



**HAL**  
open science

# Prédiction spatio-temporelle de surfaces issues de l'imagerie en utilisant des processus stochastiques

Thomas Deregnacourt

► **To cite this version:**

Thomas Deregnacourt. Prédiction spatio-temporelle de surfaces issues de l'imagerie en utilisant des processus stochastiques. Traitement des images [eess.IV]. Université Clermont Auvergne [2017-2020], 2019. Français. NNT : 2019CLFAC088 . tel-03079436

**HAL Id: tel-03079436**

**<https://theses.hal.science/tel-03079436>**

Submitted on 17 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE

---

**THÈSE**

présentée devant  
l'UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE

préparée à l'école doctorale  
Sciences pour l'Ingénieur  
spécialité INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement par  
**Thomas DEREGNAUCOURT**  
le 16 décembre 2019

# Prédiction spatio-temporelle de surfaces issues de l'imagerie en utilisant des processus stochastiques

préparée au sein du laboratoire LIMOS  
sous la direction de  
Chafik Samir et Anne-Françoise Yao

## COMPOSITION DU JURY

M.	Laurent Risser	Rapporteur	Maître de conférence, HDR
M.	Stephane Derrode	Rapporteur	Professeur
M.	Vincent Barra	Examinateur	Professeur
Mme	Sana Louhichi	Examinatrice	Professeur
Mme	Alice Othmani	Examinatrice	Maître de conférence
Mme	Inès Adouani	Examinatrice	Maître de conférence
M.	Chafik Samir	Directeur de thèse	Maître de conférence, HDR
Mme	Anne-Françoise Yao	Co-directrice de thèse	Professeur



---

Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes  
UMR CNRS 6158

---



# Resumé

La prédiction de surface est désormais une problématique importante dans de multiples domaines, tels que la vision par ordinateur, la simulation d'avatars en cinématographie ou dans les jeux vidéo, etc. Une surface pouvant être statique ou dynamique, c'est-à-dire évoluant dans le temps, le problème peut être séparé en deux catégories : un problème de prédiction spatial et un problème de prédiction spatio-temporel. Afin de proposer une nouvelle approche à chacune de ces problématiques, ce travail de thèse a été séparé en deux parties.

Nous avons d'abord cherché à prédire une surface statique, qui est supposée cylindrique, en la connaissant partiellement sous la forme de courbes. L'approche que nous avons proposée consiste à déformer un cylindre sur les courbes connues afin de reconstruire la surface d'intérêt. Tout d'abord, une correspondance entre les courbes connues et le cylindre est générée à l'aide d'outils d'analyse de forme. Une fois cette étape effectuée, une interpolation du champ de déformation, qui a été supposé gaussien, a été estimée en se basant sur le maximum de vraisemblance d'une part, et par inférence bayésienne d'autre part. La méthodologie a par la suite été appliquée à des données réelles provenant de deux domaines de l'imagerie : l'imagerie médicale et l'infographie. Les divers résultats obtenus montrent que la méthode proposée surpasse les méthodes existantes dans la littérature, avec de meilleurs résultats en utilisant l'inférence bayésienne.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la prédiction spatio-temporelle de surfaces dynamiques. L'objectif était de prédire entièrement une surface dynamique à partir de sa surface initiale. La prédiction nécessitant une phase d'apprentissage à partir d'observations connues, nous avons tout d'abord développé un outil d'analyse spatio-temporel de surfaces. Cette analyse se base sur des outils d'analyse de forme, et permet un meilleur apprentissage pour la prédiction. Une fois cette étape préliminaire effectuée, nous avons estimé la déformation temporelle de la surface dynamique à prédire. Plus précisément, une adaptation, applicable sur l'espace des surfaces, des estimateurs couramment utilisés en statistique a été utilisée. En appliquant la déformation estimée sur la surface initiale, une estimation de la surface dynamique a ainsi été créée. Cette méthodologie a par la suite été utilisée pour prédire des expressions 4D du visage, ce qui permet de générer des expressions visuellement convaincantes.



# Abstract

The prediction of a surface is now an important problem due to its use in multiple domains, such as computer vision, the simulation of avatars for cinematography or video games, etc. Since a surface can be static or dynamic, i.e. evolving with time, this problem can be separated in two classes: a spatial prediction problem and a spatio-temporal one. In order to propose a new approach for each of these problems, this thesis works have been separated in two parts.

First of all, we have searched to predict a static surface, which is supposed cylindrical, knowing it partially from curves. The proposed approach consisted in deforming a cylinder on the known curves in order to reconstruct the surface of interest. First, a correspondence between known curves and the cylinder is generated with the help of shape analysis tools. Once this step done, an interpolation of the deformation field, which is supposed Gaussian, have been estimated using maximum likelihood and Bayesian inference. This methodology has then been applied to real data from two domains of imaging: medical imaging and infography. The obtained results show that the proposed approach exceeds the existing methods in the literature, with better results using Bayesian inference.

In a second hand, we have been interested in the spatio-temporal prediction of dynamic surfaces. The objective was to predict a dynamic surface based on its initial surface. Since the prediction needs to learn on known observations, we first have developed a spatio-temporal surface analysis tool. This analysis is based on shape analysis tools, and allows a better learning. Once this preliminary step done, we have estimated the temporal deformation of the dynamic surface of interest. More precisely, an adaptation, with is usable on the space of surfaces, of usual statistical estimators has been used. Using this estimated deformation on the initial surface, an estimation of the dynamic surface has been created. This process has then been applied for predicting 4D expressions of faces, which allow us to generate visually convincing expressions.



## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Chafik SAMIR, ainsi que ma co-directrice de thèse, Anne-Françoise YAO. Je suis ravi d'avoir travaillé avec eux au cours de ces trois années de thèse, mais aussi pendant mes deux stages de master.

Je remercie aussi Laurent RISSER et Stéphane DERRODE pour avoir pris le temps de rapporter ce manuscrit thèse, mais également pour leur présence lors de ma soutenance. Je tiens aussi à remercier Vincent BARRA, Sana LOUHICHI, Alice OTHMANI, et Inès ADOUANI d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'assister à ma soutenance.

Je veux aussi remercier Sebastian KURTEK et Hamid LAGA pour leur appui scientifique sur les différents aspects de ma thèse.

Un grand merci à l'IUT informatique de Clermont-Ferrand pour leur accueil. En particulier, je remercie tout particulièrement Pascale BRIGOULET et François DELOBEL de m'avoir sorti de mon cocon et permis d'être bien plus ouvert aux autres.

Je remercie aussi les personnes avec qui j'ai partagé ces années de thèse : Sophie MALLARET, Loukmen REGAINIA, Papa Alioune Meissa MBAYE, Anne DE-LA-FOYE, Elliott BLOT et bien d'autres.

Je souhaite remercier mes parents, Chantal et Philippe, pour leur soutien moral au cours de cette thèse.

Enfin, je tiens plus que tout à remercier une personne qui m'est très particulière. Elle a d'abord été une collègue, pour être aujourd'hui un membre cher à mes yeux. Cette personne m'a tant aidé, que ce soit dans sur le côté moral ou scientifique au cours de la thèse comme dans la vie, que ces quelques mots ne suffisent pas à montrer toute ma reconnaissance. Cette personne n'est pas moins que ma compagne, Oumayma.





# Table des matières

<b>Table des notations</b>	<b>I</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte et problématiques . . . . .	1
1.2 Objectifs et contributions . . . . .	3
1.3 Organisation du manuscrit . . . . .	5
<b>2 Notions</b>	<b>7</b>
2.1 Les processus stochastiques . . . . .	7
2.1.1 Généralités . . . . .	7
2.1.2 Les champs aléatoires gaussiens . . . . .	8
2.2 Analyse de forme . . . . .	11
2.2.1 Les débuts de l'analyse de forme . . . . .	11
2.2.2 Analyse de forme dans le cas de courbes . . . . .	14
2.2.3 Analyse de forme dans le cas de surfaces . . . . .	18
<b>3 État de l'art</b>	<b>23</b>
3.1 Reconstruction de surface . . . . .	23
3.1.1 Reconstruction de surface à partir d'un nuage de points . . . . .	24
3.1.2 Reconstruction de surface à partir de courbes . . . . .	27
3.2 Prédiction spatio-temporelle . . . . .	28
3.2.1 Prédiction spatio-temporelle sur une surface statique . . . . .	29
3.2.2 Prédiction au sein d'une surface dynamique . . . . .	29
3.2.3 Prédiction d'une nouvelle surface dynamique . . . . .	30
<b>4 Reconstruction de surface</b>	<b>33</b>
4.1 Introduction . . . . .	33
4.2 Méthodologie . . . . .	34
4.2.1 Reconstruction de surface cylindrique par la déformation d'un cylindre parfait . . . . .	35

4.2.2	Correspondance entre les courbes des surfaces cylindriques et le cylindre parfait . . . . .	36
4.2.3	Interpolation de la déformation par champ aléatoire gaussien . . . . .	37
4.2.4	Estimation des paramètres des champs aléatoires gaussiens . . . . .	39
4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	42
4.3.1	Exemples synthétiques . . . . .	45
4.3.2	Données réelles : domaine médical . . . . .	48
4.3.3	Données réelles : infographie . . . . .	50
4.3.4	Comparaison avec l'état de l'art . . . . .	53
4.4	Extension : application au problème de recalage d'images multimodales . . . . .	55
4.4.1	Introduction au problème de recalage d'images multimodales . . . . .	55
4.4.2	Détails sur les modifications de la méthode . . . . .	56
4.4.3	Résultats . . . . .	56
4.5	Conclusion . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Prédiction de surfaces dynamiques</b>	<b>61</b>
5.1	Introduction . . . . .	61
5.2	Formulation du problème de prédiction de surfaces dynamiques . . . . .	62
5.3	Recalage spatio-temporel de trajectoires . . . . .	65
5.3.1	Recalage de deux surfaces . . . . .	65
5.3.2	Recalage le long d'une trajectoire . . . . .	67
5.3.3	Recalage temporel de deux trajectoires . . . . .	70
5.4	Prédiction spatio-temporelle de trajectoires . . . . .	74
5.5	Base de données utilisée et étapes préliminaires . . . . .	76
5.5.1	Base de données . . . . .	76
5.5.2	Normalisation de la pose . . . . .	77
5.5.3	Paramétrisation des visages . . . . .	80
5.6	Résultats expérimentaux . . . . .	80
5.6.1	Moyenne d'expression . . . . .	81
5.6.2	Prédiction d'expression à partir d'une surface de visage . . . . .	81
5.6.3	Prédiction d'expression à partir d'autres surfaces . . . . .	84
5.7	Conclusion . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

# Table des notations

Processus stochastiques	
$X$	Un processus stochastique
$I$	Ensemble des indices
$S$	Espace d'état
$\Omega$	Univers des possibles
$\omega$	Un résultat possible
$E$	Ensemble d'évènements
$e$	Un évènement
$P$	Mesure de probabilité
$\mu$	Fonction de moyenne
$C$	Fonction de covariance
$\tau$	Paramètre de variance de la fonction de covariance
$l$	Paramètre d'échelle de la fonction de covariance
$\nu$	Paramètre de lissage de la fonction de covariance
$\theta$	Hyperparamètre de la fonction de covariance
$\Sigma$	Matrice de covariance
$V$	Matrice d'auto-covariance
$\beta$	Matrice des observations
$L$	Fonction de vraisemblance
$q$	Loi de proposition

<b>Analyse de forme</b>	
$c$	Une courbe
$\mathcal{C}$	Espace des courbes
$\gamma_c$	Une re-paramétrisation de courbe ouverte
$\Gamma_c$	Groupe des re-paramétrisations de courbes ouvertes
$q_c$	Représentation SRVF d'une courbe
$\mathcal{Q}_c$	Espace des représentations SRVF de courbes
$\mathcal{F}_c$	Espace des formes de courbes
$\mathcal{D}$	Domaine de définition des surfaces
$s$	Une surface
$\mathcal{S}$	Espace des surfaces
$\gamma_s$	Une re-paramétrisation de surface
$\Gamma_s$	Groupe des re-paramétrisations de surfaces
$q_s$	Représentation SRNF d'une surface
$\mathcal{Q}_s$	Espace des représentations SRNF de surfaces
$\mathcal{F}_s$	Espace des formes de surfaces
$\alpha$	Une trajectoire de surfaces
$\mathcal{T}$	Espace des trajectoires de surfaces
$\gamma_{\mathcal{T}}$	Une re-paramétrisation de trajectoire de surface
$\Gamma_{\mathcal{T}}$	Groupe des re-paramétrisations de trajectoires de surfaces
$q_{\alpha}$	Représentation SRVF d'une trajectoire de surfaces
$\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$	Espace des représentations SRVF de trajectoires de surfaces

<b>Autres notations du Chapitre 3</b>	
$s_C$	Un cylindre parfait
$\psi$	Un homéomorphisme
$U$	Champ de déformation

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Contexte et problématiques

Avec l'émergence du numérique, le monde qui nous entoure est devenu de plus en plus numérisé. Cette masse de données numériques a alors amorcé l'apparition de nouvelles applications dans tous les domaines des sciences modernes. Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés dans cette thèse aux données numériques provenant de l'imagerie.

Les débuts de l'imagerie numérique sont associés à l'année 1957, avec la première image digitalisée. Les technologies se sont ensuite multipliées au cours de ces dernières années, rendant aujourd'hui courante l'utilisation de l'imagerie numérique dans de nombreux secteurs. Dans le domaine médical, il est usuel d'avoir recours à l'imagerie par résonance magnétique (IRM), aux rayons X, à l'échographie, etc. pour poser un diagnostic médical. Les images générées numériquement peuvent aussi servir de support pour des applications sur internet, telles que Google Earth ou Google Street View. De même, le cinéma ainsi que les jeux vidéo se basent sur l'imagerie numérique, que ce soit pour le rendu visuel, l'animation, ou plus récemment la réalité virtuelle. Enfin, la prolifération de l'imagerie numérique est en grande partie due à l'accessibilité des technologies d'acquisition d'images au public. Ces images peuvent être aussi bien en 2D qu'en 3D. Par extension, une séquence temporelle d'images est aussi considérée comme une image. Ainsi, les vidéos composées d'images 2D sont des images. De même, les séquences temporelles d'images 3D, aussi appelés 3D+t ou 4D, sont également des images. Aujourd'hui il existe beaucoup d'images numériques, et de nouvelles problématiques sont apparues avec ces données.

En plus de la démocratisation de l'imagerie numérique, l'évolution de l'informatique a

aussi rendu possible le stockage du nombre très important de données numériques. Bien que ces données peuvent provenir de multiples formats, nous nous sommes focalisés sur les données provenant de l'imagerie. Afin d'étudier les données numériques, de multiples outils se basant sur la statistique sont apparus. Ces études peuvent être séparés en deux domaines : l'analyse de données utilisant la statistique descriptive, et l'apprentissage automatique avec la statistique inférentielle. L'objectif de l'analyse de données est de décrire les données connues, afin de comprendre et de synthétiser ces dernières. Quant à l'apprentissage automatique, aussi appelé machine learning, il cherche à estimer une valeur inconnue en se basant sur la connaissance de données connues. En d'autres termes, l'analyse de données a un objectif de description, tandis que le machine learning a un objectif de prédiction. Grâce au développement d'outils de calculs, de plus en plus performants, des méthodes toujours plus sophistiquées se sont développées dans ces deux domaines.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes focalisés sur deux problèmes provenant de l'imagerie numérique qui visent à prédire une surface. Dans le premier cas, nous avons cherché à prédire une surface statique 3D en ne connaissant celle-ci que partiellement. En d'autres termes, nous avons cherché, à partir de la connaissance de quelques positions de la surface, à prédire l'ensemble de ses positions. Ce problème est alors appelé un problème de reconstruction de surface. Dans notre cas, cette connaissance partielle est stockée sous la forme de courbes. Un exemple de ce problème est présenté en Figure 1.1. À partir de plusieurs courbes, qui sont affichées en Figure 1.1a, nous reconstruisons la surface, dont une estimation est présentée en Figure 1.1b. Dans le second problème étudié, nous nous sommes intéressés à la prédiction d'une surface dynamique 4D, c'est-à-dire une surface 3D évoluant dans le temps. Pour ce faire, nous nous sommes basés sur l'observation d'autres surfaces dynamiques semblables, ainsi que sur la connaissance partielle de la surface dynamique à prédire, sous la forme d'une surface initiale. En d'autres termes,

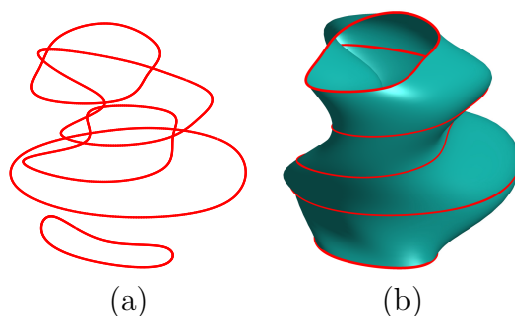


Figure 1.1: Reconstruction d'une surface à partir de courbes: (a) les courbes connues, et (b) la surface reconstruite avec les courbes.

à partir d'un ensemble de surfaces dynamiques connues (Figure 1.2a), nous cherchons à apprendre la dynamique de ces surfaces. Cette dynamique est ensuite utilisée pour prédire une nouvelle surface dynamique à partir de sa surface initiale (Figure 1.2b). Un tel exemple de prédiction est présenté en Figure 1.2c.



Figure 1.2: Prédiction d'une surface dynamique: (a) l'ensemble des surfaces dynamiques connues, (b) la surface initiale de la surface dynamique à prédire, et (c) la surface dynamique estimée.

## 1.2 Objectifs et contributions

Dans les deux problèmes développés dans la suite de ce manuscrit, nous avons cherché à prédire une surface à partir d'une information partielle. En fonction du problème, la prédiction a été soit uniquement spatiale, soit à la fois spatiale et temporelle. Ces travaux ont conduit à trois contributions majeures, qui peuvent être catégorisées de la manière suivante :



- **Reconstruction de surface à partir de courbes** : nous avons proposé une nouvelle approche de reconstruction de surface à partir d'une connaissance partielle de la surface sous la forme de courbes. Cette approche consiste à déformer une surface synthétique pour former la surface reconstruite. Pour cela, nous avons estimé cette déformation en deux temps. Tout d'abord, une correspondance entre les courbes connues et la surface synthétique est générée à l'aide d'outils d'analyse de forme. Dans un second temps, en considérant cette déformation comme un champ, nous avons estimé la déformation complète de la surface synthétique en utilisant les champs aléatoires gaussiens. En appliquant ce champ de déformation sur la surface synthétique, nous avons été capables d'obtenir une bonne estimation de la surface à reconstruire.
- **Analyse spatio-temporelle de surfaces dynamiques** : avant de pouvoir effectuer une prédiction efficace d'une nouvelle surface dynamique, une analyse des surfaces dynamiques 4D connues a tout d'abord été nécessaire. En effet la nature des surfaces, que ce soit au sein d'une même surface dynamique ou entre deux surfaces dynamiques distinctes, pouvant être différente, une analyse spatiale des différentes surfaces composant les surfaces dynamiques est indispensable pour assurer une prédiction de meilleure qualité. De la même manière, deux surfaces dynamiques pouvant évoluer dans le temps à des vitesses distinctes, une analyse temporelle est aussi nécessaire. Afin de résoudre ces deux problématiques, nous avons tout d'abord utilisé des outils déjà existants pour analyser les surfaces. Dans un second temps, nous avons adapté des outils d'analyse de forme pour analyser temporellement les surfaces dynamiques. Ainsi, cette nouvelle méthodologie a permis de faire une analyse spatio-temporelle de surfaces dynamiques.
- **Prédiction d'une surface dynamique** : nous avons proposé une nouvelle approche de prédiction de surface dynamique à partir d'une surface initiale. Pour ce faire, nous avons tout d'abord considéré une surface dynamique comme une trajectoire de surfaces, ce qui revient à la considérer comme l'évolution temporelle d'une surface unique. Ainsi, prédire une surface dynamique est équivalent à prédire cette évolution, que nous appellerons par la suite dynamique. Pour ce faire, nous avons cherché à prédire sa dynamique sur l'espace des surfaces, en se basant sur l'observation d'autres surfaces dynamiques ayant un comportement similaire. Afin d'améliorer l'apprentissage de la dynamique, une analyse spatio-temporelle de ces surfaces dynamiques a tout d'abord été effectuée. Dans un second temps, les outils d'analyse de surface ont été utilisés sur la surface initiale de la surface dynamique à prédire pour assurer de meilleurs résultats. L'espace des surfaces étant un espace

linéaire, la dynamique de cette surface initiale a ensuite été prédite en utilisant des outils de régression usuels. En appliquant la dynamique prédite sur la surface initiale, la surface dynamique a alors été estimée.

Ces différents axes de recherche ont fait l'objet de plusieurs publications :

- Thomas Deregnaucourt, Chafik Samir, Anne-Françoise Yao. A Regression Model for Registering Multimodal Images. *Medical Imaging Understanding and Analysis*, p.42-47, 2016.
- Thomas Deregnaucourt, Chafik Samir, Anne-Françoise Yao. Estimation des déformations larges par champs gaussiens : application au recalage d'images. *49èmes Journées de Statistique*, 2017.
- Thomas Deregnaucourt, Chafik Samir, Anne-Françoise Yao. Inférence bayésienne pour l'estimation de déformations larges par champs gaussien : application au recalage d'image multimodales. *Conférence Nationale d'Intelligence Artificielle et Rencontres des Jeunes Chercheurs en Intelligence Artificielle*, p.19-26, 2018.

D'autres publications scientifiques ont été soumises :

- Thomas Deregnaucourt, Chafik Samir, Sebastian Kurtek, Anne-Françoise Yao. Shape-constrained Surface Reconstruction and Multimodal, Non-rigid Image Registration. *Journal of Applied Statistics*.
- Thomas Deregnaucourt, Chafik Samir, Hamid Laga, Anne-Françoise Yao. Statistical modeling and prediction of surface trajectories: application to 4D expression simulation. *Pattern Recognition Letters*.

## 1.3 Organisation du manuscrit

La suite du manuscrit est constituée de quatre parties, qui sont suivies d'une conclusion générale.

Dans le second chapitre, nous développerons les outils utilisés dans la suite du manuscrit. En outre, nous détaillerons les processus stochastiques utilisés, ainsi que les divers outils d'analyse de formes.

Le troisième chapitre présentera quelques méthodes de l'état de l'art sur les deux axes développés dans le cadre de ces travaux : la reconstruction de surface, et la prédiction

spatio-temporelle de surface dynamique.

Le quatrième chapitre sera consacré à la construction d'une nouvelle approche de reconstruction de surface cylindrique à l'aide d'un champ aléatoire gaussien.

Dans le cinquième chapitre, nous nous intéresserons au développement d'une nouvelle méthode pour la prédiction spatio-temporelle de surface dynamique.

La conclusion générale résumera les contributions ainsi que quelques perspectives qui feront l'objet de travaux futurs.

# Chapitre 2

## Notions

Afin de faciliter la lecture de la suite de ce manuscrit nous allons, dans ce chapitre, détailler les principaux outils utilisés dans les chapitres suivants. En particulier, des processus stochastiques ainsi que des outils d'analyse de forme seront utilisés. Les définitions et les propriétés importantes de ces deux notions seront alors développées.

### 2.1 Les processus stochastiques

Dans cette section, nous allons rappeler quelques notions principales sur les processus stochastiques.

#### 2.1.1 Généralités

Dans la littérature, il existe de nombreux synonymes au terme processus stochastiques tels que les processus aléatoires, les champs stochastiques ou encore les champs aléatoires.

Par définition, un processus stochastique est une collection de variables aléatoires. Cette collection est indexée par un ensemble  $I$ , qui est appelé ensemble des indices. Généralement l'ensemble  $I$  est interprété comme le temps, mais il peut aussi être interprété comme l'espace, ou encore l'espace et le temps simultanément. De plus, chacune de ces variables aléatoires est à valeur dans le même espace mathématique  $S$ , appelé espace d'état. Ainsi, un processus stochastique  $X$  est donné par :

$$\{X(t) \in S, \forall t \in I\} \tag{2.1}$$

Un tel processus est défini sur un espace de probabilité :

$$(\Omega, E, P) \tag{2.2}$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des résultats possibles, et est usuellement appelé l'univers des possibles.  $E$  est une tribu sur  $\Omega$ . Enfin,  $P$  est une mesure de probabilité, qui associe une probabilité de réalisation à chaque événement  $e \in E$ .

Il existe de nombreuses propriétés sur les processus stochastiques, mais seules celles utilisées dans les chapitres suivants seront développées par la suite. Des détails complémentaires sur ces propriétés sont donnés dans les publications de Potthoff [Pot09a, Pot09b, Pot10].

### 2.1.2 Les champs aléatoires gaussiens

Nous nous intéressons maintenant à une famille particulière de processus stochastiques, les champs aléatoires gaussiens. Dans la suite de cette section, seules les propriétés utiles à la compréhension des chapitres suivants seront développées, et nous invitons le lecteur à consulter le livre d'Adler et Taylor [AT07] pour plus de détails.

Un champ aléatoire est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses variables aléatoires  $X(t)$  suit une loi gaussienne. Par construction un champ aléatoire gaussien est représenté à l'aide d'une loi normale multivariée :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, C) \tag{2.3}$$

où  $\mu$  est la fonction de moyenne :

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mathbb{E}[X(t)], \forall t \in I \\ &= \int_{\Omega} X(t)(\omega) dP(\omega), \forall t \in I \end{aligned} \tag{2.4}$$

et  $C$  est la fonction de covariance :

$$\begin{aligned} C(t, u) &= \mathbb{E} \left[ (X(t) - \mu(t)) \overline{(X(u) - \mu(u))} \right], \forall t, u \in I \\ &= \int_{\Omega} (X(t)(\omega) - \mu(t)) \overline{(X(u)(\omega) - \mu(u))} dP(\omega), \forall t, u \in I \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec  $\overline{(X(u) - \mu(u))}$  et  $\overline{(X(u)(\omega) - \mu(u))}$  les conjugués de  $(X(u) - \mu(u))$  et  $(X(u)(\omega) - \mu(u))$ , respectivement.

Dans la littérature les champs aléatoires gaussiens sont souvent employés, car ils sont entièrement définis par  $\mu$  et  $C$ . De plus la loi de  $X(t_*)$ ,  $\forall t_* \in I$ , conditionnellement aux observations  $(X(t_0), \dots, X(t_N))$  associés aux indices  $(t_0, \dots, t_N) \in I$ , est défini par [And62] :

$$X(t_*)|_{(X(t_0), \dots, X(t_N))} \sim \mathcal{N} \left( \mu(t_*)|_{(t_0, \dots, t_N)}, C(t_*)|_{(t_0, \dots, t_N)} \right) \quad (2.6)$$

où

$$\mu(t_*)|_{(t_0, \dots, t_N)} = \mu(t_*) + \begin{pmatrix} C(t_*, t_0) \\ \vdots \\ C(t_*, t_N) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C(t_0, t_0) & \cdots & C(t_0, t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_N, t_0) & \cdots & C(t_N, t_N) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X(t_0) - \mu(t_0) \\ \vdots \\ X(t_N) - \mu(t_N) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

et

$$C(t_*)|_{(t_0, \dots, t_N)} = C(t_*, t_*) - \begin{pmatrix} C(t_*, t_0) \\ \vdots \\ C(t_*, t_N) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C(t_0, t_0) & \cdots & C(t_0, t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_N, t_0) & \cdots & C(t_N, t_N) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(t_0, t_*) \\ \vdots \\ C(t_N, t_*) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Par la suite nous nous restreindrons aux champs aléatoires gaussiens qui sont stationnaires d'ordre 2. Cette propriété est définie par les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mu(t) = \mu(t+h), \forall t, (t+h) \in I \\ C(t, u) = C(t+h, u+h), \forall t, u, (t+h), (u+h) \in I \end{cases} \quad (2.9)$$

La première condition de l'Équation 2.9 implique :

$$\mu(t) = \mu(u), \forall t, u \in I \quad (2.10)$$

De manière équivalente, la moyenne du champ gaussien  $X$  est la même en tout indice  $t \in I$ . Par abus de notation, nous notons par la suite cette moyenne  $\mu$ . Quant à la seconde condition de l'Équation 2.9, en choisissant  $h = -u$ , elle se réduit à :

$$C(t, u) = C(t-u, 0), \forall t, u \in I \quad (2.11)$$

La covariance entre deux indices  $t, u \in I$  dépend alors uniquement de  $t-u$ . Nous supposons de plus que le champ aléatoire gaussien est isotrope, c'est-à-dire que  $C$  dépend de la distance entre  $t$  et  $u$ . Par la suite nous supposerons que cette distance est la distance euclidienne  $d = \|t-u\|_2$ , et nous notons  $C(d)$  la covariance entre deux points qui sont à

une distance euclidienne  $d$ . Sous ces conditions l'Équation 2.7 se réduit à :

$$\mu(t_*)_{|(t_0, \dots, t_N)} = \begin{pmatrix} C(\|t_* - t_0\|_2) \\ \vdots \\ C(\|t_* - t_N\|_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C(0) & \cdots & C(\|t_0 - t_N\|_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\|t_N - t_0\|_2) & \cdots & C(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X(t_0) \\ \vdots \\ X(t_N) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Ainsi, pour définir la loi de  $X(t_*)$ ,  $\forall t_* \in I$  conditionnellement aux observations  $(X(t_0), \dots, X(t_N))$ , seule l'estimation de la fonction de covariance  $C$  est nécessaire. Afin de pouvoir l'estimer, nous allons supposer que celle-ci est paramétrique. Dans la littérature il existe de nombreuses classes de fonctions de covariance [WR06], dont quelques-unes sont listées ci-dessous.

- Fonction de covariance exponentielle :

$$C_{\tau, l}(d) = \tau \exp(-d l), \quad \tau, l \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.13)$$

- Fonction de covariance gaussienne :

$$C_{\tau, l}(d) = \tau \exp\left(-\frac{d^2 l^2}{2}\right), \quad \tau, l \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.14)$$

- Fonction de covariance rationnelle quadratique :

$$C_{\tau, l, \nu}(d) = \tau \left(1 + \frac{d^2 l^2}{2\nu}\right)^{-\nu}, \quad \tau, l, \nu \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.15)$$

- Fonction de covariance de Matérn :

$$C_{\tau, l, \nu}(d) = \tau \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (d l)^\nu K_\nu(d l), \quad \tau, l, \nu \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.16)$$

où  $K$  est la fonction de Bessel modifiée de second ordre, et  $\Gamma$  est la fonction Gamma.

Stein [Ste99] a expliqué que le degré de lissage joue un rôle important sur la qualité d'interpolation d'un champ aléatoire. Au contraire des autres fonctions de covariance, Matérn a un degré de lissage qui dépend de son paramètre  $\nu$ , ce qui le rend plus adaptatif que les autres. Ainsi, nous utiliserons cette classe de fonctions de covariance dans le Chapitre 4, qui traite du problème de reconstruction de surface à partir de courbes. De plus, cette classe est une généralisation de fonctions de covariance utilisées majoritairement en statistique spatiale : les fonctions de covariance exponentielle et gaussienne, pour  $\nu = 0.5$  et  $\nu = \infty$ , respectivement.

## 2.2 Analyse de forme

Dans les Chapitres 4 et 5, qui concernent les contributions effectuées au cours de cette thèse, des outils d'analyse de forme ont été utilisés. Nous allons alors, dans cette section, développer ces outils.

### 2.2.1 Les débuts de l'analyse de forme

Les premiers travaux sur l'analyse de forme sont attribués à D'Arcy Thompson. Dans son livre *On Growth and Form* [Tho42], il a introduit la correspondance entre la forme de plusieurs objets ayant la même 'nature' en appliquant des transformations géométriques. Ces transformations correspondent à un changement de coordonnées, et permettent de mettre en évidence que des objets sont similaires. Un exemple de changement de coordonnées permettant de mettre en correspondance deux espèces de poissons, extrait de ce même livre, est présenté en Figure 2.1.

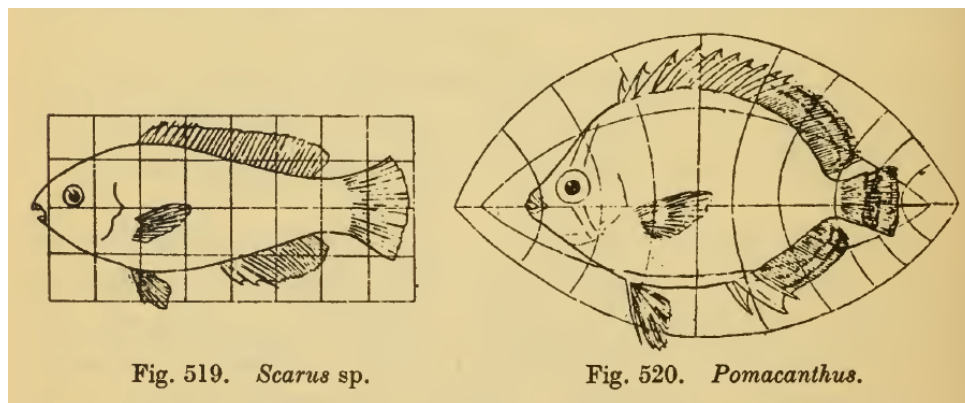


Figure 2.1: Exemple d'analyse de forme: changement de système de coordonnées permettant de faire correspondre deux poissons. *Source: On Growth and Form* [Tho42]

Bien que D'Arcy Thompson ait mis en évidence que plusieurs objets peuvent avoir la même forme, la première définition de forme permettant d'analyser la forme de courbes a été donnée par Kendall [Ken84]. Il définit la forme comme étant ce qu'il reste lorsque les différences qui peuvent être attribuées aux translations, rotations, et changements d'échelle uniforme ont été quotientées. En d'autres termes, la forme doit être invariante à ces transformations. Ainsi, deux courbes qui représentent le même objet pourront être distinctes si nous nous intéressons uniquement à analyser les courbes, mais seront correctement quantifiées comme étant la même forme dans le cas de l'analyse de forme. Dans la Figure 2.2, plusieurs courbes différentes sont représentées, mais nous remarquons



que c'est le même objet à rotation et changement d'échelle près. Ainsi, toutes ces courbes ont la même forme, celle d'une souris.

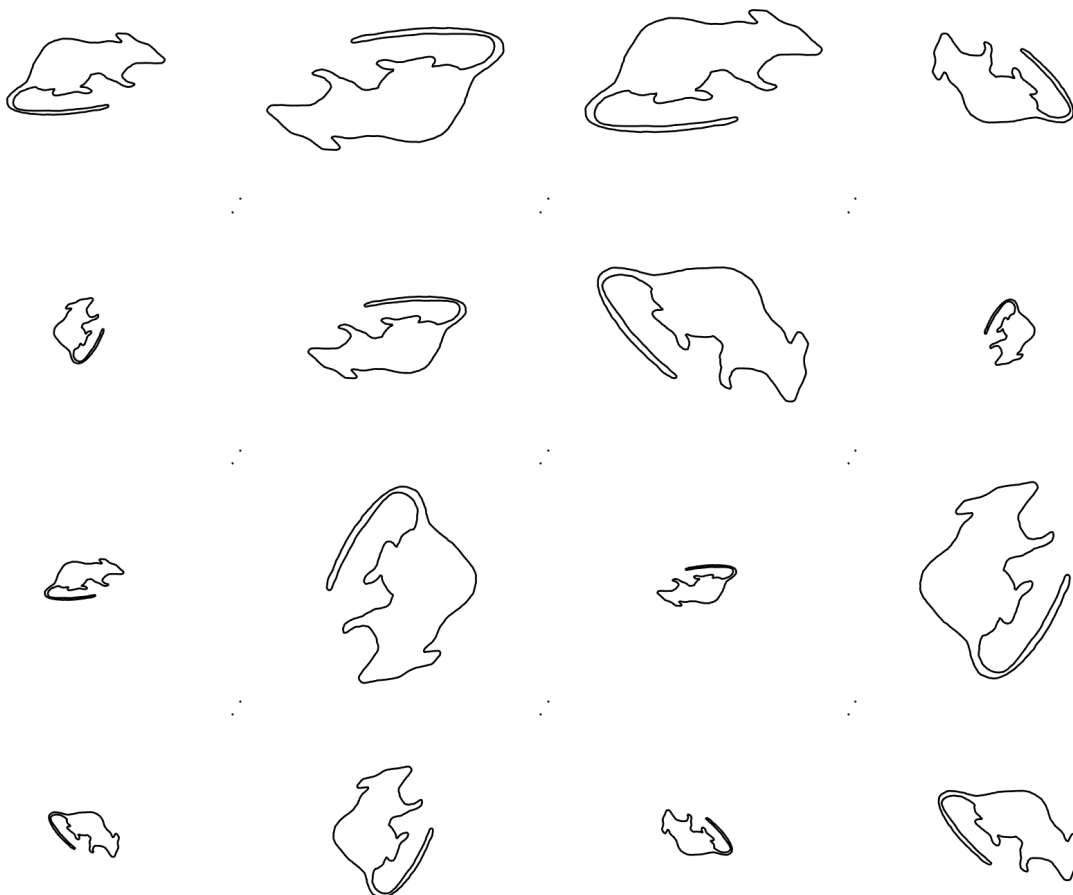


Figure 2.2: Exemple de courbes différentes représentant la même forme.

De multiples travaux se basent sur cette définition [LK00, KDL10, KDL18], où les courbes sont représentées par un ensemble de points d'intérêt. Dans ces travaux, une bonne correspondance entre ces points est supposée connue. Cependant, pour une même courbe, il est possible d'obtenir des points d'intérêt différents, comme présenté en Figure 2.3. Ce choix différent des points d'intérêt engendre des courbes très distinctes, qui seront par la suite catégorisées comme ayant des formes différentes alors que ce n'est pas le cas. Afin de pouvoir surmonter ce problème nous allons par la suite paramétriser nos courbes. Cependant une courbe peut être paramétrisée de multiples manières, comme présenté en Figure 2.4 dans le cas d'une courbe représentant une souris. Afin de visualiser

ces paramétrisations, la même discrétisation de ces courbes a été effectuée. Nous remarquons à l'aide de cette discrétisation que la correspondance entre ces points n'est pas correcte, ce qui engendre le même problème que précédemment. Cependant, au contraire des points d'intérêt, il est possible de changer la paramétrisation d'une courbe. Ainsi pour analyser la forme de courbes, il est nécessaire, en plus des trois transformations rigides qui préservent la forme comme définie par Kendall, de quotienter aussi par tous les changements de paramétrisations.

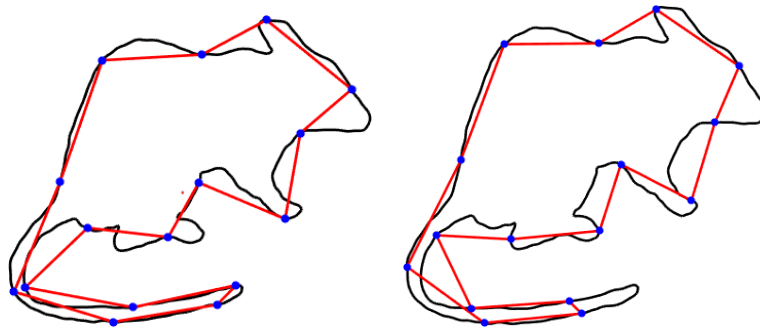


Figure 2.3: Exemple de deux discrétisations différentes de la même courbe, qui induit une erreur d'estimation de forme d'après la définition de Kendall.

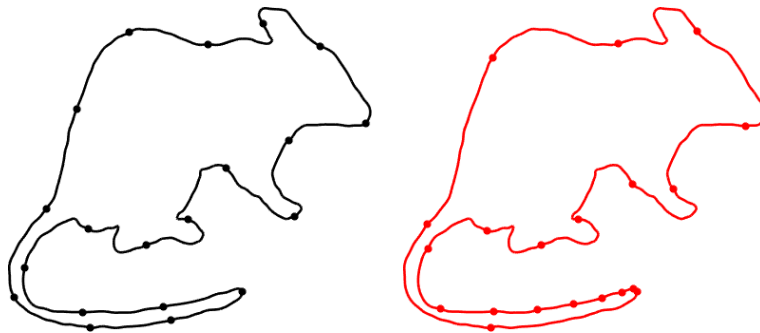


Figure 2.4: Exemple de deux paramétrisations distinctes d'une même courbe.

Dans la suite de cette section, nous allons détailler les outils d'analyse de forme utilisés dans les chapitres suivants. Cette analyse se différencie suivant l'objet que nous étudions. Dans le Chapitre 3 sur la reconstruction de surface, une analyse des formes de courbes sera nécessaire. Quant au Chapitre 4 consacré à la prédiction d'objets dynamiques, des outils sur l'analyse des formes de surfaces seront utilisés.

### 2.2.2 Analyse de forme dans le cas de courbes

Nous allons commencer par nous focaliser sur l'analyse de forme dans le cas de courbes. Afin d'aider le lecteur à une meilleure compréhension des notions développées dans la suite, nous supposons que les courbes sont ouvertes, et invitons le lecteur à consulter le livre de Srivastava [SK16] pour avoir plus de détails dans le cas de courbes fermées. Nous supposons qu'une courbe  $c$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , qui peut être paramétrisée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} c : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où généralement  $d = 2$  ou  $d = 3$  en fonction du problème étudié.

Afin de pouvoir utiliser les outils explicités plus loin dans cette partie, nous supposons de plus que les courbes sont continûment dérivables et de carré intégrable. Ainsi, l'espace des courbes  $\mathcal{C}$  est donné par :

$$\mathcal{C} = \left\{ c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid c \in C^1, \int_0^1 \|c(t)\|_2^2 dt < \infty \right\} \quad (2.18)$$

Nous munissons  $\mathcal{C}$  de la métrique  $\mathbb{L}^2$ , et la distance entre deux courbes  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$  est donnée par :

$$d_{\mathcal{C}}(c_1, c_2) = \sqrt{\int_0^1 \|c_1(t) - c_2(t)\|_2^2 dt} \quad (2.19)$$

Avant d'analyser la forme de courbes, il est nécessaire de définir mathématiquement la forme d'une courbe  $c \in \mathcal{C}$ . Pour cela, nous rappelons que le groupe des rotations, qui est le groupe spécial orthogonal  $SO(d)$ , agit sur  $\mathcal{C}$  à gauche de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (SO(d) \times \mathcal{C}) &\rightarrow \mathcal{C} \\ (O, c) &\mapsto Oc \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le groupe des re-paramétrisations, noté  $\Gamma_{\mathcal{C}}$ , est l'ensemble des difféomorphismes qui préservent l'orientation de la courbe re-paramétrisée. Ainsi,  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  est défini par :

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \{ \gamma_{\mathcal{C}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid \gamma_{\mathcal{C}}(0) = 0, \gamma_{\mathcal{C}}(1) = 1, \gamma_{\mathcal{C}} \text{ est un difféomorphisme} \} \quad (2.21)$$

D'autres groupes des re-paramétrisations étant aussi utilisés par la suite, l'indice  $\gamma_{\mathcal{C}}$  permet de préciser l'espace sur lequel le groupe agit. Dans ce cas précis,  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  agit sur  $\mathcal{C}$  à droite

comme suit :

$$\begin{aligned} (\mathcal{C} \times \Gamma_{\mathcal{C}}) &\rightarrow \mathcal{C} \\ (c, \gamma_c) &\mapsto c(\gamma_c) \end{aligned} \quad (2.22)$$

En résumé, la forme d'une courbe  $c \in \mathcal{C}$ , notée  $[c]$ , est donnée par :

$$[c] = \{aO c(\gamma_c) + b \mid a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}^d, O \in SO(d), \gamma_c \in \Gamma_{\mathcal{C}}\} \quad (2.23)$$

où  $a$  représente le changement d'échelle uniforme, et  $b$  la translation.

La distance entre deux formes  $[c_1]$  et  $[c_2]$  est alors :

$$d([c_1], [c_2]) = \inf \left\{ d_{\mathcal{C}}(a_1 O_1 c_1(\gamma_{c_1}) + b_1, a_2 O_2 c_2(\gamma_{c_2}) + b_2) \mid \begin{array}{l} a_1, a_2 \in \mathbb{R}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^d, \\ O_1, O_2 \in SO(d), \gamma_{c_1}, \gamma_{c_2} \in \Gamma_{\mathcal{C}} \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

Bien que nous ayons construit une distance entre la forme de deux courbes, elle n'est pas adaptée pour analyser efficacement la forme de courbes. En particulier, nous remarquons que  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  n'agit pas sur  $\mathcal{C}$  par isométries, c'est-à-dire que pour  $\gamma_c \in \Gamma_{\mathcal{C}}$  quelconque, on a :

$$\begin{aligned} d^2(c_1(\gamma_c), c_2(\gamma_c)) &= \int_0^1 \|c_1(\gamma_c(t)) - c_2(\gamma_c(t))\|_2^2 dt \\ &= \int_0^1 \|c_1(\tilde{t}) - c_2(\tilde{t})\|_2^2 \det(J_{\gamma_c}(\tilde{t}))^{-1} d\tilde{t} \\ &\neq \int_0^1 \|c_1(\tilde{t}) - c_2(\tilde{t})\|_2^2 d\tilde{t} \\ &\neq d^2(c_1, c_2) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $\tilde{t} = \gamma_c(t)$  est un changement de variable, et  $\det(J_{\gamma_c})$  est le déterminant de la matrice jacobienne de  $\gamma_c$ .

Cette propriété rend très difficile le calcul de la distance entre la forme de deux courbes car il serait nécessaire de trouver les deux re-paramétrisations conjointement. Dans la suite du manuscrit, nous avons décidé d'utiliser les outils d'analyse de forme basés sur la représentation Square-Root Velocity Field (SRVF) [SKJJ11, SK16]. Ces outils ont l'avantage de pouvoir calculer assez facilement une distance entre la forme de deux courbes. Afin de faciliter la lecture, seuls les points-clés nécessaires pour effectuer cette analyse seront détaillés par la suite. Nous invitons le lecteur à consulter le livre de Srivastava [SK16] pour avoir des informations complémentaires. Tout d'abord, la représentation

SRVF est définie à l'aide d'une application, noté  $h_c$ , telle que :

$$h_c : c \mapsto q_c = \begin{cases} \frac{\frac{\partial c}{\partial t}}{\sqrt{\|\frac{\partial c}{\partial t}\|_2}} & \text{si } \|\frac{\partial c}{\partial t}\|_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.26)$$

Par construction, cette représentation est invariante par translation, car elle utilise uniquement des notions de dérivée. De plus, en notant  $l_c$  la longueur d'une courbe  $c$  de représentation SRVF  $q_c$ , nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|q_c(t)\|_2^2 dt &= \int_0^1 \left\| \frac{\partial c}{\partial t}(t) \right\|_2 dt \\ &= l_c \end{aligned} \quad (2.27)$$

Il est alors aisé pour la représentation SRVF d'être invariante au changement d'échelle uniforme. En effet, en normalisant les courbes pour être de longueur constante, cette invariance est assurée. En particulier, en normalisant chaque courbe  $c \in \mathcal{C}$  de telle manière qu'elles soient de longueur unitaire, l'Équation 2.27 se réduit à :

$$\int_0^1 \|q_c(t)\|_2^2 dt = 1 \quad (2.28)$$

Nous définissons ainsi l'espace des représentations SRVF, notée  $\mathcal{Q}_C$ , par :

$$\mathcal{Q}_C = \left\{ q_c \in \mathbb{L}^2([0, 1], \mathbb{R}^d) \mid \int_0^1 \|q_c(t)\|_2^2 dt = 1 \right\} \quad (2.29)$$

En d'autres termes,  $\mathcal{Q}_C$  est l'ensemble des fonctions de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , de longueur unitaire et de carré intégrable. De manière équivalente,  $\mathcal{Q}_C$  est une hypersphère dans  $\mathbb{L}^2([0, 1], \mathbb{R}^d)$ . Il est alors naturel de munir l'espace  $\mathcal{Q}_C$  de la métrique usuelle  $\mathbb{L}^2$ . Bien que  $\mathcal{Q}_C$  ne soit pas un espace euclidien, il reste facile de calculer la distance entre deux représentations SRVF  $q_{c_1}, q_{c_2} \in \mathcal{Q}_C$ , qui est une distance géodésique sur une hypersphère. Plus précisément, cette distance est la longueur de l'arc le plus court sur le grand cercle passant par ces deux points. Cette distance est donnée par :

$$d_{\mathcal{Q}_C}(q_{c_1}, q_{c_2}) = \cos^{-1}(\langle q_{c_1}, q_{c_2} \rangle_{\mathcal{Q}_C}) \quad (2.30)$$

où

$$\langle q_{c_1}, q_{c_2} \rangle_{\mathcal{Q}_C} = \int_0^1 \langle q_{c_1}(t), q_{c_2}(t) \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \quad (2.31)$$

est le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^d$ .

Afin d'analyser la forme de courbes à partir de leurs représentations SRVF, il reste à rendre cette représentation invariante aux rotations et aux re-paramétrisations. Tout d'abord, les actions de  $SO(d)$  et  $\Gamma_C$  sur  $\mathcal{Q}_C$ , sont respectivement donnés par [SK16] :

$$\begin{aligned} (SO(d), \mathcal{Q}_C) &\rightarrow \mathcal{Q}_C \\ (O, q_c) &\mapsto Oq_c \end{aligned} \quad (2.32)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_C, \Gamma_C) &\rightarrow \mathcal{Q}_C \\ (q_c, \gamma_c) &\mapsto q_c(\gamma_c) \sqrt{\frac{\partial \gamma_c}{\partial t}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

De plus, ces deux actions commutent :

$$((O, q_c), \gamma_c) = (O, (q_c, \gamma_c)), \quad \forall q_c \in \mathcal{Q}_C, \quad \forall O \in SO(d), \quad \forall \gamma_c \in \Gamma_C \quad (2.34)$$

Ainsi, comme les actions de  $SO(d)$  et  $\Gamma_C$  sur  $\mathcal{Q}_C$  sont définis et commutent, nous pouvons définir l'espace quotient suivant :

$$\mathcal{F}_C = \mathcal{Q}_C / (SO(d) \times \Gamma_C) \quad (2.35)$$

Chaque élément de cet espace  $\mathcal{F}_C$  peut être défini à l'aide de classes d'équivalences. Plus précisément,  $[q] \in \mathcal{F}_C$  est défini par :

$$[q_c] = \{O(q_c, \gamma_c) \mid q_c \in \mathcal{Q}_C, \quad O \in SO(d), \quad \gamma_c \in \Gamma_C\} \quad (2.36)$$

Par construction,  $[q_c]$  permet d'étudier la forme d'une courbe  $c$ , car l'ensemble des transformations préservant la forme a été éliminé. De plus,  $\mathcal{F}_C$  hérite de la même métrique que  $\mathcal{Q}_C$ , c'est-à-dire la métrique  $\mathbb{L}^2$ . La distance entre deux éléments  $[q_{c1}], [q_{c2}] \in \mathcal{F}_C$  est alors construite de la manière suivante :

$$d_{\mathcal{F}_C}([q_{c1}], [q_{c2}]) = \inf_{q_{c1} \in [q_{c1}], q_{c2} \in [q_{c2}]} d_{\mathcal{Q}_C}(q_{c1}, q_{c2}) \quad (2.37)$$

Nous nous intéressons maintenant à calculer cette distance  $d_{\mathcal{F}_C}$  entre  $[q_{c1}], [q_{c2}] \in \mathcal{F}_C$ . Pour cela, il est nécessaire de trouver l'infimum de l'Équation 2.37. Ce travail est facilité par le fait que les groupes  $SO(d)$  et  $\Gamma_C$  agissent tous les deux sur  $\mathcal{Q}_C$  par isométries,

c'est-à-dire que nous avons respectivement :

$$d_{\mathcal{Q}_C}((q_{c1}, \gamma_C), (q_{c2}, \gamma_C)) = d_{\mathcal{Q}_C}(q_{c1}, q_{c2}), \quad \forall q_{c1}, q_{c2} \in \mathcal{Q}_C, \quad \forall \gamma_C \in \Gamma_C \quad (2.38)$$

et

$$d_{\mathcal{Q}_C}((O, q_{c1}), (O, q_{c2})) = d_{\mathcal{Q}_C}(q_{c1}, q_{c2}), \quad \forall q_{c1}, q_{c2} \in \mathcal{Q}_C, \quad \forall O \in SO(d) \quad (2.39)$$

Ainsi, trouver l'élément de chaque orbite qui minimise la distance sur  $\mathcal{Q}_C$ , est équivalent à fixer  $q_{c1}$  sur la première orbite  $[q_{c1}]$  et optimiser sur l'orbite  $[q_{c2}]$  uniquement. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}_C}([q_{c1}], [q_{c2}]) &\equiv \inf_{q_{c2} \in [q_{c2}]} d_{\mathcal{Q}_C}(q_{c1}, q_{c2}) \\ &\equiv \inf_{(O, \gamma_C) \in (SO(d), \Gamma_C)} d_{\mathcal{Q}_C}(q_{c1}, O(q_{c2}, \gamma_C)) \end{aligned} \quad (2.40)$$

De manière équivalente, nous cherchons la rotation et la re-paramétrisation optimale de  $q_{c2}$ , notés  $O^*$  et  $\gamma_C^*$  respectivement, telles que :

$$\begin{aligned} (O^*, \gamma_C^*) &= \operatorname{argmin}_{(O, \gamma_C) \in (SO(d), \Gamma_C)} d_{\mathcal{Q}_C}(q_{c1}, O(q_{c2}, \gamma_C)) \\ &= \operatorname{argmin}_{(O, \gamma_C) \in (SO(d), \Gamma_C)} \cos^{-1}(\langle q_{c1}, O(q_{c2}, \gamma_C) \rangle_{\mathcal{Q}_C}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Cependant, chercher l'infimum de la longueur d'arc n'est pas un problème simple. Nous allons alors chercher un problème équivalent à celui-ci, mais qui est plus simple à résoudre. En effet chercher l'infimum de la longueur d'arc est équivalent à chercher l'infimum du carré de la longueur de la corde. Nous en déduisons que :

$$(O^*, \gamma_C^*) \equiv \operatorname{argmin}_{(O, \gamma_C) \in (SO(d), \Gamma_C)} \|q_{c1} - O(q_{c2}, \gamma_C)\|_2^2 \quad (2.42)$$

Ainsi, pour pouvoir analyser la forme de courbes, il reste à minimiser ce problème. Numériquement, l'optimisation à effectuer étant une optimisation jointe, nous résolvons itérativement l'optimisation sur  $SO(d)$  et  $\Gamma_C$  jusqu'à convergence de la solution.

### 2.2.3 Analyse de forme dans le cas de surfaces

Maintenant que les outils d'analyse de forme dans le cas de courbes ont été détaillés, nous allons étudier les outils d'analyse de forme dans un cas plus complexe. Cette analyse de forme dans le cas de surfaces sera utilisée dans le Chapitre 5 de ce manuscrit. Nous supposons que chaque surface  $s$ , qui est à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , est paramétrisable suivant deux

paramètres tel que :

$$\begin{aligned} s : \mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, u) &\mapsto s(t, u) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Afin de pouvoir utiliser une méthodologie similaire à celle utilisée pour les courbes, nous supposons que les surfaces sont continûment dérivables et de carré intégrable. L'espace des surfaces, noté  $\mathcal{S}$ , est ainsi donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{ s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid s \in C^1, \int_{\mathcal{D}} \|s(t, u)\|_2^2 dt du < \infty \right\} \quad (2.44)$$

Les groupes des rotations  $SO(3)$  et des re-paramétrisations, qui sera noté  $\Gamma_{\mathcal{S}}$ , agissent sur  $\mathcal{S}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (SO(3) \times \mathcal{S}) &\rightarrow \mathcal{S} \\ (O, s) &\mapsto Os \end{aligned} \quad (2.45)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{S} \times \Gamma_{\mathcal{S}}) &\rightarrow \mathcal{S} \\ (S, \gamma_S) &\mapsto s(\gamma_S) \end{aligned} \quad (2.46)$$

où  $\Gamma_{\mathcal{S}}$  est défini par :

$$\Gamma_{\mathcal{S}} = \{ \gamma_S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \mid \gamma_S(\delta\mathcal{D}) = \delta\mathcal{D}, \gamma_S \text{ est un difféomorphisme} \} \quad (2.47)$$

avec  $\delta\mathcal{D}$  qui dénote les bords du domaine  $\mathcal{D}$ .

De la même manière que pour analyser la forme de courbes, cette représentation n'est pas adaptée pour analyser la forme des surfaces. Nous allons alors utiliser une représentation fonctionnant de manière similaire à la représentation SRVF, mais applicable aux surfaces. Cette représentation est la représentation Square-Root Normal Field (SRNF) [JKKS12, JKLS17], qui est définie à l'aide de l'application  $h_s$  tel que :

$$h_s : s \mapsto q_s = \begin{cases} \frac{\frac{\partial s}{\partial t} \times \frac{\partial s}{\partial u}}{\sqrt{\|\frac{\partial s}{\partial t} \times \frac{\partial s}{\partial u}\|_2}} & \text{si } \|\frac{\partial s}{\partial t} \times \frac{\partial s}{\partial u}\|_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.48)$$

Pour assurer l'invariance aux changements d'échelle uniforme, nous normaliserons par la



suite toutes les surfaces telles que leurs aires soient égales à 1. Par définition, l'aire d'une surface  $s$ , que nous notons  $\text{Aire}(s)$ , est donnée par :

$$\text{Aire}(s) = \int_{\mathcal{D}} \left\| \frac{\partial s}{\partial t} \times \frac{\partial s}{\partial u} \right\|_2 dt du \quad (2.49)$$

Cette aire est aussi donnée par :

$$\text{Aire}(s) = \int_{\mathcal{D}} \|q_s(t, u)\|_2^2 dt du \quad (2.50)$$

L'espace des représentations SRNF, notée  $\mathcal{Q}_S$ , est alors :

$$\mathcal{Q}_S = \left\{ q_s \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid \int_{\Omega} \|q_s(t, u)\|_2^2 dt du = 1 \right\} \quad (2.51)$$

De manière similaire à l'espace des représentations SRVF  $\mathcal{Q}_C$ ,  $\mathcal{Q}_S$  est une hypersphère dans  $\mathbb{L}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R}^3)$ , que nous munissons de la métrique  $\mathbb{L}^2$ . Pour les mêmes raisons que dans le cas des courbes, la distance entre deux représentations SRNF  $q_{s1}, q_{s2} \in \mathcal{Q}_S$  est :

$$d_{\mathcal{Q}_S}(q_{s1}, q_{s2}) = \cos^{-1}(\langle q_{s1}, q_{s2} \rangle_{\mathcal{Q}_S}) \quad (2.52)$$

où

$$\langle q_{s1}, q_{s2} \rangle_{\mathcal{Q}_S} = \int_{\mathcal{D}} \langle q_{s1}(t, u), q_{s2}(t, u) \rangle_{\mathbb{R}^3} dt du \quad (2.53)$$

En plus d'avoir une métrique et une distance de la même forme, la représentation SRNF a les mêmes avantages que la représentation SRVF pour effectuer de l'analyse de forme. En particulier, les actions de  $SO(3)$  et  $\Gamma_S$  agissent sur  $\mathcal{Q}_S$  par isométries, commutent, et sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} (SO(3), \mathcal{Q}_S) &\rightarrow \mathcal{Q}_S \\ (O, q_s) &\mapsto Oq_s \end{aligned} \quad (2.54)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_S, \Gamma_S) &\rightarrow \mathcal{Q}_S \\ (q_s, \gamma_S) &\mapsto q_s(\gamma_S) \sqrt{\det(J_{\gamma_S})} \end{aligned} \quad (2.55)$$

où  $\det(J_{\gamma_S})$  est le déterminant de la matrice Jacobienne de  $\gamma_S$ .

La forme d'une surface  $s$  de représentation SRNF  $q_s$ , qui sera notée  $[q_s]$ , est définie

par :

$$[q_s] = \{O(r, \gamma_S) \mid q_s \in \mathcal{Q}_c, O \in SO(3), \gamma_S \in \Gamma_S\} \quad (2.56)$$

où les classes d'équivalence  $[q_s]$  sont des éléments de  $\mathcal{F}_S$  :

$$\mathcal{F}_S = \mathcal{Q}_S / (SO(3) \times \Gamma_S) \quad (2.57)$$

L'espace  $\mathcal{F}_S$  héritant de la métrique  $\mathbb{L}^2$  de  $\mathcal{Q}_S$ , la distance entre  $[q_{s1}], [q_{s2}] \in \mathcal{F}_S$  est :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}_S}([q_{s1}], [q_{s2}]) &= \inf_{q_{s1} \in [q_{s1}], q_{s2} \in [q_{s2}]} d_{\mathcal{Q}_S}(q_{s1}, q_{s2}) \\ &\equiv \inf_{q_{s2} \in [q_{s2}]} d_{\mathcal{Q}_S}(q_{s1}, q_{s2}) \\ &\equiv \inf_{(O, \gamma_S) \in (SO(3), \Gamma_S)} d_{\mathcal{Q}_S}(q_{s1}, O(q_{s2}, \gamma_S)) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Enfin, de manière similaire aux optimisations dans l'espace SRVF, la rotation et re-paramétrisation optimale  $(O^*, \Gamma_S^*)$  seront obtenues à l'aide du problème équivalent suivant :

$$(O^*, \gamma_S^*) \equiv \underset{(O, \gamma_S) \in (SO(3), \Gamma_S)}{\operatorname{argmin}} \|q_{s1} - O(q_{s2}, \gamma_S)\|_2^2 \quad (2.59)$$



# Chapitre 3

## État de l'art

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes existantes dans la littérature qui s'intéressent aux problématiques étudiées. Dans un premier temps, les principales méthodes de reconstruction de surface 3D seront présentées. Puis, nous résumerons les principales méthodes de prédiction spatio-temporelle.

### 3.1 Reconstruction de surface

Le problème de reconstruction de surface consiste à déduire une surface 3D à partir d'une connaissance partielle de cette même surface. En d'autres termes, le problème est de prédire l'ensemble des positions de la surface en se basant sur cette connaissance.

Les différentes méthodes de reconstruction de surface dépendent de la nature de cette connaissance. Dans la majorité des cas, elle est composée d'un nuage de points plus ou moins dense. Ce type de données permet d'avoir des détails très précis sur la surface à reconstruire. Deux exemples de ce type de reconstruction, provenant de la base de données 3D de Stanford, sont présentés en Figure 3.1. Dans ces deux cas, on remarque que le nuage est dense, et permet de reconstruire des détails tels que le pelage du lapin ou les écailles du dragon.

Une information aussi précise n'étant pas toujours disponible, d'autres méthodes de reconstruction de surface se sont développées dans le domaine médical. En effet, il est très difficile d'avoir un nuage de points de la surface à étudier lorsque nous travaillons sur une surface anatomique. Dans cette optique, plusieurs coupes 2D de la surface sont tout d'abord générées. Une fois les courbes de la surface anatomique extraites, le problème consiste à reconstruire la surface à partir de ces courbes. Deux exemples de ce cas, provenant

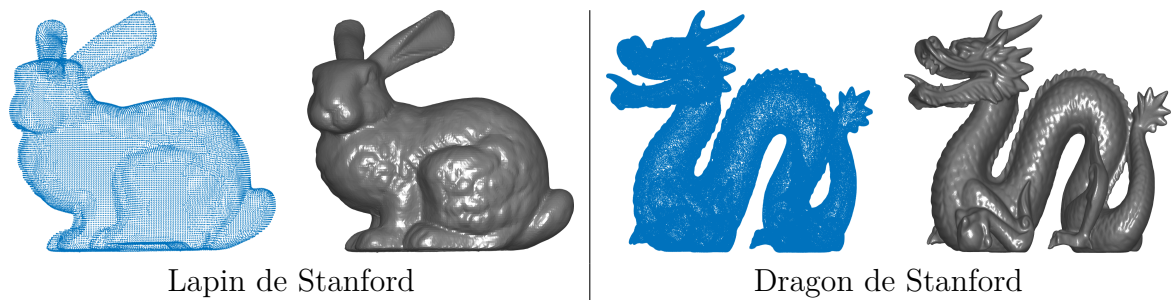


Figure 3.1: Exemples de reconstruction de surface à partir d'un nuage de points.

de l'infographie et de l'imagerie médicale, sont présentés en Figure 3.2. Au contraire des méthodes de reconstruction de surface à partir d'un nuage de points, ces méthodes ne permettent pas d'obtenir les détails de la surface à étudier mais uniquement son aspect global. Dans le problème de reconstruction de surface étudié dans le Chapitre 4, nous nous intéresserons à cette seconde catégorie de reconstruction de surface.

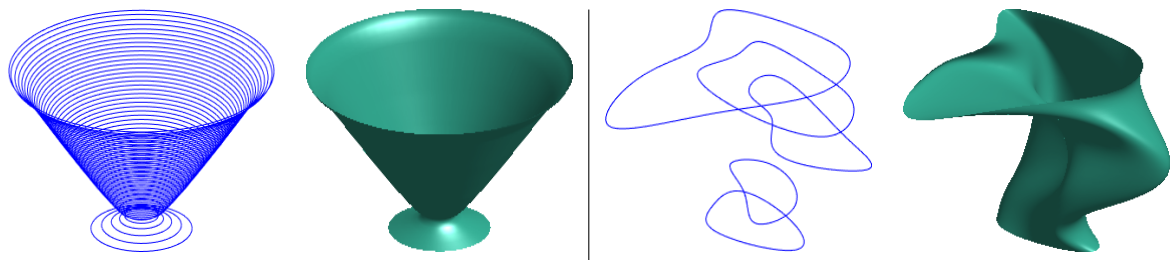


Figure 3.2: Exemples de reconstruction de surfaces à partir de courbes.

Nous allons maintenant présenter les principales méthodes de reconstruction de surface suivant les deux types de données possibles.

### 3.1.1 Reconstruction de surface à partir d'un nuage de points

Nous allons tout d'abord nous focaliser sur les méthodes de reconstruction de surface à partir d'un nuage de points.

La première catégorie d'approches provient du problème de maillage étudiée en infographie. Ce problème consiste à représenter une surface par un ensemble de polygones, qui sont le plus souvent des triangles. En trouvant une triangulation de la surface à partir du nuage de points connu, une estimation de la surface peut alors être effectuée. Pour que ces méthodes soient efficaces, il est nécessaire que le nuage de points soit dense, mais

aussi sans bruit. Dans la littérature, de nombreux algorithmes ont été proposés en se basant sur la triangulation de Delaunay, ou sur son dual, le diagramme de Voronoï [Del34]. Par simplicité, les détails de ces différents algorithmes ne seront pas détaillés dans ce manuscrit, et nous vous invitons à consulter les références pour plus d'informations sur ces algorithmes. Parmi ces nombreux algorithmes, les plus utilisés sont : l'algorithme Crust [ABK98] et son extension l'algorithme Power Crust [NM10], l'algorithme de convection géométrique Chaîne [ACA05], l'algorithme Tight Cocone [DG03], les algorithmes de type Ball Pivoting [BMR<sup>+</sup>99, AWHTG05], ou encore les algorithmes heuristiques Alpha Shape [EM94, XH03].

Une autre approche pour trianguler une surface a été proposée par Xiong et al. [XZZ<sup>+</sup>14], qui se base sur l'apprentissage par dictionnaire. Au contraire des méthodes précédentes, les sommets de la surface triangulée finale sont une combinaison linéaire d'éléments d'une base, ce qui permet à cette méthode d'être résistante au bruit ainsi qu'aux valeurs aberrantes. Les sommets et les triangles représentant au mieux la surface sont alors estimés de manière itérative.

Une autre catégorie de méthode de reconstruction de surface se basent sur les surfaces de Bézier, qui sont une généralisation des courbes de Bézier [Béz86]. Gálvez et al. [GIC<sup>+</sup>07] utilisent une surface de Bézier bicubique, où les degrés de deux courbes de Bézier composant cette surface sont estimés à l'aide d'un algorithme génétique.

De manière similaire, les B-splines, qui sont une généralisation des courbes de Bézier, peuvent aussi être utilisés pour reconstruire une surface [GR74]. Cette méthodologie a par exemple été utilisée pour la reconstruction de la surface du cœur [CZZ<sup>+</sup>10, JCX08]. Si de plus une connaissance au préalable d'une triangulation de la surface est disponible, une adaptation des B-splines, appelée Triangular B-splines [DMS92], peut être utilisée afin d'avoir une surface de meilleure qualité [PS96, HQ04].

Les Non-Uniform Rational B-splines (NURBS), peuvent aussi être utilisées pour reconstruire une surface. Pour estimer les différents paramètres, Goldenthal et Bercovier [GB04] utilisent la méthode des moindres carrés, tandis que Saeedfar et Barkeshli [SB06] se basent sur les algorithmes génétiques. Fanwen et al. [FLL10] reconstruisent la surface NURBS à l'aide d'une estimation de la courbure, utilisée pour reconstruire la surface de visages.

Afin d'interpoler des données, une méthodologie bien connue utilise les fonctions de base radiale (RBF) [Pow87]. Nous rappelons que les fonctions de base radiale sont des fonctions symétriques autour d'un centre. Suivant la fonction choisie une RBF peut avoir un grand degré de régularité. C'est par exemple le cas de la fonction gaussienne. En utilisant plusieurs centres différents ainsi qu'une combinaison linéaire de ces fonctions RBF, nous obtenons alors un réseau de fonctions de base radiale [BL88]. Ainsi, à partir d'un nuage de points, il est possible de reconstruire une surface à partir de ces réseaux RBF. Par exemple, Carr et al. [CBC<sup>+</sup>01] ont utilisé un champ scalaire signé construit par un réseau RBF, et dont le niveau zéro représente la surface. Pour estimer les poids, ils ont tout d'abord supposé la condition d'interpolation, c'est-à-dire que l'interpolation par le réseau RBF soit exacte pour l'ensemble des points connus. De plus, ils ont ajouté la condition que la somme de ces poids soit nulle. Toutefois, ce type de méthode n'est pas adapté si les données contiennent du bruit à cause de la condition d'interpolation. Afin de surpasser cette limite, une extension des réseaux RBF, les fonctions de base radiale hermitiennes (HRBF) intègrent la composante normale du nuage de points. Ainsi, les réseaux HRBF permettent de reconstruire une surface à partir d'un nuage de points bruité. En particulier, Macedo et al. [MGV11] débattent de la robustesse de cette catégorie de méthode de reconstruction de surface à partir d'une base de données 3D.

D'autres approches cherchent à effectuer une 'labellisation' pour distinguer l'intérieur et l'extérieur de la surface, permettant de définir entièrement cette dernière. Le problème est alors défini à l'aide d'une équation différentielle à résoudre, aussi appelé problème de Poisson. Par construction, ce type de méthode est une méthode de reconstruction de surface implicite, car la surface est définie implicitement à l'aide d'un système d'équations. Les premiers travaux utilisant cette méthodologie sont attribués à Kazhdan et al. [KBH06]. La méthode de résolution proposée ayant tendance à trop lisser la surface reconstruite, et donc à s'éloigner des données originelles, d'autres approches ont émergé pour corriger cet effet en ajoutant des pénalisations. Parmi ces approches, il existe celle proposée par Calakli et Taubin [CT11], ou l'approche Screened Poisson Reconstruction [KH13]. Aujourd'hui de nombreuses applications à cette catégorie de résolution sont effectuées [ZGHG10, LWCC10, BKBH09]. Ces méthodes ayant besoin d'une distance signée pour différencier l'intérieur et l'extérieur de la surface, qui est usuellement construit par le biais d'une connaissance a priori de l'orientation des points, d'autres méthodes qui ne nécessitent pas cette signature ont vu le jour. Par exemple, Mullen et al. [MdGD<sup>+</sup>10] ont utilisé une mesure de parité pour reconstruire la surface. Cette approche a par la suite été reprise et améliorée par Giraudot et al. [GCSA13], afin d'être plus résistante au bruit.

### 3.1.2 Reconstruction de surface à partir de courbes

Nous allons maintenant nous intéresser aux méthodes de reconstruction de surface à partir de courbes. Pour ce faire, les méthodes existantes considèrent une surface comme l'évolution d'une courbe unique. Les courbes connues sont alors considérées comme la connaissance de cette courbe unique à un certain niveau d'évolution, et sont appelées dans la littérature des courbes de niveau. Le problème revient ainsi à estimer une courbe à tout niveau en connaissant cette dernière à plusieurs niveaux.

Les premières méthodes de reconstruction de surface à partir de courbes ont été introduites par Osher et Sethian [OS88]. Dans cet article, les auteurs définissent une surface comme l'évolution d'un isocontour de niveau zéro dans le temps, où cet isocontour est connu à certains instants par le biais des courbes de niveau. Cette méthode implicite cherche alors à estimer la déformation de cet isocontour dans le temps à l'aide des différences finies. Pour estimer cette déformation, Zhao et al. [ZOMK00] ont proposé une fonction de coût qui se base sur la courbure moyenne, qui est ensuite optimisée à l'aide de la méthode de la descente du gradient. Pour résoudre ce problème d'optimisation, plusieurs approches physiques ont été proposées. Zhao et al. [ZOF01] ont présenté un modèle de convection, qui consiste à déformer la surface initiale en fonction de la vitesse de cette dernière. [MBW<sup>+</sup>05] ont choisi d'utiliser une équation de la chaleur pour déformer la surface. Ce modèle est appelé dans la littérature un modèle d'advection. Zhang et al. [ZZSZ13] ont proposé un modèle de réaction-diffusion, qui consiste à ajouter un bruit à chaque itération de la descente du gradient afin d'éviter la convergence vers un minimum local. Enfin Liu et al. [LWQ08] ont utilisé une autre fonction de coût, qui se sert d'un a priori sur la composante normale de la surface à reconstruire, ainsi qu'un coût de lissage.

Récemment, une autre catégorie de reconstruction de surface, basée sur l'analyse de forme de courbes a été développée. Samir et Adouani [SA19] utilisent des outils d'analyse de courbes sur les courbes connues, puis, en construisant un chemin géodésique entre ces courbes sur l'espace de forme de courbes, déduisent la surface entière. Ce chemin géodésique global a été estimé à l'aide des courbes de Bézier sur ce même espace.



## 3.2 Prédiction spatio-temporelle

Nous allons maintenant nous focaliser sur la prédiction spatio-temporelle. Couramment, la prédiction spatio-temporelle est associée à la prédiction d'un événement évoluant à la fois dans l'espace et dans le temps. Par exemple, en météorologie, nous cherchons à prédire de multiples événements telles que la pression, les vents, ou encore la position des nuages afin de prédire la météo. Ces événements se déplaçant et changeant d'intensité dans le temps, ils nécessitent bien une prédiction spatio-temporelle. De nombreuses applications nécessitent une telle prédiction, comme la prédiction des cyclones [ESF14], de la température [HHTP12], du vent [OT12], en logistique urbaine [MW11, WYZ17], et dans bien d'autres domaines [MK16, Tas18].

Dans le problème étudié en Chapitre 5, nous nous intéresserons à la prédiction spatio-temporelle d'une surface dynamique. Au contraire des problèmes usuels, la surface évoluera elle-même dans le temps, ce qui rend ce problème bien plus complexe. Un exemple d'une telle évolution est présenté en Figure 3.3, où la surface évolue par l'expression de surprise effectuée par un individu. Cette catégorie de problèmes peut être retrouvée dans l'étude de mouvements, que ce soit en animation (motion capture), en réalité augmentée (création d'avatar avec des mouvements réalistes), en robotique (étudier le mouvement d'un bras robotique dans une chaîne de fabrication), ou bien en imagerie médicale (pour étudier le cœur ou les poumons). Dans le cas où la surface est dynamique, il existe deux catégories de prédiction différentes. Tout d'abord, la première prédiction consiste à prédire une unique surface dynamique à tout instant, c'est-à-dire que nous cherchons à interpoler une seule surface dynamique en connaissant cette dernière à différents instants. Dans le second, nous cherchons à transmettre la dynamique d'une surface dynamique sur une autre surface. En d'autres termes, le problème consiste à prédire une surface dynamique en entier à partir de sa surface initiale, et d'autres surfaces dynamiques ayant le même type de dynamique. Nous nous intéresserons à ce second cas dans le Chapitre 5.

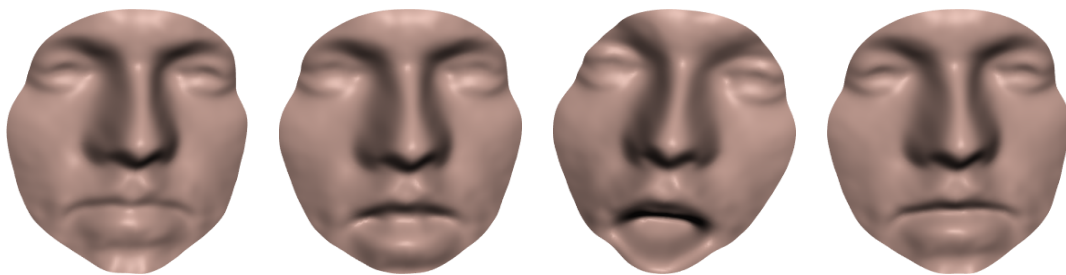


Figure 3.3: Exemple d'évolution spatio-temporelle d'une surface.

### 3.2.1 Prédiction spatio-temporelle sur une surface statique

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux principales méthodes de prédiction d'événements spatio-temporels sur une surface statique.

Cheng et Wang [CW08] ont proposé un modèle de prédiction d'événement spatio-temporel, qui utilise séparément une prédiction spatiale et une prédiction temporelle. La prédiction spatiale est générée à partir des réseaux de neurones, et la prédiction temporelle sur le modèle de série temporelle Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA). Kamarianakis et Prastacos [KP03] proposent d'utiliser des modèles ARIMA conjointement, appelé le modèle Space Time Autoregressive Integrated Moving Average (STARIMA).

D'autres modèles prennent en compte les aspects spatiaux et temporels en même temps, et non de manière indépendante comme c'était le cas précédemment. Ohashi et Torgo [OT12] proposent un modèle de prédiction des vents à court terme basé sur la connaissance du vent dans les points à estimer ainsi que ses alentours. Récemment, de multiples approches basées sur les réseaux de neurones se sont développées pour la prédiction du vent [GKH15, WWL<sup>+</sup>16, GSG17, MJD17]. Afin de modéliser des événements, Cressie et Wikle [CW15] ont proposé plusieurs modèles de fonction de covariance spatio-temporelle, utilisable pour les champs aléatoires gaussiens. Ceci permet de modéliser et de prédire un événement en tout point de la surface, et à tout instant. Cependant cette méthodologie n'est pas applicable pour la prédiction dans le cas de surfaces dynamiques, car la distance entre les points où l'évènement est connu ne doit pas varier dans ce type de modèle, ce qui n'est pas réaliste pour les surfaces dynamiques, dont la surface évolue au cours du temps.

### 3.2.2 Prédiction au sein d'une surface dynamique

Nous nous intéressons maintenant au problème de prédiction de surface au sein d'une unique surface dynamique. Dans cette optique, une connaissance de la surface dynamique est disponible à différents instants, et l'objectif est de prédire cette surface à tout instant.

L'approche utilisée dans l'état de l'art consiste à analyser la forme de ces surfaces connues. Cette approche provient de l'extension des travaux de Heeren et al. [HRWW12]. Dans ces travaux, ils utilisent des outils d'analyse de forme pour recalculer spatialement les

surfaces successives par composition, en trouvant le meilleur difféomorphisme entre les surfaces successives. À partir du chemin géodésique entre deux surfaces successives, ils en déduisent un chemin global, permettant ainsi de prédire la surface à tout instant  $t$ . Dans les travaux des Heeren et al. [HRS<sup>+</sup>14], le chemin géodésique global a été généré en concaténant les chemins géodésiques entre les surfaces successives. Cependant, cette approche générant des changements de comportement brut car le chemin n'est pas lisse, ils ont proposé une seconde approche, utilisant les B-splines sur leur espace Riemannien pour construire le chemin global [HRS<sup>+</sup>16]. Il est intéressant de noter que leur approche peut aussi être appliquée avec d'autres outils d'analyse de forme. En effet, il suffit qu'il soit possible de construire un chemin géodésique entre deux surfaces successives, comme pour la représentation SRNF par exemple [KKG<sup>+</sup>11]. Pour les surfaces triangulées, une approche similaire a été proposée [BVTH16]. Dans leur cas, ils ont supposé que les correspondances entre les surfaces successives étaient connues, et qu'il n'y avait pas de variabilité due à la rotation, la translation, ou au changement d'échelle uniforme. Ils ont tout d'abord généré les chemins géodésiques entre les surfaces consécutives, puis créé le chemin global à l'aide d'une courbe de Bézier.

### 3.2.3 Prédiction d'une nouvelle surface dynamique

Les diverses méthodes existantes pour prédire une nouvelle surface dynamique se basent sur l'estimation de l'évolution d'une ou de plusieurs surfaces dynamiques connues, qui sont considérés comme des déformations spatio-temporelles. Les méthodes transmettent ensuite une déformation sur la surface d'intérêt en se basant sur les déformations estimées.

En supposant que les différentes surfaces utilisées soient triangulées, avec une correspondance entre elles connue, Gao et al. [GLL<sup>+</sup>16] ont proposé une méthode pour transmettre un comportement. Tout d'abord, ils construisent une différence de maillage invariant à la rotation (RIMD) entre les surfaces successives d'une même surface dynamique. Ces RIMDs permettent de reconstruire la surface à tout instant à partir de la surface originale. En pondérant et appliquant les RIMDs de plusieurs surfaces dynamiques d'une même classe, ils peuvent estimer les RIMDs d'un nouvel individu, et par extension prédire une nouvelle surface dynamique. Cette approche est malheureusement peu applicable, car elle nécessite a priori à la fois les correspondances spatiales et temporelles entre les surfaces dynamiques connues.

Une autre catégorie de méthodes cherche à capturer les mouvements générés par un

être humain afin de les transmettre sur un avatar, permettant ainsi de prédire un mouvement sur celui-ci. Afin de capturer ce mouvement, il existe quatre types de méthodes. Tout d'abord, à partir de capteurs 3D posés au préalable sur l'individu, le mouvement est capturé [BAB<sup>+</sup>11, AHK<sup>+</sup>16]. Cette technologie est la principale méthode utilisée en cinématographie [Ng12, Jon15]. Deux autres méthodes, associées au tracking de vidéo, consistent, à partir d'une séquence d'images, de détecter la surface d'intérêt dans chaque image afin d'en interpoler le mouvement. Ce tracking peut être effectué sur des images chromatiques, c'est-à-dire que le tracking se base sur les couleurs [VBMP08, SPS<sup>+</sup>11], ou bien via des images de profondeur [YLH<sup>+</sup>12, WZC12]. Enfin, la dernière classe de méthodes consiste à utiliser conjointement les approches précédentes. Cette approche peut utiliser des capteurs avec une image de profondeur [VMPMR16], des capteurs avec des images chromatiques [ZSZ<sup>+</sup>14], ou bien des images chromatiques et des images de profondeur, comme c'est le cas pour la technologie utilisée dans la Kinect de Microsoft. Pour les méthodes basées sur un capteur, le mouvement est directement capturé, et il suffit de l'appliquer sur les points d'intérêt définis par les capteurs. Dans les autres cas, un squelette articulé est construit à partir de la forme extraite. En étudiant l'évolution de ce squelette, le mouvement est capturé, puis est transmis au squelette de l'avatar.

En se basant sur la technologie de capture de mouvement associé aux capteurs, des technologies semblables se sont développées pour la prédiction d'expressions du visage. À partir de ces points d'intérêt, aussi appelés Action Units (AUs), Friesen et Ekman [FE78] ont développé des points d'intérêts spécifiques à la capture des mouvements du visage, le Facial Action Coding System (FACS). En se basant sur les FACS, Pandzic [Pan03] transmet automatiquement une expression sur des visages triangulés.

Li et al. [LBB<sup>+</sup>17] décomposent une expression en trois parties. Tout d'abord, à partir d'un visage de référence, ils construisent la variation de la surface due à la forme du visage, puis la variation due à la pose, c'est-à-dire la rotation autour d'axes prédéfinis. Enfin, une dernière variation due à l'expression en elle-même est calculée. Grâce à ce modèle statistique, ils peuvent transmettre une expression donnée à partir d'une observation. Pour ce faire, ils transmettent la déformation due à la pose et à l'expression sur un nouveau visage. Bien que ce processus permette de transmettre des expressions de manière très réaliste, le fait de ne pas recalculer temporellement les expressions empêche la génération d'une nouvelle expression en se basant sur plusieurs expressions connues. De plus, le protocole utilise de nombreuses particularités associées au visage, ce qui ne le rend pas applicable à d'autres surfaces dynamiques.

Enfin, une autre catégorie d'approches de prédiction d'expressions se base sur la colorimétrie présente sur les séquences d'images. Theis et al. [TZS<sup>+</sup>16] utilisent la colorimétrie entre les images successives pour estimer la déformation. Celle-ci est ensuite appliquée au visage dont on cherche à prédire l'expression, et l'utilisation d'autres outils de colorimétrie permettent de rendre le visage visuellement naturel. Cette approche ne permet pas d'effectuer de prédiction en général. En effet, la colorimétrie n'est pas applicable dans la majorité des cas, car il n'est pas forcément possible de capturer les couleurs, comme par exemple pour les surfaces anatomiques.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux principales approches existantes de reconstruction de surfaces et de prédiction spatio-temporelle. La majorité des approches de reconstruction de surface se basent sur un nuage de points dense, qui n'est pas applicable dans le futur cas étudié. De plus, l'ensemble des méthodes qui utilisent des courbes de niveau suppose leurs surfaces comme un chemin de courbes. Une nouvelle approche n'utilisant pas cette supposition a été développée en Chapitre 4. L'état de l'art sur la prédiction spatio-temporelle ne permet pas de prédire une surface dynamique à partir de sa surface uniquement de manière générale. En effet, les méthodes existantes utilisent des conditions d'a priori très restrictives. En particulier, les méthodes supposent avoir une correspondance spatiale et/ou temporelle connue, ou utilisent des particularités de leurs données.

# Chapitre 4

## Reconstruction de surface

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de reconstruction de surface à partir d'images venant du domaine médical. Dans ce cas, une acquisition directe de l'image 3D de la surface de l'objet anatomique est impossible. De plus, les diverses technologies d'imagerie médicale, telles que l'imagerie par résonance magnétique (IRM), l'échographie, etc., ne permettent pas d'avoir une photographie 3D de la région d'intérêt. Ainsi, dans le domaine médical, le problème de reconstruction de surface se base couramment sur l'utilisation de modèles volumétriques. Cette catégorie de méthodologies est composée de trois étapes successives. Tout d'abord, de multiples images 2D, aussi appelées coupes, de l'objet anatomique sont générées sous différentes vues. Dans un second temps les images sont fusionnées pour rendre un volume 3D, c'est-à-dire une photographie 3D d'une zone où l'objet anatomique à reconstruire est inclus. Enfin, la surface de l'objet est extraite du volume 3D.

Bien que ces méthodes soient de plus en plus utilisées, il existe plusieurs problèmes associés aux modèles volumétriques. Tout d'abord, le temps d'acquisition de la collection des coupes est relativement long, ce qui peut dégrader la qualité des résultats. En effet, les mouvements involontaires liés au vivant, tels que le cœur qui bat ou encore la respiration modifient la zone où l'objet anatomique se situe. Ainsi, ces mouvements naturels génèrent du bruit sur les différentes coupes, et donc altèrent la qualité de la surface reconstruite. De plus, la qualité de la résolution des scanners 2D permettant d'obtenir les coupes limite la qualité de la surface reconstruite. En effet cette mauvaise qualité de résolution se répercute sur la qualité des coupes, puis sur la qualité du rendu volumétrique 3D, et par conséquent sur la surface reconstruite. À cause de ces problèmes, la phase de

post-traitement, qui consiste à reconstruire la surface de l'objet anatomique étudié, devient difficile et imprécise.

## 4.2 Méthodologie

Reconstruire la surface d'un objet anatomique à partir de modèles volumétriques pouvant ne pas donner de résultats d'assez bonne qualité, il est courant qu'un expert trace manuellement les bords de l'objet sur une partie des coupes 2D pour améliorer la qualité de la reconstruction. Le problème revient alors à reconstruire la surface de l'objet anatomique à partir de ces tracés, c'est-à-dire de reconstruire la surface à partir de courbes.

Ce processus est résumé à l'aide de l'exemple présenté en Figure 4.1. Tout d'abord, l'expert trace manuellement les bords de l'objet sur quelques coupes IRM 2D (Figure 4.1a). Les courbes de ces tracés sont ensuite fusionnées (Figure 4.1b) pour servir de référence à la reconstruction de la surface de l'objet anatomique (Figure 4.1c).

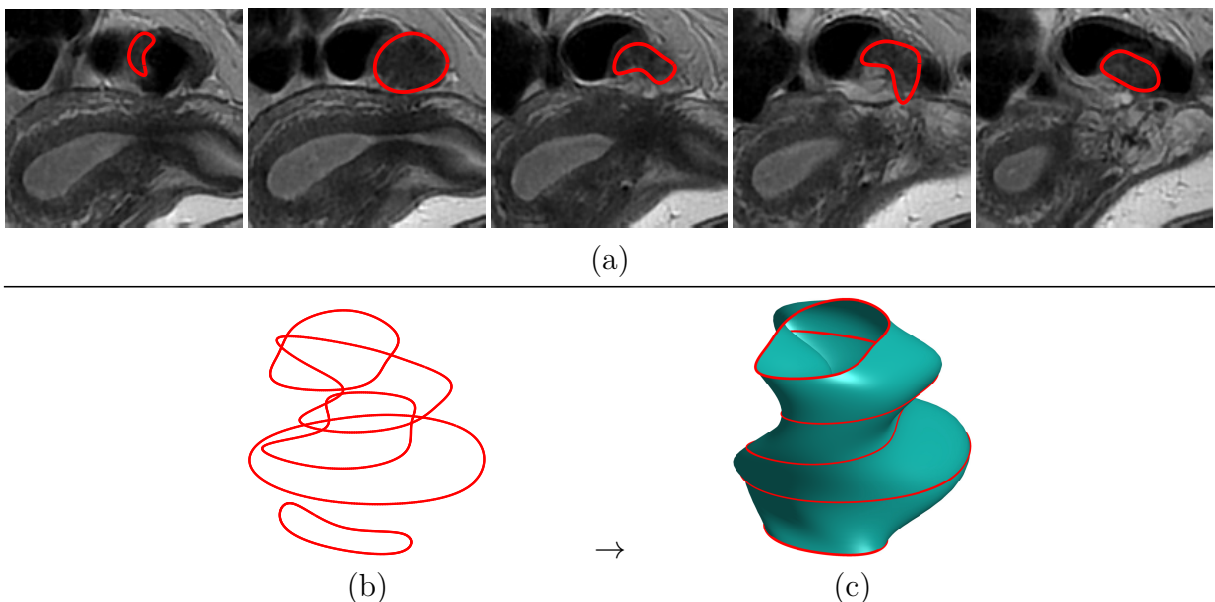


Figure 4.1: Reconstruction de surface à partir de courbes extraites de coupes IRM: (a) les coupes IRM ainsi que les courbes extraites manuellement, (b) l'ensemble des courbes extraites, et (c) la surface reconstruite à partir de ces courbes.

### 4.2.1 Reconstruction de surface cylindrique par la déformation d'un cylindre parfait

Dans la suite de ce chapitre, nous allons chercher à reconstruire des surfaces cylindriques. Par définition une surface cylindrique est homéomorphe à un cylindre parfait, dont sa base est un cercle. En d'autres termes, il existe une application bijective continue de réciproque continue entre la surface cylindrique et un cylindre parfait. Afin de reconstruire une surface cylindrique inconnue  $s$ , nous allons par la suite utiliser cette propriété. Plus précisément, nous allons chercher un homéomorphisme  $\psi$  entre le cylindre parfait  $s_C$  et  $s$  pour reconstruire cette dernière. Une fois  $\psi$  estimé, il suffira de l'appliquer en tout point de  $s_C$  pour avoir une estimation de  $s$ .

Avant de pouvoir estimer  $\psi$ , une connaissance partielle de ce dernier est tout d'abord nécessaire. Par la suite, nous considérons que l'homéomorphisme à estimer  $\psi$  est un champ de déformation de  $s_C$  vers  $s$ . Nous notons  $c_i^1, i \in \{1, \dots, N\}$  les courbes extraites par l'expert sur les  $N$  coupes IRM 2D. En supposant connu les correspondances optimales  $c_i^1$  sur  $s_C$ , qui seront notées par la suite  $c_i^2$ , il sera nécessaire d'interpoler le champ de déformation sur tout point de  $s_C$  à partir de cette information partielle. Ainsi, le problème de reconstruction de surface peut être décomposé en deux étapes :

1. Trouver les correspondances optimales de  $c_i^1 \in s$  sur le cylindre parfait  $s_C$ , notées  $c_i^2$
2. Trouver un champ de déformation optimal  $\psi$  sous la contrainte  $\psi(c_i^2) = c_i^1$

La Figure 4.2 résume la formulation proposée pour résoudre le problème de reconstruction de surface cylindriques à partir de courbes de niveau. À partir d'un cylindre parfait construit synthétiquement (Figure 4.2a), nous cherchons les correspondances optimales avec les courbes extraites par l'expert (Figure 4.2b). Une fois ces correspondances estimées, nous interpolons la déformation sur l'ensemble du cylindre parfait. Cette déformation est ensuite appliquée au cylindre afin de reconstruire la surface de l'objet anatomique d'intérêt (Figure 4.2c).

Nous pouvons remarquer que la méthode proposée comporte des similitudes avec les méthodes basées Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping (LDDMM) [DPC<sup>+</sup>14]. En effet ces méthodes cherchent à estimer la déformation entre deux surfaces à partir d'une connaissance partielle sous la forme d'un nuage de points d'intérêt, dont les correspondances doivent être connues à l'avance. Cependant, notre approche admet plusieurs avantages, la rendant plus applicable. Tout d'abord, elle ne nécessite pas de connaissance partielle sur la surface à déformer. Plus précisément, cette connaissance sera générée



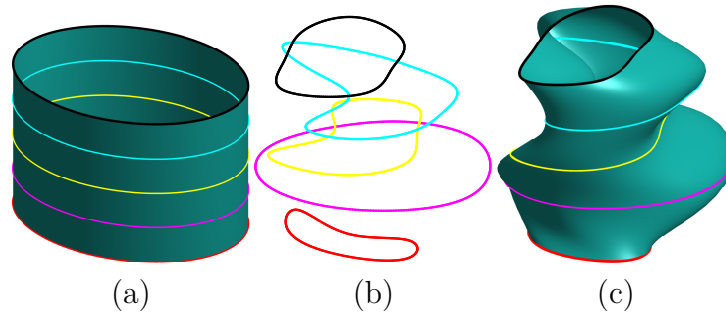


Figure 4.2: Méthodologie proposée pour la reconstruction de surface cylindrique par la déformation d'un cylindre parfait: (a) le cylindre parfait, (b) les courbes connues de la surface à reconstruire, (c) estimation de la surface reconstruite. La correspondance des courbes à chaque étape est représentée à l'aide de différentes couleurs.

automatiquement, tout en s'adaptant à l'information connue de la surface à reconstruire. Les correspondances entre les informations partielles seront aussi construites automatiquement, ce qui permet de rendre notre méthode automatique et adaptative. De plus, la méthode proposée permet une meilleure interpolation de la déformation, et la rendant plus adaptée à la surface à reconstruire. En effet, le degré de différentiabilité s'adaptera à cette surface, ce qui la rend plus efficace en général.

Pour reconstruire les surfaces cylindriques étudiées, il est nécessaire de résoudre les deux étapes décrites précédemment. Tout d'abord, pour trouver les correspondances optimales, nous allons utiliser des outils d'analyse de forme, dont le fonctionnement a été présenté en Section 2.2. Dans un second temps, afin de pouvoir interpoler  $\psi$  sur  $s_C$ , nous allons utiliser les propriétés des champs aléatoires gaussiens qui ont été résumés en Section 2.1.2.

#### 4.2.2 Correspondance entre les courbes des surfaces cylindriques et le cylindre parfait

Dans la suite de ce chapitre, nous allons chercher à reconstruire la surface d'un objet anatomique à partir de coupes générées par IRM. Dans ce type de cas, l'ensemble des coupes 2D sont produites le long d'un même axe, l'axe de la composante  $z$ . En se basant sur cette remarque nous pouvons facilement construire  $s_C$  tel que la valeur de la composante  $z$  de  $c_i^2$  soit la même que celle de  $c_i^1$ . En effet, en construisant un cylindre parfait tel que les bornes de leurs composantes  $z$  coïncident, nous définissons la courbe  $c_i^2$  comme l'intersection de  $s_C$  avec le plan  $xy$  issu de  $c_i^1$ .

Bien qu'une correspondance entre les courbes  $c_i^2$  et  $c_i^1$  a été construite, il est aussi nécessaire d'assurer les correspondances optimales sur une même courbe. Ce problème de correspondances revient à trouver les changements de paramétrisations optimales pour ces deux courbes, minimisant la distance entre elles. Comme détaillé en Section 2.2.2, ce problème est très complexe à résoudre directement. Nous allons alors utiliser alors les outils d'analyse de forme développés à partir de la représentation SRVF pour trouver ces re-paramétrisations optimales. Nous rappelons que la représentation SRVF  $q_c$  d'une courbe  $c$  est :

$$q_c = \begin{cases} \frac{\frac{\partial c}{\partial t}}{\sqrt{\|\frac{\partial c}{\partial t}\|_2}} & \text{si } \|\frac{\partial c}{\partial t}\|_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

Au contraire de l'analyse de forme, nous cherchons uniquement les re-paramétrisations optimales des courbes  $c_i^1$  et  $c_i^2$ , dont les représentations SRVF respectives sont  $q_{c_i^1}$  et  $q_{c_i^2}$ . En utilisant les propriétés sur la représentation SRVF, la re-paramétrisation optimale de  $q_{c_i^2}$ , noté  $\gamma_{c^*}$ , est donnée par :

$$\gamma_{c^*} = \operatorname{argmin}_{\gamma_c \in \Gamma_c} \left\| q_{c_i^1} - q_{c_i^2}(\gamma_c) \sqrt{\frac{\partial \gamma_c}{\partial t}} \right\|_2^2 \quad (4.2)$$

où

$$\Gamma_c = \{ \gamma_c : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid \gamma_c(0) = 0, \gamma_c(1) = 1, \gamma_c \text{ est un difféomorphisme} \} \quad (4.3)$$

Une fois cette re-paramétrisation estimée, la courbe recalée  $\tilde{c}_i^2$  de  $c_i^2$  est définie par :

$$\tilde{c}_i^2 = c_i^2(\gamma_{c^*}) \quad (4.4)$$

Cette re-paramétrisation optimale est par la suite estimée à l'aide de l'algorithme de programmation dynamique (DPA) [SK16].

Nous notons  $c^1 = \{c_i^1 \mid i \in \{1, \dots, N\}\}$  et  $\tilde{c}^2 = \{\tilde{c}_i^2 \mid i \in \{1, \dots, N\}\}$  l'ensemble des courbes recalées. Maintenant que les correspondances optimales entre  $c^1$  et  $\tilde{c}^2$  sont assurées, nous allons chercher à interpoler le champ de déformation  $\psi$  pour tout point de  $s_C$ .

### 4.2.3 Interpolation de la déformation par champ aléatoire gaussien

Dans cette partie, nous allons chercher à estimer le champ de déformation  $\psi$  sur le domaine de  $s_C$ , qui sera noté  $\mathcal{D}$ . À l'aide de la partie précédente, nous connaissons

partiellement ce champ de déformation. En effet nous avons  $\psi(\tilde{c}^2) = c^1$ . Pour effectuer cette estimation, nous allons interpoler le champ de déplacement  $U$  correspondant tel que :

$$\psi(X) = U(X) + X \quad (4.5)$$

Ainsi, nous cherchons à estimer un champ aléatoire  $U$  sous la contrainte de :

$$U(\tilde{c}^2) = c^1 - \tilde{c}^2 \quad (4.6)$$

Afin de pouvoir interpoler ce champ, nous supposons que  $U$  est un champ aléatoire gaussien, dont les fonctions de moyenne et de covariance sont respectivement  $\mu$  et  $C$ . Ainsi  $U$  est défini par :

$$U \sim \mathcal{N}(\mu, C) \quad (4.7)$$

Nous supposons de plus que  $U$  est un champ aléatoire stationnaire de second ordre et isotrope, dont les définitions ont été données en Section 2.1.2. En se basant sur le fait que la surface à reconstruire est supposée être lisse, la position d'un point de cette surface est alors corrélée à son voisinage, proportionnellement à leur distance. Ainsi, il est raisonnable de supposer que  $C$  dépend uniquement de la distance euclidienne entre deux points  $X, Y \in \mathcal{D}$ . Pour que cela soit rendu possible, il est alors nécessaire que la fonction de moyenne  $\mu$  soit constante en tout point de  $\mathcal{D}$ .  $U$  étant un champ de déplacement sur  $s_C$ , qui est construit synthétiquement, nous pouvons raisonnablement supposer de plus que  $\mu(X) = 0, \forall X \in \mathcal{D}$ .

La surface à reconstruire étant dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $U$  est un champ tri-dimensionnel. En d'autres termes, nous cherchons à estimer  $U = (U_x, U_y, U_z)$ , où  $U_j$  est le déplacement selon l'axe  $j$ . Par construction le déplacement selon l'axe  $z$  est nulle entre  $c^1$  et  $\tilde{c}^2$ . En d'autres termes nous avons  $U_z(\tilde{c}^2) = 0$ . Il est alors raisonnable de supposer que  $U_z(X) = 0, \forall X \in \mathcal{D}$ . Ainsi seules les composantes  $U_x$  et  $U_y$  du champ  $U$  restent à être estimées. Bien qu'il existe dans la littérature des modèles multivariés [GKS10, AG10, DPB15] qui permettent d'estimer ses deux composantes simultanément, nous allons par la suite estimer chacune de ses composantes de manière indépendante. Ceci revient à supposer que la déformation selon l'axe des  $x$  est indépendante de la déformation selon l'axe des  $y$ . Ainsi, au lieu d'estimer un champ de déformation  $U = (U_x, U_y, 0)$ , nous allons estimer deux champs aléatoires gaussiens tels que :

$$U_j \sim \mathcal{N}(0, C_j), j \in \{x, y\} \quad (4.8)$$

Afin de définir les champs  $U_j$ , et donc  $U$ , nous avons choisi d'utiliser la famille des fonctions de covariance de Matérn [Mat60]. Nous rappelons que cette famille est de la forme suivante :

$$C_j(d) = \tau \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (dl)^\nu K_\nu(dl)$$

où  $K$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, et  $\Gamma$  et la fonction Gamma. Généralement,  $\tau > 0$  est défini comme le paramètre de variance,  $l > 0$  le paramètre d'échelle, et  $\nu > 0$  le paramètre de lissage. Dans le cas où  $\nu = \frac{1}{2} + k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , les fonctions de covariance de Matérn se réduisent au produit d'une fonction exponentielle et d'un polynôme [GKS10] :

$$C_j(d) = \tau e^{-dl} \sum_{i=0}^k \frac{(k+i)!}{(2k)!} \binom{k}{i} (2dl)^{k-i}$$

Par la suite, nous allons nous restreindre à cette forme réduite des fonctions de covariance de Matérn.

Une fois les paramètres  $(\tau, l, \nu)$  de la fonction de covariance  $C_j$  estimés, le champ  $U_j$  est entièrement défini. De plus, comme nous avons supposé que  $U$  était un champ aléatoire stationnaire de second ordre et isotrope, les champs  $U_j$  héritent aussi de ces propriétés. En notant  $(U_j(X_1), \dots, U_j(X_M))$  le déplacement entre  $\tilde{c}^2$  et  $c^1$  selon l'axe  $j$ , nous pouvons interpoler le champ  $U_j$  en tout point  $X_* \in \mathcal{D}$  en utilisant une espérance conditionnelle. Grâce à ces suppositions l'espérance conditionnelle est donnée par l'Équation 2.12, ce qui revient à effectuer un krigeage simple [Cre15] :

$$U_j(X_*) = \begin{pmatrix} C_j(\|X_* - X_1\|_2) \\ \vdots \\ C_j(\|X_* - X_M\|_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_j(0) & \cdots & C_j(\|X_1 - X_M\|_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_j(\|X_M - X_1\|_2) & \cdots & C_j(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_j(X_1) \\ \vdots \\ U_j(X_M) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Ainsi pour estimer le déplacement en tout point  $X_* \in \mathcal{D}$ , et donc d'estimer la surface  $s$ , il suffit d'estimer les paramètres des fonctions de covariance  $C_j$ . En d'autres termes le problème d'estimation de  $s$  est équivalent au problème d'estimation des paramètres des fonctions de covariance.

#### 4.2.4 Estimation des paramètres des champs aléatoires gaussiens

Par facilité de notation, nous noterons par la suite  $\beta_j$  le vecteur de déplacement selon la composante  $j$  entre les  $M$  observations  $\tilde{c}^2$  et  $c^1$ , de matrice de covariance associée  $\Sigma_j$ ,

qui sont définies par :

$$\beta_j = \left( U_j(X_1) \quad \cdots \quad U_j(X_M) \right) \quad (4.10)$$

et

$$\Sigma_j = \begin{pmatrix} C_j(X_1, X_1) & \cdots & C_j(X_1, X_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_j(X_M, X_1) & \cdots & C_j(X_M, X_M) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

De plus, nous noterons  $\theta = (\tau, l, \nu)$  l'hyperparamètre associé aux fonctions de covariance de Matérn, que nous cherchons à estimer.

### Maximum de vraisemblance

Afin d'estimer l'hyperparamètre  $\theta$ , la première approche consiste à utiliser le maximum de vraisemblance. Nous rappelons que la vraisemblance d'une loi gaussienne multivariée est définie par la densité de cette même loi. Dans notre cas, la vraisemblance est alors définie par :

$$\begin{aligned} L(\theta | \beta_j) &= P(\beta_j | \theta) \\ &= \frac{e^{(-\frac{1}{2} \beta_j \Sigma_j^{-1} \beta_j^T)}}{(2\pi)^{M/2} \det(\Sigma_j)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Cependant maximiser la vraisemblance dans le cas d'une loi gaussienne multivariée est difficile. Nous allons alors résoudre un problème équivalent, en minimisant la log-vraisemblance négative :

$$-\ln(L(\theta | \beta_j)) = \frac{M}{2} \ln(2\pi) + \frac{M}{2} \ln(\tau) + \frac{\ln(\det(V_j))}{2} + \frac{\beta_j^T V_j^{-1} \beta_j}{2\tau} \quad (4.13)$$

où  $V_j = \Sigma_j / \tau$  est la matrice d'auto-covariance, de déterminant  $\det(V_j)$ .

Malheureusement, il n'existe pas de solution analytique à ce problème de minimisation. Ainsi, afin de trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE), nous allons utiliser des méthodes numériques itératives. Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons les résultats obtenus avec deux méthodes numériques couramment utilisées [KL85] : la méthode de la descente du gradient et la méthode de Newton. L'optimisation selon le paramètre  $\nu$  étant difficile, en particulier car nous avons supposé qu'il était de la forme  $\frac{1}{2} + k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nous estimerons ce paramètre en utilisant une validation croisée [AC10].

La famille des fonctions de covariance de Matérn ayant une structure complexe, les

méthodes itératives peuvent converger vers un minimum local de la log-vraisemblance négative, c'est-à-dire à un maximum local de la fonction de vraisemblance. Afin d'améliorer la qualité d'estimation de l'hyperparamètre, une seconde approche est proposée en utilisant l'inférence bayésienne.

### Inférence bayésienne

Le principe de l'inférence bayésienne consiste à utiliser la densité a posteriori de  $\theta$ , c'est-à-dire sa densité conditionnellement aux réalisations  $\beta_j$ , pour construire des estimateurs de l'hyperparamètre. Cette densité, notée  $\pi(\theta | \beta_j)$ , est donnée par le théorème de Bayes :

$$\pi(\theta | \beta_j) = \frac{\pi(\theta) L(\theta | \beta_j)}{\pi(\beta_j)}$$

où  $\pi(\theta)$  est la densité a priori de l'hyperparamètre, et  $\pi(\beta_j)$  la vraisemblance marginale.

Cependant il est impossible de construire algébriquement cette densité a posteriori dans notre cas. En effet, la vraisemblance a une forme trop complexe pour construire  $\pi(\theta | \beta_j)$ . Afin d'avoir une estimation de  $\pi(\theta | \beta_j)$  nous allons alors utiliser les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC), dont le principe consiste à construire une loi inconnue en l'échantillonnant. Dans la littérature il existe de nombreuses méthodes pour échantillonner efficacement une densité [HC01]. Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons l'algorithme de Metropolis-Hastings [Has70].

Nous rappelons maintenant le principe de cet algorithme. Tout d'abord la chaîne est initialisée par un état initial  $\theta_0$  sélectionné à partir d'une loi a priori  $\pi(\theta)$ . Puis, à chaque itération  $t_k$ , un candidat  $\theta_*$  est proposé à partir d'une loi de proposition  $q$ . Le candidat est accepté avec une probabilité  $p$ , qui est définie par un rapport de vraisemblance tel que :

$$p = \min \left( 1, \frac{\pi(\theta_*) L(\theta_* | \beta_j) q(\theta_{t_{k-1}} | \theta_*)}{\pi(\theta_{t_{k-1}}) L(\theta_{t_{k-1}} | \beta_j) q(\theta_* | \theta_{t_{k-1}})} \right) \quad (4.14)$$

Si ce candidat est accepté, alors  $\theta_{t_k} = \theta_*$ . Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le candidat est rejeté, alors  $\theta_{t_k} = \theta_{t_{k-1}}$ . Un pseudo-algorithme de Metropolis-Hastings est présenté en Algorithme 1.

Nous remarquons que cet algorithme est entièrement défini par loi a priori  $\pi(\theta)$  et la loi de proposition  $q$ . Ainsi, pour avoir un bon échantillonnage, il est nécessaire de choisir ces lois avec précaution. Tout d'abord, il est nécessaire que la loi  $\pi(\theta)$  respecte les contraintes de l'espace de l'hyperparamètre. De même, la vitesse de convergence ainsi que

**Algorithm 1** Metropolis-Hastings

---

```

 $\theta_0 \sim \pi(\theta)$ 
for  $t_k=1:\text{MaxIterations}$  do
   $\theta_* \sim q(\bullet | \theta_{t_{k-1}})$ 
   $p = \min \left( 1, \frac{\pi(\theta_*) L(\theta_* | \beta_j) q(\theta_{t_{k-1}} | \theta_*)}{\pi(\theta_{t_{k-1}}) L(\theta_{t_{k-1}} | \beta_j) q(\theta_* | \theta_{t_{k-1}})} \right)$ 
   $p_{test} \sim \mathcal{U}([0, 1])$ 
  if  $p_{test} > p$  then
     $\theta_{t_k} = \theta_*$ 
  else
     $\theta_{t_k} = \theta_{t_{k-1}}$ 
  end if
end for

```

---

le mélange de la chaîne de Markov dépend principalement du choix de la loi de proposition.

Une fois que la densité a posteriori  $\pi(\theta | \beta_j)$  est estimée, il reste alors à choisir un estimateur de  $\theta$ . Dans la littérature il existe trois estimateurs majoritairement employés : la moyenne, la médiane, et le maximum a posteriori (MAP), qui sont définis respectivement par les équations suivantes :

$$\hat{\theta}_{Moy} = \text{mean}(\pi(\theta | \beta_j)) \quad (4.15)$$

$$\hat{\theta}_{Med} = \text{median}(\pi(\theta | \beta_j)) \quad (4.16)$$

$$\hat{\theta}_{MAP} = \text{argmax}(\pi(\theta | \beta_j)) \quad (4.17)$$

### 4.3 Résultats expérimentaux

#### Détails sur les méthodes employées

Dans la suite de ce chapitre, nous avons discrétisé chaque courbe  $\tilde{c}_i^2$  et  $c_i^1$  en 300 points. Sur chaque courbe, 50 points uniformément distribués seront utilisés pour reconstruire la surface d'intérêt. Les 250 autres points sont par la suite utilisés pour vérifier la qualité de la surface reconstruite.

Dans les deux méthodes numériques utilisées pour estimer le maximum de vraisemblance, nous initialisons ces méthodes avec  $(\tau, l) = (100, 0.2)$ . Afin d'améliorer la convergence de ces méthodes, nous avons utilisé un pas adaptatif  $\rho$ . Ce pas est tout d'abord initialisé à  $\rho = 10$  dans le cas de la descente du gradient, et  $\rho = 0.1$  pour la méthode de Newton. Si l'itération n'améliore pas le résultat le pas est réduit de moitié, et le processus est arrêté lorsque le pas devient très petit. Nous avons par la suite choisi  $\rho < 10^{-5}$  comme

critère d'arrêt.

Concernant l'inférence bayésienne, il est nécessaire de définir la loi a priori  $\pi(\theta)$  ainsi que la loi de proposition  $q$ . Pour faciliter les calculs, nous avons tout d'abord supposé que ces lois sont séparables, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \pi(\theta) = \pi(\tau)\pi(l)\pi(\nu) \\ q(\theta) = q(\tau)q(l)q(\nu) \end{cases} \quad (4.18)$$

De plus, comme nous n'avons aucune information a priori sur la valeur de ces paramètres, nous avons utilisé des lois peu informatives. En se basant sur les diverses observations des estimateurs basés sur le maximum de vraisemblance, nous restreignons le domaine de recherche par le biais de la loi a priori. L'ensemble des lois qui nous avons choisi d'utiliser par la suite est résumé dans la Table 4.1.

Loi a priori $\pi(\cdot)$	Loi de proposition $q(\cdot \tilde{\theta})$
$l \sim \mathcal{U}[0, 1]$	$l \sim \mathcal{U}[\tilde{l} - 0.05, \tilde{l} + 0.05]$
$\tau \sim \mathcal{U}[0, 500]$	$\tau \sim \mathcal{U}[\tilde{\tau} - 50, \tilde{\tau} + 50]$
$\nu \sim \mathcal{U}[\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$	$\nu \sim \mathcal{U}[\tilde{\nu} - 1, \tilde{\nu} + 1]$

Table 4.1: Lois a priori et de proposition sur l'hyperparamètre  $\theta$ .  $\mathcal{U}[a, b]$  et  $\mathcal{U}[[a, b]]$  dénotent une loi uniforme et une loi uniforme discrète, respectivement.

Pour estimer l'hyperparamètre par inférence bayésienne, nous effectuons par la suite 100000 itérations de l'algorithme de Metropolis-Hastings. Pour améliorer la qualité de la chaîne de Markov obtenue, nous effectuons deux traitements largement utilisés [RL96] : le "burnin", et le "thinning". Le "burnin" consiste à éliminer les premières itérations obtenues pour que la chaîne commence à converger. Quant au "thinning", il consiste à prendre une fraction des itérations afin d'éliminer la corrélation entre deux itérations successives sur la chaîne finale obtenue. Dans le cadre de ces travaux, nous avons par la suite éliminé les 1000 premières itérations, puis sélectionné 1 itération sur 100.

La densité a posteriori étant trop coûteuse en temps à estimer, nous allons par la suite utiliser une densité marginale. Le paramètre  $\nu$  étant discret, la densité marginale associée ne permet pas d'avoir un estimateur. De plus, en réécrivant l'Équation 4.9 définissant



l'interpolation telle que :

$$U_j(X_*) = \begin{pmatrix} V(\|X_* - X_1\|_2) \\ \vdots \\ V(\|X_* - X_M\|_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} V(0) & \cdots & V(\|X_1 - X_M\|_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V(\|X_M - X_1\|_2) & \cdots & V(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_j(X_1) \\ \vdots \\ U_j(X_M) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

nous remarquons que  $\tau$  n'a pas d'influence directe sur l'interpolation. Ainsi, pour construire les différents estimateurs utilisant l'inférence bayésienne, nous avons sélectionné l'hyperparamètre correspondant à l'estimateur bayésien sur la densité a posteriori marginale de  $l$ .

Nous notons par la suite MLE-GD et MLE-Ne les résultats obtenus avec l'estimateur du maximum de vraisemblance estimés par les méthodes de la descente du gradient, et de Newton, respectivement. De même, MCMC-Moy, MCMC-Med et MCMC-MAP sont les résultats obtenus par inférence bayésienne avec les estimateurs de la moyenne, la médiane, et le maximum a posteriori.

### Critères de qualité

Avant de présenter les différents résultats, il nous reste à définir les critères de qualité. Tout d'abord, il est nécessaire d'avoir une faible erreur d'interpolation. Nous allons tout d'abord utiliser la racine carrée des erreurs en moyenne quadratique (RMSE) entre les points non connus dans le modèle ; si nous possédons l'information de la surface à reconstruire que sur les courbes, nous exploitons les 250 points non utilisés sur chaque courbe pour ce critère. Dans le cas contraire, nous utilisons ces points, ainsi que tous les points sur les courbes non utilisées pour la reconstruction. De plus, comme nous nous basons sur des courbes pour effectuer la reconstruction de surface, nous pouvons nous servir d'une distance entre courbes pour évaluer ce critère. Pour cela, nous avons choisi de nous baser sur la distance de Fréchet, définie par :

$$D_{Fr}(X, Y) = \inf_{\gamma_1, \gamma_2} \max_{t \in [0,1]} d(X(\gamma_1(t)), Y(\gamma_2(t)))$$

Afin de n'avoir qu'une seule valeur, nous avons utilisé la moyenne de la distance de Fréchet entre chaque courbe connue, que nous notons  $\text{mean}(D_{Fr})$ .

En plus d'avoir de faibles erreurs d'interpolation, nous souhaitons aussi que la surface reconstruite soit lisse. En effet, dans le cas de tissu médical, les surfaces réelles sont lisses. Pour quantifier ce critère, nous allons utiliser une carte du laplacien, noté  $\Delta s$ , où

le laplacien est calculé en tout point de la surface. Un laplacien faible partout indiquera alors que la surface est lisse.

Nous allons maintenant tester la méthodologie proposée sur des exemples synthétiques, avec divers degrés de complexité.

### 4.3.1 Exemples synthétiques

Nous commençons par chercher à reconstruire une sphère dont les bords ont été sectionnés, afin d'être une surface cylindrique. Nous générons tout d'abord la surface synthétique (Figure 4.3a), puis nous sélectionnons un ensemble de courbes (Figure 4.3b). Nous utilisons alors la méthodologie proposée, et présentons la surface reconstruite pour chaque méthode en Figure 4.3c. Afin de localiser les zones ayant de grandes erreurs de prédiction, l'erreur euclidienne entre la surface théorique et celle estimée est présentée dans la même figure. Les différents critères sont alors affichés, avec la carte de la norme du laplacien (Figure 4.3d), les courbures moyenne (Figure 4.3e) et gaussienne (Figure 4.3f). Nous remarquons que pour tous les estimateurs la structure globale de l'objet est conservée, et que la norme du laplacien reste faible. De plus, dans ce cas synthétique, les valeurs théoriques des courbures sont connues ; avec un rayon de  $R = 30$ , la courbure moyenne est de  $-\frac{1}{R} \approx -0.03$  et la courbure gaussienne de  $\frac{1}{R^2} \approx 0.001$ . Ces valeurs sont similaires sur les surfaces reconstruites. Concernant les critères quantitatifs, ils sont résumés dans la Table 4.2. Nous remarquons que la méthode de Newton donne dans ce cas les résultats les moins bons, malgré une bonne surface reconstruite.

	RMSE	mean( $D_{Fr}$ )	max( $\Delta s$ )	mean( $\Delta s$ )
MLE-GD	0.0883	0.0924	0.0643	0.0473
MLE-Ne	0.2577	0.2902	0.0778	0.0415
MCMC-MAP	0.1723	0.1899	0.0676	0.0420
MCMC-Moy	0.1713	0.1887	0.0675	0.0420
MCMC-Med	0.1727	0.1903	0.0677	0.0419

Table 4.2: Critères de qualité obtenus pour la reconstruction de la sphère ouverte.

Afin de vérifier la convergence de la chaîne de Markov, la Figure 4.4 présente la chaîne de Markov générée pour chaque paramètre sur les deux composantes  $U_x$  et  $U_y$  du champ de déplacement  $U$ . Dans ces deux cas, la chaîne de Markov a convergé, tout en changeant correctement d'état. les histogrammes permettant de représenter les distributions marginales

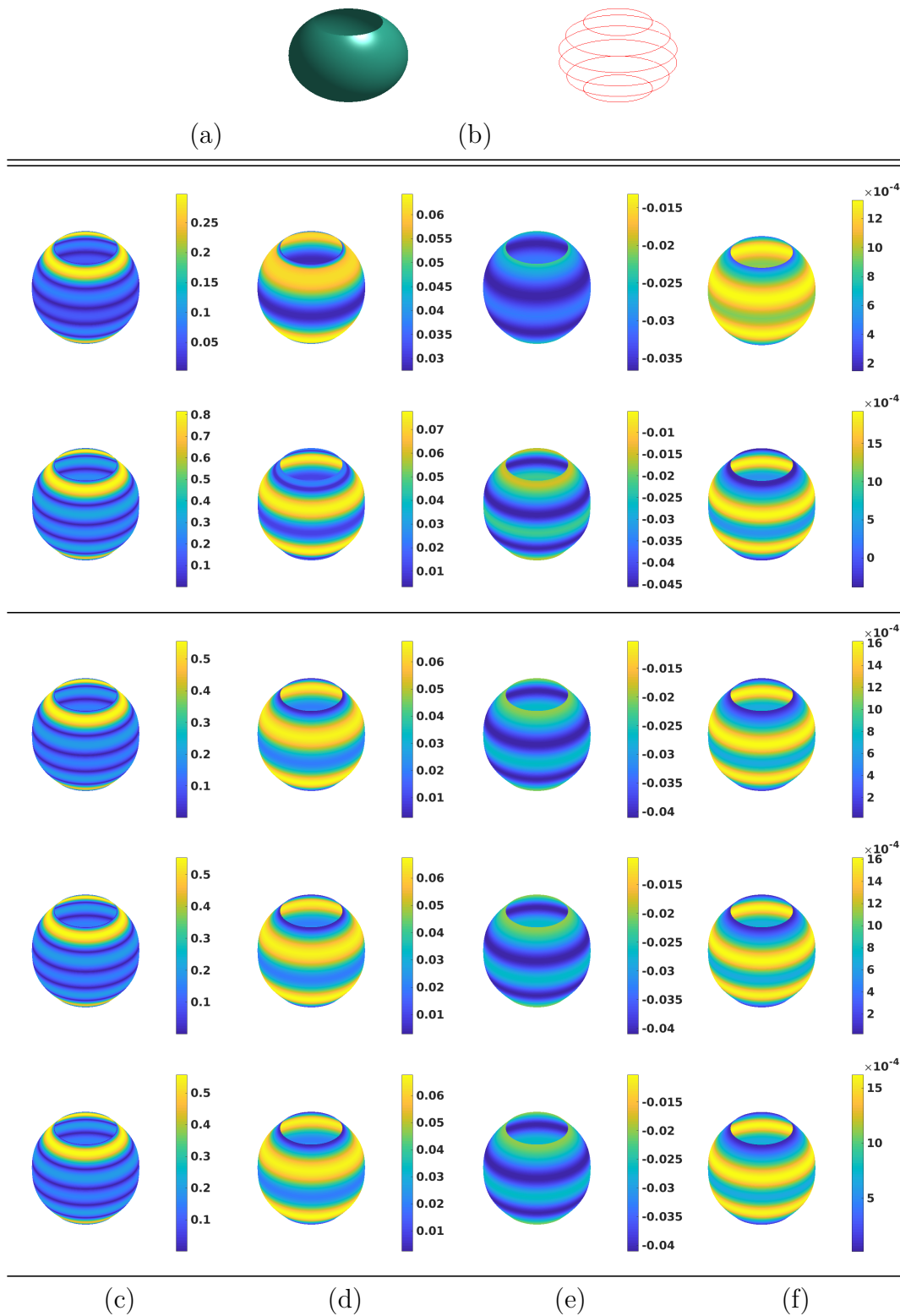


Figure 4.3: Résultats obtenus avec notre méthode de reconstruction de surface dans le cas d'une sphère ouverte (a) dont un ensemble de courbes ont été extraites (b). Les résultats de haut en bas sont ceux obtenus par: MLE-GD, MLE-Ne, MCMC-MAP, MCMC-Moy, MCMC-Med, et présentent : (c) la surface reconstruite avec la norme des erreurs, (d)  $\Delta s$ , (e) la courbure moyenne, et (f) la courbure gaussienne.

de  $\tau_x, \tau_y, l_x, l_y$  sont présentés en Figure 4.5.

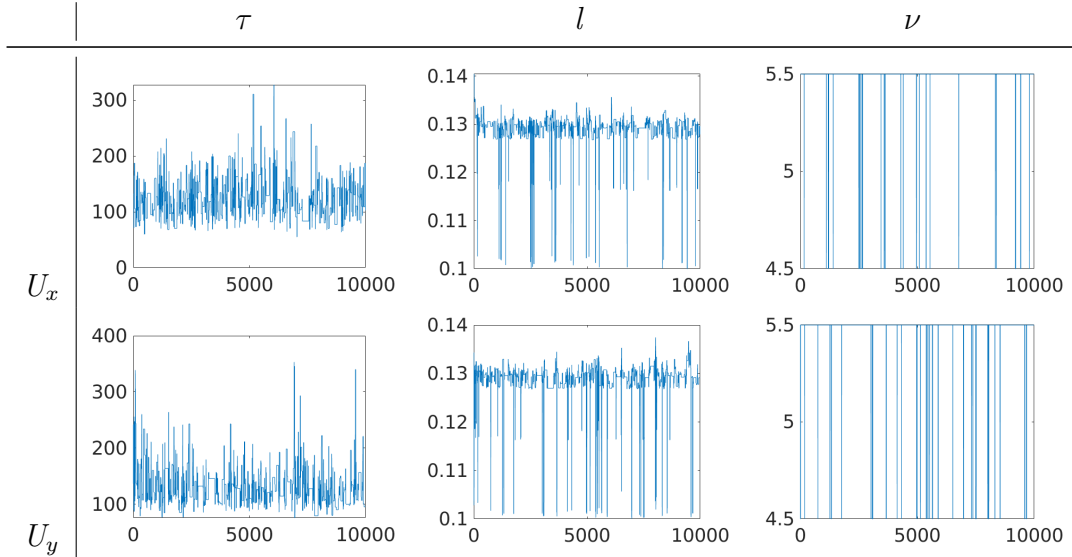


Figure 4.4: Chaines de Markov marginales obtenus sur l'exemple de la sphère ouverte.

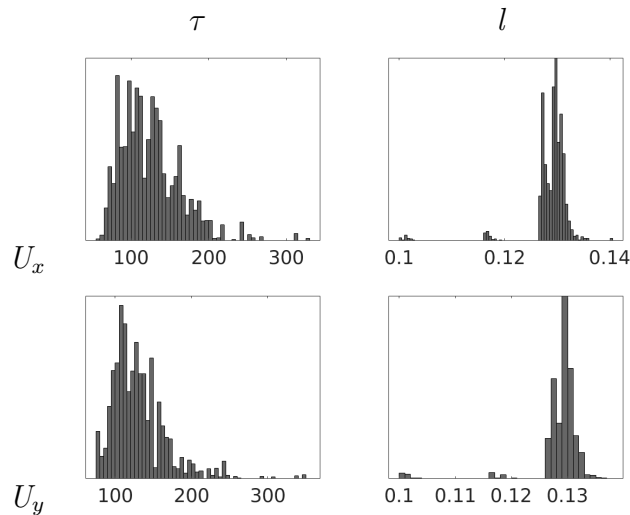


Figure 4.5: Histogramme des chaines de Markov marginales sur l'exemple de la sphère ouverte.

Pour chaque méthode utilisée, un résumé des paramètres estimé est présenté en Figure 4.3. Nous remarquons que les différents estimateurs basés sur l'inférence bayésienne ont des paramètres très similaires, hormis sur le paramètre  $\tau$  qui n'a pas d'influence sur la prédiction.

	$\hat{\tau}_x$	$\hat{\lambda}_x$	$\hat{\nu}_x$	$\hat{\tau}_y$	$\hat{\lambda}_y$	$\hat{\nu}_y$
MLE-GD	99.9013	0.0558	4.5	99.9013	0.0558	4.5
MLE-Ne	67.1429	0.1669	5.5	67.1429	0.1669	5.5
MCMC-MAP	190.1114	0.1293	5.5	136.5585	0.1293	5.5
MCMC-Moy	89.5562	0.1288	5.5	116.5122	0.1286	5.5
MCMC-Med	163.9999	0.1295	5.5	116.9064	0.1294	5.5

Table 4.3: Paramètres obtenus avec les différentes méthodes sur l'exemple de la sphère ouverte.

Dans un second temps, nous allons chercher à reconstruire un cylindre déformé aléatoirement afin de vérifier l'efficacité de l'approche proposée. Le cylindre déformé, les courbes extraites ainsi que les résultats pour chaque méthode sont présentés dans la Figure 4.6, avec le même ordre que pour la Figure 4.3. Malgré une erreur d'interpolation plus élevée que dans le cas de la sphère, la surface reconstruite est semblable à la surface réelle pour toutes les méthodes. De même, les critères quantitatifs sont résumés dans la Table 4.4. À nouveau la méthode de Newton reconstruit la surface avec une moins bonne qualité que les autres méthodes.

	RMSE	mean( $D_{Fr}$ )	max( $\Delta s$ )	mean( $\Delta s$ )
MLE-GD	0.2747	0.4459	0.1530	0.0662
MLE-Ne	0.3450	0.4539	0.1614	0.0658
MCMC-MAP	0.2486	0.4345	0.1481	0.0660
MCMC-Moy	0.2480	0.4344	0.1481	0.0661
MCMC-Med	0.2480	0.4344	0.1480	0.0661

Table 4.4: Critères de qualité obtenus pour la reconstruction du cylindre déformé.

### 4.3.2 Données réelles : domaine médical

Nous allons maintenant nous focaliser sur des exemples de reconstruction de surfaces réelles provenant de l'imagerie médicale. Plus précisément nous cherchons à reconstruire la surface de kystes de tissus à l'origine de l'endométriose à partir d'images IRM afin de faciliter le diagnostic. Dans un sous-ensemble des images IRM 2D générées, un expert a extrait au préalable les courbes délimitant la surface du kyste, dont la surface réelle est inconnue. Nous présentons les résultats obtenus avec la méthode proposée sur quatre exemples différents. Les courbes de références sont présentées en Figures 4.7a-d. Dans chaque exemple, les courbes ainsi que la surface inconnue ont une surface très complexe.

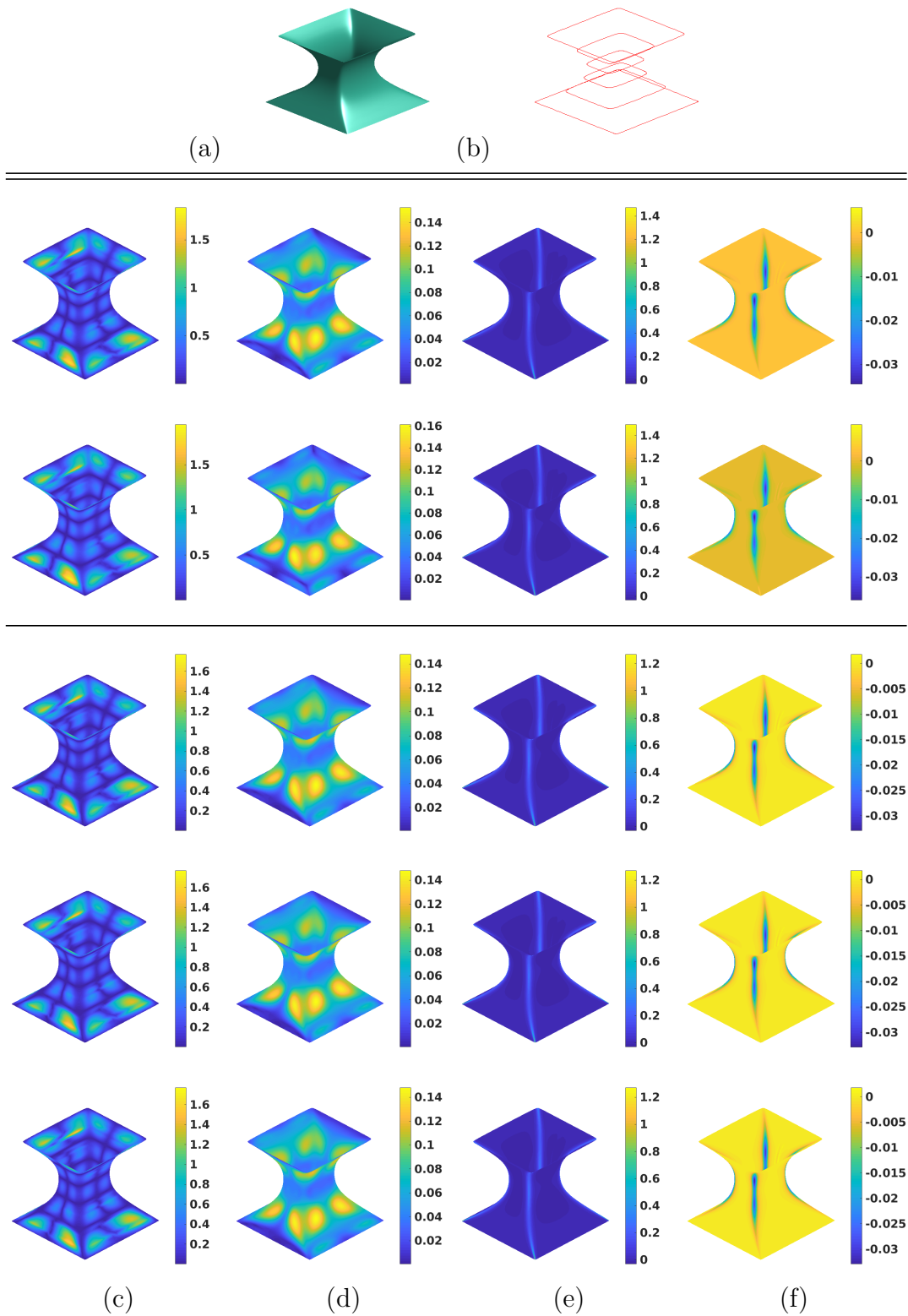


Figure 4.6: Résultats obtenu avec notre méthode pour la reconstruction d'un cylindre déformé (a) dont un ensemble de courbes ont été extraites (b). Les résultats de haut en bas sont ceux obtenus par: MLE-GD, MLE-Ne, MCMC-MAP, MCMC-Moy, MCMC-Med, et présentent: (c) la surface reconstruite avec la norme des erreurs, (d)  $\Delta s$ , (e) la courbure moyenne, et (f) la courbure gaussienne.

Les divers résultats obtenus sont présentés avec la méthode MCMC-MAP : la surface reconstruite (Figure 4.7e), le carte de la norme du laplacien (Figure 4.7f), la courbure moyenne (Figure 4.7g) et la courbure gaussienne (Figure 4.7h). La qualité de la reconstruction dans ces exemples est très bonne; en particulier, la reconstruction de surface apparaît être un kyste plausible.

Afin d'évaluer la qualité globale de la méthodologie sur des données réelles complexes, nous utilisons un ensemble de données constituant 30 kystes à reconstruire de différentes tailles. Le plus petit tissu est de taille  $[0, 22.0] \times [0, 18.4] \times [0, 9.9]$  tandis que le plus grand est de taille  $[0, 166.8] \times [0, 119.9] \times [0, 44.0]$ . La Figure 4.8 montre les boxplots de RMSE (a), moyenne de la distance de Fréchet (b), et maximum de la norme du laplacien (c) pour chacune des méthodes suivantes : (1) MLE-GD, (2) MLE-Ne, (3) MCMC-MAP, (4) MCMC-Moy, et (5) MCMC-Med. Les méthodes proposées ont à nouveau une haute précision de reconstruction (faible erreur d'interpolation), et ont l'avantage d'être lisse (faible maximum de la norme du laplacien). À nouveau la méthode de Newton donne les moins bons résultats. De plus, le MCMC-MAP a un léger avantage sur l'ensemble des critères, information qui a été confirmée visuellement sur les exemples précédents.

### 4.3.3 Données réelles : infographie

Comme les surfaces réelles sur la base de données médicales utilisées dans la section précédente sont inconnues, nous allons utiliser une autre base de données provenant de l'infographie pour vérifier la robustesse de la méthode proposée. Par la suite, nous utiliserons une base de données publique de poterie 3D [KPL<sup>+</sup>10]. Initialement, la base de données est composée de 137 modèles de poterie scannées et stockées en surfaces triangulaires 3D. Une fois alignées, nous sélectionnons 52 courbes de niveau sur chaque surface, où chaque courbe est discrétisée en 300 points. Afin d'assurer que la représentation soit cylindrique, la première et dernière courbe de niveau ont été supprimées. Le point de départ de chaque courbe a été choisi en se basant sur l'intersection entre la courbe et un demi-plan de référence. Ainsi, chaque surface initiale est représentée à l'aide de 50 courbes, dont cinq exemples sont présentés en Figure 4.9. Pour reconstruire ces surfaces, nous utilisons par la suite 11 de ces courbes présentées en rouge dans la Figure 4.9, qui sont réparties de manière équilibrée sur la surface.

L'ensemble des surfaces des poteries à estimer sont de la taille suivante :  $[-5, 5] \times [-5, 5] \times [0, 10]$ . Les résultats obtenus avec la méthode MCMC-MAP sont résumés en Figure 4.10 de manière similaire à la Figure 4.7. À nouveau la méthode proposée

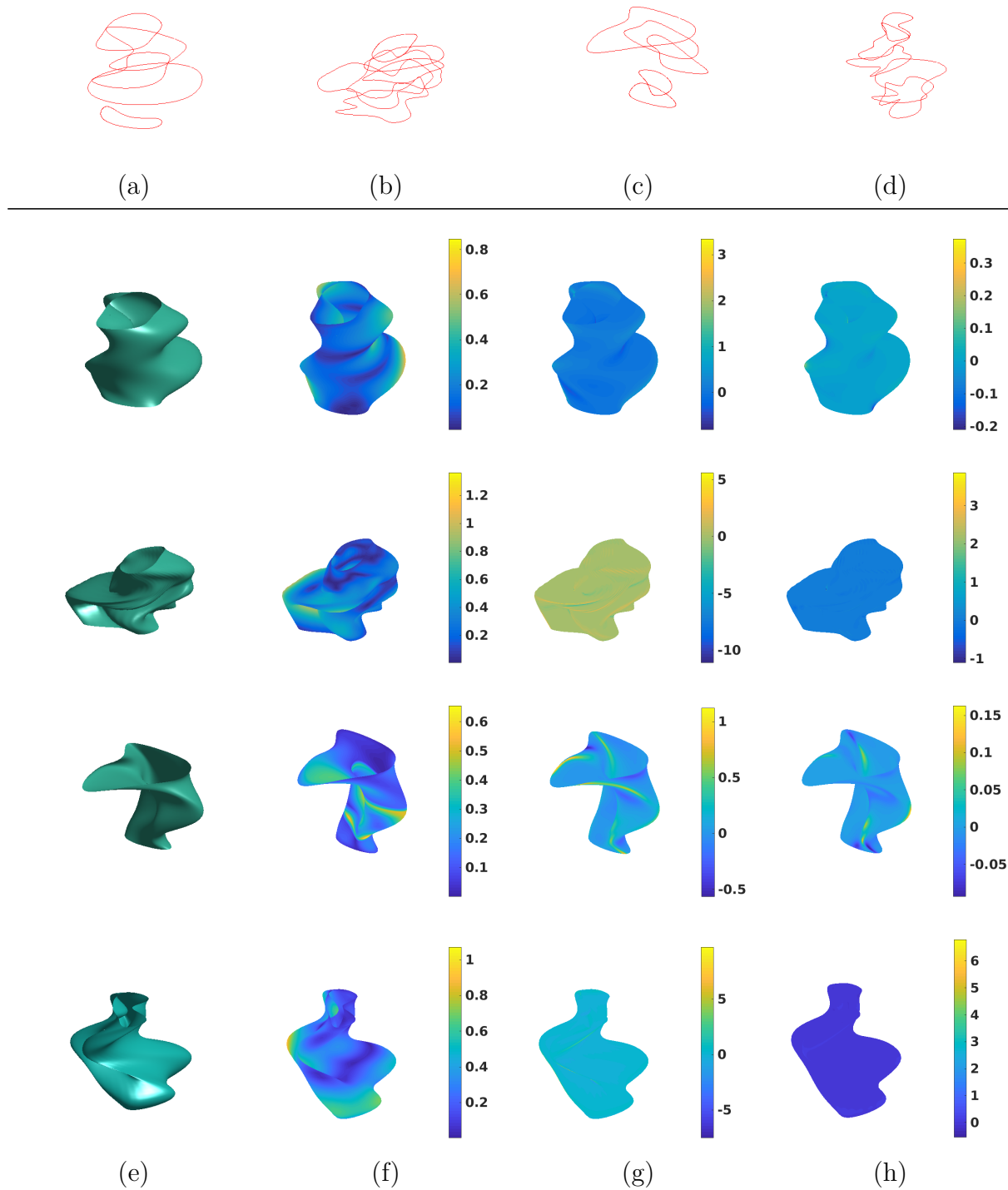


Figure 4.7: Quatre exemples de reconstruction de surface obtenus avec l'estimation de paramètres par MCMC-MAP. (a–d) présentent les courbes connues pour chaque exemple. La surface reconstruite est présentée en (e), ainsi que les différents critères de qualité : (f)  $\Delta s$ , (g) courbure moyenne, et (h) courbure gaussienne.



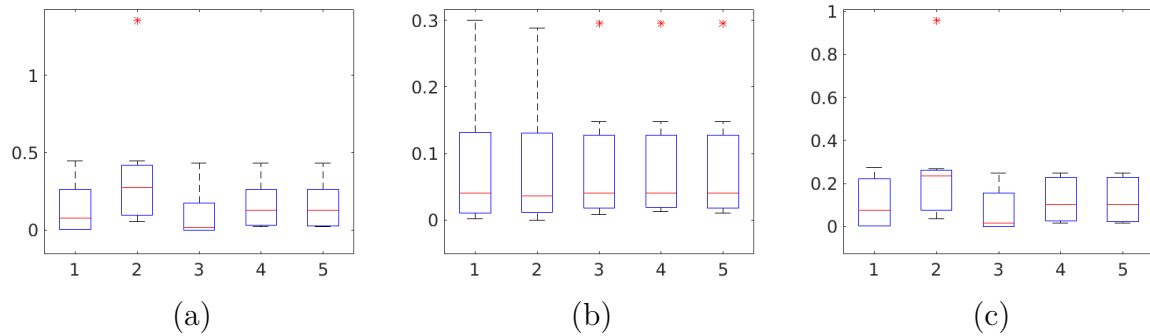


Figure 4.8: Evaluation quantitative des différentes méthodes d'estimation des paramètres sur 30 exemples de données réelles : (1) MLE-GD, (2) MLE-Ne, (3) MCMC-MAP, (4) MCMC-Moy, et (5) MCMC-Med. Pour chaque méthode, nous affichons un boxplot de la RMSE (a),  $\text{mean}(D_{Fr})$  (b), et  $\text{max}(\Delta s)$  (c).

donne des résultats très convaincants, avec une bonne précision de reconstruction ainsi qu'une surface reconstruite lisse. Nous remarquons que les méthodes basées sur l'inférence bayésienne reconstruisent les surfaces avec une meilleure qualité.

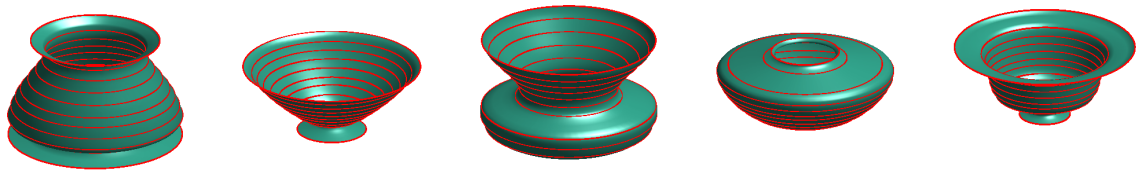


Figure 4.9: Exemples de surfaces (vert) et les courbes extraites (rouge) à partir d'une base de données de poterie 3D.

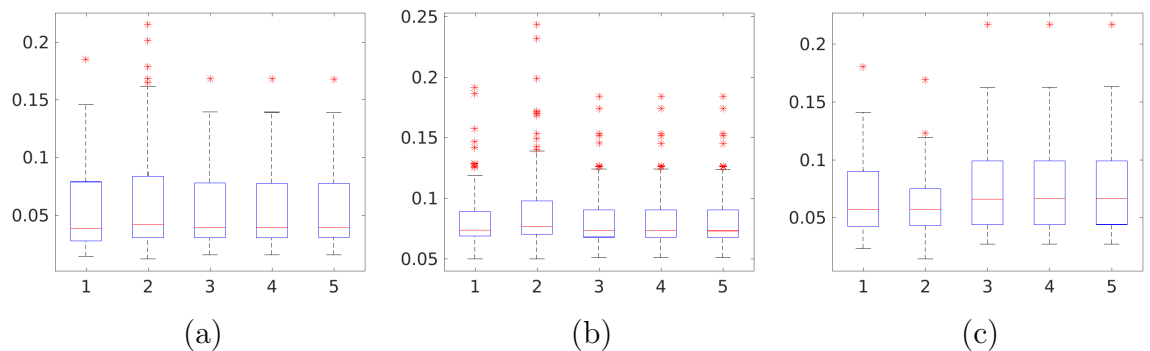


Figure 4.10: Evaluation quantitative des différentes méthode d'estimation des paramètres sur 137 modèles de poterie : (1) MLE-GD, (2) MLE-Ne, (3) MCMC-MAP, (4) MCMC-Moy, et (5) MCMC-Med. Pour chaque méthode, nous affichons un boxplot de la RMSE (a),  $\text{mean}(D_{Fr})$  (b), et  $\text{max}(\Delta s)$  (c).

#### 4.3.4 Comparaison avec l'état de l'art

Afin de comparer la méthodologie proposée avec l'état de l'art, nous nous basons sur la base de données de poterie. Par la suite, nous allons comparer notre approche avec trois méthodes utilisées en reconstruction de surface à partir de courbes de niveau : les modèles de convection [ZOF01], d'advection [MBW<sup>+</sup>05], et réaction-diffusion [ZZSZ13], dont les principes ont été détaillés en Section 3.1.2. Pour toutes les méthodes, les 11 courbes de références sont les mêmes que ceux utilisés dans la section précédente.

En ce qui concerne l'évaluation, la RMSE ainsi que la moyenne de distance de Fréchet ne sont pas applicables pour les trois méthodes de référence. En effet, il n'y a pas de correspondance naturelle entre la surface reconstruite et la surface de référence. Nous allons alors utiliser une autre distance pour évaluer la qualité d'interpolation, la distance de Hausdorff, qui est définie par :

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\right\}$$

Les résultats pour chaque méthode sont présentés en Figure 4.11, avec dans l'ordre : (1) MLE-GD, (2) MLE-Ne, (3) MCMC-MAP, (4) MCMC-Moy, (5) MCMC-Med, (6) convection, (7) advection, et (8) réaction-diffusion. Nous remarquons que pour toutes les méthodes d'estimation de l'hyperparamètre, la méthodologie proposée admet une haute précision de reconstruction dans tous les cas, et est clairement meilleure que les autres méthodes.

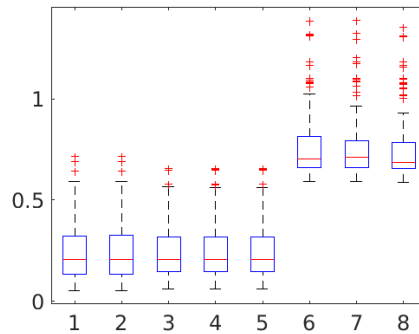


Figure 4.11: Distance de Hausdorff entre les surfaces de poterie réelles et leurs reconstructions basées sur les méthodes de: (1) MLE-GD, (2) MLE-Ne, (3) MCMC-MAP, (4) MCMC-Moy, (5) MCMC-Med, (6) convection, (7) advection, et (8) réaction-diffusion.

Enfin, afin de montrer la qualité de résultats obtenus avec l'approche développée

dans ce chapitre, nous présentons trois résultats de reconstruction de surface en utilisant l'approche MCMC-MAP en Figure 4.12. La première ligne présente tout d'abord les meilleurs résultats (distance de Hausdorff la plus faible dans le boxplot (3) de la Figure 4.11 : 0.0614), la seconde les résultats médian (distance de Hausdorff : 0.2066), et la troisième ligne les moins bons résultats (distance de Hausdorff : 0.6571). Pour chaque ligne, la surface réelle (Figure 4.12a) est d'abord présentée, puis la surface reconstruite en utilisant l'approche MCMC-MAP (Figure 4.12b). Enfin, une évaluation des erreurs produites lors de la reconstruction de surface est présentée à l'aide de l'erreur euclidienne en Figure 4.12c. Nous remarquons que les plus grandes erreurs, telles que la région jaune dans la troisième ligne de la Figure 4.12c correspondent à une zone où la surface a une grande variabilité géométrique. Cette variabilité n'est pas facilement capturée avec les courbes connues, ce qui explique une plus grande erreur d'interpolation dans cette zone.

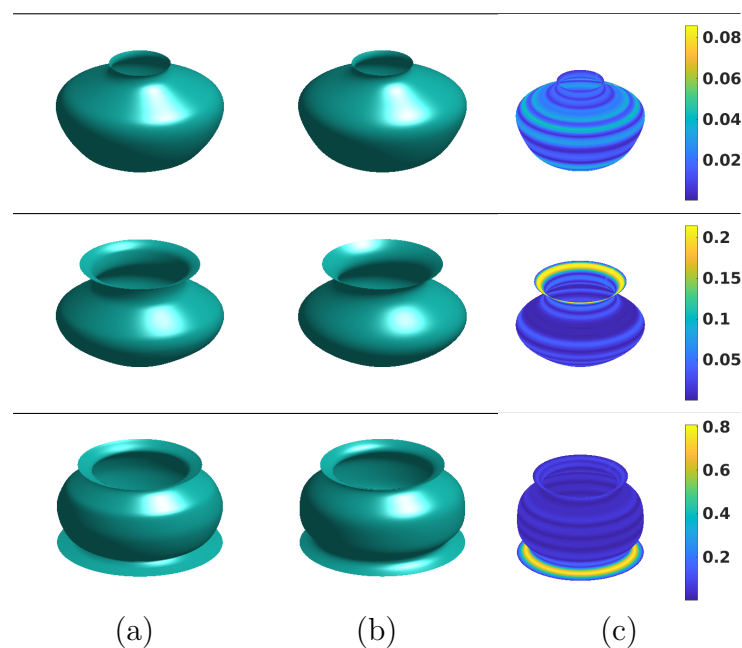


Figure 4.12: Trois exemples de surfaces de poterie reconstruites avec notre méthode en utilisant MCMC-MAP. Les meilleurs résultats (plus petite distance de Hausdorff) sont présentés dans la première ligne, les résultats médian dans la seconde, et les pires résultats dans la troisième. Pour chaque exemple, nous affichons la surface originale (a), la surface reconstruite (b), et la distance Euclidienne entre les deux surfaces (c).

## 4.4 Extension de la méthodologie utilisée : application au problème de recalage d'images multimodales

### 4.4.1 Introduction au problème de recalage d'images multimodales

Le recalage d'images vise à estimer la transformation d'une image source  $I_2$  vers une image cible  $I_1$ , soumise à certaines contraintes, pour fusionner leurs informations complémentaires. Le recalage d'images est utilisé dans de multiples domaines d'application [RWW<sup>+</sup>02, TXC<sup>+</sup>17, APV15]. Dans le domaine de l'imagerie médicale, le recalage d'images est utilisé pour détecter des maladies, comparer les données du patient avec des atlas anatomiques, valider un traitement, etc. [SDP12]. Cette estimation de la déformation peut être basée soit sur les niveaux d'intensité des images, soit sur des caractéristiques géométriques, soit sur les deux [SDP12, Roh01]. Dans le premier cas, nous cherchons une transformation conservant la correspondance entre les niveaux de gris, et dans le second la correspondance entre des points, des courbes, etc.

Dans cette section, nous nous intéressons au problème d'endométrie. Le kyste composé d'endomètre pouvant pénétrer dans d'autres tissus et organes, il est courant d'utiliser plusieurs modalités d'images, qui donnent des informations complémentaires, afin de faciliter la détection de celui-ci. Plus précisément, l'imagerie par résonance magnétique (IRM) donne une position précise des kystes, tandis que l'échographie permet d'avoir une estimation de l'infiltration de l'endomètre dans d'autres tissus [CBP<sup>+</sup>11]. La fusion des données IRM/échographie permet alors d'avoir un diagnostic précis, mais nécessite un recalage entre ces deux modalités.

Par la suite, les deux images  $I_1$  et  $I_2$  représentent respectivement l'IRM et l'échographie autour d'un même organe. Cependant, comme le montre la Figure 4.13, les modalités d'images ont des distributions d'intensités différentes, ce qui rend inefficace les méthodes de recalage basées sur les intensités. De plus un spécialiste peut extraire le contour des organes présents dans les deux images. Ainsi le problème consiste à estimer une déformation  $\psi$  entre  $I_1$  et  $I_2$ , en se basant sur la connaissance partielle de cette déformation par le biais des courbes extraites manuellement par l'expert. Le problème peut alors être résolu de manière analogue à ce que nous avons présenté dans la Section 4.2.

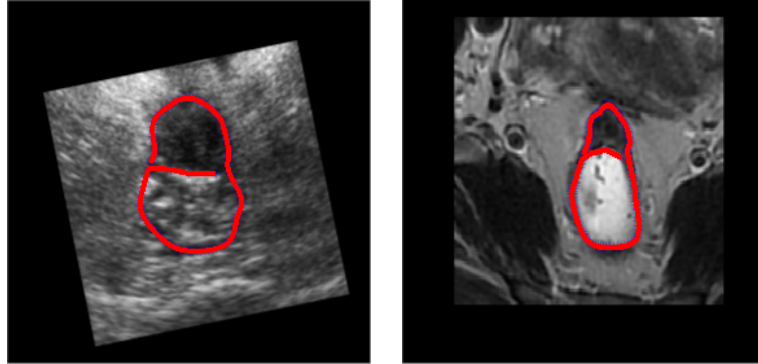


Figure 4.13: Exemple de courbes extraites manuellement issues d'images multimodales représentant le même organe : échographie à gauche et IRM à droite.

#### 4.4.2 Détails sur les modifications de la méthode

Contrairement au problème de reconstruction de surface, la déformation  $\psi$  est une fonction de  $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$  vers lui-même. De plus,  $\psi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  au lieu de  $\mathbb{R}^3$  comme précédemment, tout comme le champ de déplacement à estimer résultant  $U$ . En notant  $c_i^1$  et  $c_i^2$  les courbes manuellement extraites par l'expert sur  $I_1$  et  $I_2$  respectivement, nous remarquons que nous avons les mêmes contraintes que pour le problème de reconstruction de surface, c'est-à-dire que  $\psi(c_i^2) = c_i^1$ .

À nouveau, nous estimerons par la suite  $U$  à l'aide de deux champs aléatoires gaussiens, sur les composantes  $U_x$  et  $U_y$ . Ainsi, le processus pour reconstruire une surface peut être appliqué à ce problème de recalage d'images multimodales, à ceci près qu'il n'est pas nécessaire de construire synthétiquement les courbes  $c_i^2$ .

#### 4.4.3 Résultats

##### Critères

De manière similaire au problème de reconstruction de surface, nous cherchons tout d'abord à avoir une faible erreur d'interpolation. Ce critère est quantifié à l'aide de la RMSE et de la distance de Fréchet. De plus, nous souhaitons aussi à avoir une déformation lisse entre les images. En effet, dans le cas contraire il y aurait des changements brut de comportement de l'image. À nouveau, la carte du laplacien, que nous notons aussi  $\Delta s$  par abus de notation, est utilisée.

##### Résultats synthétiques

Nous commençons par nous focaliser sur un exemple synthétique. Dans cet exemple,

nous nous intéressons à la déformation engendrée par un déplacement de la main. De manière plus précise, nous étudions la déformation due au mouvement de la main dans une position normale, où les doigts sont semi écartés, à une main où les doigts sont complètement écartés. Les courbes délimitant les bords de la main dans chacun des cas sont présentée en noir et en bleu dans la Figure 4.14a), respectivement. Nous utilisons la méthodologie sur cet exemple en utilisant l'ensemble des méthodes d'utilisation des paramètres, c'est-à-dire : MLE-GD, MLE-Ne, MCMC-MAP, MCMC-Moy et MCMC-Med. En connaissant le déplacement entre les courbes formant l'extrémité des mains, discrétisé en rouge dans la Figure 4.14b, nous estimons le déplacement sur l'ensemble du domaine, présenté en bleu dans cette même figure. Nous appliquons ensuite ce déplacement sur une grille uniforme afin de voir visuellement le comportement du champ de déformation grâce à la grille déformée (Figure 4.14c). Enfin, la Figure 4.14d affiche la carte du laplacien de cette grille déformée. Sur cet exemple, nous remarquons que l'ensemble des méthodes donnent une carte de la norme du laplacien avec une valeur maximale faible, et que la déformation engendrée semble naturelle.

### Résultats réels

Par la suite, nous présentons quatre résultats de recalage d'images basés sur des données réelles, où les courbes de référence sont formées par les bords manuellement extraits des mêmes organes anatomiques. Les Figures 4.15a–d montrent les quatre exemples avec les courbes cible (en noir) et de référence (en bleu) avant le recalage. La Figure 4.15e présente le champ de déformation connue (en rouge) et estimé (en bleu). Figure 4.15f et Figure 4.15g montrent la grille déformée ainsi que la carte du laplacien, respectivement. Pour chaque exemple, les résultats obtenus sont ceux en utilisant la méthode d'optimisation MLE-GD. Les champs de déformation estimés déforment élastiquement les courbes entraînant les tissus des organes alentour; cela est dû à la localité et le lissage des déformations estimées. De plus, la flexibilité de la méthodologie présentée peut être vue à travers de nombreux exemples, où de nombreuses courbes de référence ouvertes/fermées sont présentes dans les images vivant dans  $[-300, 300] \times [-300, 300]$ , et il faut les utiliser conjointement afin d'estimer la déformation globale. Enfin, pour les critères qualitatifs, la Figure 4.16 présente les boxplots de (a) RMSE, (b)  $D_{Fr}$ , (c)  $\max(\Delta s)$  pour chaque méthode d'estimation des paramètres : (1) MLE-GD, (2) MLE-Ne, (3) MCMC-MAP, (4) MCMC-Moy and (5) MCMC-Med. L'ensemble des méthodes est évalué avec le même ensemble de 20 données réelles provenant de l'imagerie médicale. À noter que, en général, toutes les méthodes génèrent de bons résultats sur cette base de données, avec un léger avantage pour la méthode MLE-GD.

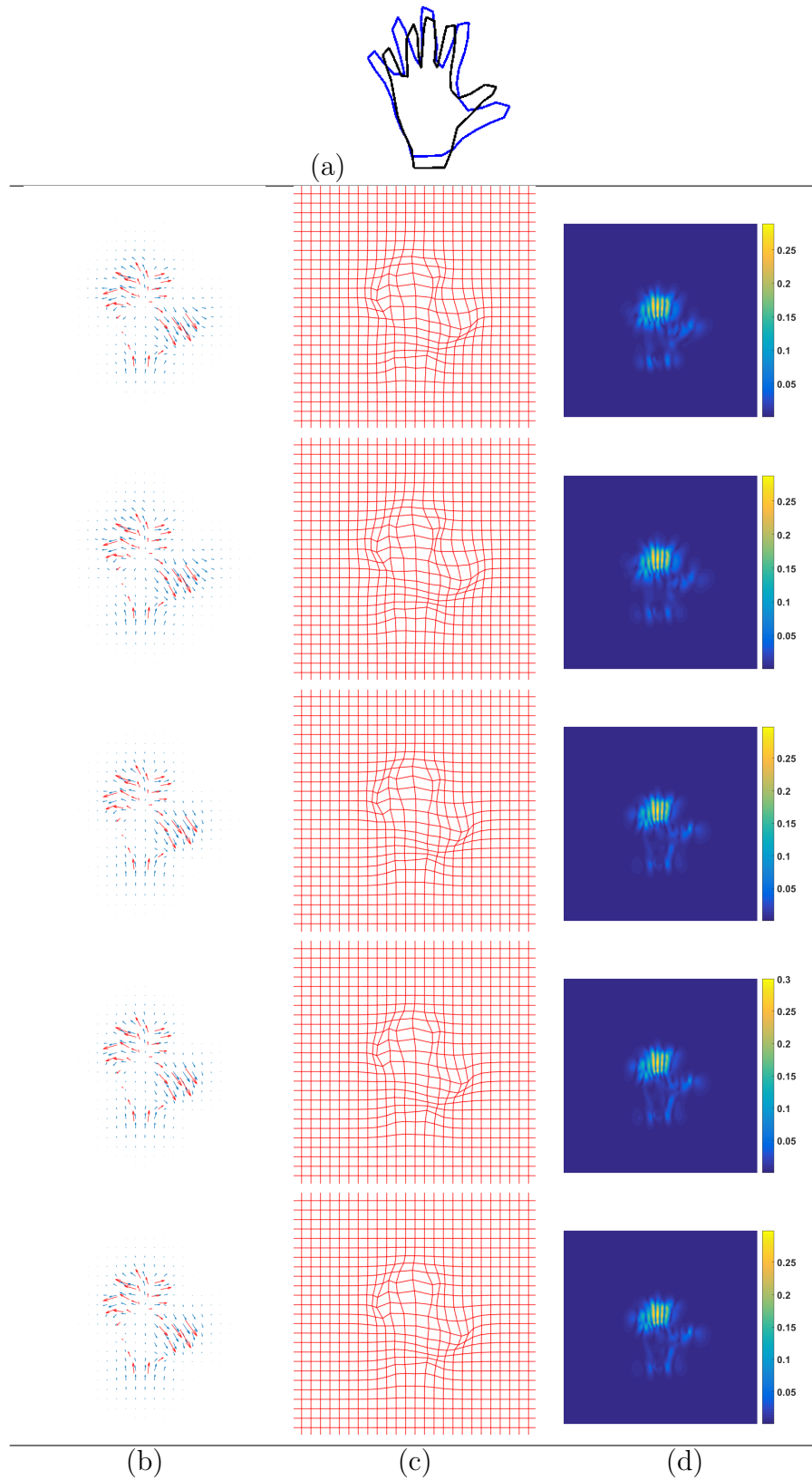


Figure 4.14: Résultats obtenus pour chaque méthode d'optimisation sur un exemple synthétique. (a) Présente les courbes de référence, avec la courbe de  $I_1$  en noir et de  $I_2$  en bleu. Les résultats de haut en bas sont obtenus par : MLE-GD, MLE-Ne, MCMC-MAP, MCMC-Moy, MCMC-Med, et présentent: (b) Le champ de déplacement  $U$  en bleu, avec les déplacements connue représenté en rouge (les deux échantillonné pour une meilleure visibilité). (c) La déformation d'une grille uniforme en utilisant le champ de déplacement. (d)  $\Delta s$ .

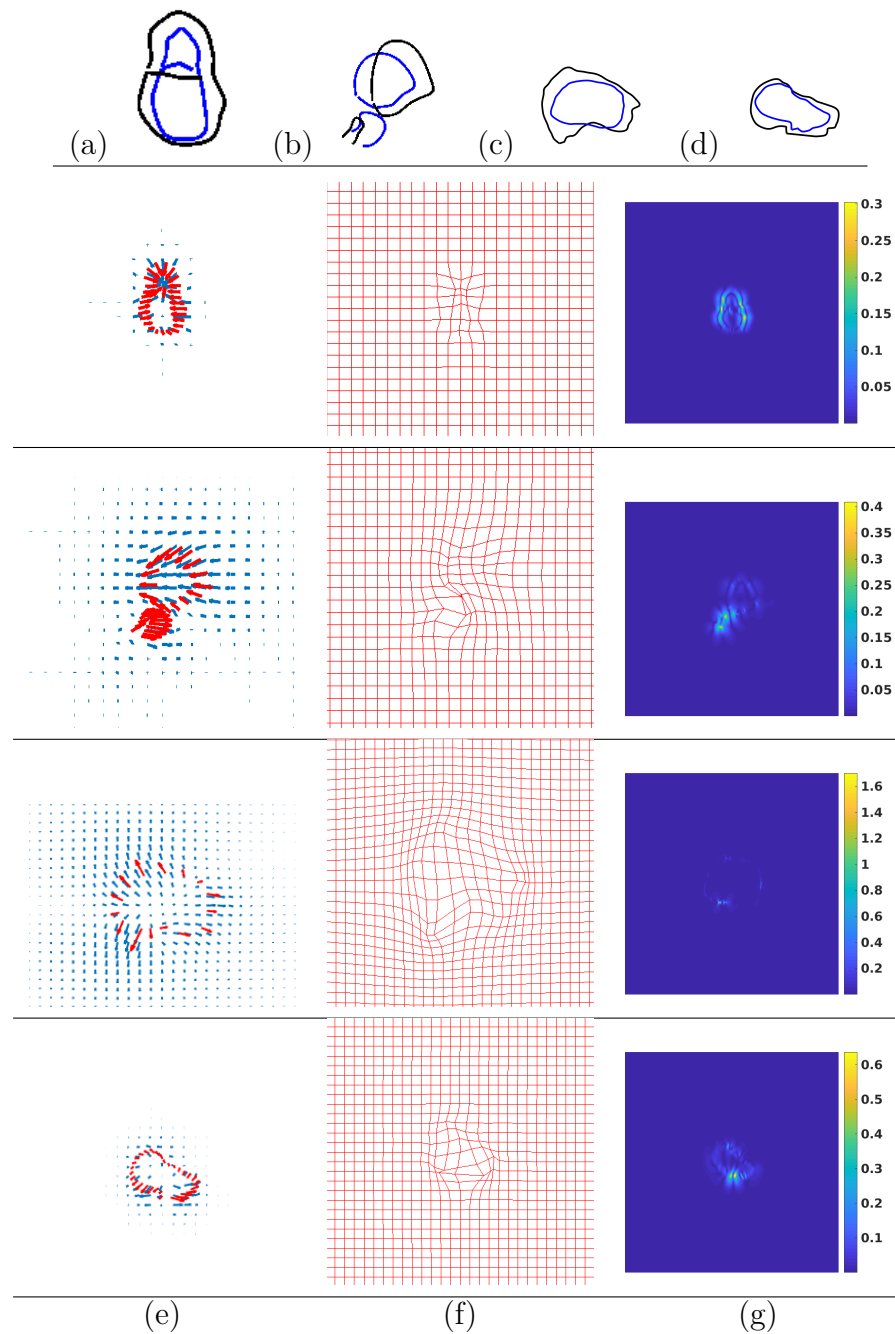


Figure 4.15: Quatre exemples d'estimation du champ de déformation du recalage de l'échographie vers l'IRM. (a), (b), (c) et (d) présentent les courbes de référence sur chaque exemple, avec le courbe de l'échographie en noir, et celle de l'IRM en bleu. (e) Le champ de déplacement  $U$  en bleu, avec les déplacements connus représenté en rouge (les deux échantillonnés pour une meilleure visibilité). (f) La déformation d'une grille uniforme en utilisant le champ de déplacement. (g) La carte du laplacien. Pour chaque exemple, nous présentons les résultats obtenus avec la méthode MLE-GD.



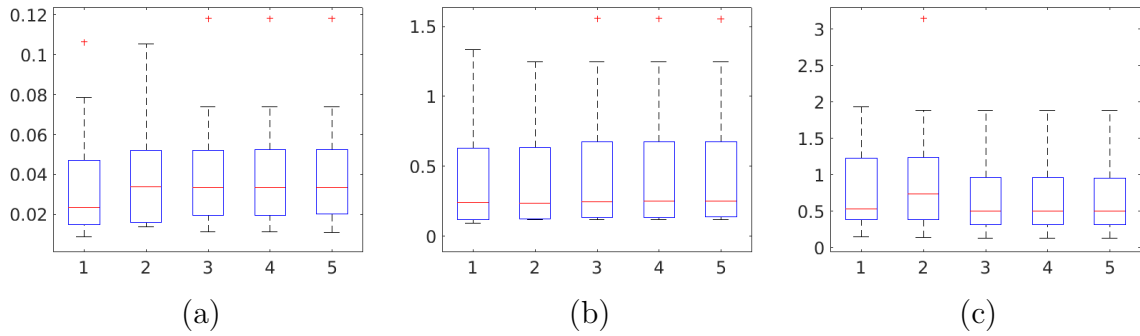


Figure 4.16: Évaluation quantitative des différents critères à partir de 20 exemples réels, en utilisant les méthodes : (1) MLE-GD, (2) MLE-Ne, (3) MCMC-MAP, (4) MCMC-Moy, et (5) MCMC-Med. Pour chaque méthode, nous présentons un boxplot de: (a) RMSE, (b)  $D_{Fr}$ , et (c)  $\max(\Delta s)$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une nouvelle méthode de reconstruction de surface cylindrique. Cette méthode construit tout d'abord une correspondance entre un cylindre parfait synthétique et des courbes connues extraites par un expert. Cette correspondance est estimée en utilisant des outils d'analyse de courbes. Dans un second temps, cette déformation entre le cylindre parfait et la surface à reconstruire est interpolée sur tout le cylindre parfait à l'aide d'un modèle basé sur les champs aléatoires gaussiens. L'estimation des différents paramètres de ce modèle a été estimée par maximum de vraisemblance, mais aussi par inférence bayésienne.

En utilisant de nombreux exemples provenant de plusieurs domaines nous avons vu que cette méthode produit des surfaces lisses et avec de faibles erreurs d'interpolation. De plus, dans le cas de la reconstruction de surface de poterie, la méthode proposée admet de meilleurs résultats que l'état de l'art.

Cette méthodologie peut aussi être appliquée pour le recalage d'images multimodales. Les résultats obtenus sont satisfaisants et encourageants, ce qui est prometteur pour étudier des cas plus complexes de recalage d'images multimodales.

# Chapitre 5

## Prédiction de surfaces dynamiques : application aux expressions du visage

### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à un cas de prédiction de processus spatial, où l'objectif était de reconstruire la surface d'un organe 3D en ayant une connaissance partielle de cette dernière grâce à des coupes 2D. Nous souhaitons maintenant étendre le problème de prédiction d'un processus à partir d'une connaissance partielle à un cas plus complexe : la prédiction de surface dynamique. Afin d'étudier les surfaces dynamiques, nous allons par la suite les considérer comme des trajectoires de surfaces. Plus précisément, elles seront représentées comme l'évolution dans le temps d'une surface unique.

Dans la suite de ce chapitre, nous cherchons à estimer entièrement une surface dynamique à partir de sa surface initiale, ainsi que de la connaissance de plusieurs processus avec le même genre d'évolution. Afin d'estimer le nouveau processus spatio-temporel, nous allons utiliser un modèle de régression. Des variabilités spatiales et temporelles existant entre les trajectoires connues, un recalage spatio-temporel est utilisé au préalable pour éliminer ces variabilités, puis la prédiction sera effectuée. La méthodologie développée sera ensuite appliquée à la prédiction d'expressions du visage.

## 5.2 Formulation du problème de prédiction de surfaces dynamiques

L'objectif de ce chapitre est de prédire une nouvelle trajectoire de surfaces, où une surface est associée à chaque instant. Avant de formuler cette prédiction, nous allons tout d'abord définir les différents termes de la problématique.

Nous nous intéressons à l'évolution d'une surface dynamique. Plus précisément, nous nous focalisons sur les surfaces hémisphériques, qui sont par définition homéomorphes au disque unitaire. En d'autres termes, il existe une application bijective continue, et d'application réciproque continue, entre la surface hémisphérique et le disque unitaire. Cette propriété permet de paramétriser toute surface hémisphérique. En effet, le disque ayant une paramétrisation usuelle utilisant le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , le même genre de paramétrisation est possible sur toutes les surfaces hémisphériques. Un exemple d'une telle paramétrisation sur une surface hémisphérique est présenté en Figure 5.1. À partir d'une surface hémisphérique (Figure 5.1a), nous paramétrisons selon l'axe radial  $r$  (Figure 5.1b) d'une part et selon l'axe axial  $\theta$  (Figure 5.1c) d'autre part afin d'avoir une paramétrisation complète de la surface (Figure 5.1d). Ainsi, une surface hémisphérique  $s$  est donnée par :

$$\begin{aligned} s : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{D} = (r, \theta) &\mapsto (X(r, \theta), Y(r, \theta), Z(r, \theta)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

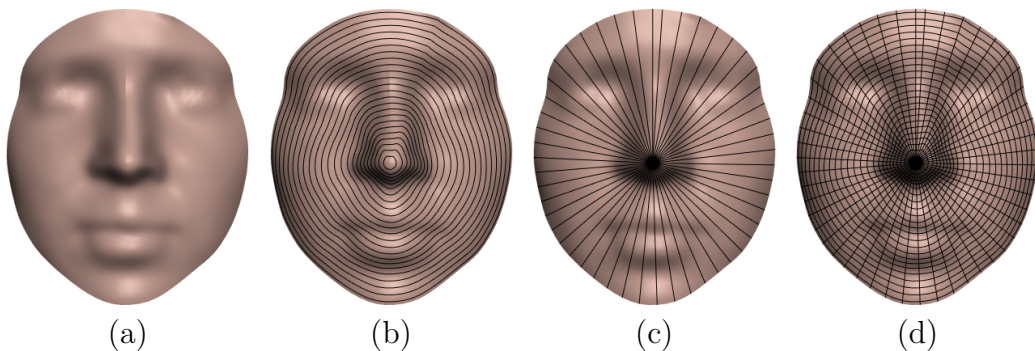


Figure 5.1: Exemple de paramétrisation d'une surface hémisphérique : (a) la surface originale, (b) la paramétrisation selon  $r$ , (c) la paramétrisation selon  $\theta$ , et (d) la paramétrisation totale selon  $(r, \theta)$ .

Par construction ces surfaces sont de carré intégrable. Afin de pouvoir utiliser par la suite nos outils d'analyse de forme, nous supposons de plus que nos surfaces hémisphériques sont lisses, c'est-à-dire qu'elles sont au moins de classe  $C^1$ . Nous définissons alors l'espace des surfaces hémisphériques  $\mathcal{S}$  par :

$$\mathcal{S} = \{s : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid s \text{ est } C^1, \int_{\mathcal{D}} \|s_1(r, \theta) - s_2(r, \theta)\|_2^2 dr d\theta < \infty\} \quad (5.2)$$

Ainsi,  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des fonctions  $C^1$  sur le compact  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ , qui est un espace fonctionnel. Nous munissons  $\mathcal{S}$  du produit scalaire usuel, tel que :

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{D}} \langle s_1(r, \theta), s_2(r, \theta) \rangle dr d\theta, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathcal{S} \quad (5.3)$$

Cela revient à munir  $\mathcal{S}$  de la distance  $\mathbb{L}^2$  :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{S}}(s_1, s_2) &= \|s_1 - s_2\|_2 \\ &= \left( \int_{\mathcal{D}} \|s_1(r, \theta) - s_2(r, \theta)\|_2^2 dr d\theta \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Maintenant que nous avons défini les surfaces hémisphériques, ainsi que leur espace associé, nous nous intéressons à définir une trajectoire de surfaces, que nous considérons comme l'évolution d'une surface unique dans le temps. Ainsi, nous définissons une trajectoire  $\alpha$  par :

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{S} \\ t &\mapsto \alpha(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Afin de pouvoir utiliser les outils développés par la suite, nous supposons que  $\alpha$  est de classe  $C^1$  et est de carré intégrable. Ainsi, l'espace des trajectoires, que nous notons  $\mathcal{T}$ , est donné par :

$$\mathcal{T} = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} \mid \alpha \text{ est } C^1, \int_0^1 \|\alpha(t)\|_2^2 dt < \infty\} \quad (5.6)$$

Nous munissons  $\mathcal{T}$  du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_{\mathcal{T}} &= \int_0^1 \langle \alpha_1(t), \alpha_2(t) \rangle_{\mathcal{S}} dt \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} \langle \alpha_1(t)(r, \theta), \alpha_2(t)(r, \theta) \rangle dr d\theta dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

La métrique induite, qui est une métrique  $\mathbb{L}^2$ , implique une distance entre deux trajectoires

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{T}$  donnée par :

$$d_{\mathcal{T}}(\alpha_1, \alpha_2) = \left( \int_0^1 (d_{\mathcal{S}}(\alpha_1(t), \alpha_2(t))^2 dt \right)^{1/2} \quad (5.8)$$

Avant de pouvoir prédire une trajectoire, le développement d'outils d'analyse de surfaces et de trajectoires est nécessaire. En effet, les surfaces étant différentes, que ce soit entre deux trajectoires ou bien au sein d'une même trajectoire, les correspondances spatiales peuvent ne pas être correctes, provoquant une mauvaise prédiction. Un exemple illustratif de ce problème de correspondances est présenté en Figure 5.2, où la paramétrisation de la courbe correspondant à la lèvre inférieure du premier visage a été transmise à deux autres visages, l'un provenant de la même trajectoire, l'autre d'une seconde trajectoire. Nous remarquons que les courbes ne correspondent pas à la lèvre inférieure dans ces deux cas, montrant les problèmes de correspondances spatiales.

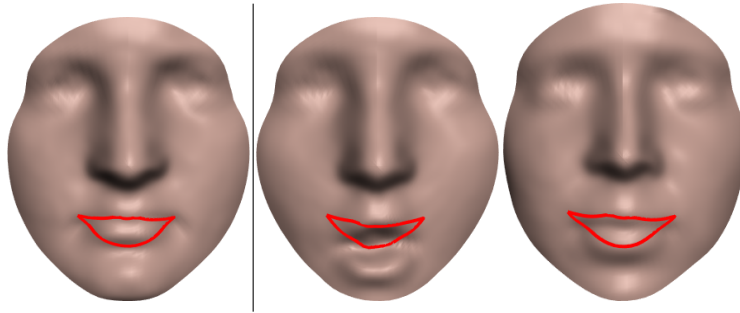


Figure 5.2: Transmission de la paramétrisation correspondant à la lèvre inférieure d'un visage sur d'autres visages, que ce soit au sein de la même trajectoire ou de deux trajectoires distinctes.

De la même manière la vitesse d'exécution peut être différente entre les trajectoires, ce qui provoque de mauvaises correspondances temporelles, et qui fausseront à nouveau la prédiction. La Figure 5.3 présente ce genre de problème de correspondances temporelles à travers deux trajectoires. Sur chaque trajectoire, les visages neutres, c'est-à-dire sans expression, ont été encadrés en bleu. Nous remarquons que les deux trajectoires ne commencent ni ne finissent au même moment. De même, le maximum de l'expression, encadré en rouge, n'est pas atteint au même moment: dans le premier cas il est atteint au temps  $t = 5/7$ , alors que dans le second il est atteint au temps  $t = 2/7$ . Ainsi, avant de pouvoir effectuer une prédiction, il est nécessaire d'assurer les correspondances spatiales et temporelles optimales.

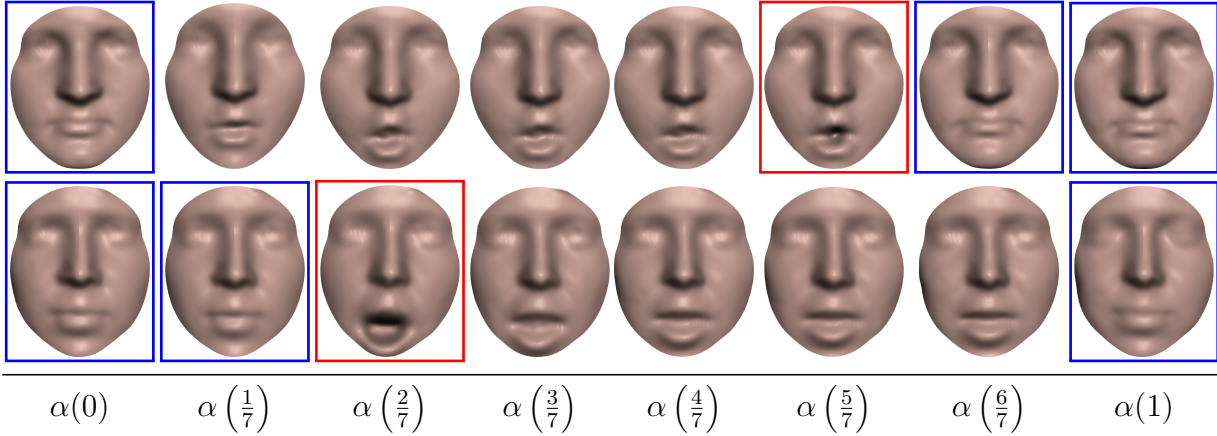


Figure 5.3: Deux exemples de trajectoires, avec le maximum de chaque expression encadré en rouge, et les visages neutres (sans expression) en bleu.

### 5.3 Recalage spatio-temporel de trajectoires

Afin de trouver les correspondances optimales entre deux trajectoires  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{T}$ , nous allons utiliser un recalage spatio-temporel. Afin de les recaler, c'est-à-dire de trouver la déformation avec un coût minimal défini plus loin dans cette section, nous allons utiliser des outils d'analyse de forme. Comme expliqué en Section 2.2.1, il est nécessaire d'être invariant aux transformations préservant la forme, c'est-à-dire à la translation, à la rotation, au changement d'échelle uniforme, ainsi qu'au changement de paramétrisation.

Pour recaler spatio-temporellement les trajectoires, nous allons par la suite séparer le problème en deux étapes distinctes. Dans un premier temps, nous allons recaler spatialement l'ensemble des surfaces des deux trajectoires. Puis, dans un second temps, le recalage temporel de ces trajectoires sera effectué.

#### 5.3.1 Recalage de deux surfaces

Nous nous intéressons tout d'abord à recaler spatialement deux surfaces provenant des trajectoires que nous cherchons à recaler. Nous supposons que les problèmes de recalage liés à la translation, la rotation, et au changement d'échelle uniforme ont été résolus à l'aide d'étapes préliminaires. Pour ce faire, il existe dans la littérature plusieurs méthodes permettant d'être invariant à ces variabilités [ZSN05, DZY<sup>+</sup>07]. Les méthodes utilisées dans notre cas sont développées en Sections 5.5.1 et 5.5.2. Afin de recaler deux surfaces  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ , il reste à trouver les correspondances optimales entre elles. Ce problème de correspondances est équivalent à chercher les meilleures re-paramétrisations de ces

deux surfaces minimisant la distance  $\mathbb{L}^2$  entre elles. Nous rappelons que le groupe des re-paramétrisations, noté  $\Gamma_{\mathcal{S}}$ , est donné par :

$$\Gamma_{\mathcal{S}} = \{\gamma_{\mathcal{S}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \mid \gamma_{\mathcal{S}}(\delta \mathcal{D}) = \delta \mathcal{D}, \gamma_{\mathcal{S}} \text{ est un difféomorphisme}\} \quad (5.9)$$

où  $\delta \mathcal{D}$  dénote les bords du domaine  $\mathcal{D}$ . On cherche ainsi à minimiser la fonction de coût suivante :

$$E_{\Gamma_{\mathcal{S}}}(\gamma_{\mathcal{S}}, \gamma_{\mathcal{S}_2}) = d_{\mathcal{S}}(s_1(\gamma_{\mathcal{S}_1}), s_2(\gamma_{\mathcal{S}_2})) \quad (5.10)$$

Cependant, comme expliqué en Section 2.2.3, trouver les re-paramétrisations optimales est un problème complexe, en particulier car  $\Gamma_{\mathcal{S}}$  n'agit pas sur  $\mathcal{S}$  par isométries.

Afin de trouver une solution optimale au problème de minimisation de la fonction  $E_{\Gamma_{\mathcal{S}}}$ , une autre représentation des surfaces est nécessaire. Dans notre cas, nous utilisons la représentation Square-Root Normal Field (SRNF) [SKJJ11, JKSJ07], dont le fonctionnement pour effectuer de l'analyse de forme a été détaillé en Section 2.2.3. Nous rappelons que la représentation SRNF définie à l'aide de l'application  $h_s$  telle que :

$$h_s : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} \\ s \mapsto q_s = \begin{cases} \frac{\frac{\partial s}{\partial t} \times \frac{\partial s}{\partial u}}{\sqrt{\|\frac{\partial s}{\partial t} \times \frac{\partial s}{\partial u}\|_2}} & \text{si } \frac{\partial s}{\partial t} \times \frac{\partial s}{\partial u} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.11)$$

L'espace des SRNF  $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$  est muni d'une métrique  $\mathbb{L}^2$ . De plus le groupe  $\Gamma_{\mathcal{S}}$  agit sur  $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$  par isométries, dont l'action est définie par :

$$(\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}, \Gamma_{\mathcal{S}}) \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} \\ (q_s, \Gamma_{\mathcal{S}}) \mapsto q_s(\gamma_{\mathcal{S}}) \sqrt{\det(J_{\gamma_{\mathcal{S}}})} \quad (5.12)$$

où  $\det(J_{\gamma_{\mathcal{S}}})$  est le déterminant de la matrice Jacobienne de  $\gamma_{\mathcal{S}}$ .

Le problème équivalent à  $E_{\Gamma_{\mathcal{S}}}$  est alors défini par :

$$\min_{\gamma_{\mathcal{S}_1}, \gamma_{\mathcal{S}_2} \in \Gamma_{\mathcal{S}}} \|(q_{s_1}, \gamma_{\mathcal{S}}) - (q_{s_2}, \gamma_{\mathcal{S}})\|_2 = \min_{\gamma_{\mathcal{S}} \in \Gamma} \|q_{s_1} - (q_{s_2}, \gamma_{\mathcal{S}})\|_2 \quad (5.13)$$

Nous notons  $\hat{\gamma}_{\mathcal{S}}$  la re-paramétrisation optimale de  $q_{s_2}$ . Comme nous cherchons à effectuer une prédiction de trajectoires de surfaces, c'est-à-dire d'éléments de  $\mathcal{S}$ , nous souhaitons maintenant trouver la surface recalée correspondante. Ce problème est complexe car il n'est pas possible de reconstruire la surface originale à partir de sa représentation SRNF. En effet, nous ne savons pas si l'inverse d'une représentation SRNF existe. De

même, dans le cas où elle existe, nous ne savons pas si la solution est unique [JKLS17]. Nous approximons alors la surface recalée par  $\bar{s}_2 = s_2 \circ \hat{\gamma}_S$ , et les surfaces  $s_1$  et  $\bar{s}_2$  sont alors considérées comme recalées.

Une fois les deux surfaces recalées, nous pouvons facilement construire le chemin géodésique entre elles en utilisant la géométrie euclidienne. Deux exemples d'un tel chemin de surfaces, ainsi que leurs paramétrisations respectives, sont présentés en Figure 5.4.

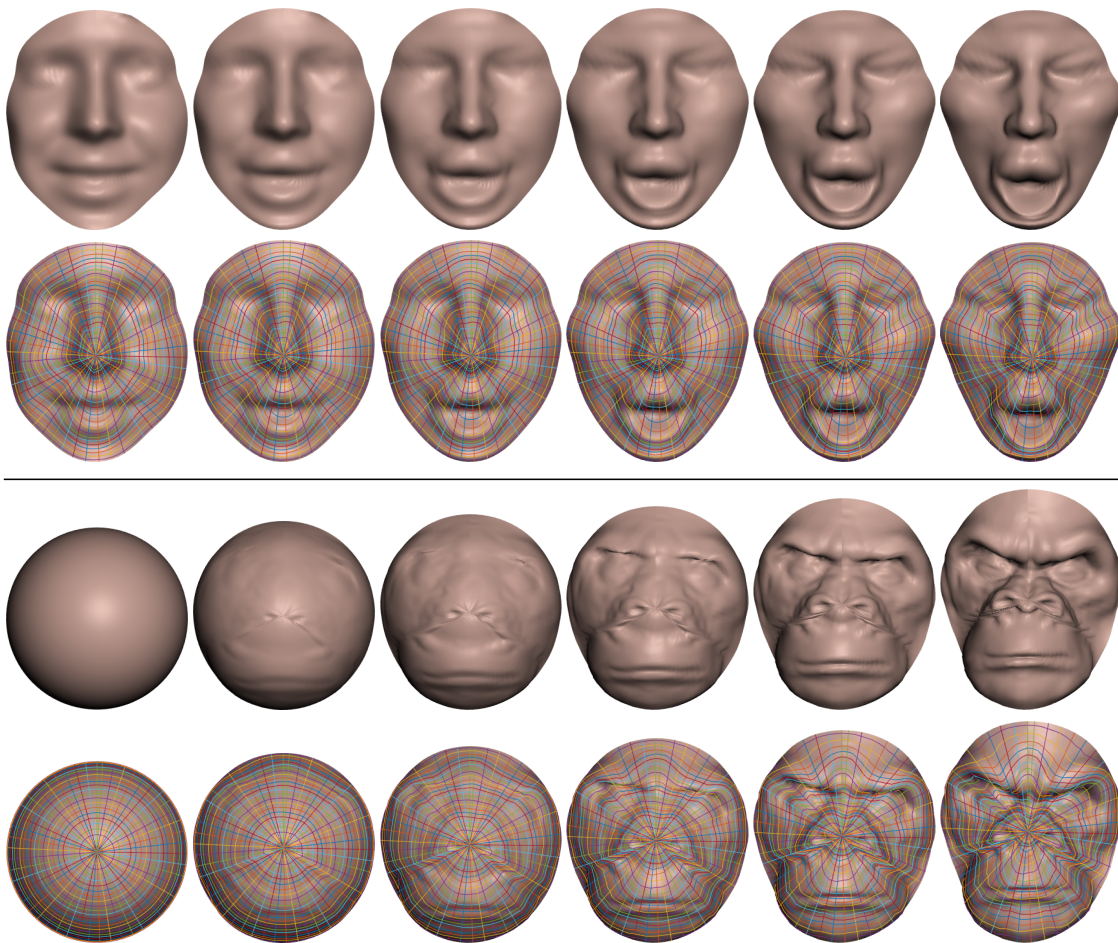


Figure 5.4: Exemples de chemin géodésique entre deux surfaces hémisphériques, commençant par la surface le plus à gauche et finissant par la surface le plus à droite.

### 5.3.2 Recalage le long d'une trajectoire

Maintenant que nous sommes capables de recaler deux surfaces, nous allons utiliser ce recalage pour recaler l'ensemble des surfaces le long d'une trajectoire. Une fois la



trajectoire  $\alpha$  recalée, nous pourrions quantifier sa déformation au temps  $t$  en utilisant la distance entre la surface originale et la surface associée à l'instant  $t$ . Ainsi, nous utilisons  $d_S(\alpha(0), \alpha(t))$  pour quantifier la déformation à l'instant  $t$ . Dans les cas des expressions que nous étudierons par la suite, la trajectoire commence et finit par des visages neutres. Ainsi, ces deux surfaces étant très similaires, ceci implique une déformation faible entre  $\alpha(0)$  et  $\alpha(1)$ .

La première approche pour recalcr  $\alpha$  le long de sa trajectoire consiste à recalcr l'ensemble des surfaces sur la première surface  $\alpha(0)$ . La trajectoire recalée avec cette méthode, que nous notons  $\alpha^d$ , permet bel et bien d'avoir une faible déformation entre les extrémités de la trajectoire. Cependant, dans certains cas cette approche directe engendre des problèmes de correspondances. En particulier, nous remarquons ce problème sur le visage encadré de la Figure 5.5a.

Ce problème de correspondances est dû à l'estimation de déformations trop larges pour que la méthode de recalage directe soit efficace. Afin de surmonter ce problème, nous allons recalcr les surfaces par composition, ce qui permet d'estimer uniquement des déformations de faible amplitude. En d'autres termes nous recalons la  $M$ -ième surface  $\alpha(t)$  sur la première surface  $\alpha(0)$  en estimant la re-paramétrisation  $\bar{\gamma}_S$  de la manière suivante :

$$\bar{\gamma}_S = \bar{\gamma}_{S_{M-1}} \circ \bar{\gamma}_{S_{M-2}} \circ \cdots \circ \bar{\gamma}_{S_2} \circ \bar{\gamma}_{S_1}$$

où  $\bar{\gamma}_{S_i}$  est la re-paramétrisation estimée entre deux surfaces successives.

Nous notons par la suite  $\check{\alpha}^c$  cette approche. Comme présenté en Figure 5.5b, le problème de correspondances n'apparaît plus. Cependant, la distance entre  $\check{\alpha}^c(0)$  et  $\check{\alpha}^c(1)$  reste élevée (Figure 5.6). Ce problème est dû à l'accumulation d'erreurs numériques lors de la composition.

Afin de remédier à ces deux types d'erreurs, une troisième approche est proposée, dont la trajectoire recalée est  $\check{\alpha}^m$ . Cette approche se base sur le fait que  $\alpha(0)$  et  $\alpha(1)$  sont sensés être très similaires. Pour ce faire, nous recalons tout d'abord  $\alpha(1)$  sur  $\alpha(0)$ . Dans un second temps, nous recalons la première moitié des visages sur  $\check{\alpha}^m(0)$  par composition. Enfin, la seconde moitié des visages est recalée sur  $\check{\alpha}^m(1)$  par une seconde composition. Grâce au recalage direct entre  $\alpha(0)$  et  $\alpha(1)$  effectué à la première étape, la faible déformation entre  $\alpha(0)$  et  $\alpha(1)$  est assurée, comme le montre la Figure 5.6. D'autre part, les deux compositions, qui permettent d'estimer uniquement des faibles déformations, assurent une bonne correspondance entre les surfaces. Enfin, en réduisant le nombre de compositions, les

erreurs numériques sont réduites.

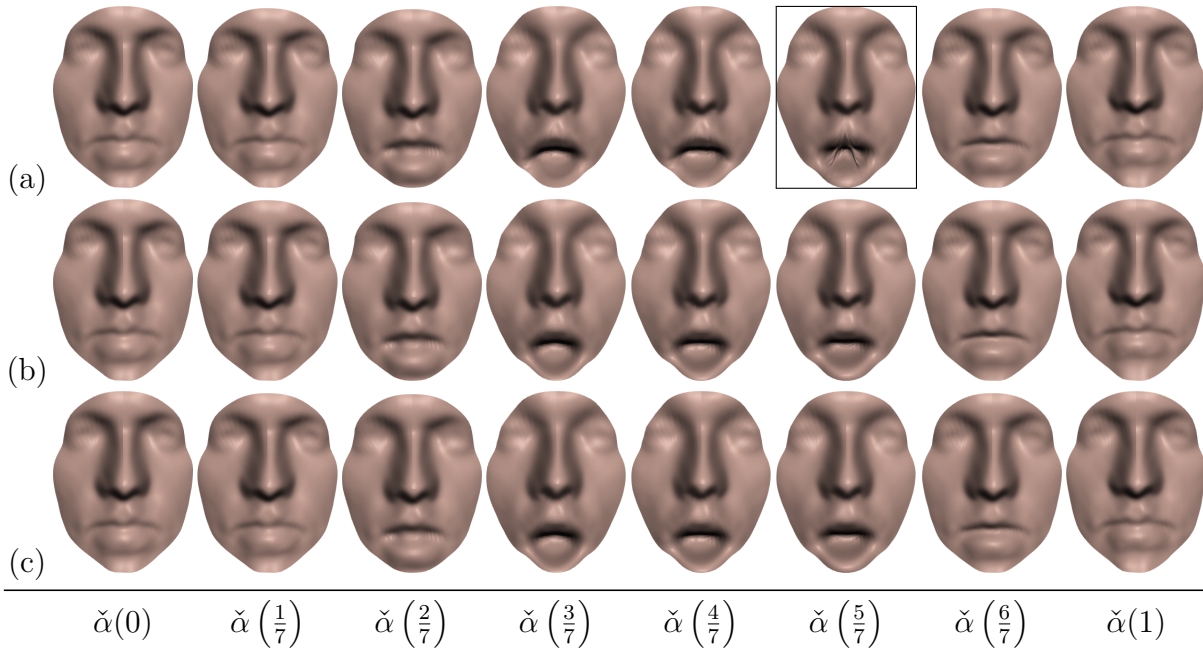


Figure 5.5: Visages extraits après recalage le long de l'expression, suivant la méthode de recalage employée : (a) recalage direct ( $\check{\alpha}^d$ ), (b) recalage par composition ( $\check{\alpha}^c$ ) et (c) recalage mixte ( $\check{\alpha}^m$ ).

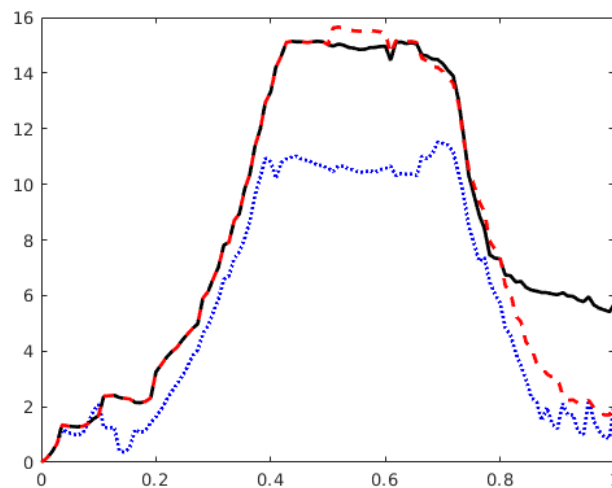


Figure 5.6: Quantification de la déformation  $d_S(\check{\alpha}(0), \check{\alpha}(t))$  de l'expression  $\alpha$  en fonction de la méthode de recalage utilisée: pointillés bleu) recalage direct ( $\check{\alpha}^d$ ), trait plein noir) recalage par composition ( $\check{\alpha}^c$ ) et tiret rouge) recalage mixte ( $\check{\alpha}^m$ ).

### 5.3.3 Recalage temporel de deux trajectoires

Nous supposons ici que  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{T}$  ont été recalées le long de leurs trajectoires en utilisant le recalage mixte, que nous notons  $\check{\alpha}_1^m$  et  $\check{\alpha}_2^m$  respectivement. Avant d'effectuer le recalage temporel entre ces trajectoires, nous remarquons que nous avons du bruit dans la déformation de la trajectoire. Ce problème est dû à deux facteurs. Tout d'abord nous pouvons avoir des erreurs extrinsèques présentes lors de l'acquisition des données. D'autre part, les erreurs numériques accumulées lors des compositions successives engendrent aussi du bruit. Ce second type d'erreur provoque une distance entre  $\check{\alpha}_i^m(0)$  et  $\check{\alpha}_i^m(t)$  généralement plus élevée à tout instant  $t$  par rapport à la méthode directe  $\check{\alpha}_i^d$ . Afin de réduire ces bruits, nous allons effectuer un lissage temporel. Pour ce faire, nous allons adapter la méthode des moyennes mobiles qui est couramment utilisée en séries temporelles, en utilisant un noyau gaussien. L'expression lissée  $\tilde{\alpha}$  est alors définie par :

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{\sum_{t_i=0}^1 K_h(d_{\mathcal{F}}(\check{\alpha}^m(t), \check{\alpha}^m(t_i))) \check{\alpha}^m(t_i)}{\sum_{t_i=0}^1 K_h(d_{\mathcal{F}}(\check{\alpha}^m(t), \check{\alpha}^m(t_i)))} \quad (5.14)$$

Nous choisissons d'utiliser comme noyau  $K$  un noyau gaussien, qui est donné par :

$$K_h(d) = \exp\left(-\frac{d^2}{2h^2}\right) \quad (5.15)$$

De manière empirique, nous avons choisi comme fenêtre  $h$  l'écart-type de  $d_{\mathcal{S}}(\check{\alpha}^m(0), \check{\alpha}^m(t))$ , c'est-à-dire que :

$$h^2 = \frac{1}{\#t_i} \sum_{t_i=0}^1 \left( d_{\mathcal{S}}(\check{\alpha}^m(0), \check{\alpha}^m(t_i)) - \frac{1}{\#t_i} \sum_{t_i=0}^1 d_{\mathcal{S}}(\check{\alpha}^m(0), \check{\alpha}^m(t_i)) \right)^2 \quad (5.16)$$

où  $\#t_i$  est le nombre de surfaces composant la trajectoire  $\check{\alpha}^m$ .

L'effet de ce lissage sur les données obtenues au préalable est présenté en Figure 5.7. Nous remarquons que les surfaces obtenues après le lissage,  $\tilde{\alpha}$ , présentées en Figure 5.7b sont visuellement très semblables à celles obtenues avant le lissage  $\check{\alpha}^m$  (Figure 5.7a). De plus, la quantification de la déformation au temps  $t$   $d_{\mathcal{S}}(\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(t))$  a un maximum plus faible après le lissage (Figure 5.8). Dans cet exemple, le maximum de déformation est semblable à celui obtenu en utilisant la méthode de recalage le long de trajectoire directement. De même, le graphe de ces déformations est beaucoup plus lisse.

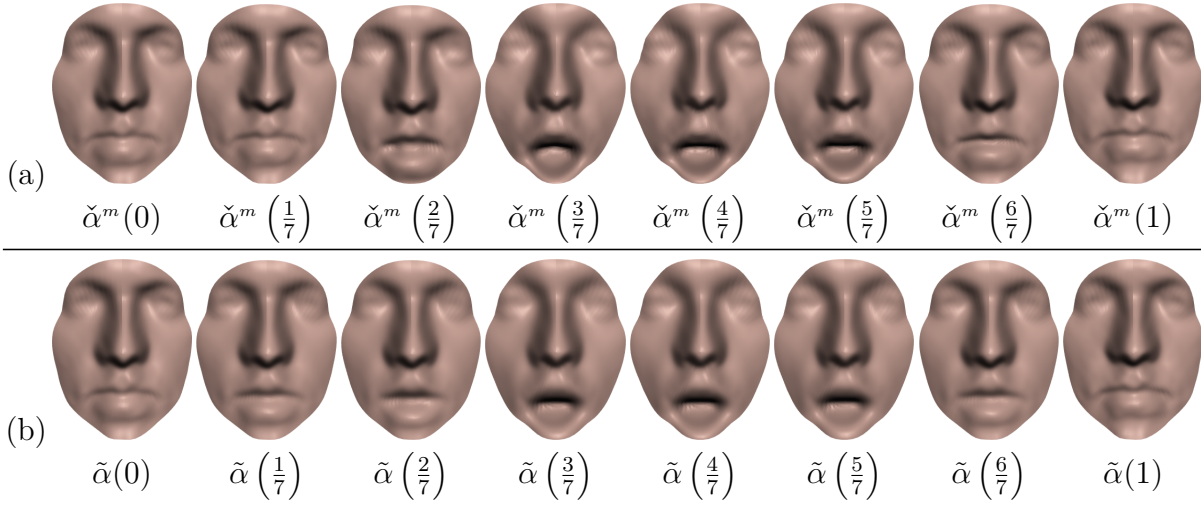


Figure 5.7: Visages extraites de l'expression recalée: (a) avant lissage temporel ( $\check{\alpha}^m$ ), et (b) après lissage temporel ( $\tilde{\alpha}$ ).

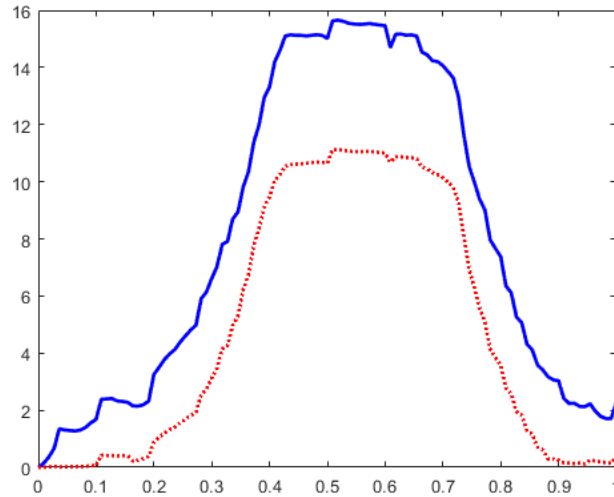


Figure 5.8: Quantification de la déformation  $d_S(\check{\alpha}(0), \check{\alpha}(t))$  de l'expression recalée: trait plein bleu) avant lissage temporel ( $\check{\alpha}^m$ ), et pointillés rouge) et après lissage temporel ( $\tilde{\alpha}$ ).

En plus de réduire le bruit dans les trajectoires, le lissage temporel permet aussi d'avoir la surface associée à tout temps  $t$ , plutôt qu'en un nombre discret d'instant. Le nombre de surfaces pouvant être différent entre deux trajectoires, le recalage temporel n'est pas utilisable sur  $\check{\alpha}_1^m$  et  $\check{\alpha}_2^m$  directement. Ce problème n'intervient pas avec les trajectoires lissées, mais il est nécessaire d'utiliser un bon échantillonnage. En utilisant la paramétrisation par longueur d'arc par chaque trajectoire, nous pouvons ré-échantillonner la trajectoire efficacement. En effet, ce ré-échantillonnage a l'avantage de ne garder que les informations utiles, car il se base sur les déformations au sein de la trajectoire. En

particulier, un des effets est d'éliminer les phases où il n'y a pas de déformations, comme la succession de visages neutres.

Bien que le lissage temporel permette d'améliorer les correspondances temporelles entre deux trajectoires, les correspondances optimales ne sont pas encore assurées. Nous allons alors chercher les meilleures correspondances temporelles entre les trajectoires  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \mathcal{T}$ . Ce problème de correspondances temporelles est équivalent à trouver les meilleurs re-paramétrisations temporelles entre deux trajectoires  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$  qui minimise la distance  $\mathbb{L}^2$  entre ces dernières. De manière similaire au groupe des re-paramétrisations défini en Section 5.3.1, nous définissons le groupe des re-paramétrisations temporelles, qui sont aussi appelées déformations temporelles, par :

$$\Gamma_{\mathcal{T}} = \{\gamma_{\mathcal{T}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid \gamma_{\mathcal{T}}(0) = 0, \gamma_{\mathcal{T}}(1) = 1, \gamma_{\mathcal{T}} \text{ est un difféomorphisme}\} \quad (5.17)$$

Les correspondances temporelles optimales sont alors obtenues en minimisant la fonction de coût suivante :

$$E_{\Gamma_{\mathcal{T}}}(\gamma_{\mathcal{T}_1}, \gamma_{\mathcal{T}_2}) = d_{\mathcal{T}}(\tilde{\alpha}_1(\gamma_{\mathcal{T}_1}(t)), \tilde{\alpha}_2(\gamma_{\mathcal{T}_2}(t))) \quad (5.18)$$

Comme pour le cas du recalage spatial, le problème est complexe à résoudre car  $\Gamma_{\mathcal{T}}$  n'agit pas sur  $\mathcal{T}$  par isométries. Les trajectoires étant des courbes dans l'espace linéaire  $\mathcal{S}$ , il est possible d'adapter des outils d'analyse de courbes pour résoudre ce problème. Plus précisément, nous utilisons la représentation Square-Root Vector Field (SRVF)[SKJJ11, SK16], que nous avons détaillé en Section 2.2.2 :

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{T}} \\ \tilde{\alpha} &\mapsto q_{\alpha} = \begin{cases} \frac{\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t}}{\sqrt{\|\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t}\|_2}} & \text{si } \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

De manière homologue à la représentation SRNF, l'espace des SRVF  $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$  est muni de la métrique  $\mathbb{L}^2$ , et le groupe  $\Gamma_{\mathcal{T}}$  agit sur  $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$  par isométries, dont l'action est :

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}, \Gamma_{\mathcal{T}}) &\rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{T}} \\ (q_{\alpha}, \gamma_{\mathcal{T}}) &\mapsto q_{\alpha}(\gamma_{\mathcal{T}}) \sqrt{\frac{\partial \gamma_{\mathcal{T}}}{\partial t}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Le problème équivalent à  $E_{\Gamma_{\mathcal{T}}}$  est alors défini par :

$$\min_{\gamma_{\mathcal{T}} \in \Gamma_{\mathcal{T}}} \|q_{\alpha_1}(t) - q_{\alpha_2}(\gamma_{\mathcal{T}}(t))\|_2 \quad (5.21)$$

Nous notons  $\bar{\gamma}_{\mathcal{T}}$  la re-paramétrisation optimale de  $q_{\alpha_2}$ , et  $\bar{q}_{\alpha_2} = (q_{\alpha_2}, \bar{\gamma}_{\mathcal{T}})$ . Au contraire de la représentation SRNF, il est possible de retourner à l'espace  $\mathcal{T}$  à partir de la représentation SRVF, à translation près. En effet, nous avons la relation suivante entre une courbe  $\alpha$  et sa représentation SRVF  $q_{\alpha}$  :

$$\tilde{\alpha}(t) = \int_0^t q_{\alpha}(s) |q_{\alpha}(s)| ds + \tilde{\alpha}(0) \quad (5.22)$$

Ainsi, à partir de la représentation SRVF recalée  $\bar{q}_{\alpha_2}$ , nous pouvons reconstruire la trajectoire optimale correspondante  $\bar{\alpha}_2$ .

Un exemple de l'effet du recalage temporel proposé est présenté en Figure 5.9. Avant le recalage temporel, nous remarquons que les expressions ne coïncident pas temporellement. En particulier, le maximum de chaque expression, qui sont encadrés en rouge dans la figure, ne coïncident pas. Après le recalage, le maximum ainsi que le reste des déformations des expressions coïncident correctement.

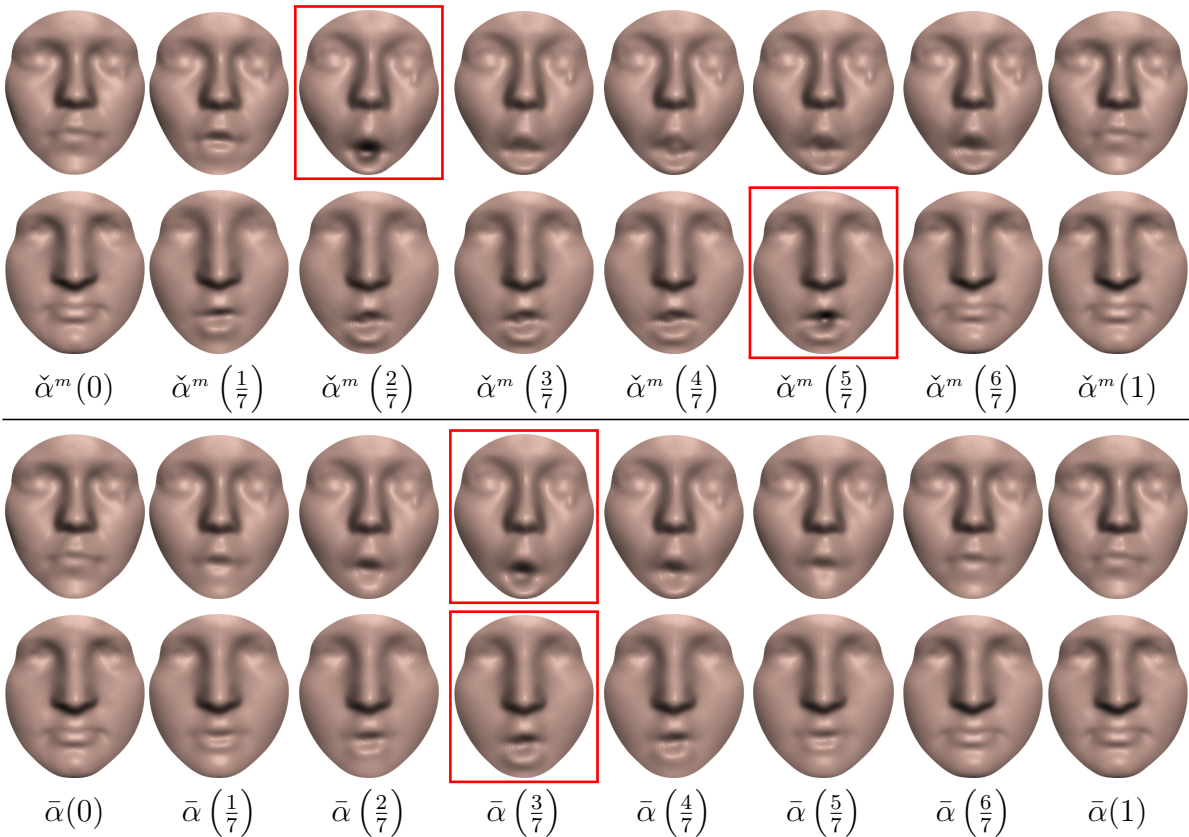


Figure 5.9: Visages extraits à partir de deux expressions: (haut) avant recalage temporel ( $\check{\alpha}^m$ ), et (bas) après recalage temporel ( $\bar{\alpha}$ ).

## 5.4 Prédiction spatio-temporelle de trajectoires

Maintenant que nous avons développé les outils d'analyse de surface et de trajectoires nécessaire pour recalculer spatio-temporellement ces dernières, nous allons nous intéresser à la prédiction d'une nouvelle trajectoire  $\alpha_*$ . Pour cela, nous supposons sa surface initiale  $\alpha_*(0)$  connue, ainsi que  $N$  trajectoires indépendantes  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  ayant le même type de déformations temporelles.

Avant de détailler le modèle de prédiction utilisé, nous nous intéressons tout d'abord au recalage spatio-temporel de nos  $N$  trajectoires ainsi que de la surface  $\alpha_*(0)$ . Dans cet objectif, la résolution se décompose en quatre étapes distinctes. Tout d'abord, nous recalons l'ensemble des surfaces initiales, c'est-à-dire  $(\alpha_1(0), \dots, \alpha_N(0))$  ainsi que  $\alpha_*(0)$ , sur une surface de référence  $s_0$  en utilisant les outils développés en Section 5.3.1. Dans un second temps, les trajectoires  $\alpha_i$  sont recalées le long de leurs trajectoires respectives, en utilisant la méthode de recalage mixte développée en Section 5.3.2. L'ensemble des surfaces, que ce soit  $\hat{\alpha}_*(0)$  ou les surfaces des trajectoires  $\check{\alpha}_i^m$  sont alors recalées. Afin d'assurer aussi les bonnes correspondances temporelles, nous utilisons les deux outils développés en Section 5.3.3. Tout d'abord, nous lissos les trajectoires  $\check{\alpha}_i^m$  à l'aide du noyau gaussien, puis nous effectuons le recalage temporel sur les trajectoires lissées  $\bar{\alpha}_i$ . Ainsi les trajectoires  $\bar{\alpha}_i$  sont recalées spatio-temporellement, et la surface  $\hat{\alpha}_*(0)$  est aussi recalée aux surfaces de ces trajectoires. Par simplification de notation dans les équations suivantes, nous notons  $\bar{\alpha}_*(0) = \hat{\alpha}_*(0)$ .

Nous rappelons que nous considérons chaque trajectoire  $\bar{\alpha} \in \mathcal{T}$  comme l'évolution temporelle d'une unique surface  $\bar{\alpha}(0)$  sur  $\mathcal{S}$ . Ainsi,  $\bar{\alpha}$  est une collection de variables aléatoires à valeurs dans un espace de dimension infini  $\mathcal{S}$ . Chaque trajectoire  $\bar{\alpha}_i$  est alors la réalisation d'un processus spatio-temporel complexe, qui sera noté par la suite  $A$ . En d'autres termes,  $\bar{\alpha}_i$  est une réalisation d'un processus aléatoire inconnu défini sur l'espace probabilisé  $(\mathcal{T}, E, P)$ . Afin de prédire la réalisation de  $\alpha_*$  conditionnellement à  $\bar{\alpha}_*(0)$ , nous supposons que  $\bar{\alpha}_i(t)$  dépend uniquement de  $\bar{\alpha}_i(0)$  et de l'instant  $t \in [0, 1]$ . En d'autres termes, nous supposons qu'il existe une fonction de lien  $\mathcal{L}$  tel que :

$$\bar{\alpha}(t) = \mathcal{L}(\bar{\alpha}(0), t) + \delta(t) \quad (5.23)$$

où  $\delta$  est l'erreur aléatoire.

Ainsi pour prédire la trajectoire  $\alpha_*$ , nous cherchons à apprendre un modèle de prédiction pour estimer cette fonction de lien. Dans cet objectif, nous allons estimer  $\mathcal{L}$  à partir des

$N$  observations indépendantes et identiquement distribuées connues  $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_N)$ . Pour ce faire, nous allons utiliser une régression  $g$ , de telle manière que :

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= g(\bar{\alpha}(0)) \\ &= \mathbb{E}(A|A(0) = \bar{\alpha}(0))\end{aligned}\tag{5.24}$$

La trajectoire  $\bar{\alpha}_i$  étant dépendante de sa première surface  $\bar{\alpha}_i(0)$ , utiliser les trajectoires directement n'est pas adapté pour effectuer notre prédiction. Plus précisément, nous cherchons à apprendre les déformations des trajectoires dans le temps, afin de pouvoir prédire une trajectoire avec une déformation de même type. En utilisant le fait que nous supposons qu'une trajectoire  $\bar{\alpha}$  est continue, nous pouvons alors exprimer  $\bar{\alpha}$  comme une séquence continue de déformations infinitésimales  $D$ , de telle manière que :

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(0) + D(t), \quad \forall t \in [0, 1]\tag{5.25}$$

En utilisant cette équation, nous remarquons que le problème d'estimation de la trajectoire  $\alpha_*$  en connaissant  $\alpha_*(0)$  est équivalent à prédire ses déformations successives  $D_*$ . Ainsi, au lieu de résoudre le problème d'estimation de la fonction de régression  $g$  à partir des  $\bar{\alpha}_i$ , nous reformulons le problème comme une régression  $R$  sur les déformations  $D_i$ , tel que :

$$g(\bar{\alpha}(0))(t) = \bar{\alpha}(0) + R(\bar{\alpha}(0))(t)\tag{5.26}$$

Cette régression permet ainsi d'utiliser uniquement l'information utile connue sur les trajectoires  $\bar{\alpha}_i$ , c'est-à-dire leurs déformations dans le temps. L'objectif maintenant est de trouver un estimateur pour la régression  $R$ . Pour ce faire, nous allons estimer  $R$  à l'aide d'une régression linéaire, c'est-à-dire que l'estimateur de  $R$ ,  $\hat{R}$  est de la forme suivante :

$$\hat{R}(\alpha_*(0)) = \sum_{i=1}^N w_i D_i\tag{5.27}$$

où  $w_i$  est le poids associé à la déformation  $D_i$ , soumis aux contraintes  $w_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ .

Le premier estimateur considéré est l'estimateur de la moyenne empirique, où nous utilisons des poids uniformes, c'est-à-dire que  $w_i = \frac{1}{N}$ . La régression associée est alors :

$$\hat{R}(\alpha_*(0)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_i\tag{5.28}$$



Cet estimateur consiste ainsi à estimer la déformation de l'expression  $\alpha_*$  comme la moyenne des déformations. De manière équivalente, cette estimation revient à estimer la déformation de la trajectoire moyenne. Bien que cet estimateur permette d'apprendre les déformations communes, elle ne s'adapte pas à la nature de la surface  $\bar{\alpha}_*(0)$ , ce qui peut provoquer une mauvaise estimation de la trajectoire si cette surface est éloignée de la moyenne des surfaces initiales  $\bar{\alpha}_i(0)$ .

Afin d'améliorer la flexibilité de la prédiction, c'est-à-dire qui s'adapte à la surface initiale  $\bar{\alpha}_*(0)$ , nous proposons un second estimateur. Celui-ci est l'estimateur de Nadaraya-Watson [Bie88], défini par :

$$\hat{R}(\bar{\alpha}_*(0)) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{K}_h(d_S(\bar{\alpha}_i(0), \bar{\alpha}_*(0)))}{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_h(d_S(\bar{\alpha}_j(0), \bar{\alpha}_*(0)))} D_i \quad (5.29)$$

où  $\mathcal{K}$  est un noyau de fenêtre associée  $h$ .

## 5.5 Base de données utilisée et étapes préliminaires

Par la suite, nous allons nous focaliser sur l'étude des expressions 4D. Par définition, une expression 4D est une séquence temporelle de visages 3D, qui est composée de cinq parties successives : une partie neutre, l'augmentation d'intensité de l'expression, le maximum d'intensité de l'expression, la diminution de l'intensité de l'expression, et finalement une seconde partie neutre. Une expression est donc une trajectoire de surfaces, où un visage, qui est une surface, est associé à chaque instant  $t$ . La méthodologie développée dans les sections précédentes peut alors être appliquée.

### 5.5.1 Base de données

Nous allons appliquer notre méthodologie sur la base de données BP4D [XZYC<sup>+</sup>14]. Sur cette base, nous possédons  $N = 6$  individus. Chacun de ces individus effectue 6 classes d'expressions distinctes, formant ainsi un total de 36 trajectoires différentes. Ces 6 classes d'expressions ont été définies par Ekman [Ekm71] comme des expressions "prototypique". En d'autres termes, elles sont considérées comme étant universelles, dans le sens où la déformation est sensiblement la même pour tous les individus, indépendamment de la culture de la personne effectuant cette expression. Ces classes d'expressions sont : la colère, le dégoût, la peur, la joie, la tristesse, et enfin la surprise. Un exemple de chacune de ces classes est présenté en Figure 5.10. Enfin, ces trajectoires/expressions comportent

en moyenne 100 surfaces/visages.

Sur ces données, des étapes préliminaires ont été effectuées avant notre pré-traitement. Tout d'abord, le bout du nez a été manuellement extrait par un expert. Cette extraction est une étape indispensable dans notre analyse car c'est un point de référence commun à tous les visages, tout comme les yeux ou la bouche. Au contraire des autres points de référence, le bout du nez permet d'extraire facilement le visage à partir d'une image 3D. De par son importance, de nombreux travaux se sont intéressés au problème de détection du bout du nez [HBM<sup>+</sup>13, MBH15, LZTZ15, Pen15]. Certaines de ces méthodes étant automatiques, nous pouvons théoriquement automatiser cette étape préliminaire indispensable. Dans un second temps, les visages ont été extraits des images 3D en utilisant une sphère centrée sur le bout du nez. Dans cette base de données, le rayon utilisé pour l'extraction est resté le même pour l'ensemble des visages.

Maintenant que nous avons détaillé la base de données utilisée, il est nécessaire d'assurer les propriétés qui ont été supposées dans les sections précédentes avant d'utiliser la méthodologie développée. Ainsi, il est nécessaire d'avoir une paramétrisation des visages d'une part, et que les visages soient invariants aux translations rigides, c'est-à-dire à la translation, la rotation et au changement d'échelle uniforme, d'autre part. En utilisant le bout du nez, qui est un point de référence, la variabilité due à la translation peut être éliminée. Pour ce faire, il suffit de centrer le bout du nez à l'origine du système de coordonnées. L'ensemble des visages ayant été extraits à l'aide d'une sphère de même rayon, nous remarquons que le changement d'échelle uniforme n'est pas une nuisance. Ainsi, il reste à assurer une paramétrisation aux visages, ainsi qu'une invariance à la rotation.

### 5.5.2 Normalisation de la pose

Nous nous intéressons tout d'abord à assurer l'invariance des visages à la rotation. La rotation est associée à la pose du visage, c'est-à-dire à la direction vers laquelle la personne regarde. Cette pose peut être normalisée a priori, car la structure d'un visage reste très semblable, même entre deux personnes distinctes, ou entre diverses expressions du visage. Pour normaliser la pose, nous sélectionnons tout d'abord un visage de référence, puis l'ensemble des visages utiliseront la même pose. Afin d'assurer cette pose, nous utilisons l'algorithme Iterative Closest Point (ICP)[RL01] entre le visage de référence et le visage dont la pose doit être fixée. Cet algorithme a l'avantage de pouvoir estimer la rotation sans avoir besoin des correspondances entre les visages.



Figure 5.10: Exemples d'expressions "*prototypicales*" effectués par un individu. Les expressions sont, de haut en bas : colère, dégoût, peur, joie, tristesse, et surprise.

Afin d'améliorer visuellement les résultats, un prétraitement sur le visage de référence est nécessaire. En effet, le visage de référence peut ne pas regarder en face de lui. Pour ce faire, nous utilisons la propriété de symétrie d'un visage. En effet, un visage est symétrique par rapport à l'axe formé par l'arête du nez. En d'autres termes, les parties droites et gauches d'un visage sont similaires. Nous utilisons par la suite cette propriété pour corriger la pose du visage de référence. Tout d'abord, nous construisons son visage miroir, c'est-à-dire son symétrique par rapport au plan  $yz$ . Dans un second temps, nous estimons

la rotation complète entre le visage de référence et son miroir à l'aide de l'algorithme ICP. Enfin, en décomposant cette rotation 3D estimée par ICP en trois rotations 2D, nous corrigeons la pose du visage de référence. Précisément, nous effectuons deux rotations successives selon les axes  $xy$  et  $xz$ . Pour chacune des rotations, l'angle utilisé est égal à la moitié de l'angle estimé entre le visage de référence et son miroir. Cette étape permet d'avoir l'arête du nez confondu avec le plan  $yz$ . Cette méthodologie est possible car le visage de référence à une pose proche de la pose que l'on cherche à avoir, c'est-à-dire qu'il regarde globalement devant lui, et que ses yeux sont sur la partie supérieure du visage. Cette méthode ne corrige pas l'erreur de pose selon l'axe  $yz$ , mais l'erreur n'est pas visuellement importante dans nos données.

L'efficacité de ce processus de correction de la pose du visage de référence est présentée en Figure 5.11 à l'aide de deux exemples. À partir d'un visage de référence (Figure 5.11a), nous construisons son miroir (Figure 5.11b). Après estimation de la rotation, le nouveau visage référence à une pose correcte (Figure 5.11c).

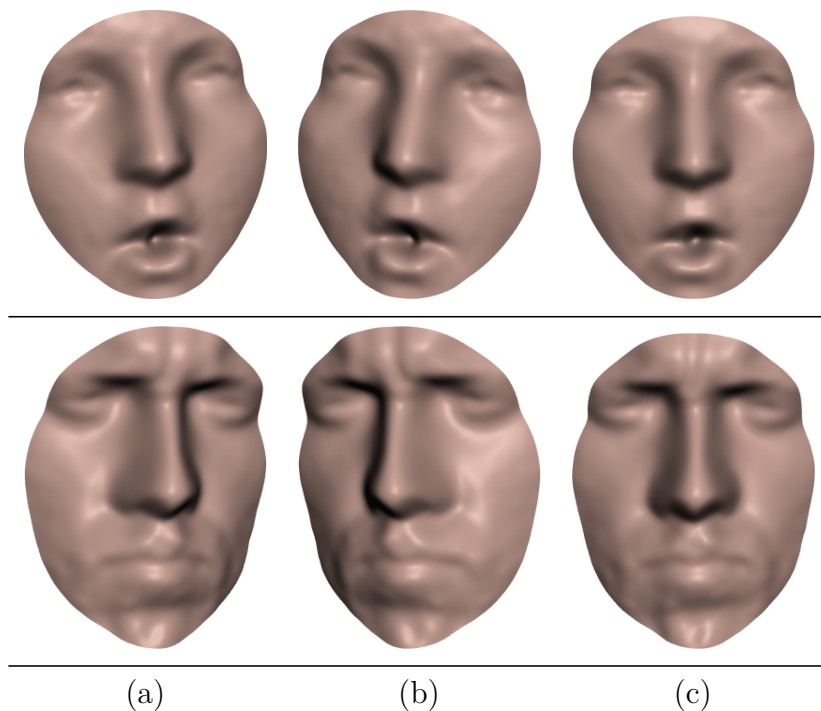


Figure 5.11: Exemples de correction de la pose d'un visage en utilisant son visage miroir : (a) le visage original, (b) le visage miroir, et (c) le visage dont la pose est normalisé.

### 5.5.3 Paramétrisation des visages

Maintenant que les visages sont invariants aux transformations rigides, il reste à paramétriser les visages afin d'utiliser la méthodologie développée en Section 5.4. Pour atteindre cet objectif, nous adaptons les travaux de Drira et al. [DADS10]. Dans ces derniers, les auteurs cherchent à extraire les courbes radiales d'un visage en utilisant l'intersection du visage avec un plan. Nous allons par la suite utiliser cette méthode d'extraction des courbes radiales pour paramétriser un visage  $s$ . Tout d'abord, nous générons les demi-plans  $P_\theta$ . La courbe radiale du visage  $s$  à angle  $\theta$ , dénotée  $c_\theta$ , est alors l'intersection de  $s$  avec le demi-plan  $P_\theta$ . Une fois les courbes radiales  $c_\theta$  obtenues, il reste à les paramétriser afin d'avoir une paramétrisation de  $s$ . Pour ce faire, nous paramétrisons chaque courbe radiale  $c_\theta$  en utilisant la paramétrisation par longueur d'arc, dont le domaine de définition est alors  $[0, 1]$ . Ainsi, cette procédure permet une paramétrisation totale du visage  $f$ , tel que :

$$\begin{aligned} s : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\mapsto c_\theta(r) = (X(r, \theta), Y(r, \theta), Z(r, \theta)) \end{aligned}$$

Un exemple illustratif de la procédure est donné en Figure 5.12. À partir d'un visage original (Figure 5.12a), nous extrayons chaque courbe radiale par l'intersection de la surface avec un demi-plan (Figure 5.12b). Une fois l'ensemble des courbes radiales obtenues (Figure 5.12c), nous les paramétrisons afin d'avoir une paramétrisation complète du visage (Figure 5.12d).

L'ensemble des a priori supposés pour effectuer la prédiction est maintenant assuré, ce qui permet l'utilisation des modèles de prédiction développés en Section 5.4.

## 5.6 Résultats expérimentaux

Dans la suite de ce chapitre, nous représentons chaque visage en utilisant 100 courbes radiales. Chacune de ces courbes est ensuite discrétisée en 50 points. De plus, une fois l'expression lissée, nous représenterons chaque expression à l'aide de 15 visages.

Avant de présenter les résultats expérimentaux, il reste à détailler les méthodes de résolution numérique utilisées pour estimer  $\hat{\gamma}_S$  et  $\bar{\Gamma}_T$ . En se basant sur les motivations de [DAS<sup>+</sup>13] pour analyser la forme des visages en utilisant les courbes radiales, nous allons re-paramétriser les surfaces selon la composante  $r$  uniquement. Cette estimation est par

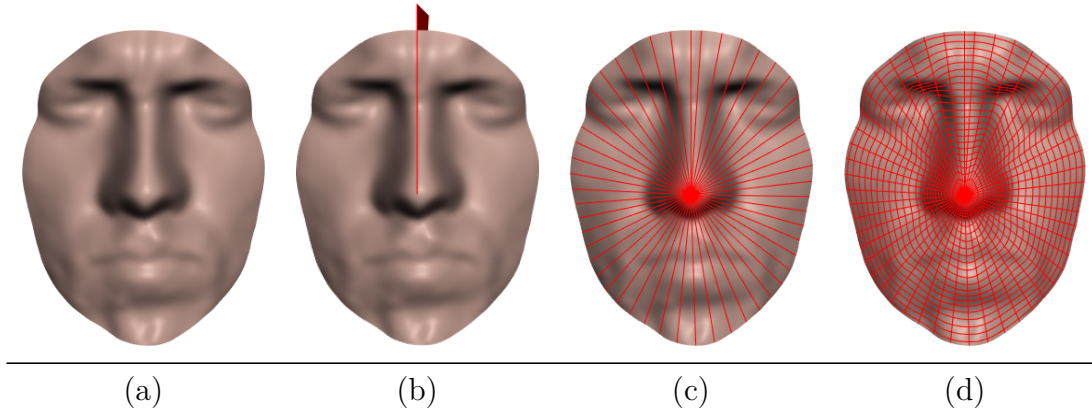


Figure 5.12: Exemple de paramétrisation d'un visage : (a) le visage original, (b) l'extraction d'une courbe radiale par intersection du visage avec un plan, (c) l'ensemble des courbes radiales, et (d) le visage paramétrisé.

la suite effectuée en utilisant l'algorithme de programmation dynamique (DPA). Ce même algorithme est aussi utilisé pour estimer la re-paramétrisation temporelle  $\bar{\Gamma}_{\mathcal{T}}$ .

Nous utilisons par la suite un noyau gaussien  $\mathcal{K}$  pour l'estimateur de Nadaraya-Watson, de fenêtre  $h$  associée définie comme suit :

$$h^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( d_S(\bar{\alpha}_i(0), \bar{\alpha}_*(0)) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_S(\bar{\alpha}_i(0), \bar{\alpha}_*(0)) \right)^2 \quad (5.30)$$

### 5.6.1 Moyenne d'expression

Avant de nous focaliser sur les résultats de prédiction d'expression, nous souhaitons tout d'abord nous intéresser à la moyenne de chaque classe d'expression. Ces moyennes sont présentées en Figure 5.13. En particulier, nous remarquons que l'expression de colère est caractérisée par un froncement des sourcils, et l'expression de joie par un haussement des joues. La peur et la surprise sont quand à eux plus difficiles à caractériser, car seul l'amplitude de l'ouverture de la bouche change entre ces deux expressions.

### 5.6.2 Prédiction d'expression à partir d'une surface de visage

Nous nous focalisons maintenant à la qualité de prédiction des expressions du visage. Les résultats sur trois données en utilisant les deux méthodes de prédiction proposées sont présentés en Figure 5.14. Dans les deux cas, les deux premiers exemples donnent des expressions convaincantes. Cependant, le troisième exemple montre les limitations de l'estimateur empirique. En effet, l'expression est erronée, avec une lèvre supérieure qui



Figure 5.13: Expression moyenne pour chaque classe d'expression: (a) colère, (b) dégoût, (c) peur, (d) joie, (e) tristesse, et (f) surprise.

descend en même temps que son homologue inférieure. Ce problème n'est pas présent avec les résultats utilisant l'estimateur du type Nadaraya-Watson.

Afin de démontrer l'utilité de recalibrer les expressions avant d'effectuer la prédiction, nous présentons, en utilisant l'estimateur empirique, les résultats obtenus sans le recalage spatio-temporel d'une part, et sans le recalage temporel d'autre part. Les résultats pour les mêmes données que ceux présentées en Figure 5.14 sont introduits en Figure 5.15 et Figure 5.16 respectivement. Sans le recalage spatial assurant les bonnes correspon-

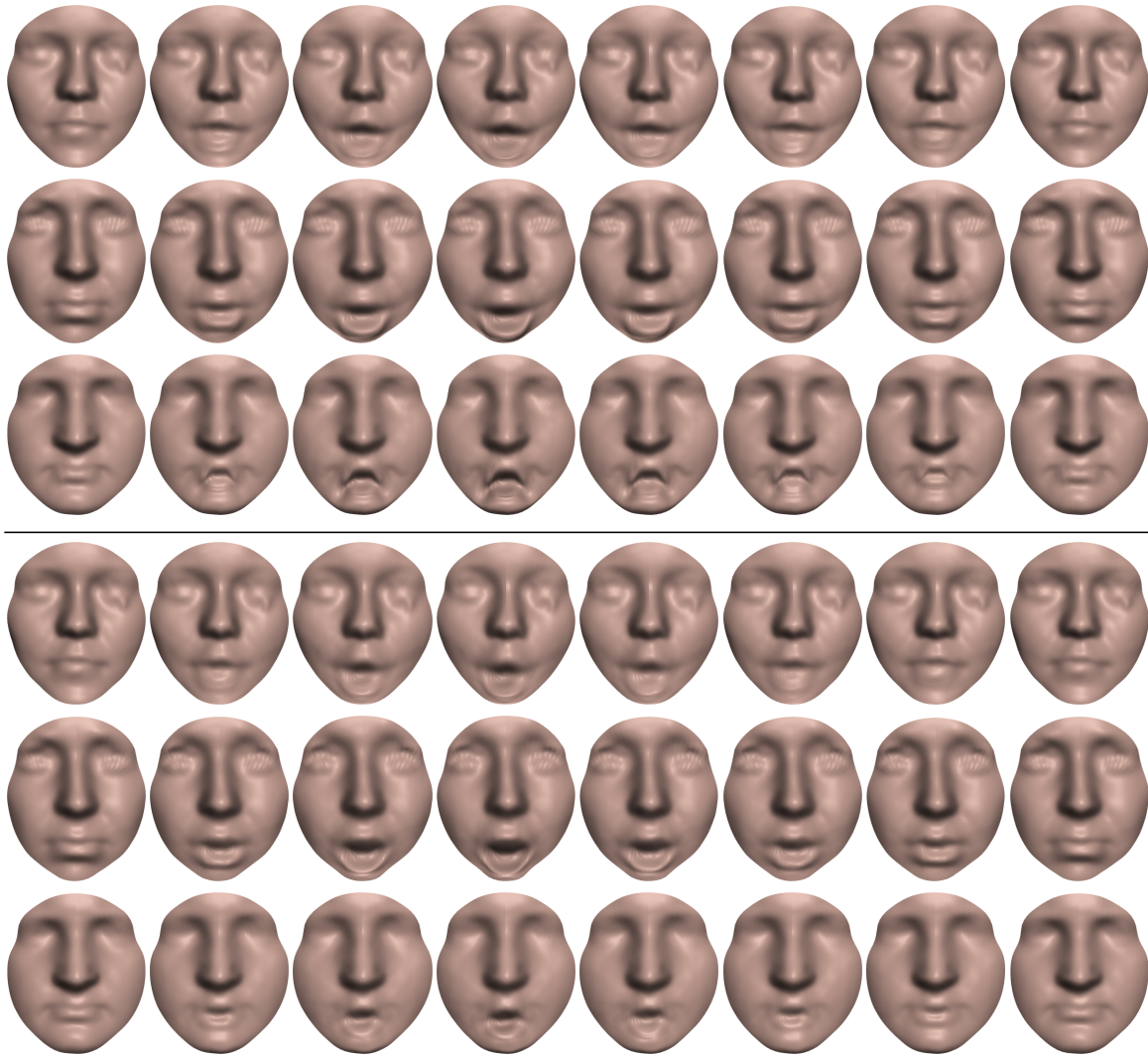


Figure 5.14: Exemples de prédiction d'expression de surprise en utilisant : (haut) l'estimateur empirique, (bas) l'estimateur de Nadaraya-Watson.

dances entre les différents visages, l'expression de surprise transmise fait s'enfoncer la lèvre inférieure dans la bouche de l'individu, ce qui génère un visage anormal. Une fois le problème des correspondances spatiales résolu, la lèvre inférieure continue d'avoir une forme étrange au cours de l'expression, bien qu'elle descende correctement pour effectuer une expression de surprise. Cette anomalie s'explique par une étape temporelle distincte de la lèvre suivant les expressions de notre base d'apprentissage. En particulier, l'avant-dernier visage de chaque expression prédite de la Figure 5.16 montre cet effet.





Figure 5.15: Exemples de prédiction d'expression de surprise en utilisant l'estimateur empirique sans avoir effectué les recalages spatiaux et temporels.



Figure 5.16: Exemples de prédiction d'expression de surprise en utilisant l'estimateur empirique après avoir recalé les expressions spatialement uniquement.

### 5.6.3 Prédiction d'expression à partir d'autres surfaces

Dans cette partie, nous testons les limites de notre modèle de prédiction d'expressions. Pour ce faire, nous allons essayer de prédire une classe d'expression sur d'autres surfaces hémisphériques.

Dans un premier temps, nous allons utiliser deux surfaces hémisphériques simples. Pour ce faire, nous utilisons le disque parfait et la demi-sphère. Les résultats obtenus

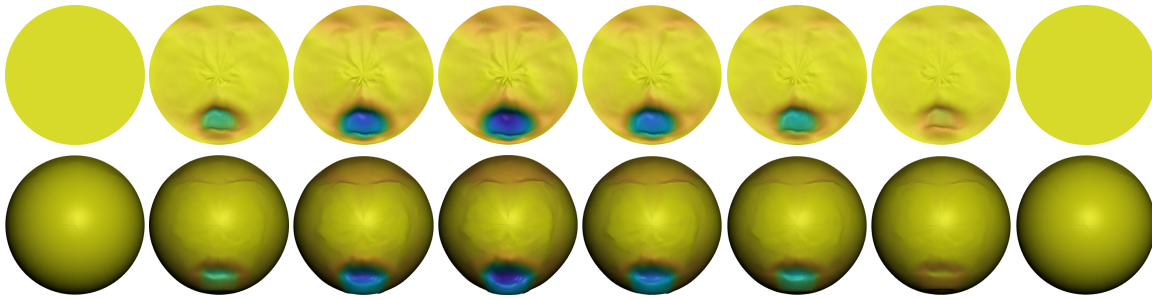


Figure 5.17: Prédiction de l'expression de surprise sur d'autres surfaces hémisphérique: le disque et la demi-sphère

sur l'expression de surprise sont présentés en Figure 5.17. En plus d'avoir une prédiction qui semble correcte, ces prédictions permettent d'avoir une meilleure visualisation des déformations de la classe d'expression transmise. Dans le cas de la surprise, nous remarquons une large déformation au niveau de la bouche, mais aussi une déformation plus petite au niveau des sourcils.

Nous allons maintenant prédire une expression sur des surfaces hémisphériques plus complexes. Pour ce faire, nous allons utiliser d'autres visages, mais qui ne sont pas humains. Plus précisément, nous considérons deux visages de singes, un visage humain dont la bouche et le nez ont été effacés, et un visage de lion. Les résultats pour chacun de ses visages sont présentés en Figure 5.18. Dans les trois premiers cas l'expression est convaincante. Dans le cas du lion, l'expression semble étrange. Ce problème est dû au fait que la structure du visage du lion est très différente de celle des humains. En effet comparé aux humains, le museau du lion, que l'on apparente au nez, est très avancé par rapport au reste du visage. Ainsi, notre méthodologie ne fonctionne pas si la nature du visage dont on cherche à prédire l'expression est trop différente de la base d'apprentissage, car la déformation n'est pas adaptée à ce type de visage trop distinct des autres.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode de prédiction spatio-temporelle permettant de prédire une trajectoire de surfaces en connaissant uniquement sa surface initiale. La méthode commence par recalculer spatio-temporellement les trajectoires connues afin d'avoir de bonnes correspondances entre ces dernières, puis prédit la nouvelle trajectoire à l'aide d'une régression.

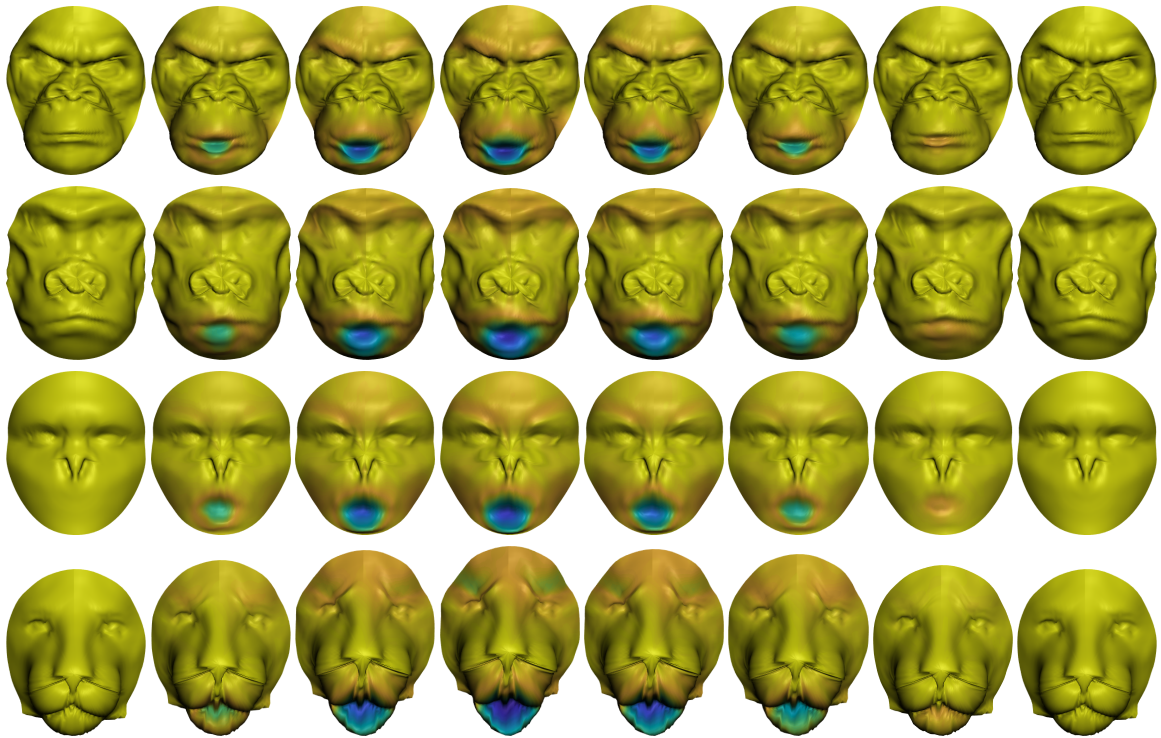


Figure 5.18: Prédiction de l'expression de surprise sur d'autres visages non humains : King Kong, Koba, un homme sans bouche ni nez, et un lion.

La méthode a été appliquée à la prédiction d'expression du visage. En se basant sur les expériences nous pouvons en conclure que l'approche proposée permet d'apprendre et de synthétiser automatiquement les différentes classes expressions. De plus la qualité de prédiction est bonne, car visuellement, elle transmet correctement l'expression choisie.

# Chapitre 6

## Conclusion générale et perspectives

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux problèmes de prédiction de surface à partir de données provenant de l'imagerie numérique. Pour résoudre ces problèmes de prédiction, qu'ils soient spatiaux ou spatio-temporels, nous nous sommes basés sur des processus stochastiques.

Le premier problème étudié est un problème de prédiction de surface statique. Plus précisément nous avons cherché à reconstruire une surface cylindrique à partir de courbes, qui ont été extraites manuellement sur des images de plusieurs coupes 2D de la surface à reconstruire. Une approche en deux temps a alors été proposée. Nous commençons par trouver les correspondances des courbes des coupes 2D sur un cylindre parfait synthétique. Pour ce faire, nous avons utilisé la représentation SRVF et les outils développés autour permettant d'analyser la forme de courbes. Une fois ces correspondances effectuées, une interpolation de la déformation du cylindre sur la surface à reconstruire est estimée à l'aide de ces correspondances, en supposant que le champ de déformation est un champ aléatoire gaussien isotrope et stationnaire d'ordre 2. Pour modéliser le champ de déformation nous avons utilisé une fonction de covariance de Matérn, qui est connu pour être très flexible. Les différents paramètres ont alors été estimés par l'estimateur du maximum de vraisemblance via les approches numériques de la descente du gradient, et de Newton, mais aussi à l'aide de l'inférence bayésienne. Les différents exemples provenant de l'imagerie médicale et de l'infographie ont montré que les résultats obtenus étaient de meilleure qualité que les méthodes existantes dans la littérature.

Dans un second temps et étant motivés par les résultats de la première partie, nous avons voulu prédire une surface dynamique à partir de sa surface initiale, ainsi que d'autres surfaces dynamiques ayant une dynamique similaire. Afin de pouvoir avoir une prédiction

de bonne qualité, le développement d'outils de recalage spatio-temporel de ces séquences de surfaces a été au préalable nécessaire. En effet, aucune correspondance spatiale entre les différentes surfaces n'a été établie au préalable, ce qui empêche d'apprendre la déformation de la surface due à la dynamique. De même, la vitesse d'exécution de cette dynamique pouvant ne pas s'effectuer en même temps, il est nécessaire de recalculer temporellement les séquences de surfaces. Une fois ce recalage effectué, nous prédisons la dynamique de la nouvelle surface en utilisant une régression linéaire à partir des déformations extraites. Cette régression a par la suite été estimée à l'aide de l'estimateur empirique d'une part, et en pondérant ces dynamiques avec un estimateur du type Nadaraya-Watson d'autre part. La méthode a été testée dans le cas d'expression du visage, où nous cherchons à transmettre une classe d'expression. L'approche proposée permet de prédire des expressions de bonne qualité visuelle. Des meilleurs résultats sont observés pour le second estimateur, qui est plus adaptatif grâce à un poids associé à la proximité entre les premières surfaces des différentes séquences.

## Perspectives

Les travaux effectués dans cette thèse ouvrent de nombreux axes de recherche.

Tout d'abord, les a priori utilisés dans les différentes méthodes proposées étant faibles, une adaptation à d'autres types de surfaces est envisagée. En effet, dans le problème de reconstruction de surface, il suffit d'avoir une surface homéomorphe à la surface à reconstruire, telle qu'une sphère pour les surfaces sphériques par exemple. Pour la prédiction de surfaces dynamiques, il est nécessaire que les différentes surfaces soient lisses ( $C^1$ ), et que les séquences de surfaces soient lisses ( $C^1$ ) dans le temps. De ce fait, une approche permettant de prédire une surface dynamique à partir de courbes, que ce soit dans les séquences connues ou pour la nouvelle surface, est fortement envisagée.

Dans un second temps, une amélioration de la méthodologie de reconstruction de surface, en utilisant une fonction de covariance de Matérn bivariée [GKS10] pourrait améliorer les résultats, en rendant le modèle plus général.

En ce qui concerne le second problème, l'outil de recalage spatio-temporel de surfaces développé ouvre plusieurs approches. Tout d'abord, dans le domaine des séquences de surfaces et en particulier pour les expressions du visage, il est plus courant d'essayer d'effectuer de la classification. En outre, dans les approches existantes dans la littérature, le recalage temporel n'a jamais été effectué à notre connaissance. Nous avons alors effectué

un test préliminaire de classification. Pour ce faire nous avons effectué une validation croisée, en apprenant sur l'ensemble des expressions de cinq de nos six individus, tout en cherchant à classer les différentes expressions de l'individu écarté. Nous avons choisi une classification naïve où l'expression est affectée à la classe de l'expression prédite la plus proche, en utilisant l'estimateur basé Nadaraya-Watson. Dans cette approche nous ne supposons pas qu'il y ait exactement une expression de chaque classe à prédire, ce qui permet d'être plus générique. Ce test préliminaire admet des résultats prometteurs avec 75% de bonne classification.

Pour améliorer cette classification une analyse plus formelle des séquences spatio-temporelles de surfaces est envisagée. En effet, lors du recalage spatial, nous avons appliqué la re-paramétrisation spatiale sur l'espace des visages afin de pouvoir retrouver ces surfaces pour la prédiction. Cependant, pour plusieurs problèmes comme la classification, il n'est pas nécessaire de reconstruire ces surfaces. Ainsi une adaptation du recalage temporel, qui sera effectuée sur l'espace SRNF au lieu de l'espace des surfaces est envisagée. Cette approche est théoriquement possible car une adaptation de la représentation SRVF, appelé Transported Square-Root Velocity Field (TSRVF)[SKKS14], permet d'utiliser les mêmes propriétés que la représentation SRVF sur une variété Riemannienne, et ainsi d'effectuer notre recalage temporel sur l'espace des formes de surfaces.



# Bibliographie

- [ABK98] N. Amenta, M. Bern, and M. Kamvysselis. A new voronoi-based surface reconstruction algorithm. *Computer graphics proceedings, annual conference series*, pages 415–421, 1998.
- [AC10] S. Arlot and A. Celisse. A survey of cross-validation procedures for model selection. *Statistics Surveys*, 4:40–79, 2010.
- [ACA05] R. Allegre, R. Chaine, and S. Akkouche. Convection-driven dynamic surface reconstruction. In *International Conference on Shape Modeling and Applications 2005 (SMI'05)*, pages 33–42. IEEE, 2005.
- [AG10] T.V. Apanasovich and M.G. Genton. Cross-covariance functions for multivariate random fields based on latent dimensions. *Biometrika*, 97(1):15–30, 2010.
- [AHK<sup>+</sup>16] S. Andrews, I. Huerta, T. Komura, L. Sigal, and K. Mitchell. Real-time physics-based motion capture with sparse sensors. In *Proceedings of the 13th European Conference on Visual Media Production (CVMP 2016)*, page 5. ACM, 2016.
- [And62] T.W. Anderson. *An introduction to multivariate statistical analysis*. Wiley, 1962.
- [APV15] O. Arandjelović, D. Pham, and S. Venkatesh. Efficient and accurate set-based registration of time-separated aerial images. *Pattern Recognition*, 48(11):3466–3476, 2015.
- [AT07] R. J. Adler and J. E. Taylor. *Random Fields and Geometry*. Springer Monographs in Mathematics, 2007.
- [AWHTG05] M. S. Abdel-Wahab, A. S. Hussein, I. Taha, and M. S. Gaber. An enhanced algorithm for surface reconstruction from a cloud of points. In *GVIP05 Conference, Cairo, Egypt*, pages 19–21, 2005.



- [BAB<sup>+</sup>11] C. Brigante, N. Abbate, A. Basile, A. C. Faulisi, and S. Sessa. Towards miniaturization of a mems-based wearable motion capture system. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 58(8):3234–3241, 2011.
- [Béz86] P. Bézier. *Courbes et surfaces, mathématiques et cao*, 4. Hermès, Paris, 1986.
- [Bie88] H. J. Bierens. The nadaraya-watson kernel regression function estimator. Technical report, 1988.
- [BKBH09] M. Bolitho, M. Kazhdan, R. Burns, and H. Hoppe. Parallel poisson surface reconstruction. In *International symposium on visual computing*, pages 678–689. Springer, 2009.
- [BL88] D. S. Broomhead and D. Lowe. Radial basis functions, multi-variable functional interpolation and adaptive networks. Technical report, Royal Signals and Radar Establishment Malvern (United Kingdom), 1988.
- [BMR<sup>+</sup>99] F. Bernardini, J. Mittleman, H. Rushmeier, C. Silva, and G. Taubin. The ball-pivoting algorithm for surface reconstruction. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 5(4):349–359, 1999.
- [BVTH16] C. Brandt, C. Von Tycowicz, and K. Hildebrandt. Geometric flows of curves in shape space for processing motion of deformable objects. In *Computer Graphics Forum*, volume 35, pages 295–305. Wiley Online Library, 2016.
- [CBC<sup>+</sup>01] J. C. Carr, R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. McCallum, and T. R. Evans. Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions. In *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 67–76. ACM, 2001.
- [CBP<sup>+</sup>11] L. P. Chamié, R. Blasbalg, R. M. A. Pereira, G. Warmbrand, and P. C. Serafini. Findings of pelvic endometriosis at transvaginal us, mr imaging, and laparoscopy. *Radiographics*, 31(4):E77–E100, 2011.
- [Cre15] N. Cressie. *Statistics for Spatial Data, Revised Edition*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2015.
- [CT11] F. Calakli and G. Taubin. Ssd: Smooth signed distance surface reconstruction. *Computer Graphics Forum*, 30:1993 – 2002, 11 2011.

- [CW08] T. Cheng and J. Wang. Integrated spatio-temporal data mining for forest fire prediction. *Transactions in GIS*, 12(5):591–611, 2008.
- [CW15] N. Cressie and C. K. Wikle. *Statistics for spatio-temporal data*. John Wiley & Sons, 2015.
- [CZZ<sup>+</sup>10] S. Chen, J. Zhang, H. Zhang, Q. Guan, Y. Du, C. Yao, and J. Zhang. Myocardial motion analysis for determination of tei-index of human heart. *Sensors*, 10(12):11428–11439, 2010.
- [DADS10] H. Drira, B. B. Amor, M. Daoudi, and A. Srivastava. Pose and expression-invariant 3d face recognition using elastic radial curves. In *British machine vision conference*, pages 1–11, 2010.
- [DAS<sup>+</sup>13] H. Drira, B. B. Amor, A. Srivastava, M. Daoudi, and R. Slama. 3d face recognition under expressions, occlusions, and pose variations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 35(9):2270–2283, 2013.
- [Del34] B. Delaunay. Sur la sphere vide. *Bulletin de l’Académie des Sciences de l’URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, 6:793–800, 1934.
- [DG03] T. K. Dey and S. Goswami. Tight cocone: a water-tight surface reconstructor. In *Proceedings of the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications*, pages 127–134. ACM, 2003.
- [DMS92] W. Dahmen, C. A. Micchelli, and H.-P. Seidel. Blossoming begets b-spline bases built better by b-patches. *Mathematics of computation*, 59(199):97–115, 1992.
- [DPB15] D. J. Daley, E. Porcu, and M. Bevilacqua. Classes of compactly supported covariance functions for multivariate random fields. *Stochastic environmental research and risk assessment*, 29(4):1249–1263, 2015.
- [DPC<sup>+</sup>14] Stanley Durrleman, Marcel Prastawa, Nicolas Charon, Julie R Korenberg, Sarang Joshi, Guido Gerig, and Alain Trouvé. Morphometry of anatomical shape complexes with dense deformations and sparse parameters. *NeuroImage*, 101:35–49, 2014.
- [DZY<sup>+</sup>07] S. Du, N. Zheng, S. Ying, Q. You, and Y. Wu. An extension of the icp algorithm considering scale factor. In *Image Processing, 2007. ICIP 2007. IEEE International Conference on*, volume 5, pages V–193. IEEE, 2007.

- [Ekm71] P. Ekman. Universals and cultural differences in facial expressions of emotion. In *Nebraska symposium on motivation*. University of Nebraska Press, 1971.
- [EM94] H. Edelsbrunner and E. P. Mücke. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 13(1):43–72, 1994.
- [ESF14] T. Economou, D. B. Stephenson, and C. A. Ferro. Spatio-temporal modelling of extreme storms. *The Annals of Applied Statistics*, 8(4):2223–2246, 2014.
- [FE78] E. Friesen and P. Ekman. Facial action coding system: a technique for the measurement of facial movement. *Palo Alto*, 3, 1978.
- [FLL10] M. Fanwen, W. Lushen, and L. Liping. 3d point clouds processing and precise surface reconstruction of the face. In *2010 International Conference on Image Analysis and Signal Processing*, pages 104–107. IEEE, 2010.
- [GB04] R. Goldenthal and M. Bercovier. Design of curves and surfaces using multi-objective optimization. *Retrieved on August, 19:2011*, 2004.
- [GCSA13] S. Giraudot, D. Cohen-Steiner, and P. Alliez. Noise-adaptive shape reconstruction from raw point sets. In *Proceedings of the Eleventh Eurographics/ACMSIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*, pages 229–238. Eurographics Association, 2013.
- [GIC<sup>+</sup>07] A. Gálvez, A. Iglesias, A. Cobo, J. Puig-Pey, and J. Espinola. Bézier curve and surface fitting of 3d point clouds through genetic algorithms, functional networks and least-squares approximation. In *International Conference on Computational Science and Its Applications*, pages 680–693. Springer, 2007.
- [GKH15] A. Grover, A. Kapoor, and E. Horvitz. A deep hybrid model for weather forecasting. In *Proceedings of the 21th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 379–386. ACM, 2015.
- [GKS10] T. Gneiting, W. Kleiber, and M. Schlather. Matérn cross-covariance functions for multivariate random fields. *Journal of the American Statistical Association*, 105:1167–1177, 2010.

- [GLL<sup>+</sup>16] L. Gao, Y.-K. Lai, D. Liang, S.-Y. Chen, and S. Xia. Efficient and flexible deformation representation for data-driven surface modeling. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 35(5):158, 2016.
- [GR74] W. J. Gordon and R. F. Riesenfeld. B-spline curves and surfaces. In *Computer aided geometric design*, pages 95–126. Elsevier, 1974.
- [GSG17] A. Ghaderi, B. M. Sanandaji, and F. Ghaderi. Deep forecast: Deep learning-based spatio-temporal forecasting. *arXiv preprint arXiv:1707.08110*, 2017.
- [Has70] W. K. Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1):97–109, 1970.
- [HBM<sup>+</sup>13] H. Hatem, Z. Beiji, R. Majeed, M. Lutf, and J. Waleed. Nose tip localization in three-dimensional facial mesh data. *International Journal of Advancements in Computing Technology*, 5(13):99, 2013.
- [HC01] C. Han and B. P. Carlin. Markov chain monte carlo methods for computing bayes factors: A comparative review. *Journal of the American Statistical Association*, 96(455):1122–1132, 2001.
- [HHTP12] T. Hengl, G. Heuvelink, M Tadić, and E. Pebesma. Spatio-temporal prediction of daily temperatures using time-series of modis lst images. *Theoretical and applied climatology*, 107(1-2):265–277, 2012.
- [HQ04] Y. He and H. Qin. Surface reconstruction with triangular b-splines. In *Geometric Modeling and Processing, 2004. Proceedings*, pages 279–287. IEEE, 2004.
- [HRS<sup>+</sup>14] B. Heeren, M. Rumpf, P. Schröder, M. Wardetzky, and B. Wirth. Exploring the geometry of the space of shells. In *Computer Graphics Forum*, volume 33, pages 247–256. Wiley Online Library, 2014.
- [HRS<sup>+</sup>16] B. Heeren, M. Rumpf, P. Schröder, M. Wardetzky, and B. Wirth. Splines in the space of shells. In *Computer Graphics Forum*, volume 35, pages 111–120. Wiley Online Library, 2016.
- [HRWW12] B. Heeren, M. Rumpf, M. Wardetzky, and B. Wirth. Time-discrete geodesics in the space of shells. In *Computer Graphics Forum*, volume 31, pages 1755–1764. Wiley Online Library, 2012.

- [JCX08] T.-T. Jiang, S. Chen, and Y. Xu. 3-d representation and volumetric measurement of human heart from a cylindrical b-spline surface model. In *2008 International Conference on BioMedical Engineering and Informatics*, volume 1, pages 765–769. IEEE, 2008.
- [JKKS12] I. Jermyn, S. Kurtek, E. Klassen, and A. Srivastava. Elastic shape matching of parameterized surfaces using square root normal fields. In *European conference on computer vision*, pages 804–817. Springer, 2012.
- [JKLS17] I. Jermyn, S. Kurtek, H. Laga, and A. Srivastava. Elastic shape analysis of three-dimensional objects. *Synthesis Lectures on Computer Vision*, 12(1):1–185, 2017.
- [JKSJ07] S.H. Joshi, E. Klassen, A. Srivastava, and I. Jermyn. Removing shape-preserving transformations in square-root elastic (sre) framework for shape analysis of curves. In *EMMCVPR*, pages 387–398, 2007.
- [Jon15] N. Jones. *Hollywood action films and spatial theory*. Routledge, 2015.
- [KBH06] M. Kazhdan, M. Bolitho, and H. Hoppe. Poisson surface reconstruction. In *Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing*, volume 7, 2006.
- [KDL10] K. Kenobi, I. L. Dryden, and H. Le. Shape curves and geodesic modelling. *Biometrika*, 97:567–584, 2010.
- [KDL18] K.-R. Kim, I. L. Dryden, and H. Le. Smoothing splines on riemannian manifolds, with applications to 3d shape space. *arXiv preprint arXiv:1801.04978*, 2018.
- [Ken84] D. Kendall. Shape manifolds, procrustean metrics, and complex projective spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 16(2):81–121, 1984.
- [KH13] M. Kazhdan and H. Hoppe. Screened poisson surface reconstruction. *ACM Transactions on Graphics*, 32(3):1–13, 2013.
- [KKG<sup>+</sup>11] Sebastian Kurtek, Eric Klassen, John C Gore, Zhaohua Ding, and Anuj Srivastava. Elastic geodesic paths in shape space of parameterized surfaces. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 34(9):1717–1730, 2011.

- [KL85] P.K. Kitanidis and R.W. Lane. Maximum likelihood parameter estimation of hydrologic spacial processes by the gauss-newton method. *Journal of Hydrology*, 79:53–71, 1985.
- [KP03] Y. Kamarianakis and P. Prastacos. Forecasting traffic flow conditions in an urban network: Comparison of multivariate and univariate approaches. *Transportation Research Record*, 1857(1):74–84, 2003.
- [KPL<sup>+</sup>10] A. Koutsoudis, G. Pavlidis, V. Liami, D. Tsiafakis, and C. Chamzas. 3D pottery content-based retrieval based on pose normalisation and segmentation. *Journal of Cultural Heritage*, 11(3):329 – 338, 2010.
- [LBB<sup>+</sup>17] T. Li, T. Bolkart, M. J. Black, H. Li, and J. Romero. Learning a model of facial shape and expression from 4d scans. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 36(6):194, 2017.
- [LK00] H. Le and A. Kume. Detection of shape changes in biological features. *Journal of Microscopy*, 200:140–147, 2000.
- [LWCC10] X. Li, W. Wan, X. Cheng, and B. Cui. An improved poisson surface reconstruction algorithm. In *2010 International Conference on Audio, Language and Image Processing*, pages 1134–1138. IEEE, 2010.
- [LWQ08] H. Liu, X. Wang, and W. Qiang. Implicit surface reconstruction from 3d scattered points based on variational level set method. In *2008 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics*, pages 1–5. IEEE, 2008.
- [LZZT15] J. Liu, Q. Zhang, C. Zhang, and C. Tang. Robust nose tip detection for face range images based on local features in scale-space. In *2015 International Conference on 3D Imaging (IC3D)*, pages 1–8. IEEE, 2015.
- [Mat60] B. Matérn. *Spatial Variations*. PhD Thesis, Stockholm University, 1960.
- [MBH15] R. Majeed, Z. Bei, and H. Hatem. Nose tip detection in 3d face image based on maximum intensity algorithm. *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*, 10(5):373–382, 2015.
- [MBW<sup>+</sup>05] K. Museth, D. E. Breen, R. T. Whitaker, S. Mauch, and D. Johnson. Algorithms for interactive editing of level set models. *Computer Graphics Forum*, 24(4):821–841, 2005.

- [MdGD<sup>+</sup>10] P. Mullen, F. de Goes, M. Desbrun, D. Cohen-Steiner, and P. Alliez. Signing the unsigned: Robust surface reconstruction from raw pointsets. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 29(5):1733–1741, 2010.
- [MGV11] I. Macedo, J. P. Gois, and L. Velho. Hermite radial basis functions implicit. In *Computer Graphics Forum*, volume 30, pages 27–42. Wiley Online Library, 2011.
- [MJD17] X. Ma, Y. Jin, and Q. Dong. A generalized dynamic fuzzy neural network based on singular spectrum analysis optimized by brain storm optimization for short-term wind speed forecasting. *Applied Soft Computing*, 54:296–312, 2017.
- [MK16] J. Mercieca and V. Kadiramanathan. Estimation and identification of spatio-temporal models with applications in engineering, healthcare and social science. *Annual Reviews in Control*, 42:285–298, 2016.
- [MW11] W. Min and L. Wynter. Real-time road traffic prediction with spatio-temporal correlations. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 19(4):606–616, 2011.
- [Ng12] J. Ng. Seeing movement: On motion capture animation and james cameron’s avatar. *Animation*, 7(3):273–286, 2012.
- [NM10] T. Ni and Z. Ma. A fast surface reconstruction algorithm for 3d unorganized points. In *2010 2nd international conference on computer engineering and technology*, volume 7, pages V7–15. IEEE, 2010.
- [OS88] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1):12–49, 1988.
- [OT12] O. Ohashi and L. Torgo. Wind speed forecasting using spatio-temporal indicators. In *ECAI*, pages 975–980. Citeseer, 2012.
- [Pan03] I. Pandzic. Facial motion cloning. *Graphical Models*, 65(6):385–404, 2003.
- [Pen15] X. Peng. Nose tip detection from face range images. *Encyclopedia of Biometrics*, pages 1168–1174, 2015.
- [Pot09a] J. Potthoff. Sample properties of random fields. i. separability and measurability. *Communications on Stochastic Analysis*, 3(1):9, 2009.

- [Pot09b] J. Potthoff. Sample properties of random fields. ii. continuity. *Communications on Stochastic Analysis*, 3(3):2, 2009.
- [Pot10] J. Potthoff. Sample properties of random fields iii: Differentiability. *Communications on Stochastic Analysis*, 4(3):3, 2010.
- [Pow87] M. Powell. Radial basis functions for multivariable interpolation: a review. *Algorithms for approximation*, 1987.
- [PS96] R. Pfeifle and H.-P. Seidel. Triangular b-splines for blending & filling of polygonal holes. In *Graphics Interface*, pages 186–193, 1996.
- [RL96] A. E Raftery and S. M. Lewis. Implementing mcmc. *Markov chain Monte Carlo in practice*, pages 115–130, 1996.
- [RL01] S. Rusinkiewicz and M. Levoy. Efficient variants of the icp algorithm. In *3dim*, volume 1, pages 145–152, 2001.
- [Roh01] K. Rohr. *Landmark-based image analysis: Using geometric and intensity models*. Kluwer Academic Publishing, 2001.
- [RWW<sup>+</sup>02] J. E. Roos, D. Weishaupt, S. Wildermuth, J. K. Willmann, B. Marincek, and P. R. Hilfiker. Experience of 4 years with open mr defecography: pictorial review of anorectal anatomy and disease. *Radiographics*, 22(4):817–832, 2002.
- [SA19] C. Samir and I. Adouani. C1 interpolating bézier path on riemannian manifolds, with applications to 3d shape space. *Applied Mathematics and Computation*, 348:371–384, 2019.
- [SB06] A. Saeedfar and K. Barkeshli. Shape reconstruction of three-dimensional conducting curved plates using physical optics, nurbs modeling, and genetic algorithm. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 54(9):2497–2507, 2006.
- [SDP12] A. Sotiras, C. Davatazikos, and N. Paragios. Deformable medical image registration : A survey. *INRIA Report*, september 2012.
- [SK16] A. Srivastava and E. Klassen. *Functional and Shape Data Analysis*. Springer, New York, NY, 2016.



- [SKJJ11] A. Srivastava, E. Klassen, S. Joshi, and I. Jermyn. Shape analysis of elastic curves in euclidean spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33(7):1415–1428, 2011.
- [SKKS14] J. Su, S. Kurtek, E. Klassen, and A. Srivastava. Statistical analysis of trajectories on riemannian manifolds: bird migration, hurricane tracking and video surveillance. *The Annals of Applied Statistics*, 8(1):530–552, 2014.
- [SPS<sup>+</sup>11] T. Shiratori, H. S. Park, L. Sigal, Y. Sheikh, and J. K. Hodgins. Motion capture from body-mounted cameras. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, volume 30, page 31. ACM, 2011.
- [Ste99] M. L. Stein. *Interpolation of Spatial Data*. Springer Series in Statistics, 1999.
- [Tas18] A. Tascikaraoglu. Evaluation of spatio-temporal forecasting methods in various smart city applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 82:424–435, 2018.
- [Tho42] D. W. Thompson. On growth and form. *Cambridge Univ. Press*, 1942.
- [TXC<sup>+</sup>17] Z. Tu, W. Xie, J. Cao, C. Van Gemeren, R. Poppe, and R. C. Veltkamp. Variational method for joint optical flow estimation and edge-aware image restoration. *Pattern Recognition*, 65:11–25, 2017.
- [TZS<sup>+</sup>16] J. Thies, M. Zollhofer, M. Stamminger, C. Theobalt, and M. Nießner. Face2face: Real-time face capture and reenactment of rgb videos. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 2387–2395, 2016.
- [VBMP08] D. Vlastic, I. Baran, W. Matusik, and J. Popović. Articulated mesh animation from multi-view silhouettes. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, volume 27, page 97. ACM, 2008.
- [VMPMR16] T. Von Marcard, G. Pons-Moll, and B. Rosenhahn. Human pose estimation from video and imus. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 38(8):1533–1547, 2016.
- [WR06] C. Williams and C. E. Rasmussen. *Gaussian processes for machine learning*, volume 2. MIT Press Cambridge, MA, 2006.

- [WWL<sup>+</sup>16] H. Z. Wang, G. B. Wang, G. Q. Li, J. C. Peng, and Y. T. Liu. Deep belief network based deterministic and probabilistic wind speed forecasting approach. *Applied Energy*, 182:80–93, 2016.
- [WYZ17] R. Wen, W. Yan, and A. N. Zhang. Adaptive spatio-temporal mining for route planning and travel time estimation. In *2017 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*, pages 3278–3284. IEEE, 2017.
- [WZC12] X. Wei, P. Zhang, and J. Chai. Accurate realtime full-body motion capture using a single depth camera. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 31(6):188, 2012.
- [XH03] X. Xu and K. Harada. Automatic surface reconstruction with alpha-shape method. *The visual computer*, 19(7-8):431–443, 2003.
- [XZYC<sup>+</sup>14] X. Xing Zhang, L. Yin, J. F. Cohn, S. J. Canavan, M. Reale, A. Horowitz, P. Liu, and J. M. Girard. Bp4d-spontaneous: a high-resolution spontaneous 3d dynamic facial expression database. *Image Vision Comput.*, 32(10):692–706, 2014.
- [XZZ<sup>+</sup>14] S. Xiong, J. Zhang, J. Zheng, J. Cai, and L. Liu. Robust surface reconstruction via dictionary learning. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 33(6):201, 2014.
- [YLH<sup>+</sup>12] G. Ye, Y. Liu, N. Hasler, X. Ji, Q. Dai, and C. Theobalt. Performance capture of interacting characters with handheld kinects. In *European Conference on Computer Vision*, pages 828–841. Springer, 2012.
- [ZGHG10] K. Zhou, M. Gong, X. Huang, and B. Guo. Data-parallel octrees for surface reconstruction. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 17(5):669–681, 2010.
- [ZOF01] H.-K. Zhao, S. Osher, and R. Fedkiw. Fast surface reconstruction using the level set method. In *IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pages 194–201, 2001.
- [ZOMK00] H.-K. Zhao, S. Osher, B. Merriman, and M. Kang. Implicit and nonparametric shape reconstruction from unorganized data using a variational level set method. *Computer Vision and Image Understanding*, 80(3):295 – 314, 2000.

- 
- [ZSN05] T. Zinßer, J. Schmidt, and H. Niemann. Point set registration with integrated scale estimation. In *International conference on pattern recognition and image processing*, pages 116–119, 2005.
- [ZSZ<sup>+</sup>14] P. Zhang, K. Siu, J. Zhang, C. K. Liu, and J. Chai. Leveraging depth cameras and wearable pressure sensors for full-body kinematics and dynamics capture. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 33(6):221, 2014.
- [ZZSZ13] K. Zhang, L. Zhang, H. Song, and D. Zhang. Reinitialization-free level set evolution via reaction diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(1):258–271, 2013.