico corresponde al concepto de triángulo. Dado lo anterior, se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

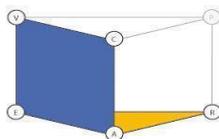


*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

D. Episodio 4: construcción de un nuevo triángulo conociendo la medida de dos lados y uno de sus ángulos (7, 9 y  $120^\circ$ )

Finalmente, el episodio 4, repite las dos veces la misma tarea que en el episodio anterior, con la diferencia de que ahora entrega nuevas medidas de los lados y del ángulo para llevar a cabo la construcción “...Ya, hacemos el cuarto, Ya acá va el otro, el último...” (Anexo 3, clase 5, TDP 434, p. 323)

Por lo tanto, en este episodio, por medio de las tareas, se promueve una circulación igual que el anterior, pero que varía únicamente en su representamen, al presentar en este caso las medidas de 7 cm y 9 cm y de  $120^\circ$ . Por tal motivo, al no solicitar proceso de prueba, se está en presencia del plano semiótico-instrumental, y el plano epistemológico.



*Ilustración 23 Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico*

### 6.2.9 Descripción del ETM<sub>G</sub> desde una perspectiva cuantitativa

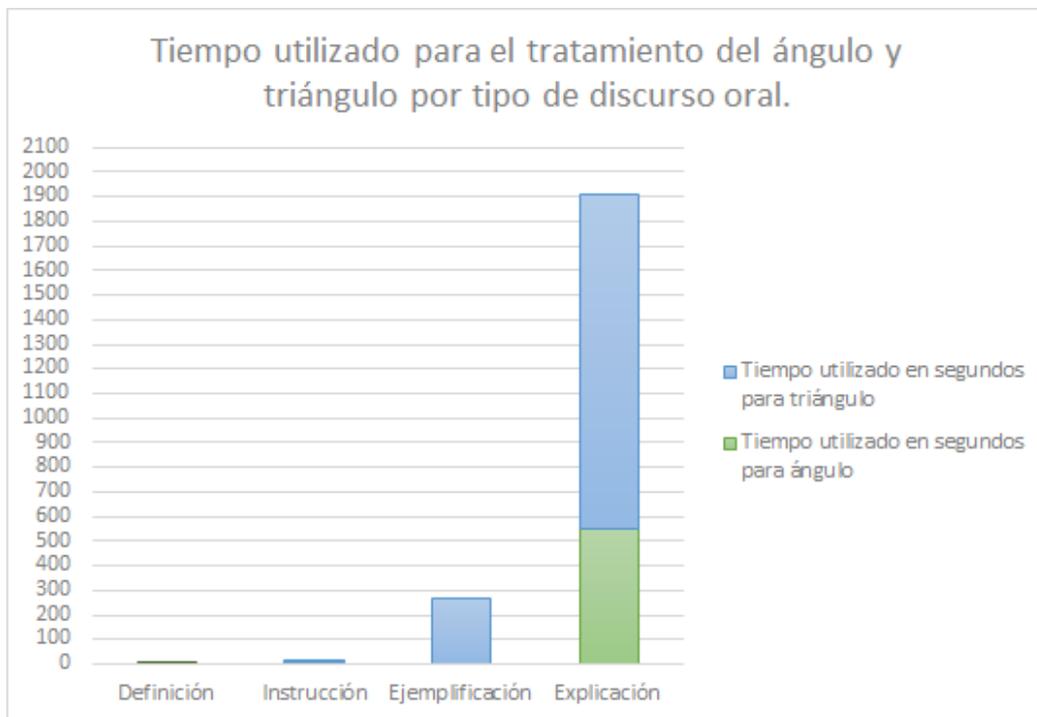
En esta última clase, la profesora desarrolla dos tipos de contenidos: ángulo y triángulo. Lo anterior se explica debido a que esta última clase corresponde al repaso de todo lo visto previamente en las cuatro clases anteriores. Por tal motivo, el objeto triángulo aparece mayor tiempo, específicamente 1.638 segundos, debido a las técnicas de construcción, y el

objeto ángulo (556 segundos) se hace presente debido a que se utiliza dicho concepto para la construcción del triángulo a partir de la medida de dos lados y unos de sus ángulos interiores.



*Ilustración 96 Tiempo utilizado en el discurso oral por cada contenido*  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.

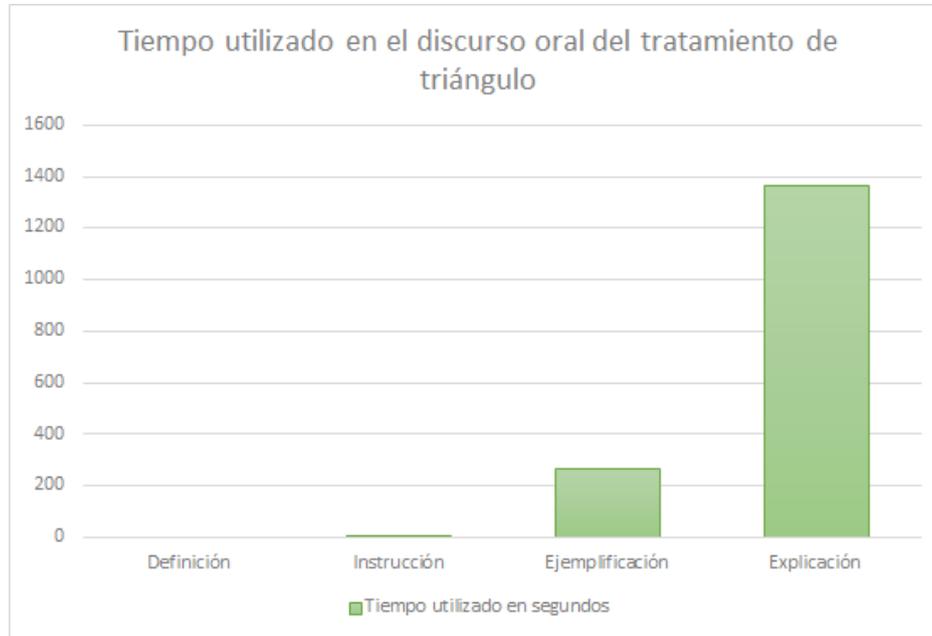
Dado lo anterior, el tiempo utilizado en el tipo de discurso se divide en instrucción, ejemplificación y explicación. Al tratarse de una clase de repaso, tiene sentido que la mayor cantidad de tiempo se invierta en las explicaciones para triángulo (1.362 segundos) y ángulo (546 segundos) en menor medida. Sumado a lo anterior se observa que la ejemplificación está presente únicamente para el concepto de triángulo (268 segundos), debido a que la profesora utiliza este recurso para la resolución de algunas tareas, o para complementar las explicaciones. Finalmente, la instrucción es utilizada durante 8 segundos para triángulo y un segundo menos para ángulo.



*Ilustración 97 Tiempo utilizado para el tratamiento del ángulo y triángulo por tipo de discurso oral  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

### A. El objeto triángulo y su tratamiento

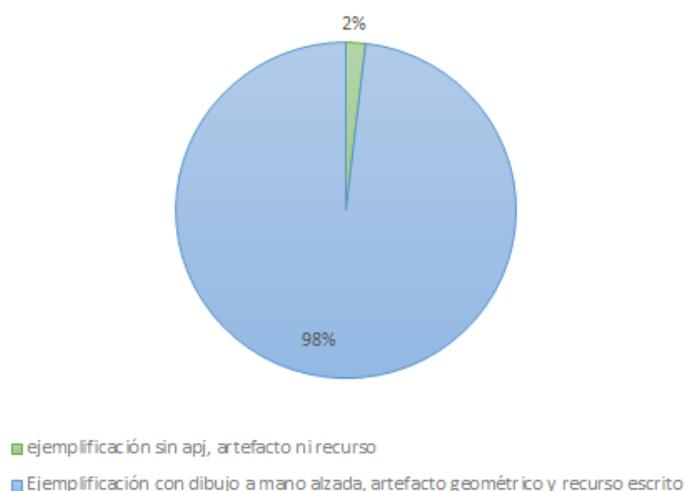
En cuanto al tratamiento del triángulo, como se mencionó anteriormente, este es trabajado principalmente a través de las explicaciones, que son las que concentran en mayor cantidad los segundos utilizados en la clase, las ejemplificaciones están presentes para complementar las mismas explicaciones y, finalmente el tiempo utilizado para las instrucciones son bastante breves debido a que la mayor parte del tiempo continúan con el trabajo realizado en la clase anterior.



*Ilustración 98 Tiempo utilizado en el discurso oral del tratamiento de triángulo  
Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Al observar la proporción en torno al tipo de ejemplificación que la profesora realiza, se observa una mayor predominancia de aquellas acompañadas con dibujo a mano alzada, artefacto geométrico y recurso escrito. Este 98% se explica debido a que esta clase corresponde a un repaso de todo lo visto en la unidad, por lo que la profesora emplea mayor tiempo en ejemplificar cómo se llevan a cabo algunas construcciones, ya sean estas utilizando regla y/o compás.

Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de ejemplificación realizada para el tratamiento del ángulo



*Ilustración 99 Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de ejemplificación realizada para el tratamiento del ángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Las explicaciones se presentan en una a distribución similar a la encontrada en la clase anterior, es decir, la explicación con construcción mecánica, artefacto geométrico y recurso escrito abarca un 58% del tiempo utilizado por la profesora en este tipo de discurso. El 14% está destinado a la explicación sin APJ, artefacto ni recurso, es decir, únicamente utilizando su voz. El 12% del tiempo lo utiliza en realizar explicaciones mediante dibujos a mano alzada, en donde estos dibujos corresponden a triángulos. Finalmente, el 8% del tiempo se utiliza para realizar explicaciones utilizando el artefacto geométrico y, el 8% restante utilizando el mismo artefacto pero incorporando la utilización del recurso escrito, que en este caso, corresponde al uso de la pizarra.

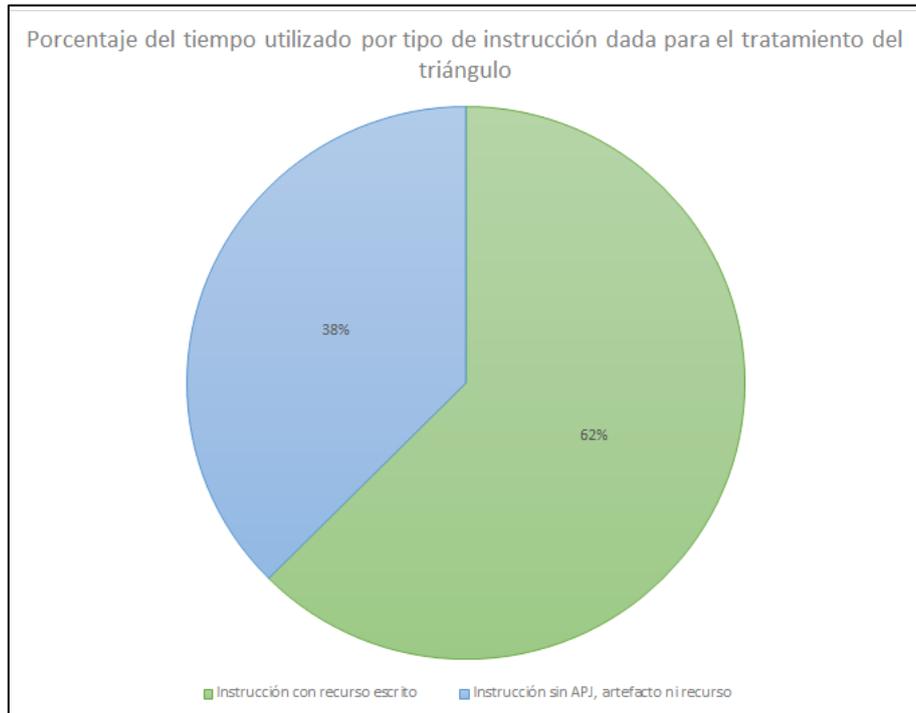
Dado lo anterior, es posible observar que finalmente las explicaciones de la profesora proceden en la mayoría del tiempo utilizando todos los elementos previamente mencionados, y el resto del tiempo la combinación de uno o dos de estos recursos. Esto nuevamente se explica debido a que, al ser una clase de repaso en torno a la construcción de

triángulos, utilizan en gran medida la regla, el compás y el transportador para realizar las explicaciones de las técnicas previamente trabajadas.



*Ilustración 100 Porcentaje del tiempo utilizado por el tipo de explicación realizada para el tratamiento del triángulo  
 Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

Finalmente, la proporción observada en torno al tipo de instrucciones, es inversamente proporcional a la vista en las clases anteriores, puesto que, si bien en el resto de las sesiones existía una alta predominancia en relación a la instrucción únicamente utilizando su voz, para este caso dicho tipo de instrucción presenta el 38% del tiempo utilizando. Por el contrario, para esta clase las instrucciones entregadas utilizando el recurso escrito constituyen el 62%, es decir, la predominancia de las instrucciones para esta clase se apoyan gran parte del tiempo en la escritura de las mismas en la pizarra.



*Ilustración 101 Porcentaje del tiempo utilizado por tipo de instrucción dada para el tratamiento del triángulo  
Fuente: Pizarro-Canales, 2018.*

### 6.2.10 Conclusiones

A continuación, se lleva a cabo la caracterización del  $ETM_G$  idóneo efectivo de Sayén por medio de las génesis encontradas, permitiendo el desglose de cada una de ellas en función de las características generales que se repiten a través de las clases analizadas.

#### A. Génesis semiótica

La representación del triángulo se hace presente a través de tres formas de representación: concreta, pictórica y discursiva. En lo que respecta a la representación concreta, el representamen es el triángulo contruido por bombillas. En pictórica se encuentran como representamen los distintos triángulos presentes en las guías de trabajo, ya sea como familia de triángulos y como un tipo de polígono, así como también en la pizarra. Por otro lado, la representación discursiva emerge al momento de nombrar los triángulos para la resolución

de una tarea solicitada por parte de Sayén, esto puede ser a través de ejemplificaciones, definiciones, explicaciones y/o instrucciones.

### B. Génesis instrumental

Se evidencia que el trabajo matemático que se desarrolla en el transcurso de las clases está condicionado por los verbos con los cuáles se delimita el tipo de construcción que se lleva a cabo. Estos verbos a su vez, condicionan la utilización de determinados artefactos para llevar a cabo la tarea matemática. De esta manera es posible identificar un tipo de construcción.

### C. Construcción con artefacto

En esta categoría podemos encontrar nuevamente los mismos tres grupos, i) la construcción con artefactos geométricos, ii) la construcción usando desigualdad triangular y iii) la construcción a través del discurso tecnológico.

- i) La construcción, se sustenta específicamente por medio de utilización de artefactos propios del trabajo geométrico, como lo son la regla, el compás y el transportador.
- ii) La construcción se realiza cuando se verifica utilizando la desigualdad triangular si es posible o no de construir un triángulo, ya sea realizándola con instrumentos geométricos o con material concreto “bombillas” o el remplazo numérico de la propiedad antes mencionada.
- iii) La construcción emerge cuando la profesora relata las técnicas de construcción de bisectriz, copia de ángulos, construcción de triángulos o la utilización de los artefactos geométricos.

En relación a lo anterior, es importante destacar que en desarrollo de la secuencia de clases de Sayén, el trabajo geométrico relativo a triángulos está fuertemente orientado al uso de artefactos geométricos, ya sea por medio de la manipulación o a través del discurso oral sobre los mismos. Por lo tanto, la alta presencia del plano semiótico-instrumental y el plano

epistemológico nuevamente queda de manifiesto en todas las secuencias de cada una de las clases.

#### D. Génesis discursiva

La génesis discursiva no se observa en el desarrollo de la secuencia de clases. Esto se debe a que la solicitud del proceso de prueba está ausente en las clases de Sayén, es decir, no se encuentran circulaciones completas ni tampoco el plano semiótico discursivo.

Finalmente, el análisis estadístico cuantitativo permite observar la concordancia entre las tareas asociadas con el marco teórico. Lo anterior se debe a que el tratamiento realizado al objeto triángulo por medio de las definiciones, ejemplificaciones, las explicaciones y las instrucciones se relaciona con la alta presencia del plano semiótico-instrumental. Por lo tanto, la ausencia del proceso de prueba tiene sentido en el desarrollo de las secuencias de tareas dado que no se solicita probar ni justificar durante todo el desarrollo de la unidad, quedando de manifiesto el paradigma G1 como centro del trabajo geométrico, en sus tareas se trabaja con la manipulación del mundo tangible, todo se sustenta en base a la constatación de las propiedades. De esta misma manera Sayén prepara tareas que responden al ETM de referencia

### 6.3 Conclusiones del Capítulo

Como se plantea en la presentación del capítulo, los análisis de cada caso de estudio nos entregan insumos para responder al objetivo específico 1, que a continuación recordamos.

OE1: Caracterizar el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemática.

Al observar el desarrollo de las clases tanto de Ailén como Sayén, se observa que G1 corresponde al paradigma puesto en juego. Esto se debe a que el trabajo geométrico entorno a los triángulos, se realiza ya sea por construcción conociendo la medida de sus tres lados, la medida de dos de sus lados y uno de sus ángulos interiores y la desigualdad triangular. Se trabaja manipulando objetos presentes en la realidad. Este trabajo en G1 se realiza a través de una representación icónica por medio de la representación del triángulo y su categorización. Para este caso, la utilización de la regla y el compás permite ilustrar los distintos triángulos de acuerdo a las condiciones para su construcción. Por otro lado, también se encuentra la representación no icónica, la cual se observa a través de la utilización de los artefactos para verificar las propiedades de la construcción para el triángulo y desigualdad triangular.

Cabe señalar que ambas profesoras llevan a cabo el desarrollo de sus clases por medio de la utilización de los mismos artefactos, es decir, regla, compás y transportador. Sumado a esto, ambas profesoras realizan los mismos tipos de construcción con artefactos geométricos, la diferencia que se presenta es que Sayén aborda la desigualdad triangular utilizando material concreto, entregando dos casos imposibles de construir. Luego, ambas profesoras abordan la desigualdad triangular por medio del reemplazo numérico de la propiedad antes mencionada, tanto en las tareas propuestas, como en las intervenciones que realizan en la pizarra para llevar a cabo la construcción del triángulo.

Finalmente, existen dos diferencias, la primera es que Sayén realiza la institucionalización por medio del discurso oral y el discurso escrito, apoyándose específicamente en la pizarra. Por el contrario, Ailén únicamente utiliza el discurso oral para llevar a cabo la institucionalización. La segunda diferencia, corresponde a la aparición del proceso de prueba, en donde Ailén la presenta una tarea donde lo solicita en la última guía, sin embargo, es importante destacar que dicha prueba no se socializa con el resto del grupo,

sino que es un trabajo individual, esta modalidad no permite conocer los razonamientos que los estudiantes desarrollaron, si es que los presentaron.

Tanto la profesora de educación básica con mención en matemática, como la profesora especialista en matemática, no presentan mayores diferencias en el desarrollo de la unidad para el tratamiento de triángulos, centrándose en ambos casos en las condiciones para la construcción del triángulo y los tres teoremas de construcción del triángulo (dado: tres lados, dos lados y un ángulo comprendido entre ellos y dos ángulos y un lado común) Presentan similares actividades, y el despliegue de los contenidos ocurre prácticamente en el mismo orden. La principal diferencia se observa a partir de la gestión de cada clase, puesto que Ailén dedica mayor tiempo en la utilización de su discurso oral para realizar las distintas intervenciones para el logro de cada una de las tareas propuestas al curso.

En ambos casos se observa que el análisis cualitativo, utilizando el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático, y el análisis cuantitativo utilizando el libro de códigos presentan una asociación completa. Lo anterior se sustenta en que los planos en circulación evidenciados en el discurso oral son los mismos que emergen a partir de los episodios de cada clase. Esto permite hacer una relación entre la gestión de la clase y la circulación de las tareas matemáticas vistas desde el ETM.

## Capítulo 7: Conclusiones y Proyecciones

Esta investigación determina el Espacio de Trabajo Matemático de Referencia e Idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile. Este capítulo tiene como propósito mostrar los hallazgos de esta investigación, estructurándolos en tres partes. En la parte 1 se presentan los resultados de este trabajo a la luz de los tres objetivos específicos culminando con los resultados del objetivo general. En la parte dos, se presentan las limitaciones de esta investigación, para finalmente, en la parte tres, se presentan las proyecciones de este estudio.

En el capítulo 3, se muestra la metodología empleada en el desarrollo de esta investigación. Para dar respuesta a los objetivos se plantean cinco preguntas que orientan el trabajo de investigación y que aporta desde los análisis y procesamientos de la información insumos para relevar los resultados entorno a los objetivos propuestos:

- P1: ¿Cómo se caracteriza el  $ETM_G$  de referencia en torno a los triángulos en Chile? Esta pregunta se responde en el capítulo 4.
- P2: ¿Cómo se caracteriza el  $ETM_G$  idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos escolares utilizados por Ailén y Sayén? Esta pregunta se responde en el capítulo 5.
- P3: ¿Qué relación existe entre el  $ETM_G$  idóneo potencial en las tareas diseñadas en los textos escolares con el  $ETM_G$  de referencia en los programas de estudio? Esta pregunta se responde en el capítulo 5.
- P4: ¿Cómo se caracteriza el  $ETM_G$  idóneo efectivo en las tareas implementadas por Ailén y Sayén para la enseñanza de los triángulos? Esta pregunta se responde en el capítulo 6.

- P5: ¿Cómo se caracterizan los distintos componentes y génesis del ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo en las tareas implementadas para la enseñanza del objeto triángulo por Ailén y Sayén? Esta pregunta se responde en el capítulo 6.

El estudio se organiza de la siguiente manera:

Las preguntas 4 y 5, orienta la búsqueda de resultados para el Objetivo Específico 1

- (OE 1): Caracterizar el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemática.

Los resultados del OE1 en conjunto con los hallazgos de la pregunta 1 permiten dar respuesta al el Objetivo Específico 2.

- (OE2): Determinar el grado de similitud entre el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el ETM<sub>G</sub> de referencia en el programa de estudio.

De igual manera, los resultados del OE1 en conjunto con los hallazgos de la pregunta 4 permiten dar respuesta al Objetivo Específico 3.

- (OE3): Determinar el grado de similitud entre ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el ETM<sub>G</sub> idóneo potencial en los textos escolares utilizados por las profesoras en la preparación de sus clases.

Todo lo anteriormente descrito sumados los resultados de la pregunta 3, proporciona los elementos para determinar el ETM de referencia e idóneo potencial de los triángulos en séptimo básico en Chile, dando respuesta al objetivo general.

- (OG): Determinar el espacio de trabajo matemático de referencia e idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile.

A continuación, se presenta el último capítulo

## 7.1 Conclusiones

7

Esta investigación determina el Espacio de Trabajo Matemático de Referencia e Idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile.

Los ETM se construyen sustentados en el conocimiento matemático y la experiencia del sujeto al hacer matemáticas. El centro de estudio está en las clases implementadas por Ailén y Sayén, en ellas se observa el dinamismo del modelo ETM cuando se analizan su acción docente y las decisiones que toman las profesoras al momento de diseñar sus clases con respecto al ETM de referencia y el ETM idóneo potencial de los textos escolares, que conllevan a encontrar cercanías o distancias entre los ETM.

A partir de este estudio se presentan las conclusiones en el orden aparición de cada objetivo específico:

- **OE1: Caracterizar el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo en séptimo básico, de una profesora básica con mención en matemática y una profesora especialista en matemáticas.**

Al observar el desarrollo de las clases tanto de Ailén como Sayén, se observa que G1 corresponde al paradigma puesto en juego. Esto se debe a que el trabajo geométrico entorno a los triángulos se realiza, ya sea por construcción conociendo la medida de sus tres lados, la medida de dos de sus lados y uno de sus ángulos interiores y/o la desigualdad triangular. Se trabaja manipulando objetos presentes en la realidad. Este trabajo en G1 se realiza a través de una representación icónica por medio de la representación del triángulo y su categorización. Para este caso, la utilización de la regla y el compás permite ilustrar los distintos triángulos de acuerdo a las condiciones para su construcción. Por otro lado, también se encuentra la representación no icónica, la cual se observa a través de la

utilización de los artefactos para verificar las propiedades de la construcción para el triángulo y desigualdad triangular. 7

Cabe señalar que ambas profesoras llevan a cabo el desarrollo de sus clases por medio de la utilización de los mismos artefactos, es decir, regla, compás y transportador. Sumado a esto, ambas profesoras realizan los mismos tipos de construcción con artefactos geométricos, la diferencia que se presenta es que Sayén es la única que aborda la desigualdad triangular utilizando material concreto, entregando dos casos imposibles de construir. Luego, ambas profesoras aplican la desigualdad triangular por medio del reemplazo numérico de la propiedad antes mencionada, tanto en las tareas propuestas como en las intervenciones que realizan en la pizarra para llevar a cabo la construcción del triángulo.

Las profesoras Ailén y Sayén presentan tareas parecidas para el tratamiento de triángulos, la diferencia que se aprecia en la gestión de la clase. Ailén utiliza más el discurso oral, enseña la realización de construcciones sólo desde lo discursivo sin utilización de instrumentos geométricos, su discurso tecnológico es recurrente y se abusa de él. Cada técnica abordada se trata de la misma manera, lo que puede traer serias dificultades en el logro de los aprendizajes esperados. Sayén en cambio, utiliza los instrumentos y aborda las técnicas con el uso de los instrumentos en la pizarra.

Sin embargo, ambas profesoras presentan tareas que movilizan los planos semiótico instrumental y epistemológico, quedándose sólo a nivel experimental sin demandar explicaciones, ni menos argumentaciones.

En ambos casos se observa que el análisis cualitativo, utilizando el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático y, el análisis cuantitativo utilizando el libro de códigos, presentan una asociación completa. Lo anterior se sustenta en que los planos en circulación evidenciados en el discurso oral son los mismos que emergen a partir de los episodios de

7  
 cada clase. Esto permite hacer una relación entre la gestión de la clase y la circulación de las tareas matemáticas vistas desde el ETM.

- **OE2: Determinar el grado de similitud entre el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el ETM<sub>G</sub> de referencia en el programa de estudio.**

Para determinar el grado de similitud entre ETM<sub>G</sub> de referencia de los programas de estudio con el ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo de las clases de Ailén y Sayén, se realiza un análisis por medio de cada una de las génesis, comparando al interior de cada una de ellas los hallazgos encontrados. Dejando fuera del análisis el discurso oral de las profesoras.

Las clases entorno a los triángulos contienen elementos del programa de sexto y séptimo básico, por lo que se toman elementos de ambos cursos para efectuar la comparación, lo que se evidencia por génesis en las siguientes tablas.

**Tabla 23**

*Cuadro resumen de la génesis instrumental del ETM<sub>G</sub> de referencia y ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo de Ailén y Sayén*

Génesis instrumental		
Programas de Estudio sexto y séptimo básico	Clases de Ailén	Clases de Sayén
En esta categoría podemos encontrar dos grupos: a) Construcción con artefacto y b) Construcción aritmética  a.1) la construcción con artefactos “no geométricos” a.2) la construcción con artefactos geométricos a.3) la construcción con software geométrico:  a.1) En este grupo para construir se consideran como artefactos varillas y papel. a.2) La construcción, se sustenta	En esta categoría podemos encontrar solo construcción con artefactos a.1) la construcción con artefactos geométricos y a.2) la construcción usando desigualdad triangular a.1) La construcción, se sustenta específicamente por medio de utilización de artefactos propios del trabajo geométrico, como lo son la regla, el compás y el transportador. a.2) La construcción se realiza cuando se verifica	En esta categoría podemos encontrar solo construcción con artefactos a.1) la construcción con artefactos geométricos y a.2) la construcción usando desigualdad triangular a.1) La construcción, se sustenta específicamente por medio de utilización de artefactos propios del trabajo geométrico, como lo son la regla, el compás y el transportador. a.2) La construcción se realiza cuando se verifica

<p>específicamente por medio de la incorporación de artefactos propios del trabajo geométrico, como lo son la regla, el compás y el transportador.</p> <p>a.3) Como su nombre lo indica, aquellas construcciones que se realizan utilizando un software en algún dispositivo tecnológico (computador, teléfono, tablet, etc.)</p> <p>b) Construcción aritmética: Este tipo de construcción está orientada al trabajo matemático relacionado con los conceptos de área, perímetro y ángulos, en donde específicamente se solicita su medición o cálculo. A diferencia de los otros dos tipos de construcción, este tipo implica una fibración externa, ya que el espacio real y local se constituye a partir de elementos geométricos (triángulos, ángulos, segmentos, etc.) y el trabajo aritmético a partir de estos implica necesariamente el cambio de registro. Por lo tanto, esto permite que este tipo de construcción siga considerándose dentro del ámbito de la geometría.</p>	<p>utilizando la desigualdad triangular si es posible o no de construir un triángulo.</p>	<p>utilizando la desigualdad triangular si es posible o no de construir un triángulo, ya sea realizándola con instrumentos geométricos o con material concreto “bombillas” o el reemplazo numérico de la propiedad antes mencionada.</p>
---	---	--

El trabajo geométrico relativo a triángulos en el programa de estudio, y en particular las construcciones, operan sobre la geometría axiomática natural (GI); todas las tareas propuestas se deben trabajar sobre objetos materiales, observándose a partir de sexto básico los primeros acercamientos a GII. Sin embargo, cabe señalar que a estos cambios se les ha considerado como deslizamientos entre paradigmas, desde un transitar unidireccional de GI/gII por la naturaleza de las tareas propuestas, las cuales solicitan descubrir propiedades a través de la manipulación de un artefacto privilegiando el trabajo

perteneciente a los planos [sem-ins] y epistemológico. El 61 % de las circulaciones provocadas por las tareas matemáticas están concentradas en estos dos planos. En las clases de Ailén y Sayén no se observa ningún deslizamiento desde GI/gII, todas las tareas están en GI, se construye con ausencia de prueba. Esta investigación nos evidencia que las tareas propuestas por el ETM de referencia son simples, poco desafiantes y descontextualizadas. Las profesoras Ailén y Sayén recogen sugerencias de los programas sus tareas propuestas a sus estudiantes responden lamentablemente a lo que el programa sugiere.

En esta génesis en las clases de Ailén y Sayén no se observa la construcción con software geométrico y la construcción aritmética.

**Tabla 24**

*Cuadro resumen de la génesis semiótica del ETM<sub>G</sub> de referencia y ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo de Ailén y Sayén*

Génesis Semiótica		
Programas de Estudio sexto y séptimo básico	Clases de Ailén	Clases de Sayén
<p>La representación del triángulo se hace presente a través de dos configuraciones distintas: material concreto y de manera pictórica.</p> <p>Otro aspecto importante de la génesis semiótica presente, tiene relación con la aparición de fibraciones externas en algunas tareas específicas, en donde se solicita medir o calcular en función del triángulo previamente presentado y que este cálculo o medición debía expresarse en números.</p>	<p>La representación del triángulo se hace presente a través de la representación pictórica, en ella se encuentra como representamen los triángulos presentes en las guías de trabajo como también en la pizarra.</p> <p>Existe ausencia de representaciones con material concreto.</p>	<p>La representación del triángulo se hace presente a través de tres formas de representación: concreta y pictórica La concreta son las bombillas que representan lados de un triángulo. En lo que respecta a la representación pictórica se encuentran como representamen los distintos triángulos presentes en las guías de trabajo, ya sea como familia de triángulos y como un tipo de polígono, así como también en la pizarra.</p>

La génesis semiótica se observa en las clases de Ailén y Sayén, muy concordante con la 7  
presentada en el ETM<sub>G</sub> de referencia. La diferencia entre las profesoras está en que Ailén  
sólo utiliza representaciones pictóricas. No existen tareas propuestas por las profesoras en  
donde aparezcan fibraciones externas.

Sayén utiliza material concreto en el estudio de la desigualdad triangular, Ailén trabaja con  
casos imposibles desde la construcción, tal como lo presenta el programa pero sin ocupar el  
dibujo que puede ocasionar un obstáculo en los estudiantes al momento de ejecutar la  
tarea.

**Tabla 25**

*Cuadro resumen de la génesis discursiva del ETM<sub>G</sub> de referencia y ETM<sub>G</sub> idóneo efectivo de Ailén y Sayén*

Génesis discursiva		
Programas de Estudio sexto y séptimo básico	Clases de Ailén	Clases de Sayén
<p>Se observa en los programas de sexto y séptimo, una menor frecuencia de la génesis discursiva con respecto a las otras dos génesis. Esto se debe a que la solicitud del proceso de prueba suele estar ausente de manera explícita.</p> <p>En este sentido, las pruebas encontradas corresponden a un tipo de las descritas por Balacheff, es decir, la prueba pragmática.</p> <p>Cabe señalar que las pruebas pragmáticas identificadas corresponden en su totalidad a las del tipo empirismo ingenuo. Este tipo de prueba está presente cuando entran en juego los verbos: <i>demostrar, argumentar, comprobar, conjeturar</i>, entre otras.</p> <p>Por otro lado, en lo que respecta al componente referencial teórico, los distintos casos identificados siempre se corresponden con alguna forma que permita realizar el tratamiento de triángulos.</p> <p>En sexto básico, se puede encontrar esta génesis cuando se estudia la desigualdad triangular y en las tareas relativas a la argumentar la clasificación de triángulos.</p>	<p>La génesis discursiva se observa en el desarrollo de la secuencia de clases en un sólo episodio. Es la que presenta una menor frecuencia de aparición con respecto a las otras dos génesis. Esto se debe a que la solicitud del proceso de prueba está casi ausente en las clases de Ailén. La prueba encontrada corresponde del proceso de prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo, puesto que los estudiantes deben justificar si es posible o no la construcción de los triángulos pedidos.</p>	<p>La génesis discursiva no se observa en el desarrollo de la secuencia de clases. Esto se debe a que la solicitud del proceso de prueba está ausente en las clases de Sayén, es decir, no se encuentran circulaciones completas ni tampoco el plano semiótico discursivo.</p>

En los programas de estudio para el tratamiento de triángulos, el proceso de prueba, y, por ende, la presencia de la génesis discursiva no es considerada como eje fundamental dentro de los planes de estudio de la educación chilena, puesto que se ha entregado un énfasis mucho mayor a la habilidad para construir, mediante el seguimiento de instrucciones, y no así la argumentación y generalización de los aprendizajes adquiridos. Para ejemplificar este

hecho, desde quinto hasta séptimo sólo un 8 % de tareas provocan la aparición de esta génesis.

Por otro lado, en las clases de Ailén sólo existe una tarea en donde se observa esta génesis, sin embargo, cada estudiante trabaja en forma individual, no evidenciándose como argumentaron la tarea. Mientras que en las clases de Sayén no se observa esta génesis en el desarrollo de las clases.

- **(OE3): Determinar el grado de similitud entre  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el  $ETM_G$  idóneo potencial en los textos escolares utilizados por las profesoras en la preparación de sus clases.**

Para determinar el grado de similitud entre  $ETM_G$  idóneo efectivo para la enseñanza del triángulo con el  $ETM_G$  idóneo potencial en los textos escolares utilizados por las profesoras Ailén y Sayén en la preparación de sus clases, se realiza un análisis por medio de cada uno de los planos del ETM por profesora y cada uno de los tres textos escolares escogidos por ellas: Editorial Santillana, Editorial Galileo y Editorial SM.

**-Texto de Editorial Santillana utilizado por la profesora Ailén en la preparación de sus clases.**

Se observa que el Espacio de Trabajo Matemático propuesto en el texto Santillana configura tres tipos de circulaciones: aquellas que activan el plano semiótico-discursivo, otras el semiplano [sem-ref] y finalmente aquellas que activan el plano semiótico-instrumental con el plano epistemológico, siendo estas últimas las que presentan la mayor cantidad de apariciones en el texto. En cambio, en las clases de Ailén las tareas matemáticas provocan dos tipos de circulaciones: plano semiótico-instrumental con el plano epistemológico y una tarea que induce la circulación completa.

Para este texto Santillana analizado y las clases de Ailén, como se muestra en los análisis es posible identificar que cada plano y circulación están determinados por los verbos presentes en cada actividad. A continuación, se presenta por plano y semiplano la similitud encontrada.

### **Plano semiótico-discursivo**

Así, para las tareas que presentan una circulación del tipo plano semiótico-discursivo, el verbo que orienta el trabajo matemático corresponde a “justificar”. Para los casos descritos, se observa que, frente a este tipo de circulación, este verbo delimita únicamente la identificación de las propiedades del objeto triángulo como proceso de prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo. Así mismo, para los casos analizados (8 %), la génesis semiótica y la génesis discursiva están siempre asociadas al concepto de triángulo, por lo tanto, las justificaciones siempre se hacen en torno a las propiedades del concepto en cuestión.

Este plano no se observa en las clases de Ailén, por ende, sus tareas no son extraídas del texto que ocupa para el diseño de sus clases.

### **Plano semiótico-instrumental y epistemológico**

Por otro lado, las tareas que propician las circulaciones del tipo semiótico-instrumental y epistemológico tienen en común que existe un único verbo que articula todas las tareas matemáticas, el cual corresponde al verbo *construye*. Este solicita de manera explícita la construcción en la tarea matemática. Es posible observar esta construcción de dos formas: por medio de la utilización de artefactos geométricos, o a través del cálculo de la medida de ángulos y/o lados.

En lo que respecta a los artefactos geométricos, las tareas intencionan la utilización de regla y compás y/o software geométrico. Para cada caso se pide que la construcción se realice en

función de ciertas medidas dadas por el texto, ya sean de los ángulos interiores o los lados que conforman el triángulo. En este sentido, la génesis instrumental estará situada en el contexto del uso de los artefactos previamente mencionados, sin embargo, no existiendo la utilización de material tangible en ninguno de los casos.

El 66 % de las tareas tienen esta circulación, la que tiene mayor frecuencia en el texto.

Las tareas propuestas por Ailén no son extraídas de manera textual del libro, sin embargo, las construcciones presentes en las clases son del tipo que se presenta en el texto, con la diferencia que no hay utilización de software geométrico.

### **Semiplano semiótico-referencial**

Finalmente, en lo que respecta al tercer tipo de circulaciones presentes en las tareas del texto escolar Santillana, estas corresponden a aquellas que movilizan el  $ETM_G$  en el semiplano [sem-ref]. En estos casos, en lo que respecta a la génesis semiótica, las representaciones corresponden a la medida de los lados y/o ángulos interiores del triángulo, en donde estos están presentes como  $ETM_G$  o  $ETM_N$ .

A diferencia de las otras circulaciones que emergieron del trabajo revisado, para estos casos existen verbos que no permiten identificar a priori los componentes que activan, ya que para su representación depende de lo que la consigna solicite. En esta línea, las tareas que movilizan el semiplano [sem-ref] están en su mayoría asociadas a los verbos: *determinar, describir, o nombrar*. Sumado a esto, este tipo de tareas no solicitan de manera explícita que su resolución se lleve a cabo por medio de construcciones o procesos de prueba, por lo que no está presente la génesis instrumental ni la génesis discursiva. En lo que respecta al referencial teórico para este tipo de tareas, existen dos tipos: el concepto de triángulo y el concepto de desigualdad triangular, en donde éstas solicitan *indicar* si es posible o no llevar

a cabo una construcción a partir de las medidas entregadas. El 26 % de las tareas provocan esta circulación, la que tiene la segunda mayor frecuencia de aparición en el texto.

7

Las clases de Ailén no presentan tareas que provoquen la movilización del semiplano [sem-ref].

**-Texto de Editorial Galileo utilizado por la profesora Sayén en la preparación de sus clases.**

El texto Galileo moviliza tres planos y un semiplano del ETM, los cuales corresponden al semiplano [sem-ref], el plano semiótico-instrumental y epistemológico, el plano semiótico-discursivo y una circulación completa. En las clases de Sayén las tareas propuestas a los estudiantes sólo propician la circulación del plano semiótico-instrumental y epistemológico.

A continuación, se presenta por plano y semiplano la similitud encontrada:

**Semiplano semiótico-referencial**

El semiplano semiótico-referencial emerge a partir del verbo *Indica*. Este verbo configura la tarea matemática en función de determinar de manera verbal, si alguna condición se cumple o no, por ejemplo, indicar qué lado de un triángulo rectángulo es siempre el más largo. Esto delimita el trabajo matemático en función de demostrar por parte del estudiante el conocimiento conceptual de reconocimiento de los elementos puestos en juego. En esta misma línea, cuando nos referimos a estos elementos, se observa que el componente referencial teórico corresponde al de triángulo rectángulo y al de desigualdad triangular, en donde, en el caso específico del triángulo rectángulo viene asociado también con la identificación del teorema de Pitágoras.

El semiplano [Sem-Ref] está presente en la circulación que provoca solo una de las tareas matemáticas propuestas por Sayén cuando solicita clasificar.

En lo que respecta a la génesis semiótica, cuando estamos en presencia de este semiplano, el representamen se identifica a partir de la medida de los lados del triángulo o la de sus ángulos interiores entregada por el texto, lo cual configura el  $ETM_N$ . En esta misma línea, también encontramos representaciones del triángulo en el  $ETM_G$  por medio de las formas presentes en el texto. Sin embargo, a pesar de estar estos dos ETM previamente mencionados, al no existir proceso de prueba, no es posible observar una fibración externa, puesto que no está presente el proceso de construcción. El 21 % de las tareas provocan esta circulación, la que tiene la segunda mayor frecuencia de aparición en el texto.

### **Plano semiótico-instrumental y epistemológico**

En lo que respecta a la génesis semiótica, encontramos exactamente los mismos componentes que se observan para el semiplano semiótico-referencial. Entonces, lo que propicia el cambio de circulación, y la incorporación de otros componentes corresponde a los verbos que articulan el trabajo matemático, lo que en este caso específico corresponde a tres verbos que comparten igual naturaleza: *construye*, *hallar* y *usar*.

Para el verbo *construye*, se solicita explícitamente la utilización de artefactos geométricos como lo son la regla y compás en función de la medida de ángulos y/o lados entregados por el texto.

El verbo *hallar*, en este caso implica aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de un lado del triángulo rectángulo. Por lo tanto, este cálculo implica el proceso de construcción con el teorema de Pitágoras como artefacto. Asimismo, el espacio real y local implica simultáneamente la circulación del  $ETM_G$  y  $ETM_N$ , es decir, las medidas expresadas en centímetros del triángulo rectángulo presentado.

Finalmente, el verbo *usar* solicita explícitamente la aplicación del teorema de Pitágoras para encontrar el valor de un lado desconocido. Por lo tanto, se repiten los mismos componentes

que para el verbo *hallar*. El 72 % de las tareas provocan esta circulación, la que tiene mayor frecuencia en el texto.

7

Sayén extrae algunas tareas del texto escolar Galileo y las trabaja sin hacer cambios en el diseño en sus clases, sin embargo, no aborda el Teorema de Pitágoras, por lo que no se observan fibraciones en el tratamiento de los triángulos. A diferencia de Sayén, quien trabaja con material concreto “bombillas” para estudiar la propiedad de la desigualdad triangular.

### **Plano semiótico-discursivo**

El plano semiótico-discursivo se observa a partir del verbo *explicar*, en donde se intenciona que los estudiantes puedan explicar la posibilidad de construir un triángulo rectángulo bajo ciertas condiciones en función de la medida de los lados que la tarea entrega. Así, para los dos casos que este plano está presente, la génesis semiótica está presente por la indicación del triángulo rectángulo en la consigna de las tareas o por medio de la entrega de las medidas de sus lados. El proceso de prueba en ambos casos está presente por medio de la prueba pragmática del tipo empirismo ingenuo, donde deben realizar dicha explicación por medio de las propiedades del teorema de Pitágoras. Finalmente, en ambos casos, el referencial teórico corresponde al objeto de triángulo rectángulo. El 5 % de las tareas provocan esta circulación en el texto. Mientras que Sayén sólo muestra utilizando las escuadras los triángulos rectángulos, al no haber proceso de prueba este plano no está presente en el desarrollo de sus clases.

### **Circulación completa**

A diferencia de las otras circulaciones, esta circulación está presente en un único caso dentro del texto escolar, en donde se solicita encontrar un valor a partir del teorema de Pitágoras, y luego explicar cómo se realiza dicho proceso. Por lo tanto, los verbos que aplican para este

caso son los mismos que conforman de manera separada la prueba y la construcción en el caso anterior, no obstante, en esta oportunidad se combinan dentro de la misma consigna, lo cual permite la aparición del plano descrito previamente. El 2 % de las tareas provocan esta circulación en el texto. Mientras que Sayén no presenta ninguna tarea que propicie el proceso de prueba, por consecuencia, no existe circulación completa.

**-Texto de Editorial SM utilizado por la profesora Sayén en la preparación de sus clases.**

En el texto escolar SM se identifican dos tipos de circulaciones, el semiplano semiótico-referencial y el plano semiótico-instrumental y epistemológico. En este texto sólo hay 14 tareas relativas a los triángulos. En las clases de Sayén las tareas propuestas a los estudiantes sólo propician la circulación del plano semiótico-instrumental y epistemológico.

A continuación, se presenta por plano y semiplano la similitud encontrada:

**Semiplano semiótico-referencial**

Para este tipo de circulación se observa que los verbos que articulan el trabajo matemático corresponden a *completar* y *comparar*. Estos verbos no implican llevar a cabo procesos de prueba ni tampoco procesos de construcción, puesto que en función de las comparaciones y completar, los atributos solicitados ya están presentes en las representaciones que el texto entrega. Por otro lado, se observa que las representaciones de los triángulos corresponden a presentarlo como forma, o representado en un plano cartesiano.

Finalmente, lo que respecta al componente referencial, este se constituye a partir de las propiedades que cumple un triángulo en función de la medida de sus ángulos interiores o la de áreas de triángulos. El 29 % de las tareas provocan esta circulación en el texto. El semiplano [sem-ref] no está presente en la circulación que provocan las tareas matemáticas propuestas por Sayén.

## Planos semiótico-instrumental y epistemológico

7

En lo que respecta a este plano, el trabajo matemático se orienta a partir de los verbos *calcular* y *construir*. Para el verbo *calcular*, la génesis instrumental está asociada al cálculo de áreas de triángulos o al de la medida de los ángulos interiores de éste, ya sea en el plano cartesiano o partir de las medidas de dos de sus lados en un triángulo rectángulo cuando se trata de área, y a partir de la medida de dos ángulos interiores cuando se trata de lo segundo. Por el contrario, cuando se trata del verbo *construir*, se solicita construir un triángulo por medio de la utilización de artefactos que no están especificados en la consigna de la tarea. Asimismo, encontramos que la génesis semiótica se comporta de dos formas: una por medio de la representación del triángulo en el plano cartesiano, y otra por medio de la representación del triángulo por con la medida de sus ángulos interiores.

Finalmente, en lo que respecta al componente referencial teórico, este corresponde al de área de triángulo y al de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. El 71 % de las tareas provocan esta circulación en el texto.

Sayén extrae algunas tareas del texto escolar SM y las trabaja al igual que el texto anterior, sin hacer cambios, sin embargo, no aborda el Teorema de Pitágoras, por lo que no se observan fibraciones en el tratamiento de los triángulos. Además no trabaja con el plano cartesiano. Además Sayén, trabaja con material concreto “bombillas” para estudiar la propiedad de la desigualdad triangular.

Los hallazgos para cada objetivo nos permiten dar respuesta a nuestro objetivo general

- **(OG): Determinar el espacio de trabajo matemático de referencia e idóneo en el tratamiento de triángulos en séptimo básico en Chile.**

En las conclusiones anteriores se han caracterizado, a través del grado de similitud entre el  $ETM_G$  efectivo de cada profesora con respecto al  $ETM_G$  de referencia e idóneo potencial de las tareas presentes en los textos escolares seleccionados por las profesoras , considerando

para esto, las génesis: semiótica, discursiva, instrumental ; los diferentes planos puestos en juego y el semiplano [sem-ref] en los distintos niveles de ETM<sub>G</sub>.

7

El programa de estudio con la simpleza que tienen las tareas planteadas, en el se encuentran tareas con una riqueza mayor que las que proponen las profesoras de este estudio, esto se evidencia en la ausencia de fibraciones externas. Existe también ausencia de construcciones aritméticas (Este tipo de construcción está orientada al trabajo matemático relacionado con los conceptos de área, perímetro y ángulos, en donde específicamente se solicita su medición o cálculo). Sin embargo, la prueba no tiene una presencia significativa a lo largo de los cursos hasta séptimo básico<sub>2</sub> de hecho, de primero a sexto no tenemos ninguna tarea que propicie la circulación completa del ETM<sub>G</sub> en el ETM<sub>G</sub> de referencia.

Ailén profesora especialista y Sayén profesora de educación básica con mención en matemática, tienen algunas diferencias en el tipo de tareas que presentan a sus estudiantes. El trabajo de Sayén con material concreto permite a los estudiantes descubrir que no siempre es posible construir un triángulo, sin embargo, es la profesora quien les entrega el teorema. Los alumnos sólo constatan la propiedad puesta en juego. En cambio, Ailén entrega el teorema y les hace aplicar la propiedad, reemplazando los lados del triángulo llamados a, b y c por valores determinados. Sin embargo, ambas se quedan sólo a nivel de experimentación, sin solicitar ningún tipo de prueba o la construcción de los teoremas abordados. Considerando que una de las tareas de Ailén pide prueba, no se tiene registro que se haya logrado manifestar la génesis discursiva, por la manera en que se gestiona la clase 4.

Las tareas propuestas por las profesoras provocan la circulación de los planos semiótico-instrumental y epistemológico. Estos planos son el que mayor presencia tiene en todos los niveles del ETM, quedando de manifiesto que la constatación y la experimentación están en

el centro de la actividad geométrica. A excepción de una tarea que moviliza es semiplano [Sem-Ref].

7

En los diferentes niveles de ETM analizados en los elementos comunes existe un trabajo matemático centrado en un contexto de descubrimiento: la intuición y la experimentación. No hay lugar a los malos entendidos porque no hay transición de G I/ gII.

El semiplano [sem-ref] emerge por la simplicidad de las tareas matemáticas planteadas, al sólo relacionarse tres componentes del ETM, y este tiene la segunda mayor presencia en las ETM<sub>G</sub> de referencia y en el ETM<sub>G</sub> idóneo potencial de los tres textos escolares. La presencia de este semiplano se relaciona estrechamente con tareas como identificar o nominar. Este tópico en el ETM<sub>G</sub> de referencia cobra especial relevancia entorno a la incorporación de este semiplano, puesto que permite observar y configurar el trabajo matemático en los cursos iniciales, pues la tarea matemática en geometría no está enfocada exclusivamente a la manipulación de artefactos, construcción por medio de la manipulación o la realización de cálculos, sino que también este trabajo matemático se sustenta en el reconocimiento de los elementos referenciales que conforman al objeto matemático desde la experiencia perceptiva. Esto explica entonces, que la mayor presencia de este semiplano se concentre entre primero y quinto año básico, sin embargo, en las tareas propuestas por los tres textos escolares tienen la segunda frecuencia de aparición. Por otro lado, en los niveles de 6° y 7° del ETM<sub>G</sub> de referencia el segundo plano de mayor frecuencia es el [sem- dis].

El discurso oral es fundamental al momento de efectuar las devoluciones a los estudiantes cuando realizar la tarea matemática, sea de forma individual o grupal. Sin embargo, el discurso oral por sí sólo no facilita el logro de los aprendizajes matemáticos. Se evidencia en el desarrollo de las clases observadas, abuso del discurso tecnológico (génesis instrumental), siendo compleja la enseñanza de las construcciones sólo a partir del dictado de instrucciones, sin realizar paralelamente la construcción con instrumentos geométricos en la

pizarra. Esto puede ser un obstáculo para los estudiantes al momento de aplicar la técnica, sobre todo si las indicaciones son acompañadas de dibujos a mano alzada.

7

El rol del docente tiene una importancia fundamental al momento de generar un aprendizaje efectivo dentro del aula. Las decisiones que tome en el diseño de las metas, la selección de la secuencia de tareas matemáticas para el logro de ésta y, la gestión la clase que se manifiesta al momento de dar el discurso oral, son cruciales para no crear confusiones ni malos entendidos en los alumnos. Sin embargo, estos dos casos no pueden ser utilizados para generalizar la educación dentro del aula en Chile.

Avalando este hecho, existe un estudio acerca de más de cien videos de segundo ciclo básico que manifiestan que el trabajo matemático en los profesores chilenos se basa en la presentación de procedimientos y definiciones que posteriormente deben practicar los alumnos (Preiss et al. 2011 y Preiss et al, 2011), aunque los investigadores no se basan en el mismo marco teórico, sus conclusiones nos permiten observar de manera general la presencia de lo Planos [sem-ins] y epistemológico en las aulas chilenas. Sin embargo, para producir cambios en las prácticas de los profesores es necesario contar con un programa de estudio que tenga tareas que movilicen los seis componentes del ETM, en Chile los programas de estudio están mal diseñados, con ello es difícil esperar que los profesores realicen tareas matemáticas que generen pensamiento crítico, si éstas están ausentes en las sugeridas a los docentes. Se declara institucionalmente que se debe desarrollar el razonamiento matemático, pero esto es solo declarativo.

Chile no debe asombrarse con los bajos puntajes en las pruebas de medición internacional, el puntaje responde al tipo de tarea privilegiada en el ETM de referencia.

## 7.2 Limitaciones del estudio

7

La investigación ex post-facto corresponde al tipo no experimental y de carácter observacional. La primera limitación que tiene este tipo de investigación, es que el investigador no puede manipular la variable independiente (el profesor observado), por el poco control que se tiene de las clases observadas.

La segunda limitación es que la muestra de estudio son dos casos, por lo que no podemos generalizar los hallazgos encontrados. No se pueden homologar los resultados de la investigación con profesores que se desempeñan en el mismo contexto.

## 7.3 Proyecciones de la investigación

Los resultados de esta investigación realizan seis aportes:

La primera proyección es cooperar en la reflexión y modificaciones del ETM<sub>G</sub> de referencia en Chile, los análisis de los objetivos de aprendizaje y de las actividades que ya detallamos anteriormente, evidencian que si no se realizan cambios en la secuencia de objetivos de aprendizajes y por consecuencia en las actividades sugeridas a los profesores para la enseñanza de la geometría y otras áreas de la matemática se continuará focalizando el aprendizaje en tareas que no propician el razonamiento matemático en nuestros estudiantes. Se necesita construir un ETM<sub>G</sub> coherente y consistente con una clara conciencia de la geometría I que quiere intencionar en el diseño de la progresión de los OA con su secuencia de tareas sugeridas. Además, discerniendo en que nivel y momento se quiere comenzar el deslizamiento hacia la GI/gII.

La segunda, considera que, en la formación continua, conocer el modelo ETM de manera simplificada permite al profesor una vigilancia consciente del tipo de tareas que se escogen

como significativas para el logro de las metas de cada clase. Para estos cursos se sugiere intencionar la toma de conciencia entorno a un objeto matemático y que las tareas responden a la meta que se quiere conseguir, por ende, el énfasis está también en el diseño de metas de aprendizaje por clases. El abordaje es teórico-práctico, siendo óptimo la implementación de los diseños y la reflexión sobre ellos, propiciando el diseño de metas de clases y tareas matemáticas que provoquen una circulación completa del ETM.

7

La tercera, considera que, en la formación inicial de los profesores de educación básica en formación, el modelo ETM aporte elementos para la elaboración de la maqueta de formación inicial (diseño de la malla curricular en el área de las matemáticas) y, para la elaboración de programas de estudio de la malla. Por ejemplo, la reformulación 2015 de la malla de Educación Básica PUCV, está fundada en el modelo ETM. Futuras investigaciones evidenciarán los aportes realizados del diseño basado en los ETM personales de los estudiantes considerando un diagnóstico al ingresar el 2015 y una medición al egresar el año 2019.

La cuarta, propone contribuir en la formación inicial y continua de los profesores de educación básica en formación en didáctica de las matemáticas, a través de la creación de un grupo de investigación en la Universidad donde se desempeña la investigadora, comunicando y publicando los resultados de dichos estudios hacia la comunidad educativa tanto a nivel nacional como internacional.

La quinta proyección espera continuar y difundir investigaciones con respecto al discurso oral en el ETM. Los aportes del discurso semiótico (génesis semiótica), discurso tecnológico (génesis instrumental) y discurso teórico (génesis discursiva) nutren el ETM idóneo efectivo.

## Bibliografía

- Agencia de la calidad de la educación (2015). Resultados TIMSS Chile. Mineduc: Santiago de Chile.
- Agencia de calidad de la educación. (2017). Resultados TIMSS Chile. Revisado el 3 de agosto del 2017 en <http://www.revistadeeducacion.cl/wp-content/uploads/2016/11/TIMSS-PRESENTACION.pdf>
- Agencia de la calidad de la educación. (2017). Que es el simce Simce. Revisado el 29 de septiembre del 2017 <http://www.agenciaeducacion.cl/evaluaciones/que-es-el-simce/>
- Anastasiadis, M. y Nikolantonakis K. (2016). *The mathematical working space in the case of area and perimeter: Concepts' definitions and measurement- calculation processes. Quinto simposio ETM Espacio de Trabajo Matemático. Grecia.*
- Araya, R. & Dartnell, P. (2009). Saber pedagógico y conocimiento de la disciplina matemática en docentes de educación general básica y media. En Chile, Ministerio de Educación (Ed.), *Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación* (pp. 157-198). Santiago, Chile: Editor, Departamento de Estudios y Desarrollo.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, 18(2), 147-176.
- Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en alumnos de matemáticas, una empresa docente, pp.200 <hal- 00520133>
- Alfaro,S., Espinoza, Y., Cano, S., Coll, D. (Ed.). (2014). *Matemática 7° Básico [Texto del Estudiante]*. Santiago,Chile: Galileo.
- Brophy, J. E. (1991). Conclusion to advances in research on teaching: teachers' knowledge of subject matter as it relates to teaching practice. In J.E. Brophy (Ed.) *Advances in research on teaching: Teachers subject matter knowledge and classroom instruction* (pp. 347-362). Greenwich CT: JAI Press.

- Brousseau G (2001). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. Université de Crète. Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire; l'étude de l'espace et de la géométrie, Apr 2000, Rethymnon, Grèce. pp.67-83, 2001. [〈hal-00515110〉](#)
- Castorina, J., Ferreiro E., Kobl de Oliveira, M. y Lerner., D. (1996). *Piaget- Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires: Paidós Ibérica, S.A.
- Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.
- Chevallard (1999) Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266.
- Claro, M., Preiss, D. D., San Martín, E., Jara, I., Hinostroza, J. E., Valenzuela, S., ... & Nussbaum, M. (2012). Assessment of 21st century ICT skills in Chile: Test design and results from high school level students. *Computers & Education*, 59(3), 1042-1053.
- Declaración universal de los Derechos Humanos (1998).
- Departamento de estudios pedagógicos (2016). Matemáticas 7° Básico [texto del estudiante]. Santiago, Chile: SM.
- Departamento de Investigaciones Educativas (2009). Matemáticas 7°, Santillana Bicentenario. Santiago, Chile: Santillana.
- Docentemas. (2017). El sistema de evaluación docente. Revisado el 3 de agosto del 2017 en: [https://www.docentemas.cl/dm\\_sistema\\_esp.php](https://www.docentemas.cl/dm_sistema_esp.php)
- Docentemas. (2017). Los niveles de desempeño. Revisado el 3 de agosto del 2017 en: [https://www.docentemas.cl/dm05\\_informes\\_niveles.php](https://www.docentemas.cl/dm05_informes_niveles.php)
- Duval, R. (1993a). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, (31):37–61.
- Duval, R. (1993b). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5:37–65.
- Duval, R. (1996) Quel Cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques? *RDM*, Vol. 16 No. 3, 349-382.

- Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Fondo de investigación y desarrollo en Educación (2015). *Observando e identificando prácticas que promueven la metacognición y la autorregulación en el aula matemática de segundo ciclo básico*. Ministerio de educación: Santiago de Chile.
- Gómez Mendoza & Miguel Angel; (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, Julio-Diciembre, 83-115.
- Gómez Chacón, M., Kuzniak, A., Vivier, L. (2016) El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemáticos *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 1-22.
- Gonsseth, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Éditions du Griffon, Lausanne.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 283-312.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonsseth (destiné) étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*. 40/3, 283-312.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.
- Kerlinger, F. N. (1988). *Investigación del comportamiento*, 2ª. ed. (p. 394). México: McGraw-Hill.
- Kuzniak, A., (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. *Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie*. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6(2), 167- 188.

- Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 15, pages 75–95. IREM de STRASBOURG.
- Kuzniak, A. (2011a). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 16, pages 19–24.
- Kuzniak, A. (2011b). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, Paris.
- Kuzniak, A. (2014). Travail mathématique et domaine mathématique. In *Acte du troisième symposium ETM*, Montréal.
- Kuzniak, A. et Nechache, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. In *Acte du 41e Colloque COPIRELEM*, Mont de Marsan.
- Kuzniak, A. et Drouhard, J. P. (2015). Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les espaces de travail mathématique. In *Actes du quatrième symposium ETM*, Madrid.
- Kuzniak, A., Nechache, A. et Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, pages 1–14.
- Mapolelo, D. C., & Akinsola, M. K. (2015). Preparation of mathematics teachers: Lessons from review of literature on teachers' knowledge, beliefs, and teacher education. *International Journal of Educational Studies*, 2(1), 01-12.
- Mineduc. (2003). *Marco para la Buena enseñanza*. Mineduc: Santiago de Chile.
- Mineduc (2004). *Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS*. Mineduc: Santiago de Chile.
- Montero, I. y León, O. (2015). *Métodos de investigación en psicología y educación. Las tradiciones cuantitativa y cualitativa*. Madrid: McGraw-Hill.
- Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (22), 67-90.

- Peirce, C. S. (1974). Collected papers of Charles Sanders Peirce (Vol. 5). Harvard University Press.
- Preiss, D.D. (2010). Folk pedagogy and cultural markers in teaching: Three illustrations from Chile. En D. D. Preiss & R. J. Sternberg (Eds.), Innovations in educational psychology: Perspectives on learning, teaching, and human development (pp. 325-356). New York, NY: Springer.
- Preiss, D., Larrain, A., & Valenzuela, S. (2011). Discurso y Pensamiento en el Aula Matemática Chilena. *Psyche*, 20(2).
- Preiss, D., E. San Martín, I. Alegría, A. M. Espinoza, M. Núñez y L. Ponce (2011). Estructura y discurso en el aula matemática de primer ciclo: Enseñar matemáticas fomentando la apropiación privada de términos y procedimientos. En: Centro de Estudios MINEDUC (Ed.), Evidencias para Políticas Públicas en Educación, Ministerio de Educación, República de Chile, pp. 127-165.
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, France: Armand Colin.
- Radovic, D. y Preiss, D. D. (2010). Patrones de Discurso Observados en el Aula de Matemática de Segundo Ciclo Básico en Chile [Discourse Patterns Observed in Middle-School Level Mathematics Classes in Chile]. *Psyche*, Santiago, v. 19, n. 2, p. 65-79.
- Roditi E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième – Étude de pratiques ordinaires*. (p.30). Thèse de doctorat de didactique des mathématiques. Université Paris 7. Francia.
- Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics*, 24(2), 7-15.
- Sinclair, N., & Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM*, 47(3), 319-329.
- Stake, R. (1998) *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

- Tanguay, D., Kuzniak, A., Gagatsis, A. (2014) El trabajo matemático y los espacios de trabajo matemático In Actes du quatrième symposium ETM, Madrid. p. 21-26
- Unicef. (2016). Más igualdad para los niños.