



HAL
open science

Modélisation de l'endurance en fatigue sous chargement complexe, statique et vibratoire

Raül de Moura Pinho

► **To cite this version:**

Raül de Moura Pinho. Modélisation de l'endurance en fatigue sous chargement complexe, statique et vibratoire. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2019. Français. NNT : 2019SACLN071 . tel-03085783

HAL Id: tel-03085783

<https://theses.hal.science/tel-03085783>

Submitted on 22 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation de l'endurance en fatigue sous chargement complexe, statique et vibratoire

Thèse de doctorat en VAE de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan
(Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay)

École doctorale n°579 Sciences Mécaniques et Energétiques,
Matériaux et Géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Solides, Structures et Matériaux

Thèse présentée et soutenue à l'Ecole Polytechnique, le 20 décembre 2019, par

M. Raül de Moura Pinho

Composition du Jury :

M. Olivier Hubert Professeur des Universités, ENS Paris-Saclay (– LMT)	Président
M. Thierry Palin-Luc Professeur des Universités, ENSAM Bordeaux (– I2M)	Rapporteur
M. Nicolas Ranc Professeur des Universités, ENSAM Paris (– PIMM)	Rapporteur
M. Gilbert Hénaff Professeur des Universités, ISAE-ENSMA (– Institut Pprime)	Examineur
Mme Véronique Doquet Directrice de Recherche CNRS, Ecole Polytechnique (– LMS)	Référente VAE
M. Christophe Cluzel Maître de Conférence, ENS Paris-Saclay (– LMT)	Co-référent VAE
M. François Comte Ingénieur de Recherche, Safran Aircraft Engines (– site de Villaroche)	Invité

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) de l'Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay (à l'époque Ecole Normale Supérieure de Cachan) et au bureau des méthodes sur le site de Villaroche de Safran Aircraft Engines.

Je remercie le secteur matériau du LMT de m'avoir accueilli et ses membres pour leur bonne humeur et leur disponibilité qui ont contribué à rendre le temps passé au laboratoire très agréable.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Un grand merci aux rapporteurs, Messieurs Thierry Palin-Luc et Nicolas Ranc, qui ont eu la lourde tâche d'analyser finement ce manuscrit. Leurs conseils et remarques m'ont été d'une grande aide. Merci à Monsieur Olivier Hubert d'avoir accepté de présider ce jury et pour toute l'aide apportée pour que cette soutenance devienne une réalité. Je remercie également Monsieur Gilbert Hénaff qui a été examinateur dans ce jury. Ses remarques et questions m'ont beaucoup fait réfléchir, ce qui a conduit à l'émergence de nouvelles idées pour la suite.

Je souhaite exprimer mes remerciements à Madame Sylvie Pommier qui a été initialement ma directrice de thèse et avec qui j'ai beaucoup appris sur la fissuration et la fatigue. Il en est de même pour Monsieur Christophe Cluzel qui a énormément contribué à ce que je parvienne à faire mes essais. Il a toujours été d'une grande aide et de bon conseil. J'ai énormément appris sur le plan expérimental grâce à lui et j'ai toujours apprécié nos échanges, ainsi que son soutien. Enfin, un grand merci à Madame Véronique Doquet. C'est aussi grâce à elle que j'ai finalement pu soutenir. Ses conseils et le temps qu'elle m'a consacré ont été inestimables.

Je souhaite témoigner mes chaleureux remerciements à Adrien Darlet, Stéphane Burguburu, François Comte, ainsi qu'aux équipes des méthodes et des matériaux et procédés pour tout leur soutien et pour y avoir cru jusqu'au bout. Je n'oublie pas non plus Caroline Mary, Arnaud Longuet et François Vogel qui ont suivi mes travaux lorsque j'étais en thèse et qui m'ont donné goût au travail en milieu industriel.

Je garderai des trois années passées au LMT un très bon souvenir et cela grâce à la bonne ambiance qui y règne et notamment au bar. Je tiens particulièrement à remercier Dominique S., Alain S., Roxane M., Anne-Charlotte C., Jérémie R., Erwan M., Flavien F., Pierre G., Xavier P. et Boubou pour ces années passées à vos côtés.

Tout cela n'aurait pas été possible sans le soutien indéfectible de ma sœur Laura, mon beau-frère Olivier, ma petite nièce Yuna, mes parents et mes amis, Aga, Armelle, Edouard, Elodie, Etienne, Jérôme, Jimmy et Thomas. Je ne vous remercierai jamais assez. Enfin, un gros merci à Sophie pour l'aide considérable apportée dans la préparation du pot de thèse.

Table des matières

Introduction	1
Nomenclature	3
I/ Cadre de l'étude	5
I.1. Contexte industriel	5
I.1.1. Principe de fonctionnement d'un turboréacteur	5
I.1.2. La fatigue dans les turboréacteurs	7
I.1.3. Présentation du programme RAMGT	8
I.2. Contexte scientifique	12
I.2.1. Diagramme de Wöhler (Wöhler, 1860)	12
I.2.2. La plasticité comme mécanisme d'initiation de fissures par fatigue	15
I.2.3. Comparaison entre traction et torsion cycliques	17
I.2.4. La limite d'endurance interprétée comme une limite de non-propagation d'une fissure courte	18
I.2.5. La plasticité comme mécanisme de propagation de fissures par fatigue	19
I.2.6. Influence de cycles LCF sur la limite d'endurance HCF	29
I.2.7. Effet de l'environnement sur l'initiation et la propagation de fissures par fatigue ..	32
I.3. Synthèse	37
II/ Etat de l'art sur la modélisation de la résistance en fatigue	39
II.1. Introduction	39
II.2. Approches locales fondées sur la mécanique des milieux continus	40
II.2.1. Introduction	40
II.2.2. Formulations avec les invariants des tenseurs mécaniques	40
II.2.3. Formulations de type plan-critique	42
II.2.4. Formulations énergétiques	45
II.2.5. Formulations incrémentales	48
II.2.6. Discussion	51
II.3. Approches non-locales fondées sur la mécanique des milieux continus	52
II.3.1. Introduction	52

II.3.2.	Formulations fondées sur le concept de volume d'influence	52
II.3.3.	Formulations probabilistes.....	53
II.3.4.	Formulations introduisant une distance caractéristique	58
II.3.5.	Discussion	62
II.4.	Approches fondées sur la mécanique de la rupture	64
II.4.1.	Introduction.....	64
II.4.2.	Éléments de mécanique de la rupture	64
II.4.3.	Effet de Gradient et d'échelle	70
II.4.1.	Discussion	78
II.5.	Synthèse.....	79
III/	Constitution d'une base de données expérimentale sur le seuil de non- propagation de fissure longue du Ti-6Al-4V	81
III.1.	Analyse bibliographique.....	81
III.1.1.	Introduction.....	81
III.1.2.	Présentation du matériau d'étude	81
III.1.3.	Démarches pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure	90
III.2.	Dispositif expérimental	100
III.2.1.	Dimensionnement de l'éprouvette	100
III.2.2.	Le dispositif d'essais à hautes fréquences.....	105
III.2.3.	Procédure de mesure du seuil de non-propagation de fissure longue.....	123
III.3.	Exploitation des données expérimentales.....	129
III.3.1.	Comparaison des seuils obtenus à faibles fréquences sur la nouvelle éprouvette et sur éprouvettes standards	129
III.3.2.	Influence de la fréquence sur le seuil de non-propagation de fissure.....	130
III.3.3.	Modélisation et discussion	131
III.4.	Synthèse.....	133
IV/	Critère de fatigue non-local fondé sur la mécanique linéaire de la rupture .135	
IV.1.	Un critère fondé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture	135
IV.1.1.	Introduction.....	135
IV.1.2.	Un critère multiaxial pour les chargements proportionnels.....	135
IV.1.3.	Identification du critère TL étendu.....	142
IV.1.4.	Génération de diagrammes de fatigue sur quelques cas simples et discussion	149

IV.1.5.	Conclusion	153
IV.2.	Constitution d'une base de données éléments finis en vue de caractériser les effets de gradient et d'échelle sur l'endurance en fatigue.....	155
IV.2.1.	Présentation de l'étude numérique	155
IV.2.2.	Méthodes d'extraction des intensités des champs de la mécanique de la rupture	160
IV.2.3.	Intensités des champs de la mécanique de la rupture.....	165
IV.3.	Diagrammes de fatigue pour les zones à concentration de contraintes	170
IV.3.1.	Méthodes d'estimation des intensités des champs de la mécanique linéaire élastique de la rupture	170
IV.3.2.	Mise en évidence de courbes maîtresses.....	171
IV.3.3.	Génération de courbes de Kitagawa et Takahashi	178
IV.3.4.	Discussion	181
IV.4.	Synthèse.....	183
V/	Extension du critère de fatigue pour la prise en compte de la plasticité en pointe de fissure.....	185
V.1.	Introduction.....	185
V.1.1.	Présentation du modèle incrémental.....	185
V.1.2.	Quelques résultats obtenus et positionnement dans le cadre de ce travail.....	187
V.1.3.	Modélisation des champs de vitesse de déplacement en pointe de fissure	187
V.1.4.	Détermination de la surface seuil de plasticité	191
V.1.5.	Loi de comportement utilisée pour modéliser le Ti-6Al-4V	192
V.2.	Détermination des surfaces seuils de propagation de fissure.....	194
V.2.1.	Représentation du champ de vitesse de déplacement	194
V.2.2.	Analyse de la méthode de décomposition à partir de calculs éléments finis	195
V.2.3.	Méthodologie de décomposition du champ de vitesse en élasto-plasticité	197
V.2.4.	Détermination de surfaces seuils lorsque la contrainte T_z est nulle.....	200
V.2.5.	Cas où la contrainte T_z est non-nulle et détermination de diagrammes de fatigue.....	202
V.3.	Synthèse.....	206
	Conclusions et perspectives	207

Annexe 1 Plan de la nouvelle éprouvette pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure par fatigue	211
Annexe 2 Détermination du comportement modal du montage pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure	212
Annexe 3 Modélisation du comportement dynamique du pot vibrant	216
Annexe 4 Prise en compte des premiers termes supplémentaires au développement de Williams pour une fissure plane à front courbe et soumise à un gradient de chargement	218
Annexe 5 Méthodes analytiques et semi-analytiques pour la détermination des grandeurs pertinentes de la mécanique de la rupture.....	234
Annexe 6 Quelques éléments mathématiques à propos de la méthode des dislocations distribuées : analyse de l'équation fondamentale	246
Annexe 7 Quelques éléments d'intégration numérique de l'équation fondamentale de la méthode des dislocations distribuées	248
Annexe 8 Méthode des dislocations distribuées pour les milieux semi-infinis	254
Annexe 9 Méthodologie semi-analytique retenue pour les calculs de K_I, T et T_z et validation associée	258
Annexe 10 Décomposition POD accélérée	269
Bibliographie.....	271

Introduction

Le rotor d'un moteur d'avion est chargé de manière cyclique par deux types de sollicitations. La première est due au chargement centrifuge qui se compose de trois phases : une mise en charge lors du décollage, un maintien pendant le vol et une décharge lors de l'atterrissage. Lors de la phase de décollage les niveaux de contraintes peuvent atteindre des niveaux très élevés (proportionnels au carré de la vitesse de rotation du rotor). Ainsi, le cycle de chargement induit par ce type de mission présente de fortes variations du niveau de contraintes. On parle alors de cycles LCF (Low Cycle Fatigue : pour chargement à forte amplitude conduisant à une ruine relativement rapide du matériau en termes de nombre de cycles). A ce chargement viennent se superposer des cycles vibratoires ou HCF (High Cycle Fatigue : pour chargement à faible amplitude conduisant à une ruine ou non du matériau à un nombre de cycles dépassant 10^6) provenant des modes propres des différentes pièces du rotor excités par les sollicitations aérodynamiques et chargements mécaniques. Généralement, les modes propres les plus endommageant d'une aube se situent dans la gamme fréquentielle suivante [500 Hz – 1000 Hz].

Le phénomène de fatigue est responsable de la ruine des pièces mécaniques et il peut être d'autant plus important que les sources de fatigue sont nombreuses. L'effet sur la fatigue de la superposition de cycles LCF et HCF est donc potentiellement plus important que ces deux types de chargement pris séparément.

Afin d'étudier ces interactions, un programme de recherche européen, nommé RAMGT, regroupant l'ensemble des motoristes européens (Safran Aircraft Engines, Safran Helicopter Engines, Rolls Royce, RRD, Avio, MTU, Volvo Aero et Inasco), des centres de recherche et partenaires universitaires (QinetiQ, Inasmet et Oxford University) a été lancé. L'ensemble des travaux dans le cadre de ce programme s'est déroulé sur cinquante-six mois. Il a pris fin en 2004. Les principales activités du programme ont consisté à étudier les interactions LCF – HCF pour le TI-6AL-4V et l'INCO 718 à température ambiante, mais également à déterminer l'impact du procédé du grenailage sur la tenue en fatigue d'éprouvettes impactées ou non. Un précédent programme de recherche s'était attaché à l'étude de la fatigue sur disque, alors que celui-ci porte sur le comportement en fatigue des aubes. Une multitude d'essais de caractérisation a été réalisée sur des éprouvettes conventionnelles, mais également sur des éprouvettes spécifiques représentatives de la géométrie des aubes. Malgré la multitude de données expérimentales recueillies au cours de ce programme, son exploitation ne s'est pas faite complètement. Notamment, la partie modélisation et identification n'a pas été réalisée jusqu'au bout.

C'est dans ce contexte que cette thèse a été lancée en 2008. Il s'agit d'une thèse cifre financée par Safran Aircraft Engines et Safran Helicopter Engines. Les objectifs de celle-ci sont multiples : rechercher dans la bibliographie les différentes manières de modéliser la fatigue et mettre au point une approche qui permettrait, à termes, de rendre compte des différents résultats d'essais qui ont été obtenus dans le cadre de RAMGT. Dans ces travaux de recherche, le matériau d'étude a été le Ti-6Al-4V

Ce manuscrit se subdivise en cinq chapitres. Le **chapitre I** est un chapitre bibliographique. Il est composé de deux parties. La première concerne le contexte industriel. Le lecteur y trouvera des éléments importants concernant le programme RAMGT. Quant à la deuxième, elle porte sur le contexte scientifique. C'est dans cette sous-partie que les différents mécanismes physiques intervenant en fatigue seront introduits. Des résultats sur le couplage LCF – HCF dans le cas du Ti-6Al-4V issus de la littérature seront exposés. De plus, l'effet de fissure courte est discuté en détail et est de première importance dans ce travail de recherche. Celui-ci a été mis en évidence expérimentalement dans les années 70 par Kitagawa et Takahashi (Kitagawa & Takahashi, 1976). Ils ont montré que pour un matériau métallique contenant des fissures suffisamment « longues », le seuil de non-propagation de fissure suffit à caractériser le comportement en fatigue du matériau. La courbe donnant la frontière du domaine d'endurance dans un diagramme **Contrainte – Dimension fissure** suit une droite de pente - 1/2 dans un diagramme en log-log. Par contre, pour des fissures suffisamment « courtes », la limite d'endurance semble indépendante de la dimension de la fissure. C'est pour tenter d'unifier ces deux

domaines qu'au **chapitre IV** est présenté un modèle capable de rendre compte de ces deux tendances, ainsi que celles pour lesquelles les dimensions des fissures se situent à la frontière de ces deux domaines.

Le **chapitre II** porte, quant à lui, sur l'état de l'art concernant la modélisation du phénomène de fatigue et/ou de la limite d'endurance. Trois types d'approches sont présentés. Tout d'abord, les approches fondées sur les quantités mécaniques locales de la mécanique des milieux continus. Pour rendre compte de certains phénomènes que les précédentes ne peuvent pas modéliser, on présente en deuxième partie les approches non-locales fondées sur la mécanique des milieux continus. Enfin, certains modèles issus de la mécanique de la rupture sont explicités.

Comme l'approche qui a été choisie se fonde sur la mécanique de la rupture, le **chapitre III** est consacré au développement d'un moyen d'essais à hautes fréquences dédié à la caractérisation du seuil de non-propagation de fissure longue. Des résultats d'essais en dynamique et en quasi-statique sont donnés en fin de chapitre. Le but de ces derniers est de pouvoir identifier un modèle permettant la détermination du domaine d'endurance et son évolution avec le chargement.

Dans le **chapitre IV**, le critère d'Emmanuelle Thieulot-Laure est présenté et discuté (Thieulot-Laure et al., 2007). Pour sa formulation, on considère une fissure courte plongée dans un milieu élastique linéaire homogène et isotrope. Les champs mécaniques issus de la mécanique de la rupture, valides au voisinage de la pointe de fissure, permettent d'obtenir le champ de densité d'énergie déviatorique de déformation élastique. L'intégration de ce dernier sur une petite région de rayon donnée entourant la pointe de fissure permet l'obtention d'une densité d'énergie de déformation élastique déviatorique par unité de longueur de front de fissure. Le dépassement d'une valeur critique de cette dernière conduit alors à la propagation de fissure par fatigue. La formulation initiale de ce critère fait explicitement intervenir la contrainte T (Thieulot-Laure et al., 2007) qui correspond au premier terme non-singulier du développement asymptotique du tenseur des contraintes au voisinage de la pointe de fissure (Williams, 1957). Il a été constaté au cours de la thèse d'Emmanuelle Thieulot-Laure que la prise en compte de ce terme permet de reproduire l'effet de fissure courte observé expérimentalement et discuté précédemment. Néanmoins, certains effets de structure ne peuvent pas être expliqués par le seul ajout de la contrainte T . On verra, dans ce chapitre, qu'une extension du critère est nécessaire et on montrera comment la réaliser. Enfin, l'approche est utilisée dans des situations faisant intervenir des gradients de chargement. Le lecteur pourra se rendre compte du caractère non-local de ce type de formulation et de sa pertinence vis-à-vis de certains résultats expérimentaux.

Comme de simples considérations élastiques ne permettent pas de rendre compte de certains effets non-linéaires comme lorsque le rapport de charge (rapport $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$) est élevé, une extension de la méthode s'avère nécessaire. Pour cela, des simulations par éléments finis, tenant compte du comportement élasto-plastique en pointe de fissure, ont été réalisées. Une méthode de post-traitement des résultats de ces simulations a été proposée et présentée dans le **chapitre V**. C'est également dans ce chapitre qu'une méthodologie permettant d'engendrer des diagrammes de fatigue est présentée et discutée.

Nomenclature

$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes (MPa)
$\underline{\underline{\sigma'}}$	Tenseur déviatorique des contraintes (MPa)
$\underline{\underline{\Sigma}}$	Tenseur des contraintes au loin de la fissure (MPa)
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tenseur des déformations
$\underline{\underline{\varepsilon'}}$	Tenseur déviatorique des déformations
$\underline{\underline{\varepsilon^e}}$	Tenseur des déformations élastiques
$\underline{\underline{\varepsilon^p}}$	Tenseur des déformations plastiques
$\underline{\underline{u}}$	Vecteur de déplacement (m)
$\underline{\underline{u_I^e(x)}}$	Champ élastique associé au facteur d'intensité des contraintes
$\underline{\underline{u_I^c(x)}}$	Champ complémentaire associé au facteur d'intensité des contraintes
$\underline{\underline{u_T^e(x)}}$	Champ élastique associé à la contrainte T
$\underline{\underline{u_T^c(x)}}$	Champ complémentaire associé à la contrainte T
$\underline{\underline{v^{EF}(x, t)}}$	Camp de vitesse obtenu par éléments finis
σ_f	Limite d'endurance en traction (MPa)
σ_{-1}	Limite d'endurance en traction à rapport de charge égal à -1 (MPa)
f_{-1}	Limite d'endurance en flexion à rapport de charge égal à -1 (MPa)
τ_{-1}	Limite d'endurance en torsion à rapport de charge égal à -1 (MPa)
τ	Contrainte de cisaillement
T_{ra}	Amplitude de contrainte de cisaillement généralisé (MPa)
σ_a	Contrainte alternée (MPa)
J	Second invariant du tenseur des contraintes (MPa)
J_a	Amplitude du second invariant du tenseur des contraintes (MPa)
P	Pression hydrostatique (MPa)
I_{moy}	Valeur moyenne du premier invariant du tenseur des contraintes (MPa)
I_{max}	Valeur maximale du premier invariant du tenseur des contraintes (MPa)
K_t	Facteur de concentration de contraintes
K_f	Facteur de concentration de contraintes effectif
χ	Gradient de contrainte normalisé
K_I	Facteur d'intensité des contraintes (MPa. \sqrt{m})
ΔK	Amplitude du facteur d'intensité des contraintes (MPa. \sqrt{m})
ΔK_{th}	Seuil de non-propagation de fissure (MPa. \sqrt{m})
T	Contrainte T (MPa)
T_z	Contrainte T_z (MPa)
a_0	Rayon de la fissure critique identifié avec le critère TL étendu (μm)
δ	Rayon du domaine d'intégration du critère TL étendu (μm)
\tilde{K}_I	Facteur d'intensité des contraintes effectif (MPa. \sqrt{m})
\tilde{T}	Contrainte T effective (MPa)
ρ_I	Emoussement plastique associé au facteur d'intensité des contraintes (μm)
ρ_T	Emoussement plastique associé à la contrainte T (μm)
ν	Coefficient de Poisson
E	Module d'Young (MPa)

I/ Cadre de l'étude

I.1. Contexte industriel

Les moteurs d'avion et d'hélicoptère sont soumis à des chargements mécaniques dont on cherche à s'assurer qu'ils ne conduiront pas à l'initiation et à la propagation de fissures par fatigue en service.

Plusieurs constructeurs aéronautiques, dont Safran Aircraft Engines et Safran Helicopter Engines (Groupe SAFRAN), se sont associés pour étudier les conditions d'initiation et de propagation des fissures par fatigue dans le cadre de programmes de recherches collaboratifs. L'un d'entre eux, le programme RAMGT (RAMGT, 2004) a conduit à établir une base de données expérimentale précieuse, mais la compréhension fine des mécanismes menant à la rupture et leur modélisation n'ont pu être menées à leurs termes.

Ce programme a été mis en œuvre afin d'étudier les interactions (HCF+LCF) principalement, c'est-à-dire les effets sur la durée de vie en fatigue de la superposition de chargements conduisant à une faible durée de vie en fatigue (LCF – Low Cycle Fatigue) et de chargements vibratoires provenant du couplage aero-élastique qui, appliqués seuls, conduiraient à une très grande durée de vie par fatigue (HCF – High Cycle Fatigue). Ces interactions ont été étudiées pour des géométries élémentaires et pour des cas plus complexes permettant d'évaluer l'effet des concentrations de contraintes provenant, soit du dimensionnement de la pièce, soit de collisions entre un objet étranger et la pièce (FOD – Foreign Object Damage).

Les méthodes actuellement à la disposition des ingénieurs des bureaux d'études de Safran Aircraft Engines et de Safran Helicopter Engines pour calculer les durées de vie ne permettent pas de prévoir, de manière satisfaisante, les interactions entre cycles de chargement (notamment les cycles HCF – LCF) et les abattements à appliquer pour tenir compte des accidents de géométrie.

L'objectif de cette thèse est de proposer une démarche pour améliorer la prise en compte des couplages HCF – LCF et le calcul des effets des concentrations de contraintes sur la durée de vie en fatigue.

I.1.1. Principe de fonctionnement d'un turboréacteur

Les moteurs développés par Safran Aircraft Engines et Safran Helicopter Engines fonctionnent suivant le principe du turboréacteur. La plupart des moteurs civils et militaires proposés par Safran Aircraft Engines ont une architecture de type « double flux » et « double corps ».

Ce type de moteur est constitué de deux parties distinctes. Un « corps BP » (*Basse Pression*) et un « corps HP » (*Haute pression*). Chaque corps est constitué d'un compresseur et d'une turbine montés sur le même arbre (*Figure 1*). Les arbres HP et BP sont coaxiaux. Le « corps HP » contient également la chambre de combustion située en amont de la turbine HP.

Le flux d'air est aspiré par la soufflante (ou FAN) du compresseur BP puis est partagé en flux primaire et flux secondaire. Cette architecture est très répandue dans l'aviation civile.

Le flux primaire, utilisé comme comburant, participe à un cycle thermodynamique complet : en traversant les deux compresseurs, sa pression et sa température augmentent. Le carburant est ensuite vaporisé dans le comburant et le mélange est enflammé dans la chambre de combustion afin de transformer son énergie chimique en énergie mécanique et thermique. Le flux primaire transfère ensuite progressivement son énergie aux turbines HP puis BP qui sont mises en rotation et entraînent les compresseurs. Sa course se termine dans l'atmosphère après avoir traversé la tuyère d'évacuation. Le flux primaire sortant contribue à la poussée du moteur.

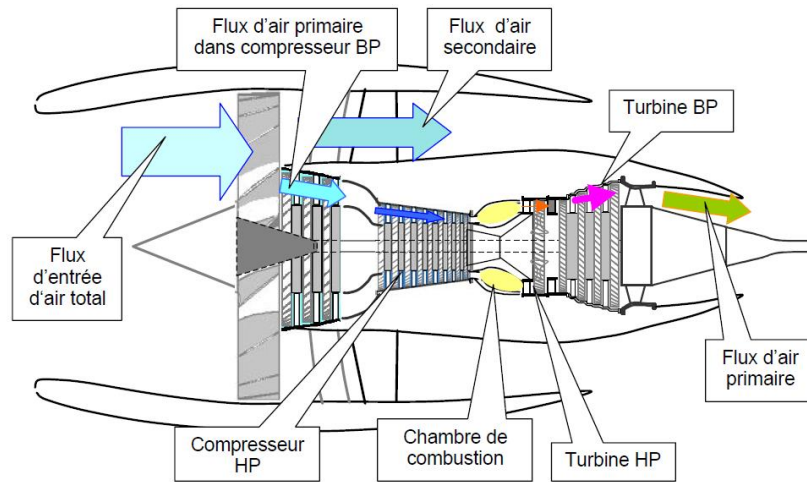


Figure 1 : Turboréacteur « double corps » et « double flux » (Thevenin, 2004).

Le flux secondaire est aspiré par les aubes de soufflante et permet de propulser l'avion par le principe d'action-réaction. La poussée du moteur est directement liée à la dimension des soufflantes. D'une manière générale, les soufflantes participent à près de 75 % de la poussée totale.

Chaque compresseur est constitué, de différents étages chacun constitué d'aubages mobiles (constituant le rotor) et d'aubages fixes (appartenant au stator). Un ensemble d'aubages mobiles est appelé redresseur, tandis qu'un ensemble d'aubages fixes est appelé distributeur. Les parties tournantes se présentent sous la forme d'un assemblage d'aubes sur un disque. Dans certains cas, les aubes et le disque ne forment qu'une seule et même pièce comme le montre la *Figure 2*.



Figure 2 : Disque monobloc aubagé (DAM) du moteur GE90-115B.

Un exemple de moteur « double corps » et « double flux » est représenté sur la figure suivante :

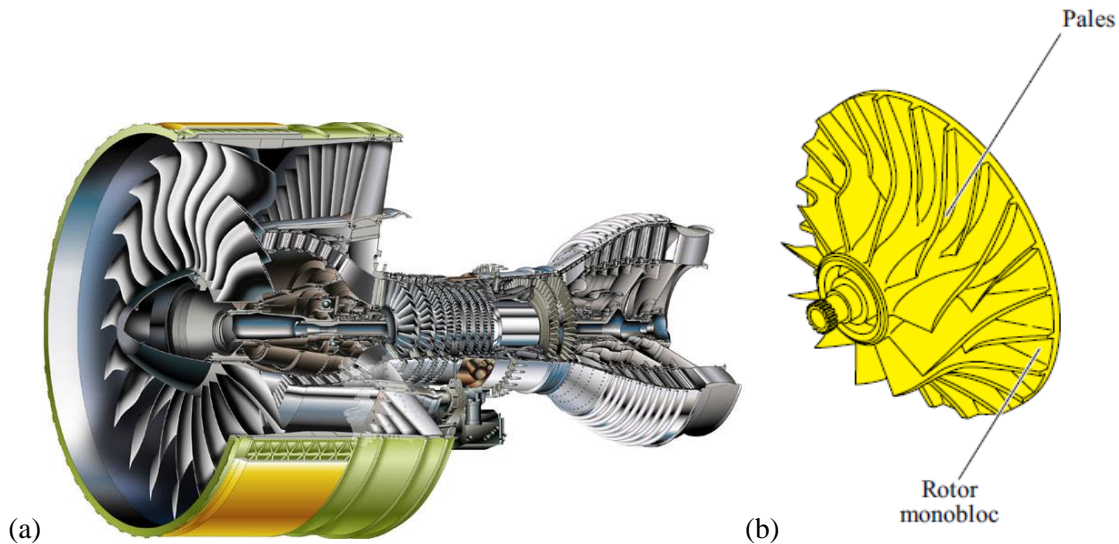


Figure 3 : Exemple de moteur et de pièce moteur.

(a) Moteur GP 7200,

(b) Rouet centrifuge.

Les compresseurs conçus et fabriqués par Safran Aircraft Engines sont de types axiaux, car les trajectoires des flux d'air suivent l'axe moteur ou axio-centrifuge pour les moteurs de plus faible poussée. Ceux conçus par Safran Helicopter Engines sont utilisés dans les hélicoptères et nécessitent une architecture de type centrifuge. Dans ce dernier cas, l'accélération du flux d'air est assurée par la force centrifuge lorsque le fluide traverse le rouet situé après le compresseur (*Figure 3*).

I.1.2. La fatigue dans les turboréacteurs

Afin de garantir la sécurité des passagers, les motoristes dimensionnent leurs moteurs de manière à assurer leur intégrité en cas de défaillance d'un composant. Le carter est ainsi dimensionné pour contenir les fragments émis lors de la rupture d'une aube de soufflante.

Cependant, certaines défaillances ne peuvent pas être tolérées car elles conduiraient à la perte du moteur voire à celle de l'avion. Si un disque se rompt brutalement au cours d'un vol, l'énergie cinétique des fragments ne sera pas complètement absorbée par le carter. La rupture d'un disque peut conduire à l'explosion du moteur et à une collision entre les fragments et la cellule de l'avion (*Figure 4*).

Il existe deux solutions permettant d'éviter ce type d'événements. La première consiste à dimensionner le carter afin qu'il puisse retenir les fragments d'un disque. Avec les matériaux actuels ce choix conduirait à un carter trop lourd. La seconde solution consiste à dimensionner le disque pour que la rupture en service ne puisse pas se produire.

Pour cela, des hypothèses conservatives sont retenues. Des scénarii d'initiation de défaillance sont imaginés, pour chacun d'eux, la durée de vie résiduelle du moteur est déterminée. Les FOD (Foreign Object Damage) sont un bon exemple de cette démarche : un moteur peut aspirer une particule dure (grain de sable, poussière volcanique, etc.) qui conduit à l'apparition d'une anomalie sur la surface du composant. Une fissure peut s'initier depuis cette anomalie et se propager. Les méthodes de prévision de la durée de vie doivent alors permettre de définir quelle est la périodicité des contrôles qui doivent être effectués pour vérifier la présence ou l'absence de telles anomalies. Celles-ci s'intègrent dans une approche plus générale appelée Tolérance aux Dommages. L'hypothèse conservative qui est faite est que toute anomalie doit être vue comme une fissure qui se propage. Ainsi, on suppose qu'après chaque

contrôle, une fissure se propage et l'intervalle de contrôle doit être plus faible que le temps mis par une fissure pour se propager et conduire à la rupture.

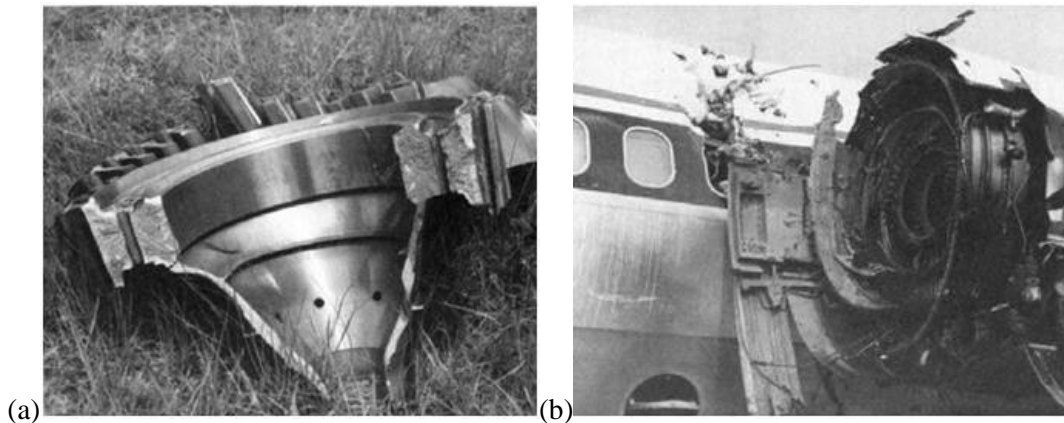


Figure 4 : Accident de Pensacola, Floride en 1996 :
 (a) éclatement d'un disque FAN en TA6V d'un moteur Pratt&Whitney JT8D induit par un défaut d'usinage,
 (b) impact du disque sur la cabine.

Cette démarche est coûteuse en caractérisation expérimentale. Pour chaque source de défaillance potentielle (défaut du matériau, FOD, rayures ...) les courbes S – N (chargement cyclique – durée de vie) sont déterminées. A cela s'ajoute la prise en compte de la complexité du chargement (interaction HCF – LCF, chargement hétérogène spatialement dans la pièce).

C'est pourquoi, afin de réduire le nombre d'essais et les coefficients de sécurité « très » conservatifs utilisés pour la certification d'un moteur, des modèles tenant compte de la physique du processus de fatigue sont développés et validés. C'est dans cette optique que s'est déroulé ce travail de thèse.

I.1.3. Présentation du programme RAMGT

Le programme RAMGT (*Robust Aerofoils for Modern Gas Turbines* (RAMGT, 2004)) est un programme européen commun à plusieurs motoristes aéronautiques, universités et laboratoires partenaires (Safran Aircraft Engines, Safran Helicopter Engines, Rolls-Royce, Rolls-Royce Deutschland, Avio, ITP, MTU, Volvo Aero Corp., Inasco, Inasmet, Qinetiq et Oxford University) qui a duré 56 mois, pendant lesquels un travail important sur la validation et la robustesse des méthodes actuelles de dimensionnement des aubes de compresseur ou de turbine a été mené.

Le but principal a été de comprendre et de caractériser les interactions entre les chargements HCF (*High Cycle Fatigue*) et LCF (*Low Cycle Fatigue*), mais également l'influence des FOD (*Foreign Object Damage*), de la géométrie et du traitement de surface sur la résistance à la fatigue des aubes. Au cours de ce programme, deux matériaux ont été étudiés en particulier : le Ti-6Al-4V et l'Inconel 718.

Certaines géométries d'éprouvettes ont été inspirées de celle d'une aube (**Figure 5**). Ces dernières se caractérisent par la présence de zones plus sollicitées que d'autres, appelées zones à K_t , dont l'effet sur la résistance à la fatigue est plus ou moins marqué selon les cas. Ces concentrations de contraintes apparaissent généralement au niveau de zones caractérisées par une courbure non nulle.

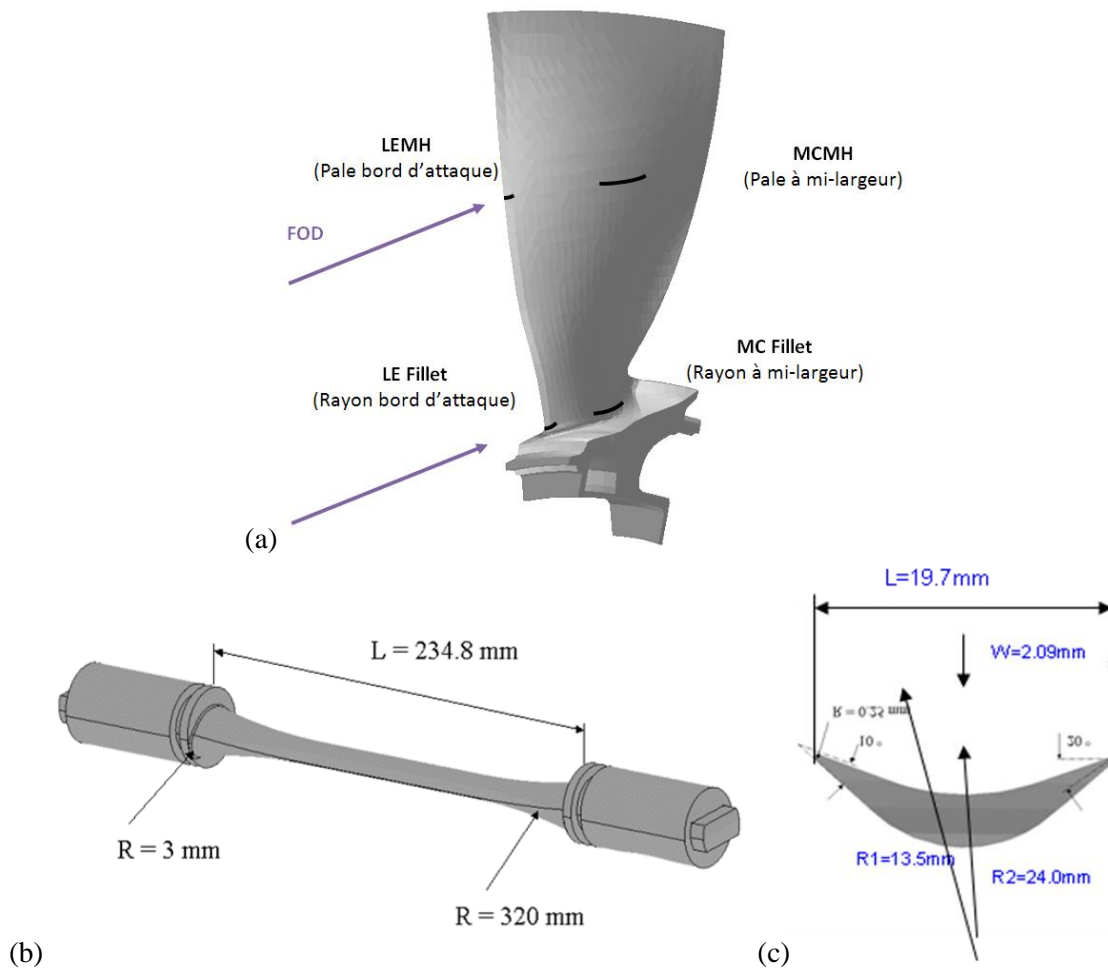


Figure 5 : Correspondance entre les géométries retenues pour les éprouvettes et les zones d'intérêt d'une aube :

- (a) Géométrie d'une aube avec les zones d'intérêt,
 (b) Profil de l'éprouvette LEMH,
 (c) Section de l'éprouvette LEMH.

L'une des originalités de ce programme a été la réalisation d'essais non-conventionnels comme les essais CCF (*Combined Cycle Fatigue*). Le schéma du cycle CCF et les divers paramètres le définissant sont donnés sur la **Figure 6**. Le cycle CCF est constitué d'un cycle LCF (*Low Cycle Fatigue*) à rapport de charge proche de zéro, avec un temps de maintien, auquel sont superposés 10000 cycles HCF (*High Cycle Fatigue*, caractérisés par un rapport de charge plus élevé que le cycle LCF).

L'intérêt de ce cycle de chargement est qu'il représente, d'une manière relativement simple, un cycle de vol standard pour les pièces moteur. En effet, au décollage, le chargement centrifuge engendre un chargement statique non-nul (montée en charge LCF). Le couplage aero-élastique (air-aube) et l'excitation de certaines fréquences propres du système se traduisent par l'apparition d'un chargement dynamique de faible amplitude mais de haute fréquence (HCF) qui se superpose au chargement centrifuge. A la fin de la phase de décollage, le chargement centrifuge diminue, de même que les sollicitations dynamiques. La même chose se produit lors de l'atterrissage et de certaines manœuvres en vol stationnaire lorsque l'avion utilise une poussée importante.

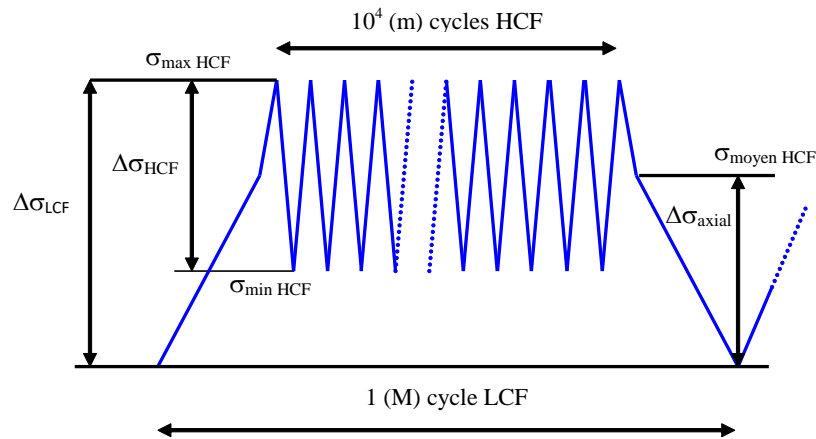


Figure 6 : Nomenclature utilisée pour la description du chargement CCF

Dans le programme RAMGT, les chargements CCF sont obtenus à l'aide d'un montage dédié, schématisé sur la **Figure 7**. Le chargement centrifuge est simulé en imposant sur l'éprouvette testée une sollicitation de traction basse fréquence à l'aide d'une machine de traction pilotée en déplacement. Le chargement dynamique est, quant à lui, imposé via un pot vibrant électrodynamique sollicitant la première fréquence propre en flexion de l'éprouvette. La raideur en flexion de l'éprouvette et sa masse ont été ajustées (par dimensionnement itératif) de manière à ce que la fréquence propre en flexion du système coïncide avec la fréquence retenue pour les cycles HCF. Cette fréquence est choisie pour qu'elle soit représentative des fréquences propres des aubages.

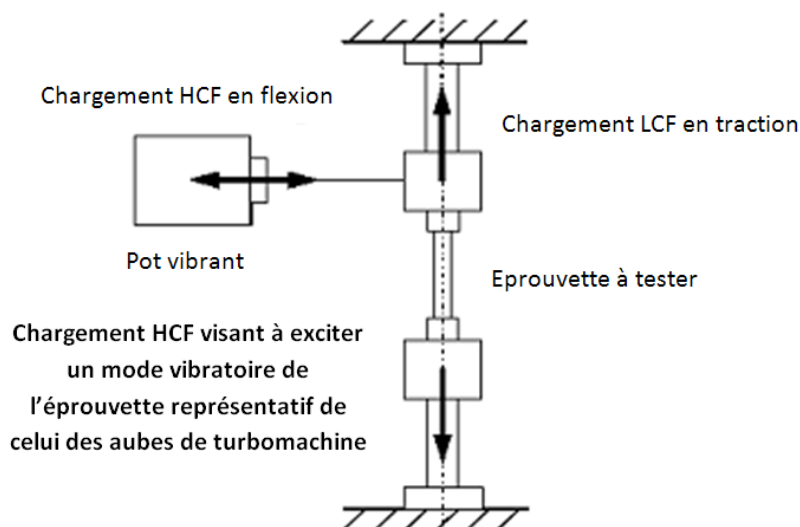


Figure 7 : Représentation du banc d'essais dédié aux chargements CCF

Pour étudier l'influence des FOD sur la durée de vie en fatigue, certaines éprouvettes ont été soumises à des chocs avec des cubes en acier puis sollicitées en fatigue. Ces chocs produisent des indentations en V sur la surface des éprouvettes, dont la profondeur et l'inclinaison ont été contrôlées dans les essais. Ces derniers conduisent à des concentrations de contraintes et plusieurs profondeurs d'impacts ont été testées. Néanmoins, la grande différence entre ces éprouvettes indentées et les éprouvettes entaillées (dites éprouvettes à K_t) est la présence de contraintes résiduelles sous l'indentation laissées par l'impact qui se superposent au chargement extérieur.

La **Figure 8 (a)** est un schéma de principe du canon à air comprimé utilisé pour la réalisation des FOD. L'indenteur (un cube d'acier pour que l'énergie cinétique soit suffisamment élevée) est monté sur un sabot (**Figure 8 (b)**), puis positionné à l'intérieur d'un cylindre creux de guidage dont le diamètre interne est légèrement supérieur à celui du sabot. En actionnant une valve, un canon pneumatique propulse le sabot, qui est ensuite arrêté par un disque d'arrêt, tandis que le cube poursuit sa course sans changement de vitesse ou de trajectoire jusqu'à entrer en collision avec l'éprouvette à indenter. La vitesse du projectile est mesurée entre deux points de passage du sabot, ce qui permet d'estimer l'énergie cinétique avant impact sur l'éprouvette.

Quelques éprouvettes avec FOD ont par ailleurs subi des traitements de surface tels que le grenailage aux billes de verre et par choc laser.

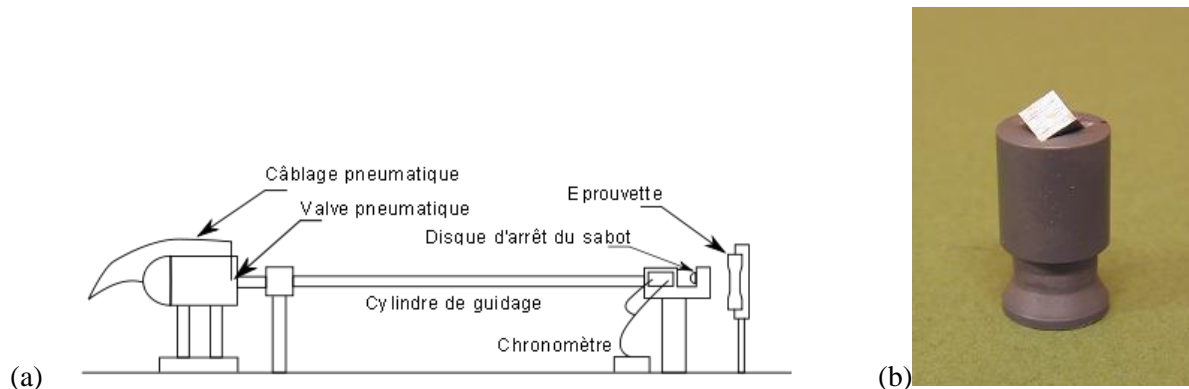


Figure 8 : Schéma de principe du canon à air comprimé utilisé pour la réalisation des FOD.

La modélisation a représenté une part importante du programme RAMGT. L'effet des contraintes moyennes sur la limite d'endurance ainsi que l'interaction HCF / LCF peuvent être partiellement reproduits par des modèles identifiés à partir des résultats d'essais conventionnels. Pour la partie FOD, l'aspect « petits défauts » a été considéré et dans un but d'unification de l'ensemble des causes menant à la rupture par fatigue, un modèle probabiliste a été développé prenant comme données d'entrée les résultats obtenus sur les éprouvettes impactées et non impactées par les FOD (RAMGT, 2004; Nowell et al., 2003 (1); Nowell et al., 2003 (2); Duó et al., 2005; Oakley & Nowell, 2007). Malgré toutes les études qui ont eu lieu suite à ce programme, les différents modèles développés, n'ont pas un pouvoir prédictif suffisant. Les effets de géométrie d'éprouvette, de rapport de charge et l'abattement sur les courbes de fatigue induit par les FOD n'ont pas pu être totalement maîtrisés (RAMGT, 2004).

L'objectif de cette thèse est de fournir des outils permettant au moins d'aborder la modélisation de l'endurance en fatigue pour des problèmes de complexité équivalentes aux géométries testées durant ce programme.

I.2. Contexte scientifique

Le terme de fatigue englobe un ensemble de mécanismes physiques responsables de la dégradation progressive d'une pièce mécanique soumise à des chargements mécaniques répétés. Deux phases principales peuvent être distinguées, l'initiation des fissures et leur propagation jusqu'à la rupture. L'initiation peut être le résultat d'une micro-plasticité cyclique dans certains grains défavorablement orientés ou au voisinage d'inclusions agissant comme une concentration de contraintes. Elle peut également provenir d'un couplage chemo-mécanique provoquant la fragilisation du matériau en présence d'un environnement chimiquement actif.

Afin de caractériser la résistance à la fatigue d'un matériau, des essais consistant à solliciter cycliquement une éprouvette sont réalisés. Les résultats sont généralement présentés dans un diagramme de Wöhler.

I.2.1. Diagramme de Wöhler (Wöhler, 1860)

L'essai de fatigue le plus simple consiste à soumettre chaque éprouvette à des efforts périodiques, d'amplitude et de fréquence constantes, et à noter le nombre de cycles N au bout duquel la rupture se produit ou une fissure de fatigue est détectée. On reporte ce nombre N , en général sur une échelle logarithmique, en fonction de la contrainte maximale des cycles σ . A chaque éprouvette correspond un point du plan (σ, N) . A partir d'un lot d'éprouvettes soumis à des amplitudes de contraintes différentes, on obtient une courbe nommée courbe de Wöhler ou courbe $S - N$ (*Stress - Number of cycles*). La campagne d'essais est habituellement répétée afin d'obtenir une courbe $S - N$ par niveau de rapport de charge ($\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$) ou par niveau de la contrainte moyenne. Cette courbe peut être subdivisée en quatre domaines (*Figure 9*) :

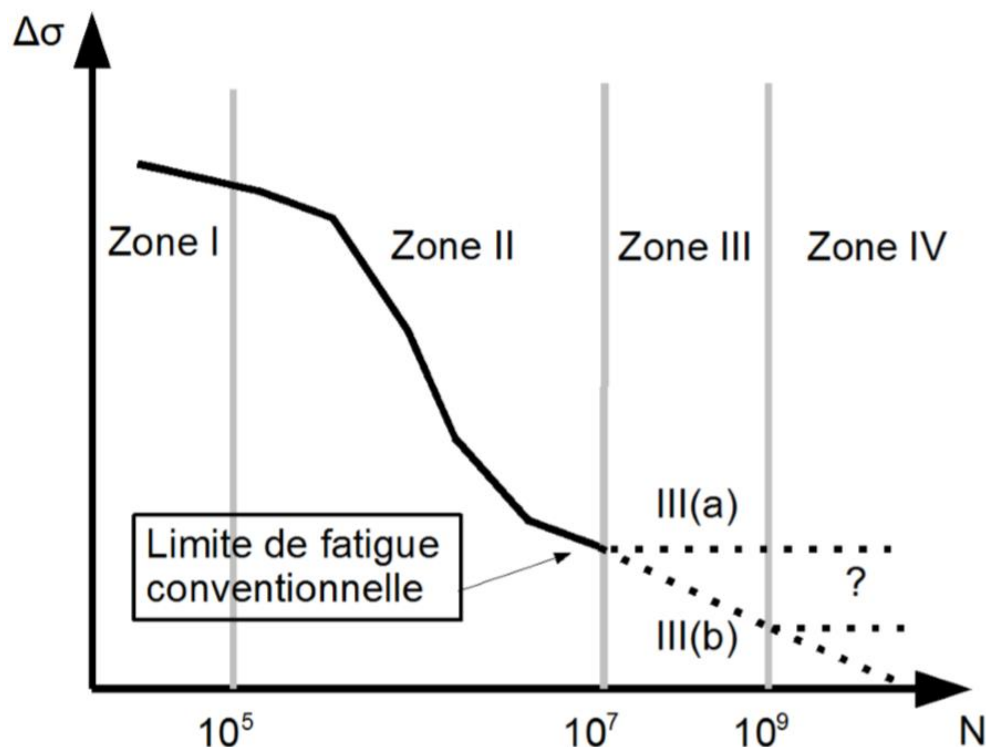
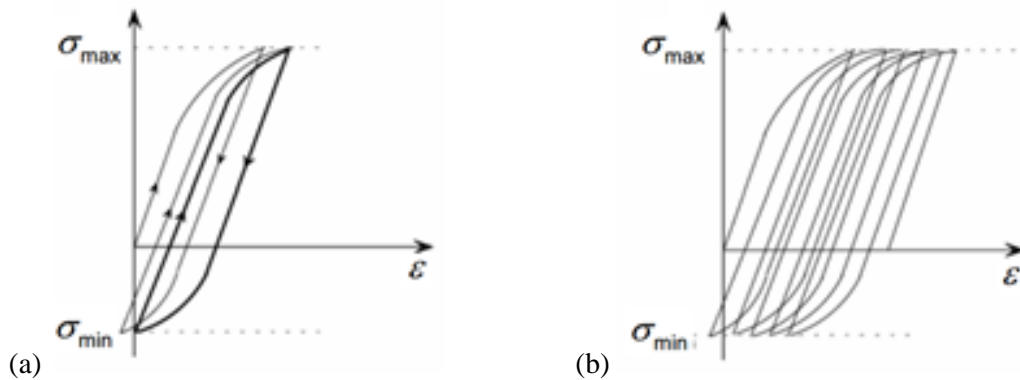


Figure 9 : Illustration des quatre domaines de fatigue connus dans un diagramme de Wöhler (Blanche, 2012).

➤ **Zone I : domaine oligocyclique (LCF – Low Cycle Fatigue) :**

Dans cette zone, les sollicitations mécaniques appliquées au matériau sont supérieures à sa limite d'élasticité macroscopique. Le nombre de cycles conduisant à la rupture va de 1- rupture en traction monotone - jusqu'à 10^4 ou 10^5 (pour les aciers doux). L'éprouvette atteint généralement un état d'accommodation plastique ou un rochet élastoplastique (*Figure 10*). La rupture survient à la suite de l'amorçage d'une ou de plusieurs fissure à la surface de l'éprouvette de fatigue.



*Figure 10 : Courbes contraintes – déformations en traction cyclique :
(a) phénomène de rochet,
(b) phénomène d'accommodation plastique.*

➤ **Zone II : domaine d'endurance limitée (HCF – High Cycle Fatigue) :**

Ce domaine correspond à des amplitudes de chargement plus faibles que dans le cas précédent. La rupture survient généralement au bout de 10^5 à 10^7 cycles. Les amplitudes de chargement utilisées peuvent dépasser la limite d'élasticité du matériau vierge. Dans ce cas, les premiers cycles conduisent à de la déformation plastique, mais le matériau s'adapte de telle sorte que les cycles suivants sont macroscopiquement élastiques. C'est ce que l'on appelle l'adaptation élastique (*Figure 11*).

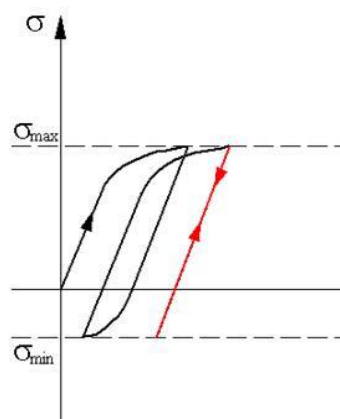


Figure 11 : Adaptation élastique du matériau.

C'est le domaine dans lequel travaille la plupart des structures qui, pour diverses raisons, doivent avoir des masses et des volumes impérativement réduits (cas des structures aéronautiques et automobiles).

➤ **Zone III : domaine intermédiaire HCF-VHCF :**

L'amplitude de chargement est ici très faible devant la limite d'élasticité macroscopique. Deux domaines se distinguent en fonction des matériaux :

- Dans le premier cas (III(a) sur la figure précédente), l'amplitude du chargement tend vers une asymptote horizontale σ_f . On la désigne comme étant la limite de fatigue conventionnelle ou limite d'endurance conventionnelle. Elle est utilisée dans le dimensionnement de structures au niveau industriel. On suppose généralement qu'une amplitude de chargement en-dessous de cette limite ne conduira jamais à rupture compte tenu de la durée d'utilisation limitée de ces dernières.
- Dans le second cas (III(b) sur la figure précédente), l'amplitude du chargement continue de décroître. Les mécanismes d'amorçage de fissure de fatigue semblent être les mêmes que ceux associés au domaine précédent. L'amorçage de fissure de fatigue survient en surface ou au niveau d'une hétérogénéité de la microstructure.

La détermination de la limite d'endurance conventionnelle est néanmoins liée au protocole expérimental. Une méthode couramment utilisée est la méthode staircase. Cette méthode consiste à définir une durée de vie cible – 10^6 ou 10^7 cycles par exemple – et à appliquer sur chaque éprouvette une amplitude de contrainte différente. La limite d'endurance conventionnelle est alors la frontière entre les niveaux de contraintes qui conduisent ou ne conduisent pas à la rupture en 10^6 ou 10^7 cycles. De nouveaux moyens d'essais permettent aujourd'hui de tester des éprouvettes au-delà de 10^9 cycles comme les machines piézoélectriques qui sollicitent les éprouvettes de fatigue à plusieurs kHz.

➤ **Zone IV : domaine à très grand nombre de cycles (VHCF – Very High Cycle Fatigue) :**

Comme le mentionne Blanche (Blanche, 2012), trois types de comportement sont généralement admis :

- Dans le premier cas, la tendance représentée sur la figure par la mention III(a) se poursuit. La notion de limite d'endurance conventionnelle continue d'avoir un sens dans ce domaine.
- Dans le second cas, à partir de la tendance III(b), l'amplitude de contrainte tend vers une asymptote assimilable à une limite d'endurance. Celle-ci doit être également vue comme une limite d'endurance conventionnelle, mais à plus grand nombre de cycles.
- Dans le dernier cas, la tendance III(b) se poursuit.

Enfin, une des caractéristiques de ces essais de fatigue est que les durées de vie (à amplitude de contrainte fixée) ou bien les amplitudes de contrainte conduisant à la rupture (à durée de vie cible fixée) sont dispersées. Habituellement, plus l'amplitude de contrainte est faible et plus la dispersion sur le nombre de cycles à amorçage ou à rupture augmente.

I.2.2. La plasticité comme mécanisme d'initiation de fissures par fatigue

En l'absence d'anomalie et sous l'effet d'un chargement cyclique, certains grains mal orientés peuvent se déformer plastiquement. D'après Miller (Miller, 1987 (1); Miller, 1987 (2)), ce sont les grains pour lesquels l'amplitude de la déformation de cisaillement sur les plans de glissement actifs est maximale qui conduiront les premiers à l'initiation de fissures. Lorsque le nombre de systèmes de glissement actif reste faible, des bandes de glissement persistantes apparaissent sur lesquelles des fissures peuvent se former (*Figure 12*).

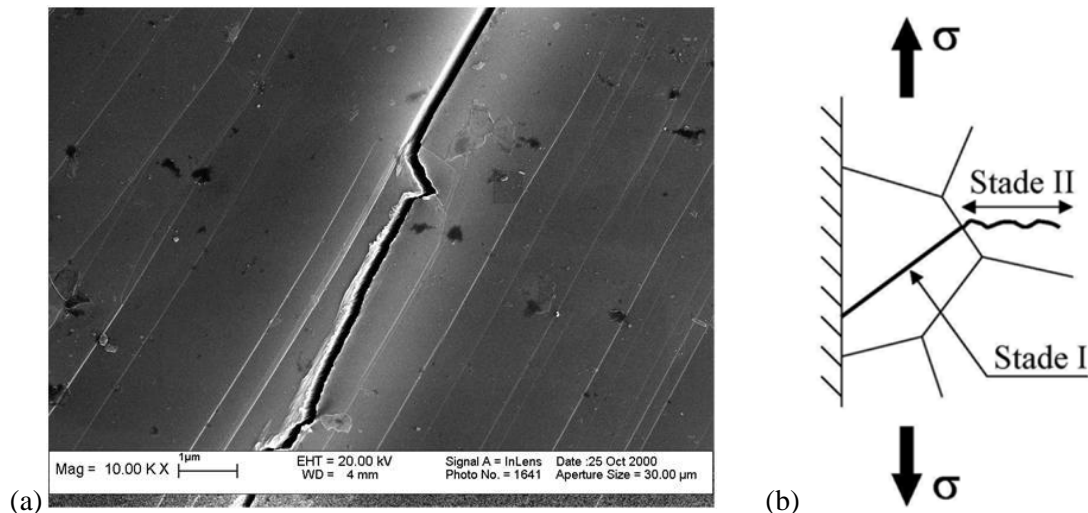


Figure 12 : Amorçage d'une fissure de fatigue parallèlement aux lignes de glissement d'un grain :
(a) dans leTA6V (Le Biavant-Guerrier, 2000),
(b) principaux stades de propagation d'une fissure de fatigue (initiation et propagation) pour un amorçage en surface.

Un mécanisme souvent observé en fatigue (Cottrell & Hull, 1957; Forsyth & Mott, 1957) est celui conduisant à de l'amorçage de fissures induit par la formation d'intrusions et d'extrusions en surface sur les bandes de glissement (*Figure 13*). Ce mécanisme d'initiation requiert deux conditions, l'existence de bandes de glissement, et une orientation des bandes de glissement vis-à-vis de la surface permettant la formation d'intrusions et d'extrusions. Ainsi, si la scission résolue maximale dans les grains les plus défavorablement orientés est telle que le glissement ne se produit pas, alors l'initiation ne pourra pas avoir lieu. L'amorçage de fissure de fatigue par intrusion-extrusion est compatible avec l'existence d'une limite d'endurance puisque, pour que ce mécanisme puisse se produire, il faut que l'amplitude du chargement soit suffisamment importante pour conduire à de la plasticité microscopique.

Les microfissures amorcées se propagent ensuite suivant les plans de glissement cristallin. C'est le stade I de propagation (*Figure 12*) caractérisé par une propagation lente des fissures (quelques angströms par cycle). Cette phase représente une part importante de la durée de vie d'une pièce mécanique. En revanche, la surface fissurée pendant ce stade est relativement faible par rapport à la surface fissurée totale.

A partir d'une certaine dimension, fonction de la taille des grains, la fissure bifurque et se propage selon la direction orthogonale à la plus grande contrainte principale. On parle alors de propagation en stade II.

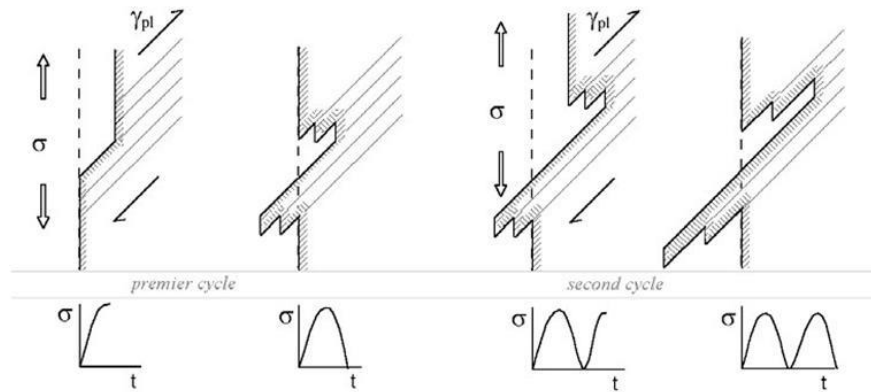


Figure 13 : Illustration du phénomène d'intrusion-extrusion responsable de l'amorçage d'une fissure par fatigue (Pommier, 2001 (2)).

Ce type de mécanisme s'applique également lorsque le matériau contient des anomalies même si la résistance en fatigue s'en trouve fortement diminuée. Cela peut s'expliquer par le fait qu'un trou ou une hétérogénéité locale (ayant des propriétés mécaniques différentes de la matrice) possède aussi une surface sur laquelle peuvent se former des intrusions et extrusions. D'autant plus que le défaut constitue une concentration de contraintes. Ainsi, si le matériau contient une anomalie, le mécanisme de plasticité cyclique conduisant à l'apparition d'une fissure de fatigue, a plus de chance de se produire au voisinage de celle-ci. La présence d'anomalies peut significativement réduire la limite d'endurance et leur distribution statistique en taille ou en forme peut être à l'origine d'une distribution des durées de vie en fatigue.

La probabilité de présence d'anomalies ainsi que leurs propriétés géométriques, positions et orientations sont fortement conditionnées par le procédé de fabrication. Par exemple, le superalliage de Nickel N18 a été élaboré à partir de la métallurgie des poudres et peut donc contenir des porosités et des inclusions de céramique dont les dimensions dépendent de celles des poudres utilisées (**Figure 14**).

Les défauts de fabrication, de maintenance et d'usage sont aussi des sites privilégiés pour l'amorçage de fissure (**Figure 4**). Plus les dimensions des anomalies sont importantes, plus la durée de vie des pièces est faible.

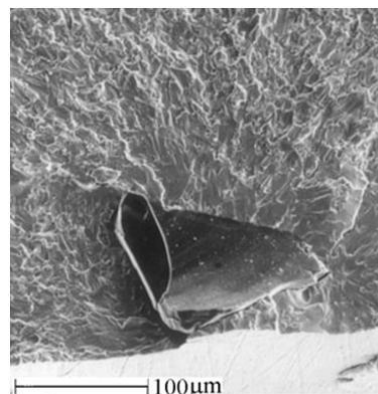


Figure 14 : Amorçage d'une fissure de fatigue sur une inclusion de céramique subsurfacique. Alliage à base de Nickel (N18) élaboré par métallurgie des poudres et ensemencé artificiellement par des inclusions de céramique, afin de s'assurer de leur présence dans l'éprouvette de fatigue (Pommier, 1995).

I.2.3. Comparaison entre traction et torsion cycliques

I.2.3.1. Cas de la traction cyclique

Lors d'essais de fatigue conventionnels (courbe $S-N$) la contrainte moyenne du cycle est nulle. Les résultats classiques de Goodman et de Haigh, présentés dans le livre de Lemaitre et Chaboche (Lemaitre & Chaboche, 1985), ont montré que la superposition d'une contrainte moyenne de traction conduit à une diminution de la limite de fatigue. A l'inverse, la superposition d'une contrainte moyenne de compression augmente notablement la limite de fatigue. La **Figure 15** donne un exemple de diagramme de Haigh obtenu pour un chargement de traction avec une durée de vie cible de 10^6 cycles pour un alliage de titane Ti-6Al-4V (Lanning et al., 2005 (1)).

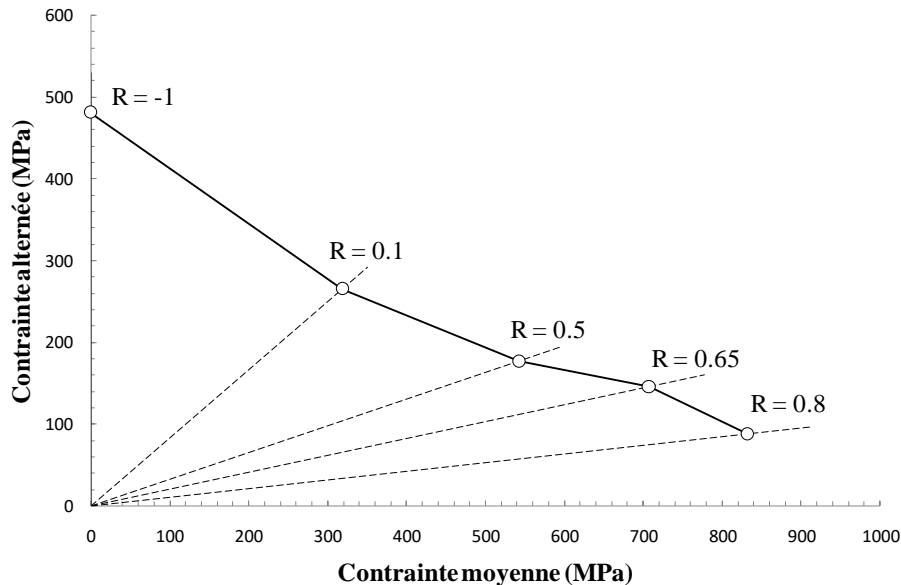


Figure 15 : Diagramme de Haigh obtenu à partir d'essais de fatigue à 10^6 cycles sur des éprouvettes cylindriques en Ti-6Al-4V (Lanning et al., 2005 (1)). Le rapport de charge R est égal au rapport entre les contraintes minimale et maximale.

I.2.3.2. Cas de la torsion cyclique

Sines (Sines, 1959) a montré, en s'appuyant sur des résultats obtenus pour 27 nuances métalliques, que la limite d'endurance en torsion alternée dépend uniquement de l'amplitude du cisaillement et pas du cisaillement moyen. Les résultats de plusieurs auteurs, comme Gough et Pollard (Gough et al., 1951) et plus récemment Papadopoulos et al. (Papadopoulos et al., 2003) confirment ce résultat (**Figure 16**).

Marquis et Socie (Marquis & Socie, 2000) ont réalisé des essais de fatigue sur une fonte à graphite sphéroïdale. Ils ont observé une diminution de 30% de l'amplitude de cisaillement à l'endurance lorsque le cisaillement moyen est non nul. Ce type de matériau contient des hétérogénéités, contrairement à ceux étudiés par les auteurs précédents, qui semblent être responsables de ce comportement inhabituel.

En revanche, dans le cas de l'endurance limitée, la courbe de fatigue semble être dépendante de la contrainte de cisaillement moyenne pour les matériaux sains comme pour les matériaux contenant des anomalies ou des porosités. Plus la contrainte moyenne est importante et plus la durée de vie est faible.

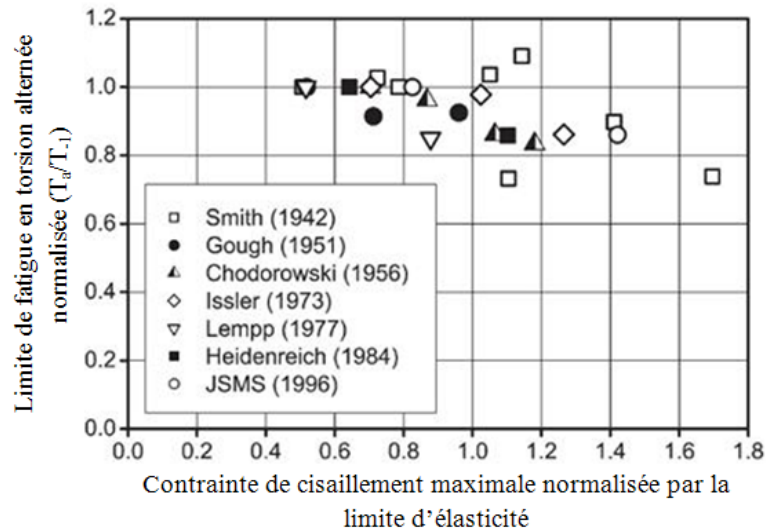


Figure 16 : Données recueillies dans la littérature (normalisées par la limite d'endurance en torsion du matériau concerné) montrant la non-influence de la contrainte de cisaillement statique sur la limite d'endurance en torsion (Papadopoulos et al., 2003).

I.2.4. La limite d'endurance interprétée comme une limite de non-propagation d'une fissure courte.

Associer la limite de fatigue au seuil en deçà duquel l'initiation de fissure ne se produit pas est cependant discutable. En effet, en fatigue, de nombreuses microfissures peuvent s'initier sans pour autant se propager jusqu'à la rupture. Miller (Miller, 1987 (1); Miller, 1987 (2)) explique ce phénomène par l'existence de barrières microstructurales successives (joint de grain, ...) qu'une fissure courte doit franchir pour se propager jusqu'à la rupture (*Figure 17*). Ainsi, pour des fissures courtes, le seuil de non-propagation n'est ni une amplitude de contrainte seuil constante, ni une amplitude du facteur d'intensité des contraintes seuil constante, mais un seuil variable présentant des maxima correspondants au franchissement d'une barrière microstructurale. La limite d'endurance peut alors être définie comme le niveau de contrainte permettant de franchir la dernière barrière microstructurale (frontière C sur la figure). D'autres mécanismes qui peuvent conduire à l'arrêt des fissures courtes ont également été identifiés.

Plusieurs catégories de fissures courtes ont ainsi été définies :

➤ **les fissures micro-structuralement courtes :**

La taille de la fissure est comparable à l'échelle caractéristique de la microstructure, quelques tailles de grain par exemple ;

➤ **les fissures mécaniquement courtes :**

La taille de la fissure est comparable à la dimension de sa zone plastique ;

➤ **les fissures physiquement courtes :**

La taille de la fissure est supérieure à la taille des grains et à la taille de la zone plastique mais ne dépasse pas un millimètre.

Dans la suite de ce document, le terme de fissure courte sera utilisé pour les fissures mécaniquement courtes (ces dernières sont difficiles à détecter par les moyens conventionnels de détection).

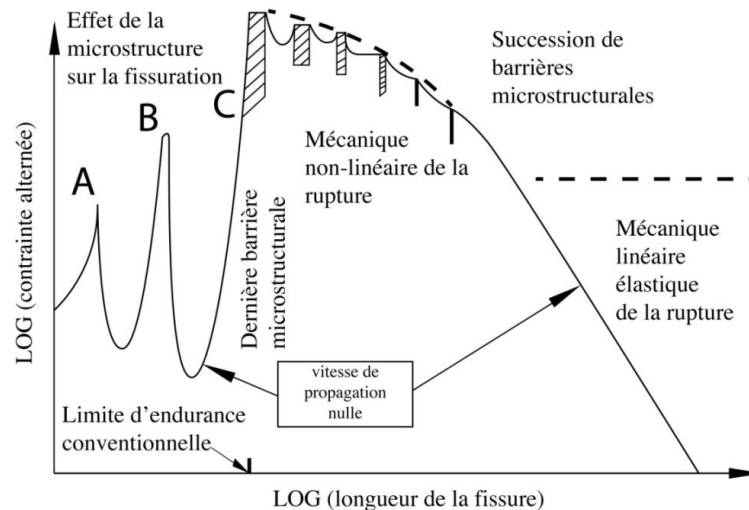


Figure 17 : Limite d'endurance en fonction de la longueur de fissure (Miller, 1987 (1)).

On peut alors définir la limite d'endurance comme l'amplitude de contrainte en deçà de laquelle des microfissures peuvent s'initier mais ne se propagent pas jusqu'à la rupture. Si les fissures sont suffisamment « courtes », la limite d'endurance est indépendante de la dimension de la fissure (Kitagawa & Takahashi, 1976). On parle alors de régime de « fissure courte ». Au-delà d'une certaine taille, la limite d'endurance décroît comme l'inverse de la racine de la dimension caractéristique de la fissure (Figure 17). Il s'agit cette fois d'un régime de type « fissure longue ».

I.2.5. La plasticité comme mécanisme de propagation de fissures par fatigue

I.2.5.1. Mécanismes de propagation

Lorsque la dimension d'une fissure est suffisamment grande ou que le chargement est tel que la déformation plastique le long de son front soit homogène (faible influence de la microstructure), celle-ci se propage essentiellement de manière géométrique (Pelloux, 1969; Laird, 1967). La Figure 18 illustre ce mécanisme dans le cas d'une fissure plane à front droit soumise à un chargement de traction conduisant à une ouverture symétrique de celle-ci selon le plan de fissuration.

Initialement, la fissure est au repos (a), puis, son comportement reste essentiellement élastique (b). Au-delà d'un certain niveau de chargement, sa pointe s'émousse, par l'activation de plans de glissement cristallins. Comme la déformation plastique se fait sans changement de volume, la déformation plastique dans le sens de l'ouverture s'accompagne d'une contraction dans les autres directions et d'une augmentation de la quantité de surface libre, ce qui permet la propagation de la fissure (c).

Lors de la décharge, le même phénomène se produit. Le comportement de la fissure est d'abord essentiellement élastique (e), puis une déformation plastique notable apparaît (f – g). Cependant, les surfaces nouvellement créées le long des plans de glissement ne peuvent se résorber entièrement du fait de l'irréversibilité du processus de création de surfaces, en particulier dans un environnement chimiquement actif (h). Finalement, à la fin du cycle, la fissure s'est propagée.

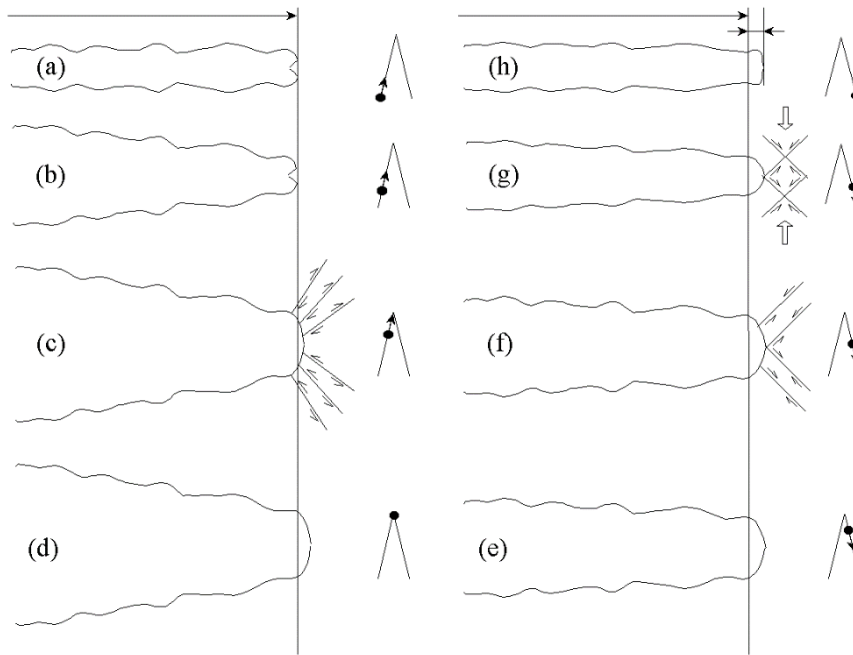


Figure 18 : Formation des stries de fatigue par émoussement plastique en pointe de fissure en accord avec le mécanisme décrit par Pelloux (Pelloux, 1969).

Lorsque le chargement est plus faible, le nombre de systèmes de glissement actifs en pointe de fissure est plus limité. La propagation se fait alors successivement sur un plan puis sur un autre, mais le « plan de fissuration » moyen reste néanmoins orthogonal à la direction principale de chargement (Neumann, 1969). Dans ce régime, les fluctuations de la vitesse de propagation sont importantes puisque celle-ci est influencée par la microstructure. En deçà d'un seuil, la fissure ne se propage plus.

I.2.5.2. Seuil de non-propagation

Le seuil de non-propagation dépend de plusieurs paramètres, comme l'effet de « fermeture de fissure » rendant inefficace une partie du cycle de chargement (Elber, 1970; Elber, 1971) et l'effet de « fissure courte » qui se manifeste expérimentalement par une augmentation de la vitesse de propagation (Gao et al., 2007) du fait d'un non-confinement de la zone plastique en pointe de fissure (Fleck & Newman, 1988) où d'une plus grande distance entre le niveau de chargement et le seuil de non-propagation que pour des fissures plus longues (**Figure 19**).

En conclusion, la fissure se propage par plasticité cyclique et le seuil de non-propagation de fissure peut ainsi être vu comme un domaine d'élasticité pour le matériau au voisinage de la pointe de fissure. On verra, dans la suite, en quoi les effets d'échelle et de gradient influencent le seuil de non-propagation de fissure.

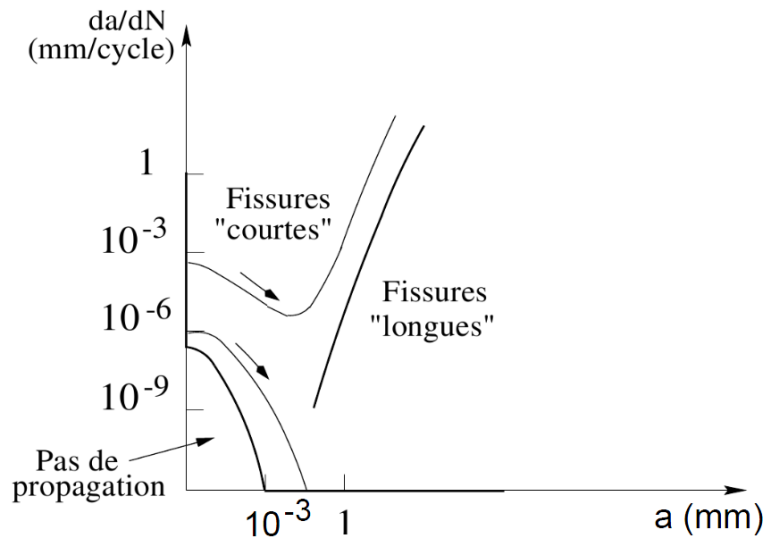


Figure 19 : Illustration de l'effet de fissure courte pour un chargement cyclique de traction imposé sur une éprouvette (Besson et al., 2001).

I.2.5.3. Effets de gradient et d'échelle en fatigue

L'effet de taille sur la limite de fatigue a été étudié par plusieurs auteurs. Par exemple Pogoretskii et Karpenko (Pogoretski & Karpenko, 1965) ont réalisé des essais de fatigue en flexion rotative quatre points sur des éprouvettes en acier de longueur ou de rayon variables et ont montré une diminution significative de la limite d'endurance avec l'augmentation des dimensions des éprouvettes (**Figure 20**). En flexion, cet effet ne peut pas être dissocié de celui de gradient, car plus l'éprouvette est fine et plus le gradient de contrainte normal au plan orthogonal à la fibre neutre est important.

En s'appuyant sur des données de la littérature, Papadopoulos (Papadopoulos, 1996) a conclu que l'effet de gradient est plus significatif que l'effet d'échelle dans le cas d'éprouvettes parfaitement cylindriques soumises au même type de chargement que précédemment (flexion 4 points). En effet, à rayon constant, si la longueur de l'éprouvette varie, le gradient est le même et donc seul l'effet de taille intervient. En revanche, à longueur constante, et pour un rayon variable, les deux effets agissent en même temps. La **Figure 20** montre que la limite d'endurance varie beaucoup plus rapidement avec le rayon qu'avec la longueur de l'éprouvette, ce qui est en accord avec la conclusion de Papadopoulos, à condition que l'effet de taille soit le même dans les deux cas étudiés.

L'effet d'échelle peut être expliqué d'un point de vue statistique par le fait que dans un volume de matière donné il existe un certain nombre de sites privilégiés pour l'apparition de fissures de fatigue. Autrement dit, lorsqu'une « grande » éprouvette est sollicitée, il y a plus de chances qu'une fissure de fatigue s'amorce que dans une « petite » car, dans ce dernier cas, le nombre de sites privilégiés est plus faible.

En poussant le raisonnement plus loin, l'effet de gradient peut s'expliquer par un effet d'échelle déguisé. En effet, lorsque le gradient de contrainte est suffisamment élevé et dans le cas d'une éprouvette sollicitée en flexion, le centre de celle-ci subit peu de contraintes contrairement à sa surface. Donc, le volume de matière réellement sollicité est plus faible que le volume total de l'éprouvette ce qui pourrait se traduire par une augmentation de la limite de fatigue si l'effet de volume est le seul mécanisme de fatigue pertinent, ce qui est en accord avec l'expérience. On en déduit que les conclusions de Papadopoulos nécessiteraient des analyses supplémentaires pour être complètement validées.

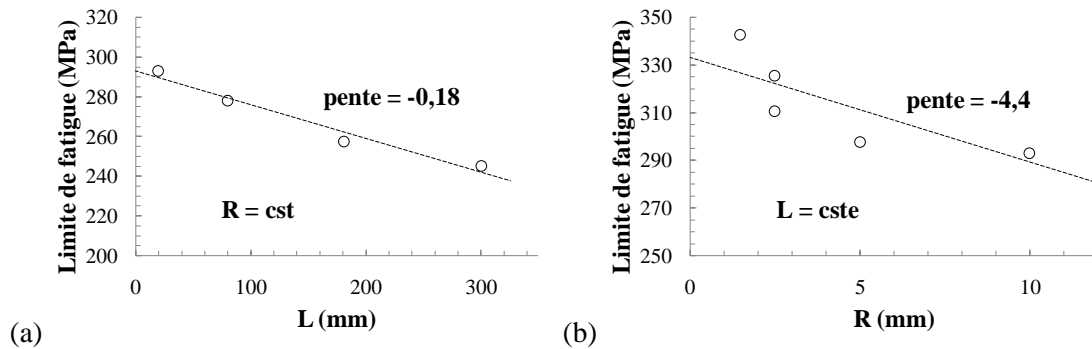


Figure 20 : Influence des effets d'échelle et de gradient dans un acier 40 Kh (Papadopoulos, 1996) :
(a) influence de la longueur de l'éprouvette sur la limite de fatigue en flexion rotative 4 points : effet d'échelle,
(b) influence du rayon de l'éprouvette sur la limite de fatigue en flexion rotative 4 points : effets d'échelle et de gradient combinés.

Lorsque les gradients de contraintes sont suffisamment élevés, les effets d'échelle et de gradient interviennent d'une manière totalement différente de celle du cas précédent. En effet, on a implicitement admis jusqu'à présent, qu'à partir du moment où une fissure de fatigue s'initie, elle conduit nécessairement à la rupture. Or, expérimentalement, un arrêt de fissure peut être constaté dans certaines situations.

La **Figure 21** donne un exemple de diagramme, donnant la limite de fatigue en fonction du facteur de concentration de contrainte K_t qui représente, généralement, le rapport entre la contrainte principale maximale près d'une entaille (au point le plus critique) et la contrainte appliquée au loin. Le diagramme exhibe trois domaines distincts. Un premier dans lequel aucune fissure ne s'initie, un deuxième correspondant à la rupture et un dernier dans lequel une fissure peut s'initier par fatigue mais ne se propage pas.

Ce phénomène a été étudié pour la première fois en 1951 (Fenner et al., 1951), puis Frost (Frost, 1957) a montré que, pour un rapport de charge égal à -1 , la contrainte conduisant à l'amorçage de fissure par fatigue est égale à la limite de fatigue d'une éprouvette non-entallée divisée par K_t . Plus tard, la notion de seuil de non-propagation de fissure ΔK_{th} a permis d'expliquer la présence de la frontière entre les domaines de non-propagation de fissure par fatigue et de rupture (Smith & Miller, 1978). En effet, près de la zone à K_t , le chargement est plus élevé qu'au loin. Ainsi, si le gradient de contrainte suivant le plan de propagation est suffisamment élevé, le chargement en pointe de fissure diminue au cours de la propagation jusqu'à passer en-dessous du seuil ΔK_{th} et la fissure n'avance plus. C'est la raison pour laquelle la contrainte alternée seuil de non-propagation σ_{th} (frontière horizontale dans le diagramme) n'intervient que pour des K_t suffisamment élevés. L'effet d'échelle se manifeste quant à lui par la diminution de σ_{th} lorsque la dimension de la zone à K_t augmente (Nicholas, 2007).

Les mêmes effets sont observés en fatigue thermique. Lorsqu'une surface subit des chocs thermiques répétés, les gradients de contraintes sont directement liés à la durée du choc thermique. Dans ce cas, de nombreuses fissures peuvent s'initier en surface mais ne parviennent généralement pas à se propager et forment un réseau de fissures peu profondes formant un motif typique de faïençage thermique.

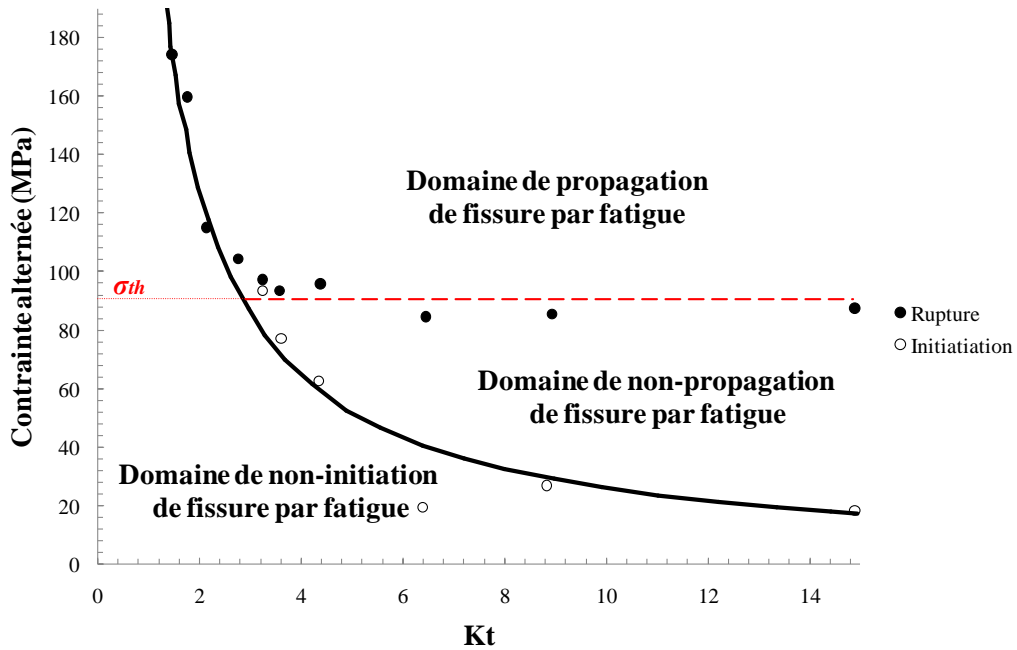


Figure 21 : Exemple de diagramme de Frost. Données expérimentales obtenues dans le cas d'un chargement en flexion rotative sur des éprouvettes en acier doux (diamètre égal à 12,7 mm) contenant une entaille en V de 1,3 mm de profondeur et de rayon en fond d'entaille allant de 0,005 mm à 0,3 mm (Frost, 1957). Les essais ont été réalisés pour un rapport de charge égal à -1.

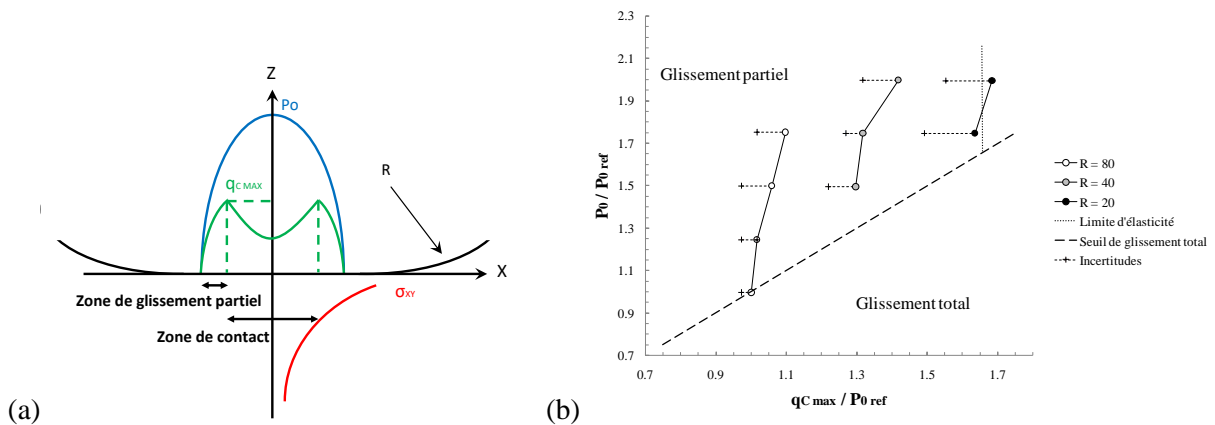


Figure 22 : Effet de gradient et d'échelle en mécanique du contact :
 (a) contact de Hertz entre un cylindre et un plan. Le champ de pression à la surface de contact est représenté en bleu, tandis que le cisaillement maximal est en rouge. L'effet de K_t correspond à l'élévation de la contrainte de cisaillement jusqu'à q_{cmax} et l'effet d'échelle quant à lui est lié à la dimension de la zone à Kt ,
 (b) résultats expérimentaux sur l'amorçage de fissure par fatigue dans l'inconel 718 au cours d'essais de fatigue de contact de type cylindre – plan pour différents rayons d'éprouvette. Le diagramme donne la pression normalisée en fonction du cisaillement maximale normalisé (Amargier, 2011).

De même, lorsque des éléments mécaniques sont soumis à de la fatigue de contact, des effets de gradient peuvent intervenir. Ce type de sollicitation se caractérise par la mise en contact de deux pièces mécaniques sous des contraintes de pression et de cisaillement alterné. La zone de contact se divise en deux parties. Au centre de celle-ci aucun glissement n'est constaté alors qu'en périphérie un glissement

partiel survient au cours d'un cycle de chargement (*Figure 22*). C'est sous l'effet de ce mouvement répété qu'une fissure de fatigue peut s'initier. Ceci n'est possible que si la pression appliquée est suffisante ou que le coefficient de frottement est suffisamment élevé. Dans le cas contraire, un glissement total est observé (Fouvry et al., 2004).

Des essais de ce type ont été réalisés afin de mettre en évidence un effet de gradient sur l'amorçage de fissure par fatigue à 10^5 cycles de chargement. La conclusion principale de l'étude est que la résistance à la fatigue augmente avec le gradient de contrainte (Amargier, 2011). En effet, les observations réalisées sur les découpes d'éprouvettes ont montré la présence de plusieurs fissures de fatigue qui ont amorcé mais pas propagé indiquant que l'effet statistique induit par le volume de matière sollicité n'est pas le mécanisme principal de dégradation intervenant en fatigue de contact.

I.2.5.4. Effets des petites anomalies sur l'endurance en fatigue

Une hypothèse simplificatrice est de supposer que les anomalies contenues dans les métaux puissent être vues comme des fissures en termes de leur influence sur la tenue en fatigue. Or, les champs de contraintes en pointe de fissure présentent une singularité, ce qui n'est pas le cas des anomalies circulaires ou elliptiques par exemple. Il est donc naturel de penser que les fissures sont plus nocives que les autres anomalies. Les approches modélisant les anomalies comme des fissures doivent donc conduire à des prédictions conservatrices par rapport à la réalité. En réalité, les anomalies présentent des gradients de contraintes élevés et sont généralement de petites dimensions. Il se peut donc que des effets d'échelle et de gradient interviennent.

Il y a deux raisons essentielles qui poussent à faire cette hypothèse. Tout d'abord, d'un point de vue industriel, il vaut mieux disposer d'une méthode de prévision conservatrice que le contraire. Ensuite, cette démarche permet d'utiliser la mécanique de la rupture comme unique cadre théorique.

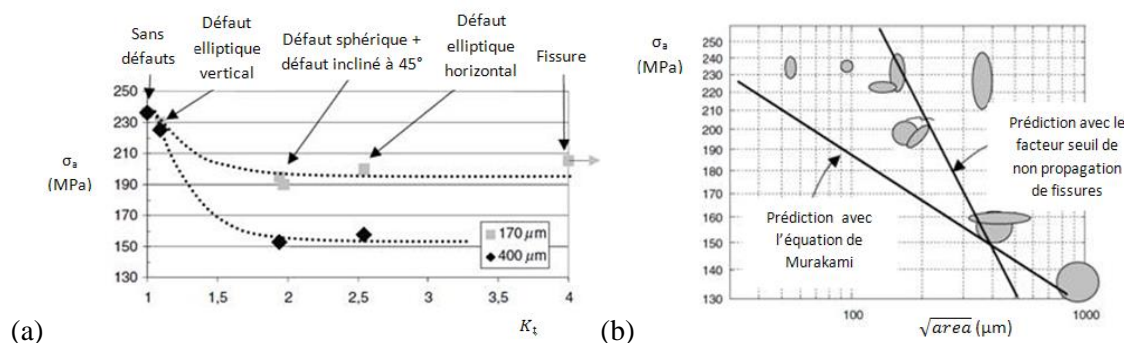


Figure 23 : Evolution de la limite d'endurance en traction dans l'acier C36 contenant des anomalies artificielles (Billaudeau et al., 2004),

(a) effet du K_t pour différentes dimensions d'anomalies données par le paramètre de Murakami,
(b) effet de la dimension d'une anomalie donnée par le paramètre de Murakami et de sa géométrie.

Cependant, cette méthode pourrait conduire à des résultats beaucoup trop conservatifs. C'est pourquoi, Billaudeau et al. ont effectué une étude expérimentale et numérique sur le sujet (Billaudeau et al., 2004). Ils ont réalisé des essais de fatigue sur des éprouvettes saines soumises à des chargements cycliques à rapport de charge égal à -1 en traction et en torsion alternée, puis les mêmes essais sur des éprouvettes contenant des anomalies artificielles de différentes dimensions et géométries. Leurs observations ont montré que, dans le cas des éprouvettes saines, lorsqu'il y a amorçage de fissure, il y a, à termes, rupture. Cependant, pour certaines éprouvettes contenant des anomalies, des fissures peuvent s'initier sans forcément conduire à la rupture. Les simulations numériques ont montré la présence de gradients de contraintes localisés au bord des anomalies quel que soit le chargement. Or, lorsque le gradient de contrainte est suffisamment élevé, des fissures de fatigue peuvent s'initier sans

forcément conduire à la rupture (§I.2.5.3), ce qui permet de donner une explication cohérente aux observations.

La **Figure 23** montre quelques-uns des résultats de l'étude. Sur le premier graphique, on voit, notamment, deux comportements distincts. Pour les faibles valeurs de K_t , la limite d'endurance macroscopique (chargement au loin d'une anomalie) chute lorsque cette grandeur augmente, puisque, dans ce cas, le comportement en fatigue est gouverné par le mécanisme d'amorçage de fissure. A l'inverse, passé un certain seuil, la limite d'endurance semble ne plus dépendre du K_t , ce qui est typique des situations où l'effet d'arrêt de fissure est présent (§I.2.5.3). Un point surprenant dans l'étude, est que le comportement en fatigue des anomalies à forts K_t est le même que celui de fissures ayant la même dimension, au sens du paramètre *Varea* qui représente la racine carrée de l'aire de l'anomalie projetée sur le plan orthogonal à la direction principal du chargement, au moins dans le cas de l'acier C36. Ainsi, les approches fondées sur la mécanique de la rupture pourraient permettre de prédire le comportement en fatigue des matériaux contenant des anomalies à forts K_t . D'ailleurs, le graphique de droite montre que pour de telles anomalies, il est possible de tracer un diagramme de Kitagawa et Takahashi similaire à celui obtenu pour des fissures. Cependant, lorsque les anomalies deviennent suffisamment grandes, l'approche ne fonctionne plus. Cela est peut-être dû au fait que l'effet d'arrêt de fissure est lié à la fois au K_t , mais également à l'échelle. En effet, plus l'échelle est élevée et plus le K_t à partir duquel l'effet d'arrêt de fissure est constaté l'est également (§I.2.5.3). Ainsi, si une géométrie d'anomalie donnée conduit à un arrêt de fissure, cela n'est pas forcément le cas pour la même géométrie mais avec des dimensions supérieures.

I.2.5.5. Rôle du comportement du matériau et des contraintes résiduelles

La propagation et la non-propagation de fissure par fatigue sont liées aux caractéristiques du comportement élasto-plastique cyclique du matériau (Pommier, 2003). Des simulations par éléments finis ont été réalisées afin d'étudier l'effet de la loi de comportement sur les contraintes résiduelles en pointe de fissure. Une première conclusion de ces travaux est que pour un chargement à amplitude constante, lorsque la fissure se propage, la dimension et la forme de la zone plastique en pointe de fissure changent au cours du temps, passant d'un état transitoire à un état stabilisé (Pommier & Bompard, 2000; Pommier, 2001 (1); Pommier, 2002). L'explication de ce phénomène tient à la non-linéarité du processus de plastification en pointe de fissure. En effet, lors de la première charge, une première zone plastique induite apparaît en pointe de fissure. On la nomme zone plastique monotone. L'hétérogénéité du champ de déformation plastique induit conduit à des contraintes résiduelles qui se superposent au chargement élastique lors de la deuxième charge, ce qui provoque l'apparition d'une deuxième zone plastique de dimension plus faible que la précédente. A force de cycliser et à dimension de fissure fixe, cette dernière zone plastique, dite zone plastique cyclique, se stabilise. Or, dans la réalité, la fissure se propage. La stabilisation des champs mécaniques dans cette situation est différente de la précédente puisque deux phénomènes se produisent simultanément : plasticité en pointe de fissure et propagation de cette dernière.

Une conséquence de ce phénomène est l'augmentation du niveau d'ouverture de la fissure (chargement à appliquer pour ouvrir les lèvres de la fissure) et donc une inefficacité d'une partie du cycle de chargement sur la propagation. Ainsi, plus l'écrouissage d'un matériau est important et plus la vitesse de propagation de fissure pour un chargement cyclique donné sera faible a priori.

Par ailleurs, Pommier (Pommier, 2003) a montré que les écrouissages cinématiques et isotropes du matériau ont une influence très différente sur la vitesse de propagation de la fissure. En effet, après une montée en charge, lors de la décharge, un écrouissage cinématique induit une déformation plastique en retour et un étalement de la zone plastique plus importants qu'un écrouissage isotrope. Le seuil d'ouverture obtenu pour un comportement cinématique est généralement plus faible que celui obtenu avec un écrouissage isotrope, et la portée de l'effet d'une surcharge, par exemple, est toujours plus important si l'écrouissage du matériau est de nature cinématique.

Le résultat le plus intéressant est obtenu pour un rapport de charge négatif. Pour de telles conditions, le seuil d'ouverture peut être négatif pour un comportement cinématique, tandis que dans le cas isotrope, celui-ci reste positif. Ainsi, pour un chargement cyclique de rapport de charge négatif, une partie du cycle de compression intervient en fissuration lorsque le comportement du matériau présente un écrouissage cinématique important, ce qui corrobore certains résultats expérimentaux obtenus par ailleurs (Pommier, 2001 (1)).

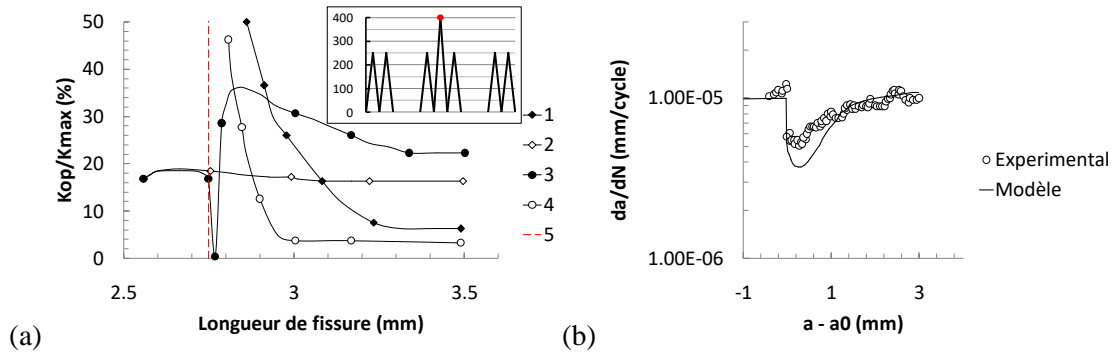


Figure 24 : Effet de l'écrouissage sur la propagation de fissure sous chargement à amplitude variable (Pommier, 2003),

- (a) Comparaison des contraintes résiduelles induites par la présence ou non d'une surcharge en fonction de la lois de comportement (1 – loi élasto-plastique parfaite dont la limite d'élasticité correspond à la contrainte à rupture en traction du matériau et chargement avec surcharge, 2 – loi élasto-plastique parfaite dont la limite d'élasticité correspond à la limite d'élasticité du matériau et chargement avec surcharge, 3 – loi élasto-plastique à écrouissage cinématique non-linéaire dont la limite d'élasticité et la contrainte à rupture en traction correspondent à celle du matériau et chargement avec surcharge, 4 – même loi de comportement que précédemment mais chargement sans surcharge et 5 – Application de la surcharge),
- (b) Prise en compte des contraintes résiduelles dans un modèle de propagation de fissure et comparaison avec des résultats expérimentaux sur un acier à faible teneur en carbone.

I.2.5.6. Chargements complexes, surcharges, chargement par blocs

Pour terminer, les contraintes résiduelles induites par des surcharges locales ou par blocs au sein d'un chargement cyclique périodique provoquent un ralentissement de la fissure (Willenborg et al., 1971; Wheeler, 1972; Schijve, 1973; Newman, 1992) du fait d'une augmentation du seuil d'ouverture. Cet effet de surcharge est illustré dans la **Figure 24**. Il peut être schématiquement expliqué de la manière suivante : si la zone plastique associée à la surcharge reste confinée, alors lors de la décharge le massif élastique lui imposera sa déformation et des contraintes résiduelles de compression apparaîtront dans la zone plastique. Ces contraintes résiduelles et leurs effets sur la propagation sont fortement dépendants des caractéristiques du comportement élasto-plastique cyclique du matériau (**Figure 24**) (Pommier, 2001 (1); Pommier & Freitas, 2002; Pommier, 2003). Après la surcharge, ces contraintes internes se superposent aux contraintes appliquées et peuvent ainsi maintenir la fissure fermée même lorsque le chargement appliqué est positif et rendre une part importante du cycle de chargement inefficace.

En plus d'induire une réduction transitoire de la vitesse de propagation, les surcharges peuvent conduire à un arrêt complet de la fissure pour des amplitudes de chargements suffisamment faibles. Afin de quantifier ces effets, Goecke et Moshier ont mis au point un dispositif expérimental permettant de mesurer des seuils de non-propagation de fissure (Goecke & Moshier, 2002). Les essais réalisés sur le Ti-6Al-4V ont montré que le seuil de non-propagation de fissure n'est pas intrinsèque au matériau mais peut dépendre de l'histoire du chargement. Si une surcharge est appliquée à un instant donné, l'effet de fermeture induit par les contraintes résiduelles laissées par la surcharge tend à augmenter le seuil de non-propagation de la fissure.

Les courbes de la **Figure 25** donnent l'évolution du seuil de non-propagation de fissure avec le niveau de la surcharge appliquée pour différents rapports de charges (Goecke & Moshier, 2002). Ces résultats sont comparés aux mesures de seuils effectuées sur des éprouvettes après que celles-ci aient subi un procédé d'annihilation des contraintes résiduelles laissées par les surcharges. Comme attendu, les résultats obtenus, avec ou sans le procédé d'annihilation des contraintes résiduelles, conduisent à des résultats totalement différents. On voit notamment que les effets d'histoire disparaissent complètement si les contraintes résiduelles sont éliminées, ce qui justifie l'importance de ces contraintes résiduelles pour la fissuration.

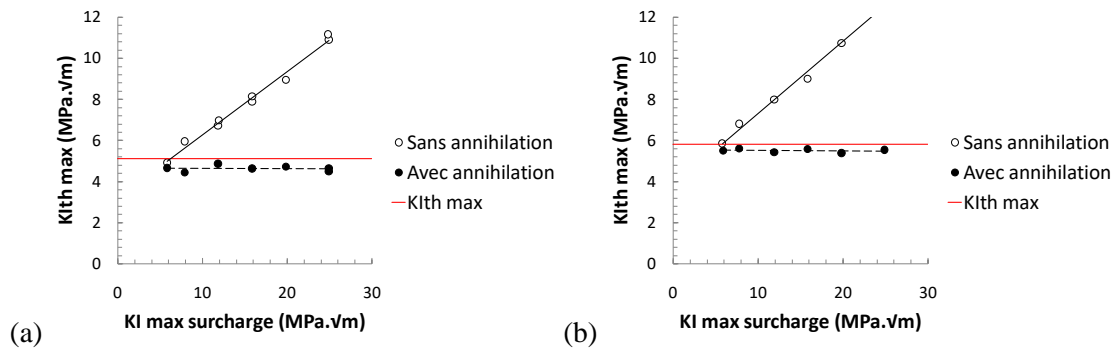


Figure 25 : Evolution du seuil de non-propagation de fissure du Ti-6Al-4V avec le niveau de surcharge avec et sans traitement d'annihilation des contraintes résiduelles après la surcharge (Goecke & Moshier, 2002) :
 (a) rapport de charge égal à 0.1,
 (b) rapport de charge égal à 0.5.

I.2.5.7. Cycles combinés CCF, interaction HCF / LCF

Précédemment, on a défini ce qu'est un chargement CCF (§1.1.3). Plusieurs auteurs ont cherché à quantifier les interactions entre les parties HCF et LCF des chargements combinés CCF.

Avant de poursuivre, on doit préciser quelques notions. Sur la **Figure 26**, un cycle CCF est représenté. L'amplitude du chargement LCF (en termes de facteur d'intensité des contraintes) est notée ΔK_{maj} . Au cycle LCF est superposé un chargement HCF d'amplitude ΔK_{min} . L'amplitude de chargement maximale au cours d'un cycle LCF perçue par la fissure est ΔK_{total} et c'est donc cette dernière qui doit être utilisée pour décrire l'influence du cycle LCF en fissuration.

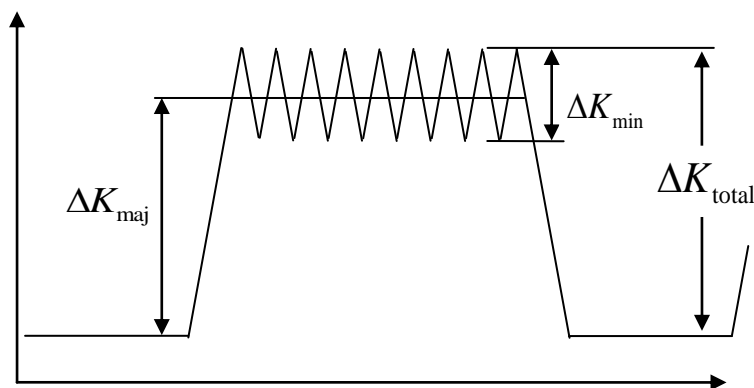


Figure 26 : Représentation schématique d'un cycle CCF

En adoptant ces règles, deux types de comportement peuvent être identifiés (*Figure 27*). Le premier est celui pour lequel la vitesse de propagation peut être prédite par une règle de sommation des effets des deux types de cycles sur la vitesse de propagation de la fissure, tandis que dans le second cas, la règle de sommation ne s'applique pas, des effets d'interaction entre cycles HCF et LCF ou de synergie sont observés. Par exemple, à rapports de charge LCF et HCF fixés, la contribution HCF devient nulle lorsque son amplitude passe sous le seuil de non-propagation de fissure et cela dans le cas d'un matériau appartenant à la première catégorie de comportement. Ceci ne semble plus être le cas d'un matériau appartenant à la deuxième catégorie de comportement. En effet, même si l'amplitude du chargement HCF passe sous le seuil de non-propagation de fissure, on peut observer une accélération de l'avancée de fissure par rapport au cas d'un chargement LCF pur.

La règle de sommation peut s'énoncer ainsi : la vitesse de propagation d'une fissure sur un bloc de chargement (un cycle LCF avec n cycles HCF) est la somme des vitesses obtenues pour un cycle LCF seul et pour n cycles HCF seuls. Pour faire ce calcul, il faut considérer une amplitude de chargement ΔK_{total} pour les cycles LCF et ΔK_{min} pour les cycles HCF. On peut alors écrire :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{Block} = \left(\frac{da}{dN}\right)_{LCF} + n \cdot \left(\frac{da}{dN}\right)_{HCF} \quad (I-1)$$

Les travaux de Powell, dont quelques résultats se trouvent dans le livre de Nicholas (Nicholas, 2007), dans le chapitre « LCF – HCF Interactions », montrent que le Ti-6Al-4V est un matériau pour lequel la règle de sommation semble s'appliquer, ce qui n'est pas du tout le cas du Ti-5331S. Ses résultats ont été obtenus sur des éprouvettes entaillées pour des chargements LCF à rapport de charge égal à 0,1 et HCF à rapport de charge égal à 0,9 (*Figure 27*).

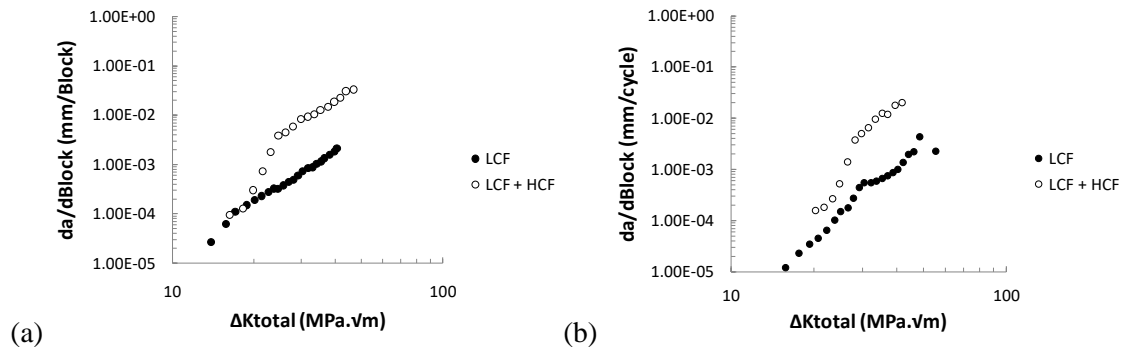


Figure 27 : Vitesses de propagation de fissure, mesurées expérimentalement à température ambiante, en fonction de ΔK_{total} pour un chargement CCF, avec comme rapports de charge 0.1 et 0.9 pour les parties LCF et HCF, respectivement,

*(a) résultats expérimentaux obtenus sur le Ti-6Al-4V,
(b) résultats expérimentaux obtenus sur le Ti-5331S,*

Byrne et al. ont réalisées plusieurs campagnes d'essais visant à étudier l'effet d'une surcharge au cours d'un chargement CCF (*Figure 28*) sur la vitesse de propagation de fissure (Byrne et al., 2003). Ils ont introduit un taux de surcharge (que l'on notera T) qui est défini comme le rapport entre les contraintes maximales de la surcharge et du cycle CCF. Dans leur étude, les rapports de charges étudiés pour les parties HCF et LCF du chargement sont, respectivement, de 0.7 et 0.01.

Comme l'illustre la *Figure 29*, le taux de surcharge fait évoluer le seuil d'influence des cycles HCF sur la vitesse de propagation de la fissure. Ce résultat est interprété par les auteurs comme le fait que le niveau d'ouverture de la fissure augmente avec la surcharge rendant inefficace une partie du cycle de chargement HCF. Ainsi, le seuil de non-propagation de fissure HCF paraît plus important. Cet essai

démontre l'importance des effets d'histoire provenant de la plasticité sur le seuil apparent de non-propagation.

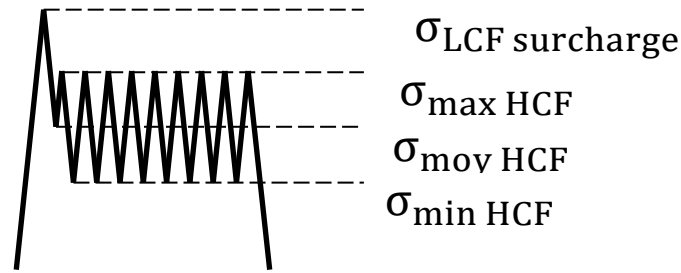


Figure 28 : Représentation d'un chargement CCF avec surcharge.

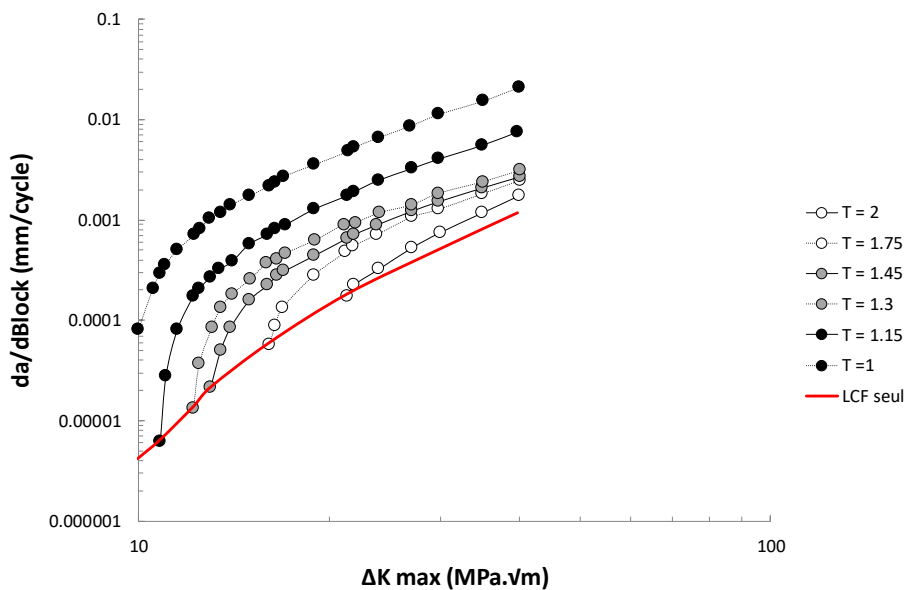


Figure 29 : Evolution du seuil d'influence des cycles HCF d'un chargement CCF pour différents taux de surcharge T pour $R_{HCF}=0,7$ et $R_{LCF}=0,01$ (Byrne et al., 2003).

I.2.6. Influence de cycles LCF sur la limite d'endurance HCF

Une série d'expériences visant à étudier les effets de cycles LCF sur la limite d'endurance HCF a été réalisée par Mall et al. sur du Ti-6Al-4V (Mall et al., 2003). Les essais ont consisté à solliciter des éprouvettes d'abord en LCF à un rapport de charge donné, puis à déterminer, par une méthode staircase modifiée, la limite d'endurance pour une durée de vie cible de 10 millions de cycles (limite d'endurance HCF). La méthode utilisée ici consiste à solliciter une éprouvette sur un bloc de 10 millions de cycles, puis, à recommencer avec un chargement plus important jusqu'à rupture de celle-ci (**Figure 30**). Pour pouvoir l'utiliser, il faut commencer par montrer que la limite d'endurance σ_f obtenue par cette méthode ne dépend pas du nombre de blocs de chargement subis par les éprouvettes. Cela n'est pas vrai pour tous les matériaux, mais Nicholas a démontré que c'était le cas pour le Ti-6Al-4V (Nicholas, 2002). Afin de déterminer la limite d'endurance (en termes de contrainte maximale et pas alternée pour un rapport de charge donné), l'hypothèse d'endommagement linéaire vis-à-vis du nombre de cycles est faite sur le bloc de chargement menant à rupture de l'éprouvette et la formule suivante est utilisée :

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \Delta\sigma_{max} \cdot \left(\frac{N_f}{10^7}\right) \quad (I-2)$$

où σ_0 est la contrainte maximale du bloc de chargement précédant celui conduisant à rupture, $\Delta\sigma_{max}$ est la différence entre la contrainte maximale précédente et celle conduisant à rupture et N_f est le nombre de cycles à rupture du dernier bloc.

Cette hypothèse d'endommagement linéaire semble discutable dans la mesure où des résultats d'essais sur Ti-6Al-4V ont révélés le caractère non-linéaire de l'endommagement par fatigue (Gaborit, 2015). Néanmoins, l'augmentation du chargement à la fin de chaque bloc est supposée ici suffisamment faible pour que le cumul d'endommagement soit considéré comme linéaire au dernier bloc conduisant à rupture.

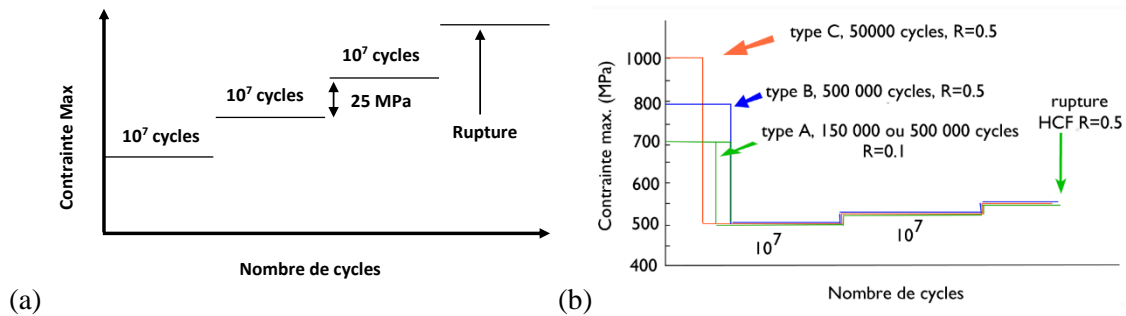


Figure 30 : Méthode expérimentale employée par Mall (Mall et al., 2003) pour l'étude de l'effet de cycles LCF sur l'endurance en fatigue HCF,

- (a) principe de la méthode staircase pour la détermination de la limite d'endurance HCF,
 (b) chargements LCF appliqués puis détermination de la limite d'endurance HCF

Durant leur étude, Mall et al. ont réalisé différents types d'essais sur des éprouvettes cylindriques. Ils ont commencé par déterminer le nombre de cycles à rupture d'éprouvettes soumises à des chargements dits « LCF » cycliques de traction. Trois niveaux de chargement maximum ont été testés (**Tableau 1**) : 700 MPa à $R = 0.1$ (type A), 790 MPa à $R = 0.5$ (type B) et 900 MPa à $R = 0.5$ (type C). Les nombres de cycles à rupture sont de 1 million pour le cas A, 2.5 millions pour le cas B et 250 000 pour le cas C. Ensuite, ils ont déterminé la limite d'endurance des éprouvettes pour un chargement en traction (HCF) par la méthode staircase (**Tableau 1**). Enfin, ils ont réalisé des essais complémentaires afin de déterminer la limite d'endurance d'éprouvettes ayant subi un pré-chargement LCF par la même méthode.

Tableau 1 : Récapitulatif des chargements LCF et HCF appliqués sur les éprouvettes de fatigue en Ti-6Al-4V pour l'étude de l'effet de cycles LCF sur l'endurance en fatigue HCF (Mall et al., 2003) :

- (A) : Essais LCF à $R = 0,1$ et contrainte maximale égale à 700 MPa,
 (B) : Essais LCF à $R = 0,5$ et contrainte maximale égale à 790 MPa,
 (C) : Essais LCF à $R = 0,5$ et contrainte maximale égale à 900 MPa.

Type de chargement	Rapport de charge	Contrainte Max (MPa)
LCF (A)	0,1	700
LCF (B)	0,5	790
LCF (C)	0,5	900
HCF	0,1	534
HCF	0,5	639
HCF	0,8	910

Les pré-chargements correspondent aux chargements « dits » LCF précédents mais sur un nombre de cycles n'entraînant pas la rupture des éprouvettes. Quatre types de pré-chargements ont été testés : type A sur un nombre de cycles correspondant à 15 % et 50 % de la durée de vie du chargement associé, type B et type C sur des nombres de cycles correspondant à 20 % des durées de vie associées à ces chargements (*Figure 30*).

Les résultats obtenus par Mall et al. sont regroupés dans le *Tableau 2* et semblent indiquer qu'il n'y a pas d'effet d'un pré-chargement dit « LCF » sur la limite d'endurance HCF. Compte tenu des dispersions expérimentales, s'il existe un effet, il n'est pas significatif. Ce constat peut sembler surprenant dans la mesure où certains modèles de cumul non-linéaire de l'endommagement (§II.2.5) prédisent qu'un bloc de chargement LCF suivi d'un bloc de chargement HCF est une situation plus néfaste en fatigue que le contraire, comme cela a été constaté expérimentalement (Gaborit, 2015). Notons le fait que les auteurs parlent de préchargements LCF alors que les nombres de cycles à rupture associés semblent correspondre à des chargements dans le domaine de l'endurance limitée HCF (I.2.1). La terminologie utilisée n'est semble-t-il pas adaptée. L'article publié par les auteurs ne donnent pas d'indication sur la loi de comportement, mais indique qu'au-delà d'un certain niveau de chargement en contrainte maximum, une accumulation de déformation se produit. Celle-ci serait semblable à celle qui serait obtenue par fluage au-delà de la limite d'élasticité du matériau. Cela permettrait d'expliquer les accumulations de déformation obtenues à rapport de charge de 0,5 pour le chargement « dit » LCF de type C et pour le chargement HCF testé à rapport de charge de 0,8. Pour les autres chargements testés, aucune accumulation de déformation n'a été observée. Ainsi, les niveaux de plasticité atteints lors des phases de préchargements ne sont peut-être pas suffisants pour conduire à un endommagement significatif qui conduirait à une diminution observable de la limite d'endurance HCF. Dans tous les cas, il ne semble pas évident de conclure quant à la cohérence de ces résultats avec les constats expérimentaux ayant conduits à l'élaboration des modèles de cumul non-linéaire de l'endommagement.

Une autre explication possible de l'absence de l'impact des blocs de chargements « dits » LCF sur la limite d'endurance conventionnelle HCF serait que les cycles LCF sont significativement endommageants. Il conduiraient alors à l'amorçage de fissures de fatigue. Mais les contraintes résiduelles de compression engendrées en pointe de fissure pourraient être suffisantes pour empêcher leur propagation lors de l'application du bloc de cycles HCF. La limite d'endurance conventionnelle associée à ce dernier serait alors liée à l'amorçage ou non de nouvelles fissures de fatigue.

Tableau 2 : Limite d'endurance (en contrainte maximale) avec et sans pré chargement LCF (Mall et al., 2003),

*(a) pour un rapport de charge HCF de 0.1,
(b) pour un rapport de charge HCF de 0.8.*

Type de chargement	Rapport de charge	Contrainte Max (MPa)
Sans préchargement	0,1	535
Type A 150000 cycles	0,1	550
Type C 50000 cycles	0,1	540
Sans préchargement	0,8	910
Type A 500000 cycles	0,8	895
Type C 50000 cycles	0,8	910

Morrissey et al. ont réalisé une étude similaire à celle de Mall et al. sur le même matériau et avec la même géométrie d'éprouvette (Morrissey et al., 2003), mais avec des chargements « dits » LCF appliqués de plus faibles amplitudes encore et toujours supérieurs à la limite d'endurance HCF. Par abus de langage le terme LCF est, une nouvelle fois, appliqué dans ce paragraphe à ces chargements. Le nombre de cycles LCF appliqués aux éprouvettes a été équivalent à des fractions de durée de vie LCF

allant de 7,5 % à 25 %. Les amplitudes de ces cycles ainsi que les durées de vie associées sont résumées dans le tableau suivant :

Tableau 3 : Résumé des essais ayant conduit à la détermination des durées de vie de l'éprouvette en Ti-6Al-4V utilisée par Morrissey (Morrissey et al., 2003).

Chargement appliqué aux éprouvettes (MPa)	Durée de vie associée (en cycles)
655	10 ⁷ (limite d'endurance)
725	5x10 ⁶
790	7x10 ⁵
855	2x10 ⁵
925	10 ⁵

Les résultats expérimentaux sont résumés dans le **Tableau 4**. Tout comme précédemment, il semblerait que la limite d'endurance ne soit pas dépendante des cycles LCF imposés aux éprouvettes. Néanmoins, dans le cas où une éprouvette ayant été sollicitée par des cycles LCF subit un procédé visant à annuler les contraintes résiduelles internes (SRA – Stress Relief Annealing), la limite d'endurance HCF chute significativement (dernière ligne du **Tableau 4**). Ceci permet de justifier le fait que des fissures peuvent s'initier sous un chargement LCF mais peuvent arrêter de se propager pour des sollicitations plus faibles du fait d'un effet analogue à l'effet de surcharge lors de la transition entre un bloc « dit » LCF et un bloc HCF (§I.2.5.6). En éliminant les contraintes résiduelles dans l'éprouvette, les auteurs n'ont fait qu'annuler les effets d'histoire dans les micros-fissures initiées en LCF, ce qui a permis à l'une d'entre elles de se propager et de conduire à rupture même pour un chargement en-dessous de la limite d'endurance. En effet, l'annulation des contraintes résiduelles en pointe de fissure se manifeste par une diminution du seuil de non-propagation de fissure (**Figure 25**) et donc à sa propagation si l'amplitude de chargement HCF est suffisamment élevée.

Tableau 4 : Résumé des résultats d'essais de Morrissey concernant l'interaction LCF/HCF en durée de vie (Morrissey et al., 2003).

Chargement LCF (MPa)	Nombre de cycles LCF	% de la durée de vie	Rapports des limites d'endurance avec et sans cycles LCF
855	50 000	25	0,99
925	25 000	25	0,92
925	15 000	15	0,94
925	7 500	7,5	0,93
925 (SRA)	25 000	25	0,81

I.2.7. Effet de l'environnement sur l'initiation et la propagation de fissures par fatigue

Comme précédemment, le chargement type d'un moteur d'avion combine à la fois une sollicitation de type LCF et des cycles de type HCF. Le cycle LCF (**Figure 26**) se caractérise par un temps de maintien pouvant être suffisamment long pour qu'un effet de l'environnement apparaisse à la fois au niveau de l'initiation d'une fissure par fatigue et de sa propagation. C'est pourquoi il est important d'étudier ce point plus en détail.

Gough et Sopwith (Gough & Sopwith, 1932; Gough & Sopwith, 1935; Gough & Sopwith, 1946) ont été les pionniers dans le domaine de l'étude de l'influence de l'environnement sur la durée de vie des matériaux métalliques. Ils ont réalisé des campagnes d'essais de fatigue sous vide et sous environnement contrôlé (azote sec, azote humide, air pur sec, air pur humide et air ambiant). Leurs résultats montrent une forte influence de l'environnement qui dépend du matériau testé. Par exemple, l'augmentation de la limite d'endurance sous vide, par comparaison avec l'air ambiant, est très marquée pour le laiton (+26%) et pour le plomb (+224%) et beaucoup moins pour les alliages d'aluminium, les aciers légers et les aciers alliés.

Plus récemment, Murakami et al. (Murakami & Matsunaga, 2000; Murakami et al., 2000 (1); Murakami et al., 2000 (2)) ont réalisé des essais de fatigue dans le domaine VHCF sur des éprouvettes contenant des inclusions. Les observations au microscope des faciès de rupture ont révélé, au voisinage d'inclusions, la présence de zones appelées « *Optically Dark Area* » semblant être responsables des ruptures constatées. Les auteurs ont suggéré que la présence d'hydrogène emprisonné dans ces inclusions est néfaste sur la résistance en fatigue de certains alliages métalliques. En effet, sous l'effet de sollicitations mécaniques, les inclusions libéreraient progressivement l'hydrogène emprisonné, ce qui provoquerait une fragilisation du matériau au voisinage de l'inclusion. Plus une zone appelée « *Optically Dark Area* » est étendue, plus la probabilité d'y voir apparaître une fissure de fatigue serait élevée. Notons, néanmoins que, la présence ou non d'hydrogène dans les inclusions n'est semble-t-il pas encore prouvée. Mais il semble envisageable que le couplage chemo-mécanique pourrait donc se produire en surface comme à l'intérieur de la matière.

L'effet néfaste de l'environnement peut se manifester par d'autres voies. Par exemple, dans le cas de certains alliages de titane, des résultats expérimentaux ont permis de montrer que la vitesse de propagation de fissure augmente avec la diminution de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes, pour une fréquence de sollicitation donnée et à température ambiante. Ce fait étrange est appelé « Marci effect » par certains auteurs qui le considèrent comme « anormal ». Mais selon Lang (Lang, 1999), cet effet est connu depuis longtemps et peut s'expliquer par la compétition entre deux mécanismes. Le premier est associé à la fatigue cyclique (induit par la plasticité cyclique), alors que le deuxième ne s'active que lorsque le chargement dépasse un certain seuil.

Ainsi, pour un essai où le chargement maximal est imposé et dépasse ce seuil, lorsque l'amplitude du chargement est suffisamment faible, cet effet se manifeste durant tout le cycle de chargement (**Figure 31**). La vitesse de propagation est alors d'autant plus élevée que la période du cycle de chargement (respectivement, la fréquence) l'est également (respectivement, est faible). L'une des explications plausibles de ce phénomène est que l'environnement fragilise le matériau par diffusion d'espèces chimiques sous contraintes engendrant ainsi une propagation intergranulaire par fluage (Sarrazin-Baudoux et al., 1999).

Des résultats d'essais de propagation de fissure par fatigue sur le Ti-6Al-4V ont montré que ce matériau peut être sensible à l'environnement. En effet, les résultats expérimentaux de Ding et al. suggèrent qu'à l'air libre l'avancée de fissure est plus importante que sous vide pour une fréquence de sollicitation de 5 Hz (Ding et al., 2009) comme le montre la **Figure 32**.

Comme les effets d'environnement semblent être induits par un ou plusieurs mécanismes de diffusion, il semble naturel de penser, qu'il existe une fréquence de sollicitation critique au-delà de laquelle les effets d'environnement deviennent négligeables. Boyce et Ritchie (Boyce & Ritchie, 2001) ont réalisé des essais de propagation de fissure pour des sollicitations de fréquences allant de 50 Hz à 1000 Hz à l'air libre et ils n'ont noté aucune influence de la fréquence (**Figure 32**). Donc, si effet de diffusion il y a, il n'a pas eu le temps d'intervenir de manière significative au cours de ces essais. De cela, il en découle que la fréquence critique au-delà de laquelle les effets de l'environnement disparaîtraient, dans le cas du Ti-6Al-4V, se situerait entre 5 Hz et 50 Hz. Cela est compatible avec le mécanisme de fragilisation des alliages de titane par l'hydrogène (Petit et al., 2003).

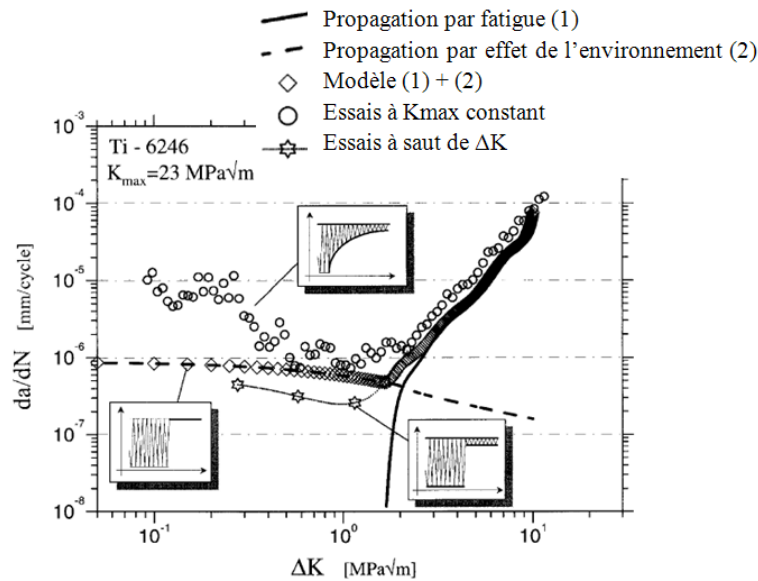


Figure 31. Evolution de la vitesse de propagation par cycle (à température ambiante) en fonction de ΔK à facteur d'intensité maximal constant dans le cas du Ti-6Al-2Sn-4Zn-6Mo. Le modèle (1) est une loi de propagation de fatigue tandis que le modèle (2) rend compte de la fissuration sous-critique (Lang, 1999).

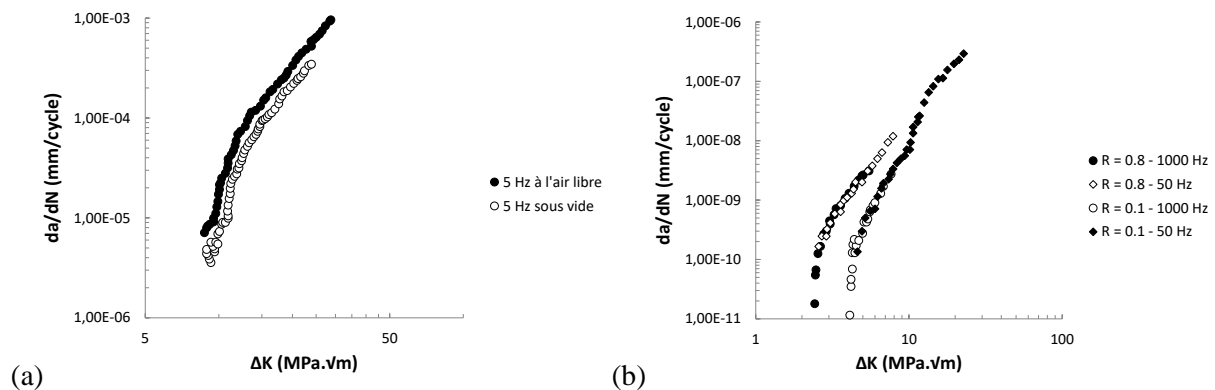


Figure 32. Effet de l'environnement sur l'avancée de fissure pour différents alliages de Ti-6Al-4V à température ambiante :
 (a) résultat pour une fréquence de 5 Hz (Ding et al., 2009) obtenu pour un Ti-6Al-4V équiaxe,
 (b) résultats à l'air libre pour différentes fréquences et différents rapports de charge (Boyce & Ritchie, 2001) obtenus pour un Ti-6Al-4V contenant 60 % de phase α et 40 % de phase $\alpha+\beta$ lamellaire.

Dans le cas du Ti-6Al-4V, il a été montré que le comportement en fluage à température ambiante est sensible à la teneur en hydrogène de l'environnement (Hardie & Ouyang, 1999). Il en est de même pour le Ti6246 et l'étude réalisée par Mignot et al. (Mignot et al., 2004) montre que l'effet Marci en est une manifestation. En effet, pour ce matériau et à température ambiante, lorsqu'une fissure est soumise à un chargement de traction, l'état de chargement au voisinage de sa pointe favorise l'augmentation de sa teneur en hydrogène par diffusion. Les conséquences sont alors une amplification de la localisation de la déformation au niveau des interfaces entre les phases α et β , de la décohésion ductile aux interfaces avec la phase α secondaire et une amplification du fluage à froid dans cette région. Il y a donc une interaction forte entre le comportement des alliages de titane, l'environnement et le chargement. C'est cette interaction qui expliquerait l'effet de l'environnement sur le comportement en fissuration.

Il faut également ajouter le fait qu'il n'existe pas qu'un seul type de Ti-6Al-4V. Selon les traitements thermomécaniques subits par ce matériau, ses propriétés mécaniques peuvent changer. Il est alors possible d'imaginer, qu'il en est de même pour ses propriétés de résistance aux effets de l'environnement.

Concernant l'amorçage de fissure, Morrissey et al. (Morrissey et al., 1999) ont montré que la résistance en fatigue à 10^7 cycles dépend de la fréquence comme le montre la **Figure 33**, même si celle-ci semble être au-dessus de la fréquence critique (en supposant que la fréquence critique ne varie pas d'un alliage de Ti-6Al-4V à un autre et qu'elle se situe entre 5 Hz et 50 Hz).

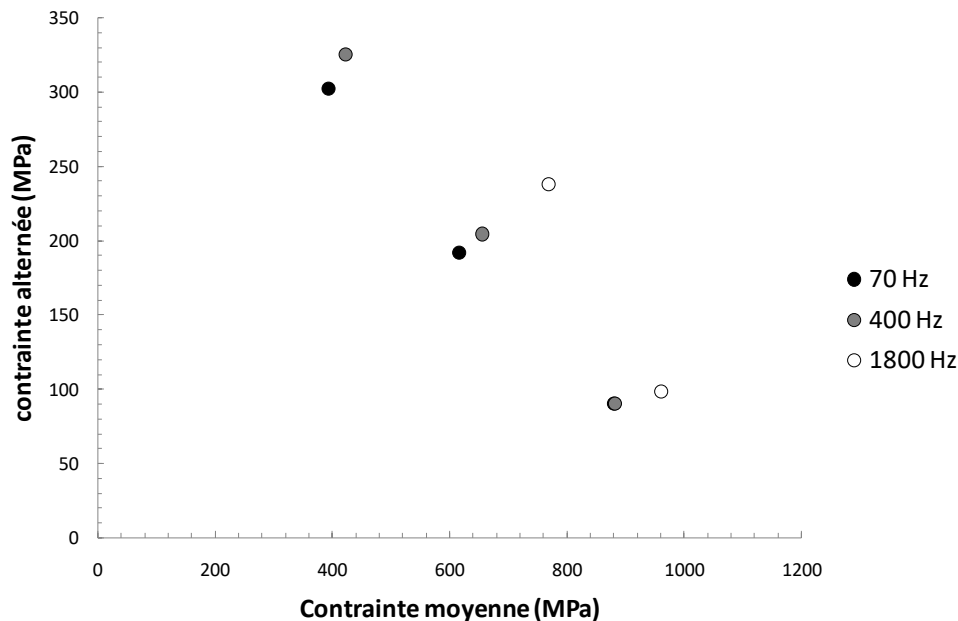


Figure 33. Dépendance de la résistance en fatigue à 10^7 cycles avec la fréquence de sollicitation (Morrissey et al., 1999) obtenue sur un Ti-6Al-4V équiaxe contenant 90 % de phase α et 10 % de phase β . Les rapports de charge testés sont : 0,1, 0,5 et 0,8.

Une explication possible serait que ces résultats sont liés au comportement du matériau et au fait qu'il flue à froid introduisant ainsi un effet de fréquence sur l'amorçage. D'ailleurs, Surand a montré au cours de sa thèse (Surand, 2013) que l'augmentation d'un ordre de grandeur de la vitesse de déformation, pour une vitesse de déformation initiale de l'ordre de 10^{-5} ou de 10^{-4} s^{-1} , entraîne une augmentation de la limite d'élasticité macroscopique du Ti-6Al-4V de 40 MPa. Le passage d'une vitesse de déformation de 10^{-3} à 2000 s^{-1} l'augmente de 400 MPa environ (Nemat-Nasser et al., 2001), ce qui représente un taux d'augmentation légèrement plus élevé par rapport à la situation précédente, mais du même ordre de grandeur. Si l'on suppose que cette augmentation de la limite d'élasticité macroscopique est transposable, en première approximation, à la limite d'élasticité du grain le plus défavorablement orienté, il serait possible d'expliquer les limites d'endurances obtenus par Morrissey et al. comme des limites d'élasticité microscopiques cycliques stabilisées des grains défavorablement orientés. Néanmoins, à ce stade, cette explication reste hypothétique en l'absence d'une confirmation expérimentale.

Pour finir, Tsutsumi et al. ont réalisé une étude sur un acier à faible teneur en carbone en vue d'analyser les effets de fréquence sur ce matériau (Tsutsumi et al., 2009). Les essais de caractérisation en compression dynamique de barres d'hopkinson montrent une augmentation de la limite d'élasticité lorsque la vitesse de déformation augmente. Ils ont également observé un ralentissement de la vitesse de propagation des fissures, se propageant depuis des concentrations de contraintes usinées dans leurs

éprouvettes, lorsque la fréquence de sollicitation augmente. Ce résultat a été attribué à la diminution de la dimension de la zone plastique en pointe de fissure induite par l'augmentation de la limite d'élasticité avec la fréquence. De cette étude, ils en concluent de l'effet bénéfique de la fréquence sur le comportement en fatigue du matériau en présence de concentrations de contraintes.

Malgré les avancées récentes sur la compréhension des effets de l'environnement et de fréquence sur le Ti-Al-4V, plusieurs zones d'ombres persistent. Par exemple, la fréquence de saturation des effets de l'environnement ne semble pas être la même selon que l'on traite de problèmes liés à la propagation de fissure ou à l'amorçage de fissure. Ce point est important car l'objectif de cette thèse est de traiter de manière unifiée les comportements de fissures longues et courtes.

I.3. Synthèse

Les principaux fabricants de moteurs aéronautiques européens ont lancé un programme de recherche collaboratif visant à améliorer leurs outils de prévision de la durée de vie en fatigue de pièces moteurs en Ti-6Al-4V et en INCO 718 à température ambiante. Une multitude d'essais standards et non standards ont été réalisés au cours de cette étude. Deux types d'essais standards ont été considérés : essais de fatigue (d'initiation de fissure de fatigue et de propagation de fissure par fatigue) sur éprouvettes lisses et à concentration de contraintes afin de tracer des courbes S – N et essais de fissuration dans le but de pouvoir déterminer une loi de propagation. Concernant les essais non standards, un nouveau type de cycle de chargement a été testé. Il consiste en la superposition d'un cycle LCF et de 10000 cycles HCF. Ce dernier permet de rendre compte des interactions éventuelles entre ces deux types de sollicitations qui sont rencontrées en service au niveau des aubes. Enfin, des essais d'impact ont été réalisés sur un certain nombre d'éprouvettes afin d'obtenir des indentations (FOD) comparables à ce qui pourrait être produit par le choc d'un objet dur sur une aube. Les éprouvettes indentées ont ensuite été sollicitées en fatigue afin de déterminer si la présence d'anomalie conduit à un abattement de la durée de vie. Ce programme a également permis d'étudier expérimentalement l'influence de la géométrie d'une éprouvette sur la résistance en fatigue. Quatre géométries représentatives de celle d'une aube ont été dimensionnées, usinées puis testées en fatigue.

Cette vaste campagne expérimentale a permis de tester le pouvoir prédictif d'un certain nombre de critères de fatigue, mais aucun n'a donné pleinement satisfaction. C'est ce qui a motivé le lancement de cette thèse, en se limitant au cas du Ti-6Al-4V.

Une étude bibliographique a permis de mieux comprendre les mécanismes responsables de l'endommagement par fatigue dans le Ti-6Al-4V. Le comportement élasto-plastique du matériau, tant à l'échelle microscopique qu'à l'échelle macroscopique, a un rôle important dans le processus de dégradation. Qu'il s'agisse de l'initiation ou de la propagation de fissures, la plasticité cyclique localisée (dans un grain défavorablement orienté ou au voisinage du front d'une microfissure) est un phénomène essentiel à prendre en compte pour prévoir la dégradation par fatigue. La plasticité étant un phénomène non-linéaire, des effets d'histoire de chargement, d'interaction en blocs ou de cycles HCF et LCF en découlent. Dans certains alliages de titane, l'environnement semble également avoir un rôle à jouer en fatigue, mais dans le cas du Ti-6Al-4V à température ambiante, il reste certaines zones d'ombre à éclaircir.

Par ailleurs, des effets d'échelle et de gradient en fatigue ont été observés par plusieurs auteurs et les éprouvettes du programme RamGT dont les géométries sont représentatives de zones critiques d'une aube (congés, bord de fuite ...) présentent des gradients de contraintes et ont des échelles différentes. Ce problème est lié à l'arrêt de fissure qui devra donc être pris en compte dans l'étude...

II/ Etat de l'art sur la modélisation de la résistance en fatigue

II.1. Introduction

Le dimensionnement en fatigue d'un élément mécanique nécessite l'utilisation d'un critère de fatigue. Dans la littérature, il en existe une multitude. Les premiers sont issus d'analyses purement empiriques de résultats expérimentaux de fatigue. Dans le cas des chargements cycliques en traction uniaxial, on cite notamment la parabole de Gerber (Gerber, 1974), la droite de Goodman (Goodman, 1899), celle de Söderberg (Söderberg, 1930) et l'ellipse de Marin (Marin, 1956). Pour ce qui est des chargements multiaxiaux, Gough et Pollard (Gough et al., 1951) ont été les pionniers dans le domaine (flexion et torsion alternées combinées) et Nishihara et Kawamoto (Nishihara & Kawamoto, 1945) ont formulé un autre critère à partir de leurs travaux.

Ce n'est que plus tard que des considérations physiques ont été utilisées dans la formulation des critères de fatigue et cela a conduit au développement de nombreuses approches différentes. Dans la suite, quelques-unes d'entre elles seront exposées. Dans ce manuscrit, elles seront classées en trois catégories : les approches locales et non-locales formulées à partir de champs continus issus de la mécanique des milieux continus et les approches fondées sur la mécanique de la rupture. Les deux premières ne portent que sur l'initiation de fissures par fatigue ou sur l'évolution d'une variable homogénéisée continue donnant l'état d'endommagement du matériau. Il n'est donc pas question ici de décrire explicitement le comportement en fatigue d'une fissure, car les champs mécaniques au passage de ses lèvres ne sont pas continus. Concernant le dernier type d'approche, le comportement des fissures est décrit explicitement, via par exemple les facteurs d'intensités des contraintes qui donnent l'intensité des champs mécaniques qui dominent au voisinage de la pointe de fissure. En revanche, ce type de modélisation ne peut être utilisé que lorsqu'une fissure est déjà initiée, sauf dans le cas de certaines approches plus générales.

Dans tous les cas, les différentes approches font intervenir des paramètres à identifier à partir de résultats expérimentaux de caractérisation mécanique du comportement et / ou de fatigue du matériau concerné.

II.2. Approches locales fondées sur la mécanique des milieux continus

II.2.1. Introduction

D'une manière générale, les critères appartenant à cette famille d'approches sont les plus utilisés de nos jours. Leur succès est certainement lié à la facilité avec laquelle ces derniers peuvent être mis en œuvre. En effet, lorsque le chargement est tel que le comportement du matériau reste élastique au cours du chargement, il suffit de post-traiter localement les champs mécaniques afin de prédire le comportement en fatigue. La limite d'endurance (respectivement, la durée de vie à rupture en endurance limitée) est alors déterminée localement au point le plus critique selon le critère considéré. Un calcul élastique sur un cycle de chargement suffit la plupart du temps.

Lorsque le chargement conduit à de la déformation plastique, trois cas se présentent. Soit, une adaptation élastique est constatée et le post-traitement des champs mécaniques sur un cycle adapté peut être utilisé comme précédemment. Soit aucune adaptation élastique ne survient (régime oligocyclique) et dans ce cas selon le type de chargement imposé deux approches différentes sont habituellement utilisées. Lorsque le chargement est périodique, les évolutions des tenseurs des déformations élastiques et plastiques finissent par devenir périodiques à leur tour au bout d'un nombre suffisant de cycles de chargement. Il suffit alors de post-traiter les champs mécaniques ainsi stabilisés pour en déduire, à l'aide d'un critère de fatigue pour les chargements LCF, le nombre de cycles à rupture. Il n'est donc plus question ici de parler de limite d'endurance. Lorsque le chargement n'est plus périodique, aucune stabilisation des tenseurs des déformations ne peut être obtenue. Les critères tenant compte d'une variable d'endommagement incrémentale sont alors à privilégier. Cette fois-ci, c'est la durée de vie temporelle qui est calculée puisque la notion de cycle n'existe plus.

Ce dernier type d'approche peut également être étendu au cas où le chargement macroscopique reste élastique. On suppose alors que la plasticité intervient à une échelle plus petite, qui est celle des grains (échelle mésoscopique), et qu'elle dépend non-linéairement du chargement macroscopique. Dans le cas d'un chargement périodique, le post-traitement d'un cycle de chargement suffit. Concernant, ce type de modélisation, seul ce dernier cas sera cité dans la suite. En effet, le travail de recherche qui sera présenté dans les chapitres qui suivent ne traite que de l'endurance en fatigue. Cela signifie, que la plupart du temps, les chargements considérés conduisent à un comportement élastique macroscopique même si les premiers cycles LCF peuvent conduire à de la déformation plastique. Ces derniers seront interprétés comme des perturbations agissant sur le domaine d'endurance HCF.

II.2.2. Formulations avec les invariants des tenseurs mécaniques

Les critères de fatigue de ce type sont les plus connus et font intervenir les deux premiers invariants du tenseur des contraintes et ne peuvent être utilisés que lorsque le chargement est cyclique. L'intérêt majeur de ces approches est de pouvoir réaliser des prédictions en fatigue pour des sollicitations multiaxiales le plus simplement possible. A l'origine, leurs formulations n'étaient valides que pour l'endurance illimitée, comme cela est le cas, par exemple, pour les critères de Sines (Sines, 1959; Sines & Ohgi, 1981) et de Crossland (Crossland, 1956; Crossland, 1970) qui en sont les illustres représentants.

Ces deux critères se formulent, respectivement, de la manière suivante :

$$\frac{\sqrt{J_a} + \alpha_1 \cdot I_{moy}}{\beta} \leq 1 \quad (\text{II-1})$$

$$\frac{\sqrt{J_a} + \alpha_2 \cdot I_{max}}{\beta} \leq 1 \quad (\text{II-2})$$

où I_{moy} , I_{max} et J_a sont respectivement les pressions hydrostatiques moyenne et maximale et l'amplitude du second invariant du tenseur des contraintes au cours du cycle de chargement. Le second invariant du tenseur des contraintes est défini de la manière suivante :

$$J(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}' \quad (\text{II-3})$$

où $\underline{\underline{\sigma}}'$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes.

Lorsqu'une contrainte de torsion est considérée, seule son amplitude apparaît dans ces deux critères puisque pour une telle sollicitation la pression hydrostatique est nulle. Ainsi, les prédictions obtenues ne font apparaître aucune influence de la contrainte moyenne, ce qui est en total accord avec l'expérience (§I.2.3.2). Le paramètre β peut alors être identifier à partir de la valeur de la limite d'endurance en torsion alternée :

$$\beta = \tau_{-1} \quad (\text{II-4})$$

La différence majeure entre ces deux formulations provient de la manière dont la pression hydrostatique est prise en compte. Dans le cas d'un chargement en flexion alternée, la pression hydrostatique moyenne est nulle au cours du cycle, ce qui conduit à un rapport fixe entre les limites d'endurance en torsion et flexion alternée avec le critère de Sines qui n'est pas réaliste :

$$\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} = \sqrt{3} \quad (\text{II-5})$$

Le critère de Crossland n'a pas cet inconvénient puisque la pression hydrostatique a un rôle à jouer en flexion alternée, ce qui permet d'ailleurs l'identification du paramètre α_2 . Le paramètre α_1 s'identifie, quant à lui, à l'aide de la limite d'endurance en flexion répétée (rapport de charge égal à 0) :

$$\alpha_1 = 3 \cdot \frac{\tau_{-1}}{f_0} - \sqrt{3} \quad (\text{II-6})$$

$$\alpha_2 = 3 \cdot \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3} \quad (\text{II-7})$$

De telles formulations peuvent conduire à des incohérences dans le cas non-proportionnel (c'est-à-dire pour des sollicitations dont les directions principales varient au cours du temps). Afin de le vérifier, traitons le cas du chargement combinant flexion et torsion déphasées dont le tenseur des contraintes dépend du temps, de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \sigma_a \cdot \begin{bmatrix} \sin(\omega \cdot t) & \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) & -\sin(\omega \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-8})$$

Après quelques calculs, on obtient l'expression du second invariant de ce tenseur :

$$J(t) = \sigma_a^2 \quad (\text{II-9})$$

Ce résultat montre que l'amplitude du second invariant du tenseur des contraintes peut être nulle alors même que le champ de contrainte varie au cours du temps. De plus, la pression hydrostatique du chargement considéré est nulle ce qui conduit également à des expressions nulles des critères de Sines et de Crossland même lorsque σ_a tend vers l'infini.

Afin de trouver une solution à ce problème, Papadopoulos a donné une interprétation géométrique nouvelle de l'amplitude du second invariant du tenseur des contraintes (Papadopoulos, 1987). En effet, dans l'espace des déviateurs des contraintes et dans le cas proportionnel, J_a correspond au rayon de la plus petite hypersphère circonscrite au chargement. En adoptant cette définition dans le cas non-proportionnel, toute incohérence théorique disparaît. Cependant, des essais réalisés en proportionnel et en non-proportionnel et à même paramètre J_a , conduisent à des limites d'endurances différentes alors que le critère de fatigue étendu prédit le même comportement. C'est la raison pour laquelle des extensions supplémentaires ont été réalisées par certains auteurs. Par exemple, durant ces travaux de thèse, Déperrois (Deperrois, 1991) a remplacé le rayon de l'hypersphère circonscrite par une distance équivalente tenant compte des épaisseurs du trajet de chargement dans les cinq dimensions de l'espace déviatorique des contraintes. Bien que son approche permette de discriminer une multitude de chargements, elle souffre, néanmoins, d'un problème théorique qui induit une non-unicité des prédictions établis par son critère pour des chargements pathologiques (Papadopoulos et al., 1997). D'autres auteurs ont proposé de remplacer l'hypersphère par des formes géométriques plus complexes, comme par exemple la plus petite ellipsoïde circonscrite au trajet de chargement (Bin et al., 2000; Gonçalves et al., 2005).

Ces approches ne permettent pas de rendre compte à la fois des effets de multiaxialité et des effets de rapport de charge. Cependant, en ajoutant des paramètres supplémentaires, il est possible d'y parvenir dans le cas du Ti-6Al-4V (Bonnand et al., 2011).

Pour finir, ces approches ne sont pas directement utilisables lorsque le chargement n'est pas périodique. En effet, pour de tels cas, il n'est pas possible de définir des amplitudes et des valeurs moyennes des quantités mécaniques d'intérêt. Le lecteur intéressé par ce type d'approche (Grübisic & Simbürger, 1976; Fogue & Bahuaud, 1985; Fogue, 1987; Lee, 1989; Papadopoulos, 1987; Papadopoulos, 1993) et par les analyses qui en découlent (Lee, 1980; Lasserre & Froustey, 1992; You & Lee, 1996; Papadopoulos et al., 1997; Zenner et al., 2000) peut consulter de nombreuses références sur ces sujets.

II.2.3. Formulations de type plan-critique

C'est à partir des années 70 que ce type de formulation s'est développé dans la communauté scientifique. Les observations réalisées, à cette époque, sur des éprouvettes de fatigue ont permis de montrer que l'initiation des fissures par fatigue se fait sur des plans privilégiés où le cisaillement est maximum (§I.2.2). C'est à partir de ces constatations que des critères de fatigue formulés à partir de quantités mécaniques déterminées sur ces plans ont commencé à voir le jour. L'intérêt majeur de ces approches est qu'elles sont fondées sur des considérations physiques profondes justifiées par des observations au microscope, ce qui n'est pas forcément le cas de tous les critères faisant parties des approches précédentes.

Par exemple, Brown et Miller ont remarqué que les fissures de fatigue se propagent avec l'assistance de la déformation normale (Brown & Miller, 1973). Leur critère de fatigue s'écrit comme une combinaison des amplitudes de déformation de cisaillement γ_a et normale au plan ε_{aN} :

$$\gamma_a + \alpha \cdot \varepsilon_{aN} \leq \beta \quad (\text{II-10})$$

Plus tard, une généralisation de cette approche a été effectuée afin de faire apparaître le nombre de cycles à rupture (Wang & Brown, 1993) en utilisant la courbe de Manson-Coffin-Basquin en traction alternée. Cela consiste à remplacer le paramètre β par la somme de deux fonctions puissance décroissantes en fonction du nombre de cycles afin de reproduire la courbe S-N du chargement.

Fatemi et Socie (Socie et al., 1985; Socie, 1987; Fatemi & Socie, 1988) ont fait les mêmes constatations que Wang, Brown et Miller sauf que la formulation de leur critère de fatigue tient compte également de la contrainte moyenne normale au plan de cisaillement maximal N_{moy} (G étant le module

de cisaillement). La prise en compte du nombre de cycles à rupture N_r est obtenue à travers une généralisation similaire à celle de l'approche précédente :

$$\gamma_a + \varepsilon_{aN} + \alpha \cdot N_{moy} = \frac{\tau_0}{G} \cdot (2 \cdot N_r)^b + \gamma_0 \cdot (2 \cdot N_r)^c \quad (\text{II-11})$$

où les paramètres τ_0 , γ_0 , b et c s'identifient à partir d'une courbe S-N.

Par opposition avec le critère de Wang, Brown et Miller la sensibilité de ce critère vis-à-vis de la déformation normale est réglée d'avance car aucun coefficient de pondération n'est utilisé pour cela. Par contre, il offre l'avantage de tenir compte de la contrainte moyenne du chargement. En comparant des résultats d'essais avec les prédictions fournies par le critère de Wang, Brown et Miller, les auteurs ont constaté que ce critère ne tient pas compte du durcissement des matériaux métalliques sous chargements non-proportionnels. Ils en ont déduit que la contrainte normale maximale au plan de cisaillement maximal N_{max} est un paramètre plus représentatif du phénomène de fatigue que la déformation normale. La dernière version de leur critère de fatigue s'écrit comme suit (σ_Y est la limite d'élasticité du matériau) :

$$\gamma_a \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{N_{max}}{\sigma_Y}\right) = \frac{\tau_0}{G} \cdot (2 \cdot N_r)^b + \gamma_0 \cdot (2 \cdot N_r)^c \quad (\text{II-12})$$

Ces approches ont eu un grand succès et sont à la base de nombreux critères utilisés aujourd'hui et dont la liste complète serait trop longue pour être donnée dans ce manuscrit. Cependant, leurs formulations reposent sur des champs macroscopiques alors que la fatigue des métaux est aussi liée à des phénomènes physiques mésoscopiques. Dang Van (Dang Van, 1973) a été le premier à prendre en compte les aspects mésoscopiques de la fatigue. Pour cela, il suppose que chaque grain présent dans le matériau d'étude obéit à la loi de plasticité de Schmid et considère qu'une fissure de fatigue s'initie lorsqu'un cristal défavorablement orienté ne parvient pas à s'adapter élastiquement. En se limitant au cas de l'endurance illimitée, il fait l'hypothèse que la matrice autour de ce grain se comporte élastiquement ce qui lui permet d'établir des règles de passage entre le chargement à l'échelle du grain et le chargement macroscopique. Finalement son plan critique est celui qui maximise son critère :

$$\max_{t \in [0; T]} \left(\max_{\underline{n}} \left(\frac{\tau(\underline{n}, t) + \alpha \cdot P(t)}{\beta} \right) \right) \leq 1 \quad (\text{II-13})$$

où $\tau(\underline{n}, t)$ et $P(t)$ sont, respectivement, l'amplitude de la contrainte de cisaillement définie sur le plan de normale \underline{n} et la pression hydrostatique à l'instant t . L'identification peut se faire, par exemple, avec des résultats d'essais en flexion et en torsion alternée ce qui conduit aux valeurs suivantes du critère :

$$\alpha = 3 \cdot \left(\frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{II-14})$$

$$\beta = \tau_{-1} \quad (\text{II-15})$$

Comme ce critère est coûteux à cause de la double maximisation, une nouvelle version a été proposée plus tard (Dang Van et al., 1989). Le critère déterminant le plan critique est, cette fois, dissocié du critère de fatigue (**Figure 34**).

$$\tau_c(t) = \max_{\underline{n}} \|\underline{\tau}(\underline{n}, t)\| \quad (\text{II-16})$$

$$\max_{t \in [0; T]} \left(\frac{\tau_c(t) + \alpha \cdot P(t)}{\beta} \right) \leq 1 \quad (\text{II-17})$$

Comme ce critère ne conduit pas à des résultats satisfaisant en flexion – torsion déphasé, Papadopoulos (Papadopoulos, 2001), a remplacé dans ce dernier, l’amplitude de la contrainte de cisaillement par l’amplitude de la contrainte de cisaillement généralisée. Son nouveau critère s’écrit de la manière qui suit (où les angles φ et θ correspondent à l’orientation spatiale du plan critique en coordonnées sphériques) :

$$\frac{\max_{(\varphi, \theta)} [T_{ra}(\varphi, \theta)] + \alpha \cdot P_{max}}{\beta} \leq 1 \quad (\text{II-18})$$

Des résultats d’essais en flexion et en torsion alternées conduisent à une identification des paramètres identiques au cas précédent. On note, cependant, qu’en pratique ce critère ne donne de bons résultats que lorsque le rapport entre les limites d’endurance en torsion et en flexion alternées est compris entre 0,5 et 0,6. On en déduit que cette approche n’a de sens que si elle n’est appliquée que pour les matériaux ductiles.

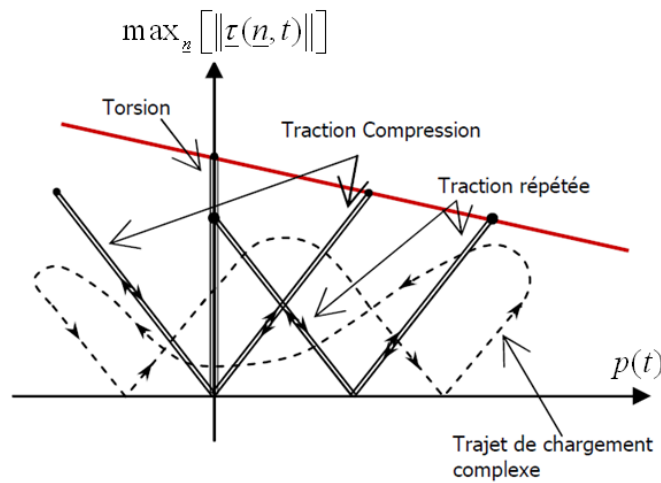


Figure 34 : Représentation du domaine de non-nucléation de fissure du critère de Dang Van.

Cette dernière a été également étendue au cas de l’endurance limitée (Papadopoulos, 2001). Pour cela, les contributions des pressions hydrostatiques moyenne P_{moy} et alternée P_a sont considérées séparément et le critère se réécrit comme suit :

$$\max_{(\varphi, \theta)} [T_{ra}(\varphi, \theta)] = \beta_N - \alpha \cdot \frac{\beta_N}{\beta} \cdot P_{moy} - \alpha \cdot P_a \quad (\text{II-19})$$

β_N est le paramètre à travers lequel le nombre de cycles à rupture est introduit dans l’approche. Avec une loi puissance décrivant la décroissance de l’amplitude du chargement en fonction du nombre de cycles à rupture et en tenant compte de la limite d’endurance en torsion alternée, ce paramètre devient :

$$\beta_N = \kappa \cdot N^{-\lambda} + \tau_{-1} \quad (\text{II-20})$$

Les paramètres κ et λ s’identifient à partir d’une courbe S-N. A partir de maintenant, le lecteur saura que toute approche peut être étendue d’une manière similaire (du moins sur le plan théorique).

Il existe dans la littérature bien d’autres formulations de ce type plus ou moins complexes dont la liste serait trop longue pour être discutée ici. Dans le cas du Ti-6Al-4V, ces formulations nécessiteraient quelques adaptations supplémentaires afin de rendre compte des effets de la contrainte moyenne, comme cela est le cas des approches présentées précédemment.

II.2.4. Formulations énergétiques

Les formulations de cette catégorie sont conceptuellement différentes de celles présentées précédemment. Le chargement n'est plus décrit à partir des tenseurs des contraintes ou des déformations mais à partir de considérations énergétiques. L'avantage de ce type d'approche est que l'évolution de la limite d'endurance en fonction de la contrainte ne suit plus une droite, ce qui permet de reproduire des tendances expérimentales plus réalistes pour une certaine catégorie de matériaux du moins.

L'un des plus fameux représentant de ces critères est celui établi par Smith, Watson et Topper (Smith et al., 1970). Pour un chargement purement uniaxial de type LCF, ce dernier se formule ainsi (à partir de la courbe de Manson-Coffin-Basquin en traction alternée) :

$$\sigma_{max} \cdot \varepsilon_a = \sigma_{max} \cdot (\varepsilon_a^e + \varepsilon_a^p) = \frac{\sigma_0^2}{E} \cdot (2 \cdot N_r)^{2 \cdot b} + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot (2 \cdot N_r)^{b+c} \quad (\text{II-21})$$

où σ_{max} , ε_a , ε_a^e , ε_a^p et N_r sont la contrainte maximale, les déformations totale, élastique et plastique alternées au cours d'un cycle de chargement et le nombre de cycles à rupture. Les paramètres σ_0 , ε_0 , b et c sont des constantes matériau à identifier à partir d'une courbe S-N obtenue en traction alternée.

Plus tard cette approche a été étendue aux chargements multiaxiaux par Bannantine et Socie (Bannantine, 1989; Bannantine & Socie, 1991) par une approche de type plan critique. Le plan critique est celui qui maximise le critère.

Malgré sa forte popularité, l'utilisation de cette formulation en régime HCF conduit à un rapport entre les limites d'endurance en traction et torsion alternées fixes :

$$\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} = \sqrt{1 + \nu} \quad (\text{II-22})$$

Ce résultat implique que ce type de critère ne peut être utilisé que pour les matériaux fragiles. Ceci est notamment le cas d'autres approches faisant partie de cette catégorie (Łagoda et al., 1999; Łagoda et al., 2000; Glinka et al., 1995). L'inconvénient majeur de celles-ci est qu'elles n'offrent pas assez de souplesse vis-à-vis d'un recalage avec des résultats expérimentaux. Ceci provient du nombre relativement peu élevé de paramètres à identifier.

Afin de tester le caractère prédictif du critère de Smith-Watson-Topper pour un chargement de traction et à l'endurance, traçons le diagramme de Haigh associé et comparons ce dernier avec les résultats expérimentaux de Lanning sur le Ti-6Al-4V (Lanning et al., 2005 (1)). Pour cela, on suppose que la limite d'endurance est atteinte lorsque le nombre de cycles à rupture vaut 10^7 . Le critère peut alors se mettre sous la forme suivante, après identification avec la limite d'endurance en traction alternée :

$$\sigma_{max} \cdot \varepsilon_a = \frac{\sigma_{-1}^2}{E} \quad (\text{II-23})$$

En décomposant σ_{max} comme la somme des contraintes moyenne et alternée, on obtient :

$$\sigma_a^2 + \sigma_m \cdot \sigma_a - \sigma_{-1}^2 = 0 \quad (\text{II-24})$$

D'où, l'on déduit :

$$\sigma_a = \frac{-\sigma_m + \sqrt{\sigma_m^2 + 4 \cdot \sigma_{-1}^2}}{2} \quad (\text{II-25})$$

La **Figure 35** compare le diagramme de Haigh obtenu à partir du critère de Smith-Watson-Topper avec les résultats de Lanning. On constate que le critère conduit à un manque de conservatisme important pour les rapports de charge élevés, ce qui serait également le cas avec les approches précédentes. Cependant, la forme de la courbe résultant de l'approche énergétique semble être en accord avec les résultats expérimentaux. Pour s'en convaincre, considérons maintenant l'approche de Jasper (Jasper, 1923). Cette fois-ci le critère porte sur la valeur de l'énergie de déformation par cycle de chargement dans le cas d'un chargement uniaxial en traction :

$$U = \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \sigma(\varepsilon) \cdot d\varepsilon \quad (\text{II-26})$$

A l'endurance, le matériau se comporte généralement de manière élastique et on en déduit :

$$U = \frac{1}{E} \cdot \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} |\sigma| \cdot d\sigma = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_{\max}^2 - \sigma_{\min}^2 \cdot \text{Sign}(\sigma_{\min})) \quad (\text{II-27})$$

L'identification nécessite la limite d'endurance en traction alternée σ_{-1} :

$$U = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{-1}^2 \quad (\text{II-28})$$

Finalement, le critère se formule ainsi :

$$\sigma_{-1}^2 = \frac{\sigma_{\max}^2 - \sigma_{\min}^2 \cdot \text{Sign}(\sigma_{\min})}{2} \quad (\text{II-29})$$

À la suite de l'étude de résultats de fatigue sur le Ti-6Al-4V, Nicholas et Maxwell ont essayé de reproduire le diagramme de Haigh expérimental à l'aide de critères de fatigue comme celui de Smith-Watson-Topper et de Jasper, mais aucun ne convenait (Nicholas & Maxwell, 2003). Pour expliquer cela, ils ont supposé que la partie en compression du cycle de chargement ne contribue pas autant à l'endommagement par fatigue que celle en traction. Cela est dû au fait que, durant la phase en compression, les fissures initiées par fatigue se referment et ne peuvent donc plus se propager. Ils ont alors modifié le critère de Jasper en séparant ces deux contributions. L'effet de la partie en compression est ajusté à l'aide d'un paramètre d'influence α :

$$U = U_{\text{traction}} + \alpha \cdot U_{\text{compression}} \quad (\text{II-30})$$

L'identification de cette nouvelle formulation conduit alors à :

$$U = \frac{1 + \alpha}{2 \cdot E} \cdot \sigma_{-1}^2 \quad (\text{II-31})$$

L'équation de la courbe de Haigh s'exprime en fonction du rapport de charge R de la manière qui suit :

$$\sigma_a = \sigma_{-1} \cdot \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 - R)^2}{1 + \alpha \cdot R^2}}, \text{ pour } R < 0 \quad (\text{II-32})$$

$$\sigma_a = \sigma_{-1} \cdot \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 - R)^2}{1 - R^2}}, \text{ pour } R \geq 0 \quad (\text{II-33})$$

La **Figure 35** compare le diagramme de Haigh expérimental de Lanning avec celui prédit par le critère. On note que la tendance expérimentale semble beaucoup mieux reproduite que précédemment

(avec α égal à 0.45). Ceci laisse suggérer que le comportement en fatigue des matériaux présentant un fort effet de contrainte moyenne peut être prédit par des approches de ce type, du moins pour des sollicitations en traction.

Un autre critère de fatigue multiaxial a été proposé par Froustey et Lasserre (Froustey et al., 1992) à la suite de l'analyse de nombreux résultats d'essais de fatigue obtenus pour des chargements en traction, torsion, traction-torsion en phase et déphasé (sans pour autant distinguer les parties en compression et en traction du chargement). Leur critère se formule ainsi :

$$\frac{W_{da\ eq}}{W_{da\ torsion}} + \frac{W_{sm\ eq}}{W_{sm\ triaxial}} \leq 1 \quad (\text{II-34})$$

où $W_{da\ eq}$ et $W_{sm\ eq}$ font référence aux parties déviatorique alternée et sphérique moyenne de la moyenne temporelle au cours d'un cycle de chargement de la densité d'énergie de déformation élastique obtenue suite à des chargements uniaxiaux équivalents à la sollicitation considérée. Les paramètres $W_{da\ torsion}$ et $W_{sm\ triaxial}$ sont des paramètres à identifier à partir de résultats d'essais.

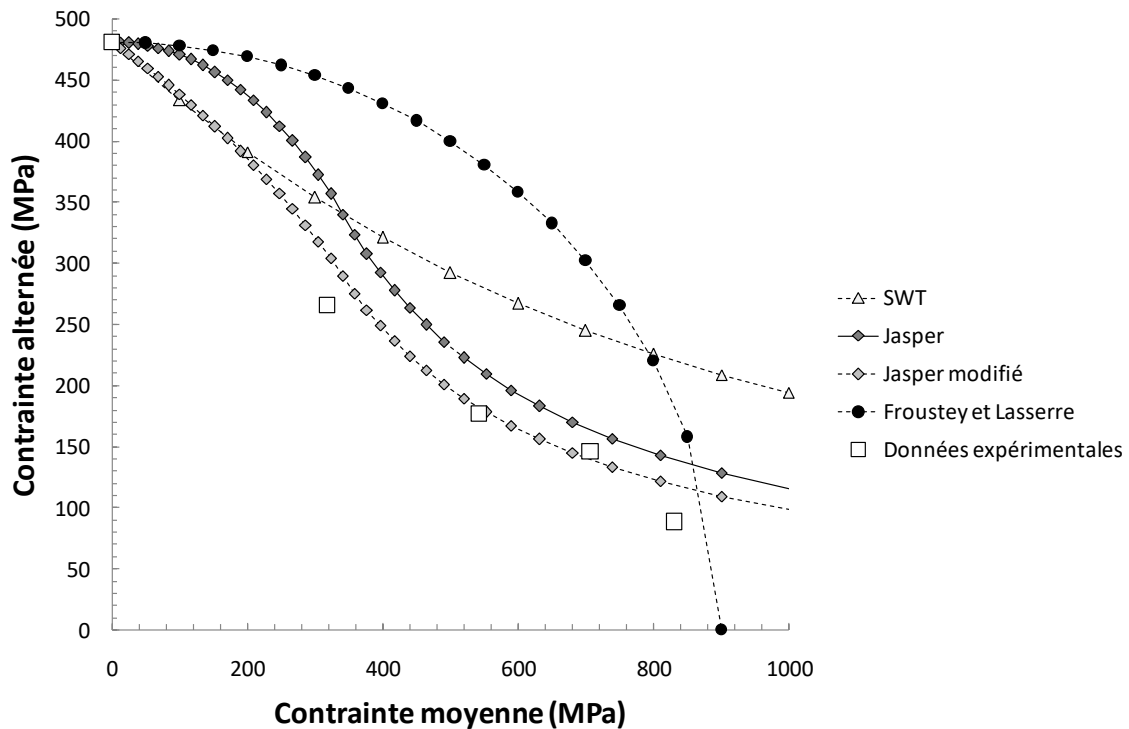


Figure 35 : Diagrammes de Haigh obtenus avec les critères de Smith-Watson-Topper, Jasper et Froustey et Lasserre et comparés avec les résultats expérimentaux de Lanning sur le Ti-6Al-4V (Lanning et al., 2005 (1)).

Cette approche conduit à l'absence d'une influence du déphasage en traction-torsion sur la limite d'endurance comme cela est le cas du critère de Papadopoulos. Morel, Palin-Luc et Froustey ont d'ailleurs établi un lien direct entre ces deux critères (Morel et al., 2001). En effet, la moyenne temporelle de l'amplitude de la partie déviatorique de la densité d'énergie de déformation élastique est proportionnelle à $\langle T_{ra}^2 \rangle$ et celle de la partie sphérique est liée au carré de la pression hydrostatique. Cependant, les ressemblances s'arrêtent là. Le critère de Froustey et Lasserre conduit à une influence du cisaillement moyen même pour un chargement en torsion pure, ce qui n'est pas le cas de celui de Papadopoulos. Cependant, comme l'indiquent Morel, Palin-Luc et Froustey, ce dernier effet ne prend

de l'importance que lorsque le chargement dépasse la limite d'élasticité du matériau, ce qui n'est pas en contradiction avec les résultats expérimentaux (§I.2.3.2).

La **Figure 35** montre que le diagramme de Haigh obtenu à partir de ce critère ne reproduit pas les résultats expérimentaux. On en déduit que pour le Ti-6Al-4V, cette approche ne convient pas. L'identification a nécessité trois paramètres : les limites d'endurance en traction et torsion alternées et la contrainte ultime à rupture. La limite d'endurance en traction alternée est égale à 481 MPa et celle en torsion est absente de l'article de Lanning (Lanning et al., 2005 (1)). Afin de l'obtenir, une estimation de celle-ci a pu être calculée à partir des résultats de Delahay (Delahay, 2004) en supposant que le rapport des limites d'endurance en traction et en torsion alternées ne varie pas d'un Ti-6Al-4V à l'autre. Avec cette hypothèse, la limite d'endurance en torsion alternée est de 340 MPa. La contrainte ultime à rupture a été prise égale à 900 MPa.

Pour conclure, la multitude de critères de fatigue énergétiques permet d'engendrer une multitude de diagrammes de Haigh différents. Il n'est pas toujours possible de dire qu'un critère de fatigue est meilleur qu'un autre puisque ces derniers ont été développés de manière à au moins reproduire des résultats d'essais dans des conditions de chargement spécifiques et pour certains matériaux. Le critère de Froustey et Lasserre n'est, par exemple, pas pertinent pour prédire le comportement à l'endurance du Ti-6Al-4V, tandis que le critère de Jasper modifié le peut. Ceci est certainement lié à la loi de comportement du matériau qui influence l'initiation et la propagation de fissures par fatigue (§I.2.2). Sinon, l'un des intérêts de ces approches est de supposer implicitement que la thermodynamique est un cadre théorique dans lequel la dégradation par fatigue peut être modélisée. Cadre qui est fortement utilisé dans les approches incrémentales.

II.2.5. Formulations incrémentales

Un inconvénient des approches précédentes est qu'elles ne sont valides que lorsque le chargement est périodique. Afin d'étendre la démarche, des approches introduisant une variable d'endommagement incrémentale ont été développées. Le lecteur pourra consulter l'article de Fatemi et Yang (Fatemi & Yang, 1998) qui donne un aperçu relativement conséquent des différentes méthodes de ce type. Etant donné la complexité de ces formulations et leur nombre, ils ne seront pas détaillés ici. On se contentera d'en donner les ingrédients essentiels en se limitant aux modèles de fatigue HCF.

Ces approches supposent que l'endommagement par fatigue se produit à une échelle inférieure à celle de la structure d'étude. Les différences entre elles portent sur la manière de prendre en compte l'état d'endommagement. Certaines de ces approches utilisent la thermodynamique comme cadre théorique et seules quelques-unes d'entre elles sont présentées dans cette sous-section.

Bien que les approches incrémentales aient le potentiel de conduire à des résultats plus réalistes et précis, leur mise en œuvre est plus complexe. En effet, il faut s'assurer que les algorithmes de calculs conduisent à des résultats robustes. De plus, l'absence de représentation cyclique rend les analyses plus complexes et moins intuitives. Enfin, les temps de calculs sont souvent plus élevés qu'avec les approches précédentes. Il faut donc aussi tenir compte de ces aspects dans le choix d'un type d'approche par rapport à un autre.

II.2.5.1. Le modèle à deux échelles de Lemaitre-Desmorat

Le modèle à deux échelles (Lemaître & Doghri, 1994; Desmorat et al., 2007; Barbier, 2009) suppose que l'endommagement par fatigue provient de l'accumulation de plasticité à l'échelle microscopique (ou mésoscopique selon la convention utilisée), même si à l'échelle macroscopique le comportement du matériau est élastique. La modélisation du problème de fatigue consiste à supposer que chaque grain du volume élémentaire représentatif de matière peut être vu comme une inclusion sphérique élasto-plastique endommageable plongée dans une matrice élastique (ou élasto-plastique, mais ce cas ne sera pas considéré ici) non-endommageable. Cette hypothèse revient à supposer que les fissures de fatigue s'initiant dans le volume élémentaire représentatif n'interagissent pas entre elles. Les propriétés

élastiques de la matrice et de l'inclusion sont supposées être les mêmes que celles du volume élémentaire représentatif. Le domaine d'endurance est alors vu comme le domaine d'élasticité de l'inclusion. Afin de faire apparaître une dépendance à la contrainte moyenne pour des chargements périodiques, la dimension du domaine d'élasticité dépend de la valeur de la trace de la pression hydrostatique, de manière à retrouver un équivalent du critère de Crossland pour de tels chargements.

II.2.5.2. *Le modèle à deux échelles de Huyen-Morel*

Le modèle qui va être discuté maintenant est le résultat d'une succession d'avancées théoriques fondées sur les travaux initiateurs de Dang Van (Dang Van, 1973) et de Papadopoulos (Papadopoulos, 1987). Une hypothèse majeure appliquée dans leurs travaux est que l'endurance en fatigue ne peut se faire que si l'ensemble des grains du matériau sont dans un état élastique adapté au bout d'un nombre suffisant de cycles. Si cela n'est pas le cas, l'accumulation de déformation plastique dans le grain critique conduit à sa rupture et donc à l'apparition d'une fissure de fatigue.

Afin d'étendre son critère de fatigue à l'endurance limitée, Papadopoulos (Papadopoulos, 1987) suppose qu'une fissure de fatigue apparaît lorsque la déformation plastique cumulée atteint un certain seuil. Pour pouvoir la calculer, il suppose que le comportement élasto-plastique du grain passe par trois phases. Lorsque le grain plastifie, sa limite d'élasticité augmente du fait de l'apparition progressive de dislocations. A partir d'un certain seuil en déformation plastique cumulée, l'écrouissage sature à cause de l'apparition de bandes de glissement qui empêchent l'augmentation du niveau de contrainte (Morel, 1996; Morel, 2000). Enfin, au-delà d'un deuxième seuil, la limite d'élasticité du grain chute progressivement. La rupture est alors obtenue lorsque celle-ci devient négligeable.

Cependant, décrire l'endommagement uniquement par une variable de déformation plastique cumulée n'est pas suffisant. La contrainte normale au plan de glissement a également un rôle important à jouer dans l'initiation d'une fissure par fatigue. Afin de tenir compte de ce nouvel aspect, Huyen et Morel (Huyen et al., 2008) ont développé un nouveau modèle généralisant les précédents. La plasticité est décrite au niveau des plans de glissements. Deux variables d'endommagement sont introduites. La première impacte directement la plasticité du matériau et non la déformation élastique (ce dernier couplage étant jugé négligeable devant le premier). Plus le matériau est endommagé et plus l'écrouissage du grain est important. La deuxième variable d'endommagement correspond au cumul de la première. Cette dernière aura tendance à accélérer la vitesse d'évolution de la première lorsque celle-ci augmente.

L'intérêt de cette approche est qu'elle tient compte de la direction de l'initiation de la fissure par fatigue. En revanche, ce critère est complexe à mettre en œuvre, puisque tous les plans doivent être étudiés afin de déterminer le plan critique. Cela peut conduire à des coûts de calculs élevés.

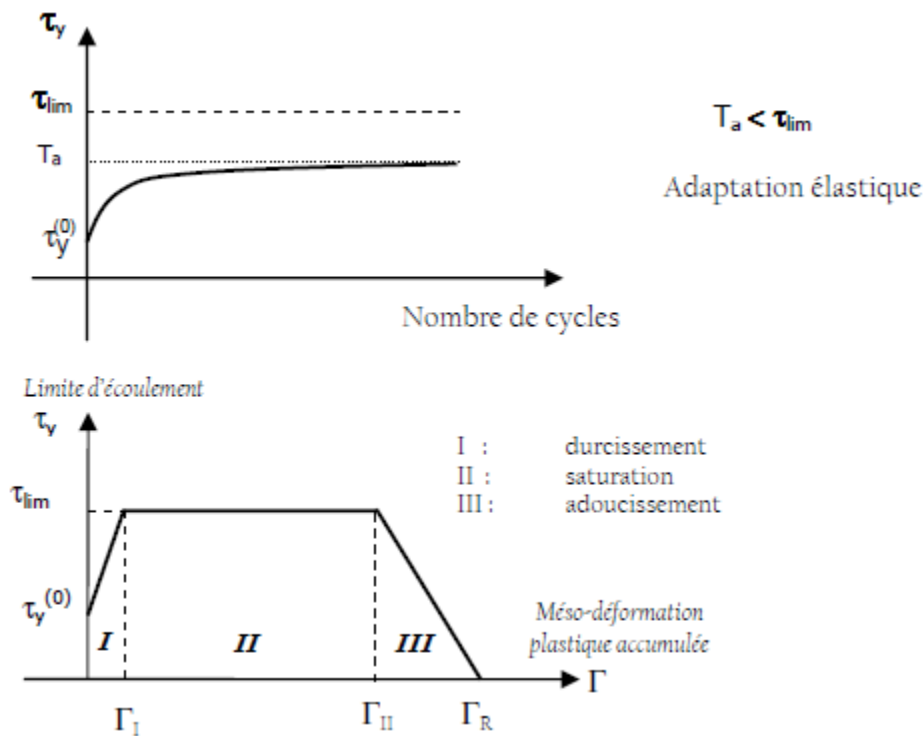


Figure 36 : Comportement élasto-plastique d'un grain supposé dans le modèle à deux échelles de Huyen-Morel (Morel, 2000).

II.2.5.3. Le modèle à deux échelles de Monchiet-Charkaluk-Kondo

Les auteurs de ce modèle (Monchiet et al., 2006) supposent que lorsque l'activité plastique devient suffisamment importante dans les grains défavorablement orientés (**Figure 37**) des bandes de glissement persistantes peuvent apparaître. L'émergence en surface de ces bandes entraîne des variations de volumes irréversibles. La première source de cette variation est liée à la nucléation de cavités dans les murs de dislocation. Ensuite, sous l'effet de l'écoulement plastique à la suite d'un chargement hydrostatique suffisamment important, la dimension de ces cavités augmente. La porosité est définie comme la proportion de vide dans le volume élémentaire représentatif. C'est cette variable qui représente l'endommagement dans celui-ci. L'emploi de lois de changement d'échelle efficaces permet enfin de déterminer une surface seuil macroscopique représentant le domaine d'endurance qui dépend de la porosité.

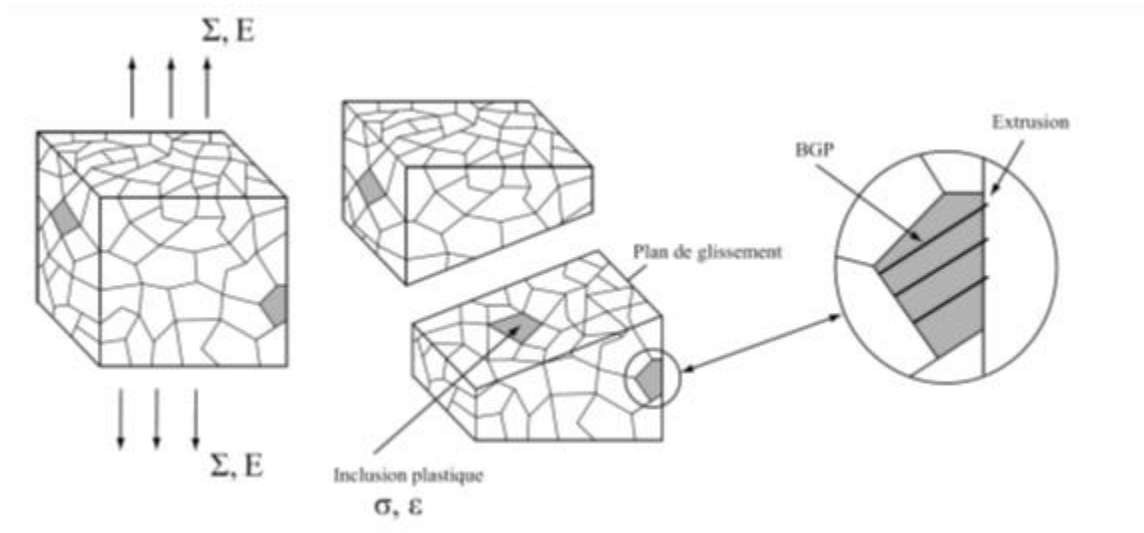


Figure 37 : Illustration de l'émergence de bande de glissement en surface (Monchiet et al., 2006).

II.2.6. Discussion

Il existe une multitude d'approches locales permettant de prendre en compte divers types de chargements. Néanmoins, celles-ci ne peuvent être utilisées efficacement que si les gradients des champs mécaniques sont suffisamment faibles. En effet, au **chapitre I** (§I.2.5.3), il a été vu que si les gradients de contraintes sont suffisamment importants la limite d'endurance a tendance à augmenter. Cet effet est purement non-local. Or, les éprouvettes testées lors du programme RAMGT (§I.1.3) présentent des effets de gradient et d'échelle plus ou moins importants. Il est donc nécessaire de se tourner vers des approches plus complètes.

II.3. Approches non-locales fondées sur la mécanique des milieux continus

II.3.1. Introduction

Les essais expérimentaux montrent que plus la dimension d'une éprouvette de fatigue est élevée et plus la limite d'endurance constatée est faible (§I.2.5.3). Ceci a conduit un certain nombre d'auteurs à considérer que le processus d'endommagement par fatigue ne peut être prédit par des considérations purement locales. Un autre phénomène particulier auquel les structures mécaniques sont confrontées est l'effet de gradient. Plus le gradient de contrainte est élevé et plus la limite d'endurance l'est également. Les critères locaux comme celui de Papadopoulos (Papadopoulos, 1996) consistent à ajouter dans leur formulation une dépendance au gradient de contrainte. Cependant cette dépendance, même si elle est établie localement, nécessite l'évaluation de l'évolution des champs mécaniques au voisinage d'un point matériel afin de permettre la détermination du gradient. Il ne s'agit donc pas d'approches purement locales mais d'approches intégrant des considérations globales, mais évaluées localement.

Dans un but unificateur et afin de prédire dans un même cadre théorique l'ensemble de ces effets, plusieurs considérations physiques ont été invoquées. L'une d'entre elles consiste à supposer que l'endurance en fatigue est liée à la densité de probabilité par unité de volume d'initier une fissure par fatigue (l'hypothèse est que l'initiation conduit à la rupture). Ainsi, lorsque l'échelle du problème augmente, la probabilité de rupture augmente également. Une autre approche considère que l'endommagement survient dans un volume d'influence entourant le point le plus chargé. Cette quantité se définit par le volume de matière au sein duquel le chargement dépasse un certain seuil. Son intégration dans un critère de fatigue permet de rendre compte de l'effet du gradient de contrainte sur la limite d'endurance. Enfin, d'autres formulations contiennent une échelle caractéristique à identifier sur la base de résultats expérimentaux permettant de modéliser des effets de gradients et d'échelle. Ces dernières s'appliquent au cas des structures contenant des entailles ou des inclusions.

Ces concepts sont exposés dans cette sous-section, mais au vu de la diversité des approches, seul un nombre restreint d'entre elles sera considéré.

II.3.2. Formulations fondées sur le concept de volume d'influence

Le concept de volume d'influence a été mis au point dans le but de pouvoir extrapoler les données en fatigue obtenues sur des éprouvettes à des pièces industrielles. Le premier à avoir été à l'origine des premiers développements de cette approche est Kuguel (Kuguel, 1961), mais son critère ne peut être utilisé que pour des états de contraintes uniaxiaux. Sonsino (Sonsino et al., 1997) a étendu son approche aux chargements multiaxiaux en utilisant la contrainte de Von Mises plutôt qu'une composante particulière du tenseur des contraintes comme cela a été le cas de Kuguel. Son critère d'endurance en fatigue peut s'appliquer à des structures contenant des entailles et se formule comme suit :

$$\frac{\sigma_{eq,2}}{\sigma_{eq,1}} \leq \left(\frac{V_{90\%,1}}{V_{90\%,2}} \right)^m \quad (\text{II-35})$$

où $\sigma_{eq,1}$, $V_{90\%,1}$ et m sont des paramètres du modèle et sont, respectivement, l'amplitude de la contrainte de Von Mises maximale obtenue sur une éprouvette entaillée, le volume de matière sollicité et borné par une frontière correspondant à l'isovaleur de l'amplitude de la contrainte de Von Mises égale à 90 % de sa valeur maximale et un paramètre de sensibilité vis-à-vis de l'échelle. Les termes d'indices 2 sont associés à l'éprouvette (ou à la structure) sur laquelle s'applique le critère.

L'intérêt de cette approche est qu'elle modélise l'effet d'échelle d'une manière extrêmement simple. Cependant, cette formulation ne rend pas compte des effets de non-proportionnalité de la sollicitation et des effets du rapport de charge. Pour qu'elle ait un sens, le chargement doit nécessairement être cyclique et l'identification doit se faire sur une éprouvette entaillée de manière à y intégrer (de manière indirecte) la sensibilité du matériau à la multiaxialité du chargement. Pour terminer, le choix du volume à 90 % de

la contrainte de Von Mises maximale est purement empirique. On en déduit donc que cette formulation, bien que très simple d'utilisation, risque de ne pouvoir donner des résultats satisfaisant que dans un nombre relativement restreint de situations.

Par la suite, des approches intégrant plus de physique dans leur formulation ont vu le jour. Le critère de Banvillet et Palin-Luc est un exemple d'approche fondé sur le concept de volume d'influence (Palin-Luc & Lasserre, 1998; Banvillet et al., 2003). L'intérêt du critère vient du fait que sa formulation s'appuie sur trois points bien précis. Tout d'abord, il ne peut y avoir d'endommagement par fatigue dans un matériau sans qu'un travail de déformation lui soit fourni en contrepartie, ce qui semble être en accord avec la thermodynamique des processus irréversibles. Ainsi, la variable sur laquelle porte le critère est la suivante (il s'agit d'une variable définie sur un cycle de chargement, le chargement ne peut donc être que cyclique) :

$$W = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_0^T \langle \sigma_{ij}(t) \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^e(t) \rangle \cdot dt \quad (\text{II-36})$$

Ensuite, les auteurs supposent qu'un processus de microfissuration s'active pour un chargement inférieur à la limite d'endurance, mais supérieur à σ^* sans forcément conduire à la rupture. Cette hypothèse a été confirmée par des observations réalisées sur des éprouvettes de fatigue.

Lorsqu'une éprouvette est soumise à un chargement présentant des gradients de contrainte, des zones micro-fissurées peuvent apparaître sur celle-ci tandis que d'autres moins chargées restent intactes. Les auteurs supposent alors que la limite d'endurance peut être déterminée à partir de la connaissance de la répartition volumique des champs mécaniques dans ces volumes endommagés. Ils définissent également la variable de chargement équivalent suivante :

$$\omega(C_i) = \frac{1}{V^*} \cdot \iiint_{V^*} (W(x, y, z) - W^*) \cdot dV \quad (\text{II-37})$$

où V^* correspond au volume de matière au voisinage du point C_i pour lequel le chargement dépasse la contrainte σ^* et W^* est la densité de travail de déformation associée à la contrainte uniaxiale σ^* .

Le critère de fatigue est défini par les auteurs de la manière suivante :

$$\omega(C_i) \leq \omega_{\text{critère}}(C_i) \quad (\text{II-38})$$

L'approche ne permet pas de rendre compte de l'effet bénéfique d'un chargement en compression sur les résultats en fatigue. En effet, la variable représentative de la sollicitation ne distingue pas la compression de la traction

En conclusion, cette méthode permet de modéliser au moins certains effets de gradient de contrainte, mais ces derniers sont systématiquement normalisés par l'échelle associée. Elle constitue, néanmoins, une alternative à l'approche de Papadopoulos (Papadopoulos, 1996).

II.3.3. Formulations probabilistes

II.3.3.1. Introduction

La notion d'échelle est un paramètre important en fatigue. Par exemple, les essais analysés par Papadopoulos (Papadopoulos, 1996) montrent qu'à gradient de contrainte fixe, plus les dimensions d'une éprouvette sont élevées et plus la limite d'endurance obtenue expérimentalement sur celle-ci pour un chargement en flexion rotative est faible.

De nombreux auteurs admettent que les effets d'échelle sont liés à la probabilité d'initier une fissure de fatigue sur un site privilégié. Un tel site peut être une retassure, une inclusion, une rayure à la surface, une porosité ou même un grain défavorablement orienté ou autre. Lorsque le volume de matière augmente, la probabilité de rencontrer un site d'amorçage augmente aussi, ce qui peut expliquer certains résultats expérimentaux de fatigue.

Dans la suite, le modèle de Weibull sera introduit. Il sert généralement de base dans la formulation de ces approches. Puis, deux autres modèles fondés sur des hypothèses de base similaires au modèle précédent, mais de formulations totalement différentes, seront présentés.

II.3.3.2. Modèle de Weibull

Un modèle très employé en mécanique probabiliste est le modèle de Weibull (Weibull, 1951), qui a spécialement été développé pour l'étude de la dégradation et la rupture des matériaux fragiles. Il vise à établir une relation entre la probabilité de rupture et le paramètre de chargement qu'est la contrainte principale maximale, notée σ_P . La probabilité de survie d'un élément de volume V_i , soumis à un chargement σ_P uniforme est définie par la relation suivante (où V_0 , σ_U , σ_0 et m sont des paramètres du modèle) :

$$P_S(\sigma_P, V_i) = e^{-\varphi(\sigma_P) \cdot V_i} \text{ et } \varphi(\sigma_P) = \frac{1}{V_0} \cdot \left(\frac{\sigma_P - \sigma_0}{\sigma_U} \right)^m \quad (\text{II-39})$$

L'hypothèse du maillon le plus faible (Freudenthal, 1968) consiste à supposer que la rupture du maillon le plus faible entraîne la rupture globale. Ainsi, lorsque cette hypothèse est appliquée à une structure composée de n volumes élémentaires V_i chargés uniformément, la probabilité de survie de la structure correspond au produit des probabilités de survie élémentaires :

$$P_S = \prod_{i=1}^n P_S(\sigma_{Pi}, V_i) = e^{-\sum_{i=1}^n \varphi(\sigma_{Pi}) \cdot V_i} \quad (\text{II-40})$$

Lorsque les volumes élémentaires sont infiniment petits et que n tend vers l'infini, la somme est remplacée par une intégrale :

$$P_S = e^{-\int_V \frac{1}{V_0} \left(\frac{\sigma_P - \sigma_0}{\sigma_U} \right)^m \cdot dV} \quad (\text{II-41})$$

Si le chargement n'est pas homogène, l'écriture suivante peut être adoptée :

$$P_S(\sigma_{P \max}) = e^{-\frac{V_{eff}}{V_0} \cdot \left(\frac{\sigma_{P \max} - \sigma_0}{\sigma_U} \right)^m} \quad (\text{II-42})$$

où $V_{eff} = V \cdot H_m$ est le « volume effectif », qui est le produit du volume total de la structure V par un facteur d'hétérogénéité H_m (Hild et al., 1992), et $\sigma_{P \max}$ correspond à la contrainte principale maximale en valeur absolue sur l'ensemble du volume V . Avec ces définitions, l'expression du facteur d'hétérogénéité s'écrit comme suit :

$$H_m = \frac{1}{V} \cdot \int_V \left(\frac{\langle \sigma_P(\underline{x}) - \sigma_0 \rangle}{\langle \sigma_{P \max} - \sigma_0 \rangle} \right)^m \cdot dV \quad (\text{II-43})$$

Finalement, la probabilité de rupture s'obtient à partir de la probabilité de survie :

$$P_R(\sigma_{P \max}) = 1 - P_S(\sigma_{P \max}) = 1 - e^{-\frac{V_{eff}}{V_0} \cdot \left(\frac{\sigma_{P \max} - \sigma_0}{\sigma_U} \right)^m} \quad (\text{II-44})$$

On en déduit que le volume effectif représente le volume de matière soumis au maximum du champ de contrainte appliqué, équivalent au volume total de la structure sollicité par le chargement hétérogène. Ainsi, le volume effectif prend en compte deux phénomènes rencontrés en fatigue. D'une part, l'effet d'échelle qui induit une augmentation de la probabilité d'initier une fissure par fatigue sur un site privilégié lorsque le volume de matière augmente. D'autre part, l'effet de gradient, dont la conséquence est qu'une structure soumise à un chargement hétérogène a une plus faible probabilité de rupture que la même structure, mais sollicitée par une contrainte homogène égale au maximum de celle du chargement hétérogène. Ce dernier point s'explique par le fait que les sites d'initiation situés dans les zones moins chargées ont une probabilité plus faible d'être activés.

II.3.3.3. Modèle à deux échelles probabiliste

Une extension de l'approche précédente, peut être faite en fatigue à grand nombre de cycles. Par exemple, Doudard dans le cadre des essais d'auto-échauffement (Doudard, 2004), suppose que la plasticité à l'échelle microscopique est responsable du processus d'endommagement par fatigue. Il considère que le nombre de sites actifs pour l'initiation de fissure par fatigue augmente avec le chargement et suit un Processus Ponctuel de Poisson. Ainsi, la probabilité de trouver k foyers d'initiation de fissure par fatigue dans un domaine de volume V est donnée par la formule qui suit :

$$P_k(V) = \frac{(\lambda_P \cdot V)^k}{k!} \cdot e^{-(\lambda_P \cdot V)} \quad (\text{II-45})$$

où λ_P est l'intensité du processus.

Une loi puissance est adoptée pour décrire l'intensité du processus en fonction du chargement. La version de 2010 de cette loi comporte trois paramètres (Poncelet et al., 2010) et introduit un effet de contrainte moyenne (pour des chargements cycliques donc) :

$$\lambda_P(\sigma_{eq}, I_{moy}) = \frac{1}{V_0} \cdot \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_U + \alpha \cdot I_{moy}} \right)^m \quad (\text{II-46})$$

où V_0 , σ_U , m et α sont quatre constantes du matériau et σ_{eq} et I_{moy} sont, respectivement, l'amplitude de la contrainte de Von Mises définie quantitativement ci-dessous et la pression hydrostatique moyenne au cours d'un cycle de chargement :

$$\sigma_{eq} = \max_{t \in [0; T]} \left(\sqrt{\frac{3}{2} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) - \underline{\underline{\mathbf{s}}}') : (\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) - \underline{\underline{\mathbf{s}}}')} \right) \quad (\text{II-47})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}}^* = \min_{\underline{\underline{\mathbf{s}}}' } \left\{ \max_{t \in [0; T]} \left(\sqrt{\frac{3}{2} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) - \underline{\underline{\mathbf{s}}}') : (\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) - \underline{\underline{\mathbf{s}}}')} \right) \right\} \quad (\text{II-48})$$

Ce choix se justifie par le fait que cette forme permet de reproduire trois comportements limites. Le premier est obtenu lorsque le coefficient m tend vers l'infini et se traduit par un comportement à seuil. Ainsi, le processus d'endommagement ne s'active que lorsque la contrainte équivalente σ_{eq} dépasse σ_U (dans le cas où la pression hydrostatique moyenne est nulle). Le deuxième s'obtient pour m égal à un, ce qui conduit à une évolution linéaire de l'intensité du processus en fonction de l'amplitude du chargement. Enfin, lorsque m vaut zéro, le problème de fatigue est indépendant du chargement. Pour terminer, les cas intermédiaires peuvent être reproduits pour des valeurs intermédiaires de ce paramètre. La **Figure 38** illustre le processus d'activation des sites d'amorçages en fonction de l'amplitude du chargement.

Afin de rendre compte du comportement thermo-mécanique d'un foyer, un modèle à deux échelles, similaire à celui mentionné dans la sous-section §II.2.5.1, est utilisé. Celui-ci considère un comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire (aucun endommagement n'est pris en compte) pour le foyer qui est modélisé comme une inclusion sphérique.

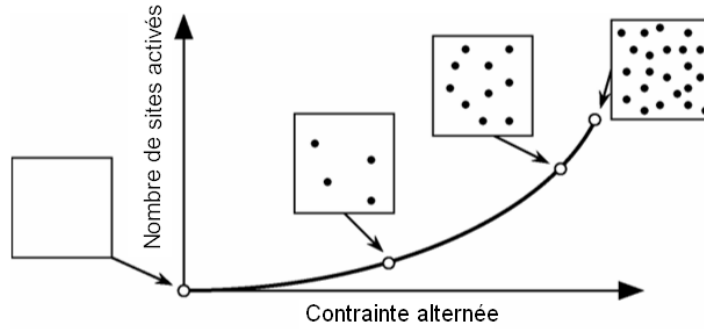


Figure 38 : Illustration montrant l'activation progressive des foyers avec la contrainte alternée.

Dans le cas d'un chargement proportionnel alternée d'amplitude σ_{eq} , l'énergie dissipée par cycle se calcule en intégrant la puissance dissipée tout au long d'un cycle, ce qui donne (Doudard, 2004) :

$$D_f(\sigma_{eq}, \sigma_*^\mu) = \frac{4 \cdot V_f \cdot \sigma_*^\mu}{h} \cdot \langle \sigma_{eq} - \sigma_*^\mu \rangle \quad (\text{II-49})$$

Cette relation indique qu'il ne peut y avoir de dissipation d'énergie que lorsque le chargement dépasse un certain seuil. Au-delà du seuil, la dissipation est linéaire en σ_{eq} . Il ne reste plus qu'à calculer la limite d'endurance en fonction des données du problème. L'hypothèse du maillon le plus faible conduit à postuler que la probabilité de rupture est celle de trouver au moins un foyer. On aboutit alors à une expression similaire à celle de Weibull :

$$P_R(V) = P_{k \geq 1}(V) = 1 - P_0(V) = 1 - e^{-\left(\frac{V_{eff}}{V_0} \cdot \left(\frac{\sigma_{eqMAX}}{\sigma_U + \alpha \cdot I_{moyMAX}}\right)^m\right)} \quad (\text{II-50})$$

Cette équation a été obtenue à partir des définitions suivantes :

$$H_m = \frac{1}{V} \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma_U + \alpha \cdot I_{moyMAX}}{\sigma_U + \alpha \cdot I_{moy}(M)} \cdot \frac{\sigma_{eq}(M)}{\sigma_{eqMAX}} \right)^m \cdot dV \quad (\text{II-51})$$

$$V_{eff} = V \cdot H_m \quad (\text{II-52})$$

$$\sigma_{eqMAX} = \max_{M \in \Omega} (\sigma_{eq}(M)) \quad (\text{II-53})$$

$$I_{moyMAX} = \max_{M \in \Omega} (I_{moy}(M)) \quad (\text{II-54})$$

Avec ces formules, il est alors possible de définir la limite d'endurance moyenne $\overline{\sigma_{eq}}$, l'écart-type associé $\overline{\overline{\sigma_{eq}}}$ et le coefficient de variation CV , afin de décrire la distribution de la limite d'endurance (Poncelet et al., 2010) :

$$\overline{\sigma_{eq}} = \int_0^{\infty} \sigma \cdot \frac{dP_R}{d\sigma} \cdot d\sigma = (\sigma_U + \alpha \cdot I_{moy} MAX) \cdot \left(\frac{V_0}{V_{eff}} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \quad (\text{II-55})$$

$$CV = \frac{\overline{\overline{\sigma_{eq}}}}{\overline{\sigma_{eq}}} = \frac{\sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) + \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)}}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right)} \quad (\text{II-56})$$

La formulation du critère de fatigue consiste à supposer qu'il existe une énergie de dissipation critique E_C au-delà de laquelle une fissure de fatigue s'initie et conduit à la rupture finale. Cette hypothèse néglige l'influence de l'endommagement sur le comportement élasto-plastique à l'échelle du grain.

Si le chargement est proportionnel et périodique, l'amplitude du chargement est liée au nombre de cycles à rupture N de la manière suivante (où $\sigma_{\infty}(P_R, I_{max})$ est la limite d'endurance pour une probabilité de rupture égale à P_R) :

$$N \cdot D_f \left(\sigma_{eq}, \sigma_{\infty}(P_R, I_{max}) \right) = E_C \quad (\text{II-57})$$

Ceci conduit alors à :

$$N = \frac{\frac{A}{h \cdot E_C}}{4 \cdot V_f \cdot \sigma_{\infty}(P_R, I_{max}) \cdot \langle \sigma_{eq} - \sigma_{\infty}(P_R, I_{max}) \rangle} \quad (\text{II-58})$$

où, la limite d'endurance est défini par les relations qui suivent (Calloch et al., 2010) :

$$\frac{\ln(1 - P_R)}{\ln(1 - 0.5)} = \left[\frac{\sigma_{\infty}(P_R, I_{max})}{\sigma_{\infty}(0.5, I_{max})} \right]^m \quad (\text{II-59})$$

$$\sigma_{\infty}(0.5, I_{max}) = \overline{\sigma_{eq}}(I_{max}) \cdot \left[\frac{(\ln(2))^{1/m}}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right)} \right] \quad (\text{II-60})$$

Cependant, le critère prédit une évolution linéaire de la limite d'endurance en fonction de la contrainte moyenne, ce qui n'est pas compatible avec les tendances expérimentales obtenues sur le Ti-6Al-4V (Lanning et al., 2005 (1)).

D'autres travaux ont conduit à une formulation de l'intensité du processus de Poisson différente de celle-ci (Doudard, 2004; Poncelet, 2007; Calloch et al., 2010). Elle a été appliquée avec succès sur plusieurs aciers. Néanmoins, la dépendance à la contrainte moyenne obtenue ne correspond pas à celle du Ti-6Al-4V. Une dépendance à la contrainte moyenne fondée sur des concepts énergétiques (§II.2.4) pourrait éventuellement être une solution à la modélisation du comportement en fatigue de ce matériau.

II.3.3.4. *Modèle fondé sur le concept de volume d'influence probabilisé*

L'approche consiste en une extension du modèle de Banvillet et de Palin-Luc (§II.3.2) afin d'y inclure les effets d'échelle purs (Delahay, 2004). Comme le modèle de base contient déjà un seuil, celle-ci se prête bien à une extension analogue au modèle de Weibull. Ainsi, la variable de chargement est remplacée par la densité du travail de déformation fourni W et le seuil en contrainte par un seuil W^* . Finalement, la probabilité de fissuration d'une structure Ω s'écrit suivant la relation suivante dans le cas d'un chargement uniaxial :

$$P_R(\sigma_{max}) = 1 - \exp^{-\iiint_{\Omega} \frac{1}{V_0} \left(\frac{W(x,y,z) - W^*}{W_U} \right)^m .dV} \quad (\text{II-61})$$

L'extension au cas multiaxial est légèrement différente de celle du modèle initial. En effet, l'approche de Banvillet et de Palin-Luc consiste à modifier le seuil W^* en fonction de la multiaxialité du chargement au point le plus critique sans prendre en compte celle des points aux alentours. Le modèle, présenté dans cette partie, fait porter l'influence de la multiaxialité du chargement sur $W(x, y, z)$ de manière à prendre en compte l'évolution spatiale de celle-ci, le paramètre W^* étant déterminé une fois pour toute à partir des limites d'endurance en traction et flexion rotative alternées :

$$W^* = \frac{2 \cdot (\sigma_{-1})^2 - (f_{-1,rotative})^2}{E} \quad (\text{II-62})$$

D'une manière similaire à l'approche de Banvillet et Palin-Luc, la multiaxialité du chargement est prise en compte via une fonction F dépendant d'un paramètre matériau β et de la fonction de triaxialité du chargement dT :

$$dT(M) = \frac{W_S(M)}{W(M)}, \text{ avec } W_S(M) = \frac{\int_0^T \langle \text{tr}(\sigma(M, t)) \cdot \text{tr}(\varepsilon^e(M, t)) \rangle . dt}{3} \quad (\text{II-63})$$

$$F(dT, \beta) = \frac{1}{1 - dT} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \cdot \ln[1 + dT \cdot (e^\beta - 1)] \right\} \quad (\text{II-64})$$

$$W_{eq}(M) = \frac{F(dT_{Traction}, \beta)}{F(dT(M), \beta)} \cdot W(M) \quad (\text{II-65})$$

Finalement, le critère devient :

$$P_R(\sigma_{max}) = 1 - \exp^{-\iiint_{\Omega} \frac{(W_{eq}(x,y,z) - W^*)^m}{\varphi_u} .dV} \quad (\text{II-66})$$

Ce modèle conduit aux mêmes tendances que celui de Banvillet et Palin-Luc en uniaxial, à part qu'il tient compte de l'effet d'échelle pur.

II.3.4. Formulations introduisant une distance caractéristique

Les approches faisant partie de cette catégorie introduisent une échelle caractéristique dans leur formulation. Celle-ci est à comparer avec les dimensions intervenant dans le problème de fatigue, ce qui permet de rendre compte des effets d'échelle en principe. La non-localité de ces formulations permet également de faire intervenir l'effet de gradient sur les prédictions de fatigue. Dans l'article de Taylor (Taylor, 1999), un résumé des différentes approches de base est proposé. Il distingue quatre types de méthodes, développés initialement pour rendre compte des effets d'entaille : la méthode du point, la méthode de la ligne, celle de l'aire et celle du volume (**Figure 39**). L'idée derrière ces formulations, est que la prévision de l'endurance en fatigue ne peut pas se faire que par des considérations purement locales.

La méthode du point consiste à évaluer le chargement en fatigue grâce à un critère local, mais les champs mécaniques considérés ne sont pas ceux pris à la pointe de l'entaille mais à une distance égale à a_c de celle-ci et en profondeur. Dans le cas de la méthode de la ligne, il faut calculer la moyenne d'une quantité mécanique sur un segment de droite de dimension a_c partant de la pointe de l'entaille et dirigé vers l'intérieur du matériau. Quant aux méthodes de l'aire et du volume, il s'agit là d'une extension de la démarche précédente sauf que la moyenne est calculée sur un demi-disque ou une demi-boule (ou demi-cylindre) de rayon a_c selon le cas.

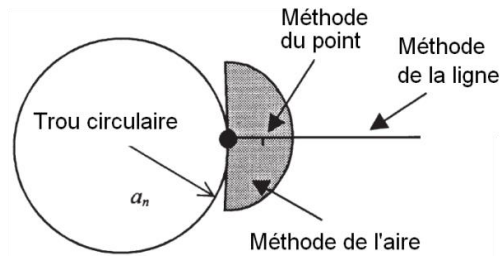


Figure 39 : Illustration des domaines dans lesquels les champs mécaniques sont extraits afin de formuler un critère non-local.

Par le passé, plusieurs auteurs ont utilisé ce type de considérations afin de développer leur critère de fatigue. Avant d'en introduire quelques-uns, on commence par définir quelques grandeurs utilisées en fatigue. Le facteur de concentration de contrainte K_t est défini comme le rapport entre la contrainte maximale (orthogonale à un plan donné) et la contrainte appliquée sur la structure (il s'agit donc d'un paramètre qui ne peut être utilisé que lorsque le chargement appliqué est uniaxial) :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{appliquée}} \quad (\text{II-67})$$

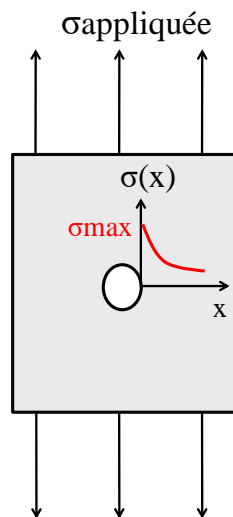


Figure 40 : Elévation de la contrainte locale près de la zone de concentration de contrainte.

Il est intéressant d'introduire également le facteur de concentration de contrainte effectif K_f , défini comme le rapport entre les limites d'endurance du matériau sain et du matériau contenant une concentration de contrainte. L'intérêt de cette grandeur est que la notion de K_t seule ne suffit pas à caractériser le comportement en fatigue d'un matériau contenant une entaille. En effet, elle ne rend pas compte, notamment, du comportement mécanique cyclique du matériau (car défini uniquement en élasticité linéaire), de la mutiaxialité du chargement au niveau de l'entaille et des effets de gradient de chargement. Enfin, le gradient de contrainte normalisé χ se calcule par le rapport entre la valeur absolue du gradient de contrainte au point le plus chargé, par la contrainte maximale locale.

L'article de Yao et al. (Yao et al., 1995) donne un état de l'art des différentes approches non-locales donnant une relation entre K_f , K_t et les paramètres géométriques du problème (afin de pouvoir utiliser

l'effet d'échelle). Par exemple, Neuber utilise la méthode de la ligne appliquée sur le champ de contrainte au voisinage d'une concentration de contrainte (zone à K_t). Seule la composante parallèle au chargement appliqué est considérée. Il aboutit finalement à l'expression suivante :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{a_c}{\rho}}} \quad (\text{II-68})$$

où ρ correspond au rayon de courbure de la zone à K_t .

Peterson, quant à lui, utilise la méthode du point et fait l'hypothèse que la décroissance de la contrainte en fonction de la distance à la zone à K_t est linéaire. Il obtient finalement :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{a_c}{\rho}} \quad (\text{II-69})$$

Afin de vérifier si ces formulations tiennent véritablement compte des effets d'échelle et de gradient rencontrés en fatigue, considérons le cas d'un trou elliptique engendrant un gradient de contrainte dont le facteur théorique de concentration de contrainte associé est donné en fonction des paramètres géométriques par la formule qui suit (Peterson, 1974) :

$$K_t = 1 + 2 \cdot \frac{a}{b} = 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}} \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a} \quad (\text{II-70})$$

où a , b et ρ sont, respectivement, les demis grand et petit axes et le rayon de courbure de la zone la plus sollicitée. Dans l'article de Filippini (Filippini, 2000), on trouve l'expression du gradient de contrainte normalisé dans le cas d'un trou elliptique, ce qui donne :

$$\chi = \left(2 + \frac{1}{K_t}\right) \cdot \frac{1}{\rho} \Rightarrow K_t = \frac{1}{\chi \cdot \rho - 2} \quad (\text{II-71})$$

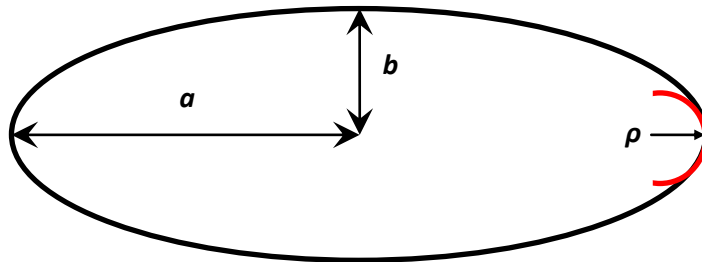


Figure 41 : Paramètres géométriques associés à un trou elliptique.

En remplaçant dans les formules de Neuber et de Peterson, on aboutit, respectivement, à :

$$K_f = 1 + \frac{3 - \chi \cdot \rho}{(\chi \cdot \rho - 2) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{a_c}{\rho}}\right)} \quad (\text{II-72})$$

$$K_f = 1 + \frac{3 - \chi \cdot \rho}{(\chi \cdot \rho - 2) \cdot \left(1 + \frac{a_c}{\rho}\right)} \quad (\text{II-73})$$

Ces formules font intervenir à la fois le gradient de contrainte et l'échelle du problème à travers le rayon de courbure. Cependant, elles ne tiennent pas compte de la multiaxialité du chargement, ni du rapport de charge (sans compter le fait que la région la plus contrainte de l'entaille peut plastifier à haut rapport de charge). Lorsque K_t augmente, les résultats d'essais montrent également que la limite d'endurance tend à devenir indépendante du K_t ce qui n'apparaît pas dans les formules de K_f . On en déduit donc que ces formules ne peuvent pas être utilisées dans des situations trop éloignées des conditions qui ont conduit à leur identification.

Afin de combler ce manque, des auteurs ont utilisé les méthodes du point, de la ligne, de l'aire et / ou du volume afin de prédire le comportement en fatigue de structures entaillées à partir de champs mécaniques obtenus par des simulations éléments finis. Par exemple, Lanning et al. (Lanning et al., 2005 (2)) ont appliquées les méthodes du point et de la ligne sur des éprouvettes entaillées en Ti-6Al-4V. Ils ont constaté que l'application de ces critères sur la contrainte alternée ou sur la contrainte moyenne ne permet pas de reproduire la sensibilité expérimentale à la contrainte moyenne. Une dernière tentative a consisté à utiliser le critère de Jasper (§II.2.4) qui donne de bons résultats en uniaxial, mais qui dans le cas des méthodes non-locales ne permet pas de réaliser des prédictions satisfaisantes. L'une des conclusions de leur étude est que le paramètre a_c dépend du rapport de charge et ne peut donc pas être interprété comme un paramètre matériau. D'où, l'incapacité des différentes méthodes précédentes à reproduire le comportement en fatigue du Ti-6Al-4V.

Au cours de la même période, Naik et al. (Naik et al., 2005) ont adopté une approche différente des précédentes. Afin de rendre compte des effets de multiaxialité du chargement et du rapport de charge en fatigue, ils ont utilisé dans leur démarche le paramètre de Findley défini comme suit :

$$\begin{cases} FIN_1(\theta) = \tau_a(\theta) + k \cdot \sigma_{x \max}(\theta) \\ FIN_2(\theta) = \tau_a(\theta) + k \cdot \sigma_{y \max}(\theta) \\ FIN = \max_{\theta \in [0;90]} [FIN_1(\theta, t), FIN_2(\theta, t)] \end{cases} \quad (\text{II-74})$$

où τ_a , $\sigma_{x \max}$, $\sigma_{y \max}$ et k sont définis au cours d'un cycle de chargement et sont, respectivement, l'amplitude de la contrainte de cisaillement dans le plan critique orienté selon l'angle θ par rapport au repère d'origine, les contraintes normales maximales à ce plan et projetées selon les axes x et y et un paramètre de sensibilité au rapport de charge (pour les chargements cycliques).

A partir de cette formulation locale, Naik et al. ont développé deux autres critères non-locaux :

$$FIN^*(a_c, N) = FIN(N) \quad (\text{II-75})$$

$$G_r(a_c, N) = \frac{1}{a_c} \cdot \int_0^{a_c} FIN^*(x, N) \cdot dx = G_F \cdot FIN(N) \quad (\text{II-76})$$

Le premier critère prédit que le nombre de cycles à rupture d'une éprouvette entaillée est donné par la valeur du paramètre de Findley, si ce dernier est calculé à partir des champs mécaniques pris à une distance a_c de l'extrémité de l'entaille. Le deuxième critère est similaire au premier à part que la méthode de la ligne a été employée. La dépendance du paramètre de Findley au nombre de cycles à rupture a été obtenue suite à l'identification d'une loi à partir de résultats d'essais obtenus sur des éprouvettes cylindriques en Ti-6Al-4V sollicitées en fatigue à différents rapports de charge :

$$FIN(N) = 65,739 \cdot N^{-0,6779} + 433,5 \cdot N^{-0,0415} \text{ avec } k = 0.29 \quad (\text{II-77})$$

Les résultats d'essais obtenus sur des éprouvettes entaillées en Ti-6Al-4V de diverses géométries suggèrent que la longueur caractéristique a_c identifiée à partir du premier critère n'est pas un paramètre matériau. Cependant, le paramètre G_F du deuxième critère semble être indépendant du rapport de charge et de la géométrie de l'entaille. Les auteurs postulent alors que ce paramètre ne dépend que du matériau et ils en déduisent une démarche générale pour l'utilisation de leur approche. Tout d'abord, des résultats

d'essais réalisés sur des éprouvettes entaillées de diverses géométries et sollicitées à différents rapports de charge, permettent d'identifier dans chaque cas les paramètres a_c et k à l'aide du premier critère, puis le paramètre G_F (égal à 1.16 dans le cas du Ti-6Al-4V) avec le deuxième critère. La moyenne des constantes G_F peut alors être utilisée dans la suite comme paramètre matériau. Comme l'approche est non-locale et que l'évolution spatiale du champ de contrainte est généralement complexe, un calcul élastique par éléments finis pour un chargement en pointe d'entaille σ' est nécessaire pour pouvoir appliquer la démarche. Une fois le calcul réalisé, l'évolution spatiale du paramètre de Findley, à partir du rayon de l'entaille, peut être déterminée (**Figure 42**). Ceci permet de réaliser le calcul de $G_r(x, N)/FIN(N)$ pour différentes profondeurs x jusqu'à ce que le rapport atteigne la valeur G_F , d'où l'on déduit a_c . Le premier critère peut alors être utilisé afin d'en déduire le véritable chargement σ^* à appliquer (au lieu de σ') pour obtenir la rupture au bout de N cycles.

Cependant, il semblerait que ce modèle possède un point faible d'ordre théorique. Pour le voir, prenons l'équation du deuxième critère et considérons un chargement en traction uniforme. Dans ce cas $FIN^*(x, N)$ ne dépend pas de x et on le note $FIN^*(N)$. On a alors les égalités suivantes :

$$G_r(a_c, N) = \frac{1}{a_c} \cdot \int_0^{a_c} FIN^*(N) \cdot dx = FIN^*(N) = G_F \cdot FIN(N) \quad (\text{II-78})$$

Or, le premier critère induit une égalité entre $FIN^*(N)$ et $FIN(N)$, ce qui implique que G_F doit nécessairement être égal à un. Ceci est en contradiction avec les résultats précédents. Néanmoins, l'article montre que, potentiellement, le modèle conduit à de bons résultats pour des K_t au moins situés dans l'intervalle [2; 4,1].

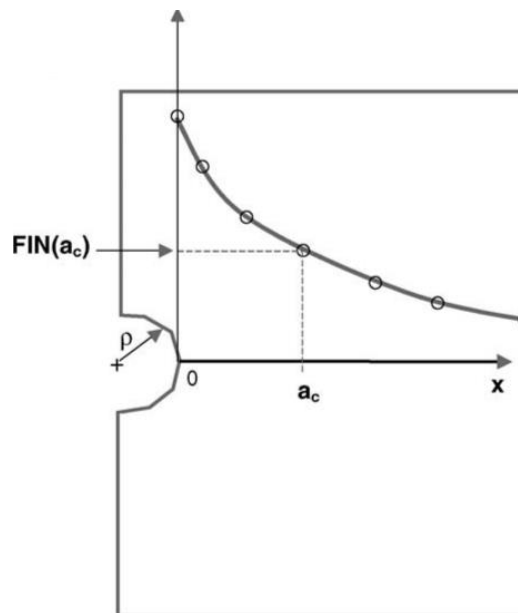


Figure 42 : Evolution spatiale du paramètre de Findley et distance critique a_c à partir du rayon de l'entaille (Naik et al., 2005).

II.3.5. Discussion

Les approches fondées sur le concept de volume d'influence ou probabilistes considèrent qu'il est possible de se ramener à un volume équivalent sollicité de manière homogène. L'intérêt de ces dernières est leur simplicité et leur capacité à rendre compte des effets d'échelles qui caractérisent le phénomène de fatigue. Or, dans la section §I.2.5.3, on a vu que lorsque le gradient de contrainte est suffisamment important, un amorçage par fatigue peut survenir sans conduire à la rupture. Lorsqu'une éprouvette

homogène est sollicitée en traction, l'amorçage d'une fissure suffisamment longue (au sens microstructural) conduit systématiquement à la rupture. Le problème de l'amorçage sans rupture ne peut donc pas être modélisé par ces approches, ce qui est normal puisque ce n'est pas leur but non plus.

Une discussion portant sur les approches introduisant une distance caractéristique a été menée et il est clair qu'elles ne peuvent pas être employées dans tous les cas. De plus, certaines d'entre elles peuvent présenter des incohérences mathématiques qui limitent également leur utilisation.

II.4. Approches fondées sur la mécanique de la rupture

II.4.1. Introduction

Les approches précédentes, bien que plus efficaces que les méthodes locales, ont montré leurs limites. Elles ne permettent pas de rendre compte des effets d'arrêt de fissure. Une explication à cela est qu'elles sont formulées à partir de champs mécaniques continus, alors que la présence d'une fissure engendre une discontinuité.

Une solution à ce problème est d'introduire, explicitement, une fissure dans une structure sur laquelle on sait qu'une fissure de fatigue peut s'initier et d'utiliser le formalisme de la mécanique de la rupture afin de déterminer si la fissure se propage ou non.

On est alors en droit de se poser la question suivante. Quelle est la longueur de fissure à introduire ? En effet, celle-ci dicte le comportement vis-à-vis de la propagation. On pourrait alors vouloir passer continuellement d'une structure non-fissurée à une structure fissurée. Mais cela semble difficile a priori, conceptuellement parlant. Cela provient sans doute de la nature discontinue d'une fissure.

Néanmoins, l'expérience montre que plus une fissure est courte et plus la limite d'endurance de l'éprouvette qui la contient tend vers celle d'une éprouvette saine. (§I.2.4). La nature discontinue d'une fissure n'est donc pas incompatible avec l'existence d'une certaine continuité mécanique.

Une discussion sur différentes approches tentant de résoudre ce problème et de la manière de rendre compte de l'effet d'arrêt de fissure est menée dans la suite.

II.4.2. Éléments de mécanique de la rupture

II.4.2.1. Solution asymptotiques et hypothèses de la mécanique de la rupture

En élasticité linéaire, le champ de contrainte associé à une fissure plane à front droit plongée dans un milieu infini bidimensionnel, élastique, homogène et isotrope, soumis à un chargement en traction biaxial a été donné par Williams (Williams, 1957) en déformation plane ou en contrainte plane. Ce champ peut être exprimé au voisinage de la pointe de fissure comme un développement asymptotique de la distance r à la pointe de fissure (**Figure 43**) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta) = \sum_{i=-1}^{\infty} K_i \cdot r^{i/2} \cdot \underline{\underline{f}}_i(\theta) \quad (\text{II-79})$$

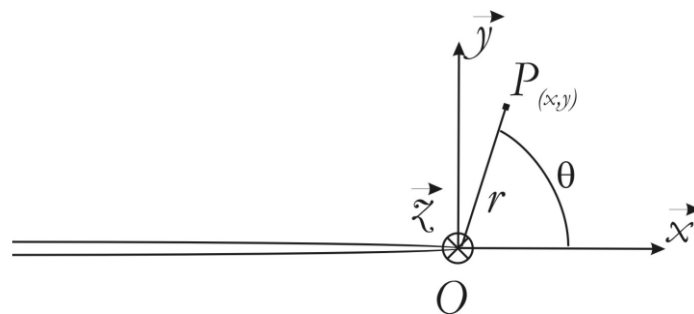


Figure 43 : Repère attaché à la pointe de fissure.

Le champ de contrainte ainsi développé contient deux types de contributions. Les champs associés à i impair sont discontinus au passage des lèvres de la fissure, tandis que pour i pair les champs restent

continus. La formule ci-dessus décompose le champ en somme de fonctions à variables séparables dont l'intensité est donnée par K_i .

Le développement au premier ordre a été donné par Westergaard (Westergaard, 1939). Contrairement aux autres termes du développement asymptotique, le premier engendre une singularité en pointe de fissure. Il domine donc nettement les autres en pointe de fissure. C'est pourquoi, l'analyse du comportement en fissuration s'appuie essentiellement sur la valeur de l'intensité de ce champ, que l'on appelle facteur d'intensité des contraintes.

On donne, ci-dessous, le développement au premier ordre du champ de contrainte associé à la fissure plane soumise à un chargement de traction :

$$\sigma_{XX}(r, \theta) = K_I \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \quad (\text{II-80})$$

$$\sigma_{YY}(r, \theta) = K_I \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \quad (\text{II-81})$$

$$\sigma_{XY}(r, \theta) = K_I \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \quad (\text{II-82})$$

$$\sigma_{XZ}(r, \theta) = 0 \quad (\text{II-83})$$

$$\sigma_{YZ}(r, \theta) = 0 \quad (\text{II-84})$$

$$\begin{cases} \sigma_{ZZ}(r, \theta) = \nu \cdot (\sigma_{XX}(r, \theta) + \sigma_{YY}(r, \theta)), \text{ en déformations planes} \\ \sigma_{ZZ}(r, \theta) = 0, \text{ en contraintes planes} \end{cases} \quad (\text{II-85})$$

Le champ de déplacement s'exprime alors par :

$$u_X(r, \theta) = \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) \quad (\text{II-86})$$

$$u_Y(r, \theta) = \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) \quad (\text{II-87})$$

Ces champs ont été établis dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture et on a vu que le champ de contrainte présente une singularité lorsque la distance à la pointe de fissure tend vers zéro, ce qui se traduit par un écoulement plastique en pointe de fissure au cours du chargement. Il faut donc s'assurer de la bonne représentativité des champs mécaniques établis par cette théorie.

Une estimation de la dimension de la zone plastique en pointe de fissure sous chargement monotone a été proposée par Irwin (Irwin, 1960) selon le cas rencontré (**Figure 44**) :

$$Z_P = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{R_e}\right)^2, \text{ en déformations planes} \quad (\text{II-88})$$

$$Z_P = \frac{1}{3 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{R_e}\right)^2, \text{ en contraintes planes} \quad (\text{II-89})$$

Cette estimation provient d'une comparaison entre la contrainte de Von Mises induite par le champ de contrainte développé au premier ordre et la limite d'élasticité. Pour des chargements de fatigue, cette dimension ne dépasse généralement pas la centaine de microns (du moins pour le Ti-6Al-4V). Même si

la présence d'une zone plastique en pointe de fissure perturbe les champs mécaniques dans cette région, les solutions de la mécanique élastique linéaire de la rupture restent valides en dehors de celle-ci.

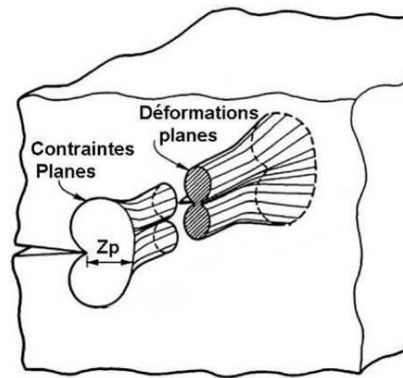


Figure 44 : Evolution de la dimension de la zone plastique le long du front de fissure.

De plus, Pommier a montré, que dans le cas d'une fissure plane à front droit, la solution asymptotique est suffisamment précise pour représenter les champs de contraintes en pointe de fissure jusqu'à une distance à celle-ci égale à un dixième de sa dimension totale (zone de K-dominance) avec une erreur maximale de 10 % (Pommier, 2001 (2)). Dans le cas des fissures longues, il existe un rapport entre 10 et 100 entre les dimensions de la zone de K-dominance, de la zone plastique et de la zone d'élaboration au sein de laquelle l'endommagement conduisant à la propagation de fissure se produit (*Figure 45*).

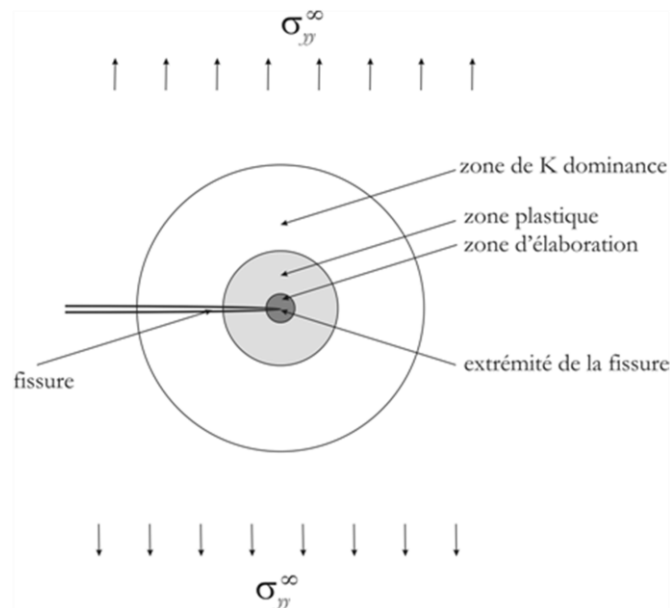


Figure 45 : Zones d'intérêt autour de la pointe de fissure.

II.4.2.2. Modes de fissuration

Jusqu'à présent seul le cas d'un chargement uniforme de traction appliqué à une fissure plane à front droit conduisant à une singularité en pointe de fissure engendrant une ouverture symétrique de ses lèvres par rapport au plan de fissuration a été abordé. Ce mode de chargement est appelé mode I ou bien mode d'ouverture. Il en existe deux autres engendrant eux aussi des singularités, mais différentes de la

précédente (**Figure 46**). Le mode II est activé par un chargement de cisaillement parallèle au plan de fissuration et orthogonal au front de fissure, tandis que le mode III est induit par une contrainte de cisaillement également parallèle au plan de fissuration mais parallèle au front de fissure.

Dans la suite, seule une propagation en mode I sera abordée.

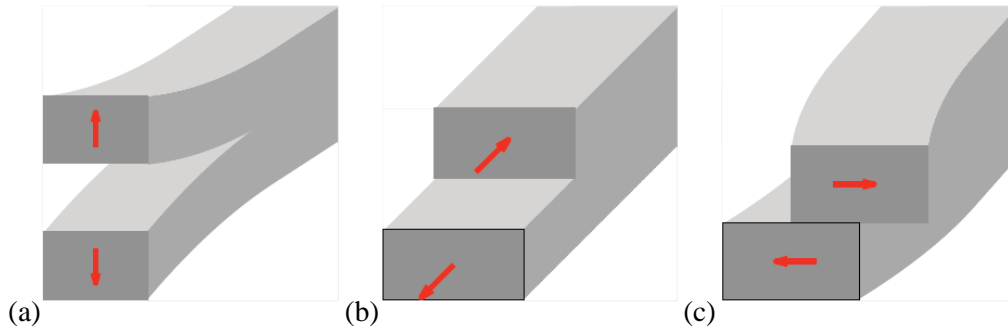


Figure 46 : Les trois modes singuliers (Marigo, 2016) :
 (a) le mode I ou le mode d'ouverture,
 (b) le mode II ou le mode de cisaillement,
 (c) le mode III ou le mode de déchirure.

II.4.2.3. La loi de Paris

L'analyse d'éprouvettes fissurées soumises à des chargements cycliques a conduit Paris à formuler une loi empirique de propagation qui porte aujourd'hui son nom (Paris et al., 1961). Celle-ci relie la vitesse de propagation par cycle à la variation du facteur d'intensité des contraintes ΔK_I comme suit :

$$\frac{da}{dN} = C. \Delta K_I^m \quad (\text{II-90})$$

Cette loi peut être représentée par une droite dans un diagramme log-log, mais n'est plus valable lorsque ΔK devient inférieur à un certain seuil de non-propagation de fissure longue ΔK_S et lorsque K_I dépasse la ténacité K_{IC} (**Figure 47**). En effet, lorsque le chargement dépasse la ténacité, la rupture devient instable et une éprouvette fissurée soumise à un tel chargement finit par se rompre brutalement. A l'inverse, lorsque la variation du facteur d'intensité des contraintes est en-dessous du seuil de non-propagation de fissure, la fissure ralentit fortement ou s'arrête.

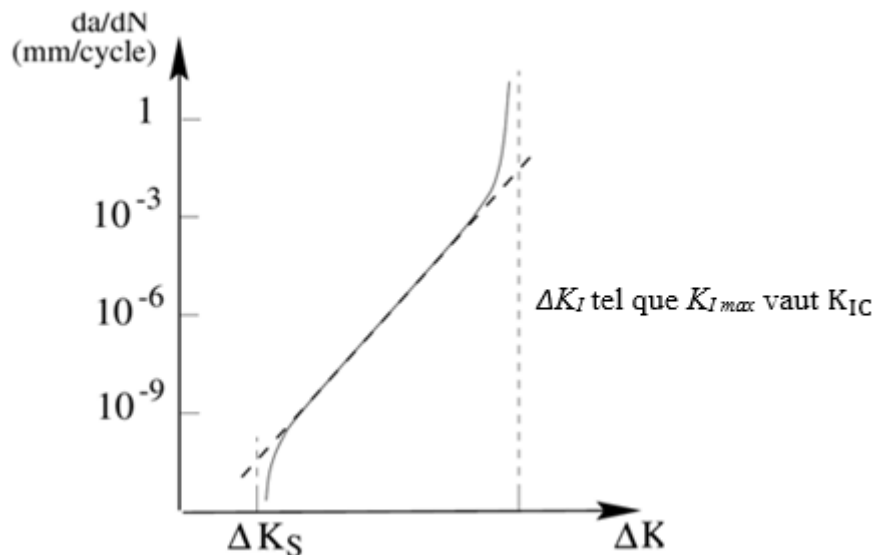


Figure 47 : Illustration du comportement en fissuration pour un chargement cyclique.

II.4.2.4. La mécanique de la rupture, comme cadre pour la prise en compte des effets de gradient

Le développement de Williams (Williams, 1957) conduit à une expression du facteur d'intensité des contraintes dans le cas d'une fissure plane à front droit soumise à un chargement uniforme de traction plongée dans un milieu infini élastique, homogène et isotrope. Lorsque σ est le chargement de traction lointain et a la longueur de fissure, l'expression du facteur d'intensité des contraintes est donnée par :

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{II-91})$$

Ainsi, le facteur d'intensité des contraintes est une fonction croissante du chargement, mais aussi de la longueur de fissure.

Il existe d'autres expressions similaires mais applicables à des situations différentes. Par exemple, Newman et Raju ont donné une expression du facteur d'intensité des contraintes applicable au cas des fissures semi-circulaires qui débouchent en surface et soumises à un chargement en traction (Newman Jr & Raju, 1981). Cette expression est différente de la précédente, montrant ainsi que le calcul du facteur d'intensité des contraintes dépend également de la géométrie de la fissure rencontrée :

$$K_I = 0,663 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{II-92})$$

Ces mêmes auteurs ont montré que l'expression du facteur d'intensité des contraintes dépend des conditions aux limites du problème. Ainsi, le simple fait qu'une fissure soit plongée dans un milieu infini ou non modifie son expression. Le calcul du facteur d'intensité des contraintes est donc un problème de type structure.

En poussant plus loin l'analyse, il est possible de comprendre que cette grandeur dépend également de l'hétérogénéité spatiale du champ de contrainte. Afin de le montrer, considérons le cas d'une éprouvette plate rectangulaire contenant un trou circulaire sur lequel débouchent deux fissures planes à front droit orientées axialement (**Figure 48**).

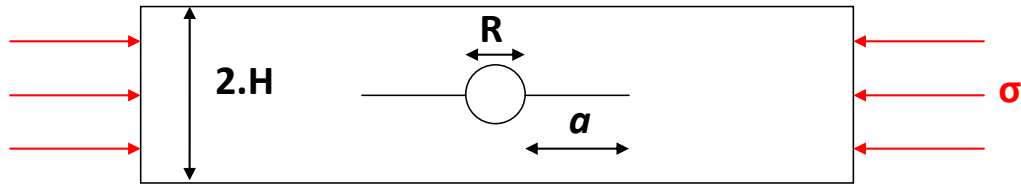


Figure 48 : Illustration du comportement en fissuration pour un chargement cyclique.

On suppose également que l'éprouvette est soumise à un chargement de compression. Par effet Poisson, les lèvres des deux fissures s'ouvrent. He et ses collègues (He et al., 1995) ont donné une expression empirique de l'évolution du facteur d'intensité des contraintes pour ce cas :

$$K_I = \frac{|\sigma| \cdot \sqrt{\pi \cdot R}}{\frac{H}{R} + \left[0,235 \cdot \frac{H}{R} - 0,259\right] \cdot \frac{a}{R}} \quad (\text{II-93})$$

La **Figure 49** donne l'évolution du facteur d'intensité des contraintes pour une propagation symétrique des fissures. On constate que plus les fissures avancent et plus le facteur d'intensité des contraintes diminue. Ceci est lié à la présence du trou circulaire qui engendre un gradient de contraintes suffisamment important pour le faire chuter. Ainsi, selon le cas, cette variable peut être croissante avec la longueur de fissure ou non.

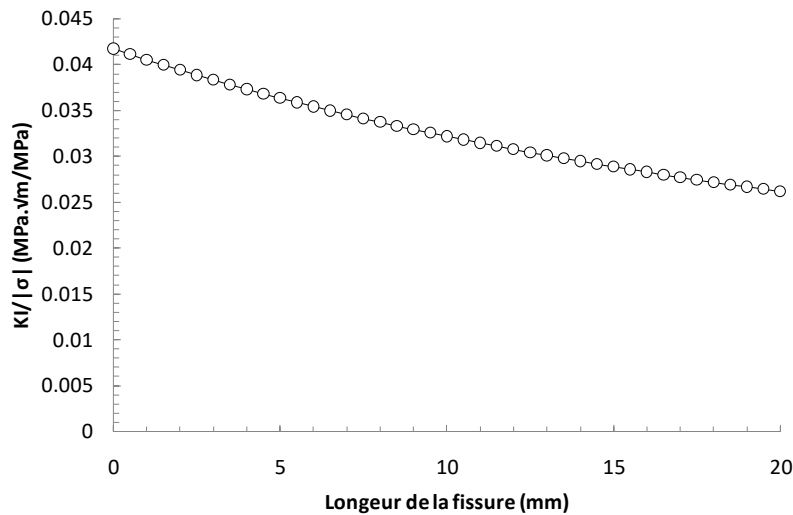


Figure 49 : Evolution du facteur d'intensité des contraintes normalisé par le chargement en fonction de l'avancée des deux fissures symétriquement au trou circulaire.

Il est donc possible d'imaginer un chargement tel qu'une fissure de fatigue s'initie au bout d'un certain nombre de cycles à un endroit suffisamment chargé, se propage, puis s'arrête lorsque le seuil de non-propagation est atteint. Cela peut se produire lorsque des gradients thermiques élevés engendrent des gradients de contraintes (Taheri, 2005) ou dans le cas des problèmes purement mécaniques avec des entailles (Frost & Dugdale, 1957).

II.4.3. Effet de Gradient et d'échelle

II.4.3.1. Effet de la taille des défauts

II.4.3.1.1. Effet de la taille des défauts : travaux de Kitagawa et Takahashi (Kitagawa & Takahashi, 1976)

Lorsqu'un matériau contient une fissure suffisamment longue, la limite d'endurance correspond à une contrainte seuil en-dessous de laquelle la fissure ne se propage pas, c'est-à-dire une contrainte pour laquelle le facteur d'intensité des contraintes est égal au seuil de non-propagation de fissure longue. La limite d'endurance (pour un rapport de charge donné) s'obtient comme suit (avec Y le facteur de forme de la fissure) :

$$\sigma_f = \frac{\Delta K_{th}}{Y \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} \quad (\text{II-94})$$

Cependant, lorsque la dimension de la fissure tend vers zéro, la limite d'endurance tend vers l'infini, ce qui prouve que celle-ci est inadaptée à ce cas. Dans les années 70, Kitagawa et Takahashi ont réalisé une série d'essais de fatigue sur des éprouvettes contenant des anomalies artificielles de petites dimensions et ont tracé leurs résultats sur un diagramme, qui porte aujourd'hui leurs noms, qui consiste à représenter la limite d'endurance en fonction de la dimension des anomalies (Kitagawa & Takahashi, 1976). Les résultats montrent qu'en dessous d'une certaine dimension, la limite d'endurance semble en devenir indépendante, tandis qu'au-delà, la mécanique élastique linéaire de la rupture s'applique si ces derniers sont vus comme des fissures. Leur modèle est schématisé sur la **Figure 50**.

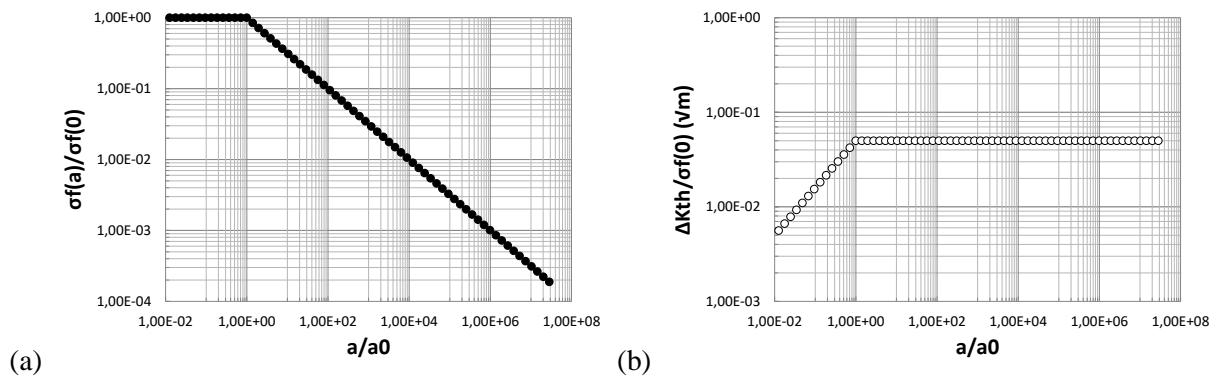


Figure 50 : Modèle de Kitagawa & Takahashi pour la prédiction de la limite d'endurance d'une éprouvette contenant un défaut (avec Y égal à 1),

- (a) Evolution de la limite d'endurance normalisée par rapport à la dimension normalisée du défaut,
 (b) Evolution du seuil de non-propagation de fissure en considérant que le domaine d'endurance correspond au seuil de non-propagation de fissure.

Pour des dimensions telles que la mécanique de la rupture élastique s'applique, le seuil de non-propagation de fissure est constant. Dans le cas contraire, le seuil s'écrit comme suit :

$$\Delta K_{th} = Y \cdot \sigma_f(a_0) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{II-95})$$

II.4.3.1.2. Modèle empirique de Murakami

Murakami et Endo ont réalisé une vaste étude expérimentale sur des matériaux contenant des anomalies artificielles dans le but de proposer un modèle simple donnant l'évolution de la limite

d'endurance en fonction de la dimension de ces dernières (Murakami & Endo, 1986; Murakami, 2002). Leurs observations les ont conduits à remarquer que des fissures de fatigue peuvent s'initier sur les anomalies sans propager. Ainsi la limite d'endurance peut être vue comme un domaine de non-propagation de fissure. Ils ont proposé une équivalence entre anomalies et fissures à l'endurance. Ils ont supposé que la nocivité d'une petite anomalie est semblable à celle d'une fissure dont la dimension est égale à la racine carrée de l'aire de l'anomalie projetée sur le plan orthogonal à la direction principale maximale (**Figure 51**). Cette distance est nommée \sqrt{area} par ces auteurs.

Afin de pouvoir utiliser cette approche, il est nécessaire de connaître le facteur d'intensité des contraintes d'une fissure. Il existe dans la littérature de nombreux formulaires donnant cette quantité en fonction de la géométrie de la fissure. Cependant, une petite fissure émanant d'une anomalie n'est jamais idéale, dans le sens où elle n'est pas parfaitement plane avec un front bien lisse, ce qui complique la tâche. Murakami et Endo ont proposé comme estimation du facteur d'intensité des contraintes maximal le long du front de fissure, pour une fissure interne soumise à un chargement uniforme σ_0 , la relation suivante (Murakami et al., 1989) :

$$K_{Max} = 0,5 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sqrt{area}} \quad (\text{II-96})$$

Dans le cas d'une fissure qui débouche en surface, la formule suivante peut être appliquée :

$$K_{Max} = 0,65 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot \sqrt{area}} \quad (\text{II-97})$$

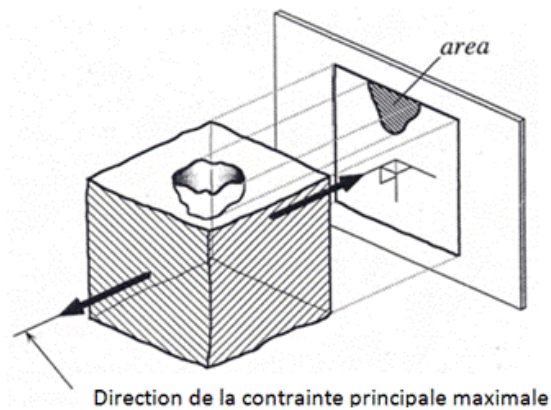


Figure 51 : Représentation du paramètre \sqrt{area}

Les observations réalisées sur des éprouvettes de fatigue (contenant des fissures courtes qui émergent d'anomalies artificielles comme des trous cylindriques de petites dimensions) ont également montré que le seuil de non-propagation de fissure s'écrit en fonction du paramètre \sqrt{area} et de la dureté H_V comme suit (\sqrt{area} est ici calculée en μm) :

$$\Delta K_{th} = 3,3 \cdot 10^{-3} \cdot (H_V + 120) \cdot (\sqrt{area})^{\frac{1}{3}} \quad (\text{II-98})$$

En utilisant cette formule et en l'égalisant avec les précédentes, il est possible d'estimer la limite d'endurance pour un rapport de charge égal à -1 :

➤ Pour les défauts de surface :

$$\sigma_{-1} = \frac{1,43. (H_V + 120)}{(\sqrt{area})^{\frac{1}{6}}} \quad (\text{II-99})$$

➤ Pour les défauts internes :

$$\sigma_{-1} = \frac{1,56. (H_V + 120)}{(\sqrt{area})^{\frac{1}{6}}} \quad (\text{II-100})$$

L'intérêt majeur de cette approche est qu'elle est extrêmement simple à mettre en œuvre. En revanche, elle ne peut s'utiliser que pour des anomalies d'une dimension relativement faible du fait du caractère empirique de celle-ci.

Afin de comparer cette approche avec celle de Kitagawa et Takahashi, considérons une fissure circulaire de rayon a . Dans ce cas, le paramètre \sqrt{area} s'obtient comme suit :

$$\sqrt{area} = a. \sqrt{\pi} \quad (\text{II-101})$$

Ainsi, le seuil de non-propagation de fissure est proportionnel à $a^{\frac{1}{3}}$ pour l'approche de Murakami et Endo tandis que pour celle de Kitagawa et Takahashi la proportionnalité est en $a^{\frac{1}{2}}$. Cette différence s'explique par le fait que Kitagawa et Takahashi considèrent uniquement la limite d'endurance du matériau en supposant que l'anomalie introduite dans le matériau est une fissure. L'approche de Murakami consiste au contraire à déterminer la longueur de fissure émergeant de l'anomalie introduite. C'est cette différence méthodologique qui expliquerait les résultats. La dépendance du seuil en $a^{\frac{1}{3}}$ résulterait donc de la combinaison de l'effet de fissure courte avec l'effet de gradient engendré par la présence de l'anomalie artificielle.

II.4.3.1.3. *Modèle fondé sur la correction de taille de zone plastique de El Haddad*

Afin de rendre compte de l'effet de fissure courte, El Haddad a proposé d'apporter une correction sur le seuil de non-propagation de fissure (El Haddad et al., 1980). Pour cela, il commence par estimer la dimension de la zone plastique à l'endurance qui correspond également à un domaine de non-propagation de fissure à l'aide de la formule d'Irwin :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\Delta K_{th}}{\sigma_f \cdot Y(a_0)} \right)^2 \quad (\text{II-102})$$

Ensuite, afin de rendre compte de l'effet de la plasticité en pointe de fissure sur le calcul du seuil de non-propagation de fissure, il a proposé de sommer la longueur de fissure à cette dimension. Ainsi, la relation suivante entre seuil de non-propagation de fissure et limite d'endurance est obtenue :

$$\sigma_f = \frac{\Delta K_{th}}{Y(a + a_0) \cdot \sqrt{\pi \cdot (a + a_0)}} \quad (\text{II-103})$$

avec $Y(a)$ une fonction dépendant de la géométrie de la fissure.

En reprenant la définition habituelle du seuil de non-propagation, et en l'égalant avec l'expression précédente, on obtient une nouvelle définition du seuil de non-propagation de fissure qui tient compte de l'effet fissure courte :

$$\Delta K_{th}^* = \Delta K_{th} \cdot \sqrt{\frac{a}{a + a_0}} \cdot \frac{Y(a)}{Y(a + a_0)} \quad (\text{II-104})$$

D'après cette description, le seuil de non-propagation de fissure ne serait pas un paramètre matériau mais dépendrait de la géométrie de la fissure ainsi que du seuil de non-propagation des fissures longues ΔK_{th} .

Cette description possède néanmoins quelques lacunes. Tout d'abord, l'effet du rapport de charge n'est pas pris en compte, le modèle n'étant valide qu'à rapport de charge donné. Finalement, l'approche est purement uniaxiale, alors que la multiaxialité du chargement est un paramètre influent en fatigue.

II.4.3.1.4. Rôle de la multiaxialité, observations et modèle de Endo et Mc Evily (diagramme de Kitagawa en biaxial)

Le rôle de la multiaxialité du chargement a été discuté dans la littérature. Par exemple, les résultats expérimentaux de Endo et McEvily (Endo & McEvily, 2007) suggèrent que le régime de fissure courte est sensible à cet effet. Leurs résultats sont illustrés sur la **Figure 52** pour un acier S35C. On note que pour des longueurs de fissure suffisamment courtes, la limite d'endurance devient indépendante de leur longueur comme l'ont montrée Kitagawa et Takahashi (Kitagawa & Takahashi, 1976). On remarque aussi que plus la multiaxialité du chargement augmente et plus la limite d'endurance chute. Au-delà de la longueur de transition fissure longue – fissure courte, la limite d'endurance diminue comme l'inverse de la racine carrée de la longueur de fissure, ce qui montre que le seuil de non-propagation de fissure longue est le paramètre à considérer dans ce cas. De plus, l'effet de la multiaxialité du chargement diminue au fur et à mesure que la longueur de fissure augmente.

Précédemment, il a été vu que la prise en compte de l'effet de fissure courte, dans un modèle, permet de retrouver la limite d'endurance en traction (pour un rapport de charge donné) lorsque la dimension de la fissure tend vers zéro. Cependant, ceci n'est plus vrai lorsque l'état de contrainte est multiaxial. Par exemple, si on suppose que le plan contenant la fissure est orienté orthogonalement à la direction principale maximale du chargement et que celui-ci correspond à une sollicitation en torsion, alors la limite d'endurance prédite correspond exactement à celle d'un chargement en traction. Ce résultat n'est pas en accord avec les résultats expérimentaux, en général.

Afin de résoudre ce problème, Endo et McEvily ont proposé de modifier les concepts habituels de la mécanique de la rupture (McEvily et al., 1991; Endo & McEvily, 2006; Endo & McEvily, 2007; Endo & McEvily, 2011). Tout d'abord McEvily propose la loi de propagation suivante (McEvily et al., 1991), inspirée de celle de Paris :

$$\frac{da}{dN} = A \cdot (\Delta K_{eff} - \Delta K_{effth})^2 \quad (\text{II-105})$$

où a est la longueur de fissure, N représente le nombre de cycles, A est une constante qui dépend du matériau et de l'environnement dans lequel il se trouve, ΔK_{eff} est la variation par cycle du facteur d'intensité des contraintes effectif et ΔK_{effth} est le seuil de non-propagation associé à ΔK_{eff} . ΔK_{eff} est donné par $K_{max} - K_{op}$, avec K_{max} , le facteur d'intensité des contraintes maximal au cours du cycle et K_{op} est le facteur d'intensité des contraintes correspondant à l'ouverture de fissure (§1.2.5.6).

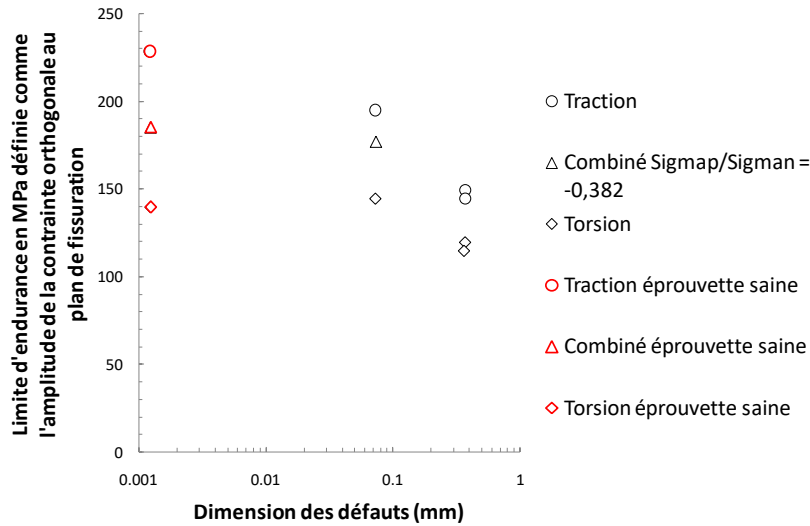


Figure 52 : Limite d'endurance en fonction de la dimension initiale du défaut pour un acier S35C (Endo & McEvily, 2007). Les points en rouge correspondent au cas des éprouvettes sans défaut.

Au lieu de rendre compte de l'effet de fissure courte à travers le seuil de non-propagation de fissure (El Haddad et al., 1980), l'approche proposée consiste à supposer que la pointe de fissure s'émousse et que c'est le rayon de courbure en pointe de fissure ($\rho_e = 8 \cdot r_e$) qui est à l'origine d'une modification de la valeur du facteur d'intensité des contraintes. De même, l'effet de la biaxialité du chargement et de la plasticité étendue en pointe de fissure est intégralement introduit dans l'expression du facteur d'intensité des contraintes à travers une fonction de correction F_{bi} dont l'expression est donnée ci-dessous :

$$F_{bi}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sec \left(\frac{\pi \cdot \sigma_{yy}}{2 \cdot \sigma_Y} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} + \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \right)^2} \right) \right) \quad (\text{II-106})$$

où σ_{yy} et σ_{xx} sont les demis-amplitudes du chargement imposé au loin de la fissure et σ_Y est la limite d'écoulement du matériau.

Ceci conduit à l'expression suivante de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes (valable pour $R = -1$ seulement) :

$$\Delta K_{I,bi} = \left[\left(1 - \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot F_{bi}} + Y \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot F_{bi}} \right] \cdot \Delta \sigma_{yy} \quad (\text{II-107})$$

avec Y un facteur de géométrie de la fissure valant 1 pour une fissure plane à front droit.

La procédure d'identification de la longueur de transition r_e est similaire à celle proposée par El Haddad (El Haddad et al., 1980). A la transition fissure longue / fissure courte, on suppose que $\Delta K_{I,bi}$ est égal au seuil ΔK_{effth} . On a également a égal à r_e et le chargement correspond à la limite d'endurance σ_f , ce qui donne :

$$r_e = \left(\frac{\Delta K_{effth}}{2 \cdot (\sqrt{2} + Y) \cdot \sigma_f} \right)^2 \cdot \frac{1}{\pi \cdot F_{bi}(0, \sigma_f)} \quad (\text{II-108})$$

Ensuite, les auteurs proposent une expression pour le facteur d'intensité des contraintes à l'ouverture de fissure :

$$\Delta K_{op} = K_{op} - K_{min} = (1 - e^{-k\lambda}) \cdot (K_{opmax} - K_{min}) \quad (\text{II-109})$$

où k est un paramètre matériau déterminant le taux de développement de l'effet de fermeture et K_{opmax} est le facteur d'intensité des contraintes à l'ouverture pour une fissure longue.

Cette expression suppose que le seuil d'ouverture est négligeable lorsque la fissure est courte. Ceci semble cohérent avec la physique du problème puisque la fissure ne peut se refermer en pointe que sur une certaine distance. Il faut donc qu'elle soit suffisamment longue pour que cet effet se produise.

Finalement le modèle s'écrit comme suit :

$$\frac{da}{dN} = A \cdot \langle M \rangle^2 \quad (\text{II-110})$$

$$M = \left[\left(1 - \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot F_{bi}} + Y \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot F_{bi}} \right] \cdot \Delta \sigma_{yy} - (1 - e^{-k\lambda}) \cdot (K_{opmax} - K_{min}) - \Delta K_{effth} \quad (\text{II-111})$$

Afin de mettre en évidence le potentiel d'une telle approche, ce modèle a été partiellement identifié à partir des données issues du programme RAMGT (RAMGT, 2004). Etant donné que les résultats expérimentaux de ce programme sont confidentiels, les valeurs des paramètres identifiées ne seront pas données. Pour déterminer r_e , il est nécessaire d'avoir à disposition la limite d'endurance pour un rapport de charge de -1, ainsi que les valeurs de la limite d'élasticité du matériau et de ΔK_{effth} . Ce dernier paramètre n'est pas directement accessible. En effet, seule la valeur du seuil de non-propagation de fissure longue, égale à $\Delta K_{effth} + K_{opmax}$, est connue. Tout comme pour l'acier S35C (Endo & McEvily, 2007), l'hypothèse que ΔK_{effth} vaut la moitié du seuil de non-propagation de fissure longue est faite. Le terme λ est supposé suffisamment important pour ne pas faire intervenir d'effet de fissure courte dans les analyses.

La **Figure 53** compare les vitesses de propagation mesurées expérimentalement avec les prédictions du modèle identifié. Une bonne concordance entre le modèle et les essais est observée même si les données expérimentales ne sont pas suffisamment riches.

Une fois le modèle identifié, il est possible de déterminer les limites d'endurance en traction et en torsion. Pour cela, il suffit de déterminer le chargement tel que le coefficient M de la loi de propagation soit égal à zéro. La **Figure 54** donne une représentation des diagrammes de Kitagawa et Takahashi (Kitagawa & Takahashi, 1976) pour les chargements en traction et en torsion. On note que le modèle prédit une forte sensibilité de la limite d'endurance dans le régime de fissure courte avec une disparition de celle-ci en régime de fissure longue en accord avec les tendances observées expérimentalement. On ne peut, néanmoins, pas comparer les prédictions avec des résultats expérimentaux puisqu'aucun essais en régime de fissure courte n'a été réalisé au cours du programme RAMGT. D'ailleurs, le cas de la torsion n'a pas été investigué au cours de ce programme.

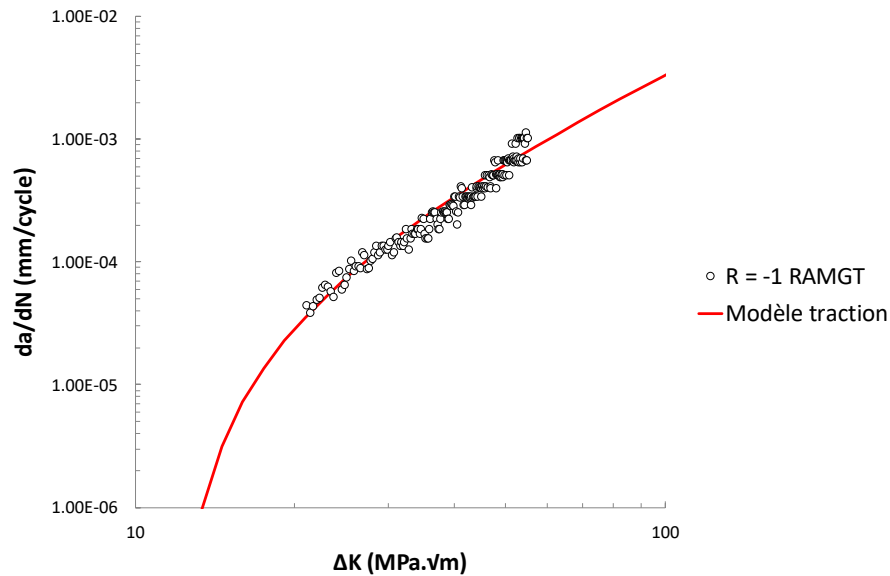


Figure 53 : Comparaison entre les tendances expérimentales obtenues au cours du programme RAMGT à rapport de charge égal à -1 sur le Ti-6AL-4V en propagation de fissure et le modèle de Endo et McEvily (Endo & McEvily, 2011).

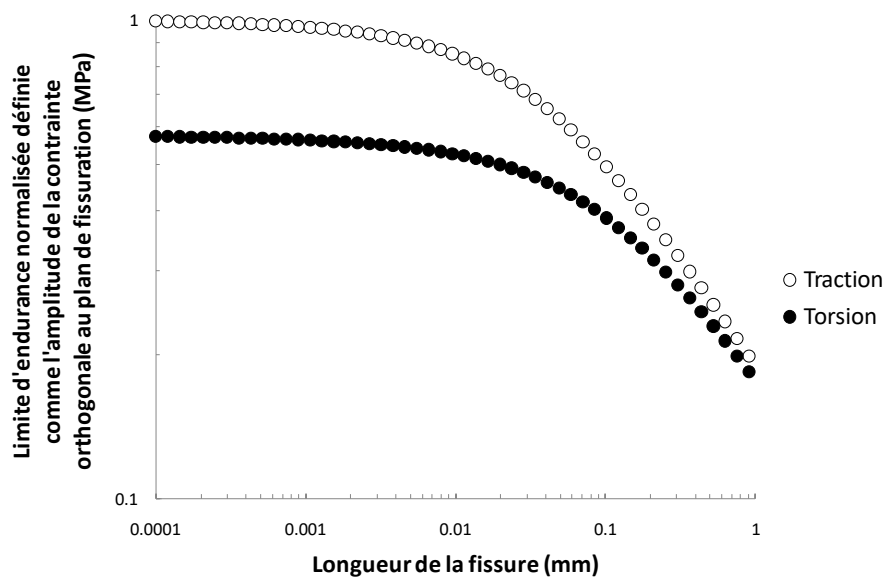


Figure 54 : Diagramme de Kitagawa normalisé engendré par le modèle d'Endo et Mc Evily à partir des données d'essais à disposition.

II.4.3.2. Effet de la forme des défauts

II.4.3.2.1. Modèle de Murakami

Le paramètre de Murakami permet de prédire la limite d'endurance en fonction de la dimension d'une anomalie. On peut néanmoins faire quelques remarques à ce sujet. Tout d'abord, lorsque la dimension de l'anomalie tend vers zéro, la limite d'endurance tend vers l'infini. On peut en déduire que

la validité de ce modèle ne concerne que les petites anomalies, mais d'une dimension suffisamment élevée. Ainsi, l'approche concerne les anomalies d'une taille intermédiaire au niveau de la transition fissure courte – fissure longue définie par le modèle de El Haddad (El Haddad et al., 1980). Ensuite, la **Figure 55** illustre deux exemples d'anomalies ayant le même paramètre \sqrt{area} . Une anomalie allongée, ayant la même aire projetée sur le plan orthogonal à la direction principale maximale du chargement qu'une fissure, a la même nocivité que celle-ci vis-à-vis de la fatigue selon cette approche. Ainsi, le modèle de Murakami ne prédit aucune sensibilité à l'effet de K_t . Cependant, ce n'était pas non plus son objectif premier.

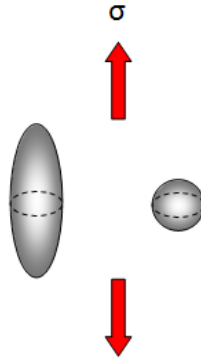


Figure 55 : Exemple de géométries d'anomalies à paramètres \sqrt{area} identiques.

II.4.3.2.2. Travaux de Billaudeau et Nadot

Dans la sous-section §I.2.5.4, une discussion autour des travaux réalisés par Billaudeau et al. (Billaudeau et al., 2004) sur l'influence des anomalies sur la limite d'endurance d'un acier C36 a été menée. La forme des anomalies a notamment été étudiée et le paramètre \sqrt{area} a été choisi comme dimension caractéristique de ces dernières. Une première conclusion de l'étude est que lorsque la dimension de l'anomalie est suffisamment faible, celle-ci n'influe pas sur la limite d'endurance. Ensuite, l'étude a montré que lorsque le K_t est suffisamment important, une anomalie se comporte comme une fissure vis-à-vis de la fatigue, justifiant l'approche de Murakami pour de telles conditions. En revanche, pour des anomalies de faibles K_t (inférieur à 2), la limite d'endurance devient supérieure à celle d'une fissure à paramètre \sqrt{area} identique, mettant ainsi en évidence le rôle du gradient de contrainte sur la fatigue.

Afin de modéliser ce comportement, Nadot et Billaudeau (Nadot & Billaudeau, 2006) ont proposé un critère de fatigue tenant compte du gradient de contrainte qui est fortement inspiré de celui de Papadopoulos (§I.2.5.3). La différence entre les deux approches provient de la définition du gradient de contrainte. Papadopoulos propose une approche plus locale, tandis que Nadot et Billaudeau considèrent que, dans le cas d'une application sur un matériau contenant des anomalies, il est préférable de considérer la définition simplifiée suivante du gradient de chargement :

$$G = \frac{I_{max}(A) - I_{max}(\sqrt{area})}{\sqrt{area}} \quad (\text{II-112})$$

où A est un point situé sur la frontière de l'anomalie (dans la zone la plus critique).

Ce choix a été dicté par le fait que le gradient local de la pression hydrostatique varie significativement spatialement avec la distance à l'anomalie. Selon les auteurs, ce critère fourni de bonnes prédictions en fatigue. Sur la base d'essais sur différents matériaux, l'erreur entre prédictions et résultats expérimentaux dépasse rarement les 15 %.

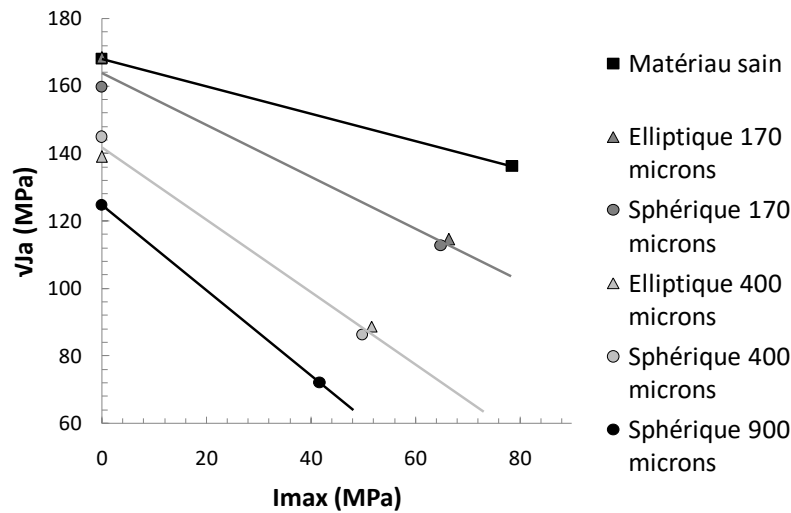


Figure 56 : Critère de Crossland identifié pour différentes dimensions et géométries de défauts dans le cas de l'acier C36 (Billaudeau et al., 2004).

Pour rappel la formulation complète s'écrit comme suit :

$$\sqrt{J_a} + \alpha \cdot I_{max} \left(1 - \alpha \cdot \left\langle \frac{G}{I_{max}} \right\rangle^n \right) \leq \beta \quad (\text{II-113})$$

avec,

$$\begin{cases} \left\langle \frac{G}{I_{max}} \right\rangle = \frac{G}{I_{max}}, \text{ si } \frac{G}{I_{max}} > 0 \\ \left\langle \frac{G}{I_{max}} \right\rangle = 0, \text{ si } \frac{G}{I_{max}} < 0 \text{ ou } I_{max} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-114})$$

II.4.1. Discussion

La mécanique de la rupture permet de rendre compte des effets de gradient beaucoup plus efficacement que les approches locales et non-locales. Les effets de biaxialité peuvent également être intégrés, mais de manière empirique seulement, et l'extension au multiaxial n'a pas été faite à notre connaissance. Certains effets d'échelle comme la dimension des anomalies peuvent être bien reproduits, mais, pour l'instant, par le biais d'approches empiriques.

L'objectif de ce travail de recherche est de tenter d'unifier la mécanique de la rupture des fissures longues avec celle des fissures courtes et de proposer une approche traitant la multiaxialité du chargement de manière plus physique. Pour cela, il est nécessaire de réaliser des essais de mesure de seuil de non-propagation de fissure longue afin d'identifier un modèle qui sera exposé au **chapitre IV**.

II.5. Synthèse

Il existe de nombreuses approches locales fondées sur la mécanique des milieux continus. Leur simplicité a été la clé de leur succès. Parmi elles, il existe des critères fondés sur les invariants des tenseurs mécaniques qui nécessitent des adaptations spécifiques pour la prise en compte des chargements non-proportionnels. On peut leur reprocher leur manque de physique. C'est pourquoi les approches par plan critique ont été développées. Néanmoins, pour certains matériaux, ces dernières ne peuvent pas reproduire les diagrammes de Haigh expérimentaux, ce qui a conduit certains auteurs à développer des approches énergétiques qui peuvent être mises en relation avec la thermodynamique des processus irréversibles. Enfin, les approches incrémentales permettent de prendre en compte des chargements non-cycliques.

Malgré leurs succès, ces approches ne permettent pas de reproduire les résultats expérimentaux faisant intervenir des effets d'échelle et de gradient. C'est pour ce type de situations, que les approches non-locales permettent des améliorations. Les méthodes faisant intervenir le concept de volume d'influence et / ou de volume effectif (comme les approches probabilistes) traduisent correctement les effets d'échelle, mais sont incapables de prédire les cas où il peut y avoir amorçage sans rupture. Celles faisant intervenir le concept de distance caractéristique sont trop simplistes et peuvent conduire à certaines incohérences théoriques. Néanmoins, elles peuvent être utilisées avec succès pour des intervalles de K_I bien spécifiques.

Enfin, les critères fondés sur la mécanique de la rupture sont plus adaptés pour décrire l'effet d'arrêt de fissure induit par un gradient de contrainte suffisamment important. Cependant, les effets de fissure courte et de biaxialité du chargement ont été introduits de manière empirique, ce qui limite l'utilisation de certaines approches aux cas pour lesquelles elles ont été développées.

Dans la suite, le travail de recherche se fera dans le cadre de la mécanique de la rupture. Une tentative d'unification des effets de fissures longue et courte et de multiaxialité du chargement sera réalisée. Dans le chapitre suivant, il sera question de réaliser des essais en vue d'identifier un modèle qui sera introduit au **chapitre IV**.

III/ Constitution d'une base de données expérimentale sur le seuil de non-propagation de fissure longue du Ti-6Al-4V

III.1. Analyse bibliographique

III.1.1. Introduction

Les compresseurs des turboréacteurs sont sollicités sur une large plage fréquentielle. Mais, les fréquences critiques correspondent à celles associées principalement au premier mode de flexion des aubes, situé au-delà de 500 Hz. Les modèles de propagation de fissure identifiés à partir de mesures de seuils de non-propagation de fissure en quasi-statique et appliqués dans la prédiction de la durée de vie d'une aube ne peuvent donc pas convenir si le comportement en fissuration varie selon la fréquence de sollicitation. On se propose alors de réaliser des mesures du seuil de non-propagation à hautes fréquences (au-delà de 500 Hz).

L'étude bibliographique réalisée au premier chapitre a montré que la propagation de fissure dans les alliages de titane peut être gouvernée par différents mécanismes. Dans cette sous-section, l'état de l'art sur le Ti-6Al-4V sera introduit. Ensuite, une discussion sur certains mécanismes qui pourraient impacter le comportement en fissuration de ce matériau à hautes fréquences et qui différencierait de celui obtenu en quasi-statique sera menée. L'analyse portera en particulier sur la thermo-élasticité et l'auto-échauffement induit par la plasticité cyclique localisée en pointe de fissure.

Une étude bibliographique sur les moyens actuels permettant de mesurer le seuil de non-propagation de fissure sera ensuite exposée. Une attention toute particulière a été portée sur l'interprétation des résultats et sur les précautions à prendre lors des essais afin que les mesures des avancées de fissure et des facteurs d'intensité des contraintes soient précises. Les machines d'essais utilisées en quasi-statique seront introduites et les difficultés associées aux essais à hautes fréquences le seront également. Quelques travaux comportant des essais de fatigue et de propagation de fissure à hautes fréquences seront également mentionnés.

C'est l'ensemble des analyses effectuées dans cette sous-section et des moyens à disposition qui justifient les choix qui ont été adoptés pour l'élaboration du montage expérimental permettant la mesure du seuil de non-propagation de fissure longue et des conditions expérimentales à investiguer.

III.1.2. Présentation du matériau d'étude

III.1.2.1. Propriétés matériau du Ti-6Al-4V étudié

L'alliage Ti-6Al-4V, communément appelé TA6V, a une composition nominale massique de 6 % d'aluminium, 4 % de Vanadium et 90 % de titane. D'autres éléments sont présents en tant qu'impuretés mais une certaine dispersion est tolérée par la norme. Les principaux éléments d'impuretés sont, soit des interstitiels comme l'oxygène, l'azote, l'hydrogène et le carbone, soit des éléments de substitution comme le fer et le silicium.

Tableau 5 : Composition nominale massique du Ti-6Al-4V

Eléments	Al	V	Fe	O	C	N	T
Fraction massique %	5,5 à 6,75	3,5 à 4,5	0,3 max	0,2 max	0,8 max	0,05 max	base

Le titane et ses alliages possèdent deux phases allotropiques : l'une stable à basse température, appelée phase α et de structure cristallographique hexagonale compacte, et l'autre stable à plus haute température, appelée phase β et de structure cristallographique cubique centrée. La température de transus (transition) entre les deux phases dépend fortement de la composition chimique de l'alliage. Elle est de 882°C pour le titane pur et de 995°C pour le Ti-6Al-4V.



Figure 57. Structure cristallographique du Ti-6Al-4V :
 (a) hexagonale compacte (phase α),
 (b) cubique centrée (phase β).

Pour avoir un matériau biphasé comme le Ti-6Al-4V, il est nécessaire d'ajouter des éléments bétagènes, comme le vanadium et certaines impuretés comme le silicium et le fer, pour stabiliser la phase β à basse température. L'aluminium et les interstitiels comme le carbone, l'oxygène et l'azote sont, quant à eux, alphagènes et stabilisent la phase α , ce qui a pour conséquence d'augmenter la température de transus entre les deux phases. Dans le cas du Ti-6Al-4V, la phase α est la phase prépondérante et ses paramètres de maille sont légèrement inférieurs à ceux du titane pur (**Tableau 6**). Le paramètre de maille de la phase β varie fortement selon la concentration en vanadium et se situe entre 0,321 et 0,325 nm.

Tableau 6 : Comparaison des paramètres de maille du Ti-6Al-4V et du titane.

	a (nm)	c (nm)	c/a
Titane - α	0,295	0,468	1,587
Ti-6Al-4V	0,292	0,467	1,597

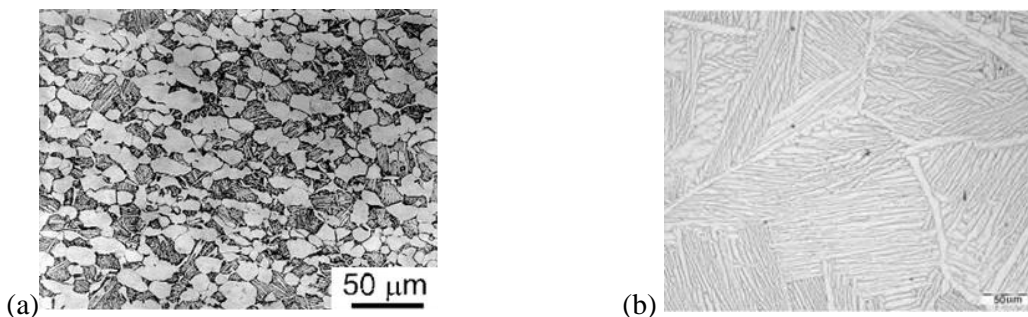


Figure 58. Structure cristallographique du Ti-6Al-4V :
 (a) structure bimodale dans un alliage de titane Ti-6Al-4V (Campbell & Ritchier, 2000),
 (b) structure lamellaire (Vanderesse, 2008).

Les alliages Ti-6Al-4V peuvent présenter trois types de microstructures selon les traitements thermiques réalisés lors de leur élaboration : entièrement lamellaire, entièrement nodulaire ou bimodale. Dans la suite, seule la structure bimodale sera considérée puisqu'elle correspond à notre matériau d'étude.

III.1.2.2. Analyse de résultats expérimentaux, issus de la littérature, sur la mesure du seuil de non-propagation de fissure longue du Ti-6Al-4V

Boyce et al. (Boyce & Ritchie, 2001) et Ritchie et al. (Ritchie et al., 1999) ont étudié des courbes de propagation de fissure dans un alliage de Ti-6Al-4V en vue de déterminer des seuils de non-propagation de fissure longue à différents rapports de charge (**Figure 59**). Boyce et al. (Boyce & Ritchie, 2001) ont attribué la décroissance du seuil de non-propagation de fissure aux effets de fermeture de fissure, jusqu'au rapport de charge de 0,5. Pour le montrer, ils ont tracé les courbes de propagation dans des diagrammes $da/dN - \Delta K$ et $da/dN - \Delta K_{eff}$, où ΔK_{eff} (**Figure 60**) correspond à la variation effective du facteur d'intensité des contraintes au cours du cycle de chargement, c'est-à-dire égale à $K_{max} - K_{ouv}$ avec K_{ouv} le niveau d'ouverture. Jusqu'au rapport de charge de 0,3 les courbes se superposent dans le diagramme $da/dN - \Delta K_{eff}$, mais pas dans celui en $da/dN - \Delta K$, ce qui montre bien l'importance des effets de fermeture. Mais, au-delà, il n'y a plus superposition des courbes ce qui met en évidence qu'un autre mécanisme est nécessaire pour expliquer la décroissance du seuil de non-propagation de fissure avec le rapport de charge.

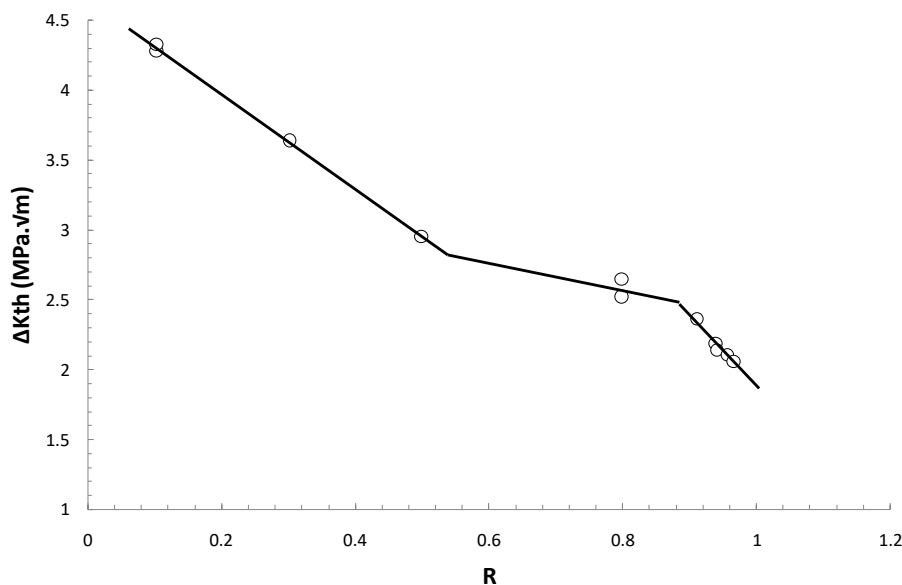


Figure 59 : Evolution du seuil de non-propagation avec le rapport de charge dans le cas du Ti-6Al-4V (Boyce & Ritchie, 2001).

Les auteurs de l'étude montrent également que pour des rapports de charge supérieurs à 0,5, les effets de fermeture ne sont plus observables avec leur procédure expérimentale. En effet, leurs essais permettent de mettre en évidence uniquement les effets de fermeture qui se caractérisent à l'échelle globale de la fissure. La décroissance du seuil avec le rapport de charge, pour des rapports de charge suffisamment élevés, est donc indépendante des effets de fermeture globaux de la fissure. La transition entre les mécanismes se voit plus explicitement dans un diagramme dans lequel le seuil de non-propagation de fissure longue est tracé en fonction de la valeur maximale du facteur d'intensité des contraintes au cours d'un cycle de fatigue (**Figure 61**).

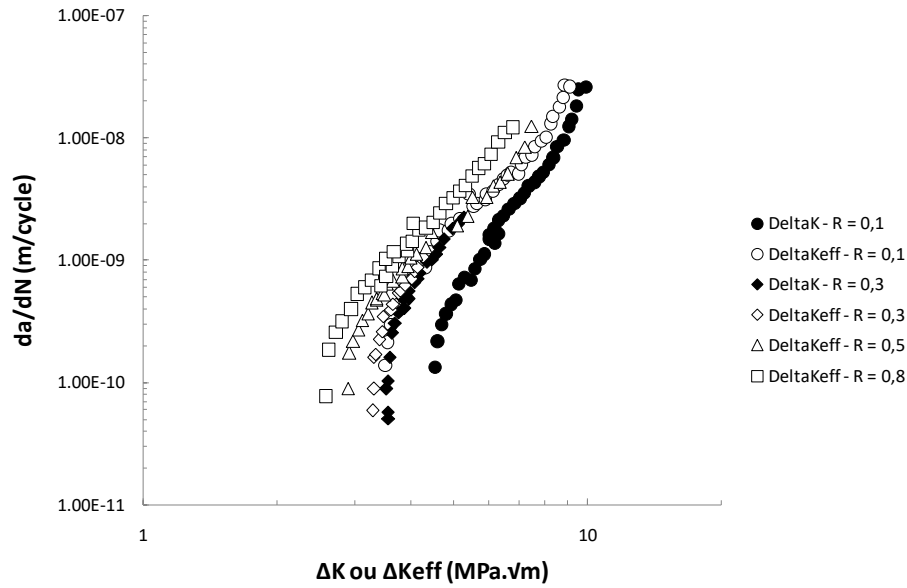


Figure 60 : Courbes de propagation du Ti-6Al-4V (Boyce & Ritchie, 2001).

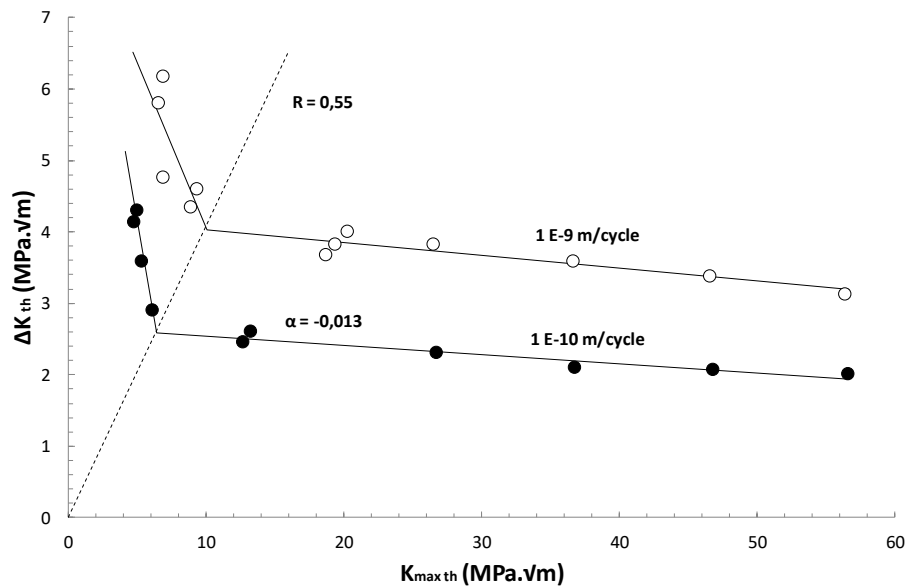


Figure 61 : Evolution du seuil de non-propagation en fonction du facteur d'intensité des contraintes maximum et du critère de détection du seuil fondé sur la vitesse d'avancée de fissure (Boyce & Ritchie, 2001).

Boyce et al. (Boyce & Ritchie, 2001) ont entrepris une étude dont le but a été de comprendre le mécanisme responsable de cet effet. Ils ont proposé tout d'abord deux possibilités : l'effet « anormal » évoqué au **chapitre I** (§I.2.7) ou effet « Marci » et le mécanisme SLC (Sustained Load Cracking). L'effet « Marci » est caractérisé par la disparition du seuil de non-propagation lorsque ce mécanisme est activé au-delà d'un certain seuil de chargement au cours d'un essai à K_{max} constant. Cependant, les essais réalisés sur le Ti-6Al-4V n'ont pas permis de mettre en évidence l'activation de ce mécanisme. En revanche, les essais à chargement monotone ont montré une propagation stable de la fissure sur une courte distance (**Figure 62**).

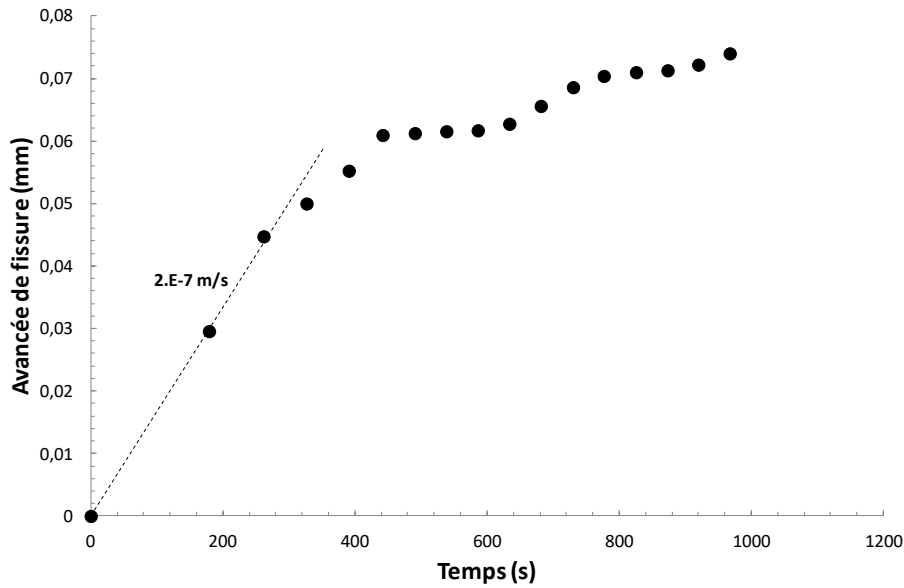


Figure 62 : Evolution de l'avancée de fissure du Ti-6Al-4V en fonction du temps pour un chargement constant correspondant à un facteur d'intensité des contraintes de $36,5 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ (Boyce & Ritchie, 2001).

La réactivation de cet effet se fait par cyclage ce qui met en évidence une certaine sensibilité du matériau au mécanisme SLC. En pratique, un moyen simple de modéliser cet effet sur la loi de propagation est de supposer la superposition des mécanismes. Ainsi, pour un chargement cyclique, l'avancée de fissure au cours d'un cycle est la somme de deux contributions : une de fatigue et une autre de propagation continue :

$$\frac{da}{dN} = \left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{Fatigue}} + \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{SLC}} \quad (\text{III-1})$$

avec f la fréquence de sollicitation.

Or, la combinaison d'une propagation stable par SLC et d'un chargement cyclique devrait montrer une sensibilité à la fréquence de sollicitation, ce qui ne semble pas être le cas de ce Ti-6Al-4V au vu des données d'essais recueillies (notons que les essais réalisés couvrent la plage fréquentielle [50 Hz – 1000 Hz]). Les résultats expérimentaux obtenus par Bathias (Bathias et al., 1997) sur le Ti-6Al-4V à des fréquences de 20kHz confirment ce point de vu.

Une des conclusions des auteurs est que le mécanisme SLC n'est pas le mécanisme prépondérant en fatigue. Ainsi, il ne serait pas responsable de la chute du seuil de non-propagation de fissure longue avec le rapport de charge, pour des rapports de charge supérieurs à 0,5. Les auteurs, poursuivent en analysant les différents mécanismes pouvant expliquer ces résultats : corrosion sous contrainte, fluage en pointe de fissure, effet de fermeture à l'échelle microscopique (par opposition à l'effet de fermeture mesuré expérimentalement sur le comportement mécanique d'une fissure dans sa globalité), fissuration par nucléation – croissance – coalescence de microcavités en pointe de fissure, mécanisme de dépendance en K_{max} du seuil de non-propagation de fissure (mécanisme encore à découvrir ou à réfuter). En se fondant sur des résultats bibliographiques et sur l'observation des facies de rupture de leurs éprouvettes, les auteurs n'ont pas réussi à déterminer le mécanisme responsable de la chute du seuil de non-propagation de fissure avec le rapport de charge pour des rapports de charge élevés. Ils concluent que le comportement en fissuration du Ti-6Al-4V n'est pas suffisamment bien compris et que des études complémentaires sont nécessaires.

Comme cela a déjà été évoqué dans la section §I.2.7, ces résultats ne s'appliquent que pour une microstructure particulière de Ti-6Al-4V ayant subi un traitement thermo-mécanique bien particulier au cours de son élaboration. Il n'est pas du tout garanti que pour un autre Ti-6Al-4V ces conclusions soient applicables. Par exemple, Ding (Ding et al., 2009) a montré une dépendance de la courbe de propagation d'un Ti-6Al-4V à l'environnement (les fréquences de sollicitation étant cependant inférieures à celles de l'étude présentée). De plus, rien ne dit qu'un seul mécanisme est responsable de ces résultats.

Bien que plusieurs études sur le comportement en fissuration du Ti-6Al-4V aient été réalisées à travers le monde, on peut se demander comment de telles différences sur les conclusions des auteurs sont possibles. Certes, les alliages de Ti-6Al-4V n'ont pas la même microstructure d'une étude à une autre, mais les tendances expérimentales devraient normalement rester les mêmes. Ce qui est frappant est que Boyce et al. (Boyce & Ritchie, 2001) affirment que le contenu en hydrogène de cet alliage a peu d'influence sur le seuil de non-propagation de fissure alors que l'étude de Ding (Ding et al., 2009) montre clairement une influence de l'environnement sur les courbes de propagation. On sait depuis longtemps que certains matériaux contenant du titane exhibent une sensibilité à l'hydrogène (§I.2.7). Alors pourquoi le Ti-6Al-4V serait-il différent ? Il serait intéressant de connaître en détail les conditions expérimentales dans lesquels les essais ont été réalisés, notamment les pressions partielles en oxygène (20 kPa ?) et en hydrogène. En effet, si le contenu en hydrogène du matériau est fortement réduit et que les essais sont réalisés en environnement ambiant, on pourrait se demander si l'hydrogène présent dans l'air n'aurait pas un impact sur son comportement en fissuration. Malheureusement, les conditions expérimentales adoptées pour les essais de fissurations ne sont pas clairement explicitées dans l'article de Boyce et al. et il est donc, par conséquent, difficile de conclure sur la présence ou non de l'influence de l'hydrogène sur le comportement en fissuration de leur Ti-6Al-4V.

Un dernier point concerne la conclusion de Boyce et al. quant à l'absence de l'effet de fréquence sur les courbes de fissuration. Les auteurs supposent que si le mécanisme SLC était responsable de la chute du seuil de non-propagation de fissure longue avec le rapport de charge, pour des rapports de charge supérieurs à 0,5, une dépendance à la fréquence devrait être obtenue sur la vitesse de propagation de fissure. Implicitement, leur hypothèse va plus loin. En effet, la **Figure 62** donne également une tendance sur la vitesse de propagation au début de la propagation par SLC. Ceci suppose que l'avancée de fissure par SLC est une fonction dérivable du temps. Or, les mesures ayant conduit à cette hypothèse n'ont été faites qu'à des instants bien précis. Le premier point de mesure après l'application du chargement a été pris au bout de deux cents secondes après le début de l'essai, ce qui correspond à une avancée de fissure mesurée de 30 μm . La **Figure 58** montre une image de la microstructure du matériau utilisée dans l'étude et révèle que les échelles caractéristiques des hétérogénéités sont du même ordre de grandeur que la grandeur mesurée précédemment. On peut donc se demander si l'hypothèse consistant à représenter une avancée de fissure continue avec les points de mesure précédents est pertinente. En effet, on pourrait très bien imaginer une propagation qui serait discrète et stochastique (de manière à rendre compte de l'hétérogénéité de la microstructure) et qui produirait des résultats similaires à ceux obtenus pour des essais à K_{max} constant. Il est à noter que, d'un point de vue expérimental, on ne mesure que des incréments d'avancée de fissure et du nombre de cycles. Ainsi, les vitesses de propagation expérimentales ne sont, au final, que des grandeurs moyennées. Il serait intéressant de voir ce que prédirait une telle loi en tenant compte des procédures de post-traitement des résultats d'essais pour engendrer des courbes de propagation de fissure par fatigue. Dans la mesure où la procédure employée est absente de l'article de Boyce et al., il serait difficile de faire une telle analyse et de comparer avec leurs résultats expérimentaux.

Pour conclure, cette analyse bibliographique conduit à beaucoup d'interrogations sur les mécanismes intervenant en propagation de fissure dans le Ti-6Al-4V. On ignore si d'un Ti-6Al-4V à un autre ces mécanismes sont les mêmes ou pas. C'est la raison pour laquelle il n'y aura aucun a priori dans ce travail de recherche. L'objectif sera de caractériser au mieux le seuil de non-propagation de fissure du Ti-6Al-4V d'étude en fonction des moyens à disposition.

III.1.2.3. Hypothèses sur l'évolution du comportement du seuil de non-propagation de fissure du Ti-6Al-4V avec la fréquence de sollicitation

III.1.2.3.1. Introduction

L'analyse bibliographique précédente a montré que le comportement du seuil de non-propagation de fissure du Ti-6Al-4V est encore mal compris. Néanmoins, il est possible de faire quelques hypothèses au vu des informations à disposition. Dans la sous-section §I.2.7, la dépendance des alliages de titane aux effets de l'environnement ont été exposés. Dans §III.1.2.1, il a été vu que, selon le traitement thermique appliqué, la microstructure du Ti-6Al-4V peut prendre différentes formes. L'influence de celle-ci sur la sensibilité à l'environnement est un point qui ne semble pas avoir été étudié à notre connaissance. Néanmoins, même si la microstructure du Ti-6Al-4V peut varier, on peut supposer que les effets de l'environnement deviennent rapidement négligeables lorsque la fréquence de sollicitation augmente.

Cependant, comme l'ont remarquée Tsutsumi et al (Tsutsumi et al., 2009), la dépendance à la fréquence est potentiellement le résultat de l'association d'une dépendance à la vitesse de déformation et d'une autre à la température. Or, il est possible de limiter l'élévation de la température avec la fréquence, par le biais d'un chargement intermittent, par exemple. Il en résulte que ces deux dépendances peuvent être étudiées indépendamment l'une de l'autre.

Il est à noter que la conductivité thermique à température ambiante du Ti-6Al-4V ($6,7 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) est faible en comparaison de celles d'autres métaux (aux alentours de $50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pour un acier standard et supérieure à $200 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pour l'aluminium pure). Cela signifie que l'apport, à intervalle de temps régulier, d'une énergie thermique dans un volume donné constitué de ce matériau risque de ne pas pouvoir être totalement évacué si la fréquence d'apport dépasse un certain seuil, mais, au contraire, de s'accumuler conduisant potentiellement à des niveaux de température plus élevés. On pourrait donc s'attendre à des effets thermiques qui augmentent avec la fréquence.

III.1.2.3.1. Effet de l'auto-échauffement

Ranc et al. (Ranc et al., 2008; Ranc et al., 2011; Ranc et al., 2013; Ranc et al., 2014) ont proposé un mécanisme pouvant engendrer une dépendance du seuil de non-propagation de fissure à la fréquence de sollicitation. Celui-ci se fonde sur le fait que pour un chargement cyclique, une zone plastique se crée en pointe de fissure dans laquelle une grande partie de l'énergie de déformation plastique cyclique est convertie en énergie thermique. L'intensité de cette énergie augmente avec la fréquence et conduit à une élévation du champ de température en pointe de fissure. Par dilatation thermique, un champ de contrainte est alors créé et conduit à un facteur d'intensité des contraintes qui se superpose à celui engendré par le chargement mécanique. Si les propriétés mécaniques du matériau ne varient pas avec la température, alors il devrait en être de même pour le seuil de non-propagation de fissure. Ainsi, au seuil de non-propagation de fissure, la contribution du chargement purement mécanique pourrait varier avec la fréquence. Or, comme il est d'usage de négliger la contribution thermique dans les analyses, le seuil de non-propagation de fissure apparent semble différent de celui obtenu lorsque les effets thermiques sont réellement négligeables.

Afin de mieux saisir le fonctionnement de ce mécanisme, analysons plus finement la description qui en est faite par Ranc et al. La puissance dissipée par unité de longueur de front de fissure est supposée dépendre linéairement de la surface de la zone plastique cyclique et de la fréquence (cette hypothèse permet une résolution analytique du problème) :

$$q = f \cdot \eta \cdot r_p^2 \quad (\text{III-2})$$

où f , η et r_p sont, respectivement, la fréquence, un coefficient de proportionnalité et le rayon de la zone plastique cyclique donné par (en déformation plane) :

$$r_p = \frac{\Delta K_I^2}{24 \cdot \pi \cdot \sigma_y^2} \quad (\text{III-3})$$

Le coefficient de proportionnalité est à relier aux propriétés du matériau. Il peut être identifié à partir de simulations éléments finis élasto-plastiques sur un milieu fissuré (Ranc et al., 2008) et/ou de résultats d'essais avec mesure du champ de température. Finalement, la puissance dissipée dépend du facteur d'intensité des contraintes de la manière qui suit :

$$q = q_0 \cdot f \cdot \Delta K_I^4 \quad (\text{III-4})$$

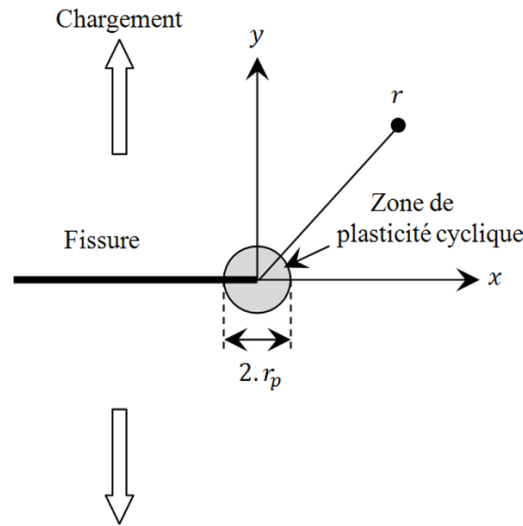


Figure 63 : Schématisation du problème thermomécanique d'une fissure semi-infinie plongée dans un milieu infini (Ranc et al., 2011).

Il est alors possible de résoudre le problème thermique analytiquement dans l'hypothèse d'une fissure plane à front droit plongée dans un milieu infini (Ranc et al., 2011). L'utilisation d'une fonction de poids appliquée sur la contrainte circumférentielle induite par le gradient thermique conduit à la détermination analytique du facteur d'intensité des contraintes d'origine thermique $K_{I \text{ temp}}(t)$. Or, cette solution ne semble pas conduire à un équilibre car elle ne tient pas compte des échanges thermiques entre le milieu et l'environnement extérieur et cela est lié à l'hypothèse de milieu infini employée dès le départ. Néanmoins, cette solution évolue de moins en moins rapidement avec le temps de telle sorte qu'il existe un instant au-delà duquel cette contribution peut être supposée constante au cours d'un cycle de chargement mécanique. Concernant le cas d'un milieu fini contenant une fissure centrale, il peut être résolu par le biais de simulations éléments finis (Ranc et al., 2014).

Dans tous les cas, comme le chargement mécanique est, quant à lui variable, cette contribution vient modifier le rapport de charge en pointe de fissure (en supposant $K_{I \text{ temp}}$ constant au cours d'un cycle) :

$$R = \frac{K_{\min} + K_{I \text{ temp}}}{K_{\max} + K_{I \text{ temp}}} < \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \quad (\text{III-5})$$

En considérant, un seuil décroissant avec le rapport de charge, on en déduit une augmentation du seuil de non-propagation de fissure apparent avec la fréquence de sollicitation, car $K_{I \text{ temp}}$ est négatif. Cet effet devient d'autant plus efficace que la fréquence augmente. Pour que cet effet soit mis en évidence, il est nécessaire que les propriétés du Ti-6Al-4V soient indépendantes de la température dans la gamme de température considérée.

III.1.2.3.2. Effet de la thermo-élasticité

Un dernier mécanisme pouvant rendre compte de l'effet de la fréquence sur la mesure du seuil de non-propagation de fissure apparent est celui induit par la thermo-élasticité. Si ce phénomène intervient effectivement (en négligeant l'effet d'écrit précédemment), l'équation de la chaleur est modifiée de la manière suivante (λ , ρ et C_ε sont, respectivement, la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur spécifique à déformation constante) :

$$\lambda \cdot \Delta T = \rho \cdot C_\varepsilon \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \cdot T_0 \cdot \frac{E}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \text{Tr}(\underline{\dot{\varepsilon}}) \quad (\text{III-6})$$

L'hypothèse d'un comportement thermo-élastique isotrope conduit à la relation suivante entre déformation, contrainte et champ de température :

$$\text{Tr}(\underline{\dot{\varepsilon}}) = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot \text{Tr}(\underline{\dot{\sigma}}) - 3 \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III-7})$$

Le champ de contrainte intervenant dans cette dernière équation est celui issu de la mécanique de la rupture. Seul le premier terme du développement asymptotique du tenseur des contraintes est utilisé car les autres sont supposés négligeables :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{xx}(\theta) \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{yy}(\theta) \\ \sigma_{zz}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{zz}(\theta) \end{cases} \quad (\text{III-8})$$

L'équation de la chaleur devient :

$$\lambda \cdot \Delta T = \rho \cdot C_\varepsilon \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\frac{dK_I}{dt} \cdot \frac{\alpha \cdot T_0}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot (f_{xx}(\theta) + f_{yy}(\theta) + f_{zz}(\theta))}_{\text{Premier terme source}} - \underbrace{3 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{E}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot T_0 \cdot \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Deuxième terme source}} \quad (\text{III-9})$$

En englobant le deuxième terme source avec le terme calorifique, cette équation devient (avec C_σ la chaleur spécifique à contrainte constante et $D_{\text{th apparent}}$ le coefficient de diffusion thermique) :

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda \cdot \Delta T &= \rho \cdot C_\sigma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\frac{dK_I}{dt} \cdot \frac{\alpha \cdot T_0}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot (f_{xx}(\theta) + f_{yy}(\theta) + f_{zz}(\theta))}_{\text{Terme source}} \\ C_\sigma &= C_\varepsilon - \frac{3 \cdot \alpha^2}{\rho} \cdot \frac{E}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot T_0 \\ D_{\text{th apparent}} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot C_\sigma} \end{aligned} \right. \quad (\text{III-10})$$

Cette équation nécessite une résolution numérique, ce qui ne sera pas fait ici. En revanche, on peut se rendre compte de certaines similitudes avec le cas de l'auto-échauffement. En effet, on note un terme source dans cette équation qui induit un facteur d'intensité des contraintes supplémentaire qui se superpose à celui purement mécanique. En revanche, les similitudes s'arrêtent là, puisque ce terme varie avec le temps. De plus, dans le cas de l'auto-échauffement, la dépendance au facteur d'intensité des contraintes se fait par l'intermédiaire du ΔK qui intervient en puissance quatrième, alors qu'ici c'est la dérivée temporelle du facteur d'intensité des contraintes qui intervient et de manière linéaire. On peut ajouter le fait que le terme source n'est pas localisé spatialement comme précédemment, mais beaucoup

plus étendu au vu de la portée du terme en $r^{-\frac{1}{2}}$. Il engendre un champ de température complexe sur les plans spatial et temporel simultanément.

Cette équation de la chaleur n'est valide que pour un milieu infini. Le facteur d'intensité des contraintes d'origine thermique qui en résulte n'a pas de régime stationnaire contrairement au cas de l'auto-échauffement dans un milieu fini à cause de la dépendance temporelle du premier terme source. Dans le cas d'une éprouvette de faible épaisseur, il faudrait ajouter à cette équation un terme convectif qui doit en principe jouer un rôle important.

Enfin, pour compléter cette analyse, comparons la valeur de la pression hydrostatique à celle de la contrainte de Tresca sur le ligament ($y=0$) :

$$\frac{3 \cdot P_H}{\sigma_{Tresca}} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} = 6,5 \text{ pour } \nu = 0,3 \quad (\text{III-11})$$

Ce rapport vaut un en traction uniaxial, ce qui signifie que le premier terme source intervenant dans l'équation de la chaleur est particulièrement efficace en fissuration. Le fait que le gradient de contrainte en pointe de fissure soit important signifie que le laplacien de la température est une composante importante du problème, engendrant des irréversibilités potentiellement élevées. Ainsi le champ de température varie de manière importante à la fois spatialement et temporellement. On peut imaginer que le caractère diffusif (et donc irréversible) de ce phénomène sera limité pour des fréquences de sollicitations supérieures à une fréquence seuil. En effet, si le chargement évolue suffisamment rapidement, la diffusion thermique n'aura pas le temps de se faire. Malheureusement, la fréquence seuil ne semble pas accessible à moins de résoudre numériquement le problème.

Pour conclure sur la thermo-élasticité, il est possible d'atteindre un abaissement de la température suffisant tel que par effet de contraction un champ de contrainte de traction apparaisse au voisinage de la pointe de fissure. Il s'agit donc d'un mécanisme conduisant à un effet contraire à celui de l'auto-échauffement. De plus, pour des sollicitations suffisamment rapides, il n'y a pas de dépendance à la fréquence ce qui constitue une deuxième différence fondamentale. Enfin, l'effet de la thermoélasticité joue sur l'amplitude effective du chargement en facteur d'intensité des contraintes et non sur le rapport de charge, au vu de la forme du terme source, ce qui constitue une nouvelle fois une différence avec l'auto-échauffement.

III.1.2.3.3. Discussion

Finalement, cette analyse a conduit à mettre en évidence deux mécanismes possibles qui permettraient d'expliquer des effets de fréquence sur les mesures de seuils de non-propagation de fissure. Ces mécanismes font tous les deux intervenir le champ de température. Comme le Ti-6Al-4V présente une faible diffusivité thermique, il est possible que l'intensité du champ thermique en pointe de fissure puisse atteindre des niveaux élevés qui permettraient d'exhiber un comportement du seuil compatible avec l'un ou avec une combinaison des deux effets présentés précédemment. Cette analyse justifie donc la nécessité de réaliser des essais de propagation de fissure à hautes fréquences afin de valider ou non la présence de ces effets.

III.1.3. Démarches pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure

III.1.3.1. Différentes méthodes pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure

La mesure du seuil de non-propagation de fissure a fait l'objet de nombreuses études et nécessite un asservissement du chargement appliqué à l'éprouvette testée adapté. Soit l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes est progressivement augmentée par paliers jusqu'à la détection d'une avancée de fissure significative, soit, à l'inverse, il est progressivement réduit jusqu'à ne plus détecter de propagation. Quelques-unes des solutions envisagées dans la littérature sont illustrées sur la figure qui suit et seront commentées par la suite.

Matsuoka et al. (Matsuoka et al., 1990) ont montré qu'une solution pour la détermination du seuil de non-propagation de fissure consiste à imposer un chargement maximum constant et à augmenter progressivement le chargement minimum avec l'avancée de fissure. Cela permet d'aboutir à des mesures de seuils de non-propagation de fissure en minimisant les effets de fermeture (**cas 1**). Cette technique permet d'accéder à un seuil intrinsèque de non-propagation de fissure.

Hermann et al. (Herman et al., 1988) ont proposé une démarche consistant à imposer un facteur d'intensité des contraintes maximal constant. L'augmentation du rapport de charge avec l'avancée de fissure conduit à la diminution progressive des effets de fermeture (**cas 2**). Cette méthode permet aussi d'accéder à un seuil intrinsèque, tout comme avec la précédente. Néanmoins, elles ne permettent pas d'accéder à des seuils de non-propagation de fissure à des rapports de charge faibles. De plus, si le facteur d'intensité des contraintes initial dépasse un certain seuil pour les alliages de titane, l'activation de l'effet Marci (§1.2.7) conduit à la non-détection du seuil de non-propagation de fissure, ce qui constitue une limitation importante de ces méthodes. En revanche, la solution consistant à imposer le rapport de charge peut s'avérer plus intéressante si l'on souhaite étudier l'influence de ce paramètre sur le seuil de non-propagation de fissure longue par fatigue.

Les mesures des vitesses de propagation de fissure pour des essais consistant à augmenter progressivement l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes, à rapport de charge fixé, (**cas 3**) nécessitent également quelques précautions. Tout d'abord, après amorçage et propagation suffisante de la fissure, et pour éviter tout effet résiduel de l'initiation de la fissure par fatigue, la charge est progressivement réduite par paliers suffisamment importants, afin que la vitesse de propagation atteigne une valeur suffisamment faible et indépendante de l'histoire du chargement ($da/dN < 10^{-7}$ mm/cycle). A partir de là, l'amplitude de chargement est maintenue constante, ce qui conduit à une croissance progressive du facteur d'intensité des contraintes quand la longueur de la fissure augmente. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'éviter les effets de ralentissement de la fissure par effet de surcharge. L'inconvénient est qu'il est nécessaire de procéder à un grand nombre d'expériences préliminaires afin de localiser approximativement le seuil de non-propagation avant de réaliser les essais finaux.

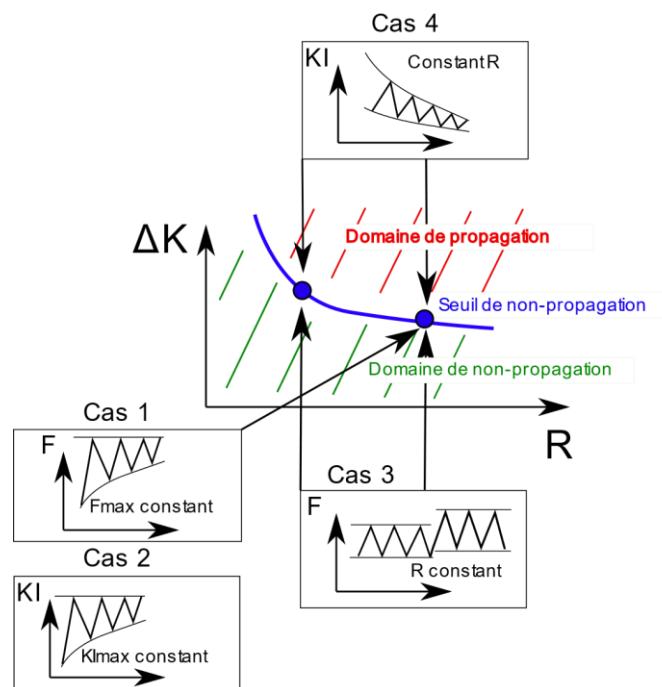


Figure 64 : Illustration de quelques techniques permettant la recherche du seuil de non-propagation de fissure par fatigue.

Suresh (Suresh, 1991) propose une méthode plus simple consistant à introduire une préfissure de fatigue auto-stoppante dans une éprouvette à trou central via un préchargement cyclique de compression. La procédure est la suivante. Le premier cycle de compression conduit à l'apparition d'une zone plastique dans laquelle se forme des contraintes résiduelles de traction. Sous l'effet du cyclage en compression macroscopique, cette zone est sollicitée localement en traction. Une fissure s'amorce et se propage à partir du trou. La fissure s'arrête naturellement lorsqu'elle sort de la zone plastique au voisinage de l'entaille et sans présenter de zone plastique importante en pointe. Après cette préfissuration, la mesure du seuil est effectuée à ΔK croissant. L'éprouvette est soumise à un chargement cyclique en traction commençant à un niveau inférieur de celui du seuil. Si aucune propagation de fissure n'est détectée, la valeur de la charge est alors augmentée d'une faible valeur. La procédure est répétée jusqu'à l'obtention du seuil de non-propagation de fissure par fatigue. L'essai peut ensuite être poursuivi avec une charge constante. L'intérêt de cette méthode est qu'on peut ainsi déterminer des seuils de non-propagation pour des fissures très petites, de l'ordre de grandeur de la dimension du trou qui a été percé.

Le dernier cas (**cas 4**) correspond aux techniques permettant de mesurer le seuil de non-propagation de fissure par fatigue par réduction progressive de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes en fixant le rapport de charge. Toutes les solutions associées au **cas 4**, nécessitent quelques précautions. En effet, si le taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure est trop élevé, la fissure risque de se propager dans un milieu écroui engendré par les cycles antérieurs. La norme ASTM E647 (ASTM E647, 2015) préconise que le taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure a doit être défini par la relation suivante :

$$\frac{1}{K_I} \cdot \frac{dK_I}{da} = C = -0,08 \text{ mm}^{-1} \quad (\text{III-12})$$

L'intégration de cette expression conduit à une décroissance exponentielle de K_I avec la dimension de la fissure :

$$K_I = K_{I \text{ initial}} \cdot e^{C \cdot (a - a_{\text{initial}})} \quad (\text{III-13})$$

Le et Kanninen (Le & Kanninen, 2004) ont comparé des courbes de fissuration obtenues avec la méthode de Suresh avec celles obtenues par décroissance du chargement à R constant. Ils ont constaté que celles-ci ne se superposent pas tout à fait (**Figure 65**). Ils ont attribué ces différences au fait que le chargement en pointe de fissure est la somme de deux contributions : une contribution macroscopique liée au chargement imposé sur l'éprouvette et une contribution des contraintes résiduelles au voisinage de la pointe de fissure qui dépend de l'histoire du chargement. La méthode de Suresh engendre des contraintes résiduelles de traction sur les lèvres de la fissure (liées à la zone plastifiée en compression) tandis que pour celle de la norme ASTM E647 conduit à des contraintes de compression. Ces différences sont attribuées à des effets de fermeture différents. Afin de les minimiser, une solution consiste à augmenter le rapport de charge pour la solution préconisée par la solution ASTM.

Cette analyse montre que les conditions expérimentales peuvent impacter significativement la mesure du seuil de non-propagation de fissure par fatigue. Ces effets parasites doivent donc être minimisés au maximum.

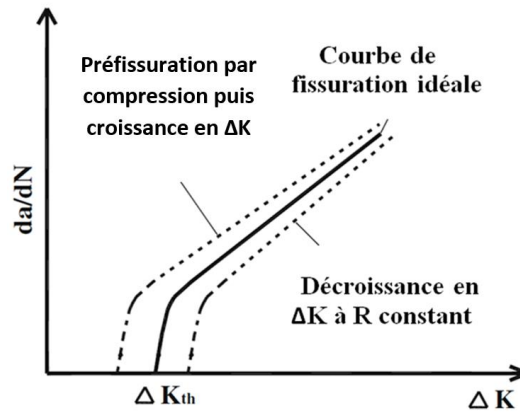


Figure 65 : Schématisation de courbes expérimentales de propagation obtenues par deux techniques différentes (Le & Kanninen, 2004).

III.1.3.2. Méthodes de caractérisation employées usuellement en quasi-statique

Afin de pouvoir déterminer le facteur d'intensité des contraintes au cours du chargement et donc le seuil de non-propagation de fissure, il est nécessaire de connaître l'évolution de la longueur de fissure au cours du temps. Trois méthodes sont généralement employées en pratique : répliques, complaisance et méthode du potentiel.

La méthode des répliques est une méthode manuelle qui consiste à faire une réplique de la fissure par dissolution de la surface d'une feuille de polyacétate de cellulose par de l'acétone, que l'on vient appliquer sur les lèvres de la fissure à mesurer. La longueur de fissure est alors mesurée sur la réplique à l'aide d'un microscope optique à des grossissements de 200 à 500. La précision de cette méthode dépend du grossissement choisi et est, au mieux, de l'ordre du micromètre avec un microscope optique. Mais une métallisation de la surface de la réplique permet une observation au microscope électronique à balayage. Le dépôt de carbone permet des observations avec un microscope électronique à transmission. Cette méthode des répliques avec mesure optique est simple à mettre en œuvre et extrêmement précise, mais nécessite des temps d'arrêt pour poser les répliques et ne mesure que la longueur des fissures en surface.

Avec la méthode de la complaisance, la longueur de la fissure est calculée à partir de la pente de la courbe force appliquée - ouverture des lèvres de la fissure. Dans le cas d'éprouvettes CT (Compact Tension), l'extensomètre est disposé soit à l'extrémité de l'éprouvette, soit sur la ligne de chargement (**Figure 66**) selon les recommandations de la norme ASTM E647 (ASTM E647, 2015).

L'ouverture de la fissure (v) permet de calculer la longueur de la fissure, à l'aide des formules indiquées dans la norme (avec F est la charge appliquée, B l'épaisseur de l'éprouvette, W la largeur utile, a la longueur de la fissure et α le ratio a/W). En plasticité, la complaisance est la pente de la courbe $v = f(F)$ lorsque F tend vers F_{max} . On peut pourtant utiliser les formules de la norme en remplaçant v/F par cette pente avec quelques réserves. En effet, l'inconvénient de cette méthode est qu'elle perd de son exactitude pour un matériau ductile. Selon Irwin, la complaisance d'une éprouvette contenant une fissure de longueur a , dans un matériau ductile, est égale à celle calculée en élasticité pour une fissure de longueur $a+r_y$ où r_y est la taille de la zone plastique de la fissure :

$$r_y = \frac{1}{6 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I^2}{\sigma_y^2} \right) \quad (\text{III-14})$$

avec σ_y la limite d'élasticité du matériau.

Ainsi, l'erreur commise dépend de K_{max} , en l'occurrence, elle devrait être plus élevée au début de l'essai et plus faible vers la fin, pour un essai à ΔK décroissant, pour lequel, la dimension de la zone plastique diminue lorsque la longueur de fissure augmente.

D'autre part, les calculs analytiques donnant la relation entre la complaisance et la longueur de fissure ont été réalisés dans le cadre de l'élasticité linéaire pour des conditions de contraintes planes ou de déformations planes. Or, lorsque l'éprouvette est mince, sans pourtant être une tôle, on peut se trouver entre ces deux conditions.

Une autre source d'erreur possible, est due au fait que le module d'élasticité, qui intervient dans le calcul de la longueur de fissure par la méthode de la complaisance, peut évoluer lors du cyclage de fatigue. Pour les aciers doux, par exemple, il est observé une chute de module de l'ordre de 15 % après un cyclage en fatigue dans le domaine d'élasticité. De plus, le facteur d'intensité des contraintes doit être déterminé au cours d'essais à l'aide d'une courbe maîtresse (**Figure 66**). La boucle d'asservissement nécessaire pour la mise à jour du facteur d'intensité des contraintes associé aux problèmes précédent peut conduire à des erreurs supplémentaires.

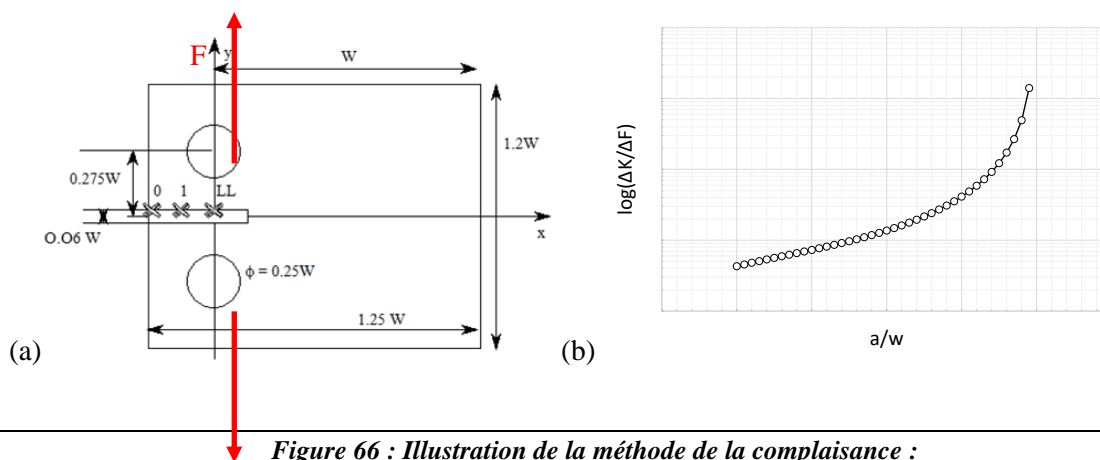


Figure 66 : Illustration de la méthode de la complaisance :
(a) géométrie de l'éprouvette,
(b) Schématisation de la relation facteur d'intensité des contraintes normalisé par le chargement – rapport entre la longueur de fissure et la largeur de l'éprouvette.

Enfin, la technique du potentiel consiste à faire circuler dans une éprouvette conductrice isolée, un courant électrique d'amplitude constante. On mesure la tension qui en résulte entre deux prises de potentiel placées de part et d'autre de la fissure à observer. L'évolution de la longueur de cette fissure entraîne une variation de la tension mesurée. Moyennant un étalonnage préalable, le suivi en continu de la longueur de la fissure est ensuite possible. Cette méthode n'est pas affectée, a priori, par la taille de la zone plastique et par les évolutions de comportement du matériau.

La précision de la méthode dépend des caractéristiques électriques du matériau qui peuvent éventuellement évoluer (par exemple du fait de variation de température, ou de transformation de phase), du positionnement des électrodes et de la tension appliquée, qui doit rester constante au cours d'un essai.

III.1.3.3. Difficultés spécifiques liées aux hautes fréquences

Les essais de fatigue ou de comportement sont souvent réalisés avec des machines hydrauliques. Lorsque les sollicitations à imposer sur une éprouvette sont de type quasi-statique, ce matériel peut se révéler d'une grande précision. Néanmoins, des difficultés apparaissent dès lors que les sollicitations ne sont plus quasi-statiques. En effet, plus la fréquence de sollicitation est élevée, pour un niveau de chargement donné, et plus le débit hydraulique dans les vérins doit être important. Or, le débit est souvent limité. Si le vérin se déplace suffisamment rapidement, les joints d'étanchéité ne peuvent plus assurer leur fonction ce qui conduit à une dégradation de la sollicitation imposée sur l'éprouvette.

Une autre limitation des machines hydrauliques est liée à la commande. Le chargement imposé sur l'éprouvette se fait via un asservissement. Lorsque le signal mesuré dévie légèrement par rapport à la consigne, une correction sur le signal d'entrée est alors ajoutée. Si les déviations deviennent trop importantes (c'est le cas lorsque la vitesse de déplacement des vérins dépasse un certain seuil), les corrections conduisent à des contributions fréquentielles supplémentaires et non-négligeables sur la consigne, ce qui peut se révéler problématique.

Certaines machines servo-hydrauliques « récentes » permettent d'atteindre des fréquences de sollicitation au voisinage du kiloHertz, mais nécessitent un investissement financier non-négligeable et présentent des limitations non-négligeables de l'amplitude de déplacement des vérins à hautes fréquences. Mentionnons également qu'il existe des machines électromagnétiques à résonance de type vibrophore, mais limitées à la centaine de Hertz. Enfin, les dispositifs électrodynamiques permettent d'atteindre des fréquences plus élevées. Cependant, les niveaux de chargements sont plus faibles et de l'ordre du kN.

III.1.3.4. *Bibliographie sur les éprouvettes à gradient : une alternative à l'asservissement électromécanique en facteur d'intensité des contraintes*

L'une des limitations à la mesure du seuil de non-propagation de fissure en dynamique concerne le moyen de pilotage de l'essai en facteur d'intensité des contraintes. Un moyen de résoudre le problème serait de dimensionner une éprouvette telle que sa géométrie imposerait d'elle-même, pour un chargement en contrainte donné, un taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure compatible avec ce qui est préconisé dans la norme ASTM E647 (ASTM E647, 2015).

Dans cette sous-section, deux exemples de géométries d'éprouvette largement citées dans la littérature qui permettent, dans leur cadre d'application, d'imposer une certaine forme de pilotage sont présentés.

L'essai brésilien (Carneiro, 1943) consiste à rompre des éprouvettes cylindriques en appliquant des efforts suivant deux génératrices opposées (**Figure 67**). Il est certainement le plus utilisé pour les roches à cause de sa grande simplicité et de la faible dispersion des résultats obtenus. Une particularité du champ de contrainte engendré au sein de l'éprouvette est que celui-ci est hétérogène, contrairement à celui qui intervient dans les essais de compression classiques (simple ou triaxial). La rupture doit s'amorcer au centre de l'éprouvette, être franche et se produire rigoureusement suivant le plan diamétral de l'éprouvette. C'est l'effet de structure qui explique pourquoi l'effort de compression imposé à l'éprouvette conduit à un champ de contrainte de traction au centre de celle-ci.

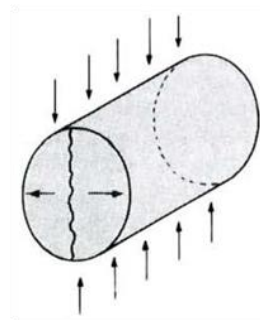


Figure 67 : Principe de l'essai brésilien.

Afin de limiter d'avantage les effets d'échelle et d'imposer un état de contrainte uniaxiale dans la zone d'intérêt, la géométrie de l'éprouvette de l'essai brésilien a été modifiée. On parle alors d'un essai de traction par compression annulaire. L'éprouvette cylindrique est remplacée par un tube cylindrique sans modifier les conditions de chargement extérieures (**Figure 68**). La présence d'un trou cylindrique au centre de l'éprouvette induit une concentration de contrainte dont la portée est directement liée au rayon de celui-ci. Ainsi, plus le rayon du trou est faible, plus le volume de matière surcontraint est faible, limitant les effets d'échelle parasites par la même occasion. Les valeurs maximales du champ de contrainte en traction sont atteintes sur le bord du trou intérieur, aux intersections avec le plan de symétrie de l'éprouvette parallèle à l'axe de chargement. L'amorçage de la fissure qui conduit à la ruine de l'éprouvette se fait donc dans cette région. La bibliographie proposée dans sa thèse, par Ammeri (Ammeri, 2009), donne quelques solutions analytiques donnant le champ de contrainte associé à cet essai. Malheureusement, cette géométrie d'éprouvette (ainsi que la précédente) ne permet pas d'avoir accès au contrôle du taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes, puisque suite à l'amorçage, la propagation se fait de manière instable. En effet, à l'amorçage, le facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure est supérieur à la ténacité K_{IC} du matériau et le chargement imposé à l'éprouvette est tel que celui-ci augmente avec la dimension de la fissure.

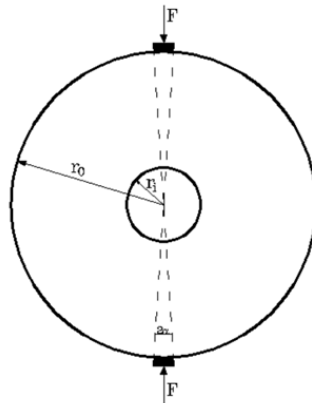


Figure 68 : Principe de l'essai de compression annulaire.

Afin de pouvoir contrôler l'instabilité en propagation de fissure, Janssen a proposé une géométrie d'éprouvette (Janssen, 1974) qu'il a appliquée au cas du verre. Celle-ci est de forme rectangulaire, à section rectangulaire et contient un trou circulaire en son centre.

Lorsque cette éprouvette contient une fissure qui débouche sur le trou circulaire, l'application d'un chargement de compression dans la direction parallèle au plan de fissuration conduit à l'ouverture de celle-ci. Si la contrainte appliquée induit un facteur d'intensité des contraintes supérieur à la ténacité du matériau, la fissure se propage alors brutalement. Par effet structure, le facteur d'intensité des contraintes diminue avec l'avancée de fissure même si le chargement reste constant. La propagation s'arrête lorsque le facteur d'intensité des contraintes atteint K_{IC} . Connaissant l'évolution du facteur d'intensité des contraintes normalisé par le chargement (Fett et al., 2009), la dimension de la fissure à la fin de l'essai ainsi que le chargement appliqué sur l'éprouvette, il est possible de remonter jusqu'à la ténacité du matériau. Généralement, l'essai est réalisé avec deux fissures débouchant sur le trou circulaire. Dans la littérature, cette éprouvette est également désignée par le terme DCDC (Double Cleavage Drilled Compression) et on parle aussi d'essai anti-brésilien.

D'autres matériaux ont été testés avec succès avec ce type d'éprouvette comme les polymères (Idonije et al., 1993; Plaisted et al., 2006) et les interfaces de bi-matériaux (Turner et al., 1995). Pour ce dernier type de matériau, la géométrie de l'éprouvette a été adaptée car le trou circulaire a été remplacé par un trou carré. Une revue des différentes adaptations de l'éprouvette Janssen est faite dans l'article

d'Ayatollahi et al. (Ayatollahi & Bagherifard, 2009). Enfin, le trajet de fissuration sur ce type d'éprouvette est très stable (Fett et al., 2005) ce qui permet de réaliser des mesures de la ténacité avec une bonne précision.

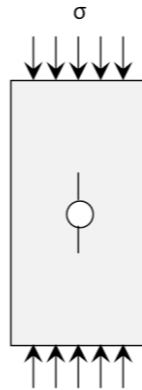


Figure 69: Eprouvette contenant deux fissures de part et d'autre du trou circulaire et soumise à un chargement de compression.

L'analyse bibliographique a permis de montrer que l'éprouvette de Janssen conduit à la réduction du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure. Cette propriété est intéressante puisqu'on souhaite contrôler le taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes par la géométrie de l'éprouvette et non avec le chargement extérieur. Cependant, aucune application de l'éprouvette de Janssen n'a été réalisée pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure par fatigue. Une optimisation de la géométrie de celle-ci a été réalisée pour pouvoir l'utiliser dans cette étude.

III.1.3.5. Bibliographie sur les dispositifs d'essais de fatigue et de fissuration en dynamique

La réalisation d'essais de fatigue à hautes fréquences pose de nombreux problèmes techniques. Néanmoins, certaines solutions ont été étudiées et discutées dans la littérature. Une approche originale a été mise en œuvre par Bathias notamment (Bathias & Paris, 2004; Blanche, 2012). Elle consiste à utiliser comme moyen d'excitation un système piézoélectrique. Ce dispositif, permettant de solliciter des éprouvettes de fatigue jusqu'à 20 kHz, est constitué des éléments suivants (*Figure 70*) :

- **d'un convertisseur piézoélectrique** qui transforme un signal électrique en un déplacement (amplitude de l'ordre du μm) alimenté par un générateur de puissance de 2 kW,
- **d'une sonotrode** ayant pour rôle d'amplifier le déplacement obtenu au niveau du convertisseur piézoélectrique,
- **d'une éprouvette**. La liaison entre l'éprouvette et la sonotrode est assurée par une vis, l'éprouvette étant libre à l'autre extrémité.

L'objectif premier des utilisateurs de ce montage a été de réaliser des essais de fatigue à hautes fréquences afin de déterminer le comportement à l'endurance en régime VHCF d'un matériau pour les très grands nombres de cycles en un temps raisonnable. Pour cela, la géométrie de l'éprouvette a été dimensionnée de manière à ce qu'elle entre en résonance lors de l'essai. Une des limitations de ce montage est que seul un rapport de charge de -1 peut être testé puisque l'une des extrémités de l'éprouvette est laissée libre. Une autre limitation est que l'amplitude du déplacement imposé par le piézoélectrique est faible en comparaison avec ce qui est possible avec les machines de traction conventionnelles.

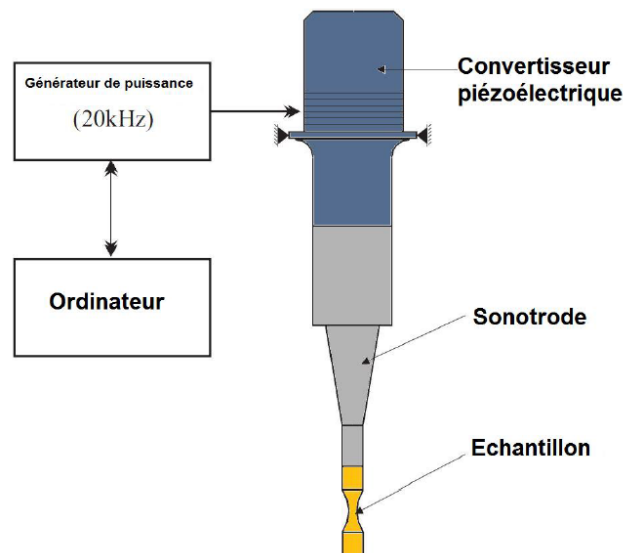


Figure 70: Schéma de principe d'un dispositif expérimental piézoélectrique utilisé dans la réalisation d'essais de fatigue VHCF (Very High Cycle Fatigue) (Blanche, 2012).

Afin de pouvoir étudier l'influence du rapport de charge sur le comportement en fatigue d'éprouvettes aux très hautes fréquences, Bathias et al. (Bathias et al., 1997) ont mis au point un montage associant une machine de traction conventionnelle à un dispositif piézoélectrique (*Figure 71*). Ce type de dispositif n'est pas récent, puisque dès les années 70, des essais de fatigue à très hautes fréquences avaient déjà été mis en œuvre (Kromp et al., 1973; Hansson & Thölen, 1978; Stanzl et al., 1989). Les essais réalisés ont permis aux auteurs de tracer des courbes de propagation de fissure pour des sollicitations à hautes fréquences. Les fréquences atteintes avec ce type de dispositif se situent aux alentours de 20 kHz, même si dans la littérature, il est possible de voir des études pour lesquelles les fréquences d'étude ont atteint les 30 kHz. Mais, même avec ces améliorations, les sollicitations restent dans le domaine des faibles amplitudes de sollicitation.

Plus récemment, des essais de fatigue à fréquences intermédiaires (100 Hz environ) ont été réalisés dont le but a été de mesurer le taux de restitution d'énergie d'une plaque sandwich en composite fissurée (Maillet et al., 2013). L'ouverture de la fissure est modélisée par une raideur K_E qui se superpose à celle d'un ressort K_R monté en parallèle (*Figure 72*). La mise en compression de ce ressort permet de fixer l'ouverture initiale de l'éprouvette et ainsi de définir le niveau moyen de la sollicitation. Pendant l'essai, un pot vibrant électrodynamique produit une accélération qui provoque la mise en mouvement de la masse et donc la sollicitation de l'éprouvette autour de sa position d'équilibre. La fréquence d'excitation est choisie égale à la fréquence de résonance du système afin de bénéficier du facteur d'amplification modale.

Enfin, au cours du programme RamGT un dispositif expérimental permettant la réalisation d'essais de fatigue à hautes fréquences a été mis au point (§1.1.3). Il utilisait également comme moyen de sollicitation vibratoire un pot vibrant électrodynamique (RAMGT, 2004).

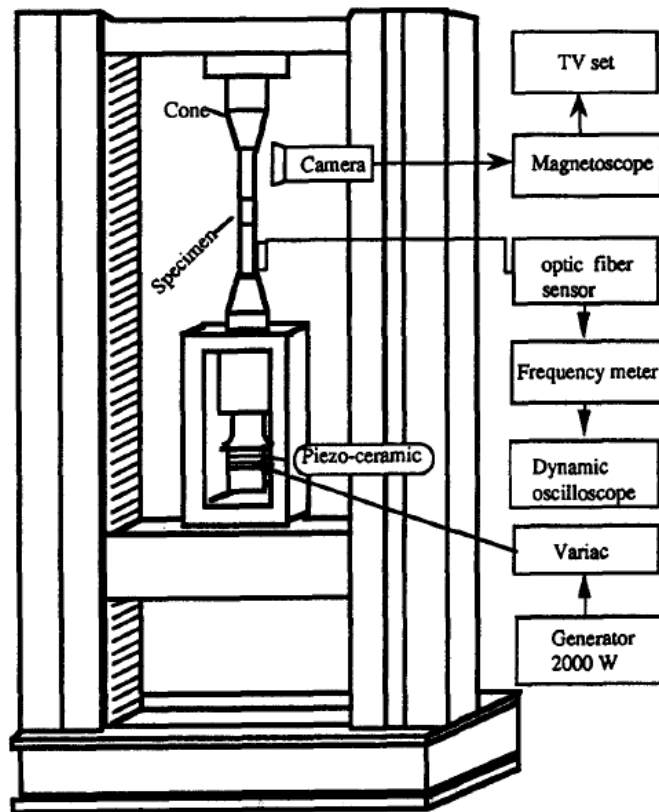


Figure 71: Schéma de principe d'un dispositif expérimental pour la réalisation d'essais de propagation de fissure par fatigue (Bathias et al., 1997).

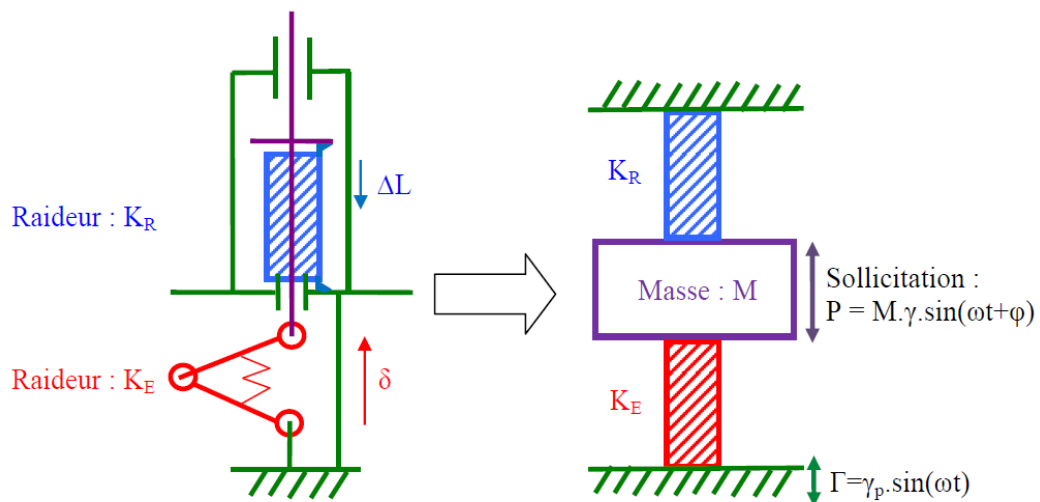


Figure 72: Schéma cinématique du montage permettant la détermination du seuil de non-propagation en délaminage d'une plaque sandwich en composite (Maillet et al., 2013).

III.2. Dispositif expérimental

III.2.1. Dimensionnement de l'éprouvette

Cette sous-section est consacrée au dimensionnement d'une éprouvette permettant la mesure du seuil de non-propagation de fissure par fatigue. Celle-ci est fortement inspirée de l'éprouvette de Janssen. Dans la suite, le trou circulaire est remplacé par un trou elliptique dont les dimensions permettent d'atteindre cet objectif. La **Figure 73** donne le plan de la géométrie de l'éprouvette retenue.

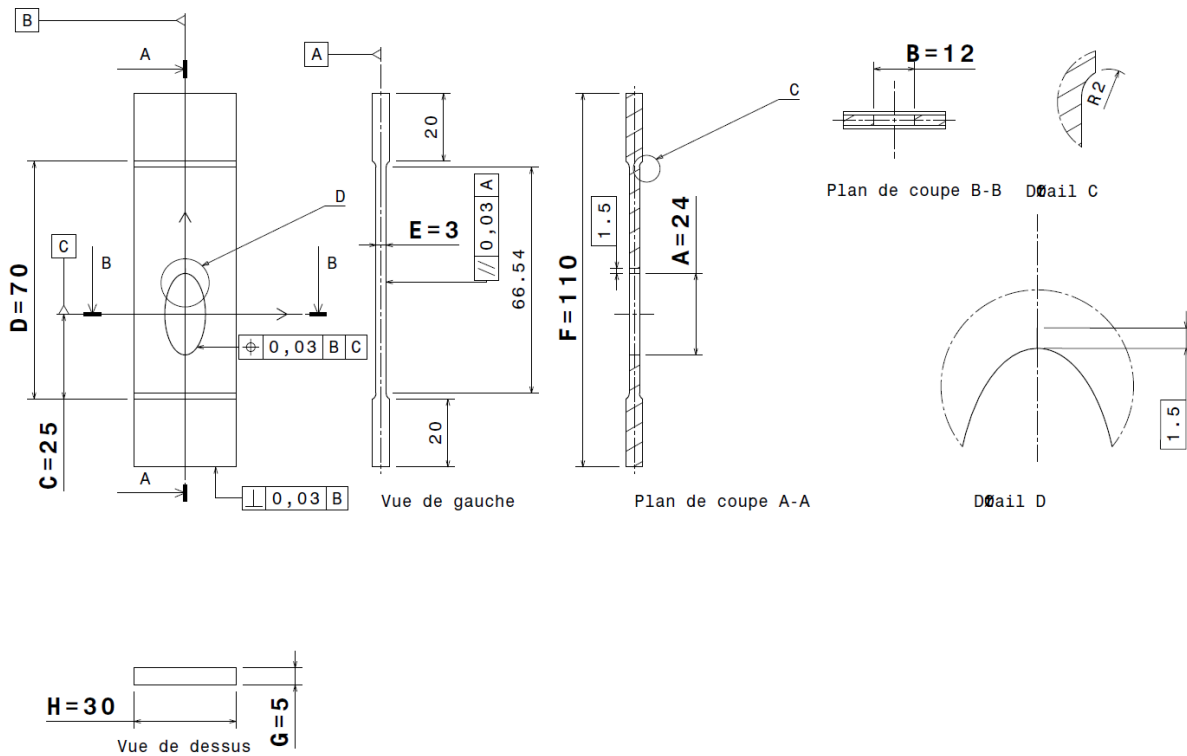


Figure 73 : Plan de l'éprouvette optimisée. Une entaille de 1,5 mm, réalisée par électroérosion, est présente sur la partie supérieure du trou elliptique. Elle facilite l'amorçage d'une fissure par fatigue qui peut ensuite se propager. L'intervalle de tolérance général sur les cotes est de $\pm 100 \mu\text{m}$.

Huit paramètres géométriques ont été déterminés :

- Paramètre **A** : demi grand-axe du trou elliptique (déterminé par la procédure d'optimisation),
- Paramètre **B** : demi petit-axe du trou elliptique (déterminé par la procédure d'optimisation),
- Paramètre **C** : position du centre du trou elliptique (déterminé par la procédure d'optimisation),
- Paramètre **D** : longueur de la section réduite de l'éprouvette (déterminé par la procédure d'optimisation),
- Paramètre **E** : épaisseur de la section réduite de l'éprouvette (déterminé par la procédure d'optimisation),
- Paramètre **F** : longueur totale de l'éprouvette (paramètre contraint),
- Paramètre **G** : épaisseur de l'éprouvette (paramètre contraint),
- Paramètre **H** : largeur de l'éprouvette (paramètre contraint).

Les trois derniers paramètres ont été contraints par le volume de matière disponible (prélèvement des éprouvettes dans des barres en Ti-6Al-4V). La procédure d'optimisation a consisté en la réalisation de deux étapes successives et le tout de manière itérative :

La première étape de la procédure concerne la détermination des trois premiers paramètres géométriques (**A**, **B** et **C**) en supposant les autres fixés. La résolution de ce problème a consisté à comparer le taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes avec ce qui est préconisé par la norme ASTM (ASTM E647, 2015) pour différents jeux de paramètres géométriques. Le meilleur jeu de paramètre est ensuite retenu comme donnée d'entrée pour la deuxième étape.

La **Figure 74** montre que pour la géométrie de l'éprouvette retenue, le taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure est compatible avec la norme jusqu'à une longueur de fissure de 15 mm. Au-delà, ce taux devient plus important que celui de la norme, entraînant des effets d'histoire importants qui dégradent la précision de la mesure du seuil de non-propagation de fissure par fatigue.

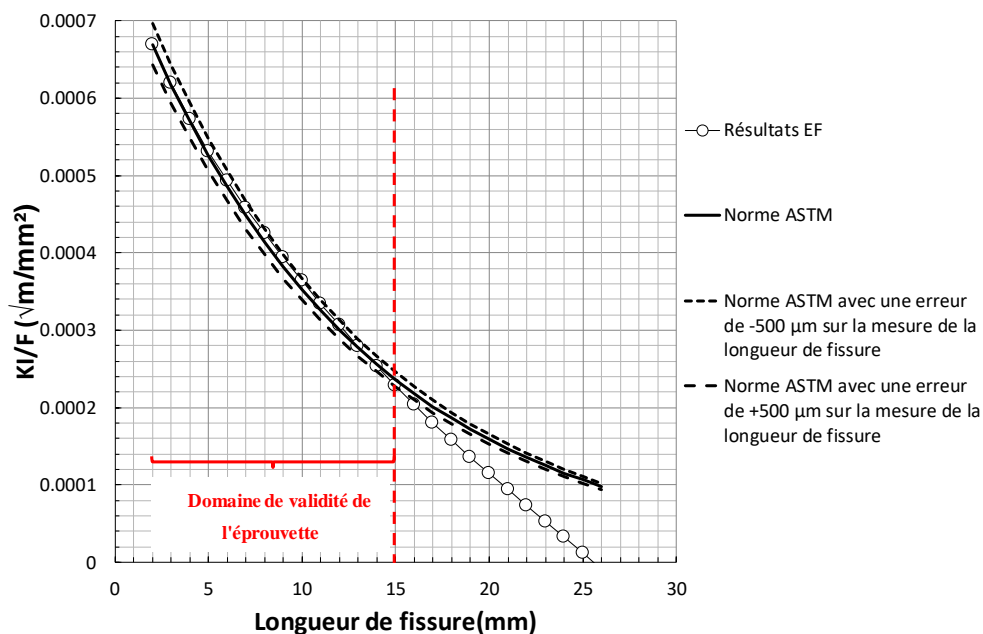


Figure 74: Evolution du facteur d'intensité des contraintes normalisé par l'effort de compression imposé sur le talon de l'éprouvette obtenu à l'aide des intégrales d'interaction et comparaison avec la norme ASTM. Cette courbe est celle obtenue avec la géométrie de l'éprouvette retenue.

L'avantage d'un taux de décroissance exponentiel du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure est que si une erreur sur la mesure de la longueur de fissure est commise, l'erreur sur le facteur d'intensité des contraintes correspondant est limitée. En effet, une erreur de 500 μm sur la mesure de la longueur de fissure n'entraîne qu'une erreur de 4% sur la détermination du facteur d'intensité des contraintes, et ce, quelle que soit la longueur de fissure.

Afin d'obtenir ces résultats, les calculs par éléments finis ont nécessité des maillages relativement fins. Environ 100000 éléments hexaédriques ont été nécessaires pour chaque simulation (**Figure 75**) afin d'obtenir la convergence des résultats. Les calculs ont été réalisés en élasticité linéaire homogène et isotrope avec un module d'Young de 119000 MPa et un coefficient de Poisson de 0,29 correspondant aux propriétés élastiques du Ti-6Al-4V (Le Biavant-Guerrier, 2000). Dans les simulations, la fissure est supposée plane à front droit. Les calculs réalisés sont de type quasi-statique.

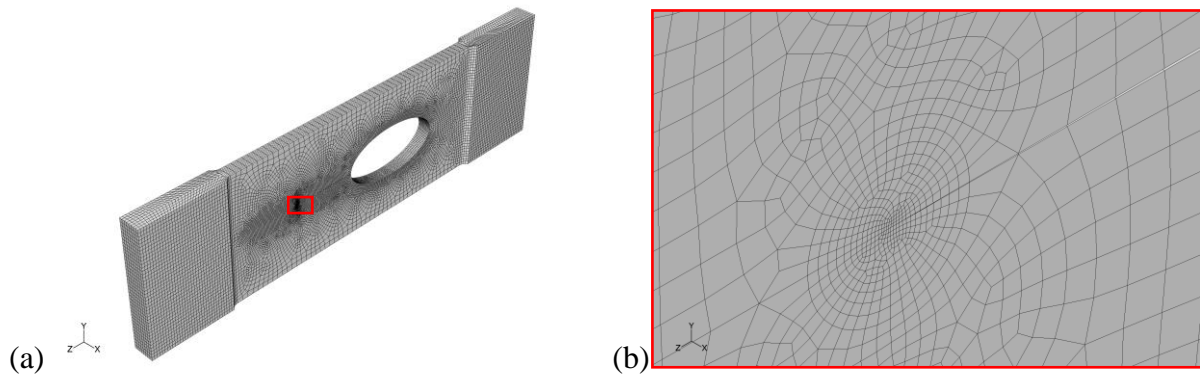


Figure 75: Exemple de maillage éléments finis utilisé pour modéliser l'éprouvette.

*(a) Maillage globale,
(b) Zoom sur la pointe de fissure.*

Pour étudier la sensibilité aux conditions aux limites, quatre types de sollicitation ont été examinés (*Figure 76*). Dans tous les cas, aucune déviation significative par rapport à la courbe de la *Figure 74* (**cas (a)** de la *Figure 76*) n'a été constatée. Cela suggère une bonne capacité de l'éprouvette à permettre une détermination robuste du seuil de non-propagation de fissure.

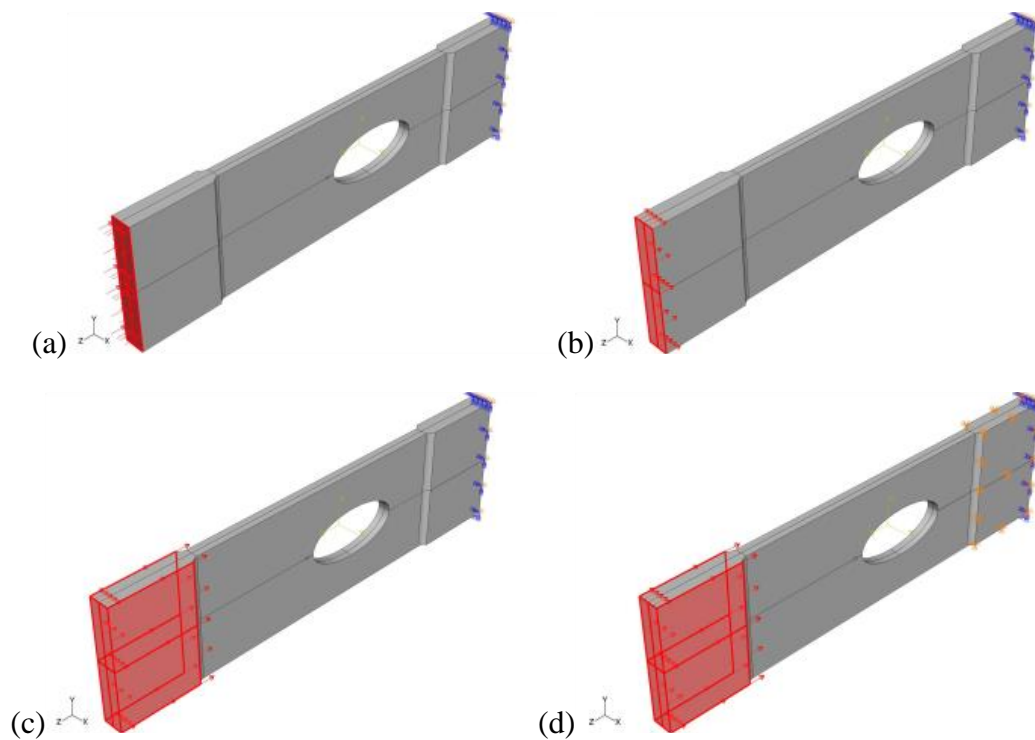


Figure 76: Conditions aux limites considérées pour le calcul de l'évolution du facteur d'intensité des contraintes avec la longueur de fissure.

*(a) Chargement en contrainte uniforme appliqué sur une extrémité de l'éprouvette,
(b) Déplacement imposé sur une extrémité de l'éprouvette,
(c) Déplacement imposé sur un talon entier de l'éprouvette,
(d) Déplacement imposé sur un talon de l'éprouvette et encastrement de l'autre talon.*

La deuxième étape de l'optimisation concerne la détermination des paramètres **D** et **E** associés à la section réduite de l'éprouvette. Celle-ci est nécessaire pour que l'éprouvette puisse être utilisée à hautes fréquences. En effet, si l'énergie dissipée par des micro-glissements aux interfaces entre les talons de l'éprouvette et l'assemblage est trop élevée, il ne sera pas possible d'atteindre les niveaux de chargement voulus, puisque le dispositif d'excitation est limité en puissance. Une solution, permettant de limiter les micro-glissements, consiste à réduire la section dans la zone d'intérêt afin d'y concentrer les déformations (Caignot, 2009). Les valeurs des paramètres **D** et **E** optimisés constituent un bon compromis entre le comportement en flambement de l'éprouvette (dont la limite de flambement est proportionnelle à E^3/D^2) et la dissipation d'énergie induite par les micro-glissement qui dépendent du rapport entre **E** et **G** (et également de la pression de serrage de l'éprouvette et du coefficient d'adhérence mors/talon de l'éprouvette). Le dernier critère n'a, cependant, pas été évalué quantitativement. Ce sont en réalité des considérations empiriques qui ont suggérées que ce ratio devait être inférieur ou égal à 3/5. Ce sont les essais réalisés avec cette éprouvette qui ont définitivement validé ce critère. Une fois les paramètres géométriques optimisés, ils sont ensuite utilisés comme données d'entrée pour l'étape 1.

La limite de flambement de l'éprouvette est déterminée par calculs EF avec la méthode d'Euler en élasticité linéaire et en considérant que l'éprouvette contient une fissure de 26 mm de longueur (hypothèse conservative). Les talons de l'éprouvette sont supposés se mouvoir sur le même plan. En effet, le fléchissement de l'éprouvette est supposé être limité dans le montage comme cela sera exposé dans une prochaine section du chapitre de par l'architecture du montage retenue. La liaison entre le montage et les talons contraint fortement la valeur du paramètre **D**.

La **Figure 77** montre des visualisations des déformées modales des deux premiers modes de flambement. La présence de la fissure n'affecte pas le premier mode, ce qui n'est pas le cas du second (l'effort limite de flambement associé décroît avec la longueur de fissure). Comme l'effort limite de flambement de ce dernier est toujours supérieur à celui du premier (pas de croisement de mode avec l'avancée de fissure), il n'est pas nécessaire de le considérer plus que cela dans l'analyse.

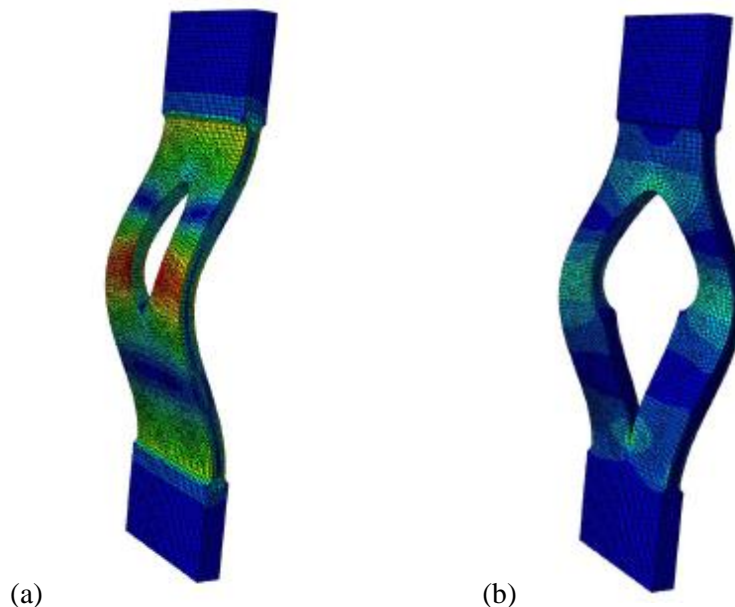


Figure 77: Visualisation de modes de flambement obtenue avec la méthode d'Euler de l'éprouvette optimisée contenant une fissure de 26 mm et affichage de la contrainte de Von Mises associée.

*(a) Premier mode associé à un effort imposé sur les talons de 54951 N,
(b) Deuxième mode associé à un effort imposé sur les talons de 67457 N.*

Cependant, ces résultats ne peuvent pas être considérés comme étant totalement conservatifs. En effet, la méthode d'Euler suppose implicitement que la géométrie en question ne contient aucune imperfection. Ceci justifie la tolérance de planéité de 0,03 mm imposée sur la section réduite (**Figure 73**) pour limiter les risques de flambement non prévus. Mais encore une fois, c'est la confrontation avec l'expérimental qui a validé définitivement ce choix.

La **Figure 78** montre le champ de contrainte de Von Mises au voisinage du trou elliptique pour un chargement en compression appliqué sur les talons de 15000 N. A l'aide d'une règle de trois, il est possible d'estimer le chargement à appliquer sur l'éprouvette avant plastification. En considérant une limite d'écoulement de 800 MPa (Le Biavant-Guerrier, 2000), le chargement limite est de 25316 N. Cette valeur est bien en-dessous de la limite en flambement, ce qui signifie que le flambement n'est pas un phénomène physique dimensionnant en l'absence d'une fissure.

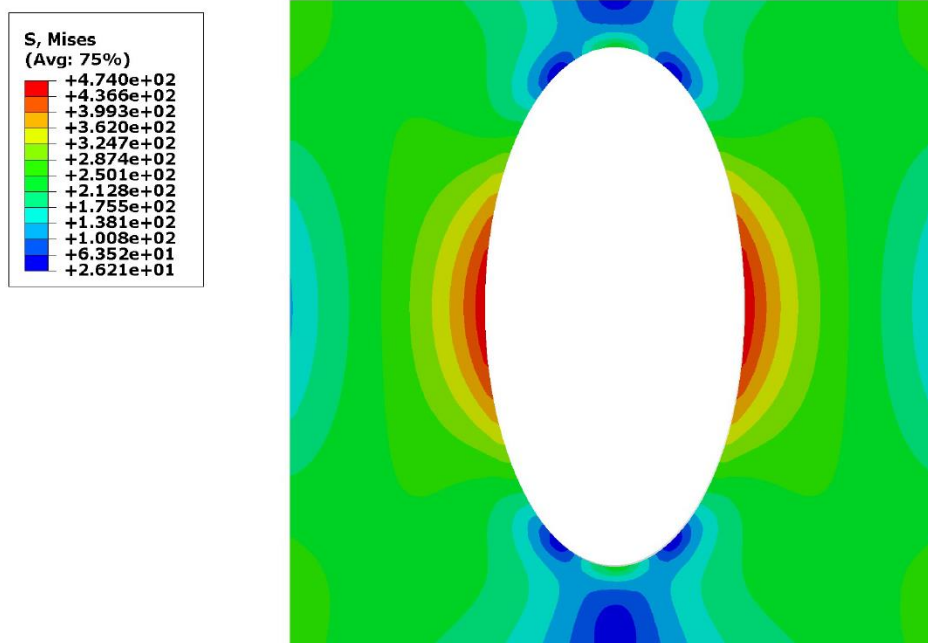


Figure 78: Champ de contrainte de Von Mises au voisinage du trou elliptique pour un chargement en compression de 15000 N appliqué sur les talons de l'éprouvette optimisée. La pré-fissure n'a pas été considérée dans le calcul.

Dans le cas où une fissure serait présente, il se trouve qu'elle a peu d'impact sur la valeur maximale du champ de contrainte de Von Mises comme le montre la **Figure 79**.

Il se trouve que cette valeur limite n'a jamais été dépassée pendant les essais pour les rapports de charge inférieurs à 0,7. Pour les plus hauts rapports de charge, l'hypothèse d'élasticité adaptée (plasticité premier cycle) permettrait tout de même de pouvoir évaluer correctement l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes en fonction de l'avancée de fissure. En revanche, le rapport de charge en facteur d'intensité des contraintes ($R = \frac{K_{min}}{K_{max}}$) réellement vu par la fissure serait différent de celui appliqué sur l'éprouvette en termes d'effort, ce qui fausserait l'interprétation des résultats. Mais, il sera supposé dans la suite que cet effet est négligeable, puisque la zone affectée par la plasticité est confinée et éloignée de la pointe de fissure.

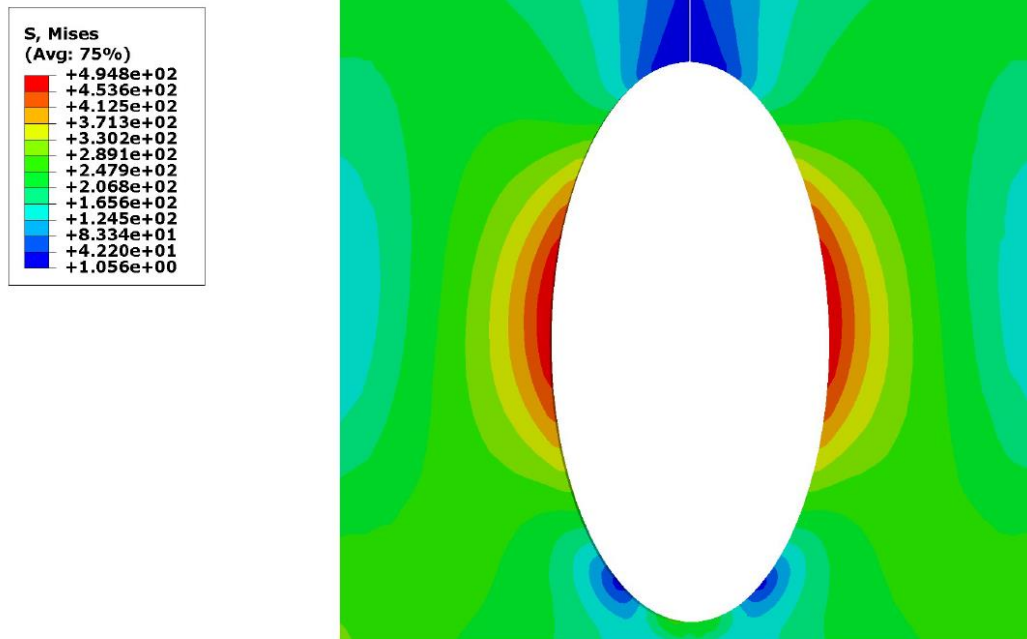


Figure 79: Champ de contrainte de Von Mises au voisinage du trou elliptique pour un chargement en compression de 15000 N appliqué sur les talons de l'éprouvette optimisée. Une fissure de 26 mm a été considérée dans le calcul. Un écart de seulement 4,4% est constaté sur la valeur maximale de la contrainte de Von Mises par rapport au cas sans fissure.

III.2.2. Le dispositif d'essais à hautes fréquences

III.2.2.1. Introduction

L'éprouvette étant dimensionnée, il reste néanmoins à concevoir un dispositif qui permet d'assurer un chargement relativement élevé à une fréquence qui n'est généralement pas accessible aux machines de traction conventionnelle comme suggéré précédemment. La solution proposée consiste à utiliser un pot vibrant électrodynamique comme moyen d'excitation à hautes fréquences pour la qualité du signal et la plage fréquentielle utilisable.

Cependant, les niveaux d'efforts dynamiques atteints directement par un pot vibrant ne suffisent pas pour l'application envisagée, ni en amplitude d'effort imposé, ni en charge statique. Pour cela, un montage permettant d'assurer la charge statique a été dimensionné et le principe de l'amplification modale pour assurer une amplitude de la charge dynamique suffisamment élevée, comme ce qui a déjà été proposée dans le cadre du programme RamGT (§1.1.3), a été utilisé. L'association de l'éprouvette, du montage, ainsi que de la méthodologie permettant la mesure du seuil de non-propagation de fissure, a fait l'objet d'un brevet (Mary et al., 2015).

Cette sous-section commence par exposer le principe de l'essai et la description générale du montage. Ensuite, la démarche de conception ainsi que les solutions techniques associées seront présentées. Enfin, la validation de la conception du montage à partir de résultats d'essais préliminaires sera abordée.

III.2.2.2. Principe du dispositif d'essais

La **Figure 80** donne une vue d'ensemble du montage. Il consiste en un système de deux plateaux rigides qui maintiennent l'éprouvette en compression, équilibrée par deux plaques composites en traction. L'un d'entre eux est fixé de manière rigide à un marbre tandis que l'autre est libre. L'ajustement de la fréquence propre du premier mode de traction du montage est réalisé à l'aide de masses additionnelles venant se positionner sur le plateau rigide libre. Le pot vibrant sollicite les masses à la fréquence propre du premier mode de traction du montage à l'aide d'une tige de poussée. Ce système ne requiert aucun asservissement du chargement puisque le taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes est piloté par la géométrie de l'éprouvette, comme cela a été mentionné précédemment. Cependant, le pot vibrant ne permet pas d'imposer des charges statiques élevées sur l'éprouvette. C'est l'architecture du montage qui le permet (**Figure 81**).

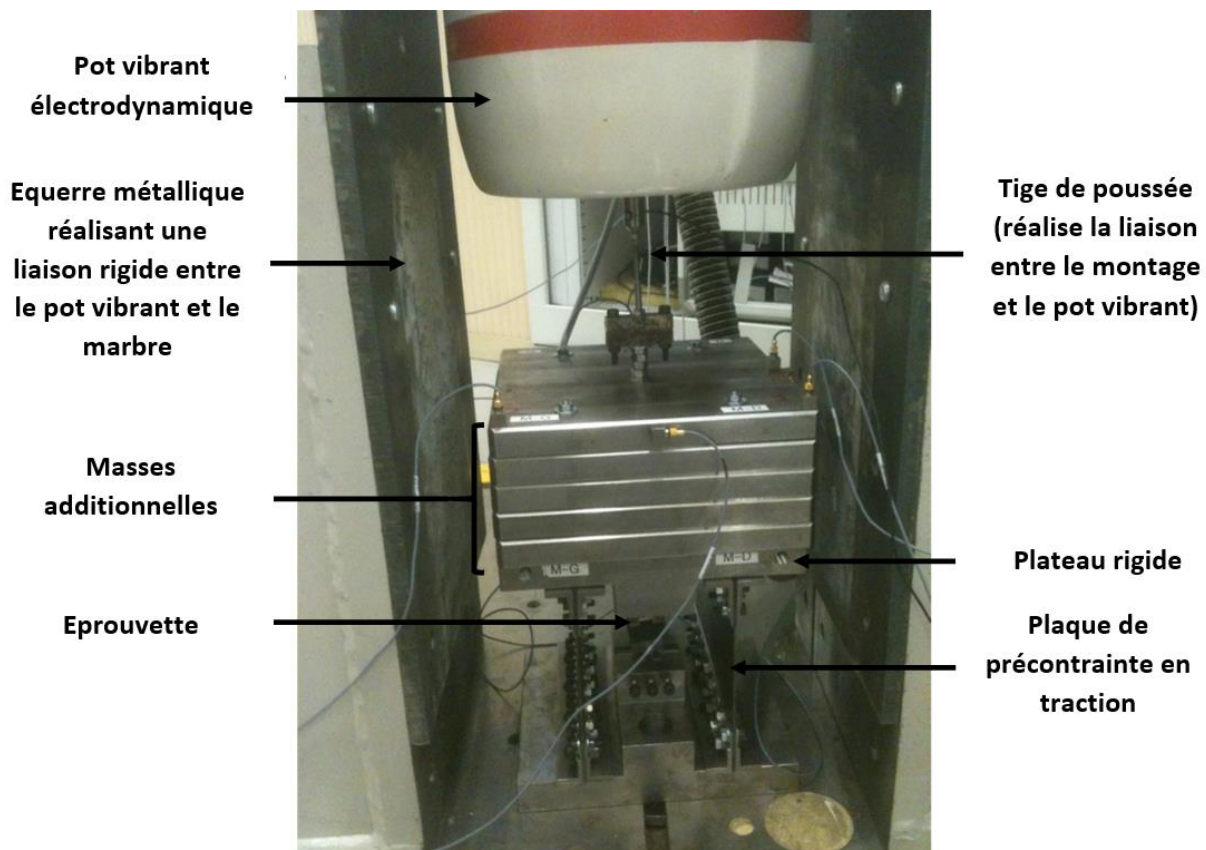


Figure 80: Vue du montage contenant cinq masses additionnelles.

La charge statique de compression est réalisée par le biais de la mise en traction des plaques de précontrainte en matériau composite situées de part et d'autre de l'éprouvette. Celle-ci s'effectue par la réduction progressive du jeu entre les équerres métalliques situées sur les plaques de précontraintes et le plateau rigide libre. Le choix d'écarter les deux plaques composites et de les avoir assez larges permet d'imposer une rigidité en rotation dans les plans perpendiculaires à l'axe de l'éprouvette et donc d'imposer des conditions cinématiques limitant le flambement de l'éprouvette en compression. Le pot vibrant est positionné verticalement par rapport au montage à l'aide d'équerres. Leur rôle consiste à le maintenir en place de manière rigide par rapport au marbre afin qu'il puisse transmettre l'intégralité de sa puissance au montage.

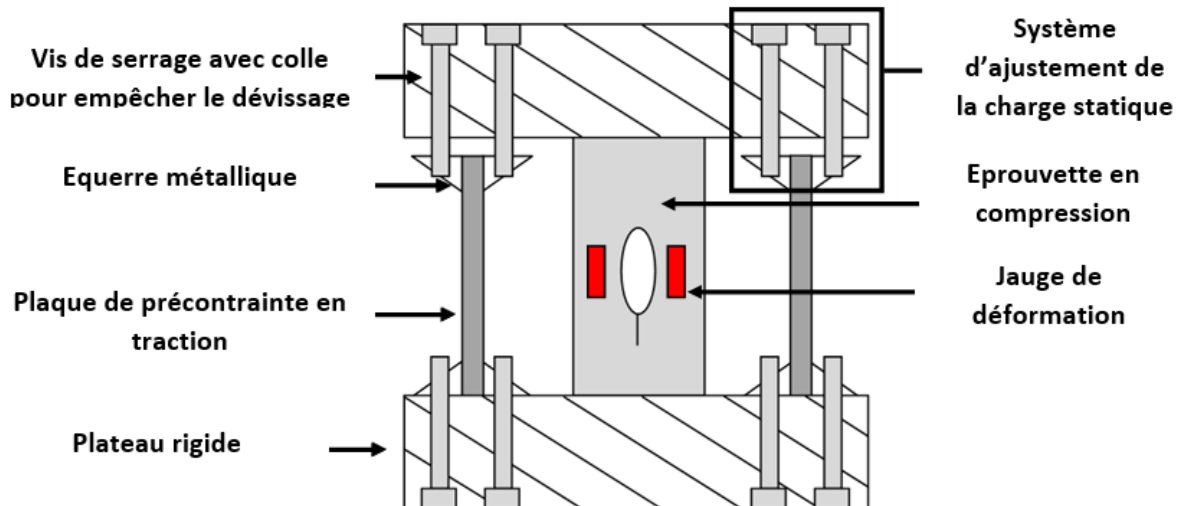


Figure 81: Illustration du système de précontrainte de l'éprouvette.

Le montage présente une architecture en parallèle (Figure 82), contrairement aux solutions de Maillet et de Bathias). Ce choix est indispensable, puisqu'il permet d'assurer une charge statique de compression sur l'éprouvette. Il en résulte que la raideur du montage K_m s'exprime comme la somme des raideurs de l'éprouvette $K_{\text{épreuve}}$ et des plaques de précontrainte K_{plaques} (approximativement égale à $2 \cdot K_{\text{épreuve}}$).

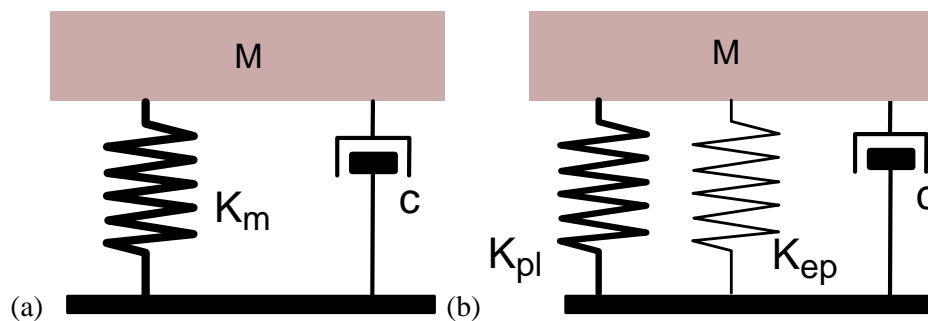


Figure 82: Modèle rhéologique du montage :

(a) Modèle global,

(b) Modèle détaillé séparant les contributions des plaques de précontrainte et de l'éprouvette à la raideur.

Comme les raideurs sont montées en parallèle, la force exercée sur l'éprouvette ($f_{\text{épreuve}}(t) = F_{\text{épreuve}}(\omega) \cdot e^{i\omega t}$ où ω est la pulsation de résonance associée au mode de traction) se calcule à partir du déplacement verticale de l'ensemble du plateau rigide libre avec les masses additionnelles ($u(t) = U(\omega) \cdot e^{i\omega t}$) comme suit :

$$F_{\text{épreuve}}(\omega) = K_{\text{épreuve}} \cdot U(\omega) \quad (\text{III-15})$$

Le comportement du montage s'obtient à partir de l'équation fondamentale de la dynamique, d'où l'on déduit la fonction de transfert du montage $H(\omega) = \frac{U(\omega)}{F(\omega)}$ ($f(t) = F(\omega) \cdot e^{i\omega t}$ est la force délivrée par le pot vibrant, ζ est l'amortissement, M est la masse dynamique en mouvement et ω_0 est la pulsation propre associée au mode de traction) :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\omega) = \frac{1}{M \cdot (-\omega^2 + 2 \cdot i \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \omega + \omega_0^2)} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{montage}}{M}} \\ K_{montage} = K_{épreuve} + K_{plaques} \approx 3 \cdot K_{épreuve} \end{array} \right. \quad (III-16)$$

Le module de la fonction de transfert atteint son maximum pour $\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2}$:

$$|H(\omega_d)| = \frac{1}{M \cdot \omega_0^2 \cdot |2 \cdot \zeta^2 + 2 \cdot i \cdot \zeta \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2}|} = \frac{1}{K_{montage} \cdot |2 \cdot \zeta^2 + 2 \cdot i \cdot \zeta \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2}|} \quad (III-17)$$

L'amortissement est supposé faible, donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_d \approx \omega_0 \\ |H(\omega_d)| \approx |H(\omega_0)| = \frac{1}{K_{montage} \cdot 2 \cdot \zeta} \end{array} \right. \quad (III-18)$$

Le facteur d'amplification de la charge α est le rapport entre le module de l'effort appliqué à l'éprouvette ($F_{épreuve}(\omega) = K_{épreuve} \cdot U(\omega)$) et le module de l'effort appliqué par le pot vibrant au montage ($F(\omega)$) :

$$\alpha(\omega) = \left| \frac{F_{épreuve}(\omega)}{F(\omega)} \right| = K_{épreuve} \cdot \left| \frac{U(\omega)}{F(\omega)} \right| = K_{épreuve} \cdot |H(\omega)| \quad (III-19)$$

Au maximum de réponse, ce facteur vaut :

$$\alpha(\omega_d) \approx \alpha(\omega_0) = K_{épreuve} \cdot |H(\omega_0)| = \frac{K_{épreuve}}{K_{montage} \cdot 2 \cdot \zeta} \approx \frac{1}{6 \cdot \zeta} \quad (III-20)$$

Ainsi, pour imposer un chargement alterné de 30 kN sur l'éprouvette, à l'aide d'un pot vibrant qui ne peut fournir que 1000 N d'effort alterné, le facteur d'amplification de la charge doit être de l'ordre d'un facteur 30. Cela conduit à une valeur de l'amortissement inférieur ou égal à 0,56 %. C'est la raison pour laquelle, l'importance des sources de dissipation d'énergie doit être minimisée. D'ailleurs, l'éprouvette elle-même a été conçue pour minimiser une partie des pertes énergétiques.

Le montage a été dimensionné pour permettre des mesures sur le seuil de non-propagation de fissure dans la gamme fréquentielle [370 Hz – 780 Hz]. Seul le mode de traction est utile pour l'application visée, mais d'autres modes peuvent intervenir. Chaque mode est associé à une fréquence propre. L'un des objectifs du dimensionnement du montage est de faire en sorte que les autres modes ne viennent pas perturber le comportement dynamique du montage lorsque celui-ci est sollicité sur le mode de traction. Le critère de séparation modale suivant peut alors être utilisé comme un moyen de vérifier, a posteriori, que les modes parasites sont suffisamment éloignés en fréquence du mode de traction et donc qu'ils ne perturberont pas ce mode (Hasselmann, 1976) :

$$\Phi = \frac{2 \cdot \zeta_j \cdot \omega_j}{|\omega_j - \omega_k|} \ll 1 \quad (III-21)$$

où ω_j , ζ_j et ω_k sont, respectivement, la pulsation propre et l'amortissement du $j^{\text{ème}}$ mode (ici le mode de traction) et la pulsation propre du $k^{\text{ème}}$ mode ($k \neq j$). Ce critère a été vérifié pour toutes les configurations avec et sans masses additionnelles (**Tableau 8**).

III.2.2.3. Conception du montage de précontrainte de l'éprouvette

III.2.2.3.1. Choix des raideurs des plaques de précontrainte

La géométrie de l'éprouvette étant fixée, il n'est plus possible de jouer sur sa raideur en traction/compression pour optimiser le comportement modal du montage (celle-ci ayant été déterminée à partir d'une simulation numérique en quasi-statique). Les plateaux rigides du montage pèsent chacun 14,4 kg, tandis que les masses supplémentaires pèsent 10 kg chacune.

Les deux paramètres ajustables du montage sont le nombre de masses additionnelles et la raideur des plaques de précontrainte. Les plaques en matériau composite permettent à la fois une fixation aisée (grâce aux renforts des extrémités) et un potentiel de variation de raideur important tout en conservant de bonnes propriétés mécaniques sous charges statique et de fatigue. Il est en effet possible de modifier le nombre de plis et leur empilement (cela permet de modifier les raideurs sens 0° mais également les rapports d'anisotropie) et de passer des fibres de carbone aux fibres de verre.

La **Figure 83** donne l'évolution de la fréquence propre associée au mode de traction du montage en fonction des masses en jeu et des raideurs des plaques de précontrainte, à l'aide de la formule suivante (f étant la fréquence propre du mode de traction et M la masse du montage) :

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{K_{\text{plaques}} + K_{\text{éprouvette}}}{M}} \quad (\text{III-22})$$

Le choix d'une raideur de $230 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ avec cinq masses additionnelles de 10 kg permet de couvrir une plage fréquentielle accessible allant de 370 Hz à 780 Hz, ce qui s'avère suffisant pour l'application visée.

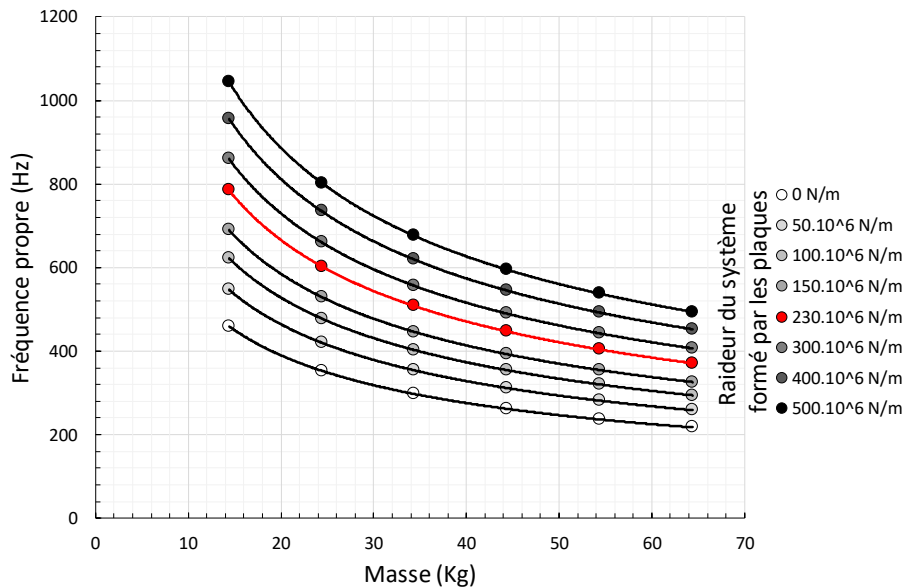


Figure 83: Evolution de la fréquence propre théorique du mode de traction en fonction de la masse et de la raideur combinée des plaques de précontrainte. Le cas $K_{\text{plaques}} = 0 \text{ N/m}$ correspond à une raideur totale égale à celle de l'éprouvette seule.

III.2.2.3.2. Calcul du comportement modal du montage

Le calcul de la fréquence propre du premier mode de traction est relativement simple. Cependant, d'autres modes plus complexes peuvent intervenir. Il est important de les caractériser car si la fréquence propre de l'un d'entre eux est proche de celle du mode de traction rien ne garantit qu'ils ne seront pas couplés. Cela signifie que si le mode de traction est sollicité, le mode couplé l'est également. Ainsi, l'éprouvette ne verrait pas un chargement de traction pure mais un mélange entre deux sollicitations de natures différentes. Par conséquent, cela invaliderait l'évaluation du facteur d'intensité des contraintes et donc la détermination du seuil de non-propagation de fissure longue par fatigue.

Afin de caractériser ces modes parasites, des calculs d'analyse modale sous Abaqus ont été réalisés. Le coût de chaque calcul a pu être réduit en ne modélisant pas le plateau rigide fixé au marbre. Ce dernier est encasturé sur le marbre et ne peut donc pas bouger. Cela est pris en compte via des conditions aux limites adaptées appliquées sur les plaques et l'éprouvette (*Figure 84*).

Les propriétés mécaniques des matériaux utilisées dans le calcul sont listées dans le *Tableau 7*. Le coefficient de Poisson des plaques de précontrainte a été pris égal à 0,3 par défaut (en réalité $\nu_{12} \approx 0,75$) et une modélisation isotrope de ces dernières a été considérée. La valeur réelle du coefficient de Poisson est supposée ne pas influencer le comportement dynamique global du montage. Aucun amortissement n'a été pris en compte dans les calculs. Les raideurs des liaisons vissées sont également négligées.

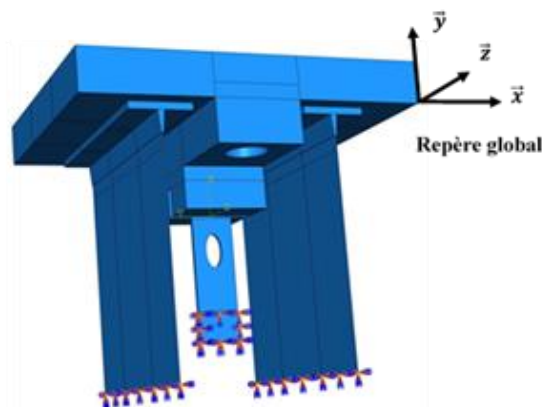


Figure 84: Représentation des conditions d'encastrement au niveau des extrémités des plaques composite et du talon de l'éprouvette.

Plusieurs itérations sur la géométrie des plateaux rigides ont été nécessaires. En effet, la première géométrie a conduit à un mode de flexion de l'éprouvette très proche en fréquence du mode de traction recherché. Afin de les séparer, une solution a consisté à modifier progressivement la géométrie des plateaux rigides de manière à augmenter leur moment d'inertie (en les élargissant tout en conservant leur masse).

La *Figure 85* donne une représentation des déformées modales faisant intervenir l'éprouvette (les autres étant des modes locaux sollicitant les plaques de précontraintes en matériau composite) dans le cas d'un montage sans masse supplémentaire. Ces déformées modales sont les mêmes quel que soit le nombre de masses additionnelles considéré puisqu'elles ne font pas intervenir de déformation des plateaux rigides et des masses additionnelles. Ces éléments contribuent uniquement par le biais de mouvements de corps rigides, et ce, quel que soit le nombre de masses additionnelles ajoutées. Cette remarque a été utilisée lors des essais pour identifier les modes observés.

Le *Tableau 8* associe à ces déformées modales les fréquences propres calculées par éléments finis, dans le cas où le montage ne contient aucune masse supplémentaire et dans le cas où il en contient cinq.

Quelle que soit la configuration du montage, le critère de séparation des modes indique que le mode de traction n'est pas couplé aux modes voisins. Cela reste vrai pour des masses additionnelles intermédiaires même si les résultats ne sont pas présentés ici.

Tableau 7 : Propriétés des matériaux utilisées dans le calcul de modes propres.

Matériau et/ou pièce	Module d'Young (MPa) / Raideur en traction (N/m)	Coefficient de Poisson	Masse volumique (kg/mm ³)
Ensemble des deux plaques de précontraintes	230.10 ⁶ N/m	0,3	1,4.10 ⁻⁹
Eprouvette enTi-6Al-4V	119000 MPa / 120.10 ⁶ N/m	0,29	4,41.10 ⁻⁹
Acier	210000 MPa	0,3	7,86.10 ⁻⁹

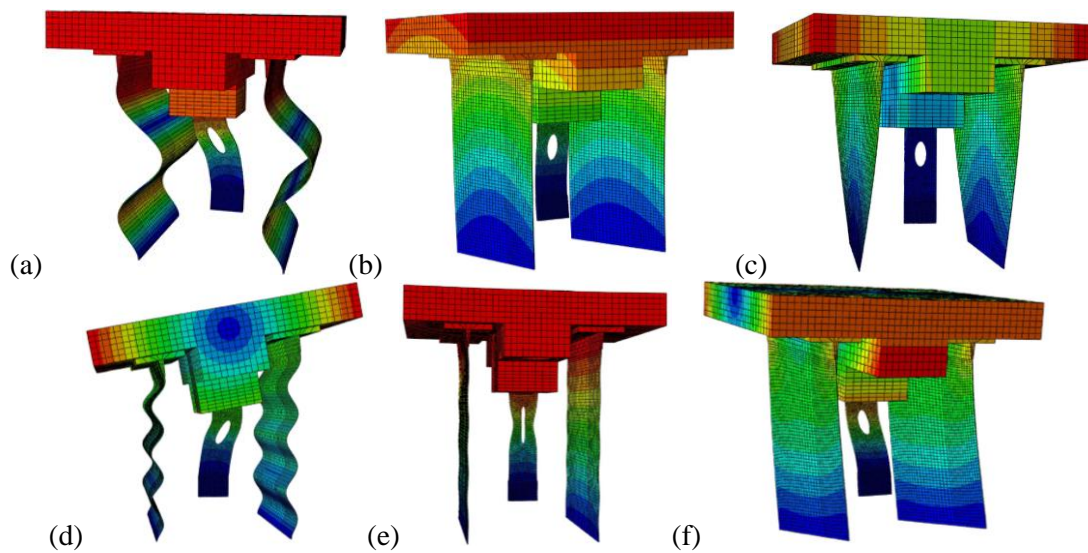


Figure 85: Déformées modales faisant intervenir l'éprouvette dans le cas du montage avec 0 masses additionnelles obtenues par éléments finis :

- (a) 1^{er} mode de flexion globale autour de l'axe \vec{z} accompagnée de flexion localisée sur les plaques de précontraintes (mode 1),
 (b) 1^{er} mode de flexion globale autour de l'axe \vec{x} (mode 2),
 (c) 1^{er} mode de torsion globale autour de l'axe \vec{y} (mode α),
 (d) 2^{ème} mode de flexion globale autour de l'axe \vec{z} accompagnée de flexions localisées sur les plaques de précontraintes (mode β),
 (e) 1^{er} mode de traction globale suivant l'axe \vec{y} (mode δ),
 (f) 2^{ème} mode de flexion globale autour de l'axe \vec{x} (mode γ).

Tableau 8 : Liste des premiers modes propres globaux du montage sans masses additionnelles. Un amortissement maximal de 0,5 % a été considéré dans l'évaluation du critère de séparation des modes.

Mode / Fréquence propre calculée (Hz)	Critère de séparation des modes appliqué au mode de traction	Mode / Fréquence propre calculée (Hz)	Critère de séparation des modes appliqué au mode de traction
Mode 1 / 126	$\phi \approx 0,01 < 1$	Mode 1 / 56	$\phi \approx 0,01 < 1$
Mode 2 / 202	$\phi \approx 0,01 < 1$	Mode 2 / 71	$\phi \approx 0,01 < 1$
Mode α / 226	$\phi \approx 0,01 < 1$	Mode α / 98	$\phi \approx 0,01 < 1$
Mode β / 631	$\phi \approx 0,06 < 1$	Mode β / 265	$\phi \approx 0,04 < 1$
Mode δ / 754	-	Mode δ / 367	-
Mode γ / 785	$\phi \approx 0,24 < 1$	Mode γ / 381	$\phi \approx 0,2 < 1$
Cas du montage sans masse additionnelle		Cas du montage avec cinq masses additionnelles	

III.2.2.3.3. Vérification de la correspondance entre la déformée modale de l'éprouvette sollicitée sur le mode de traction du montage et la déformée obtenue suite à un calcul de compression en quasi-statique

La démarche adoptée pour concevoir l'éprouvette se fonde sur le principe pour lequel le champ de déplacement modal associé au mode de traction de l'éprouvette au sein du montage est proportionnel au champ de déplacement obtenu suite à un calcul en quasi-statique. Il s'agit dans cette sous-section de vérifier la validité de cette hypothèse en comparant les champs de déplacement à la surface de l'éprouvette obtenus suite à des calculs en analyse modale et en quasi-statique.

Pour le calcul en analyse modale, le talon inférieur de l'éprouvette et les extrémités basses des plaques de précontraintes sont encastrées pour des raisons qui ont déjà été justifiées précédemment. Concernant le calcul en quasi-statique, les mêmes conditions aux limites qu'en analyse modale ont été imposées sur le modèle et le plateau rigide libre est soumis à un champ de contrainte de traction uniforme. Une visualisation des conditions aux limites appliquées est donnée sur la **Figure 86**. Enfin, les calculs sont réalisés à iso-maillage.

Le post-traitement des résultats consiste en plusieurs étapes. Tout d'abord, les coordonnées des nœuds à la surface de l'éprouvette sont extraites ainsi que les déplacements nodaux associés. Ensuite, comme les déplacements nodaux associés au mode de traction de l'éprouvette sont normalisés par rapport à la masse modale du mode, une comparaison directe des champs de déplacement des deux calculs n'est pas possible. On commence alors par mettre à l'échelle les déplacements nodaux associés au mode de traction relativement aux déplacements nodaux issus du problème en quasi-statique. Cela consiste à chercher le facteur d'échelle λ en résolvant le problème de minimisation par moindres carrés suivant :

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{u}_{quasi-statique} - \lambda \cdot \mathbf{u}_{modal}\|^2 \quad (\text{III-23})$$

où $\mathbf{u}_{quasi-statique}$ et \mathbf{u}_{modal} sont, respectivement, les champs de déplacement à la surface de l'éprouvette associés au mode de traction et en traction quasi-statique.

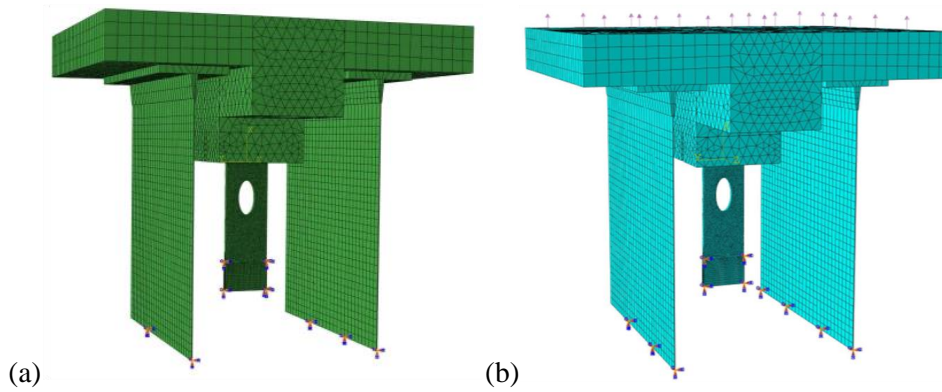


Figure 86: Visualisations sous Abaqus cae des conditions aux limites appliquées sur le maillage :
 (a) en dynamique, le talon inférieur de l'éprouvette est encastré ainsi que les extrémités inférieures des plaques de précontrainte,
 (b) en quasi-statique, les mêmes conditions aux limites qu'en dynamique sont appliquées et la surface supérieure du plateau rigide libre est soumise à un chargement de traction uniforme de 100 MPa.

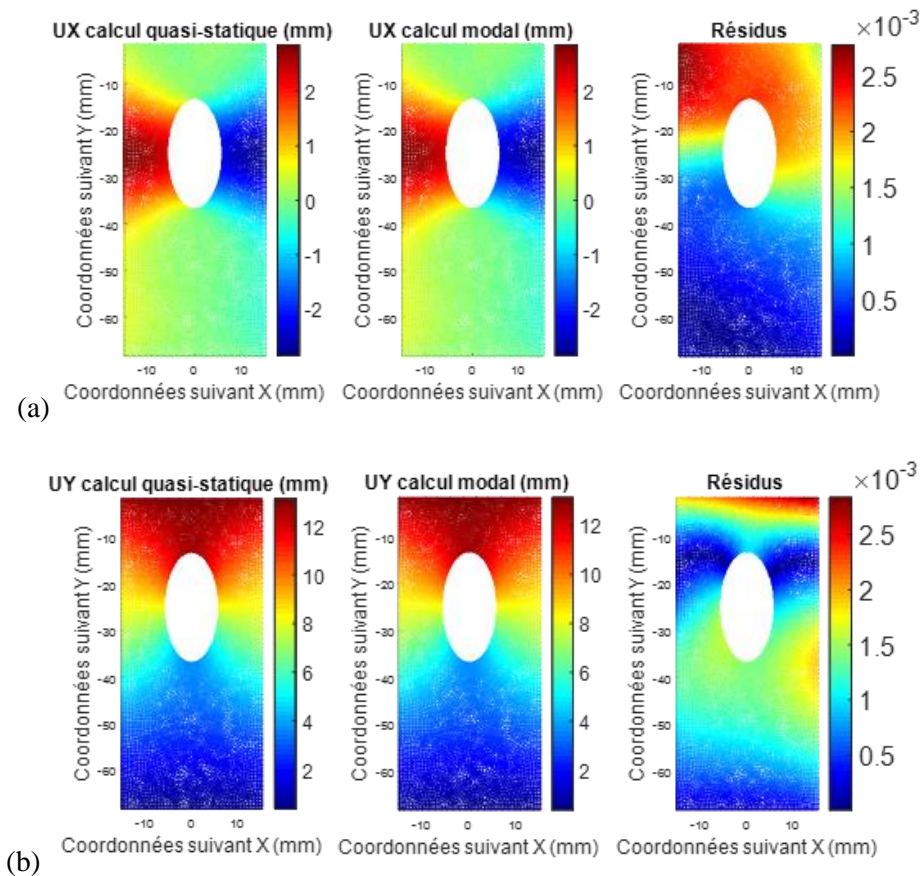


Figure 87: Comparaison des déplacements nodaux à la surface de l'éprouvette :
 (a) composante latérale,
 (b) composante longitudinale.

La norme utilisée dans l'expression précédente est définie comme suit :

$$\|\underline{\mathbf{u}}\|^2 = \sum_{i=1}^N (u_x(\underline{\mathbf{x}}_i)^2 + u_y(\underline{\mathbf{x}}_i)^2 + u_z(\underline{\mathbf{x}}_i)^2) \quad (\text{III-24})$$

où $\underline{\mathbf{x}}_i$ sont les coordonnées des nœuds i et u_x , u_y et u_z sont les composantes du déplacement $\underline{\mathbf{u}}$.

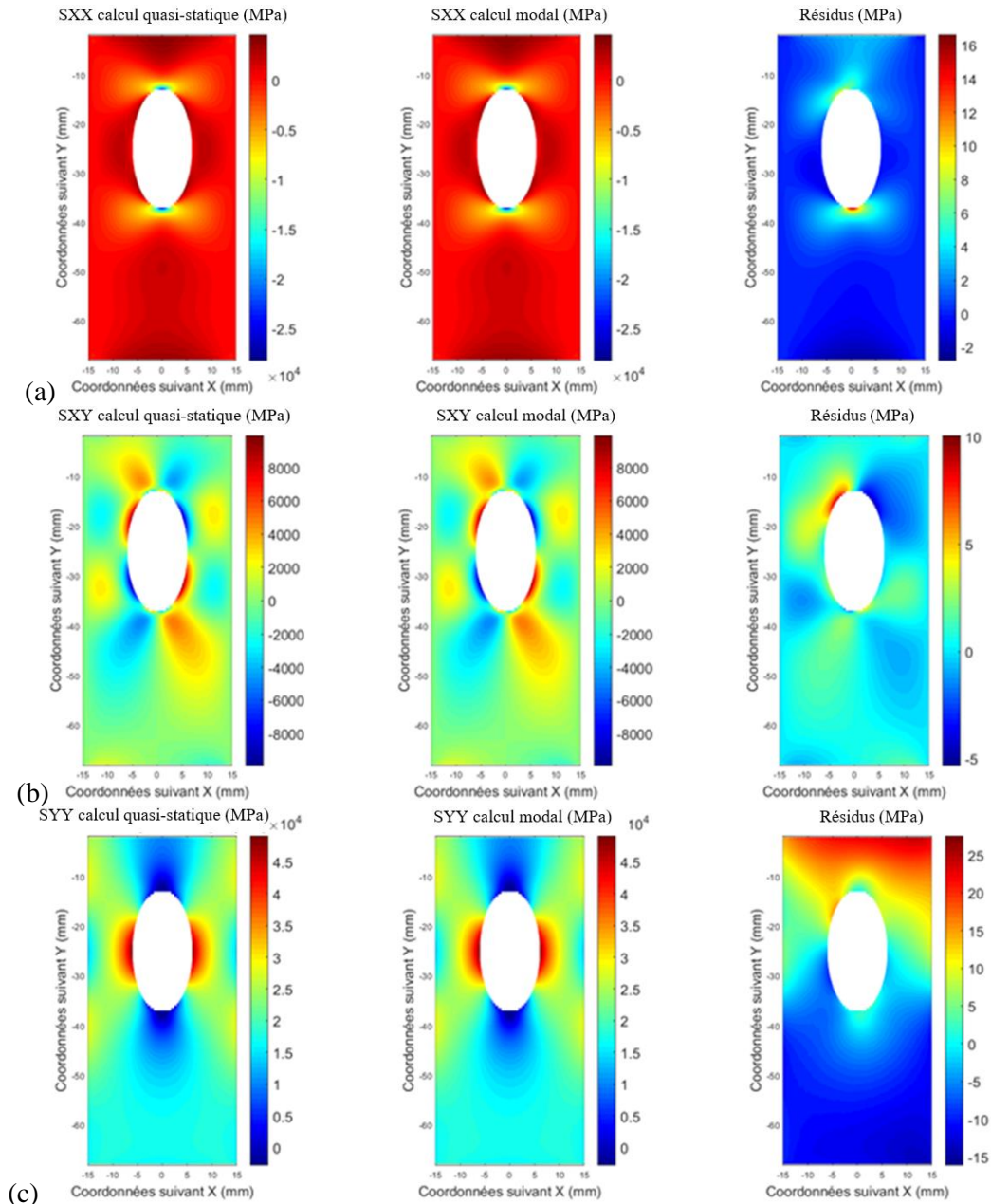


Figure 88: Comparaison des contraintes nodales à la surface de l'éprouvette :

- (a) σ_{XX} ,
- (b) σ_{XY} ,
- (c) σ_{YY} .

Dans la suite, le champ de déplacement associé au mode de traction qui est comparé à $\underline{\mathbf{u}}_{quasi-statique}$ est $\lambda \cdot \underline{\mathbf{u}}_{modal}$. La Figure 87 montre les champs de déplacement nodaux obtenus en analyse modale et en quasi-statique pour le mode de traction. Les écarts entre les deux champs de déplacements sont

extrêmement faibles. Par la même méthode, il est possible de comparer les champs de contraintes et le constat est le même. Ceci se justifie par le fait que toute l'énergie cinétique associée au mode de traction est contenue dans le plateau rigide libre. L'énergie potentielle de déformation est quant à elle contenue dans l'éprouvette (les effets d'inertie y sont négligeables). On en déduit que l'hypothèse est justifiée.

III.2.2.3.4. Validation de la méthode de calcul en flambement de l'éprouvette

La dernière étape de la démarche de conception du montage consiste à vérifier que l'éprouvette ne rompra pas par flambement dans le montage. Ceci peut sembler superflu étant donné qu'un calcul de flambement a déjà été réalisé sur l'éprouvette seule. Cependant, il se pourrait que les conditions aux limites ne soient pas les mêmes dans les deux cas, c'est pourquoi cette dernière étape est nécessaire et a permis de justifier les hypothèses de calculs qui ont été prise en compte dans la sous-section §III.2.1.

Le montage est modélisé sous **Abaqus cae 6.11**. Les plaques de précontraintes sont encastrées à leur extrémité comme le montre la **Figure 89**. Le talon inférieur de l'éprouvette ne peut se déplacer que verticalement afin de modéliser la présence de la précontrainte dans le modèle. Le chargement est appliqué sur l'extrémité du talon de l'éprouvette comme représenté sur la **Figure 89**. Le calcul montre que la contrainte de flambement est très proche de celle obtenue avec l'éprouvette seule (**Figure 90**). Cela constitue une validation par calcul de la géométrie du montage qui permet de rigidifier la rotation de la tête de l'éprouvette et donc de repousser à plus haute valeur la limite de flambement de cette éprouvette. Cependant, les vis de précharge ne sont pas prises en compte dans les calculs, mais il sera supposé qu'elles jouent un rôle mineur dans les résultats.

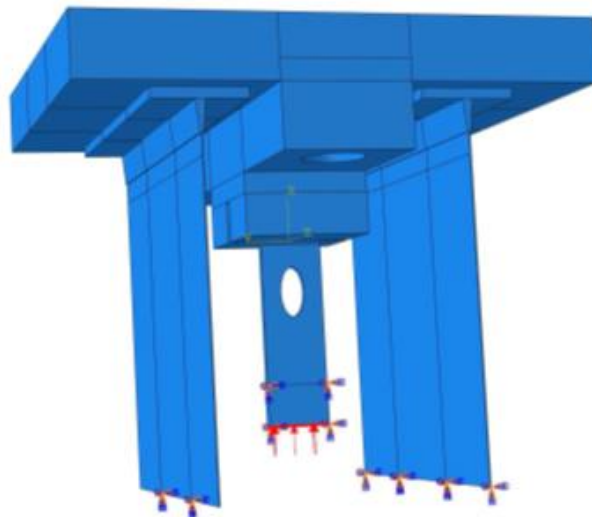


Figure 89: Conditions aux limites et de chargements sur le montage pour le calcul en flambement.

L'explication du fait que les talons de l'éprouvette ne peuvent se déplacer que dans le même plan provient du choix concernant la géométrie du système de précontrainte. Les plaques de précontrainte étant rectangulaires et en traction imposent au montage une raideur en flexion élevée, empêchant les talons de se déplacer hors de leur plan initial.

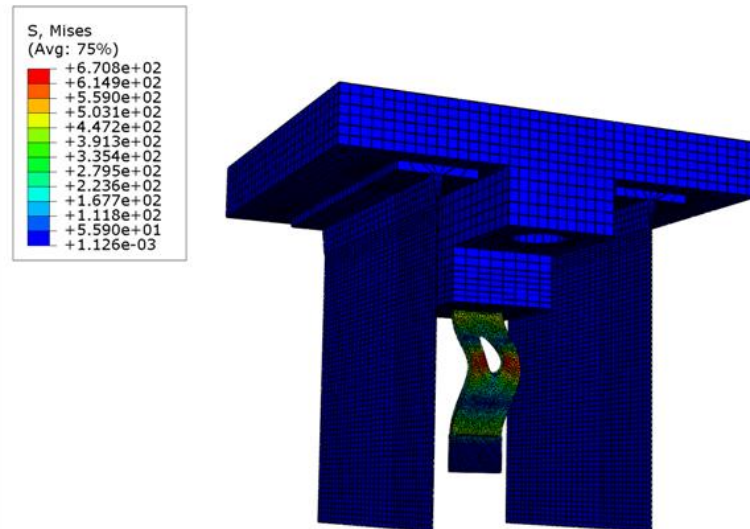


Figure 90: Premier mode de flambement du montage associé à un chargement uniforme de 354 MPa (ou une force de compression de 53,1 kN) de compressions sur l'extrémité du talon.

III.2.2.4. Solutions techniques pour la réalisation du montage

III.2.2.4.1. Limitations des dissipations de l'énergie mécanique par frottement

Les dispositifs mécaniques comportant des assemblages par serrage peuvent dissiper de l'énergie mécanique par frottement aux interfaces de contact. Cela se manifeste, dans ce contexte, par une élévation de l'amortissement modal. Or, ce phénomène est néfaste pour cette application puisque les niveaux de chargement sur l'éprouvette sont élevés.

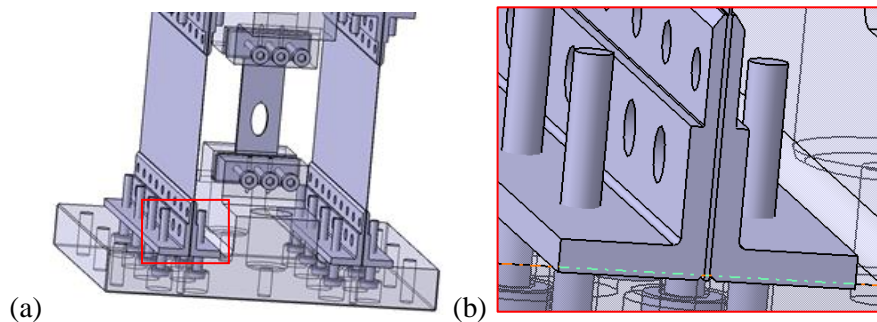
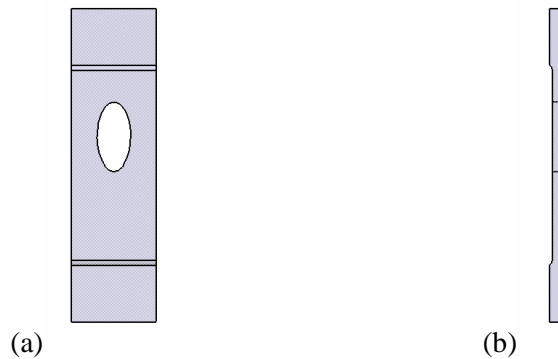


Figure 91: Visualisations Catia du montage :
 (a) vue globale,
 (b) zoom sur des équerres.

Au sein du montage de précontrainte de l'éprouvette, trois lieux privilégiés pour la dissipation d'énergie par frottement ont été identifiés. Le premier concerne les interfaces de serrage entre l'éprouvette et les plateaux rigides (**Figure 91**). Même si le glissement macroscopique au niveau de ces interfaces est inexistant, il se peut que des glissements se produisent localement entraînant une dissipation d'énergie globale potentiellement élevée (Peyret, 2012). Afin de limiter ces effets indésirables, l'épaisseur centrale de l'éprouvette est amincie de 2 mm par rapport aux talons de 5 mm d'épaisseur (**Figure 92**). L'idée sous-jacente est de limiter les déformations des talons. Ainsi, comme la partie centrale de l'éprouvette est moins raide que le reste, l'énergie de déformation modale associée au

mode de traction du montage se concentre principalement dans cette zone, limitant par la même occasion les dissipations d'énergie éventuelles au niveau des interfaces.



*Figure 92: Géométrie de l'éprouvette,
(a) vue de face,
(b) vue de profil.*

Le deuxième lieu privilégié pour la dissipation d'énergie concerne les interfaces entre les plaques de précontrainte et les équerres. Afin de supprimer ou réduire les effets indésirables de ces non-linéarités, la géométrie des équerres a été optimisée. La **Figure 91** montre une conception finalisée du montage et plus particulièrement des équerres. On note que les extrémités des équerres ont été affinées. La raison pour laquelle ce choix a été fait est liée au fait que les plaques de précontrainte sont moins rigides que les équerres, elles ont donc tendances à plus se déformer. Or, les glissements partiels peuvent être localisés près d'un trou ou d'un bord et ces derniers deviennent d'autant plus importants que la différence de raideur entre les éléments en contacts est importante (Caignot, 2009). C'est donc pour préserver la rigidité globale des équerres tout en diminuant leurs rigidités locales dans les zones engendrant potentiellement des dissipations d'énergie que ce choix a été fait. De plus, pour des raisons déjà évoquées, les plaques de précontrainte contiennent des talons plus épais que le reste des plaques au niveau des interfaces de contact avec les équerres. Cela permet de réduire d'avantage l'écart de raideur entre les talons des plaques de précontrainte (c'est également le rôle des plis à 45° en surface qui ne modifient pas la raideur des plaques composites sauf au niveau des talons) et les équerres.

Enfin le dernier lieu privilégié pour la dissipation d'énergie est peut-être le plus important. Il s'agit des interfaces entre les vis de réglage de la charge statique et les équerres. L'idéal aurait été de trouver une solution à la conception du montage ne faisant pas intervenir de vis du tout, mais cette piste n'a pas été poursuivie.

III.2.2.4.2. Les plaques de précontraintes

Les plaques ont été réalisées en matériau composite. La **Figure 93** montre les différents empilements, matériaux et dimensions de chacune des couches en dehors des talons des plaques.

Le choix d'utiliser un matériau composite plutôt qu'un autre provient du fait que ce type de matériau conduit à de faibles rigidités avec une bonne résistance à la fatigue. Les orientations des fibres à $\mp 45^\circ$ permet une bonne gestion des conditions d'encastrement. De plus, il serait difficile et coûteux de faire usiner des plaques métalliques fines avec des talons plus larges, sans parler des délais d'usinage qui seraient trop longs.

Concernant les talons, ils sont déposés par reprise de stratification. Dans cette zone, la stratification est la suivante [verre finition/ $\mp 45^\circ$ /verre finition/ $\mp 45^\circ/0^\circ$]sym (**Figure 93**).

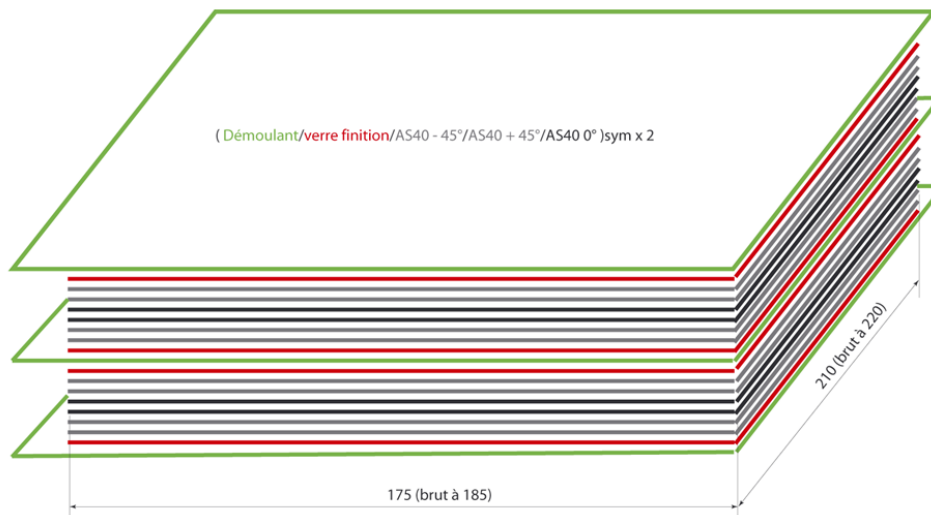


Figure 93: Les différents plis composants une plaque de précontrainte en composite (avec matrice époxy R 367-2 (36%)) :

- les couches en vert concernent le démoulant,
- les couches en rouge représentent un taffetas de verre de finition que l'on notera dans la suite S_v ,
- les couches en gris sont des plis unidirectionnels orientés à $\pm 45^\circ$ en fibres de carbone HS 40,
- les couches en noir sont des plis unidirectionnels orientés à 0° .

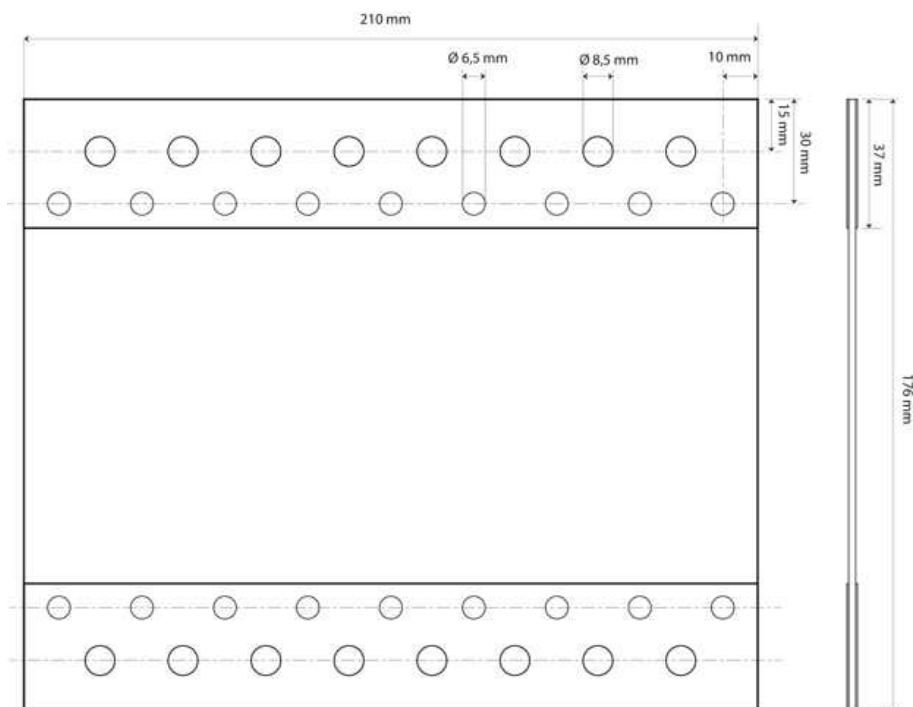


Figure 94: Plan des plaques de précontraintes.

Les dimensions des plaques en matériau composite ont été optimisées de manière à ce que l'on obtienne les raideurs longitudinales voulues. La **Figure 95** montre un assemblage d'une plaque de précontrainte avec des équerres.

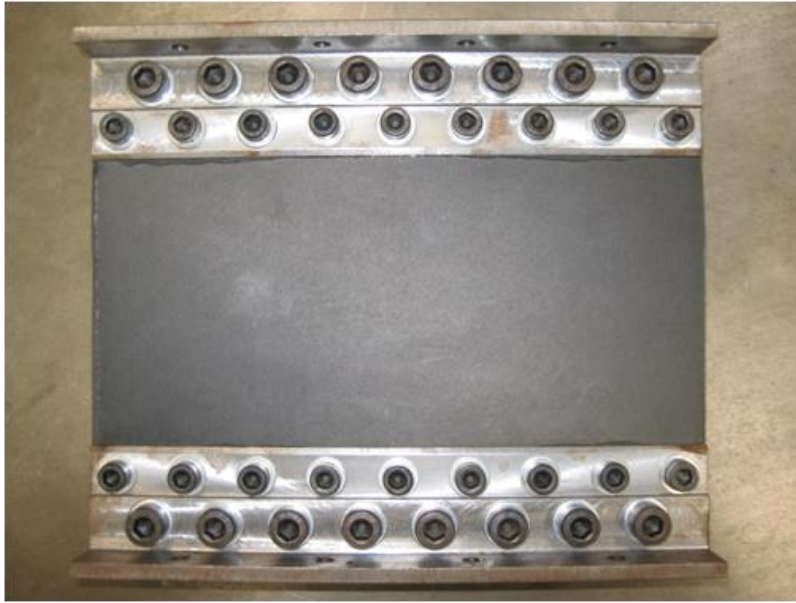


Figure 95: Montage {équerres + plaque de précontrainte} optimisé.

III.2.2.4.3. Choix du pot vibrant

Il a été vu précédemment que la puissance délivrée par le pot vibrant doit compenser la puissance dissipée induit par l'amortissement. Une manière de s'en rendre compte consiste à modéliser le comportement de celui-ci. Pour cela, supposons que le pot vibrant délivre un chargement sinusoïdal. En utilisant, les notations complexes et en travaillant dans l'espace de Fourier, la relation entre la puissance délivrée par le pot et le déplacement appliqué sur le talon de l'éprouvette (par analogie avec le modèle {masse + ressort + amortisseur}) s'écrit (avec F l'effort délivré par le pot, q le déplacement de la tige de poussée et H la fonction de transfert du montage) :

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \bar{F}(\omega) \cdot \dot{q}(\omega) \Rightarrow |q(\omega)| = \sqrt{\frac{2 \cdot |P(\omega) \cdot \bar{H}(\omega)|}{\omega}} \quad (\text{III-25})$$

Le développement de cette expression donne, à la pulsation propre du montage :

$$|q(\omega)| = \frac{\sqrt{|P(\omega_0)|}}{\sqrt{m \cdot \xi} \cdot \omega_0^{3/2}} \quad (\text{III-26})$$

Cette formule a été utilisée lors de la phase d'optimisation du montage de manière à gagner au maximum sur le déplacement et donc sur la déformation de l'éprouvette et finalement sur l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure. Elle met en évidence l'effet néfaste de la masse sur l'amplification modale. C'est la raison pour laquelle seulement cinq masses supplémentaires peuvent être ajoutées sur le plateau rigide libre pour faire varier la fréquence propre. Ensuite, elle a été utilisée pour le choix du pot vibrant. En effet, celui-ci doit pouvoir délivrer une puissance suffisante pour que la propagation de fissure par fatigue puisse se produire dans l'éprouvette. Cependant, la puissance maximale délivrée par un pot vibrant ne dépend pas que de la fréquence, mais de biens d'autres paramètres qui ne lui sont pas intrinsèquement propre. En particulier, son comportement modale se couple à celui de la structure qu'il sollicite. Ainsi, le choix du pot vibrant doit se faire en considérant ses caractéristiques dans des conditions bien particulières, ce qui ne facilite pas son choix. Il a donc fallu chercher à modéliser le comportement du pot vibrant en fonctions de ses caractéristiques propres et des

conditions expérimentales. Le lecteur intéressé trouvera en *Annexe 3* les équations simplifiées donnant le comportement électro-magnéto-mécanique du pot vibrant dans son environnement.

Enfin, afin d'avoir une estimation de l'effort que doit fournir le pot vibrant, on peut reprendre l'équation donnant la fonction de transfert et l'appliquer à la fréquence de résonance du mode de traction. Ainsi, en se donnant une valeur d'amortissement modal maximale estimé comme étant égal à 0,5 %, on peut en déduire l'effort à fournir pour un déplacement donné. Il faudrait un effort de 380 N pour une fréquence de résonance de 800 Hz. Le pot vibrant choisi a été obtenu auprès de B&K et ce dernier délivre un effort d'amplitude maximale de 1000 N.

III.2.2.5. *Validation de la conception par l'expérimental*

La validation finale de la conception du montage, consiste à déterminer le comportement modal de celui-ci expérimentalement. En particulier, on vérifie que les modes obtenus expérimentalement correspondent bien à ceux obtenus par le calcul. De plus, afin que le montage puisse être utilisé pour la détermination des seuils de non-propagation de fissure, il faut s'assurer que les niveaux d'effort fournis par le pot vibrant permettent de faire propager une fissure par fatigue dans l'éprouvette. Pour cela, les niveaux d'amortissement associés au mode de traction de l'éprouvette doivent être suffisamment faibles.

La détermination expérimentale du comportement modal du montage peut se faire suivant deux méthodes :

➤ **Essai de réponse à un impact au marteau de choc :**

Pour cet essai, un marteau de choc est nécessaire. Cet outil ressemble à un marteau classique, mais contient en son sein un capteur piézoélectrique permettant de mesurer les efforts qu'il transmet.

L'essai consiste à impacter le plateau rigide libre ou une des masses additionnelles suivant la direction orthogonale à son plan principal. Comme l'impact est bref et quasi-ponctuel, cela revient à exciter le montage suivant une large plage fréquentielle.

La réponse du montage mesurée par les accéléromètres est multi-fréquentielles. A l'aide du logiciel Pulse, il est possible d'obtenir et d'afficher à l'écran d'un ordinateur les fonctions de transferts dans l'espace fréquentiel. Comme la réponse du montage est supposée être linéaire, les fonctions de transferts ne doivent pas être dépendantes de la sollicitation appliquée par le marteau de choc. Cela est vrai en théorie, mais en pratique, ce n'est pas toujours le cas. En effet, il se peut que les conditions d'essais induisent des bruits de mesures importants à cause de l'imperfection des capteurs et du système d'acquisition. Il n'est donc pas rare de recommencer l'essai afin de disposer de signaux de mesures plus nets.

➤ **Essai de réponse vibratoire à un bruit blanc :**

Cet essai consiste à imposer, via le pot vibrant (commandé via le logiciel Pulse), un bruit rose (signal aléatoire temporellement avec un contenu fréquentiel riche) sur le montage. Le chargement imposé par le pot vibrant est mesuré via le capteur d'effort qui se trouve sur la tige de liaison entre le pot vibrant et le montage.

Les deux méthodes précédentes ont été utilisées et donnent des résultats similaires. La seconde méthode a néanmoins été privilégiée puisqu'elle est plus proche des conditions réelles des essais (efforts imposés par le pot vibrant) que la première.

Une fonction de transfert peut être donnée par le rapport entre le déplacement mesuré et l'effort imposé. Comme plusieurs accéléromètres ont été utilisés, plusieurs fonctions de transferts, chacune associée à un accéléromètre, ont pu être obtenues. Notons, néanmoins, qu'un accéléromètre est fait pour

mesurer avec précision une accélération plutôt qu'un déplacement. C'est la raison pour laquelle au lieu de définir une fonction de transfert à partir d'un déplacement, celle-ci est définie à partir d'une accélération pour éviter les problèmes d'intégration numérique (dérivée fictive et pratiquement négligeable de la valeur moyenne au cours d'un cycle, mais cumulée sur des millions de cycles elle peut devenir problématique).

$$H_i(\omega) = \frac{A_{\text{accéléromètre } i}(\omega)}{F(\omega)} = (i.\omega)^2 \cdot \frac{U_{\text{accéléromètre } i}(\omega)}{F(\omega)} \quad (\text{III-27})$$

La **Figure 96** montre comment les accéléromètres ont été positionnés et orientés sur le montage. Quatre accéléromètres sont orientés suivant l'axe de liaison du pot vibrant et deux autres parallèlement au plan orthogonal à cet axe et orthogonaux entre eux.

Le choix du positionnement des accéléromètres aurait pu être tout autre. Mais le fait que les plateaux rigides se comportent justement comme des corps rigides et que tous les modes de ce type ne sont pas tous au voisinage du mode de traction d'intérêt dans l'espace des fréquences réduit drastiquement les possibilités. Ce choix a donc été fait pour faciliter les analyses au voisinage de la fréquence propre associée au mode de traction.

Afin d'illustrer la méthode d'analyse du comportement modal, on considère le cas où le montage contient cinq masses supplémentaires de 10 Kg chacune et est sollicité via le pot vibrant. Les évolutions avec la fréquence des modules des différentes fonctions de transfert sont tracées sur la **Figure 97**. Sur la plage fréquentielle illustrée, trois pics se distinguent nettement du bruit. Il s'agit de deux modes de flexion et du mode de traction d'intérêt.

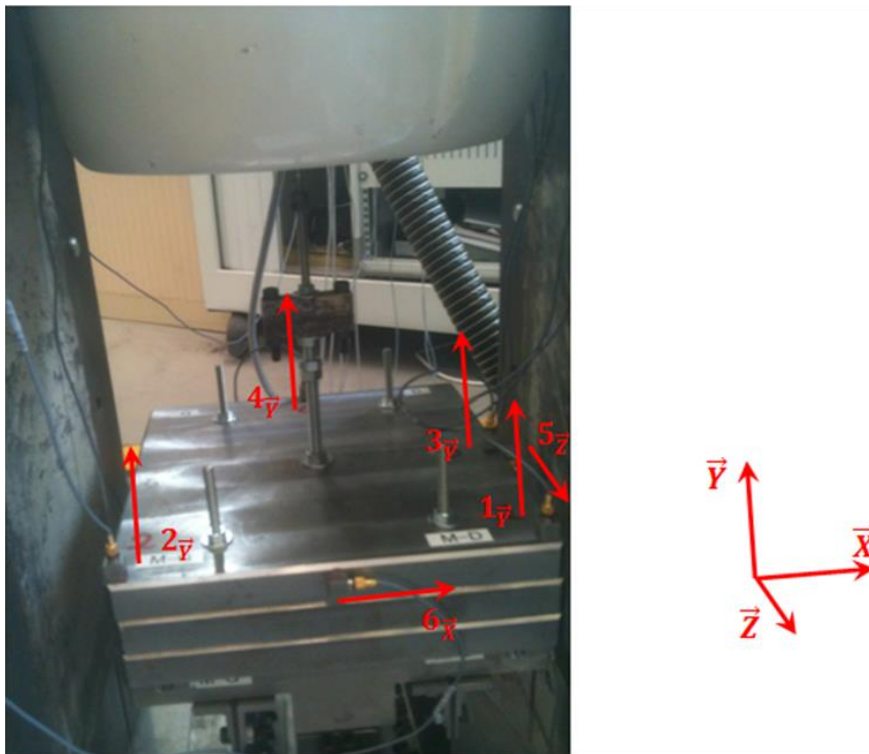


Figure 96: Positionnement et orientation des accéléromètres pour la réalisation d'un essai de détermination du comportement modal du montage. Le montage se trouve dans la configuration avec trois masses de 10 Kg supplémentaires.

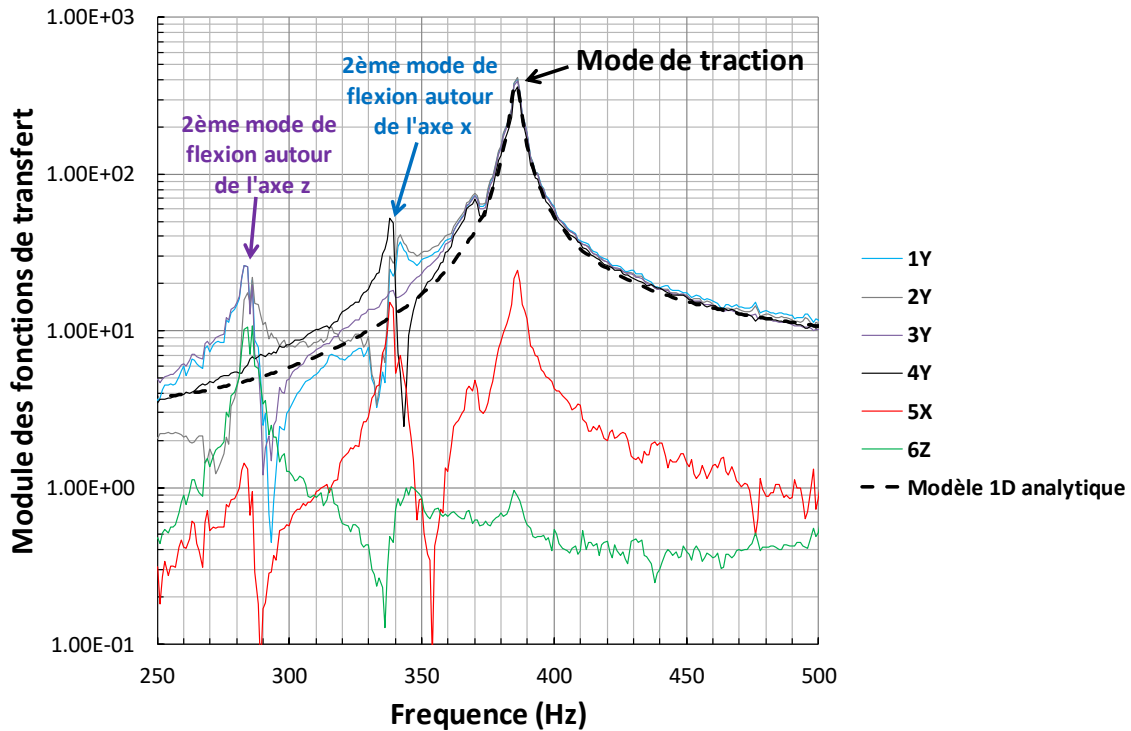


Figure 97: Evolutions des modules des fonctions de transfert avec la fréquence de sollicitation dans le cas du montage avec cinq masses additionnelles sur l'intervalle fréquentiel [250 Hz – 500 Hz] (avec pour le modèle analytique : $M = 0,25 \text{ kg}\cdot\text{s}^2$, $\zeta = 0,5\%$, $\omega_0 = 2422 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $A = 1 \text{ s}\cdot\text{kg}^{-1}$ and $B = -2\cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$):

A partir du module des fonctions de transfert, il est possible d'identifier l'amortissement modal associé au mode de traction. Pour cela un simple modèle à un degré de liberté est utilisé. Celui-ci est corrigé par les contributions des modes de basses fréquences (inférieurs à celles de la fréquence propre du mode de traction), regroupés en une seule ($\frac{A}{\omega^2}$), et par les contributions des modes de hautes fréquences, également regroupés en une seule (B).

$$|H_{\text{simplifié analytique 1D}}(\omega)| = \left| \left(\frac{1}{M \cdot (\omega_0^2 + 2 \cdot i \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \omega - \omega^2)} + \frac{A}{\omega^2} + B \right) \cdot \omega^2 \right| \quad (\text{III-28})$$

où M , ζ , ω_0 , A et B sont, respectivement, la masse dynamique du mode de traction normalisée, l'amortissement modal associé et les coefficients de correction de basses et de hautes fréquences.

A l'aide de ce modèle simple, il s'en déduit que l'amortissement modal associé au mode de traction vaut 0,5 %. Cette analyse a été réalisée sur l'ensemble des configurations avec les masses additionnelles et cette valeur est restée inchangée. Elle est inférieure au seuil à ne pas dépasser de 0,56 %. Cela montre que cet assemblage est apte à atteindre des niveaux de chargements vibratoires compatibles avec le besoin.

Le **Tableau 9** synthétise une comparaison entre les données issues de calculs éléments finis et celles issues d'essais concernant les fréquences propres associées aux déformées modales présentées précédemment (**Figure 85**). Cette comparaison montre quelques écarts entre les simulations et les calculs, mais les ordres de grandeurs sont bien respectés. En effet, certaines simplifications ont été considérées dans les simulations comme le fait que le comportement des plaques de précontraintes en matériau composite est supposé isotrope alors qu'en réalité il est orthotrope. De plus, le comportement des vis n'a pas été pris en compte dans les simulations. Malgré les écarts, les constatations faites sur la

séparation des modes appliquée sur le mode de traction se vérifient expérimentalement également, quelle que soit la configuration du montage en termes de masses additionnelles. Cela permet de valider définitivement le comportement dynamique du montage.

Tableau 9 : Comparaison entre les fréquences propres obtenues par calcul et celles obtenues expérimentalement pour différentes configuration du montage. Le critère de séparation des modes est appliqué sur les fréquences propres expérimentales.

Nombre de masses additionnelles	Fréquence propre expérimentale / numérique (Hz)				Critère de séparation modale appliquée sur le mode expérimental de traction / compression
	Mode α	Mode β	Mode δ	Mode γ	
0	151/226	677/631	738/754	767/785	$\Phi_{max} = 0.25 < 1$
2	-/137	409/382	504/490	566/506	$\Phi_{max} = 0.08 < 1$
3	112/119	351/300	436/432	409/451	$\Phi_{max} = 0.16 < 1$
5	95/98	283/265	386/367	338/381	$\Phi_{max} = 0.08 < 1$

III.2.3. Procédure de mesure du seuil de non-propagation de fissure longue

III.2.3.1. Contrôle et mesure du chargement appliqué sur l'éprouvette

Afin de pouvoir déterminer le facteur d'intensité des contraintes imposé en pointe de fissure, il faut tout d'abord connaître le chargement appliqué sur l'éprouvette. Pour cela, des jauges de déformation sont collées sur cette dernière. Une simulation par éléments finis de l'éprouvette a été menée à cet effet en élasticité linéaire. Le chargement de compression imposé F^* sur les talons de celle-ci a été de 15000 N. Le résultat issu du calcul a permis de relier le champ de déformation au chargement appliqué sur l'éprouvette par une relation de proportionnalité dans le cas sans fissure. Le champ de déformation, qui a été obtenu à l'endroit où doit se situer une jauge de déformation, est moyenné sur la surface de cette dernière (*Figure 98*).

Le choix de positionner une jauge près du trou elliptique se justifie par le fait que le champ de déformation y est plus important. Ainsi, le bruit de mesure sera d'autant plus réduit. Cependant, la région dans laquelle la jauge est positionnée se déforme de manière non-homogène (*Figure 98*), mais le gradient de ce champ est quasi-constant suivant la direction Y (suivant la largeur de l'éprouvette) dans la région couverte par la jauge, comme le montre la *Figure 99* et quasi nul suivant la direction Z (suivant la longueur de l'éprouvette) comme le montre la *Figure 98* dans le cas sans fissure. Si une fissure de 26 mm est considérée, un faible gradient dans la direction Z est présent, mais il peut être négligé du fait de la faible hauteur des jauges comparativement à l'échelle caractéristique du gradient (*Figure 100*). La déformation moyenne ϵ^* à l'endroit où la jauge est positionnée s'en déduit immédiatement et vaut $-1,85 \cdot 10^{-3}$.

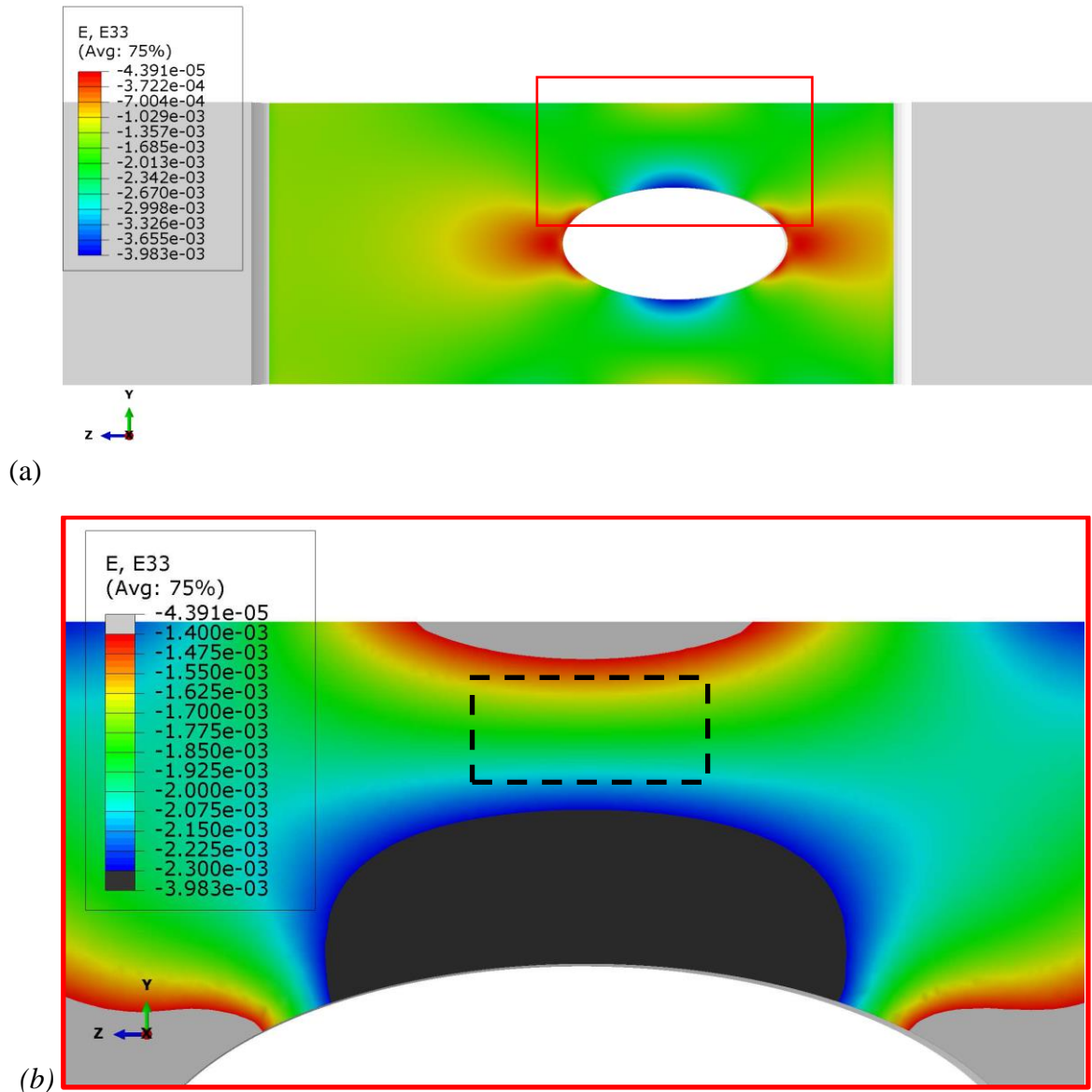


Figure 98. Champ de déformation dans la direction du chargement (cas sans fissure).

(a) Vue complète de l'éprouvette,

(b) Zoom sur la partie où la jauge de déformation est collée (cadre en noir).

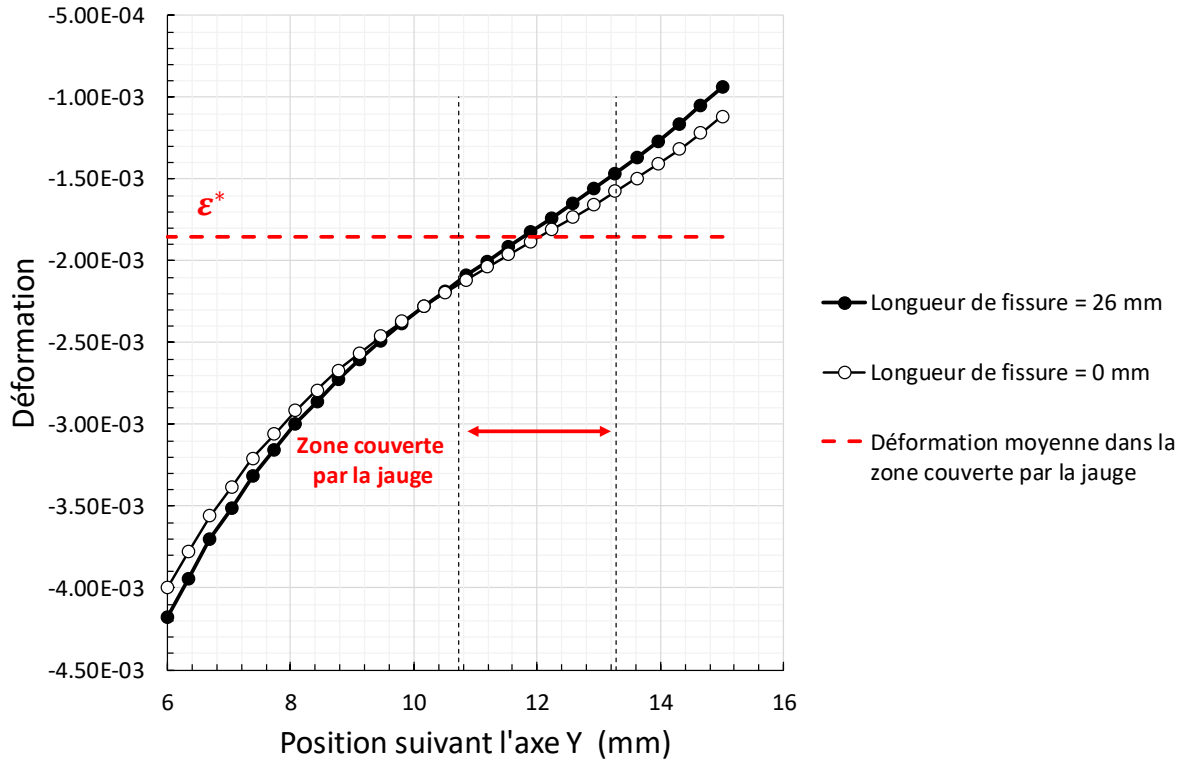


Figure 99: Evolution du champ de déformation longitudinal suivant la largeur de l'éprouvette. L'origine du repère est le centre du trou elliptique.

Afin de vérifier que le chargement imposé sur l'éprouvette est bien un chargement de traction et non une combinaison linéaire de chargements issus de différents modes, quatre jauges sont collées sur l'éprouvette. La première est située à l'endroit indiquée sur la **Figure 98**. La deuxième est positionnée symétriquement à la précédente de l'autre côté du trou elliptique et les deux dernières sont collées sur l'autre face de l'éprouvette aux mêmes endroits que les deux premières jauges. Ainsi, si les jauges de déformation indiquent des valeurs identiques de la déformation à un instant donné, c'est que le chargement appliqué sur l'éprouvette est de type traction-compression. Sinon, si les valeurs sur les jauges sont déphasées, alors l'éprouvette est soit soumise à de la flexion ou à de la torsion, soit à du flambement. La force F de compression appliquée sur l'éprouvette se déduit par l'intermédiaire de la formule suivante :

$$F(t) = \frac{F^*}{\epsilon^*} \cdot \frac{\sum_{i=1}^4 \epsilon_i(t)}{4} \quad (\text{III-29})$$

où ϵ_i représente la déformation mesurée par la $i^{\text{ème}}$ jauge. Cette formule est à la fois utilisée pour contrôler l'amplitude de la force imposée sur l'éprouvette, mais également pour imposer le niveau de la charge statique sur celle-ci juste avant le début des essais.

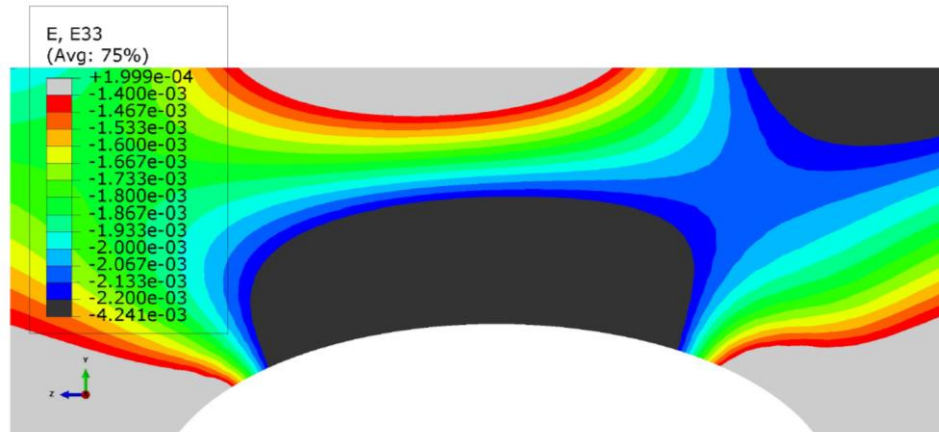


Figure 100. Champ de déformation dans la direction du chargement (cas d'une fissure de 26 mm).

Tous les calculs réalisés l'ont été sous l'hypothèse d'élasticité linéaire homogène et isotrope. Il est donc important que les conditions expérimentales respectent les contraintes suivantes :

- L'amplitude du chargement appliqué sur l'éprouvette doit être telle que l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes pour une fissure de 2 mm (dimension de l'entaille initiale) soit supérieure au seuil de non-propagation de fissure correspondant au rapport de charge à tester.
- Le chargement maximal appliqué sur l'éprouvette ne doit jamais conduire à de la déformation plastique (dans le pire des cas, la dimension de la zone plastique doit être la plus faible possible et l'hypothèse d'élasticité adaptée (ou de plasticité premier cycle) doit être respectée).
- Il doit être possible de pouvoir tester une vaste gamme de rapports de charge.

Tableau 10: Chargements testés expérimentalement sur des éprouvettes en Ti-6Al-4V. La limite d'écoulement de ce matériau à température ambiante est de 800 MPa (Le Biavant-Guerrier, 2000).

Amplitude d'effort ΔF appliquée sur l'éprouvette (N)	Effort maximum appliqué sur l'éprouvette (N)	Contrainte de Von Mises locale maximum (MPa)	Rapport de charge R
10800	16650	526	0,35
10800	21600	682	0,5
7200	24000	758	0,7
4500	25050	792	0,82

Le *Tableau 10* liste les conditions expérimentales de chargement utilisées lors des essais à hautes fréquences. Pour chaque rapport de charge, l'éprouvette ne subit aucune déformation plastique (sauf pour les rapports de charge au-dessus de 0,7 et pour une longueur de fissure de 26 mm qui n'a jamais été atteinte expérimentalement), mais les marges de manœuvre sont très faibles lorsque le rapport de

charge augmente au vu de la proximité des contraintes locales de Von Mises maximales avec la limite d'écoulement du matériau dans le cas extrême d'un rapport de charge de 0,82.

Pour finir, c'est la courbe d'évolution du facteur d'intensité des contraintes normalisé par l'effort imposé sur l'éprouvette en fonction de la longueur de fissure (**Figure 74**), associé à la formule donnant l'effort en fonction des déformations mesurées par les jauges et de la longueur de fissure à la fin de l'essai, qui permet de déterminer le seuil de non-propagation de fissure à la fin de l'essai.

III.2.3.2. Détermination du nombre de cycles de fatigue à imposer sur l'éprouvette pour atteindre le seuil de non-propagation de fissure par fatigue

Comme la longueur de fissure n'est pas mesurée au cours d'un essai de propagation de fissure avec le montage précédent (et donc l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes), il est primordial de définir une procédure expérimentale afin de garantir que le seuil de non-propagation de fissure est bien atteint avant la fin de l'essai. Le nombre de cycles de chargement à appliquer sur l'éprouvette avant l'arrêt d'un essai a été fixé à 9000000. Le bon choix de l'amplitude de chargement à appliquer sur l'éprouvette est essentiel. En effet, si celui-ci est trop élevé, il se peut que la fissure ne se propage pas suffisamment pour que l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes atteigne le seuil de non-propagation de fissure longue après 9000000 de cycles.

La procédure consistant à déterminer l'amplitude du chargement à délivrer sur l'éprouvette conduit à utiliser une estimation de la vitesse de propagation de fissure fondée sur des résultats d'essais en quasi-statique à rapport de charge égal à 0,1 (Ding et al., 2005). Le choix de ce rapport de charge se justifie par le fait que la vitesse de propagation de fissure est plus faible pour ce rapport de charge que pour ceux qui ont été testés dans cette étude. C'est une loi de Paris qui a servi à réaliser l'identification (avec $C = 1,5 \cdot 10^{-12}$ et $n = 3,8$) :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^n \quad (\text{III-30})$$

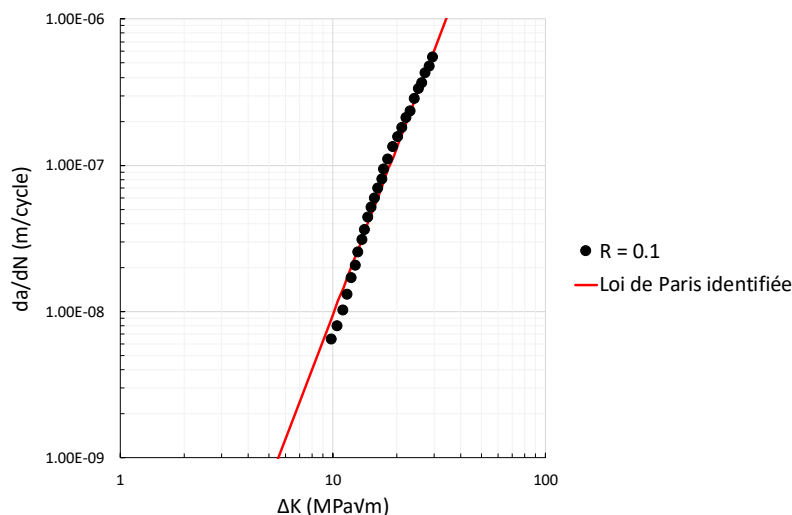


Figure 101: Courbe expérimentale $da/dN - \Delta K$ du Ti-6Al-4V obtenue sous condition quasi-statique (Ding et al., 2005).

Enfin, l'association de ce qui suit permet de déterminer l'amplitude du chargement à imposer sur l'éprouvette pour la recherche du seuil de non-propagation de fissure :

- La fissure est supposée s'arrêter à des valeurs de seuils de non-propagation de fissure inférieures ou égales à celles obtenues dans la littérature en quasi-statique (Ding et al., 2005; Moshier et al., 2001).
- La relation entre $\frac{\Delta K_I}{\Delta F}$ (par analogie avec $\frac{K_I}{F}$) et la longueur de fissure (**Figure 74**). La formule analytique identifiée issue de la norme ASTM E647 (ASTM E647, 2015) constitue une excellente approximation de celle-ci.
- L'intégration analytique de la loi de Paris identifiée fait intervenir explicitement l'amplitude de l'effort à déterminer.
- La longueur de fissure initiale à considérer est de 1,5 mm.

III.2.3.3. Mesure des longueurs de fissure après un essai

Suite à un essai de propagation de fissure par fatigue sur le montage, les éprouvettes sont observées au Microscope Electronique à Balayage (MEB) afin de déterminer la dimension de la fissure atteinte au seuil de non-propagation de fissure longue (**Figure 102**). Connaissant le chargement mesuré sur les jauges et l'évolution du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure, il est alors possible de déterminer, a posteriori, le seuil de non-propagation de fissure longue. La précision sur la mesure de la pointe de fissure est supposée être de $\pm 30 \mu\text{m}$. Cela est moins que l'erreur supposée dans la **Figure 74**.

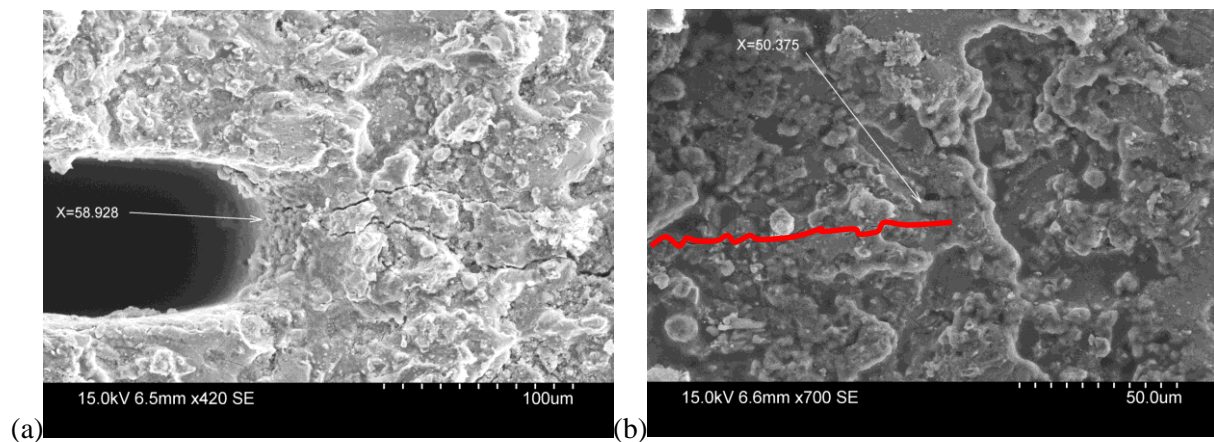


Figure 102: Observations obtenues au MEB :
(a) en pointe de l'entaille (visualisation de l'amorçage de microfissures),
(b) pointe de fissure (arrêt de la propagation au seuil de non-propagation de fissure par fatigue) et trajet de fissuration reproduit par la courbe en rouge.

La figure précédente montre que plusieurs fissures peuvent s'amorcer à la pointe de l'entaille. Néanmoins, il n'y a qu'une seule fissure qui se propage jusqu'au seuil de non-propagation de fissure longue par fatigue.

III.3. Exploitation des données expérimentales

III.3.1. Comparaison des seuils obtenus à faibles fréquences sur la nouvelle éprouvette et sur éprouvettes standards

Dans cette sous-section, est présentée une comparaison entre les résultats d'essais obtenus avec trois géométries d'éprouvettes. La première géométrie est celle présentée dans ce chapitre, la deuxième est celle qui a été utilisée dans le cadre du programme RAMGT et illustrée sur la figure suivante et enfin la dernière est une éprouvette CT.



Figure 103: Eprouvette CC (« Corner Crack ») utilisée pour les essais de propagation de fissure dans le cadre du programme RAMGT.

Le **Tableau 11** donne, pour les différents rapports de charge testés sur une machine de traction conventionnelle fonctionnant à 30 Hz, les longueurs de fissure mesurées au MEB sur la géométrie d'éprouvette présentée dans ce chapitre. Il donne également les amplitudes d'effort imposées sur l'éprouvette afin de permettre la détermination du seuil de non-propagation de fissure. Enfin, les niveaux de chargements sont tels que l'éprouvette n'a pas subi de déformation plastique, tant que le rapport de charge ne dépasse pas 0,6. Dans le cas du rapport de charge de 0,7, les marges de manœuvres sont très faibles. Il se peut tout à fait qu'à cause de la propagation de fissure, la marge ait disparu conduisant à de la plasticité premier cycle (élasticité adaptée). Cet effet ne modifie pas l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes, mais uniquement le rapport de charge. Ce biais éventuel sera supposé négligeable dans la suite.

La **Figure 104** donne, les évolutions des seuils de non-propagation de fissure par fatigue en fonction du rapport de charge. On peut constater que la nouvelle géométrie d'éprouvette ne semble pas modifier la valeur du seuil relativement aux essais RAMGT (dont les fréquences de sollicitations vont de 1 Hz à 20 Hz). On note également que les tendances observées par Boyce sur éprouvette CT (Boyce & Ritchie, 2001) sont respectées, même si le Ti-6Al-4V testé n'est pas le même que celui de cette étude. On en conclut que la nouvelle géométrie d'éprouvette proposée n'introduit aucun biais notable sur les résultats.

Tableau 11 : Conditions expérimentales et longueurs de fissures mesurées au MEB lors d'essais réalisés à 30 Hz.

Amplitude crête à crête d'effort ΔF appliquée (N)	Contrainte de Von Mises locale maximale (MPa) (Limite d'élasticité de 800 MPa)	Rapport de charge R	Longueur de fissure à la fin de l'essai (mm)
13500	483	0,1	11,6
14520	668	0,3	12,6
13755	886	0,5	12,7
8505	684	0,6	10
7274	780	0,7	8,5

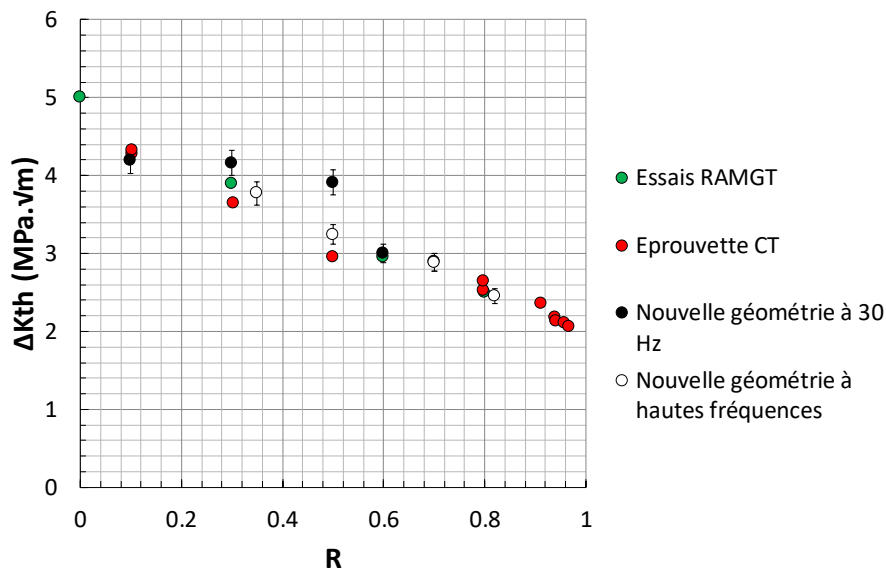


Figure 104: Seuils de non-propagation de fissure obtenus pour des sollicitations à faibles fréquences à R constant sur les éprouvettes RAMGT, CT et nouvelle géométrie. Les essais sur éprouvettes CT ont été réalisés à 50 Hz et 1000 Hz (avec une machine de traduction servo-hydraulique MTS) sur un Ti-6Al-4V bimodal. Les essais RAMGT ont été réalisés à 1 Hz et 20 Hz. Les barres d'incertitude sur la nouvelle géométrie d'éprouvette correspondent à une erreur de $\pm 500 \mu m$. En réalité l'incertitude serait plutôt de $\pm 30 \mu m$ ce qui correspondrait à une erreur maximum sur ΔK_{th} de 0,24 %.

III.3.2. Influence de la fréquence sur le seuil de non-propagation de fissure

Le **Tableau 12** et le **Tableau 13** donnent les caractéristiques des essais réalisés à hautes fréquences. De manière analogue avec la sous-section précédente, les marges avant l'apparition de la plasticité sont faibles pour les rapports de charge de 0,7 et 0,82, mais acceptables pour les autres rapports de charge. Les conclusions sur ce point sont donc identiques.

La **Figure 104** contient les résultats obtenus sur les seuils à hautes fréquences. Au vu des résultats, il semblerait donc qu'une sollicitation à haute fréquence ne conduit à aucun phénomène nouveau observé par rapport à une sollicitation à 30 Hz, du moins pour le Ti-6Al-4V de cette étude.

Tableau 12 : Conditions expérimentales en termes de chargements mécaniques.

Amplitude crête à crête d'effort ΔF appliquée (N)	Amplitude crête à crête de déplacement du plateau rigide libre avec masses additionnelles (mm)	Effort maximal appliqué F_{max} (N)	Contrainte de Von Mises locale maximale (MPa) (Limite d'élasticité de 800 MPa)	Rapport de charge R
10800	$8,97.10^{-2}$	16650	526	0,35
10800	$8,97.10^{-2}$	21600	682	0,5
7200	$5,98.10^{-2}$	24000	758	0,7
4500	$3,74.10^{-2}$	25050	792	0,82

Tableau 13 : Compléments aux conditions expérimentales données dans le Tableau 12 et longueurs de fissure mesurées lors des essais à hautes fréquences.

Amplitude crête à crête d'effort ΔF appliquée (N)	R	Nombre de masses additionnelles	Fréquence propre du mode de traction (Hz)	Longueur de fissure (mm)
10800	0,35	3	415	10,12
10800	0,5	0	792	12
7200	0,7	0	803	8,6
4500	0,82	0	800	4,57

III.3.3. Modélisation et discussion

Les résultats précédents ont montré que ni la variante du Ti-6Al-4V, ni la géométrie de l'éprouvette et ni la fréquence de sollicitation (dans une gamme [30 Hz – 803 Hz]) n'ont d'impact sur le seuil de non-propagation de fissure longue par fatigue. Pour l'analyse qui va suivre, on aura besoin de la valeur du seuil de non-propagation de fissure longue à $R = -1$. Celle-ci sera prise égale à $6,5 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ (Moshier et al., 2001).

L'analyse théorique des mécanismes d'auto-échauffement et de thermo-élasticité a montré que ces derniers pouvaient éventuellement intervenir dans le comportement du Ti-6Al-4V via l'effet de la fréquence. Cependant, les résultats d'essais n'ont rien montré de tel. Le comportement de ce matériau peut donc être modélisé sans faire intervenir une dépendance explicite à la fréquence de sollicitation.

Cela ne signifie pas pour autant, que ces mécanismes n'interviennent pas. En effet, il se peut que d'autres mécanismes compensent leurs effets comme le fluage à froid ou « dwell effect ». Des mesures du champ de température au voisinage de la pointe de fissure pendant un essai à haute fréquence permettraient d'apporter des éléments confirmant ou non certains scénarios envisageables.

La **Figure 105** donne une représentation des résultats obtenus dans un diagramme $\Delta K_{th} - K_{max th}$ (Boyce & Ritchie, 2001). On y voit deux tendances, une pour les rapports de charge suffisamment faibles et une dernière pour les rapports de charge suffisamment élevés. Celles-ci peuvent toutes les deux être représentées par des droites dont on a donné les équations sur la figure. Ces résultats confirment les tendances rapportées dans la littérature.

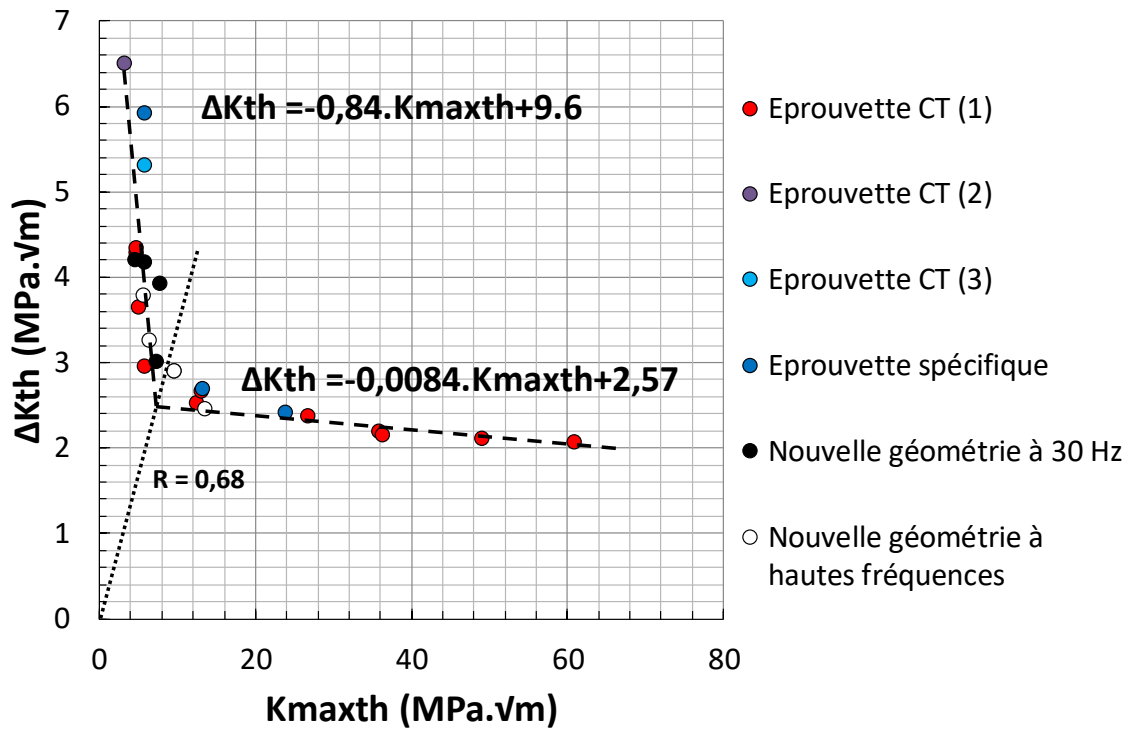


Figure 105: Représentation des seuils de non-propagation de fissure dans un diagramme $\Delta K_{th} - K_{max th}$:
 - Epreuve CT (1) : Essais à 50 Hz et 1000 (Boyce & Ritchie, 2001),
 - Epreuve CT (2) : Essais à 50 Hz (Moshier et al., 2001),
 - Epreuve CT (3) : Essai à $R = 0,1$ et à 30 Hz (Chretien et al. 2016),
 - Epreuve spécifique : Essais à 20 kHz (Bathias et al., 1997).

III.4. Synthèse

Dans ce chapitre une nouvelle géométrie d'éprouvette a été proposée. Son intérêt est triple. Tout d'abord elle permet d'imposer un taux de décroissance du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure pour une amplitude de chargement appliquée constante compatible avec ce qui est préconisé dans la norme. Elle évite, par conséquent, tous les problèmes liés à l'asservissement en facteur d'intensité des contraintes nécessaire à la réalisation d'essais sur des éprouvettes standards. Ensuite, elle est peu sensible aux variations de conditions aux limites. Enfin, la mesure du seuil de non-propagation de fissure longue est robuste dans la mesure où une erreur de mesure sur la longueur de fissure de plus ou moins 500 microns à la fin de l'essai entraîne une faible erreur dans la détermination de cette quantité.

Le montage proposé pour la réalisation d'essais à hautes fréquences réalise de manière simple deux fonctions. La première consiste à imposer un effort statique à l'aide d'un montage de préchargement afin de solliciter l'éprouvette à un rapport de charge donné positif. La deuxième utilise le principe de l'amplification modale pour atteindre des niveaux de chargement vibratoire suffisants. L'excitation est réalisée à l'aide d'un pot vibrant et le montage est dimensionné en régime vibratoire et en flambement afin que les essais se déroulent correctement.

Les essais ont montré que le seuil de non-propagation de fissure longue par fatigue du Ti-6Al-4V ne dépend ni de la variété du matériau (parmi les variétés analysées), ni de la géométrie de l'éprouvette et ni de la fréquence de sollicitation. Cela ne signifie par pour autant que certains mécanismes conduisant à des effets de fréquence comme l'auto-échauffement, la thermoélasticité ou le fluage à froid n'interviennent pas. Il se pourrait tout à fait qu'ils se compensent mutuellement. L'évolution du seuil avec le rapport de charge peut être modélisée par deux fonctions affines dans un diagramme $\Delta K_{th} - K_{max th}$.

Enfin, mentionnons le fait que le protocole expérimental proposé diffère notablement des standards habituels. En effet, le seuil de non-propagation de fissure est généralement déterminé comme une valeur en ΔK en-dessous de laquelle la vitesse de propagation de fissure moyenne sur un nombre de cycles donné est plus faible qu'un certain seuil. Ici, le seuil de non-propagation de fissure a été obtenu en se fixant un nombre de cycles maximal donné ainsi qu'une amplitude de contrainte initiale imposée à la nouvelle géométrie d'éprouvette. La relation entre les résultats obtenus par le protocole standard et par celui proposé dans ce chapitre n'a pas été investiguée en détail, mais elle mériterait une étude plus approfondie à l'avenir.

IV/ Critère de fatigue non-local fondé sur la mécanique linéaire de la rupture

IV.1. Un critère fondé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture

IV.1.1. Introduction

On a montré au **chapitre II** que les approches locales ne permettent pas de rendre compte des effets de gradient et d'échelle observés expérimentalement. Quant aux approches non-locales formulées à partir de la mécanique des milieux continus, elles ne permettent pas de modéliser les effets d'arrêt de fissure constatés lorsque les gradients de contrainte sont suffisamment importants. Mais notons également, que ce n'est pas leur objectif non plus. On se propose dans cette sous-section de présenter un modèle fondé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture. Celui-ci est formulé à partir du développement asymptotique du tenseur des contraintes en pointe de fissure étendu aux premiers termes non-singuliers. Une discussion sur ses capacités à modéliser tous les effets cités précédemment sera menée.

IV.1.2. Un critère multiaxial pour les chargements proportionnels

IV.1.2.1. Critère d'Emmanuelle Thieulot-Laure (critère TL)

Afin de rendre compte à la fois des effets de fissure courte et longue, une des conditions les plus simples est de formuler un critère fondé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture. Les travaux de Rami Hamam (Hamam, 2006) et d'Emmanuelle Thieulot-Laure (Thieulot-Laure et al., 2007; Thieulot-Laure, 2008) suggèrent que celui-ci peut s'écrire à partir des deux premiers termes du développement asymptotique du tenseur des contraintes au voisinage de la pointe de fissure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) + T \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \\ \sigma_{zz}(r, \theta) = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \text{ en déformation plane} \end{array} \right. \quad (\text{IV-1})$$

Dans le but de mieux comprendre à quoi correspond le premier terme non-singulier du développement asymptotique du tenseur des contraintes au voisinage de la pointe de fissure (ou contrainte T), considérons le cas d'une fissure plane à front droit de longueur $2 \cdot a$ plongée dans un milieu infini et soumise à un chargement biaxial (**Figure 106**). Ce cas a été résolu analytiquement par Williams (Williams, 1957). Le facteur d'intensité des contraintes et la contrainte T qui résultent de l'analyse s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = S_y \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = S_x - S_y \end{array} \right. \quad (\text{IV-2})$$

Ainsi, la contrainte T est une contrainte homogène suivant la direction parallèle au plan de fissuration et orthogonal au front de fissure dont la valeur est fixée par la biaxialité du chargement. On remarquera qu'elle ne dépend pas de la longueur de fissure. La formulation d'un critère à partir de la valeur du facteur d'intensité des contraintes et de celle de la contrainte T implique les résultats suivants :

- Pour un chargement donné, lorsque la dimension de la fissure diminue, la valeur du facteur d'intensité des contraintes en fait de même. Cependant, la contrainte T reste inchangée. Ainsi, pour des fissures courtes, le terme prépondérant du critère porte sur la contrainte T ce qui permet de prédire des effets de biaxialité du chargement indépendamment des dimensions de la fissure.
- Pour des fissures longues, le terme en facteur d'intensité des contraintes est le terme prépondérant, ce qui conduit à retrouver les tendances expérimentales du régime de fissure longue.

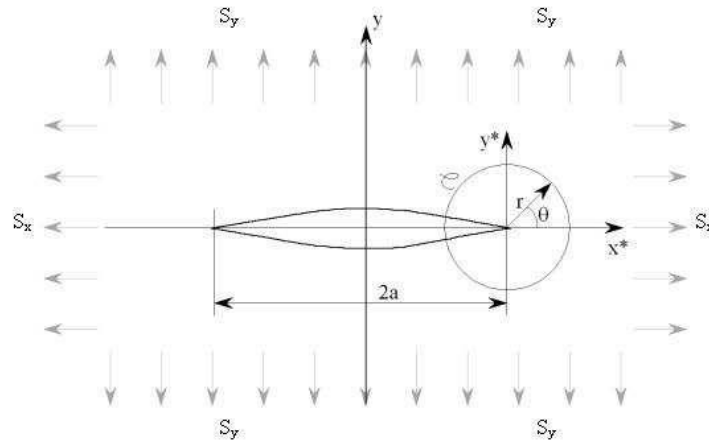


Figure 106 : Fissure plane à front droit plongée dans un milieu infini homogène et isotrope et soumise à un chargement biaxial.

Les expressions précédentes des facteurs d'intensité des contraintes et contrainte T dépendent de la géométrie de la fissure. Par exemple, pour une fissure circulaire de rayon a plongée dans un milieu infini ou une fissure semi-circulaire débouchant en surface, Wang a proposé les expressions suivantes (**Figure 107**) :

- Pour une fissure circulaire (Wang, 2004) :

$$\begin{cases} K_I = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = \sigma_t - \frac{1 + 2 \cdot \nu}{2} \cdot \sigma_n \end{cases} \quad (\text{IV-3})$$

- Pour une fissure semi-circulaire (Wang, 2003) :

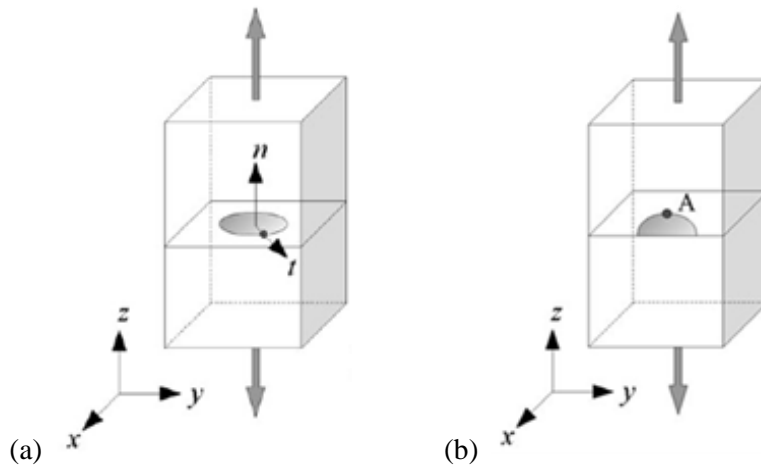
$$\begin{cases} K_I = 0,663 \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = \sigma_t - 0,532 \cdot \sigma_n \end{cases}, \text{ avec } \nu = 0,3 \quad (\text{IV-4})$$

Afin d'établir ces formules, les notations suivantes ont été employées :

- \underline{t} est la normale au front de fissure et parallèle au plan de fissuration,
- \underline{n} est la normale au plan de fissure,
- $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes appliqué à l'infini,

- $\sigma_n = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}}$ est la contrainte à l'infini et suivant la direction $\underline{\underline{n}}$,

- $\sigma_t = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{t}}) \cdot \underline{\underline{t}}$ est la contrainte à l'infini et suivant la direction $\underline{\underline{t}}$.



*Figure 107 : Représentations de deux géométries de fissures :
(a) fissure circulaire plongée dans un milieu infini,
(b) fissure semi-circulaire débouchant en surface.*

On voit ici l'intérêt de formuler un critère de fatigue à partir du facteur d'intensité des contraintes et de la contrainte T plutôt qu'à partir du tenseur des contraintes macroscopique, car cela permet de rendre directement compte de l'effet de la géométrie du défaut.

Le critère d'Emmanuelle Thieulot-Laure (nommé critère TL dans la suite) suppose que le matériau considéré contient des défauts assimilables à des fissures, orientées orthogonalement à la contrainte principale maximale (assimilable à un plan critique) et que leur propagation est liée à la plasticité en pointe de fissure (Thieulot-Laure et al., 2007; Thieulot-Laure, 2008).

Le critère se construit de la même manière que le critère de Von Mises et suppose qu'il n'y a pas d'écoulement plastique tant que l'énergie élastique de cisaillement du milieu ne dépasse pas un certain seuil. La même hypothèse est retenue, mais pour une région de rayon δ autour de la pointe de fissure (**Figure 108**). Tant que l'énergie élastique de cisaillement dans cette zone ne dépasse pas un certain seuil, il n'y a pas de déformation plastique notable et donc de propagation de la fissure.

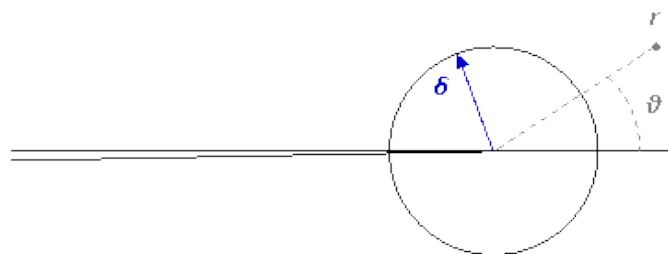


Figure 108 : Domaine d'intégration de rayon δ en pointe de fissure et repérage.

L'hypothèse de déformation plane, dans le plan orthogonal au front de la fissure, conduit à l'expression suivante des champs de déplacements au voisinage de sa pointe, où r est la distance à sa pointe et θ l'angle au plan de fissuration :

$$\begin{cases} u_x(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) + \frac{T}{8 \cdot \mu} \cdot (\kappa + 1) \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ u_y(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) - \frac{T}{8 \cdot \mu} \cdot (3 - \kappa) \cdot r \cdot \sin(\theta) \\ u_z(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-5})$$

avec :

$$\begin{cases} \mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \\ \kappa = 3 - 4 \cdot \nu \end{cases} \quad (\text{IV-6})$$

A partir de ces formules, on calcule le tenseur des déformations et avec la loi de Hooke (ici on ne s'intéresse qu'aux matériaux isotropes) on obtient le tenseur des contraintes. La densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement s'exprime alors comme suit :

$$w = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma'}} \cdot \underline{\underline{\epsilon'}}) \text{ avec } \begin{cases} \underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \cdot \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ \underline{\underline{\epsilon'}} = \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3} \cdot \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{cases} \quad (\text{IV-7})$$

L'énergie élastique déviatorique U par unité de longueur de front de fissure se calcule à partir de w intégrée sur un disque de rayon δ entourant la pointe de fissure :

$$U(K_I, T) = \int_{r=0}^{r=\delta} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma'}} \cdot \underline{\underline{\epsilon'}}) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (\text{IV-8})$$

Tant que U ne dépasse pas une valeur critique U_C , on postule qu'il n'y a pas d'émoussement plastique en pointe de fissure, par analogie avec le critère de Von Mises :

$$U(K_I, T) \leq U_C \quad (\text{IV-9})$$

Afin d'identifier le coefficient U_C , on peut imposer $T = 0$ MPa et se placer au seuil de plasticité. Pour cette condition le facteur d'intensité des contraintes K_I est égal au seuil de non-propagation de fissure longue $K_{I\text{Th}}$ (longue car $T = 0$ MPa ou négligeable devant K_I) et le critère devient :

$$\frac{U(K_I, T)}{U(K_{I\text{Th}}, 0)} \leq 1 \quad (\text{IV-10})$$

Cela conduit à l'expression suivante après quelques simplifications :

$$\left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right)^2 + f_v \cdot \left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right) \leq 1 \quad (\text{IV-11})$$

Les différents coefficients de cette relation sont définis en fonction de $K_{I\text{th}}$, ν et δ de la manière suivante :

$$\begin{cases} f_v = \frac{32 \cdot (1 - 10 \cdot v + 10 \cdot v^2)}{15 \cdot \pi \cdot \sqrt{(1 - v + v^2) \cdot (7 - 16 \cdot v + 16 \cdot v^2)}} \\ T_{Th} = \frac{K_{ITh}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \delta}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7 - 16 \cdot v + 16 \cdot v^2}}{\sqrt{1 - v + v^2}} \end{cases} \quad (IV-12)$$

Le seuil T_{Th} peut être interprété comme un seuil de plasticité pour la contrainte T . Comme le seuil de non-propagation de fissure est déterminé à partir d’essais pour lesquels le chargement est cyclique et à rapport de charge égal à -1, on prend :

$$K_{ITh} = \frac{\Delta K_{ITh}}{2} \quad (IV-13)$$

IV.1.2.2. *Cahier des charges pour une extension du critère TL*

Le critère TL n’est utilisable que pour des chargements biaxiaux. En effet, le champ de contrainte au voisinage de la pointe de fissure obtenu par Williams (Williams, 1957) est déterminé sous l’hypothèse de déformations planes. Or, les sollicitations mécaniques réellement imposées en pointe de fissure sont plus générales que cela. Si on considère un chargement multiaxial homogène et proportionnel, on peut toujours se ramener à un repère dans lequel le chargement s’écrit en composante principale. La fissure est alors introduite de manière à ce que son plan de fissuration soit orienté orthogonalement à la direction de la contrainte principale maximale. Afin d’illustrer notre propos, la fissure est supposée plane à front droit et plongée dans un milieu infini.

Une représentation d’un tel chargement est donnée sur la **Figure 109**. Comme l’hypothèse d’élasticité linéaire est adoptée, celui-ci peut se décomposer en trois sollicitations élémentaires. La première correspond à un chargement équi-biaxial en déformation plane qui joue sur le facteur d’intensité des contraintes uniquement. La deuxième correspond à un chargement de traction en déformation plane dans la direction du plan de fissuration et orthogonal au front de fissure. Cette sollicitation induit une contrainte T . Enfin, la contrainte T_z est introduite. Celle-ci permet d’introduire une déformation uniforme le long du front de fissure, qui n’était pas prise en compte dans le critère précédent. Le fait de tenir compte de ce nouveau terme dans le critère TL permet de le généraliser aux chargements uniformes triaxiaux ou de déformations planes généralisées.

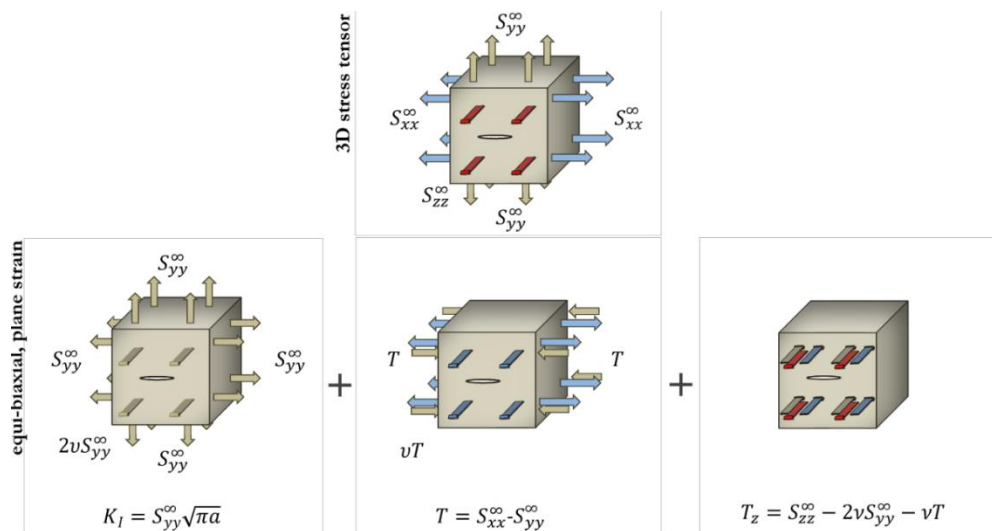


Figure 109 : Décomposition du champ de contrainte 3D imposé sur une fissure plane à front droit plongée dans un milieu infini homogène et isotrope en chargements élémentaires de la mécanique de la rupture.

Finalement, le développement asymptotique du champ de contrainte considéré en pointe de fissure est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) + T \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \\ \sigma_{zz}(r, \theta) = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + T_z \end{array} \right. \quad (IV-14)$$

Cette approche peut néanmoins être potentiellement généralisée à des chargements non-proportionnels, c'est-à-dire tels que les axes du repère principal ne soient pas fixes. Dans de pareils cas, comme le plan de fissuration est fixe, la fissure peut ne plus être sollicitée seulement en mode I. Ainsi, c'est l'ensemble des composantes du tenseur des contraintes qui doit être pris en compte dans l'analyse :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (IV-15)$$

Pour de tels chargements, le développement asymptotique du champ de contraintes en pointe de fissure devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(r, \theta) = \left[\begin{array}{l} \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \\ - \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \end{array} \right] + T + o(r^0) \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \left[\begin{array}{l} \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \\ + \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \end{array} \right] + o(r^0) \\ \sigma_{xy}(r, \theta) = \left[\begin{array}{l} \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \\ + \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right) \end{array} \right] + o(r^0) \\ \sigma_{xz}(r, \theta) = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma + o(r^0) \\ \sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + o(r^0) \\ \sigma_{zz}(r, \theta) = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + T_z + o(r^0) \end{array} \right. \quad (IV-16)$$

où, dans le cas d'une fissure plane à front droit de longueur $2 \cdot a$ plongée dans un milieu infini, on a les relations suivantes entre les termes supplémentaires introduits dans le développement et le chargement appliqué :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{II} = S_{xy} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ K_{III} = S_{yz} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ \gamma = S_{xz} \end{array} \right. \quad (IV-17)$$

La contrainte γ est, au même titre que les contraintes T et T_Z , un terme non-singulier du développement asymptotique du tenseur des contraintes en pointe de fissure. Cependant, contrairement à ces derniers, il s'agit d'un terme de cisaillement. Tout comme précédemment, les expressions des facteurs d'intensité des contraintes et des termes non-singuliers du développement asymptotique du tenseur des contraintes en pointe de fissure, dépendent de la géométrie de la fissure.

IV.1.2.3. Formulation du critère TL étendu

Les mêmes hypothèses que dans le cas du critère TL sont reprises, sauf que le champ de contrainte a été généralisé. De même, le champ de déplacement en pointe de fissure nécessite également d'être étendu. On obtient ainsi l'expression suivante pour ce dernier (le plan de référence associé au point d'intérêt du front de fissure est situé en $z = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(r, \theta, z) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{2 \cdot \mu} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (2 + \kappa + \cos(\theta)) \right] \\ \quad + \frac{T}{8 \cdot \mu} \cdot (\kappa + 1) \cdot r \cdot \cos(\theta) - v \cdot \frac{T_Z}{E} \cdot r \cdot \cos(\theta) + \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \gamma \cdot z \\ u_y(r, \theta, z) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{2 \cdot \mu} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (2 - \kappa - \cos(\theta)) \right] \\ \quad - \frac{T}{8 \cdot \mu} \cdot (3 - \kappa) \cdot r \cdot \sin(\theta) - v \cdot \frac{T_Z}{E} \cdot r \cdot \sin(\theta) \\ u_z(r, \theta, z) = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{K_{III}}{\mu} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{T_Z}{E} \cdot z + \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \gamma \cdot r \cdot \cos(\theta) \end{array} \right. \quad (\text{IV-18})$$

En intégrant, tout comme précédemment, la densité d'énergie déviatorique sur un cercle de rayon δ et après quelques simplifications (avec z égale à 0), on obtient le critère général suivant :

$$\begin{aligned} f(K_I, K_{II}, K_{III}, T, T_Z, \gamma, \nu, K_{I\text{Th}}, \delta) &= \left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{II\text{Th}}}\right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{K_{III\text{Th}}}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right)^2 + \left(\frac{T_Z}{T_{Z\text{Th}}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\text{Th}}}\right)^2 \\ &\quad + f_v \cdot \left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right) + f_g \cdot \left(\frac{T_Z}{T_{Z\text{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right) + f_h \cdot \left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T_Z}{T_{Z\text{Th}}}\right) \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

Les deux tableaux qui suivent donnent les expressions des termes de couplage et des seuils de non-propagation de fissure. Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux chargements n'engendrant que du mode I. On suppose donc que le plan critique est orthogonal à la direction principale maximale. Ceci implique qu'on ne traitera que le cas des chargements proportionnels. La notion de plan critique dans le cas non-proportionnel est discutable, car, dans ce cas, la direction principale maximale n'est plus figée dans le temps. Il faudrait, pour cela, potentiellement considérer une distribution d'orientation de fissure. C'est finalement la version suivante du critère TL étendu qui sera utilisée par la suite :

$$\begin{aligned} g(K_I, T, T_Z, \nu, K_{I\text{Th}}, \delta) &= \left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right)^2 + \left(\frac{T_Z}{T_{Z\text{Th}}}\right)^2 \\ &\quad + f_v \cdot \left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right) + f_g \cdot \left(\frac{T_Z}{T_{Z\text{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T}{T_{\text{Th}}}\right) + f_h \cdot \left(\frac{K_I}{K_{I\text{Th}}}\right) \cdot \left(\frac{T_Z}{T_{Z\text{Th}}}\right) \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{IV-20})$$

Tableau 14 : Expressions des différents termes de couplage intervenant dans le critère.

Facteurs de couplage	Expressions analytiques
f_v	$\frac{32.(1 - 10.v + 10.v^2)}{15.\pi.\sqrt{(1 - v + v^2).(7 - 16.v + 16.v^2)}}$
f_g	$\frac{-1 + 2.v}{\sqrt{1 - v + v^2}}$
f_h	$\frac{32.(-1 + 2.v)}{3.\pi.\sqrt{7 - 16.v + 16.v^2}}$

Tableau 15 : Expressions des seuils de non-propagation pour les facteurs d'intensité des contraintes et pour les premiers termes non-singuliers du développement asymptotique du tenseur des contraintes.

Facteur d'intensité des contraintes	Seuils de non-propagation de fissure longue	Termes non-singuliers	Seuils de plasticité pour les termes non-singuliers
K_I	K_{ITh}	T	$\frac{K_{ITh}}{\sqrt{2.\pi.\delta}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7 - 16.v + 16.v^2}}{\sqrt{1 - v + v^2}}$
K_{II}	$K_{ITh} \cdot \frac{\sqrt{7 - 16.v + 16.v^2}}{\sqrt{19 - 16.v + 16.v^2}}$	T_Z	$K_{ITh} \cdot \frac{\sqrt{7 - 16.v + 16.v^2}}{2.\sqrt{2.\pi.\delta}}$
K_{III}	$K_{ITh} \cdot \frac{\sqrt{7 - 16.v + 16.v^2}}{2.\sqrt{6}}$	γ	$\frac{K_{ITh}}{\sqrt{\pi.\delta}} \cdot \frac{\sqrt{7 - 16.v + 16.v^2}}{\sqrt{6 + 8.\delta + 3.\delta^2}}$

IV.1.3. Identification du critère TL étendu

L'identification du critère TL étendu nécessite la détermination de trois paramètres (Thieulot-Laure et al., 2007; Thieulot-Laure, 2008; de Moura Pinho et al., 2012) : K_{ITh} (la demi-amplitude du seuil de non-propagation de fissure à rapport de charge égal à -1), δ (le rayon d'intégration au voisinage de la pointe de fissure) et a_0 (la dimension de la fissure critique). K_{ITh} est une donnée matériau, mais δ et a_0 sont identifiés, quant à eux, à partir des limites d'endurance en traction σ_I et en torsion τ_I à rapport de charge égale à -1.

On considère que la fissure critique est une fissure semi-circulaire qui amorce en surface. Pour réaliser une identification du critère, il faut commencer par établir un lien entre, le tenseur des contraintes exprimé dans le repère principal d'un côté, et les quantités pertinentes de la mécanique de la rupture d'un autre côté, à savoir K_I , T et T_Z . La contrainte T_Z a fait l'objet de très peu de recherches dans la littérature, c'est pourquoi des simulations numériques par éléments finis ont été nécessaires pour déterminer le chargement en pointe de fissure en considérant un milieu soumis à un chargement de

traction uniforme, de dimensions suffisamment élevées par rapport au rayon de la fissure. Les formules suivantes sont utilisées dans la suite (**Figure 110**) :

$$\begin{cases} K_I(\sigma_n, a) = 0,6375 \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T(\sigma_n, \sigma_t) = \sigma_t - 0,5564 \cdot \sigma_n \\ T_Z(\sigma_n, \sigma_{t\perp}) = \sigma_{t\perp} - 0,6682 \cdot \sigma_n \end{cases} \quad (IV-21)$$

où σ_n représente la contrainte normale au plan de fissuration (direction principale maximale), σ_t la contrainte dirigée dans la direction orthogonale au front de fissure et orthogonale à la direction principale maximale et $\sigma_{t\perp}$ est la contrainte dirigée parallèlement au front de fissure.

L'identification des paramètres δ et a_0 se fait en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} g(K_I(\sigma_{-1}, a_0), T(\sigma_{-1}, 0), T_Z(\sigma_{-1}, 0), \nu, K_{ITh}, \delta) = 1 \\ g(K_I(\tau_{-1}, a_0), T(\tau_{-1}, -\tau_{-1}), T_Z(\tau_{-1}, 0), \nu, K_{ITh}, \delta) = 1 \end{cases} \quad (IV-22)$$

La première expression résulte du fait que, dans le repère principal, un chargement en traction pure correspond directement à la contrainte principale maximale (la fissure est donc positionnée orthogonalement à la direction associée). Quant à la seconde, une analyse par un cercle de Mohr conduit à un repère principal orienté à $+45^\circ$ par rapport au repère initial (**Figure 111**). Dans cette dernière situation, la fissure est orientée à -45° pour que la direction associée à la contrainte principale maximale soit orthogonale au plan de fissuration.

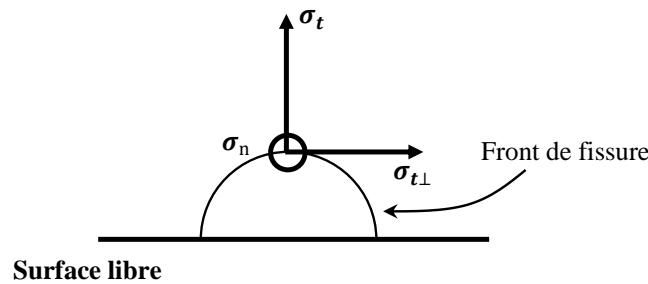


Figure 110 : Représentation du repère attaché au point du front de fissure situé en profondeur de celle-ci.

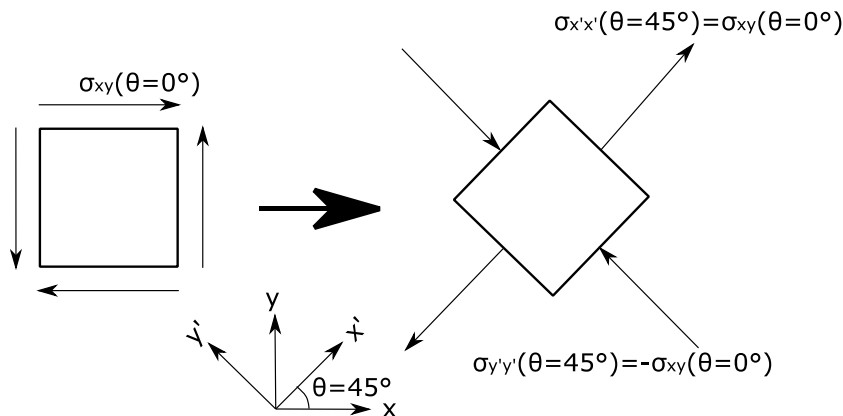


Figure 111 : Orientation des directions principales dans le plan, dans le cas d'un chargement en cisaillement pure.

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système d'équations avec un logiciel de calcul formel (comme Mathematica par exemple) à partir des données expérimentales requises. La valeur de $K_{ITh} = \frac{\Delta K_{th}}{2}$ s'obtient en considérant une valeur de seuil de non-propagation de fissure ΔK_{th} , à rapport de charge égale à -1. Celle-ci est prise égale à $6,5 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ (Moshier et al., 2001) en cohérence avec les résultats issus du chapitre précédent. Pour ce qui est des limites d'endurance en traction σ_{-1} et en torsion τ_{-1} alternées, une analyse bibliographique est nécessaire pour préciser ce que l'on entend par « limites d'endurance » du Ti-6Al-4V.

Ces dernières années plusieurs travaux sur le comportement en fatigue HCF ou VHCF (Very High Cycle Fatigue) du Ti-6Al-4V ont été menés. En particulier, une étude a montré que selon le rapport de charge de la sollicitation et à température ambiante, les mécanismes d'endommagement conduisant à l'amorçage de fissure de fatigue peuvent différer sur une version bimodal de ce dernier, similaire au matériau d'étude de ce travail de recherche (Liu et al., 2015). Les observations ont été les suivantes :

- Amorçage de fissure en surface ne présentant aucune facette de clivage au voisinage du site d'amorçage (**Figure 112**). C'est le cas pour les rapports de charge testés de -1 et de -0,5 (rapports de charge négatifs).
- Amorçage de fissure en surface présentant des facettes de clivage subsurfaciques au voisinage du site d'amorçage. Les facettes de clivage apparaissent dans des grains en phase alpha primaires (**Figure 113**). C'est le cas, préférentiellement, pour le rapport de charge testé de 0,5 (rapport de charge élevé).
- Amorçage de fissure interne présentant des facettes de clivage au voisinage du site d'amorçage (**Figure 114**). La région au voisinage immédiat du site d'amorçage est rugueuse et présente de multiples ruptures sur plans de clivage. Au-delà de celle-ci, le front de fissure semble s'être propagé en œil de poisson ou en « fish eye » (Liu et al., 2015). C'est le cas, préférentiellement, pour les rapports de charge testés de -0,1 et de 0,1 (rapports de charge intermédiaires).

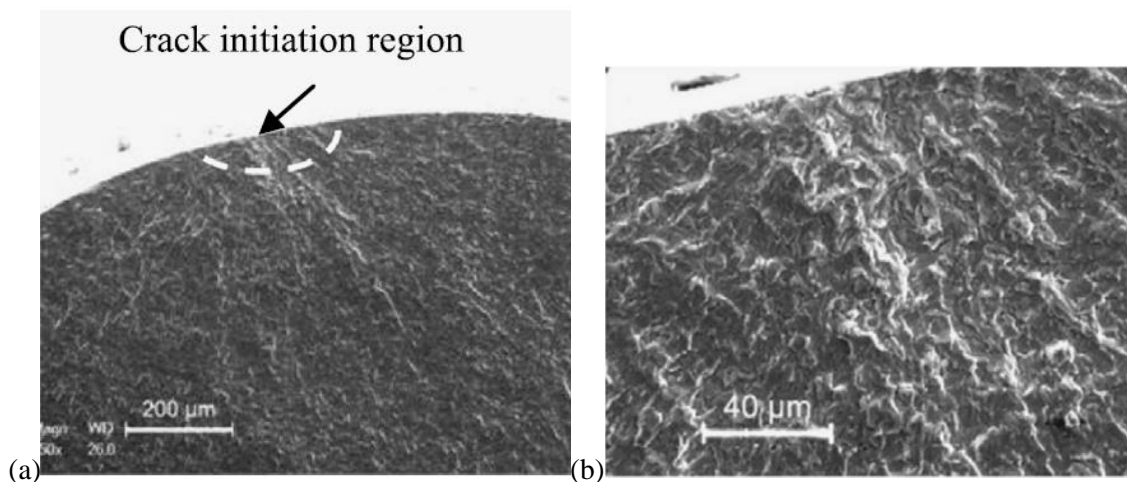


Figure 112 : Amorçage de fissure en surface ne présentant aucune facette de clivage au voisinage du site d'amorçage (Liu et al., 2015) :
 (a) Vue globale,
 (b) Zoom sur le site d'amorçage.

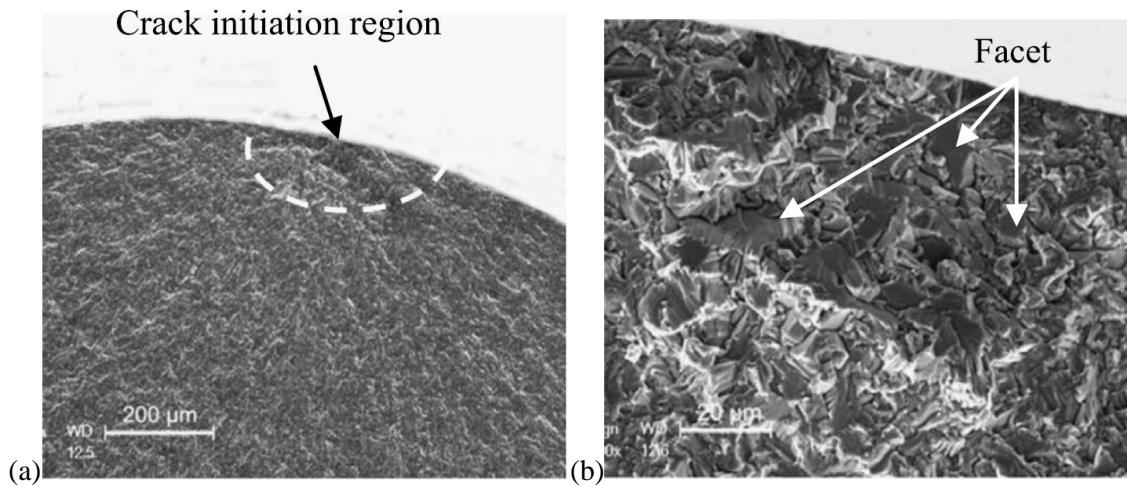


Figure 113 : Amorçage de fissure en surface présentant des plans de clivage au voisinage du site d'amorçage (Liu et al., 2015) :
 (a) Vue globale,
 (b) Zoom sur le site d'amorçage.

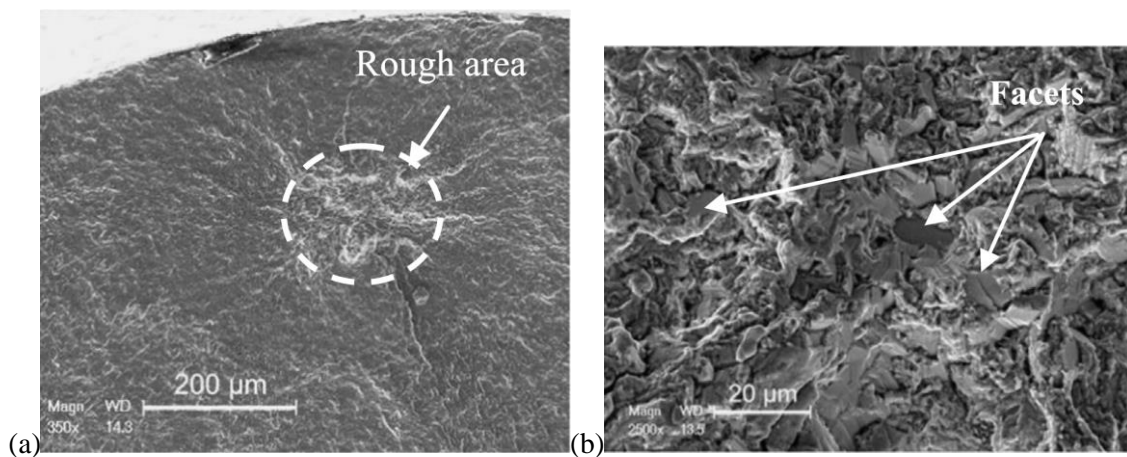


Figure 114 : Amorçage de fissure en interne présentant des plans de clivage au voisinage du site d'amorçage (Liu et al., 2015) :
 (a) Vue globale,
 (b) Zoom sur le site d'amorçage.

L'apparition de ces mécanismes est corrélée avec les courbes de fatigue obtenues (*Figure 115*). Pour les rapports de charge de -0,5 et de -1, au-delà d'un certain nombre de cycles, le comportement du matériau en fatigue semble compatible avec l'existence d'une limite d'endurance. Cependant, pour les rapports de charge plus élevés, un premier palier en amplitude de contrainte est atteint à 10^5 cycles jusqu'à 10^7 cycles. Puis, l'amplitude de contrainte chute sans que l'on puisse affirmer avec certitude qu'un nouveau palier sera atteint au-delà de 10^9 ou 10^{10} cycles.

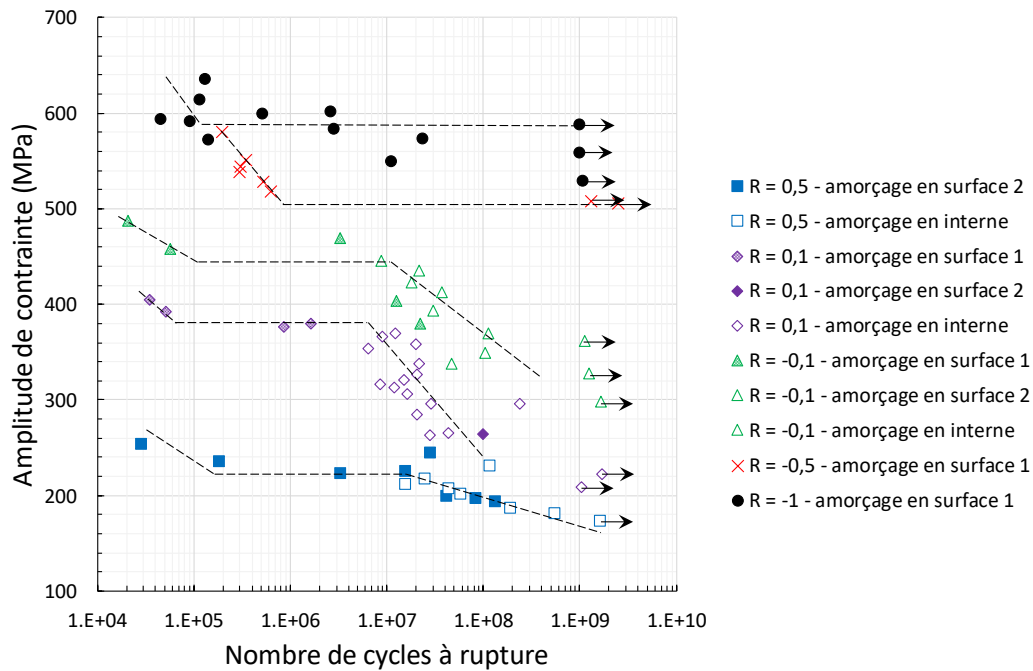


Figure 115 : Courbes de Wöhler d'un Ti-6Al-4V bimodal dans les régimes HCF et VHCF obtenues à la suite d'essais de fatigue à 20 kHz à température ambiante (Liu et al., 2015). Un système de refroidissement a été mis en place afin d'éviter que la dissipation d'énergie induit par l'amortissement du matériau ne conduise à augmenter la température des éprouvettes.

Pour les rapports de charge les plus faibles, l'existence d'une limite d'endurance semble compatible avec la non-propagation d'une fissure de fatigue amorcée en surface dans un grain par accumulation de déformation plastique. Pour les rapports de charges plus élevés, l'existence du palier semble provenir de la non-propagation d'une fissure en surface apparaissant à la suite de la fragilisation du milieu environnant par des micro-clivages dans des grains en phase alpha primaire. La disparition du palier au-delà de 10^7 cycles résulte du fait que l'amorçage en interne et la propagation de fissure associé est un processus très lent à se mettre en place, à cause, notamment, de la rugosité de la surface fissurée au voisinage immédiat du site d'amorçage entraînant un effet de fermeture plus prononcé sur la propagation (Doquet & De Greef, 2012). Il n'est donc pas visible, a priori, entre 10^5 et 10^7 cycles.

Ce constat est à mettre en parallèle de l'analyse bibliographique qui a été faite dans la sous-section §III.1.2.2 sur le comportement en fissuration du Ti-6Al-4V. En effet, les effets de fermeture intervenant en pointe de fissure ne permettent pas à eux seuls d'expliquer la chute du seuil de non-propagation de fissure longue avec le rapport de charge. En particulier, on a vu qu'en maintenant une charge constante sur une éprouvette fissurée, une propagation sur une courte distance peut apparaître si le chargement appliqué est suffisamment élevé. Au vu de l'analyse qui vient d'être faite, il se peut que la rupture par clivage dans des grains en phase alpha primaires permettent de réconcilier l'ensemble des constats en amorçage et en propagation de fissure.

Le scénario envisagé est le suivant pour l'amorçage de fissure de fatigue et le comportement en fissuration :

- Pour les rapports de charge positifs, Liu et al. ont montré que l'apparition de facettes de clivage est un phénomène purement statistique (Liu et al., 2015). Ils ont modélisé la probabilité de leur apparition par un processus ponctuel de Poisson qui ne s'active que si la contrainte maximale du chargement dépasse un certain seuil, conformément aux observations qu'ils ont réalisées. Si la fragilisation des grains en phase alpha primaire est

liée à la diffusion sous contraintes d'espèces oxydantes, il semble envisageable que l'environnement conduise à un effet de fréquence sur la « limite d'endurance » à 10^7 cycles, comme ce qui a été montré dans la **Figure 33** de la sous-section §I.2.7 de ce manuscrit. Dès qu'une facette de clivage apparaît, un report de charge sur le milieu environnant favorisant l'apparition d'autres facettes de clivage à proximité se produit. Si la charge est suffisamment élevée une fissure de fatigue peut alors se propager.

- Dans le cas de la propagation de fissure par fatigue, l'impact des facettes de clivage est plus limité. En effet, il faut qu'un grain en phase alpha primaire fragilisé soit à proximité immédiate du front de fissure pour qu'il ait un impact sur la vitesse de propagation. Le voisinage immédiat d'un front de fissure comparé à la surface extérieure d'une éprouvette de fatigue (pour l'amorçage de fissure en surface) ou de la section de celle-ci (pour l'amorçage de fissure en interne) est faible, en surface projetée sur le plan de propagation, pour que ce mécanisme soit réellement significatif. Cela pourrait expliquer pourquoi la fréquence de coupure de l'effet de l'environnement est plus faible en fissuration qu'en amorçage. Il faudrait un temps plus long pour que la fragilisation soit plus intense pour compenser la faible probabilité d'apparition d'une facette de clivage au voisinage de la pointe de fissure.
- Ce scénario expliquerait également pourquoi, en maintenant une charge constante, la fissure se propage uniquement sur une courte distance compatible avec les échelles microstructurales du matériau. En effet, si la fissure se propage de manière stable par rupture de facettes de clivage sur grain en phase alpha primaire, dès qu'il n'y a plus de tels grain à proximité immédiate le front ne peut plus se propager, car « retenu » par les autres grains répartis aléatoirement le long de celui-ci. Il faudrait alors refaire un cyclage par fatigue pour rompre ces derniers pour que ce mécanisme se mette de nouveau à l'œuvre.

Pour conclure sur cette analyse, les travaux de Liu et al. confirment l'existence d'une limite d'endurance à rapport de charge égale à -1 pour un chargement en traction pure. Celle-ci est liée à l'amorçage de fissure par accumulation de déformation plastique dans un grain défavorablement orienté et/ou à sa non-propagation par fatigue. D'ailleurs, il semble raisonnable de supposer que cela est également le cas pour un chargement en torsion pure. On peut alors identifier le critère TL étendu à partir de données expérimentales à rapport de charge égale à -1 et limiter son utilisation à ce même niveau de rapport de charge pour réaliser des prédictions.

Les données portant sur les limites d'endurance en traction et en torsion alternées sur un même Ti-6Al-4V (microstructure, traitements thermiques et lot matière identiques) sont rares dans la littérature. Delahay obtient sur un Ti-6Al-4V à microstructure équiaxe les valeurs de 583 MPa pour σ_{-1} et 411 MPa pour τ_{-1} à 10^6 cycles (Delahay, 2004), soit un rapport $\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}$ égale à 1,418. La valeur de référence considérée dans la suite, pour le Ti-6Al-4V bimodal, pour la limite d'endurance en traction alternée est de 499 MPa à 10^6 cycles (Lanning et al., 2005 (1)). En l'absence de données expérimentales sur le comportement en fatigue en torsion sur ce matériau, on suppose que le rapport $\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}$ est le même sur ce matériau que pour celui étudié par Delahay. De cela, il en découle une limite d'endurance en torsion alternée de référence de 352 MPa. L'identification du critère TL étendu, représenté graphiquement ci-dessous, avec ces données conduit aux valeurs suivantes de a_0 et de δ :

$$\begin{cases} a_0 = 11,8 \mu\text{m} \\ \delta = 3,75 \mu\text{m} \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

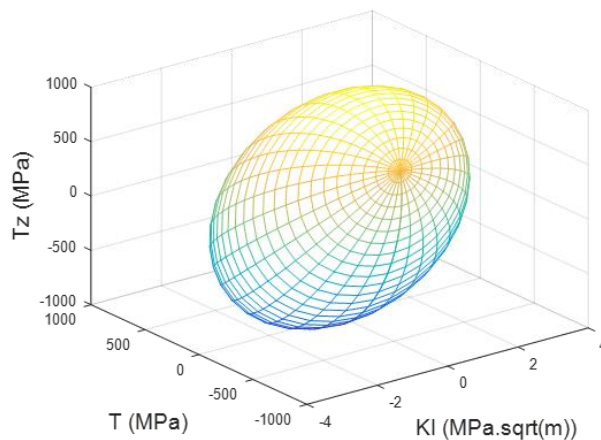
L'étude de sensibilité synthétisée dans le tableau suivant montre qu'une petite erreur de mesure sur les limites d'endurance ou sur le seuil K_{ITh} est « globalement » amplifiée lors de la détermination des paramètres a_0 et δ . Néanmoins, le facteur d'amplification reste acceptable (nettement inférieur à 10) ce qui aboutit à la conclusion que les prédictions réalisables à partir du critère de fatigue sont stables.

Tableau 16 : Valeurs des termes intervenant dans le critère TL étendu identifié.

Termes de seuil	Valeurs	Termes de couplage	Valeurs
K_{ITh}	3.25 MPa. \sqrt{m}	f_v	-0,4192
T_{Th}	723,17 MPa	f_g	-0,4713
T_{ZTh}	644,43 MPa	f_h	-0,7408

Tableau 17 : Sensibilité des paramètres a_0 et δ à des petites variations des paramètres d'entrée.

	Limite d'endurance en traction + 5%	Limite d'endurance en traction - 5%	Limite d'endurance en torsion + 5%	Limite d'endurance en torsion - 5%	K_{ITh} + 5%	K_{ITh} - 5%
a_0	-28.8 %	36.3 %	21.9 %	-22.6 %	10.3 %	-9.8 %
δ	13.2 %	-14.5 %	-21.8 %	26.2 %	10.2 %	-9.7 %

Figure 116 : Surface seuil identifiée dans l'espace $K_I - T - T_z$.

Pour terminer, notons que la dimension de fissure critique a_0 identifiée est comparable à l'échelle caractéristique des grains du Ti-6Al-4V d'étude (**Figure 58**). Dans de telles conditions, les champs issus de la mécanique linéaire élastique homogène et isotrope de la rupture ne sont plus représentatifs des champs réels au voisinage de la pointe d'une fissure de cette taille. De plus, à ces échelles, les fissures s'orientent préférentiellement dans le plan qui maximise le cisaillement, surtout dans le cas des chargements en torsion. Cependant, sans une connaissance de la position exacte d'une fissure relativement à la microstructure et sans la connaissance de celle-ci (orientation des grains, propriétés mécaniques des grains et champ de contrainte associé pour une sollicitation macroscopique donnée), il semble illusoire de vouloir réaliser des prédictions exactes sur le domaine d'endurance. C'est la raison

pour laquelle, une approche ingénieure a été privilégiée. Son but est de prédire la limite d'endurance d'un matériau sain et avec des anomalies de différentes tailles à partir de la seule connaissance des chargements macroscopiques dans un milieu homogénéisé équivalent au sens du VER (Volume Equivalent Représentatif). Le choix du plan critique comme étant celui qui maximise la contrainte principal maximal a été fait pour tenir compte du comportement d'une fissure dès que ses dimensions dépassent celles du VER. En-dessous de ces dimensions, les fissures réelles ne se comportent pas comme celles du critère TL étendu. Mais l'identification des paramètres a_0 et δ à partir de limites d'endurance en tient compte indirectement. Il faut donc interpréter a_0 comme un paramètre de recalage du critère et non comme une dimension de fissure critique réelle.

IV.1.4. Génération de diagrammes de fatigue sur quelques cas simples et discussion

IV.1.4.1. Effet de la biaxialité du chargement en fatigue en fonction de la dimension de la fissure

L'effet de la biaxialité est totalement absent du modèle d'El Haddad (§II.4.3.1.3). Quelle que soit la biaxialité du chargement, tant que la contrainte orthogonale au plan de propagation ne varie pas, le seuil de non-propagation de fissure effectif reste inchangé. De cela, il en découle que la limite d'endurance prédite ne change pas non plus, ce qui est en contradiction avec les constats expérimentaux. Ce n'est pas le cas des prédictions produites par le biais du critère TL étendu puisque la contrainte T y joue un rôle important et que cette dernière représente justement la biaxialité (avec l'ajout de T_z , il est possible de rendre compte d'effet de multiaxialité) du chargement. Pour montrer cela, considérons deux chargements. Le premier en traction pure alternée et l'autre en torsion pure alternée. Les équations décrivant le chargement en pointe de fissure s'obtiennent comme suit (d'après l'équation (IV-21)), dans le cas d'une fissure semi-circulaire débouchant en surface dans un milieu supposé semi-infini :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = \text{Coeff}_{KI} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = \text{Coeff}_T \cdot \sigma \\ T_z = \text{Coeff}_{TZ} \cdot \sigma \\ \text{Coeff}_{KI} = 0,6375 \text{ (traction et torsion)} \\ \text{Coeff}_T = \begin{cases} -0,5564 \text{ (traction)} \\ -1,5564 \text{ (torsion)} \end{cases} \\ \text{Coeff}_{TZ} = -0,6682 \text{ (traction et torsion)} \end{array} \right. \quad (\text{IV-24})$$

En utilisant l'expression générale du critère TL étendu, la limite d'endurance ainsi que le seuil de non-propagation de fissure effectif s'obtiennent comme suit, après quelques manipulations analytiques (Figure 117) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_f(a) = \frac{K_{th} \cdot T_{th} \cdot T_{zth}}{\sqrt{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta}} \\ \Delta K_{Ith}^{eff}(a) = 2 \cdot \text{Coeff}_{KI} \cdot \sigma_f(a) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ \alpha = \text{Coeff}_{TZ}^2 \cdot K_{Ith}^2 \cdot T_{th}^2 \\ \beta = \text{Coeff}_T^2 \cdot K_{Ith}^2 \cdot T_{zth}^2 \\ \gamma = \text{Coeff}_{KI}^2 \cdot T_{zth}^2 \cdot T_{th}^2 \cdot \pi \cdot a \\ \delta = \text{Coeff}_{TZ} \cdot \text{Coeff}_T \cdot K_{Ith}^2 \cdot T_{zth} \cdot T_{th} \cdot f_g \\ \varepsilon = \text{Coeff}_{KI} \cdot \text{Coeff}_{TZ} \cdot K_{Ith} \cdot T_{th}^2 \cdot T_{zth} \cdot f_h \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ \zeta = \text{Coeff}_{KI} \cdot \text{Coeff}_T \cdot K_{Ith} \cdot T_{zth}^2 \cdot T_{th} \cdot f_v \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \end{array} \right. \quad (\text{IV-25})$$

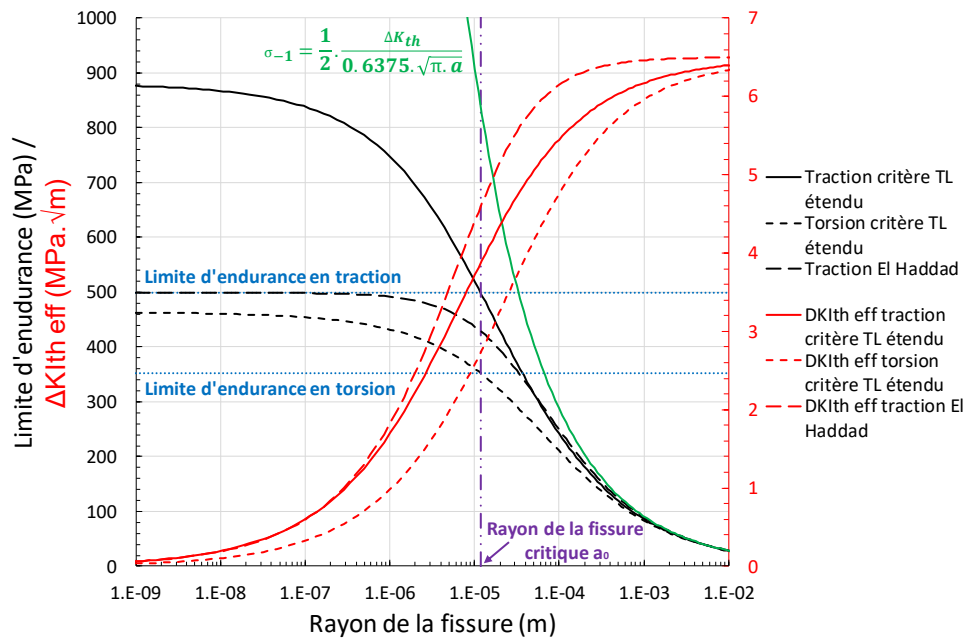


Figure 117 : Limites d'endurance à $R = -1$ en fonction de la dimension de fissure dans le cas d'une fissure semi-circulaire plongée dans un milieu semi-infini, isotrope et élastique soumise à des chargements de traction et de torsion pures.

De ce graphique, il en découle que la limite d'endurance en torsion pure est toujours plus faible que celle en traction pure quelle que soit la dimension de la fissure. Il en est de même pour le seuil de non-propagation de fissure effectif. D'un côté, c'est ce qui était attendu puisque les données expérimentales ayant servi à l'identification du critère respectent cette hiérarchie des résultats. Mais d'un autre côté, la modélisation imposée par le critère TL étendu est incompatible avec un résultat contraire puisque, dans ce cas, le système d'équations permettant son identification n'admet pas de solution. D'où l'on déduit qu'il s'agit bien d'une prédiction de la modélisation.

On remarque également une différence importante au niveau de l'interprétation du domaine d'endurance entre celle fournie par le critère TL étendu et celle fournie par le modèle d'El Haddad (§II.4.3.1.3) et par le modèle de Mc Evily par extension de celui-ci au cas biaxial (§II.4.3.1.4). Dans le cas des modèles de type « El Haddad », la limite d'endurance tend vers celle du matériau sain lorsque la dimension de la fissure tend vers 0. Pour le critère TL étendu, la limite d'endurance est liée à la non-propagation d'une fissure amorçant sur une hétérogénéité du matériau. Plus le volume de matière est important et plus la probabilité d'en trouver une de dimension importante augmente. Le critère TL s'attache uniquement à décrire le comportement de cette hétérogénéité en un sens statistique et pour des sollicitations multiaxiales. Si on introduit artificiellement un défaut dans le matériau et que celui-ci est plus petit que la fissure « critique » identifiée, la limite d'endurance prédite par le critère sera celle à partir du défaut critique. Si la dimension du défaut artificiel est plus élevée que celle du défaut critique initiale, alors la nouvelle limite d'endurance sera prédite à partir du défaut artificiel. Cela signifie que, dans le cadre de la modélisation proposée par le critère TL, des fissures de dimensions plus faibles que a_0 n'ont aucun impact sur la limite d'endurance.

Le graphique montre qu'aussi bien le critère TL étendu que le modèle d'El Haddad exhibe un effet de fissure courte prononcé pour les faibles longueurs de fissure. Il s'estompe de manière significative qu'au-delà de 200 μm , ce qui est compatible avec l'attendu.

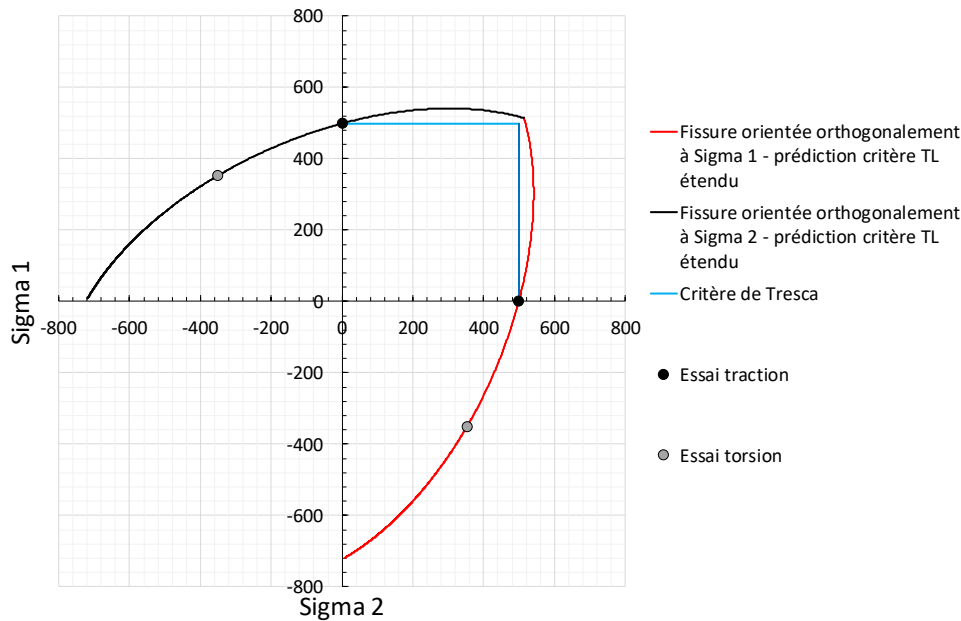


Figure 118 : Domaine d'endurance prédit par le critère TL étendu dans un diagramme en contraintes principales. Les contraintes négatives correspondent au cas d'une contrainte de signe opposé à celle de la contrainte principale maximale.

Pour terminer, la **Figure 118** donne un aperçu du domaine d'endurance. A titre d'indication, les limites d'endurance en traction et en torsion alternée ont été ajoutées. En l'absence de données supplémentaires, il n'a pas été possible de vérifier la pertinence de ce modèle sur le matériau d'étude à 20°C pour d'autres taux de biaxialité. En particulier, lorsque les deux contraintes principales sont de même signe, le critère semble se comporter comme le critère de Tresca en première approximation. Les travaux de Bonnard et al. vont dans ce sens. Ils ont réalisé des essais de fatigue en traction biaxiale sur des éprouvettes en croix sur Ti-6Al-4V à 200°C (Bonnard et al., 2011). Ils ont reporté leurs résultats normalisés, pour des raisons de confidentialité, dans un diagramme du même type que celui présenté précédemment (**Figure 119**). Les valeurs obtenues sont associées à un nombre de cycles à rupture égal à 40000. Au vu des résultats obtenus, il semble que le critère TL étendu soit une alternative intéressante aux critères usuels.

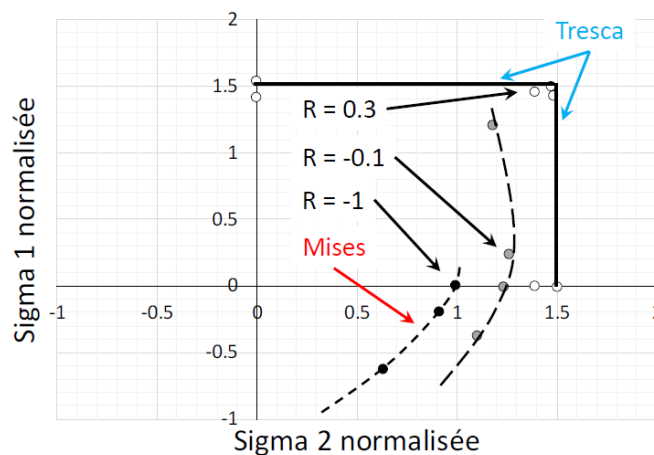


Figure 119 : Domaine de fatigue obtenu expérimentalement à 200°C sur Ti-6Al-4V et à 40000 cycles (Bonnard et al., 2011).

IV.1.4.2. Effet de la forme de la fissure sur le comportement en fatigue

Il existe dans la littérature des formules exactes donnant la contrainte T_Z pour une fissure circulaire dans un milieu infini élastique homogène et isotrope soumise à un chargement constant quelconque (Schütte & Molla-Abbasi, 2007). En particulier pour un chargement de traction pure, on obtient :

$$\begin{cases} K_I = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = -\frac{1+2\nu}{2} \cdot \sigma_n \\ T_Z = -\frac{1+2\nu}{2} \cdot (1-\nu) \cdot \sigma_n \end{cases} \quad (\text{IV-26})$$

De même, pour un chargement de torsion pure (en orientant la fissure orthogonalement à la contrainte principale maximale), il en résulte :

$$\begin{cases} K_I = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = -\frac{3+2\nu}{2} \cdot \sigma_n \\ T_Z = -\frac{1+2\nu}{2} \cdot (1-\nu) \cdot \sigma_n \end{cases} \quad (\text{IV-27})$$

La **Figure 120** montre, qu'à iso-longueur de fissure, une fissure semi-circulaire semble plus nocive qu'une fissure circulaire. Néanmoins, les différences ne sont pas suffisantes pour expliquer pourquoi la limite d'endurance à rapport de charge égale à -1 et à 20°C, observée par Liu et al. (§IV.1.3), semble systématiquement liée à la propagation ou non-propagation d'une fissure de fatigue critique en surface dans le cas du Ti-6Al-4V. On attribue ce constat au fait que le critère TL étendu n'intègre pas certains effets, comme les effets de fermeture induits par la plasticité en pointe de fissure et par la rugosité de surface (**Figure 114**).

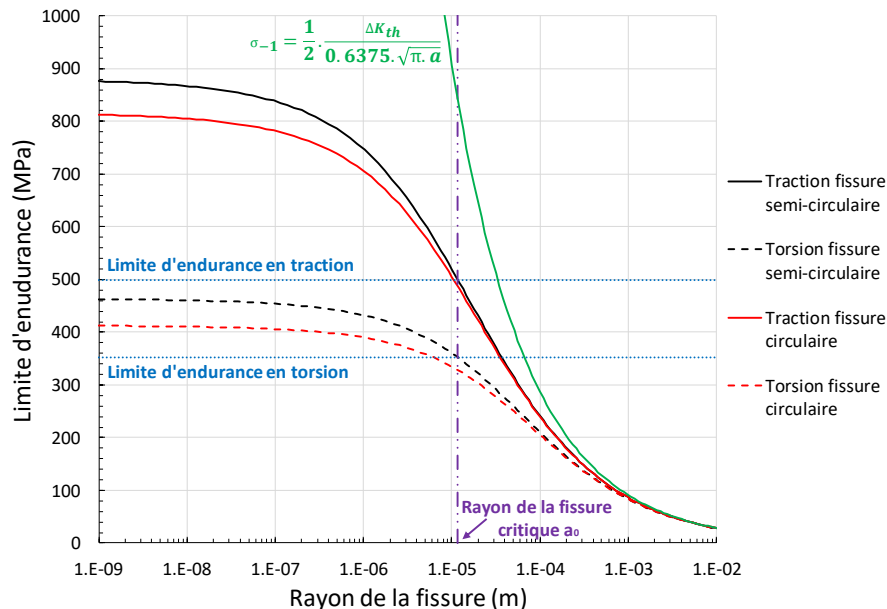


Figure 120 : Comparaison des évolutions avec la dimension de fissure des limites d'endurance obtenues pour des fissures semi-circulaires et circulaires dans un milieu élastique semi-infini ou infini, homogène et isotrope et obtenues avec le critère TL étendu.

IV.1.4.3. Effet de la prise en compte ou non de la contrainte T_z sur l'endurance en fatigue

La **Figure 121** montre l'impact de la non prise en compte de la contrainte T_z dans la détermination de la limite d'endurance. Dans le cas d'un chargement en torsion, l'effet est très faible, mais ce n'est pas le cas pour un chargement en traction, la limite d'endurance passant de 499 MPa à 637 MPa.

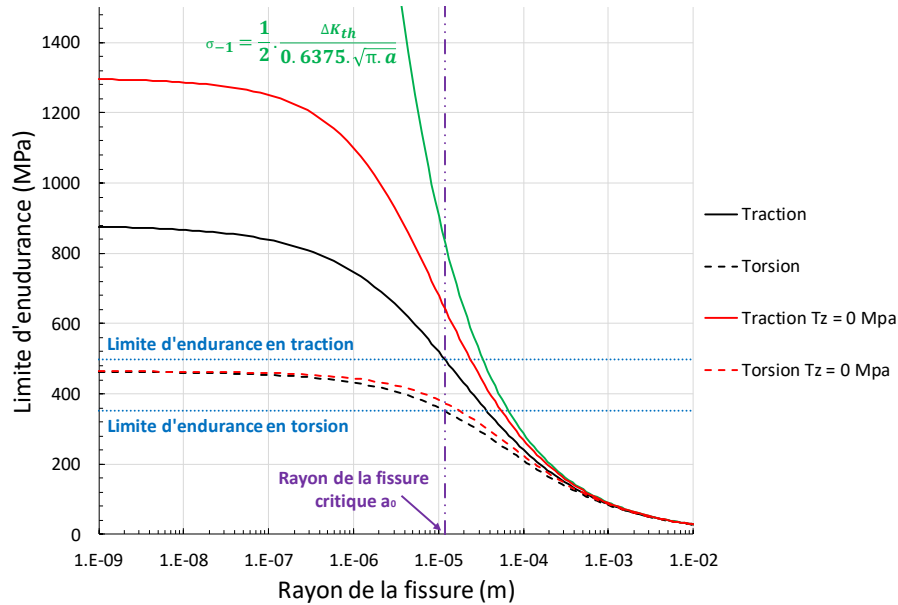


Figure 121 : Domaine d'endurance prédit par le critère TL étendu dans un diagramme en contraintes principales. Les contraintes négatives correspondent au cas d'une contrainte de signe opposé à celle de la contrainte principale maximale.

Dans la mesure où la contrainte T_z a un statut similaire à celui de la contrainte T dans le cadre de la mécanique de la rupture, il n'y a aucune raison d'identifier un critère de fatigue tenant compte du facteur d'intensité des contraintes et de la contrainte T mais pas de la contrainte T_z . Comme cette dernière peut avoir un fort impact pour certains types de chargements (au moins pour la traction uniaxiale), il faut la prendre en considération.

IV.1.5. Conclusion

L'extension du critère d'Emmanuelle Thieulot-Laure pour la prise en compte de la contrainte T_z , nommé critère TL étendu, ouvre la voie à l'application de la démarche aux chargements multiaxiaux, en gardant tous les acquis de l'approche initiale.

Dans cette sous-section, une identification à rapport de charge égale à -1 de ce critère a été faite à partir de données issues de la littérature, à savoir les limites d'endurance en traction et en torsion alternées et le seuil de non-propagation de fissure du Ti-6Al-4V à 20°C.

La comparaison de la représentation du critère dans le plan des contraintes principales avec des données expérimentales issues des travaux de Bonnard et al. (Bonnard et al., 2011) semble indiquer que les prédictions pour des chargements biaxiaux sont compatibles avec le comportement de ce matériau.

Ce critère a été formulé à partir d'hypothèses simplificatrices. Il n'intègre pas certains effets comme les effets de fermeture induits par la plasticité en pointe de fissure et par la rugosité de la surface fissurée.

Néanmoins, il semble apte à pouvoir rendre compte de certains effets d'échelle et de gradient de contrainte en fatigue. La vérification de cela est justement l'objet des sections qui suivent.

IV.2. Constitution d'une base de données éléments finis en vue de caractériser les effets de gradient et d'échelle sur l'endurance en fatigue

IV.2.1. Présentation de l'étude numérique

IV.2.1.1. Introduction

Avant de donner la matrice des simulations, faisons quelques rappels sur les zones à concentrations de contraintes. Tout d'abord on ne considère que les concentrations de contraintes induites, soit par un trou elliptique (**Figure 122**), soit par une entaille semi-elliptique. L'ouvrage de Peterson et Pilkey (Peterson & Pilkey, 1997) donne l'amplification de la contrainte en pointe de la (ou les) zone(s) de concentration de contraintes pour un chargement macroscopique donné. Le rapport entre les deux contraintes précédentes s'appelle le K_t et pour un trou elliptique plongé dans un milieu infini (**Figure 122**) ce coefficient vaut :

$$K_t = 2 \cdot \frac{a}{b} + 1 \quad (\text{IV-28})$$

Pour une entaille semi-elliptique, le K_t s'exprime avec la même formule, mais le demi-grand axe du cas précédent correspond désormais à la profondeur de l'entaille.

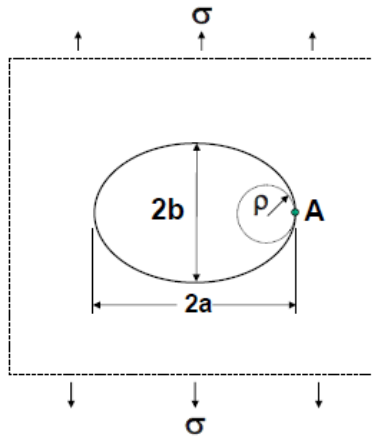


Figure 122 : Trou elliptique dans un milieu infini.

Comme attendu, la formule donnant le K_t dépend de la géométrie de la zone à concentration de contrainte. Ici, une relation entre le demi-petit axe et le demi-grand axe est donnée. Mais il est possible de réexprimer cette relation en fonction du demi-axe horizontal et du rayon de courbure en pointe de l'entaille comme suit :

$$\rho = 4 \cdot \frac{a}{(K_t - 1)^2} \quad (\text{IV-29})$$

Cette relation, bien qu'équivalente à la précédente, fait intervenir les deux grandeurs les plus pertinentes pour décrire le gradient spatial de contrainte en pointe de la zone de concentration de contraintes (**Figure 123**). Par exemple, les travaux de (Filippini, 2000) ont montré que le gradient de contrainte normalisé en pointe d'une entaille elliptique s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \left. \frac{d\sigma_{yy}}{dx} \right|_{x \text{ en pointe de l'entaille}} \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{3 + 4 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}}\end{aligned}\quad (IV-30)$$

En réécrivant le gradient à l'aide de la formule donnant le K_t , il vient :

$$\chi = \left(2 + \frac{1}{K_t}\right) \cdot \frac{1}{\rho} \quad (IV-31)$$

Pour une entaille externe, le gradient vaut :

$$\chi = \frac{2}{\rho} \quad (IV-32)$$

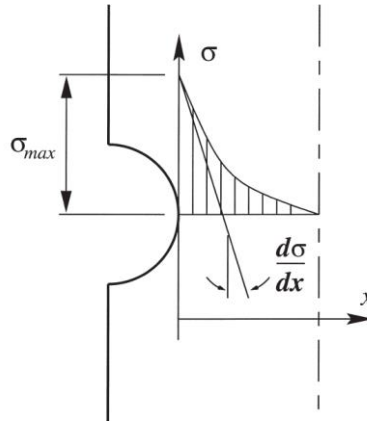


Figure 123 : Illustration du gradient de contrainte en pointe de la zone de concentration de contrainte.

On en déduit que la distance affectée par le gradient de contrainte induit par la présence de la zone à concentration de contraintes dépend à la fois du K_t et du rayon de courbure ρ . Des interactions d'échelles entre une fissure et une zone de concentration de contraintes se feront pour des dimensions de fissures de l'ordre de grandeur de ρ ou de l'ordre de grandeur de la distance affectée par le gradient de contrainte. La matrice de simulations par éléments finis doit donc être choisie de manière à pouvoir exhiber ces effets d'échelles.

Pour finir, mentionnons le fait que la notion de K_t est attachée à un chargement macroscopique donné. Si ce dernier change en direction ou évolue de manière plus complexe, la valeur du K_t en est affectée (Doquet et al., 2013). On se restreint dans la suite à un chargement macroscopique de traction uniaxiale.

IV.2.1.2. Présentation de la matrice de simulations et des modèles éléments finis

Afin d'étudier les interactions pouvant exister entre les différents effets d'échelle et de gradient de contraintes entre la zone de concentration de contraintes et une fissure semi-circulaire, une matrice de simulation a été proposée. L'objectif a été de pouvoir simuler un nombre de cas suffisant de manière à pouvoir identifier des tendances qui permettraient d'expliquer certaines constatations expérimentales comme celles de Frost (Frost, 1957; Frost & Dugdale, 1957) qui sont rappelées dans le premier chapitre (§1.2.5.3). La matrice de simulations proposée est récapitulée dans le tableau qui suit :

Tableau 18 : Matrice de simulations numériques proposée à la fois pour un trou elliptique plongé dans un milieu infini et pour une entaille semi-elliptique qui débouche en surface d'un milieu semi-infini.

Facteurs de concentration de contrainte (K_t)	Dimensions du petit-axe horizontal a (mm)	Dimensions du rayon de courbure ρ de la zone de concentration de contrainte (mm)	Rayons des fissures semi-circulaires r qui débouchent sur la zone de concentration de contraintes (mm)
2	0,05	0,2	$r = \frac{(j + 2) \cdot \rho}{10}$, avec $j \in \llbracket 0; 19 \rrbracket$ (*)
	0,1	0,4	(*)
	0,5	2	(*)
	1	4	(*)
	5	20	(*)
	10	40	(*)
	50	200	(*)
3	0,05	0,05	(*)
	0,1	0,1	(*)
	0,5	0,5	(*)
	1	1	(*)
	5	5	(*)
	10	10	(*)
	50	50	(*)
5	0,05	0,0125	(*)
	0,1	0,025	(*)
	0,5	0,125	(*)
	1	0,25	(*)
	5	1,25	(*)
	10	2,5	(*)
	50	12,5	(*)

Dans la matrice proposée, on constate que les fissures à considérer ont des dimensions allant du très petit par rapport à un rayon de courbure donné jusqu'à une dimension voisine du double du rayon de courbure. Les résultats permettront de mettre en évidence les différents effets d'échelle et de gradient de contrainte recherchés comme on le verra plus loin. La **Figure 124** donne un exemple de maillage éléments finis qui a été construit pour l'étude. Lorsque les différentes échelles géométriques impliquées sont très différentes, les raffinements de maillage nécessaires pour une bonne qualité des champs mécaniques obtenus à la suite d'un calcul, conduisent à un nombre d'éléments avoisinant les 600000.

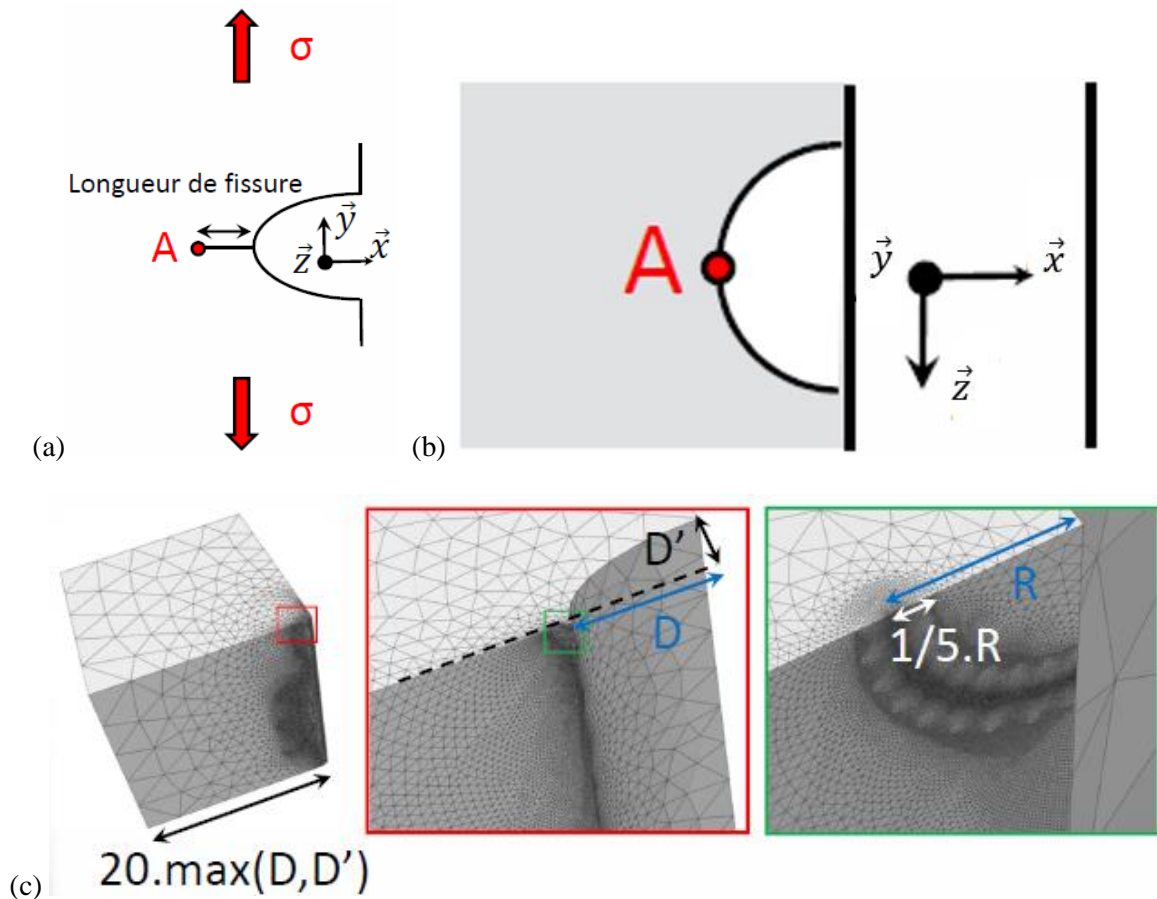


Figure 124 : Cube comportant un trou elliptique le traversant de K_t égal à 5 avec une demi-axe horizontale de 0,05 mm. La fissure semi-circulaire qui débouche sur le trou elliptique à un rayon de 0,005 mm.

(a) Vue schématisée de face,

(b) Zoom sur la zone à K_t ,

(c) Visualisation du maillage à différentes échelles.

Les modèles éléments finis (**Figure 124**) sont des cubes contenant un quart de trou elliptique au niveau d'une des arêtes. La dimension d'une arête est égale à vingt fois la valeur maximale entre le demi-axe vertical et le demi-axe horizontal. Ce sont les conditions aux limites appliquées sur les frontières du modèle qui permettent de distinguer entre le cas d'un milieu avec un trou elliptique et celui avec une entaille semi-elliptique débouchant en surface. Ces conditions aux limites sont de type « symétrie ». Ainsi, seul un quart du modèle est modélisé dans le cas d'une entaille dans un milieu « supposé » semi-infini et un huitième seulement est modélisé dans le cas d'un milieu « supposé » infini (**Figure 125**). Cela permet de réduire drastiquement l'espace mémoire nécessaire au stockage des informations relatives aux modèles ainsi que les temps de calcul associés.

Les hypothèses de milieu semi-infini ou infini n'ont pas été appliquées à proprement parler, mais les dimensions des modèles sont supposées suffisamment élevées relativement aux dimensions des fissures

et des concentrations de contrainte pour considérer que les champs mécaniques obtenus aux voisinages des zones de concentrations de contraintes et des pointes de fissures, par suite des calculs, ne sont pas impactés par la présence des bords.

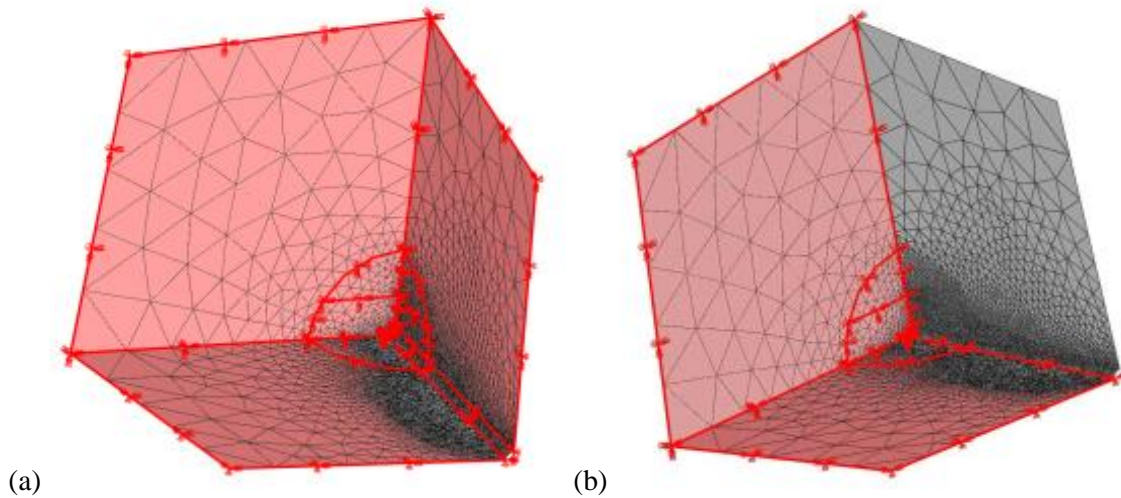


Figure 125 : Cube comportant un trou elliptique le traversant de K_t égal à 3 avec un demi-axe horizontal de 1 mm. La fissure semi-circulaire qui débouche sur le trou elliptique à un rayon de 0,2 mm.
(a) Conditions aux limites de symétrie pour un milieu « supposé » infini représentées en rouge,
(b) Conditions aux limites de symétrie pour un milieu « supposé » semi-infini représentées en rouge.

Concernant le chargement, il est appliqué sur la face supérieure de chaque modèle. Il s'agit d'un chargement de traction uniforme (**Figure 126**). Le matériau associé à chaque modèle est supposé élastique et correspond au Ti-6Al-4V dont les paramètres de la loi de comportement sont donnés au **chapitre III**.

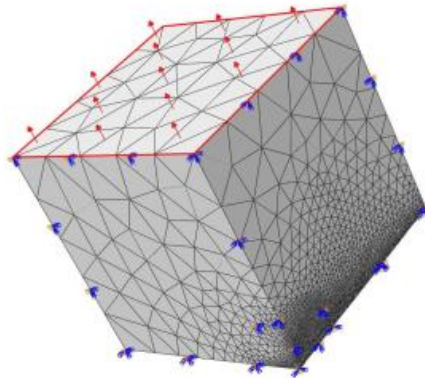


Figure 126 : Chargement de traction uniforme de 1 MPa appliqué sur la face supérieure des modèles.

Au vu du nombre important de calculs, un script python a été mis au point. Ce dernier a permis d'engendrer les géométries, les maillages (tétraédriques de degré deux), les propriétés matériau ainsi que les conditions aux limites associés à chaque cas. Le script a permis également de lancer automatiquement les calculs et de post-traiter les champs mécaniques en pointe de fissure de la manière qui sera décrite dans la suite.

IV.2.2. Méthodes d'extraction des intensités des champs de la mécanique de la rupture

IV.2.2.1. Méthodes des intégrales de contour

IV.2.2.1.1. Intégrale de contour classique

Une manière d'avoir accès à la singularité en pointe de fissure est d'avoir recours à des intégrales de contour. En utilisant l'équation de conservation de l'énergie, Rice (Rice, 1968) a formulé l'intégrale de contour suivante dont la valeur est indépendante du contour choisit. Le contour doit néanmoins faire le tour de la pointe de fissure comme illustré sur la *Figure 127*.

$$J = \int_{\Gamma} \left(w_e - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \cdot dl \quad (\text{IV-33})$$

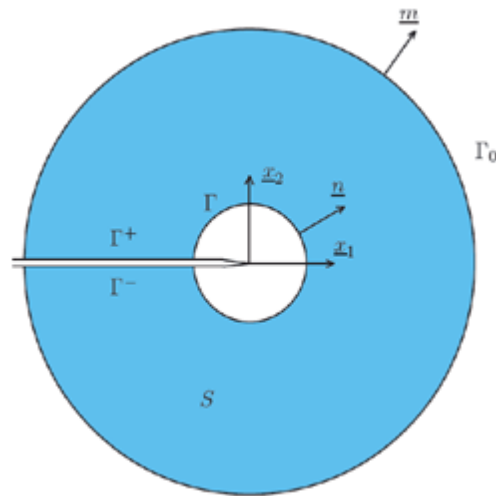


Figure 127 : Description du domaine S au voisinage de la pointe de fissure. La normale extérieure à S, \underline{m} , est telle que $\underline{m} = \underline{n}$ sur Γ_0 , Γ^+ et Γ^- et $\underline{m} = -\underline{n}$ sur Γ .

On sait que cette intégrale est liée au taux de restitution d'énergie G et au facteur d'intensité des contraintes de mode I par les relations suivantes :

$$J = G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2 \cdot \mu} \quad (\text{IV-34})$$

avec,

$$E^* = \begin{cases} \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{en déformation plane} \\ E & \text{en contrainte plane} \end{cases} \quad (\text{IV-35})$$

IV.2.2.1.2. Intégrale d'interaction

Les intégrales d'interaction constituent une autre manière de déterminer les grandeurs pertinentes de la mécanique linéaire de la rupture. Supposons, l'état réel noté (1) et l'état auxiliaire noté (2) et considérons que les champs mécaniques élastiques résultent de la superposition linéaire des deux états précédents. L'intégrale J correspondante s'écrit comme suit :

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \cdot \text{tr} \left(\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \right) \cdot \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} \right) \right) - \left(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \right) \cdot \underline{\underline{n}}_j \cdot \frac{\partial (\underline{\underline{u}}^{(1)} + \underline{\underline{u}}^{(2)})}{\partial x_1} \right) \cdot dl = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1+2)} \quad (\text{IV-36})$$

où $I^{(1+2)}$ est appelé intégrale d'interaction et vaut :

$$I^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \cdot \text{tr} \left(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} \right) - \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{n}}_j \cdot \frac{\partial (\underline{\underline{u}}^{(2)})}{\partial x_1} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{n}}_j \cdot \frac{\partial (\underline{\underline{u}}^{(1)})}{\partial x_1} \right) \cdot dl \quad (\text{IV-37})$$

On démontre que cette intégrale est liée aux facteurs d'intensité des contraintes comme suit :

$$I^{(1+2)} = 2 \cdot \frac{\left(K_I^{(1)} \cdot K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} \cdot K_{II}^{(2)} \right)}{E^*} + \frac{\left(K_{III}^{(1)} \cdot K_{III}^{(2)} \right)}{2 \cdot \mu} \quad (\text{IV-38})$$

Ainsi, le calcul du facteur d'intensité des contraintes de mode I s'obtient en prenant comme champ auxiliaire celui de mode I correspondant à un facteur d'intensité des contraintes unitaire et comme champ réel celui dont on veut déterminer le facteur d'intensité des contraintes. D'où :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} \cdot I^{(1+2)} \quad (\text{IV-39})$$

On voit ici un intérêt majeur des intégrales d'interaction par rapport à l'intégrale de contour J classique. En effet, tandis que l'intégrale J ne donne que le taux de restitution d'énergie, un choix judicieux des champs auxiliaires donne directement le facteur d'intensité des contraintes du mode I (respectivement mode II et mode III). Ainsi, les intégrales d'interaction permettent de séparer les contributions des différents modes. On peut donc dire que les intégrales d'interaction généralisent le concept d'intégrale de contour.

Kfoury a montré à quel point ce type de formulation est général dans ses travaux sur le calcul de la contrainte T (Kfoury, 1986). Il a montré qu'en choisissant des champs auxiliaires convenables, on pouvait faire apparaître la contrainte T à partir de l'intégrale d'intégration précédente. Pour cela, il considère tout d'abord une fissure semi-infinie plane à front droit, chargée à son front par une force linéique f orthogonal au front et parallèle au plan de fissuration (**Figure 128**). Les champs mécaniques qui résultent de ce problème sont considérés comme étant les champs auxiliaires intervenant dans l'intégrale d'interaction. L'intégrale J généralisée s'écrit alors (avec l'indice f pour désigner le problème auxiliaire) :

$$J^{(1+f)} = J^{(1)} + T \cdot \frac{f}{E^*} \quad (\text{IV-40})$$

Si le milieu n'est pas infini, il existe une formule légèrement plus complexe (Kfoury, 1986) faisant apparaître l'intégrale d'interaction précédente, mais elle ne remet pas en cause le propos. Il est donc possible d'avoir accès à des termes d'ordre plus élevés via la méthode des intégrales d'interaction.

Edeline et Bonnet ont proposé une méthode encore plus générale permettant de construire de manière semi-analytique des champs auxiliaires de manière à pouvoir tenir compte des effets de gradient de chargement le long du front de fissure et de courbure du front ainsi que des lèvres de fissure (Bonnet & Edeline, 2007). Leur méthode permet également de prendre en compte le fait que la fissure n'est pas dans un milieu infini mais dans un milieu avec des bords. Cependant, ils ne l'utilisent que pour déterminer des facteurs d'intensité des contraintes. Ils expliquent également, que les champs auxiliaires classiques ne sont réellement valides que pour des fissures planes à front droit. Ils proposent alors une méthode semi-analytique pour déterminer de meilleurs champs auxiliaires.

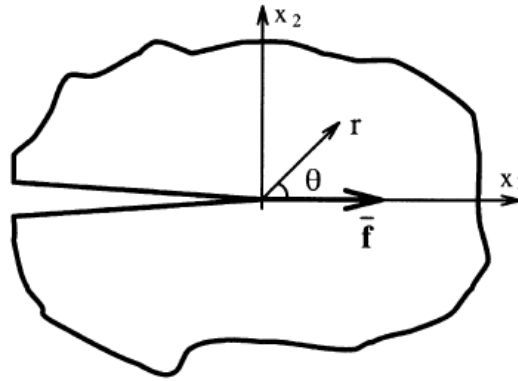


Figure 128 : Illustration d'une fissure semi-infinie chargée le long de son front par une force (par unité de longueur de front de fissure) parallèle au plan de fissuration et orthogonal à son front.

IV.2.2.2. Méthode portant sur l'identification par moindres carrés par rapport à des champs de référence

IV.2.2.2.1. Intérêt d'une telle approche

Les méthodes précédentes ont prouvé leur efficacité dans de nombreuses études. Néanmoins, à l'heure actuelle, seuls les facteurs d'intensité des contraintes et la contrainte T peuvent être extraits des simulations numériques issues des codes commerciaux usuels. En effet, la contrainte T_z a été très peu étudiée dans la littérature et il est donc normal que les codes commerciaux ne proposent pas de l'extraire. Or, le critère TL étendu fait explicitement intervenir cette contrainte et on doit donc la déterminer numériquement. Deux possibilités sont envisageables : soit construire des champs auxiliaires spéciaux pour la détermination de la contrainte T_z et réaliser un script python codant l'intégrale d'interaction correspondante, soit proposer une autre voie. C'est la seconde option qui a été choisie.

IV.2.2.2.2. Application de la méthode avec les champs de Williams pour des fissures planes à front droit en déformation plane ou en contrainte plane

On commence par présenter la méthode sur un cas simple, celui d'une fissure plane à front droit (**Figure 129**) sous hypothèse de contraintes planes ou de déformations planes. La décomposition de Williams (Williams, 1957) consiste à décrire le champ de déplacement au voisinage de la pointe de fissure comme une combinaison linéaire de champs de référence dont les intensités sont les facteurs d'intensité des contraintes généralisés.

Voici la liste en notation complexe des champs de modes I et II à tous les ordres (Mathieu et al., 2013) pour n allant de 1 à $+\infty$:

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_I^n = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2} \cdot \pi} \cdot r^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\kappa \cdot e^{i \cdot n \cdot \frac{\theta}{2}} - \frac{n}{2} \cdot e^{i \cdot (4-n) \cdot \frac{\theta}{2}} + \left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \frac{\theta}{2}} \right) \\ \underline{\varphi}_{II}^n = \frac{i \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2} \cdot \pi} \cdot r^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\kappa \cdot e^{i \cdot n \cdot \frac{\theta}{2}} + \frac{n}{2} \cdot e^{i \cdot (4-n) \cdot \frac{\theta}{2}} + \left((-1)^n - \frac{n}{2} \right) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \frac{\theta}{2}} \right) \end{cases} \quad (\text{IV-41})$$

où la partie réelle de $\underline{\varphi}_I^n$ correspond à la première composante du champ de déplacement et la partie imaginaire correspond à la deuxième composante de ce dernier.

Pour le mode III, on considère les champs qui suivent en notations réelles (les deux premières composantes du vecteur étant nulles) :

$$\varphi_{III}^n = \begin{cases} \frac{2 \cdot r^{\frac{n}{2}}}{\mu \cdot \sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \theta + \pi}{2}\right), & \text{pour } n \text{ impair} \\ \frac{2 \cdot r^{\frac{n}{2}}}{\mu \cdot \sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right), & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \quad (\text{IV-42})$$

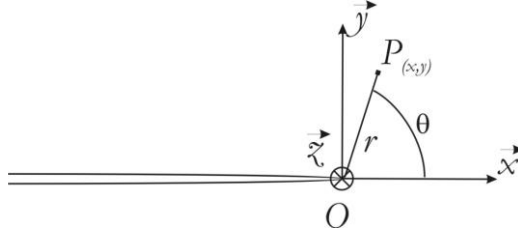


Figure 129 : Illustration d'une fissure plane à front droit et repérage.

L'identification des facteurs d'intensité des contraintes (où pour $n = 2$, K_I^n correspond à la contrainte T) se fait en utilisant la méthode d'identification par moindres carrés comme suit (avec N arbitrairement grand) :

$$\min_{K_I^n} \text{ avec } n \in \llbracket 1; N \rrbracket \frac{1}{2} \cdot \left\| \underline{\mathbf{u}}_{EF} - \sum_{n=1}^N K_I^n \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}_I^n - \sum_{n=1}^N K_{II}^n \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{II}^n - \sum_{n=1}^N K_{III}^n \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{III}^n \right\|^2 \quad (\text{IV-43})$$

où $\underline{\mathbf{u}}_{EF}$ est le champ de déplacement (en notation complexe) nodal au voisinage de la pointe de fissure déterminé numériquement par éléments finis

La norme utilisée dans l'expression précédente est définie de la manière suivante (où les $\underline{\mathbf{x}}_i$ sont les coordonnées nodales du problème éléments finis) :

$$\|\underline{\mathbf{u}}\|^2 = \sum_{i=1}^M \left(u_x(\underline{\mathbf{x}}_i)^2 + u_y(\underline{\mathbf{x}}_i)^2 + u_z(\underline{\mathbf{x}}_i)^2 \right) \quad (\text{IV-44})$$

IV.2.2.2.3. Extension de la méthode pour des fissures quelconques

La méthode précédente ne fonctionne pas lorsque la fissure présente un gradient suffisamment fort du chargement le long du front de la fissure, ainsi qu'une courbure prononcée du front et de ses lèvres. En effet, des champs supplémentaires de courbure et de gradient doivent être ajoutés à la base précédente. Par exemple, Leblond et Torlai (Leblond & Torlai, 1992) ont déterminé les premiers champs supplémentaires à ajouter dans le développement asymptotique des champs mécaniques pour une fissure à lèvres courbées et à front courbe soumise à des gradients de chargement le long du front de fissure et sous l'hypothèse de déformations planes généralisée. Leur développement conduit à la forme suivante du champ de déplacement (p allant de 1 à 3, voir *Annexe 4*) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(s, r, \theta) &= K_p(s) \cdot \underline{\mathbf{f}}^p(\theta) \cdot r^{\frac{1}{2}} + T_p(s) \cdot \underline{\mathbf{g}}^p(\theta) \cdot r \\
&+ \left(\begin{aligned}
&\underbrace{B_p(s) \cdot \underline{\mathbf{h}}^p(\theta)}_{\text{Termes classiques fissure plane}} + \underbrace{\frac{dK_p}{ds}(s) \cdot \underline{\mathbf{l}}^p(\theta)}_{\text{Termes associés au gradient de chargement le long du front}} + \underbrace{C_{\lambda\mu}(s) \cdot K_p(s) \cdot \underline{\mathbf{m}}^{p\lambda\mu}(\theta)}_{\text{Termes associés aux courbures des lèvres}} + \underbrace{\Gamma \cdot K_p(s) \cdot \underline{\mathbf{n}}^p(\theta)}_{\text{Termes associés à la courbure du front}}
\end{aligned} \right) \cdot r^{\frac{3}{2}} + o\left(r^{\frac{3}{2}}\right) \quad (\text{IV-45})
\end{aligned}$$

où $C_{\lambda\mu}$, Γ et s sont, respectivement, le tenseur de courbure des lèvres de fissure et la courbure du front au premier ordre et la coordonnée curviligne.

En poursuivant le développement à des ordres supérieurs, on s'attend à voir apparaître des termes de courbure (d'ordre supérieur ou non) couplés à des termes de gradient (d'ordre supérieur ou non) ou des termes classiques (de la fissure plane à front droit chargée uniformément le long de son front) etc. Ainsi, plus on poursuit le développement asymptotique et plus le nombre de termes à ajouter est important. Il n'est pas question ici de les déterminer un à un car cette tâche s'avèrerait trop fastidieuse.

Dans le cadre de cette étude, tous les termes faisant intervenir la matrice de courbure sont nuls puisque les fissures considérées sont planes. Cependant, la présence d'un trou elliptique, et donc d'un gradient de contrainte, et le fait de considérer des fissures semi-circulaires font que des termes de gradient le long du front de fissure et des termes de courbure du front sont à considérer dans l'analyse.

Etant donné que la zone d'extraction des champs de déplacement est de rayon faible (deux dixièmes du rayon de la fissure) par rapport à la dimension de fissure, on suppose que seuls les premiers termes du développement asymptotique auront une contribution significative. Pour que l'identification soit de bonne qualité, le choix de poursuivre le développement jusqu'aux termes en r^2 a été fait. Pour une fissure plane à front droit soumise à un chargement uniforme le long de son front, trois champs particuliers (en plus de celui en mode I) doivent être considérés (Leblond & Torlai, 1992). Ces derniers sont donnés ci-dessous (on les nommera dans la suite modes 3D) :

$$\begin{cases}
u_x = \frac{\nu}{2 \cdot E} \cdot \left(x^2 - y^2 + \frac{z^2}{\nu} \right) \\
u_y = -\frac{\nu}{E} \cdot x \cdot y \\
u_z = \frac{1}{E} \cdot x \cdot z
\end{cases} \quad (\text{IV-46})$$

$$\begin{cases}
u_x = -\frac{\nu}{E} \cdot x \cdot y \\
u_y = -\frac{\nu}{2 \cdot E} \cdot \left(y^2 - x^2 + \frac{z^2}{\nu} \right) \\
u_z = \frac{1}{E} \cdot y \cdot z
\end{cases} \quad (\text{IV-47})$$

$$\begin{cases}
u_x = \frac{1 + \nu}{E} \cdot y \cdot z \\
u_y = -\frac{1 + \nu}{E} \cdot x \cdot z \\
u_z = \frac{1 + \nu}{E} \cdot x \cdot y
\end{cases} \quad (\text{IV-48})$$

Pour pouvoir rendre compte des termes de gradient et de courbure couplés ou non, il est nécessaire d'enrichir cette base en r^2 du champ de déplacement. Comme tous les champs universels ne sont pas connus à cet ordre, il a été décidé d'utiliser une base sinusoïdale. Ce choix a été fait puisque tous les champs de déplacement universels de la mécanique de la rupture s'écrivent comme des combinaisons linéaires de cosinus et de sinus. On liste ci-dessous le détail de cette base :

$$\left(1; \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); \cos(\theta); \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right); \cos(2 \cdot \theta); \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \sin(\theta); \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right); \sin(2 \cdot \theta) \right) \quad (\text{IV-49})$$

Enfin, des champs super-singuliers ont été utilisés dans l'identification. Ces champs correspondent aux fonctions φ_1^n mais avec $n < 0$. Leur rôle est de vérifier que les identifications sont de bonne qualité. En effet, ces champs correspondent à des densités d'énergie infini ce qui n'est pas physique. Donc les intensités associées à ces champs doivent être les plus faibles possibles.

IV.2.3. Intensités des champs de la mécanique de la rupture

Les résultats présentés ont été obtenus avec la méthode introduite précédemment. Au vu de la quantité importante de courbes obtenues, seules celles obtenues pour un K_I de 5 dans le cas d'un milieu semi-infini sont présentés. Ce choix résulte du fait qu'il s'agit du cas le plus pénalisant, au vu des gradients de contraintes importants le long du front de fissure, vis-à-vis de la méthode d'identification. La **Figure 130** montre les différents domaines d'extraction des champs de déplacements ainsi que leurs noms.

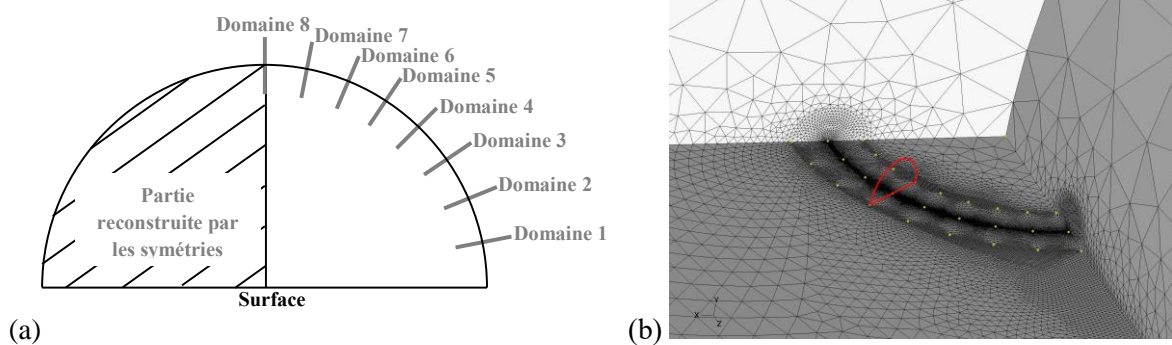


Figure 130 : Position des domaines d'extraction des champs de déplacement le long du front de fissure.

(a) Schéma explicatif,

(b) Exemple du cinquième domaine dans le modèle éléments finis.

On choisit de ne présenter, dans cette partie, que les identifications associées au domaine 1, car de par sa position angulaire en regard de la fissure, celui-ci fait intervenir la contrainte γ , contrairement au domaine 8. De plus, seul le cas du demi-petit axe égal à 0,1 mm, de la fissure de rayon égal à 35 μm et pour une concentration de contraintes en milieu supposé semi-infini est exposé en détail ici. Ce choix est dû au hasard et il a été fait dans le but d'illustrer le type d'analyse réalisé et la robustesse de la méthode. Tous les commentaires sur l'efficacité de la méthode d'identification restent valides pour l'ensemble des différents cas qui ont été traités.

La **Figure 131** donne le résultat de l'identification du facteur d'intensité des contraintes en fonction du rapport entre le rayon du domaine d'extraction des champs de déplacement et le rayon de la fissure. On note que l'identification du facteur d'intensité des contraintes ne semble pas être affectée par ce rapport. Cela montre une bonne robustesse de la méthode.

Cette figure donne également les identifications des trois contraintes non-singulières T , T_z et γ . Cette fois, il semble que la dépendance au rapport défini précédemment soit plus forte. Néanmoins, les

variations des contraintes restent faibles (<10%) et semblent se stabiliser lorsque le rapport devient de plus en plus élevé. Cela provient sans doute du fait que le facteur d'intensité des contraintes est le terme dominant pour les rapports les plus faibles, comme on le verra par la suite.

La **Figure 132** donne les contributions des modes 3D et de la contrainte T_z sur le champ déplacement. Pour un angle $\theta = \pi$, les contributions 3D sont nulles et la contrainte T_z intervient de manière presque négligeable en comparaison avec le facteur d'intensité des contraintes. Il est donc remarquable que l'identification de la contrainte T_z ait pu se faire correctement. On note également que les termes super-singuliers (repérés avec des nombres entre parenthèse négatifs) sont bien plus négligeables que l'ensemble des autres termes, ce qui est le signe d'une identification correcte. Enfin, ce graphique montre que les termes d'ordre supérieur à 2 doivent nécessairement être pris en compte dans l'identification. En effet, le troisième terme intervenant dans le développement asymptotique de Williams contribue globalement plus au champ de déplacement que la contrainte T_z dans le domaine d'extraction des champs éléments finis.

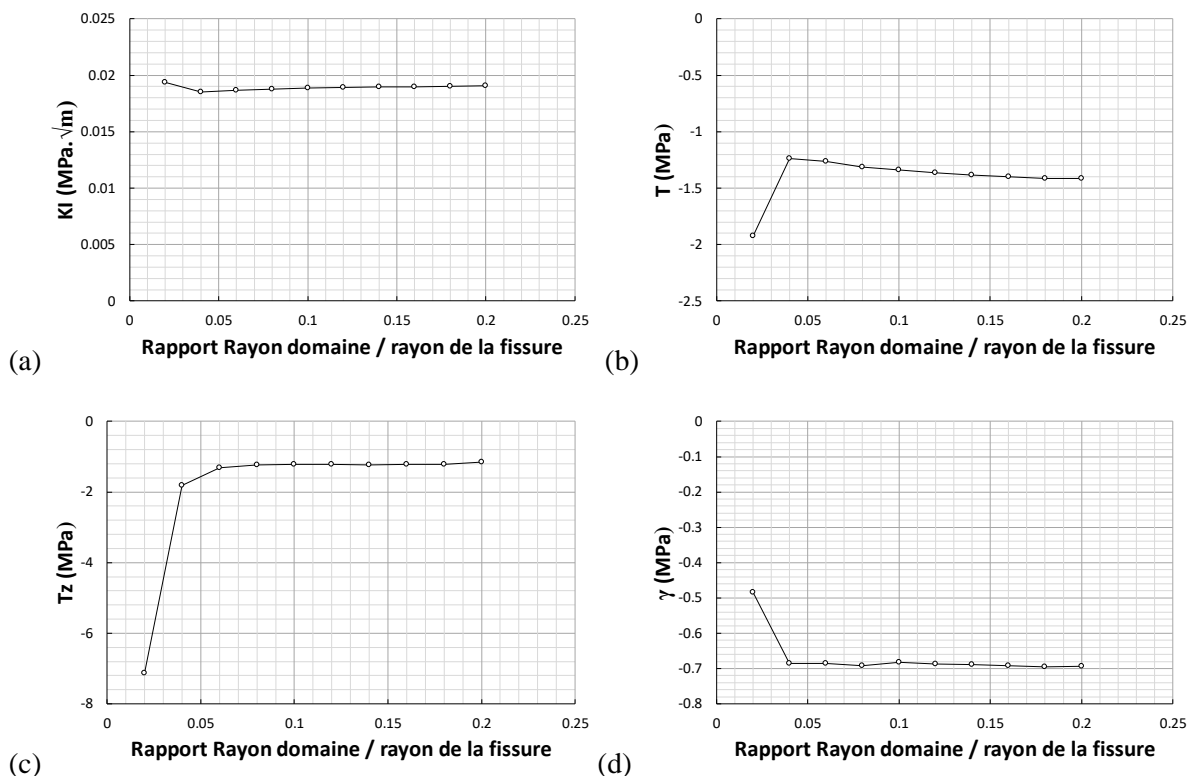


Figure 131 : Résultats de l'identification pour un K_I de 5, un demi-petit axe de 0,1 mm, une fissure de rayon égal à 35 μm et pour le domaine 1 avec l'hypothèse d'une concentration de contrainte supposée être en milieu semi-infini.

- (a) **Facteur d'intensité des contraintes,**
 (b) **Contrainte T,**
 (c) **Contrainte T_z ,**
 (d) **Contrainte γ .**

La **Figure 133** donne les contributions des champs de courbure et de gradient (ici repérées par « Leblond », seuls quatre de ces modes sont traités puisque les deux autres ont des contributions nulles pour $\theta = \pi$). On note que leurs contributions sont loin d'être négligeables et même dominante pour l'un de ces modes, d'où l'intérêt de les prendre en compte dans l'identification, même si leurs intensités ne sont pas considérées dans le critère TL étendu.

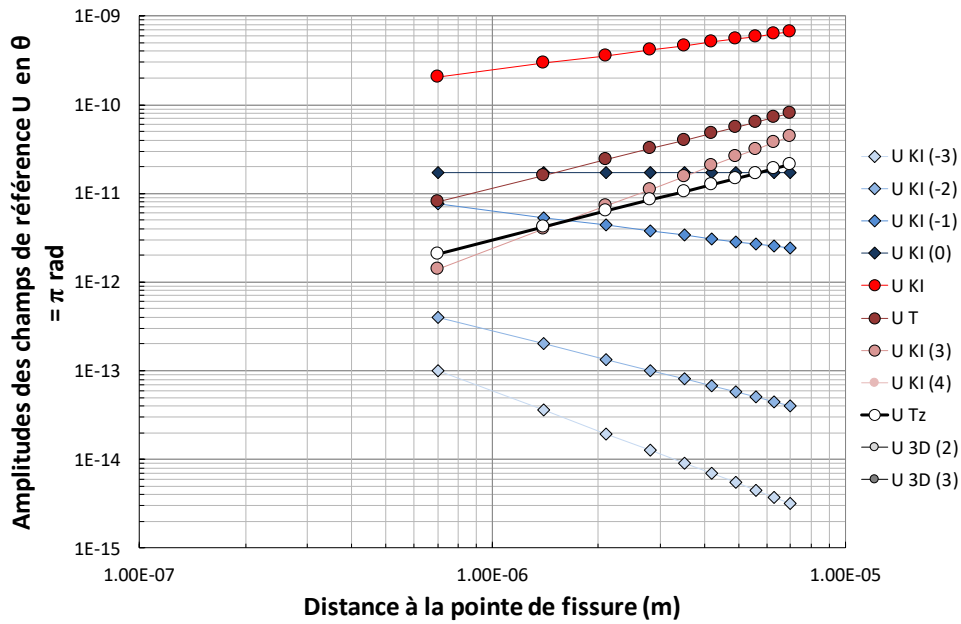


Figure 132 : Evolutions en fonction de la distance à la pointe de fissure des contributions des champs universels de déplacement des modes 3D.

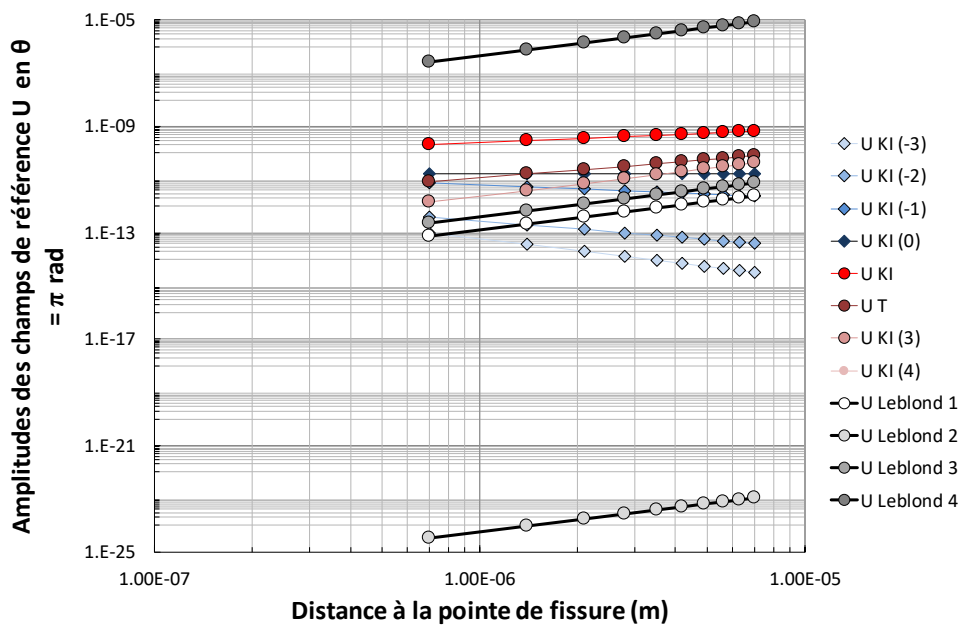


Figure 133 : Evolutions en fonction de la distance à la pointe de fissure des contributions des champs universels de déplacement de gradient et de courbure issus de (Leblond & Torlai, 1992).

Pour terminer, on montre les évolutions du facteur d'intensité des contraintes et des premiers termes non-singuliers avec la dimension de la fissure toujours pour un K_I de 5 et un demi-petit axe de 0,1 mm (et pour un milieu semi-infini) dans les quatre figures qui suivent. On note que les évolutions sont stables vis-à-vis de la position par rapport au domaine et par rapport à la dimension de la fissure. Ceci montre une nouvelle fois la robustesse et la stabilité de la méthode d'identification employée.

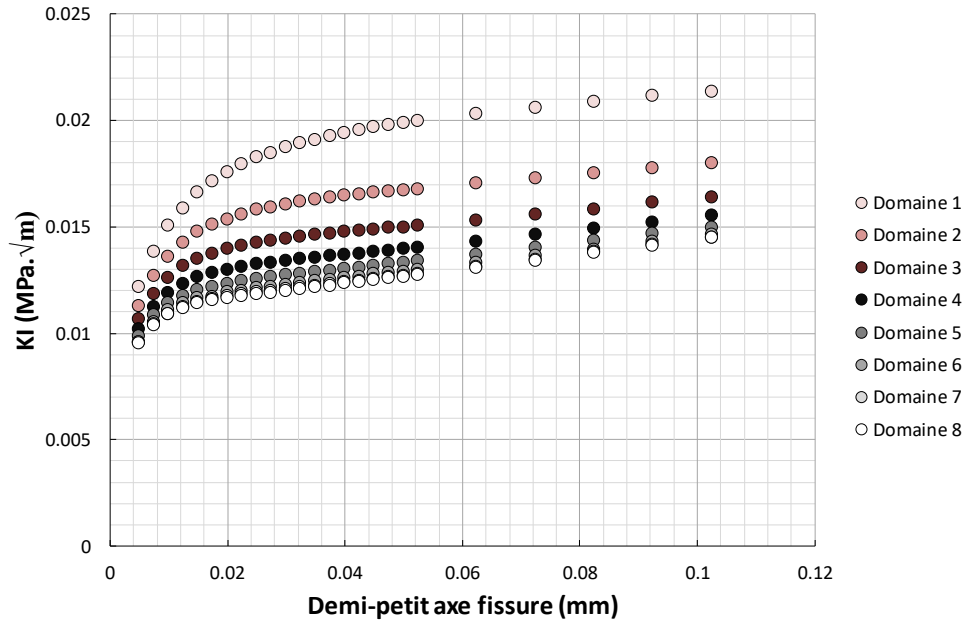


Figure 134 : Evolution du facteur d'intensité des contraintes avec la dimension de la fissure et du domaine pour un K_I de 5 et un demi-petit axe de 0,1 mm.

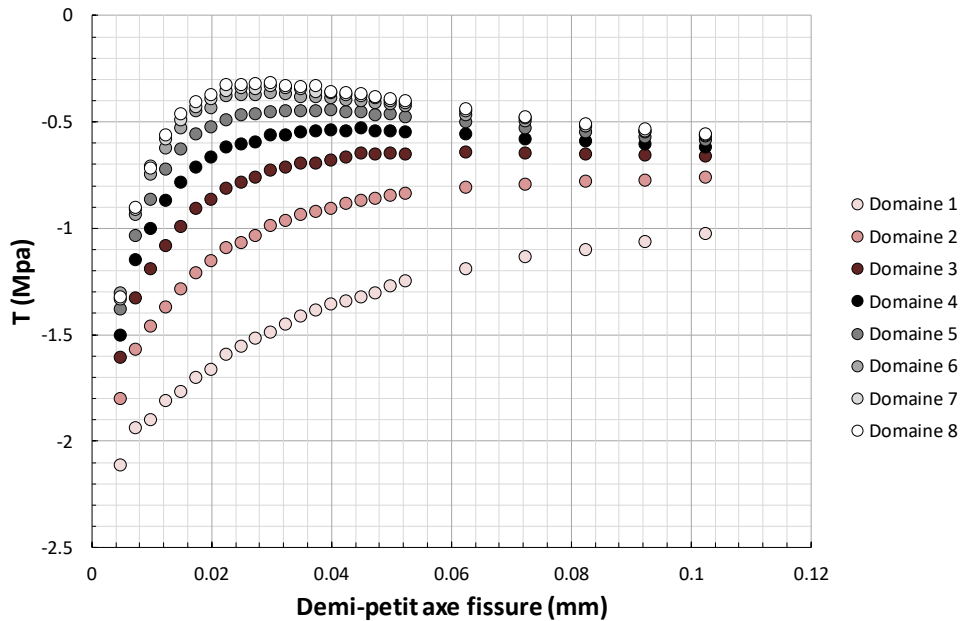


Figure 135 : Evolution de la contrainte T avec la dimension de la fissure et du domaine pour un K_I de 5 et un demi-petit axe de 0,1 mm.

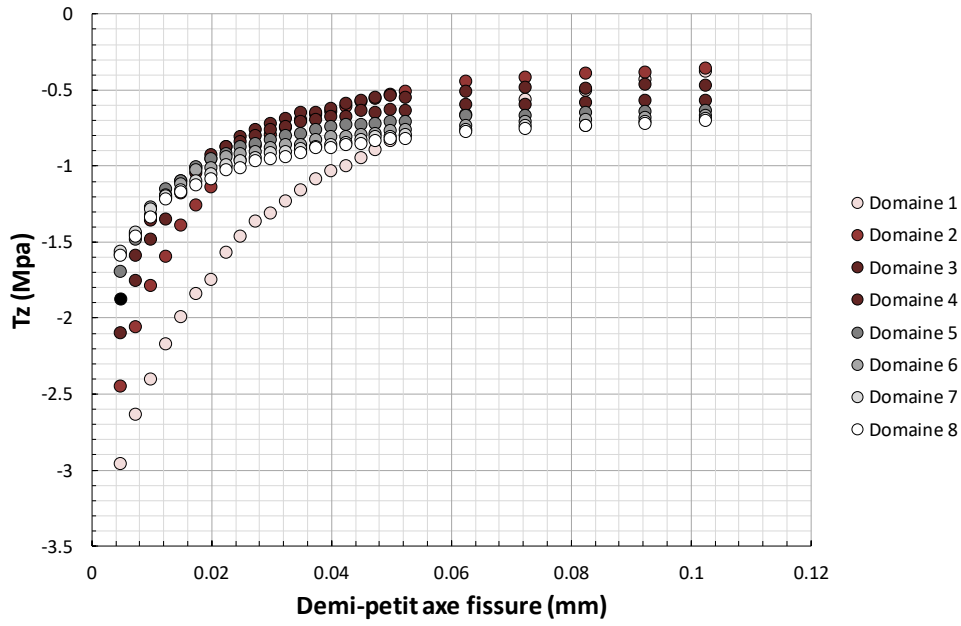


Figure 136 : Evolution de la contrainte T_z avec la dimension de la fissure et du domaine pour un K_t de 5 et un demi-petit axe de 0,1 mm.

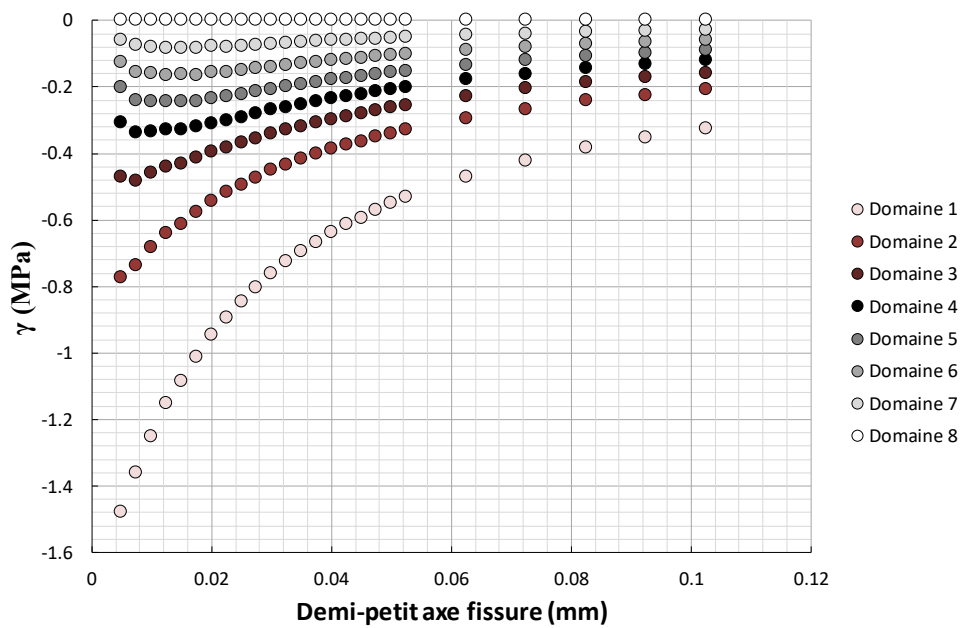


Figure 137 : Evolution de la contrainte γ avec la dimension de la fissure et du domaine pour un K_t de 5 et un demi-petit axe de 0,1 mm.

IV.3. Diagrammes de fatigue pour les zones à concentration de contraintes

IV.3.1. Méthodes d'estimation des intensités des champs de la mécanique linéaire élastique de la rupture

On donne dans cette sous-section une liste de méthodes simplifiées pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes et éventuellement des contraintes T et T_Z . L'idée est de trouver le moyen de déterminer ces quantités d'intérêt sans avoir recours à des calculs par éléments finis sur une structure fissurée complète. L'objectif est ici de proposer une méthodologie compatible avec les besoins des bureaux d'études, c'est-à-dire une méthode la plus simple possible, rapide et efficace.

La méthode des fonctions de poids (Bueckner, 1970; Rice, 1972) a été développée, à l'origine, pour déterminer le facteur d'intensité des contraintes à partir du post-traitement du champ de contraintes issu d'un calcul éléments finis non-fissuré. En particulier, le facteur d'intensité des contraintes est calculé grâce à une intégrale sur la surface fissurée. Des extensions de cette approche pour le calcul de la contrainte T existent pour quelques cas particuliers très limités (Fett, 1998; Fett et al., 2005), en particulier les problèmes 2D plans, mais aucune concernant la contrainte T_Z n'a été développée semble-t-il.

La méthode d'interpolation asymptotique (Liu & Mahadevan, 2009; Wormsen et al., 2006) consiste à exhiber des formules analytiques déterminant le facteur d'intensité des contraintes en fonction de la dimension de la fissure pour des fissures amorcées au niveau d'une entaille et pour un chargement macroscopique homogène donné. Ces formules permettent d'interpoler le comportement du facteur d'intensité des contraintes entre le cas d'une fissure de petite dimension comparativement au rayon de courbure de l'entaille et le cas d'une fissure de dimension très élevée relativement à la plus grande dimension caractéristique de l'entaille. Bien que cette méthode fonctionne bien sur certains cas, elle est limitée à certains types de concentrations de contraintes et ne semble pas avoir été étendue aux contraintes T et T_Z .

Les approches analytiques fondées sur la théorie du potentiel élastique complexe permettent une résolution exacte d'une multitude de problèmes 2D plans. Par exemple, Liu et al. ont résolu complètement le cas de deux fissures planes à front droit débouchant sur un trou elliptique plongé dans un milieu élastique linéaire homogène et isotrope (Liu & Duan, 2014). Ils ont pu exhiber des formules donnant tous les champs mécaniques d'intérêt et ont, par la même occasion, déduit les facteurs d'intensité des contraintes associés aux deux fissures. En poursuivant leurs calculs, il serait tout à fait envisageable d'en extraire les contraintes T associées. Bien que leur méthode soit applicable à une multitude de problèmes, elle n'est d'aucune aide dans la résolution de problèmes intrinsèquement tridimensionnels. En effet, la théorie du potentiel complexe fait usage, de manière intensive, des transformations conformes. Celles-ci conduisent à une théorie extrêmement riche pour des variables complexes (donc pour des problèmes 2D), mais pour des variables de dimensions plus élevées, le nombre de transformations conformes disponibles s'en trouve considérablement réduit. A tel point, qu'il n'en existe pas pour traiter des situations intéressantes sur le plan pratique. Cette méthode ne sera donc pas utilisée dans la suite.

Enfin, la technique des dislocations distribuées est ce qui semble être la démarche la mieux adaptée pour modéliser des cas comme ceux vus dans la section §IV.2 (Hills et al., 1996). Cette méthode consiste en une généralisation des fonctions de poids et des méthodes analytiques précédentes. La contrepartie est qu'elle n'est plus intégralement analytique, mais semi-analytique. Tout comme pour la méthode des éléments finis, la technique des dislocations distribuées conduit à la résolution d'un système matriciel. Cependant, à la différence de cette dernière, les degrés de liberté ne sont plus répartis sur l'intégralité du volume d'étude, mais condensés sur la surface fissurée. Cela réduit considérablement l'espace mémoire nécessaire à la résolution du problème de fissuration. En revanche, cette méthode peut conduire à des temps de calculs pouvant être très longs. C'est la raison pour laquelle, une méthode d'accélération des temps de calculs a été associée à cette dernière. L'association de la technique des dislocations distribuées à la méthode d'accélération des calculs permet la détermination des facteurs d'intensité des

contraintes et des contraintes T et T_Z en quelques fractions de secondes avec une précision suffisante pour n'importe lequel des cas simulés par éléments finis vu dans la sous-section §IV.2. C'est cette démarche qui a été retenue dans la suite.

Pour plus de détails sur l'ensemble des méthodes exposés dans cette sous-section, le lecteur est invité à consulter les *Annexe 5*, *Annexe 6*, *Annexe 7* et *Annexe 8*. La technique d'accélération des calculs et sa validation dans le cadre de son utilisation avec la technique des dislocations distribuées sont exposées dans l'*Annexe 9*. Cette méthode utilise les règles de normalisation mise en évidence dans la sous-section §IV.3.2 qui suit. Une amélioration des résultats obtenues par la technique des dislocations distribuées, appelée méthode « mixte », est proposée dans cette annexe.

IV.3.2. Mise en évidence de courbes maîtresses

IV.3.2.1. Normalisation des courbes par rapport à une échelle géométrique

L'objectif de cette sous-section, est de montrer qu'à partir de quelques courbes maîtresses obtenues numériquement, il est possible d'engendrer des courbes donnant les évolutions des facteurs d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_Z en fonction de la dimension de la fissure. Considérons une géométrie, contenant une fissure débouchant sur une concentration de contrainte, dont les dimensions ont été multipliées par le paramètre α (le K_I n'est pas modifié par cette opération), le champ de contrainte en pointe de fissure s'écrit comme suit (en mode I avec $r = \alpha \cdot r_0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r_0}} \cdot f_{xx}(\theta) + T + o(\alpha \cdot r_0) \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r_0}} \cdot f_{yy}(\theta) + o(\alpha \cdot r_0) \\ \sigma_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r_0}} \cdot f_{xy}(\theta) + o(\alpha \cdot r_0) \\ \sigma_{xz}(r, \theta) = \gamma + o(\alpha \cdot r_0) \\ \sigma_{yz}(r, \theta) = o(\alpha \cdot r_0) \\ \sigma_{zz}(r, \theta) = \nu \cdot (\sigma_{xx}(r, \theta) + \sigma_{yy}(r, \theta)) + T_Z + o(\alpha \cdot r_0) \end{array} \right. \quad (\text{IV-50})$$

Comme le champ de contrainte n'est pas perturbé par le changement d'échelle, en normalisant le facteur d'intensité des contraintes par $\sqrt{\alpha}$, on obtient une quantité indépendante du facteur d'échelle. Les contraintes T et T_Z n'ont pas besoin, quant à elles, d'être normalisées. En remplaçant α par le courbure de la concentration de contrainte ρ , il devient possible de déduire les évolutions des facteurs d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_Z en fonction de la longueur de fissure (obtenues pour une échelle donnée de la concentration de contraintes) à partir de celles obtenues à une autre échelle.

Ce raisonnement, est validé par les simulations éléments finis qui ont été présentées précédemment. La **Figure 138** montre que pour une géométrie de concentration de contraintes donnée, les évolutions du facteur d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_Z , peuvent se ramener à des courbes maîtresses et ce, quelle que soit l'échelle du problème considéré. Et inversement, à partir des courbes maîtresses, il est possible d'engendrer des courbes d'évolution avec la dimension de fissure des quantités d'intérêt de la mécanique de la rupture, quelle que soit la dimension de la concentration de contrainte, pourvu que sa géométrie reste conservée.

La **Figure 139** montre qu'en modifiant la géométrie de la concentration de contraintes, la courbe maîtresse du facteur d'intensité des contraintes est également modifiée, même à iso- K_I (ceci est également vrai pour les contraintes T et T_Z). Dans la prochaine sous-section, on verra une autre méthode de normalisation plus générale que celle proposée ici.

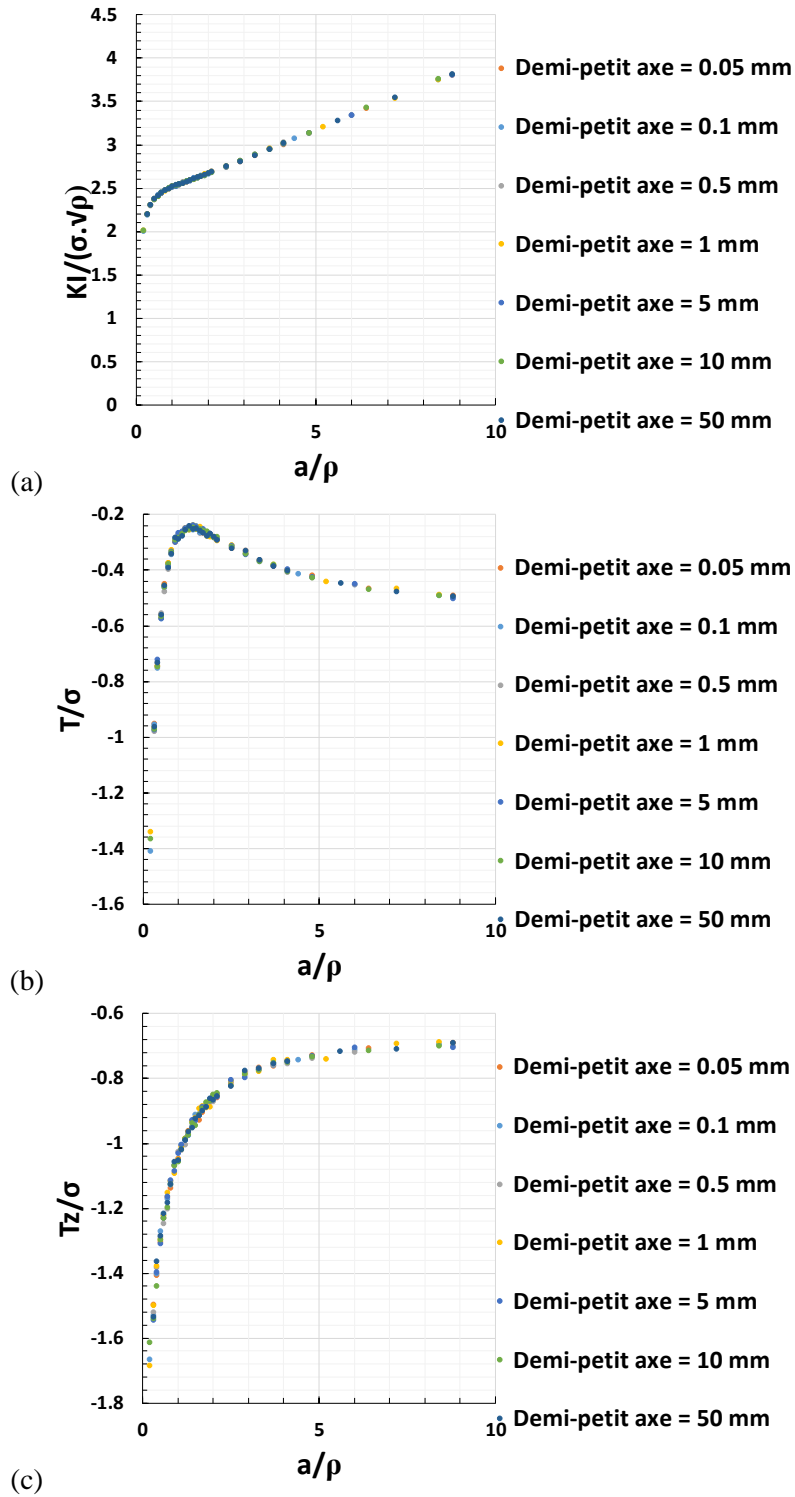


Figure 138 : Courbes maîtresses normalisées par le rayon de courbure pour un K_t de 5 et pour le domaine 8 dans le cas du milieu-semi infini (σ étant la contrainte imposée à l'infini) :

(a) Facteur d'intensité des contraintes,

(b) Contrainte T ,

(c) Contrainte T_z .

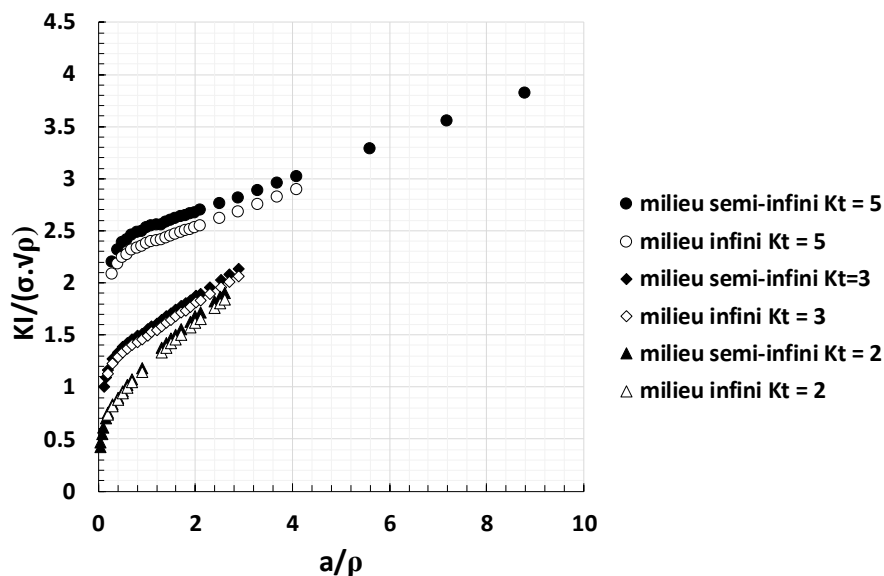


Figure 139 : Courbes maîtresses du facteur d'intensité des contraintes construites pour différentes géométries de concentration de contraintes (différents K_t et hypothèses milieu semi-infini et infini).

IV.3.2.2. Normalisation des courbes par rapport à une échelle associée au gradient du champ de contrainte normal au plan de fissuration

On a vu dans la section §IV.2.1.1 qu'il est possible d'exprimer χ , le gradient du champ de contrainte normal au plan de fissuration, évalué en pointe de la zone de concentration de contrainte, à partir du rayon de courbure de cette dernière ρ . χ est inversement proportionnel à ρ ce qui laisse supposer qu'il est possible de remplacer ρ par l'inverse de χ pour tracer les courbes de normalisation. La **Figure 140** montre que c'est effectivement le cas. Ceci est valide quel que soit le type de concentration de contrainte considéré.

La **Figure 141** synthétise l'ensemble des résultats obtenus pour différents K_t et milieux (semi-infini et infini). Elle montre que cette nouvelle méthode de normalisation est plus efficace que la précédente. En effet, à iso- K_t , les facteurs d'intensité des contraintes pour les milieux infinis et semi-infinis semblent pouvoir être raisonnablement décrits par la même courbe maîtresse et ce, jusqu'aux longueurs de fissure simulées par éléments finis, ce qui n'est pas le cas avec la méthode précédente. Cela semble également vrai, mais dans une moindre mesure, pour les contraintes T et T_z . Cependant, pour ces dernières, au-delà d'une certaine dimension les courbes divergent, surtout dans le cas de la contrainte T .

La divergence notable des courbes portant sur la contrainte T peut s'expliquer géométriquement. Pour cela, on s'appuie sur la **Figure 142** et sur le raisonnement qui a conduit aux méthodes asymptotiques (voir **Annexe 5**). Pour des fissures petites devant la concentration de contraintes et pour le milieu infini, les deux fissures semi-circulaires peuvent être supposées indépendantes. Cependant, lorsque les rayons des fissures deviennent nettement plus élevés que la dimension caractéristique de la concentration de contraintes, on peut considérer que les deux fissures se comportent comme une seule (**Figure 142 (e)**). Les deux fissures peuvent être assimilables à une fissure elliptique unique de dimensions $a+R$ pour le demi-grand axe et a pour le demi-petit axe. Si $a \gg R$, la fissure pourra être assimilable à une fissure circulaire.

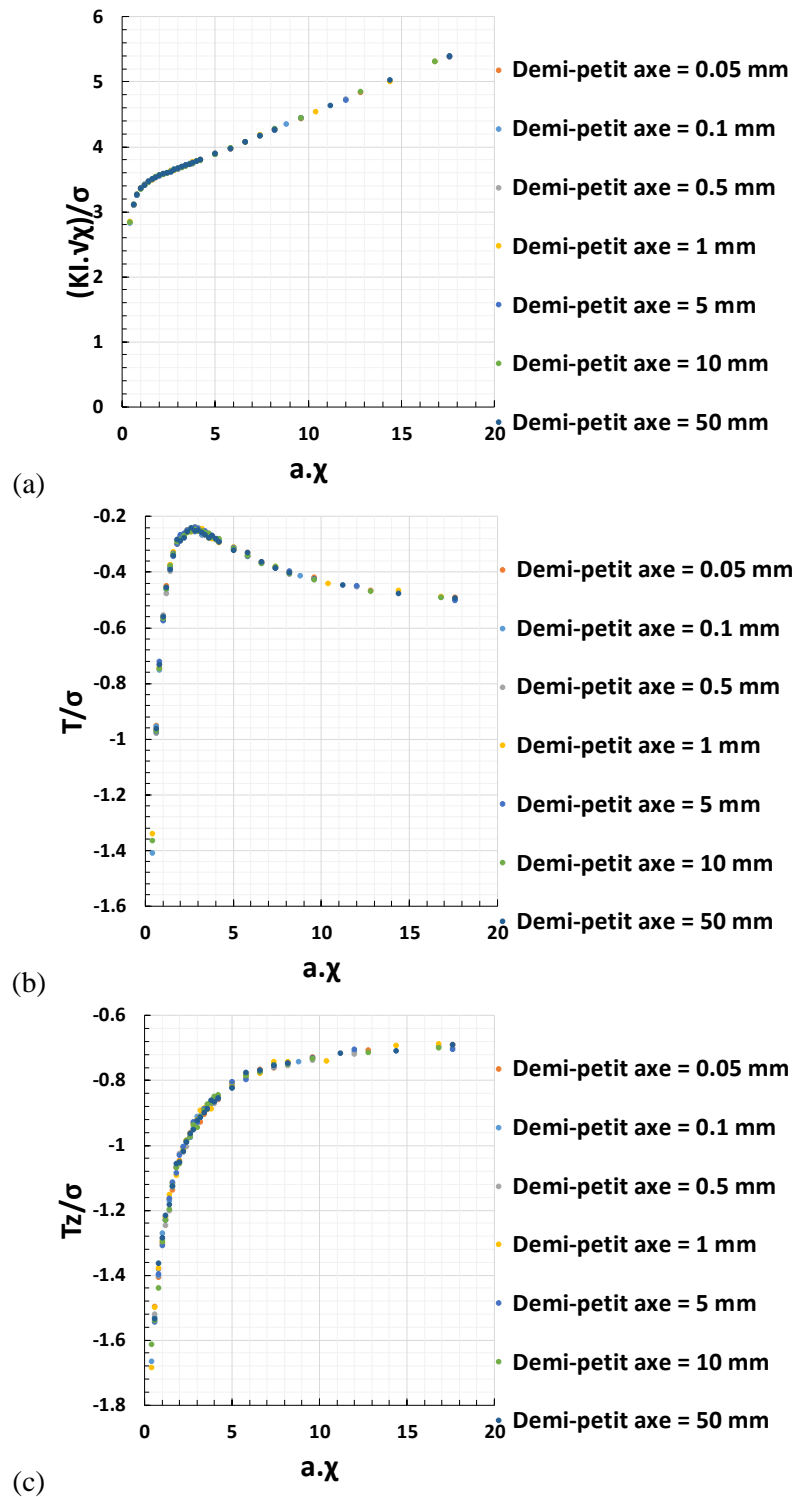


Figure 140 : Courbes maîtresses normalisées par χ le gradient de la contrainte normale au plan de fissuration pris en pointe d'entaille pour un K_t de 5 et pour le domaine 8 dans le cas du milieu-semi infini (σ étant la contrainte imposée à l'infini) :

(a) Facteur d'intensité des contraintes,
 (b) Contrainte T ,
 (c) Contrainte T_z .

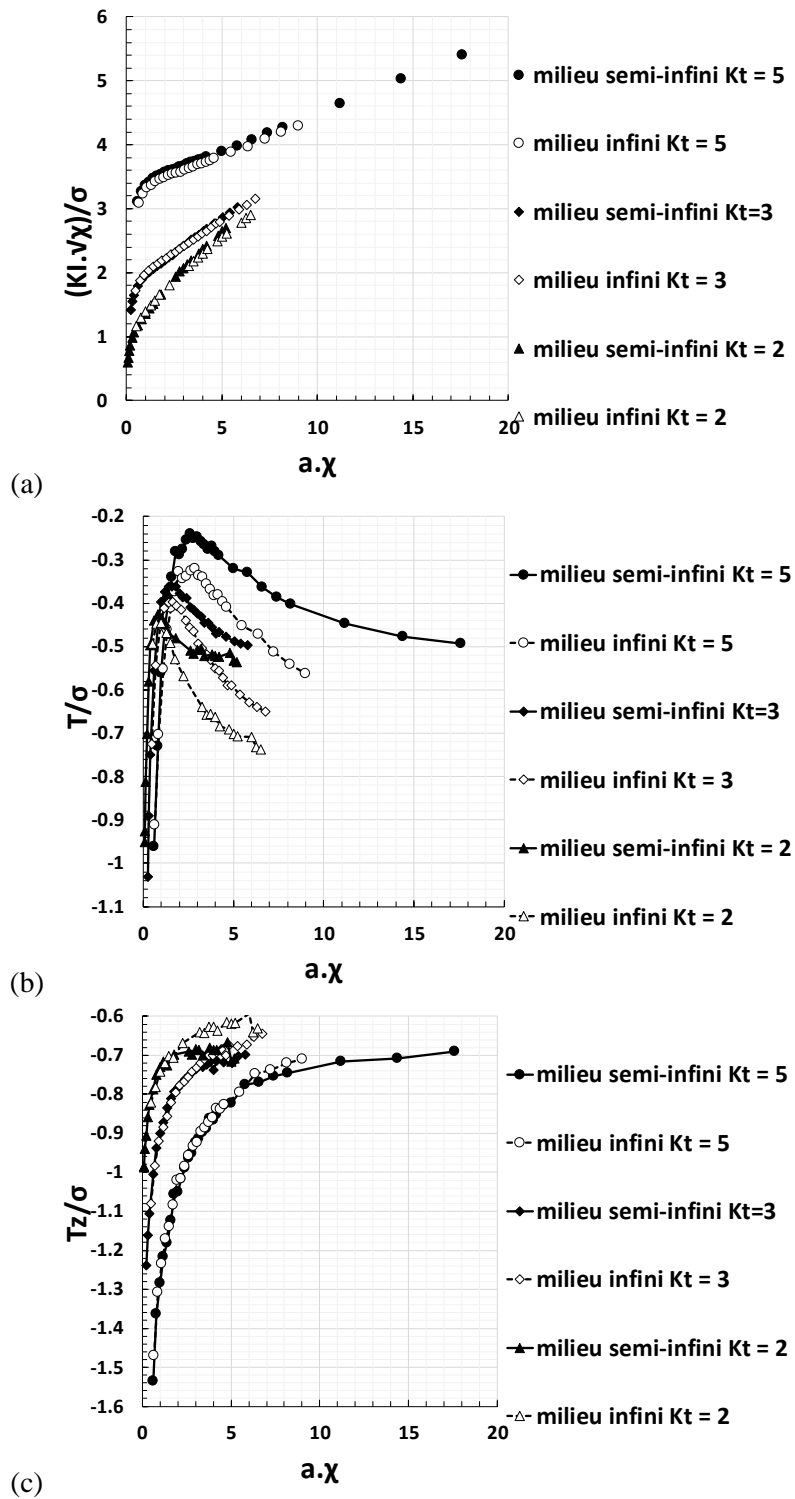


Figure 141 : Courbes maîtresses du facteur d'intensité des contraintes construites pour différentes géométries de concentration de contraintes (différents K_t et hypothèses milieu semi-infini et infini) :

(a) Facteur d'intensité des contraintes,

(b) Contrainte T ,

(c) Contrainte T_z .

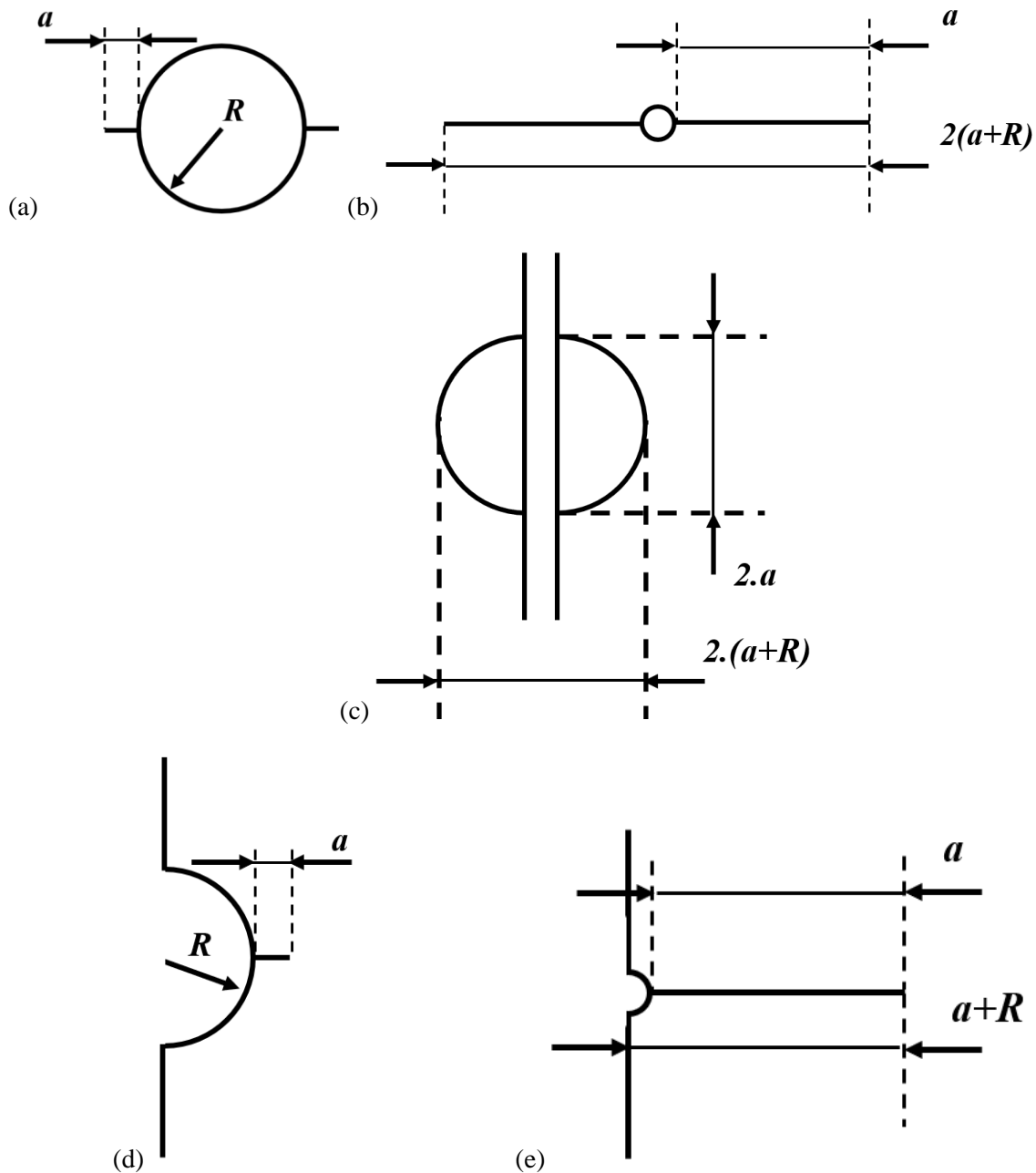


Figure 142 : Différentes configurations géométriques associées à des concentrations de contraintes fissurées :

- (a) Concentration de contraintes dans un milieu infini sur laquelle débouche deux « petites » fissures semi-circulaires,
- (b) Concentration de contraintes dans un milieu infini sur laquelle débouche deux « grandes » fissures semi-circulaires,
- (c) Concentration de contraintes dans un milieu infini sur laquelle débouche deux « grandes » fissures semi-circulaires vue de dessus.
- (d) Concentration de contraintes dans un milieu semi-infini sur laquelle débouche une « petite » fissure semi-circulaire,
- (e) Concentration de contraintes dans un milieu semi-infini sur laquelle débouche une « grande » fissure semi-circulaire.

Dans le cas du milieu semi-infini, un tel raisonnement s'applique également. Pour une fissure suffisamment grande devant la concentration de contraintes, les formules donnant les demi-axes restent valides, mais la fissure sera toujours considérée comme étant semi-elliptique et non elliptique. Par passage à la limite ($a \gg R$), la fissure sera assimilable à une fissure semi-circulaire. Ainsi, en milieu semi-infini, la fissure ne change pas de nature.

Maintenant, réexaminons les formules donnant les quantités pertinentes de la mécanique de la rupture dans le cas d'un milieu (infini ou semi-infini) soumis à une traction uniforme σ_n :

- Fissure semi-circulaire :

$$\begin{cases} K_I = 0,6375 \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = -0,5564 \cdot \sigma_n \\ T_Z = -0,6682 \cdot \sigma_n \end{cases} \quad (\text{IV-51})$$

- Fissure circulaire (en prenant $\nu = 0,29$) :

$$\begin{cases} K_I = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \approx 0,6375 \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\ T = -\frac{1 + 2 \cdot \nu}{2} \cdot \sigma_n \approx -0,79 \cdot \sigma_n \\ T_Z = -\frac{1 + 2 \cdot \nu}{2} \cdot (1 - \nu) \cdot \sigma_n \approx -0,5609 \cdot \sigma_n \end{cases} \quad (\text{IV-52})$$

On note que pour une même dimension de fissure, le facteur d'intensité des contraintes ne change pas de manière significative. Pour la contrainte T_Z , la différence devient plus importante, mais l'est encore d'avantage pour la contrainte T .

A l'aide de ces formules, on comprend pourquoi la normalisation avec le gradient des facteurs d'intensité des contraintes semble conduire à une courbe maîtresse unique que l'on considère un milieu infini ou semi-infini pour le facteur d'intensité des contraintes. En effet, le comportement asymptotique dans les deux cas est le même et la normalisation en ρ ne tient pas compte à elle seule des subtilités du chargement au voisinage de la concentration de contrainte. Pour les contraintes T et T_Z , les déviations résultent uniquement du fait que le comportement asymptotique, pour des fissures longues, des milieux infinis et semi-infinis, ne sont pas identiques. En revanche pour des fissures de dimensions suffisamment faibles, les deux milieux conduisent aux mêmes configurations géométriques, d'où le fait que les courbes se superposent pour ce régime.

Un autre intérêt de cette approche par rapport à la précédente est qu'il n'est pas toujours possible de normaliser par un rayon de courbure d'une concentration de contraintes. En effet, une hétérogénéité spatiale du tenseur des contraintes peut être engendrée par un chargement complexe thermomécanique. La normalisation par rapport au gradient de contrainte semble donc d'une portée plus générale, mais il se posera la question de savoir à quel K_I correspond telle ou telle situation et même si cette dernière question garde un sens dans de pareilles situations.

En revanche, lorsque le gradient de contrainte est nul, cette approche ne fonctionne clairement pas puisque dans ce cas, $\frac{K_I \cdot \sqrt{\chi}}{\sigma} = 0$ et $a \cdot \chi = 0$, mais ces situations peuvent être traitées à l'aide des formules précédentes.

IV.3.3. Génération de courbes de Kitagawa et Takahashi

IV.3.3.1. Interaction entre l'échelle d'une fissure et celle du K_t

Dans la sous-section §IV.1, on a formulé un critère de non-propagation de fissure dépendant du facteur d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_z . Afin de simplifier les notations, il sera noté comme suit :

$$\text{Critère}(K_I, T, T_z) \leq 1 \quad (\text{IV-53})$$

Cette fonction est proportionnelle au carré de l'intensité du chargement pour une direction fixée dans l'espace (K_I, T, T_z) . L'amplitude de contrainte seuil de non-propagation s'exprime comme suit (avec K_I , T et T_z déterminés pour un chargement appliqué de 1 MPa et par éléments finis) :

$$\frac{\Delta\sigma_{th}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\text{Critère}(K_I, T, T_z)}} \quad (\text{IV-54})$$

La **Figure 143** compare les prédictions obtenues avec le critère en termes d'amplitude de contrainte seuil de non-propagation de fissure avec et sans prise en compte des contraintes T et T_z dans le cas d'un chargement de traction uniforme à rapport de charge égal à -1 et pour un milieu en Ti-6Al-4V contenant une concentration de contrainte débouchant en surface associé à un K_t égal à 5. Les facteurs d'intensité des contraintes et les contraintes T et T_z utilisés ici sont ceux qui ont été présentés dans la sous-section §IV.2.

Ce graphique nous montre que le seuil de non-propagation transite entre deux régimes. Le premier, qui se manifeste lorsque le rayon de la fissure est suffisamment petit par rapport à l'échelle caractéristique de la concentration de contraintes, est le régime limite obtenu pour une fissure semi-circulaire dans un milieu semi-infini chargé par une contrainte en traction pure homogène multipliée par la valeur du K_t (ici égal à 5). Sur la figure, ce régime est représenté en pointillés. Le deuxième régime est associé à des fissures suffisamment grandes par rapport à l'échelle caractéristique du K_t . Dans ce régime, le comportement mécanique en pointe de fissure n'est plus vraiment sensible à la présence de la concentration de contraintes. La courbe représentant ce régime est celle en trait plein. Elle se construit de manière similaire à la courbe associée au premier régime, mais sans considérer le K_t .

Ce qui est frappant sur ce graphique est que les seuils de transitions d'un régime à l'autre, aussi bien en longueurs de fissure qu'en contraintes, dépendent de l'échelle caractéristique de la concentration de contraintes. Ce phénomène n'est pas nouveau et a déjà été constaté expérimentalement (§I.2.5.3). Il est lié à l'effet de gradient de contrainte induit par le K_t . C'est la présence de ce gradient qui contrôle le passage d'un régime à un autre et ce dernier dépend explicitement de l'échelle de la concentration de contraintes.

Ce graphique montre également que tant que l'échelle caractéristique de la concentration de contraintes est au-dessus d'une certaine limite, le seuil de transition d'un régime à l'autre ne dépend pas de la prise en compte des contraintes T et T_z . En revanche, si cette échelle s'approche de l'échelle de transition entre régimes de fissure courte et longue au sens introduit dans la sous-section §I.2.4, alors les prédictions réalisées avec prise en compte des contraintes T et T_z diffèrent de celles obtenues sans ces termes. Lorsque les contraintes T et T_z sont prises en compte un phénomène nouveau apparaît. La contrainte seuil au lieu de décroître commence par croître puis finit par décroître avec la longueur de fissure. Autrement dit, si le chargement est légèrement au-dessus de la contrainte seuil de non-propagation, il est possible qu'une petite fissure se propage puis s'arrête une fois que le seuil de non-propagation a atteint une valeur égale à celle du chargement.

Pour terminer cette analyse, on remarque qu'il est possible d'obtenir ce résultat lorsque le gradient de contraintes est suffisamment important pour conduire à une diminution du facteur d'intensité des contraintes avec l'avancée de fissure. Cette situation est très différente du cas que l'on vient d'analyser,

puisque dans ce dernier le facteur d'intensité des contraintes est une fonction croissante avec l'avancée de fissure. On vient donc de proposer un nouveau mécanisme qui permettrait potentiellement de comprendre pourquoi des fissures s'amorcent sur des petites concentrations de contraintes sans toutefois conduire à la ruine du matériau.

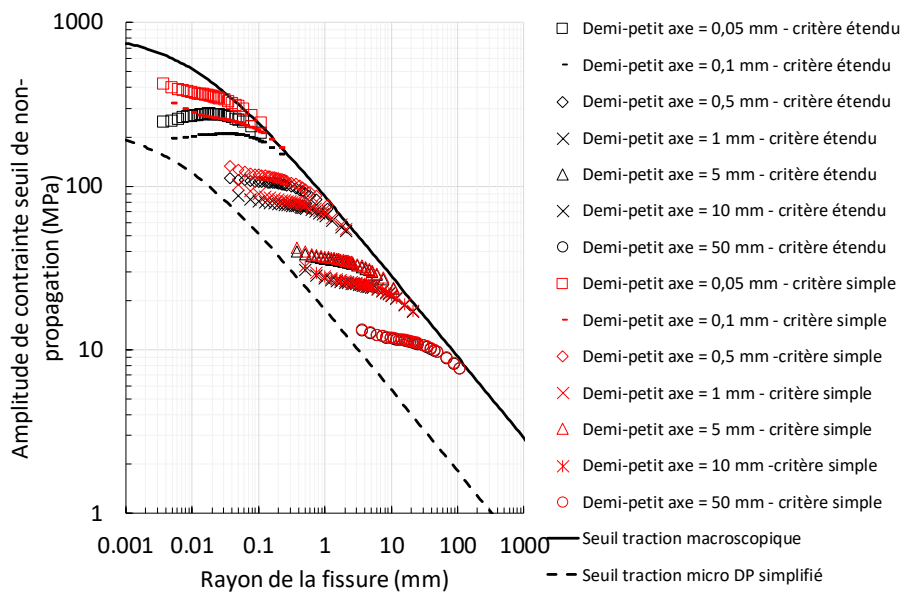


Figure 143 : Influence de la prise en compte (critère TL étendu) ou non (critère simple en K_{1th}) des contraintes T et T_z dans la détermination de l'amplitude de contrainte seuil de non-propagation de fissure (à rapport de charge égal à -1) du Ti-6Al-4V pour une concentration de contraintes débouchant en surface et pour différentes dimensions de l'entaille. Le K_t est ici égal à 5.

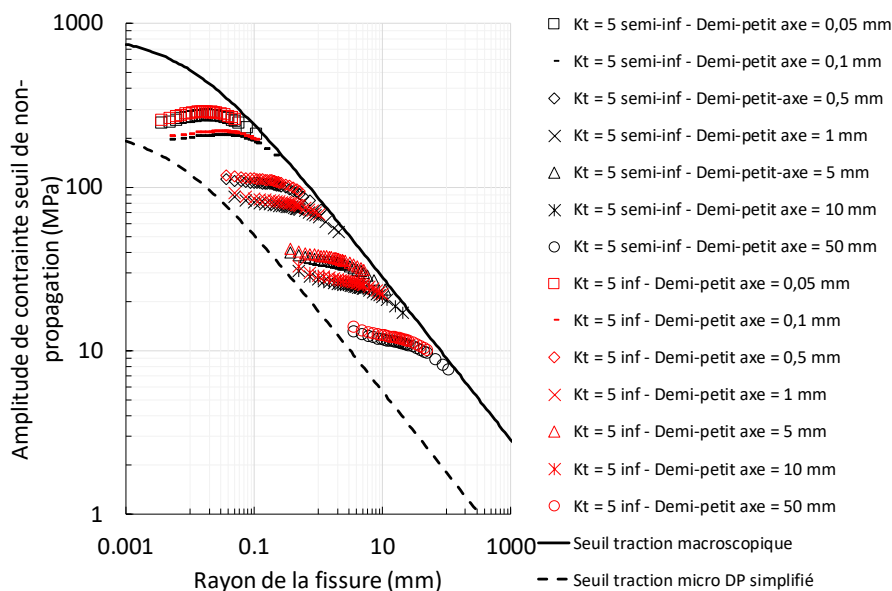


Figure 144 : Comparaisons des amplitudes de contraintes seuil de non-propagation obtenues pour des concentrations de contraintes interne et en surface (en tenant compte des contraintes T et T_z). Les hypothèses sur la valeur du K_t et le matériau sont les mêmes que précédemment.

La **Figure 144** montre que le cas d'une concentration de contraintes interne au matériau est similaire au cas précédent. Les conclusions associées à ce cas sont donc identiques.

IV.3.3.2. Prédications en utilisant la technique des dislocations distribuées

La **Figure 145** permet la comparaison entre les prédictions sur l'amplitude de contrainte seuil de non-propagation de fissure fournies par la méthode des éléments finis avec celles issues de la technique des dislocations distribuées et de la méthode mixte.

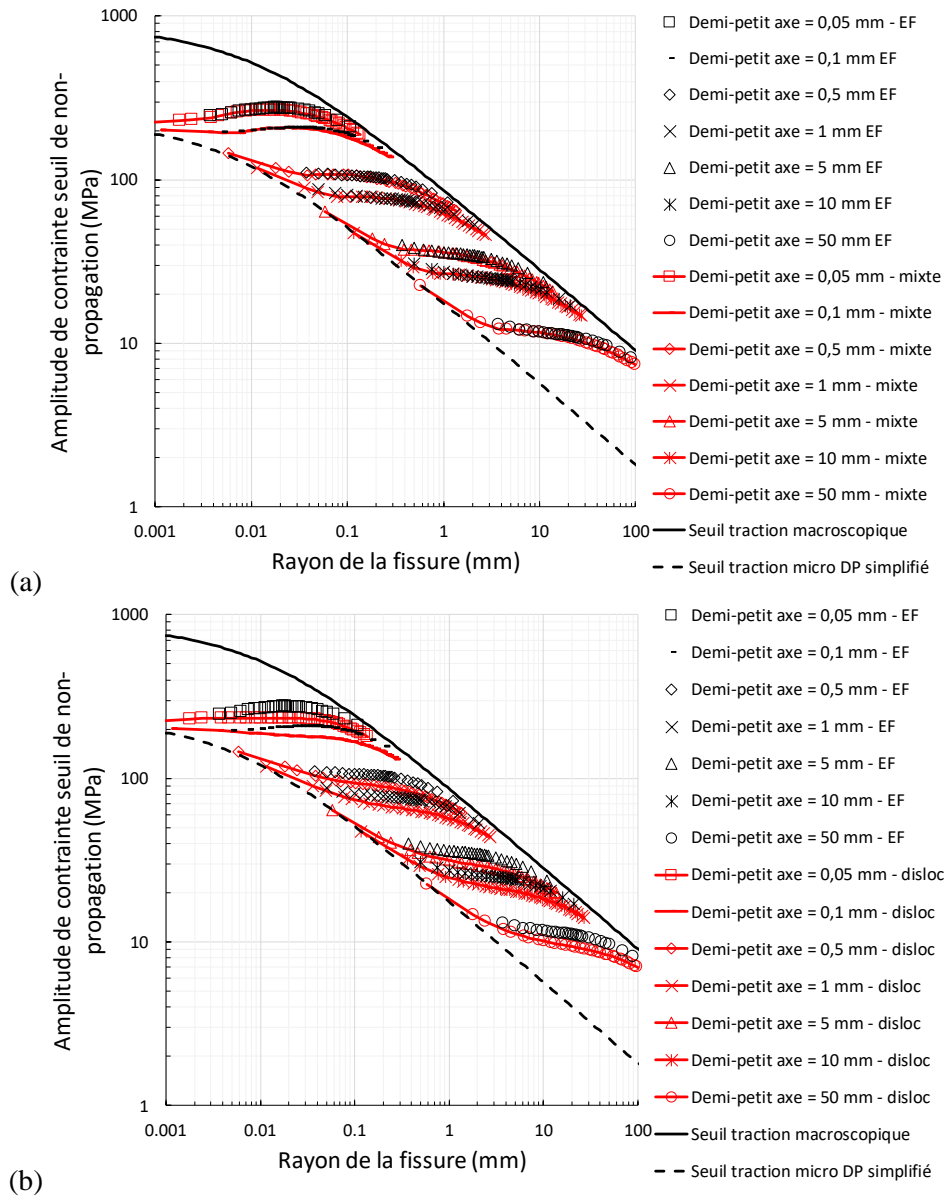


Figure 145 : Amplitudes de contraintes seuil de non-propagation de fissure pour une concentration de contrainte avec un K_t égal à 5 et débouchant en surface avec les mêmes hypothèses que celles introduites précédemment :

- (a) Comparaison entre les prédictions issues des éléments finis et celles issues de la méthode mixte,
 (b) Comparaison entre les prédictions issues des éléments finis et celles issues de la technique des dislocations distribuées.

Pour des longueurs de fissures inférieures à l'échelle caractéristique de la zone à concentration de contraintes, les prédictions fournies par la technique des dislocations distribuées sont excellentes. Au-delà, de petits écarts apparaissent mais les prédictions sont tout à fait convenables. Ceci se justifie par le fait que la région en « longueur de fissure normalisée », pour laquelle de grands écarts sur la prédiction de la contrainte T sont constatés (voir la **Figure 187** de l'**Annexe 9**) est justement la région où la contrainte T est la plus faible en valeur absolue. Elle n'a donc que peu d'impact sur les prédictions.

Enfin, la méthode mixte conduit toujours à des résultats excellents, puisque comparativement à la précédente méthode le facteur d'intensité des contraintes et les contraintes T et T_z sont plus proches des résultats éléments finis.

IV.3.4. Discussion

L'approche présentée permet d'engendrer des diagrammes de Kitagawa et Takahashi cohérents avec la physique. Ce n'est pas le seul type de diagramme de fatigue qu'il est possible de construire. Considérons le cas simple d'un chargement de traction pure homogène spatialement et cyclique à rapport de charge égal à -1. La **Figure 146** montre que le seuil effectif de non-propagation de fissure se déduit comme l'intersection entre la surface seuil de non-propagation de fissure et la droite donnant la direction du chargement dans l'espace K_I - T - T_z . La surface seuil peut être vue comme l'ensemble des seuils de non-propagation de fissure accessibles à l'expérience. Le choix d'un seuil par rapport à un autre se fait en se donnant une direction de chargement dans l'espace K_I - T - T_z .

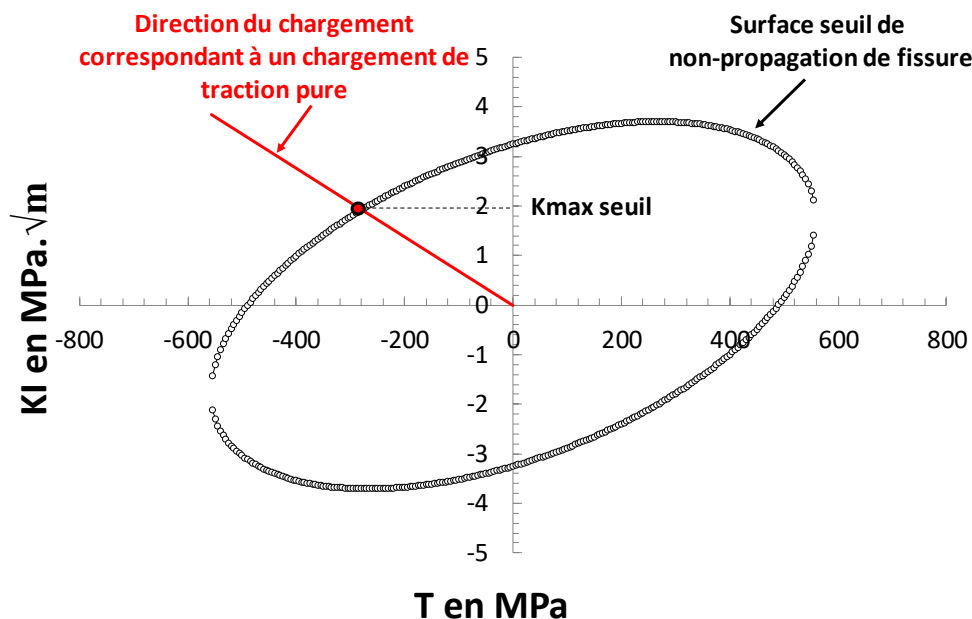


Figure 146 : Surface seuil de non-propagation de fissure représentée dans le plan K_I - T . La surface seuil complète est décrite dans l'espace K_I - T - T_z . Pour tracer cette figure le rapport T/T_z est supposé constant et correspond à celui d'un chargement en traction dans le cas d'une fissure semi-circulaire débouchant en surface.

Par construction, la surface seuil est figée dès lors que le critère TL étendu est identifié. Elle est donc insensible aux effets d'histoire. Il en résulte que la recherche de la demi-amplitude du facteur d'intensité des contraintes seuil de non-propagation de fissure se réduit à celle du facteur d'intensité des contraintes maximum seuil de non-propagation de fissure ($K_{max\ seuil}$ sur la figure). Dans ce contexte, il est possible de relier ces deux quantités par le biais de la formule suivante :

$$\frac{\Delta K_{seuil}}{2} = K_{max\ seuil} \cdot (1 - R) \quad (IV-55)$$

où R est le rapport de charge associé au chargement considéré.

Comme le facteur d'intensité des contraintes est proportionnel au chargement, il devient possible de construire un diagramme de Haigh. La **Figure 147** montre une comparaison entre le diagramme de Haigh expérimental et celui prédit à l'aide du critère TL étendu. La courbe prédite est une droite donnant la contrainte alternée (demi-amplitude de contrainte seuil de non-propagation) en fonction de la contrainte moyenne. D'un point de vue expérimental, la réalité semble plus complexe que ce qui est prédit avec ce modèle.

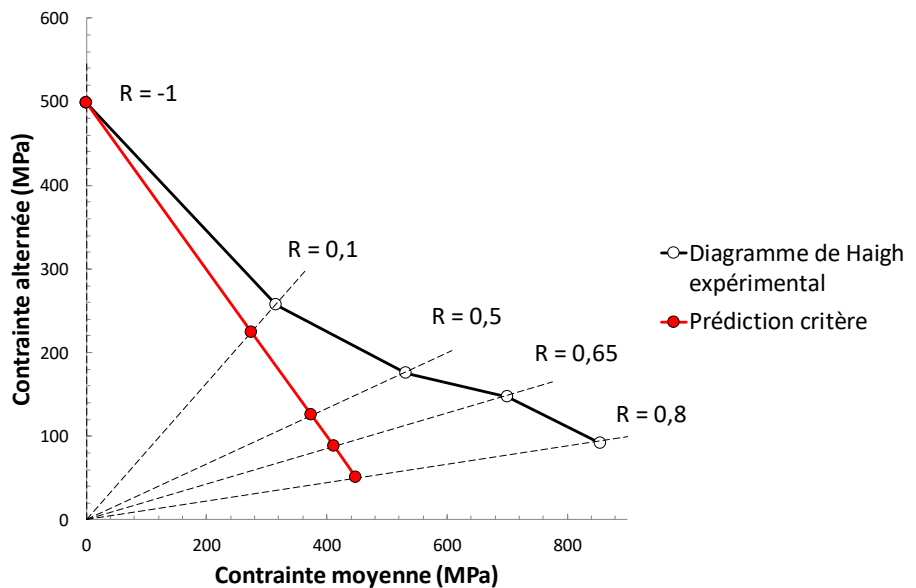


Figure 147 : Diagramme de Haigh obtenu à partir d'essais de fatigue à 10^6 cycles sur des éprouvettes cylindriques en alliage de Titane (d'après les données de Lanning et al. (Lanning et al.,2005 (1))). Le rapport de charge R est égal au rapport entre les contraintes minimales et maximales. Ce diagramme est comparé à une prédiction réalisée à l'aide du critère d'Emmanuel Thieulot-Laure étendu.

Dans la sous-section §I.2.2, il a été vu que la plasticité joue un rôle important en fatigue et on vient de voir qu'une analyse purement élastique conduit à une décroissance linéaire de la contrainte alternée en fonction de la contrainte moyenne dans un diagramme de Haigh. Avec une telle modélisation, il serait impossible de modéliser les résultats expérimentaux en torsion pure. En effet, pour ce type de chargement, la limite d'endurance semble être indépendante de la contrainte moyenne (§I.2.3.2). On propose dans le chapitre qui suit une tentative de généralisation de cette approche au cas non-linéaire, c'est-à-dire à la prise en compte de la plasticité au voisinage de la pointe de fissure. Le critère TL étendu ne sera donc plus considéré comme un critère de plasticité monotone, mais comme un critère de plasticité cyclique.

IV.4. Synthèse

Dans ce chapitre, le critère d'Emmanuelle Thieulot-Laure a été étendu de manière à prendre en compte la contrainte T_z . Le but de cette extension est d'ouvrir la voie à l'application de la démarche aux chargements multiaxiaux.

La démarche a été utilisée pour prédire le comportement en fatigue de zones contenant une concentration de contraintes. Pour cela, des simulations éléments finis ont été réalisées pour différents K_t et échelles caractéristiques de la concentration de contraintes. L'extraction des facteurs d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_z des champs calculés par éléments finis a nécessité le développement d'une méthode de post-traitement adaptée. L'analyse des résultats obtenus a permis de mettre en évidence que les évolutions des facteurs d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_z avec l'avancée de fissure peuvent être normalisées par rapport à l'échelle du gradient de contrainte induit par la concentration de contrainte. Cependant, cette normalisation des courbes n'est que partielle puisque les courbes maîtresses obtenues dépendent du K_t , donc de la forme du gradient de contrainte engendré par la concentration de contrainte.

D'un point de vue industriel, il n'existe pas de méthodes permettant de calculer rapidement le facteur d'intensité des contraintes et les contraintes T et T_z pour un chargement et une géométrie de fissure donnés. C'est pourquoi une recherche bibliographique sur les différentes approches existant dans la littérature a été faite. De cette analyse, il ressort que la méthode des dislocations distribuées associée à une technique de normalisation par l'échelle permet de répondre à cette problématique. Les résultats obtenus montrent que cette méthode n'est pas parfaite, mais répond très bien à ce besoin.

Les courbes de Kitagawa et Takahashi obtenues sont cohérentes avec ce qui a été vu. En effet, la présence d'un gradient de contrainte induit par la concentration de contrainte conduit à l'existence de deux régimes. Le premier concerne les petites fissures par rapport à la concentration de contraintes et l'autre aux grandes par rapport à cette dernière. Le seuil de contrainte pour passer d'un régime à l'autre dépend de l'échelle caractéristique de la concentration de contrainte, pour un K_t donné. Lorsque le K_t est suffisamment important et que son échelle caractéristique se rapproche du seuil de transition entre les régimes de fissure mécaniquement courte et longue un nouveau comportement apparaît. Il est alors possible qu'une fissure amorce et propage jusqu'à arrêt complet. L'endurance en fatigue ne se résume donc pas à l'absence d'amorçage, comme le montrent, par exemple, les résultats expérimentaux de Frost (Frost, 1957; Frost & Dugdale, 1957).

Le mécanisme d'arrêt qui vient d'être mentionné est différent de celui qui résulte d'un gradient de contrainte suffisamment important pour conduire à une décroissance du facteur d'intensité des contraintes. Ici, c'est l'interaction entre plusieurs échelles qui conduit à l'arrêt de fissure, malgré un facteur d'intensité des contraintes croissant.

Pour terminer, l'approche qui a été développée dans ce chapitre est fondée sur un comportement purement élastique. Il est par conséquent impossible de reproduire les diagrammes de Haigh expérimentaux. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse aux effets non-linéaires induits par la plasticité en pointe de fissure dans le **chapitre V**.

V/ Extension du critère de fatigue pour la prise en compte de la plasticité en pointe de fissure

V.1. Introduction

D'après ce qui précède, l'effet du rapport de charge sur le diagramme de Haigh n'est pas pris en compte avec suffisamment de précision avec une approche purement élastique. En effet, les effets de fermetures de fissure, induits par la plasticité, entraînent une modification de l'état de chargement en pointe de fissure (§I.2.5.5). Cela conduit à une dépendance de la loi de propagation au rapport de charge et cela vaut également pour le seuil de non-propagation de fissure longue.

Dans cette sous-section, seront présentées les grandes lignes d'une approche qui a été utilisée avec succès par Pommier et al. (Pommier & Risbet, 2005; Hamam, 2006; Ruiz-Sabariego, 2008; Decreuse et al., 2009; Fremy, 2012). Cette dernière permet de rendre compte d'au moins certains effets d'histoire.

V.1.1. Présentation du modèle incrémental

La démarche est présentée sur la **Figure 148**. Elle consiste à réaliser des simulations numériques sur une plaque contenant une fissure plane à front droit (en contrainte plane ou en déformation plane) en tenant compte de la loi de comportement du matériau identifiée à partir d'essais de traction – compression cyclique.

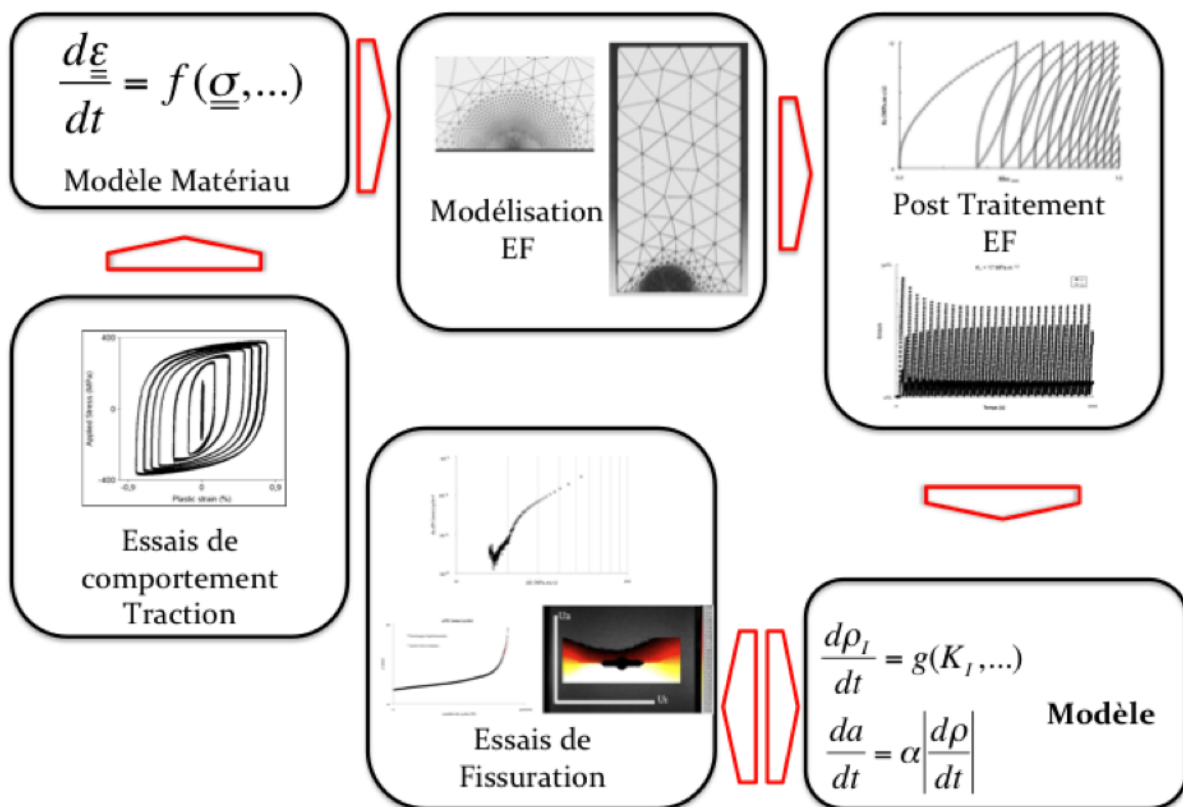


Figure 148 : Démarche utilisée pour mettre en place le modèle de plasticité – condensé (Fremy, 2012).

Le post-traitement des champs de déplacement au voisinage de la pointe de fissure conduit à la détermination de champs de référence : d'une part, les champs élastiques dont les intensités

correspondent aux facteurs d'intensité des contraintes, d'autre part, les champs complémentaires, dont les intensités correspondent à des déplacements résiduels des lèvres de la fissure induits par la plasticité. Une fois ces champs déterminés, le comportement élasto-plastique en variables condensées déterminé au voisinage de la pointe de fissure peut être obtenu. Il est alors possible de tracer des courbes de comportement cycliques. Celles-ci s'obtiennent par analogie avec les courbes de comportement sur un élément de volume. La variable qui joue le rôle de la contrainte est le facteur d'intensité des contraintes associé au mode I et celle qui joue le rôle de la déformation plastique est l'ouverture résiduelle des lèvres de la fissure. Ces courbes font apparaître un phénomène d'écroutissage généralisé et permettent d'identifier une loi de comportement condensée pour la fissuration. Le modèle de propagation suppose que le taux d'avancée de fissure est proportionnel aux taux de variation de l'intensité du champ complémentaire. Un résultat d'essai de propagation de fissure sous chargement cyclique en mode I à un rapport de charge donné permet d'identifier le coefficient de proportionnalité. On détermine ainsi une loi de propagation applicable en toute généralité pour n'importe quel type de chargement, cyclique ou non.

La **Figure 149** décrit la démarche méthodologique conduisant à la durée de vie en propagation de fissure avec le modèle incrémental. On voit sur celle-ci que la détermination du facteur d'intensité des contraintes s'obtient à partir d'un calcul élastique linéaire négligeant totalement la plasticité en pointe de fissure. Cela peut se justifier par le fait que pour un chargement appliqué au loin de la fissure et tel qu'il soit en-dessous de la limite d'élasticité, la zone plastique en pointe de fissure est totalement contenue dans la zone de K -dominance (§II.4.2.1). Ainsi, au loin de la zone plastique, les champs de la mécanique de la rupture s'appliquent et donc le concept de facteur d'intensité des contraintes, vu comme intensité d'un champ asymptotique, continue d'avoir un sens. Ce dernier est peu impacté par la présence de plasticité. En revanche, c'est l'existence de ce dernier qui conduit à de la plasticité en pointe de fissure. C'est la raison pour laquelle, on cherche d'abord à déterminer l'évolution du chargement en facteur d'intensité des contraintes et ensuite de déterminer via le modèle incrémental l'évolution de l'érouissage plastique induit en pointe de fissure.

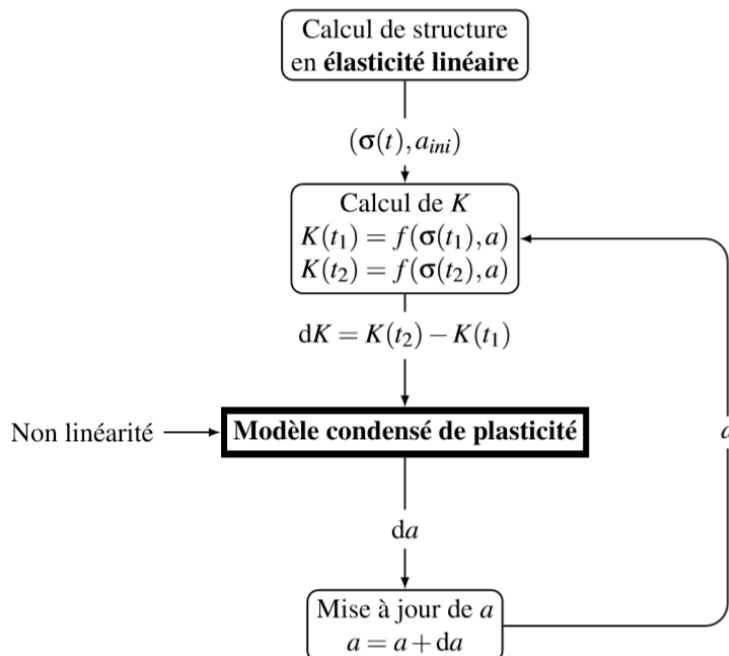


Figure 149 : Démarche générale pour aboutir à la durée de vie en propagation de fissure avec le modèle incrémental (Brugier, 2017).

Une variation temporelle du facteur d'intensité des contraintes est alors donnée en entrée du modèle incrémental afin de déterminer une extension de fissure conduisant à une mise à jour de la variation temporelle suivante du facteur d'intensité des contraintes, et ainsi de suite jusqu'à la fin du calcul.

V.1.2. Quelques résultats obtenus et positionnement dans le cadre de ce travail

Le modèle incrémental a d'abord été développé pour traiter le mode I uniquement (Pommier & Risbet, 2005). Les développements qui ont suivis ont permis d'étendre la démarche, pour rendre compte à la fois des effets de seuils de non-propagation de fissure, de fermetures de fissure et de surcharges (Hamam, 2006). Plus tard, le modèle a été étendu aux hautes températures. Il permet, notamment, de rendre compte des effets néfastes de l'oxydation en pointe de fissure à hautes température dans le cas du N18 qui est un alliage base Nickel (Ruiz-Sabariego, 2008).

Un modèle simplifié a ensuite été proposé pour traiter les chargements non-proportionnels en modes I+II (Decreuse et al., 2009). Il a également été étendu aux chargements I+II+III toujours en non-proportionnel (Fremy, 2012).

Les principales limitations des derniers développements sont que pour l'instant, ils ne permettent pas de rendre compte entièrement des effets de surcharges comme c'est le cas du modèle pour le mode I. Ensuite, le modèle ne permet de traiter efficacement que le cas des fissures longues même si une tentative a été réalisée par le passé pour les fissures courtes (Hamam, 2006). On se proposera d'essayer d'étendre une partie de la démarche aux fissures courtes. Il ne s'agira pas d'établir une loi de propagation en tant que telle, mais d'étendre des outils existants à la prédiction de la non-propagation de fissure à travers la détermination de la surface seuil de plasticité, vue comme une surface seuil de non-propagation.

V.1.3. Modélisation des champs de vitesse de déplacement en pointe de fissure

V.1.3.1. Principe de la méthode

Le principe de la méthode se fonde sur une stratégie multi-échelles qui permet de passer d'une représentation locale du problème, c'est-à-dire la donnée des champs de déplacement en chaque nœud du maillage, à une échelle globale qui ne nécessite que la donnée des facteurs d'intensité élastique et complémentaire (pour prendre en compte l'effet de la plasticité au voisinage de la pointe de fissure).

Cette stratégie consiste à écrire les champs de vitesse de déplacement calculés par éléments finis de la manière suivante dans le cas d'un chargement biaxial pur (sans contraintes T et T_z pour une fissure plane à front droit) :

$$\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \approx \frac{d\tilde{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_f^e(\underline{x}) + \frac{d\rho_I}{dt}(t) \cdot \underline{u}_f^c(\underline{x}) \quad (\text{V-1})$$

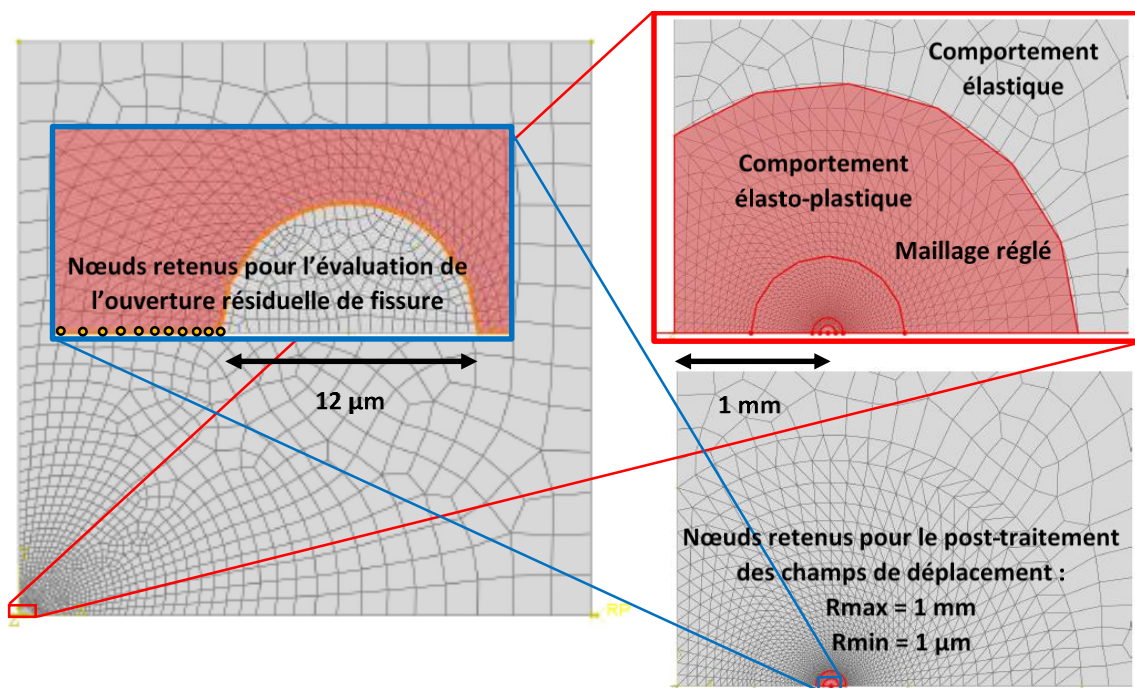
où \tilde{K} et ρ_I sont, respectivement, le facteurs d'intensité des contraintes effectif (tenant compte de la présence des contraintes résiduelles induites par la plasticité) et l'émoussement plastique. Ces quantités ne dépendent que du temps. \underline{u}_f^e et \underline{u}_f^c sont les champs de référence représentant, respectivement, les contributions spatiales élastique et plastique.

Cette manière de représenter le champ de vitesse de déplacement n'est qu'une approximation, car rien ne justifie le fait que la partie plastique puisse s'écrire comme le produit d'une fonction scalaire ne dépendant que du temps par une fonction vectorielle unique ne dépendant que des variables spatiales (ceci est également vrai pour la partie élastique qui se décompose en une somme infinie de termes). En effet, la plasticité résulte de la non-linéarité matérielle qui ne peut se réduire à un mode unique. Néanmoins, l'objectif n'est pas de décrire la plasticité finement, mais juste par une quantité d'intérêt qui suffirait à la caractériser et qui serait cohérente avec la mécanique de la rupture. Il suffit donc de

connaître à un instant donné les champs \mathbf{u}_I^e et \mathbf{u}_I^c pour les connaître à n'importe quel autre moment. Le problème se résume alors à l'étude de l'évolution temporelle des grandeurs \tilde{K} et ρ_I uniquement.

La détermination des champs de référence passe par la réalisation de calculs éléments finis sur une plaque carrée de 2000 mm de côté, comportant une fissure en son centre de longueur $2.a$ avec $a = 10$ mm. Les dimensions de la plaque, comparées à celles de la fissure, sont telles que les champs mécaniques au voisinage immédiat de la pointe de fissure sont très proches de ce qui serait attendu si la fissure était plongée dans un massif infini (*Figure 150*). Cela permet l'utilisation de la formule suivante pour évaluer le facteur d'intensité des contraintes (avec σ la contrainte homogène appliquée au niveau des conditions aux limites) :

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{V-2})$$



*Figure 150 : Modélisation de la plaque fissurée sous Abaqus Cae.
Maillage de la plaque fissurée à gauche,
Zone d'application du comportement élasto-plastique en haut à droite
Nœuds retenus pour le post traitement des facteurs d'intensité en bas à droite.*

Le chargement appliqué au loin de la fissure est de traction équi-biaxiale dans le plan, en déformations planes. Par conséquent, le problème à résoudre présente deux plans de symétrie orthogonaux. Il est inutile de modéliser la plaque entièrement. Seul le quart supérieur droit de la plaque est représenté avec les conditions aux limites qui conviennent, pour tenir compte des symétries du problème. Sur le bord gauche, un déplacement nul suivant la direction horizontale a été imposé, alors que pour le bord inférieur, c'est le déplacement vertical qui est nul.

Avant de réaliser la partition du champ de vitesse en parties élastique et plastique un calcul préliminaire en élasticité sur l'intégralité de la plaque est nécessaire pour obtenir le champ de déplacement élastique \mathbf{u}_I^e dans une région d'intérêt en pointe de fissure notée Ω (*Figure 150* en bas à droite). Le chargement appliqué au cours de ce calcul est tel que le facteur d'intensité des contraintes est égal à $1 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m}$.

En effectuant un nouveau calcul, mais cette fois en prenant en compte le comportement élasto-plastique du matériau, il est possible de déterminer la contribution élastique dans le champ de vitesse élasto-plastique \underline{v}^{EF} à partir d'une projection orthogonale sur \underline{u}_I^e :

$$\frac{d\tilde{K}}{dt}(t) = \frac{\int_{\Omega} \underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \underline{u}_I^e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) \cdot d\Omega} \quad (\text{V-3})$$

On définit alors la contribution complémentaire comme un champ complémentaire orthogonal à \underline{u}_I^e :

$$\underline{v}^{\perp}(\underline{x}, t) = \underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{d\tilde{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) \quad (\text{V-4})$$

Ce champ complémentaire traduit le caractère irréversible de la plasticité en pointe de fissure qui se manifeste par un écartement résiduel des lèvres. Ce vecteur peut s'écrire comme le produit d'un vecteur normalisé et d'un scalaire donnant la vitesse d'écartement résiduel moyen des lèvres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v}^{\perp}(\underline{x}, t) = \frac{d\rho_I}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \\ \rho_I(t) = \frac{1}{\int_{r=0 \mu\text{m}}^{r=1000 \mu\text{m}} u_{I,y}^c(r, \theta = \pi) \cdot dr} \end{array} \right. \quad (\text{V-5})$$

avec $\underline{u}_{I,y}^c$ le champ de déplacement complémentaire dans la direction orthogonale au plan de la fissure.

Le vecteur \underline{u}_I^c correspond à un champ dont l'écartement résiduel moyen des lèvres de la fissure est de 1 μm et la variable ρ_I donne alors l'écartement résiduel des lèvres de la fissure appelé aussi CTOD dans la littérature (Crack Tip Opening Displacement).

L'équation précédente, telle qu'elle est écrite, souffre d'un problème de logique vis-à-vis de la stratégie multi-échelle. En effet, le but du changement d'échelle est de pouvoir réduire le nombre de degrés de liberté du problème. Or ici, aucune réduction n'a été faite. Pour illustrer ce propos, supposons un problème initial à n degrés de liberté. Le champ de vitesse qui en résulte est projeté sur le champ de déplacement élastique et on obtient bien un degré de liberté associé à l'élasticité. Par contre, le champ plastique est défini comme un champ orthogonal au champ élastique et donc le nombre de degrés de liberté qui lui est associé est $n-1$.

Pour passer de $n-1$ à 1 degré de liberté, il est nécessaire de réaliser un calcul élasto-plastique avec différents pas de temps dans lequel la contribution plastique est élevée tout en étant contenue dans le domaine Ω . Ensuite, la décomposition (V-4) est réalisée, puis avec la POD (§V.1.3.2) les combinaisons linéaires de modes pouvant représenter \underline{v}^{\perp} sont déterminées. Il se trouve que le premier mode est suffisant pour représenter avec une bonne précision \underline{v}^{\perp} . C'est ce mode particulier que l'on désignera dans la suite par \underline{u}_I^c (d'où l'équation (V-4)). Il est ensuite normalisé de manière à obtenir :

$$\int_{r=0 \mu\text{m}}^{r=1000 \mu\text{m}} u_{I,y}^c(r, \theta = \pi) \cdot dr = 1 \quad (\text{V-6})$$

C'est cette dernière équation qui permet d'interpréter ρ_I comme l'ouverture résiduelle des lèvres de la fissure. Celle-ci se calcule comme suit :

$$\frac{d\rho_I}{dt}(t) = \frac{\int_{\Omega} \underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot d\Omega} \quad (\text{V-7})$$

La **Figure 151** donne une représentation typique de ce qui serait attendu par le post-traitement de résultats de calculs éléments finis suite à la simulation de charges-décharges croissantes. La courbe obtenue est une courbe d'écroûissage représentée dans un diagramme $K_I - \rho_I$ ($\rho_I(t) = \int_0^t \dot{\rho}_I(t) \cdot dt$). Chaque changement de sens du chargement se caractérise par l'apparition d'un domaine, noté C, au sein duquel ρ_I ne varie pas. L'absence de variation de ρ_I peut s'interpréter comme l'absence d'évolution de la déformation plastique au voisinage de la pointe de fissure. Il s'agit-là du domaine d'élasticité qui est assimilé à un domaine de non-propagation de fissure.

On observe également que le domaine d'élasticité n'est pas complètement statique. Tant que le chargement n'atteint pas la frontière du domaine d'élasticité ce dernier n'évolue pas. Dans le cas contraire, le centre du domaine suit la direction du chargement de manière analogue à ce qui serait attendu si cette courbe d'écroûissage était modélisée par une sorte d'écroûissage cinématique.

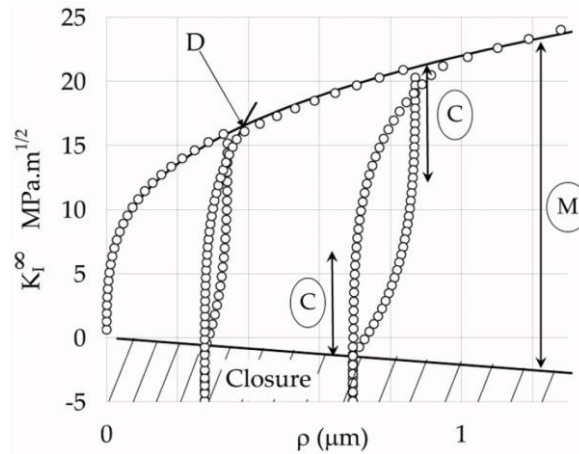


Figure 151 : Evolution de K_I en fonction de ρ_I (Pommier & Hamam, 2007).

Une remarque doit être faite à ce stade. Le domaine d'élasticité dont il est question ici est 1D. En effet, ce dernier n'est modélisé qu'à travers le facteur d'intensité des contraintes. L'objectif de ce chapitre est d'étendre la démarche afin que le seuil d'élasticité puisse être représenté dans l'espace 3D $K_I - T - T_Z$.

V.1.3.2. Présentation rapide de la POD (Proper Orthogonal Decomposition)

Avant de poursuivre, la POD est brièvement introduite dans cette sous-section. Supposons que des simulations numériques élasto-plastiques ont été réalisées et que ces dernières permettent d'obtenir le champ $\underline{v}^\perp(\underline{x}, t)$ en chaque nœud du maillage dans la zone d'intérêt et chaque incrément de temps. Tout d'abord, à chaque pas de temps le vecteur suivant est créé :

$$\underline{V}_k = \begin{pmatrix} \langle \underline{v}^\perp(\underline{x} = \underline{x}_1, t = T_k), \underline{e}_x \rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{v}^\perp(\underline{x} = \underline{x}_N, t = T_k), \underline{e}_x \rangle \\ \langle \underline{v}^\perp(\underline{x} = \underline{x}_1, t = T_k), \underline{e}_y \rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{v}^\perp(\underline{x} = \underline{x}_N, t = T_k), \underline{e}_y \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{V-8})$$

où $\langle \underline{v}^\perp(\underline{x} = \underline{x}_j, t = T_k), \underline{e}_x \rangle$ et $\langle \underline{v}^\perp(\underline{x} = \underline{x}_j, t = T_k), \underline{e}_y \rangle$ sont, respectivement, les projections sur le vecteur unitaire parallèle au plan de fissure et sur le vecteur unitaire orthogonal à ce dernier du champ \underline{v}^\perp pris sur le nœud du maillage de coordonnées \underline{x}_j .

Le produit scalaire euclidien de deux vecteurs $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$ s'écrit $\langle \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle = \underline{\mathbf{u}}^T \cdot \underline{\mathbf{v}}$ et la norme euclidienne associée est notée $\|\underline{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\langle \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}} \rangle}$. La décomposition POD consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant : étant donné un entier T inférieur au nombre d'incrément temporels K , trouver la famille de vecteur $(\underline{\boldsymbol{\psi}}_1, \dots, \underline{\boldsymbol{\psi}}_T)$ qui réalise le minimum d'erreur de projection :

$$\min_{\substack{(\underline{\boldsymbol{\psi}}_1, \dots, \underline{\boldsymbol{\psi}}_T), \underline{\boldsymbol{\psi}}_j \in \mathbb{R}^{2 \cdot N} \\ \langle \underline{\boldsymbol{\psi}}_i, \underline{\boldsymbol{\psi}}_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq T}} \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^K \left\| \underline{\mathbf{V}}_k - \sum_{i=1}^T \langle \underline{\mathbf{V}}_k, \underline{\boldsymbol{\psi}}_i \rangle \cdot \underline{\boldsymbol{\psi}}_i \right\|^2 \quad (\text{V-9})$$

où $\varphi_i(t = T_k) = \langle \underline{\mathbf{V}}_k, \underline{\boldsymbol{\psi}}_i \rangle$ est l'amplitude du mode $\underline{\boldsymbol{\psi}}_i$ à l'instant $t = T_k$.

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des vecteurs $\underline{\boldsymbol{\psi}}_i$, le problème revient finalement à chercher :

$$\max_{\substack{(\underline{\boldsymbol{\psi}}_1, \dots, \underline{\boldsymbol{\psi}}_T), \underline{\boldsymbol{\psi}}_j \in \mathbb{R}^{2 \cdot N} \\ \langle \underline{\boldsymbol{\psi}}_i, \underline{\boldsymbol{\psi}}_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq T}} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^T \sum_{k=1}^K \langle \underline{\mathbf{V}}_k, \underline{\boldsymbol{\psi}}_i \rangle^2 \quad (\text{V-10})$$

En notant $\underline{\mathbf{X}}$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\underline{\mathbf{V}}_k$ et en posant $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{X}} \cdot \underline{\mathbf{X}}^T$ (matrice de corrélation spatiale) le problème se réécrit :

$$\max_{\substack{(\underline{\boldsymbol{\psi}}_1, \dots, \underline{\boldsymbol{\psi}}_T), \underline{\boldsymbol{\psi}}_j \in \mathbb{R}^{2 \cdot N} \\ \langle \underline{\boldsymbol{\psi}}_i, \underline{\boldsymbol{\psi}}_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq T}} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^T \underline{\boldsymbol{\psi}}_i^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\psi}}_i \quad (\text{V-11})$$

Il se trouve que les vecteurs $\underline{\boldsymbol{\psi}}_i$, solutions du problème, sont les T premiers vecteurs propres de la matrice de corrélation spatiale (le classement étant effectué en comparant les valeurs propres de la plus grande à la plus petite). Pour plus de précision sur l'implantation numérique, le lecteur pourra consulter l'*Annexe 10*.

V.1.4. Détermination de la surface seuil de plasticité

Le domaine d'élasticité est globalement visible sur les courbes d'écroutissement $K_I - \rho_I$. En revanche, il est beaucoup moins simple d'en extraire les frontières. En effet ce problème est analogue à celui de la recherche de la limite d'élasticité des matériaux. Il est nécessaire de disposer d'un critère de détection lorsque la frontière est floue entre le domaine élastique et le début du domaine plastique. Par exemple, pour la limite d'élasticité, il est usuel d'utiliser la valeur $Rp02$, c'est-à-dire, la valeur de contrainte au-delà de laquelle la déformation plastique dépasse les 0,2 %. Bien entendu, ce n'est pas le seul critère existant en pratique, mais l'idée, dans la plupart des cas, est de pouvoir détecter un écart à la linéarité. C'est justement cette idée qui est utilisée ici.

Les calculs permettant d'engendrer les courbes $K_I - \rho_I$ sont réalisés de manière incrémentale. A chaque incrément, le champ de vitesse de déplacement (différence entre les champs de déplacements à l'instant $n+1$ et l'instant n) est décomposé en parties élastique et plastique. C'est par ce biais que les courbes $K_I - \rho_I$ sont construites. Mais, il est nécessaire de chercher l'intervalle de chargement en \tilde{K} tel

que ρ_I reste constant comme on vient de le voir. Ce domaine se calcule à l'aide des deux quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1R} = \frac{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{d\bar{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) \right)^2 \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \right)^2 \cdot d\Omega} \\ C_{2R} = \frac{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{d\bar{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) - \frac{d\rho_I}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \right)^2 \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \right)^2 \cdot d\Omega} \end{array} \right. \quad (V-12)$$

La variable C_{1R} quantifie l'écart, selon la norme intégrale, entre un incrément élasto-plastique et un incrément élastique. Si aucun émoussement ne se produit en pointe de fissure cet écart doit nécessairement rester faible. Le paramètre C_{2R} quantifie l'écart selon la même norme entre un incrément élasto-plastique et un incrément élasto-plastique mais décomposé selon la formule (V-1). Tant que le critère suivant est respecté, on considère qu'il n'y a pas d'émoussement plastique :

$$|C_{1R} - C_{2R}| < param \quad (V-13)$$

Le paramètre *param* est identifié à partir de la valeur du seuil de non-propagation de fissure longue obtenue expérimentalement (à rapport de charge suffisamment élevé de manière à ce que sa valeur ne soit pas dépendante des effets de fermeture de fissure). La **Figure 152** illustre la démarche permettant l'identification de *param*.

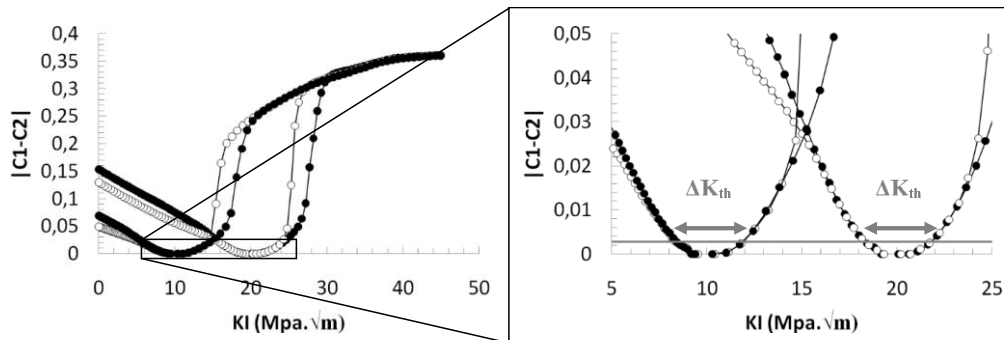


Figure 152 : Evolution de $|C_{2R}-C_{1R}|$ avec le facteur d'intensité des contraintes. Pour chacun des cas *param* est déterminé suite à la simulation de charge-décharges décroissantes en amplitude jusqu'à une amplitude nulle autour d'une valeur moyenne en facteur d'intensité des contraintes. Enfin, une charge ou une décharge est réalisée. C'est l'association des dernières courbes de montée en charge et de décharge qui permet la détermination de *param*.

V.1.5. Loi de comportement utilisée pour modéliser le Ti-6Al-4V

La loi de comportement utilisée dans le cadre de cette étude est a été précédemment identifiée (Le Biavant-Guerrier, 2000). Il s'agit d'une loi élasto-plastique classique pour laquelle l'hypothèse des petites déformations est imposée et la déformation totale se décompose en la somme des déformations élastique et plastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (V-14)$$

Le domaine d'élasticité est défini par $f \leq 0$, où f est la fonction seuil, s'exprimant par :

$$f = J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R - k \quad (\text{V-15})$$

où, J est l'invariant de Mises, $\underline{\underline{X}}$ le centre du domaine d'élasticité, k la dimension du domaine d'élasticité initial et R définit la modification de la dimension du domaine d'élasticité suite à l'érouissage isotrope du matériau.

La déformation plastique est obtenue par la règle de normalité, qui s'exprime comme suit :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{V-16})$$

La variable $\underline{\underline{X}}$ suit une loi d'érouissage cinématique non-linéaire :

$$\underline{\underline{\dot{X}}} = \frac{2}{3} \cdot C \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p - \gamma \cdot \underline{\underline{X}} \cdot p \quad (\text{V-17})$$

En ce qui concerne l'érouissage isotrope, une loi non-linéaire est également utilisée :

$$\dot{R} = b \cdot (Q - R) \cdot \dot{p} \quad (\text{V-18})$$

Le **Tableau 19** donne les valeurs des paramètres identifiés.

Tableau 19 : Paramètres de la loi de comportement.

Coefficients des érouissages cinématiques (MPa sauf γ qui est sans unité)			
C	105000	γ	300
Coefficients des érouissages isotropes (MPa sauf les paramètres b_i qui sont sans unité)			
b	9	Q	-240
k		800	
Coefficients élastiques			
E (MPa)	119000	ν	0,3

V.2. Détermination des surfaces seuils de propagation de fissure

V.2.1. Représentation du champ de vitesse de déplacement

Afin d'étendre l'approche, il est tout d'abord utile de donner une représentation cinématique du champ de vitesse de déplacement intégrant la contrainte T . Par analogie avec ce qui a été vu dans la sous-section §V.1.3.1, cette représentation peut s'écrire ainsi :

$$\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \approx \left(\frac{d\tilde{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) + \frac{d\rho_I}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \right) + \left(\frac{d\tilde{T}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) + \frac{d\rho_T}{dt}(t) \cdot \underline{u}_T^c(\underline{x}) \right) \quad (\text{V-19})$$

où \underline{u}_I^e , \underline{u}_T^e , \underline{u}_I^c et \underline{u}_T^c sont, respectivement, les champs élastiques associés au facteur d'intensité des contraintes et à la contrainte T et les champs complémentaires associés aux variables ρ_I et ρ_T . Par analogie avec ce qui précède, \tilde{T} est interprétée comme la contrainte T effective (tenant compte des contraintes résiduelles) et ρ_T est la variable plastique associée dont le sens sera précisé par la suite.

Cette expression pose quelques difficultés puisqu'il faut être capable d'identifier les différentes contributions à partir de résultats de calculs éléments finis. La méthode proposée consiste à utiliser les propriétés de symétrie des champs élastiques de référence associés au facteur d'intensité des contraintes et à la contrainte T pour pouvoir les séparer. On suppose également que le champ \underline{u}_I^c possède les mêmes propriétés de symétrie que le champ associé au facteur d'intensité des contraintes et que \underline{u}_T^c possède les mêmes propriétés de symétrie que le champ associé à la contrainte T . Ainsi, les quatre termes de l'équation précédente peuvent être répartis en deux groupes indépendants. Rappelons les expressions analytiques des champs de vitesse de déplacement de référence associés, respectivement, à K_I et à T dans le plan orthogonal au front de fissure en représentation cartésienne :

$$\begin{cases} v_x^{K_I}(r, \theta) = \frac{dK_I}{dt} \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) \\ v_y^{K_I}(r, \theta) = \frac{dK_I}{dt} \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos(\theta)) \end{cases} \quad (\text{V-20})$$

$$\begin{cases} v_x^T(r, \theta) = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot (\kappa + 1) \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ v_y^T(r, \theta) = -\frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot (3 - \kappa) \cdot r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{V-21})$$

La représentation en coordonnées cartésiennes au point (r, θ) du champ de référence associé au facteur d'intensité des contraintes est symétrique à celle exprimée en coordonnées cylindriques par rapport à un plan d'angle $\theta/2$ passant par ce même point (**Figure 153**). La contribution de la contrainte T en coordonnées cartésiennes est symétrique par rapport au plan orthogonal au plan de la fissure et passant par la pointe de fissure. De ce constat, il découle les formules suivantes de décomposition du champ de vitesse de déplacement complet (de Moura Pinho et al., 2012) :

$$\begin{cases} 2 \cdot v_X(r, \theta)_{\text{DCTN}} = (v_r(r, \theta) - v_r(r, \pi - \theta)) + (v_X(r, \theta) + v_X(r, \pi - \theta)) \\ 2 \cdot v_Y(r, \theta)_{\text{DCTN}} = -(v_\theta(r, \theta) + v_\theta(r, \pi - \theta)) + (v_Y(r, \theta) - v_Y(r, \pi - \theta)) \end{cases} \quad (\text{V-22})$$

$$\begin{cases} 2 \cdot v_X(r, \theta)_{\text{CTN}} = -(v_r(r, \theta) - v_r(r, \pi - \theta)) + (v_X(r, \theta) - v_X(r, \pi - \theta)) \\ 2 \cdot v_Y(r, \theta)_{\text{CTN}} = (v_\theta(r, \theta) + v_\theta(r, \pi - \theta)) + (v_Y(r, \theta) + v_Y(r, \pi - \theta)) \end{cases} \quad (\text{V-23})$$

où v_X et v_Y sont, respectivement, les composantes suivant X et Y du champ de vitesse de déplacement complet et v_r et v_θ les composantes de ce même champ, mais en coordonnées cylindriques. Les champs $\underline{v}(r, \theta)_{DCTN}$ et $\underline{v}(r, \theta)_{CTN}$ sont les résultats de la partition.

$\underline{v}(r, \theta)_{DCTN}$ a la propriété de contenir l'intégralité du champ de référence associé au facteur d'intensité des contraintes. Il est discontinu, puisqu'un facteur d'intensité des contraintes engendre un saut de déplacement à travers les lèvres de fissure. $\underline{v}(r, \theta)_{CTN}$ contient l'intégralité du champ de référence associé à la contrainte T . Par opposition avec le champ précédent, il est continu puisque la contrainte T n'induit aucune discontinuité sur le champ de déplacement.

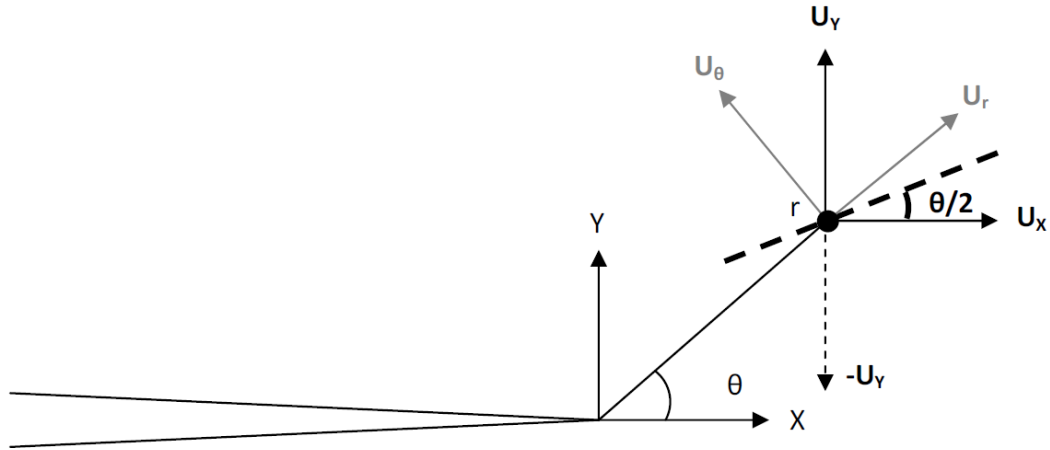


Figure 153 : Propriété de symétrie du champ de référence associé au facteur d'intensité des contraintes. Le plan de symétrie est tracé en pointillés et dépend du point de coordonnées (r, θ) en coordonnées cylindriques.

V.2.2. Analyse de la méthode de décomposition à partir de calculs éléments finis

Pour obtenir le champ de référence élastique associé à la contrainte T , un calcul éléments finis avec un chargement unitaire, suivant l'axe parallèle à la fissure, imposé sur la plaque fissurée est réalisé. La **Figure 154** montre que la méthode de décomposition fonctionne parfaitement. Appliqué à ce champ, seule une contribution continue est obtenue, le reste n'étant lié qu'à des erreurs d'arrondis numériques. Ce résultat est tout à fait cohérent avec ce qui vient d'être mentionné.

De même, en imposant un chargement équi-biaxial aux frontières de la plaque fissurée, le champ de déplacement obtenu peut être associé au facteur d'intensité des contraintes. La **Figure 155** donne le résultat de l'application de la méthode de décomposition à ce champ. On constate, cette fois que, contrairement à ce qui était attendu, la décomposition conduit à une contribution continue non nulle. Pour le comprendre, analysons la solution analytique donnant le champ de déplacement induit par la présence d'une fissure de longueur $2 \cdot a$, plongée dans un milieu infini homogène et isotrope soumis à un chargement en contrainte S à l'infini équi-biaxial, exprimée en notation complexe (Westergaard, 1939) :

$$\begin{cases} 2 \cdot \mu \cdot u_x(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (\kappa - 1) \cdot \text{Re} \left(S \cdot \sqrt{z^2 - a^2} \right) - y \cdot \text{Im} \left(\frac{S \cdot z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) \\ 2 \cdot \mu \cdot u_y(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (\kappa + 1) \cdot \text{Im} \left(S \cdot \sqrt{z^2 - a^2} \right) - y \cdot \text{Re} \left(\frac{S \cdot z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) \end{cases} \quad (V-24)$$

$z = x + i \cdot y$

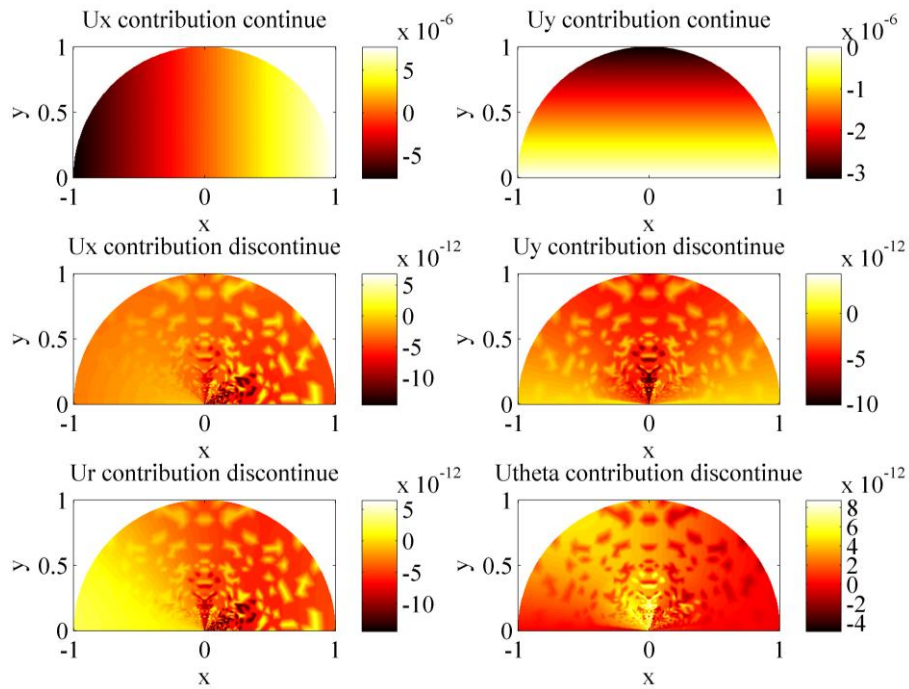


Figure 154 : Champ de déplacement au voisinage de la pointe de fissure calculé pour un chargement tel que $KI = 0 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ et $T = 1 \text{ MPa}$ ($T_z = 0 \text{ MPa}$) en élasticité linéaire et isotrope. Les deux fenêtres du bas correspondent à la représentation des champs discontinus dans un repère cylindrique.

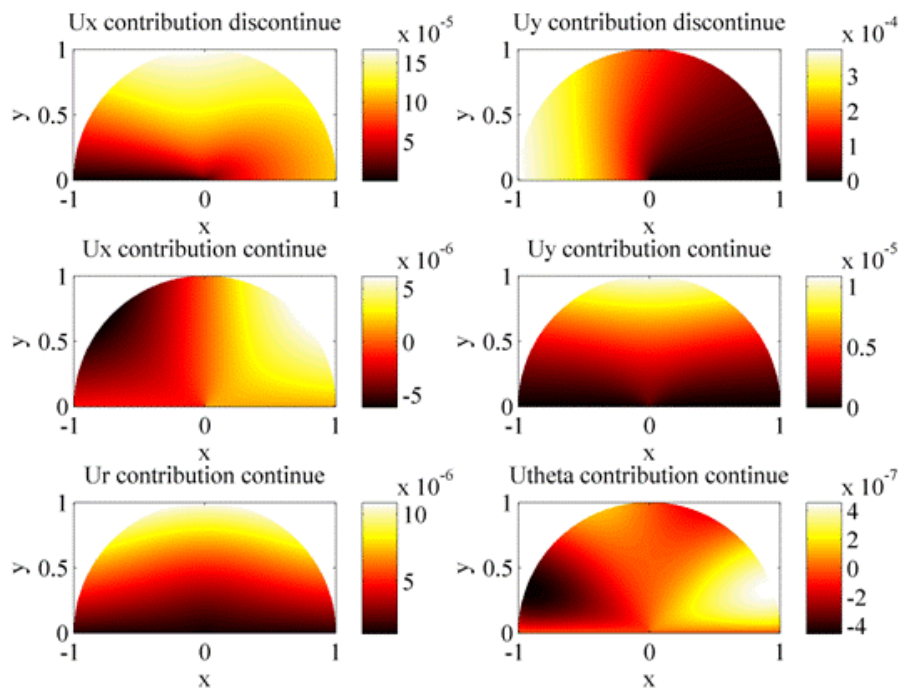


Figure 155 : Champ de déplacement au voisinage de la pointe de fissure calculé pour un chargement tel que $KI = 1 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ et $T = 0 \text{ MPa}$ ($T_z = 0 \text{ MPa}$) en élasticité linéaire et isotrope. Les deux fenêtres du bas correspondent à la représentation des champs continus dans un repère cylindrique.

En posant $z = a + r.e^{i\theta}$, il est possible d'établir un développement limité en $\frac{r}{a}$ du champ de déplacement et de remarquer que le premier terme est bien le champ de référence associé au facteur d'intensité des contraintes. Il en découle que les termes qui suivent ne possèdent pas les mêmes propriétés de symétrie que celles de ce champ de référence. Pour s'en convaincre, portons notre attention sur le troisième terme du développement asymptotique de Williams. La **Figure 156** montre que ce champ de référence possède à la fois une contribution discontinue et une contribution continue non négligeable. Ainsi, au-delà du second terme du développement asymptotique du champ de déplacement, non seulement tous les champs de référence, dont les intensités sont proportionnelles au facteur d'intensité des contraintes, ne sont pas des champs discontinus, mais en plus, chacun d'entre eux possède des contributions discontinue et continue. Il en résulte que la méthode de décomposition n'est plus valide au-delà du second terme du développement asymptotique du champ de déplacement. Néanmoins, les deux premiers termes dominent les autres. Il est donc utile d'étudier le potentiel de la démarche.

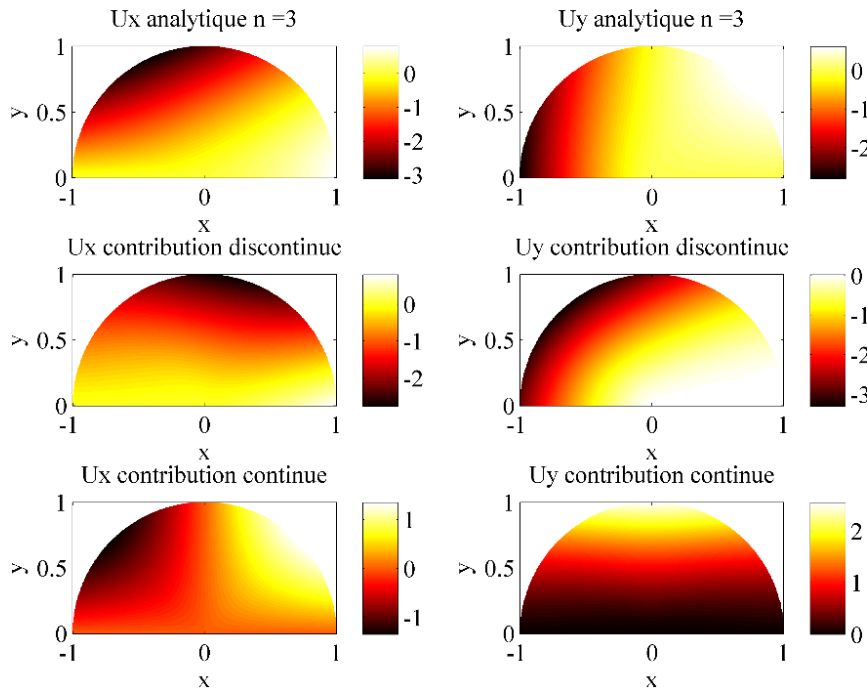


Figure 156 : Décomposition discontinu/continu du 3^{ème} terme du développement asymptotique du champ de déplacement.

V.2.3. Méthodologie de décomposition du champ de vitesse en élasto-plasticité

L'analyse précédente a montré que la méthode de décomposition n'est valide, en toute rigueur, que pour les deux premiers termes du développement asymptotique du champ de vitesse de déplacement en élasticité linéaire. Mais il est possible de contourner le problème. Considérons en élasticité, un chargement équibiaxial de telle sorte que la contrainte T soit nulle et que le facteur d'intensité des contraintes soit égal à $1 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$. Le champ de référence associé au facteur d'intensité des contraintes se décompose alors en deux parties.

$$\underline{\mathbf{u}}_I^e(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{u}}_{I\text{DCTN}}^e(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\mathbf{u}}_{I\text{CTN}}^e(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{V-25})$$

où $\underline{\mathbf{u}}_{I\text{DCTN}}^e$ et $\underline{\mathbf{u}}_{I\text{CTN}}^e$ sont, respectivement, les parties discontinue et continue du champ de déplacement de référence associé au facteur d'intensité des contraintes.

Considérons maintenant un chargement pour lequel le facteur d'intensité des contraintes n'est plus forcément unitaire et la contrainte T non-nulle. Le champ de vitesse, obtenu par éléments finis, se décompose comme suit :

$$\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) = \underline{v}_{DCTN}^{EF}(\underline{x}, t) + \underline{v}_{CTN}^{EF}(\underline{x}, t) \quad (V-26)$$

Pour déterminer la dérivée temporelle du facteur d'intensité des contraintes pour ce chargement, il est possible d'utiliser la formule de projection vue précédemment, mais appliquée sur $\underline{v}_{DCTN}^{EF}$ uniquement :

$$\frac{dK_I}{dt}(t) = \frac{\int_{\Omega} \underline{v}_{DCTN}^{EF}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}_{DCTN}^e(\underline{x}) \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \underline{u}_{DCTN}^e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_{DCTN}^e(\underline{x}) \cdot d\Omega} \quad (V-27)$$

Pour obtenir la dérivée temporelle de la contrainte T , il faut au préalable retirer de \underline{v}_{CTN}^{EF} la contribution induite par \underline{u}_{DCTN}^e . Ceci, conduit à la formule de projection suivante :

$$\frac{dT}{dt}(t) = \frac{\int_{\Omega} \left(\underline{v}_{CTN}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{dK_I}{dt}(t) \cdot \underline{u}_{DCTN}^e(\underline{x}) \right) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \underline{u}_T^e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) \cdot d\Omega} \quad (V-28)$$

Le champ de vitesse de déplacement s'exprime, alors, ainsi :

$$\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) = \frac{dK_I}{dt}(t) \cdot \frac{\left(\underline{u}_{DCTN}^e(\underline{x}) + \underline{u}_{CTN}^e(\underline{x}) \right)}{\underline{u}_I^e(\underline{x})} + \frac{dT}{dt}(t) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) \quad (V-29)$$

Dans le cas d'un comportement élasto-plastique, $\frac{dK_I}{dt}$ et $\frac{dT}{dt}$ sont remplacés, respectivement, par $\frac{d\tilde{K}}{dt}$ et $\frac{d\tilde{T}}{dt}$, mais les formules de projection restent les mêmes.

Le champ complémentaire discontinu (orthogonal à \underline{u}_{DCTN}^e) est défini ainsi :

$$\underline{v}_{DCTN}^{\perp EF}(\underline{x}, t) = \underline{v}_{DCTN}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{d\tilde{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_{DCTN}^e(\underline{x}) \quad (V-30)$$

L'application de la POD sur ce champ permet d'en extraire le mode spatial principal \underline{u}_I^c (*Figure 157*) qui est normalisé de manière à ce que l'ouverture résiduelle associée soit égale à 1 μm comme cela a été vu dans la sous-section §V.1.3.1. La dérivée temporelle de ρ_I s'en déduit automatiquement :

$$\frac{d\rho_I}{dt}(t) = \frac{\int_{\Omega} \underline{v}_{DCTN}^{\perp EF}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot d\Omega} \quad (V-31)$$

De manière analogue, le champ complémentaire continu s'obtient comme suit :

$$\underline{v}_{CTN}^{\perp EF}(\underline{x}, t) = \underline{v}_{CTN}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{d\tilde{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_{CTN}^e(\underline{x}) - \frac{d\tilde{T}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) \quad (V-32)$$

Une fois encore, la POD est utilisée pour en extraire le mode spatial principal \underline{u}_T^c . Une représentation de ce champ est donnée sur la *Figure 158*. Comme on peut le remarquer, la composante suivant X de ce champ est non-nulle sur les lèvres de la fissure contrairement à ce qui peut être observé pour le champ \underline{u}_I^c . L'intensité ρ_T associée au champ \underline{u}_T^c peut alors être interprétée comme l'élongation résiduelle des

lèvres de fissure suivant l'axe de la fissure (de Moura Pinho et al., 2012). \underline{u}_I^c est alors normalisé comme suit :

$$\int_{r=0 \mu\text{m}}^{1000 \mu\text{m}} u_{T x}^c(r, \theta = \pi). dr = 1 \quad (\text{V-33})$$

La dérivée temporelle de ρ_T s'en déduit de manière analogue à celle de ρ_I :

$$\frac{d\rho_T}{dt}(t) = \frac{\int_{\Omega} \left(\underline{v}_{CTN}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{d\bar{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_{I CTN}^e(\underline{x}) \right) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot \underline{u}_I^c(\underline{x}) \cdot d\Omega} \quad (\text{V-34})$$

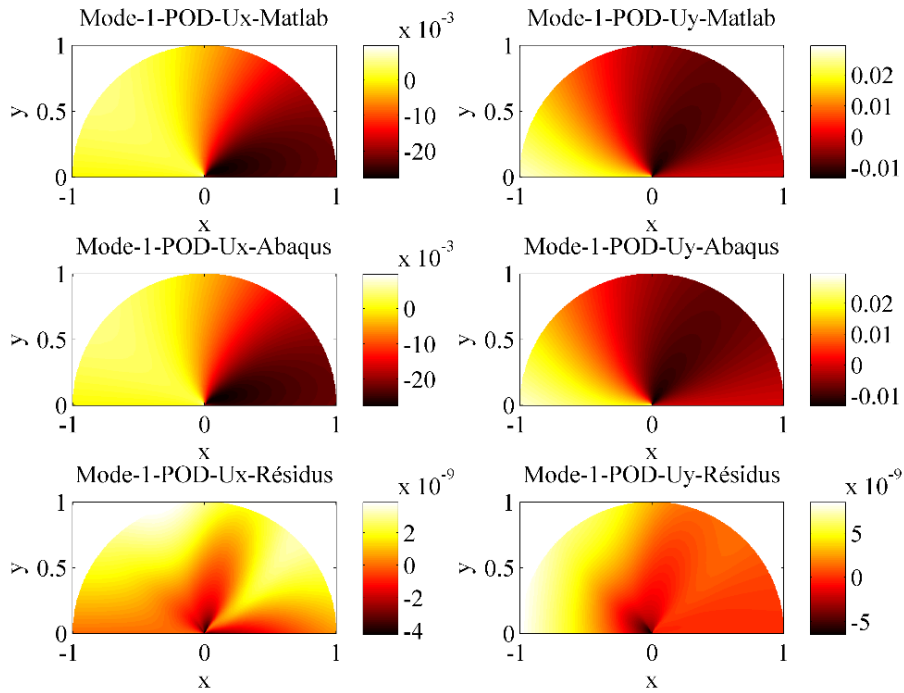


Figure 157 : Représentation du champ $\underline{u}_I^c(\underline{x})$ (premier mode issu de la POD) dans le domaine Ω au voisinage de la pointe de fissure. Ce champ conduit bien à une discontinuité du champ de déplacement à travers les lèvres de la fissure.

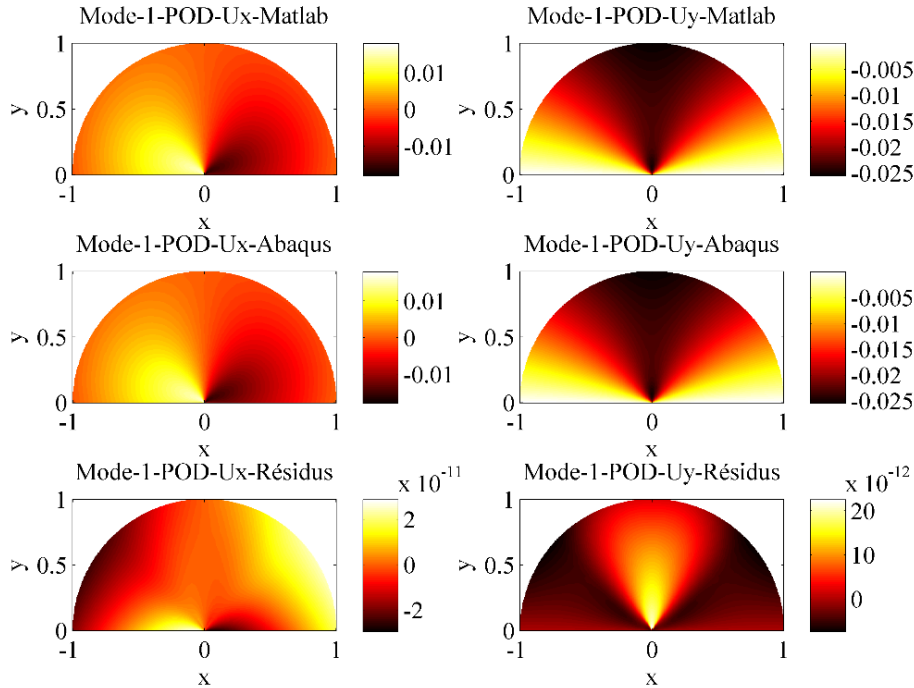


Figure 158 : Représentation du champ $\underline{u}_T^c(\underline{x})$ (premier mode issu de la POD) dans le domaine Ω au voisinage de la pointe de fissure. Ce champ conduit bien à une élongation de la fissure.

V.2.4. Détermination de surfaces seuils lorsque la contrainte T_Z est nulle

Pour pouvoir déterminer des surfaces seuils, les expressions de C_{1R} et de C_{2R} doivent tout d'abord être étendues :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1R} = \frac{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) - \frac{d\bar{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) - \frac{d\bar{T}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) \right)^2 \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \right)^2 \cdot d\Omega} \\ C_{2R} = \frac{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) - \left(\frac{d\bar{K}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) + \frac{d\rho_I}{dt}(t) \cdot \underline{u}_I^e(\underline{x}) \right) - \left(\frac{d\bar{T}}{dt}(t) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) + \frac{d\rho_T}{dt}(t) \cdot \underline{u}_T^e(\underline{x}) \right) \right)^2 \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \left(\underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) \right)^2 \cdot d\Omega} \end{array} \right. \quad (V-35)$$

Cette modification ne change en rien la façon d'identifier la paramètre $param = |C_{1R} - C_{2R}|$. Ce dernier est identifié à partir de la valeur du seuil de non-propagation de fissure longue à rapport de charge suffisamment élevé (la contrainte T est supposée être égale à zéro dans le calcul).

La recherche de la surface seuil suite à un chargement se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, le chargement est imposé, puis les résultats sont sauvegardés. De là, il est possible, à l'aide d'un RESTART dans Abaqus, de pouvoir démarrer un nouveau STEP de chargement à partir de l'ancien. En testant différentes directions de chargement dans le plan $K_I - T$ et à l'aide du critère précédent, la détermination complète de la surface seuil peut se faire (**Figure 159**). Un exemple de surface seuil obtenue numériquement est représenté sur la **Figure 160**.

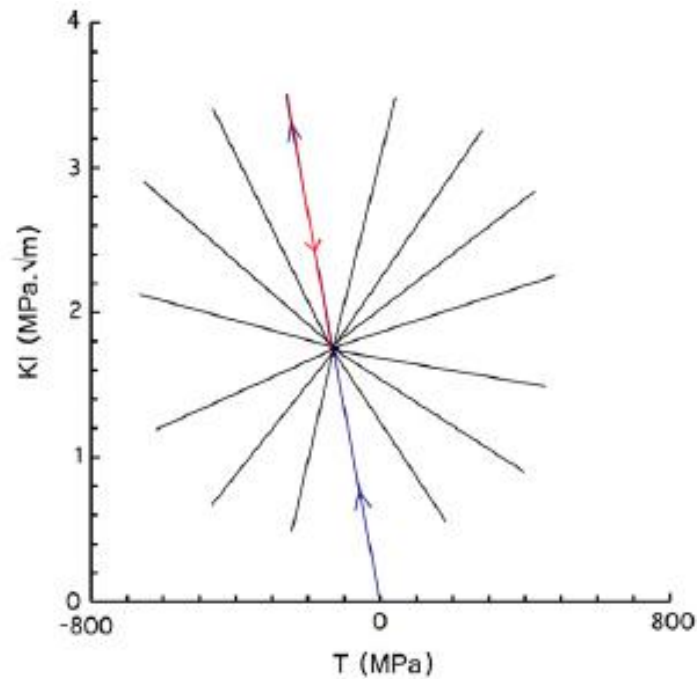


Figure 159 : Illustration de la procédure permettant la détermination de la surface seuil. Un premier chargement est réalisé (symbolisé avec un trait bleu puis rouge), puis différentes directions de chargement sont simulées.

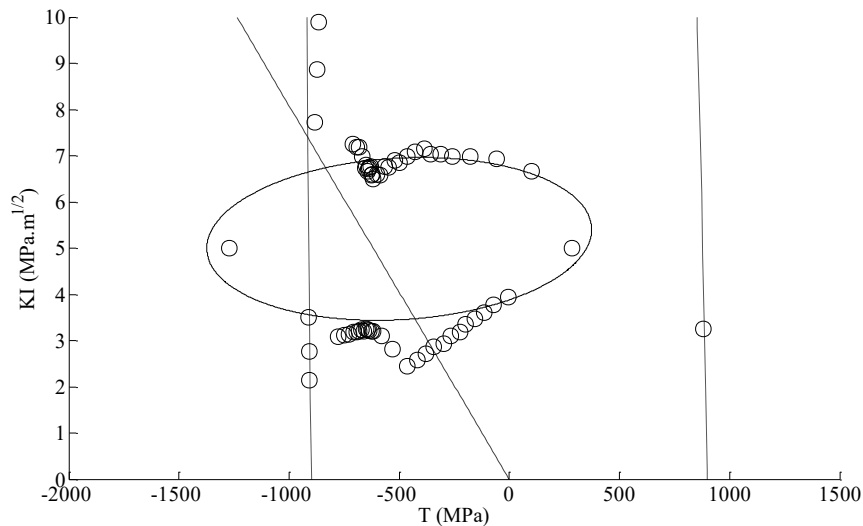


Figure 160 : Exemple de surface seuil obtenue suite à des simulations éléments finis. Le trait en pointillés oblique correspond à la direction de chargement. Il s'agit d'un chargement en traction pure représenté dans le plan $K_I - T$. Les traits en pointillés verticaux correspondent à la frontière du domaine d'élasticité macroscopique.

Les traits en pointillés verticaux représentent le domaine d'élasticité du matériau. Au passage de cette frontière, l'approximation du champ de vitesse n'est plus adaptée puisque celle-ci n'est valide qu'en plasticité confinée. C'est la raison pour laquelle, il n'a pas été possible de tracer la partie gauche de la

surface seuil. En revanche, tant que le domaine d'élasticité macroscopique n'est pas franchi, la surface seuil numérique a une forme globalement similaire à celle du critère d'Emmanuelle Thieulot-Laure (sans la contrainte T_Z) mais dont le centre est décalé par la présence de contraintes résiduelles induites par la plasticité.

V.2.5. Cas où la contrainte T_Z est non-nulle et détermination de diagrammes de fatigue

La démarche qui vient d'être présentée peut, en principe, s'appliquer à la prise en compte de la contrainte T_Z . En effet, en considérant des chargements à rapport $\frac{T}{T_Z}$ constant, il est possible de remplacer $\underline{u}_T^e(\underline{x})$ par $\underline{u}_T^e(\underline{x}) + \frac{T_Z}{T} \cdot \underline{u}_{T_Z}^e(\underline{x})$, où $\underline{u}_{T_Z}^e$ est le champ élastique de référence correspondant à une contrainte T_Z égale à 1 MPa (avec K_I et T tous les deux nuls). En effet, le champ élastique associé à T_Z possède les mêmes symétries que le champ associé à la contrainte T . Il en découle que les champs complémentaires doivent également être recalculés avec la procédure présentée précédemment.

Dans cette partie, on considère une fissure semi-circulaire soumise à un chargement de traction. Le seuil de non-propagation de fissure utilisé pour identifier le critère ETL étendu est pris égal à 3,6 MPa. \sqrt{m} . Cette valeur correspond à celle du Ti-6Al-4V obtenue expérimentalement à rapport de charge égal à 0,3. La valeur correspondant au rapport de -1 n'a pas été utilisée du fait que celle-ci n'est pas intrinsèque au matériau. Pour ce type de chargement des effets de fermeture importants perturbent la valeur de seuil mesurée (§III.1.2.2). Au-delà du rapport de charge de 0,3 le seuil ne cesse de décroître, mais cette tendance ne peut pas être expliquée seulement par la présence d'effets de fermeture. D'autres phénomènes physiques interviennent, mais n'ont pas pu être identifiés. Pour limiter les biais, un compromis entre, d'une part, la limitation de l'effet de fermeture et, d'autre part, la limitation de ces phénomènes a été considéré. D'où le choix du rapport de charge de 0,3. La modification des données d'entrée par rapport au **chapitre IV** a conduit à une nouvelle identification du critère TL étendu (de Moura Pinho et al., 2012).

Contrairement à la sous-section précédente, la contrainte T_Z est prise en compte dans les calculs. Au fur et à mesure que le chargement augmente, la contrainte T_Z augmente proportionnellement à la contrainte T qui elle-même est proportionnelle au facteur d'intensité des contraintes. Cependant, lors de la phase de recherche de la surface seuil, seul le rapport $\frac{T}{T_Z}$ reste constant.

Pour le chargement en traction, deux cas sont considérés. Le premier consiste à faire une montée en charge à 467 MPa ($K_I = 3.5 \text{ MPa}\cdot\sqrt{m}$), puis à décharger et enfin recharger à un niveau moitié moindre. La surface seuil qui en résulte est dite non-stabilisée. Le deuxième consiste à réaliser une première montée en charge suivi d'un chargement cyclique d'amplitude décroissante autour d'un chargement moyen. La **Figure 161** montre que le fait d'appliquer un chargement cyclique préalable conduit à un déplacement du domaine d'élasticité dans le plan K_I - T (partie (b) de la figure) plus important que dans le cas précédent. La surface seuil obtenue est dite stabilisée. Voyons maintenant pourquoi on parle de surface stabilisée ou non. Cette fois, considérons un chargement cyclique à amplitude constante. La partie (c) de la figure montre que lors de la première montée en charge, l'indicateur de plasticité $C(t) = C_{1R}(t) - C_{2R}(t)$ conduit à un niveau de plasticité qui n'est plus atteint par la suite. A chaque changement de sens du chargement, la valeur de $C(t)$ chute brutalement, ce qui signifie que le comportement en pointe de fissure est globalement élastique, montrant au passage la réalité de l'existence d'un domaine d'élasticité en pointe de fissure. Puis, $C(t)$ augmente à nouveau au fur et à mesure que la plasticité devient de plus en plus importante au voisinage de la pointe de fissure. A chaque nouveau cycle, le maximum de $C(t)$ est atteint lorsque le facteur d'intensité des contraintes est maximal, mais sa valeur diminue avec le nombre de cycles réalisés. Lorsque le facteur d'intensité des contraintes est minimal, $C(t)$ est plus faible que dans le cas précédent, mais sa valeur croît avec le nombre de cycles. Le cycle est stabilisé lorsque l'évolution de $C(t)$ est symétrique par rapport à la valeur moyenne du chargement.

Le résultat le plus important qui découle de la stabilisation de la surface seuil est que pour atteindre un niveau de plasticité aussi élevé que lors de la première montée en charge, il faut appliquer un chargement plus important après stabilisation. C'est la raison pour laquelle, dans la partie (b) de la figure, le domaine d'élasticité dans le cas stabilisé se trouve dans une configuration qui maximise l'amplitude de contrainte accessible à la surface seuil. Ainsi, si un chargement de type HCF (cyclique) est appliqué, le comportement de la surface seuil passe par un régime transitoire conduisant à la stabilisation finale de cette dernière, minimisant par la suite le cumul de déformation plastique au voisinage de la pointe de fissure.

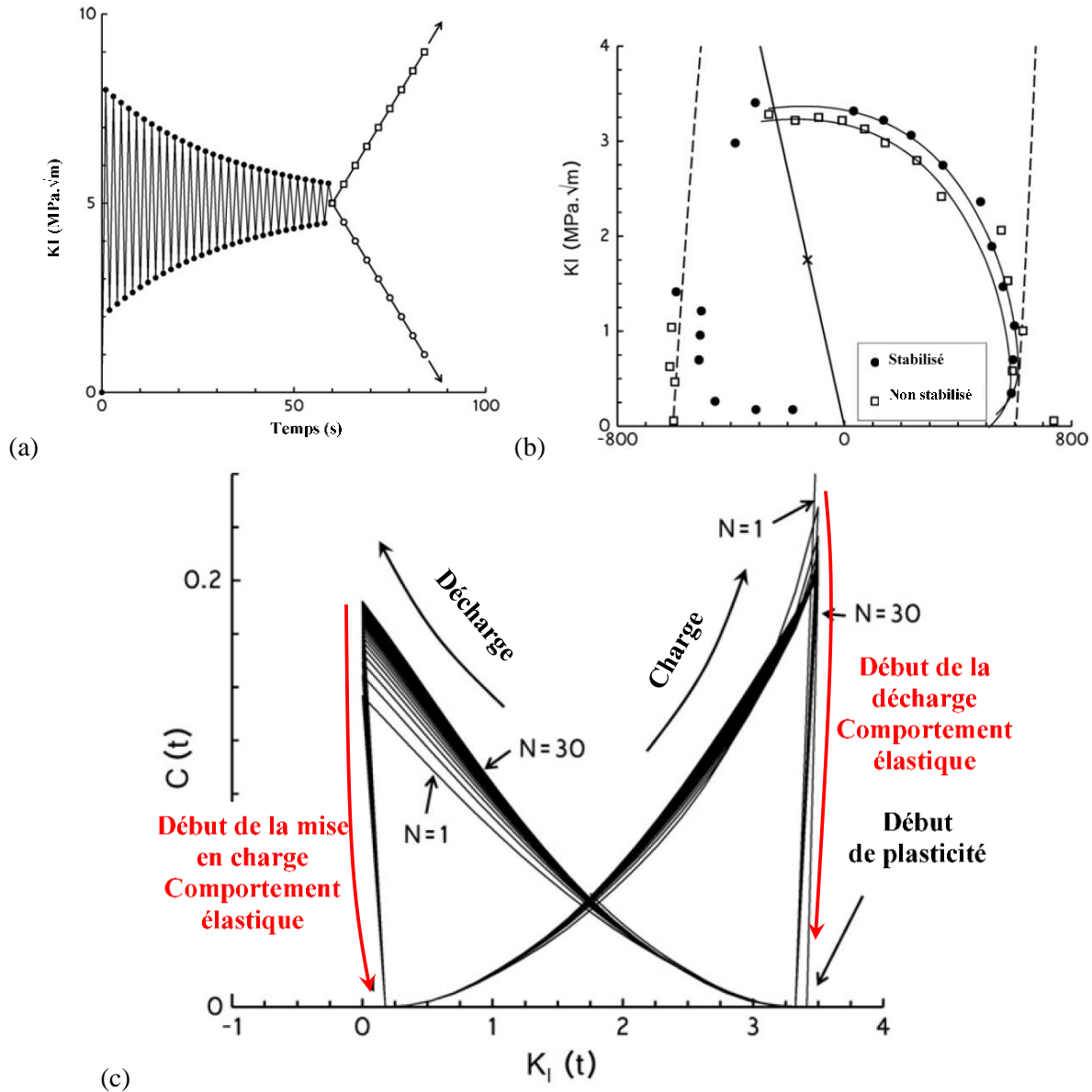


Figure 161 : Exemples de surfaces seuils obtenues :

- (a) Exemple de chargement appliqué conduisant à une surface seuil stabilisée,
 (b) Surfaces seuils obtenues suite à l'application d'un chargement cyclique décroissant en amplitude (stabilisé) et sans sollicitation préalable.
 (c) Illustration de la stabilisation de la surface seuil.

A partir de là, il est possible de simuler plusieurs niveaux de chargements qui conduisent tous à un déplacement de la surface seuil. En récupérant pour chacun des calculs, les frontières de la surface seuil

qui en résultent, il est possible de déterminer une amplitude de chargement maximal (à partir des intersections entre la surface seuil et la droite représentant la direction du chargement) et d'y associer une contrainte moyenne (de Moura Pinho et al., 2012). Afin d'être le plus représentatif possible des conditions expérimentales, une attention toute particulière a été portée sur la recherche du cycle stabilisé. Celle-ci s'est faite de manière itérative. On commence par simuler un chargement avec une amplitude constante autour d'un chargement moyen (30 cycles suffisent). Lorsque le cycle est stabilisé on détermine la valeur maximale prise par $C(t)$. Si cette valeur est au-dessus de la valeur seuil *param*, on recommence avec une amplitude plus faible, sinon on recommence avec une amplitude plus élevée jusqu'à convergence. Cela est répété pour chaque contrainte moyenne à simuler.

En complément de ces calculs, les surfaces seuils suite à un cycle de chargement sont également déterminés. Le but est ici l'évaluation de la plus petite dimension possible accessible du domaine d'élasticité (vu comme domaine de non-propagation HCF) quand un chargement de type CCF est appliqué. Ce type de chargement correspond à l'application d'un nombre de cycles HCF superposé à un cycle LCF à rapport de charge nul. Le nombre de cycle HCF varie de 1 (associé à la plus petite dimension du domaine d'élasticité accessible) à 30 (associé au cycle stabilisé).

Les résultats associés à ces calculs sont représentés sur la *Figure 162*. La comparaison entre le diagramme de fatigue obtenu par des calculs avec cycles stabilisés et le diagramme de Haigh expérimental montre une décroissance de la contrainte alternée avec le rapport de charge similaire, tant que ce dernier reste inférieur à 0,1. Pour les rapports de charge supérieurs, le diagramme de fatigue numérique conduit à un plateau, alors que les données expérimentales montrent une chute importante de la contrainte alternée avec la contrainte moyenne. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce résultat :

- La première est que la loi de comportement utilisée dans les calculs est relativement simpliste. En effet, un écrouissage cinématique non-linéaire d'Armstrong-Frederick conduit systématiquement à une relaxation totale de la contrainte moyenne. Or, plusieurs études montrent que dans le cas du Ti-6Al-4V, cette relaxation n'est que partielle (Azzouz et al., 2010). Ainsi, un biais dans l'estimation de la contrainte alternée résulterait d'une surestimation de la relaxation de la contrainte moyenne. Il existe, au moins, trois manières de prendre en compte la relaxation partielle au niveau de la loi d'écrouissage cinématique non-linéaire. La première consiste à ce que le terme de rappel de celle-ci soit une fonction décroissante de la déformation plastique cumulée et non une constante, de telle sorte qu'asymptotiquement (pour les déformations plastiques cumulées suffisamment élevées) cette loi tende vers une loi cinématique linéaire. La deuxième consiste à introduire dans la loi d'écrouissage, un effet mémoire dépendant de la déformation équivalente maximale (Prisacari, 2018). Enfin, la loi multi-cinématiques à seuils (Chaboche & Jung, 1997) semble être une alternative intéressante.
- Une autre raison possible est que la méthode de décomposition utilisée n'est valide que pour les symétries associées au facteur d'intensité des contraintes et à la contrainte T . Il en résulte que les termes d'ordre supérieurs ne sont pas pris en compte de manière satisfaisante. Donc, le terme en $\frac{d\bar{K}}{dt}(t)$ intervenant dans l'équation (V-33) doit être vu comme un terme correctif dont la présence est nécessaire pour assurer une certaine cohérence dans la démarche. Mais cette façon de faire semble artificielle et aucun élément provenant de la physique ne vient la justifier. Cela amène à se demander si les approximations utilisées jusqu'à présent perdent de leur validité au fur et à mesure que le niveau de plasticité au voisinage de la pointe de fissure augmente.
- Enfin, les données expérimentales sur le seuil de non-propagation de fissure longue suggèrent que des mécanismes autres que la plasticité interviennent (§III.1.2.2 et §IV.1.3). Dans ces conditions, il est sans doute normal que des simulations élasto-plastiques seules ne suffisent pas à reproduire les diagrammes de Haigh expérimentaux.

La comparaison entre les diagrammes de fatigue obtenus avec et sans stabilisation de la surface seuil montre que sans stabilisation les écarts sur la contrainte alternée se creusent au fur et à mesure que la contrainte moyenne augmente. Cette constatation semble logique et malgré les limitations de l'approche proposée. Cette dernière conduit tout de même à des résultats possédant une certaine cohérence.

Précisons le fait qu'avec stabilisation, le diagramme de fatigue peut être considéré comme un diagramme de Haigh engendré numériquement. En effet, comme l'amplitude de contrainte, obtenue pour une contrainte moyenne donnée, correspond à la dimension maximale de la surface seuil dans la direction imposée par le chargement dans l'espace K_I - T , il ne peut y avoir d'émoussement plastique significatif de la pointe de fissure. Or, l'absence d'émoussement plastique s'interprète, dans cette modélisation, comme l'absence de propagation de fissure et donc de rupture. L'amplitude de contrainte du diagramme de fatigue, pour une contrainte moyenne donnée, correspond donc à une limite d'endurance prédite.

En ce qui concerne le cas sans stabilisation de la surface seuil, le diagramme de fatigue obtenu ne peut pas, cette fois, s'interpréter comme un diagramme de Haigh. En effet, chaque décharge LCF conduit à de l'émoussement plastique en pointe de fissure. Celle-ci s'interpréterait comme la cause d'une propagation de fissure LCF. Le diagramme de fatigue correspond donc, dans ce cas, à un diagramme de non-propagation pour les cycles HCF qui suivent la décharge LCF et rien de plus. En pratique, les cycles LCF sont très peu nombreux comparativement aux cycles HCF. On fait donc l'hypothèse ici que les cycles LCF sont suffisamment peu nombreux pour conduire à une propagation significative de la fissure. Ainsi, le problème de fatigue se réduit à la propagation ou non de fissure induit par les cycles HCF.

Au vu des résultats exposés, mentionnons le fait que pour un chargement HCF, le nombre de cycles nécessaires pour stabiliser la surface seuil est négligeable devant la durée de vie d'une éprouvette (supérieure à 10^6 cycles). Mais pour un chargement CCF, la décharge LCF conduit à déstabiliser la surface seuil. Si le nombre de cycles HCF n'est pas suffisant, cette dernière ne pourra jamais se restabiliser, conduisant à une limite de non-propagation inférieure à celle obtenue en HCF. Le diagramme de fatigue sans stabilisation doit alors être vu uniquement comme une borne inférieure du domaine de non-propagation pour les cycles HCF d'un chargement CCF quelconque.

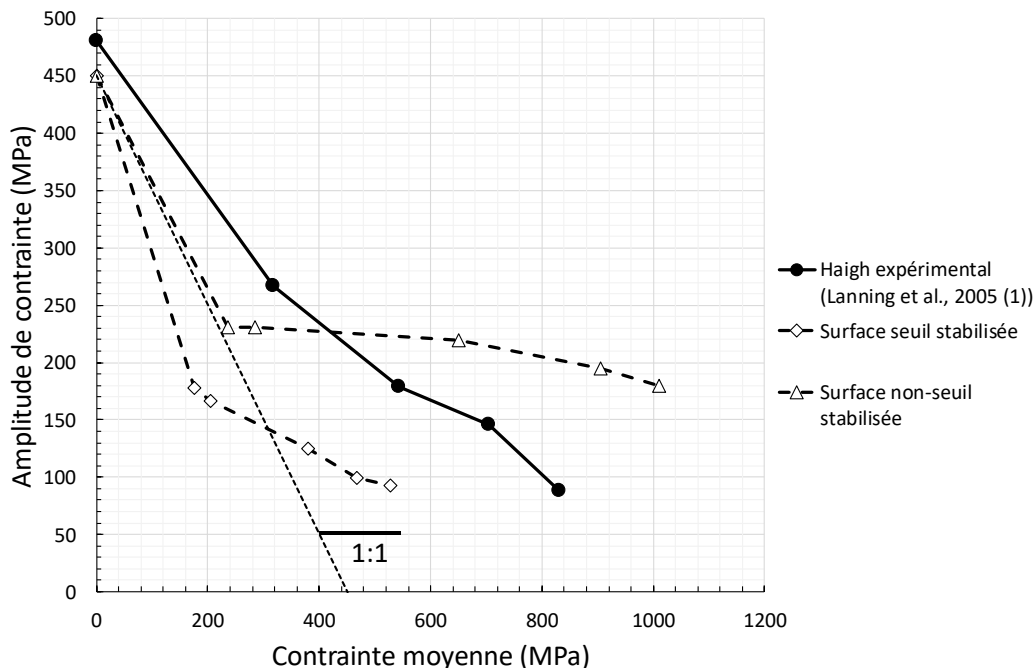


Figure 162 : Comparaison entre diagrammes de fatigue numériques et expérimental.

V.3. Synthèse

Dans ce chapitre, une tentative d'extension du critère TL étendu aux lois de comportement élasto-plastiques a été présentée. Celle-ci se fonde sur une approche similaire à celle utilisée pour identifier le modèle incrémental à partir de simulations numériques par éléments finis. L'extension a tout d'abord consisté à trouver une méthode de décomposition du champ de vitesse au voisinage de la pointe de fissure permettant de séparer les contributions associées au facteur d'intensité des contraintes, des contributions associées aux contraintes T et T_z . Il a alors été possible de formuler une approximation du champ de vitesse à partir des contributions élastiques et complémentaires induites par la plasticité. De là, il découle qu'en utilisant un indicateur de plasticité, on peut déterminer le domaine d'élasticité dans le plan K_I - T qui est interprété comme le domaine d'endurance mentionné dans le **chapitre IV**.

L'effet de la plasticité conduit à engendrer des contraintes résiduelles qui se manifestent sur la surface seuil par un déplacement de son centre. La conséquence de ce phénomène est que la limite d'endurance prédite dépend du rapport de charge et plus généralement des effets d'histoire induits par la plasticité au voisinage de la pointe de fissure. Des bornes minimales et maximales sur la limites d'endurance sous sollicitation CCF ont été données. Celles-ci dépendent de la stabilisation ou non de la surface seuil. Si celle-ci est stabilisée, alors la contrainte alternée admissible par la surface seuil est maximale. Au contraire, si celle-ci est pleinement dans le régime transitoire, alors la limite d'endurance sera proche de la valeur minimale.

Cette modélisation numérique propose donc une approche permettant de construire des diagrammes de Haigh pour différents types de chargement. Cependant, la loi de comportement utilisée est trop simpliste et ne tient pas compte de la relaxation partielle de la contrainte moyenne. De plus, l'approche ne semble pas suffisamment générale et a nécessité l'introduction de corrections permettant d'assurer une certaine cohérence à l'ensemble. Mais ces corrections semblent artificielles. Enfin, quelques éléments expérimentaux suggèrent qu'une analyse purement élasto-plastique est insuffisante pour décrire le comportement du Ti-6Al-4V. Tout cela conduit à des écarts non-négligeables entre les données expérimentales et les prédictions numériques.

La détermination d'une seule surface seuil dans le plan K_I - T nécessite des centaines de calculs. On a vu que cette méthode possède quelques limitations puisqu'elle ne découple pas T et T_z . Une évolution de cette méthode conduirait à la détermination de surfaces seuils dans l'espace K_I - T - T_z . Cela pourrait conduire à une augmentation importante du nombre de calculs pour localiser une surface seuil. Mais ces calculs sont nécessaires pour aboutir à une identification d'un modèle d'évolution du domaine d'élasticité analytique qui pourrait être vu comme une généralisation du modèle incrémental. Ce travail n'a pas pu être mené à terme au cours de cette thèse et il s'agit-là d'une perspective intéressante sur le plan scientifique et industriel.

Conclusions et perspectives

Le comportement en fatigue des aubes de compresseurs et de turbines a fait l'objet d'intenses recherches au niveau industriel et académique. Le programme RAMGT s'est focalisé sur l'étude expérimentale de ce phénomène sous sollicitations quasi-statiques (LCF) et vibratoires (HCF) combinées (CCF) et non combinées à température ambiante à la suite d'impacts ou non. Des modèles relativement simples n'ont pas permis de reproduire les tendances expérimentales, surtout celles obtenues sur des éprouvettes technologiques représentatives de géométries d'aubes en Ti-6Al-4V.

Ce travail a porté sur le développement d'une nouvelle méthode permettant de rendre compte de l'impact sur la limite d'endurance conventionnelle, de la multiaxialité du chargement, du rapport de charge et des effets de gradients induits par des concentrations de contraintes dans le cas du Ti-6Al-4V à température ambiante. L'idée était que cette dernière soit directement applicable par les bureaux d'études.

La première partie de ce travail a permis de recenser et d'analyser des résultats d'essais de fatigue et en particulier pour des chargements CCF. Il en ressort que la plasticité à l'échelle microscopique est un phénomène important aussi bien en amorçage de fissure qu'en propagation de fissure par fatigue que ce soit pour des chargements simples ou combinés.

Certains effets de gradients et d'échelle sont inexplicables par la mécanique des milieux continus. C'est la raison pour laquelle, une approche fondée sur la mécanique de la rupture a été privilégiée.

Le critère d'endurance utilisé dans le cadre de ce travail de recherche a été initialement développé par Hamam et Thieulot-Laure (Hamam, 2006; Thieulot-Laure et al., 2007; Thieulot-Laure, 2008). Il se construit de la même manière que le critère de Von Mises, sauf que le matériau est supposé contenir des fissures. Ce critère suppose qu'il n'y a pas d'écoulement plastique significatif tant que l'énergie élastique de cisaillement du milieu ne dépasse pas un certain seuil au cours d'un chargement quelconque pour une région de rayon δ autour de la pointe de fissure. Or, s'il n'y a pas de déformation plastique notable en pointe de fissure, il ne peut pas y avoir de propagation de fissure par fatigue.

Les analyses bibliographiques suggèrent que la limite d'endurance peut être vue comme une limite de non-propagation d'une fissure critique de petite dimension. Le critère d'Emmanuelle Thieulot-Laure (Thieulot-Laure et al., 2007) vise à modéliser le seuil de non-propagation de fissure à la fois pour les fissures longues et courtes. C'est l'introduction de la contrainte T qui le permet. Cette contrainte rend compte des effets de biaxialité du chargement, mais pas de la multiaxialité. C'est la raison pour laquelle ce critère a été étendu (critère TL étendu) à la prise en compte de la contrainte T_z , afin de pouvoir traiter les chargements multiaxiaux.

L'hétérogénéité du matériau à l'échelle locale conduit à la présence de zones dans lesquelles il est plus facile d'endommager. Dans cette approche, celles-ci sont remplacées par des fissures courtes sans interaction entre elles. L'approche du maillon faible conduit à modéliser l'endurance par la non-propagation de la fissure courte la plus critique. L'identification des paramètres du modèle à partir des limites d'endurance en torsion et en traction alternées et du seuil de non-propagation à rapport de charge égale à -1 détermine, sans ambiguïté, la dimension de la fissure critique a_0 ainsi que la valeur du paramètre δ .

L'approche qui a été exposée n'est applicable qu'aux chargements proportionnels, car la fissure critique est supposée être orientée orthogonalement à la direction de la contrainte principale maximale. Il en découle que ce critère, tel qu'il a été formulé et appliqué, est de type plan critique. Cependant, une extension éventuellement au cas non-proportionnel est possible, mais à condition de prendre en compte toutes les orientations possibles de la fissure et toutes les composantes du tenseur des contraintes. En effet, dans la sous-section §IV.1.2.3, une formulation complète du critère en mode mixte et intégrant la

contrainte γ a été décrite. Une suite éventuelle à ces travaux consisterait, donc, à appliquer la démarche aux chargements multiaxiaux et non-proportionnels.

Afin de pouvoir identifier le critère proposé, des essais de recherche de seuil de non-propagation ont été réalisés. Comme la littérature montre que le Ti-6Al-4V est sensible aux effets de fréquence, un montage spécifique ainsi qu'une nouvelle géométrie d'éprouvette ont été développés à cette occasion.

Le montage s'appuie sur le principe de l'amplification modale. Il a permis la détermination du seuil de non-propagation à hautes fréquences (entre 300 Hz et 800 Hz, ce qui est une gamme fréquentielle représentative des fréquences propres observées sur les aubes de compresseurs) et à différents rapports de charge.

La nouvelle éprouvette permet d'imposer par sa géométrie, pour un chargement en contrainte à amplitude constante, une décroissance de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes, à rapport de charge constant, compatible avec ce qui est préconisé dans la norme ASTM E647. Les seuils de non-propagation de fissure obtenus avec cette éprouvette ont été comparés à ceux obtenus avec des éprouvettes standards, ce qui a permis à la fois de valider la nouvelle géométrie et d'obtenir des seuils de non-propagation de fissure fiables à 30 Hz et à hautes fréquences à différents rapports de charge. La comparaison des données sur les seuils montre l'absence d'effet de la fréquence sur le seuil de non-propagation de fissure au-delà de 30 Hz. Il semble donc que les mécanismes de fissuration du Ti-6Al-4V entre 30 Hz et à hautes fréquences soient les mêmes.

Avec les données issues de la littérature concernant les limites d'endurance, ce critère a pu être identifié pour un Ti-6Al-4V à microstructure bimodale. La forme du domaine d'endurance, à rapport de charge égale à -1, dans un diagramme dont les deux axes sont les contraintes principales, est similaire à celui obtenu avec un critère de Tresca en traction-traction. Pour les autres situations, le domaine d'endurance ressemble plutôt à celui obtenu avec le critère de Mises. Ces résultats semblent compatibles avec ceux obtenus par Bonnard et al. sur ce même matériau, mais à plus haute température (Bonnard et al., 2011) et en endurance limitée. En l'absence de données à température ambiante, il n'a pas été possible de confirmer ces tendances.

Ce critère semble également donner des prédictions compatibles avec celles issues du critère d'El Haddad en traction uniaxiale, pourvue que la fissure ne soit pas plus petite que la dimension critique a_0 . En-dessous de cette dimension, le critère TL étendu conduit à une limite d'endurance nettement supérieure, ce qui, à première vue, semble irréaliste. Cela se justifie par le fait que plus un volume de matière est grand et plus la probabilité d'y trouver une anomalie d'une certaine dimension est grande. Ainsi, si cette anomalie est de dimension plus élevée que celle d'un défaut artificiel, alors l'endurance en fatigue du matériau ne peut pas être corrélée au comportement du défaut artificiel, mais le sera à l'anomalie critique de dimension a_0 . En revanche, si la dimension du défaut artificiel est supérieure à a_0 , alors la limite d'endurance du matériau est conditionnée par la non-propagation du défaut artificiel.

Il ressort de cette analyse que le critère TL étendu est compatible avec une approche probabiliste comme le montre également Thieulot-Laure (Thieulot-Laure, 2008). En effet, il est possible de probabiliser la dimension de la fissure critique en fonction du volume de matière. L'identification qui a été faite, l'a été pour un volume de matière donné correspondant à celui des éprouvettes de fatigue utilisées. Si le volume sollicité augmente, les limites d'endurance diminuent. Les approches comme celles d'El Haddad ne permettent pas de rendre compte de ce phénomène.

Un autre avantage du critère TL étendu est qu'il est possible de construire des diagrammes de Kitagawa et Takahashi pour d'autres types de chargements comme celui de torsion. Il permet également de proposer un mécanisme d'arrêt de fissure, pour des fissures amorcées sur des concentrations de contraintes, autre que celui induit par des gradients de contraintes faisant chuter le facteur d'intensité des contraintes en-dessous du seuil de non-propagation de fissure. En effet, malgré un facteur d'intensité des contraintes croissant, l'évolution de la multiaxialité du chargement, dans l'espace $K_I - T - T_Z$, avec la profondeur de fissure peut conduire à un arrêt de fissure sans invoquer la plasticité en pointe de fissure

ou dans la zone de l'entaille. Ce mécanisme permettrait d'expliquer certains résultats expérimentaux comme ceux obtenus par Nadot et Billaudeau (Nadot & Billaudeau, 2006).

En revanche, les prédictions n'ont de sens que si le rapport de charge considéré est égal à -1. Cela provient du fait que le critère TL étendu est formulé comme un critère de plasticité monotone et pas cyclique. Il ne peut donc représenter correctement les effets de rapport de charge, comme cela a été illustré par comparaison avec un diagramme de Haigh expérimental sur le Ti-6Al-4V issu de la littérature. C'est la raison pour laquelle, une tentative d'extension au cas de la prise en compte de la plasticité en pointe de fissure a été faite.

L'extension proposée présente de fortes similitudes avec la stratégie numérique mise en œuvre dans l'identification du modèle incrémental développé par Hamam et Pommier (Pommier & Risbet, 2005; Pommier & Hamam, 2007). Des simulations numériques élasto-plastiques ont été réalisées sur une plaque fissurée 2D en déformations planes généralisées, pour rendre compte de l'impact de la contrainte T_z sur les champs en pointe de fissure. Le post-traitement des champs de déplacements au voisinage de la pointe a nécessité le développement d'une méthodologie fondée sur les symétries des champs de Williams associés au facteur d'intensité des contraintes et à la contrainte T . Le but est de pouvoir partitionner le champ de vitesse de déplacement de manière compatible avec une représentation élasto-plastique en variables condensées analogue à celle du modèle incrémental.

Les résultats obtenus suggèrent l'existence d'un domaine d'élasticité dans l'espace K_I - T assimilé au domaine de non-propagation. La géométrie de ce domaine est similaire à celle issue du critère TL étendu. La nouveauté est que son centre se déplace de manière analogue à une variable d'écrouissage cinématique. Des diagrammes de fatigue peuvent être construits. Lors du déplacement de la surface seuil, cette dernière passe par un état transitoire avant de se stabiliser. Ce phénomène peut être mis en correspondance avec ce que l'on attendrait de l'effet d'une décharge LCF sur le domaine d'endurance HCF, à savoir une réduction de l'amplitude de chargement HCF pour garantir une non-propagation de fissure lors de l'application des cycles HCF. Cela a conduit à établir des bornes sur les diagrammes de fatigue. Avec cette nouvelle méthodologie, il a été possible d'obtenir des tendances sur le diagramme de fatigue correspondant à un chargement en traction plus réalistes que par l'approche purement élastique.

Néanmoins, cette méthodologie présente quelques insuffisances. Tout d'abord, la loi de comportement utilisée est sans doute trop simpliste pour permettre la prédiction de diagrammes de fatigue représentatifs de ceux obtenus par l'expérimental. En effet, une loi d'Armstrong-Frederick conduit systématiquement à une relaxation totale de la contrainte moyenne en pointe de fissure. Or, les travaux d'Azzouz et al. montrent que la relaxation n'est que partielle pour le Ti-6Al-4V (Azzouz et al., 2010). Ainsi, un biais dans l'estimation de la contrainte alternée résulterait d'une surestimation de la relaxation de la contrainte moyenne.

Il existe plusieurs manières d'améliorer la représentativité d'une loi de comportement pour qu'elle intègre l'effet de relaxation partielle de la contrainte moyenne. On peut modifier le terme de rappel pour qu'il devienne une fonction décroissante de la déformation plastique cumulée. Une autre manière de faire consisterait à faire intervenir un effet mémoire sur la déformation plastique équivalente maximale (Prisacari, 2018). Enfin, la loi multi-cinématiques à seuils serait une alternative intéressante (Chaboche & Jung, 1997). Néanmoins, il n'est pas sûr que cela suffise. En effet, une loi de comportement macroscopique homogène est incapable de capter les hétérogénéités des champs mécaniques au voisinage d'une fissure courte. Il serait, par conséquent, peu probable qu'avec de telles lois on puisse prédire la sensibilité d'une fissure courte à la microstructure. Par exemple, le passage d'une propagation d'une fissure microstructurellement courte en mode II (stade I) à la propagation en mode I (stade II), ne peut se modéliser qu'en tenant compte de cet aspect.

Une alternative intéressante serait de modifier l'orientation du plan critique de manière à maximiser le facteur d'intensité des contraintes du mode II. La conséquence serait que la limite d'endurance pour un chargement en torsion cyclique serait indépendante de la contrainte moyenne en l'absence d'effet de

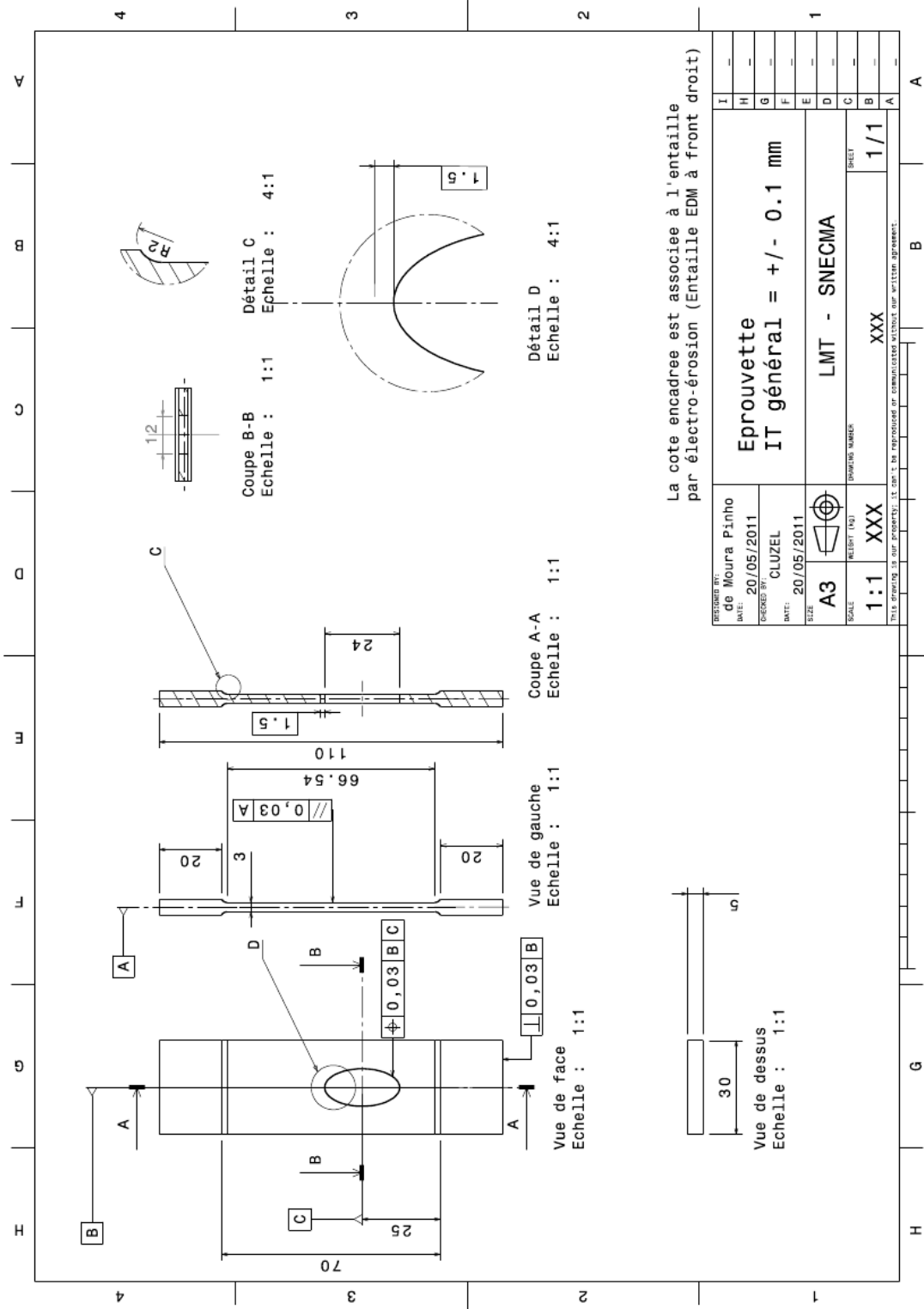
fermeture induits par la présence de mode I (Decreuse et al., 2009). Ce résultat serait conforme aux constatations expérimentales. Pour un chargement en traction pure, on obtiendrait un chargement en mode mixte en pointe de fissure ce qui conduirait à la présence d'effet de fermeture et permettrait, potentiellement, de retrouver des digrammes de fatigue compatibles avec ce qui a été obtenu au **chapitre V**. Cependant, comme les effets de microstructure n'ont pas été modélisés, il ne serait pas envisageable, par cette approche, de reproduire les résultats obtenus sur fissure longue puisque le mécanisme conduisant à la bifurcation de fissure serait absent. C'est la raison pour laquelle, dans ce travail, le plan critique considéré est celui qui maximise le mode I.

Une piste d'amélioration du passage au non-linéaire de l'utilisation du critère TL étendu serait une meilleure prise en compte de la contrainte T_z . Cette dernière n'est pas réellement considérée comme un degré de liberté indépendant comme peuvent l'être le facteur d'intensité des contraintes et la contrainte T . De plus, pour une utilisation de cette stratégie par les bureaux d'études, il aurait été préférable d'identifier un modèle semi-analytique (comme le modèle incrémental pour le cas des fissures longues) à partir des résultats de calculs éléments finis. Cela est nécessaire, car le nombre de simulations à réaliser, pour identifier ne serait-ce qu'une surface seuil dans l'espace $K_I - T - T_z$ est de l'ordre d'une centaine. Néanmoins, la démarche proposée peut être vue comme une première étape dans le développement d'une méthode plus complète.

De plus, une étape importante a été franchie au travers de la proposition d'une méthode permettant la détermination des facteurs d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_z sans passer par un calcul éléments finis souvent coûteux en termes de temps de calcul et d'espace de stockage des résultats. C'est la méthode des dislocations distribuées couplée à la méthode des courbes maîtresses au travers de la méthode mixte qui le permet. L'association de celle-ci avec le critère TL étendu (dans sa version élastique ou élasto-plastique) constitue une méthodologie qui semble compatible avec les besoins des bureaux d'étude.

Pour terminer, mentionnons le fait que l'étude du comportement en fatigue du Ti-6Al-4V n'est pas réductible à celle de sa microstructure et de son comportement élasto-plastique macroscopique ou microscopique. En effet, ce matériau présente une sensibilité à l'environnement prononcée qui se manifeste par un effet de fréquence (à des fréquences plus faibles que celles qui ont été étudiées) et par l'activation de mécanismes d'endommagement autres que ceux liés à la plasticité cyclique. Par exemple, à hauts rapports de charge, la limite d'endurance disparaît (Liu et al., 2015) et une propagation de fissure à courte distance s'active pendant un maintien en charge suffisamment élevé (Boyce & Ritchie, 2001). La disparition de la limite d'endurance est liée à la rupture par clivage de certains grains en phase alpha primaire. Cela semble également expliquer la propagation à courte distance pendant un maintien en charge. Certains travaux montrent que le contenu en hydrogène dans les alliages de titane conduit à un effet de fluage à froid (ou une accentuation de celui-ci) pouvant conduire à ce type d'endommagement (Mignot et al., 2004). Une piste d'évolution de la méthodologie proposée serait donc, en plus d'intégrer les effets de microstructure, de rendre compte des effets de l'environnement et de leurs couplages avec la microstructure et la loi de comportement.

Annexe 1 Plan de la nouvelle éprouvette pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure par fatigue



Annexe 2 Détermination du comportement modal du montage pour la mesure du seuil de non-propagation de fissure

Afin de déterminer la fréquence de résonance en traction du montage, les simulations par éléments finis ne suffisent pas. On a vu que le mode de traction est proche d'un mode de flexion. De plus, il existe toujours des écarts entre les simulations et les mesures. Ainsi, en imposant sur le montage une fréquence correspondant à la fréquence propre du mode de traction simulé, il se pourrait qu'on sollicite au contraire le mode de flexion indésirable.

Un moyen de déterminer avec précision les fréquences propres réelles des modes du montage, consiste à disposer sur la masse libre des accéléromètres (*Figure 163*) et à imposer comme sollicitation un bruit rose avec le pot vibrant. Les fonctions de transfert *accélération/Effort* sont tracées et permettent d'associer chaque pic de résonance à une déformée modale.

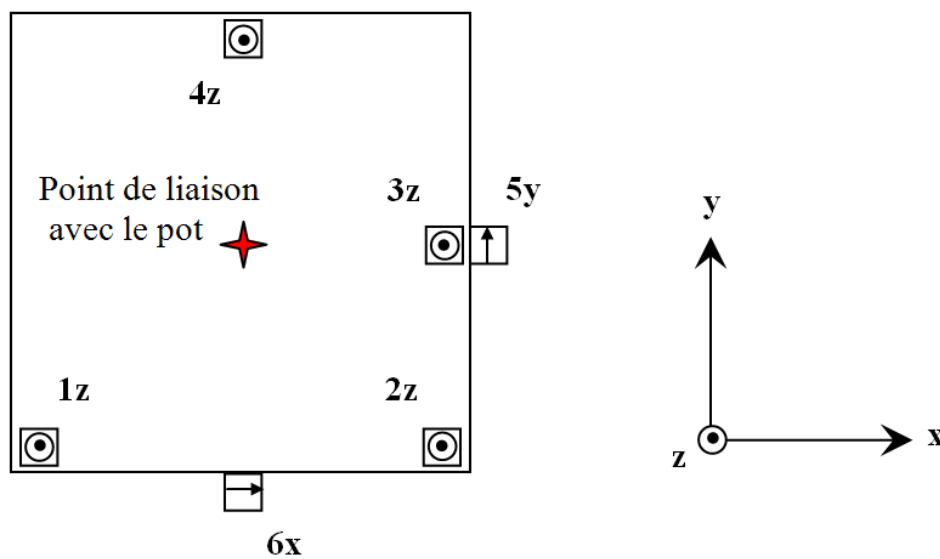
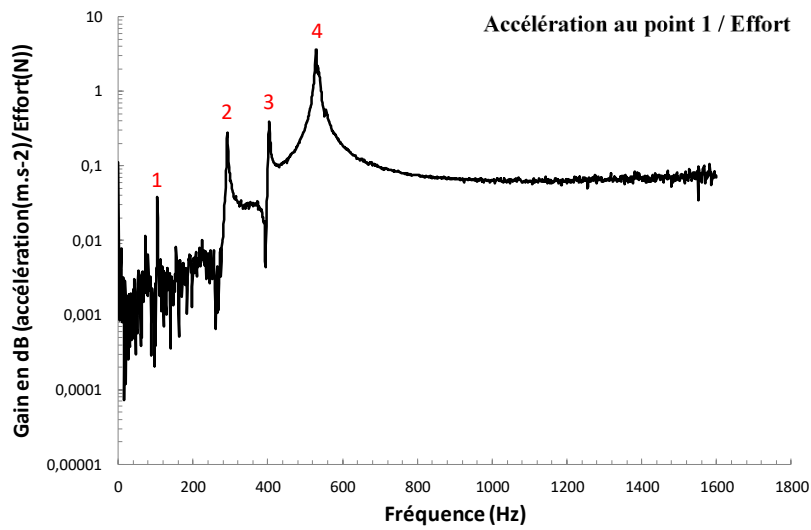
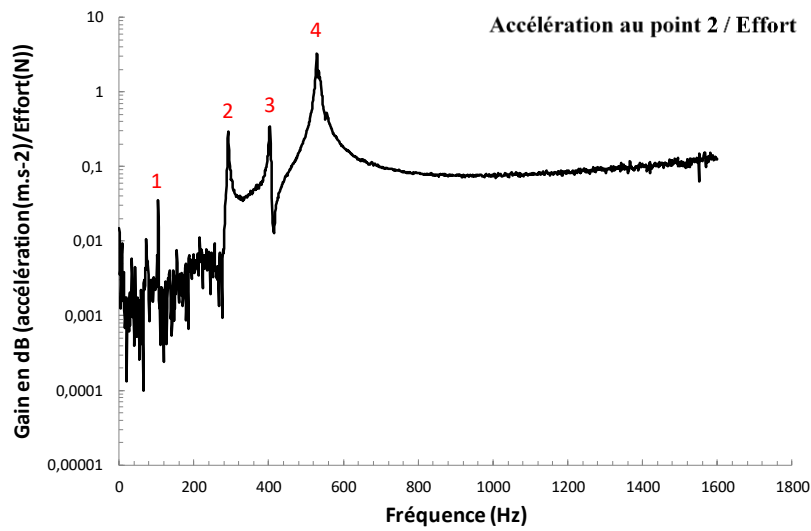


Figure 163 : Positionnement et orientation des accéléromètres sur la masse en liaison avec le pot vibrant.

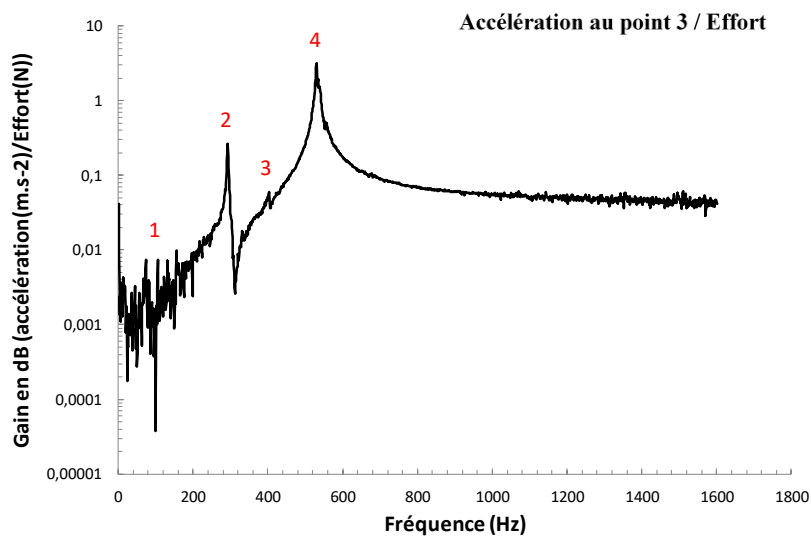
La *Figure 164* donne un exemple de fonctions de transfert pouvant être obtenues après un essai d'analyse modale. Les signaux étant bruités aux basses fréquences, seuls quatre pics de résonance apparaissent clairement. Le premier mode est peu visible à partir des mesures des quatre premiers accéléromètres mais très net sur le cinquième et le sixième capteur. On en déduit que la déformée modale associée à ce mode correspond à de la torsion. Le deuxième mode est, quant à lui, visible par tous les capteurs, sauf par le quatrième. Il s'agit donc d'un mode de flexion pour lequel la masse libre tourne autour de l'axe \vec{y} . De la même manière, on en déduit que le troisième mode est également un mode de flexion puisqu'aucune contribution de ce dernier n'est mesurée par le capteur 3. Enfin, le quatrième mode est identifié comme le mode de traction recherché. En effet, les quatre premiers capteurs donnent un gain identique, alors que les deux derniers mesurent une contribution nettement plus faible. C'est en appliquant cette démarche d'analyse pour chaque configuration d'essai que l'on détermine la fréquence propre de traction. Un exemple de configuration préparée pour une analyse modale est donné en *Figure 165*.



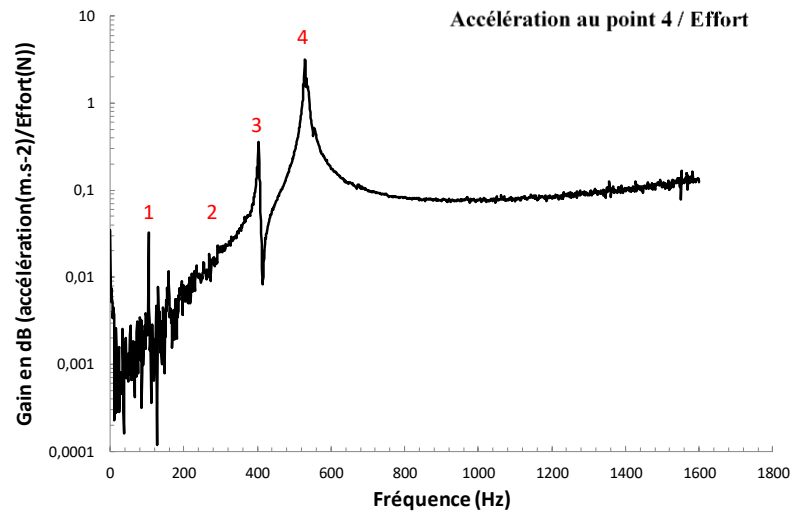
(a)



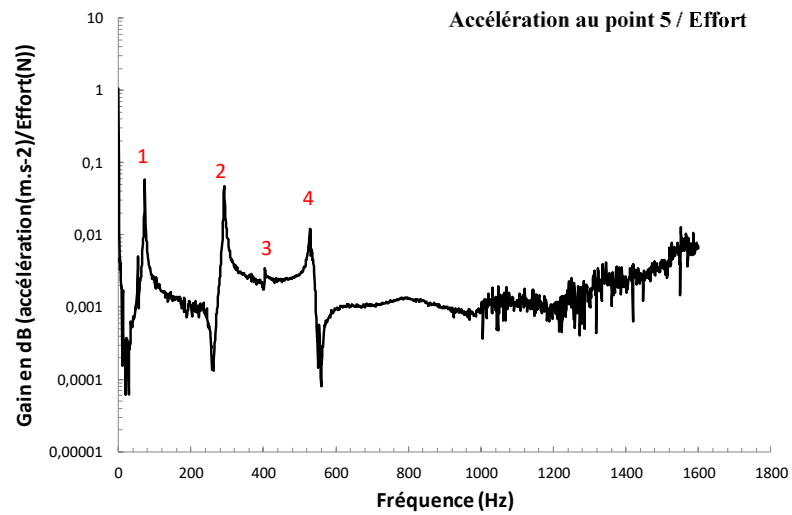
(b)



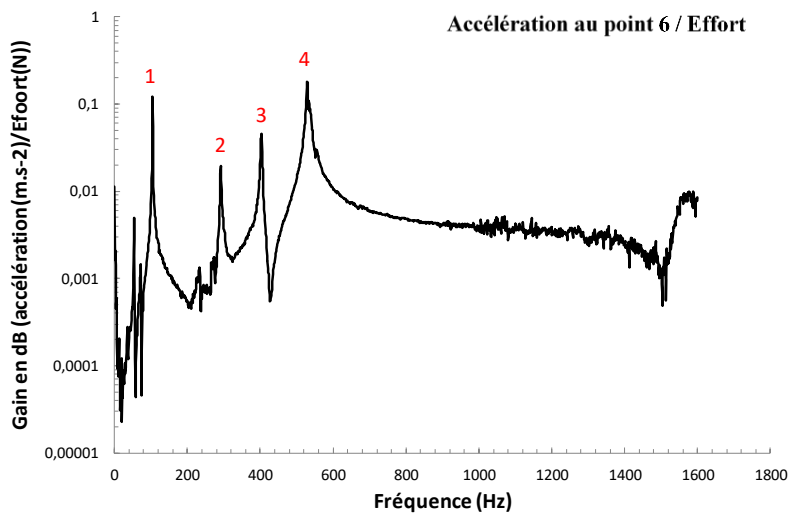
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 164 : Fonctions de transfert associées au montage avec 3 masses supplémentaires (il s'agit d'un essai obtenu avec la première géométrie d'éprouvette où les modes sont bien séparés),



Figure 165 : Photo prise sur le montage comportant cinq masses supplémentaires et les accéléromètres pour l'analyse modale.

Annexe 3 Modélisation du comportement dynamique du pot vibrant

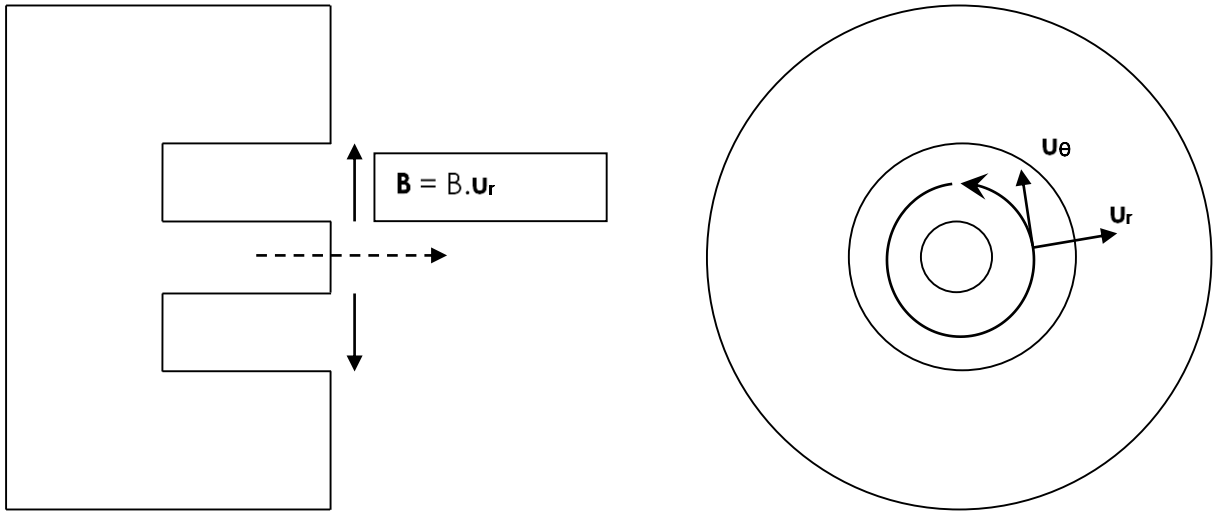


Figure 166 : Vue de face et de profil d'une schématisation de l'entrefer et de la bobine d'un pot vibrant.

Mise en équations

La bobine est parcourue par le courant d'intensité i et plongée dans le champ magnétique B . Elle est donc soumise à des forces de Laplace :

$$d\vec{F} = i. d\vec{l} \wedge \vec{B} = i. (a. d\theta. \vec{u}_\theta) \wedge (B. \vec{u}_r) = -i. a. B. d\theta. \vec{u}_z \quad (3-1)$$

En intégrant sur les N spires de la bobine, on obtient la résultante des efforts de Laplace :

$$\vec{F} = -i. a. B. 2. N. \pi. \vec{u}_z \quad (3-2)$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe z conduit à :

$$m. \frac{dv}{dt} = -k. z - f. v - i. a. B. 2. N. \pi \quad (3-3)$$

k étant la raideur du ressort rappelant la bobine vers son état d'équilibre et f étant le coefficient de frottement de l'air sur la partie mobile du montage.

La force électromotrice induite se calcule à l'aide du champ électromoteur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = B. v. \vec{u}_\theta \\ e = \oint \vec{E}_m. d\vec{l} = 2. N. \pi. B. v. a \end{array} \right. \quad (3-4)$$

La loi des mailles donne :

$$R. i(t) + L. \frac{di}{dt}(t) = E(t) + e(t) = E(t) + 2. N. \pi. B. v. a \quad (3-5)$$

Exploitations en régime forcée

En régime forcée et en adoptant les notations complexes, les deux équations encadrées deviennent :

$$\begin{cases} \left(f + j. \omega. m + \frac{k}{j. \omega} \right). v(\omega) + 2. N. \pi. i(\omega). a. B = 0 \\ (R + j. \omega. L). i(\omega) - 2. N. \pi. v(\omega). a. B = E(\omega) \end{cases} \quad (3-6)$$

Les impédances en intensité et en vitesse s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} Z_i = \frac{E(\omega)}{i(\omega)} = R + j. \omega. L - \frac{4. N^2. \pi^2. a^2. B^2}{f + j. \left(\omega. m - \frac{k}{\omega} \right)} \\ Z_v = \frac{v(\omega)}{E(\omega)} = - \frac{2. N. \pi. a. B}{4. N^2. \pi^2. a^2. B^2 + (R + j. \omega. L). \left(f + j. \left(\omega. m - \frac{k}{\omega} \right) \right)} \end{cases} \quad (3-7)$$

On en déduit que la vitesse de la bobine dépend non-linéairement de la fréquence et du champ magnétique. A fréquence fixée, la vitesse maximale ne correspond pas forcément à un champ magnétique maximum. Afin d'optimiser la vitesse, un champ magnétique variable pourrait être une solution, mais pour cela, il ne faudrait pas que la variation de la résistance vienne compenser le gain obtenu. Une variation du champ magnétique sans changer la résistance serait une solution optimale, mais non-standard. Cette solution étant plus complexe à mettre en œuvre on opte pour un pot à champ magnétique fixe.

Annexe 4 Prise en compte des premiers termes supplémentaires au développement de Williams pour une fissure plane à front courbe et soumise à un gradient de chargement

Introduction

Dans cette partie on cherche à calculer les champs de déplacement faisant intervenir la courbure de la fissure et une dépendance à la variable associée à la direction tangente au front. Le schéma suivant représente trois systèmes de coordonnées ayant leur origine sur le front de fissure : cartésienne (\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 et \mathbf{E}_3), curviligne (\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3) et cylindro-curviligne (\mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_3).

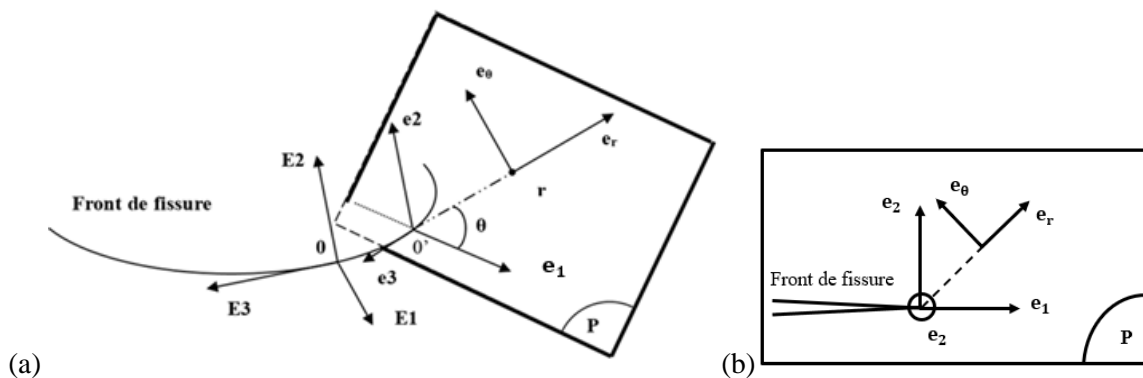


Figure 167 : Les différents repères attachés au front de fissure.

(a) Vue globale,

(b) Vue dans le plan P .

Lorsque la fissure est plane à front droit, c'est le repère cylindrique qui est utilisé en pratique dans la représentation des champs mécaniques au voisinage de la pointe de fissure. Mais à partir du moment où le front de fissure est courbe, il est nécessaire que le nouveau repère le suive, d'où l'introduction d'un repère cylindro-curviligne dont les axes \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_r sont contenus dans le plan P orthogonal au front de fissure au point θ' .

Afin que les équations d'équilibre soient satisfaites dans ce nouveau repère, de nouveaux termes doivent être ajoutés au développement asymptotique du tenseur des contraintes présenté sous la forme suivante (Leblond & Torlai, 1992) :

$$\sigma_{ij} = K_p \cdot f_{ij}^p(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}} + T_p \cdot g_{ij}^p(\theta) + \left[B_p \cdot h_{ij}^p(\theta) + \frac{dK}{ds}(s) \cdot l_{ij}^p(\theta) + \Gamma \cdot K_p \cdot n_{ij}^p(\theta) \right] \cdot r^{\frac{1}{2}} + O(r) \quad (4-1)$$

où p peut prendre les valeurs I , II ou III en référence au mode I , mode II , mode III ou à un mode 3D (par exemple T_{III} qui représente une contrainte homogène hors plan par rapport au plan P). Les fonctions $f_{ij}^p(\theta)$, $g_{ij}^p(\theta)$ et $h_{ij}^p(\theta)$ sont les fonctions habituelles intervenant dans le développement asymptotique du tenseur des contraintes dans le cas des fissures planes à front droit et l_{ij}^p et n_{ij}^p sont les fonctions supplémentaires intervenant, respectivement, lorsque le facteur d'intensité K_p dépend de l'abscisse curviligne s et lorsque le front de fissure admet une courbure non-nulle Γ .

On pose $N_{ij}^p(r, \theta) = n_{ij}^p(\theta) \cdot r^{\frac{1}{2}}$ et $L_{ij}^p(r, \theta) = l_{ij}^p(\theta) \cdot r^{\frac{1}{2}}$. Les formules données par Leblond et Torlai sont les suivantes :

➤ **Fonctions N_{ij}^p :**

○ Mode I :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{rr}^I(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\left(v - \frac{13}{16} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{9}{16} - v \right) \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{\theta\theta}^I(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\left(v - \frac{13}{16} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{9}{16} - v \right) \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{r\theta}^I(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left(v - \frac{7}{16} \right) \cdot \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{33}^I(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\left(8 \cdot v^2 - v - \frac{5}{2} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{(1+v)}{2} \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{3r}^I(r, \theta) = 0 \\ N_{3\theta}^I(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-2)$$

○ Mode II :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{rr}^{II}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\left(\frac{107}{80} - \frac{7 \cdot v}{5} \right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(v - \frac{9}{16} \right) \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{\theta\theta}^{II}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{9}{16} - v \right) \cdot \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{r\theta}^{II}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\left(\frac{31}{80} - \frac{v}{5} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(v - \frac{7}{16} \right) \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{33}^{II}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\left(\frac{8 \cdot v^2}{5} + \frac{7 \cdot v}{5} - \frac{9}{2} \right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{(1+v)}{2} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ N_{3r}^{II}(r, \theta) = 0 \\ N_{3\theta}^{II}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-3)$$

○ Mode III :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{rr}^{III}(r, \theta) = 0 \\ N_{\theta\theta}^{III}(r, \theta) = 0 \\ N_{33}^{III}(r, \theta) = 0 \\ N_{3\theta}^{III}(r, \theta) = 0 \\ N_{3r}^{III}(r, \theta) = -\frac{7}{4} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ N_{3\theta}^{III}(r, \theta) = -\frac{5}{4} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4-4)$$

➤ **Fonctions L_{ij}^p :**

○ Mode I :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{rr}^I(r, \theta) = 0 \\ L_{\theta\theta}^I(r, \theta) = 0 \\ L_{r\theta}^I(r, \theta) = 0 \\ L_{33}^I(r, \theta) = 0 \\ L_{3r}^I(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - 2 \cdot v \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - 2 \cdot v \right) \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ L_{3\theta}^I(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left(2 \cdot v - \frac{3}{2} \right) \cdot \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right] \end{array} \right. \quad (4-5)$$

○ Mode II :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{rr}^{II}(r, \theta) = 0 \\ L_{\theta\theta}^{II}(r, \theta) = 0 \\ L_{r\theta}^{II}(r, \theta) = 0 \\ L_{33}^{II}(r, \theta) = 0 \\ L_{3r}^{II}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left(2 \cdot v - \frac{1}{2} \right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ L_{3\theta}^{II}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left(2 \cdot v - \frac{3}{2} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4-6)$$

○ Mode III :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{rr}^{III}(r, \theta) = -\frac{4}{5} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ L_{\theta\theta}^{III}(r, \theta) = 0 \\ L_{r\theta}^{III}(r, \theta) = -\frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ L_{33}^{III}(r, \theta) = \left(4 + \frac{16 \cdot v}{5} \right) \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ L_{3r}^{III}(r, \theta) = 0 \\ L_{3\theta}^{III}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-7)$$

A partir de la connaissance du tenseur des contraintes, il est possible, avec la loi de Hooke, de remonter aux déformations. Ensuite, en exprimant le lien entre tenseur des déformations et le champ de déplacement, il est possible de calculer le champ de déplacement. Ce lien s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(r, \theta, s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{Grad}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(r, \theta, s)) + \underline{\underline{\mathbf{Grad}}}^t(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(r, \theta, s)) \right) \quad (4-8)$$

Comme le repère utilisé n'est pas habituel, il faut d'abord calculer le gradient d'une fonction vectorielle dans ce dernier. Pour y arriver, on utilise les relations suivantes entre les différents repères :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{e1}}} = \underline{\underline{\mathbf{E1}}} - \Gamma \cdot s \cdot \underline{\underline{\mathbf{E3}}} + 0(s^2) \\ \underline{\underline{\mathbf{e2}}} = \underline{\underline{\mathbf{E2}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{e3}}} = \Gamma \cdot s \cdot \underline{\underline{\mathbf{E1}}} + \underline{\underline{\mathbf{E3}}} + 0(s^2) \end{array} \right. \quad (4-9)$$

En passant au repère cylindro-curviligne, on obtient :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{e}}_r = (\underline{\mathbf{E}}_1 - \Gamma \cdot s \cdot \underline{\mathbf{E}}_3) \cdot \cos(\theta) + \underline{\mathbf{E}}_2 \cdot \sin(\theta) + O(s^2) \\ \underline{\mathbf{e}}_\theta = -(\underline{\mathbf{E}}_1 - \Gamma \cdot s \cdot \underline{\mathbf{E}}_3) \cdot \sin(\theta) + \underline{\mathbf{E}}_2 \cdot \cos(\theta) + O(s^2) \\ \underline{\mathbf{e}}_3 = \Gamma \cdot s \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_3 + O(s^2) \end{cases} \quad (4-10)$$

Considérons une fonction vectorielle $\underline{\mathbf{f}}(r, \theta, s)$ dont on cherche le gradient. On peut écrire :

$$\underline{\mathbf{f}}(r, \theta, s) = f_r(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + f_\theta(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta + f_s(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \quad (4-11)$$

Les dérivées premières de cette fonction par rapport à ses variables sont alors données par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial r}(r, \theta, s) = \frac{\partial f_r}{\partial r}(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + \frac{\partial f_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial f_s}{\partial r}(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \theta}(r, \theta, s) = \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - f_\theta(r, \theta, s) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + f_r(r, \theta, s) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial f_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial s}(r, \theta, s) = \frac{\partial f_r}{\partial s}(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + \frac{\partial f_\theta}{\partial s}(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial f_s}{\partial s}(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 + \Gamma \cdot f_s(r, \theta, s) \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 \\ \quad + \Gamma \cdot (f_\theta(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) - f_r(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta)) \cdot \underline{\mathbf{E}}_3 + O(s^2) \\ \approx \left(\frac{\partial f_r}{\partial s}(r, \theta, s) + \Gamma \cdot f_s(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial s}(r, \theta, s) - \Gamma \cdot f_s(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta \\ \quad + \left[\Gamma \cdot (f_\theta(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) - f_r(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta)) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(r, \theta, s) \right] \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 + O(s) \end{array} \right. \quad (4-12)$$

A partir de la définition du gradient ($\underline{\mathbf{d}}\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{Grad}}(\underline{\mathbf{f}}) \cdot \underline{\mathbf{d}}\underline{\mathbf{M}}$ avec $\underline{\mathbf{d}}\underline{\mathbf{M}} = dr \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + r \cdot d\theta \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta + ds \cdot \underline{\mathbf{e}}_3$), on obtient l'expression de $\underline{\mathbf{Grad}}(\underline{\mathbf{f}})$:

$$\overbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_r}{\partial r}(r, \theta, s) & \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - f_\theta(r, \theta, s) \right) & \frac{\partial f_r}{\partial s}(r, \theta, s) + \Gamma \cdot f_s(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta) \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) & \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + f_r(r, \theta, s) \right) & \frac{\partial f_\theta}{\partial s}(r, \theta, s) - \Gamma \cdot f_s(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) \\ \frac{\partial f_s}{\partial r}(r, \theta, s) & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) & \Gamma \cdot (f_\theta(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) - f_r(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta)) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(r, \theta, s) \end{array} \right]}^{\underline{\mathbf{Grad}}(\underline{\mathbf{f}})(r, \theta, s)} \quad (4-13)$$

On peut alors expliciter la relation entre le tenseur des déformations et le champ de déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}(r, \theta, s) = \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta, s) \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta, s) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{33}(r, \theta, s) = \Gamma \cdot (u_\theta(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) - u_r(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta)) + \frac{\partial u_s}{\partial s}(r, \theta, s) \\ \varepsilon_{r\theta}(r, \theta, s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3r}(r, \theta, s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial s}(r, \theta, s) + \Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial u_s}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3\theta}(r, \theta, s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial s}(r, \theta, s) - \Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-14)$$

On remarque que ce tenseur des déformations est similaire à celui écrit dans un repère cylindrique sauf qu'il contient des termes supplémentaires faisant intervenir la courbure (en rouge). Ce sont eux qui sont responsables de l'apparition des termes de courbure dans le tenseur des contraintes. Les dérivées partielles par rapport à l'abscisse curviligne induisent l'apparition des termes de gradient dans le tenseur des contraintes (en vert).

Champs de déplacement associés aux fonctions N

Supposons, pour simplifier, que les contributions des fonctions L soient toutes nulles, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dépendance du facteur d'intensité des contraintes à l'abscisse curviligne. Dans ce cas, l'équation (4-1) se réduit à :

$$\sigma_{ij} = K_p \cdot f_{ij}^p(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}} + T_p \cdot g_{ij}^p(\theta) + [B_p \cdot h_{ij}^p(\theta) + \Gamma \cdot K_p \cdot n_{ij}^p(\theta)] \cdot r^{\frac{1}{2}} + O(r) \quad (4-15)$$

Dans ce cas, seule la contribution du facteur d'intensité des contraintes est d'intérêt, soit :

$$\sigma_{ij}^* = K_p \cdot \underbrace{f_{ij}^p(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}}}_{F_{ij}^p(r, \theta)} + \Gamma \cdot K_p \cdot n_{ij}^p(\theta) \cdot r^{\frac{1}{2}} \quad (4-16)$$

La loi de Hooke conduit alors à :

$$\varepsilon_{ij}^* = K_p \cdot \left[\underbrace{\frac{1+\nu}{E} \cdot F_{ij}^p(r, \theta) - \frac{\nu}{E} \cdot \text{Tr}(F_{ij}^p(r, \theta)) \cdot \delta_{ij}}_{\varepsilon_{ij}^{Fp}} + \underbrace{\frac{1+\nu}{E} \cdot \Gamma \cdot N_{ij}^p(r, \theta) - \frac{\nu}{E} \cdot \text{Tr}(\Gamma \cdot N_{ij}^p(r, \theta)) \cdot \delta_{ij}}_{\varepsilon_{ij}^{Np}} \right] \quad (4-17)$$

Il est alors possible de calculer les tenseurs de déformations pour chaque mode ainsi que les contributions de la courbure sur le champ de déplacement.

➤ Mode I :

Ci-dessous, sont données le tenseur de déformation en mode I sans courbure du front et le tenseur de déformation correctif permettant de prendre en compte l'effet de courbure.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{FI}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-3 + 4 \cdot \nu + \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FI}(r, \theta) = -\frac{(1 + \nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot r} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (1 - 4 \cdot \nu + \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{FI}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{E \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot r} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{33}^{FI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{FI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3\theta}^{FI}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{NI}(r, \theta) = -\sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{8 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (11 - 60 \cdot \nu + 64 \cdot \nu^2 + 3 \cdot (-3 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{NI}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{8 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-9 + 60 \cdot \nu - 64 \cdot \nu^2 + (-9 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{NI}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \left(\frac{-7}{16} + \nu\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right)\right) \\ \varepsilon_{33}^{NI}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-3 + 4 \cdot \nu + \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{3r}^{NI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3\theta}^{NI}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-19)$$

L'ensemble des équations que doit satisfaire le champ de déplacement est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{FI}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{rr}^{NI}(r, \theta) = \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta, s) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FI}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{\theta\theta}^{NI}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r(r, \theta, s) \right) \\ \Gamma \cdot \varepsilon_{33}^{NI}(r, \theta) = \Gamma \cdot (u_\theta(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) - u_r(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{FI}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{r\theta}^{NI}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial u_s}{\partial r}(r, \theta, s) \right) = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(-\Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) = 0 \end{array} \right. \quad (4-20)$$

Supposons que le champ de déplacement s'écrive comme la somme de la contribution du mode I sans courbure et d'un terme correctif. On peut alors écrire :

$$\underline{\mathbf{u}}(r, \theta) = (u_r^I(r, \theta) + \Gamma \cdot u_r^{CI}(r, \theta)) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + (u_\theta^I(r, \theta) + \Gamma \cdot u_\theta^{CI}(r, \theta)) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta + (u_s^I(r, \theta) + \Gamma \cdot u_s^{CI}(r, \theta)) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \quad (4-21)$$

u_r^I , u_θ^I et u_s^I sont connus et reportés ci-dessous :

$$\begin{cases} u_r^I(r, \theta) = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left((5 - 8 \cdot \nu) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \\ u_\theta^I(r, \theta) = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left((-7 + 8 \cdot \nu) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \\ u_s^I(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (4-22)$$

Concernant les champs inconnus, voici les équations qui permette de les déterminer :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^{NI}(r, \theta) = \frac{\partial u_r^{CI}}{\partial r}(r, \theta) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{NI}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta^{CI}}{\partial \theta}(r, \theta) + u_r^{CI}(r, \theta) \right) \\ \varepsilon_{r\theta}^{NI}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r^{CI}}{\partial \theta}(r, \theta) - u_\theta^{CI}(r, \theta) \right] + \frac{\partial u_\theta^{CI}}{\partial r}(r, \theta) \right) \\ \frac{\partial u_s^{CI}}{\partial r}(r, \theta) = 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s^{CI}}{\partial \theta}(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (4-23)$$

On a donc finalement :

$$\begin{cases} u_r^{CI}(r, \theta) = -\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{12 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (11 - 60 \cdot \nu + 64 \cdot \nu^2 + 3 \cdot (-3 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ u_\theta^{CI}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{12 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-35 + 108 \cdot \nu - 64 \cdot \nu^2 + 3 \cdot (-5 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ u_s^C(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (4-24)$$

➤ **Mode II :**

Ci-dessous, sont données le tenseur de déformation en mode II sans courbure du front et le tenseur de déformation correctif permettant de prendre en compte l'effet de courbure.

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^{FII}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-1 + 4 \cdot \nu + 3 \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FII}(r, \theta) = -\frac{(1 + \nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (3 - 4 \cdot \nu + 3 \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{FII}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{4 \cdot E \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \\ \varepsilon_{33}^{FII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{FII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3\theta}^{FII}(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (4-25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{NII}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{40 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (31 + 108 \cdot \nu - 64 \cdot \nu^2 + 15 \cdot (-3 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{NII}(r, \theta) = -\sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{40 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-45 - 44 \cdot \nu + 64 \cdot \nu^2 + 5 \cdot (-9 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{NII}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{40 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (33 - 48 \cdot \nu + 5 \cdot (-7 + 16 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{33}^{NII}(r, \theta) = -\sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (5 - 4 \cdot \nu + \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{3r}^{NII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3\theta}^{NII}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-26)$$

L'ensemble des équations que doit satisfaire le champ de déplacement est le même que précédemment, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{FII}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{rr}^{NII}(r, \theta) = \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta, s) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FII}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{\theta\theta}^{NII}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r(r, \theta, s) \right) \\ \Gamma \cdot \varepsilon_{33}^{NII}(r, \theta) = \Gamma \cdot (u_\theta(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) - u_r(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{FII}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{r\theta}^{NII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ 0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial u_s}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ 0 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-27)$$

Supposons que le champ de déplacement s'écrive comme la somme de la contribution du mode II sans courbure et d'un terme correctif. On peut donc écrire :

$$\underline{u}(r, \theta) = (u_r^I(r, \theta) + \Gamma \cdot u_r^c(r, \theta)) \cdot \underline{e}_r + (u_\theta^I(r, \theta) + \Gamma \cdot u_\theta^c(r, \theta)) \cdot \underline{e}_\theta + (u_s^I(r, \theta) + \Gamma \cdot u_s^c(r, \theta)) \cdot \underline{e}_3 \quad (4-28)$$

u_r^I , u_θ^I et u_s^I sont connus et reportés ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^I(r, \theta) = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left((-5 + 8 \cdot \nu) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \\ u_\theta^I(r, \theta) = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left((-7 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \\ u_s^I(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-29)$$

Concernant les champs inconnus, voici les équations qui permette de les déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{NII}(r, \theta) = \frac{\partial u_r^{CII}}{\partial r}(r, \theta) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{NII}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta^{CII}}{\partial \theta}(r, \theta) + u_r^{CII}(r, \theta) \right) \\ \varepsilon_{r\theta}^{NII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r^{CII}}{\partial \theta}(r, \theta) - u_\theta^{CII}(r, \theta) \right] + \frac{\partial u_\theta^{CII}}{\partial r}(r, \theta) \right) \\ \frac{\partial u_s^{CII}}{\partial r}(r, \theta) = 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s^{CII}}{\partial \theta}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-30)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^{CII}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \frac{(1+\nu)}{60 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (31 + 108 \cdot \nu - 64 \cdot \nu^2 + 15 \cdot (-3 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ u_\theta^{CII}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \frac{(1+\nu)}{60 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (77 - 156 \cdot \nu + 64 \cdot \nu^2 + 15 \cdot (-5 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ u_s^{CII}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-31)$$

➤ **Mode III :**

Ci-dessous, sont données le tenseur de déformation en mode *III* sans courbure du front et le tenseur de déformation correctif permettant de prendre en compte l'effet de courbure.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{r\theta}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{33}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{FIII}(r, \theta) = \frac{(1+\nu)}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot r \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{FIII}(r, \theta) = \frac{(1+\nu)}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot r \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4-32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{NIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{NIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{r\theta}^{NIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{33}^{NIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{NIII}(r, \theta) = -7 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1+\nu)}{4 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{NIII}(r, \theta) = -5 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1+\nu)}{4 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4-33)$$

L'ensemble des équations que doit satisfaire le champ de déplacement est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta, s) = 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r(r, \theta, s) \right) = 0 \\ \Gamma \cdot (u_\theta(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) - u_r(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta)) = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \right) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{FIII}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{3r}^{NIII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial u_s}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{FIII}(r, \theta) + \Gamma \cdot \varepsilon_{3\theta}^{NIII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\Gamma \cdot u_s(r, \theta, s) \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-34)$$

Supposons que le champ de déplacement s'écrive comme la somme de la contribution du mode III sans courbure et d'un terme correctif. On peut donc écrire :

$$\underline{\mathbf{u}}(r, \theta) = \left[\begin{array}{l} (u_r^{III}(r, \theta) + \Gamma \cdot u_r^c{}^{III}(r, \theta)) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + (u_\theta^{III}(r, \theta) + \Gamma \cdot u_\theta^c{}^{III}(r, \theta)) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta \\ + (u_s^{III}(r, \theta) + \Gamma \cdot u_s^c{}^{III}(r, \theta)) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \end{array} \right] \quad (4-35)$$

u_r^{III} , u_θ^{III} et u_s^{III} sont connus et reportés ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^{III}(r, \theta) = 0 \\ u_\theta^{III}(r, \theta) = 0 \\ u_s^{III}(r, \theta) = \frac{2}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4-36)$$

Concernant les champs inconnus, voici les équations qui permette de les déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r^c{}^{III}}{\partial r}(r, \theta, s) = 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta^c{}^{III}}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r^c{}^{III}(r, \theta, s) \right) = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r^c{}^{III}}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta^c{}^{III}(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta^c{}^{III}}{\partial r}(r, \theta, s) \right) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{NIII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(u_s^c{}^{III}(r, \theta) \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial u_s^c{}^{III}}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{NIII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(-u_s^c{}^{III}(r, \theta) \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s^c{}^{III}}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-37)$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_r^{CIII}(r, \theta) = 0 \\ u_\theta^{CIII}(r, \theta) = 0 \\ u_s^{CIII}(r, \theta) = -5 \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (4-38)$$

Champs de déplacement associés aux fonctions L

Supposons pour simplifier que les contributions des fonctions N soient toutes nulles, c'est-à-dire que le front de fissure est droit. Dans ce cas l'équation (4-1) se réduit à :

$$\sigma_{ij} = K_p \cdot f_{ij}^p(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}} + T_p \cdot g_{ij}^p(\theta) + \left[B_p \cdot h_{ij}^p(\theta) + \frac{dK}{ds}(s) \cdot l_{ij}^p(\theta) \right] \cdot r^{\frac{1}{2}} + O(r) \quad (4-39)$$

Dans ce cas, seule la contribution du facteur d'intensité des contraintes est d'intérêt, soit :

$$\sigma_{ij}^* = K_p \cdot \frac{f_{ij}^p(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}}}{F_{ij}^p(r, \theta)} + \frac{dK}{ds}(s) \cdot l_{ij}^p(\theta) \cdot r^{\frac{1}{2}} \quad (4-40)$$

La loi de Hooke conduit alors à :

$$\varepsilon_{ij}^* = \begin{cases} K_p \cdot \left[\frac{1 + \nu}{E} \cdot F_{ij}^p(r, \theta) - \frac{\nu}{E} \cdot \text{Tr}(F_{ij}^p(r, \theta)) \cdot \delta_{ij} \right] \\ + \frac{dK_p}{ds}(s) \cdot \left[\frac{1 + \nu}{E} \cdot L_{ij}^p(r, \theta) - \frac{\nu}{E} \cdot \text{Tr}(L_{ij}^p(r, \theta)) \cdot \delta_{ij} \right] \end{cases} \quad (4-41)$$

Il est alors possible de calculer les tenseurs de déformations pour chaque mode ainsi que les contributions de la courbure sur le champ de déplacement.

➤ Mode I :

Ci-dessous, sont données le tenseur de déformation en mode I sans dépendance à l'abscisse curviligne et le tenseur de déformation correctif permettant de la prendre en compte :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^{FI}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-3 + 4 \cdot \nu + \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FI}(r, \theta) = -\frac{(1 + \nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot r} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (1 - 4 \cdot \nu + \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{FI}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{E \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot r} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{33}^{FI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{FI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3\theta}^{FI}(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (4-42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{LI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{LI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{r\theta}^{LI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{33}^{LI}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{LI}(r, \theta) = -\sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (1 + (-3 + 4 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{3\theta}^{LI}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \left(-\frac{3}{2} + 2 \cdot \nu\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right)\right) \end{array} \right. \quad (4-43)$$

L'ensemble des équations que doit satisfaire le champ de déplacement est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I(s) \cdot \varepsilon_{rr}^{FI}(r, \theta) = \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta, s) \\ K_I(s) \cdot \varepsilon_{\theta\theta}^{FI}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r(r, \theta, s) \right) \\ 0 = \frac{\partial u_s}{\partial s}(r, \theta, s) \\ K_I(s) \cdot \varepsilon_{r\theta}^{FI}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \frac{dK_I}{ds}(s) \cdot \varepsilon_{3r}^{LI}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial s}(r, \theta, s) + \frac{\partial u_s}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \frac{dK_I}{ds}(s) \cdot \varepsilon_{3\theta}^{LI}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial s}(r, \theta, s) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-44)$$

Supposons que le champ de déplacement s'écrive comme la somme de la contribution du mode I sans courbure et d'un terme correctif. On peut donc écrire :

$$\underline{\mathbf{u}}(r, \theta) = \left[\begin{array}{l} \left(K_I(s) \cdot u_r^I(r, \theta) + \frac{dK_I}{ds}(s) \cdot u_r^C(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + \left(K_I(s) \cdot u_\theta^I(r, \theta) + \frac{dK_I}{ds}(s) \cdot u_\theta^C(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta \\ + \left(K_I(s) \cdot u_s^I(r, \theta) + \frac{dK_I}{ds}(s) \cdot u_s^C(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \end{array} \right] \quad (4-45)$$

Concernant les champs inconnus, voici les équations qui permette de les déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial u_r^{CI}}{\partial r}(r, \theta) \\ 0 = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta^{CI}}{\partial \theta}(r, \theta) + u_r^{CI}(r, \theta) \right) \\ 0 = \frac{\partial u_s^{CI}}{\partial s}(r, \theta) \\ 0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r^{CI}}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta^{CI}(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta^{CI}}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3r}^{LI}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(u_r^I(r, \theta, s) + \frac{\partial u_s^{CI}}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{LI}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(u_\theta^I(r, \theta, s) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s^{CI}}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-46)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^{CI}(r, \theta) = 0 \\ u_\theta^{CI}(r, \theta) = 0 \\ u_s^{CI}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot (-7 + 8 \cdot \nu) \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \end{array} \right. \quad (4-47)$$

➤ **Mode II :**

Ci-dessous, sont données le tenseur de déformation en mode *II* sans dépendance à l'abscisse curviligne et le tenseur de déformation correctif permettant de la prendre en compte.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{FII}(r, \theta) = \frac{(1+\nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \theta} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-1 + 4 \cdot \nu + 3 \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FII}(r, \theta) = -\frac{(1+\nu)}{2 \cdot E \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (3 - 4 \cdot \nu + 3 \cdot \cos(\theta)) \\ \varepsilon_{r\theta}^{FII}(r, \theta) = \frac{(1+\nu)}{4 \cdot E \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \\ \varepsilon_{33}^{FII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{FII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3\theta}^{FII}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{LII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{LII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{r\theta}^{LII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{33}^{LII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{LII}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 2 \cdot \nu \right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{LII}(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \left(-\frac{3}{2} + 2 \cdot \nu \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4-49)$$

L'ensemble des équations que doit satisfaire le champ de déplacement est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{II}(s). \varepsilon_{rr}^{FII}(r, \theta) = \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta, s) \\ K_{II}(s). \varepsilon_{\theta\theta}^{FII}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r(r, \theta, s) \right) \\ 0 = \frac{\partial u_s}{\partial s}(r, \theta, s) \\ K_{II}(s). \varepsilon_{r\theta}^{FII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \frac{dK_{II}}{ds}(s). \varepsilon_{3r}^{LII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial s}(r, \theta, s) + \frac{\partial u_s}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \frac{dK_{II}}{ds}(s). \varepsilon_{3\theta}^{LII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial s}(r, \theta, s) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-50)$$

Supposons que le champ de déplacement s'écrive comme la somme de la contribution du mode II sans courbure et d'un terme correctif. On peut donc écrire :

$$\underline{\mathbf{u}}(r, \theta) = \left[\begin{array}{l} \left(K_{II}(s). u_r^{II}(r, \theta) + \frac{dK_{II}}{ds}(s). u_r^{cII}(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r + \left(K_{II}(s). u_\theta^{II}(r, \theta) + \frac{dK_{II}}{ds}(s). u_\theta^{cII}(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta \\ + \left(K_{II}(s). u_s^{II}(r, \theta) + \frac{dK_{II}}{ds}(s). u_s^{cII}(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \end{array} \right] \quad (4-51)$$

Concernant les champs inconnus, voici les équations qui permette de les déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial u_r^{cII}}{\partial r}(r, \theta) \\ 0 = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta^{cII}}{\partial \theta}(r, \theta) + u_r^{cII}(r, \theta) \right) \\ 0 = \frac{\partial u_s^{cII}}{\partial s}(r, \theta) \\ 0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r^{cII}}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta^{cII}(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta^{cII}}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3r}^{LII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(u_r^{II}(r, \theta, s) + \frac{\partial u_s^{cII}}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{LII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(u_\theta^{II}(r, \theta, s) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s^{cII}}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-52)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^{CII}(r, \theta) = 0 \\ u_\theta^{CII}(r, \theta) = 0 \\ u_s^{CII}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(3 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \right) \end{array} \right. \quad (4-53)$$

➤ **Mode III :**

Ci-dessous, sont données le tenseur des déformations en mode *III* sans courbure du front et le tenseur de déformation correctif permettant de prendre en compte l'effet de courbure.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{r\theta}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{33}^{FIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3r}^{FIII}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{3\theta}^{FIII}(r, \theta) = \frac{(1 + \nu)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4-54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{LIII}(r, \theta) = 4 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + 5 \cdot \nu + 4 \cdot \nu^2)}{5 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{LIII}(r, \theta) = -16 \cdot \nu \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{5 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{r\theta}^{LIII}(r, \theta) = -2 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{5 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{33}^{LIII}(r, \theta) = 4 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \varepsilon_{3r}^{LIII}(r, \theta) = 0 \\ \varepsilon_{3\theta}^{LIII}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-55)$$

L'ensemble des équations que doit satisfaire le champ de déplacement est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK_{III}}{ds}(s) \cdot \varepsilon_{rr}^{LIII}(r, \theta) = \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta, s) \\ \frac{dK_{III}}{ds}(s) \cdot \varepsilon_{\theta\theta}^{LIII}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, s) + u_r(r, \theta, s) \right) \\ \frac{dK_{III}}{ds}(s) \cdot \varepsilon_{ss}^{LIII}(r, \theta) = \frac{\partial u_s}{\partial s}(r, \theta, s) \\ \frac{dK_{III}}{ds}(s) \cdot \varepsilon_{r\theta}^{LIII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta, s) - u_\theta(r, \theta, s) \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ K_{III}(s) \cdot \varepsilon_{3r}^{FII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial s}(r, \theta, s) + \frac{\partial u_s}{\partial r}(r, \theta, s) \right) \\ K_{III}(s) \cdot \varepsilon_{3\theta}^{FII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial s}(r, \theta, s) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta}(r, \theta, s) \right) \end{array} \right. \quad (4-56)$$

Supposons que le champ de déplacement s'écrive comme la somme de la contribution du mode *III* sans courbure et d'un terme correctif. On peut donc écrire :

$$\underline{\mathbf{u}}(r, \theta) = \begin{bmatrix} \left(K_{III}(s) \cdot u_r^{III}(r, \theta) + \frac{dK_{III}}{ds}(s) \cdot u_r^{C III}(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r \\ + \left(K_{III}(s) \cdot u_\theta^{III}(r, \theta) + \frac{dK_{III}}{ds}(s) \cdot u_\theta^{C III}(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta \\ + \left(K_{III}(s) \cdot u_s^{III}(r, \theta) + \frac{dK_{III}}{ds}(s) \cdot u_s^{C III}(r, \theta) \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

Concernant les champs inconnus, voici les équations qui permette de les déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^{LIII}(r, \theta) = \frac{\partial u_r^{C III}}{\partial r}(r, \theta) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{LIII}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta^{C III}}{\partial \theta}(r, \theta) + u_r^{C III}(r, \theta) \right) \\ \varepsilon_{r\theta}^{LIII}(r, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial u_r^{C III}}{\partial \theta}(r, \theta) - u_\theta^{C III}(r, \theta) \right] + \frac{\partial u_\theta^{C III}}{\partial r}(r, \theta) \right) \\ 0 = \frac{\partial u_s^{C III}}{\partial r}(r, \theta) \\ 0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s^{C III}}{\partial \theta}(r, \theta) \end{array} \right. \quad (4-58)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^{C III}(r, \theta) = -8 \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \frac{(1 + 5 \cdot \nu + 4 \cdot \nu^2)}{15 \cdot E} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ u_\theta^{C III}(r, \theta) = 16 \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \frac{(-1 + \nu + 2 \cdot \nu^2)}{15 \cdot E} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ u_s^{C III}(r, \theta) = 0 \end{array} \right. \quad (4-59)$$

Annexe 5 Méthodes analytiques et semi-analytiques pour la détermination des grandeurs pertinentes de la mécanique de la rupture

I-Introduction

On donne dans cette sous-section une liste de méthodes simplifiées pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes et éventuellement des contraintes T et T_z . L'idée est de trouver le moyen de déterminer ces quantités d'intérêt sans avoir recours à des calculs par éléments finis sur une structure fissurée complète. L'objectif est ici de proposer une méthodologie compatible avec les besoins des bureaux d'études, c'est-à-dire une méthode simple, rapide et efficace.

Après une analyse de la littérature, les méthodes finalement retenues sont décrites.

II-Bibliographie

II-1 Méthode des fonctions de poids

Ce fut Bueckner qui suggéra le premier l'utilisation des fonctions de poids pour la détermination des facteurs d'intensité des contraintes (Bueckner, 1970). Ses travaux furent ensuite généralisés par Rice (Rice, 1972). Le principe des fonctions de poids consiste à post-traiter le champ de contrainte obtenu sur une structure non-fissurée pour en déduire quel serait le facteur d'intensité des contraintes si cette structure était fissurée.

En pratique, seul le champ de contrainte normal à la surface fissurée est considéré. Le calcul du facteur d'intensité des contraintes se présente sous la forme suivante :

$$K_I = \iint_{\text{Surface fissurée}} h(x, y) \cdot \sigma(x, y) \cdot dS \quad (5-1)$$

C'est la fonction h qui est appelée fonction de poids. Elle peut s'écrire de manière plus ou moins complexe selon le problème considéré (fissure elliptique (Wang et al., 1998), fissure semi-elliptique (Shen & Glinka, 1991), fissure quart-elliptique (Zheng et al., 1996). La figure suivante illustre l'utilisation de cette méthode.

Il existe des fonctions de poids pour la détermination de la contrainte T (Fett, 1998; Fett et al., 2005), mais celles-ci sont limitées à des problèmes 2D et à notre connaissance il n'en existe pas pour la contrainte T_z . On ne peut donc utiliser cette méthode dans le cas présent.

II-2 Méthode asymptotique pour les concentrations de contraintes

Dans leur article, Liu et al. (Liu & Mahadevan, 2009) font une synthèse bibliographique de différentes méthodes utilisées pour la prédiction de la durée de vie en fatigue dans les milieux à concentration de contraintes. Plusieurs concernent la détermination du facteur d'intensité des contraintes par interpolation asymptotique dans le cas d'un milieu contenant un trou sur lequel une fissure débouche (*Figure 168*). Dans cette section celle qui semble fonctionner le mieux et la plus représentative du problème considéré est détaillée.

Dans le cas d'une fissure plane à front droit et lorsque la dimension de la fissure tend vers zéro, le facteur d'intensité des contraintes tend vers la valeur suivante (avec σ la contrainte appliquée sur l'éprouvette) :

$$K_I = 1,122 \cdot K_t \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (5-2)$$

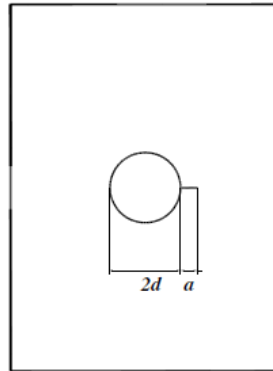


Figure 168 : Cas d'un milieu fini contenant un trou sur lequel débouche une fissure (Liu & Mahadevan, 2009).

Lorsque la dimension de la fissure devient suffisamment grande, le facteur d'intensité des contraintes tend vers :

$$K_I = 1,122 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot (a + 2 \cdot d)} \quad (5-3)$$

L'interpolation asymptotique doit rendre compte de ces deux cas limites, ce qui est le cas de la formule suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = 1,122 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \left(a + 2 \cdot d \cdot \left\{ 1 - e^{-\frac{a}{2 \cdot d} \cdot \left(\left[\frac{K_t}{\alpha} \right]^2 - 1} \right)} \right\} \right)} \\ \beta = \frac{1}{1,122 \cdot \sqrt{2} - (1,122 \cdot \sqrt{2} - 1) \cdot e^{-\sqrt{\frac{a}{d}}}} \end{array} \right. \quad (5-4)$$

où α est une fonction tabulée qui rend compte de la présence des bords libres.

Wormsen et al. ont appliqué cette formule avec succès au cas des fissures semi-circulaires débouchant sur un trou (Wormsen et al., 2006). Néanmoins, cette formule n'est valide que pour un nombre limité de K_I et de géométrie. De plus, à notre connaissance, il n'existe pas de formules de ce type pour les contraintes T et T_z . Cette piste n'a donc pas été explorée.

II-3 Méthode de la transformation conforme

Récemment, Liu et Duan (Liu & Duan, 2014) ont proposé une méthode permettant d'étendre la solution de la plaque infini contenant un trou elliptique au cas d'un trou elliptique duquel deux fissures débouchent (**Figure 169**). Le même type d'approche a permis de traiter le cas des fissures courbes (Guo et al., 2011; Leblond & Torlai, 1992; Lazarus, 1997) avec et sans branchement (Lazarus, 1997).

Dans cette sous-section, on s'intéresse à la solution donnée par Liu et Duan, car elle se rapproche d'avantage des cas qui nous concernent, même si elle n'est valide que pour des problèmes plans.

La méthode de résolution est fondée sur le fait qu'il est possible d'exprimer le tenseur des contraintes à l'aide de potentiels complexes.

$$\begin{cases} \sigma_{yy}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y) + 2. i. \sigma_{xy}(x, y) = 2. [\bar{z}. \varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \\ \sigma_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y) = 4. \text{Re}(\varphi_1'(z)) \\ z = x + i. y \end{cases} \quad (5-5)$$

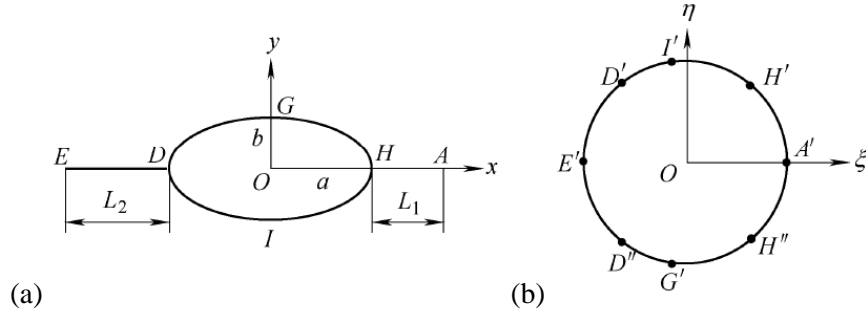


Figure 169 : Effet de la transformation conforme sur la géométrie (Liu & Duan, 2014) :
 (a) Configuration initiale contenant le trou elliptique et les deux fissures qui débouchent sur ce dernier,
 (b) Transformation de la géométrie en un cercle de rayon unité.

Afin de faciliter les calculs, il est préférable de réaliser un changement de variable à l'aide d'une transformation conforme :

$$\begin{cases} z = \omega(\zeta) = \frac{a+b}{2} \cdot \mu(\zeta) + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{\mu(\zeta)} \\ \mu(\zeta) = \frac{(m+n)}{4 \cdot \zeta} \\ m = \varepsilon_1 \cdot (1+\zeta)^2 + \varepsilon_2 \cdot (1-\zeta)^2 \\ n = [(\varepsilon_1^2 - 1) \cdot (1+\zeta)^4 + 2 \cdot (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + 1) \cdot (1-\zeta^2)^2 + (\varepsilon_2^2 - 1) \cdot (1-\zeta)^4]^{\frac{1}{2}} \\ \varepsilon_i = \frac{(a+L_i)^2 + b^2 + a \cdot b + (a+L_i) \cdot \sqrt{L_i^2 + 2 \cdot a \cdot L_i + b^2}}{(a+b) \cdot \left(a+L_i + \sqrt{L_i^2 + 2 \cdot a \cdot L_i + b^2} \right)}, i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket \end{cases} \quad (5-6)$$

Cette dernière transforme le trou elliptique et les fissures en un trou circulaire de rayon unité (**Figure 169**). On utilise dans la suite les notations suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \varphi_1(z) = \varphi_1(\omega(\zeta)) \\ \Psi(\zeta) = \psi_1(z) = \psi_1(\omega(\zeta)) \\ \Phi(\zeta) = \varphi_1'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ \Psi(\zeta) = \psi_1'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ \Phi'(\zeta) = \varphi_1'(z) \cdot \omega'(\zeta) \end{cases} \quad (5-7)$$

On remarque également que l'extérieur du trou elliptique est transformé en l'intérieur du trou circulaire de rayon unité. On s'intéresse donc uniquement au cas où \$|\zeta| < 1\$.

La prise en compte des conditions aux limites (notamment contrainte uniforme à l'infini \$\sigma^\infty\$ suivant l'axe \$\vec{y}\$), implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\zeta) = -\frac{\sigma^\infty}{4} \cdot \omega(\zeta) + \frac{\sigma^\infty \cdot (a+b) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{8} \cdot \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right) \\ \psi(\zeta) = -\bar{z} \cdot \frac{\varphi'_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{(a+b) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{8} \cdot \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right) \\ \varphi_0(\zeta) = -\frac{\sigma^\infty}{2} \cdot \omega(\zeta) + \frac{\sigma^\infty \cdot (a+b) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{8} \cdot \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right) \\ \varphi'_0(\zeta) = -\frac{\sigma^\infty}{2} \cdot \omega'(\zeta) - \frac{\sigma^\infty \cdot (a+b) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{8} \cdot \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right) \end{array} \right. \quad (5-8)$$

Les auteurs calculent ensuite le facteur d'intensité des contraintes comme suit :

$$K_I + i.K_{II} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left(\sqrt{\omega(\zeta) - \omega(1)} \cdot \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) = 2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\varphi'(1)}{\sqrt{\omega''(1)}} \quad (5-9)$$

$$K_I = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sigma^\infty \cdot (a+b) \cdot \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \sqrt[4]{\varepsilon_1^2 - 1}}{2 \cdot \sqrt{b \cdot \varepsilon_1 + a \cdot \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}}} \quad (5-10)$$

Afin de retrouver la solution initiale du trou elliptique, il suffit de prendre $L_1 = L_2 = 0$, ce qui conduit à $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. On en déduit que le facteur d'intensité des contraintes est nul comme attendu. De plus, on a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega(\zeta) = R \cdot \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \text{ avec } R = \frac{a+b}{2} \text{ et } m = \frac{a-b}{a+b} \\ \varphi(\zeta) = \frac{\sigma^\infty \cdot R}{4} \cdot \left(\zeta + \frac{(2-m)}{\zeta} \right) \\ \psi(\zeta) = \frac{\sigma^\infty \cdot R}{4} \cdot \left(-2 \cdot \zeta - \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta \cdot (1+m^2)}{(m-\zeta^2)} + \frac{(1+m \cdot \zeta^2) \cdot (2-m)}{\zeta \cdot (\zeta^2 - m)} \right) \end{array} \right. \quad (5-11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \sigma_{yy}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y) \\ + 2 \cdot i \cdot \sigma_{xy}(x, y) \end{array} \right) = 2 \cdot \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{(\omega'(\zeta))^3} \cdot (\omega'(\zeta) \cdot \varphi''(\zeta) - \omega''(\zeta) \cdot \varphi'(\zeta)) \right. \\ \left. + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \\ \sigma_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y) = 4 \cdot \text{Re} \left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) \end{array} \right. \quad (5-12)$$

Ces relations permettent d'en déduire le champ de contraintes induit par le trou elliptique :

II-4-2 Principe de la méthode

La méthode consiste à utiliser astucieusement le principe de superposition de Bueckner. Le problème d'une structure fissurée soumise à des conditions aux limites quelconques est remplacé par la superposition de deux autres problèmes plus simples à résoudre. Le premier est toujours celui de la même structure mais non-fissurée tandis que le deuxième est quelque peu modifié par rapport à ce qui a déjà été présenté. Au lieu d'imposer uniquement une distribution d'effort sur les lèvres de la fissure, de la matière est « ajoutée » entre les lèvres de manière à obtenir l'ouverture de fissure correspondante au problème considéré (**Figure 171**). Cette manière de procéder est totalement équivalente à la précédente d'un point de vue purement mathématique puisque la distribution des efforts résultants sur les lèvres de la fissure reste inchangée. Cette équivalence des formulations n'est que mathématique, puisque physiquement aucune matière n'est réellement ajoutée entre les lèvres de la fissure.

La mise en œuvre de la méthode est relativement simple conceptuellement parlant. Les champs mécaniques associés à une dislocation d'« ouverture » δb dans un milieu infini en élasticité plane en milieu homogène et isotrope sont connus depuis longtemps. L'ouverture d'une fissure peut donc être modélisée par la superposition de dislocations d'ouverture infinitésimale comme le montre la figure qui suit.

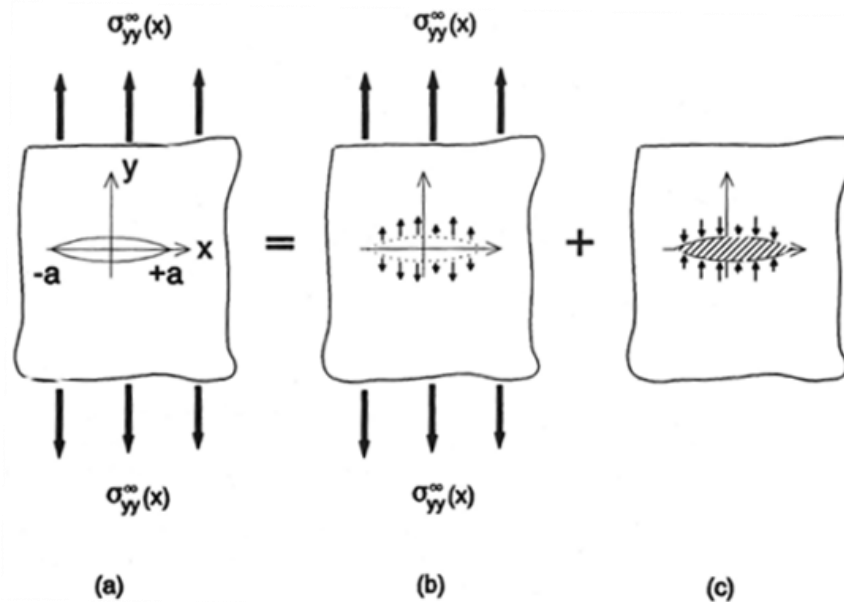


Figure 171 : Application du principe de superposition de Bueckner dans le contexte de la méthode des dislocations distribuées (Hills et al., 1996).

Ce qui sera introduit dans la suite est fortement inspiré du contenu de l'ouvrage de David Hills et al. portant sur la technique des dislocations distribuées (Hills et al., 1996).

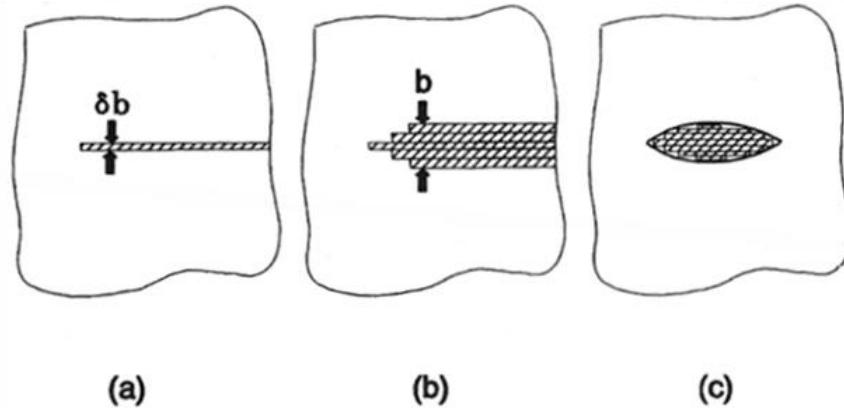


Figure 172 : Modélisation de l'ouverture d'une fissure par insertion de couches de matière d'épaisseurs infinitésimales. Les champs mécaniques s'expriment comme la superposition des champs mécaniques élémentaires associés aux dislocations introduites entre les lèvres de la fissure (Hills et al., 1996).

II-4-3 Champ de contrainte associé à une dislocation de Volterra

Dans le cas général de l'élasticité tridimensionnelle, les fissures peuvent prendre des formes plus complexes que dans le cas bidimensionnel. Il est alors nécessaire d'avoir recours à des dislocations tridimensionnelles de dimensions finies. Il s'agit des boucles de dislocation (**Figure 173**), dont les intensités sont des volumes finis. Les intensités sont définies par le produit de la surface de la dislocation par son vecteur de Burgers (épaisseur de la dislocation).

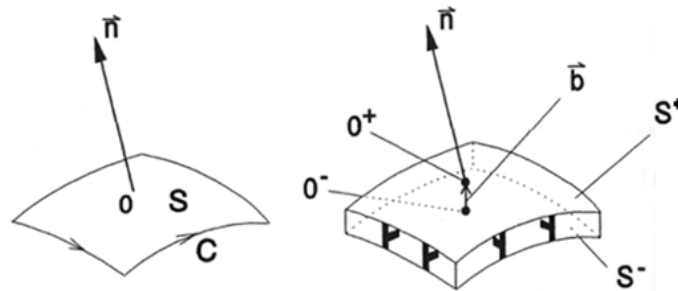


Figure 173 : Représentation d'une boucle de dislocation (Hills et al., 1996).

On donne, ci-dessous, les champs mécaniques associés à une boucle de dislocation infinitésimale valides en milieu infini en utilisant le paramétrage illustré sur la **Figure 174**.

Le champ de déplacement induit par une boucle de dislocation d'intensité $b \cdot dS$ s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} u_x(\underline{x}) = \frac{b \cdot \delta S}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^3} \cdot \left[-(1 - 2 \cdot \nu) + \frac{3 \cdot (z - z')^2}{r^2} \right] \cdot (x - x') \\ u_y(\underline{x}) = \frac{b \cdot \delta S}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^3} \cdot \left[-(1 - 2 \cdot \nu) + \frac{3 \cdot (z - z')^2}{r^2} \right] \cdot (y - y') \\ u_z(\underline{x}) = \frac{b \cdot \delta S}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^3} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) + \frac{3 \cdot (z - z')^2}{r^2} \right] \cdot (z - z') \end{cases} \quad (5-14)$$

avec $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

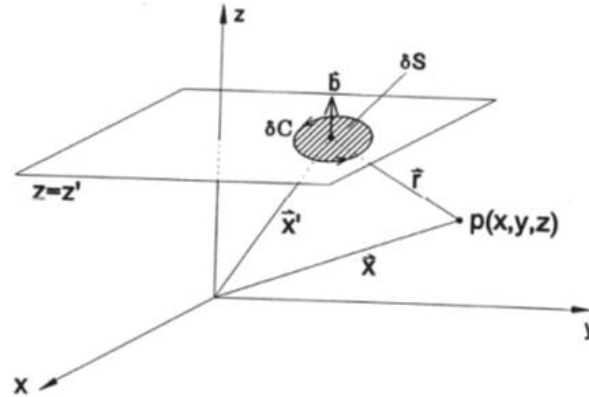


Figure 174 : Paramétrage associé à une boucle de dislocation infinitésimale (Hills et al., 1996).

Le champ de contrainte s'obtient alors par dérivation et avec la loi de Hooke et s'exprime ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(\underline{x}) = \frac{\mu \cdot b \cdot \delta S}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^3} \cdot \left[2 \cdot (1 - \nu) - 3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{(y - y')^2}{r^2} - 15 \cdot \frac{(x - x')^2 \cdot (z - z')^2}{r^4} \right] \\ \sigma_{yy}(\underline{x}) = \frac{\mu \cdot b \cdot \delta S}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^3} \cdot \left[2 \cdot (1 - \nu) - 3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{(x - x')^2}{r^2} - 15 \cdot \frac{(y - y')^2 \cdot (z - z')^2}{r^4} \right] \\ \sigma_{xy}(\underline{x}) = \frac{\mu \cdot b \cdot \delta S}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^5} \cdot \left[3 \cdot (1 - \nu) - 15 \cdot \frac{(z - z')^2}{r^2} \right] \cdot (x - x') \cdot (y - y') \\ \sigma_{xz}(\underline{x}) = \frac{\mu \cdot b \cdot \delta S}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^5} \cdot \left[3 - 15 \cdot \frac{(z - z')^2}{r^2} \right] \cdot (x - x') \cdot (z - z') \\ \sigma_{yz}(\underline{x}) = \frac{\mu \cdot b \cdot \delta S}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^5} \cdot \left[3 - 15 \cdot \frac{(z - z')^2}{r^2} \right] \cdot (y - y') \cdot (z - z') \\ \sigma_{zz}(\underline{x}) = \frac{\mu \cdot b \cdot \delta S}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^5} \cdot \left[1 + 6 \cdot \frac{(z - z')^2}{r^2} - 15 \cdot \frac{(z - z')^4}{r^4} \right] \end{array} \right. \quad (5-15)$$

II-4-4 Equation fondamentale et résolution numérique

Considérons une fissure plane plongée dans un milieu infini et soumise à un chargement de traction. Le paramétrage du problème est représenté sur la **Figure 175**. La résolution du problème consiste à modéliser la fissure par une distribution continue de boucles de dislocations infinitésimales d'aire dS . Le champ de contrainte résultant se calcule comme la superposition de l'ensemble des champs de contraintes induit par les différentes contributions des dislocations et prend donc la forme suivante :

$$\sigma_{zz}(x, y, z = 0) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_S \frac{1}{r^3} \cdot b(x', y') \cdot \delta S \quad (5-16)$$

Le terme en $\frac{1}{r^3}$ est appelé noyau de l'intégrale et on le notera $K(x - x', y - y')$. Il permet de mettre l'équation précédente sous une forme condensée. Selon les situations, il peut prendre plusieurs formes. L'équation fondamentale se réécrit alors ainsi :

$$\sigma_{zz}(x, y, z = 0) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_S K(x - x', y - y') \cdot b(x', y') \cdot \delta S \quad (5-17)$$

Cette intégrale est dite hyper-singulière puisque son noyau a une singularité en $\frac{1}{r^3}$ qui tend vers l'infini quand r tend vers 0. Cette intégrale a néanmoins un sens mathématique puisque le vecteur de Burgers compense cette singularité. Néanmoins, sans une procédure d'intégration adaptée, cette intégrale est difficile à calculer. Dans l'ouvrage de Hills et al. un sous-chapitre lui est consacré.

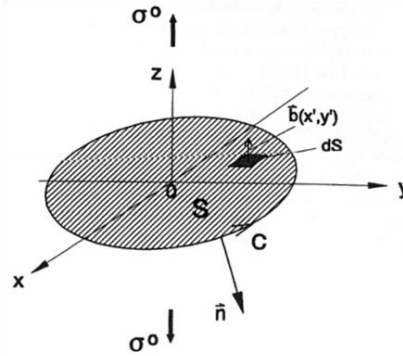


Figure 175 : Une fissure plane plongée dans un milieu infini modélisé par une distribution continue de boucles de dislocations infinitésimales (Hills et al., 1996).

L'équation fondamentale ne peut, en général, pas être résolue analytiquement. Néanmoins, des méthodes numériques ont été mises au point afin d'obtenir une solution approchée. Dans l'ouvrage de Hills et al. des exemples de telles méthodes ont été décrits. Ces derniers consistent à discrétiser une fissure par une méthode de type éléments finis. Le vecteur de Burgers est alors évalué sur un maillage et évolue spatialement en cohérence avec les fonctions de forme choisies. L'*Annexe 6* donne les éléments mathématiques concernant cette équation et l'*Annexe 7* explicite la résolution numérique de l'équation fondamentale.

II-4-5 Généralisation de la méthode pour permettre une meilleure représentation des champs mécaniques asymptotiques en pointe de fissure et une extension aux milieux semi-infinis

La méthode telle qu'elle a été présentée ne permet pas de rendre compte du comportement asymptotique du champ de déplacement en pointe de fissure. Si r mesure la distance à la pointe de fissure, le champ de déplacement doit asymptotiquement tendre vers une évolution en \sqrt{r} . Or, les fonctions de forme introduites sont linéaires par morceau. Une manière de résoudre le problème consiste à multiplier les fonctions de forme associées aux éléments ayant un bord en commun avec le front de fissure par une fonction de poids $\omega(\xi, \eta)$ (ξ et η sont les coordonnées réduites utilisées dans un élément) :

$$\omega(\xi, \eta) = \sqrt{2 \cdot a \cdot d(\xi, \eta)} \quad (5-18)$$

où a et $d(\xi, \eta)$ sont, respectivement, une dimension caractéristique de la fissure et la distance minimale entre le point de coordonnées réduites (ξ, η) et le front de fissure.

L'introduction de cette fonction de poids permet de déterminer simplement le facteur d'intensité des contraintes en un point quelconque du front de fissure comme montré dans l'*Annexe 9*.

Enfin, les équations introduites pour présenter la méthode des dislocations distribuées ne sont valides que pour le cas d'un milieu homogène et isotrope infini. Des solutions ont été proposées par le passé pour traiter le cas semi-infini voire d'autres situations particulières. Elles consistent toutes à remplacer le noyau de l'intégrale $K(x - x', y - y')$ par $K(x - x', y - y') + K_{reg}(x - x', y - y')$. Le terme K_{reg} est, comme son nom l'indique, le terme régulier à ajouter au terme hyper-singulier pour tenir compte des conditions aux limites (voir l'*Annexe 8*).

II-4-6 Extraction des quantités pertinentes de la mécanique de la rupture

Une fois l'équation fondamentale résolue, le facteur d'intensité des contraintes peut être déterminé à l'aide de la fonction de poids introduite précédemment (Hills et al., 1996). L'ouverture de fissure à l'intérieur d'un élément ayant un bord commun avec le front de fissure, se déduit de la formule suivante (en coordonnées réduites) :

$$b(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta) \cdot \sum_{q=1}^4 N_q(\xi, \eta) \cdot b_q^e \quad (5-19)$$

où N_q et b_q^e sont, respectivement, les fonctions de forme et les valeurs aux points de colocation associées à l'élément considéré (voir l'*Annexe 7*).

On note $U(r)$, l'ouverture de fissure à une distance r d'un point particulier du front de fissure. Comme la surface fissurée est bidimensionnelle et $U(r)$ une fonction unidimensionnelle, on choisit de voir cette fonction comme l'intersection entre l'ouverture de fissure sur une surface bidimensionnelle et le plan orthogonal au front de fissure au point où le facteur d'intensité des contraintes est évalué. Le facteur d'intensité des contraintes peut se déterminer comme suit :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{2 \cdot \mu}{\kappa + 1} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot U(r) \right) \quad (5-20)$$

où κ est la constante de Kolosov, déjà introduite précédemment.

De cela, il découle :

$$b(\xi(r), \eta(r)) = U(r) \Rightarrow K_I = \frac{2 \cdot \mu \cdot \sqrt{\pi} \cdot a}{\kappa + 1} \cdot \sum_{q=1}^4 N_q(\xi(0), \eta(0)) \cdot b_q^e \quad (5-21)$$

La détermination des contraintes T et T_Z en un point quelconque du front de fissure est plus complexe. Afin que les formules soient les plus générales possibles, on commence par donner les formules de passage permettant d'exprimer le tenseur des contraintes dans un repère quelconque lorsque ce dernier est connu pour un repère particulier. Considérons donc deux repères (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) tous les deux orthonormés. On passe de l'un à l'autre par une matrice de passage orthogonale \mathbf{Q} :

$$e'_i = Q_{ij} \cdot e_j \quad (5-22)$$

Après quelques développements, on en déduit les formules de changement de repère pour le tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 Q_{ik} \cdot Q_{jl} \cdot \sigma_{kl} \\ \sigma_{mk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{im} \cdot Q_{jk} \cdot \sigma'_{ij} \end{cases} \quad (5-23)$$

Considérons maintenant le cas d'une fissure à front courbe (**Figure 176**). Deux niveaux de descriptions sont possibles. Le premier est associé au repère global, mais n'est pas adapté à l'extraction des quantités pertinentes de la mécanique de la rupture. Par contre, il est utilisé pour la résolution de l'équation fondamentale introduite précédemment. Le second, est associé au repère attaché au front de fissure. A l'aide de ce dernier, il est possible d'extraire les contraintes T et T_Z en n'importe quel point du front de fissure en se servant des formules de changement de repère introduites précédemment.

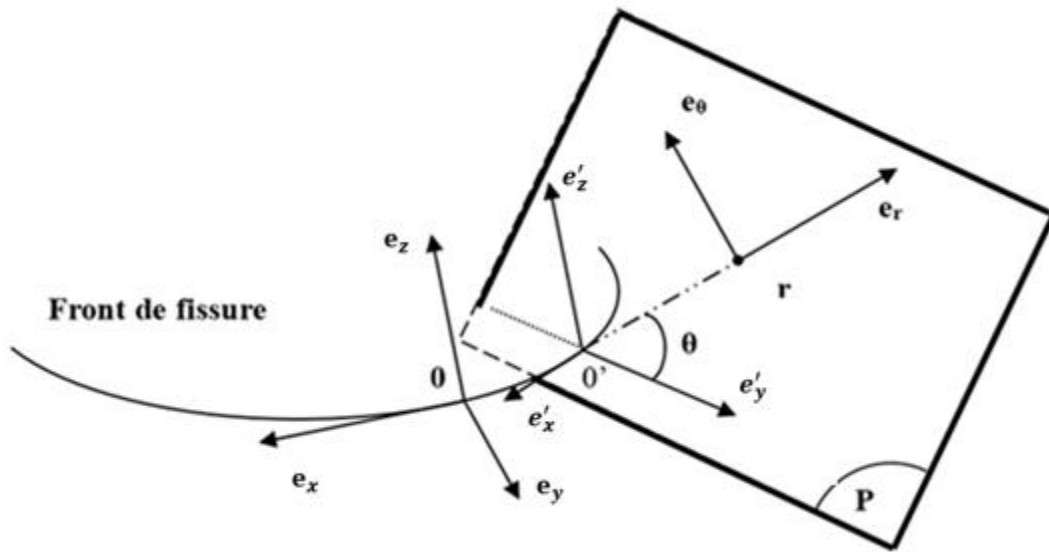


Figure 176 : Repère global (e_x, e_y, e_z) pour la résolution de l'équation fondamentale, repère local (e'_x, e'_y, e'_z) attaché au front de fissure sur lequel porte le post-traitement et définissant le plan P orthogonal au front de fissure et au point d'intérêt O' .

Les formules permettant de déterminer les contraintes T et T_Z à partir du tenseur des contraintes dans le repère local deviennent (l'indice « *disloc* », signifie que les quantités mécaniques sont déterminées uniquement à partir de la technique des dislocations distribuées et l'indice « *continu* » signifie que ces mêmes quantités sont calculées à partir du modèle éléments finis sans fissure) :

$$\begin{cases} T^{disloc} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sigma'_{yy}{}^{disloc}(r, \theta = 0) - \sigma'_{zz}{}^{disloc}(r, \theta = 0) \right) \\ T_Z^{disloc} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sigma'_{xx}{}^{disloc}(r, \theta = 0) - v \cdot \left(\sigma'_{yy}{}^{disloc}(r, \theta = 0) + \sigma'_{zz}{}^{disloc}(r, \theta = 0) \right) \right) \\ T^{continu} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sigma'_{yy}{}^{continu}(r, \theta = 0) - \sigma'_{zz}{}^{continu}(r, \theta = 0) \right) \\ T_Z^{continu} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sigma'_{xx}{}^{continu}(r, \theta = 0) - v \cdot \left(\sigma'_{yy}{}^{continu}(r, \theta = 0) + \sigma'_{zz}{}^{continu}(r, \theta = 0) \right) \right) \\ T = T^{disloc} + T^{continu} \\ T_Z = T_Z^{disloc} + T_Z^{continu} \end{cases} \quad (5-24)$$

Il reste à donner les formules permettant de reconstruire le tenseur des contraintes dans le repère global. En reprenant les notations de l'*Annexe 8*, les composantes du tenseur de contrainte exprimées dans le repère global s'obtiennent comme suit :

$$\sigma_{ij}^{disloc}(x, y, z = 0) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_S K_{ij}(x - x', y - y') \cdot b(x', y') \cdot \delta S \quad (5-25)$$

En choisissant x et y en dehors du domaine fissuré, cette intégrale se calcule à l'aide d'une méthode de Gauss-Legendre classique.

II-4-7 Avantages et inconvénients de cette méthode

La technique des dislocation distribuées permet la détermination du facteur d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_z pour n'importe quels gradients de contraintes et géométries de fissure avec une grande précision. Néanmoins, les noyaux de l'intégrale ne sont connus que pour des milieux infinis et semi-infinis. Cependant, dans la mesure où l'on s'intéresse surtout aux cas des fissures courtes, cette limitation ne sera pas un inconvénient.

Un inconvénient majeur de la méthode provient de la discrétisation numérique du problème qui conduit à la construction d'une matrice de « raideur » (voir l'*Annexe 7*) pleine, contrairement à celles construites par le biais de la méthode des éléments finis. Le caractère hyper-singulier des intégrales à calculer nécessite, de plus, un nombre élevé de points de Gauss. Même si la taille de la matrice est bien plus faible que celle qui serait obtenue par éléments finis, qui nécessiterait un maillage 3D, le temps de calcul pour sa construction est, de loin, bien supérieur à celui d'une matrice de raideur de type éléments finis. En effet, sous Matlab, sans parallélisation ni utilisation d'algorithme d'accélération, en considérant un maillage surfacique d'une fissure semi-circulaire contenant environ 200 éléments quadrangulaires, le temps nécessaire pour construire la matrice de raideur est de l'ordre de la semaine. Il est donc inenvisageable d'utiliser la technique des dislocation distribuées dans sa formulation actuelle dans le contexte de cette étude.

Annexe 6 Quelques éléments mathématiques à propos de la méthode des dislocations distribuées : analyse de l'équation fondamentale

On rappelle l'équation fondamentale qui doit être calculée pour la résolution du problème de fissuration :

$$\sigma_{zz}(x, y, z = 0) = \frac{\mu}{4. \pi. (1 - \nu)} \cdot \int_S K(x - x', y - y') \cdot b(x', y') \cdot \delta S \quad (6-1)$$

La première étape consiste à extraire de l'intégrale précédente sa partie finie, définie comme :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \frac{\mu}{4. \pi. (1 - \nu)} \cdot \text{F. P.} \left(\int_S \frac{1}{r^3} \cdot b(x', y') \cdot \delta S \right) \\ &= \frac{\mu}{4. \pi. (1 - \nu)} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S - S_\varepsilon} \frac{b(x', y')}{r^3} \cdot \delta S - \frac{2 \cdot b(x, y) \cdot \pi}{\varepsilon} \right\} \end{aligned} \quad (6-2)$$

où F.P. est l'opérateur donnant la partie finie (« Finite Part » en anglais) de l'intégrale et S_ε représente un domaine entourant le point singulier comme le représente la **Figure 177**.

Pour plus de détails concernant les développements mathématiques associés à cette intégrale, le lecteur est invité à se référer à l'ouvrage de Hills et al. (Hills et al., 1996). On se contentera ici de donner quelques-uns de ces développements. Tout d'abord, commençons par développer $b(x', y')$:

$$\begin{aligned} b(x', y') &= \left[b(x', y') - b(x, y) - (x' - x) \cdot \frac{\partial b(x', y')}{\partial x'} \Big|_{(x, y)} - (y' - y) \cdot \frac{\partial b(x', y')}{\partial y'} \Big|_{(x, y)} \right] \\ &+ \left[b(x, y) + (x' - x) \cdot \frac{\partial b(x', y')}{\partial x'} \Big|_{(x, y)} + (y' - y) \cdot \frac{\partial b(x', y')}{\partial y'} \Big|_{(x, y)} \right] \\ &= b_1(x', y') + b_2(x', y') \end{aligned} \quad (6-3)$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \frac{\mu}{4. \pi. (1 - \nu)} \left\{ \int_S \frac{1}{r^3} \cdot b_1(x', y') \cdot \delta S + \text{F. P.} \left(\int_S \frac{1}{r^3} \cdot b_2(x', y') \cdot \delta S \right) \right\} \\ &= I_1(x, y) + I_2(x, y) \end{aligned} \quad (6-4)$$

Il se trouve que la première intégrale existe au sens usuel et elle peut donc être calculée à l'aide d'une méthode d'intégration classique. La deuxième, en revanche, nécessite le calcul de sa partie finie, mais peut être exprimée d'une manière simplifiée :

$$I_2(x, y) = \frac{\mu}{4. \pi. (1 - \nu)} \cdot \left\{ L \cdot b(x, y) + M_1 \cdot \frac{\partial b(x', y')}{\partial x'} \Big|_{(x, y)} + M_2 \cdot \frac{\partial b(x', y')}{\partial y'} \Big|_{(x, y)} \right\} \quad (6-5)$$

où L , M_1 et M_2 sont des intégrales de contours (**Figure 178**) qui s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} L = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\theta)} \cdot d\theta \\ M_1 = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \cdot \ln(r(\theta)) \cdot d\theta \\ M_2 = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cdot \ln(r(\theta)) \cdot d\theta \end{cases} \quad (6-6)$$

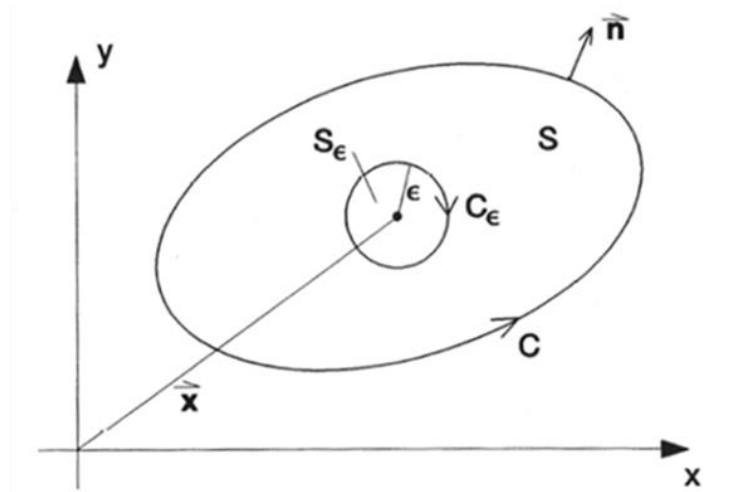


Figure 177 : Un domaine d'aire S_ϵ entourant le point singulier de coordonnées (x, y) est exclu du domaine d'intégration S (Hills et al., 1996).

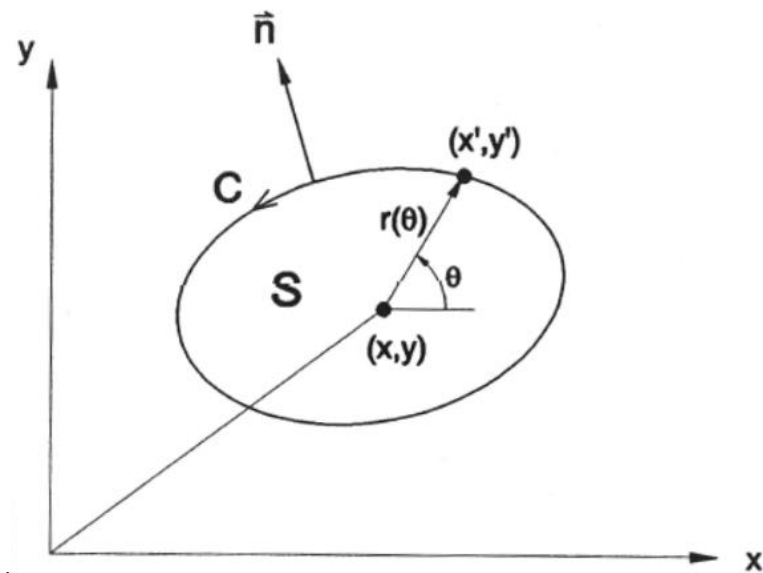


Figure 178 : Evaluation des intégrales de contour en coordonnées polaires (Hills et al., 1996).

Annexe 7 Quelques éléments d'intégration numérique de l'équation fondamentale de la méthode des dislocations distribuées

I – Discrétisation par éléments finis

Avant de donner les équations à inverser pour résoudre le problème, commençons par décrire le comportement d'un élément. On a choisi d'utiliser des éléments de type quadrangles pour lesquels les fonctions de forme sont linéaires (*Figure 179*).

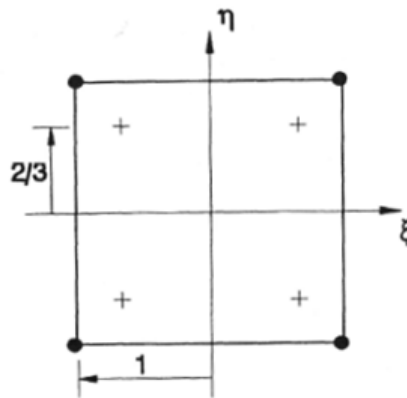


Figure 179 : Élément fini de type quadrangle non-conforme. Les nœuds de l'élément sont ses sommets et les points de colocation sont représentés par des croix (Hills et al., 1996).

Les coordonnées d'un point arbitraire dans un élément sont données par une interpolation linéaire de ses coordonnées nodales :

$$\begin{cases} x = \sum_{q=1}^4 L_q(\xi, \eta) \cdot x_q \\ y = \sum_{q=1}^4 L_q(\xi, \eta) \cdot y_q \end{cases} \quad (7-1)$$

avec $-1 \leq \xi \leq 1$ et $-1 \leq \eta \leq 1$:

$$\begin{cases} L_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \\ L_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \\ L_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \\ L_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \end{cases} \quad (7-2)$$

Le vecteur de Burgers est donné par les fonctions de forme de l'élément et aussi par interpolation de ces dernières :

$$b(x, y) = \sum_{q=1}^4 N_q(\xi, \eta) \cdot b_q^e \quad (7-3)$$

où les b_q^e correspondent au vecteur de Burgers aux points de colocation. Comme il n'y a pas de correspondance entre les points de colocation et les nœuds des éléments, on dit que les éléments sont non-conformes (**Figure 179**). Les fonctions de forme sont choisies de sorte qu'elles valent 1 au point de colocation correspondant. Ainsi, les fonctions de forme sont définies comme suit :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \xi\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \eta\right) \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \xi\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \eta\right) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \xi\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \eta\right) \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \xi\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \eta\right) \end{cases} \quad (7-4)$$

A partir de la discrétisation proposée, l'équation fondamentale peut être remplacée par l'équation suivante :

$$\frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \sum_{n=1}^{n_e} \sum_{q=1}^4 \int_{S_n} K(x - x', y - y') \cdot N_q(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot b_{t(n,q)} = -\tilde{\sigma}(x, y, z = 0) \quad (7-5)$$

avec J la matrice jacobienne de transformation définie comme suit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7-6)$$

où n_e , $t(n, q)$ et $b_{t(n,q)}$ étant, respectivement, le nombre total d'éléments, le numéro du point de colocation associé à la numérotation (n, q) et le vecteur de Burgers associé à ce point.

En imposant que cette équation soit vérifiée uniquement aux points de colocation et pas sur l'ensemble des points sur les lèvres de la fissure, on obtient :

$$\sum_{t=1}^{n_t} K_{st} \cdot b_t = -\tilde{\sigma}_s \quad \text{pour } s = 1, \dots, n_t \quad (7-7)$$

où n_t et $s = s(q, n)$ sont, respectivement, le nombre total de points de colocation et le numéro global associé au $q^{\text{ème}}$ point de colocation du $n^{\text{ème}}$ élément. $\tilde{\sigma}_s = \tilde{\sigma}_s(x_s^c, y_s^c)$ correspond à la contrainte normale au plan de fissure situé au $s^{\text{ème}}$ point de colocation, mais associée au problème non-fissuré.

Dans cette dernière équation, le terme K_{st} est défini comme suit :

$$K_{st} = K_{s(q,n)t} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_{S_n} \frac{N_q(\xi, \eta)}{r^3} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (7-8)$$

avec $r = \sqrt{(x - x_s^c)^2 + (y - y_s^c)^2}$.

L'équation fondamentale ainsi modifiée forme un système de n_t équations algébriques avec n_t inconnues.

II – Calculs numériques des différentes contributions intervenant dans le système d'équations algébriques

Maintenant que le système d'équations algébriques a été posé sous formes d'équations, il faut le déterminer numériquement. Le calcul des termes K_{st} doit être traité avec précaution. Deux cas se présentent et sont détaillés ci-dessous.

II-1 Cas où le point de colocation se trouve à l'intérieur de l'élément

Dans cette situation, K_{st} est une intégrale hyper-singulière et son traitement nécessite quelques précautions comme on l'a vu par ailleurs avec le calcul de $I(x, y)$ décomposé comme la somme de deux contributions $I_1(x, y)$ et $I_2(x, y)$. On procède ici de la même manière, en évaluant uniquement la partie finie de l'intégrale et en la séparant en deux contributions :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{st} = K_{tt1} + K_{tt2} \\ K_{tt1} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_{S_n} \frac{N_q^1(x, y)}{r^3} \cdot dS \\ K_{tt2} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \left\{ L \cdot N_q(\xi_p, \eta_p) + M_1 \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} \Big|_{(x_t^c, y_t^c)} + M_2 \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} \Big|_{(x_t^c, y_t^c)} \right\} \end{array} \right. \quad (7-9)$$

où (x_t^c, y_t^c) correspond aux coordonnées des points de colocation, L , M_1 et M_2 sont évaluées numériquement. Quant à la fonction N_q^1 elle est définie comme suit :

$$N_q^1(\xi, \eta) = N_q(\xi, \eta) - N_q(x_t^c, y_t^c) - (x - x_t^c) \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} \Big|_{(x_t^c, y_t^c)} - (y - y_t^c) \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} \Big|_{(x_t^c, y_t^c)} \quad (7-10)$$

Les termes de dérivation peuvent se calculer comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_q}{\partial x} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_q}{\partial y} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right. \quad (7-11)$$

En reprenant la définition de la matrice jacobienne, il vient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = |J|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7-12)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer l'intégrale. Comme celle-ci est faiblement singulière, il est possible de la calculer numériquement. On procède en deux étapes. La première consiste à réécrire l'intégrale en introduisant une fonction F définie comme suit :

$$F(\xi, \eta) = \frac{\rho \cdot N_q^1(\xi, \eta)}{r^3} \cdot |J(\xi, \eta)| \quad (7-13)$$

avec $\rho = \sqrt{(\xi - \xi_c)^2 + (\eta - \eta_c)^2}$ et où (ξ_c, η_c) sont les coordonnées réduites du point de colocation considéré dans l'élément.

L'intégrale s'écrit alors :

$$K_{tt1} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_{S_n} \frac{F(\xi, \eta)}{\rho} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (7-14)$$

Cette forme facilite l'intégration, puisque la singularité en $\frac{1}{\rho}$ est écrite explicitement et que le développement limité de la fonction F est continu et défini au point de singularité (ξ_c, η_c) .

La deuxième étape consiste à subdiviser l'élément quadrangle en quatre éléments triangulaires comme représenté sur la figure qui suit :

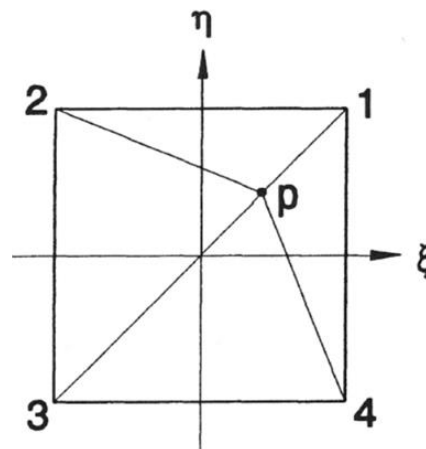


Figure 180 : Subdivision d'un élément quadrangle en quatre éléments triangulaires (Hills et al., 1996). Le point p correspond à un point de colocation.

Chaque sous-élément triangulaire est ensuite transformé en élément quadrangle à l'aide d'une transformation en coordonnées dégénérées qui dépend de l'élément triangulaire considéré. On donne ci-dessous les transformations associées à chaque sous-domaine :

- **Triangle dont les sommets sont (1, 2, p) :**

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \cdot \xi' \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \xi_p \\ \eta = \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \eta_p \end{cases} \quad (7-15)$$

- **Triangle dont les sommets sont (2, 3, p) :**

$$\begin{cases} \xi = -\frac{1}{2} \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \xi_p \\ \eta = \frac{1}{2} \cdot \xi' \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \eta_p \end{cases} \quad (7-16)$$

➤ **Triangle dont les sommets sont (3, 4, p) :**

$$\begin{cases} \xi = -\frac{1}{2} \cdot \xi' \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \xi_p \\ \eta = -\frac{1}{2} \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \eta_p \end{cases} \quad (7-17)$$

➤ **Triangle dont les sommets sont (4, 1, p) :**

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \xi_p \\ \eta = -\frac{1}{2} \cdot \xi' \cdot (1 + \eta') + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta') \cdot \eta_p \end{cases} \quad (7-18)$$

En posant $\bar{F}(\xi', \eta') = F(\xi(\xi', \eta'), \eta(\xi', \eta'))$, $\bar{\rho}(\xi', \eta') = \rho(\xi(\xi', \eta'), \eta(\xi', \eta'))$ et $|J_{degen}(\xi', \eta')|$ le jacobien de la transformation consistant à passer du système des coordonnées réduites au système des coordonnées réduites dégénérées, on obtient une formule pour l'intégration qui découple les variables au niveau des bornes d'intégration, comme le montre l'équation suivante :

$$K_{tt1} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\bar{F}(\xi', \eta')}{\bar{\rho}(\xi', \eta')} \cdot |J_{degen}(\xi', \eta')| \cdot d\xi' \cdot d\eta' \quad (7-19)$$

L'intégration numérique se fait alors à l'aide d'une quadrature de Gauss-Legendre bidimensionnelle.

II-2 Cas où le point de colocation se trouve à l'extérieur de l'élément

Dans cette situation, l'intégrale est régulière du fait que le point de colocation de coordonnées (x_t^c, y_t^c) se trouve à l'extérieur de l'élément. Ainsi en utilisant une méthode de Gauss bidimensionnelle pour approximer l'intégrale, il vient :

$$K_{st} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} W_i \cdot W_j \cdot |J(\xi_i, \eta_j)| \cdot \frac{N_q(\xi_i, \eta_j)}{r^3(\xi_i, \eta_j)} \quad (7-20)$$

où n_1 et n_2 sont, respectivement, les points de Gauss associés aux directions ξ et η .

Pour que l'intégration numérique soit efficace, le critère suivant peut être utilisé pour déterminer les nombres de points de Gauss optimaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot (n_1 + 1) \cdot (2 \cdot n_1 + 1) \cdot \left(\frac{l_1}{4 \cdot r_{min}} \right)^{2 \cdot n_1} \leq \varepsilon \\ 4 \cdot (n_2 + 1) \cdot (2 \cdot n_2 + 1) \cdot \left(\frac{l_2}{4 \cdot r_{min}} \right)^{2 \cdot n_2} \leq \varepsilon \end{array} \right. \quad n_{min} \leq n_1; n_2 \leq n_{max} \quad (7-21)$$

l_1 et l_2 sont des longueurs caractéristiques de l'élément et r_{min} est la distance minimale du point de colocation à l'élément. ε est un petit paramètre caractérisant l'erreur maximale admissible et n_{min} et n_{max} sont des bornes définissant un intervalle dans lequel la méthode sera dite efficace en termes de rapidité de calculs et d'efficacité.

Si r_{min} est trop petit, le critère ne pourra pas être respecté. Une méthode d'optimisation supplémentaire est alors nécessaire. On choisit alors de subdiviser le domaine et de re-tester le critère jusqu'à obtenir convergence.

Annexe 8 Méthode des dislocations distribuées pour les milieux semi-infinis

En supposant un espace semi-infini, le noyau de l'intégrale s'écrit comme suit :

$$K_{nm} = K_{nm}^S + K_{nm}^{NS} \quad (8-1)$$

où K_{nm}^S est le noyau fondamental hyper-singulier et K_{nm}^{NS} est le terme correctif à rajouter au noyau pour rendre compte de la présence d'un bord libre dans le milieu. En particulier, on a :

$$K_{nm}^S = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^3} \left\{ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \delta_{nm} + 2 \cdot \nu \cdot \delta_{3n} \cdot \delta_{3m} + 3 \cdot \nu \cdot \frac{\delta_{n\alpha} \cdot \delta_{m\beta} \cdot r_\alpha \cdot r_\beta}{r^2} \right\} \quad (8-2)$$

Dans le cas du mode I , on prend $n = m = 3$, on obtient donc :

$$K_{nm}^S = \frac{\mu}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^3} \text{ puisque } z = 0 \quad (8-3)$$

On retrouve bien le noyau introduit dans l'**Annexe 5** sauf qu'ici on introduit dans ce dernier les constantes matériaux. On utilise dans ce qui suit les notations suivantes :

$$\alpha, \beta = 1, 2 \quad (8-4)$$

$$r_i = X_i - Y_i \quad (8-5)$$

$$R_3 = X_3 + Y_3 \quad (8-6)$$

$$R^2 = r_\alpha \cdot r_\alpha + R_3^2 \quad (8-7)$$

$$K_h = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \quad (8-8)$$

Ici le repère (O, X_1, X_2, X_3) est orienté de telle manière à ce que l'axe OX_3 soit orthogonal à la surface libre.

La partie non-singulière du noyau s'obtient comme suit :

$$K_{nm}^{NS} = a_{3j} \cdot a_{nk} \cdot a_{3i} \cdot a_{ml} \cdot H_{jkil}^{NS}(X(x_1, x_2), Y(y_1, y_2)) \quad (8-9)$$

où les a_{ij} sont les termes de la matrice de passage du système de coordonnées global $OX_1X_2X_3$ au système de coordonnées local $Ox_1x_2x_3$ et le tenseur d'ordre 4 H_{jkil}^{NS} est défini comme suit :

$$H_{jkil}^{NS}(X, Y) = \mu \cdot \left\{ \frac{\partial T_{jki}^{NS}}{\partial Y_l} + \frac{\partial T_{jkl}^{NS}}{\partial Y_i} + \frac{2 \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \frac{\partial T_{jkm}^{NS}}{\partial Y_m} \cdot \delta_{il} \right\} \quad (8-10)$$

Les expressions des tenseurs T^{NS} sont rappelés ci-dessous (Hills et al., 1996) :

$$T_{113}^{NS} = K_h \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{(1-2\nu) \cdot (3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} \\ - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot r_1^2 \cdot r_3 - 6 \cdot Y_3 \cdot R_3 \cdot ((1-2\nu) X_3 - 2\nu Y_3)}{R^5} - \frac{30 \cdot Y_3 \cdot r_1^2 \cdot X_3 \cdot R_3}{R^7} \\ - \frac{4 \cdot (1-\nu) \cdot (1-2\nu)}{R \cdot (R+R_3)} \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{R \cdot (R+R_3)} - \frac{r_1^2}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-11)$$

$$T_{223}^{NS} = K_h \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{(1-2\nu) \cdot (3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} \\ - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot r_2^2 \cdot r_3 - 6 \cdot Y_3 \cdot R_3 \cdot ((1-2\nu) X_3 - 2\nu Y_3)}{R^5} - \frac{30 \cdot Y_3 \cdot r_2^2 \cdot X_3 \cdot R_3}{R^7} \\ - \frac{4 \cdot (1-\nu) \cdot (1-2\nu)}{R \cdot (R+R_3)} \cdot \left(1 - \frac{r_2^2}{R \cdot (R+R_3)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-12)$$

$$T_{333}^{NS} = K_h \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{(1-2\nu) \cdot r_3}{R^3} \\ - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot X_3 \cdot R_3^2 - 3 \cdot Y_3 \cdot R_3 \cdot (5X_3 - Y_3)}{R^5} - \frac{30 \cdot Y_3 \cdot X_3 \cdot R_3^3}{R^7} \end{array} \right] \quad (8-13)$$

$$T_{233}^{NS} = K_h \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{(1-2\nu)}{R^3} \\ - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot X_3 \cdot R_3 - 3 \cdot Y_3 \cdot (3X_3 + Y_3)}{R^5} - \frac{30 \cdot Y_3 \cdot X_3 \cdot R_3^2}{R^7} \end{array} \right] \quad (8-14)$$

$$T_{313}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{(1-2\nu)}{R^3} \\ - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot X_3 \cdot R_3 - 3 \cdot Y_3 \cdot (3X_3 + Y_3)}{R^5} - \frac{30 \cdot Y_3 \cdot X_3 \cdot R_3^2}{R^7} \end{array} \right] \quad (8-15)$$

$$T_{123}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{l} - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot r_3}{R^5} \\ + \frac{4 \cdot (1-\nu) \cdot (1-2\nu)}{R^2 \cdot (R+R_3)} \cdot \left(\frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right) - \frac{30 \cdot Y_3 \cdot X_3 \cdot R_3}{R^7} \end{array} \right] \quad (8-16)$$

$$T_{111}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{(1-2\nu) \cdot (5-4\nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot r_1^2}{R^5} \\ - \frac{4 \cdot (1-\nu) \cdot (1-2\nu)}{R \cdot (R+R_3)^2} \cdot \left(3 - \frac{r_1^2 \cdot (3R+R_3)}{R^2 \cdot (R+R_3)} \right) \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(3 \cdot Y_3 - (3-2\nu) \cdot R_3 + \frac{5 \cdot r_1^2 \cdot X_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-17)$$

$$T_{221}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{(1-2\nu) \cdot (3-4\nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot r_2^2}{R^5} \\ - \frac{4 \cdot (1-\nu) \cdot (1-2\nu)}{R \cdot (R+R_3)^2} \cdot \left(1 - \frac{r_2^2 \cdot (3R+R_3)}{R^2 \cdot (R+R_3)} \right) \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(Y_3 - (1-2\nu) \cdot R_3 + \frac{5 \cdot r_2^2 \cdot X_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-18)$$

$$T_{331}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot \left[\begin{array}{l} - \frac{(1-2\nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3-4\nu) \cdot R_3^2}{R^5} \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(Y_3 + (1-2\nu) \cdot R_3 + \frac{5 \cdot X_3 \cdot R_3^2}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-19)$$

$$T_{231}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{c} -\frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot R_3}{R^5} \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(1 - 2 \cdot \nu + \frac{5 \cdot X_3 \cdot R_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-20)$$

$$T_{311}^{NS} = K_h \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_3}{R^3} \\ - \frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot r_1^2 \cdot R_3}{R^5} - \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(X_3 \cdot R_3 - (1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_1^2 - \frac{5 \cdot r_1^2 \cdot X_3 \cdot R_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-21)$$

$$T_{121}^{NS} = K_h \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot r_1^2}{R^5} \\ - \frac{4 \cdot (1 - \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{R \cdot (R + R_3)^2} \cdot \left(1 - \frac{r_1^2 \cdot (3 \cdot R + R_3)}{R^2 \cdot (R + R_3)} \right) - \frac{6 \cdot Y_3 \cdot X_3}{R^5} \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot r_1^2}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-22)$$

$$T_{112}^{NS} = K_h \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (3 - 4 \cdot \nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot r_1^2}{R^5} \\ - \frac{4 \cdot (1 - \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{R \cdot (R + R_3)^2} \cdot \left(1 - \frac{r_1^2 \cdot (3 \cdot R + R_3)}{R^2 \cdot (R + R_3)} \right) \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(Y_3 - (1 - 2 \cdot \nu) \cdot R_3 + \frac{5 \cdot r_1^2 \cdot X_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-23)$$

$$T_{222}^{NS} = K_h \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (5 - 4 \cdot \nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot r_2^2}{R^5} \\ - \frac{4 \cdot (1 - \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{R \cdot (R + R_3)^2} \cdot \left(3 - \frac{r_2^2 \cdot (3 \cdot R + R_3)}{R^2 \cdot (R + R_3)} \right) \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(3 \cdot Y_3 - (3 - 2 \cdot \nu) \cdot R_3 + \frac{5 \cdot r_2^2 \cdot X_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-24)$$

$$T_{332}^{NS} = K_h \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{c} -\frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot R_3^2}{R^5} \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(Y_3 + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot R_3 + \frac{5 \cdot X_3 \cdot R_3^2}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-25)$$

$$T_{132}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{c} -\frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot R_3}{R^5} \\ + \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(1 - 2 \cdot \nu + \frac{5 \cdot X_3 \cdot R_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-26)$$

$$T_{322}^{NS} = K_h \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_3}{R^3} \\ - \frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot r_2^2 \cdot R_3}{R^5} - \frac{6 \cdot Y_3}{R^5} \cdot \left(X_3 \cdot R_3 - (1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_2^2 - \frac{5 \cdot r_2^2 \cdot X_3 \cdot R_3}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-27)$$

$$T_{122}^{NS} = K_h \cdot r_1 \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{R^3} - \frac{3 \cdot (3 - 4 \cdot \nu) \cdot r_2^2}{R^5} \\ - \frac{4 \cdot (1 - \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{R \cdot (R + R_3)^2} \cdot \left(1 - \frac{r_2^2 \cdot (3 \cdot R + R_3)}{R^2 \cdot (R + R_3)} \right) - \frac{6 \cdot Y_3 \cdot X_3}{R^5} \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot r_2^2}{R^2} \right) \end{array} \right] \quad (8-28)$$

Enfin, le tenseur H_{ijkl}^{NS} possède des propriétés de symétrie qui sont données ci-dessous :

$$H_{jikl}^{NS}(X, Y) = H_{kjil}^{NS}(X, Y) = H_{jkli}^{NS}(X, Y) \quad (8-29)$$

Pour terminer, les différentes dérivées intervenant dans le calcul du tenseur H_{ijkl}^{NS} ont été obtenues en utilisant les fonctions de dérivation en calcul symbolique de **Matlab**. L'intégration numérique de la partie non-singulière du noyau se fait directement par une intégration numérique de Gauss-Legendre classique.

Annexe 9 Méthodologie semi-analytique retenue pour les calculs de K_I , T et T_Z et validation associée

I – Utilisation de la méthode des courbes maîtresses dans le cadre de la méthode des dislocations distribuées

La construction de la matrice de raideur par la méthode des dislocations distribuées est, de loin, l'étape la plus consommatrice en termes de temps de calcul. Dans l'exemple de la fissure semi-circulaire qui sera exposé dans la suite, la construction de la matrice de raideur prend environ une semaine. Ceci est évidemment beaucoup trop long dans un contexte industriel d'autant plus que les codes de calculs par éléments finis peuvent fournir des résultats tout aussi précis et incomparablement plus rapidement. Cependant, les temps de calculs associés à la méthode des dislocations distribuées concernent un code implanté sous **Matlab**. Il ne s'agit pas d'une version optimisée au sens industriel du terme, mais uniquement d'une version académique développée pour l'étude du potentiel d'une telle méthode. Il aurait été possible de se servir de plusieurs processeurs en parallèle pour le calcul de sous-parties de la matrice de raideur et l'assembler par la suite. Cela aurait sans doute réduit les temps de calculs drastiquement. Ce n'est pas l'objet de cette étude, mais il est clair qu'une telle démarche pourrait fonctionner.

L'objet de cette sous-section concerne la possibilité de combiner la méthode des dislocations distribuées avec la méthode des courbes maîtresses afin de disposer d'une méthode extrêmement efficace et rapide. L'idée est de déterminer les évolutions du facteur d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_Z en fonction de la longueur de fissure, pour un chargement défini uniquement à partir de calculs de dislocations distribuées réalisés pour une dimension de fissure unique. Ainsi, la matrice de raideur pour l'ensemble des cas traités serait la même. L'étape de construction de la matrice de raideur n'aurait donc lieu qu'une fois. Cette manière de concevoir les choses fonctionnerait tout aussi bien avec la méthode des éléments finis. L'avantage avec la méthode des dislocations distribuées est que le nombre de degrés de liberté est considérablement plus faible qu'avec la méthode des éléments finis. En effet, cette dernière discrétise l'espace tridimensionnel alors qu'avec la méthode des dislocations distribuées toute l'information utile se trouve condensée sur les lèvres de la fissure. Il pourrait ainsi être envisageable de calculer une fois pour toute la matrice de raideur avec la méthode des dislocations distribuées et de la stocker, puis de la charger de nouveau afin d'effectuer les calculs nécessaires. Une telle stratégie se trouve être finalement bien moins coûteuse que la méthode des éléments finis, ce qui du point de vue industriel serait très avantageux.

On se ramène donc au cas d'une fissure de longueur $a_0 = 1$ mm avec la méthode des dislocations distribuées. On a vu dans la section §IV.3.2.2 que pour une forme du champ de contraintes donnée (comme par exemple celle engendrée par une concentration de contraintes) le facteur d'intensité des contraintes se réduit à une courbe maîtresse dans un diagramme $K_I \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sigma_{max}} = f_{K_I}(a, \alpha)$ (où α représente le facteur d'échelle). De même, pour les contraintes T et T_Z les courbes maîtresses se mettent, respectivement, sous la forme $\frac{T}{\sigma_{max}} = f_T(a, \alpha)$ et $\frac{T_Z}{\sigma_{max}} = f_{T_Z}(a, \alpha)$.

Commençons par le facteur d'intensité des contraintes que l'on souhaite calculer pour une longueur de fissure a et un champ de contraintes ayant un facteur d'échelle α . En vertu de la règle de normalisation on a :

$$K_I \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sigma_{max}} = f_{K_I}(a, \alpha) = f_{K_I} \left(a_0 \cdot \underbrace{\frac{a}{a_0}}_{\alpha} \cdot \alpha \right) = K_{I0} \cdot \frac{\sqrt{a_0}}{\sigma_{max}} \quad (9-1)$$

où α_0 est le facteur d'échelle obtenu en dilatant spatialement le champ de contraintes par le coefficient $\frac{a}{a_0}$.

Grâce à la méthode des dislocations distribuées appliquée sur le champ de contrainte dilaté spatialement, il est possible de calculer le facteur d'intensité des contraintes K_{I0} . En vertu de l'équation précédente, on obtient le facteur d'intensité des contraintes du problème initial comme suit :

$$K_I = K_{I0} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha}} = K_{I0} \cdot \sqrt{\frac{a}{a_0}} \quad (9-2)$$

Cette équation montre que la valeur de l'échelle α du problème initial importe peu. C'est le rapport entre les deux échelles avant et après dilation (donc $\frac{a}{a_0}$) qui compte. Autrement dit, il serait parfaitement envisageable de prendre une valeur de 1 ou de 2 pour α , mais le rapport entre α_0 et α serait parfaitement indépendant de ce choix arbitraire. Donc, pour les champs de contraintes à gradient, il serait possible de choisir χ comme paramètre d'échelle et 1 pour le cas des chargements homogènes spatialement. Dans tous les cas la méthode fonctionne.

De manière tout à fait analogue, les contraintes T et T_Z s'en déduisent comme suit :

$$\begin{cases} T = T_0 \\ T_Z = T_{Z0} \end{cases} \quad (9-3)$$

II – Mise en œuvre pratique de la méthode des dislocations distribuées couplée à la méthode des courbes maîtresses

II-1 1^{ère} étape : Construction de la matrice de raideur

Dans cette première étape, considérons une géométrie semi-circulaire de rayon égale à 1 mm maillée avec des éléments quadrangulaires de degré un. Ce modèle représentera l'une des deux lèvres de la fissure (**Figure 181**).

Pour un champ de contrainte donné appliqué sur les lèvres de la fissure, la technique des dislocation distribuées conduit à résoudre le problème matriciel suivant (voir **Annexe 5**, **Annexe 6**, **Annexe 7** et **Annexe 8**) :

$$\sum_{t=1}^{n_t} K_{ZZ}^{st} \cdot b_t = -\tilde{\Sigma}_{ZZ}(x^s, y^s) \quad \text{pour } s = 1, \dots, n_t \quad (9-4)$$

où $-\tilde{\Sigma}_{ZZ}(x^s, y^s)$ est la valeur du champ de contraintes normal au plan de fissuration appliqué au $s^{\text{ème}}$ point de colocation (le signe – provient de l'utilisation du principe de superposition de Bueckner illustré sur la **Figure 171**) et b_t est la valeur du vecteur de Burgers (ouverture de fissure) au $t^{\text{ème}}$ point de colocation.

Dans cette équation, K_{ZZ}^{st} représente la valeur de la $s^{\text{ème}}$ ligne et de la $t^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de raideur. Cette matrice est indépendante du vecteur de Burgers et du chargement appliqué sur les lèvres de la fissure, ce qui assure une certaine universalité de celle-ci. C'est elle qui doit être construite en premier lieu et puis stockée.

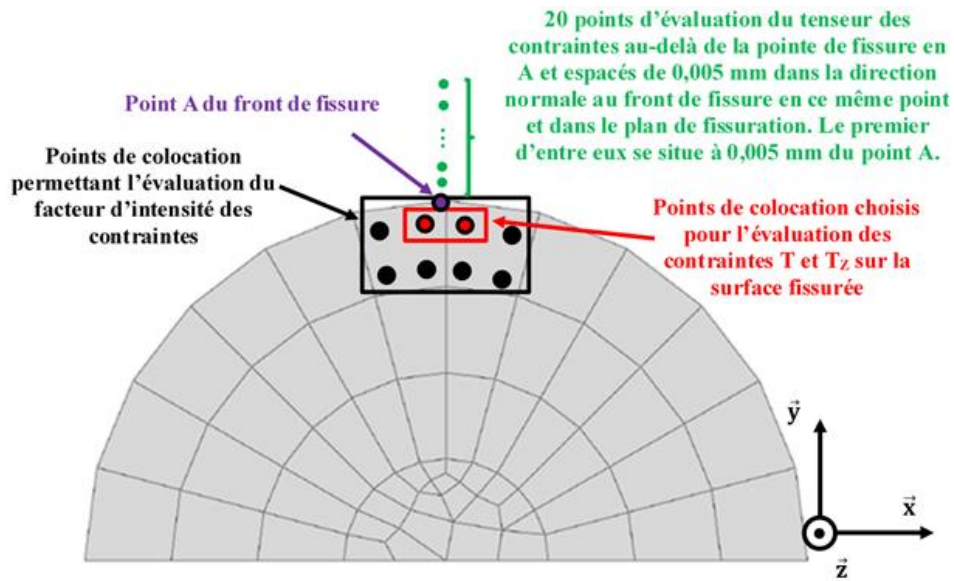


Figure 181 : Lèvre de fissure semi-circulaire maillée. Les quatre points de colocation au sein d'un élément sont également représentés et ces derniers diffèrent des nœuds de l'élément.

II-2 2^{ème} étape : Construction des fonctions d'influence

Les fonctions d'influence du tenseur des contraintes sont construites en des points choisis à l'avance et sont de deux types : les points à l'intérieur de la surface fissurée et les points à l'extérieur de la surface fissurée. Les premiers sont ceux représentés en rouge sur la **Figure 181**. Ils sont au nombre de deux et coïncident avec des points de colocation existants. Ce choix résulte du fait que le noyau de l'équation fondamentale est hyper-singulier. Ce caractère hyper-singulier s'exprime surtout lorsque les points d'évaluation du tenseur des contraintes se situent à l'intérieur d'un élément du maillage et c'est précisément le cas ici. Il en résulte que toute évaluation du tenseur des contraintes en dehors des points de colocation, mais en restant au sein d'un élément, conduit à des erreurs importantes, ce qui justifie le choix réalisé. Pour les points en dehors de la surface fissurée, l'équation fondamentale nécessite moins de précautions. Dans tous les cas, le tenseur des contraintes engendré par la technique des dislocations distribuées s'obtient comme suit quel que soit le point d'évaluation $s \in \llbracket 1; 22 \rrbracket$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^{n_t} K_{zz}^t(x^s, y^s, z=0) \cdot b_t = \sigma_{zz}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z=0) \\ \sum_{t=1}^{n_t} K_{xx}^t(x^s, y^s, z=0) \cdot b_t = \sigma_{xx}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z=0) \\ \sum_{t=1}^{n_t} K_{xy}^t(x^s, y^s, z=0) \cdot b_t = \sigma_{xy}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z=0) \\ \sum_{t=1}^{n_t} K_{yy}^t(x^s, y^s, z=0) \cdot b_t = \sigma_{yy}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z=0) \\ \sum_{t=1}^{n_t} K_{xz}^t(x^s, y^s, z=0) \cdot b_t = \sigma_{xz}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z=0) \\ \sum_{t=1}^{n_t} K_{yz}^t(x^s, y^s, z=0) \cdot b_t = \sigma_{yz}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z=0) \end{array} \right. , \text{ pour } s = 1, \dots, 22 \quad (9-5)$$

Ce qu'on appelle fonctions d'influence, ce sont les termes $K_{**}^*(x^*, y^*, z=0)$. Ils sont valides quel que soit le chargement appliqué sur les lèvres de la fissure et sont donc indépendants du vecteur de

Burgers. Au même titre que la matrice de raideur, ils sont dits universels. Ils doivent donc être déterminés une fois pour toute et stockés comme pour la matrice de raideur.

II-3 3^{ème} étape : Mise à l'échelle du problème et détermination du facteur d'intensité des contraintes

Supposons que l'on connaisse le champ de contrainte bidimensionnel normal au plan de fissuration et considérons une fissure semi-circulaire de rayon a . Les coordonnées d'un point sont construites à partir d'un repère dont l'origine est précisément le centre de la fissure. La mise à l'échelle consiste alors à remplacer l'association entre les coordonnées d'un point sur la surface fissurée réelle et la valeur du tenseur des contraintes en ce même point, c'est-à-dire $(x, y, z = 0) \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(x, y)$, par l'association $(X = x \cdot \frac{a_0}{a}, Y = y \cdot \frac{a_0}{a}, Z = z = 0) \rightarrow \underline{\underline{\Sigma}}(X, Y) = \underline{\underline{\sigma}}(x, y)$, où (X, Y, Z) constitue le système de coordonnées associé à la fissure (de dimension $a_0 = 1 \text{ mm}$) qui est traitée par la méthode des dislocations distribuées.

Pour calculer le facteur d'intensité des contraintes, il faut au préalable avoir déterminé le vecteur de Burgers en résolvant le système matriciel vu dans l'Annexe 5.

Le facteur d'intensité des contraintes K_{I0} est déterminé au point A du front de fissure à partir des valeurs obtenues sur deux éléments distincts (avec la méthode présentée dans l'Annexe 5) ayant le point A comme nœud commun. K_{I0} est alors pris comme étant égal à la moyenne de ces deux valeurs.

La méthode des courbes maîtresses permet alors de remonter au facteur d'intensité des contraintes associé à la fissure de dimension a analytiquement.

II-4 4^{ème} étape : Détermination des contraintes T^{disloc} et T_Z^{disloc}

Afin de déterminer les contraintes T et T_Z , on utilise les deux fonctions qui suivent :

$$\begin{cases} \Delta_1(x^s, y^s) = \sigma_{yy}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z = 0) - \sigma_{zz}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z = 0) \\ \Delta_2(x^s, y^s) = \sigma_{xx}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z = 0) - \nu \cdot (\sigma_{yy}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z = 0) + \sigma_{zz}^{s \text{ disloc}}(x^s, y^s, z = 0)) \end{cases} \quad (9-6)$$

Les coordonnées associées aux points rouges de la Figure 181 seront notées $(x_{lèvres}^1, y_{lèvres}^1)$ et $(x_{lèvres}^2, y_{lèvres}^2)$. Une première manière de calculer les contraintes T^{disloc} et T_Z^{disloc} consiste à se servir de ces points comme suit :

$$\begin{cases} T^{disloc \text{ lèvres}} = \frac{\Delta_1(x_{lèvres}^1, y_{lèvres}^1) + \Delta_1(x_{lèvres}^2, y_{lèvres}^2)}{2} \\ T_Z^{disloc \text{ lèvres}} = \frac{\Delta_2(x_{lèvres}^1, y_{lèvres}^1) + \Delta_2(x_{lèvres}^2, y_{lèvres}^2)}{2} \end{cases} \quad (9-7)$$

Comme les points rouges sont proches du front de fissure, il y a de fortes chances que les estimations des contraintes T^{disloc} et T_Z^{disloc} par $T^{disloc \text{ lèvres}}$ et $T_Z^{disloc \text{ lèvres}}$ soient correctes (les termes d'ordre supérieur du tenseur de contraintes sont supposés négligeables). Cependant, rien ne le garantit. C'est la raison pour laquelle une deuxième estimation est réalisée en utilisant cette fois les points verts.

Comme cela a été évoqué précédemment, le noyau fondamental de l'intégrale $K_{ij}(x - x', y - y')$ laisse apparaître une singularité en $\frac{1}{r^3}$ (avec $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$). Cette intégrale se calcule sur une surface, donc la singularité finale est en $\frac{1}{r}$. Ainsi, plus le point d'évaluation de la contrainte est proche du front de fissure, plus cette singularité perturbe les champs mécaniques. On propose donc de

tenir compte de cette singularité en postulant que les évolutions des fonctions Δ_1 et Δ_2 peuvent être prédites par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \Delta_1(x^s, y^s) = \alpha_1 \cdot \frac{1}{r} + T^{disloc \ hors \ lèvres} + \beta_1 \cdot \sqrt{r} + \gamma_1 \cdot r \\ \Delta_2(x^s, y^s) = \alpha_2 \cdot \frac{1}{r} + T_Z^{disloc \ hors \ lèvres} + \beta_2 \cdot \sqrt{r} + \gamma_2 \cdot r \\ r = \sqrt{(x^s - x^{front})^2 + (y^s - y^{front})^2} \end{cases} \quad (9-8)$$

où (x^{front}, y^{front}) sont les coordonnées cartésiennes du point du front de fissure retenu (il s'agit de l'intersection du plan normal au front de fissure passant par le point de coordonnées (x^s, y^s)) et α_i , β_i et γ_i sont des coefficients déterminés par moindres carrés par comparaison avec les résultats obtenus par la méthodes des dislocation distribuées, tout comme les quantités $T^{disloc \ hors \ lèvres}$ et $T_Z^{disloc \ hors \ lèvres}$.

Si le critère suivant est respecté, on considère que l'évaluation des contraintes T^{disloc} et T_Z^{disloc} est possible :

$$\begin{cases} Crit_1 = 2 \cdot \frac{|T^{disloc \ hors \ lèvres} - T^{disloc \ lèvres}|}{|T^{disloc \ hors \ lèvres}| + |T^{disloc \ lèvres}|} < 2\% \\ Crit_2 = 2 \cdot \frac{|T_Z^{disloc \ hors \ lèvres} - T_Z^{disloc \ lèvres}|}{|T_Z^{disloc \ hors \ lèvres}| + |T_Z^{disloc \ lèvres}|} < 2\% \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T^{disloc} = \frac{|T^{disloc \ hors \ lèvres} + T^{disloc \ lèvres}|}{2} \\ T_Z^{disloc} = \frac{|T_Z^{disloc \ hors \ lèvres} + T_Z^{disloc \ lèvres}|}{2} \end{cases} \quad (9-9)$$

Dans le cas où le critère précédent ne serait pas respecté, cela pourrait signifier que le gradient de contrainte sur la surface fissurée est trop important pour être suffisamment bien représenté par le maillage 2D des lèvres de la fissure. Dans cette situation, le maillage doit être affiné jusqu'à convergence.

III – Validation de la méthodologie permettant d'engendrer les évolutions des facteurs d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_Z pour différents K_t

III-1 Présentation du modèle numérique

Le modèle de référence est celui d'une fissure semi-circulaire de 1 mm de rayon. Le maillage de la surface fissurée est décomposé en deux région (**Figure 182**). La première, en vert, concerne les éléments quadrangulaires dont les fonctions de forme sont linaires. Dans celle représentée en rouge, les mêmes fonctions de forme sont multipliées par la fonction de poids introduite précédemment. L'épaisseur de cette région représente 2% du rayon de la fissure.

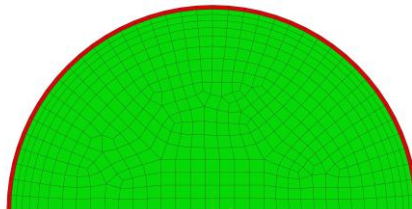


Figure 182 : Maillage de la fissure semi-circulaire utilisée (réalisé sous Abaqus Cae) pour la mise en œuvre de la méthode des dislocations distribuées. Les éléments de couleur rouge sont enrichis avec la fonction de poids.

Quelques détails quantitatifs sur le maillage sont donnés dans le **Tableau 20**.

Tableau 20 : Quelques données concernant le maillage de la fissure semi-circulaire, par des éléments quadrangulaires, utilisée dans la mise en œuvre de la méthode des dislocations distribuées.

Nombre d'éléments enrichis	Nombre total d'éléments	Nombre de nœuds
40	437	472

Tableau 21 : Matrice de simulations numériques proposée à la fois pour un trou elliptique plongé dans un milieu infini et pour une entaille semi-elliptique qui débouche en surface d'un milieu semi-infini.

Facteurs de concentration de contrainte (K_t)	Dimensions du petit-axe horizontal (mm)	Dimensions du rayon de courbure ρ de la zone de concentration de contrainte (mm)	Rayons des fissures semi-circulaires r qui débouchent sur la zone de concentration de contraintes (mm)
2	1	4	$r = \frac{(j+2) \cdot \rho}{10}$, avec $j \in \llbracket 0; 19 \rrbracket$ (*)
3	1	1	(*)
5	1	0,25	(*)

III-2 Validation de la démarche consistant à déterminer les contraintes T^{disloc} et T_Z^{disloc}

La méthodologie permettant la détermination des contraintes T et T_Z par la méthode des dislocations distribuées a été évaluée dans le cas d'un K_t de 3 et d'un demi-petit axe de 1 mm. La **Figure 183** montre une comparaison entre les quantités Δ_1 et Δ_2 obtenues par la technique des dislocations distribuées et par les formules analytiques identifiées par moindres carrés. Ce qui en résulte est une bonne concordance entre les résultats. Or, les formules analytiques permettent d'avoir accès aux contraintes T et T_Z . Ceci suggère que ces quantités peuvent être estimées correctement par le biais de cette approche.

Cette méthode consiste à utiliser le tenseur des contraintes en quelques points au-delà de la surface fissurée (**Figure 181**). Une autre approche consistant en l'utilisation de deux points de colocation au voisinage immédiat du front de fissure, mais à l'intérieur de la surface fissurée a été mentionnée. La comparaison entre les deux approches est représentée sur la **Figure 184** et les déviations entre elles sont faibles. Ceci suggère que la démarche globale pour la détermination des contraintes T et T_Z est robuste.

Cette validation concerne à la fois la démarche, mais également le modèle discrétisé. En effet, si le maillage au voisinage du front de fissure était trop grossier, les deux points de colocation mentionnés précédemment seraient trop loin du front de fissure. Ainsi, des termes d'ordre supérieur du développement asymptotique du tenseur des contraintes interviendraient de manière non-négligeable sur ces points (et potentiellement sur les autres aussi) conduisant à une mauvaise évaluation des contraintes T et T_Z . Cette démarche constitue donc une validation a posteriori du maillage, pour un champ de contrainte appliqué sur la surface fissurée. Un exemple d'ouverture de fissure obtenue par la technique des dislocations distribuées est présente sur la **Figure 185**.

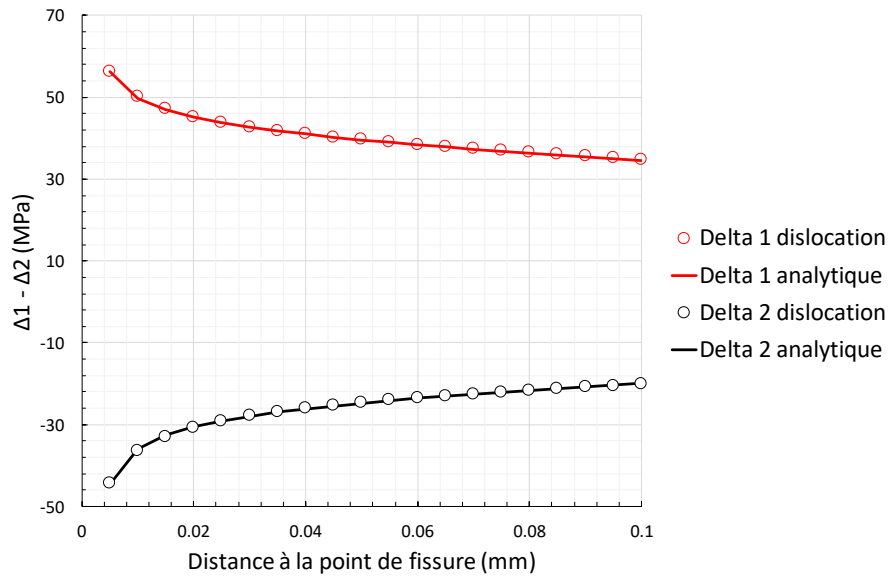


Figure 183 : Comparaison entre les quantités Δ_1 et Δ_2 obtenues par la technique des dislocations distribuées et par les formules analytiques tenant compte de la singularité induite par les intégrales hyper-singulières dans le cas d'un K_I de 3 et d'un demi-petit axe de 1 mm. La distance à la pointe de fissure est déterminée avec la fissure normalisée à 1 mm de rayon utilisée dans les calculs avec la technique des dislocations distribuées.

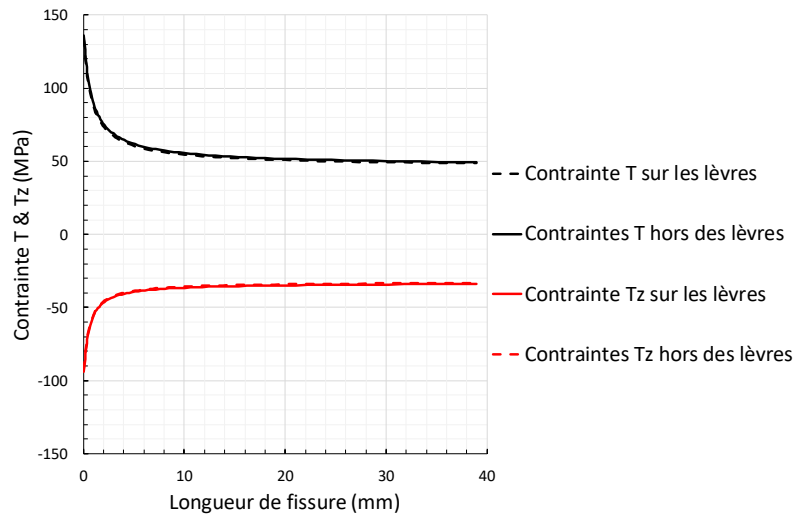


Figure 184 : Comparaison entre les deux méthodes de détermination des contraintes T et T_z le cas d'un K_I de 3 et d'un demi-petit axe de 1 mm.

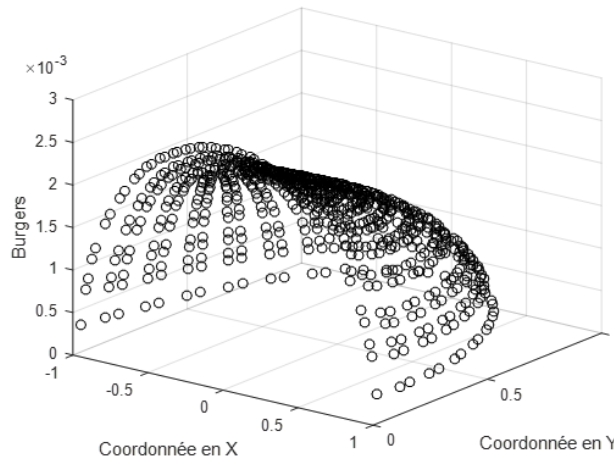


Figure 185 : Ouverture de fissure obtenue par la technique des dislocations distribuées (rapportée à un rayon de fissure de 1 mm) dans le cas d'un K_t de 3 et d'un demi-petit axe de 1 mm.

III-3 Analyse des résultats obtenus sur le facteur d'intensité des contraintes et des contraintes T et T_z dans le cas d'un K_t débouchant en surface

La **Figure 186** présente le facteur d'intensité des contraintes normalisé pour différents K_t et prédit. La technique des dislocations distribuées conduit à une bonne concordance avec les éléments finis, tant que la dimension de fissure reste petite devant l'échelle caractéristique de la concentration de contraintes. Cela se comprend au vu des hypothèses considérées. En effet, cette méthode s'appuie sur l'hypothèse que le milieu est soit infini, soit semi-infini pour produire une résolution semi-analytique du problème. Tant que la fissure est petite devant le rayon de courbure de la concentration de contraintes, le milieu peut effectivement être approximé par un milieu semi-infini, mais dès que la fissure atteint une certaine dimension cette hypothèse ne tient plus. Cette comparaison des résultats valide donc l'emploi de la méthode des dislocations distribuées pour des dimensions de fissures petites devant l'échelle caractéristique du milieu macroscopique considéré.

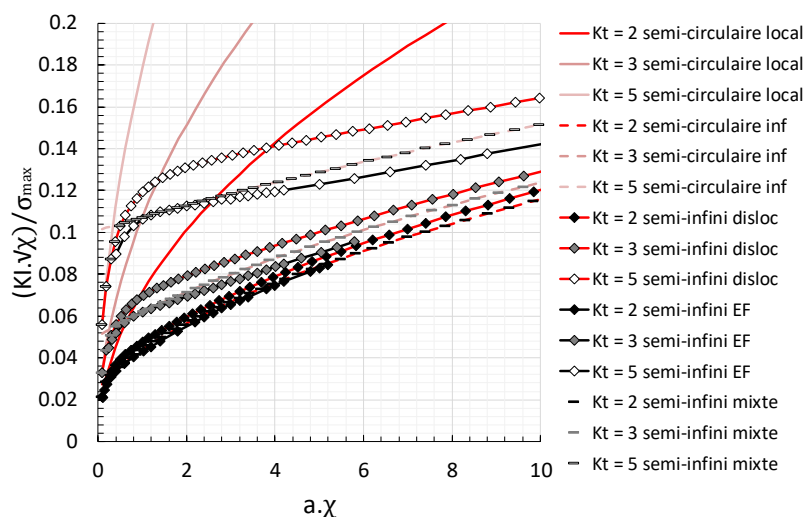


Figure 186 : Comparaisons des facteurs d'intensité des contraintes normalisés pour différents K_t obtenus par éléments finis, la méthode des dislocations distribuées, par formules analytiques locales et asymptotique et par une méthode mixte.

Les courbes en traits pleins correspondent à un milieu semi-infini en traction pure homogène spatialement multiplié par le K_I . La méthode des dislocations distribuées ainsi que la méthode des éléments finis sont toutes deux compatibles avec ce comportement local asymptotique, ce qui était attendu.

Dans la sous-section §IV.3.2.2, une discussion sur le comportement asymptotique des fissures longues relativement à l'échelle caractéristique de la concentration de contraintes a été faite en s'appuyant sur les données de la littérature. La démarche consiste à utiliser une expression du facteur d'intensité des contraintes dans un milieu semi-infini soumis à une contrainte homogène, mais en considérant une longueur de fissure augmentée par une dimension caractéristique de la concentration de contraintes. Les courbes associées à ces comportements asymptotiques non-locaux sont représentées sur la figure précédente en pointillés. La comparaison entre ces courbes et les prédictions faites par la technique des dislocations distribuées montre que les formules asymptotiques non-locales représentent mieux le comportement observé par éléments finis.

On définit dans la suite la quantité suivante :

$$\text{Rapp}(K_I^{\text{non-local}}, K_I^{\text{disloc}}) = \begin{cases} \frac{K_I^{\text{non-local}}}{K_I^{\text{disloc}}}, & \text{si } K_I^{\text{disloc}} > K_I^{\text{non-local}} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (9-10)$$

où $K_I^{\text{non-local}}$ et K_I^{disloc} sont, respectivement, les facteurs d'intensité des contraintes obtenus par la formule asymptotique non-locale et par la méthode des dislocations distribuées.

On appelle méthode mixte, la méthode consistant à déterminer le facteur d'intensité des contraintes comme suit :

$$K_I^{\text{mixte}} = K_I^{\text{disloc}} \cdot \text{Rapp}(K_I^{\text{non-local}}, K_I^{\text{disloc}}) \quad (9-11)$$

Cette construction donne de bons résultats mais semble très empirique, ce qui se confirme lorsque l'on s'intéresse à la contrainte T . Comme mentionné précédemment, les contraintes T et T_Z évaluées par la technique des dislocations distribuées s'obtiennent ainsi :

$$\begin{cases} T = T^{\text{disloc}} + T^{\text{continu}} \\ T_Z = T_Z^{\text{disloc}} + T_Z^{\text{continu}} \end{cases} \quad (9-12)$$

Avec la méthode mixte, les formules deviennent :

$$\begin{cases} T = T^{\text{disloc}} \cdot \text{Rapp}(K_I^{\text{non-local}}, K_I^{\text{disloc}}) + T^{\text{continu}} \\ T_Z = T_Z^{\text{disloc}} \cdot \text{Rapp}(K_I^{\text{non-local}}, K_I^{\text{disloc}}) + T_Z^{\text{continu}} \end{cases} \quad (9-13)$$

La **Figure 187** compare les résultats obtenus par éléments finis pour la contrainte T et pour différents K_I avec ceux obtenus par la technique des dislocations distribuées et par la méthode mixte. Les écarts semblent assez élevés lorsque la dimension de fissure n'est plus petite devant l'échelle caractéristique de la concentration de contraintes. La méthode mixte parvient à réduire les écarts, mais de très peu. L'explication la plus probable de ces résultats serait que la contrainte T est plus sensible que le facteur d'intensité des contraintes aux détails géométriques de la concentration de contraintes qui ne peuvent pas être prédits à l'aide de la technique des dislocation distribuées. Néanmoins, lorsque la dimension de la fissure est faible devant l'échelle caractéristique de la concentration de contraintes, les contraintes T obtenues par éléments finis et par la technique des dislocations distribuées devraient converger. Or, ce n'est pas le cas ici. Plusieurs sources d'erreurs peuvent intervenir. Par exemple, la référence adoptée est la méthode des éléments finis. Est-on sûr que la technique d'extraction de la contrainte T utilisée soit suffisamment précise dans le cas des chargements complexes induits par la présence de concentrations de contraintes ? Ce que l'on considère comme référence en est-elle vraiment une ? Il se pourrait aussi

que l'approche consistant à déterminer la contrainte T par la technique des dislocations distribuées ne soit pas totalement sous contrôle, malgré les précautions qui ont été prises. Cependant, les pentes observées pour les « petites » fissures semblent identiques, ce qui révèle que malgré tout, le comportement global est bien modélisé, ainsi que son ordre de grandeur dans ce régime.

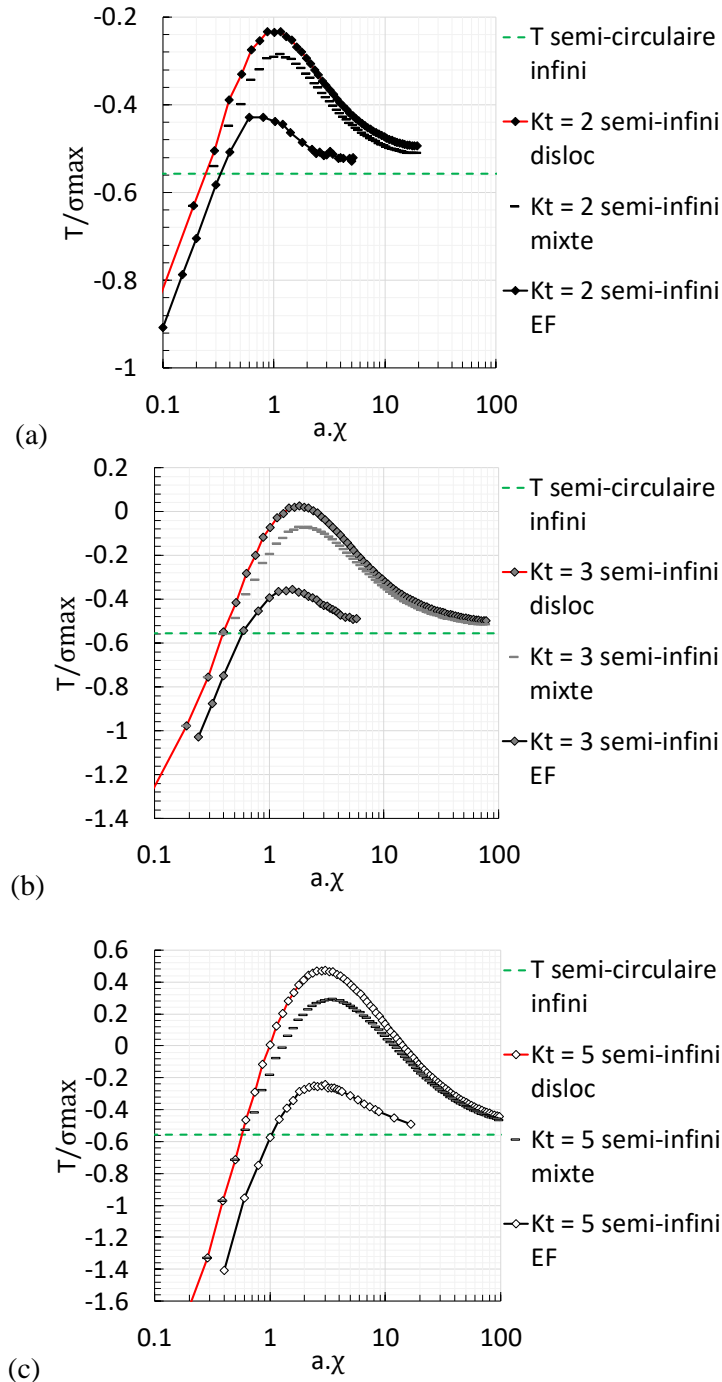


Figure 187 : Comparaisons entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis, la technique des dislocations distribuées et la méthode mixte sur la contrainte T et pour différents K_t :

(a) $K_t = 2$,

(b) $K_t = 3$,

(c) $K_t = 5$.

Concernant la contrainte T_z , les écarts entre éléments finis et technique des dislocations distribuées sont plus faibles. La méthode mixte permet de réduire les écarts sensiblement, cette fois. Dans le régime des « petites » fissures comparativement à la dimension caractéristique de la concentration de contraintes, la méthode des dislocations distribuées conduit à des résultats similaires à ceux des éléments finis contrairement, à ce qui est observé pour la contrainte T .

La démarche de détermination des contraintes T et T_z par l'emploi des fonction Δ_1 et Δ_2 semble assez robuste. Si la méthode des dislocations distribuées n'était pas apte à déterminer la contrainte T elle ne le serait pas non plus pour la contrainte T_z . Or ce n'est pas le cas, comme on vient de le voir. La source des écarts sur la contrainte T serait donc liée à la méthode de post-traitement des champs de déplacement éléments finis qui a été utilisée dans le cadre de ce travail. En effet, contrairement à la contrainte T , la contrainte T_z est un terme supplémentaire 3D qui est ajouté aux solutions asymptotiques des champs mécaniques en déformations planes au voisinage de la pointe de fissure. Le fait que la contrainte T soit noyée parmi une infinité de termes en déformations planes, alors que la contrainte T_z est un terme 3D faisant partie d'un ensemble très petit en nombre conduit à une extraction plus simple et précise de la contrainte T_z comparativement à la contrainte T .

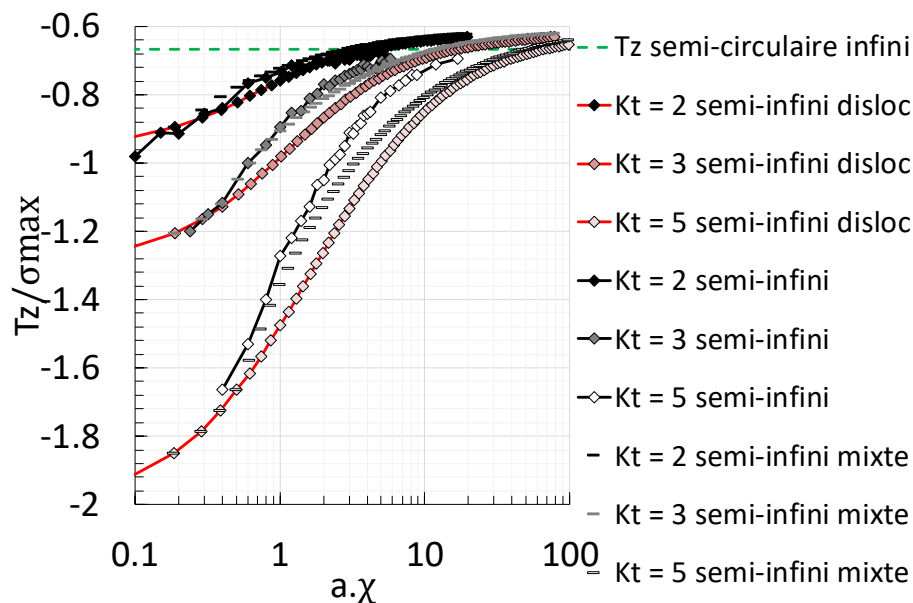


Figure 188 : Comparaisons entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis, la technique des dislocations distribuées et la méthode mixte sur la contrainte TZ et pour différents Kt .

Annexe 10 Décomposition POD accélérée

La recherche d'une décomposition orthogonale d'un champ passe par la résolution du problème suivant :

Trouver les modes $\underline{\psi}_i$ deux à deux orthogonaux (au sens de la norme euclidienne) solution du problème d'optimisation suivant :

$$\max_{\substack{(\underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_T), \underline{\psi}_i \in \mathbb{R}^{2 \cdot N} \\ \{\underline{\psi}_i, \underline{\psi}_j\} = \delta_{ij}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq T}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^T \langle \underline{V}_k, \underline{\psi}_i \rangle^2 \right) \quad (10-1)$$

où \underline{V}_k est le vecteur champ de déplacement nodal à l'instant $t=T_k$.

En notant \underline{X} (de dimension $n \times m$) la matrice dont les colonnes sont les vecteurs \underline{V}_k et en posant $\underline{C} = \underline{X} \cdot \underline{X}^T$ (matrice de corrélation spatiale de dimension $n \times n$) le problème se réécrit :

$$\max_{\substack{(\underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_T), \underline{\psi}_i \in \mathbb{R}^{2 \cdot N} \\ \{\underline{\psi}_i, \underline{\psi}_j\} = \delta_{ij}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq T}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^T (\underline{\psi}_i)^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\psi}_i \right) \quad (10-2)$$

En pratique la matrice de corrélation spatiale est de dimension très élevée. En effet, sa dimension est le carré du nombre de degré de liberté spatiaux du problème, sachant que ce dernier peut allègrement dépasser 10000. Ceci peut poser quelques soucis lorsque l'ordinateur ne possède pas suffisamment de mémoire vive. De plus de tels calculs peuvent s'avérer être extrêmement longs.

Une méthode alternative consiste non pas à utiliser la matrice de corrélation spatiale, mais plutôt la matrice de corrélation temporelle $\underline{C}' = \underline{X}^T \cdot \underline{X}$ de dimension $(m \times m)$ de plus faible dimension (et de loin). Le théorème de décomposition singulière établit qu'il existe une matrice \underline{U} de dimension $n \times n$ dont les colonnes sont les vecteurs $\underline{\psi}_i$ tel que $\underline{U}^T \cdot \underline{U} = \underline{I}$, une matrice \underline{V} de dimension $m \times m$ dont les colonnes seront notées $\underline{\phi}_i$ tel que $\underline{V}^T \cdot \underline{V} = \underline{I}$ et une matrice \underline{D} de dimension $n \times m$ de la forme suivante :

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \sigma_m \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (10-3)$$

telles que :

$$\underline{X} = \underline{U} \cdot \underline{D} \cdot \underline{V}^T \quad (10-4)$$

On pose $\underline{D}' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et on en déduit les relations suivantes :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}}^T = \underline{\underline{U}} \cdot \begin{pmatrix} (\underline{\underline{D}}')^2 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{U}}^T \quad (10-5)$$

$$\underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{V}} \cdot (\underline{\underline{D}}')^2 \cdot \underline{\underline{V}}^T \quad (10-6)$$

Les deux matrices de corrélation ont en commun les m valeurs propres définies par $\lambda_k = (\sigma_k)^2$ et en utilisant la relation $\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}$ on en déduit la relation entre les vecteurs propres des deux matrices de corrélation :

$$\underline{\underline{\psi}}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{i=1}^m (\underline{\underline{\Phi}}_k)_i \cdot \underline{\underline{V}}_i \quad (10-7)$$

Bibliographie

- (Amargier, 2011) Amargier, R. (2011). *Amorçage de fissures et gradient de contrainte en fretting et en fatigue*. Thèse de doctorat Ecole Centrale de Lyon.
- (Ammeri, 2009) Ammeri, A. (2009). *Contribution à l'étude expérimentale et numérique du comportement d'un limon sollicité en traction : Approche par éléments discrets*. Thèse de doctorat Université Joseph Fourier de Grenoble & Ecole Nationale d'Ingénieur de Tunis.
- (ASTM E647, 2015) ASTM E647-15e1 . (2015). Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates. West Conshohocken: ASTM International. doi:10.1520/E0647-15E01
- (Ayatollahi & Bagherifard, 2009) Ayatollahi, M. R., & Bagherifard, S. (2009). Numerical analysis of an improved DCDC specimen for investigating mixed mode fracture in ceramic materials. *Computational Materials Science*, 46(1), 180-185.
- (Azzouz et al., 2010) Azzouz, F., Cailletaud, G., Chaboche, J. L., Ostoja-Kuczynski, E., & Quilici, S. (2010). Cyclic calculations and life estimation in thermomechanical fatigue. *9th International conference on multiaxial fatigue and fracture*, (pp. 785-793).
- (Bannantine, 1989) Bannantine, J. (1989). *A variable amplitude fatigue life prediction method*. PhD thesis University of Illinois.
- (Bannantine & Socie, 1991) Bannantine, J., & Socie, D. (1991). A variable amplitude multiaxial fatigue life prediction method. Dans K. F. Kussmaul, D. L. McDiarmid, & D. F. Socie (Éd.), *Fatigue Under Biaxial and Multiaxial Loading* (pp. 35-51). London: ESIS Publication.
- (Banvillet et al., 2003) Banvillet, A., Palin-Luc, T., & Lasserre, S. (2003). A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion. *International journal of fatigue*, 25(8), 755-769.
- (Barbier, 2009) Barbier, G. (2009). *Fatigue biaxiale à grand nombre de cycles : étude expérimentale et endommagement à deux échelles probabiliste*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Bathias & Paris, 2004) Bathias, C., & Paris, P. C. (2004). *Gigacycle fatigue in mechanical practice*. CRC Press.
- (Bathias et al., 1997) Bathias, C., El Alami, K., & Wu, T. Y. (1997). Influence of mean stress on Ti-6Al-4V fatigue crack growth at very high frequency. *Engineering fracture mechanics*, 56(2), 255-264.
- (Besson et al., 2001) Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., & Forest, S. (2001). *Mécanique non-linéaire des matériaux*. Hermes.
- (Billaudeau et al., 2004) Billaudeau, T., Nadot, Y., & Bezine, G. (2004). Multiaxial fatigue limit for defective materials: mechanisms and experiments. *Acta Materialia*, 52(13), 3911-3920.
- (Bin et al., 2000) Bin, L., Santos, J. L., & de Freitas, M. (2000). A Unified Numerical Approach for Multiaxial Fatigue Limit Evaluation. *Mechanics of Structures and Machine*, 28(1), 85-103. doi:https://doi.org/10.1081/SME-100100613
- (Blanche, 2012) Blanche, A. (2012). *Effets dissipatifs en fatigue à grand et très grand nombre de cycles*. Thèse de doctorat Université de Montpellier II.

- (Bonnand et al., 2011) Bonnand, V., Chaboche, J.-L., Gomez, P., Kanouté, P., & Pacou, D. (2011). Investigation of multiaxial fatigue in the context of turboengine disc applications. *International Journal of Fatigue*, 33(8), 1006-1016.
- (Bonnet & Edeline, 2007) Bonnet, M., & Edeline, G. (2007). Nouvelle méthode semi-analytique pour exprimer les champs auxiliaires des intégrales d'interactions. *Congrès français de mécanique*. Courbevoie: AFM, Maison de la Mécanique.
- (Boyce & Ritchie, 2001) Boyce, B. L., & Ritchie, R. O. (2001). Effect of load ratio and maximum stress intensity on the fatigue threshold in Ti-6Al-4V. *Engineering Fracture Mechanics*, 68(2), 129-147.
- (Brown & Miller, 1973) Brown, M. W., & Miller, K. J. (1973). A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 187(1), 745-755.
- (Brugier, 2017) Brugier, K. (2017). *Modèle condensé de plasticité pour la fissuration et influence de la contrainte T*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure Paris Saclay.
- (Bueckner, 1970) Bueckner, H. F. (1970). Novel principle for the computation of stress intensity factors. *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik & Mechanik*, 50(9).
- (Byrne et al., 2003) Byrne, J., Hall, R. F., & Powell, B. E. (2003). Influence of LCF overloads on combined HCF/LCF crack growth. *International Journal of Fatigue*, 25(9-11), 827-834.
- (Caignot, 2009) Caignot, A. (2009). *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Calloch et al., 2010) Calloch, S., Doudard, C., Hild, F., Poncelet, M., Weber, B., & Galtier, A. (2010). Dialogue essais-modèle pour l'interprétation des liens entre mesure d'auto-échauffement sous chargement cyclique et fatigue polycyclique. *Revue de Métallurgie-International Journal of Metallurgy*, 107(2-3), 75-82.
- (Campbell & Ritchie, 2000) Campbell, J. P., & Ritchie, R. O. (2000). Mixed-mode, high-cycle fatigue-crack growth thresholds in Ti-6Al-4V: I. A comparison of large-and short-crack behavior. *Engineering Fracture Mechanics*, 67(3), 209-227.
- (Carneiro, 1943) Carneiro, F. L. L. B. (1943). A new method to determine the tensile strength of concrete. *Proceedings of the 5th meeting of the Brazilian Association for Technical Rules*, (pp. 126-129).
- (Chaboche & Jung, 1997) Chaboche, J.-L., & Jung, O. (1997). Application of a kinematic hardening viscoplasticity model with thresholds to the residual stress relaxation. *International Journal of Plasticity*, 13(10), 785-807.
- (Chretien et al. 2016) Chretien, G., Sarrazin-Baudoux, C., Leost, L., & Hervier, Z. (2016). Near-threshold fatigue propagation of physically short and long cracks in Titanium alloy. *Procedia Structural Integrity*, 2, 950-957.
- (Cottrell & Hull, 1957) Cottrell, A. H., & Hull, D. (1957). Extrusion and intrusion by cyclic slip in copper. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 242(1229), 211-213.
- (Crossland, 1956) Crossland, B. (1956). Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. Dans D. Li, & D. Pugh (Éd.), *Proceeding of the International Conference on Fatigue of Metals*. 138, pp. 138-149. London: Elsevier Publishing Company.

- (Crossland, 1970) Crossland, B. (1970). The effect of pressure on the fatigue of metals. Dans D. Li, & D. Pugh (Éd.), *Proceeding of the International Conference on Fatigue of Metals* (pp. 299-354). London: Elsevier Publishing Company.
- (Dai et al., 1993) Dai, D. N., Nowell, D., & Hills, D. A. (1993). Eigenstrain methods in three-dimensional crack problems: an alternative integration procedure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(6), 1003-1017.
- (Dang Van, 1973) Dang Van, K. (1973). Sur la résistance à la fatigue des métaux. *Sciences et Techniques de l'Armement*(47, 3ème fascicule), 641-722.
- (Dang Van et al., 1989) Dang Van, K., Griveau, B., & Message, O. (1989). On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and application. Dans M. B. Brown, & K. J. Miller (Éd.), *Biaxial and Multiaxial Fatigue, EGF 3* (pp. 479-496). London: Mechanical Engineering Publications.
- (de Moura Pinho et al., 2012) de Moura Pinho, R., Pommier, S., Mary, C., Longuet, A., & Vogel, F. (2012). A novel methodology to predict the endurance domain for a material and its evolution using a generalized fracture mechanics framework. *International Journal of Fatigue*, 42, 183-193.
- (Decreuse et al., 2009) Decreuse, P.-Y., Pommier, S., Gentot, L., & Pattofatto, S. (2009). History effect in fatigue crack growth under mixed-mode loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 31(10-12), 1733-1741.
- (Delahay, 2004) Delahay, T. (2004). *Développement d'une méthode probabiliste de calcul en fatigue multiaxiale prenant en compte la répartition volumique des contraintes*. Thèse de doctorat Université de Bordeaux I.
- (Deperrois, 1991) Deperrois, A. (1991). *Sur le calcul de limites d'endurance des aciers*. Thèse de doctorat Ecole Polytechnique.
- (Desmorat et al., 2007) Desmorat, R., Kane, A., Seyedi, M., & Sermage, J. P. (2007). Two scale damage model and related numerical issues for thermo-mechanical high cycle fatigue. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 26(6), pp. 909-935.
- (Ding et al., 2005) Ding, J., Hall, R., & Byrne, J. (2005). Effects of stress ratio and temperature on fatigue crack growth in a Ti-6Al-4V alloy. *International Journal of Fatigue*, 27(10-12), 1551-1558.
- (Ding et al., 2009) Ding, Y. S., Tsay, L. W., & Chen, C. (2009). The effects of hydrogen on fatigue crack growth behaviour of Ti-6Al-4V and Ti-4.5 Al-3V-2Mo-2Fe alloys. *Corrosion Science*, 51(6), 1413-1419.
- (Doquet & De Greef, 2012) Doquet, V., & De Greef, V. (2012). Dwell-fatigue of a titanium alloy at room temperature under uniaxial or biaxial tension. *International Journal of Fatigue*, 38, 118-129.
- (Doquet et al., 2013) Doquet, V., Ali, N. B., Constantinescu, A., & Boutillon, X. (2013). Fracture of a borosilicate glass under triaxial tension. *Mechanics of materials*, 57, 15-29.
- (Doudard, 2004) Doudard, C. (2004). *Détermination rapide des propriétés en fatigue à grand nombre de cycles à partir d'essais d'échauffement*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.

- (Duó et al., 2005) Duó, P., Nowell, D., Oakley, S. Y., Petrinic, N., & Schofield, J. (2005). Prediction and experimental validation of fatigue strength following foreign object damage. *Evaluation, Control and Symposium on Prevention of High Cycle Fatigue in Gas Turbine Engines for Land, Sea, and Air Vehicles*.
- (El Haddad et al., 1980) El Haddad, M. H., Dowling, N. E., Topper, T. H., & Smith, K. N. (1980). J integral applications for short fatigue cracks at notches. *International Journal of Fracture*, 16(1), 15-30. doi:<https://doi.org/10.1007/BF00042383>
- (Elber, 1970) Elber, W. (1970). Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, 2(1), 37-45.
- (Elber, 1971) Elber, W. (1971). The significance of fatigue crack closure. *Damage tolerance in aircraft structures*. ASTM International.
- (Endo & McEvily, 2006) Endo, M., & McEvily, A. J. (2006). The growth of short cracks from defects under multi-axial loading. Dans E. E. Gdoutos (Éd.), *Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures* (pp. 1219-1220). Dordrecht: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/1-4020-4972-2_605
- (Endo & McEvily, 2007) Endo, M., & McEvily, A. J. (2007). Prediction of the behavior of small fatigue cracks. *Materials Science and Engineering: A*, 468-470, 51-58. doi:<https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.09.084>
- (Endo & McEvily, 2011) Endo, M., & McEvily, A. J. (2011). Fatigue crack growth from small defects under out-of-phase combined loading. *Engineering fracture mechanics*, 78(8), 1529-1541.
- (Fatemi & Socie, 1988) Fatemi, A., & Socie, D. F. (1988). A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 11(3), 149-165.
- (Fatemi & Yang, 1998) Fatemi, A., & Yang, L. (1998). Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International journal of fatigue*, 20(1), 9-34.
- (Fenner et al., 1951) Fenner, A. J., Owen, N. B., & Philips, C. E. (1951). A note on the fatigue crack regarded as a stress raiser. *Engineering*, 171(4452), 163-63.
- (Fett, 1998) Fett, T. (1998). *A compendium of T-stress solutions*. Forschungszentrum Karlsruhe.
- (Fett et al., 2005) Fett, T., Rizzi, G., & Munz, D. (2005). T-stress solution for DCDC specimens. *Engineering fracture mechanics*, 72(1), 145-149.
- (Fett et al., 2009) Fett, T., Rizzi, G., Guin, J. P., López-Cepero, J. M., & Wiederhorn, S. M. (2009). A fracture mechanics analysis of the double cleavage drilled compression test specimen. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(7), 921-934.
- (Filippini, 2000) Filippini, M. (2000). Stress gradient calculations at notches. *International Journal of Fatigue*, 22(5), 397-409.
- (Fleck & Newman, 1988) Fleck, N., & Newman, J. (1988). Analysis of crack closure under plane strain conditions, mechanics of fatigue crack closure. *Mechanics of fatigue crack closure* (pp. 319-341). ASTM International.

- (Fogue, 1987) Fogue, M. (1987). *Critère de fatigue à longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoïdales en phase et hors phase*. Thèse de doctorat Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon.
- (Fogue & Bahuaud, 1985) Fogue, M., & Bahuaud, J. (1985). Fatigue multiaxiale a durée de vie illimitée. *7eme Congres Français de Mécanique*, (pp. 30-31). Bordeaux.
- (Forsyth & Mott, 1957) Forsyth, P. J., & Mott, N. F. (1957). Slip-band damage and extrusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 242, 198-202. doi:https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0168
- (Fouvry et al., 2004) Fouvry, S., Duo, P., & Perruchaut, P. (2004). A quantitative approach of Ti-6Al-4V fretting damage: friction, wear and crack nucleation. *Wear*, 257(9-10), 916-929.
- (Fremy, 2012) Fremy, F. (2012). *Fissuration par fatigue en mode mixte I+II+III non-proportionnel dans l'acier 316L. Approche expérimentale et modélisation des effets de la plasticité*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Freudenthal, 1968) Freudenthal, A. M. (1968). Statistical approach to brittle fracture. Dans H. Liebowitz (Éd.), *Fracture*. 2, pp. 592-619. New-york: Academic Press.
- (Frost, 1957) Frost, N. E. (1957). Non-propagating cracks in V-notched specimens subject to fatigue loading. *The aeronautical quarterly*, 8(1), 1-20.
- (Frost & Dugdale, 1957) Frost, N. E., & Dugdale, D. S. (1957). Fatigue tests on notched mild steel plates with measurements of fatigue cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 5(3), 182-192.
- (Froustey et al., 1992) Froustey, C., Lasserre, S., & Dubar, L. (1992). Validité des critères de fatigue multiaxiale à l'endurance en flexion-torsion. *Mat-Tech*, 92, pp. 79-82.
- (Gaborit, 2015) Gaborit, P. (2015) *Unification des modèles d'endommagement de type Lemaitre, pour la fatigue LCF/HCF, multiaxiale et aléatoire*. Thèse de doctorat Ecole Centrale Paris.
- (Gao et al., 2007) Gao, N., Brown, M., Miller, K., & Reed, P. (2007). An effective method to investigate short crack next term growth behavior by reverse bending testing. *International Journal of Fatigue*, 29, 565-574.
- (Gerber, 1974) Gerber, W. Z. (1874). Calculation of the allowable stresses in iron structures. *Z. Bayer Archit. Ing. Ver*, 6(6), 101-110.
- (Glinka et al., 1995) Glinka, G., Wang, G., & Plumtree, A. (1995). A. Mean stress effects in multiaxial fatigue. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 18(7-8), 755-764.
- (Goecke & Moshier, 2002) Goecke, K. E., & Moshier, M. A. (2002). A technique to measure fatigue crack growth threshold. *Experimental mechanics*, 42(2), 182-185.
- (Gonçalves et al., 2005) Gonçalves, C. A., Araujo, J. A., & Namiya, A. N. (2005). Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue*, 27(2), 177-187.
- (Goodman, 1899) Goodman, J. (1899). *Mechanics applied to engineering*. London: Longmans, Green and Co.
- (Gough & Sopwith, 1932) Gough, H. J., & Sopwith, D. G. (1932). Atmospheric action as a factor in fatigue of metals. *Journal of the Institute of Metals*, 49, 93-122.

- (Gough & Sopwith, 1935) Gough, H. J., & Sopwith, D. G. (1935). Some further experiments on atmospheric action in fatigue. *Journal of the Institute of Metals*, 56, 55-89.
- (Gough & Sopwith, 1946) Gough, H. J., & Sopwith, D. G. (1946). Inert atmospheres as fatigue environments. *Journal of the Institute of Metals*, 72, 415-421.
- (Gough et al., 1951) Gough, H. J., Pollard, H. V., & Clenshaw, W. J. (1951). Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stress. *Aeronautical Research Council, His Majesty's Stationary Office*. London.
- (Grübisic & Simbürger, 1976) Grübisic, V., & Simbürger, A. (1976). Fatigue under combined out-of-phase multiaxial stresses. *Fatigue Testing and Design 2, Proceedings of SEE International Conference*, 5, pp. 27.1-27.8.
- (Guo et al., 2011) Guo, J. H., Yuan, Z. S., & Lu, Z. X. (2011). General solutions of plane problem for power function curved cracks. *Applied Mathematics and Mechanics*, 32(5), 563-570.
- (Hamam, 2006) Hamam, R. (2006). *Simulation de la propagation des fissures dans les toiles des roues de train sous chargement à amplitude variable*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Hansson & Thölen, 1978) Hansson, I., & Thölen, A. (1978). Plasticity due to superimposed macrosonic and static strains. *Ultrasonics*, 16(2), 57-64.
- (Hardie & Ouyang, 1999) Hardie, D., & Ouyang, S. (1999). Effect of hydrogen and strain rate upon the ductility of mill-annealed Ti6Al4V. *Corrosion science*, 41(1), 155-177.
- (Hasselmann, 1976) Hasselmann, T. K. (1976). Modal coupling in lightly damped structures. *AIAA Journal*, 14(11), 1627-1628.
- (He et al., 1995) He, M. Y., Turner, M. R., & Evans, A. G. (1995). Analysis of the double cleavage drilled compression specimen for interface fracture energy measurements over a range of mode mixities. *Acta metallurgica et materialia*, 43(9), 3453-3458.
- (Herman et al., 1988) Herman, W. A., Hertzberg, R. W., & Jaccard, R. (1988). A simplified laboratory approach for the prediction of short crack behavior in engineering structures. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 11(4), 303-320.
- (Hild et al., 1992) Hild, F., Billardon, R., & Marquis, D. (1992). Hétérogénéité des contraintes et rupture des matériaux fragiles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'Univers, Sciences de la Terre*, 315(11), 1293-1298.
- (Hills et al., 1996) Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N., & Korsunsky, A. M. (1996). *Solution of Crack Problems - The Distributed Dislocation Technique*. Netherlands: Springer. doi:10.1007/978-94-015-8648-1
- (Huyen et al., 2008) Huyen, N., Flaceliere, L., & Morel, F. (2008). A critical plane fatigue model with coupled meso-plasticity and damage. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 31(1), 12-28.
- (Idonije et al., 1993) Idonije, K., Motuku, M., Shehata, I., & Aglan, H. (1993). Evaluation of the stress intensity factor of brittle polymers based on the crack arrest concept. *Journal of reinforced plastics and composites*, 12(7), 778-786.

- (Irwin, 1960) Irwin, G. R. (1960). Plastic zone near a crack and fracture toughness. Dans W. A. Backofen (Éd.), *Seventh Sagamore Ordnance Materials Conference. IV*, pp. 63-78. New York: Syracuse University.
- (Janssen, 1974) Janssen, C. (1974). Specimen for fracture mechanics studies on glass. *Proceedings of the 10th International Congress on Glass* (pp. 10.23–10.30). Tokyo: Ceramic Society of Japan.
- (Jasper, 1923) Jasper, T. M. (1923). The value of the energy relation in the testing of ferrous metals at varying ranges of stress and at intermediate and high temperatures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 46(274), 609-627. doi:https://doi.org/10.1080/14786442308634287
- (Kfourri, 1986) Kfourri, A. (1986). Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby's method. *International Journal of Fracture*, 30(4), 301-315.
- (Kitagawa & Takahashi, 1976) Kitagawa, H., & Takahashi, S. (1976). Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the cracks in the early stage. *Proceeding 2nd Int. Conf. On Mech., Behavior of Materials (ICM – II)*, (pp. 627-631). Boston.
- (Kromp et al., 1973) Kromp, W., Kromp, K., Weiss, B., Bitt, H., & Langer, H. (1973). Techniques and equipment for ultrasonic fatigue testing. *Proceeding of the Ultrasonics International Conference*, (pp. 238-243).
- (Kuguel, 1961) Kuguel, R. (1961). A relation between theoretical stress concentration factor and fatigue notch factor deduced from the concept of highly stressed volume. *ASTM*, 61, pp. 732-748.
- (Łagoda et al., 1999) Łagoda, T., Macha, E., & Bedkowski, W. (1999). A critical plane approach based on energy concepts: application to biaxial random tension-compression high-cycle fatigue regime. *International Journal of Fatigue*, 21(5), 431-443.
- (Łagoda et al., 2000) Łagoda, T., Macha, E., Niesłony, A., & Müller, A. (2000). Fatigue life of cast irons GGG40, GGG60 and GTS45 under combined random tension with torsion. *ECF13*. San Sebastian.
- (Laird, 1967) Laird, C. (1967). The influence of metallurgical structure on the mechanisms of fatigue crack propagation. *Fatigue crack propagation, STP 415*, (pp. 131-168). Philadelphia.
- (Lang, 1999) Lang, M. (1999). Explanation of an apparent abnormality in fatigue crack growth rate curves in titanium alloys. *Acta materialia*, 47(11), 3247-3261.
- (Lanning et al., 2005 (1)) Lanning, D. B., Nicholas, T., & Haritos, G. K. (2005). On the use of critical distances theories for the prediction of the high cycle fatigue limit in notched Ti-6Al-4V. *International Journal of Fatigue*, 27, 45-57.
- (Lanning et al., 2005 (2)) Lanning, D. B., Nicholas, T., & Palazotto, A. (2005). The effect of notch geometry on critical distance high cycle fatigue predictions. *International journal of fatigue*, 27(10-12), 1623-1627.
- (Lasserre & Froustey, 1992) Lasserre, S., & Froustey, C. (1992). Multiaxial fatigue of steel-testing out of phase and in blocks: validity and applicability of some criteria. *International journal of fatigue*, 14(2), 113-120.
- (Lazarus, 1997) Lazarus, V. (1997). *Quelques problèmes tridimensionnels de mécanique de la rupture fragile*. Thèse de doctorat de l'université Paris 6.

- (Le Biavant-Guerrier, 2000) Le Biavant-Guerrier, K. (2000). *Etude de l'amorçage de fissures de fatigue dans le Ti-6Al-4V*. Thèse de doctorat Ecole Centrale Paris.
- (Le & Kanninen, 2004) Le, D., & Kanninen, M. (2004). The development of a methodology for quantifying fatigue crack growth in residual stress fields for application to rotorcraft design and maintenance. *ASTM symposium on the residual effects on fatigue and fracture testing and incorporation of results into design*. ASTM proceeding.
- (Leblond & Torlai, 1992) Leblond, J.-B., & Torlai, O. (1992). The stress field near the front of an arbitrarily shaped crack in a three-dimensional elastic body. *Journal of elasticity*, 29(2), 97-131.
- (Lee, 1980) Lee, S. B. (1980). *Evaluation of theories on multiaxial fatigue with discriminating specimens*. PhD thesis Stanford University.
- (Lee, 1989) Lee, S. B. (1989). Out-of-phase combined bending and torsion fatigue of steels. *ICBMFF2*.
- (Lemaître & Chaboche, 1985) Lemaître, J., & Chaboche, J.-L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Paris: Dunod Eds.
- (Lemaître & Doghri, 1994) Lemaître, J., & Doghri, I. (1994). Damage 90: a post processor for crack initiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115(3-4), 197-232.
- (Liu & Duan, 2014) Liu, S., & Duan, S. (2014). Analytical solutions of cracks emanating from an elliptic hole in an infinite plate under tension. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 27(5), 1057-1063.
- (Liu et al., 2015) Liu, X., Sun, C., & Hong, Y. (2015). Effects of stress ratio on high-cycle and very-high-cycle fatigue behavior of a Ti-6Al-4V alloy. *Materials Science and Engineering A*, 622, 228-235. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2014.09.115>
- (Liu & Mahadevan, 2009) Liu, Y., & Mahadevan, S. (2009). Fatigue limit prediction of notched components using short crack growth theory and an asymptotic interpolation method. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(15), 2317-2331.
- (Maillet et al., 2013) Maillet, I., Michel, L., Rico, G., Fressinet, M., & Gourinat, Y. (2013). A new test methodology based on structural resonance for mode I fatigue delamination growth in an unidirectional composite. *Composite Structures*, 97, 353-362.
- (Mall et al., 2003) Mall, S., Nicholas, T., & Park, T. W. (2003). Effect of predamage from low cycle fatigue on high cycle fatigue strength of Ti-6Al-4V. *International Journal of Fatigue*, 25(9-11), 1109-1116.
- (Marigo, 2016) Marigo, J.-J. (2016). *Plasticité et Rupture*. Palaiseau: Cours de l'Ecole Polytechnique. Récupéré sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01374813/document>
- (Marin, 1956) Marin, J. (1956). Interpretation of fatigue strengths for combined stresses. *Proceedings of International Conference on Fatigue of Metals*, (pp. 184-194).
- (Marquis & Socie, 2000) Marquis, G., & Socie, D. (2000). Long-life torsion fatigue with normal mean stress. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 23, 293-300.
- (Mary et al., 2015) Mary, C., Cluzel, C., de Moura Pinho, R., Longuet, A., Pommier, S., & Vogel, F. (2015). *France/Courbevoie Brevet n° FR2995080 B1*.
- (Mathieu et al., 2013) Mathieu, F., Hild, F., & Roux, S. (2013). Image-based identification procedure of a crack propagation law. *Engineering Fracture Mechanics*, 103, 48-59.

- (Matsuoka et al., 1990) Matsuoka, S., Masuda, H., & Shimodaira, M. (1990). Fatigue threshold and low-rate crack propagation properties for structural steels in 3 Pct sodium chloride aqueous solution. *Metallurgical Transactions A*, 21(8), 2189-2199.
- (McEvily et al., 1991) McEvily, A. J., Eifler, D., & Macherauch, E. (1991). An analysis of the growth of short fatigue cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 40(3), 571-584. doi:https://doi.org/10.1016/0013-7944(91)90151-P
- (Mignot et al., 2004) Mignot, F., Doquet, V., & Sarrazin-Baudoux, C. (2004). Contributions of internal hydrogen and room-temperature creep to the abnormal fatigue cracking of Ti6246 at high Kmax. *Materials Science and Engineering: A*, 380(1-2), 308-319.
- (Miller, 1987 (1)) Miller, K. J. (1987). The behavior of short fatigue cracks and their initiation, part I: a review of two recent books. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 10, 75-91.
- (Miller, 1987 (2)) Miller, K. J. (1987). The behavior of short fatigue cracks and their initiation, part II: a general summary. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 10, 93-113.
- (Monchiet et al., 2006) Monchiet, V., Charkaluk, E., & Kondo, D. (2006). Plasticity-damage based micromechanical modelling in high cycle fatigue. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(2), 129-136.
- (Morel, 1996) Morel, F. (1996). *Fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude variable*. Thèse de doctorat Université de Poitiers.
- (Morel, 2000) Morel, F. (2000). A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading. *International Journal of Fatigue*, 22(2), 101-119.
- (Morel et al., 2001) Morel, F., Palin-Luc, T., & Froustey, C. (2001). Comparative study and link between mesoscopic and energetic approaches in high cycle multiaxial fatigue. *International journal of fatigue*, 23(4), 317-327.
- (Morrissey et al., 2003) Morrissey, R. J., Golden, P., & Nicholas, T. (2003). The effect of stress transients on the HCF endurance limit. *International journal of fatigue*, 25(9-11), 1125-1133.
- (Morrissey et al., 1999) Morrissey, R. J., McDowell, D. L., & Nicholas, T. (1999). Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V. *International Journal of Fatigue*, 21(7), 679-685.
- (Moshier et al., 2001) Moshier, M. A., Nicholas, T., & Hillberry, B. M. (2001). Load history effects on fatigue crack growth threshold for Ti-6Al-4V and Ti-17 titanium alloys. *International Journal of Fatigue*, 23, 253-258.
- (Murakami, 2002) Murakami, Y. (2002). *Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions*. Oxford: Elsevier.
- (Murakami et al., 1986) Murakami, Y., & Endo, M. (1986). Effects of hardness and crack geometries on ΔK_{th} of small cracks emanating from small defects. Dans K. J. Miller, & E. R. de los Rios (Éd.), *The Behaviour of Short Fatigue Crack*, EGF (pp. 275-293). London: Mechanical Engineering Publications.
- (Murakami & Matsunaga, 2000) Murakami, Y., & Matsunaga, H. (2000). The effect of hydrogen on fatigue properties of steels used for fuel cell system. *International Journal of Fatigue*, 28, 1509-1520.

- (Murakami et al., 1989) Murakami, Y., Kodama, S., & Konuma, S. (1989). Quantitative evaluation of effects of non-metallic inclusions on fatigue strength of high strength steels. I: Basic fatigue mechanism and evaluation of correlation between the fatigue fracture stress and the size and location of non-metallic inclusions. *International Journal of Fatigue*, 11(5), 291-298. doi:[https://doi.org/10.1016/0142-1123\(89\)90054-6](https://doi.org/10.1016/0142-1123(89)90054-6)
- (Murakami et al., 2000 (1)) Murakami, Y., Nomoto, T., & Ueda, T. (2000). On the mechanism of fatigue failure in the superlong life regime ($N > 10^7$ cycles). Part I: Influence of Hydrogen trapped by inclusions. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 23(11), 893-902.
- (Murakami et al., 2000 (2)) Murakami, Y., Nomoto, T., & Ueda, T. (2000). On the mechanism of fatigue failure in the superlong life regime ($N > 10^7$ cycles). Part II: A fractographic investigation. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 23(11), 903-910.
- (Nadot & Billaudeau, 2006) Nadot, Y., & Billaudeau, T. (2006). Multiaxial fatigue limit criterion for defective materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(1), 112-133.
- (Naik et al., 2005) Naik, R. A., Lanning, D. B., Nicholas, T., & Kallmeyer, A. R. (2005). A critical plane gradient approach for the prediction of notched HCF life. *International Journal of Fatigue*, 27(5), 481-492.
- (Nemat-Nasser et al., 2001) Nemat-Nasser, S., Guo, W.-G., Nesterenko, V. F., Indrakanti, S., & Gu, Y. B. (2001). Dynamic response of conventional and hot isostatically pressed Ti-6Al-4V alloys: experiments and modeling. *Mechanics of Materials*, 33(8), 425-439.
- (Neumann, 1969) Neumann, P. (1969). Coarse slip model of fatigue. *Acta metallurgica*, 17(9), 1219-1225.
- (Newman Jr & Raju, 1981) Newman Jr, J. C., & Raju, I. S. (1981). An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. *Engineering Fracture Mechanics*, 15(1-2), 185-192. doi:[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(81\)90116-8](https://doi.org/10.1016/0013-7944(81)90116-8)
- (Newman, 1992) Newman, J. C. (1992). *COSMIC, Fastran II – A fatigue crack growth structural analysis program*. NASA Technical Memorandum 104159, Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- (Nicholas, 2002) Nicholas, T. (2002). Step loading for very high cycle fatigue. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 25(8-9), 861-869.
- (Nicholas, 2007) Nicholas, T. (2007). *High Cycle Fatigue. A Mechanics of Materials Perspective* (éd. Elsevier Eds).
- (Nicholas & Maxwell, 2003) Nicholas, T., & Maxwell, D. C. (2003). Mean stress effects on the high cycle fatigue limit stress in Ti-6Al-4V. Dans W. G. Reuter, & R. S. Piascik (Éd.), *Fatigue & Fracture Mechanics, ASTM STP 1417*. 33, pp. 476-492. ASTM International.
- (Nishihara & Kawamoto, 1945) Nishihara, T., & Kawamoto, M. (1945). The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference. *Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University*, 11(5), 85-112.
- (Nowell et al., 2003 (1)) Nowell, D., Dini, D., & Duó, P. (2003). Stress analysis of V-notches with and without cracks, with application to foreign object damage. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 38(5), 429-441.

- (Nowell et al., 2003 (2)) Nowell, D., Duó, P., & Stewart, I. F. (2003). Prediction of fatigue performance in gas turbine blades after foreign object damage. *International Journal of Fatigue*, 25(9-11), 963-969.
- (Oakley & Nowell, 2007) Oakley, S. Y., & Nowell, D. (2007). Prediction of the combined high- and low-cycle fatigue performance of gas turbine blades after foreign object damage. *International Journal of Fatigue*, 29(1), 69-80.
- (Palin-Luc & Lasserre, 1998) Palin-Luc, T., & Lasserre, S. (1998). An energy based criterion for high cycle multiaxial fatigue. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(2), 237-251.
- (Papadopoulos, 1987) Papadopoulos, I. V. (1987). *Fatigue polycyclique des métaux : une nouvelle approche*. Thèse de doctorat Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- (Papadopoulos, 1993) Papadopoulos, I. V. (1993). *Fatigue limit of metals under multiaxial stress conditions: the microscopic approach*. Joint Research Centre, ISEI.
- (Papadopoulos, 1996) Papadopoulos, I. V. (1996). Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(4), 513-528.
- (Papadopoulos, 2001) Papadopoulos, I. V. (2001). Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 23(10), 839-849.
- (Papadopoulos et al., 2003) Papadopoulos, I. V., Davoli, P., Bernasconi, A., Filipini, M., & Foletti, S. (2003). Independence of the torsional fatigue limit upon a mean shear stress. *International Journal of Fatigue*, 25(6), 471-480.
- (Papadopoulos et al., 1997) Papadopoulos, I. V., Davoli, P., Gorla, C., Filippini, M., & Bernasconi, A. (1997). A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, 19(3), 219-235.
- (Paris et al., 1961) Paris, P. C., Gomez, M. P., & Anderson, W. P. (1961). A rational analytic theory of fatigue life. *The Trend in Engineering*, 13, 9-14.
- (Pelloux, 1969) Pelloux, R. (1969). Mechanisms of formation of ductile fatigue striations. *Transactions of the American Society for Metals*, 62, 281-285.
- (Peterson, 1974) Peterson, R. E. (1974). *Stress Concentration Factors*. New York: John Wiley & Sons.
- (Peterson & Pilkey, 1997) Peterson, R. E., & Pilkey, W. D. (1997). *Peterson's stress concentration factors*. Wiley.
- (Petit et al., 2003) Petit, J., Henaff, G., & Sarrazin-Baudoux, C. (2003). Environmentally assisted fatigue in the gaseous atmosphere. *Comprehensive structural integrity*, 6, 211-280.
- (Peyret, 2012) Peyret, N. (2012). *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages: effet du frottement en sollicitation dynamique*. Thèse de doctorat Université Paris-Est.
- (Plaisted et al., 2006) Plaisted, T., Amirkhizi, A. V., & Nemat-Nasser, S. (2006). Compression-induced axial crack propagation in DCDC polymer samples: experiments and modeling. *International Journal of Fracture*, 141(3-4), 447-457.
- (Pogoretski & Karpenko, 2006) Pogoretski, R. G., & Karpenko, G. v. (1965). Effect of the test piece length on the fatigue strength of steel in air. *Fiziko-Khimicheskaya Mekhanika Materialov*, 1(1), 90-94.

- (Pommier, 1995) Pommier, S. (1995). *Amorçage et propagation de fissures courtes en fond d'entaille, étude du superalliage N18 en fatigue fluage*. Thèse de doctorat Ecole Centrale de Paris.
- (Pommier, 2001 (1)) Pommier, S. (2001 (1)). A study of the relationship between variable level fatigue crack growth and the cyclic constitutive behaviour of steel. *International Journal of Fatigue*, 23, 111-118.
- (Pommier, 2001 (2)) Pommier, S. (2001 (2)). *Contribution à l'étude de la fatigue des matériaux métalliques*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches.
- (Pommier, 2002) Pommier, S. (2002). Plane strain crack closure and cyclic hardening. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(1), 25-44.
- (Pommier, 2003) Pommier, S. (2003). Cyclic plasticity and variable amplitude fatigue. *International Journal of Fatigue*, 25(9-11), 983-997.
- (Pommier & Bompard, 2000) Pommier, S., & Bompard, P. (2000). Bauschinger effect of alloys and plasticity-induced crack closure: a finite element analysis. *Fatigue Fracture of Engineering Materials and Structures*, 23(2), 129-139.
- (Pommier & Freitas, 2002) Pommier, S., & Freitas, M. (2002). Interactions between overloads. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 25, 709-722.
- (Pommier & Hamam, 2007) Pommier, S., & Hamam, R. (2007). Incremental model for fatigue crack growth based on a displacement partitioning hypothesis of mode I elastic-plastic displacement fields. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 30(7), 582-598.
- (Pommier & Risbet, 2005) Pommier, S., & Risbet, M. (2005). Time derivative equations for mode I fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fatigue*, 27(10-12), 1297-1306.
- (Poncelet, 2007) Poncelet, M. (2007). *Multiaxialité et hétérogénéités intrinsèques et structurales des essais d'auto-échauffement et de fatigue à grand nombre de cycles*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Poncelet et al., 2010) Poncelet, M., Doudard, C., Calloch, S., Weber, B., & Hild, F. (2010). Probabilistic multiscale models and measurements of self-heating under multiaxial high cycle fatigue. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(4), 578-593.
- (Prisacari, 2018) Prisacari, V. I. (2018). *Modeling of partial mean stress relaxation and biaxial mechanical testing of Inco718DA*. Thèse de doctorat Université Paris-Saclay.
- (RAMGT, 2004) RAMGT. (2004). *Final technical report*. Rolls-Royce plc.
- (Ranc et al., 2011) Ranc, N., Palin-Luc, T., & Paris, P. C. (2011). Thermal effect of plastic dissipation at the crack tip on the stress intensity factor under cyclic loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(6), 961-972.
- (Ranc et al., 2013) Ranc, N., Palin-Luc, T., & Paris, P. C. (2013). On the effect of fatigue crack plastic dissipation on the stress intensity factor. *13th International Conference on Fracture*. Beijing, China.
- (Ranc et al., 2014) Ranc, N., Palin-Luc, T., Paris, P. C., & Saintier, N. (2014). About the effect of plastic dissipation in heat at the crack tip on the stress intensity factor under cyclic loading. *International Journal of Fatigue*, 58, 56-65.

- (Ranc et al., 2008) Ranc, N., Wagner, D., & Paris, P. C. (2008). Study of thermal effects associated with crack propagation during very high cycle fatigue tests. *Acta Materialia*, 56(15), 4012-4021.
- (Rice, 1968) Rice, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of applied mechanics*, 35(2), 379-386.
- (Rice, 1972) Rice, J. R. (1972). Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *International Journal of Solids and Structures*, 8(6), 751-758.
- (Ritchie et al., 1999) Ritchie, R. O., Boyce, B. L., Campbell, J. P., Roder, O., Thompson, A. W., & Milligan, W. W. (1999). Thresholds for high-cycle fatigue in a turbine engine Ti-6Al-4V alloy. *International Journal of Fatigue*, 21(7), 653-662.
- (Ruiz-Sabariego, 2008) Ruiz-Sabariego, J.-A. (2008). *Modèle incrémental de prévision de la durée de vie en fissuration par fatigue. Traitement des cycles complexes anisothermes en fatigue-oxydation*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Sarrazin-Baudoux et al., 1999) Sarrazin-Baudoux, C., Chabanne, Y., & Petit, J. (1999). Influence of environment and of mean stress on fatigue crack growth at near threshold stress intensities on a Ti6246 alloy at room temperature and 500 C. *Scripta materialia*, 40(4), 451-457.
- (Schijve, 1973) Schijve, J. (1973). Effect of load sequences on crack propagation under random and program loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 5(2), 269-280.
- (Schütte & Molla-Abbasi, 2007) Schütte, H., & Molla-Abbasi, K. (2007). On the full set of elastic T-stress terms of internal circular cracks under mixed-mode loading conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(17), 2770-2787.
- (Shen & Glinka, 2007) Shen, G., & Glinka, G. (1991). Weight functions for a surface semi-elliptical crack in a finite thickness plate. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 15(3), 247-255.
- (Sines, 1959) Sines, G. (1959). Behaviour of metals under complex static and alternating stress. *Metal Fatigue, MacGraw-Hill*. New-York.
- (Sines & Ohgi, 1981) Sines, G., & Ohgi, G. (1981). Fatigue criteria under combined stresses or strains. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 103(2), 82-90.
- (Smith et al., 1970) Smith, K. N., Watson, P., & Topper, T. H. (1970). A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of materials*, 5(4), 767-778.
- (Smith & Miller, 1978) Smith, R. A., & Miller, K. J. (1978). Prediction of fatigue regimes in notched components. *International Journal of Mechanical Sciences*, 20(4), 201-206.
- (Socie, 1987) Socie, D. F. (1987). Multiaxial fatigue damage models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 109(4), 293-298.
- (Socie et al., 1985) Socie, D. F., Waill, L. A., & Dittmer, D. F. (1985). Biaxial fatigue of Inconel 718 including mean stress effects. Dans K. J. Miller, & Brown (Éd.), *Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853* (pp. 463-481). ASTM International.
- (Söderberg, 1930) Söderberg, C. (1930). Factor of Safety and Working Stress. *American Society for Testing and Materials*, 52, 13-28.
- (Sonsino et al., 1997) Sonsino, C. M., Kaufmann, H., & Grubišić, V. (1997). Transferability of material data for the example of a randomly loaded forged truck stub axle. *SAE Transactions*, 106, 649-670. Récupéré sur <http://www.jstor.org/stable/44657610>

- (Stanzl et al., 1989) Stanzl, E. S., Czegley, M., Mayer, H. R., & Tschegg, E. K. (1989). Fatigue crack growth under combined mode I and mode II loading. *Fracture mechanics: perspectives and directions (twentieth symposium)*, ASTM STP 1020 (pp. 479-496). ASTM International.
- (Surand, 2013) Surand, M. (2013). *Etude du comportement viscoplastique en traction et en fluage de l'alliage TA6V de 20 à 600 degrés celsius*. Thèse de doctorat Université de Toulouse.
- (Suresh, 1991) Suresh, S. (1991). *Fatigue of materials*. New York: Cambridge University Press.
- (Taheri, 2005) Taheri, S. (2005). Le faïencage thermique à grand nombre de cycles, un phénomène lié à la structure. *Mechanics & Industry*, 6(3), 331-335. doi:10.1051/meca:2005037
- (Taylor, 1999) Taylor, D. (1999). Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *International Journal of Fatigue*, 21(5), 413-420.
- (Thevenin, 2004) Thevenin, J.-C. (2004). *Le turboréacteur, moteur des avions à réaction*. AAF 3ème édition.
- (Thieulot-Laure, 2008) Thieulot-Laure, E. (2008). *Méthode probabiliste unifiée pour la prédiction du risque de rupture en fatigue*. Thèse de doctorat Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Thieulot-Laure et al., 2007) Thieulot-Laure, E., Pommier, S., & Fréchet, S. (2007). A multiaxial fatigue failure criterion considering the effects of the defects. *International Journal of Fatigue*, 29(9-11), 1996-2004. doi:https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.01.017
- (Tsutsumi et al., 2009) Tsutsumi, N., Murakami, Y., & Doquet, V. (2009). Effect of test frequency on fatigue strength of low carbon steel. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 32(6), 473-483. doi:https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2009.01350.x
- (Turner et al., 1995) Turner, M. R., Dalglish, B. J., He, M. Y., & Evans, A. G. (1995). A fracture resistance measurement method for bimaterial interfaces having large debond energy. *Acta metallurgica et materialia*, 43(9), 3459-3465.
- (Vanderesse, 2008) Vanderesse, N. (2008). *Morphologie et déformation à chaud de microstructures lamellaires dans les alliages de zirconium et de titane*. Thèse de doctorat Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.
- (Wang & Brown, 2009) Wang, C. H., & Brown, M. W. (1993). A path-independent parameter for fatigue under proportional and non-proportional loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 16(12), 1285-1297.
- (Wang, 2003) Wang, X. (2003). Elastic T-stress solutions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(6), 731-756.
- (Wang, 2004) Wang, X. (2004). Elastic T-stress solutions for penny-shaped cracks under tension and bending. *Engineering Fracture Mechanics*, 71(16-17), 2283-2298.
- (Wang et al., 1998) Wang, X., Lambert, S. B., & Glinka, G. (1998). Approximate weight functions for embedded elliptical cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 59(3), 381-392.
- (Weibull, 1951) Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide application. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 239-297.
- (Westergaard, 1939) Westergaard, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of applied mechanics*, 6(2), A49-A53.

- (Wheeler, 1972) Wheeler, O. E. (1972). Spectrum loading and crack growth. *Journal of basic engineering*, 94(1), 181-186.
- (Willenborg et al., 1971) Willenborg, J., Engle, R. M., & Wood, H. A. (1971). *A crack growth retardation model using an effective stress concept*. No. AFFDL-TM-71-1-FBR, Air Force Flight Dynamics Lab Wright-Patterson Afb Oh.
- (Williams, 1957) Williams, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24(1), 109-114. Récupéré sur <http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140729-122058948>
- (Wöhler, 1860) Wöhler, A. (1860). Elastic Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahnwagenachsen einwirkenden Kräfte und die Widerstandsfähigkeit des Wagon-Achsen. *Z. für Bauwesen*, 8, 215-234.
- (Wormsen et al., 2006) Wormsen, A., Fjeldstad, A., & Härkegård, G. (2006). The application of asymptotic solutions to a semi-elliptical crack at the root of a notch. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(13), 1899-1912.
- (Yao et al., 1995) Yao, W., Xia, K., & Gu, Y. (1995). On the fatigue notch factor, K_f. *International Journal of Fatigue*, 17(4), 245-251. doi:[https://doi.org/10.1016/0142-1123\(95\)93538-D](https://doi.org/10.1016/0142-1123(95)93538-D)
- (You et al., 1996) You, B. R., & Lee, S. B. (1996). A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. *International Journal of Fatigue*, 18(4), 235-244.
- (Zenner et al., 2000) Zenner, H., Simbürger, A., & Liu, J. (2000). On the fatigue limit of ductile metals under complex multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 22(2), 137-145.
- (Zheng et al., 1996) Zheng, X. J., Glinka, G., & Dubey, R. N. (1996). Stress intensity factors and weight functions for a corner crack in a finite thickness plate. *Engineering fracture mechanics*, 54(1), 49-61.

Titre : Modélisation de l'endurance en fatigue sous chargement complexe, statique et vibratoire

Mots clés : Limite d'endurance, Fissure courte, Seuil de non-propagation de fissure, Ti-6Al-4V

Résumé : Les matériaux dans les machines tournantes sont soumis à des chargements complexes consistant en la superposition d'un chargement de forte amplitude à faible fréquence (LCF) et d'un chargement vibratoire de faible amplitude et de haute fréquence (HCF). En pratique, le nombre de cycles LCF autorisé est limité, mais en aucun cas la contribution HCF doit conduire à de l'endommagement. Ce travail de recherche vise à proposer une approche permettant de rendre compte de l'impact du chargement LCF sur la limite d'endurance HCF.

Pour cela, une approche fondée sur la mécanique linéaire élastique de la rupture a été

proposée. Un critère non-local de plasticité en pointe de fissure a été développé. Le fait qu'il nécessite la connaissance des contraintes T et T_z permet de rendre compte de l'effet de fissure courte. Son extension au cas non-linéaire a conduit à une meilleure prise en compte des effets de rapport de charge dans la construction de diagrammes de fatigue.

Enfin, un nouveau moyen d'essai, ainsi qu'une nouvelle géométrie d'éprouvette ont été développés pour la recherche du seuil de non-propagation de fissure à hautes fréquences. L'absence d'effet de la fréquence sur le Ti-6Al-4V d'étude a été démontrée entre 30 Hz et 800 Hz.

Title : Fatigue endurance modeling under complex, static and vibratory loading

Keywords : Endurance limit, Short crack, Fatigue crack growth threshold, Ti-6Al-4V

Abstract : Materials in rotating machinery are typically subjected to loading conditions that combine both low cycle fatigue (LCF) and high cycle fatigue (HCF). In operating conditions, the number of allowable LCF cycles may be limited, but under no circumstances, superimposed HCF vibratory cycles can be allowed to produce fatigue damage. This work aims at proposing an approach to account for the effect of variable amplitude LCF cycles on the endurance domain relative to HCF cycles.

For this purpose, a LEFM-based approach is proposed. The material is assumed to contain flaws, and their growth is assumed to stem from crack tip plasticity.

A non-local yield criterion for the crack tip region has been obtained. The first non-singular terms (e.g., the T -stresses) are included in the Westergaard's stress functions to make it possible to use it also for mechanically short cracks and generate fatigue diagrams in elasticity. This approach has been extended to plasticity in order to account for load ratio effect in HCF Haigh diagrams.

Finally, a new device and a new geometry specimen have been developed to realize fatigue crack growth threshold measurements at high frequencies. The results obtained on Ti-6Al-4V showed the absence of a frequency effect between 30 Hz and 800 Hz.