



**HAL**  
open science

# Modélisation de sources X générées par interaction laser-plasma en régime relativiste

Pierre-Louis Bourgeois

► **To cite this version:**

Pierre-Louis Bourgeois. Modélisation de sources X générées par interaction laser-plasma en régime relativiste. Physique des plasmas [physics.plasm-ph]. Institut Polytechnique de Paris, 2020. Français. NNT : 2020IPPAX073 . tel-03086213

**HAL Id: tel-03086213**

**<https://theses.hal.science/tel-03086213>**

Submitted on 22 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT  
POLYTECHNIQUE  
DE PARIS

NNT : 2020IPPAX073

Thèse de doctorat



# Modélisation de sources X synchrotron générées par interaction laser-plasma sous-dense en régime relativiste

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°626 Ecole Doctorale de l'Institut Polytechnique de Paris (ED IP  
Paris)

Spécialité de doctorat : Optique, laser et plasma

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 9 octobre 2020, par

**PIERRE-LOUIS BOURGEOIS**

Composition du Jury :

Jérôme Faure Directeur de recherche, École polytechnique (LOA)	Président du jury
Jorge Vieira Professeur, Université de Lisbonne	Rapporteur
Guy Bonnaud Professeur, CEA/INSTN	Rapporteur
Rachel Nuter Ingénieur-chercheur, CEA - Université de Bordeaux (CELIA)	Examineur
Agustin Lifschitz Chargé de recherche, CNRS	Directeur de thèse
Xavier Davoine Ingénieur-chercheur, CEA/DAM Bruyères-le-Chatel	Co-directeur de thèse



# Modélisation de sources X synchrotron générées par interaction laser-plasma en régime relativiste

Pierre-Louis Bourgeois

Thèse de doctorat réalisé au  
*CEA DAM DIF*

Membres du jury :

Dr. Agustin Lifschitz (Directeur de thèse)  
Dr. Xavier Davoine (Encadrant CEA)  
Prof. Jorge Vieira (Rapporteur)  
Prof. Guy Bonnaud (Rapporteur)  
Dr. Rachel Nuter (Examinatrice)  
Dr. Jérôme Faure (Président du Jury)



*Everything stays  
Right where you left it  
Everything stays  
But it still changes  
Ever so slightly  
Daily and nightly  
In little ways  
When everything stays...*

# Remerciements

Je tiens à remercier, tout d'abord, les membres de mon jury - notamment les rapporteurs : Guy Bonnaud et Jorge Vieira qui ont pris le temps de relire attentivement et de commenter ce manuscrit - mais aussi Rachel Nuter, Jérôme Faure, le président du jury et Agustin Lifschitz, mon directeur de thèse. Leur expertise et leurs conseils ont été fortement appréciés et ont contribué à améliorer ce manuscrit.

Je voudrais ensuite remercier tout particulièrement Xavier, qui m'a encadré au quotidien au CEA, depuis mes débuts en stage jusqu'à la fin de mon contrat de thèse et au-delà, pour mener à son terme ce long travail. Tes explications aussi bien des phénomènes physiques que des aspects numériques ont été précieuses et m'ont permis de me former aux codes PIC et à la physique des plasmas. Merci pour tes conseils, ta disponibilité, ta patience et ton soutien, merci d'avoir cru en moi.

Les personnes à remercier ensuite sont nombreuses et je vais les ordonner pour m'efforcer d'en oublier le moins possible.

Florian et Luc pour m'avoir accueilli dans le service et le labo, Brigitte pour son aide sur les démarches administratives, Sylvie pour avoir toujours été disponible que ce soit pour une formalité à remplir ou simplement discuter un peu et Céline ensuite qui a su brillamment prendre la relève.

L'ensemble du labo et affiliés : Serge, Laurent, Didier, Jean-Etienne, Benoit qui ont contribué à rendre un espace de travail vivant et agréable.

Tous les doctorants, thésards, PhD students et autres thésitifs que j'ai pu côtoyer au cours de ces presque quatre années au sein du CEA. Parmi lesquels on retrouve donc :

- Les "prédécesseurs" : Pedro dont j'ai repris le bureau, Julien dont la thèse m'a tellement servi que la reliure a fini par céder complètement.
- Les "contemporains" : Simon, Vivien, Alisée qui a partagé un bureau avec moi pendant deux ans, Bertrand pour nos pauses thés, Arno, Jérémy, Antoine pour nous avoir introduit au Smoke et son service si particulier, Manuel qui m'a tenu compagnie lors de formations plus ou moins passionnantes, Marine pour nos discussions post-travail, souvent au milieu des embouteillages, Valeria pour m'avoir fait découvrir un peu la culture et surtout la nourriture colombienne. Et j'ajoute ici les ex-postdocs et "nouveaux permanents" Xavier et Gaétan, toujours de bon conseil et de bonne compagnie.
- La "nouvelle génération" : Colomban, Quentin et Mikael auxquels je souhaite toute la réussite et le courage pour affronter la présente situation.

Les stagiaires aussi, dont les passages ont été plus brefs mais pas forcément sans souvenirs : Adélie, Victor, Lucas, Lise, Corentin, Ronan, Alexandre, Jérémy, Diego et j'en oublie sûrement.

Les rencontres plus brèves encore : Neil croisé à Erice et qui m'a parfois servi de lien avec le très distant plateau de Saclay. Rémi Lehe et Jean-Luc Vay dont les travaux m'ont beaucoup servi et avec qui j'ai pu discuter lors d'une conférence dans le Colorado. Conférence pendant laquelle j'ai retrouvé Julien mais aussi pu côtoyer Maxence, Aline, Jonas et Henrik, que j'ai ensuite eu le plaisir de revoir plusieurs fois à Paris.

Enfin, je voudrais remercier pour leur soutien en toute occasion : l'ensemble de ma famille, notamment ma mère et mon frère Thomas qui a pris le temps de relire la quasi intégralité de ce manuscrit, et mes amis : Marc avec qui j'ai pu partager nombre des difficultés de la vie de doctorant mais aussi les oublier un peu à travers un jeu de société ou bien l'assemblage d'un trébuchet, Marie, Fabien, Sophie, Astrid qui ont aussi contribué à la relecture d'un texte qui pouvait leur sembler écrit dans une autre langue et ont toujours été là quand ça n'allait pas. Merci à vous.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contexte scientifique . . . . .	1
Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit . . . . .	5
<b>I Éléments théoriques</b>	<b>9</b>
<b>1 Physique de l'interaction laser-plasma en régime sous-dense</b>	<b>11</b>
1.1 Notions de base d'interaction laser-plasma . . . . .	12
1.1.1 Caractéristiques des lasers UHI . . . . .	12
1.1.2 Plasma créé par un laser . . . . .	14
1.2 Accélération d'électrons par sillage laser . . . . .	19
1.2.1 Onde de sillage . . . . .	19
1.2.2 Piégeage et accélération d'électrons . . . . .	24
1.2.3 Méthodes d'injection . . . . .	26
1.3 Modèle 3D : la bulle . . . . .	27
1.3.1 Présentation des modèles et lois d'échelle . . . . .	28
1.3.2 Mouvement des électrons dans la bulle . . . . .	29
1.4 Rayonnement synchrotron . . . . .	31
1.4.1 Rayonnement d'une particule chargée relativiste . . . . .	31
1.4.2 Cas du rayonnement bêtatron . . . . .	34
1.4.3 Calcul numérique du rayonnement bêtatron à partir des trajectoires . . . . .	39
<b>2 Simulation numérique des plasmas : la méthode Particle-In-Cell</b>	<b>41</b>
2.1 Modélisation des plasmas . . . . .	42
2.1.1 Différentes approches et échelles . . . . .	42
2.1.2 De la description microscopique à la description cinétique . . . . .	42
2.2 La méthode Particle-In-Cell . . . . .	45
2.2.1 Présentation générale de la méthode . . . . .	45
2.2.2 Résolution des équations de Maxwell . . . . .	46
2.2.3 Interpolation des champs . . . . .	48
2.2.4 Mouvement des particules . . . . .	50
2.2.5 Projection de la charge et des courants . . . . .	51
2.3 Rayonnement Cherenkov numérique dans les codes PIC . . . . .	51
2.3.1 Rayonnement Cherenkov physique . . . . .	51
2.3.2 Origine du phénomène numérique . . . . .	53

2.3.3	Techniques existantes pour réduire l'effet Cherenkov numérique . . . .	55
<b>II</b>	<b>Études menées</b>	<b>59</b>
<b>3</b>	<b>Réduction de l'impact du rayonnement Cherenkov numérique sur les simulations d'accélération par sillage laser</b>	<b>61</b>
3.1	Impact du Cherenkov numérique sur une simulation d'accélération par sillage laser . . . . .	62
3.1.1	Présentation de la simulation . . . . .	62
3.1.2	Observation du rayonnement Cherenkov numérique autour du faisceau	63
3.1.3	Modification de la force transverse . . . . .	64
3.2	Nouvelle approche pour limiter l'impact du rayonnement Cherenkov numérique	66
3.2.1	Principe de la nouvelle approche et implémentation . . . . .	66
3.2.2	Comparaison de l'erreur d'interpolation sur le champ $B$ . . . . .	69
3.3	Application à la simulation d'accélération par sillage laser . . . . .	75
3.3.1	Caractéristiques du faisceau . . . . .	75
3.3.2	Mouvement des électrons . . . . .	80
3.3.3	Impact sur le rayonnement bêatron calculé . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Application à l'accélération par laser dans le vide</b>	<b>85</b>
4.1	Dynamique d'un électron en présence d'une onde plane électromagnétique en régime relativiste . . . . .	86
4.1.1	Développement théorique pour un électron initialement au repos . . . . .	86
4.1.2	Reproduction par simulation numérique . . . . .	87
4.1.3	Problème de l'impulsion longitudinale avec QTI et B-TIS . . . . .	90
4.1.4	Cas d'un électron avec une vitesse longitudinale initiale . . . . .	95
4.2	Interaction avec une impulsion au profil transverse gaussien . . . . .	100
4.2.1	Situation théorique . . . . .	100
4.2.2	Résultats numériques . . . . .	102
4.2.3	Influence de la position initiale . . . . .	104
4.3	Simulation d'accélération par laser dans le vide . . . . .	105
4.4	Simulation d'accélération directe par laser . . . . .	109
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>113</b>
	Travail réalisé . . . . .	113
	Perspectives . . . . .	115
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>117</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>142</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>

# Introduction

*“Everything starts somewhere, though many physicists disagree.”*

– **Terry Pratchett**, Hogfather

## Contexte scientifique

Cette thèse traite principalement de la simulation de sources de rayonnement X produites dans les accélérateurs d'électrons par sillage laser. Il est donc intéressant de commencer par présenter de manière un peu plus globale l'utilité d'accélérer des particules à travers les différentes techniques utilisées et leurs applications possibles, en particulier celles des accélérateurs dans les plasmas.

## L'accélération de particules

**Intérêts :** L'accélération de particules consiste à communiquer de l'énergie via des champs électromagnétiques à des particules chargées pour les amener à des vitesses proches de la vitesse de la lumière. Ses applications sont multiples et touchent des domaines variés.

Dans l'industrie on peut, par exemple, fabriquer des circuits imprimés par lithographie à faisceau d'électrons. Dans le domaine médical, les accélérateurs de particules peuvent servir à la production de radioisotopes qui seront utilisés comme traceurs ou en imagerie. Des faisceaux d'électrons ou de protons peuvent aussi être utilisés pour irradier des tumeurs cancéreuses en radiothérapie. La spectrométrie de masse, utilisée pour identifier des composés inconnus, fait aussi usage de l'accélération d'ions.

Enfin, les domaines d'application sont aussi très nombreux dans la recherche fondamentale en physique, que ce soit en physique atomique, pour étudier des réactions de physique nucléaire avec des collisions noyau-noyau, ou en physique des particules en atteignant des énergies suffisamment importantes pour étudier des particules très massives, comme cela se fait dans le *Large Hadron Collider* (LHC) du CERN qui a permis de mettre en évidence le boson de Higgs en 2012.

De manière indirecte, les accélérateurs de particules peuvent aussi être utilisés comme sources de rayonnement. En effet toute particule chargée accélérée émet un rayonnement électromagnétique qui peut être de très haute fréquence selon l'énergie de la particule. L'accélération de particules est donc aussi utilisée pour produire des rayonnements (généralement X ou gamma) qui peuvent avoir des applications diverses (imagerie, radiothérapie, stérilisation, etc.).

**Accélérateurs conventionnels :** Les premiers accélérateurs, inventés dès les années 1930, utilisent des charges statiques pour créer un champ électrique constant dans lequel les particules peuvent être accélérées. Le plus célèbre est certainement l'accélérateur de Van de Graaff, mis au point en 1931 et encore utilisé de nos jours, il est cependant limité par les potentiels qu'il peut atteindre avec un maximum de l'ordre de 20 MV. Pour accélérer les particules à de plus hautes énergies, on utilise généralement les champs électriques générés dans des cavités radiofréquences qui peuvent atteindre quelques dizaines de MV m<sup>-1</sup>. Les accélérateurs linéaires montrent alors leurs limites car leur taille peut rapidement devenir très importante. En effet avec des champs électriques limités, il est nécessaire d'augmenter la distance d'accélération pour atteindre de très hautes énergies, ce qui conduit à des structures de plusieurs centaines de mètres.

Pour remédier à ce problème, on peut courber la trajectoire des particules avec un champ magnétique et les faire passer plusieurs fois dans la même cavité accélératrice, ce qui permet un système plus compact. C'est le principe du cyclotron, inventé dans les années 1930, dans lequel les particules sont accélérées en suivant une trajectoire en spirale grâce à un champ magnétique constant. Le principe a encore été amélioré avec l'invention du synchrotron qui utilise un champ magnétique variable pour s'adapter à l'énergie des particules et permet d'obtenir des trajectoires circulaires et donc une distance d'accélération quasi infinie.

Ces accélérateurs conventionnels souffrent cependant tous des mêmes limitations :

Tout d'abord, la taille des installations nécessaires pour atteindre de très hautes énergies devient prohibitive. Pour un synchrotron par exemple, la limitation des champs électriques réalisables implique que la distance à parcourir peut devenir très grande (plus de 1 km pour atteindre 100 GeV).

Ensuite, le mouvement circulaire des particules implique une accélération transverse qui se traduit par un rayonnement émis par les particules accélérées. Ces particules perdent ainsi sous forme de rayonnement une partie de l'énergie qu'elles gagnent, limitant particulièrement l'efficacité de l'accélération pour de très hautes énergies et conduisant le rayon de la structure à être de plus en plus grand pour limiter cette accélération transverse. Ainsi le LHC est un anneau de 27 km de circonférence.

Ces limitations justifient la recherche de nouvelles méthodes d'accélération de particules. Les plasmas, étant des milieux fortement ionisés, sont particulièrement adaptés pour générer de forts champs électriques accélérateurs et apparaissent comme de bons candidats.

**Accélération dans les plasmas :** Les premiers travaux sur l'accélération de particules dans les plasmas apparaissent dans les années 1980, avec l'article fondateur de Tajima et Dawson qui décrivent en 1979 [1] comment une impulsion laser peut exciter une onde plasma sur son passage et comment les champs créés par cette onde pourraient être utilisés pour accélérer des électrons à des énergies importantes sur de courtes distances. Les champs électriques accélérateurs peuvent en effet atteindre la centaine de GV m<sup>-1</sup>.

Les premières réalisations expérimentales utilisent la technique du battement d'onde [2, 3], décrite dans l'article de Tajima et Dawson : deux faisceaux laser contre-propagatifs de fréquences voisines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont utilisés pour exciter une onde plasma à la fréquence  $\omega_p = \omega_2 - \omega_1$  grâce au battement d'onde. Cette technique, qui a l'avantage de nécessiter des intensités laser relativement peu élevées, produit cependant des champs accélérateurs dont

l'amplitude est limitée à quelques  $\text{GV m}^{-1}$  et nécessite un faisceau d'électrons préexistant.

À partir des premiers travaux sur l'accélération laser-plasma, il est rapidement démontré qu'une onde de sillage peut aussi être excitée par un faisceau de particules chargées se propageant dans un plasma [4]. On parle alors d'accélération par champs de sillage plasma. Le faisceau initial excitant l'onde de sillage peut être un faisceau d'électrons [5, 6] ou même un faisceau de protons [7].

L'accélération par sillage laser a été le premier concept proposé d'accélérateur de particules dans les plasmas et a été activement étudié de manière théorique depuis [1, 8]. La réalisation expérimentale est cependant complexe et a dû attendre l'amélioration des techniques laser avant de pouvoir donner des résultats probants. Cette technique connaît un nouvel essor à partir de 2004 et la publication simultanée dans *Nature* de trois articles [9–11] qui annoncent avoir réussi à produire des faisceaux d'électrons quasi-monoénergétiques accélérés par sillage laser.

## L'accélération par sillage laser

**Principe :** Lors de sa propagation dans le plasma, une impulsion laser ultra-courte et ultra-intense peut exciter une onde plasma dans son sillage, créant une cavité ionique, dépourvue d'électrons, juste derrière l'impulsion. Dus à la séparation de charge, des champs électromagnétiques de très grande amplitude sont créés dans cette cavité dans lesquels des électrons peuvent être accélérés à des énergies très importantes. En effet, certains électrons peuvent alors "surfer" dans l'onde de sillage, à la manière d'un surfeur prenant de la vitesse sur une vague de grande amplitude, et gagner de l'énergie tout au long de leur parcours.

**Développements techniques :** Pour créer une cavité accélératrice efficace, l'impulsion laser doit être extrêmement courte et très intense. Diverses avancées technologiques ont permis au cours des années de créer des faisceaux laser de plus en plus intenses et courts. La première, la commutation Q (*Q-switch*), a permis la production de faisceaux bien plus puissants que précédemment pour des durées d'impulsion en dessous de la micro-seconde [12]. L'invention de la technique de blocage de mode a ensuite permis de passer sous la barre de la picoseconde [13] mais cela reste trop long pour exciter efficacement l'onde de sillage. C'est pourquoi les premiers travaux expérimentaux étaient limités au régime du battement d'onde.

L'apparition en 1985 de la technique d'amplification par dérive de fréquence (*Chirped Pulse Amplification* ou CPA) [14], découverte récompensée par le prix Nobel de Physique de 2018, ouvre la voie à une nouvelle augmentation de la puissance des impulsions ultra-courtes et permet d'accéder au régime du sillage automodulé [8]. Ce régime est atteint lorsque les impulsions laser sont suffisamment intenses pour générer des effets non linéaires lors de l'interaction avec le plasma. Ces effets résultent en ce qu'on appelle l'automodulation de phase, qui va mener au découpage du faisceau laser en un train d'impulsions chacune de longueur proche de la longueur d'onde plasma. Ce train d'impulsions permet d'exciter efficacement une onde plasma avec une seule source laser et d'accélérer les électrons directement issus du plasma [15].



Les avancées continues des techniques laser ont finalement permis de créer des impulsions ultra-courtes (autour de 30 fs) et d'ultra haute intensité ( $\sim 10^{18} \text{ W cm}^{-2}$ ). Cela permet d'atteindre le régime de sillage forcé dans lequel une onde de sillage est excitée directement par une impulsion laser de longueur comparable à la longueur d'onde plasma. Le premier faisceau d'électrons dans ce régime est produit en 2002 [16] et il annonce ce que le journal *Nature* nomme alors le *Dream beam* [9–11], un faisceau au spectre quasi-monoénergétique contrairement aux distributions maxwelliennes des précédents travaux. Les énergies des électrons accélérés sont alors encore modestes, de l'ordre de 100 MeV, mais le GeV est rapidement atteint [17] et des faisceaux de plusieurs GeV sont désormais possibles [18]. Ces énergies ne rivalisent pas encore avec celles atteintes dans les plus gros accélérateurs conventionnels mais les installations sont aussi bien plus compactes et les progrès sont rapides. Le développement continu des installations lasers et notamment l'arrivée des lasers Petawatt [19] permettent d'envisager des gains de plus en plus grands et d'explorer de nouveaux régimes de la physique de l'interaction laser-plasma.

**Sources de rayonnements :** Les faisceaux électroniques produits par accélération par sillage laser sont utilisés pour générer différents types de rayonnement à l'aide de nombreuses techniques et pour des applications variées [20, 21].

Certaines méthodes ne sont pas propres à l'accélération par sillage laser mais peuvent s'appliquer à tout faisceau d'électrons accélérés et ont donc été adaptées pour ces nouveaux accélérateurs. C'est le cas par exemple du rayonnement de freinage ou *Bremsstrahlung* qui permet de produire des rayons X ou gamma [22] en envoyant le faisceau d'électrons à travers un matériau dense.

Un rayonnement X peut aussi être produit en dirigeant le faisceau dans un onduleur [23] constitué d'une succession d'aimants permanents faisant osciller sinusoidalement les électrons dans leur champ magnétique périodique.

Les électrons du faisceau peuvent aussi osciller de la sorte dans une impulsion laser contre-propagative mais les oscillations sont alors bien plus rapides, entraînant un rayonnement beaucoup plus énergétique. C'est le principe du rayonnement Compton [24] qui peut produire des rayons X [25] ou gamma [26].

Lors de l'accélération dans l'onde de sillage créée par le laser, les électrons sont soumis à des champs focalisants qui conduisent à des oscillations transverses. Ces oscillations sont responsables du rayonnement Bêatron, qui est la source de rayonnement X [27–29] qui va particulièrement nous intéresser dans cette thèse. Généralement moins énergétique que le rayonnement Compton, le rayonnement Bêatron peut tout de même atteindre le domaine des rayons gamma [30].

Un dernier mécanisme de production de rayonnement qui suscite un certain intérêt depuis peu est le rayonnement de transition cohérent (*Coherent Transition Radiation* ou CTR) qui se produit à l'interface lorsqu'un faisceau de particules chargées passe d'un milieu à un autre [31]. Du rayonnement Terahertz peut ainsi être produit lorsqu'un faisceau accéléré par sillage-laser sort du plasma dans le vide [32–34].

## Sources de rayonnement Bêtatron

Le rayonnement Bêtatron est au coeur du sujet de cette thèse car c'est sa meilleure modélisation dans les simulations qui motive une grande partie des travaux entrepris. Il est donc intéressant de noter l'utilité d'un tel rayonnement ainsi que ses applications possibles.

**Intérêts et avantages :** Tout d'abord, le rayonnement bêtatron a l'avantage d'être relativement simple à mettre en place. Le rayonnement est en effet produit directement pendant l'accélération du faisceau. Il n'est donc pas nécessaire de dévier le faisceau électronique vers une cible ou un onduleur, ni de disposer d'une seconde source laser pour produire le rayonnement, ce qui simplifie fortement le dispositif. Le système est de plus très compact si on le compare à des équivalents synchrotrons.

Ensuite, les propriétés du rayonnement sont elles-mêmes très intéressantes. Dans la gamme des rayons X (de quelques keV à la centaine de keV), il produit des impulsions très courtes (de l'ordre de la fs), avec une très petite taille de source (de l'ordre du  $\mu\text{m}$ ) ce qui permet de l'utiliser pour imager ou diagnostiquer la matière avec une très bonne résolution spatiale et temporelle. Sa faible divergence facilite aussi les applications en garantissant un signal suffisant même assez loin de la source.

**Applications :** Le rayonnement bêtatron a donc de nombreuses applications possibles, la première d'entre elles étant son utilisation en tant qu'outil de diagnostic du faisceau accéléré [35]. En effet, le rayonnement émis dépend fortement du comportement des électrons et il est donc possible d'imager indirectement le faisceau électronique en analysant l'émission bêtatron.

Les applications faisant usage du rayonnement produit ne manquent cependant pas, que ce soit pour de l'imagerie de haute précision grâce à la radiographie X par contraste de phase [36, 37], pour analyser et visualiser des volumes par tomodensitométrie X [38–42] ou encore pour étudier l'évolution d'un système physique sur des échelles de temps très courtes par spectroscopie X résolue en temps [43, 44]. Le rayonnement bêtatron est un outil très versatile pouvant trouver son utilité dans de multiples domaines.

## Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit

Les récentes avancées expérimentales et théoriques dans le domaine de la physique des plasmas et de l'interaction laser-plasma ont fortement bénéficié de l'amélioration des outils numériques de ces vingt dernières années. En effet, si les simulations numériques ne sont pas un outil nouveau, l'augmentation de la puissance de calcul et l'avènement des calculs massivement parallèles ont permis le développement de codes aux modèles beaucoup plus poussés et rendu possible la simulation de systèmes bien plus complexes à des échelles jusqu'alors inaccessibles. Les principaux codes utilisés pour la simulation de l'interaction laser plasma reposent en effet sur des modèles fluides ou particulaires qui sont particulièrement coûteux en termes de puissance de calcul.

Pour simuler l'interaction d'un laser ultra-intense avec un plasma, l'outil numérique de choix est généralement la méthode Particle-In-Cell (PIC) dont le développement a com-

mencé dès les années 1960 [45–47] et continue encore de nos jours, grâce au raffinement des modèles physiques, à l’amélioration des schémas numériques et aux nouvelles techniques de parallélisation (MPI, OpenMP) qui permettent de simuler des systèmes toujours plus grands tout en prenant en compte plus de phénomènes physiques. Il suffit pour s’en convaincre de regarder les nombreux codes PIC activement développés ces dernières années, dont notamment : Warp [48, 49], OSIRIS [50], CALDER [51], CALDER-Circ [52], EPOCH [53] ou encore Smilei [54] parmi tant d’autres. Ces simulations numériques trouvent leur utilité dans de nombreuses applications pour la recherche en physique des plasmas : pour développer et valider de nouveaux modèles [55–57], pour comparer et interpréter des résultats expérimentaux [58, 59] ou enfin pour étudier de nouveaux dispositifs ou régimes non encore accessibles expérimentalement [30, 60, 61].

Cette thèse se veut donc dans la continuité de ces travaux, avec pour objectif d’améliorer les outils numériques afin de permettre une meilleure compréhension des phénomènes physiques. Elle se concentre particulièrement sur l’amélioration de la modélisation des sources X bêtatron, notamment en améliorant le mouvement transverse des électrons dans les simulations PIC d’accélération par sillage laser. Le code CALDER, développé au sein du CEA, a été le principal outil de simulation utilisé. Les travaux ont donc été essentiellement numériques mais ont aussi compris le développement de modèles analytiques et la reproduction de résultats expérimentaux pour améliorer notre compréhension des phénomènes physiques sous-jacents et valider les résultats des simulations.

Outre la présente introduction et la conclusion, ce manuscrit de thèse est organisé en deux parties : la première, regroupant les chapitres 1 et 2, présente succinctement les connaissances nécessaires à la bonne compréhension de ce manuscrit, la deuxième, composée des chapitres 3 et 4, détaille les travaux entrepris au cours de la thèse ainsi que leurs résultats.

Le chapitre 1 se concentre sur les phénomènes physiques mis en jeu, il rappelle les notions élémentaires d’électromagnétisme, de physique des plasmas, explique les mécanismes de l’interaction laser-plasma intervenant dans le cadre de l’accélération par sillage laser et décrit la production de rayonnement Bêtatron.

Le chapitre 2 présente les outils numériques utilisés pour les simulations, en détaillant les modèles physiques utilisés et comment ils sont transcrits en utilisant la méthode Particle-In-Cell dans le code CALDER [51]. On décrit aussi le problème posé par le rayonnement Cherenkov numérique, un artefact numérique qui apparaît dans les codes PIC utilisant le schéma numérique de Yee [45] et qui peut nuire à la précision des simulations.

Le chapitre 3 commence par décrire l’impact que peut avoir le rayonnement Cherenkov numérique sur les simulations d’accélération par sillage laser et notamment sur le calcul du rayonnement Bêtatron, puis introduit une nouvelle méthode, simple et efficace, pour limiter ces effets. Cette technique est novatrice par son approche car elle vise uniquement à corriger l’erreur générée par le Cherenkov numérique sans faire disparaître totalement l’artefact. Elle consiste en une modification de la méthode d’interpolation des champs utilisée dans la simulation et est ainsi simple à implémenter et à adapter. Les résultats de plusieurs simulations sont ensuite comparés pour mettre en lumière l’intérêt de notre nouvelle méthode dans les simulations d’accélération par sillage laser.

Nous nous intéressons ensuite, dans le chapitre 4, à l’accélération directe par laser. On

développe tout d'abord un modèle théorique pour étudier le comportement d'un électron en interaction avec un champ laser dans le vide. On compare ensuite les résultats de différentes simulations avec les prédictions de notre modèle pour mettre en lumière les limitations numériques de ces dernières et on propose une voie d'amélioration. Le modèle précédent ayant posé les bases de l'accélération dans le vide par laser, on s'intéresse de plus près à cette technique avec des simulations de cas plus réalistes et on applique nos nouvelles méthodes numériques pour étudier plus précisément les mécanismes mis en jeu.



Première partie  
Éléments théoriques



# Chapitre 1

## Physique de l'interaction laser-plasma en régime sous-dense

*“They say a little knowledge is a dangerous thing, but it’s not one half so bad as a lot of ignorance.”*

– Terry Pratchett, *Equal Rites*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modélisation des plasmas . . . . .</b>	<b>42</b>
2.1.1	Différentes approches et échelles . . . . .	42
2.1.2	De la description microscopique à la description cinétique . . . . .	42
<b>2.2</b>	<b>La méthode Particle-In-Cell . . . . .</b>	<b>45</b>
2.2.1	Présentation générale de la méthode . . . . .	45
2.2.2	Résolution des équations de Maxwell . . . . .	46
2.2.3	Interpolation des champs . . . . .	48
2.2.4	Mouvement des particules . . . . .	50
2.2.5	Projection de la charge et des courants . . . . .	51
<b>2.3</b>	<b>Rayonnement Cherenkov numérique dans les codes PIC . . . . .</b>	<b>51</b>
2.3.1	Rayonnement Cherenkov physique . . . . .	51
2.3.2	Origine du phénomène numérique . . . . .	53
2.3.3	Techniques existantes pour réduire l’effet Cherenkov numérique . . . . .	55

---

Ce chapitre présente les principaux éléments théoriques nécessaires à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu par l’interaction laser-plasma en régime sous-dense ; on s’intéressera particulièrement à l’accélération d’électrons par sillage laser.

Méthode proposée théoriquement par Tajima et Dawson [1] en 1979, la réalisation pratique de ce type d’expériences a dû attendre quelques années et l’amélioration des techniques laser avant de pouvoir être réalisée. Les premiers résultats expérimentaux utilisant cette technique de manière concluante ont eu lieu en 2004 avec ce que la revue *Nature* a surnommé le *Dream beam* [9–11] et ont relancé l’intérêt pour des études théoriques sur le sujet. Ces faisceaux, aux propriétés remarquables, ont très vite été mis en œuvre pour de nombreuses autres applications, notamment la production de rayonnement X [27].

La section 1.1 introduit tout d’abord les notions de base de physique des plasmas ainsi que les principales caractéristiques des lasers UHI. La section 1.2 développe ensuite les modèles théoriques permettant de décrire l’accélération par sillage laser en 1D. Cette approche analytique est complétée par la présentation de modèles réduits mais tridimensionnels dans la section 1.3. Enfin la section 1.4 décrit en détail la génération de rayonnement synchrotron par les électrons accélérés dans le sillage laser.



# 1.1 Notions de base d'interaction laser-plasma

## 1.1.1 Caractéristiques des lasers UHI

Un laser produit un rayonnement cohérent pouvant avoir de nombreuses applications. Dans les cas d'accélération d'électrons par laser, les faisceaux utilisés sont caractérisés par une très courte durée d'impulsion et une très forte intensité d'où l'appellation UHI pour Ultra Haute Intensité.

### Équations de Maxwell

La propagation des ondes électromagnétiques constituant l'impulsion laser est régie par les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont les champs électrique et magnétique respectivement,  $c$ ,  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  sont respectivement la vitesse de la lumière dans le vide, la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique du vide (avec  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ ),  $\rho$  est la densité de charge et  $\mathbf{J}$  la densité de courant.

Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  peuvent aussi être décrits en termes de potentiels. On introduit alors le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et le potentiel scalaire  $\Phi$  tels que :

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.6)$$

Lors de la propagation du faisceau laser dans le vide,  $\Phi = 0$  et on peut alors complètement décrire l'impulsion à l'aide du seul potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

### Faisceau gaussien

Dans le cadre de l'interaction laser-plasma, on approxime souvent le rayonnement laser par un faisceau gaussien. En notant  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées d'espace et  $t$  le temps, on peut alors écrire pour un faisceau se propageant dans la direction  $x$  :

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathcal{A}_0(x, y, z, t) \mathcal{R}(e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}) \mathbf{e}_{pol} \quad (1.7)$$

$\mathcal{A}_0$  décrit le comportement de l'enveloppe du faisceau laser tandis que la partie exponentielle décrit les oscillations du signal à la pulsation caractéristique du laser  $\omega_0$ . La longueur d'onde du laser  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$  est une autre grandeur couramment utilisée pour caractériser une impulsion laser. La pulsation et le nombre d'onde  $k_0$  sont reliés entre eux par la relation de dispersion du milieu qui dans le vide se résume à  $k_0 = \omega_0/c$ .  $\mathbf{e}_{pol}$  est un vecteur unitaire caractérisant la direction de polarisation du laser. À noter que si le laser n'est pas trop

focalisé, alors on peut négliger la composante longitudinale de  $\mathbf{A}$  et considérer que  $\mathbf{e}_{pol}$  est perpendiculaire à la direction de propagation.

Dans le cadre de cette approximation, l'enveloppe  $\mathcal{A}_0$  du potentiel vecteur peut, en posant  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ , s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{A}_0(x, r, t) = A_0 \exp\left(-2 \ln(2) \frac{(x - ct)^2}{c^2 \tau_0^2}\right) \frac{W_0}{W(x)} \exp\left(-\frac{r^2}{W(x)^2} - i \frac{k_0 r^2}{2R(x)}\right) \exp(i\phi(x)) \quad (1.8)$$

où  $A_0$  est le maximum du potentiel vecteur,  $\tau_0$  la durée FWHM (*Full Width at Half Maximum*) de l'impulsion laser.

$W(x)$  décrit la taille transverse du faisceau à  $1/e$  du maximum du champ électrique et  $R(x)$  le rayon de courbure du front d'onde en fonction de la coordonnée  $x$ . Leurs évolutions sont illustrées à la figure 1.1 et données par :

$$W(x) = W_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{Z_r^2}} \quad (1.9)$$

$$R(x) = x \left(1 + \frac{Z_r^2}{x^2}\right) \quad (1.10)$$

avec  $W_0$  le *waist* du faisceau, c'est-à-dire son rayon transverse dans le plan focal  $x = 0$  et  $Z_r = \frac{\pi W_0^2}{\lambda_0}$  la longueur de Rayleigh. Dans ce manuscrit, on utilisera plus fréquemment la taille

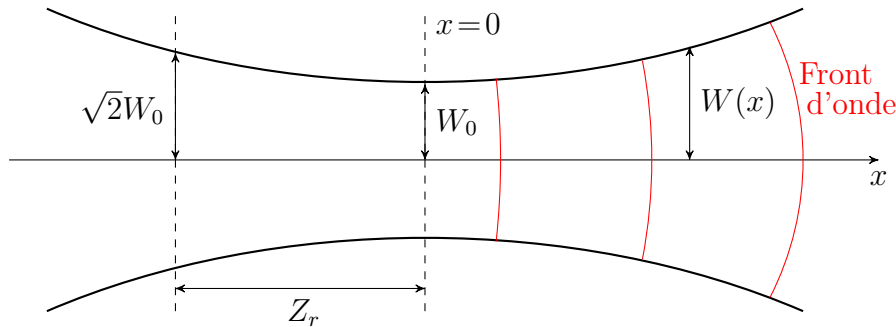


FIGURE 1.1 – Représentation de l'évolution d'un faisceau gaussien. Les courbes noires représentent la taille transverse du faisceau à  $1/e$  du maximum du champ électrique tandis que les courbes rouges donnent l'évolution de la forme du front d'onde.

de la tache focale  $w_0$  pour caractériser la taille transverse du faisceau.  $w_0$  est la largeur à mi-hauteur (FWHM) de l'intensité du faisceau et peut s'exprimer en fonction du waist par  $w_0 = \sqrt{2 \ln(2)} W_0$ .

Le terme  $\exp\left(-2 \ln(2) \frac{(x-ct)^2}{c^2 \tau_0^2}\right)$  donne la forme gaussienne à la partie temporelle de l'impulsion laser tandis que  $\frac{W_0}{W(x)} \exp\left(-\frac{r^2}{W(x)^2} - i \frac{k_0 r^2}{2R(x)}\right)$  décrit l'évolution de la distribution spatiale transverse du laser. Le terme  $\phi(x) = \arctan(x/Z_r)$  est la phase de Gouy du laser qui passe de  $-\pi$  en  $x = -\infty$  à  $\pi$  en  $x = +\infty$ .

La description du laser par un faisceau gaussien se vérifie dans le cadre de l'approximation paraxiale, c'est-à-dire que la divergence du faisceau est faible, ce qui est vérifié tant que  $W_0 \gg \lambda_0$ .

## Caractéristiques des impulsions laser et grandeurs normalisées

En utilisant l'approximation du faisceau gaussien, on peut définir, à partir de l'énergie du laser  $\mathcal{E}_0$ , quelques grandeurs caractéristiques telles que la puissance de l'impulsion  $P_0$  ainsi que son intensité maximale  $I_0$  :

$$P_0 = 2\sqrt{\frac{\ln(2)\mathcal{E}_0}{\pi\tau_0}} \quad (1.11)$$

$$I_0 = \frac{2P_0}{\pi W_0^2} \quad (1.12)$$

On peut alors exprimer  $A_0$  à partir de grandeurs facilement mesurables tel que :

$$A_0^2 = \frac{I_0\lambda_0^2}{2\pi^2\varepsilon_0c^3} \quad (1.13)$$

Dans le domaine de l'interaction laser-plasma, il est courant d'utiliser un système normalisé d'unités basé autour de la pulsation du laser  $\omega_0$ . Ainsi les grandeurs temporelles sont normalisées à  $1/\omega_0$ , les distances à  $c/\omega_0$  et les masses à la masse de l'électron  $m_e$  par exemple. Dans ce système,  $A_0$  est alors normalisé à  $m_e c/e$  ( $e$  étant la charge élémentaire) et on utilise plutôt la notation  $a_0$  telle que :

$$a_0 = \frac{eA_0}{m_e c} \quad (1.14)$$

On peut alors réécrire la formule (1.13) pour obtenir une expression avec les grandeurs usuelles :

$$a_0 = 0.85\sqrt{I_0[10^{18}\text{ W cm}^{-2}]\lambda_0[\mu\text{m}]} \quad (1.15)$$

De manière analogue, on utilise aussi fréquemment le vecteur  $\mathbf{a} = e\mathbf{A}/m_e c$  et sa norme  $a = e|\mathbf{A}|/m_e c$ . La grandeur  $a$  ainsi normalisée est très utile pour caractériser le régime d'interaction avec les électrons. Lorsque  $a \ll 1$ , les électrons réagissent de manière linéaire à l'action du laser et sont relativement peu perturbés tandis que lorsque  $a > 1$  leur mouvement devient relativiste. C'est ce dernier cas qui nous concerne dans le cas des lasers UHI.

### 1.1.2 Plasma créé par un laser

#### Création du plasma

Les plasmas considérés dans ce manuscrit sont généralement créés en envoyant une impulsion de laser UHI sur un jet de gaz, fréquemment un gaz léger tel que l'hélium. Si le laser est localement assez intense pour arracher les électrons au potentiel coulombien de leur atome, le gaz est alors ionisé et un plasma est donc créé. On appelle potentiel d'ionisation  $E_i$  l'énergie nécessaire pour qu'un électron soit définitivement arraché à son atome.

Considérons un modèle simplifié à une dimension, où  $r$  représente la distance de l'électron au noyau et  $E_0$  est la valeur du champ électrique du laser, qu'on suppose constant à l'échelle atomique. L'électron subit alors l'influence du potentiel coulombien du noyau ainsi que celle du champ extérieur. On peut alors exprimer le potentiel total pour le dernier électron lié au noyau ainsi :

$$V_{tot} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - eE_0 r \quad (1.16)$$

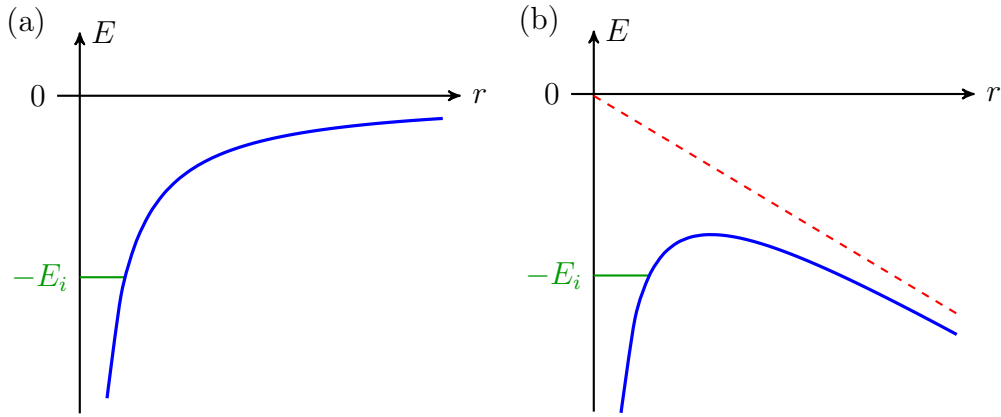


FIGURE 1.2 – Potentiel de liaison de l'électron (bleu) (a) : dans le cas non perturbé, (b) : dans le cas où le champ laser est suffisamment intense pour modifier le potentiel. La courbe en tirets rouges représente le potentiel créé par le champ laser. Le trait vert indique le niveau énergétique de l'électron.

avec  $Z$  le numéro atomique de l'atome considéré. La figure 1.2 décrit la forme du puits de potentiel dans lequel se trouve l'électron en l'absence et avec un champ extérieur  $E_0$ .

Le champ laser abaisse la barrière de potentiel à franchir pour libérer l'électron qui est maintenant donnée par  $V_{max} - E_i$  où  $V_{max}$  est le maximum atteint par  $V_{tot}$  en  $r_{max} = \sqrt{Ze/4\pi\epsilon_0 E_0}$ . Si le champ laser est suffisamment intense pour que  $V_{max} \leq -E_i$ , alors l'électron n'est plus lié au noyau et est libéré ; on parle dans ce cas d'ionisation par suppression de barrière.

L'énergie d'ionisation varie selon le degré d'ionisation, les premiers électrons étant bien plus faciles à arracher que les derniers. On note  $E_i^1$  pour la première ionisation et  $E_i^Z$  pour la dernière ionisation possible.

Avec l'intensité du champ s'écrivant  $I = \epsilon_0 c E^2$ , on peut alors exprimer l'intensité laser nécessaire à l'ionisation totale d'un atome par suppression de barrière comme :

$$I_{sb}^D = \frac{\pi^2 \epsilon_0^3 c}{2e^6 Z^2} E_i^Z{}^4 \quad (1.17)$$

On donne dans le tableau 1.1 les valeurs de premières et dernières ionisations pour quelques gaz couramment utilisés en accélération par sillage laser ainsi que les intensités nécessaires pour les ioniser totalement par suppression de barrière. Il est intéressant de noter que, pour

Atome	$E_i^1$ [62]	$E_i^Z$ [62]	$I_{sb}$
H	13.6 eV	13.6 eV	$1.4 \times 10^{14} \text{ W cm}^{-2}$
He	24.6 eV	54.4 eV	$8.8 \times 10^{15} \text{ W cm}^{-2}$
N	14.5 eV	667.0 eV	$1.6 \times 10^{19} \text{ W cm}^{-2}$
Ar	15.8 eV	4426.2 eV	$4.7 \times 10^{21} \text{ W cm}^{-2}$

TABLE 1.1 – Valeurs d'énergies d'ionisations pour quelques gaz couramment utilisés en accélération par sillage laser ainsi que les valeurs associées d'intensité de suppression de barrière  $I_{sb}$ .

l'hélium, l'intensité nécessaire à l'ionisation totale par suppression de barrière est près de trois ordres de grandeur plus faible que celle des lasers UHI (d'après la formule (1.15) avec  $a_0 = 1$ ,  $I_0 \approx 2 \times 10^{18} \text{ W cm}^{-2}$  pour  $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$ ), on peut alors considérer que le laser n'interagit qu'avec un gaz complètement ionisé.

Même si l'intensité n'est pas suffisante pour supprimer complètement la barrière, l'ionisation reste possible car les électrons ont une probabilité non nulle de la franchir. On parle alors d'ionisation par effet tunnel. La probabilité de franchir la barrière étant d'autant plus grande que la barrière est petite, ce mécanisme est donc favorisé par l'abaissement de la barrière dû au champ électrique, même s'il n'est pas suffisamment fort pour la supprimer totalement.

Enfin, pour des champs encore plus faibles l'atome peut être ionisé par absorption multiple de photons qui vont fournir à l'électron l'énergie nécessaire pour se libérer. L'intensité nécessaire pour ioniser totalement le gaz est donc en général inférieure à l'intensité  $I_{sb}$ .

On peut estimer l'énergie nécessaire pour ioniser totalement un volume  $V$  de gaz de densité atomique  $n_a$  par  $E_{ioni} = n_a V \sum E_i$ . Dans notre cas, on peut prendre  $V = 2\pi W_0^2 L$  avec  $W_0$  le waist du laser et  $L$  la distance de propagation. Ainsi avec  $W_0 \approx 10 \mu\text{m}$ ,  $L \approx 1 \text{ cm}$  et  $n_a \approx 5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , grandeurs typiques pour l'accélération par sillage laser, on trouve pour l'hélium :

$$E_{ioni} = n_a 2\pi W_0^2 L (E_i^1(\text{He}) + E_i^2(\text{He})) = 0.4 \text{ mJ} \quad (1.18)$$

L'énergie perdue par le laser pour ioniser totalement le gaz sur une distance de propagation typique est relativement minime par rapport à son énergie totale (qui est de l'ordre de quelques joules). On peut donc, dans ces cas-là, raisonnablement considérer que le laser n'interagit qu'avec un plasma totalement ionisé tout en négligeant les pertes énergétiques associées.

## Fréquence plasma

Considérons un plasma froid constitué de deux espèces : des électrons négatifs modélisés par un fluide de vitesse  $\mathbf{v}$  et de densité  $n_e$  et des ions chargés positivement, considérés comme immobiles et de densité  $n_i$  avec au repos  $n_e^0 = n_i^0 = n_0$  (on considère dans cet exemple que les ions ne sont ionisés qu'une seule fois).

La description fluide des électrons nous permet d'écrire l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.19)$$

et l'équation du mouvement :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{p} = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.20)$$

où  $\mathbf{p} = m_e \gamma \mathbf{v}$ ,  $\gamma$  étant le facteur relativiste des électrons.

En utilisant la jauge de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , on obtient à partir de l'équation de Maxwell-Gauss (1.1), l'équation de Poisson suivante :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.21)$$

On considère maintenant une petite perturbation de la densité électronique telle que  $n_e = n_0 + \delta n_e$ . Avec  $\rho = -e(n_e - n_i) = -e\delta n_e$ ,  $\mathbf{J} = -en_e\mathbf{v}$  et en considérant que le mouvement induit chez les électrons est non-relativiste ( $\gamma \approx 1$ ), on peut exprimer l'équation du mouvement au premier ordre sous la forme :

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e \nabla \Phi \quad (1.22)$$

et l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.23)$$

En combinant les trois équations (1.21), (1.22) et (1.23), on obtient finalement :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} \right) \frac{\delta n_e}{n_0} = 0 \quad (1.24)$$

On reconnaît un système d'oscillateur harmonique avec la pulsation caractéristique :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (1.25)$$

Cette pulsation est appelée pulsation plasma ou, par abus de langage, fréquence plasma. Les électrons dans leur ensemble sont soumis à une force de rappel due aux charges électrostatiques qui donnent naissance à des oscillations à la pulsation  $\omega_p$ .

On a défini ici la pulsation plasma électronique, son équivalent ionique peut se définir de manière analogue. La masse des ions étant cependant bien plus importante, cette pulsation est bien plus basse. Dans le cas du sillage laser, les principales grandeurs temporelles (période laser, durée de l'impulsion) étant de l'ordre de la période plasma électronique ( $2\pi/\omega_p$ ), les ions, qui oscillent à bien plus basse fréquence, peuvent alors être considérés comme immobiles par rapport au mouvement rapide des électrons. Dans la suite on parlera donc uniquement de la pulsation plasma électronique en négligeant le mouvement des ions.

## Propagation d'une impulsion laser dans un plasma

La propagation du laser est modifiée par le milieu dans lequel l'impulsion se déplace. Dans un plasma, en particulier, la relation de dispersion devient :

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + c^2 k_0^2 \quad (1.26)$$

À partir de cette équation on peut immédiatement identifier deux régimes différents selon la valeur de  $\omega_p$ .

Si  $\omega_p > \omega_0$  alors  $k_0$  est nécessairement complexe, ce qui conduit à la présence d'une onde évanescente dans le plasma et à la réflexion de l'onde incidente.

À l'inverse, si  $\omega_p < \omega_0$  alors  $k_0$  est réel et l'impulsion laser peut se propager dans le plasma. On parle alors de plasma sur-dense pour le premier régime et de plasma sous-dense pour le second. C'est ce dernier cas de figure qui nous intéresse dans cette thèse.

Pour un laser donné, la transition entre ces deux régimes se caractérise par une certaine valeur de densité électronique appelée densité critique  $n_c$  :

$$n_c = \frac{\omega_0^2 m_e \epsilon_0}{e^2} \quad (1.27)$$

Pour des lasers Ti :Saphir utilisés classiquement dans l'accélération par sillage avec une longueur d'onde  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ , la densité critique est alors  $n_c = 1.75 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ . Les densités considérées dans ce manuscrit sont généralement inférieures d'au moins deux ordres de grandeur à cette valeur.

La relation de dispersion permet d'obtenir la vitesse de phase  $v_\varphi$  et la vitesse de groupe  $v_g$  de l'impulsion laser dans le plasma :

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0} = c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k_0^2}} \quad (1.28)$$

$$v_g = \frac{d\omega_0}{dk_0} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k_0^2}}} \quad (1.29)$$

Contrairement à la propagation dans le vide où  $v_\varphi = v_g = c$ , ici  $v_\varphi > c$  et  $v_g < c$ .

De plus, ces vitesses dépendent, via  $\omega_p$ , de la densité électronique  $n_e$  qui va être modifiée localement par le passage du laser, rendant la propagation de l'impulsion dans le plasma non triviale. Pour décrire la réponse du milieu, on définit l'indice optique (ou de réfraction) du plasma par  $\eta = c/v_\varphi$ . Dans le cas relativiste et à faible densité ( $\omega_p^2 \ll \omega_0^2$ ),  $\eta$  a pour expression [63] :

$$\eta = \frac{c}{v_\varphi} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{n_e(r)}{n_0 \gamma(r)} \quad (1.30)$$

où  $n_0$  est la densité électronique sans perturbation,  $n_e(r)$  et  $\gamma(r)$  la densité électronique et le facteur de Lorentz des électrons en fonction de  $r$ , la distance transverse par rapport à l'axe de propagation du laser. On néglige ici les variations longitudinales de  $n_e$  et  $\gamma$  afin de s'intéresser principalement à l'évolution transverse du laser.

L'impulsion est focalisée par le plasma si  $\frac{\partial \eta}{\partial r} < 0$  (l'indice de réfraction est maximum sur l'axe). Dans le régime relativiste (donc avec  $a \gg 1$ ), on a la relation  $\gamma \simeq \sqrt{1 + a^2}$  pour les électrons, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{n_0} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \frac{\partial n_e}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{n_e}{(1 + a^2)^{3/2}} \frac{\partial a^2}{\partial r} \right) \quad (1.31)$$

L'effet du premier terme, proportionnel à  $\frac{\partial n_e}{\partial r}$ , varie selon la position longitudinale considérée dans l'impulsion laser. En effet, comme on va le voir dans la section suivante, les électrons sont éjectés sur les côtés lors du passage du laser, ce qui conduit à  $\frac{\partial n_e}{\partial r} > 0$  et à un effet focalisant pour la majorité du faisceau. Cependant, une surdensité d'électrons est aussi créée juste devant le faisceau qui peut mener à une défocalisation du front avant du laser et contribuer à la déplétion du laser en dispersant son énergie.

Avec un profil gaussien pour le laser,  $\frac{\partial a^2}{\partial r} < 0$ . Le second terme tend donc à focaliser le laser ; on appelle cet effet l'autofocalisation relativiste.

## 1.2 Accélération d'électrons par sillage laser

### 1.2.1 Onde de sillage

#### Théorie linéaire

Reprenons le modèle fluide du plasma décrit précédemment mais en considérant cette fois un champ laser incident qui vient perturber le plasma. On se place dans le cas non-relativiste tel que  $\mathbf{a} = e|\mathbf{A}|/m_e c \ll 1$  et  $\gamma \approx 1$ . Alors l'équation du mouvement (1.20) peut s'écrire en termes de potentiels :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} = -\frac{e}{m_e} \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}\right) \quad (1.32)$$

En utilisant le fait que  $\nabla \mathbf{v}^2/2 = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ , on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v} - \frac{e}{m_e} \mathbf{A}\right) = \nabla \left(\frac{e}{m_e} \Phi - \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \mathbf{v} \times \left[\nabla \times \left(\mathbf{v} - \frac{e}{m_e} \mathbf{A}\right)\right] \quad (1.33)$$

On peut alors montrer, en prenant le rotationnel de cette équation, que l'évolution du terme  $\nabla \times \left(\mathbf{v} - \frac{e}{m_e} \mathbf{A}\right)$  dépend de sa propre valeur initiale. Or  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{A}$  étant nuls initialement en l'absence de perturbation, on en déduit que  $\nabla \times \left(\mathbf{v} - \frac{e}{m_e} \mathbf{A}\right) = 0$  à tout instant et on peut finalement écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi - \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (1.34)$$

On considère un plasma fortement sous-dense et la création d'une onde plasma de très faible amplitude tels que le champ électrique du laser soit bien plus important que le champ électrostatique dû au plasma, soit  $\nabla \Phi \ll \partial \mathbf{A}/\partial t$ .

On adopte une approche perturbative et on note  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  avec  $\mathbf{v}_1$  la composante linéaire de premier ordre de la vitesse et  $\mathbf{v}_2$  sa composante au second ordre. Avec ces notations, le premier ordre de l'équation (1.34) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.35)$$

et on en déduit alors :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{e}{m_e} \mathbf{A} \quad (1.36)$$

Les électrons suivent donc, au premier ordre, les variations du champ laser et adoptent un mouvement oscillant à la fréquence du laser qui résulte en un mouvement moyen nul et ne contribue donc pas à l'excitation d'une onde de sillage. Au second ordre, l'équation (1.34) permet d'obtenir :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \nabla \Phi - \nabla \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} \quad (1.37)$$

$$= \frac{e}{m_e} \nabla \Phi - \frac{e^2}{m_e^2} \nabla \frac{\mathbf{A}^2}{2} \quad (1.38)$$



Puisque le plasma est fortement sous-dense, les oscillations laser sont bien plus rapides que la réponse du plasma ( $\omega_p \ll \omega_0$ ). On suppose aussi que la durée du laser  $\tau_0$  est suffisamment grande pour que les oscillations laser soient bien plus rapides que la variation temporelle du laser ( $1/\omega_0 \ll \tau_0$ ). La moyenne temporelle de l'équation (1.33) sur une période laser conduit donc à faire disparaître le premier ordre  $\mathbf{v}_1$ , car  $\langle \mathbf{v}_1 \rangle = 0$ , ce qui nous donne donc  $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \rangle$  et on obtient finalement :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \nabla \Phi - \frac{e^2}{m_e^2} \nabla \frac{\langle \mathbf{A}^2 \rangle}{2} \quad (1.39)$$

Le terme  $-\frac{e^2}{m_e} \nabla \frac{\langle \mathbf{A}^2 \rangle}{2}$  correspond à la force moyenne exercée par le champ laser sur les électrons et est responsable de leur mise en mouvement ; cette force est appelée force pondéromotrice du laser. On peut généraliser son expression pour toute particule chargée non-relativiste dans un champ laser par :

$$\mathbf{F}_{pond} = -\frac{q^2}{m} \nabla \frac{\langle \mathbf{A}^2 \rangle}{2} \quad (1.40)$$

où  $q$  et  $m$  sont respectivement la charge et la masse de la particule considérée.  $\mathbf{F}_{pond}$  est proportionnelle au gradient de l'intensité du laser et va donc expulser les particules des zones de champs forts. En particulier les électrons sont repoussés longitudinalement et latéralement hors du laser lors de son passage dans le plasma. À cause de la dépendance quadratique en fonction de la charge, l'effet de cette force est le même quel que soit le signe de la charge des particules. La présence de la masse au dénominateur nous indique que l'effet sur les ions sera bien moins important que sur les électrons (puisque  $m_{proton} \approx 1900 m_e \gg m_e$ ). L'hypothèse des ions immobiles est donc justifiée.

La force pondéromotrice va donc créer une séparation de charge dans le plasma en perturbant la densité électronique sans mettre en mouvement les ions. On considère que la propagation du laser dans le plasma introduit une faible perturbation de la densité électronique telle que  $n_e = n_0 + \delta n_e$ . En introduisant les grandeurs normalisées  $\mathbf{a} = e\mathbf{A}/m_e c$  et  $\phi = e\Phi/m_e c^2$ , on peut réécrire l'équation (1.39) :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = c^2 \nabla \phi - c^2 \nabla \frac{\langle \mathbf{a}^2 \rangle}{2} \quad (1.41)$$

En utilisant l'équation de Poisson (1.21), l'équation de continuité (1.23) et l'équation du mouvement moyennée sur une période laser (1.41), on obtient finalement l'équation suivante pour la perturbation de densité :

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} + \omega_p^2 \delta n_e = c^2 n_0 \nabla^2 \frac{\langle \mathbf{a}^2 \rangle}{2} \quad (1.42)$$

La perturbation du plasma se comporte donc comme un oscillateur harmonique de fréquence  $\omega_p$  excité par la force pondéromotrice du laser. En effet, les électrons du plasma sont repoussés par le laser sous l'action de la force pondéromotrice, créant ainsi une modulation de la densité électronique dans le laser qui perdure après le passage de l'impulsion.

Le laser entraîne donc l'apparition d'une onde plasma dans son sillage (la perturbation n'apparaissant pas avant le passage du laser), on parle alors d'onde de sillage (*wakefield* en anglais) d'où le nom d'accélération par sillage laser (*Laser WakeField Acceleration* ou LWFA en anglais).

Le potentiel électrostatique normalisé  $\phi$  vérifie une équation similaire :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \phi = \omega_p^2 \frac{\langle \mathbf{a}^2 \rangle}{2} \quad (1.43)$$

Dans le cadre de l'approximation quasi-statique, on suppose que l'enveloppe de l'impulsion laser varie peu pendant le temps de transit d'un électron du plasma dans l'impulsion laser. Les potentiels et grandeurs fluides peuvent alors être exprimés uniquement en fonction de  $\mathbf{r}$  et  $\xi = x - v_s t$  où  $v_s$ , la vitesse du sillage, est la vitesse de phase de l'onde plasma qui est égale à la vitesse de groupe  $v_g$  du laser puisque c'est ce dernier qui excite la perturbation ( $x$  étant toujours la direction de propagation du faisceau). Si on suppose de plus que  $v_g \approx c$  puisque le plasma est fortement sous-dense, on peut reformuler l'équation (1.43) sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}(\xi, \mathbf{r}) + k_p^2 \phi(\xi, \mathbf{r}) = k_p^2 \frac{\langle \mathbf{a}(\xi, \mathbf{r})^2 \rangle}{2} \quad (1.44)$$

avec  $k_p = \omega_p/c$  et  $\langle \mathbf{a}(\xi, \mathbf{r})^2 \rangle$  dépendant de la forme de l'enveloppe laser étudiée.

On peut intégrer l'équation (1.44) et exprimer le potentiel  $\phi$  en fonction de la forme de l'impulsion laser choisie :

$$\phi(\xi, \mathbf{r}) = \frac{k_p}{2} \int_{\xi}^{\infty} \langle \mathbf{a}(\xi', \mathbf{r})^2 \rangle \sin(k_p(\xi - \xi')) d\xi' \quad (1.45)$$

On calcule le champ électrique à partir de  $\phi$  en utilisant  $E_x = -\partial\phi/\partial\xi$  et  $E_r = \partial\phi/\partial r$ . On peut alors montrer que le champ électrique longitudinal oscille sinusoïdalement à la longueur d'onde plasma  $\lambda_p$ , alternant zones accélératrices et décélératrices de longueur  $\lambda_p/2$  pour les électrons. De même, le champ transverse alterne zones focalisantes et défocalisantes pour les électrons de longueur  $\lambda_p/2$ . En conséquence, seule une zone d'une longueur  $\lambda_p/4$  est à la fois accélératrice et focalisante et peut être utilisée pour l'accélération de particules.

## Théorie non linéaire

La théorie précédente permet de comprendre intuitivement le phénomène de création d'onde de sillage dans les plasmas mais elle ne permet pas de décrire les cas réalistes d'accélération par sillage laser où les effets non linéaires et relativistes sont prépondérants.

En se plaçant toujours dans le cadre de l'approximation quasi statique, il est possible de développer un modèle relativiste qui aboutit dans le cas unidimensionnel à l'équation non linéaire sur le potentiel  $\phi$  suivante [64] :

$$\frac{1}{k_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \gamma_s^2 \left[ \beta_s \left( 1 - \frac{1 + a^2}{\gamma_s^2 (1 + \phi)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (1.46)$$

où  $\beta_s = v_s/c$  est la vitesse normalisée de l'onde de sillage (avec toujours  $v_s = v_g$ ) et  $\gamma_s = 1/\sqrt{1 - \beta_s^2}$  le facteur de Lorentz associé.

Pour un plasma fortement sous-dense,  $\beta_s \approx 1$  et  $\gamma_s \gg 1$ , cette équation se simplifie en :

$$\frac{1}{k_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + a^2}{(1 + \phi)^2} - 1 \right) \quad (1.47)$$

et la perturbation de densité est donnée par :

$$\frac{\delta n}{n_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + a^2}{(1 + \phi)^2} - 1 \right) \quad (1.48)$$

Ces équations peuvent être intégrées numériquement et deux exemples de solutions sont donnés à la figure 1.3, l'une dans le cas non relativiste avec  $a_0 = 0.2$  et l'autre dans le cas relativiste avec  $a_0 = 2$ . L'impulsion laser est choisie avec un profil temporel gaussien tel que  $a(\xi) = a_0 \exp[-\xi^2/2\sigma_0^2]$  avec  $\sigma_0 = \lambda_p/\sqrt{2 \ln(2)}$ .

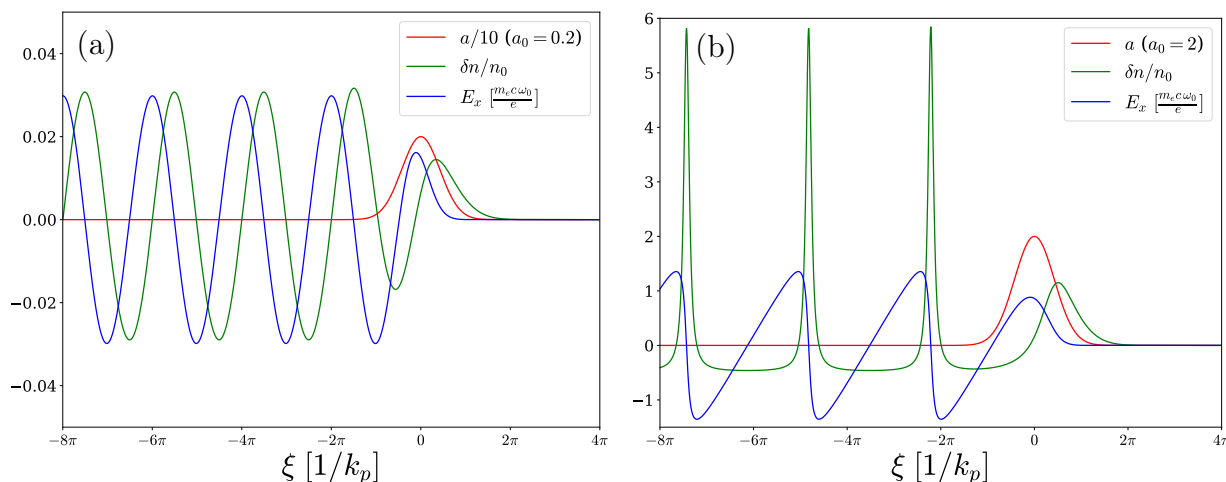


FIGURE 1.3 – Perturbation électronique (vert) et champ électrique longitudinal (bleu) pour une impulsion laser gaussienne avec (a)  $a_0 = 0.2$  (cas linéaire) et (b)  $a_0 = 2$  (cas non-linéaire).

On remarque qu'on retrouve bien à la figure 1.3, dans le cas non relativiste, le comportement décrit par la théorie linéaire précédente avec des oscillations sinusoidales de faible amplitude à la longueur d'onde plasma. En effet, en faisant dans ce cas l'hypothèse d'une faible perturbation du plasma (donc  $\phi \ll 1$  et  $\delta n/n_0 \ll 1$ ) on peut linéariser les équations (1.47) et (1.48) pour retrouver les équations (1.44) et (1.42).

Dans le cas relativiste, le comportement fortement non linéaire apparaît avec de forts pics de densité et un champ électrique asymétrique dans le sillage, comme on l'observe à la figure 1.3. On note d'ailleurs que la périodicité des pics de densité n'est plus  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$  à cause des effets relativistes mais une longueur un peu plus grande. Entre chacune de ces surdensités se trouve une zone de densité électronique constante avec  $\delta n \approx -n_0/2$  qu'on appelle cavité ionique. Le profil du champ électrique longitudinal est donc en dents de scie, avec entre chaque pic de densité une évolution quasi-linéaire de  $E_x$  en fonction de la position  $\xi$ , passant d'un minimum  $-E_{max}$  à un maximum  $E_{max}$  sur la longueur de la cavité. Le champ électrique est donc accélérateur pour les électrons ( $E_x < 0$ ) sur la moitié de cette longueur, de l'arrière au milieu de la cavité.

Notons que le caractère 1D de cette modélisation limite  $\delta n$  à  $-n_0/2$ . Cependant en 2D ou 3D, comme nous allons le voir dans la suite, l'expulsion transverse des électrons permet d'atteindre  $\delta n \approx -n_0$  et donc  $n_e \approx 0$  si  $a_0$  est suffisamment grand. Il ne reste donc plus que des ions, d'où le nom de cavité ionique donné à cette zone (même si elle n'est pas complètement vide d'électrons dans notre modèle 1D).

Si on arrive à placer des électrons dans cette zone, qui se déplace avec le reste du sillage à la vitesse  $v_s \approx c$ , ils pourront se déplacer en phase avec l'onde de sillage et bénéficier des champs accélérateurs sur de longues distances pour atteindre des énergies très élevées. Nous verrons dans la section suivante différentes méthodes pour injecter des électrons dans cette zone accélératrice de la cavité ionique.

Nous avons jusqu'à présent considéré uniquement l'effet des électrons du plasma à travers les équations fluides, qui décrivent le mouvement des électrons constituant l'onde plasma. Les électrons placés dans la zone accélératrice génèrent cependant leurs propres champs électromagnétiques. Avec un faisceau accéléré de faible charge, on peut négliger son influence et utiliser les équations précédentes. Cependant, une charge injectée importante va modifier sensiblement le potentiel et perturber le plasma [65], on parle alors de *beamloading*. Cet effet a été observé expérimentalement dans les cas d'accélération par sillage laser [66].

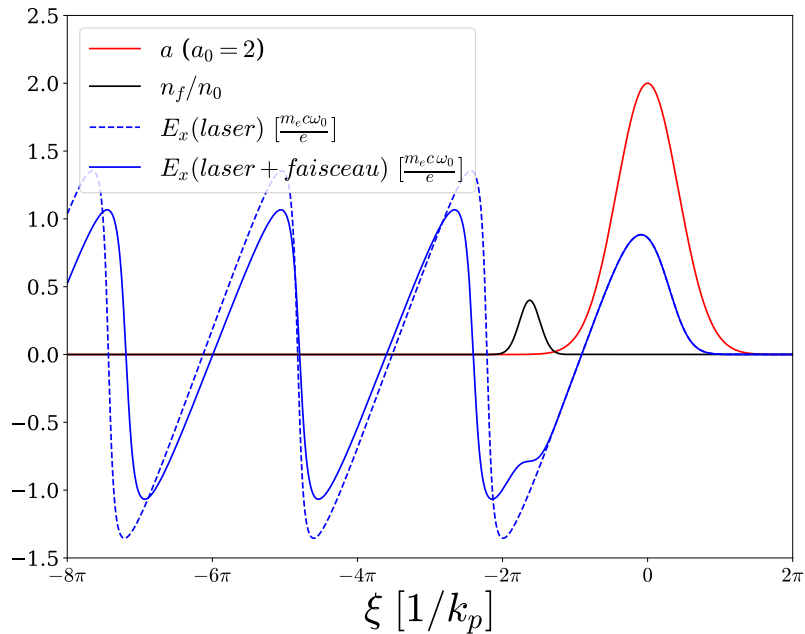


FIGURE 1.4 – Effet du *beamloading* sur le champ  $E_x$  avec un faisceau électronique gaussien de densité  $n_{f,0} = 0.4 n_0$  et  $\sigma_{f,0} = \pi/4 k_p$ .

On peut modifier l'équation (1.46) pour tenir compte du faisceau injecté en considérant un terme de densité supplémentaire  $n_f$ , la densité électronique du faisceau, avec  $n = n_0 + n_f + \delta n$ . On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{1}{k_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \gamma_s^2 \left[ \beta_s \left( 1 - \frac{1 + a^2}{\gamma_s^2 (1 + \phi)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] + \frac{n_f(\xi)}{n_0} \quad (1.49)$$

On peut résoudre cette équation numériquement de manière similaire à l'équation précédente (toujours dans le cas d'un plasma fortement sous-dense). La figure 1.4 compare les champs électriques longitudinaux obtenus avec un profil de faisceau gaussien tel que  $n_f(\xi) = n_{f,0} \exp[-(\xi - \xi_{f,0})^2/2\sigma_{f,0}^2]$  et en l'absence de faisceau injecté  $n_f = 0$ .  $n_{f,0}$  est la densité maximale du faisceau en son centre à la position  $\xi_{f,0}$  et  $\sigma_{f,0}$  est la longueur du faisceau.

On observe que la présence du faisceau mène à un allongement de la cavité et à une diminution du champ accélérateur. Une trop forte charge va donc avoir tendance à limiter les performances de l'accélération en diminuant l'énergie maximale pouvant être atteinte par les électrons. Le *beamloading* peut cependant aussi être utilisé pour améliorer le caractère mono-énergétique du faisceau [67]. En effet, la présence du faisceau avec une densité  $n_f(\xi)$  optimale induit un "aplatissement" du champ accélérateur, comme on peut partiellement le voir à la figure 1.4. En contrôlant la charge injectée, il est ainsi possible d'obtenir un champ quasiment égal dans la zone où se trouve le faisceau d'électrons, ce qui mène à une accélération identique pour l'ensemble du faisceau et donc une très faible dispersion en énergie.

Ce nouveau modèle nous permet de rendre compte des effets relativistes mis en jeu lors de l'accélération par sillage laser mais il reste fortement limité par son caractère unidimensionnel. Il ne prend ainsi pas en compte les effets défocalisants des champs dus au plasma comme on a pu les observer dans le modèle linéaire ou l'effet de la composante transverse de la force pondéromotrice. Ce dernier effet est particulièrement important car, dans notre modèle, la perturbation est limitée à  $\delta n > -n_0/2$  alors qu'on observe dans les cas tridimensionnels des cavités entièrement vidées d'électrons. On décrira, à la section 1.3, un modèle simplifié permettant de rendre compte de ces phénomènes.

## 1.2.2 Piégeage et accélération d'électrons

La description fluide utilisée jusqu'à présent ne permet pas de décrire le phénomène d'injection d'électrons dans l'onde de sillage. On peut cependant étudier l'accélération d'un électron dans une onde de sillage déjà formée par une approche hamiltonienne. Toujours dans le cadre de l'approximation quasi statique, on peut montrer que l'hamiltonien  $H$  d'un électron du plasma s'exprime alors en 1D [64, 68] :

$$H(\xi, p_x) = \sqrt{1 + a^2(\xi) + p_x^2} - \beta_s p_x - \phi(\xi) \quad (1.50)$$

où  $p_x$  est l'impulsion longitudinale de l'électron.

L'hamiltonien d'une particule ne dépendant pas explicitement de  $t$ , il se conserve au cours du temps. Une particule se trouvant au temps  $t_0$  aux coordonnées  $(\xi_0, p_{x,0})$  est caractérisée par l'hamiltonien  $H_0 = H(\xi_0, p_{x,0})$ . Connaissant  $H_0$ , on peut alors exprimer l'impulsion longitudinale de l'électron en fonction de  $\xi$  sous la forme :

$$p_x(\xi) = \beta_s \gamma_s^2 (H_0 + \phi) \pm \gamma_s \sqrt{\gamma_s^2 (H_0 + \phi)^2 - (1 + a^2(\xi))} \quad (1.51)$$

Les électrons du plasma sont initialement au repos (le plasma étant supposé froid) on a donc  $p_x = 0$ ,  $p_\perp = a = 0$  ( $p_\perp$  étant l'impulsion transverse de l'électron) et  $\phi = 0$  ce qui nous donne alors  $H_0 = 1$ . Cet hamiltonien, qu'on note alors  $H_f$ , définit ce qu'on appelle l'orbite fluide que vont suivre les électrons du plasma : ils vont osciller dans l'onde de sillage sans être piégés et ne vont donc en moyenne pas gagner d'énergie.

On appelle séparatrice l'orbite qui marque la limite entre les orbites piégées dans l'onde de sillage et les orbites libres telles que l'orbite fluide et on note l'hamiltonien correspondant à cette orbite  $H_{sep}$ . Elle est définie par une vitesse de l'électron égale à la vitesse du sillage  $\beta_x =$

$\beta_s$  au minimum du potentiel électrostatique  $\phi_{min} = \phi(\xi_{min})$ . L'hamiltonien correspondant est alors donné par :

$$H_{sep} = \frac{1}{\gamma_s} \sqrt{1 + a^2(\xi_{min})} - \phi_{min} \quad (1.52)$$

Cet hamiltonien correspond à l'énergie nécessaire à l'injection d'un électron dans la cavité ionique.

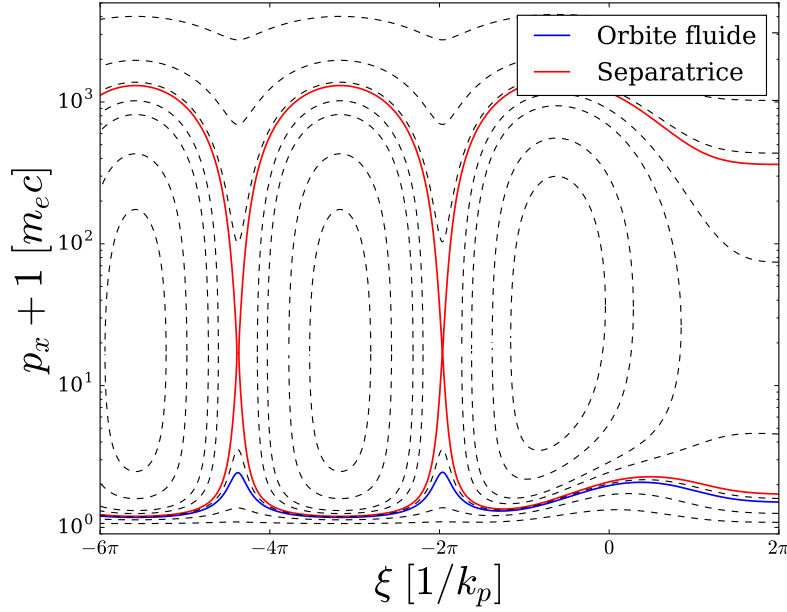


FIGURE 1.5 – Trajectoires possibles pour les électrons dans l'espace des phases  $(1 + p_x, \xi)$  calculées à partir de l'équation (1.51). L'orbite fluide est tracée en bleu, la séparatrice en rouge, les pointillés noirs donnent plusieurs exemples divers d'orbites possibles.

On trace à la figure 1.5 quelques orbites possibles des électrons dont l'orbite fluide et la séparatrice. On voit sur cette figure que les électrons piégés dans l'onde de sillage ont des orbites fermées d'où le terme de "piégeage" : les électrons suivant ces orbites ne peuvent s'échapper de la cavité dans laquelle ils se trouvent. À l'inverse les électrons sur des orbites ouvertes ne peuvent franchir la séparatrice et être injectés sans intervention extérieure.

Les électrons piégés peuvent gagner énormément d'énergie grâce au champ électrique accélérateur, jusqu'à se déplacer plus rapidement que l'onde de sillage elle-même. Ils vont alors progressivement la dépasser et arriver dans la zone décélétratrice du champ électrique qui va progressivement les ralentir jusqu'à ce qu'ils se retrouvent à nouveau dans la zone accélétratrice. C'est ce que représentent les orbites fermées des électrons piégés. L'impulsion longitudinale  $p_x$  de l'électron augmente en suivant l'orbite fermée jusqu'à atteindre son maximum. Puis commence alors la décélétration jusqu'à atteindre le  $p_x$  minimum.

La longueur de propagation dans le plasma nécessaire pour qu'un électron tout juste injecté en  $\xi_{min}$  atteigne la fin de la zone accélétratrice de la cavité, et ainsi son énergie maximum, est appelée longueur de déphasage et est donnée par  $L_{dph} \approx \gamma_s^2 \lambda_p$  [69]. Plus la longueur de déphasage est grande, plus grand peut être le gain en énergie. L'idéal étant de pouvoir accélérer les électrons sur une distance équivalente à la longueur de déphasage

pour bénéficier du gain maximum avant que les électrons commencent à entrer dans la zone décélétratrice.

### 1.2.3 Méthodes d'injection

Le contrôle de l'injection des électrons dans la cavité accélératrice est primordial pour garantir une bonne qualité de faisceau. On a vu en effet qu'elle pouvait jouer sur son gain et sa dispersion en énergie via les effets de *beamloading*, mais sa divergence et sa reproductibilité sont aussi fortement affectées par la méthode utilisée. Nous présentons dans cette section quelques techniques parmi les plus utilisées.

#### **Auto-injection :**

Comme on l'a vu à la section 1.1, le laser va évoluer au cours de sa propagation. Son intensité va augmenter à cause de l'autofocalisation relativiste dans le plasma, la création de l'onde plasma va entraîner une perte d'énergie et l'action défocalisante de la surdensité électronique devant le faisceau va entraîner un raidissement de son front d'onde avant.

Ces modifications de l'impulsion laser influent sur la force pondéromotrice et donc sur le comportement de la perturbation du plasma. La taille de la cavité ionique créée derrière le laser va notamment voir sa longueur évoluer ainsi au fil de la propagation. Certains électrons de l'onde de sillage peuvent alors se retrouver dans les champs accélérateurs de l'arrière de la cavité lorsque celle-ci s'étend, leur permettant de gagner l'énergie nécessaire pour se déplacer en phase avec l'onde de sillage. Si on reprend la vision hamiltonienne développée plus tôt, cela correspond à un petit abaissement de la séparatrice qui permet localement à certains électrons d'être injectés dans la cavité accélératrice [70, 71].

Cette méthode permet de produire des faisceaux de charge relativement importante et a l'avantage d'être très simple à mettre en place puisque l'injection se fait naturellement [17] (à condition que l'intensité laser dépasse un certain seuil pour que l'auto-focalisation se produise). Elle est cependant difficile à contrôler précisément puisqu'elle repose sur des phénomènes d'optique non linéaire (évolution contrôlée de l'impulsion laser dans le plasma) et peut conduire à des résultats peu reproductibles et une grande dispersion énergétique.

#### **Injection par gradient de densité :**

En utilisant le même principe que l'auto-injection, la longueur de la cavité peut être modifiée par d'autres mécanismes. En particulier, la densité électronique du plasma dans lequel se propage le laser influe directement sur la longueur d'onde plasma et donc sur la taille de la cavité. Ainsi, lorsqu'une onde de sillage laser passe d'un plasma de densité électronique  $n_1$  à un plasma de densité  $n_2$  moins importante, la cavité va s'allonger et permettre l'injection d'électrons [72, 73]. Cette technique est relativement simple à mettre en place expérimentalement et permet un assez grand contrôle de l'injection à condition de pouvoir créer les profils de densité plasma voulus [74].

## Injection optique :

Les deux méthodes précédentes reviennent à abaisser la séparatrice pour injecter des électrons fluides. Une autre approche est de fournir aux électrons suffisamment d'énergie pour franchir la séparatrice et être injectés dans la cavité. C'est le principe de l'injection optique qui utilise un ou plusieurs faisceaux laser supplémentaires pour créer localement un surplus de force, venant directement ou indirectement du ou des lasers additionnels, qui permet aux électrons de gagner l'énergie nécessaire à leur injection [75–77].

Cette technique offre une bonne stabilité et un grand contrôle sur l'injection, permettant de choisir la position d'injection et donc l'énergie finale, mais elle est très difficile à mettre en place car elle requiert des alignements et synchronisations très précis des faisceaux laser et peut aussi introduire une assez forte dispersion énergétique.

## Injection par ionisation :

Nous avons vu à la section 1.1 que les gaz légers comme l'hydrogène ou l'hélium sont généralement totalement ionisés par les faisceaux laser ultra-intenses. Cependant des espèces de numéro atomique plus élevé comme l'azote demandent des intensités très élevées pour être totalement ionisés par le champ du laser ( $I_{sb} = 1.6 \times 10^{19} \text{ W cm}^{-2}$  pour l'azote). L'énergie d'ionisation pour les deux derniers électrons de l'azote est en effet très importante comparée à celle des cinq premiers. Il faut ainsi une intensité laser de seulement  $7.5 \times 10^{15} \text{ W cm}^{-2}$  pour ioniser l'azote en  $\text{N}^{5+}$  mais jusqu'à  $7.6 \times 10^{18} \text{ W cm}^{-2}$  pour passer au  $\text{N}^{6+}$ . Cela veut dire qu'un faisceau laser ultra intense ionisera facilement un gaz de  $\text{N}_2$  en  $\text{N}^{5+}$  mais que l'ionisation en  $\text{N}^{6+}$  ne se fera que très proche du maximum d'intensité de l'impulsion.

Il est possible de tirer parti de ces propriétés en utilisant un mélange composé d'un gaz léger et d'une faible proportion d'un gaz plus lourd (un mélange 99% He, 1%  $\text{N}_2$  est courant). Le gaz léger est alors totalement ionisé mais le gaz plus lourd n'est ionisé que partiellement par le début de l'impulsion laser. L'ionisation des derniers niveaux du gaz plus lourd ne se fait qu'au niveau du pic d'intensité et permet donc la création d'électrons libres avec une impulsion initiale quasi-nulle directement dans la cavité. Ces électrons vont donc pouvoir bénéficier des champs accélérateurs de la cavité pour gagner l'énergie nécessaire à leur injection.

Cette méthode gagne en popularité car elle est très simple à mettre en place et permet d'injecter des charges relativement importantes. Elle tend cependant à faire perdre le caractère monoénergétique du faisceau car l'injection a lieu tout au long de la propagation du laser dans le plasma [78, 79].

## 1.3 Modèle 3D : la bulle

Les modèles précédents permettent de comprendre relativement facilement les mécanismes responsables de l'accélération par sillage et donnent de premières lois d'échelle. Cependant, si l'on veut décrire de manière réaliste le mouvement des particules accélérées, il est nécessaire de tenir compte des effets transverses, particulièrement en régime relativiste ( $a_0 > 1$ ), et donc d'utiliser un modèle tridimensionnel.



### 1.3.1 Présentation des modèles et lois d'échelle

Les phénomènes mis en jeu sont bien trop complexes pour permettre de développer un modèle 3D analytique complet. On utilise ainsi généralement des modèles réduits, basés sur des hypothèses simplificatrices justifiées par des observations expérimentales et des simulations numériques. L'hypothèse principale est de considérer que la force pondéromotrice du laser va expulser hors axe la totalité des électrons rencontrés sur son passage, créant ainsi derrière lui une cavité entièrement dépourvue d'électrons, comme illustré à la figure 1.6.

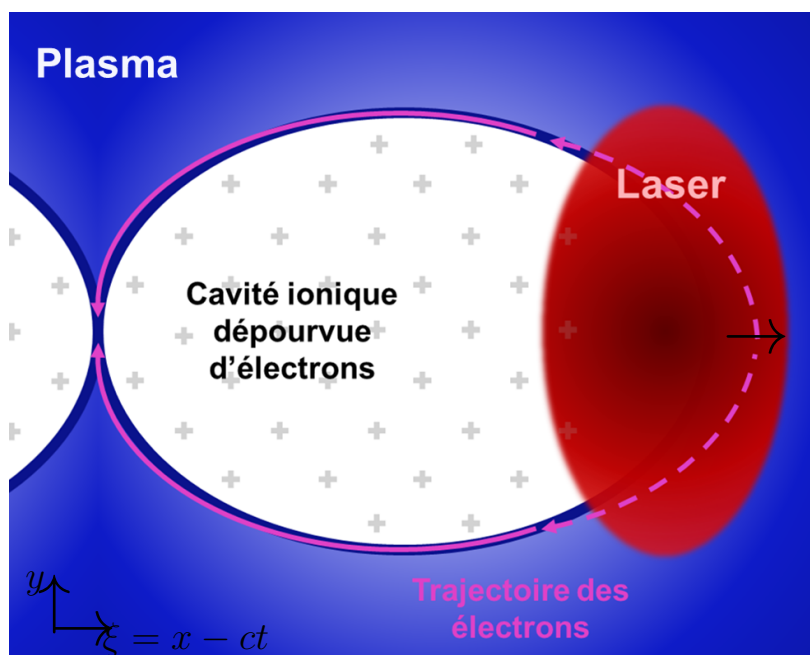


FIGURE 1.6 – L'impulsion laser (rouge) se propage dans le plasma (bleu). Les électrons rencontrés sont repoussés sur les côtés par la force pondéromotrice longitudinale et transverse du laser, créant une cavité ionique (blanc) derrière celui-ci (trajectoire des électrons en pointillés roses). La présence des ions chargés positivement dans la bulle mène à l'apparition de champs focalisants qui agissent comme une force de rappel sur les électrons (trajectoire des électrons en trait plein rose).

Deux principaux modèles ont été proposés pour décrire la cavité ionique dans le cas de l'accélération par sillage laser : le modèle de la bulle [56, 80] puis le modèle du *blowout* [57, 81, 82]. Pour des fortes intensités ( $a_0 > 4$ ), les deux modèles sont en bon accord car la forme de la cavité tend alors vers une forme parfaitement sphérique, ce qui est présupposé par le premier, d'où son nom de modèle de la bulle. On a alors le rayon  $R$  de la bulle donné par la relation :

$$k_p R \approx k_p w_0 = 2\sqrt{a_0} \quad (1.53)$$

Cette relation semi-empirique, qui dérive de l'équilibre entre la force pondéromotrice transverse du laser et la force de rappel exercée par les ions de la cavité, assure aussi une bonne auto-focalisation de l'impulsion laser, ce qui permet de conserver un laser focalisé et intense sur les distances requises par l'accélération par sillage.

Pour une cavité ionique parfaitement sphérique et dans l'approximation quasi statique,

les champs électromagnétiques dus au plasma se réduisent alors à :

$$E_x = \frac{1}{2} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 \xi, \quad B_x = 0 \quad (1.54)$$

$$E_y = -cB_z = \frac{1}{4} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 y \quad (1.55)$$

$$E_z = cB_y = \frac{1}{4} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 z \quad (1.56)$$

avec  $\xi = x - v_s t$  choisi tel que  $\xi = 0$  correspond au centre de la bulle,  $v_s$  étant la vitesse à laquelle se déplace le sillage laser dans le plasma. On retrouve comme précédemment un champ électrique longitudinal accélérateur pour les électrons à l'arrière de la bulle permettant le gain d'énergie pour les électrons injectés.

Le laser perd de l'énergie en mettant les électrons en mouvement et en créant l'onde de sillage ; on parle de déplétion laser. À partir de la théorie 1D non-linéaire, on peut calculer la vitesse à laquelle s'érode le front avant de l'impulsion :  $v_d = \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} c$  [83]. On définit alors la longueur de déplétion  $L_d$  comme la longueur que peut parcourir l'impulsion laser avant d'avoir dissipé toute son énergie. On peut l'exprimer ainsi :

$$L_d = \frac{c}{v_d} c\tau_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} c\tau_0 \quad (1.57)$$

Ce phénomène va ralentir la propagation de l'onde de sillage qui ne se déplace alors plus à la vitesse de groupe du laser  $v_g$  mais à la vitesse  $v_s = v_g - v_d$ . En utilisant l'équation (1.29) dans le cas où  $\omega_p \ll \omega_0$ , on peut obtenir l'approximation suivante pour la vitesse du sillage :

$$v_s \simeq c \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \quad (1.58)$$

L'accélération des électrons injectés ayant lieu de  $\xi = -R$  à  $\xi = 0$ , il arrive un moment où les électrons ont gagné suffisamment d'énergie pour se déplacer plus vite que le sillage et sortir de cette zone accélératrice. La longueur de déphasage  $L_{dph}$  correspond à la longueur parcourue par le laser avant que cela arrive. Cette longueur est donc caractérisée par l'égalité  $R/(c - v_s) = L_{dph}/c$ , qu'on peut réécrire :

$$L_{dph} = \frac{c}{c - v_s} R \simeq \frac{2}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} R \quad (1.59)$$

Pour une utilisation optimale de l'énergie, on cherche à avoir la longueur de déplétion de l'impulsion laser  $L_d$  équivalente à celle de déphasage :  $L_d \approx L_{dph}$ . Ainsi toute l'énergie du laser est utilisée pour permettre aux électrons d'atteindre leur énergie maximale. Dans ce cas-là, d'après les équations (1.59) et (1.57), on obtient la condition :

$$c\tau_0 \approx \frac{2}{3} R \quad (1.60)$$

### 1.3.2 Mouvement des électrons dans la bulle

D'après les lois du régime de bulle, les champs de la cavité vont créer une force transverse de rappel proportionnelle à la position transverse des électrons [56, 81]. Cette force de rappel va donc créer des oscillations des électrons autour de l'axe qu'on appelle oscillations bêtatrons.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est gouverné par son équation de mouvement faisant intervenir la force de Lorentz :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.61)$$

où  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{v}$  sont les vecteurs impulsion et vitesse de la particule. Nous allons étudier le mouvement transverse des électrons uniquement dans le plan  $xy$ , les calculs étant similaires dans le plan  $xz$ .

À partir de l'équation (1.61) et des expressions des champs de la bulle (1.54) et (1.55), on obtient l'équation de mouvement suivante :

$$\frac{dp_y}{dt} = -e(E_y + v_z B_x - v_x B_z) = -\frac{1}{4}(1 + \beta_x)m_e\omega_p^2 y \quad (1.62)$$

où  $v_x, v_z$  sont la vitesse de l'électron dans les directions  $x$  et  $z$  respectivement et  $\beta_x = v_x/c$ . En considérant que  $\beta_x \approx 1$ , on retrouve donc effectivement une force linéaire avec la position  $y$  :

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{1}{2}m_e\omega_p^2 y \quad (1.63)$$

En utilisant le fait que  $p_y = m_e\gamma v_y$  et en notant  $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ , on peut réécrire le premier terme de l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{dp_y}{dt} = m_e\dot{\gamma}\dot{y} + m_e\gamma\ddot{y} \quad (1.64)$$

Ce qui nous permet d'obtenir au final l'équation :

$$\ddot{y} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\dot{y} + \frac{\omega_p^2}{2\gamma}y = 0 \quad (1.65)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique amorti, oscillant à la fréquence caractéristique  $\omega_\beta = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\gamma}}$  et avec le coefficient d'amortissement  $\alpha = \frac{\dot{\gamma}}{2\gamma}$ . La fréquence  $\omega_\beta$  est appelée fréquence bêtatron et est fonction du temps car elle dépend de  $\gamma(t)$  qui varie au cours de l'accélération des électrons. On trouve la même équation pour la coordonnée  $z$ .

En supposant que l'angle d'oscillation des électrons autour de l'axe de propagation reste faible, l'accélération des électrons est alors principalement due à l'action du champ électrique longitudinal. Dans ce cas-là, dans l'approximation adiabatique (c'est-à-dire telle que  $\frac{1}{\omega_\beta^2} \frac{d\omega_\beta}{dt} \ll 1$ ), on peut utiliser la méthode Wentzel-Kramers-Brillouin et montrer que l'équation (1.65) admet pour solutions des trajectoires de la forme [20, 56] :

$$y(t) = y_0 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \cos \left( \int_{t_0}^t \omega_\beta(t') dt' + \psi_y \right) \quad (1.66)$$

$$z(t) = z_0 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \cos \left( \int_{t_0}^t \omega_\beta(t') dt' + \psi_z \right) \quad (1.67)$$

où  $y_0, z_0, \psi_y$  et  $\psi_z$  sont des constantes fixées par les conditions initiales à  $t = t_0$ .

Les électrons décrivent donc des oscillations sinusoïdales à la fréquence  $\omega_\beta$  qui évolue lentement avec le temps. L'amplitude des oscillations spatiales diminue avec le temps, proportionnellement à  $\gamma^{-\frac{1}{4}}$ . Ces oscillations sont à l'origine du rayonnement bêtatron que nous allons étudier plus en détail dans la section suivante.

## 1.4 Rayonnement synchrotron

### 1.4.1 Rayonnement d'une particule chargée relativiste

Nous allons ici donner les idées et éléments nécessaires au calcul du rayonnement d'une particule chargée en mouvement relativiste dans le cas général pour un mouvement quelconque. Les résultats sont tirés de l'ouvrage [84] auquel le lecteur pourra se reporter pour plus de détails.

#### Potentiels de Liénard-Wiechert

Les potentiels de Liénard-Wiechert permettent de décrire dans la jauge de Lorentz les champs électromagnétiques produits par une particule chargée en mouvement relativiste. Le formalisme des quadri-vecteurs est traditionnellement utilisé pour traiter les problèmes relativistes et ainsi, en notation covariante, l'expression du quadri-vecteur potentiel  $A = (\Phi/c, \mathbf{A})$  est donnée par :

$$A^\alpha(x) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{u^\alpha(\tau)}{u \cdot (x - r(\tau))} \right]_{\tau=\tau_0} \quad (1.68)$$

où  $r(\tau) = (c\tau, \mathbf{r})$  est le quadri-vecteur position de la particule avec  $\tau$  son temps propre,  $u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$  son quadri-vecteur vitesse et  $x = (x^0 = ct, \mathbf{x})$  le point d'observation où est mesuré le potentiel.  $[\cdot]_{\tau=\tau_0}$  indique qu'on évalue le terme entre crochets au temps retardé  $\tau_0$ , qui est déterminé par la contrainte du cône de lumière  $x^0 - r^0(\tau_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)| = R_0$ . On notera dans la suite les quantités devant être calculées à ce temps  $\tau_0$  avec l'indice 'ret' pour retardé.

Revenons maintenant aux notations non-covariantes, les expressions des potentiels scalaire et vecteur sont alors :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) R_0} \right]_{ret} \quad (1.69)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) R_0} \right]_{ret} \quad (1.70)$$

avec  $\mathbf{n}$  un vecteur unitaire dans la direction de  $\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)$  et  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  la vitesse normalisée de la particule. Ces expressions permettent de tenir compte des effets relativistes impliquant que les potentiels calculés en  $\mathbf{x}$  à un temps  $t$  ont été générés par la particule à un temps antérieur. On rappelle que ces potentiels sont valables dans la jauge de Lorentz qui est définie par :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.71)$$

#### Champs créés par une particule en mouvement relativiste

À partir des expressions (1.69) et (1.70), on peut maintenant calculer les champs électromagnétiques correspondants en utilisant les équations (1.5) et (1.6). Les champs générés

par une particule chargée en mouvement relativiste sont :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left( \left[ \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R_0^2} \right]_{ret} + \frac{1}{c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R_0} \right]_{ret} \right) \quad (1.72)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{ret} \quad (1.73)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt$ .

On remarque immédiatement que les champs se décomposent en deux termes aux comportements différents. Le premier est dû uniquement à la vitesse de la particule et décroît en  $1/R_0^2$ . On l'appelle terme statique car il correspond au champ propre de la particule chargée (modifié toutefois par les effets relativistes). Le second dépend de l'accélération de la particule et décroît en  $1/R_0$ . C'est le terme radiatif, caractérisant le rayonnement émis lorsque la particule est accélérée.

Lorsque l'observation est réalisée loin de la source de rayonnement,  $R_0$  est grand et le terme radiatif domine. C'est dans ce contexte qu'on se place pour la suite de ce travail et on négligera donc le terme statique dans le reste des calculs.

À partir de l'expression de ces champs, on peut calculer plusieurs quantités qui vont nous permettre d'étudier le rayonnement émis (direction d'émission et spectre en fréquence) comme on va le voir dans la section suivante.

## Énergie rayonnée par unité de fréquence et d'angle solide

Pour une particule relativiste accélérée, la puissance rayonnée par unité d'angle solide peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = |\mathbf{A}(t)|^2 \quad (1.74)$$

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{c\epsilon_0} [R_0 \mathbf{E}]_{ret} \quad (1.75)$$

On peut écrire l'énergie rayonnée par unité d'angle solide sous les deux formes :

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt \quad (1.76)$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (1.77)$$

En introduisant la transformée de Fourier de  $\mathbf{A}(t)$  définie par :

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.78)$$

puis en utilisant le théorème de Parseval et le fait que  $\mathbf{A}$  est réel, on peut réécrire l'équation (1.76) sous la forme :

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (1.79)$$

$$= \int_0^{\infty} (|\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2) d\omega = \int_0^{\infty} 2 |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (1.80)$$

En combinant les équations (1.77) et (1.80), on peut alors déduire l'expression suivante pour l'énergie rayonnée par unité d'angle solide et de fréquence :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 2 |\mathbf{A}(\omega)|^2 \quad (1.81)$$

À partir de l'expression du champ électrique retardé donnée en (1.72), on peut calculer la transformée de Fourier de  $\mathbf{A}$  via l'expression donnée en (1.75). Il ne reste alors qu'à prendre le double du module au carré pour obtenir l'expression de l'énergie recherchée. On peut, en introduisant en plus un changement de variable pour éliminer le temps retardé du résultat final, obtenir enfin :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 c \epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)]}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n})^2} e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2 \quad (1.82)$$

Cette expression nous donne l'énergie rayonnée par unité de fréquence et d'angle solide par toute particule chargée au cours d'un mouvement accéléré. Cette équation met en évidence plusieurs caractéristiques du rayonnement des électrons relativistes.

Premièrement la présence du terme  $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$  dans le produit du numérateur indique clairement que le rayonnement est produit par l'accélération de la charge. En effet l'énergie rayonnée sera nulle dans les cas où  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ .

Deuxièmement le terme  $(1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n})^2$  au dénominateur assure que le rayonnement est maximal lorsque  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} \rightarrow 1$ . Cela signifie que l'émission se fait préférentiellement dans la direction de déplacement de la particule et ce d'autant plus que la particule est relativiste. Cette propriété est la conséquence directe de la transformation de Lorentz appliquée entre le référentiel de l'électron au repos et le référentiel du laboratoire. On peut même montrer que le rayonnement est contenu dans un cône d'ouverture angulaire  $1/\gamma$  autour du vecteur vitesse de l'électron.

L'équation (1.82) montre aussi qu'il est possible de calculer le rayonnement d'une particule chargée dans toute direction  $\mathbf{n}$  et pour toute fréquence  $\omega$  à partir de la simple connaissance de sa trajectoire (on peut déduire  $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$  et  $\boldsymbol{\beta}(t)$  de  $\mathbf{r}(t)$ ).

## Rayonnement Synchrotron

En supposant maintenant que la particule suit un mouvement circulaire instantané et fini, il est possible d'intégrer par partie l'équation (1.82) pour obtenir :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 c \epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2 \quad (1.83)$$

En supposant un mouvement plan, fortement relativiste ( $\beta \simeq 1$ ) de rayon de courbure  $\rho$ , on peut développer cette expression pour faire apparaître des fonctions de Bessel modifiées du second ordre  $K_\nu$  qui amènent à l'introduction d'une fréquence (techniquement une pulsation) critique  $\omega_c$  :

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{c}{\rho} \quad (1.84)$$

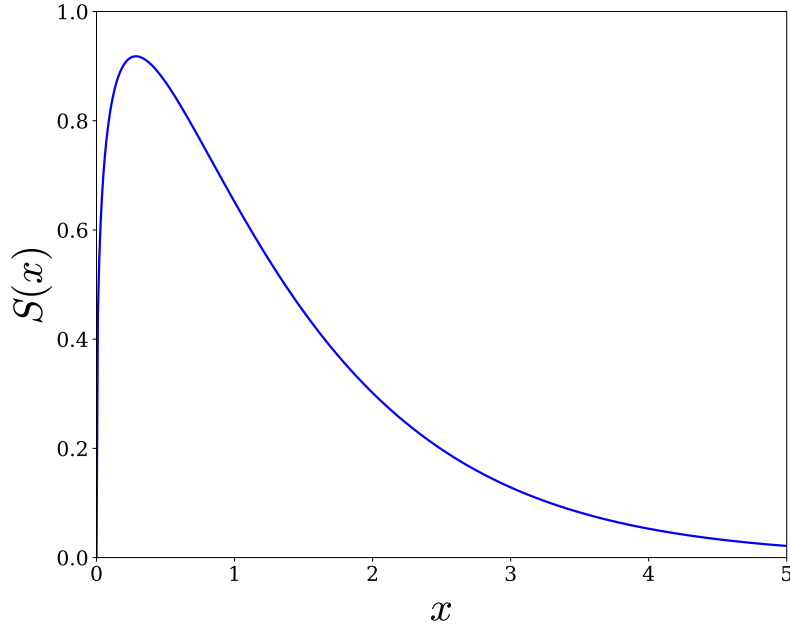


FIGURE 1.7 – Fonction d’émission synchrotron  $S(x)$  donnée à l’équation (1.86).

La nature du rayonnement est telle que la moitié de l’énergie rayonnée est émise à des fréquences inférieures à cette fréquence critique.

Finalement, après une intégration sur tous les angles on peut obtenir la distribution fréquentielle de l’énergie rayonnée :

$$\frac{dI}{d\omega} = \sqrt{3} \frac{e^2}{4\pi c \epsilon_0} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi = \sqrt{3} \frac{e^2}{4\pi c \epsilon_0} \gamma S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (1.85)$$

On définit ainsi  $S(x)$  la fonction d’émission synchrotron dont on donne une représentation à la figure 1.7 :

$$S(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi \quad (1.86)$$

On appelle le type de rayonnement décrit par ces équations rayonnement synchrotron car il a initialement été observé dans les synchrotrons à la fin des années 1940. Cette description est valable pour des particules en mouvement circulaire instantané mais nous allons voir dans la suite comment on peut la rapprocher du rayonnement émis par les électrons effectuant des oscillations bêtastrons.

## 1.4.2 Cas du rayonnement bêtastron

### Rayonnement d’une particule en mouvement sinusoïdal

On considère maintenant un électron relativiste se déplaçant dans la direction  $x$  suivant une trajectoire sinusoïdale de période  $\lambda_b$  dans le plan transverse  $y$  à vitesse  $\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$  constante. La description qualitative du spectre de rayonnement d’un tel électron peut se faire à l’aide d’arguments relativement simples mais qui permettent une meilleure compréhension des phénomènes plus complexes intervenant dans les processus réels d’émission.

La trajectoire de l'électron est alors donnée par :

$$y(x) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_b} x\right) = y_0 \sin(k_b x) \quad (1.87)$$

avec  $k_b = 2\pi/\lambda_b$ . La trajectoire étant périodique, le rayonnement total le sera aussi puisque le rayonnement émis dans l'angle solide  $d\Omega$  sera le même à chaque période d'oscillation. La fréquence du rayonnement observé dans la direction donnée par un vecteur  $\mathbf{n}$  peut se calculer à partir de la période d'oscillation de l'électron et de l'angle  $\theta$  formé par le vecteur  $\mathbf{n}$  et l'axe  $x$ .

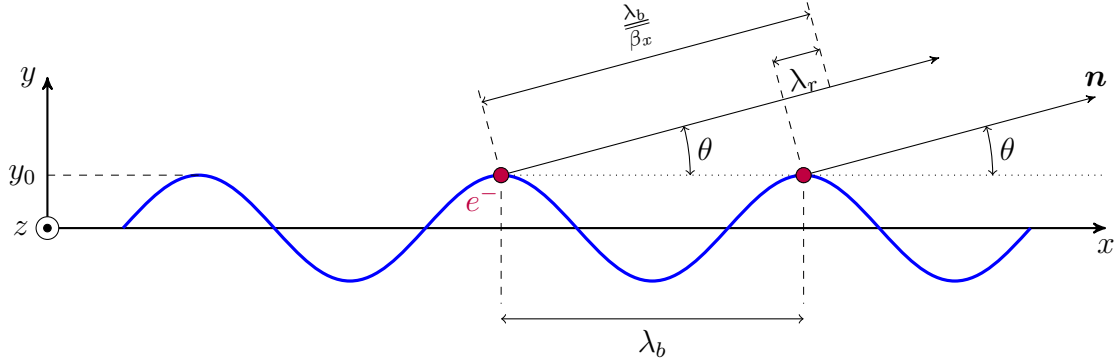


FIGURE 1.8 – Représentation d'une trajectoire sinusoïdale d'électron (en bleu) d'amplitude  $y_0$  et de longueur d'onde  $\lambda_b$ . On représente (en rouge) deux positions successives de l'électron (espacées par une période d'oscillation) et on illustre le calcul de la longueur d'onde  $\lambda_r$  du rayonnement observé dans la direction  $\mathbf{n}$ .

Durant une oscillation complète, l'électron a par définition parcouru une distance  $\lambda_b$  selon la direction  $x$ , tandis que le rayonnement émis s'est lui propagé à  $c$  dans la direction de  $\mathbf{n}$  durant un temps  $\lambda_b/c\overline{\beta}_x$ , soit sur une distance  $\lambda_b/\overline{\beta}_x$  (où  $\overline{\beta}_x$  correspond à la moyenne de  $\beta_x$  sur une période). Le rayonnement est alors en avance sur l'électron d'une distance  $\lambda_r$ , comme illustré à la figure 1.8, qu'on peut exprimer de la sorte :

$$\lambda_r = \frac{\lambda_b}{\overline{\beta}_x} - \lambda_b \cos \theta \quad (1.88)$$

$\lambda_r$  correspond ainsi à la longueur d'onde du signal observé dans la direction  $\mathbf{n}$  puisqu'il s'agit de la distance entre les deux signaux identiques émis par l'électron lorsqu'il est dans le même état.

### Régime onduleur ou wiggler

On définit le paramètre de force de l'oscillation  $K = \gamma\psi$  avec  $\psi = k_b y_0$  l'angle maximum entre la direction de propagation et la trajectoire de l'électron. Ce paramètre  $K$  permet de définir deux régimes de rayonnement bien distincts comme illustrés à la figure 1.9.

D'après l'expression de la trajectoire, la vitesse normalisée  $\beta$  est donnée par :

$$\beta^2 = \beta_x^2 (1 + \psi^2 \cos^2(k_b x)) \quad (1.89)$$



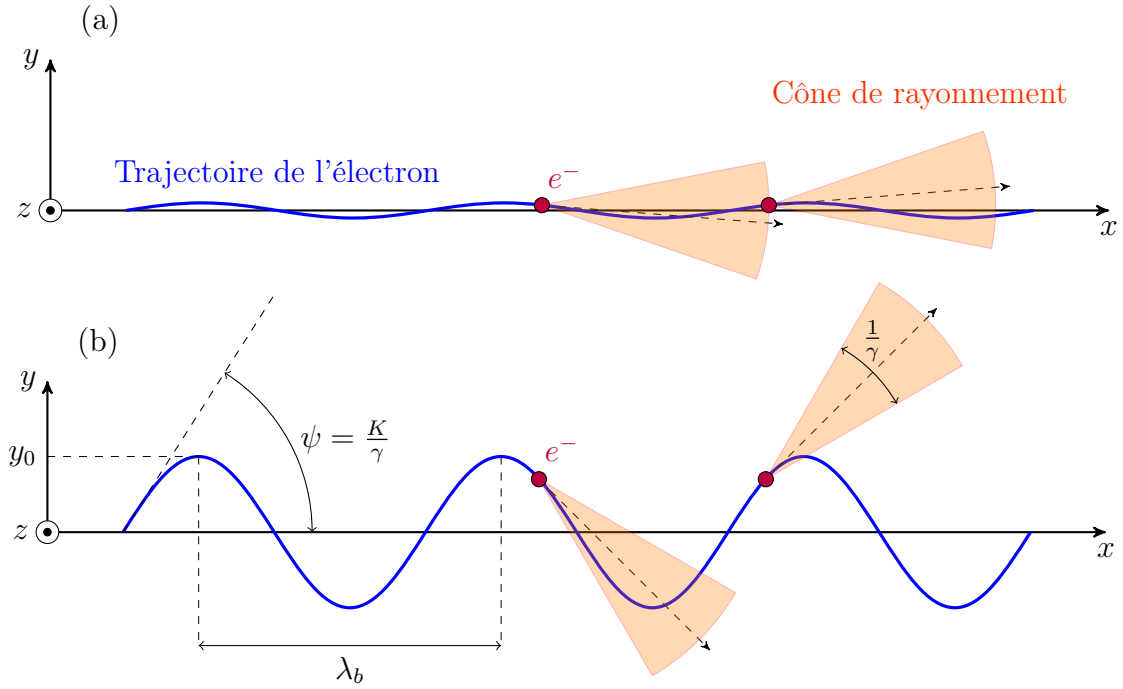


FIGURE 1.9 – Représentation d’une trajectoire d’électron dans le régime (a) de l’onduleur ( $K \ll 1$ ), (b) du wiggler ( $K \gg 1$ ).

Ainsi, tant que  $\psi \ll 1$ , on peut exprimer  $\beta_x$  sous la forme :

$$\beta_x \simeq \beta \left( 1 - \frac{1}{2} \psi^2 \cos^2(k_b x) \right) \quad (1.90)$$

Ce qui nous donne finalement, en moyennant sur une période et en utilisant  $\beta \simeq 1 - 1/(2\gamma^2)$  :

$$\overline{\beta_x} \simeq \beta \left( 1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (1.91)$$

On peut alors utiliser cette expression dans l’équation (1.88) et, en se limitant à des angles  $\theta$  petits, obtenir :

$$\lambda_r = \frac{\lambda_b}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (1.92)$$

La fréquence fondamentale  $2\pi/\lambda_r$  du rayonnement émis diminue donc avec l’angle d’observation mais augmente fortement avec l’énergie des électrons (proportionnelle à  $\gamma^2$ ). Ce facteur  $2\gamma^2$  traduit l’effet Doppler relativiste et explique notamment comment on peut obtenir des rayonnements très énergétiques (rayons X) à partir d’oscillations de bien plus grandes longueurs d’ondes.

De plus, le paramètre de force d’oscillation  $K$  détermine aussi l’apparition ou non d’harmoniques. En effet, comme on l’a vu précédemment, un électron relativiste émet son rayonnement dans un cône d’ouverture angulaire de l’ordre de  $1/\gamma$  dans sa direction de propagation. Cela peut conduire, lorsque  $K$  est grand, à l’observation d’un signal discontinu qui se traduit par l’apparition d’harmoniques de la fréquence fondamentale du signal. On définit donc, selon la valeur de  $K$ , deux régimes d’oscillation :

Si  $K \ll 1$ , l'angle  $\psi$  est très proche de zéro et l'ensemble du rayonnement est alors contenu dans le cône d'ouverture  $1/\gamma$  autour de l'axe. Le rayonnement observé dans ce cône est presque parfaitement continu et son spectre se réduit principalement à une fréquence fondamentale  $2\pi/\lambda_r(\theta)$ . La fréquence fondamentale sur l'axe est alors simplement la fréquence d'oscillation de l'électron multipliée par le facteur  $2\gamma^2$ . On parle de régime d'onduleur, en référence aux ondulateurs magnétiques utilisés pour produire des rayons X dans les synchrotrons ou accélérateurs conventionnels.

Si  $K \gg 1$ , à l'inverse, il y a une grande variation de l'angle d'émission le long de la trajectoire : le rayonnement est contenu dans un cône d'angle  $1/\gamma$  qui "balaye" l'ensemble des directions entre  $-K/\gamma$  et  $K/\gamma$  (voir la figure 1.9.b). On qualifie ce régime de "wiggler", précisément parce que la direction d'émission oscille fortement. Le rayonnement est alors observé par intermittence, uniquement quand la direction d'observation est contenue dans le cône  $1/\gamma$  autour de la direction d'émission. La périodicité du signal observé est de  $\lambda_r/c$  et les impulsions sont de durée  $\tau$  très brève. Le spectre d'un tel signal temporel correspond à la fréquence fondamentale  $2\pi/\lambda_r$  ainsi que de nombreuses harmoniques jusqu'à une fréquence de coupure  $\omega_c \sim 1/\tau$ . On peut montrer qu'en approximant localement le mouvement de l'électron à un mouvement circulaire on obtient  $\omega_c \sim \gamma^3 c/\rho$  où  $\rho$  est le rayon de courbure local. Ce résultat est en accord avec le calcul complet du rayonnement d'un électron en mouvement circulaire relativiste décrit dans la section précédente.

En approximant le mouvement sinusoïdal de l'électron en tout instant par un mouvement circulaire instantané, on peut rapprocher le rayonnement émis par une telle trajectoire de celui calculé pour un rayonnement synchrotron. Le rayon de courbure de la trajectoire est relativement facile à calculer et il est minimal à ses extrema avec  $\rho_{max} = \gamma/k_b K$ , ce qui donne :

$$\omega_c = \frac{3}{2} K \gamma^2 \omega_b \quad (1.93)$$

Lorsque  $K \gg 1$ , on retrouve alors une émission sous forme d'harmoniques de la fréquence fondamentale  $\omega_r = 2\pi c/\lambda_r$  dont les amplitudes sont modulées par l'expression du spectre synchrotron correspondant. Chaque harmonique est de largeur  $\Delta\omega = \omega_r/N_b$  où  $N_b$  est le nombre d'oscillations effectuées par l'électron.

À partir de l'équation (1.83), on peut montrer pour le rayonnement synchrotron que l'énergie rayonnée par unité d'angle solide et de fréquence  $d^2I/d\omega d\Omega$  sur l'axe est donnée par la formule suivante :

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{3e^2}{16\pi^3 c \epsilon_0} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \gamma^2 K_{2/3}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (1.94)$$

La figure 1.10 représente le spectre du rayonnement émis sur l'axe de propagation dans le régime du wiggler ( $K \gg 1$ ). Celui-ci est constitué d'une suite d'harmoniques modulées par le spectre synchrotron donné par la formule (1.94).

### Analogie entre rayonnement synchrotron et rayonnement bêtatron

Comme vu à la section 1.3, le cas des oscillations bêtatrons est plus complexe que celui présenté précédemment. Les champs transverses de la bulle créent une force de rappel linéaire qui conduit à une trajectoire sinusoïdale dans le plan transverse, caractérisée par

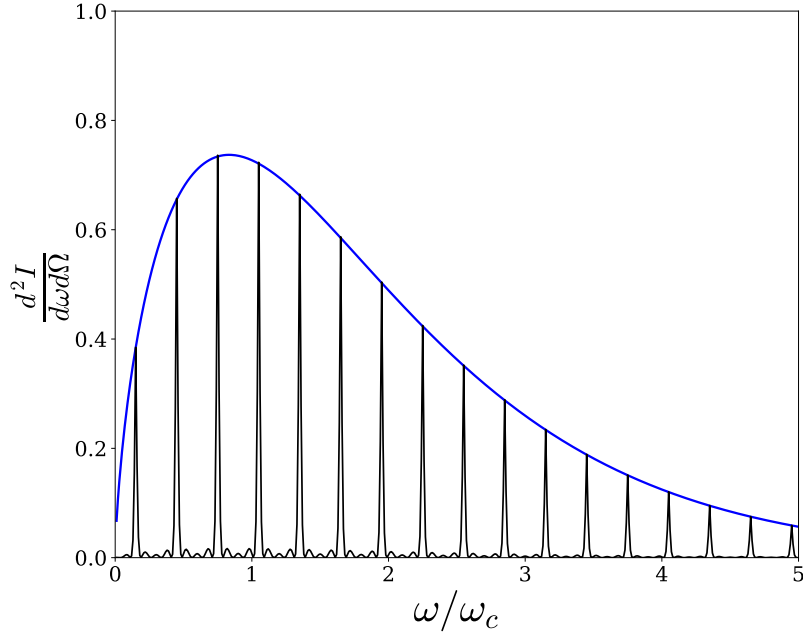


FIGURE 1.10 – Énergie rayonnée par unité d’angle solide et de fréquence dans la direction de l’axe de propagation dans le cas du wiggler. Le spectre d’harmoniques (courbe noire) est modulé par le spectre synchrotron (courbe bleue) donné par la formule (1.94). Les unités sont arbitraires.

une fréquence d’oscillation  $\omega_b = \omega_\beta = \omega_p / \sqrt{2\gamma}$ , avec  $\omega_p$  qui est la fréquence plasma. L’amplitude de cette oscillation transverse est suffisamment importante pour que le rayonnement bêatron s’identifie au régime de wiggler, caractérisé par  $K \gg 1$ . Les résultats précédents sur l’émission de rayonnement dans le régime du wiggler s’appliquent donc au rayonnement bêatron.

Cependant, dans le cas du rayonnement bêatron réel, le rayonnement n’est pas issu d’un seul et unique électron mais d’un ensemble d’électrons qui parcourent chacun une trajectoire différente avec un  $\gamma$  qui varie dans le temps. Ces différences font que la fréquence fondamentale du rayonnement émis varie à la fois selon les électrons et au cours du temps. La largeur des harmoniques générées est, de plus, augmentée par le faible nombre d’oscillations bêatrons généralement réalisées pendant la durée de propagation des électrons dans le sillage. Cette variation de la fréquence fondamentale ainsi que l’élargissement des harmoniques conduisent à un lissage du spectre sur les fréquences. Le spectre total est alors proche du spectre synchrotron tel que donné par la formule (1.85). Une source bêatron est donc caractérisée par un spectre lisse, sans présence d’harmonique, qui sera uniquement caractérisé par l’énergie  $\gamma$  de l’électron et la pulsation critique  $\omega_c$  qui dépend du paramètre  $K$ , de  $\gamma$  et de la densité du plasma via  $\omega_b$ .

De plus, les champs longitudinaux créent une accélération longitudinale dont il faut tenir compte et qui n’est pas considérée dans notre modèle simplifié où  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $K$  sont constants. Le précédent modèle revient donc à négliger l’accélération longitudinale des électrons mais reste utile pour une description qualitative des phénomènes. En effet, on peut décrire l’effet de l’accélération des électrons en introduisant une pulsation  $\omega_b$  et un  $\gamma$  qui varient avec le temps comme on l’a vu à la section 1.3.

À partir de ce constat, on peut obtenir une meilleure approximation en complexifiant légèrement le calcul pour tenir compte de l'accélération des électrons, en décrivant le mouvement comme une somme de mouvements de durées finies durant lesquels  $\gamma$  est constant (en supposant que  $\gamma$  évolue lentement par rapport à  $1/\omega_p$ ). On peut alors approximer le spectre par une somme de spectres synchrotrons.

Cependant, on approxime souvent le rayonnement généré par les oscillations bêtatrons par un simple rayonnement synchrotron (sans faire varier  $\omega_c$  et  $\gamma$ ) en utilisant les grandeurs maximales atteintes lors de l'accélération. D'après l'équation (1.85), seuls les grands  $\gamma$  et grands  $\omega_c$  vont contribuer significativement à l'émission des photons les plus énergétiques. L'émission basse fréquence, émise par les électrons lorsqu'ils sont encore peu énergétiques, est alors sous-estimée mais cette méthode a l'avantage de donner une référence relativement simple à calculer et suffisamment bonne pour caractériser les principales propriétés du rayonnement émis à haute énergie, notamment sa fréquence critique  $\omega_c$  :

$$\omega_c = \frac{3}{2} K_\beta^m \gamma_m^2 \omega_\beta^m \quad (1.95)$$

$$\omega_\beta^m = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\gamma_m}} \quad (1.96)$$

$$K_\beta^m = \gamma_m k_\beta y_0 = k_p y_0 \sqrt{\frac{\gamma_m}{2}} \quad (1.97)$$

avec  $\gamma_m$  la valeur maximum atteinte par  $\gamma$  lors de l'accélération.

### 1.4.3 Calcul numérique du rayonnement bêtatron à partir des trajectoires

En supposant que le rayonnement émis est incohérent car les électrons sont répartis aléatoirement sur la longueur du faisceau, on peut sommer la contribution de chaque électron calculée avec la formule (1.82) et ainsi obtenir le rayonnement total du faisceau.

Ce calcul est généralement réalisé en post-traitement, en extrayant les trajectoires de chaque particule de la simulation. En pratique, la sommation se fait sur les macro-particules qui représentent les électrons dans la simulation (voir le chapitre suivant) et l'intégrale continue en temps est remplacée par une somme finie sur tous les pas de temps des trajectoires. La formule suivante permet alors de calculer l'énergie rayonnée par unité d'angle solide et de fréquence :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 c \epsilon_0} \sum_m W_m \left| \sum_{N=1}^{N_T} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}_m^N) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_m^N]}{(1 - \boldsymbol{\beta}_m^N \cdot \mathbf{n})^2} e^{i\omega(N\Delta t_{ray} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_m^N/c)} \Delta t_{ray} \right|^2 \quad (1.98)$$

où  $m$  représente l'indice des macro-particules et  $W_m$  le poids qui leur est associé (voir le chapitre 2 pour plus de détails).  $N_T$  est le nombre total de pas de temps  $\Delta t_{ray}$  considérés, qui peut être différent du nombre de pas de temps  $\Delta t$  de la simulation (souvent  $\Delta t_{ray} > \Delta t$  pour alléger le calcul).

À partir de ce résultat, on peut alors intégrer sur les fréquences pour obtenir la répartition angulaire du rayonnement bêtatron émis, intégrer sur les angles pour obtenir le spectre total ou encore sur les deux pour obtenir l'énergie totale rayonnée.



# Chapitre 2

## Simulation numérique des plasmas : la méthode Particle-In-Cell

*“+++ Divide By Cucumber Error. Please Reinstall  
Universe And Reboot +++”*

– Terry Pratchett, Hogfather

### Sommaire

---

<b>3.1 Impact du Cherenkov numérique sur une simulation d’accélération par sillage laser . . . . .</b>	<b>62</b>
3.1.1 Présentation de la simulation . . . . .	62
3.1.2 Observation du rayonnement Cherenkov numérique autour du faisceau	63
3.1.3 Modification de la force transverse . . . . .	64
<b>3.2 Nouvelle approche pour limiter l’impact du rayonnement Cherenkov numérique . . . . .</b>	<b>66</b>
3.2.1 Principe de la nouvelle approche et implémentation . . . . .	66
3.2.2 Comparaison de l’erreur d’interpolation sur le champ $B$ . . . . .	69
<b>3.3 Application à la simulation d’accélération par sillage laser . . .</b>	<b>75</b>
3.3.1 Caractéristiques du faisceau . . . . .	75
3.3.2 Mouvement des électrons . . . . .	80
3.3.3 Impact sur le rayonnement bêtatron calculé . . . . .	82

---

Le chapitre précédent a introduit les concepts théoriques permettant de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu par l’interaction laser-plasma. Ce chapitre-ci va se concentrer plus particulièrement sur les modèles et techniques utilisés pour simuler numériquement ces phénomènes en présentant notamment le principal outil utilisé dans cette thèse : le code de simulation Particle-In-Cell (PIC) CALDER.

La section 2.1 présente tout d’abord certains types de modèles théoriques utilisés pour décrire les comportements des plasmas à diverses échelles et en particulier la description cinétique. Cette description est la base théorique des codes PIC utilisés dans cette thèse et dont le principe est décrit à la section 2.2. La section 2.3 présente un artefact numérique rencontré dans les codes PIC et sur lequel s’est portée une partie importante du travail présenté dans ce manuscrit : le rayonnement Cherenkov numérique.

## 2.1 Modélisation des plasmas

### 2.1.1 Différentes approches et échelles

Les plasmas peuvent être modélisés suivant différentes approches selon l'échelle et la situation considérées. La plus générale est la description microscopique qui décrit chaque particule individuellement ainsi que toutes ses interactions avec les autres particules du plasma. Cette approche revient à résoudre le problème à  $N$  corps électromagnétique. Cette description bien qu'exacte (tant qu'on néglige les effets quantiques) est souvent limitée à de très petits échantillons à cause du coût de calcul qu'elle implique. Les codes de type dynamique moléculaire peuvent être utilisés pour résoudre ce type de problème bien qu'ils négligent souvent les effets relativistes et de champs retardés.

À plus grande échelle, lorsque les collisions coulombiennes dominent devant les effets cinétiques, on peut considérer le plasma comme étant composé d'un ou plusieurs fluides. Ces modèles, macroscopiques par nature, aboutissent à ce qu'on appelle la magnétohydrodynamique.

Lorsque les effets cinétiques ne sont pas négligeables mais que les échantillons considérés sont trop importants pour être décrits de manière purement microscopique, on peut utiliser une approche intermédiaire qui consiste à considérer la distribution de chaque espèce de particule dans un espace des phases à 6 dimensions (3 de position, 3 d'impulsion). On parle alors de description cinétique.

C'est cette dernière description qui est la plus adaptée aux situations étudiées dans cette thèse et qui est au cœur des codes de simulation numérique utilisés. Nous allons donc voir dans la suite comment développer cette description.

### 2.1.2 De la description microscopique à la description cinétique

Le passage à une description cinétique du plasma peut se faire à partir de deux descriptions microscopiques équivalentes distinctes : l'une exacte et l'autre probabiliste. On peut soit décrire le plasma comme un ensemble de particules ayant chacune un jeu de coordonnées de position  $\mathbf{r}$  et d'impulsion  $\mathbf{p}$  à tout instant  $t$ , soit via une approche probabiliste où le plasma est décrit par une densité de probabilité de trouver les particules dans un état donné. Ces deux descriptions microscopiques permettent au final d'aboutir, lorsqu'on néglige l'effet des collisions, à la même description cinétique caractérisée par l'équation de Vlasov.

**Description particulière :** Une première méthode, qui peut paraître la plus intuitive, consiste à considérer l'ensemble des particules constituant le plasma comme des particules ponctuelles, chacune étant caractérisée par sa position  $\mathbf{r}_i$  et son impulsion  $\mathbf{p}_i$ . Décrire complètement le plasma revient alors à décrire pour l'ensemble de l'espace la position et l'impulsion de chaque particule à tout instant.

Considérons  $N = \sum_s N_s$ , le nombre total de particules du plasma et  $N_s$  celui de l'espèce  $s$ . On peut alors définir la distribution  $\mathcal{N}_s$  qui donne le nombre de particules de l'espèce  $s$  à

la position  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  à l'instant  $t$  comme :

$$\mathcal{N}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{N_s} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \quad (2.1)$$

Pour chacune des particules  $i$ , l'évolution de  $\mathbf{p}_i$  est régie par la force de Lorentz :

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = q_s \left( \mathbf{E}^m(\mathbf{r}_i(t), t) + \frac{\mathbf{p}_i(t)}{\gamma_i(t)m_s} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}_i(t), t) \right) \quad (2.2)$$

où  $m_s$  et  $q_s$  sont respectivement la masse et la charge des particules de l'espèce  $s$ ,  $\gamma_i$  est le facteur de Lorentz associé à la particule  $i$  et  $(\mathbf{E}^m, \mathbf{B}^m)$  sont les champs électromagnétiques microscopiques résultant de l'interaction avec l'ensemble des  $N - 1$  autres particules.

En considérant la dérivée temporelle de  $\mathcal{N}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  et grâce aux propriétés des distributions de Dirac, on arrive finalement à l'équation de Klimontovitch :

$$\frac{d\mathcal{N}_s}{dt} = \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{N}_s + q_s \left( \mathbf{E}^m + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_s} \times \mathbf{B}^m \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{N}_s = 0 \quad (2.3)$$

Cette équation décrit complètement l'évolution du plasma (pour l'espèce  $s$ ) à l'échelle microscopique, mais est bien trop coûteuse à résoudre pour la taille des systèmes que l'on veut considérer (elle est équivalente au problème à  $N$  corps). Pour des grandeurs typiques, telles qu'une boîte cubique de  $60 \mu\text{m}$  de côté et une densité électronique de l'ordre de  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , cela nous donne  $N_e = 10^{12}$  électrons. Cela représente un nombre bien trop important de particules à suivre individuellement, sans même considérer les  $N_e^2$  interactions entre électrons.

Cependant, en négligeant les collisions coulombiennes de courte portée et en introduisant la notion de densité moyenne  $f_s = \int \mathcal{N}_s d\Omega$  calculée sur des petits volumes  $d\Omega$  de l'espace des phases (passant ainsi d'une description discrète à continue), on peut intégrer l'équation de Klimontovitch (2.3) et montrer qu'elle se réduit alors à l'équation de Vlasov qui décrit de manière cinétique le plasma :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_s} \cdot \nabla f_s + q_s \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_s} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_s = 0 \quad (2.4)$$

Les volumes  $d\Omega$  doivent être choisis suffisamment petits pour apparaître infinitésimaux par rapport à l'échelle de l'évolution collective du plasma mais suffisamment grands par rapport aux distances inter-particulaires pour pouvoir négliger l'effet des collisions.

**Description purement probabiliste :** On peut alternativement décrire complètement le plasma par les 6 coordonnées spatiales  $\mathbf{r}_i$  et d'impulsion  $\mathbf{p}_i$  de chaque particule du plasma. Ainsi, pour  $N_s$  particules, l'état du plasma est donc complètement décrit par le point  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N_s})$  dans l'espace des phases à  $6N_s$  dimensions.

En adoptant un point de vue purement probabiliste, on définit alors la probabilité  $d\mathcal{P}(t)$  d'avoir l'ensemble des particules dans le volume d'espace des phases infinitésimal  $d\mathcal{V} = \prod_{i=1}^{N_s} d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i$  centré en  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N_s})$  par :

$$d\mathcal{P}(t) = f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N_s}, t) d\mathcal{V} \quad (2.5)$$



$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N_s}, t)$  correspond alors à la densité de probabilité à l'instant  $t$  que le plasma se trouve dans l'état décrit par  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N_s})$ .

L'évolution de cette fonction  $f$  est donnée par l'équation de Liouville :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_s} \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^{N_s} \dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 \quad (2.6)$$

On peut noter que cette description est équivalente à celle donnée par l'équation de Klimontovitch (2.3), simplement les objets considérés ne sont fondamentalement pas les mêmes (densité de particules contre densité de probabilité).

L'équation de Liouville peut alors se mettre sous la forme d'une hiérarchie d'équations faisant intervenir les fonctions :

$$f_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, t) = \int f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N_s}, t) \prod_{i=n+1}^{N_s} d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i \quad (2.7)$$

Par cette méthode, qu'on appelle BBGKY pour Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon [85–88], on peut montrer que pour un plasma non collisionnel il n'y a pas de corrélation entre les particules et ainsi que toutes les particules du plasma peuvent être décrites par la seule et même fonction  $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$  qui doit vérifier l'équation :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{\gamma_1 m_s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} f_1 + q_s \left( \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{p}_1}{\gamma_1 m_s} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} f_1 = 0 \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{B}_1$  correspondent aux champs créés par l'ensemble des autres particules du plasma.

Avec un nombre très grand de particules, la répartition dans l'espace des phases va tendre vers la densité de probabilité  $f_1$ . Dans la limite où  $N_s \rightarrow \infty$ , la densité de particules en  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  sera donc égale à  $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = N_s f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$  qui vérifie alors l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_s + q_s \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_s} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_s = 0 \quad (2.9)$$

L'équation de Vlasov fait intervenir les champs électromagnétiques dont l'évolution dépend de l'état du plasma et est décrite par les équations de Maxwell. Pour décrire complètement l'évolution du plasma, il nous faut donc résoudre le système d'équations Vlasov-Maxwell constitué des équations (2.9), (1.4) et (1.3) avec comme termes sources pour les équations de Maxwell la densité de charge  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ . Ces derniers ne sont autres que les deux premiers moments de la fonction de distribution :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_s \rho_s(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int q_s f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int q_s \frac{\mathbf{p}}{m_s \gamma} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \quad (2.11)$$

Finalement, le problème a été fortement simplifié puisque qu'on ne considère désormais plus qu'un espace à 6 dimensions contre  $6N_s$  dimensions précédemment, il reste cependant suffisamment complexe pour nécessiter l'utilisation des méthodes numériques pour résoudre le système Vlasov-Maxwell. La méthode PIC est l'une des méthodes numériques habituellement employées pour résoudre ce problème et c'est ce que nous allons décrire dans la section suivante.

## 2.2 La méthode Particle-In-Cell

Le code utilisé pour toutes les simulations de cette thèse est le code CALDER [51] développé au CEA au début des années 2000, mais la méthode PIC a été développée dès les années 1960 [45, 47]. Son développement s'est cependant fortement accéléré avec l'avènement de la parallélisation et l'augmentation de la puissance de calcul des super-calculateurs.

### 2.2.1 Présentation générale de la méthode

Le but des codes PIC est de résoudre le système d'équations Vlasov-Maxwell. L'équation de Vlasov (2.9) nous donne un espace des phases à 6 dimensions. Une première approche serait de résoudre cette équation sur un maillage en  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  via une méthode de différence finie par exemple. Cela est cependant extrêmement coûteux en terme de calcul. En effet, puisqu'on ne connaît pas à l'avance la valeur maximale que peut atteindre l'impulsion  $p$  (suite à l'accélération des particules), la discrétisation nécessaire pour reproduire fidèlement les mouvements des électrons froids comme ceux des électrons relativistes conduit rapidement à devoir considérer un nombre de mailles déraisonnable.

Pour éviter cet écueil, on va profiter du fait que l'équation de Vlasov est une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour la résoudre via la méthode des caractéristiques. Comme la fonction de distribution se conserve ( $\frac{df_s}{dt} = 0$ ), il suffit de connaître les conditions initiales pour pouvoir obtenir la solution de l'équation. La résolution numérique se fait alors via la discrétisation de la fonction de distribution. Ainsi, pour chaque espèce  $s$ , on discrétise  $f_s$  en  $N_s^M$  points de coordonnées  $(\mathbf{r}_m(t), \mathbf{p}_m(t))$  de sorte que :

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{m=1}^{N_s^M} W_m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_m(t)) \quad (2.12)$$

La fonction continue est donc remplacée par une somme discrète et finie de  $N_s^M$  diracs auxquels on attribue chacun un poids  $W_m$ .

Cette étape peut être vue comme la transformation de la distribution continue en un ensemble de  $N_s^M$  particules numériques, qu'on appelle macro-particules. Elles représentent chacune un certain nombre de particules physiques, déterminé par le poids  $W_m$  qui leur sont attribués, proches de  $(\mathbf{r}_m(t), \mathbf{p}_m(t))$  dans l'espace des phases. De cette manière, la trajectoire  $(\mathbf{r}_m(t), \mathbf{p}_m(t))$  d'une macro-particule est la même que celle qu'aurait suivie une seule particule réelle avec des conditions initiales identiques.

Pour déterminer cette trajectoire, il est cependant nécessaire de connaître les champs électromagnétiques et donc de résoudre les équations de Maxwell. Celles-ci sont généralement résolues par une méthode aux différences finies sur un maillage discrétisant l'espace. Les champs sont alors interpolés sur les positions des macro-particules et les densités de charge et de courant sont projetées sur le maillage au besoin des calculs. Le temps est lui aussi discrétisé de manière régulière en pas de temps.

Cela conduit à ce qu'on appelle communément la boucle PIC, c'est-à-dire les étapes nécessaires à chaque itération pour la résolution du système. Ainsi, à partir d'une distribution initiale, le code va répéter les étapes suivantes à chaque itération temporelle  $I$  :

- Détermination des champs  $\mathbf{E}(I)$  et  $\mathbf{B}(I)$  aux nœuds du maillage spatial via la résolution des équations de Maxwell avec comme termes sources les densités de charge et courant calculées à l'itération  $I-1$ .
- Interpolation des champs aux positions  $\mathbf{r}_m(I)$  des macro-particules.
- Résolution des équations du mouvement pour déterminer les nouvelles positions  $\mathbf{r}_m(I+1)$  et impulsions  $\mathbf{p}_m(I+1)$  des macro-particules.
- Projection des nouvelles densités de charge  $\rho(I+1)$  et de courant  $\mathbf{J}(I+1)$  sur le maillage spatial à partir de  $(\mathbf{r}_m(I+1), \mathbf{p}_m(I+1))$ .

La méthode PIC permet donc une résolution du système Vlasov-Maxwell via un schéma relativement intuitif et facile à implémenter, ce qui explique en grande partie son succès à travers les années dans le domaine de la physique des plasmas cinétiques et faiblement collisionnels.

Les sections qui suivent vont s'attacher à décrire plus en détails chacune des étapes de la boucle PIC.

## 2.2.2 Résolution des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont dans la plupart des codes PIC résolues par une méthode aux différences finies appelée schéma de Yee [45]. C'est une méthode de type "saute-moutons" d'ordre 2 en temps et en espace.

### Discretisation des équations de Maxwell

Considérons un champ  $A$  quelconque, on notera  $A_{i,j,k}^n$  la valeur du champ  $A$  connu au pas de temps  $n$  et au nœud du maillage d'indices  $i, j, k$  :

$$A_{i,j,k}^n = A(t=n\Delta t, x=i\Delta x, y=j\Delta y, z=k\Delta z) \quad (2.13)$$

avec  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  les pas d'espace dans leurs directions respectives ainsi que  $\Delta t$  le pas de temps.

Avec ces notations, les équations de Maxwell discrétisées peuvent alors s'écrire :

$$\frac{E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^n - E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-1}}{c^2\Delta t} = \frac{B_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}} - B_{z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{B_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - B_{y_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \mu_0 J_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n-\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

$$\frac{E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^n - E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n-1}}{c^2\Delta t} = \frac{B_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - B_{x_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \frac{B_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}} - B_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \mu_0 J_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n-\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

$$\frac{E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^n - E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n-1}}{c^2\Delta t} = \frac{B_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - B_{y_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{B_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - B_{x_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \mu_0 J_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

$$\frac{B_x^{n+\frac{1}{2}} - B_x^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{E_z^n - E_z^n}{\Delta y} + \frac{E_y^n - E_y^n}{\Delta z} \quad (2.17)$$

$$\frac{B_y^{n+\frac{1}{2}} - B_y^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{E_x^n - E_x^n}{\Delta z} + \frac{E_z^n - E_z^n}{\Delta x} \quad (2.18)$$

$$\frac{B_z^{n+\frac{1}{2}} - B_z^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{E_y^n - E_y^n}{\Delta x} + \frac{E_x^n - E_x^n}{\Delta y} \quad (2.19)$$

On peut noter que les champs sont en fait discrétisés sur deux maillages spatiaux différents dont les nœuds sont numérotés respectivement par des indices entiers ou demi-entiers et qu'on appelle respectivement maillage primal et maillage dual. Ce double maillage permet au schéma numérique d'être centré et d'ordre 2 en espace. La figure 2.1 donne une représentation d'une maille 3D illustrant où sont calculés les différents champs avec le schéma de Yee. Les

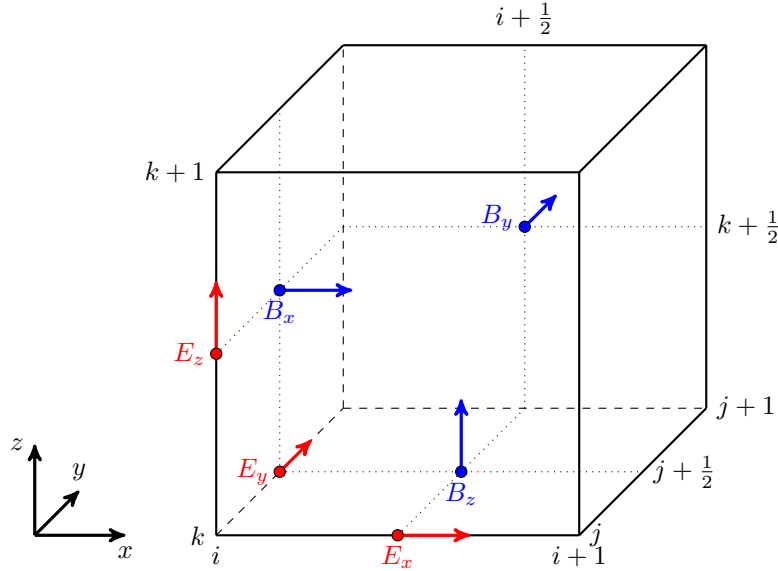


FIGURE 2.1 – Représentation d'une maille 3D dans le schéma de Yee. Le maillage primal est numéroté par les indices entiers (trait plein et interrompu) tandis que le maillage dual est numéroté par les indices demi-entiers (trait pointillé).

équations de Maxwell faisant aussi intervenir les dérivées temporelles des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , la même technique est utilisée pour la discrétisation temporelle avec les champs  $\mathbf{E}$  connus aux pas de temps entiers alors que les champs  $\mathbf{B}$  ainsi que les courants  $\mathbf{J}$  sont connus aux pas de temps demi-entiers.

### Condition CFL

La stabilité du schéma numérique utilisé pour résoudre les équations de Maxwell peut être analysée par la méthode de Von Neumann, qui aboutit à une limite de type condition CFL (pour Courant-Friedrichs-Lévy) explicitée par :

$$c\Delta t \leq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (2.20)$$

Cette condition propre au schéma de Yee limite donc la résolution temporelle en imposant une limite supérieure au pas de temps  $\Delta t$  pour assurer la stabilité du schéma numérique.

En particulier dans les simulations d'accélération par sillage laser, il est nécessaire de résoudre longitudinalement la longueur d'onde  $\lambda_0$  du laser, ce qui implique d'avoir un pas  $\Delta x$  suffisamment fin ( $\Delta x \lesssim \lambda_0/30$ ). Transversalement, il faut au contraire simplement résoudre la longueur d'onde plasma  $\lambda_p \gg \lambda_0$  et le *waist* du laser  $w_0 \gg \lambda_0$ . On a donc fréquemment  $\Delta x \ll \Delta y = \Delta z$  ce qui conduit à une condition proche de  $c\Delta t < \Delta x$ .

### Dispersion numérique du schéma de Yee

La discrétisation spatiale et temporelle des champs électrique et magnétique amène à une relation de dispersion numérique différente de la relation de dispersion physique. En considérant une onde électromagnétique de la forme  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ , la relation de dispersion numérique dans le vide est donnée par :

$$\frac{1}{c^2\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) + \frac{1}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) \quad (2.21)$$

Cette relation de dispersion numérique a pour effet de limiter artificiellement la vitesse de groupe  $v_g$  des ondes électromagnétiques. Ainsi, pour une onde plane se propageant dans le vide selon la direction  $x$ , la vitesse de groupe numérique  $v_g^{num}$  s'exprime comme suit :

$$v_g^{num} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x} = \frac{\cos(k_x\Delta x/2)}{\sqrt{1 - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(k_x\Delta x/2)}} c \quad (2.22)$$

On remarque que la vitesse de groupe est inférieure à la valeur théorique de  $c$ . Cette sous-estimation, même minime, peut être gênante pour la physique de l'accélération par sillage laser car elle entraîne mécaniquement une sous-estimation de la vitesse de propagation de l'onde laser et donc de l'onde de sillage. En conséquence, la vitesse de déphasage des électrons et donc l'énergie finale du faisceau accéléré peuvent être mal modélisées.

D'après l'équation (2.22),  $v_g^{num} \rightarrow c$  lorsque  $c\Delta t \rightarrow \Delta x$ . On cherche donc généralement, pour limiter ces effets néfastes, à avoir  $c\Delta t \approx \Delta x$  tout en veillant à respecter la condition CFL pour s'assurer de la convergence des calculs.

### 2.2.3 Interpolation des champs

Les différents champs de la simulation étant connus aux nœuds des maillages primal et dual, il est nécessaire de passer par une étape d'interpolation pour connaître la valeur du champ qui s'applique à une particule pouvant se trouver en tout point de l'espace.

Considérons tout d'abord un cas simplifié d'un champ  $A$  quelconque connu sur un maillage spatial unidimensionnel selon la direction  $x$ . On note de la même manière que précédemment  $A_i^n = A(t = n\Delta t, x = i\Delta x)$ .

Pour obtenir la valeur de  $A$  en tout point  $x$  de l'espace, on utilisera alors le schéma d'interpolation suivant :

$$A(t = n\Delta t, x) = \sum_i S_i^\alpha(x) A_i^n \quad (2.23)$$

où la fonction  $S_i^\alpha(x) = S^\alpha(x - i\Delta x)$  est le facteur de forme d'ordre  $\alpha$ .

Le facteur de forme d'ordre zéro est le plus simple de tous, il revient à ne prendre en compte que le nœud le plus proche du point considéré, d'où son nom de méthode NGP pour *Nearest Grid Point* :

$$S^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\frac{\Delta x}{2} < x < \frac{\Delta x}{2} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Les facteurs de forme d'ordre plus élevé sont obtenus récursivement par produit de convolution tels que :  $S^{\alpha+1}(x) = S^\alpha(x) * S^0(x)$ . La figure 2.2 présente la forme de  $S^\alpha$  pour les principaux ordres utilisés dans les codes PIC. Plus l'ordre d'interpolation choisi  $\alpha$  est grand,

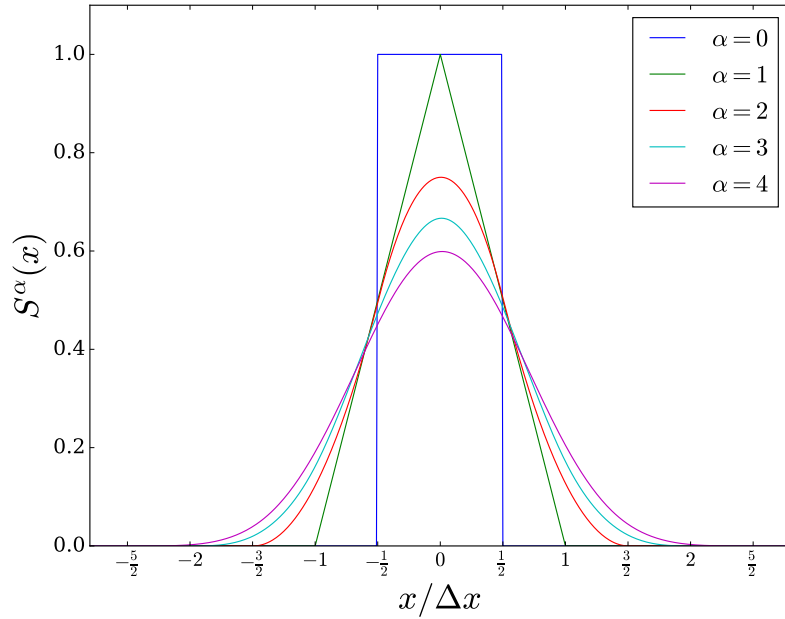


FIGURE 2.2 – Facteurs de forme  $S^\alpha$  pour les ordres 0 à 4.

plus il y a de nœuds du maillage considérés pour déterminer  $A(t = n\Delta t, x)$ . Ainsi, si la sommation se fait théoriquement sur l'ensemble des points du maillage, en pratique seuls les plus proches voisins sont nécessaires au calcul. Augmenter l'ordre d'interpolation permet de diminuer l'influence du bruit numérique sur les simulations mais se fait au détriment du temps de calcul.

Pour un maillage tridimensionnel, il faut évidemment considérer les points dans les trois directions. On obtient alors :

$$A(t = n\Delta t, x, y, z) = \sum_{i,j,k} S_{i,j,k}^\alpha(x, y, z) A_{i,j,k}^n \quad (2.25)$$

où  $S_{i,j,k}^\alpha(x, y, z)$  est obtenu par le produit des facteurs de forme unidimensionnels tels que :  $S^\alpha(x, y, z) = S^\alpha(x) \times S^\alpha(y) \times S^\alpha(z)$ .

Dans notre cas, il faut de plus tenir compte du fait que les champs sont connus sur les maillages primal et/ou dual selon leur direction, ce qui complique légèrement le processus. Une autre source de complication vient du fait que les champs  $E$  et  $B$  calculés sur le maillage ne sont pas connus aux mêmes pas de temps. Or, comme nous allons le voir à la section 2.2.4,

les champs  $E$  et  $B$  qui s'appliquent sur une particule (après interpolation) doivent être connus au même instant  $t = n\Delta t$ . Une étape supplémentaire d'interpolation temporelle est donc nécessaire pour le calcul du champ  $B$ .

Généralement une simple interpolation linéaire permet d'obtenir  $\tilde{B}_{i,j,k}^n = \frac{1}{2} (B_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + B_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}})$  qui est alors utilisé pour l'interpolation spatiale. Pour une macro-particule se trouvant en  $(x_m, y_m, z_m)$  à l'instant  $t$ , l'interpolation des champs  $E_x$  et  $B_x$  donnera par exemple :

$$E_x(t = n\Delta t, x_m, y_m, z_m) = \sum_{i,j,k} S_{i+\frac{1}{2},j,k}^\alpha(x_m, y_m, z_m) E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^n \quad (2.26)$$

$$B_x(t = n\Delta t, x_m, y_m, z_m) = \sum_{i,j,k} S_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^\alpha(x_m, y_m, z_m) \tilde{B}_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^n \quad (2.27)$$

Les autres composantes des champs électromagnétiques sont interpolées de manière similaire.

## 2.2.4 Mouvement des particules

Une fois les champs électromagnétiques connus aux positions des particules, on peut alors les utiliser pour résoudre les équations du mouvement. Plusieurs techniques sont possibles pour cela, un des choix les plus classiques est d'utiliser le pousseur de Boris [46]. Avec cette méthode l'impulsion  $\mathbf{p}_m^{n+\frac{1}{2}}$  est calculée à partir de  $\mathbf{p}_m^{n-\frac{1}{2}}$  en séparant l'action des champs électrique et magnétique en trois étapes faisant intervenir deux intermédiaires de calcul  $\mathbf{p}_m^-$  et  $\mathbf{p}_m^+$  qui sont reliés comme suit :

$$\frac{\mathbf{p}_m^- - \mathbf{p}_m^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = q_s \mathbf{E}^n \quad (2.28)$$

$$\frac{\mathbf{p}_m^+ - \mathbf{p}_m^-}{\Delta t} = q_s \frac{\mathbf{p}_m^+ + \mathbf{p}_m^-}{2m_s \gamma_m^-} \times \tilde{\mathbf{B}}^n \quad (2.29)$$

$$\frac{\mathbf{p}_m^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{p}_m^+}{\Delta t/2} = q_s \mathbf{E}^n \quad (2.30)$$

Les trois étapes successives sont donc :

- La première impulsion intermédiaire  $\mathbf{p}_m^-$  est calculée à partir de  $\mathbf{p}_m^{n-\frac{1}{2}}$  après l'accélération par le champ  $\mathbf{E}^n$  pendant  $\Delta t/2$ .
- Puis la deuxième impulsion  $\mathbf{p}_m^+$  est calculée à partir de  $\mathbf{p}_m^-$  après la rotation due au champ  $\tilde{\mathbf{B}}^n$  pendant  $\Delta t$ .
- Enfin l'impulsion finale  $\mathbf{p}_m^{n+\frac{1}{2}}$  est calculée à partir de  $\mathbf{p}_m^+$  en appliquant à nouveau le champ  $\mathbf{E}^n$  pendant  $\Delta t/2$ .

Une fois la nouvelle impulsion connue, on peut alors calculer simplement la nouvelle position de la particule par :

$$\mathbf{r}_m^{n+1} = \mathbf{r}_m^n + \frac{\mathbf{p}_m^{n+\frac{1}{2}}}{m_s \gamma_m^{n+\frac{1}{2}}} \Delta t \quad (2.31)$$

À noter que le facteur de Lorentz se calcule facilement à partir de l'impulsion tel que  $\gamma_m^- = \sqrt{1 + \mathbf{p}_m^{-2}}$  et  $\gamma_m^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \mathbf{p}_m^{n+\frac{1}{2}2}}$ .

Cette méthode entraîne cependant des imprécisions sur le calcul des impulsions, notamment lorsque la vitesse des particules est très proche de  $c$  [89]. D'autres méthodes ont été développées pour réduire ces effets numériques, notamment par J.-L. Vay [90].

## 2.2.5 Projection de la charge et des courants

Une fois les nouvelles coordonnées des particules connues, il est nécessaire de calculer les termes sources intervenant dans les équations de Maxwell. Pour cela, on projette la densité de charge  $\rho$  et le courant électrique  $\mathbf{J}$  sur les maillages appropriés à partir des positions des macro-particules. On utilise généralement les mêmes facteurs de forme que pour l'interpolation des champs électromagnétiques. On donne ici les formules pour la projection de  $\rho$  et  $J_x$  uniquement, les autres composantes du courant sont interpolées de manière similaire.

$$\rho_{i,j,k}^n = \sum_m q_m S_{i,j,k}^\alpha(x_m^n, y_m^n, z_m^n) \quad (2.32)$$

$$J_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}} = \sum_m q_m \frac{p_{x_m}^{n+\frac{1}{2}}}{m_s \gamma^{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{2} \left( S_{i+\frac{1}{2},j,k}^\alpha(x_m^n, y_m^n, z_m^n) + S_{i+\frac{1}{2},j,k}^\alpha(x_m^{n+1}, y_m^{n+1}, z_m^{n+1}) \right) \quad (2.33)$$

où  $q_m = q_s W_m$  est la charge totale représentée par une macro-particule.

Cette méthode ne respecte cependant pas nécessairement la version discrète de l'équation de continuité  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Plusieurs solutions ont depuis été proposées pour résoudre ce problème, la méthode la plus classique pour respecter cette condition est d'utiliser une méthode différente de projection des courants connue sous le nom d'algorithme d'Esirkepov [91].

## 2.3 Rayonnement Cherenkov numérique dans les codes PIC

L'effet Cherenkov numérique a été décrit pour la première fois par Godfrey en 1974 [92, 93]. Il est abondamment étudié depuis [94–96] de par son apparition délétère dans un nombre important de cas physiques. C'est un artefact numérique qui a un comportement analogue au phénomène physique de l'effet Cherenkov, d'où son nom, et qui est dû à la nature discrète de la méthode de résolution des équations de Maxwell dans les codes PIC.

### 2.3.1 Rayonnement Cherenkov physique

L'effet Cherenkov est un phénomène physique bien connu, responsable entre autres de la teinte bleutée typique de l'eau recouvrant les cœurs de réacteurs nucléaires, comme on peut le voir sur la Figure 2.3. C'est un phénomène similaire à une onde de choc créée par un objet se déplaçant plus vite que la vitesse du son dans l'air. Le rayonnement Cherenkov est le résultat d'une particule chargée se déplaçant plus rapidement que la vitesse de phase de la lumière dans le milieu de propagation. Cela est possible uniquement lorsque l'indice de réfraction  $n$  du milieu de propagation est supérieur à 1. La relation de dispersion permet alors, pour certains modes électromagnétiques caractérisés par leur pulsation  $\omega$ , d'avoir une vitesse de phase  $v_\varphi(\omega)$  inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide :  $v_\varphi < c$ . Lorsqu'une particule chargée se déplace alors dans ce milieu à la vitesse  $v_p$ , elle se met à émettre du rayonnement pour tout  $\omega$  satisfaisant à  $v_p > v_\varphi(\omega)$  sur un cône d'angle  $\theta$  comme le montre la Figure 2.4.



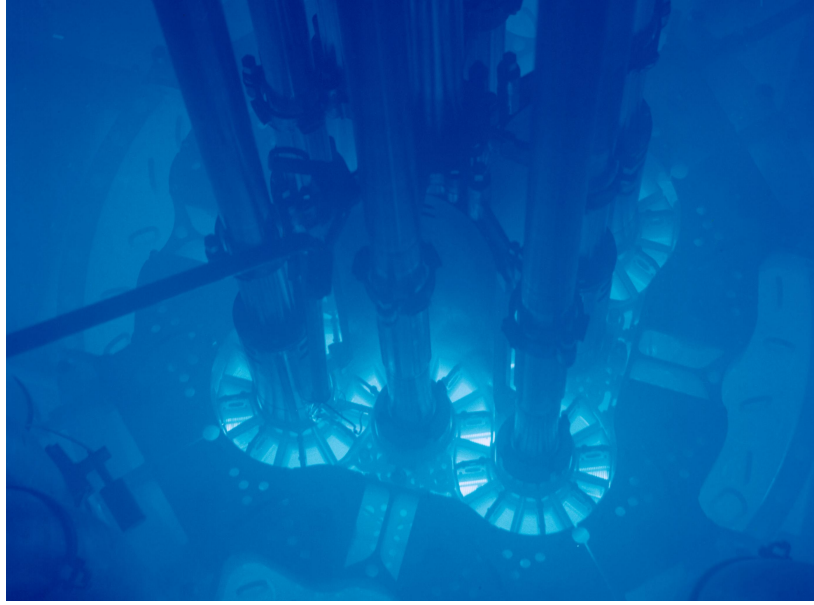


FIGURE 2.3 – Cœur du Advanced Test Reactor, Idaho National Laboratory (Image originellement publiée sur Flickr par Argonne National Laboratory sous les termes de la licence cc-by-sa-2.0).

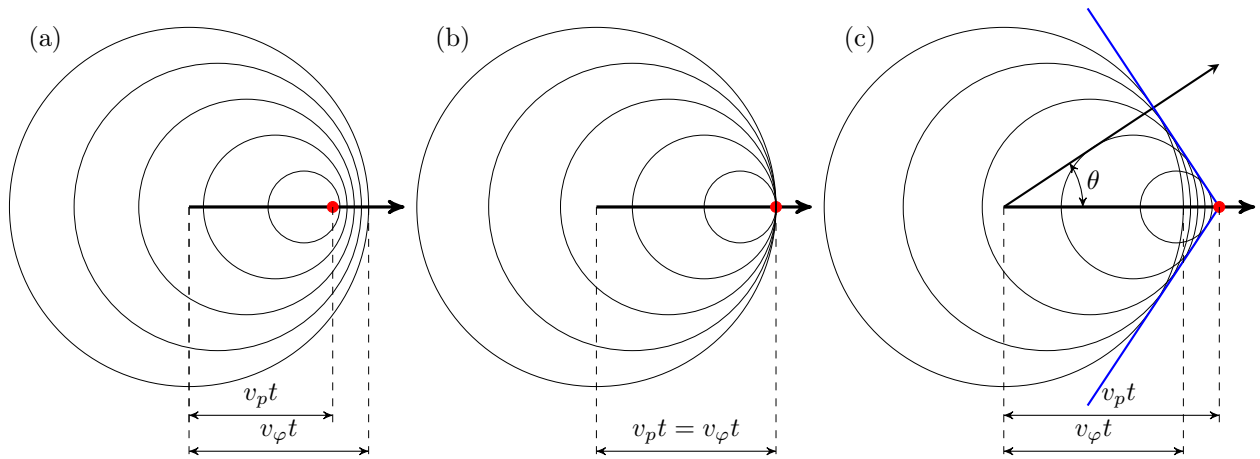


FIGURE 2.4 – Ondes sphériques émises par une particule chargée se déplaçant à  $v_p < v_\varphi$  (a),  $v_p = v_\varphi$  (b) et  $v_p > v_\varphi$  (c). Dans le dernier cas, une "onde de choc" apparaît et se propage à  $v_\varphi$  dans la direction  $\theta$ . (Figure d'après [97])

L'angle de propagation du rayonnement  $\theta$  est donné par :

$$\cos(\theta) = \frac{c}{v_p n(\omega)} \quad (2.34)$$

où on remarque que cet angle dépend de la fréquence du rayonnement considéré.

On peut résumer les principales caractéristiques du rayonnement Cherenkov à la condition :

$$\omega = \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{k} \quad (2.35)$$

où  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  (le vecteur d'onde du rayonnement) sont liés entre eux par la relation de dispersion du milieu. Dans ce cas, la particule reste en phase avec le rayonnement qu'elle émet.

Un calcul analytique plus complet [97] permet d'aboutir à la formule de Frank-Tamm qui exprime l'énergie rayonnée par unité de fréquence et par unité de distance parcourue par la particule :

$$\frac{d^2 E}{dx d\omega} = \frac{q^2}{4\pi} \mu(\omega) \omega \left( 1 - \frac{1}{\beta_p^2 n^2(\omega)} \right) \quad (2.36)$$

où  $q$  est la charge de la particule,  $\beta_p = v_p/c$  sa vitesse normalisée et  $\mu(\omega)$  est la perméabilité magnétique du milieu. Cette expression permet notamment d'expliquer la couleur du rayonnement Cherenkov dans l'eau, car l'énergie émise augmente avec la fréquence. Ainsi, pour le spectre du visible, le bleu et le violet seront dominants d'où sa teinte caractéristique.

### 2.3.2 Origine du phénomène numérique

#### Dispersion numérique du schéma de Yee

Le rayonnement Cherenkov est théoriquement impossible dans le vide car  $\omega^2 = c^2 k^2$ , d'où  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ , et *a fortiori* dans un plasma où  $v_\varphi > c$  puisque  $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$ . Cependant, comme on l'a vu à la section 2.2.2, dans un code PIC utilisant le schéma de Yee [45] pour résoudre les équations de Maxwell, la relation de dispersion numérique est donnée par l'équation (2.21). La vitesse de phase  $v_\varphi^{num} = \frac{\omega}{k}$  des ondes discrétisées est alors :

$$v_\varphi^{num} = \frac{2}{k\Delta t} \arcsin \left( c\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2 \left( \frac{k_y \Delta y}{2} \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right)} \right) \quad (2.37)$$

À partir de l'équation (2.37), on peut prouver qu'il existe toujours des fréquences  $\omega$  et des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  tels que  $v_\varphi^{num} < c$ . Si on considère par exemple des ondes se propageant uniquement dans la direction  $x$  ( $k_y = k_z = 0$ ), l'expression se réduit à  $v_\varphi^{num} = \frac{2}{k_x \Delta t} \arcsin \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right)$  pour  $0 < k_x < \pi/\Delta x$ . La figure 2.5 présente l'évolution de cette vitesse de phase pour différents rapports  $\Delta t/\Delta x$ .

On observe que plus l'écart est grand entre  $c\Delta t$  et  $\Delta x$ , plus la dispersion numérique est importante, particulièrement pour les hautes fréquences. Or on a vu dans la Partie 2.2.2 que le choix de  $\Delta t$  est limité par la condition CFL et qu'il est par conséquent impossible d'avoir  $c\Delta t = \Delta x$ . Les simulations utilisant le schéma de Yee sont donc nécessairement dispersives et certaines fréquences ont des vitesses de phase inférieures à  $c$ , même dans le vide ou dans un plasma.

Ainsi, pour des particules fortement accélérées, il est possible d'avoir  $v_p > v_\varphi^{num}(\omega)$ , ce qui mène à la génération d'un rayonnement Cherenkov sans réalité physique, qu'on appelle rayonnement Cherenkov numérique, et qu'on notera par la suite NCR (pour *Numerical Cherenkov Radiation*).

#### Caractérisation du rayonnement Cherenkov numérique

Les modes du rayonnement Cherenkov numérique vérifient l'équation (2.35). Pour une particule se propageant uniquement selon  $x$  tel que  $\beta_x = v_p/c$  cela revient à  $\beta_x c = v_{\varphi,x} = \frac{\omega}{k_x}$  où  $v_{\varphi,x}$  est la vitesse de phase des ondes selon  $x$ .

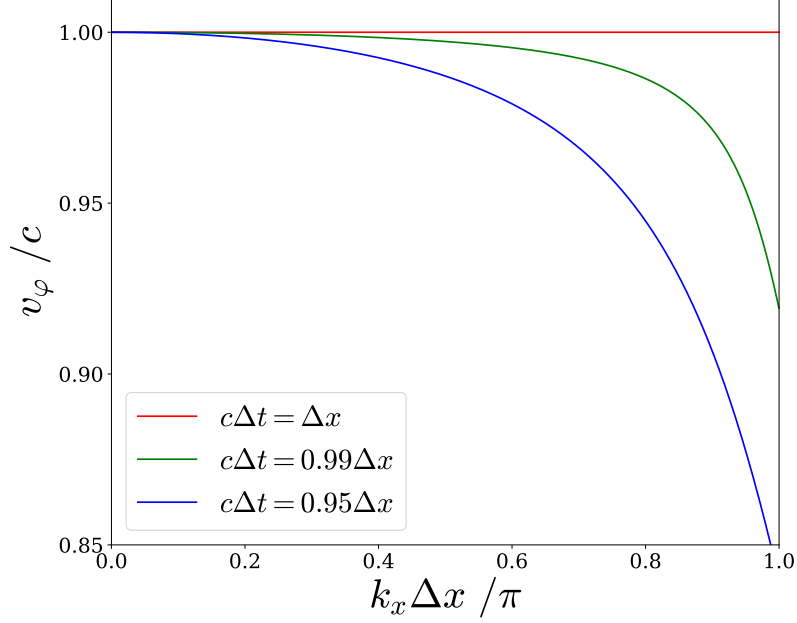


FIGURE 2.5 – Vitesse de phase numérique  $v_\varphi^{num}$  des ondes électromagnétiques se propageant uniquement selon  $x$  ( $k = k_x$ ) en fonction du rapport  $c\Delta t/\Delta x$  avec le schéma de Yee.

En utilisant l'équation (2.21) on peut alors caractériser spectralement ce rayonnement par :

$$\frac{1}{c^2\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{k_x\beta_x c\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) + \frac{1}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) \quad (2.38)$$

Le NCR apparaît d'abord aux fréquences les plus élevées où les vitesses de phase sont les plus faibles, mais touche un spectre d'autant plus large, s'étendant vers les basses fréquences, que la particule le générant est rapide. La figure 2.6 permet de visualiser aisément ce phénomène en montrant les solutions de l'équation 2.38 pour différentes vitesses de particules dans le cas  $k_z = 0$  (équivalent au cas 2D). Ainsi, pour des particules suffisamment énergétiques, le NCR modifie les champs jusqu'à des fréquences relativement basses, qui sont proches des fréquences d'intérêt physique, et peut donc modifier significativement les résultats des simulations.

### Instabilités dues au Cherenkov numérique

Dans certains cas, le rayonnement Cherenkov numérique peut aussi se coupler avec le plasma et donner lieu à ce qu'on appelle des instabilités numériques ou *Numerical Cherenkov Instabilities* (NCI) en anglais.

Ce couplage intervient habituellement dans des cas où un ensemble important de charges génèrent le NCR, c'est-à-dire lorsqu'on a une dérive relativiste de l'ensemble d'un plasma ou d'un faisceau étendu. Cette situation se rencontre généralement dans les simulations d'astrophysique impliquant des chocs de plasmas non collisionnels. Elle peut aussi s'observer dans des cas d'accélération par sillage lorsque les simulations sont effectuées en *boosted frame* : la simulation est effectuée dans un référentiel dérivant avec l'onde de sillage au lieu

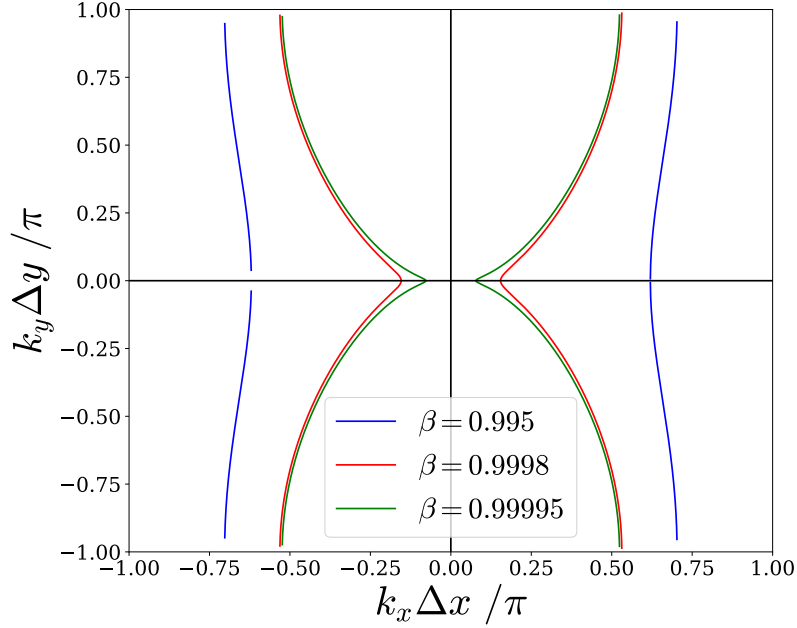


FIGURE 2.6 – Solutions de l'équation (2.38) (avec  $k_z = 0$ ) correspondant aux modes possibles pour le rayonnement Cherenkov numérique dans le plan  $x - y$  pour différentes vitesses de particule  $\beta$  (normalisées à  $c$ ). Figure réalisée avec  $c\Delta t = 0.99\Delta x$  et  $\Delta y = 20\Delta x$ .

de celui du laboratoire, le plasma se déplace alors à des vitesses relativistes dans la boîte de simulation.

Dans ces cas-là, le rayonnement numérique va exciter et entrer en résonance avec un ou plusieurs des modes plasma, créant un rayonnement qui va croître très rapidement jusqu'à devenir fortement néfaste pour la simulation. Cette situation est d'autant plus problématique qu'à cause des effets de repliement de spectres et de résonance, même des modes de rayonnement Cherenkov numérique *a priori* négligeables peuvent donner naissance à des phénomènes rapidement prépondérants sur les effets physiques, d'où le terme d'instabilité.

### 2.3.3 Techniques existantes pour réduire l'effet Cherenkov numérique

De nombreuses techniques pour limiter l'impact du Cherenkov numérique sur les simulations ont été proposées depuis les premières études dans les années 1970 [96, 98–104].

#### Filtrage du rayonnement

L'approche la plus évidente consiste à éliminer le rayonnement gênant par un processus de filtrage. Cependant, le rayonnement tend à s'étendre sur une large gamme de fréquences, parfois assez éloignée de la fréquence de Nyquist (la fréquence la plus élevée qui peut être discrétisée, caractérisée par  $k_\alpha = \frac{\pi}{\Delta\alpha}$  avec  $\alpha = x, y$  ou  $z$ ). Il peut même recouvrir le domaine fréquentiel des champs d'intérêt pour la simulation, ce qui rend impossible l'utilisation de simples filtres passe-bas. Il est alors obligatoire de développer des techniques de filtrage particulièrement sophistiquées et relativement compliquées à mettre en place [96, 99–101].

## Modification de la relation de dispersion

Une autre approche, relativement courante et qui peut être utilisée conjointement au filtrage, consiste à modifier le schéma numérique de la résolution des équations de Maxwell. De nouveaux schémas ont ainsi été développés spécifiquement pour s’assurer que le rayonnement Cherenkov numérique ne puisse *a priori* pas apparaître. Cela est généralement réalisé en modifiant le solveur de Maxwell de manière à ce que la relation de dispersion numérique ne permette plus d’obtenir  $v_\varphi < c$  dans le vide [98–100, 102–104]. Ces modifications ne sont, là encore, pas forcément évidentes à implémenter dans les codes de simulation et peuvent aussi conduire à d’autres effets secondaires néfastes (apparition d’un autre type d’artefacts numériques) ou non-physiques (propagation de la lumière plus rapidement que  $c$  dans le vide).

## Solveurs spectraux

Plus récemment, de nouveaux types de schémas sont apparus pour résoudre le problème du Cherenkov numérique : les solveurs pseudo-spectraux. Avec cette méthode, les équations de Maxwell sont résolues dans l’espace de Fourier où la relation de dispersion numérique reste exacte et permet donc *a priori* d’éliminer complètement l’apparition de rayonnement Cherenkov numérique [105–107]. Cependant la non-localité de cette approche rend ces méthodes difficiles à paralléliser et les calculs sont donc très coûteux. De plus, selon la méthode utilisée pour discrétiser temporellement ces schémas spectraux, certains modes de NCI peuvent continuer à apparaître.

## Taux de croissance des instabilités

Toutes ces approches ne sont pas nécessairement suffisantes telles quelles pour assurer l’élimination des instabilités dues au Cherenkov numérique car comme on l’a vu, même un champ résiduel très faible peut, en se couplant au plasma, produire une instabilité suffisamment forte pour impacter les résultats de la simulation. Dans ces cas-là, le plus important est alors de limiter le taux de croissance des instabilités pour ainsi s’assurer que les artefacts numériques restent négligeables sur les échelles de temps de la simulation. D’autres méthodes ont été développées à ces fins particulières (le *magic time-step* notamment) [101, 108].

## Approche retenue dans CALDER

Dans les cas étudiés dans le présent manuscrit, les simulations sont effectuées dans le référentiel du laboratoire et le rayonnement Cherenkov numérique est donc créé par le faisceau d’électrons accélérés. Ce faisceau reste d’un volume et d’une charge suffisamment faibles pour qu’on n’ait pas à se soucier de l’apparition de NCI et l’artefact numérique prépondérant dans ces simulations est alors le rayonnement créé directement par le faisceau. Supprimer ou empêcher l’apparition de ce NCR est donc suffisant dans notre situation.

Une technique basée sur la modification du solveur de Maxwell a été implémentée dans CALDER par R. Lehe [98]. Cette technique assure que la relation de dispersion numérique induit  $v_\varphi > c$  dans la direction de propagation du faisceau, réduisant ainsi drastiquement l’apparition du NCR. Cette méthode a cependant l’inconvénient de créer des champs de très

haute fréquence (proche de la fréquence de Nyquist) dans le sillage du faisceau. Ce nouvel artefact nécessite donc un filtrage passe-bas supplémentaire pour être neutralisé. Quoique plus facile à mettre en place que d'autres méthodes, ce filtrage reste contraignant sur la simulation et parfois difficile à paramétrer.

C'est pour ces raisons qu'une approche plus simple encore a été recherchée pour résoudre le problème de l'impact du NCR dans nos simulations. Dans notre cas, le rayonnement Cherenkov numérique a un impact important sur le mouvement transverse des électrons accélérés, or il est capital de modéliser correctement ce mouvement pour calculer avec précision le rayonnement bêatron émis. Ces efforts sont présentés dans la partie suivante.



## Deuxième partie

### Études menées





# Chapitre 3

## Réduction de l'impact du rayonnement Cherenkov numérique sur les simulations d'accélération par sillage laser

*“Light thinks it travels faster than anything but it is wrong. No matter how fast light travels, it finds the darkness has always got there first, and is waiting for it.”*

– Terry Pratchett, Reaper Man

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Dynamique d'un électron en présence d'une onde plane électromagnétique en régime relativiste . . . . .</b>	<b>86</b>
4.1.1	Développement théorique pour un électron initialement au repos . . . . .	86
4.1.2	Reproduction par simulation numérique . . . . .	87
4.1.3	Problème de l'impulsion longitudinale avec QTI et B-TIS . . . . .	90
4.1.4	Cas d'un électron avec une vitesse longitudinale initiale . . . . .	95
<b>4.2</b>	<b>Interaction avec une impulsion au profil transverse gaussien . . . . .</b>	<b>100</b>
4.2.1	Situation théorique . . . . .	100
4.2.2	Résultats numériques . . . . .	102
4.2.3	Influence de la position initiale . . . . .	104
<b>4.3</b>	<b>Simulation d'accélération par laser dans le vide . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>4.4</b>	<b>Simulation d'accélération directe par laser . . . . .</b>	<b>109</b>

---

Les précédents chapitres ont introduit les concepts nécessaires pour les phénomènes physiques sous-tendant l'accélération par sillage laser et les sources bêtatrons puis les outils numériques utilisés pour les simuler ainsi que leurs limitations. Dans ce chapitre, on s'intéresse en particulier au problème que pose le rayonnement Cherenkov numérique dans ces simulations. En effet, l'accélération par sillage laser est un cas typique où le NCR peut apparaître et représenter une source d'erreur non négligeable, puisqu'il se concentre autour du faisceau accéléré dans la bulle et modifie ainsi les champs pouvant directement l'affecter.

La section 3.1 présente les effets les plus notables du rayonnement Cherenkov numérique sur les simulations d'accélération par sillage laser, notamment sur le mouvement transverse des électrons accélérés. On propose ensuite dans la section 3.2 une nouvelle approche pour limiter ce problème qui se veut plus simple à mettre en place mais au moins aussi efficace que les solutions déjà existantes dans les cas qui nous intéressent. Enfin la section 3.3 présente une comparaison de résultats de simulations obtenus avec différentes approches pour limiter le NCR, mettant en lumière l'intérêt de cette nouvelle méthode.

## 3.1 Impact du Cherenkov numérique sur une simulation d'accélération par sillage laser

### 3.1.1 Présentation de la simulation

Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont toutes été réalisées en 3D avec le code CALDER [51] en utilisant une fenêtre glissante de  $3220 \times 200 \times 200$  mailles et  $\Delta x = 0.019 \mu\text{m}$ ,  $\Delta y = \Delta z = 0.38 \mu\text{m}$  et  $c\Delta t = 0.993 \Delta x$ . L'impulsion laser, polarisée selon la direction  $y$ , est de  $4 \text{ J}$  ( $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$ ) d'une durée FWHM  $\tau_0 = 25 \text{ fs}$  avec une largeur FWHM du profil d'intensité  $w_0 = 18 \mu\text{m}$  ce qui donne un potentiel vecteur normalisé de  $a_0 = 4.35$ .

L'impulsion laser se propage dans un plasma au profil de densité trapézoïdal tel qu'illustré à la figure 3.1 avec une densité électronique de  $n_e = 6.22 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3} = 3.57 \times 10^{-3} n_c$ .

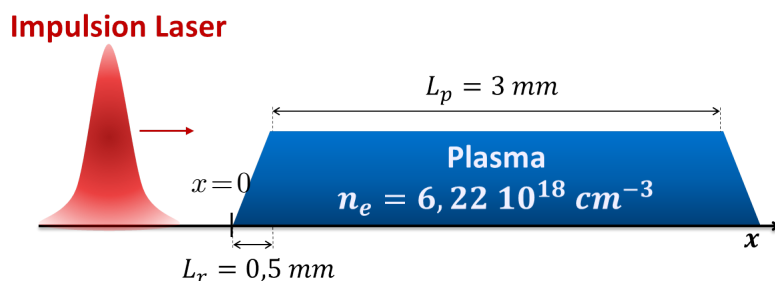


FIGURE 3.1 – Schéma du profil plasma simulé

Ces paramètres ont été sélectionnés pour être typiques d'un cas d'accélération par sillage laser tout en garantissant une charge injectée importante afin de visualiser facilement les effets du Cherenkov numérique. La figure 3.2.a présente une carte de densité électronique en coupe dans le plan  $xy$  après  $2.25 \text{ mm}$  de propagation dans le plasma. On peut observer sur cette image la cavité ionique créée dans le sillage du laser ainsi que le faisceau d'électrons injecté. On peut aussi noter que la forte charge du faisceau ( $Q \approx 4.2 \text{ nC}$ ) induit un effet de *beamloading* qui déforme et allonge la bulle lui faisant perdre son aspect sphérique (d'autres effets contribuent aussi à rendre la bulle dissymétrique et donc non sphérique, comme l'effet dû au raidissement du front avant du laser couplé à la variation temporelle de la CEP [109]). L'accélération des électrons est visible dans l'espace des phases  $(x, p_x)$  à la figure 3.2.b. Les électrons à l'avant du faisceau sont, comme attendu, les plus énergétiques car ils ont été accélérés pendant plus longtemps. On peut remarquer que l'avant du faisceau a atteint la limite de déphasage et commence à décélérer après avoir atteint un maximum d'énergie.

À noter que le code CALDER utilise des grandeurs normalisées à partir notamment de  $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ . Ainsi, les grandeurs temporelles sont normalisées à  $1/\omega_0$ , les distances à  $c/\omega_0$  et les champs électriques et magnétiques à  $m_e c \omega_0 / e$  et  $m_e \omega_0 / e$  respectivement. Par souci de simplicité cette normalisation a été conservée dans la suite sur la plupart des figures extraites de simulation en prenant garde de le marquer clairement. Les équations dans le corps du texte, elles, restent toutes exprimées dans le Système International d'unités sauf mention contraire explicite.

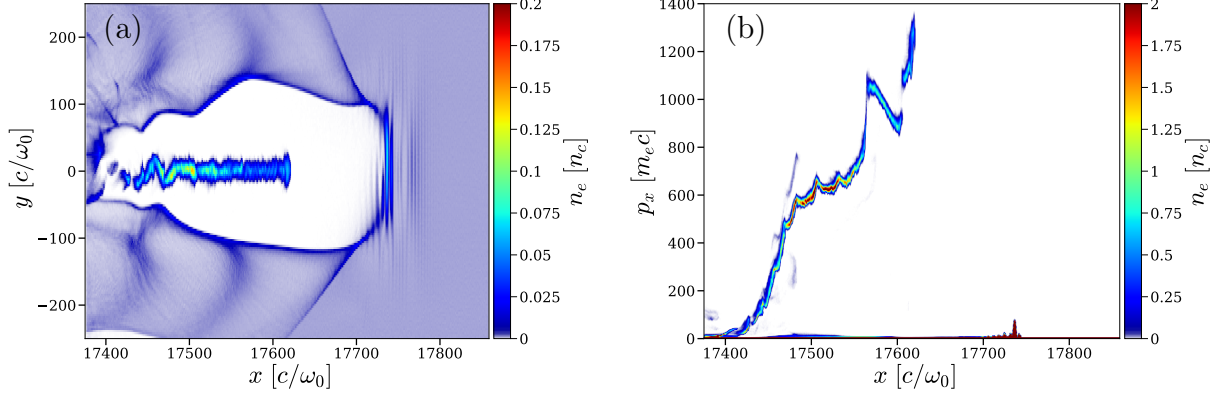


FIGURE 3.2 – Carte de densité électronique (a) et espace des phases longitudinal (b) après 2.25 mm de propagation dans le plasma.

### 3.1.2 Observation du rayonnement Cherenkov numérique autour du faisceau

La modification des champs électromagnétiques autour du faisceau a notamment un fort impact sur la force transverse s'appliquant sur les électrons. La figure 3.3 illustre l'impact du rayonnement Cherenkov numérique sur les champs électriques transverse dans le cas d'un accélérateur par sillage laser. Les champs basses fréquences dus à la bulle et au faisceau sont clairement visibles sur la figure 3.3.a et 3.3.d ainsi que l'impulsion laser sur la figure 3.3.a. Cependant un rayonnement à plus haute fréquence autour du faisceau d'électrons est aussi présent. Cela est d'autant plus évident lorsqu'on considère les transformées de Fourier des champs comme sur la figure 3.3.b et 3.3.e. Les champs ayant une réalité physique sont confinés dans la partie  $k_x < 2 \omega_0/c$  avec notamment le champ laser apparent sur la figure 3.3.c autour de  $k_x = 1 \omega_0/c$ . Mais on observe également la trace d'un rayonnement à plus haute fréquence s'étalant sur une large bande spectrale ( $2.5 \omega_0/c < k_x < 15 \omega_0/c$ ) qui correspond aux champs hautes fréquences entourant le faisceau d'électrons, comme peuvent le montrer les figure 3.3.c et 3.3.f où on affiche uniquement les champs avec  $k_x > 2.5 \omega_0/c$  (via une transformée de Fourier inverse après avoir tronqué le spectre dans l'espace de Fourier).

À partir de l'équation (2.38), on peut s'assurer que ces champs sont bien dus au rayonnement Cherenkov numérique en montrant que leurs transformées de Fourier correspondent bien à ce qui est attendu, c'est-à-dire aux solutions des équations (3.1) et (3.2) pour  $E_y$  et  $E_z$  respectivement :

$$k_y = \frac{2}{\Delta y} \arcsin \left( \Delta y \sqrt{\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \beta_x c \Delta t}{2} \right) - \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right)} \right) \quad (3.1)$$

$$k_z = \frac{2}{\Delta z} \arcsin \left( \Delta z \sqrt{\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \beta_x c \Delta t}{2} \right) - \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right)} \right) \quad (3.2)$$

On représente ces deux équations sur les figure 3.3.c et 3.3.d en prenant  $\beta_x = 0.99995$ , ce qui correspond à un faisceau d'électrons de 50 MeV ( $p_x \approx 100 m_e c$ ). La courbe théorique est en très bon accord avec les résultats numériques ce qui nous permet de confirmer l'origine du rayonnement haute fréquence comme étant dû à l'effet Cherenkov numérique.

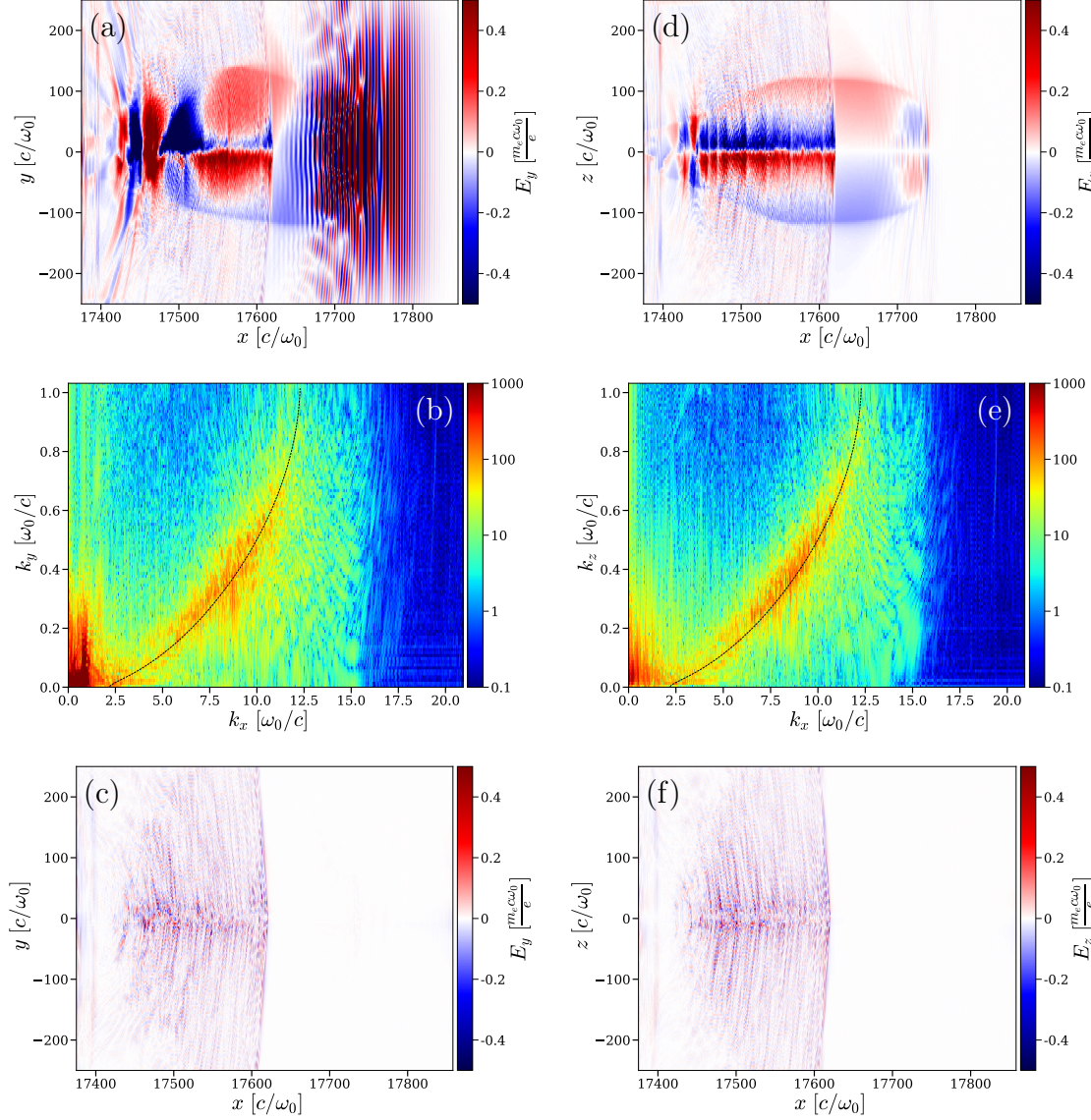


FIGURE 3.3 – Rayonnement Cherenkov numérique dans une simulation d’accélération par sillage laser : (a) présente une carte du champ  $E_y$  dans le plan  $(xy)$  et (b) sa transformée de Fourier, la courbe noire correspondant à la solution de l’équation (3.1) pour une particule avec  $p_x \approx 100 m_e c$ . (c) présente la même carte que (a) mais avec uniquement  $k_x > 2.5 \omega_0/c$  (les basses fréquences ont été filtrées). (d),(e) et (f) présentent les mêmes figures mais pour  $E_z$  dans le plan  $(xz)$  et l’équation (3.2).

### 3.1.3 Modification de la force transverse

La figure 3.4 montre une coupe dans le plan  $(xz)$  et représente la somme  $E_z + cB_y$ , une carte de densité électronique a été superposée à la carte de champs pour visualiser les contours de la bulle et le faisceau injecté. Comme décrit dans le chapitre 1, les champs de la bulle créent une force transverse  $F_z = -e(E_z + v_x B_y - v_z B_x) \approx -e(E_z + cB_y)$  qui varie linéairement avec la position transverse, ce qui conduit aux oscillations bêta-trons des électrons accélérés décrites au paragraphe 1.3.2. C’est ce qu’on peut observer sur la figure 3.4.a qui représente la somme des champs attendue théoriquement. On notera que la contribution du champ propre

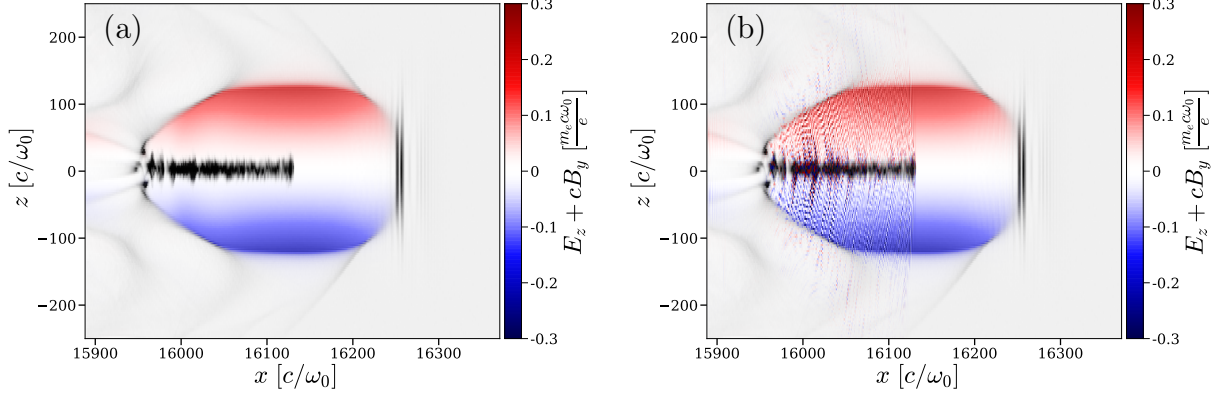


FIGURE 3.4 – Carte de champ montrant  $E_z + cB_y$ , coupe dans le plan  $(xz)$ . Les zones grisées correspondent aux régions de plus forte densité électronique. La figure (a) correspond à ce qu'on attend théoriquement, la figure (b) présente ce qui est observé dans la simulation.

du faisceau n'apparaît pas sur cette carte de champs car  $E_z^{\text{self-field}} + cB_y^{\text{self-field}} \approx 0$ .

Cependant la figure 3.4.b représente les champs tels qu'ils sont réellement obtenus dans la simulation. On observe que le rayonnement Cherenkov numérique entourant le faisceau accéléré modifie les champs électromagnétiques à l'intérieur de la cavité ionique et peut ainsi perturber le mouvement des électrons dans la bulle. En effet, il peut conduire à une modification de la force transverse ressentie par les électrons accélérés, ce qui conduit à l'obtention de trajectoires bien moins régulières que celles prévues par les modèles théoriques.

On peut clairement observer ces effets sur la Figure 3.5 qui montre un exemple de trajectoire suivie par un électron accéléré dans notre simulation de référence. La théorie prédit des oscillations régulières dans les deux plans avec une dépendance linéaire de la force transverse ressentie par la particule et sa position transverse. Les figures 3.5.a et 3.5.c devraient donc présenter une corrélation entre les positions transverses ( $y$  et  $z$ ) et la force transverse (couleur sur la courbe), ce qui n'est pas le cas ici. De manière identique, l'évaluation de la force transverse en fonction de la position transverse simulée (courbe bleue) devrait suivre la courbe théorique (pointillés rouges) caractérisée par l'équation  $F_y = -\frac{1}{2}m_e\omega_p^2 y$  (ou  $F_z = -\frac{1}{2}m_e\omega_p^2 z$ ). Comme nous allons le montrer dans la suite, ces différences avec la théorie sont principalement dues au rayonnement Cherenkov numérique.

De manière plus globale, ces anomalies sur la force transverse ressentie par chaque particule affectent le comportement d'ensemble du faisceau. Le rayonnement non physique créé à l'intérieur même du faisceau a tendance à le faire éclater, augmentant sa taille transverse et sa divergence et entraînant une augmentation constante de son émittance tout au long de l'accélération [98]. Cette modification des caractéristiques du faisceau va aussi avoir pour conséquence d'entraîner une surévaluation du rayonnement bêta-tron à cause des erreurs introduites sur les trajectoires des particules. La quantification de ces différentes erreurs dans notre simulation de référence sera détaillée dans la suite, après avoir introduit notre nouvelle méthode pour minimiser les effets délétères du rayonnement Cherenkov numérique.

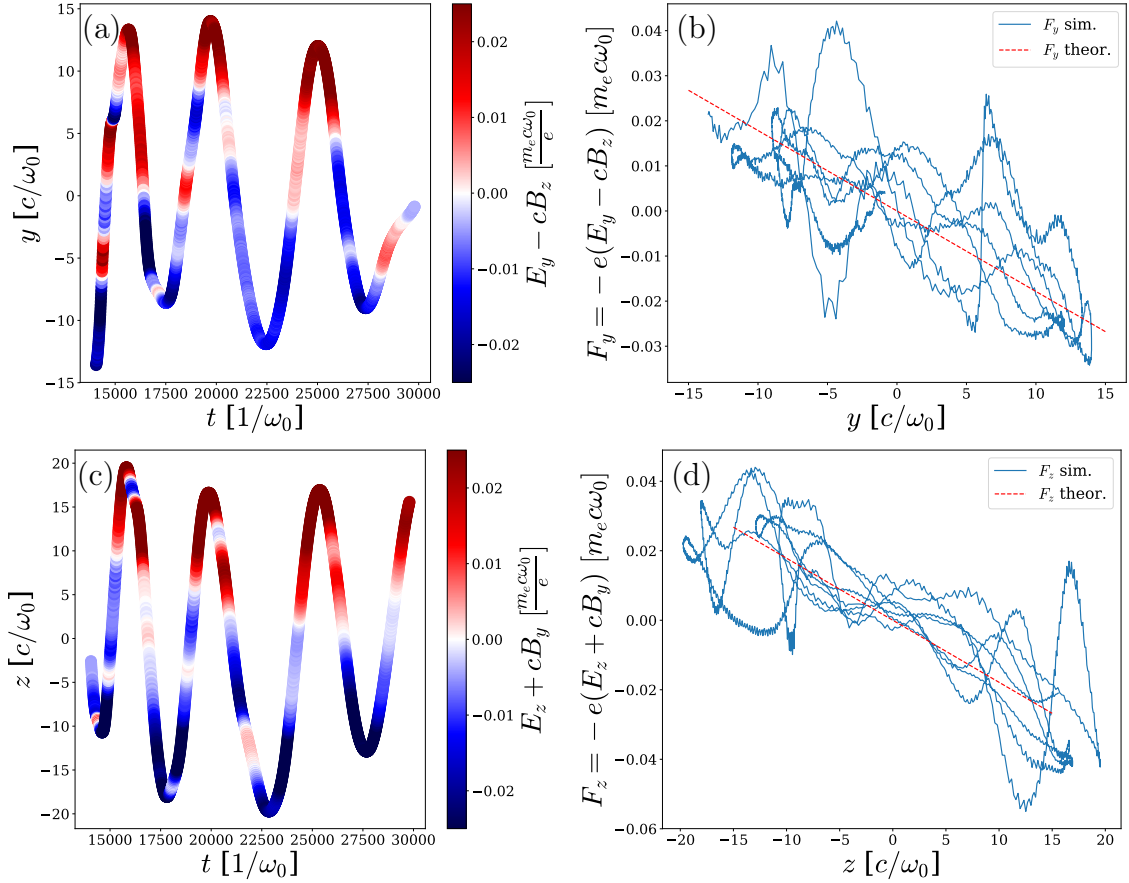


FIGURE 3.5 – Trajectoires d’une particule en présence de rayonnement Cherenkov numérique. Sur la première ligne, la figure de gauche présente la position  $y$  de la particule en fonction du temps avec la couleur représentant la différence  $E_y - v_x B_z$  ressentie en chaque instant. À droite, est tracée la force ressentie  $F_y = -e(E_y - v_x B_z)$  en fonction de la position  $y$  de la particule, à comparer à la courbe théorique  $F_y = -\frac{1}{2}m_e \omega_p^2 y$  (tracée en pointillés rouges). La ligne suivante présente les figures correspondantes pour le mouvement dans le plan  $(xz)$  au lieu de  $(xy)$ .

## 3.2 Nouvelle approche pour limiter l’impact du rayonnement Cherenkov numérique

### 3.2.1 Principe de la nouvelle approche et implémentation

Comme expliqué au chapitre 2, dans les cas de simulations d’accélération par sillage laser, on a fréquemment  $\Delta x \ll \Delta y = \Delta z$ . De ce fait le rayonnement Cherenkov numérique est émis vers l’avant et est quasiment unidirectionnel comme on peut le voir sur la figure 3.3 où  $k_y < \omega_0/c \ll k_x$ . Ainsi pour les électrons du faisceau se propageant le long de l’axe  $x$  à  $v_x \sim c$ , les champs dus au rayonnement Cherenkov numérique devraient satisfaire :

$$\begin{aligned}
 E_x^{\text{NCR}} &\sim cB_x^{\text{NCR}} \approx 0 & \rightarrow F_x^{\text{NCR}} &= -e(E_x^{\text{NCR}}) \approx 0 \\
 E_y^{\text{NCR}} &\sim cB_z^{\text{NCR}} & \rightarrow F_y^{\text{NCR}} &= -e(E_y^{\text{NCR}} - v_x B_z^{\text{NCR}}) \approx 0 \\
 E_z^{\text{NCR}} &\sim -cB_y^{\text{NCR}} & \rightarrow F_z^{\text{NCR}} &= -e(E_z^{\text{NCR}} + v_x B_y^{\text{NCR}}) \approx 0
 \end{aligned}$$



avec  $E^{\text{NCR}}$ ,  $B^{\text{NCR}}$  les champs électromagnétiques dus uniquement au rayonnement Cherenkov numérique et  $F^{\text{NCR}}$  la force résultante de ces champs sur la particule. Toutes les composantes de  $F^{\text{NCR}}$  étant proches de zéro, on pourrait s'attendre à ce que cette force ait un impact négligeable sur le mouvement des électrons accélérés dans les simulations de sillage laser. Et pourtant on constate un impact clairement non négligeable comme vu à la section précédente.

L'effet du rayonnement Cherenkov numérique peut s'expliquer par l'erreur sur le champ  $B$  introduite par l'étape d'interpolation temporelle décrite à la section 2.2.3. On rappelle que le champ  $B$  est calculé aux pas de temps demi-entiers, mais qu'on a besoin d'interpoler temporellement ce champ aux pas de temps entiers pour calculer la force qui s'exerce sur les particules. L'erreur due à l'interpolation temporelle peut devenir très grande pour les composantes haute fréquence des champs (proche de la fréquence de Nyquist). Pour illustrer ce propos, prenons l'exemple d'un champ  $B$  oscillant temporellement de la forme  $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$  et discrétisé aux pas de temps demi-entiers tel que :  $B^{n+\frac{1}{2}} = B_0 \cos(\omega(n + \frac{1}{2})\Delta t)$ . L'interpolation temporelle de ce champ au pas de temps entier donne alors :

$$\tilde{B}^n = \frac{1}{2} \left( B^{n+\frac{1}{2}} + B^{n-\frac{1}{2}} \right) = B_0 \cos(\omega n \Delta t) \cos\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \approx B_0 \cos(\omega n \Delta t) \quad \text{si } \omega \ll \frac{1}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Cette approximation donne de bons résultats pour les basses fréquences mais amène une forte erreur dès que la fréquence  $\omega$  s'approche de la fréquence de Nyquist  $\frac{\pi}{\Delta t}$ .

Cette erreur est donc particulièrement importante pour le Cherenkov numérique qui produit un rayonnement haute fréquence et amène à s'éloigner fortement de la situation où les champs interpolés sur la particule satisfont  $E_y^{\text{NCR}} \sim cB_z^{\text{NCR}}$ . Cette erreur prend d'autant plus d'importance quand on considère la force transverse puisqu'on utilise alors la différence  $E_y^{\text{NCR}} - cB_z^{\text{NCR}}$ , même une faible erreur sur  $B$  peut donc avoir un impact important sur la force transverse.

L'idée de notre nouvelle approche est donc de modifier le processus d'interpolation des champs électromagnétiques de manière à s'assurer que la force  $F^{\text{NCR}}$  est bien toujours négligeable pour ainsi s'assurer de limiter l'impact du rayonnement Cherenkov numérique. Pour cela on va s'arranger pour éliminer l'étape d'interpolation temporelle de  $B$  et assurer que l'interpolation spatiale de  $E$  et  $B$  soit identique, réduisant ainsi cette source d'erreur. Cette solution a l'avantage, comparée à d'autres méthodes, d'être très simple à implémenter, n'ayant pas d'impact sur le solveur utilisé pour résoudre les équations de Maxwell, la parallélisation ou les conditions limites.

## Processus d'interpolation standard

On décrit tout d'abord un peu plus en détail les étapes d'interpolation nécessaires pour obtenir la force transverse s'appliquant sur les particules en utilisant la méthode usuelle des principaux codes PIC. On rappelle que les champs électriques sont connus aux pas de temps entiers  $n$  tandis que les champs magnétiques sont connus aux pas de temps demi-entiers  $n + \frac{1}{2}$ . De plus les champs  $E_y$  et  $E_z$  sont calculés sur le maillage primal selon  $x$  tandis que  $B_y$  et  $B_z$  le sont sur le maillage dual. Afin de ne pas surcharger les notations on ne considérera dans la suite que les champs  $E_y$  et  $B_z$  dont on omettra les indices  $y$  et  $z$  quand ce n'est pas absolument nécessaire et qu'on notera alors  $E_i^n$  et  $B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ .



La Figure 3.6 présente les différentes étapes du processus d'interpolation pour ces champs.

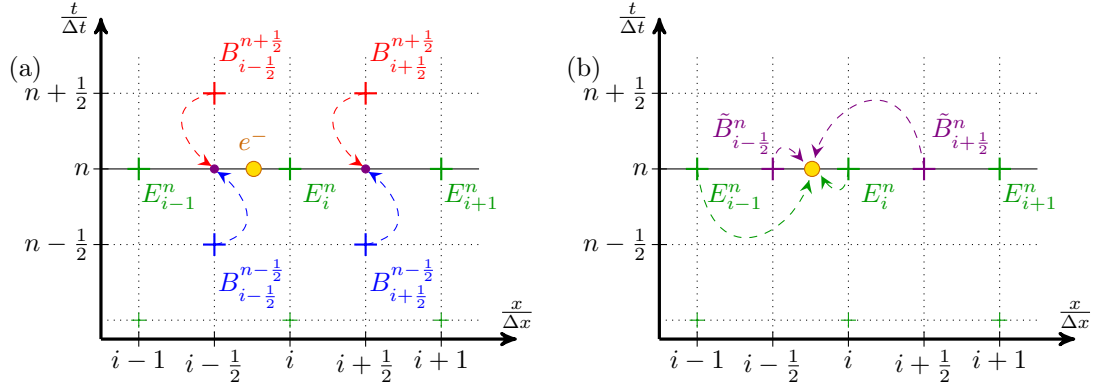


FIGURE 3.6 – Description du processus usuel d'interpolation des champs EM à la position d'une particule au pas de temps  $n$  (représentée par le point jaune). (a) présente la configuration initiale et l'interpolation temporelle pour obtenir  $\tilde{B}^n$  (flèches pointillées). (b) présente l'interpolation spatiale (flèches pointillées) de  $E^n$  et  $\tilde{B}^n$  sur la particule.

On a vu à la section 2.2.4 que l'action du champ  $B$  sur la particule est calculée au pas de temps  $n$  d'où le besoin d'une interpolation temporelle pour obtenir  $\tilde{B}^n$  avant l'interpolation spatiale à la position de la particule. Pour cela, la méthode la plus simple repose sur l'utilisation d'une interpolation linéaire  $\tilde{B}^n = \frac{1}{2}(B^{n-\frac{1}{2}} + B^{n+\frac{1}{2}})$  telle que montrée sur la figure 3.6.a. Cependant une interpolation quadratique ( $\tilde{\tilde{B}}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{3}{8}B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}B_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}B_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{3}{2}}$ ) peut aussi être utilisée pour une plus grande précision.

Une fois les champs connus au même pas de temps  $n$ , ils sont interpolés spatialement comme décrit à la section 2.2.3 et illustré à la figure 3.6.b. Par souci de simplicité, toutes les interpolations ont été représentées au premier ordre sur les schémas.

### Processus d'interpolation modifié

Dans les cas d'accélération par sillage laser étudiés ici, tous les principaux champs électromagnétiques simulés (les champs de la bulle, du laser, du faisceau et du Cherenkov numérique) se propagent de manière quasi unidirectionnelle selon l'axe  $x$  à une vitesse proche de  $c$ . On peut alors supposer  $B(n\Delta t, i\Delta x) \approx B((n + \frac{1}{2})\Delta t, (i\Delta x + \frac{1}{2}c\Delta t)) \approx B((n + \frac{1}{2})\Delta t, (i + \frac{1}{2})\Delta x)$ , puisqu'en un demi-pas de temps, le champ a avancé d'une demi-maille selon la direction  $x$ . Cette approximation est valide tant que  $c\Delta t \approx \Delta x$  (en prenant garde toutefois à toujours respecter la condition CFL ce qui impose d'utiliser  $\Delta x \ll \Delta y, \Delta z$  pour le schéma de Yee ou alors des schémas de type CKC [110, 111]).

En considérant cela, l'idée est alors d'utiliser les valeurs connues pour le champ  $B$  et de leur appliquer une translation spatio-temporelle pour connaître  $B$  aux mêmes instants et lieux que  $E$ , plutôt que d'effectuer une interpolation temporelle avant l'interpolation spatiale. Dit autrement, l'interpolation spatiale des champs est effectuée avec les champs  $(E_i^n, \hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$  au lieu  $(E_i^n, \tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n)$  comme présenté sur la figure 3.6. Cette nouvelle méthode est décrite sous forme schématique par la figure 3.7.

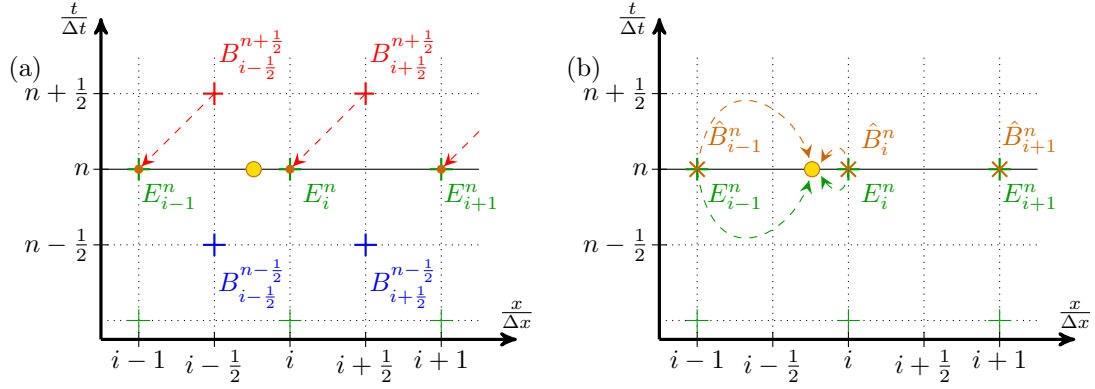


FIGURE 3.7 – Processus modifié d'interpolation des champs EM sur la position d'une particule (représentée par le point jaune). On considère ici uniquement un maillage spatial 1D au pas de temps  $n$ . (a) présente une configuration initiale identique à celle de la figure 3.6.a mais l'interpolation temporelle est remplacée par une translation de  $B$  utilisant la relation  $\hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ . (b) présente donc cette fois l'interpolation spatiale de  $E^n$  et  $\hat{B}_i^n$  sur la particule. Toujours par souci de simplicité, les interpolations ont encore été représentées uniquement au premier ordre.

En utilisant cette approximation on élimine ainsi la nécessité de l'interpolation temporelle et on bénéficie aussi d'une amélioration concernant l'interpolation spatiale puisque les deux champs sont désormais interpolés de manière identique sur la particule : l'erreur introduite par l'interpolation spatiale est donc identique pour  $E$  et  $B$ , ce qui nous assure d'obtenir  $E_y^{\text{NCR}} \sim cB_z^{\text{NCR}}$  et donc  $F^{\text{NCR}} \approx 0$ .

Cette modification du processus d'interpolation revenant au final à une translation du champ  $B$  avant l'interpolation spatiale, cette nouvelle méthode a été baptisée B-TIS pour *B-Translated Interpolation Scheme*. On fera aussi référence aux méthodes précédentes utilisant des interpolations temporelles par les acronymes LTI (*Linear Time Interpolation*) ou QTI (*Quadratic Time Interpolation*) selon les besoins.

### 3.2.2 Comparaison de l'erreur d'interpolation sur le champ $B$

Pour bien comprendre l'intérêt de cette modification, comparons plus en détail les deux méthodes présentées pour le calcul du champ magnétique. Considérons une onde plane se propageant dans la direction  $x$  telle que :  $B(x, t) = B_0 \cos(k_x x - \omega t) = B_0 \cos(\varphi)$ . Ce qui nous donne une fois discrétisé :  $B_i^n = B_0 \cos(k_x i \Delta x - \omega n \Delta t) = B_0 \cos(\varphi_i^n)$ .

#### Interpolation temporelle

Examinons tout d'abord l'effet de l'interpolation temporelle sur la précision du calcul de  $B$ . L'interpolation linéaire en temps (LTI) est définie par :

$$\tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left( B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.4)$$

que l'on peut réécrire en utilisant  $\delta\varphi = \frac{\omega\Delta t}{2}$  telle que :

$$\tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n = B_0 \cos\left(\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n\right) \cos(\delta\varphi) = B_{i+\frac{1}{2}}^n \cos(\delta\varphi) \quad (3.5)$$

Cela montre clairement que cette interpolation temporelle introduit une erreur sur la valeur calculée par rapport à la valeur théoriquement attendue. L'erreur introduite sur le champ  $B$   $\varepsilon_{\text{LTI}} = \tilde{B} - B$  est alors donnée par :

$$\varepsilon_{\text{LTI}}(B(\varphi)) = -B(\varphi)(1 - \cos(\delta\varphi)) \quad (3.6)$$

Cette erreur est proportionnelle à l'amplitude du champ au point d'intérêt et est d'autant plus réduite que  $\delta\varphi$  est petit. Tant que  $\delta\varphi \ll 1$ , on peut majorer cette erreur en valeur absolue par :

$$|\varepsilon_{\text{LTI}}| \simeq \frac{B_0}{2} |\cos(\varphi)| \delta\varphi^2 < \frac{B_0}{2} \delta\varphi^2 \quad (3.7)$$

De même, pour l'interpolation temporelle quadratique (QTI) définie par :

$$\tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{3}{8}B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}B_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}B_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{3}{2}} \quad (3.8)$$

on obtient :

$$\tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n = B_0 \left[ \cos\left(\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n\right) \cos(\delta\varphi) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\delta\varphi)\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n\right) \sin^3(\delta\varphi) \right] \quad (3.9)$$

L'erreur  $\varepsilon_{\text{QTI}}$  sur le champ  $B$  est donc :

$$\varepsilon_{\text{QTI}}(B(\varphi)) = -B_0 \cos(\varphi) \left(1 - \cos(\delta\varphi) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\delta\varphi)\right)\right) - \frac{1}{2} B_0 \sin(\varphi) \sin^3(\delta\varphi) \quad (3.10)$$

et si  $\delta\varphi \ll 1$ , on peut majorer cette erreur en valeur absolue par :

$$|\varepsilon_{\text{QTI}}| \simeq \frac{B_0}{2} |\sin(\varphi)| \delta\varphi^3 < \frac{B_0}{2} \delta\varphi^3 \quad (3.11)$$

On remarque que l'erreur dépend fortement de la fréquence des ondes à interpoler (via  $\delta\varphi$ ) ce qui paraît tout à fait logique puisque plus une variation est rapide, moins la valeur moyennée est représentative. Pour une fréquence  $\omega$  fixée, l'erreur dépend aussi directement du pas de temps  $\Delta t$  choisi. En utilisant la méthode de l'interpolation temporelle, que ce soit LTI ou QTI, on a donc tout intérêt à choisir  $\Delta t$  le plus petit possible pour minimiser  $\delta\varphi$ . Cependant, si l'on veut éviter une trop grande dispersion numérique, la section 2.3.2 nous a montré qu'on devait garder  $c\Delta t$  proche de  $\Delta x$ . Réduire  $\Delta t$  revient donc à réduire  $\Delta x$  ce qui devient rapidement très coûteux en termes de temps de calcul si on veut que  $\delta\varphi \ll 1$  même pour les plus hautes fréquences.

## Méthode B-TIS

Examinons l'erreur obtenue avec notre nouvelle méthode. Considérons la définition de  $\hat{B}_i^n$  :

$$\hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

En utilisant  $\delta\varphi' = \frac{1}{2}(k_x\Delta x - \omega\Delta t)$ , on obtient :

$$\hat{B}_i^n = B_0 \cos(\varphi_i^n + \delta\varphi') = B_0 \cos(\varphi_i^n) \cos(\delta\varphi') - B_0 \sin(\varphi_i^n) \sin(\delta\varphi') \quad (3.13)$$

Ainsi l'erreur introduite par notre approximation est donnée par :

$$\varepsilon_{\text{B-TIS}} = -B_0 \cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi')) - B_0 \sin(\varphi) \sin(\delta\varphi') \quad (3.14)$$

Tant que  $\delta\varphi' \ll 1$ , on peut la majorer en valeur absolue par :

$$|\varepsilon_{\text{B-TIS}}| \simeq B_0 |\sin(\varphi)| \delta\varphi' < B_0 \delta\varphi' \quad (3.15)$$

L'erreur apparaît à première vue plus mauvaise qu'avec les interpolations temporelles (car du premier ordre en  $\delta\varphi'$ ) mais il faut considérer que  $\delta\varphi'$  peut être significativement plus petit que  $\delta\varphi$  et cela sans diminuer les performances. Le facteur limitant est plutôt cette fois-ci la condition CFL. En effet, plus que la valeur de  $c\Delta t$  ou de  $\Delta x$ , c'est la différence entre les deux qui influera le plus fortement sur l'erreur finale. L'influence de la fréquence sur l'erreur est aussi fortement réduite. On peut en effet exprimer  $\delta\varphi' = \frac{1}{2}k_x\Delta x - \arcsin\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\right)$  pour bien mettre en évidence que tant que  $c\Delta t \approx \Delta x$ ,  $\delta\varphi' \ll 1$ .

On peut donc choisir  $c\Delta t$  proche de  $\Delta x$  (ce qu'il est utile de faire en premier lieu pour minimiser la dispersion numérique) de manière à ce que l'erreur finale réalisée avec B-TIS soit inférieure à celle réalisée avec l'interpolation temporelle.

Pour la méthode LTI cela revient à chercher  $\delta\varphi' < \frac{1}{2}\delta\varphi^2$

## Comparaison de la précision numérique attendue

On peut évaluer numériquement l'importance de l'erreur effectuée par les différentes méthodes sur les différents champs présents dans la simulation. Dans les applications numériques ci-dessous, nous utilisons les paramètres ( $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , *etc.*) spécifiquement pour notre simulation de référence décrite en début de chapitre.

**Champ laser :** En partant de  $B^{las}(x, t) = B_0 \cos(k_0x - \omega_0t)$ , on obtient  $\delta\varphi = \frac{\omega_0\Delta t}{2} = 7.5 \times 10^{-2}$  et  $\delta\varphi' = \frac{1}{2}(k_0\Delta x - \omega_0\Delta t) = 5. \times 10^{-4}$ . Et donc  $|\varepsilon_{\text{LTI}}| < 3. \times 10^{-3}B_0$ ,  $|\varepsilon_{\text{QTI}}| < 2. \times 10^{-4}B_0$  et  $|\varepsilon_{\text{B-TIS}}| < 5. \times 10^{-4}B_0$ . La précision sur le champ laser est meilleure avec B-TIS qu'en utilisant la méthode LTI et elle est presque aussi bonne qu'avec la méthode QTI.

**Champ de la bulle :** On peut modéliser le champ magnétique transverse de la bulle par  $B^{WF}(x, t) = B_0 \cos(k_p x - \omega_p v_g^{las}/ct)$  avec  $k_p = \omega_p/c$  et  $v_g^{las}$  la vitesse de groupe dans le plasma du laser, à laquelle l'onde de sillage se propage comme on l'a vu au chapitre 1. Dans ce cas-là, on a  $\delta\varphi = \frac{k_p v_g^{las} \Delta t}{2}$  et  $\delta\varphi' = \frac{1}{2}(k_p \Delta x - \omega_p v_g^{las}/c \Delta t)$ . Ce qui nous amène à  $|\varepsilon_{\text{LTI}}| < 1. \times 10^{-5}B_0$ ,  $|\varepsilon_{\text{QTI}}| < 4. \times 10^{-8}B_0$  et  $|\varepsilon_{\text{B-TIS}}| < 4. \times 10^{-5}B_0$ . La forte dépendance en fréquence de l'erreur des interpolations temporelles leur permet d'obtenir de très bons résultats ici mais B-TIS permet tout de même d'obtenir une précision comparable à celle de LTI qui est déjà très bonne pour nos simulations.

**Rayonnement Cherenkov numérique :** On écrit à nouveau  $B^{NCR}(x, t) = B_0 \cos(k_x x - \omega t)$ . Comme on l'a vu dans la Section 2.3.2, la fréquence du rayonnement Cherenkov numérique vérifie  $\omega = k_x \beta_x c$  avec  $\beta_x$  la vitesse normalisée de la particule selon la direction  $x$ . Cela nous donne donc  $\delta\varphi = \frac{1}{2} k_x \beta_x c \Delta t$  et  $\delta\varphi' = \frac{1}{2} k_x (\Delta x - \beta_x c \Delta t)$ . Ces deux quantités dépendent linéairement de  $k_x$  qui peut théoriquement varier de 0 à  $k_x^{Nyquist}$ . Plus rien ne nous garantit donc que  $\delta\varphi \ll 1$  et  $\delta\varphi' \ll 1$ . On peut écrire  $\delta\varphi = a(\beta_x) k_x$  et  $\delta\varphi' = b(\beta_x) k_x$  et évaluer  $a$  et  $b$  pour une valeur typique de  $\beta_x = 0.9998$  ( $p_x \simeq 100 m_e c$ ) par exemple. Cela nous donne  $a = 7.45 \times 10^{-2}$  et  $b = 5.15 \times 10^{-4}$ . Si on compare les valeurs maximales  $\delta\varphi(k_x^{Nyquist}) = 1.56$ ,  $\delta\varphi'(k_x^{Nyquist}) = 0.01$  il apparaît clairement qu'on peut toujours considérer  $\delta\varphi' \ll 1$  pour toute valeur de  $k_x$ , mais que ce n'est pas le cas pour  $\delta\varphi$  et il nous faut donc retourner aux équations (3.6) et (3.10) pour pouvoir évaluer l'erreur d'interpolation et on obtient les expressions suivantes :

$$|\varepsilon_{LTI}(B(\varphi))| = B_0 |\cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi))| \quad (3.16)$$

$$|\varepsilon_{QTI}(B(\varphi))| = B_0 \left| \cos(\varphi) \left( 1 - \cos(\delta\varphi) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2(\delta\varphi) \right) \right) + \frac{1}{2} \sin(\varphi) \sin^3(\delta\varphi) \right| \quad (3.17)$$

$$|\varepsilon_{B-TIS}(B(\varphi))| = B_0 |\cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi')) - \sin(\varphi) \sin(\delta\varphi')| \simeq B_0 |\sin(\varphi)| \delta\varphi' \quad (3.18)$$

On peut alors évaluer l'erreur maximale commise selon la phase  $\varphi$  et on a alors une majoration de l'erreur pour chaque méthode en fonction de  $\delta\varphi$  et  $\delta\varphi'$  qui dépendent eux-mêmes du  $k_x$  :

$$|\varepsilon_{LTI}(B(\varphi))| < B_0 \max_{0 < \varphi < \pi} |\cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi))| \quad (3.19)$$

$$|\varepsilon_{QTI}(B(\varphi))| < B_0 \max_{0 < \varphi < \pi} \left| \cos(\varphi) \left( 1 - \cos(\delta\varphi) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2(\delta\varphi) \right) \right) + \frac{1}{2} \sin(\varphi) \sin^3(\delta\varphi) \right| \quad (3.20)$$

$$|\varepsilon_{B-TIS}(B(\varphi))| < B_0 \max_{0 < \varphi < \pi} |\cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi')) - \sin(\varphi) \sin(\delta\varphi')| \simeq B_0 \max_{0 < \varphi < \pi} |\sin(\varphi)| \delta\varphi' \simeq \delta\varphi' \quad (3.21)$$

La figure 3.8 montre l'évolution de cette majoration en fonction du  $k_x$  avec  $\beta_x = 0.9998$  fixé car il a relativement peu d'impact sur le résultat (puisque les particules sont nécessairement relativistes pour générer du NCR, on a dans tous les cas  $\beta_x \approx 1$ ).

Il est très clair dans ce cas-ci qu'en dehors des très basses fréquences (peu concernées par le rayonnement Cherenkov numérique au demeurant), l'erreur réalisée par les méthodes d'interpolation devient rapidement problématique, dépassant rapidement la dizaine de pourcent tandis que celle réalisée en utilisant B-TIS reste toujours inférieure à 1%.

On résume dans le tableau 3.1 la précision minimale assurée par chaque méthode selon les champs concernés avec les paramètres numériques choisis. On remarque que B-TIS assure une précision au moins équivalente aux méthodes d'interpolation lorsqu'il s'agit des champs physiques mais que le gain est surtout très important concernant le rayonnement Cherenkov

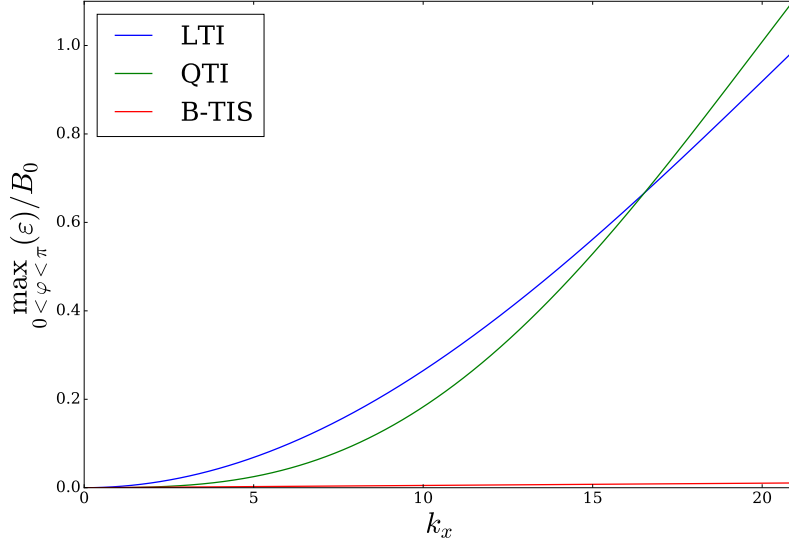


FIGURE 3.8 – Erreur maximale selon la phase  $\varphi$  obtenue avec les différentes méthodes d'interpolation en fonction du  $k_x$  du rayonnement de type Cherenkov numérique estimé en supposant  $\beta_x = 0.9998$ .

Méthode	Laser	Onde de sillage	Cherenkov numérique
$\left  \frac{\varepsilon_{\text{LTI}}}{B_0} \right  <$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \right)^2 = 3. \times 10^{-3}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{k_p v_g \Delta t}{2} \right)^2 = 1. \times 10^{-5}$	$ 1 - \cos(\frac{1}{2} k_x \beta_x c \Delta t)  < 0.98$
$\left  \frac{\varepsilon_{\text{QTI}}}{B_0} \right  <$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \right)^3 = 2. \times 10^{-4}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{k_p v_g \Delta t}{2} \right)^3 = 4. \times 10^{-8}$	$ f(\frac{1}{2} k_x \beta_x c \Delta t)  < 1.10$
$\left  \frac{\varepsilon_{\text{B-TIS}}}{B_0} \right  <$	$\frac{1}{2} (k_0 \Delta x - \omega_0 \Delta t) = 4. \times 10^{-4}$	$\frac{1}{2} k_p (\Delta x - v_g \Delta t) = 4. \times 10^{-5}$	$\frac{1}{2} k_x (\Delta x - \beta_x c \Delta t) < 0.01$

TABLE 3.1 – Précision minimale assurée par chaque méthode selon les types de champs étudiés. Les applications numériques présentées dans ce tableau sont réalisées avec les paramètres de notre simulation de référence, *i.e.*  $\Delta x = 0.019 \mu\text{m}$ ,  $\Delta y = \Delta z = 0.38 \mu\text{m}$ ,  $c \Delta t = 0.993 \Delta x$ .  $n_e = 6.22 \times 10^{18} \text{cm}^{-3} = 3.57 \times 10^{-3} n_c$  ce qui donne  $v_g \approx 0.998c$ .  $\beta_x = 0.9998$ .

numérique que les méthodes d'interpolation temporelles sont totalement incapables de résoudre. C'est l'intérêt de B-TIS : pouvoir calculer correctement le champ magnétique afin de pouvoir vérifier la relation  $E_y^{\text{NCR}} \approx c B_z^{\text{NCR}}$  et ainsi limiter l'impact du rayonnement Cherenkov numérique en rendant sa contribution à la force transverse réellement négligeable.

L'étude des erreurs sur le champ B présentée ci-dessus est simplifiée car les estimations d'erreur et applications numériques n'ont été réalisées que pour le cas particulier de notre simulation de référence. Une étude plus générale est présentée dans la référence [112], qui est reproduite dans l'annexe III de ce manuscrit.

## Comparaison de l'erreur sur la force transverse

On présente à la figure 3.9 une comparaison de la force transverse résultante  $F_y = -e(E_y - cB_z)$  obtenue à partir des champs calculés dans la simulation aux points du maillage, puis interpolés en tout point des simulations en utilisant soit la méthode LTI soit la B-TIS. Les images sont des zooms successifs dans le plan  $xy$ . La première image (gauche) montre la

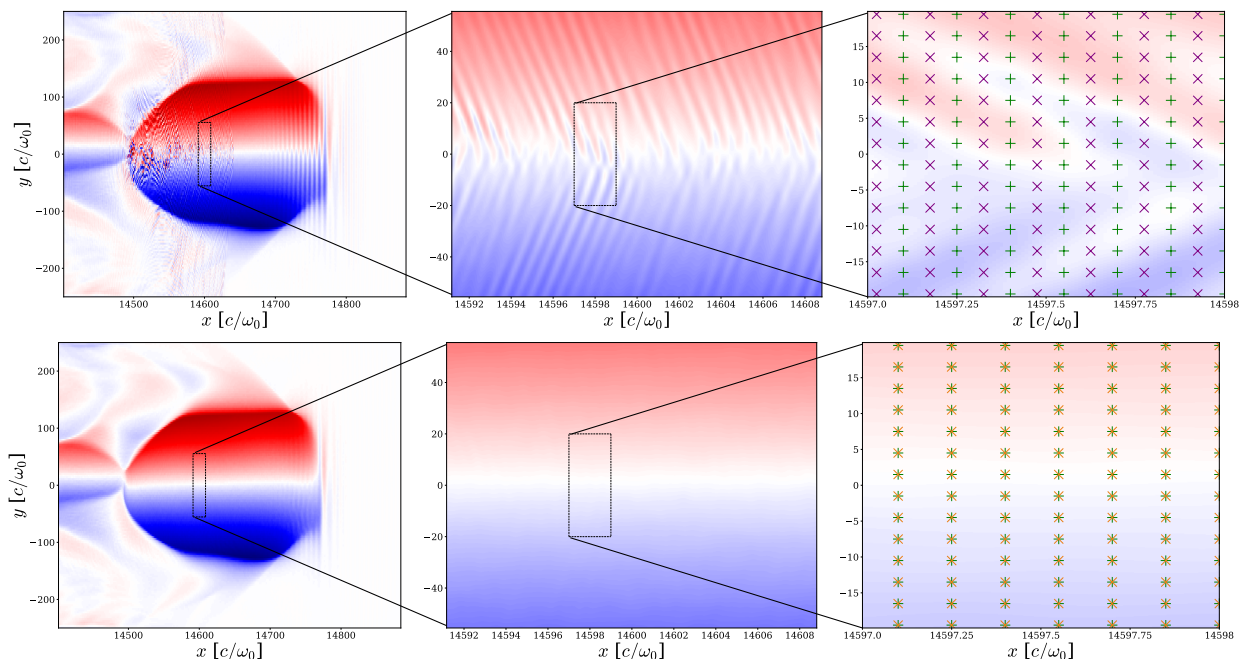


FIGURE 3.9 – Différents zooms sur la carte de la force  $F_y$  ressentie par une macro-particule se déplaçant à une vitesse  $v_x \approx c$ . La première ligne utilise la méthode LTI, la seconde B-TIS. À droite, les symboles + et × matérialisent les points des maillages utilisés pour l'interpolation spatiale avec + pour  $E^n$ , × pour  $\tilde{B}^n$  et × pour  $\hat{B}^n$ .

bulle dans sa totalité, la deuxième (centre) détaille un peu plus les résultats autour de l'axe de la bulle et la dernière (droite) est suffisamment résolue pour pouvoir distinguer les points des maillages sur lesquels sont connus les champs électromagnétiques. Entre ces points, les champs sont interpolés spatialement comme décrit à la section 2.2.3 et la carte présente l'amplitude de la force  $F_y$ .

Lorsqu'on calcule  $F_y = -e(E_y - cB_z)$ , les contributions du champ laser, du champ propre du faisceau et du rayonnement Cherenkov numérique sont censées être négligeables et ne laisser que la composante due aux champs focalisants de la bulle. On observe cependant clairement qu'avec la méthode LTI,  $F_y$  est perturbée par des contributions haute fréquence dues au rayonnement Cherenkov numérique autour du faisceau, mais aussi, de manière plus modeste, par une contribution due au champ laser à l'avant de la bulle. On peut vérifier que les oscillations dues au rayonnement Cherenkov numérique sont telles que  $\lambda \approx 4\Delta x$ , soit  $k_x \approx 10\omega_0/c$ , ce qui est cohérent avec ce que nous observons sur la figure 3.3.

Ces oscillations rapides non-physiques sont éliminées lorsqu'on utilise B-TIS et on retrouve alors uniquement la contribution des champs de la bulle. On remarque que même l'erreur due au champ laser à l'avant de la bulle est réduite comme on peut s'y attendre

d'après les précisions annoncées dans le tableau 3.1. L'intérêt de ce nouveau schéma est ainsi clairement mis en évidence par cette figure.

### 3.3 Application à la simulation d'accélération par sillage laser

#### 3.3.1 Caractéristiques du faisceau

Nous avons implémenté la nouvelle méthode B-TIS dans CALDER, en l'appliquant pour toutes les particules satisfaisant la condition  $p_x > 50 m_e c$ . Ainsi toutes les particules avec  $p_x > 50 m_e c$  sont traitées en utilisant B-TIS tandis que les autres continuent d'utiliser la méthode d'interpolation usuelle.

Une nouvelle simulation 3D a été réalisée de cette manière avec les mêmes paramètres que ceux présentés au début de ce chapitre. Une troisième simulation utilisant le schéma anti-Cherenkov développé par R. Lehe [98] a aussi été lancée avec toujours les mêmes paramètres afin de pouvoir comparer les résultats de ces trois simulations qu'on désignera par la suite par Yee(LTI), Yee(B-TIS) et Lehe(LTI).

Comme expliqué dans la section 2.3, la méthode de Lehe repose sur une modification du schéma numérique pour résoudre Maxwell, afin que la relation de dispersion numérique des ondes électromagnétiques dans le vide assure  $v_\varphi(\omega) > c$  pour tout  $\omega$ , rendant la génération de rayonnement Cherenkov numérique théoriquement impossible. Ce schéma souffre d'autres effets indésirables (notamment l'apparition de bruits à très haute fréquence dans le sillage) mais la comparaison reste intéressante pour juger de l'utilité de notre nouvelle méthode visant à réduire l'influence du rayonnement Cherenkov numérique.

Les trois simulations donnent dans l'ensemble des résultats assez similaires notamment pour la formation de l'onde plasma (taille, forme, intensité des champs) mais présentent des différences au niveau du faisceau d'électrons accélérés. La figure 3.10 présente les cartes de densité électroniques pour Yee(LTI) et Yee(B-TIS). La forme de la bulle apparaît identique dans les deux cas mais on observe que le faisceau injecté est bien plus étroit dans le cas de Yee(B-TIS). Seule la répartition spatiale semble différente car si le faisceau est plus étroit il apparaît aussi plus dense.

La figure 3.11 confirme d'ailleurs que les charges injectées sont équivalentes et réparties longitudinalement de manière similaire dans les trois simulations. Le processus d'auto-injection ne semble pas affecté par la méthode utilisée. Dans les trois cas, on peut clairement identifier sur la figure 3.11.a trois occurrences d'auto-injection quand la charge totale passe d'un plateau à un autre, le troisième et le plus important s'étalant sur un temps relativement long. On utilise ce découpage naturel pour définir différents groupes d'électrons dans le faisceau comme on le détaillera un peu plus loin. Les spectres en énergies des faisceaux sont aussi assez similaires malgré quelques différences notables que l'on pourra étudier plus en détail dans le chapitre 4.

Ces résultats confirment que notre nouveau schéma d'interpolation n'impacte pas négativement la physique modélisée lors de la simulation, à savoir la création de l'onde de sillage, l'injection puis l'accélération des électrons, mais corrige simplement les effets du rayonne-



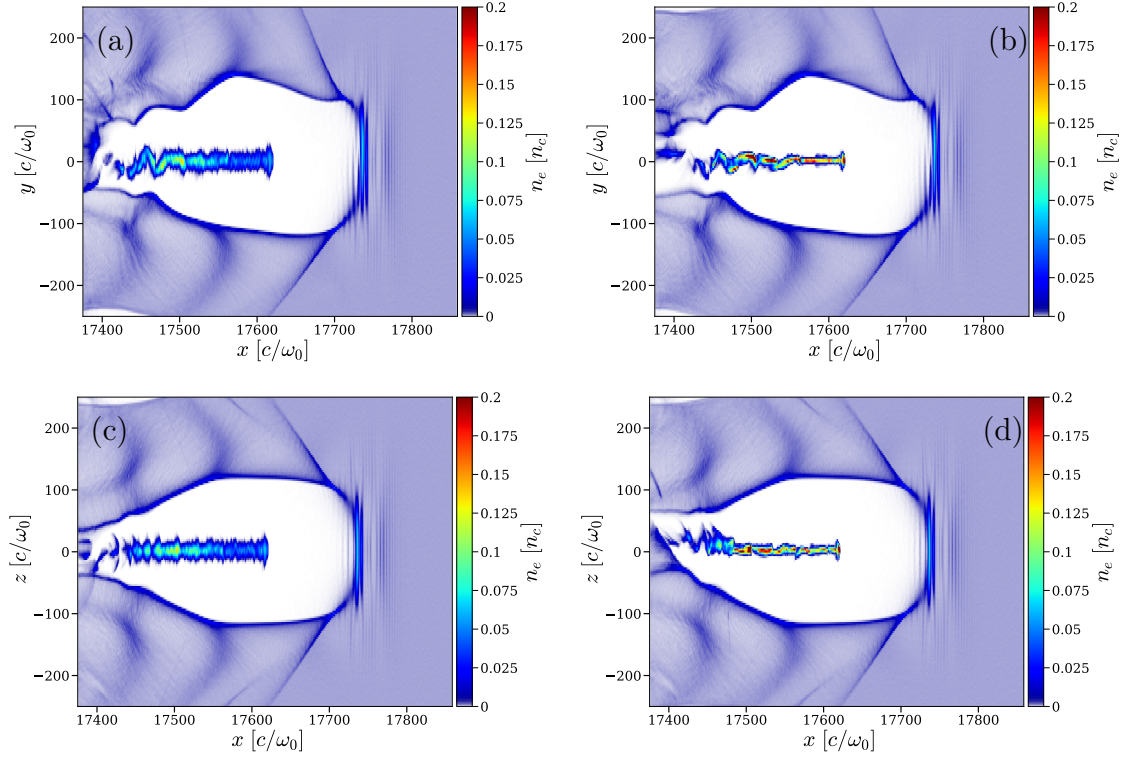


FIGURE 3.10 – Cartes de densité électronique  $n_e/n_c$ . (a) et (c) sont des coupes dans les plans (xy) et (xz) respectivement avec le schéma de Yee et la méthode LTI, tandis (b) et (d) sont leurs équivalents avec la méthode B-TIS.

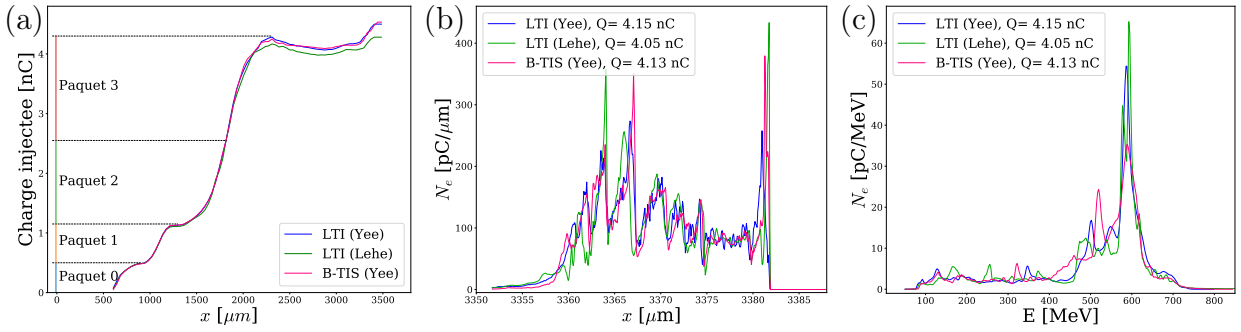


FIGURE 3.11 – Comparaison des propriétés du faisceau pour les trois simulations : (a) Charge totale injectée ( $p_x > 50 m_e c$ ) en fonction de la longueur de propagation du laser dans le plasma. (b) Distribution électronique du faisceau selon l'axe  $x$  et (c) spectre en énergie des électrons accélérés, tous les deux après 2.25 mm de propagation dans le plasma.

ment Cherenkov numérique sur le mouvement transverse des électrons accélérés, sans pour autant le supprimer de la simulation.

En effet, si on regarde les champs électromagnétiques de la simulation Yee(B-TIS), on peut observer que le rayonnement Cherenkov numérique est toujours présent. La figure 3.12 présente les cartes de champs  $E_y$  et  $E_z$  ainsi que leurs transformées de Fourier à comparer avec les résultats présentés à la figure 3.3. Une fois encore, la bulle et ses champs associés sont très similaires, la forme du rayonnement Cherenkov numérique étant la principale différence

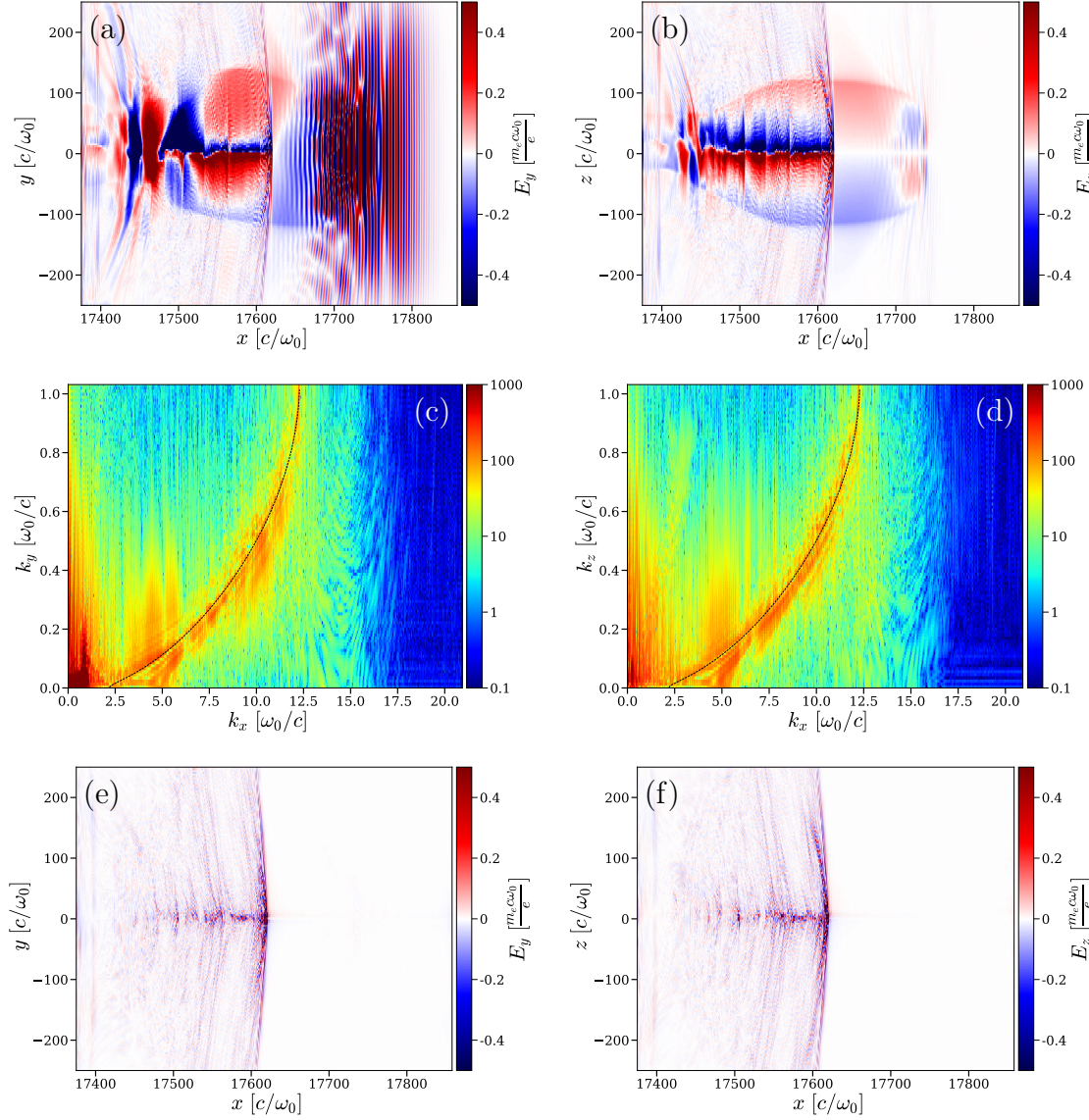


FIGURE 3.12 – Figure analogue à la figure 3.3 mais pour la simulation Yee(B-TIS) : (a) présente une carte du champ  $E_y$  dans le plan  $(xy)$  et (c) sa transformée de Fourier, la courbe noire correspondant à l'équation (3.1) pour une particule avec  $p_x \approx 100 m_e c$ . (e) présente la même carte que (a) mais avec uniquement  $k_x > 2.5 \omega_0/c$ . (b),(d) et (f) présentent les mêmes figures mais pour  $E_z$  dans le plan  $(xz)$  et l'équation (3.2).

observable entre ces deux figures. Le rayonnement est bien plus intense à l'avant du faisceau et apparaît plus clairement défini dans l'espace de Fourier. Cela est probablement dû à la plus grande focalisation du faisceau et à son mouvement plus uniforme dans le cas Yee(B-TIS).

Les différences en termes de force transverse calculée, bien que non apparentes lorsqu'on regarde uniquement les champs, se font clairement ressentir sur les propriétés transverses du faisceau. Cela se traduit par exemple par de très fortes différences sur l'émittance transverse du faisceau, comme on peut le voir sur les figures 3.13 et 3.14 qui présentent l'évolution temporelle de l'émittance transverse normalisée de différentes sections du faisceau d'électrons. L'émittance normalisée d'un groupe d'électrons se calcule selon les directions  $y$  et  $z$  par les

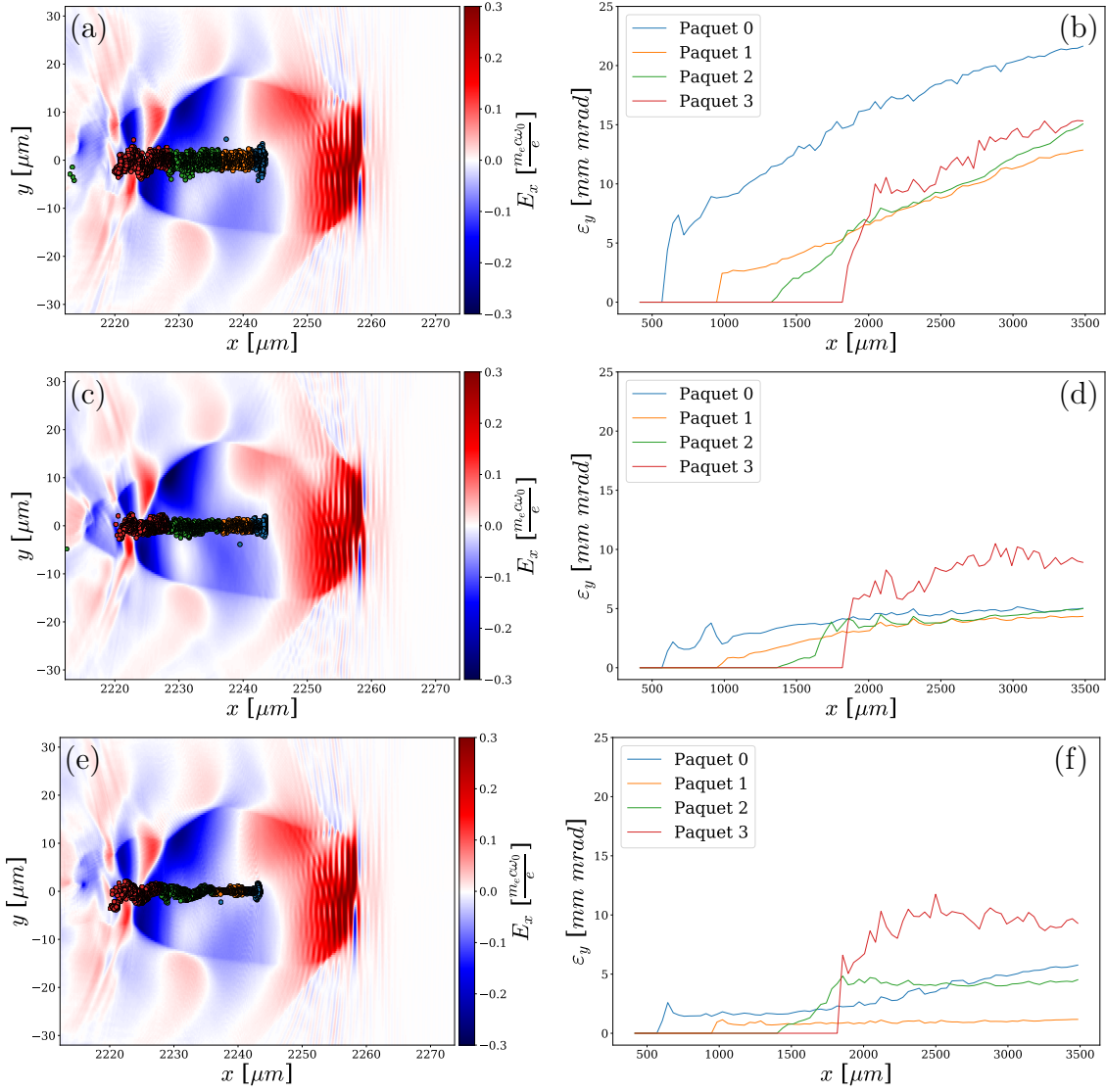


FIGURE 3.13 – Taille transverse et émittance du faisceau dans le plan  $(xy)$ . (a) : carte du champ  $E_x$  et distribution spatiale des particules simulées (ronds colorés). (b) : Évolution de l'émittance normalisée  $\epsilon_y$  des différents groupes d'électrons définis à la figure 3.11. Les résultats présentés en (a) et (b) correspondent à la simulation Yee(LTI), tandis que (c) et (d) sont leurs équivalents pour Lehe(LTI), (e) et (f) pour Yee(B-TIS).

formules suivantes :

$$\epsilon_y = \frac{1}{m_e c} \sqrt{\langle y^2 \rangle \langle p_y^2 \rangle - \langle y p_y \rangle^2} \quad (3.22)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{m_e c} \sqrt{\langle z^2 \rangle \langle p_z^2 \rangle - \langle z p_z \rangle^2} \quad (3.23)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  marque la moyenne sur l'ensemble des électrons du groupe considéré. Le faisceau a été découpé en quatre paquets d'électrons aux comportements légèrement différents représentés par quatre couleurs sur les figures suivantes. Les deux premiers groupes correspondent aux électrons injectés lors des deux premières occurrences d'auto-injection comme indiqué sur la figure 3.11.a. Les électrons de la troisième injection ont été séparés en deux groupes d'une part

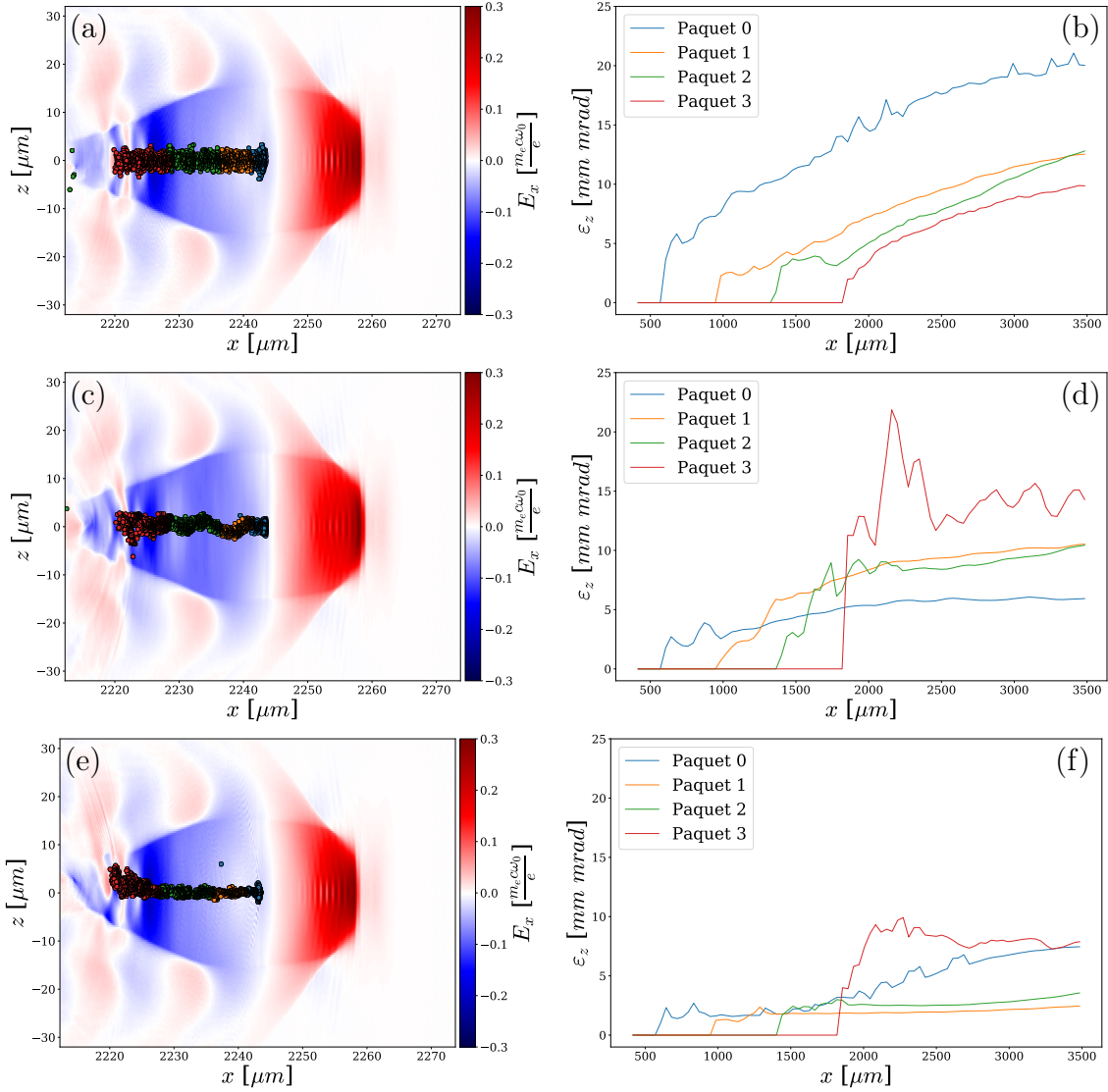


FIGURE 3.14 – Taille transverse et émittance du faisceau dans le plan  $(xz)$ . (a) : carte du champ  $E_x$  et distribution spatiale des particules simulées (ronds colorés). (b) : Évolution de l'émittance normalisée  $\varepsilon_z$  des différents groupes d'électrons définis à la figure 3.11. Les résultats présentés en (a) et (b) correspondent à la simulation Yee(LTI), tandis que (c) et (d) sont leurs équivalents pour Lehe(LTI), (e) et (f) pour Yee(B-TIS).

pour garder des échantillons de tailles comparables mais aussi parce que le comportement de la deuxième moitié est sensiblement différent de celui de la première à cause des instabilités de la bulle qui se font particulièrement ressentir sur l'arrière du faisceau. On peut notamment voir sur les figures 3.13 et 3.14 que le quatrième groupe (en rouge) est très proche des limites de la bulle où les champs sont loin d'être idéaux.

Lorsqu'un faisceau d'électrons est accéléré dans un champ focalisant dont la force transverse varie linéairement avec la position radiale (comme c'est le cas pour une bulle complètement vide d'électrons comme on l'a vu à la section 1.3), alors l'émittance transverse normalisée doit être conservée. Pour la simulation Yee(LTI) on peut observer la croissance anormale de l'émittance du faisceau au cours de l'accélération qui est principalement due aux

effets du rayonnement Cherenkov numérique [98]. Pour la simulation Yee(B-TIS), l'émittance est sensiblement moins grande et tend aussi à rester constante pendant la phase d'accélération, après l'injection. On retrouve donc un comportement en accord avec les prédictions théoriques.

Comme on a déjà pu le voir sur la figure 3.10, on remarque ici aussi les différences en termes de taille transverse du faisceau qui est bien plus fin dans le cas Yee(B-TIS) que dans le cas Yee(LTI), Lehe(LTI) présentant un intermédiaire. Ces différences peuvent maintenant s'expliquer : c'est la plus faible émittance transverse obtenue dans le cas Yee(B-TIS) qui conduit naturellement à une plus faible taille transverse car ces deux grandeurs sont corrélées. Comme la conservation de l'émittance normalisée est attendue théoriquement, nous pensons que la forme du faisceau du cas Yee(B-TIS) (plus petite taille transverse) est plus crédible et réaliste que celle du cas Yee(LTI).

### 3.3.2 Mouvement des électrons

Étudions un peu plus en détail le comportement des électrons au niveau individuel pour quantifier l'impact du Cherenkov numérique et de B-TIS sur les trajectoires. La figure 3.15 présente un exemple de trajectoire pour un électron de la simulation Yee(B-TIS), elle est à comparer avec son équivalent pour Yee(LTI) donnée par la figure 3.5. Les oscillations sont bien plus régulières et la corrélation entre la force ressentie et la position de la particule est bien plus forte, particulièrement dans le plan  $(xz)$  où la force transverse semble parfaitement en accord avec sa prédiction théorique de linéarité avec la position. On remarque cependant quelques irrégularités dans la direction  $y$  que nous discuterons un peu plus loin. Cette grande amélioration de la corrélation entre la position et la force transverse comparée au cas Yee(LTI) explique la bonne conservation de l'émittance transverse observée précédemment et nous conforte dans l'idée que la simulation Yee(B-TIS) est la plus réaliste et crédible des trois simulations.

Pour s'assurer que l'amélioration observée sur la force transverse est globale et n'est pas le fruit du hasard du choix des particules, nous allons maintenant considérer un échantillon statistiquement représentatif au lieu d'une seule particule.

Pour chaque particule dont la trajectoire a été enregistrée dans la simulation, on calcule en tout instant la différence entre la force transverse ressentie  $F_y = -e(E_y - v_x B_z)$  et la force théorique  $F_y = -\frac{1}{2}m_e\omega_p^2 y$ . Visuellement cela revient à calculer en tout instant l'écart entre la courbe bleue et la courbe rouge sur la figure 3.15. En réalisant la moyenne temporelle de cette différence, on peut alors calculer un écart moyen qu'on note  $\langle |F_y^{rec} - F_y^{theor}| \rangle_t$  pour chaque particule (avec  $\langle \cdot \rangle_t$  représentant la moyenne temporelle). De la même manière, on calcule aussi  $\langle |F_z^{rec} - F_z^{theor}| \rangle_t$  selon la direction  $z$ . On peut ainsi juger rapidement sur un nombre important de particules si la force appliquée dans la simulation se rapproche ou non de celle attendue théoriquement. La figure 3.16 présente une comparaison des résultats obtenus avec cette méthode pour les trois simulations.

Pour la simulation Yee(LTI), les écarts entre les valeurs théoriques et enregistrées par les particules sont relativement importants et fortement variables d'une particule à une autre, suggérant que les particules sont influencées par une force autre que celle due aux champs



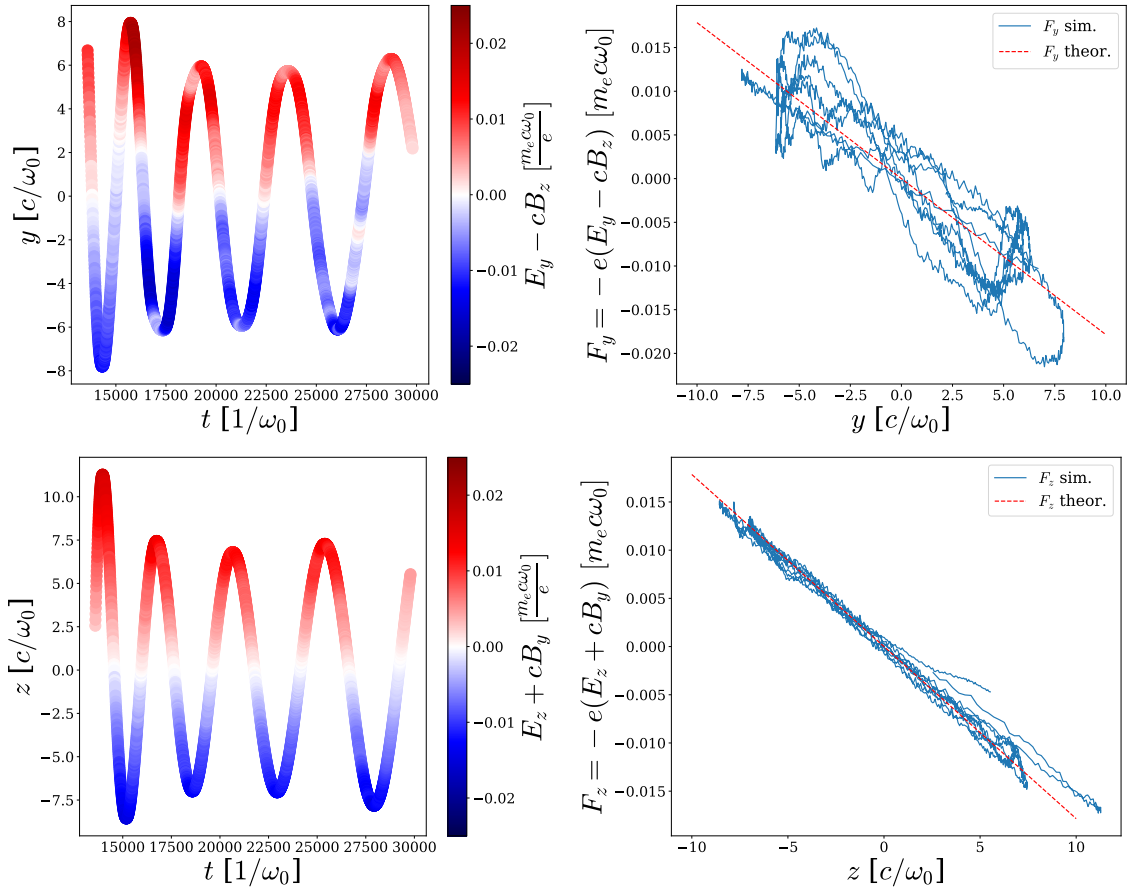


FIGURE 3.15 – Trajectoires d’une particule accélérée dans la simulation Yee(B-TIS). Sur la première ligne, la figure de gauche présente la position  $y$  de la particule en fonction du temps avec la couleur représentant la différence  $E_y - v_x B_z$  ressentie en chaque instant par la particule. À droite est tracée la force ressentie  $F_y = -e(E_y - v_x B_z)$  en fonction de la position  $y$  de la particule, à comparer à la courbe théorique  $F_y = -\frac{1}{2}m_e\omega_p^2 y$  (tracée en pointillés rouges). La ligne suivante présente les figures correspondantes pour le mouvement dans le plan  $(xz)$  au lieu de  $(xy)$ .

électromagnétiques d’une bulle idéale. Comme déjà décrit précédemment, c’est le rayonnement Cherenkov numérique qui en est la cause. La très haute fréquence du rayonnement Cherenkov numérique peut aussi expliquer le caractère aléatoire de cette perturbation, et donc la forte dispersion des points. Ces effets sont réduits de manière notable dans la simulation utilisant le schéma anti-Cherenkov de Lehe, tant en valeur absolue qu’en dispersion des résultats, mais les écarts restent tout de même significatifs. Même si le Cherenkov numérique est censé disparaître avec ce schéma, le fort bruit haute fréquence que peut générer ce schéma (couplé à des phénomènes d’aliasing temporel non triviaux qui peuvent générer un faible rayonnement Cherenkov numérique malgré la condition  $v_\varphi(\omega) > c$  [100]) peut induire des erreurs dans la force transverse qui restent significatives. La réduction de l’erreur et de la dispersion est encore plus forte pour la simulation utilisant la méthode B-TIS notamment dans le plan  $(xz)$  où les écarts s’approchent de zéro.

La différence de comportement observée entre les deux plans peut s’expliquer par l’effet

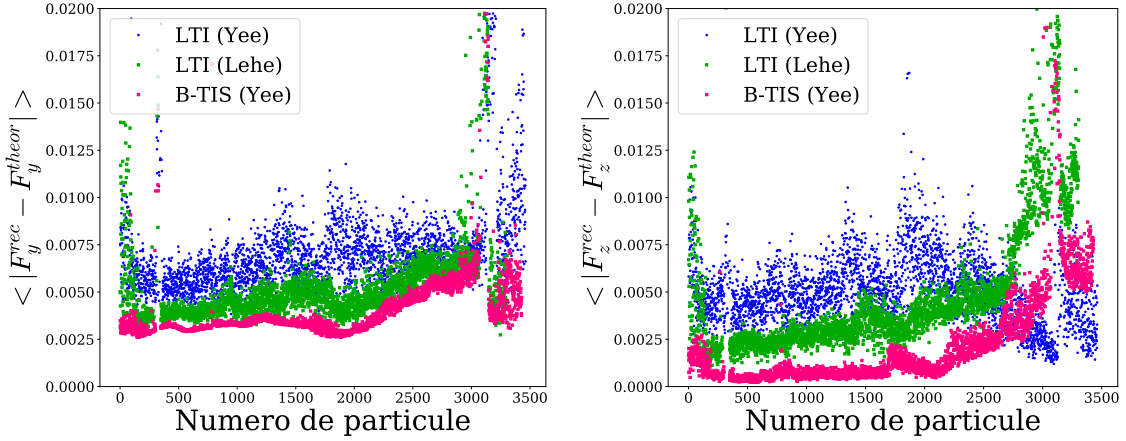


FIGURE 3.16 – Écart moyen entre la force transverse ressentie  $F^{rec}$  et la force théorique  $F^{theor}$  pour chaque particule des trois simulations. À gauche selon la direction  $y$ , à droite selon la direction  $z$ .

de la polarisation du laser. On observe fréquemment dans les simulations d'accélération par sillage laser une faible oscillation de la bulle dans le plan de polarisation du faisceau laser. On peut d'ailleurs observer cet effet sur la figure 3.10 où l'ensemble de la bulle semble osciller dans le plan  $(xy)$  (le laser étant polarisé selon  $y$  dans nos simulations). Ceci est un effet physique bien connu dû à la dissymétrie croissante du faisceau laser à mesure que son front avant est dépleté dans le plasma [109]. Ces mouvements d'ensemble de la bulle affectent évidemment les champs créés dans la bulle et les éloignent de leurs modèles théoriques. Il n'est donc pas surprenant dans ce cas-là d'observer une différence par rapport aux équations dérivées pour une bulle parfaite. Cet effet explique les anomalies qu'on a pu observer sur la figure 3.15 où la trajectoire selon  $y$  n'était toujours pas parfaitement régulière et où la corrélation entre  $F_y$  et  $y$  était bien moins bonne qu'entre  $F_z$  et  $z$ , l'axe de la bulle n'étant en effet plus aligné avec l'axe selon  $x$  qui passe par  $y = 0$ .

Sur la figure 3.16, on constate ce comportement pour l'ensemble des particules de la simulation Yee(B-TIS) : l'écart sur  $F_y$  semble tendre vers une valeur constante avec peu de dispersion pour la majorité des particules, tandis que l'écart sur  $F_z$  semble tendre vers zéro, sauf pour les particules d'indices élevés qui correspondent aux particules injectées à l'arrière du faisceau (groupe rouge sur les figures 3.13 et 3.14).

Il est de plus intéressant de noter que dans la simulation Yee(LTI), cet effet n'était pas facilement apparent du fait de l'erreur déjà introduite par l'effet du rayonnement Cherenkov numérique. Même dans la simulation Lehe(LTI), cette différence selon les plans n'est pas évidente alors qu'elle apparaît clairement dans le cas Yee(B-TIS). Pouvoir étudier plus finement des effets physiques aux effets subtils qui peuvent être masqués par des artefacts numériques est un grand avantage que peut apporter notre méthode B-TIS.

### 3.3.3 Impact sur le rayonnement bêatron calculé

Le rayonnement bêatron généré par le faisceau d'électrons accéléré a été calculé comme expliqué dans la partie 1.4. La figure 3.17 présente les spectres en énergie du rayonnement total émis par le faisceau ainsi que leurs fits synchrotron respectifs. Comme on pouvait

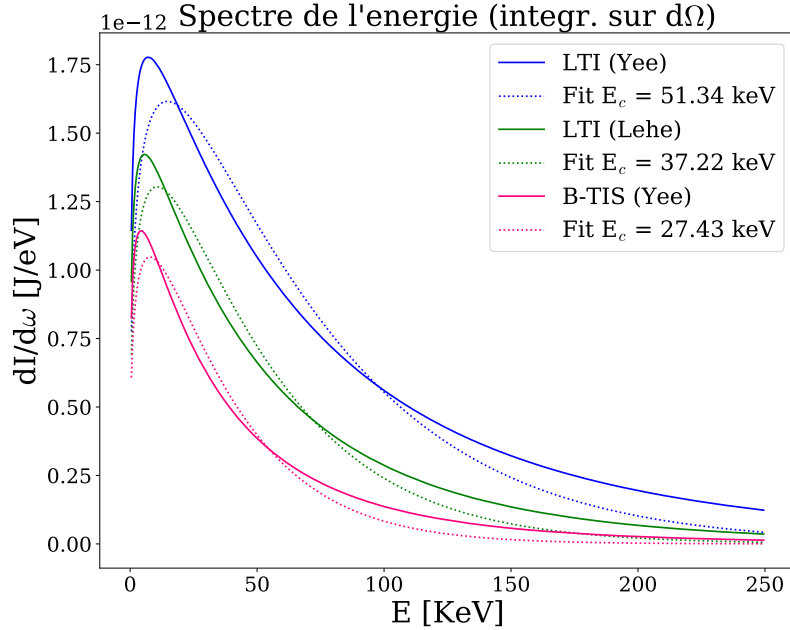


FIGURE 3.17 – Comparaison des spectres en énergie du rayonnement bêtatron émis par le faisceau accéléré selon les simulations. Les courbes en trait plein présentent les résultats obtenus dans les simulations en utilisant l'équation (1.98) et en intégrant sur tous les angles pour obtenir  $\frac{dI}{d\omega}$ . Les courbes en trait pointillé représentent les fits synchrotron utilisant l'équation (1.85).

s'y attendre, le rayonnement calculé pour la simulation Yee(LTI) est bien plus important que dans les deux autres cas. La présence de rayonnement Cherenkov numérique amène à surestimer le rayonnement émis car le rayon d'oscillation des électrons est artificiellement amplifié. L'énergie totale calculée dans la simulation Yee(B-TIS) est trois fois moindre ( $E_{tot} = 1.8 \times 10^{-7} \text{ J}$  pour Yee(LTI) contre  $E_{tot} = 6.0 \times 10^{-8} \text{ J}$  pour Yee(BTIS)) avec une énergie critique deux fois moindre ( $E_c = 51.34 \text{ keV}$  pour Yee(LTI) contre  $E_c = 27.43 \text{ keV}$  pour Yee(BTIS)). La simulation Lehe(LTI) présente encore une fois un intermédiaire ( $E_{tot} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ J}$  avec  $E_c = 37.22 \text{ keV}$ ) ce qui n'est pas surprenant au vu des tailles transverses des faisceaux observées selon les simulations.

Si on regarde l'émission angulaire, présentée à la figure 3.18, on retrouve aussi le comportement attendu : le rayonnement émis par la simulation Yee(B-TIS) est bien plus focalisé car le faisceau lui-même est moins divergent (la divergence étant aussi directement corrélée à l'émittance transverse).

Ainsi, on a montré qu'une simple modification de l'étape d'interpolation des champs peut permettre de réduire significativement l'impact du rayonnement Cherenkov numérique sur les simulations d'accélération par sillage laser. La modélisation du mouvement transverse des électrons, qui peut être fortement perturbé par cet artefact à haute fréquence, est nettement améliorée par l'utilisation de B-TIS ce qui résulte en un comportement plus réaliste du faisceau accéléré et une meilleure précision sur le calcul du rayonnement bêtatron émis.

Cette méthode a l'avantage d'être très simple à implémenter, n'interférant pas avec les



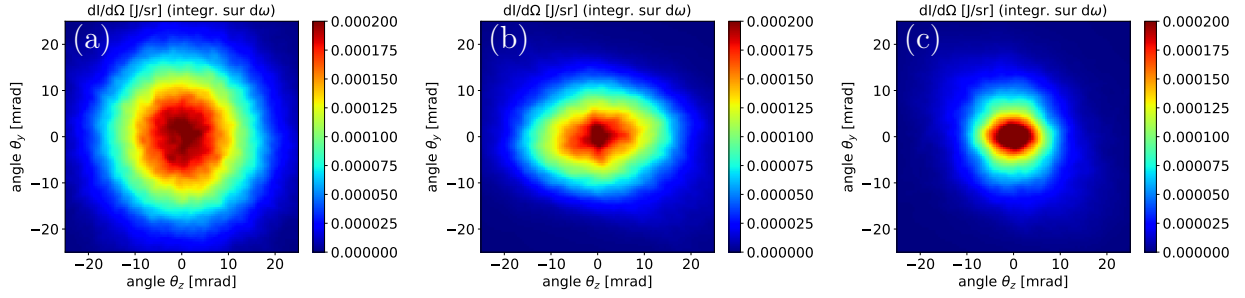


FIGURE 3.18 – Comparaison de la distribution angulaire du rayonnement bêatron émis par le faisceau accéléré selon les simulations : (a), (b) et (c) présentent respectivement les résultats pour les simulations Yee(LTI), Lehe(LTI) et Yee(B-TIS). Ces résultats sont obtenus en intégrant sur toutes les fréquences l'équation (1.98) pour obtenir  $\frac{dI}{d\Omega}$ .

conditions aux limites ou la parallélisation, et peut s'appliquer avec différents schémas numériques FDTD [45, 98, 110, 111] ce qui la rend très flexible. La contrainte principale vient de la supposition que les ondes électromagnétiques se déplacent principalement longitudinalement avec  $v_\varphi \approx c$  ce qui limite les situations physiques pouvant être modélisées. La condition  $\Delta x \approx c\Delta t$ , nécessaire pour garantir une bonne précision, est un autre facteur limitant qui peut rendre la méthode trop coûteuse pour certaines situations mais n'est pas un problème pour l'accélération par sillage. Ces travaux ont donné lieu à la publication d'un article dans la *Journal of Computational Physics* [112] qui est reproduit dans l'annexe III.

L'intérêt de cette méthode a été démontré avec l'exemple de l'accélération par sillage laser mais ses applications pourraient être étendues à d'autres types de simulations. Les simulations de sillage plasma, où un premier faisceau d'électrons crée l'onde de sillage à la place du laser, pourraient bénéficier de l'utilisation de B-TIS pour aussi limiter l'impact du Cherenkov numérique.

Au-delà du Cherenkov numérique, le gain en précision sur les champs à haute fréquence rend B-TIS intéressante pour améliorer la modélisation de l'interaction directe d'un faisceau d'électrons avec un laser. L'accélération directe par laser (*Direct Laser Acceleration* ou DLA) - lorsque la durée de l'impulsion laser est telle que les champs accélérateurs de la bulle sont fortement influencés par ceux du laser - ou l'accélération par laser dans le vide (*Vacuum Laser Acceleration* ou VLA) sont donc deux applications potentielles que nous allons étudier plus en détail dans le chapitre suivant.

# Chapitre 4

## Application à l'accélération par laser dans le vide

*“I’ll be more enthusiastic about encouraging thinking outside the box when there’s evidence of any thinking going on inside it.”*

– Terry Pratchett

### Sommaire

---

Travail réalisé . . . . .	113
Perspectives . . . . .	115

---

Nous allons étudier, dans ce chapitre, des cas assez théoriques d'accélération par laser dans le vide, afin de mettre en lumière les gains réalisés lors de l'utilisation de B-TIS par rapport à LTI. On parle d'accélération par laser dans le vide (ou VLA pour *Vacuum Laser acceleration*) lorsque le laser interagit directement avec des électrons se propageant dans le vide pour les accélérer [113–117]. Cette technique est très difficile à mettre en place expérimentalement mais permet de bénéficier des très fort champs (de l'ordre de la dizaine de TV m<sup>-1</sup>) de l'impulsion laser et est un bon outil de compréhension des phénomènes physiques sous-jacents à l'interaction laser-particule. Il est particulièrement intéressant d'étudier le VLA avec B-TIS puisque cela correspond bien à ses conditions d'utilisations (champs électromagnétiques se propageant à  $c$  dans la direction d'accélération des électrons) et permet de vérifier la bonne reproduction des phénomènes physiques.

Nous commençons donc par l'étude théorique d'un unique électron accéléré par une onde plane. Cette étude nous permet de nous comparer à un modèle analytique pour améliorer nos méthodes numériques. Nous passons, ensuite, à l'accélération d'un unique électron par un faisceau laser gaussien, avant de vérifier nos résultats pour un ensemble d'électrons. Nous terminons enfin ce chapitre, par l'application de nos résultats à un cas d'accélération directe par laser (DLA) dans une simulation d'accélération par sillage laser.

## 4.1 Dynamique d'un électron en présence d'une onde plane électromagnétique en régime relativiste

On s'intéresse tout d'abord au cas relativement simple d'un unique électron mis en mouvement par une onde plane. Cette situation a l'avantage d'être entièrement modélisable de manière analytique ce qui nous permet de disposer d'une référence pour comparer nos différents résultats de simulation.

### 4.1.1 Développement théorique pour un électron initialement au repos

On considère un champ électromagnétique dans le vide, on peut donc exprimer les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  en fonction uniquement du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tels que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.2)$$

Pour un unique électron interagissant avec ce champs, on peut alors réécrire l'équation (1.61) sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (4.3)$$

En utilisant les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (4.5)$$

on obtient finalement à partir de l'équation (4.3) la relation :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = -e (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} \quad (4.6)$$

Dans le cas d'une onde plane se propageant dans la direction  $x$ , le potentiel ne dépend que de  $x$  et est polarisé dans le plan  $yz$ . L'équation (4.6) se simplifie alors pour donner :

$$\frac{dp_x}{dt} = -e \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_\perp - e\mathbf{A}) = 0 \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{p}_\perp = p_y \mathbf{e}_y + p_z \mathbf{e}_z$ . En supposant l'électron au repos initialement, on en déduit  $\mathbf{p}_\perp = e\mathbf{A}$  ou encore  $\mathbf{v}_\perp = e\mathbf{A}/m_e \gamma$ . En utilisant cette expression dans l'équation (4.7) on obtient alors :

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{e^2}{m_e \gamma} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = -\frac{e^2}{2m_e \gamma} \frac{\partial A^2}{\partial x} \quad (4.9)$$

On retrouve ainsi l'expression la force pondéromotrice relativiste dans un cas 1D.

L'équation de conservation de l'énergie pour l'électron s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_e c^2) = e \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.10)$$

En utilisant le fait que  $A_x = 0$ , on peut écrire  $\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  et alors l'équation (4.10) devient :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_e c^2) = \frac{e^2}{2m_e \gamma} \frac{\partial A^2}{\partial t} \quad (4.11)$$

En soustrayant alors l'équation (4.9)  $\times c$  à l'équation (4.11), on obtient :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_e c^2 - c p_x) = \frac{e^2}{2m_e \gamma} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) A^2 \quad (4.12)$$

Or, pour une onde plane se propageant selon  $x$  à la vitesse  $c$ , on a  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) A = 0$ . La différence  $\gamma m_e c^2 - c p_x$ , ou encore  $\gamma - p_x/m_e c$ , se conserve ainsi au cours du temps. L'électron étant initialement au repos, on a  $\gamma(t=0) = \gamma_0 = 1$  et  $p_x(t=0) = p_{x,0} = 0$  et donc :

$$\gamma = 1 + \frac{p_x}{m_e c} \quad (4.13)$$

En utilisant l'équation (4.13) et la définition  $\gamma m_e c = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}$ , on peut finalement résumer la dynamique d'un électron initialement au repos dans une onde plane propagative aux trois équations suivantes :

$$\frac{p_x}{m_e c} = \frac{1}{2} \left( \frac{e \mathbf{A}}{m_e c} \right)^2 \quad (4.14)$$

$$\frac{\mathbf{p}_\perp}{m_e c} = \frac{e \mathbf{A}}{m_e c} \quad (4.15)$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{e \mathbf{A}}{m_e c} \right)^2 \quad (4.16)$$

### 4.1.2 Reproduction par simulation numérique

La situation présentée ci-dessus est reproduite numériquement dans le code CALDER via une simulation 2D. On considère une onde plane propagative selon la direction  $x$ , infinie selon la direction  $y$ . Le caractère infini transversalement de l'onde est reproduit par des conditions aux limites périodiques sur les bords de la boîte de simulation. La direction de polarisation du laser est choisie parallèle au plan de simulation (polarisation selon la direction  $y$ ) et la troisième direction n'intervient alors nullement.

L'onde est simulée avec une extension temporelle finie, son enveloppe suivant un profil trapézoïdal comme illustré à la figure 4.1.a. Afin de correspondre à une situation physiquement possible, il faut s'assurer que  $\int E_y(t) dt = 0$ . Sinon, on obtient que  $A_y$ , et donc  $p_y$ , est non nul après le passage du laser. Pour simplifier l'analyse, on a choisi, de plus, un profil temporel tel que  $\int_{t_1}^{t_2} E_y(t) dt = 0$ , avec  $t_1$  et  $t_2$ , les bornes temporelles soit des rampes du profil trapézoïdal, soit du plateau du profil. Cela nous assure que l'impulsion transverse  $p_y$  reste nulle en moyenne pendant le temps de traversée du plateau d'intensité laser par l'électron.

Une seule particule est considérée ; elle est initialement au repos au milieu de la boîte de simulation. La figure 4.1.b illustre la situation initiale de la simulation.

On réalise tout d'abord trois simulations, chacune avec une des trois méthodes d'interpolations temporelles présentée dans le chapitre 3, à savoir : LTI, QTI et B-TIS. Les simulations sont réalisées avec une fenêtre glissante suivant la propagation de l'onde, dans une boîte de simulation de  $960 \times 200$  mailles où  $\Delta x = 0.15$  et  $\Delta y = 10$ . Le pas de temps est  $\Delta t = 0.149$  et l'amplitude de l'onde est caractérisée par  $a_0 = e A_0 / m_e c = 5$ .

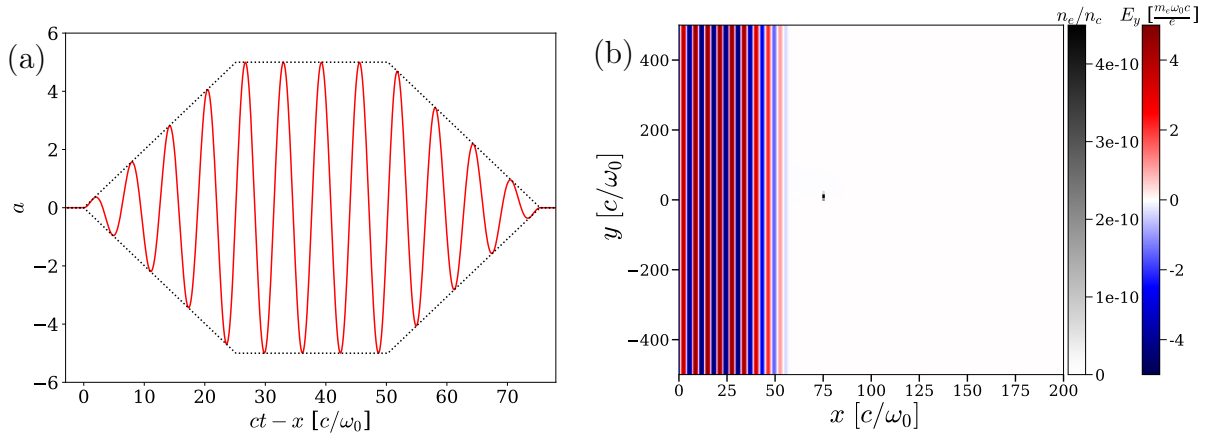


FIGURE 4.1 – (a) Profil temporel (potentiel vecteur normalisé  $a$ ) de l'onde incidente. Le trait discontinue représente l'enveloppe trapézoïdale. (b) Situation initiale de la simulation. L'onde incidente se propageant vers la droite, la position de la particule est repérée en noir.

### Comparaison des différentes méthodes

Si l'on considère une onde plane propagative selon  $x$ , polarisée selon  $y$  et dont l'enveloppe temporelle est donnée par la fonction  $f$  telle que  $\mathbf{A} = A_0 f(t - x/c) \sin(\omega_0(t - x/c)) \mathbf{e}_y$ , alors les équations (4.14), (4.15) et (4.16) peuvent s'écrire :

$$\frac{p_x}{m_e c} = \frac{1}{2} a_0^2 f^2(t - x/c) \sin^2(\omega_0(t - x/c)) \quad (4.17)$$

$$\frac{p_y}{m_e c} = a_0 f(t - x/c) \sin(\omega_0(t - x/c)) \quad (4.18)$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} a_0^2 f^2(t - x/c) \sin^2(\omega_0(t - x/c)) \quad (4.19)$$

La figure 4.2 présente les résultats obtenus par chaque simulation en comparant le  $p_x$  et le  $p_y$  de la particule à ceux attendus théoriquement d'après les équations (4.17) et (4.18). On utilise, dans cette figure, les grandeurs normalisées telles que  $t$  est exprimé en  $1/\omega_0$ ,  $x$  en  $c/\omega_0$  et l'impulsion  $p$  en  $m_e c$ .

Les trois simulations donnent de bons résultats pour le comportement transverse de la particule. Les méthodes QTI et B-TIS donnent  $p_y$  plus proche de la valeur théorique que LTI mais les écarts sont minimes et les accords sont bons dans tous les cas.

À noter, tout de même, qu'on peut observer de petites différences entre les résultats analytiques et simulés aux pieds du trapèze ( $t - x \approx 20$  et  $t - x \approx 90$ ) dans la figure 4.2.b. Celles-ci sont dues à une différence de définition du profil temporel du laser : dans le cas théorique, nous avons considéré une enveloppe en forme de trapèze pour le potentiel vecteur  $A$ , alors que, pour plus de commodité d'initialisation des champs, nous avons considéré, dans les simulations, une enveloppe en forme de trapèze pour les champs  $E$  et  $B$ . Cette définition implique une forme du potentiel vecteur  $A$  légèrement différente lorsque  $A$  varie significativement en une longueur d'onde laser comme c'est le cas aux pieds du trapèze.

L'impulsion longitudinale est plus problématique. Seule la méthode LTI reproduit ici le bon comportement qualitatif attendu, avec toutefois une erreur notable sur la valeur

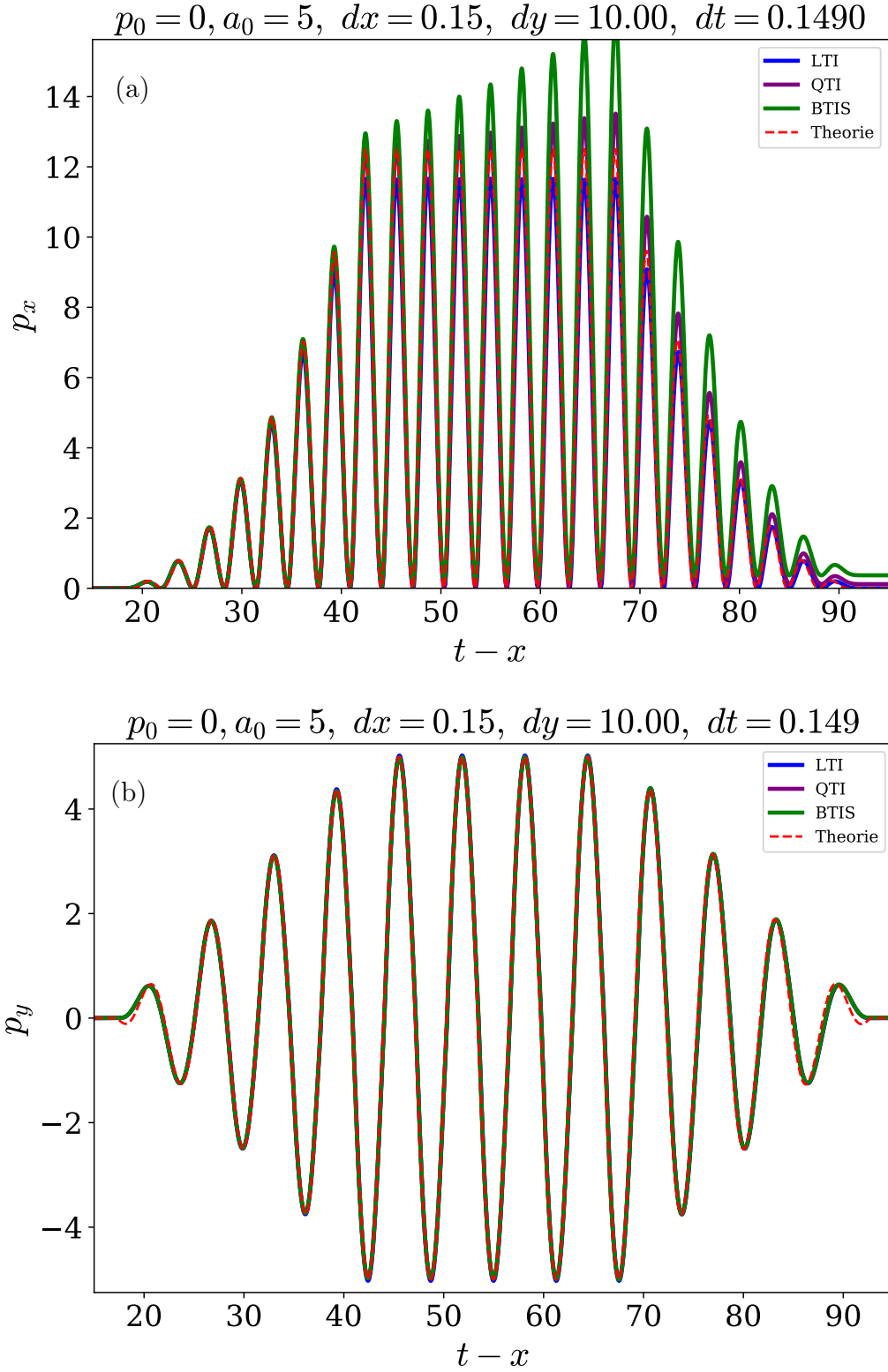


FIGURE 4.2 – Évolution des impulsions normalisées  $p_x$  (a) et  $p_y$  (b) de l'électron en fonction de la coordonnée normalisée  $t - x$  pour les différentes méthodes utilisées. Le trait discontinu rouge représente le  $p_x$  (respectivement  $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)).

maximale atteinte par le  $p_x$  qui est sous-évalué. Les méthodes QTI et B-TIS présentent toutes les deux une erreur qui amène à une surévaluation du  $p_x$ , qui s'accroît au cours du temps (chauffage artificiel de la particule). Cette erreur amène à une impulsion résiduelle non physique après le passage de l'onde.

Nous allons donc nous pencher sur la source de cette erreur et chercher une solution à cette mauvaise modélisation.

### 4.1.3 Problème de l'impulsion longitudinale avec QTI et B-TIS

CALDER ne calculant pas la propagation de l'onde laser en fonction du potentiel vecteur  $A$  mais en fonction des champs électromagnétiques, on revient temporairement aux expressions en fonction de  $E$  et  $B$ . L'équation du mouvement d'un électron donne alors, pour l'impulsion longitudinale :

$$\frac{dp_x}{dt} = -e(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \quad (4.20)$$

Si on considère une onde plane propagative selon  $x$  et polarisé selon  $y$  telle que  $E_y = E_0 \cos(\varphi)$  avec  $\varphi = \omega_0(t - x/c)$ , alors  $B_z = (E_0/c) \cos(\varphi)$  et  $E_x = 0$ ,  $B_y = 0$ . L'équation précédente se réduit alors à :

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{eE_0}{c} v_y \cos(\varphi) \quad (4.21)$$

Or d'après l'équation (4.15),  $v_y \propto A(\varphi) \propto \sin(\varphi)$ . On a alors :

$$p_x(t) = \int \frac{dp_x}{dt} dt \propto \int \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \quad (4.22)$$

Cela implique que, pour un électron initialement au repos, après un nombre entier de périodes de l'onde, le  $p_x$  de l'électron doit être à nouveau nul puisque  $\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = 0$ . C'est bien ce qu'on observe à la figure 4.2 pour la courbe théorique et pour LTI mais pas pour QTI et B-TIS. Cette erreur découle de l'erreur introduite par l'étape d'interpolation du champ  $B$ .

En effet, nous avons vu à la section 3.2.2 que, pour un champ  $B(\varphi) = B_0 \cos(\varphi)$  une erreur  $\varepsilon$  est introduite dans le calcul de la valeur numérique du champ, l'expression de cette erreur dépendant de la méthode utilisée :

$$\varepsilon_{\text{LTI}} = -B_0 \cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi)) \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_{\text{QTI}} = -B_0 \cos(\varphi) \left( 1 - \cos(\delta\varphi) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2(\delta\varphi) \right) \right) - \frac{1}{2} B_0 \sin(\varphi) \sin^3(\delta\varphi) \quad (4.24)$$

$$\varepsilon_{\text{B-TIS}} = -B_0 \cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi')) - B_0 \sin(\varphi) \sin(\delta\varphi') \quad (4.25)$$

Pour les trois méthodes, une première partie de l'erreur est proportionnelle à  $\cos(\varphi)$  mais pour QTI et B-TIS il existe aussi une partie dépendant de  $\sin(\varphi)$ . C'est cette dernière qui est ici problématique. En effet le  $p_x^{\text{num}}$  calculé dans la simulation peut alors s'exprimer :

$$p_x^{\text{num}}(t) = p_x(t) + \int_0^t -\frac{eE_0}{c} v_y \varepsilon dt = p_x(t) + \varepsilon_p \quad (4.26)$$

Ainsi, on a pour LTI :

$$\varepsilon_p^{\text{LTI}} \propto \int \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \quad (4.27)$$

L'erreur fluctue donc au cours du temps mais elle s'annule périodiquement. Tandis que pour QTI et B-TIS :

$$\varepsilon_p^{\text{QTI}} \propto \int \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi + cste. \int \sin^2(\varphi) d\varphi \quad (4.28)$$

$$\varepsilon_p^{\text{B-TIS}} \propto \int \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi + cste. \int \sin^2(\varphi) d\varphi \quad (4.29)$$

Le deuxième terme de l'expression aboutit ici à une erreur qui croit au cours du temps car  $\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \pi$ . Au lieu de s'annuler périodiquement, l'erreur s'accumule à chaque période, ce qui explique la divergence des résultats observées à la figure 4.2, même si l'erreur initiale est très faible. Il paraît à première vue difficile d'éliminer cette erreur, à moins de raffiner fortement le maillage pour permettre de diminuer  $\Delta t$  et  $\Delta x - c\Delta t$ , ce qui est très coûteux en termes de performances de calcul, ou de se limiter à de faibles  $a_0$  (l'erreur étant proportionnelle à  $a_0^2$ ), ce qui est préjudiciable pour l'étude du VLA. Ces deux solutions ne font, dans tous les cas, que limiter le problème car, même très faible initialement, l'erreur sera présente et va croître avec le temps.

On peut, cependant, modifier légèrement la manière dont fonctionne B-TIS, pour réduire fortement cette source d'erreur, tout en conservant tous les avantages de notre nouvelle méthode.

### Solution introduite pour B-TIS

On rappelle que B-TIS remplace l'interpolation temporelle de  $B$  (illustrée à la figure 4.3.a) :

$$\tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left( B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.30)$$

par la translation :

$$\hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

qui suppose que l'onde se propage à  $c$  dans la direction  $x$  et que  $c\Delta t \approx \Delta x$ . Avec ces hypothèses, cette translation est, cependant, complètement équivalente à :

$$\hat{B}_i^n = B_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

Si la valeur du champ est la même un demi pas d'espace plus loin après un demi pas de temps, alors elle est aussi égale à la valeur du champ un demi pas d'espace moins loin, un demi pas de temps avant. La figure 4.3.b illustre la situation considérée ainsi que les deux translations possible. Dans ce schéma, les hypothèses de la propagation du champ  $B$  à  $c$  ainsi que  $c\Delta t \approx \Delta x$  se traduisent par les valeurs de  $B$  étant constantes sur les diagonales, d'où l'équivalence des deux translations.

On dénote la version "inversée" de B-TIS, utilisant la relation  $\hat{B}_i^n = B_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$ , par rB-TIS. Cette méthode introduit alors l'erreur :

$$\varepsilon_{\text{rB-TIS}} = -B_0 \cos(\varphi) (1 - \cos(-\delta\varphi')) - B_0 \sin(\varphi) \sin(-\delta\varphi') \quad (4.33)$$

$$= -B_0 \cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi')) + B_0 \sin(\varphi) \sin(\delta\varphi') \quad (4.34)$$



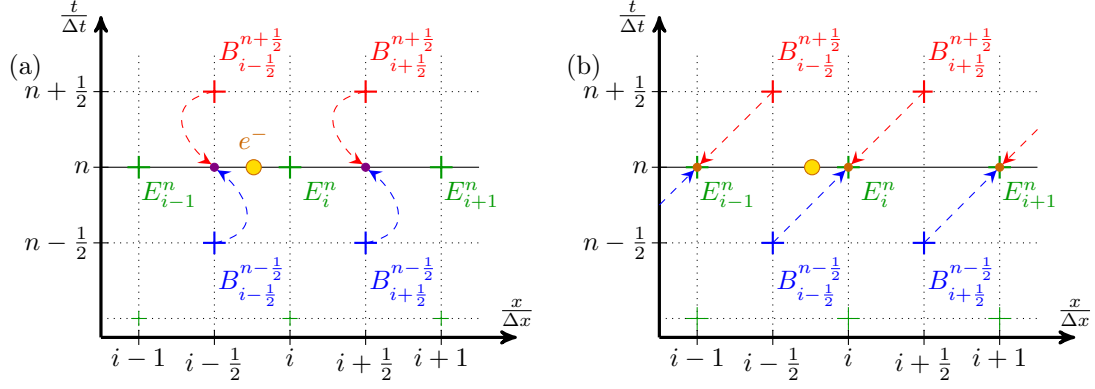


FIGURE 4.3 – Comparaison des méthodes LTI et B-TIS. On considère ici uniquement un maillage spatial 1D au pas de temps  $n$ . (a) présente l'interpolation temporelle  $\tilde{B}^n = \frac{1}{2}(B^{n-\frac{1}{2}} + B^{n+\frac{1}{2}})$  effectuée par LTI (b) présente les deux translations possibles de B utilisant les relations  $\hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  et  $\hat{B}_i^n = B_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$ .

On retrouve, au signe près de la deuxième partie, la même erreur que la version "classique" de B-TIS.

Puisque les deux translations apparaissent équivalentes, on peut choisir d'alterner à chaque pas de temps celle qui est utilisée, sans impact négatif sur le résultat *a priori*. Cette alternance a, cependant, l'avantage d'aboutir à l'annulation du second terme de l'erreur sur le  $p_x$ . En effet, après plusieurs pas de temps à accumuler alternativement  $\varepsilon_{\text{B-TIS}}$  et  $\varepsilon_{\text{rB-TIS}}$ , on peut alors exprimer le  $p_x$  sous la forme :

$$p_x^{num}(t) = p_x(t) + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{eE_0}{c} v_y \varepsilon_{\text{B-TIS}} dt + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{eE_0}{c} v_y \varepsilon_{\text{rB-TIS}} dt \quad (4.35)$$

À partir des équations (4.25) et (4.34), il est clair que les deux intégrales en  $\cos^2(\varphi)$  vont s'annuler, ne laissant plus comme source d'erreur que l'intégrale en  $\sin(\varphi) \cos(\varphi)$  qui s'annule périodiquement et n'augmente donc pas au cours du temps. On dénotera dans la suite, cette nouvelle méthode par B-TIS2 pour la différencier de la méthode originellement présentée, qu'on notera désormais B-TIS1.

On peut aussi choisir d'utiliser les deux translations à la fois, en faisant la moyenne des deux valeurs de la sorte que :

$$\hat{B}_i^n = \frac{1}{2} \left( B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.36)$$

Il est important de noter qu'il ne s'agit pas d'une simple moyenne temporelle comme LTI, puisque l'indice spatial est ici lui aussi modifié. L'erreur introduite par cette nouvelle méthode, qu'on note B-TIS3, est donnée par :

$$\varepsilon_{\text{B-TIS3}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{B-TIS}} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{rB-TIS}} \quad (4.37)$$

$$= -B_0 \cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi')) + \frac{1}{2} B_0 \sin(\varphi) \sin(\delta\varphi') - \frac{1}{2} B_0 \sin(\varphi) \sin(\delta\varphi') \quad (4.38)$$

$$= -B_0 \cos(\varphi) (1 - \cos(\delta\varphi')) \quad (4.39)$$

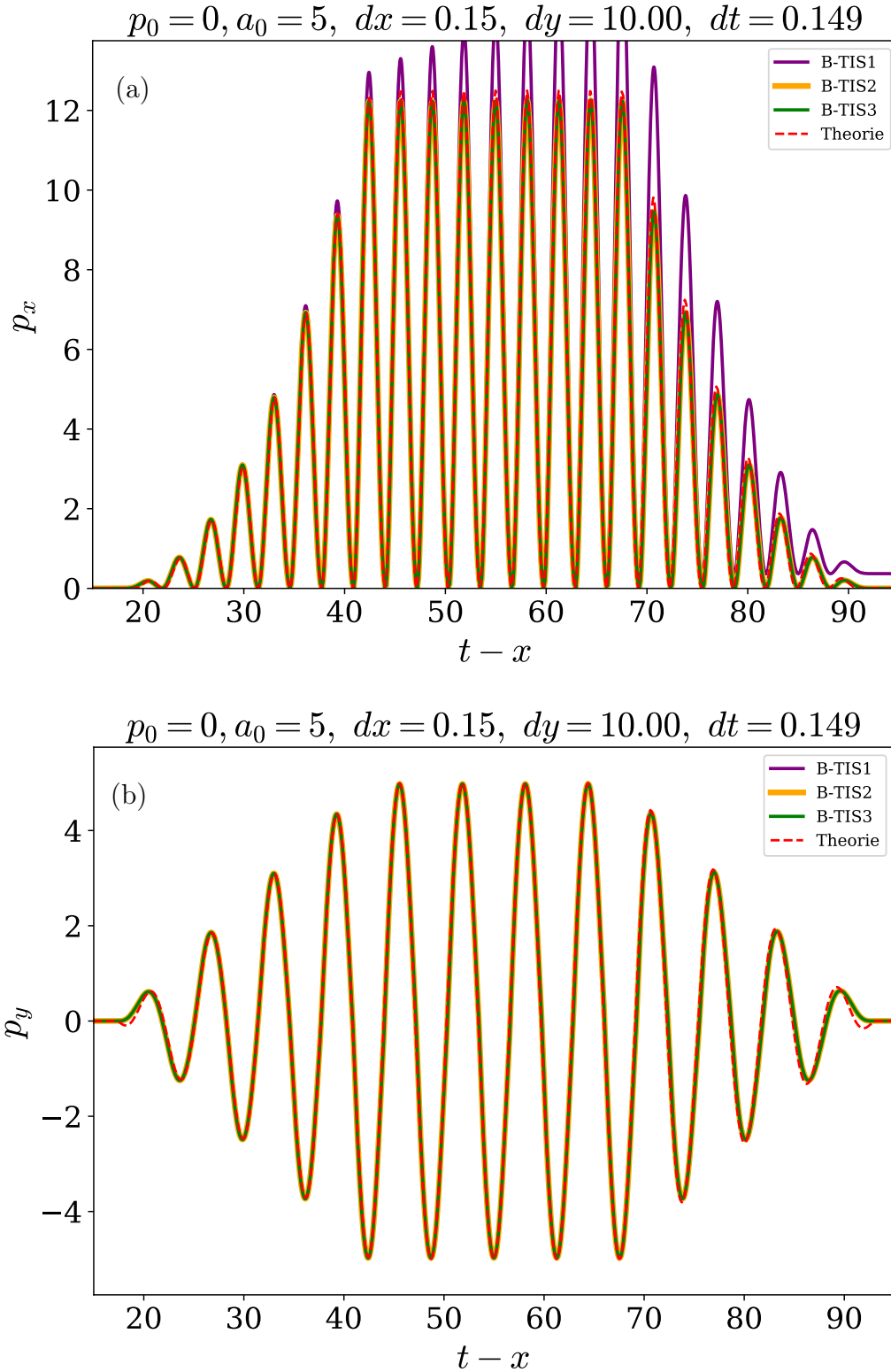


FIGURE 4.4 – Évolution des impulsions normalisées  $p_x$  (a) et  $p_y$  (b) de l'électron en fonction de la coordonnée normalisée  $t-x$  pour les différentes méthodes B-TIS et LTI. Le trait discontinu rouge représente le  $p_x$  (respectivement  $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)).

On retrouve la même forme d'erreur que pour LTI mais avec  $\delta\varphi' < \delta\varphi$ , ce qui laisse présager d'une amélioration des résultats. On compare les résultats de ces deux "nouveaux B-TIS" avec LTI et B-TIS1 dans la figure 4.4.

B-TIS2 et B-TIS3 donnent des résultats très similaires. Ces deux nouvelles méthodes ne souffrent plus du problème de l'erreur croissante constatée avec B-TIS1 et donnent un  $p_x$  encore plus proche de la valeur théorique que celui obtenu avec LTI. Les résultats sur le  $p_y$  sont toujours aussi bons, la marge d'amélioration étant déjà très faible même avec LTI.

Au vu de ces résultats, il semble que nous ayons efficacement résolu le problème initial posé par l'erreur de calcul du  $p_x$  et que les nouvelles méthodes B-TIS2 et B-TIS3 sont bien adaptées pour reproduire la physique de l'accélération par laser dans le vide contrairement à B-TIS1 et QTI.

On préférera, dans la suite, B-TIS3 à B-TIS2 car utiliser une valeur moyennée pour le champ  $B$  apparaît moins propice à l'apparition de problèmes numériques que l'alternance à chaque pas de temps de la méthode d'interpolation. De plus, les deux méthodes donnant des résultats quasiment identiques, l'étude des deux méthodes paraît superflue. LTI étant la méthode la plus communément utilisée dans les codes PIC, elle présente aussi un point de comparaison intéressant. Nous nous contenterons donc, dans la suite, de présenter les

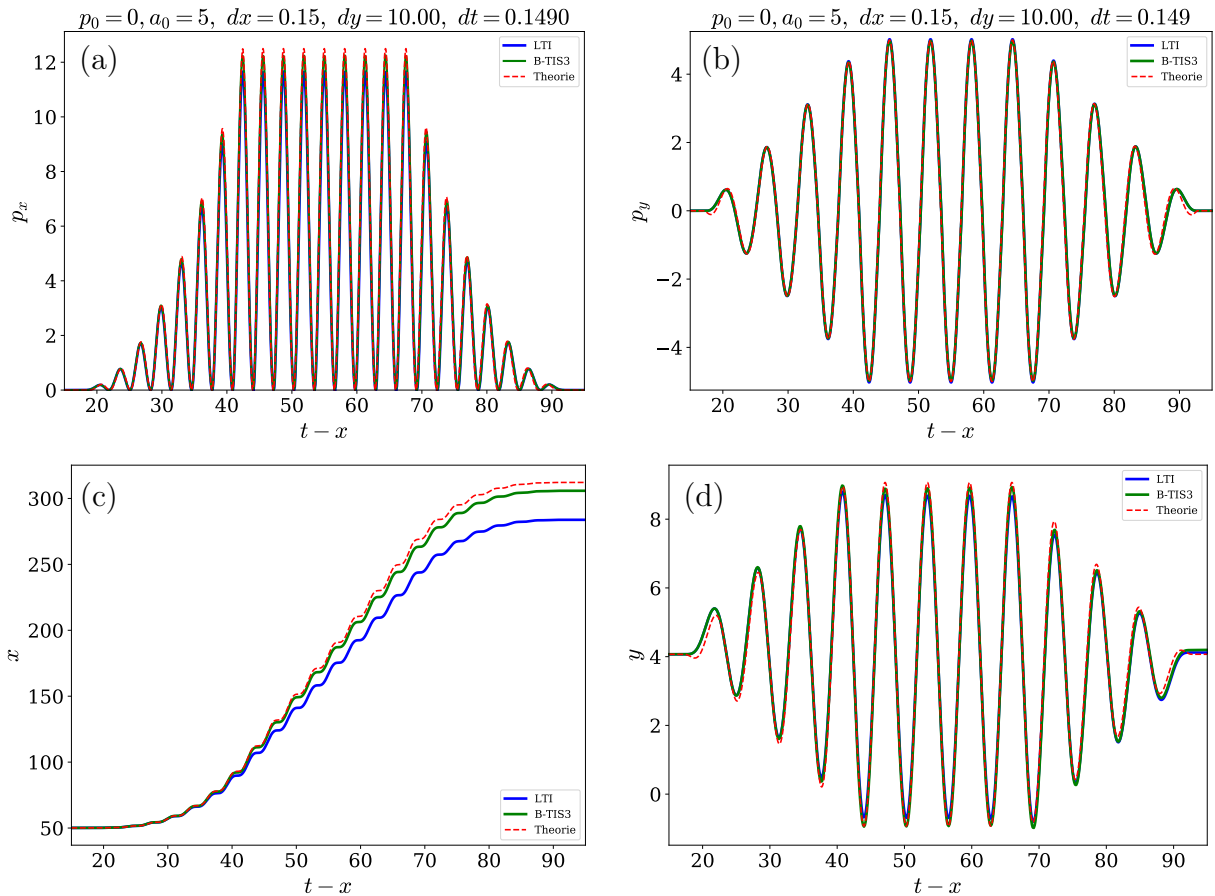


FIGURE 4.5 – Évolution de l'impulsion normalisée : (a)  $p_x$ , (b)  $p_y$  et de la position normalisée de l'électron : (c)  $x$ , (d)  $y$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t-x$  pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente la valeur attendue pour la grandeur tracée d'après le modèle théorique présenté précédemment.

résultats de nos simulations en utilisant uniquement LTI et B-TIS3.

La figure 4.5 récapitule les résultats obtenus avec LTI et B-TIS3. Les figures 4.5.a et 4.5.b montrent clairement la bonne reproduction du comportement attendu théoriquement par les deux méthodes, avec toutefois un avantage pour B-TIS3, qui donne des valeurs de  $p_x$  plus proches de celles prédites par la théorie. Cette meilleure reproduction de l'impulsion se traduit aussi par une trajectoire plus fidèle aux prédictions théoriques, comme on peut le voir sur les figures 4.5.c et 4.5.d.

#### 4.1.4 Cas d'un électron avec une vitesse longitudinale initiale

On s'intéresse maintenant au cas où l'électron n'est plus initialement au repos, mais possède une certaine impulsion longitudinale  $p_{x,0} = p_0$ . Ce cas est favorable à une accélération à plus haute énergie de l'électron.

##### Développement théorique

On peut reprendre les équations développées précédemment avec quelques modifications. L'impulsion transverse étant toujours nulle initialement, l'équation (4.8) induit toujours que  $\mathbf{p}_\perp = e\mathbf{A}$  et on retrouve encore la conservation de la différence  $\gamma - p_x/m_e c$ . Cependant,  $p_{x,0}$  est désormais non nul et  $\gamma_0 = \sqrt{1 + p_{x,0}/(m_e c)} \neq 1$ , ce qui nous amène à :

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{p_x}{m_e c} - \frac{p_{x,0}}{m_e c} \quad (4.40)$$

Ainsi, en utilisant à nouveau  $\gamma m_e c = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}$ , on obtient finalement :

$$\frac{p_x}{m_e c} = \frac{p_{x,0}}{m_e c} + \frac{1}{2} \left( \gamma_0 + \frac{p_{x,0}}{m_e c} \right) \left( \frac{e\mathbf{A}}{m_e c} \right)^2 \quad (4.41)$$

$$\frac{\mathbf{p}_\perp}{m_e c} = \frac{e\mathbf{A}}{m_e c} \quad (4.42)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{1}{2} \left( \gamma_0 + \frac{p_{x,0}}{m_e c} \right) \left( \frac{e\mathbf{A}}{m_e c} \right)^2 \quad (4.43)$$

##### Reproduction numérique

Les simulations sont identiques à celles décrites précédemment, à la différence qu'on attribue à la particule une impulsion longitudinale initiale  $p_{x,0} = p_0$ . On donne l'évolution de  $p_x$  et  $p_y$  pour  $p_0 = m_e c$ ,  $p_0 = 5 m_e c$  et  $p_0 = 10 m_e c$  dans les figures 4.6, 4.7 et 4.8. Les résultats obtenus sont conformes à ceux obtenus précédemment avec une impulsion initiale nulle.

LTI sous-évalue de manière importante de l'impulsion longitudinale  $p_x$  et surévalue légèrement l'impulsion transverse  $p_y$ . Ces erreurs augmentent sensiblement avec l'augmentation de l'impulsion initiale  $p_0$ . Ainsi avec  $p_0 = m_e c$ , le  $p_x$  atteint 80% de sa valeur maximum théorique, mais ce taux n'est que de 33% pour  $p_0 = 5 m_e c$ , et à peine 18% pour  $p_0 = 10 m_e c$ . On observe aussi, avec LTI, que le  $p_x$  peut passer périodiquement en dessous de sa valeur initiale  $p_0$ , ce qui n'est pas physique.

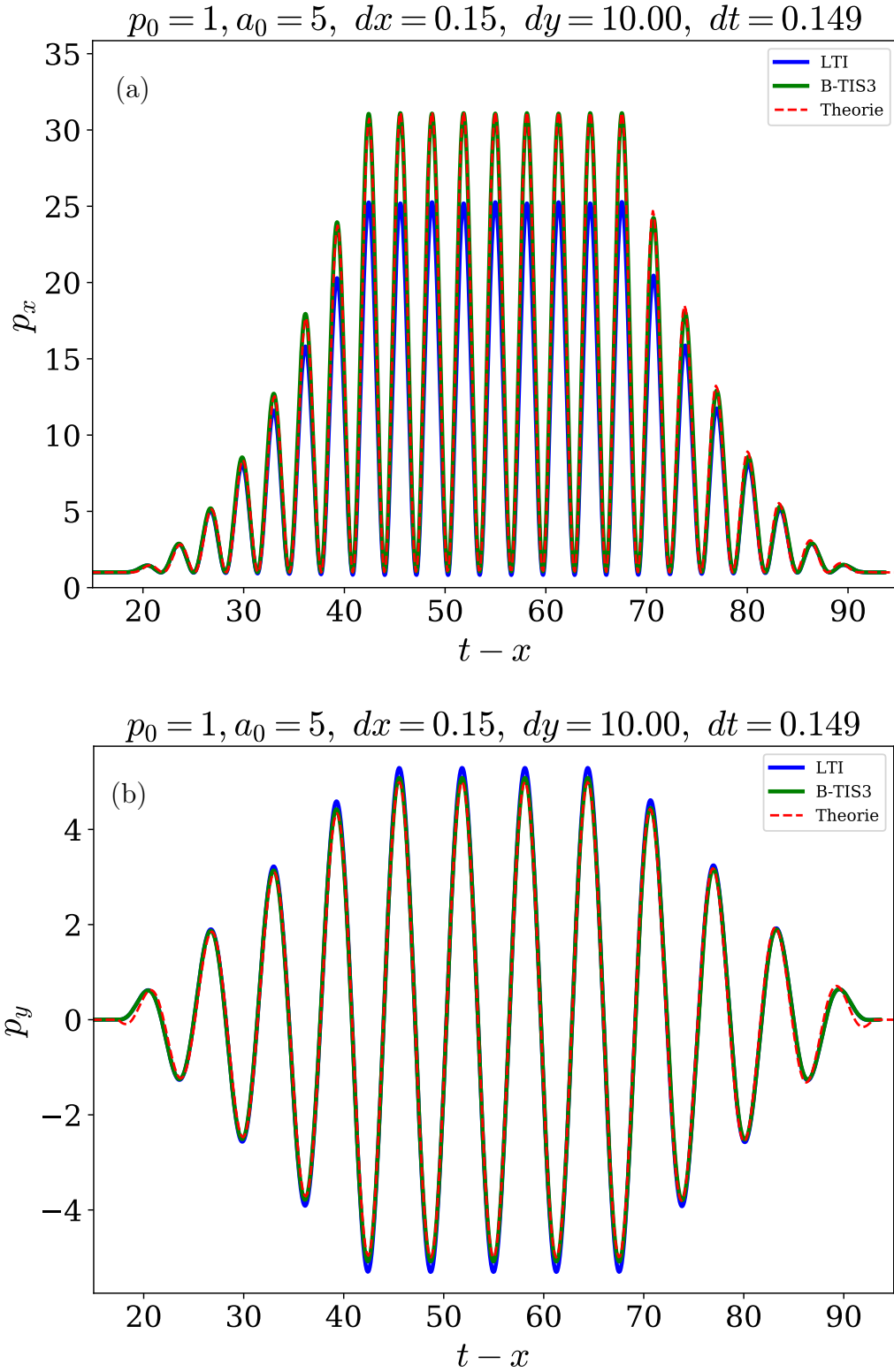


FIGURE 4.6 – Évolution de l'impulsion normalisée (a)  $p_x$  et (b)  $p_y$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t-x$  avec  $p_0 = m_e c$  pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente le  $p_x$  (respectivement  $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)).

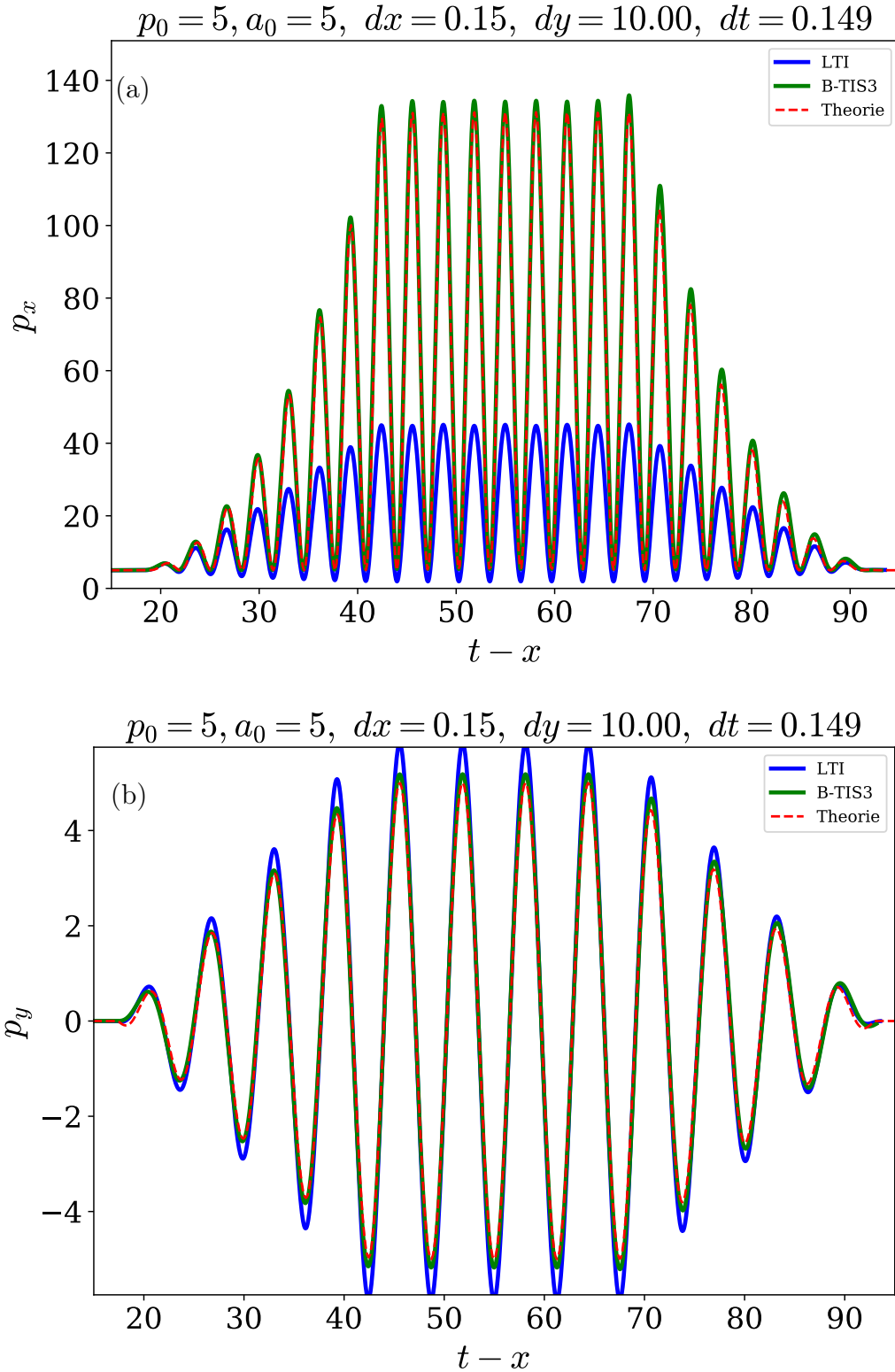


FIGURE 4.7 – Évolution de l'impulsion normalisée (a)  $p_x$  et (b)  $p_y$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t - x$  avec  $p_0 = 5 m_e c$  pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente le  $p_x$  (respectivement  $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)).

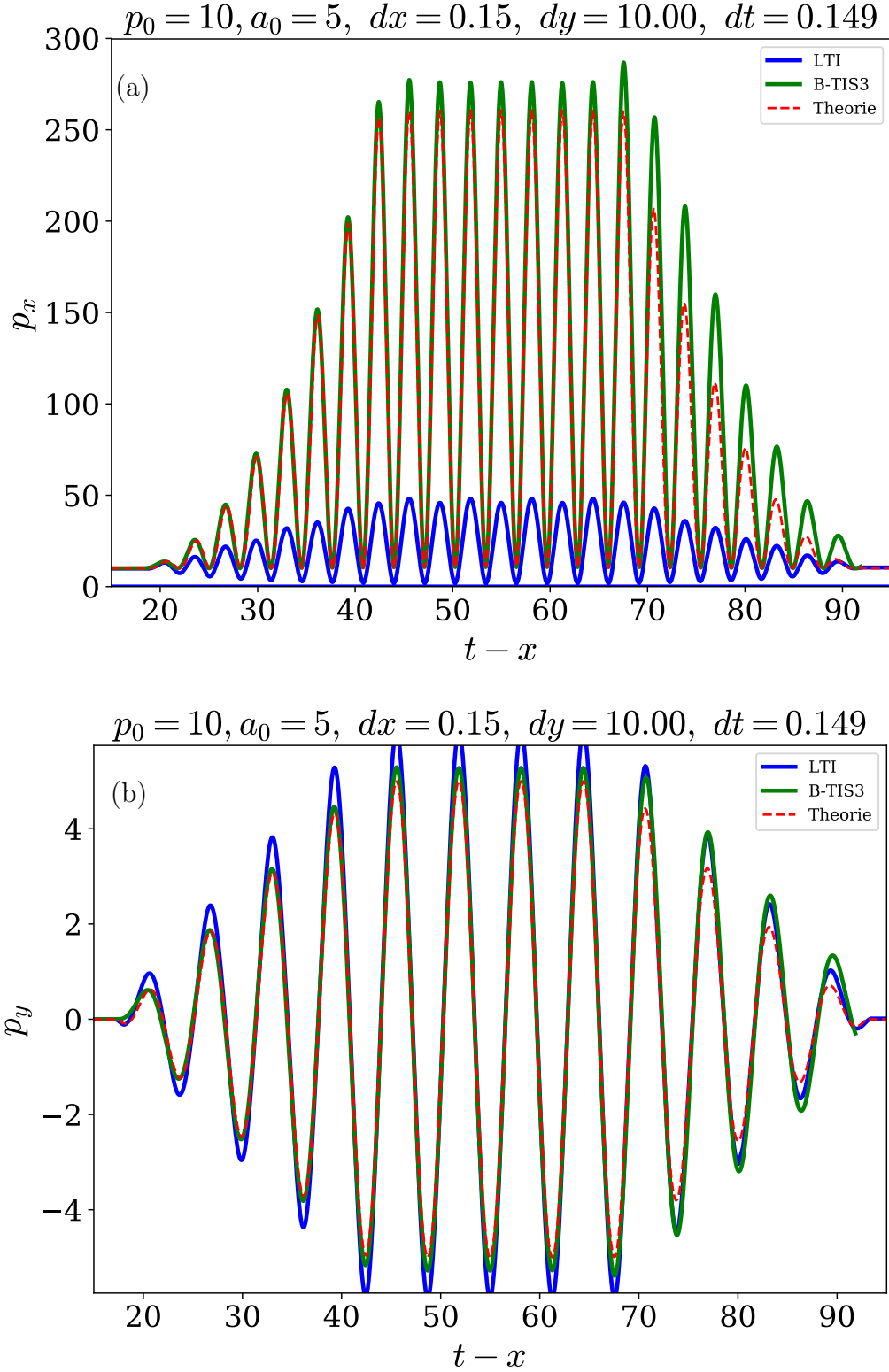


FIGURE 4.8 – Évolution de de l'impulsion normalisée (a)  $p_x$  et (b)  $p_y$  en fonction de la coordonnée normalisé  $t - x$  avec  $p_0 = 10 m_e c$  pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente le  $p_x$  (respectivement  $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)).

B-TIS3 suit une tendance inverse à celle de LTI : elle surévalue le  $p_x$ . Elle apporte cependant une bien meilleure précision sur l'impulsion de la particule, avec des valeurs très proches de celles données par le modèle analytique et un  $p_x$  minimum très proche de  $p_0$ . Encore une fois, l'erreur est amplifiée lorsqu'on augmente la valeur du  $p_0$  initial. Cette erreur dépend de la différence  $\Delta x - c\Delta t$  ce qui la rend plus facile à maîtriser que celle introduite par LTI qui dépend uniquement du  $\Delta t$  choisi.

**Influence du pousseur :** Le choix du pousseur utilisé pour calculer le mouvement des particules peut aussi influencer sur le calcul de l'impulsion de la particule dans les simulations. Nous allons vérifier que le choix de la méthode d'interpolation a ici un impact bien plus important que le choix du pousseur. Les résultats présentés jusqu'à présent ont été obtenus en utilisant le pousseur de Boris [46]. Nous avons réalisé deux simulations supplémentaires avec le pousseur mis au point par J.-L. Vay [90] mais autrement en tout point identiques aux précédentes avec  $p_0 = 10 m_e c$ . Le pousseur de Vay est censé améliorer le calcul de la force transverse lorsqu'un électron relativiste se co-propage avec un champ laser. On compare, dans

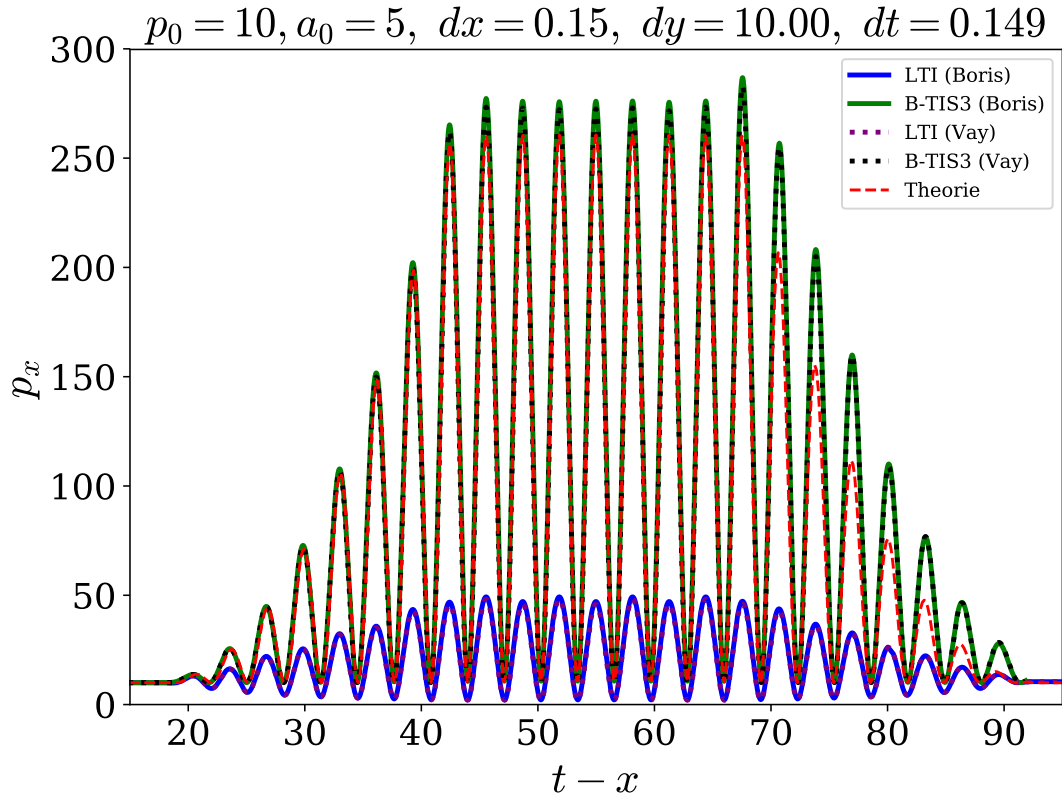


FIGURE 4.9 – Évolution de l'impulsion normalisée  $p_x$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t-x$  avec  $p_0 = 10 m_e c$  pour LTI et B-TIS3, avec deux pousseurs différents (pousseur de Boris [46] ou pousseur de Vay [90]). Le trait discontinu rouge représente le  $p_x$  attendu d'après l'équation (4.17).

les figures 4.9 et 4.10, les impulsions obtenus dans deux simulations avec LTI et B-TIS3 en utilisant le pousseur de Vay aux deux simulations avec LTI et B-TIS3 présenté précédemment. On choisit le cas où  $p_0 = 10$  afin de faciliter la visualisation d'un éventuel effet sur l'erreur.



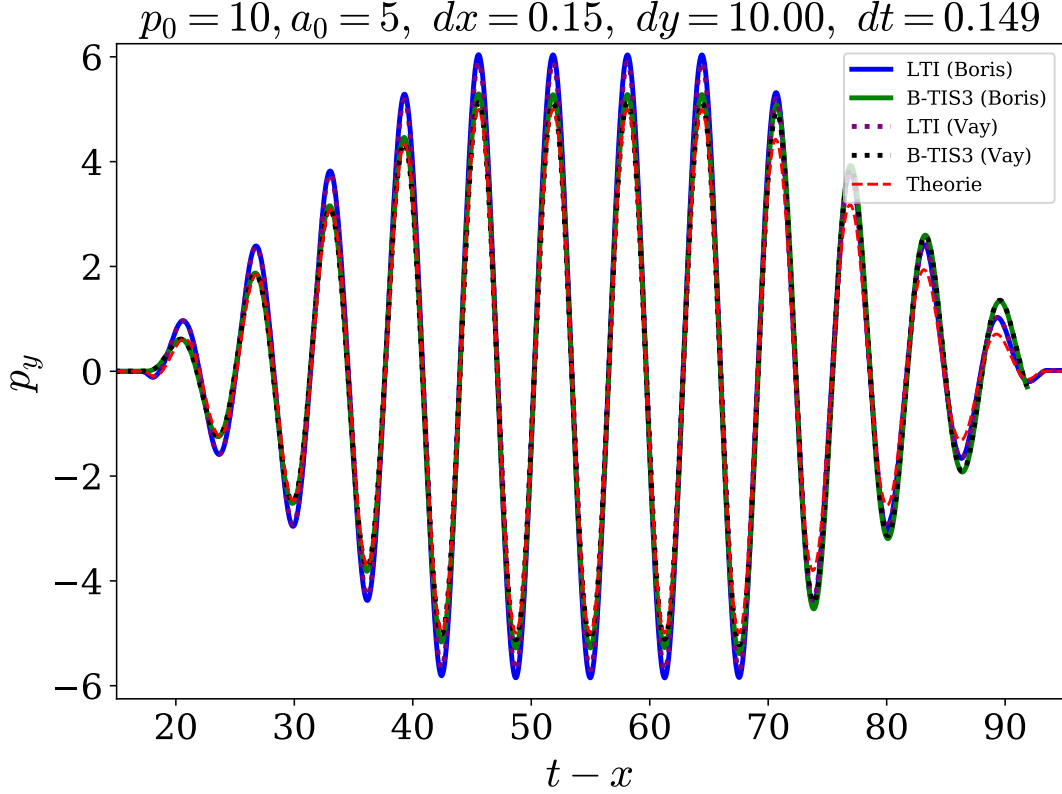


FIGURE 4.10 – Évolution de l’impulsion normalisée  $p_y$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t - x$  avec  $p_0 = 10 m_e c$  pour LTI et B-TIS3, avec deux pousseurs différents (pousseur de Boris [46] ou pousseur de Vay [90]). Le trait discontinu rouge représente le  $p_y$  attendu d’après l’équation (4.18).

Les deux pousseurs donnent cependant des résultats quasiment identiques et on ne distingue pas de comportement différent de l’électron entre les deux. Le pousseur de Vay semble néanmoins réduire très légèrement la surestimation du  $p_x$  induite par B-TIS3.

## 4.2 Interaction avec une impulsion au profil transverse gaussien

Pour continuer à se rapprocher d’une situation plus réaliste, on considère désormais, non plus une onde plane au profil transverse infinie, mais une impulsion laser au profil spatial gaussien.

### 4.2.1 Situation théorique

Pour faciliter les comparaisons aux cas précédents, on garde un profil temporel trapézoïdal mais l’étendue spatiale transverse du laser est maintenant finie et donnée par un profil gaussien de largeur  $160 \omega_0/c$ . La figure 4.11 illustre la situation initiale.

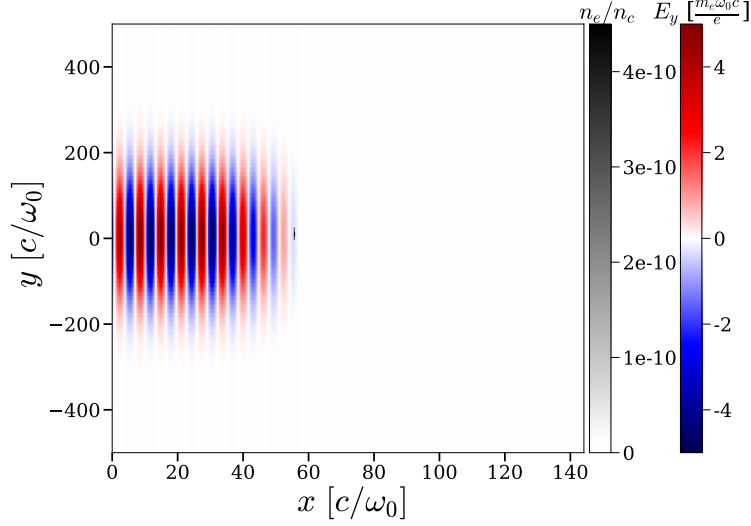


FIGURE 4.11 – Situation initiale avec une onde au profil spatial gaussien.

On peut reprendre les équations précédentes mais en considérant maintenant le cas, plus général, d'une onde se propageant selon  $x$  et polarisée selon  $y$  telle que  $\mathbf{A}(x, y, t) = A(x, y, t)\mathbf{e}_y$ . On suppose que le waist du laser est grand devant sa longueur d'onde, on néglige donc l'existence d'une composante selon  $x$  du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . L'équation de conservation d'énergie nous donne alors :

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = ev_y \frac{\partial A}{\partial t} \quad (4.44)$$

Et l'équation du mouvement (4.6), nous permet d'obtenir :

$$\frac{dp_x}{dt} = -ev_y \frac{\partial A}{\partial x} \quad (4.45)$$

$$\frac{d}{dt}(p_y - eA) = -ev_y \frac{\partial A}{\partial y} \quad (4.46)$$

En utilisant  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ , on obtient finalement :

$$\frac{dp_x}{dt} = -ev_y \frac{\partial A}{\partial x} \quad (4.47)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = e \left( \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (4.48)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = ev_y \frac{\partial A}{\partial t} \quad (4.49)$$

Ce système est alors bien plus complexe que les précédents et ne sera pas résolu analytiquement. On sait cependant que l'électron va être expulsé sur le côté par la force pondéromotrice du laser et qu'il devrait donc obtenir une impulsion, longitudinale et transverse, résiduelle.

En réalité, pour un traitement exacte du mouvement et de l'accélération des électrons par le champ laser, il faudrait prendre en compte la composante selon  $x$  de  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$ ), ce qui modifierait les équations (4.44) à (4.49) présentées ci-dessus. Cependant, puisqu'on ne cherche plus à résoudre analytiquement le système de manière exacte, nous négligeons ici cette composante  $A_x$  pour plus de simplicité.

## 4.2.2 Résultats numériques

On observe bien le comportement attendu : l'électron dérive transversalement et se re-trouve après le passage du laser avec des impulsions longitudinale  $p_x$  et transverse  $p_y$  non nulles. La figure 4.12 récapitule les résultats obtenus pour un électron initialement proche

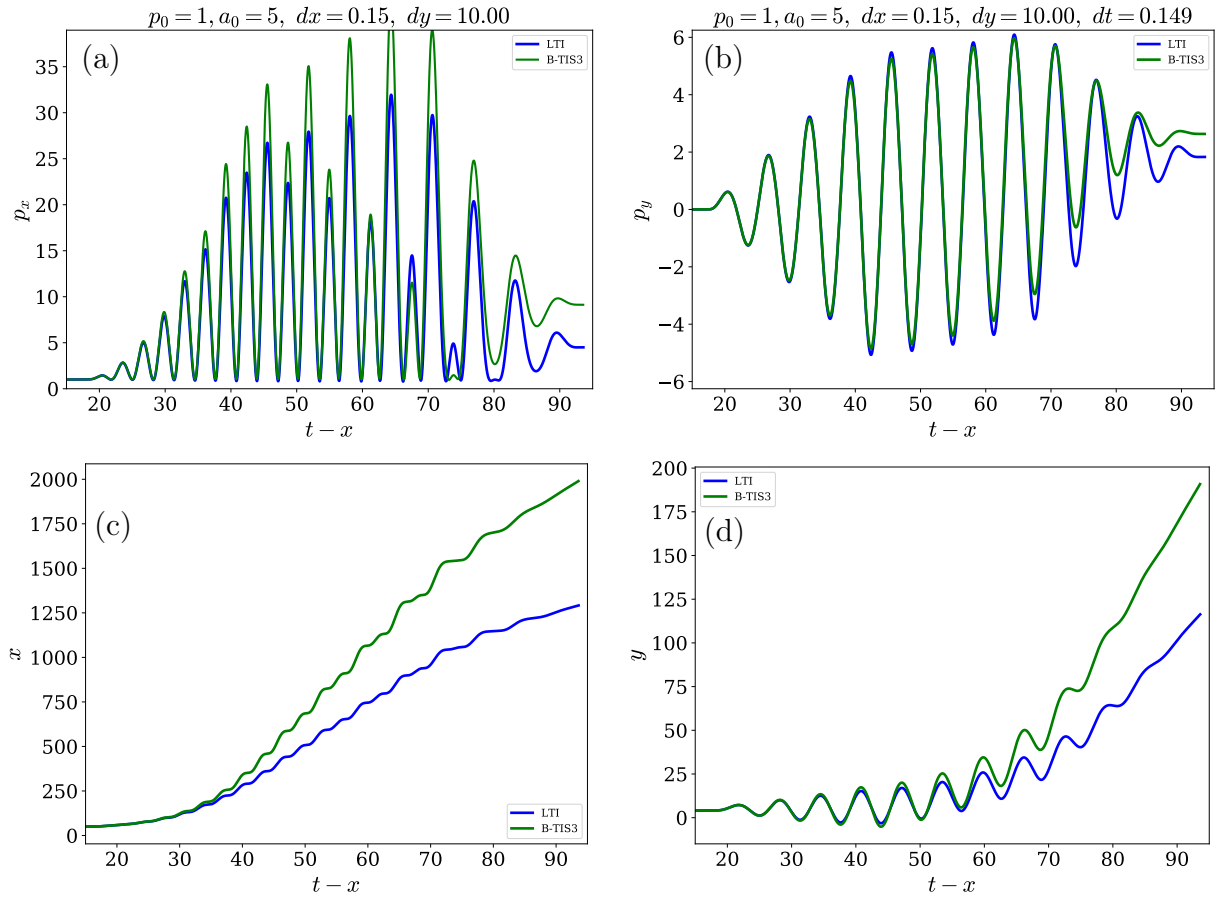


FIGURE 4.12 – Évolution de l'impulsion normalisée (a)  $p_x$ , (b)  $p_y$  et de la position normalisée : (c)  $x$ , (d)  $y$  de l'électron en fonction de la coordonnée normalisée  $t - x$  pour LTI et B-TIS3.

de l'axe de propagation et avec une impulsion longitudinale  $p_0 = m_e c$ .

Les deux méthodes donnent dans l'ensemble un comportement similaire pour l'électron, mais présentent tout de même des différences notables sur les impulsions et positions finales. En effet, l'électron étant sensiblement plus accéléré dans le cas utilisant B-TIS3, il parcourt une plus grande distance au sein de l'impulsion laser.

Nous n'avons plus de modèle analytique simple auquel nous comparer pour juger de la pertinence des résultats. Nous allons donc utiliser une méthode numérique pour déterminer le résultat théorique attendu.

En raffinant le maillage en  $x$  et  $t$ , les deux méthodes devraient converger vers une même solution correspondant au résultat physique. On compare les résultats de trois paires de simulations où on a choisi respectivement :  $\Delta x = 0.15c/\omega_0$  et  $c\Delta t = 0.149c/\omega_0$  pour la première,  $\Delta x = 0.10c/\omega_0$  et  $c\Delta t = 0.099c/\omega_0$  pour la deuxième et  $\Delta x = 0.05c/\omega_0$  et  $c\Delta t = 0.049c/\omega_0$  pour la troisième. Les impulsions obtenues sont données dans la figure 4.13.

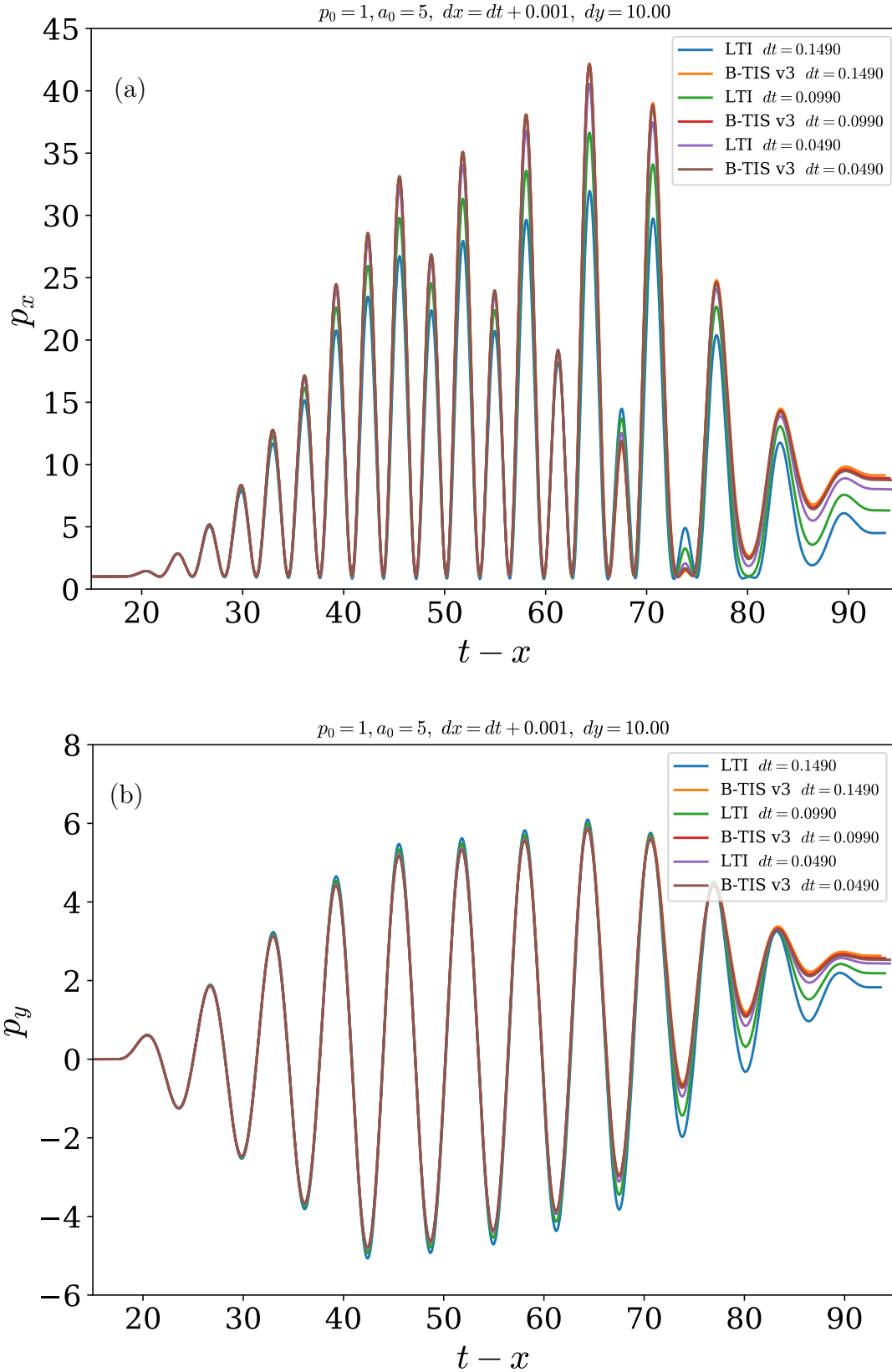


FIGURE 4.13 – Évolution de l'impulsion normalisée (a)  $p_x$  et (b)  $p_y$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t - x$  avec  $p_0 = m_e c$  pour LTI et B-TIS3, avec différentes valeurs des pas d'espace et de temps.

Ces résultats montrent déjà clairement que les deux méthodes vont bien converger vers une même solution, qui sera relativement proche de celle obtenue initialement par B-TIS3. B-TIS3 semble donc plus précis, malgré une légère sur-estimation des impulsions, alors que LTI sous-estime fortement les impulsions de l'électron. On retrouve à nouveau la nécessité d'avoir  $\Delta x - c\Delta t$  le plus petit possible pour obtenir les meilleurs résultats avec B-TIS3.

On note cependant qu'une division par 3 des pas de temps  $\Delta t$  et d'espace  $\Delta x$  (et donc une augmentation du temps de calcul par 9) avec LTI, ne permet toujours pas d'atteindre un meilleur résultat que les simulations utilisant B-TIS3 et une résolution plus grossière.

### 4.2.3 Influence de la position initiale

La force pondéromotrice ressentie par la particule dépend du gradient d'intensité de l'impulsion laser, or ce dernier varie fortement selon la position transverse. Il est donc intéressant de vérifier qu'on retrouve bien ce comportement dans nos simulations.

On présente dans les figures 4.14 et 4.15, les impulsions d'électrons avec différentes positions initiale  $y_0$ . On s'aperçoit que les deux méthodes tendent à donner des impulsions

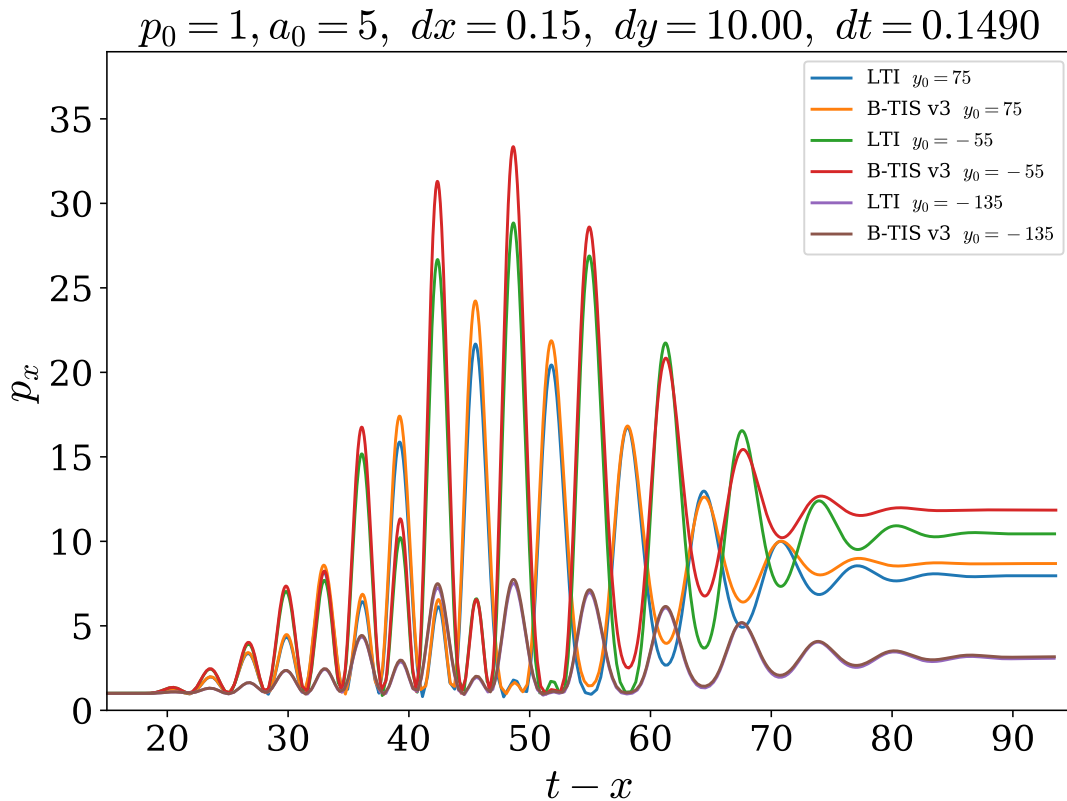


FIGURE 4.14 – Évolution de l'impulsion normalisée  $p_x$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t - x$  avec  $p_0 = m_e c$  pour LTI et B-TIS3 pour différentes valeurs de la position transverse initiale  $y_0$  de l'électron.

similaires après le passage du laser dès que l'électron est hors des zones de fort champ. On observe effet des différences moins marquées entre LTI et B-TIS3 au plus l'électron est

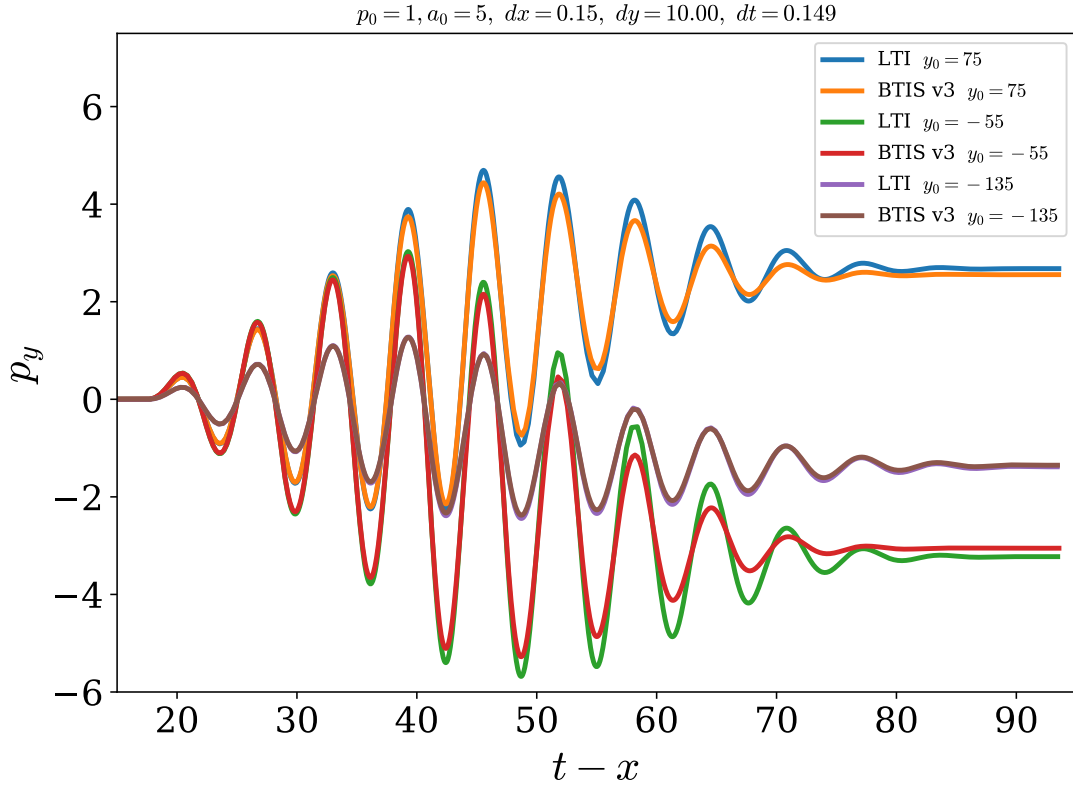


FIGURE 4.15 – Évolution de l’impulsion normalisée  $p_y$  en fonction de la coordonnée normalisée  $t - x$  avec  $p_0 = m_e c$  pour LTI et B-TIS3 pour différentes valeurs de la position transverse initiale  $y_0$  de l’électron.

initialement loin de l’axe, donc loin des zones de fort gradients d’intensité. Cela paraît cohérent car l’électron est alors moins accéléré et on a montré précédemment que l’erreur était plus importante pour LTI lorsque l’électron était fortement accéléré. Ces différences peuvent cependant influencer fortement sur la trajectoire suivie par l’électron même si l’impulsion finale est similaire. De plus, si l’on cherche à simuler de l’accélération par laser dans le vide, les électrons qui nous intéressent le plus sont justement ceux qui sont fortement accélérés. L’utilisation de B-TIS3 apparaît donc préférable.

### 4.3 Simulation d’accélération par laser dans le vide

On considère désormais, non plus une seule particule, mais un ensemble d’électrons, se propageant initialement longitudinalement avec le laser. On garde les mêmes profils temporels et spatial pour le laser que ceux décrits en 4.2 La figure 4.16 illustre la situation initiale. À noter qu’on a choisi, pour ce cas-ci, d’initialiser le faisceau d’électrons directement dans le champ laser afin de maximiser l’accélération des électrons. La charge (en 2D) du faisceau est relativement faible ( $\approx 4.5 \text{ pC } \mu\text{m}^{-1}$ ) pour diminuer les effets de charge d’espace et on choisit une faible extension spatiale de l’ordre d’une longueur d’onde laser de 800 nm.

On compare toujours les résultats de simulations utilisant soit LTI, soit B-TIS3. On observe un comportement relativement similaire pour les deux simulations, à savoir que le

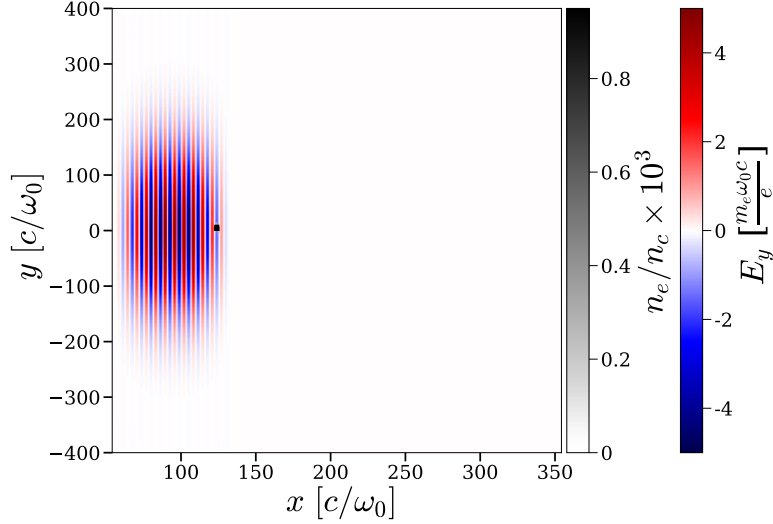


FIGURE 4.16 – Situation initiale avec une onde au profil spatial gaussien et un ensemble d'électrons.

faisceau est accéléré longitudinalement sur une certaine distance avant que la force pondéromotrice transverse du laser ne le fasse éclater. Les électrons quittent alors l'impulsion, majoritairement par ses bords, sans la traverser de part en part longitudinalement. Les élec-

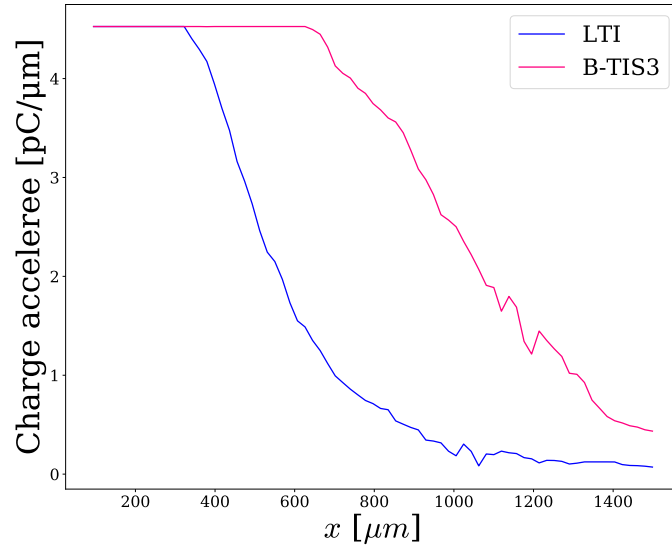


FIGURE 4.17 – Charge contenue dans la boîte de simulation en fonction de la distance parcourue.

trons sont cependant accélérés par le laser pendant un temps beaucoup plus long dans la simulation utilisant B-TIS3, ce qui résulte en une charge qui reste contenue dans la boîte de simulation sur une plus grande distance comme en atteste la figure 4.17.

Les figures 4.18 et 4.19 donnent une comparaison des positions spatiales des électrons dans l'impulsion laser ainsi que de leur espace des phases  $(x, p_x)$  à deux instants différents de la simulation. On observe, comme attendu, un éclatement du faisceau au cours du temps, dû à la force pondéromotrice du laser. L'éclatement n'est pas symétrique car le faisceau n'est

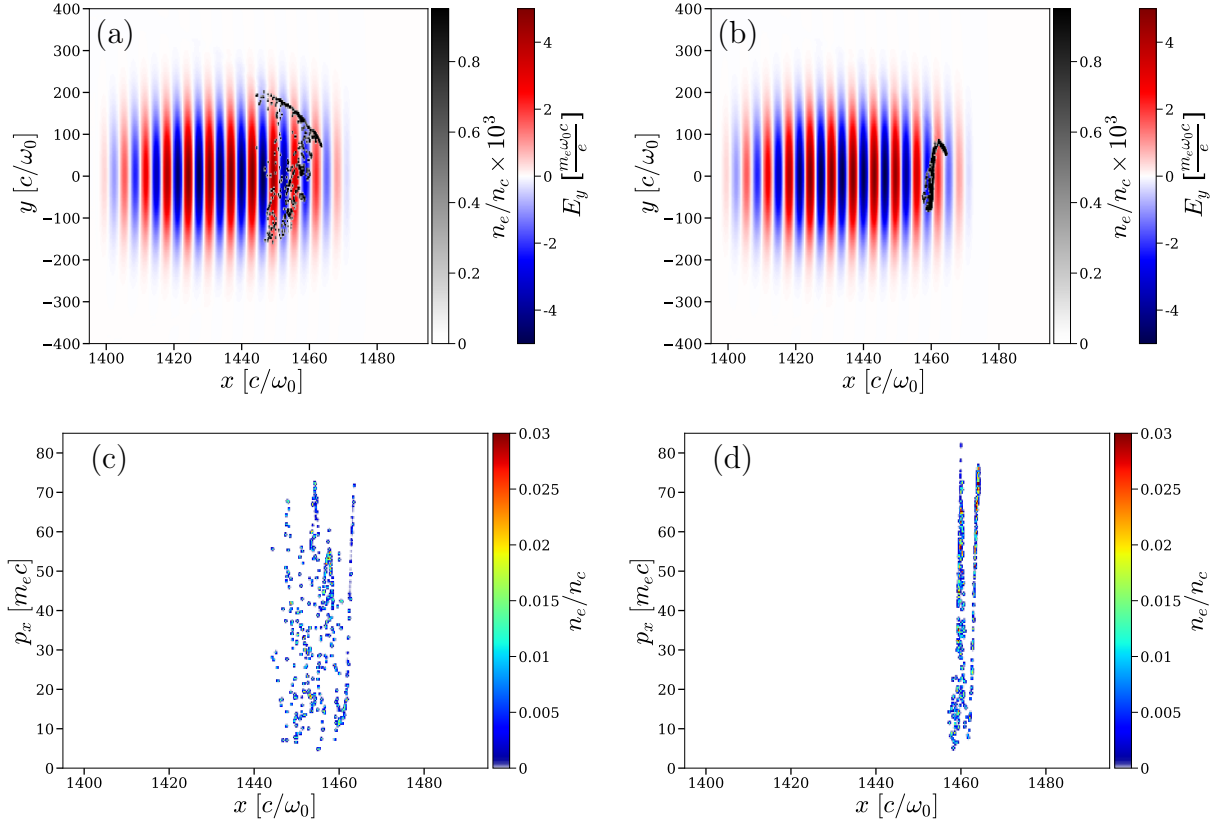


FIGURE 4.18 – Première ligne : carte de densité électronique (nuances de gris) superposée à la carte du champ électrique  $E_y$  (couleurs) après  $570\ \mu\text{m}$  de propagation pour (a) LTI et (b) B-TIS3. Deuxième ligne : espace des phases  $(x, p_x)$  après  $570\ \mu\text{m}$  de propagation pour (c) LTI et (d) B-TIS3.

pas initialement exactement sur l'axe de propagation du laser mais légèrement au-dessus, d'où la dérive majoritairement vers les  $y$  positifs. Le faisceau étant initialement d'une taille comparable à la longueur d'onde laser, l'arrière et l'avant ne sont pas en phase et perçoivent des champs initiaux, et donc des forces, différents, ce qui explique la séparation progressive de l'avant et de l'arrière du faisceau.

La dispersion du faisceau est nettement plus rapide avec LTI que B-TIS3, comme on peut l'observer sur les figures 4.18.a et 4.18.b. Cet effet est encore plus apparent sur la figure 4.19.a où il ne reste presque aucun électron dans l'impulsion laser alors que le faisceau est encore nettement visible sur la figure 4.19.b pour B-TIS3. On peut observer sur la carte de l'espace des phases  $(x, p_x)$ , l'évolution périodique du  $p_x$  que l'on a mis en évidence dans les parties précédentes, notamment sur les figures 4.18.b et 4.19.b. Cette structure est rapidement masquée dans le cas LTI mais on peut cependant encore la deviner sur la figure 4.18.a.

La figure 4.20 compare les spectres en énergie des électrons accélérés après deux distances de propagation différentes. La charge restante dans la boîte de simulation est nettement plus importante et atteint des énergies plus élevées pour B-TIS3 ce qui est cohérent avec les précédentes observations.

Il semble donc que B-TIS3 produise des résultats significativement différents de LTI. Le bon accord obtenu précédemment entre B-TIS3 et les estimations théoriques indique que le



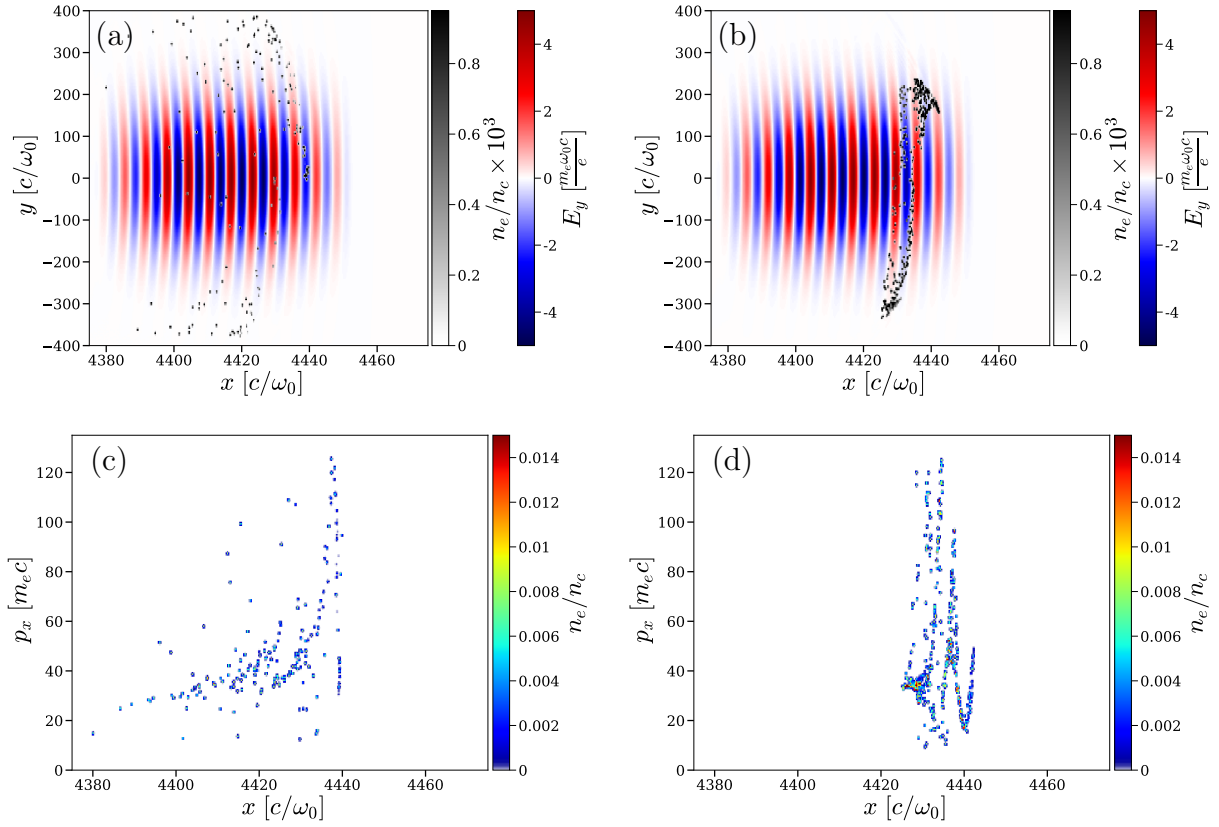


FIGURE 4.19 – Première ligne : carte de densité électronique (nuances de gris) superposée à la carte du champ électrique  $E_y$  (couleurs) après 950  $\mu\text{m}$  de propagation pour (a) LTI et (b) B-TIS3. Deuxième ligne : espace des phases  $(x, p_x)$  après 950  $\mu\text{m}$  de propagation pour (c) LTI et (d) B-TIS3.

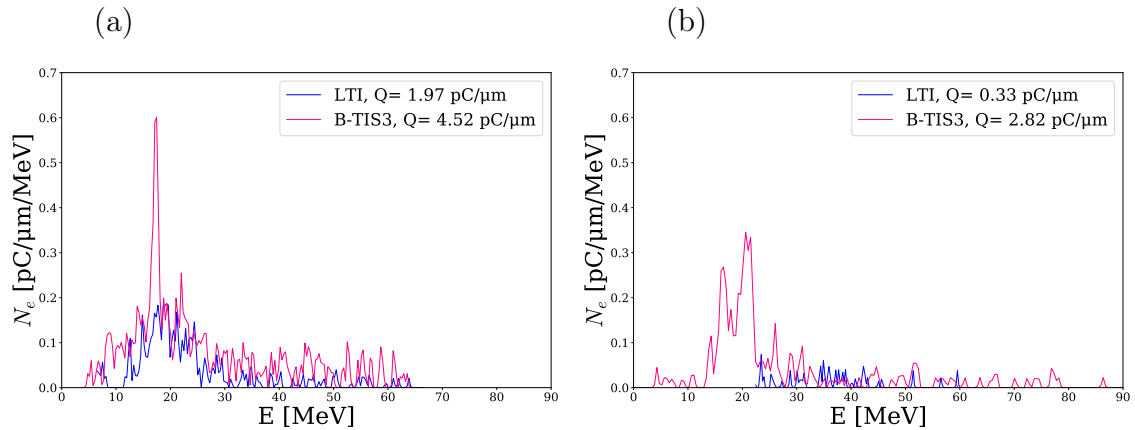


FIGURE 4.20 – Spectre en énergie des électrons accélérés après (a) 570  $\mu\text{m}$  de propagation, (b) 950  $\mu\text{m}$  de propagation.

schéma LTI n'est pas adapté pour l'étude du VLA, sauf à raffiner fortement la résolution, et que B-TIS peut être une méthode facile à implémenter et utiliser pour palier à ce problème. LTI peut, en effet, conduire à une mauvaise estimation de la charge accélérée et de l'énergie atteinte par le faisceau, deux caractéristiques clés lors de l'accélération d'électrons.

## 4.4 Simulation d'accélération directe par laser

L'étude de l'utilisation de B-TIS pour des simulations de VLA nous a permis de mettre en lumière son utilité par rapport à LTI. Cependant, l'accélération par laser dans le vide a de fortes limitations qui rendent peu optimale son utilisation pratique comme source d'électrons accélérés.

L'intérêt de notre nouvelle technique d'interpolation B-TIS3 n'est pas limité au VLA. Nous avons, en effet, déjà démontré son utilité pour réduire l'impact d'artefacts numériques tels que le rayonnement Cherenkov numérique dans le chapitre 3. Une autre situation où son usage semble tout indiqué est la simulation de cas d'accélération directe par laser (DLA pour *Direct Laser Acceleration*).

Dans le cadre de l'accélération par sillage laser, on parle d'accélération directe par laser lorsque les champs laser provoquent directement un gain d'énergie des électrons accélérés et que ce gain n'est plus uniquement induit par les champs plasma (onde de sillage, etc.). Le cas se présente notamment lorsque le laser est suffisamment long pour s'étendre jusqu'à l'arrière de la bulle où sont accélérés les électrons, ce qui favorise un couplage entre le champ laser et les électrons accélérés. Ces électrons subissent alors l'influence à la fois des champs dus à la bulle et de l'impulsion laser. La figure 4.21 illustre ce cas de figure. On observe très

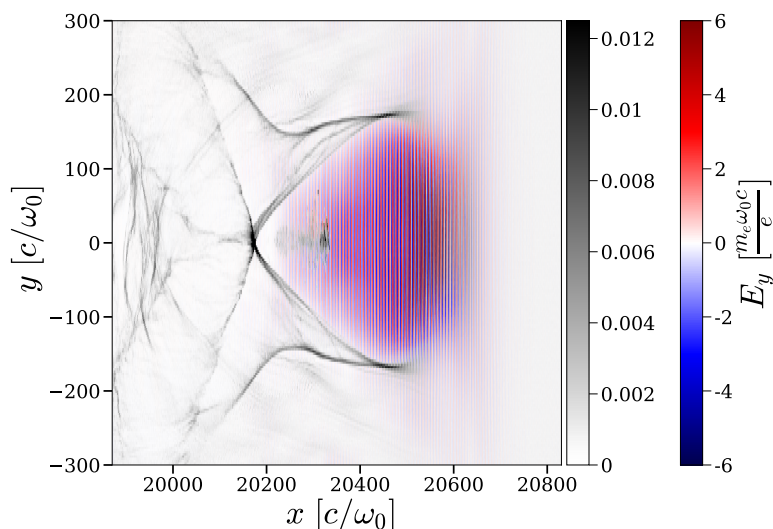


FIGURE 4.21 – Carte de densité électronique normalisée à la densité critique  $n_c$  (nuances de gris) superposée à la carte du champ électrique  $E_y$ .

nettement la présence des oscillations lasers jusqu'à l'arrière la bulle et les électrons injectés sont directement influencés par le champ laser.

Pour étudier cette situation, nous avons réalisée deux simulations 2D (une utilisant LTI, l'autre B-TIS3) avec des paramètres permettant la création d'une onde de sillage propice à l'accélération par sillage mais avec un laser au profil temporel volontairement étendu pour faciliter l'apparition du DLA. Contrairement au chapitre 3, B-TIS3 est ici appliqué à l'ensemble des électrons, et pas uniquement aux électrons accélérés. La figure 4.22 montre le profil temporel utilisé pour le laser, qui est constitué de l'addition de deux profils gaussiens d'amplitudes et de durées différentes ( $a_0 = 6$ ,  $\tau = 42$  fs pour l'un et  $a_0 = 4$ ,  $\tau = 85$  fs pour

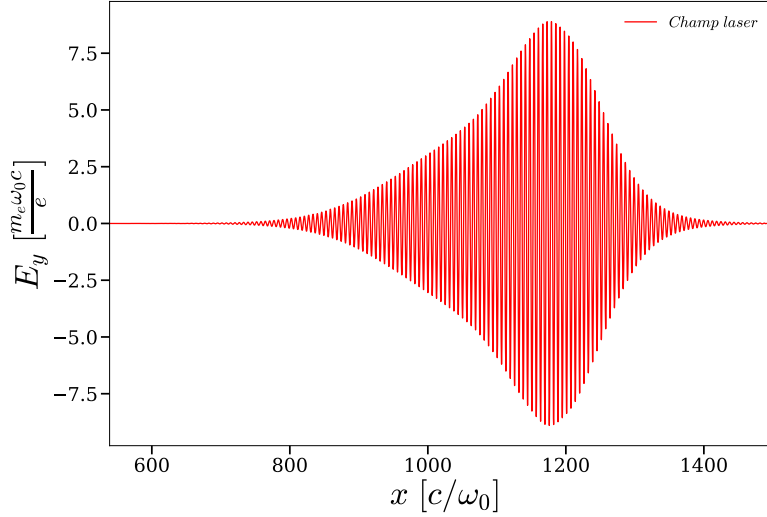


FIGURE 4.22 – Profil temporel du champ électrique  $E_y$ .

l'autre), ce qui résulte en un profil asymétrique d'une durée de l'ordre de la centaine de femtosecondes. Ce laser se propage dans un plasma de 6 mm de long, entièrement ionisé et de densité électronique  $n_e = 0.0025n_c$ . On utilise la technique d'injection par gradient de densité, décrite en 1.2.3, pour faciliter l'injection d'électrons dans la bulle. La simulation est réalisée dans une fenêtre glissante de  $6400 \times 400$  mailles avec  $c\Delta t = 0.149c/\omega_0$ ,  $\Delta x = 0.15c/\omega_0$  et  $\Delta y = 3c/\omega_0$ .

Les deux simulations donnent dans l'ensemble des résultats relativement similaires, toutes les deux prédisant la formation d'une bulle dans le sillage du laser, puis l'injection et l'accélération d'une charge équivalente dans les deux cas.

On peut néanmoins observer des différences significatives entre les deux simulations. Le faisceau d'électrons accélérés apparaît, par exemple, plus focalisé dans le cas utilisant B-TIS3. Cela s'observe aussi bien sur sa taille transverse, comme on peut le voir à la figure 4.23, que

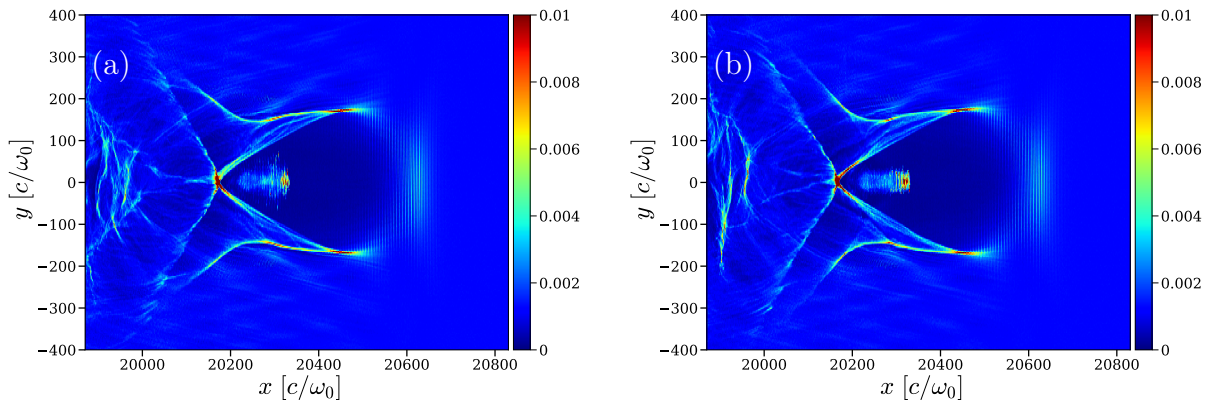


FIGURE 4.23 – Carte densité électronique après 2.65 mm de propagation du laser dans le plasma, pour la simulation utilisant (a) LTI, (b) B-TIS3

sur l'impulsion transverse des électrons, comme on le voit à la figure 4.24. On note ici que le

rayonnement Cherenkov numérique est faible dans cette simulation 2D, et ce n'est donc pas cet artefact numérique qui est responsable de la variation de la taille transverse du faisceau, comme nous avons pu l'observer dans le chapitre 3. Dans le cas présent, c'est bien, dans le cas de B-TIS3, la meilleure modélisation de l'interaction des électrons avec le laser qui induit ces différences avec LTI sur la taille transverse et la divergence du faisceau.

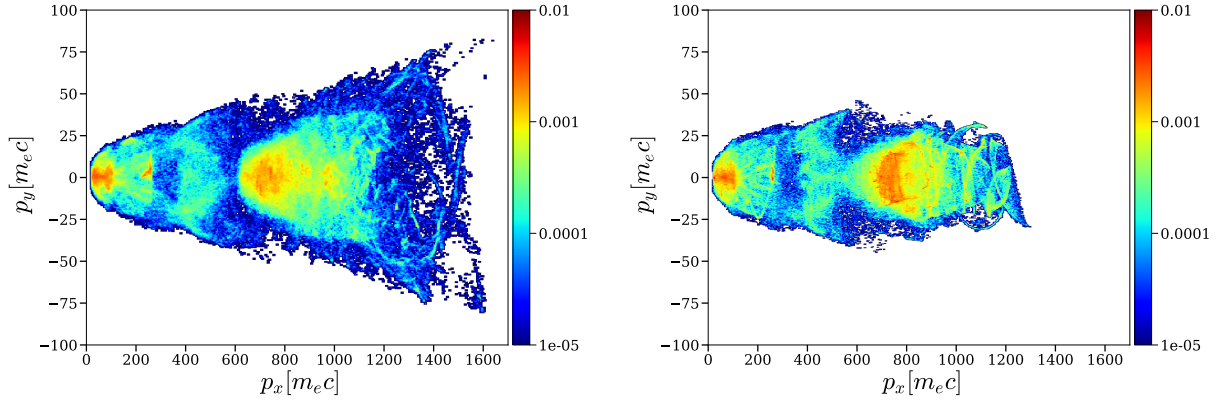


FIGURE 4.24 – Carte de l'espace des phases  $(p_x, p_y)$  après 2.65 mm de propagation du laser dans le plasma, pour la simulation utilisant (a) LTI, (b) B-TIS3

En comparant les deux espaces des phases  $(p_x, p_y)$ , on s'aperçoit que la structure du faisceau est similaire dans les deux cas, mais que la dispersion est bien plus grande avec LTI, notamment pour l'impulsion transverse des électrons les plus énergétiques. Cela peut se comprendre, au vu de la tendance à la sur-évaluation du  $p_y$  que nous avons mis en évidence pour LTI précédemment. On remarque cependant que, contrairement à ce qu'on aurait pu attendre, LTI prédit aussi des impulsions longitudinales plus élevées que B-TIS3, alors qu'on a montré que LTI tend à sous-estimer le  $p_x$  alors que B-TIS3 le surestime légèrement. Cette différence est due à la présence des champs de la bulle qui vont jouer un rôle prépondérant dans l'accélération des électrons. En effet, le DLA est favorisé par un couplage subtil entre les champs laser et plasma. Une mauvaise prise en compte des champs laser dans le cas de LTI induit une perturbation de ce couplage, et donc l'augmentation significative (et artificielle) du  $p_y$  et plus modeste  $p_x$  dans ce cas.

Si on compare les spectres en énergies des deux faisceaux, figure 4.25, on retrouve bien les similitudes évoquées dans la forme des deux spectres, LTI se différenciant par une distribution plus étendue dont la queue atteint de plus hautes énergie tandis que B-TIS3 donne un large pic bien plus marqué. La similarité des résultats de ces deux simulations semble indiquer que notre nouvelle méthode B-TIS3 n'introduit pas d'erreur nuisant à la reproduction des phénomènes physiques. Au contraire, au vu des résultats présentés dans ce chapitre, B-TIS3 semble plus à même de mieux restituer l'interaction des électrons avec l'impulsion laser et de reproduire correctement leur comportement dans des cas de VLA et de DLA.

On note que des test de DLA ont été réalisés à plus haute densité. Dans ces cas, on observe toujours les mêmes résultats qualitatifs et caractéristiques du régime de DLA : le couplage entre les champs laser et plasma induit une augmentation physique de la taille transverse du faisceau et de sa divergence, ainsi qu'un modulation à la longueur d'onde laser

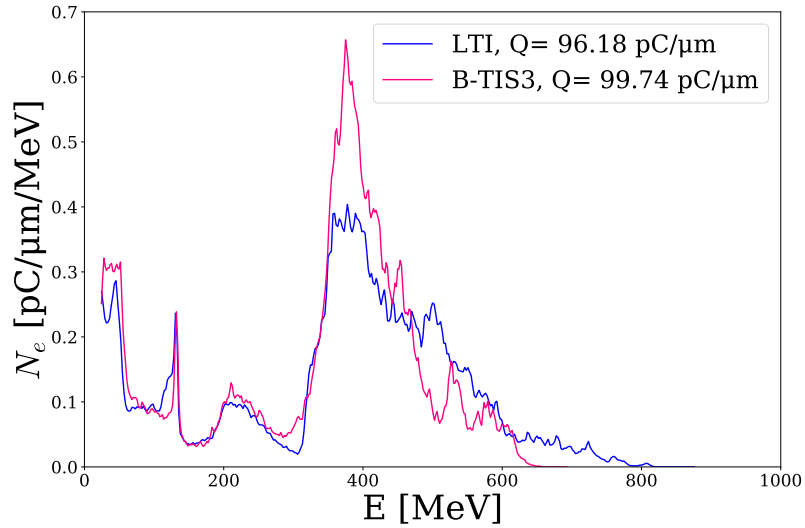


FIGURE 4.25 – Spectre en énergie des électrons accélérés après 2.65 mm de propagation du laser dans le plasma.

de la densité du faisceau.

À plus haute densité ( $n_e \approx 0.01n_c$  ou supérieure), cependant, les différences induites par l'utilisation de LTI ou de B-TIS3 tendent à se réduire, voire à devenir négligeable. Nous supposons que dans ces régimes, l'influence du plasma sur la propagation du laser devient suffisamment forte pour conduire à des différences physiques entre amplitude des champs électriques et magnétiques de l'impulsion laser, et que l'erreur introduite par le schéma LTI sur l'amplitude du champ  $B$  devient alors négligeable.

# Conclusions et perspectives

*“Wisdom comes from experience. Experience is often a result of lack of wisdom”*

– Terry Pratchett

## Travail réalisé

Les travaux menés dans le cadre de ce doctorat se sont concentrés sur les aspects numériques de la modélisation des sources de rayonnement bêta-tron dans les accélérateurs laser-plasma et notamment sur l’impact du rayonnement Cherenkov numérique sur ces dernières. Ils ont conduit à l’implémentation d’une nouvelle méthode d’interpolation des champs électromagnétiques dans le code CALDER visant à une meilleure modélisation du mouvement transverse des électrons. Cette méthode a été validée pour l’accélération par sillage laser et son extension à l’accélération directe par laser a ensuite été étudiée.

Pour pouvoir comprendre les différents résultats de cette thèse, nous avons tout d’abord introduit les connaissances nécessaires à leur compréhension. Nous avons donc commencé par rappeler les bases de l’accélération par sillage laser dans les plasmas sous-dense, présenté les modèles utilisés tout au long de ce manuscrit et détaillé la génération de rayonnement bêta-tron. Nous avons aussi présenté sommairement les outils de simulation utilisés que sont les codes PIC ainsi que le principal artefact numérique auquel nous nous sommes intéressés, le rayonnement Cherenkov numérique.

Nous nous sommes ensuite penchés sur l’analyse de différentes sources de bruit numérique dans les simulations d’accélération par sillage laser, en nous concentrant notamment sur le rayonnement Cherenkov numérique et son impact sur le mouvement transverse des électrons accélérés. La bonne modélisation de ce mouvement est en effet primordiale pour calculer de manière juste et précise le rayonnement bêta-tron généré. Nous avons d’abord vérifié et montré que du rayonnement Cherenkov numérique apparaît dans les simulations d’accélération par sillage laser et que la présence de cet artefact induit une surévaluation de la divergence, de l’émittance et de la taille transverse du faisceau, ainsi que du rayonnement bêta-tron produit.

Nous avons alors proposé une nouvelle approche pour limiter cet impact sur le mouvement transverse des électrons accélérés par sillage laser, sans modification lourde du schéma numérique ou surcoût calculatoire. En effet, nous avons montré que la force transverse non physique ressentie par les particules pouvait être, sous certaines conditions, réduite drastiquement grâce à une simple modification de la méthode d’interpolation des champs électromagnétiques sur les particules.

Cette nouvelle méthode, baptisée B-TIS pour *B-Translated Interpolation Scheme*, permet d'éliminer le comportement anormal des électrons dû au Cherenkov numérique et mène à des trajectoires très proches de celles prédites par les modèles théoriques. L'élimination de cette erreur numérique permet aussi de mettre en lumière des divergences plus subtiles avec la théorie et ainsi d'étudier des phénomènes physiques dont les effets étaient jusqu'à présent masqués par ce bruit numérique.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'accélération directe par laser et à ce que notre nouvelle méthode d'interpolation pouvait apporter aux simulations de ce phénomène.

Le cas d'un simple électron dans le vide mis en mouvement par une onde plane propagative a tout d'abord été étudié : Un modèle théorique décrivant ce mouvement a été développé, et les prédictions de ce modèle ont ensuite été comparées aux résultats de différentes simulations. Cela nous a permis de tester la reproduction des résultats physiques selon les méthodes utilisées (la méthode standard ou B-TIS) mais aussi de pointer les limites de chacune, mettant notamment en lumière l'apparition d'une erreur cumulative sur le moment longitudinal  $p_x$  de l'électron dans le cas de B-TIS. Cette erreur a été éliminée en modifiant légèrement la méthode d'interpolation sans perdre de son efficacité.

Des simulations plus complexes ont ensuite été réalisées pour pouvoir étudier l'intérêt de B-TIS pour simuler l'accélération par laser dans le vide ainsi que l'accélération directe par laser.

De plus, certains travaux entrepris pendant le déroulement de ce doctorat n'ont pas été rapportés dans ce manuscrit faute de temps pour les finaliser. Ces travaux méritent tout de même une mention dans cette conclusion. J'ai notamment participé à l'étude d'une source bêtatron, en collaboration avec Jean-Claude Kieffer et Sylvain Fourmaux de l'Institut National de la Recherche Scientifique, Énergie, Matériaux et Télécommunications (INRS-EMT) de l'Université du Québec. Le but de mon travail était de reproduire leurs résultats expérimentaux à l'aide de la simulation, puis d'optimiser les paramètres modifiables expérimentalement pour améliorer ces résultats.

Les expériences visaient à démontrer la faisabilité d'utiliser des rayons X, produits par une source bêtatron, pour radiographier des plantes. Les résultats expérimentaux [42] ont montré la possibilité de produire un rayonnement bêtatron avec une énergie critique de 15 keV, un nombre de photons important, une divergence permettant d'imager des échantillons de taille respectable et une stabilité tir à tir suffisante pour permettre la réalisation d'imagerie 3D par tomographie avec une très bonne résolution spatiale ( $\approx 10 \mu\text{m}$ ). Le but de notre étude était de mieux comprendre l'émission bêtatron afin de proposer des solutions pour augmenter l'énergie critique de la source. Le but est, à terme, de pouvoir scanner les racines de plantes directement à travers la terre.

Les simulations pour cette étude ont été effectuées en utilisant CALDER-CIRC [52]. Ce code, comme son nom le suggère, est dérivé de CALDER mais utilise des coordonnées cylindriques et décompose les champs électromagnétiques en différents modes dans l'espace de Fourier (transformée de Fourier selon la direction de l'angle polaire). Il tire partie de la symétrie cylindrique de nos situations pour permettre une réduction drastique du temps de calcul sans pour autant perdre le caractère tridimensionnel des simulations.

Deux types de simulations ont été réalisées pour reproduire les expériences menées. Les premières avec un plasma d'électrons, simulant un jet d'hélium totalement ionisé lors de l'interaction avec le laser. Les secondes avec un plasma d'ions  $N^{5+}$  et d'électrons représentant le jet de diazote partiellement ionisé. L'utilisation du plasma d'azote permet d'injecter des électrons via le mécanisme d'injection par ionisation [78, 79] comme nous l'avons décrit à la section 1.2.3. Dans l'expérience, cette injection mène à l'accélération d'une charge plus importante et à une émission plus brillante. Utiliser de l'azote améliore ainsi fortement les résultats [42].

Les résultats préliminaires obtenus par simulations ont été encourageants dans le cas de l'hélium, avec des grandeurs (charge, énergie du faisceau, *etc.*) similaires à celles observées expérimentalement. Cependant le comportement observé dans l'expérience avec l'azote n'a pas été retrouvé dans nos simulations. On obtient en effet des résultats relativement similaires à ceux obtenus avec le plasma d'hélium et on ne retrouve pas le gain observé expérimentalement. Nos simulations ont cependant mis en avant la forte dépendance des résultats à la focalisation du laser qui semble jouer ici un rôle très important. L'incertitude expérimentale sur la position du plan de focalisation couplé à des effets d'optique non linéaire menant à des effets de filamentation du laser semblent créer un régime d'interaction complexe que nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'étudier suffisamment en détail pour expliquer ces différences.

## Perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit ouvrent de nombreuses possibilités d'approfondissement.

En premier lieu, il serait évidemment bienvenu de reprendre l'étude en collaboration avec l'INRS-EMT pour finaliser les travaux entrepris et éclaircir le régime d'interaction mis en jeu lors des expériences pour pouvoir finalement optimiser la génération de rayonnement bêtatron.

Ensuite, bien qu'initialement développé pour limiter l'influence du rayonnement Cherenkov numérique dans les simulations d'accélération par sillage, B-TIS n'y est pas limité et a de nombreuses autres applications potentielles. Celles-ci ont commencé à être explorées dans le chapitre 4, où on a démontré son intérêt pour étudier des cas assez simplistes d'accélération par laser dans le vide. Cependant ces travaux pourraient être poussés plus loin. Il serait notamment intéressant de réaliser des simulations de cas plus réalistes de VLA pour comparer les résultats de B-TIS à ceux des schémas plus traditionnels.

L'accélération par laser dans le vide a été étudié récemment avec des impulsions laser de polarisation radiale [118], de manière expérimentale et numérique [119]. Cette polarisation a l'avantage de créer un champ électrique longitudinal dans lequel les électrons sont directement accélérés avec peu d'influence des champs radiaux. Les électrons sont injectés dans l'impulsion par une réflexion sur un miroir plasma. Bien que l'action des champs trans-



verses est théoriquement négligeable, en pratique, du fait des angles d'incidence obliques et de l'interaction laser-plasma, elle semble jouer un rôle prépondérant sur le comportement des électrons et il pourrait donc être très intéressant d'étudier le potentiel apport de B-TIS à ce type de simulations.

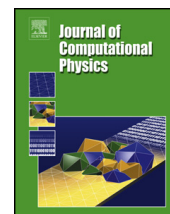
Pour revenir à la génération de rayonnement bêtatron, on observe des mécanismes similaires au VLA dans les accélérateurs par sillage laser lorsque la durée de l'impulsion est relativement importante par rapport à la longueur d'onde plasma. Les champs de l'impulsion laser ont alors une forte influence sur les électrons injectés dans la bulle, on parle alors d'accélération directe par laser (DLA). Au vu des bons résultats obtenus avec B-TIS dans les cas d'accélération par sillage laser et de VLA, les cas de DLA devraient donc bénéficier de son utilisation.

Enfin, une autre application, plus technique, serait d'implémenter B-TIS dans le code CALDER-CIRC, ce qui serait relativement simple avec peu d'adaptations nécessaires. Pour chaque mode  $m$  considéré, il faudrait simplement appliquer B-TIS aux champs  $B_r^m$  et  $B_\theta^m$  en lieu et place de  $B_y$  et  $B_z$ . De par sa conception, CALDER-CIRC est voué (sans y être cependant limité) à la simulation d'accélération par sillage, un domaine où nous avons montré que B-TIS apportait une amélioration significative des résultats. L'utilisation de B-TIS dans CALDER-CIRC apparaît donc tout à fait appropriée.

# Troisième partie

## Annexes





# New mitigation approach to numerical Cherenkov radiation in PIC simulations of wakefield accelerators



Pierre-Louis Bourgeois\*, Xavier Davoine

CEA, DAM, DIF, 91297 Arpajon, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 7 August 2019

Received in revised form 3 February 2020

Accepted 24 March 2020

Available online 27 March 2020

### Keywords:

Plasma

Particle-in-cell (PIC)

Numerical Cherenkov radiation

Laser wakefield acceleration (LWFA)

## ABSTRACT

Numerical Cherenkov radiation is a well-known problem of FDTD PIC codes caused by numerical dispersion errors creating spurious radiation around accelerated particles. It is usually dealt with by complex numerical schemes and low-pass filters. In this study we look at a simple way to circumvent this problem for wakefield accelerators simulations by only modifying the field interpolation algorithm. Taking advantage of the highly directional nature of the numerical Cherenkov radiation, we make sure that the resultant force created by the spurious radiation is as close to zero as possible for the accelerated electrons, negating its effects on the accelerated bunch without actually suppressing the numerical radiation. Applying the above to laser wakefield acceleration simulations, we observe both a reduction and a stabilization of the beam normalized emittance during the acceleration process as well as an improved regularity of the oscillating electrons trajectories which might help to further understand radiation processes such as betatron.

© 2020 Published by Elsevier Inc.

## 1. Introduction

Particle-in-cell (PIC) codes are known for their versatility and relative speed, they are used to simulate a wide range of phenomena in plasma physics. To solve Maxwell equations, many of them use the finite-difference time-domain (FDTD) method first proposed by K. Yee [1], a simple second-order method easily parallelizable but suffering from some numerical dispersion error which gives rise to what is known as numerical Cherenkov radiation (NCR). This spurious radiation can couple with the plasma response and lead to the Numerical Cherenkov Instability (NCI). These effects have been studied since the 1970s [2] and many ways to mitigate them have been proposed since [3–11]. Those methods usually rely on complex modification of the computational stencil and/or heavy filtering which can themselves lead to new numerical limitations or reduce the code performance.

The effects of NCR are especially important in simulations of wakefield acceleration, one of the most prominent applications of PIC simulations. The wakefield can be created by a beam of charged particles propagating in a plasma, which has given promising results recently [12,13], or by the propagation of a laser beam. Laser wakefield acceleration (LWFA) in plasmas is not a novel idea as it dates back to the 1970s [14] but it has seen renewed interest for the last fifteen years thanks to advancements in experimentations and simulations [15–19], and energy up to a few GeV [20] have been obtained experimentally.

\* Corresponding author.

E-mail address: [pierre-louis.bourgeois@cea.fr](mailto:pierre-louis.bourgeois@cea.fr) (P.-L. Bourgeois).

In this paper we present a new and simple way to circumvent the effects of NCR in simulations of wakefield acceleration. In section 2 we describe in more detail the NCR phenomenon and its characteristics in laser-wakefield simulations. Section 3 presents briefly existing methods to deal with NCR as well as their limitations and then describes our new method to limit its effects. We finally discuss in section 4 the results obtained with LWFA simulations using this new scheme and show it suppresses the spurious growth of the accelerated beam emittance as well as limiting the impact on the calculated electron motion.

## 2. Numerical Cherenkov radiation

### 2.1. Numerical Cherenkov in PIC simulations

Cherenkov radiation is the result of a charged particle moving faster than the phase velocity  $v_\varphi(\omega)$  of an electromagnetic mode characterised by its angular frequency  $\omega$ . It may physically occur with relativistic particles when the dispersion relation allows for a phase velocity lower than the speed of light ( $v_\varphi < c$ ) in a medium where the index of refraction is  $n > 1$ . The charged particle with a velocity  $v_p$  will then generate radiation at all frequencies satisfying  $v_\varphi(\omega) < v_p$ .

For electromagnetic waves propagating in vacuum, the angular frequency  $\omega$  and the wave number  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  are proportional:  $\omega^2 = c^2 k^2$ , where  $k_x, k_y, k_z$  are the wavevector components along the  $x, y, z$  directions. It ensues that no Cherenkov radiation should be possible as particles cannot be faster than  $v_\varphi = c$ . However, in a PIC code using the Yee scheme [1], the spatial and temporal discretization leads to the following numerical dispersion relation in vacuum:

$$\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) + \frac{1}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \quad (1)$$

where  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  refers to the time step and the cell size in each direction. This allows for some high frequency modes discretized on the grid to have  $v_\varphi < c$  and thus for the creation of numerical Cherenkov radiation by fast-moving particles ( $\beta = v_p/c \approx 1$ ) in the simulation when none should physically occur. In the remainder of this paper,  $x$  represents the longitudinal direction along which the propagation occurs and  $y$  and  $z$  are the two transverse directions. The excited modes satisfy the relation  $\beta_x c = v_{\varphi,x} = \omega/k_x$  with  $\beta_x$  the particle normalized velocity along  $x$  and  $v_{\varphi,x}$  the wave phase velocity along  $x$ . Thus with Eq. (1) we can characterise those modes by:

$$\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2\left(\frac{k_x \beta_x c \Delta t}{2}\right) = \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) + \frac{1}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \quad (2)$$

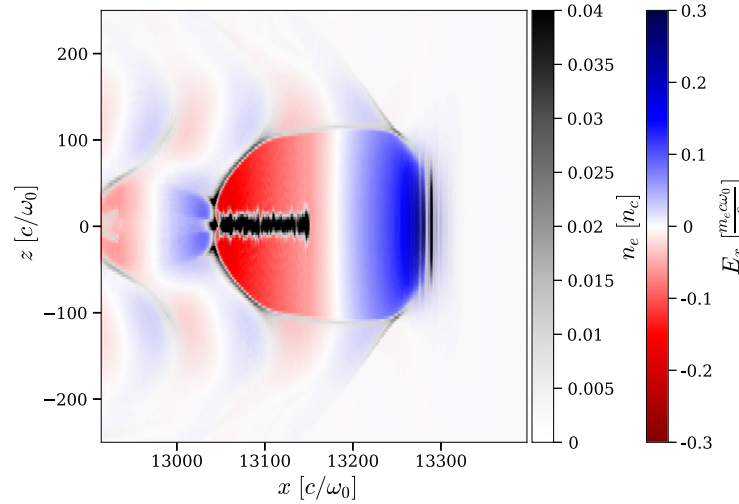
Wakefield acceleration is a typical case where numerical Cherenkov radiation can be observed and represents a substantial source of error. Reducing its impact in those simulations is thus especially important to obtain realistic results. In wakefield acceleration simulations, electromagnetic waves - whether physical (laser, beam self-field, wakefield) or numerical in origin (NCR) - propagate along the same direction as the accelerated electron beam. We focus in this paper on finding a solution to mitigate the effects of numerical Cherenkov radiation in the context of laser-wakefield simulations. However, the results could be applicable to other wakefield acceleration methods or even to any scenario where physical and numerical electromagnetic waves propagate at a velocity close to  $c$  mainly along the same direction as the particles generating NCR.

### 2.2. Laser wakefield acceleration simulations

Laser-wakefield accelerators are created by focusing an ultra-intense laser beam on a gas jet. The laser beam ionizes the gas, propagates inside the created low density plasma and excites a plasma wave in its wake. If the intensity is high enough, the plasma wave takes the form of an ionic cavity devoid of electron. Electrons injected in this cavity - or bubble - can be accelerated to high energies in a short distance thanks to the high amplitude fields created inside the bubble by the charge separation.

Fig. 1 shows a snapshot of a numerical simulation with an electron bunch accelerated in the wake of a laser pulse. The longitudinal field  $E_x$  presents two distinct regions inside the cavity: the rear of the bubble has an accelerating effect on electrons (red zone where  $E_x < 0$ ) while the front is decelerating (blue zone where  $E_x > 0$ ). Electrons injected at the rear of the bubble thus gain energy while travelling within the bubble until they dephase and reach the decelerating zone. This energy gain can be as high as a few GeV [20] with current laser technology. While the longitudinal fields are accelerating, the transverse ones are focusing and will thus tend to keep the electron beam on axis and create transverse oscillations of the accelerated electrons.

The numerical simulations presented in this paper have all been made in 3D using the PIC code CALDER [21] in a moving window with a  $3220 \times 200 \times 200$  grid and  $\Delta x = 0.019 \mu\text{m}$ ,  $\Delta y = \Delta z = 0.38 \mu\text{m}$  and  $c\Delta t = 0.993 \Delta x$ . We consider typical laser-wakefield acceleration parameters: a 4 J laser pulse ( $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$ ) with a FWHM duration  $\tau_0 = 25$  fs, a waist  $w_0 = 18 \mu\text{m}$  giving a normalised peak vector potential  $a_0 = 4.35$  with polarisation along the  $y$  direction.  $a_0$  is normalised to  $\frac{m_e c}{e}$  with  $m_e$  and  $e$  the mass and charge of an electron. The electronic density is  $n_e = 6.22 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3} = 3.57 \times 10^{-3} n_c$  where  $n_c = \frac{\omega_0^2 m_e \epsilon_0}{e^2}$  is the critical density at this wavelength with  $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$  and  $\epsilon_0$  the vacuum permittivity. Those parameters have



**Fig. 1.** Electron beam injected inside the laser-driven ionic cavity: Slice-cut in the  $(xz)$ -plane showing the electron density  $n_e$  (left colourbar) and the longitudinal electric field  $E_x$  (right colourbar). (For interpretation of the colours in the figure(s), the reader is referred to the web version of this article.)

been selected to allow for an important self-injected charge so as to make sure the effects of numerical Cherenkov are easily visible.

In LWFA simulations, numerical Cherenkov radiation can appear around the accelerated electron beam. It creates high frequency radiation inside the ionic cavity which leads to a non-physical growth of the transverse size, divergence and beam emittance [4]. Fig. 2 illustrates such occurrence of NCR by showing the transverse electric fields of the wakefield accelerator. The laser pulse is clearly visible on Fig. 2.a as well as (on both Fig. 2.a and 2.b) the low frequency field of the bubble and the beam self-field but also some higher frequency radiation surrounding the injected electron beam. This is even clearer looking in Fourier space (Fig. 2.c and 2.d). The physically relevant frequencies are confined on the left where  $k_x < 2 \omega_0/c$  with notably the laser field visible in Fig. 2.c around  $k_x = 1 \omega_0/c$ . Then there is some higher frequency radiation covering quite a large range ( $2.5 \omega_0/c < k_x < 15 \omega_0/c$ ) corresponding to the higher frequency fields surrounding the electron beam as can be seen in Fig. 2.e and 2.f where only fields with  $k_x > 2.5 \omega_0/c$  have been plotted.

To ensure these are indeed NCR, we can, using Eq. (2), characterize theoretical NCR in either plane in Fourier space by:

$$k_y = \frac{2}{\Delta y} \arcsin \left( \Delta y \sqrt{\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \beta_x c \Delta t}{2} \right) - \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right)} \right) \quad (3)$$

$$k_z = \frac{2}{\Delta z} \arcsin \left( \Delta z \sqrt{\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \beta_x c \Delta t}{2} \right) - \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right)} \right) \quad (4)$$

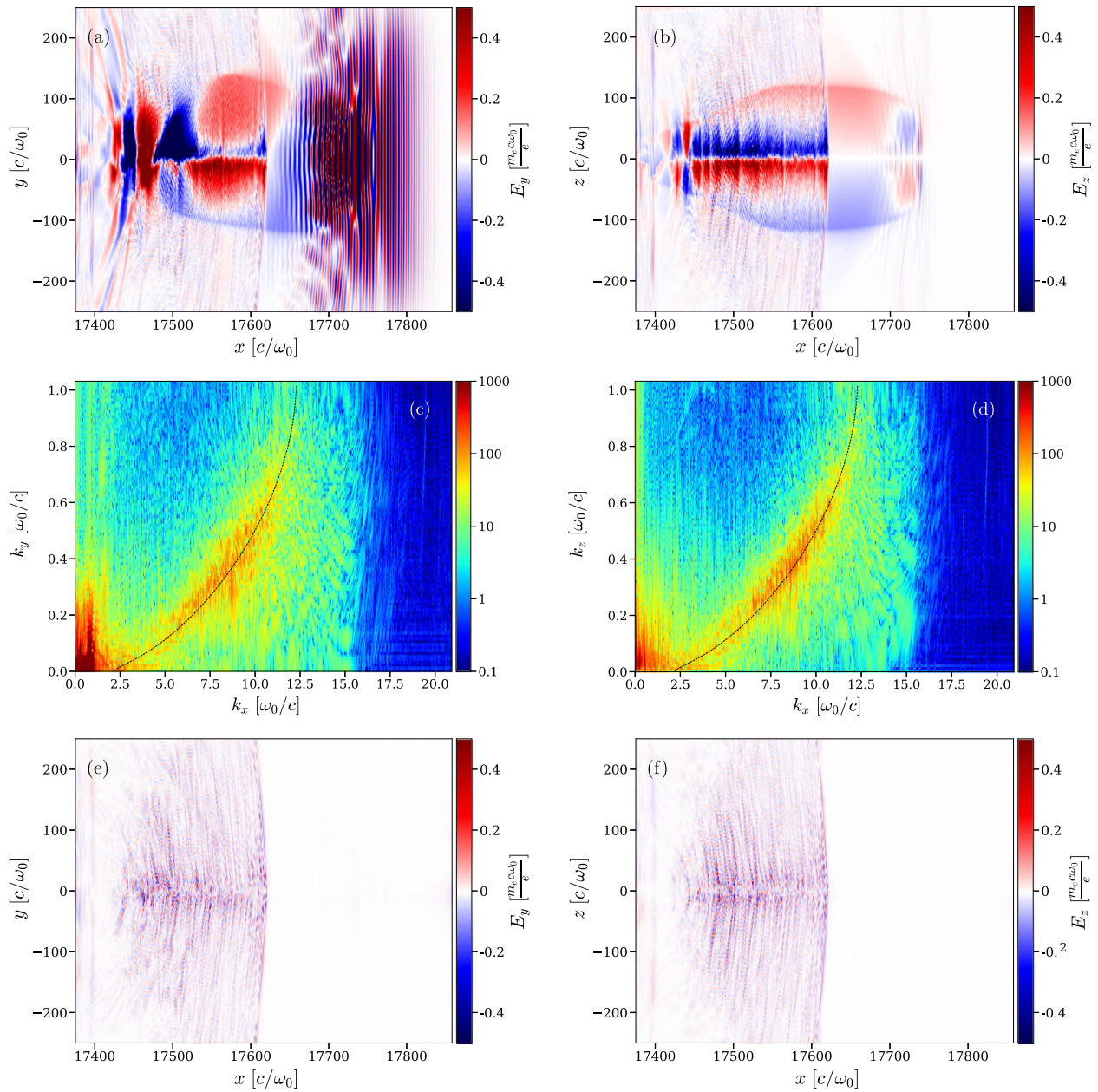
These equations are represented by the black dashed line in Fig. 2.c and 2.d where we have used  $\beta_x = 0.99995$ , corresponding to a 50 MeV beam ( $p_x \approx 100 m_e c$ ). This theoretical prediction corresponds pretty well to the observed radiation that is thus conclusively identified as NCR.

It is worth pointing out that the numerical Cherenkov observed here does not couple with the plasma or the beam itself to give rise to NCI so that this work deals only with the direct impact of the generated NCR.

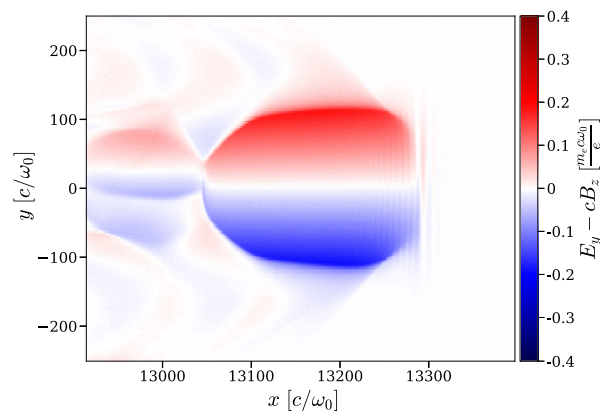
Note also that the numerical Cherenkov radiation does have a longitudinal component which we can observe on  $E_x$  in the simulations. However its amplitude is lower by more than an order of magnitude compared to the physical simulated fields making it far less impactful on the simulation. We focus therefore in this paper exclusively on the transverse components of NCR.

### 2.3. Electron motion in LWFA

The NCR around the electron beam modify the electromagnetic fields inside the ionic cavity and may hence influence the transverse motion of the electrons inside the bubble. For simplicity's sake, we will mainly consider in the rest of this paper the transverse motion of electrons in the  $(xy)$  plane. The effects and equations are quite similar in the  $(xz)$  plane. For a particle of charge  $e$  moving along the  $x$ -axis at  $v_x \approx c$ , as is the case of the electrons in the accelerated beam, the transverse force in the  $y$  direction is given by:  $F_y = e(E_y - v_x B_z) \sim e(E_y - c B_z)$ . In the following, for the sake of simplicity, the constant factor  $e$  is sometimes dropped from the equation of the force and  $F_y$  is approximated as  $F_y = (E_y - c B_z)$ . Fig. 3 shows a map of the difference  $E_y - c B_z$ . Note that, since the laser and the beam self-field both propagates at  $v_\varphi \approx c$  along the  $x$  direction, their contributions cancel out as  $E_y^{\text{laser}} \approx c B_z^{\text{laser}}$  and  $E_y^{\text{self-field}} \approx c B_z^{\text{self-field}}$ , leaving only the contribution from the cavity fields. In the bubble regime this transverse force is supposed to be linear with the transverse position as

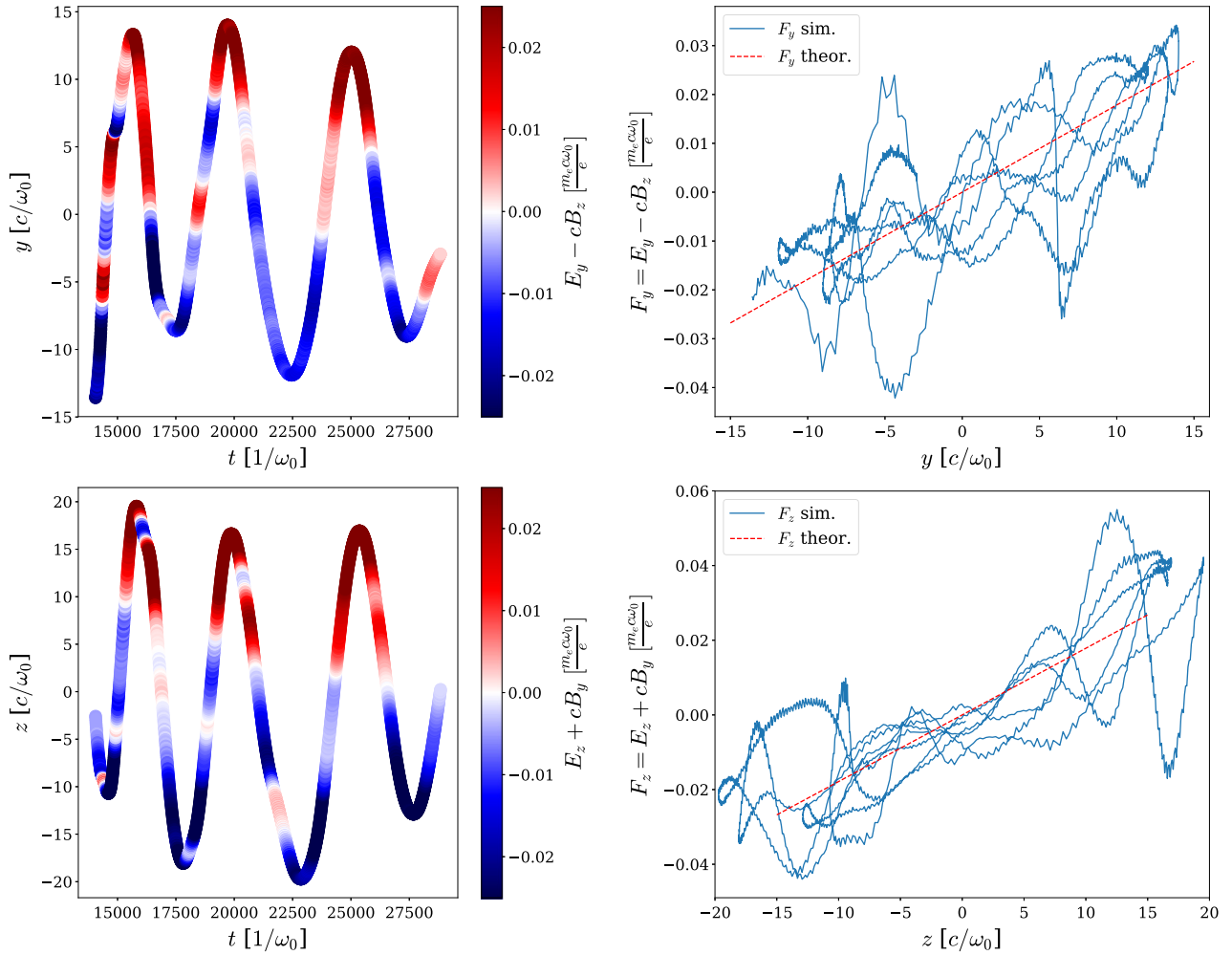


**Fig. 2.** Numerical Cherenkov radiation in a LWFA simulation: (a) shows a map of the transverse field  $E_y$  in the  $(xy)$  plane while (b) shows a map of  $E_z$  in the  $(xz)$  plane. (c) and (d) show their respective spatial Fourier transform with the black dashed lines corresponding to Eq. (3) and (4) respectively for a particle with  $p_x \approx 100 m_e c$ . (e) and (f) show maps of the electric transverse fields for  $k_x > 2.5 \omega_0/c$  only.



**Fig. 3.** Map of  $E_y - cB_z$ , slicecut in the  $(xy)$ -plane. Only the contribution from the bubble fields is still apparent.





**Fig. 4.** Examples of particle trajectories in presence of Numerical Cherenkov radiation. The top row is along the y-axis and the bottom one along the z-axis. On the left is the y (respectively z) position of the electron with time, the colour showing the transverse force  $F_y = E_y - v_x B_z$  (respectively  $F_z = E_z + v_x B_y$ ) recorded by the particle. On the right the transverse force has been plotted against the position (blue line), to be compared with the theoretical  $F_y = \frac{1}{2} m_e \omega_p^2 y$  (red dashed line) (respectively  $F_z = \frac{1}{2} m_e \omega_p^2 z$ ).

$F_y = \frac{1}{2} m_e \omega_p^2 y$  [18,19] where  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$  is the plasma frequency. The strong correlation between  $F_y$  and  $y$  can indeed be observed in Fig. 3 where  $E_y - cB_z$  is stronger off axis and decreasing linearly to become zero on the axis of the bubble.

This linear force is responsible for what are called betatron oscillations. In an ideal situation with a perfect theoretical bubble, this movement can be expressed as a harmonic oscillator leading to sinusoidal oscillations of the injected electrons with slowly varying frequency and amplitude. However, numerical Cherenkov radiation can locally modify the fields around the particles inside the cavity, disturbing those regular oscillations and creating much more random motions for the electrons. We present in Fig. 4 an example of such electron trajectories affected by numerical Cherenkov.

Regular oscillations along each direction are theoretically expected with a strong correlation between the transverse force and the position. That is clearly not what is observed here as the transverse force is seen departing quite noticeably from the theoretical  $F_y = \frac{1}{2} m_e \omega_p^2 y$  (red dashed line) thus resulting in an irregular motion.

### 3. Suppressing numerical Cherenkov

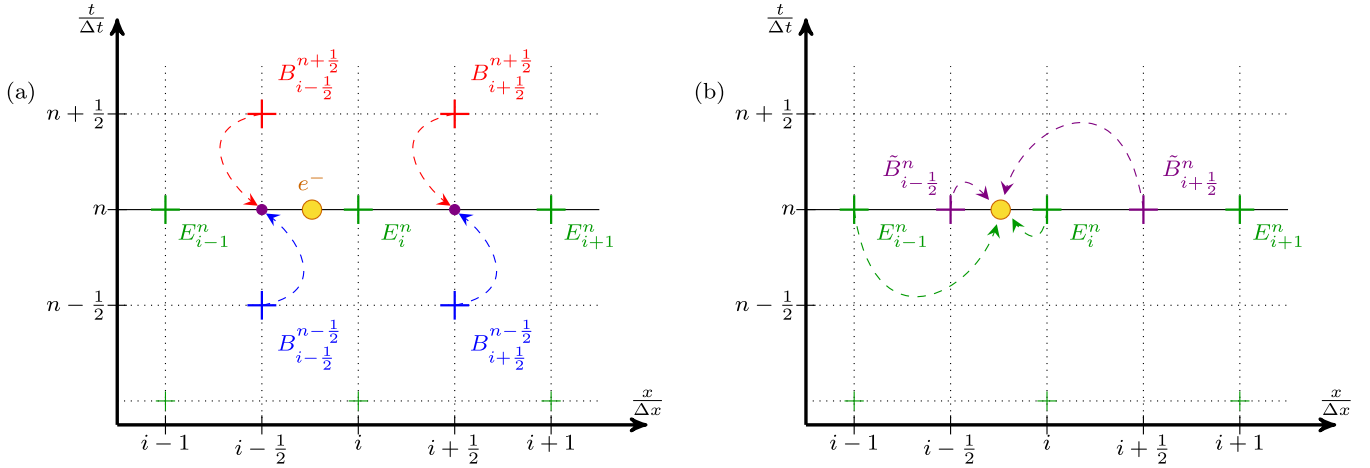
#### 3.1. Existing methods

The simplest method to eliminate the numerical Cherenkov radiation is to remove it through filtering. As the radiation is not confined to a small range of frequencies near the Nyquist frequency, simple binomial filters are not enough and more sophisticated low-pass filters are required [3,5,6,22].

Various modified numerical schemes have also been proposed so that the generation of numerical Cherenkov radiation cannot arise at all. The basic principle is to modify the dispersion relation so as to ensure that  $v_\phi > c$ . This can be achieved through modifying the computational stencil in the Maxwell-solver [3–5,7–9].

However, some of these methods are not straightforward to implement, while other may induce some unrealistic behaviour, such as light propagating faster than  $c$  in vacuum. Our proposed solution, besides being easy to implement, relies





**Fig. 5.** Usual interpolation process of EM fields on a 1D spatial grid at the  $n$ th time step in order to get the transverse force  $F_y^n$  applied on the particle represented by the yellow dot. (a) shows the initial configuration where the fields values are known at different times and spatial points. The temporal interpolation to get  $\tilde{B}^n$  is shown with dashed lined arrows. Then (b) shows the subsequent spatial interpolation of  $E^n$  and  $\tilde{B}^n$  on the particle (again with dashed lined arrows and first order).

on a different approach: only the field interpolation is modified, so the Maxwell-solver remains unchanged and no smoothing is used. Our method can thus be used in addition to some of the previously published methods, in order to reduce even further the NCR effects.

### 3.2. Standard field interpolation with the Yee scheme

In a PIC code with the Yee FDTD scheme [1], Electric and Magnetic fields are calculated using a leap-frog method. This implies they are defined on different grids which are offset spatially by half a cell but also temporally by  $\Delta t/2$ . As the fields are only known on specific grid points while the particles move freely in the whole simulated space, it is necessary to interpolate the EM fields at the charged particles positions in order to calculate their motion.

Fig. 5 shows a simple situation with the fields amplitude values known on the different points of the grid and an electron moving freely between those points. To simplify the notations we consider only the longitudinal spatial dimension  $x$ ,  $A_i^n$  then refers to the value of the field  $A$  at the  $n$ th time step and the  $i$ th point of the spatial grid or in other terms  $A_i^n = A(t = n\Delta t, x = i\Delta x)$ . Due to the leap-frog nature of the Yee scheme, values of the  $E_y$  and  $E_z$  fields are known at integer time-steps and grid points while values for  $B_y$  and  $B_z$  are known at half-integer time-steps and grid points. In the remainder of this section, we will only consider  $E_y$  and  $B_z$  and then omit the  $y$  and  $z$  indices when it is not absolutely necessary so as not to clutter the notation.

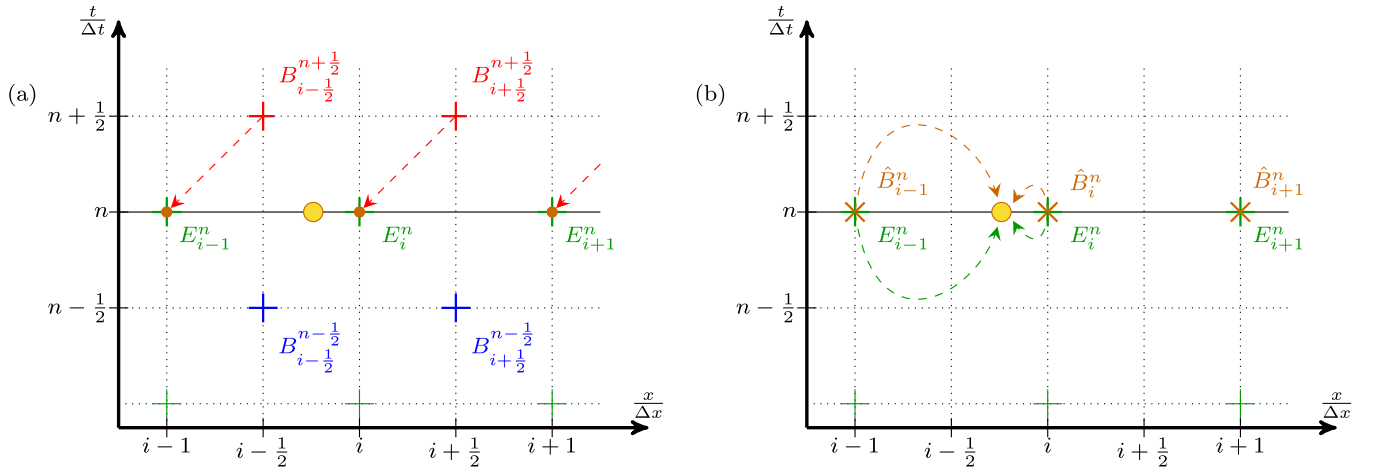
Before the spatial interpolation, a temporal one is necessary in order to get  $\tilde{B}^n$  and have the fields known at the same time step. The simplest and most common way being the linear time interpolation  $\tilde{B}^n = \frac{1}{2}(B^{n-1/2} + B^{n+1/2})$  as is shown in the Fig. 5.a but quadratic time interpolation - with  $\tilde{B}_{i+1/2}^n = \frac{3}{8}B_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{3}{4}B_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{1}{8}B_{i+1/2}^{n-3/2}$  - can sometimes be used as well to get higher accuracy. Once the  $E$  and  $B$  fields are known both at the same time step, they are interpolated spatially on the particles. This step is shown in Fig. 5.b. Once again different kinds of spatial interpolation can be used with varying orders of interpolation. The one depicted here is, for simplicity's sake, a 1st order method (linear interpolation).

### 3.3. Proposed B-Translated Interpolation Scheme

NCR is highly directional with propagation mainly along the axis of propagation of the electron beam, as can be seen in Fig. 2 where  $k_y < \omega_0/c \ll k_x$ . Therefore with a particle moving along the  $x$ -axis at  $v_x \sim c$ , as is the case of electrons in the accelerated beam, the fields should satisfy:

$$\begin{aligned} E_x^{\text{NCR}} \sim cB_x^{\text{NCR}} \approx 0 & \quad \rightarrow \quad F_x^{\text{NCR}} = e(E_x^{\text{NCR}}) \approx 0 \\ E_y^{\text{NCR}} \sim cB_z^{\text{NCR}} & \quad \rightarrow \quad F_y^{\text{NCR}} = e(E_y^{\text{NCR}} - v_x B_z^{\text{NCR}}) \approx 0 \\ E_z^{\text{NCR}} \sim -cB_y^{\text{NCR}} & \quad \rightarrow \quad F_z^{\text{NCR}} = e(E_z^{\text{NCR}} + v_x B_y^{\text{NCR}}) \approx 0 \end{aligned}$$

where  $E^{\text{NCR}}, B^{\text{NCR}}$  are the electromagnetic fields due solely to the NCR and  $F^{\text{NCR}}$  is the force resulting from those fields. As all components of  $F^{\text{NCR}}$  are close to zero, we should expect NCR to generate a negligible force and thus have a negligible effect in LWFA simulations. Yet, as we have seen, its effect is clearly noticeable and the generated force is far from negligible.



**Fig. 6.** Modified interpolation process of EM fields: B-TIS on a 1D grid at the  $n$ th time step. (a) shows the same initial configuration as Fig. 5 (a) but instead of the temporal interpolation of B, the relation  $\hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  is used. (b) shows the result of this translation and the subsequent spatial interpolation of  $E^n$  and  $\hat{B}_i^n$  on a particle.

In fact the relation  $E_y^{\text{NCR}} \sim cB_z^{\text{NCR}}$  holds only when the fields are not interpolated. Even with small grid spacings and time steps, high frequency fields such as the numerical Cherenkov radiation may vary noticeably in one time step and over one cell size. Using the average  $\tilde{B}^n$  then introduces an error on the magnetic field which might be small in absolute value but becomes quite important when one considers the difference  $E_y^{\text{NCR}} - cB_z^{\text{NCR}}$ . Spatial interpolation of  $E$  and  $B$  from different points as shown in Fig. 5 may also increase the error on the computed  $E_y^{\text{NCR}} - cB_z^{\text{NCR}}$  at the particle position. The idea of our new approach is to modify the interpolation of the EM fields so as to make sure the impact of numerical Cherenkov radiation through its generated force  $F^{\text{NCR}}$  is indeed negligible.

Since all the main electromagnetic fields in our LWFA case - the wakefield itself, the laser field, the beam's self field and the NCR - propagate approximately at  $c$  along the  $x$  direction, then we can assume that  $B(n\Delta t, i\Delta x) \approx B((n+\frac{1}{2})\Delta t, (i+\frac{1}{2})\Delta x)$ , as in half a time step the fields have propagated and advanced of half a cell. This works because while still satisfying the CFL condition,  $c\Delta t$  is very close to  $\Delta x$  in the simulations. The idea is then to interpolate the fields at the particle position using  $(E_i^n, \hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$  instead of  $(E_i^n, \tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n)$  as previously shown. This new method is described in Fig. 6.

Using this approximation, there is no need for a temporal interpolation anymore and it also simplifies the spatial interpolation as we now know the magnetic field on the same grid points as the electric field. As the above effectively results in a translation of the calculated  $B$  field before the spatial interpolation, we will in the remainder of this paper refer to this new process as the *B-Translated Interpolation Scheme* (B-TIS). We will also refer to the previous temporal interpolation method as LTI when using the linear time interpolation or QTI for the quadratic one.

### 3.4. Accuracy comparison of the two methods

#### 3.4.1. Theoretical calculation

Let us discuss in further details the accuracy of the two methods on the computed magnetic fields. We first consider a scalar field  $B$  of the form:

$$B(x, y, z, t) = B_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad (5)$$

Discretized in the simulation, this gives us:  $B_{i,j,k}^n = B_0 \cos(k_x i \Delta x + k_y j \Delta y + k_z k \Delta z - \omega n \Delta t) = B_0 \cos(\varphi_{i,j,k}^n)$ .

The linear time interpolation used is defined by:  $\tilde{B}_{i,j,k}^n = \frac{1}{2} (B_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + B_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}})$  which we can rewrite with  $\delta\varphi = \frac{\omega\Delta t}{2}$  as

$$\tilde{B}_{i,j,k}^n = B_0 \cos(\varphi_{i,j,k}^n) \cos(\delta\varphi) = B_{i,j,k}^n \cos(\delta\varphi) \quad (6)$$

This shows that this temporal interpolation is a good approximation as long as  $\delta\varphi \ll 1$  when  $\cos(\delta\varphi) \simeq 1$ . To highlight the error introduced by this interpolation we will rewrite  $\tilde{B}_{i,j,k}^n$  as  $\tilde{B}_{i,j,k}^n = B_{i,j,k}^n + \tilde{\epsilon}_B$  with  $\tilde{\epsilon}_B$  being

$$\tilde{\epsilon}_B = B_0 \cos(\varphi_{i,j,k}^n) (\cos(\delta\varphi) - 1) \quad (7)$$

Then at the lowest order we have:

$$\left| \frac{\tilde{\varepsilon}_B}{B_0} \right| \simeq \frac{1}{2} \left| \cos(\varphi_{i,j,k}^n) \right| \delta\varphi^2 < \frac{1}{2} \delta\varphi^2 \quad (8)$$

Similarly, we can show that the quadratic time interpolation defined by  $\tilde{B}_{i,j,k}^n = \frac{3}{8} B_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} B_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} B_{i,j,k}^{n-\frac{3}{2}}$  gives an error  $\tilde{\varepsilon}_B$ :

$$\tilde{\varepsilon}_B = B_0 \cos(\varphi_{i,j,k}^n) \left( \frac{9}{8} \cos(\delta\varphi) - \frac{1}{8} \cos(3\delta\varphi) - 1 \right) + B_0 \sin(\varphi_{i,j,k}^n) \left( \frac{1}{8} \sin(3\delta\varphi) - \frac{3}{8} \sin(\delta\varphi) \right) \quad (9)$$

And at the lowest order:

$$\left| \frac{\tilde{\varepsilon}_B}{B_0} \right| \simeq \frac{1}{2} \left| \sin(\varphi_{i,j,k}^n) \right| \delta\varphi^3 < \frac{1}{2} \delta\varphi^3 \quad (10)$$

Looking at the accuracy of our new B-TIS, we consider

$$\widehat{B}_{i,j,k}^n = B_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} = B_0 \cos(\varphi_{i,j,k}^n + \widehat{\delta\varphi}) \quad (11)$$

with  $\widehat{\delta\varphi} = \frac{1}{2}(k_x \Delta x - \omega \Delta t)$ . As before we will rewrite this so as to have  $\widehat{B}_{i,j,k}^n$  expressed as  $\widehat{B}_{i,j,k}^n = B_{i,j,k}^n + \widehat{\varepsilon}_B$  with this time  $\widehat{\varepsilon}_B$  being

$$\widehat{\varepsilon}_B = B_0 \cos(\varphi_{i,j,k}^n) (\cos(\widehat{\delta\varphi}) - 1) - B_0 \sin(\varphi_{i,j,k}^n) \sin(\widehat{\delta\varphi}) \quad (12)$$

which at the lowest order finally gives us:

$$\left| \frac{\widehat{\varepsilon}_B}{B_0} \right| \simeq \left| \sin(\varphi_{i,j,k}^n) \right| \widehat{\delta\varphi} < \widehat{\delta\varphi} \quad (13)$$

So, as long as we can ensure that  $\widehat{\delta\varphi} < \frac{1}{2} \delta\varphi^2$ , B-TIS should provide more accurate computation of the B field. For longitudinally propagating waves with  $\omega/k_x \approx c$  and  $c\Delta t \approx \Delta x$ , as is usually the case for LWFA simulations,  $\widehat{\delta\varphi}$  can become very small and the gain should be significant.

If we consider the transverse forces applied to an electron:

$$F_y = -e (E_y + v_z B_x - v_x B_z) \quad (14)$$

$$F_z = -e (E_z + v_x B_y - v_y B_x) \quad (15)$$

then the translation or temporal interpolation of B introduce an error on the transverse forces such as:

$$\mathcal{E}_{F_y} = -e (v_z \varepsilon_{B_x} - v_x \varepsilon_{B_z}) \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_{F_z} = -e (v_x \varepsilon_{B_y} - v_y \varepsilon_{B_x}) \quad (17)$$

Note that most of the fields in the simulations propagate mainly longitudinally so  $B_{0,x} \approx 0$  making  $\varepsilon_{B_x}$  really small. Furthermore for most electrons  $v_y \ll v_x$  and  $v_z \ll v_x$ . We can thus safely approximate the error to:

$$\mathcal{E}_{F_y} \approx e v_x \varepsilon_{B_z} \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_{F_z} \approx -e v_x \varepsilon_{B_y} \quad (19)$$

Minimising the error on the transverse magnetic fields will thus minimise the error on the transverse forces and help reduce the impact of NCR.

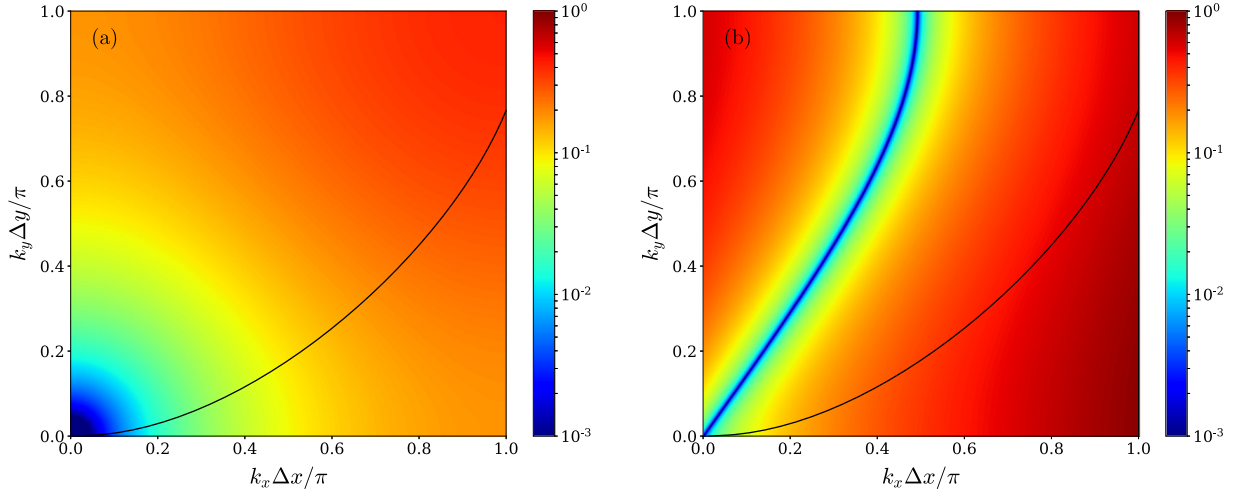
#### 3.4.2. Error on electromagnetic waves in vacuum

The presence of charged particles or a low density plasma may affect the phase velocity of an electromagnetic wave but for the sake of simplicity, we neglect this effect in this section and consider waves propagating in the vacuum. For ease of visualisation, we also consider waves propagating in the  $(x, y)$  plane only ( $k_z = 0$ ) but the results can easily be extended to a more general 3D case.

As shown previously, with the Yee scheme, propagating electromagnetic waves abide to the numerical dispersion equation (1). We can thus express  $\delta\varphi$  and  $\widehat{\delta\varphi}$  as:

$$\delta\varphi = \arcsin \left( \sqrt{\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{c\Delta t}{\Delta y} \sin^2 \left( \frac{k_y \Delta y}{2} \right)} \right) \quad (20)$$

$$\widehat{\delta\varphi} = \frac{1}{2} k_x \Delta x - \arcsin \left( \sqrt{\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{c\Delta t}{\Delta y} \sin^2 \left( \frac{k_y \Delta y}{2} \right)} \right) \quad (21)$$



**Fig. 7.** Absolute error on B field using (a) LTI  $\tilde{\epsilon}(k_x, k_y)$  or (b) B-TIS  $\hat{\epsilon}(k_x, k_y)$  with  $\Delta y = \Delta x$  and  $\Delta t = 0.99 \Delta t_{\text{CFL}}$ . The black line describes possible NCR modes according to eq. (3) with  $\beta_x = 0.99995$  ( $p_x \approx 100m_e c$ ).

From there it is quite clear that the results will depend heavily on the numerical parameters chosen for the simulation, namely:  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  and  $\Delta t$ .

Assuming  $\Delta y = \Delta z$ , the choice of the numerical time step  $\Delta t$  is limited by the CFL condition  $\Delta t < \Delta t_{\text{CFL}}$  with:

$$c\Delta t_{\text{CFL}} = \frac{\Delta x}{1 + 2 \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}} \quad (22)$$

Thus, if we express  $\Delta t$  as a fraction of  $\Delta t_{\text{CFL}}$ ,  $\Delta x$  and  $\Delta y$  are the only free numerical parameters and we can test the accuracy of our two methods depending on  $(k_x, k_y)$  by comparing:

$$\tilde{\epsilon} = \left| \frac{\tilde{\epsilon}_B}{B_0} \right|_{\max} = \max_{0 < \theta < 2\pi} |\cos(\theta) (\cos(\delta\varphi) - 1)| = |\cos(\delta\varphi) - 1| \quad (23)$$

$$\hat{\epsilon} = \left| \frac{\hat{\epsilon}_B}{B_0} \right|_{\max} = \max_{0 < \theta < 2\pi} |\cos(\theta) (\cos(\widehat{\delta\varphi}) - 1) - \sin(\theta) \sin(\widehat{\delta\varphi})| \quad (24)$$

When there is no laser to model, as is the case for beam-driven acceleration, the grid size must be small enough so as to accurately describe plasma oscillations. It is thus common to use  $\Delta x = \Delta y$  chosen between  $\lambda_p/25$  and  $\lambda_p/50$ , with  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ . For LWFA simulations, it is in addition necessary to accurately describe the laser pulse longitudinally. To that end  $\Delta x$  is usually chosen between  $\lambda_0/25$  and  $\lambda_0/50$  and, as  $\lambda_p$  is usually  $\gtrsim 10$  times bigger than  $\lambda_0$ , it is more efficient to use  $\Delta x \ll \Delta y$ .

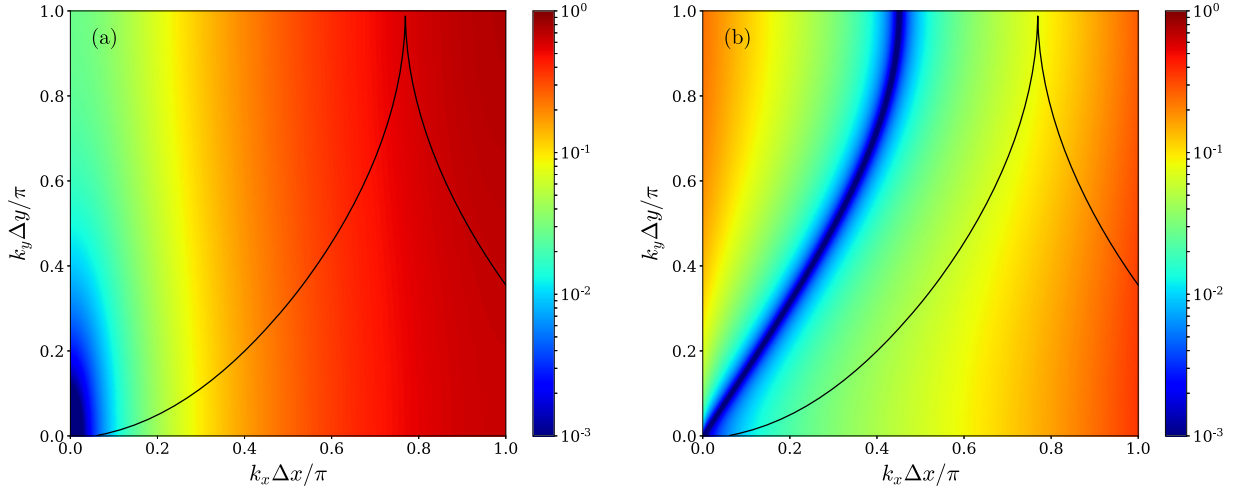
In order to look at the impact of the cell size on accuracy, we compare the error values of LTI and B-TIS across the field of possible  $k_x$  and  $k_y$  for different sets of numerical parameters. We present next the results of such comparisons for different ratios of  $\Delta x/\Delta y$  with  $\Delta t = 0.99 \Delta t_{\text{CFL}}$  (as it is usually advantageous to have  $\Delta t$  as close to  $\Delta t_{\text{CFL}}$  as possible). The Fig. 7, 8 and 9 show both  $\tilde{\epsilon}(k_x, k_y)$  and  $\hat{\epsilon}(k_x, k_y)$  with  $\Delta y = \Delta x$ ,  $\Delta y = 4\Delta x$  and  $\Delta y = 20\Delta x$  respectively.

Note that if we take  $\Delta x = \lambda_0/40$  then  $k_0 \Delta x/\pi = 0.05$ , so everything above 0.1 can be considered as high frequency, which is mostly some noise and not some physically relevant component. Knowing that, it is clear that LTI ensures good accuracy for low frequency fields (which are physically relevant) but its precision decreases rapidly outside of that range. Increasing the ratio  $\Delta y/\Delta x$  increase the accuracy for transverse high frequency fields but reduces it for those with high longitudinal frequency. On the other hand, the accuracy of B-TIS is maximum when  $v_\varphi = \omega/k \approx c$  and increasing the ratio  $\Delta y/\Delta x$  improves significantly the accuracy for the whole spectrum as  $c\Delta t$  becomes increasingly closer to the value of  $\Delta x$ .

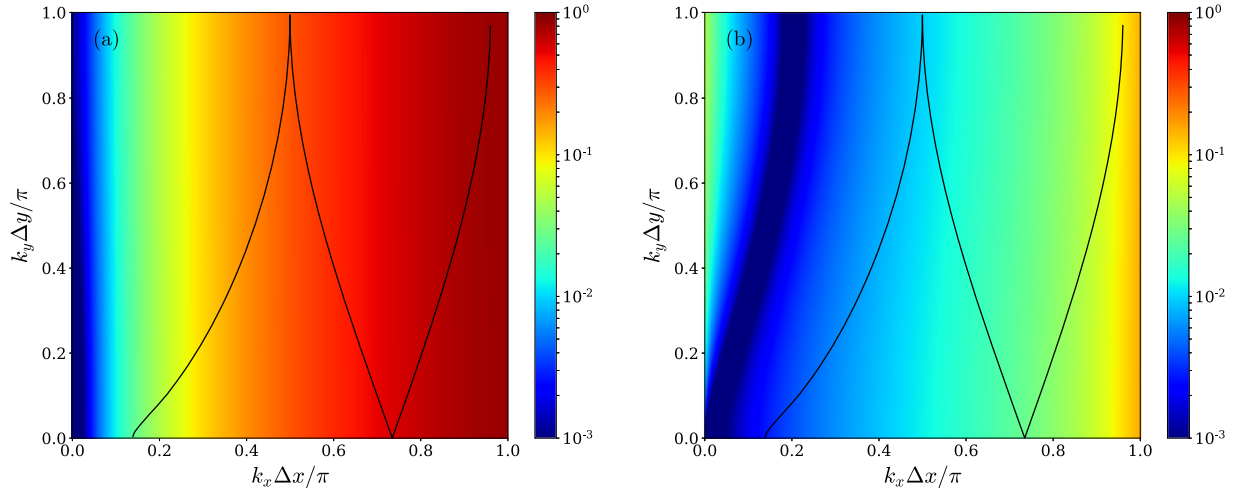
LTI is better with  $\Delta y = \Delta x$ , but as soon as  $\Delta y$  is at least four times bigger than  $\Delta x$ , B-TIS gives similar or better accuracy to LTI for the laser field and lower frequency fields and much better accuracy for the high frequency fields. With typical LWFA parameters, B-TIS gives thus much better results overall. Looking at the Fig. 9, the error induced by the temporal interpolation on the NCR fields is quite high, reaching almost one for some frequencies, whereas B-TIS ensures at least a one order of magnitude improvement.

We can calculate the numerical values of the error induced by the different methods on the simulation presented in section 2. For the magnetic component of our linearly polarised laser field, we can consider  $k_x = k_0$ ,  $k_y = 0$  and  $\omega = \omega_0$  which leads to:

$$\tilde{\epsilon} \simeq \frac{1}{2} \delta\varphi^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \quad (25)$$



**Fig. 8.** Absolute error on B field using (a) LTI  $\tilde{\epsilon}(k_x, k_y)$  or (b) B-TIS  $\hat{\epsilon}(k_x, k_y)$  with  $\Delta y = 4\Delta x$  and  $\Delta t = 0.99 \Delta t_{\text{CFL}}$ . The black line describes possible NCR modes (and aliases) according to eq. (3) with  $\beta_x = 0.99995$  ( $p_x \approx 100m_e c$ ).



**Fig. 9.** Absolute error on B field using (a) LTI  $\tilde{\epsilon}(k_x, k_y)$  or (b) B-TIS  $\hat{\epsilon}(k_x, k_y)$  with  $\Delta y = 20\Delta x$  and  $\Delta t = 0.99 \Delta t_{\text{CFL}}$ . The black line describes possible NCR modes (and aliases) according to eq. (3) with  $\beta_x = 0.99995$  ( $p_x \approx 100m_e c$ ).

$$\tilde{\epsilon} \simeq \frac{1}{2} \delta\varphi^3 \approx 2 \cdot 10^{-4} \quad (26)$$

$$\hat{\epsilon} \simeq \delta\widehat{\varphi} \approx 5 \cdot 10^{-4} \quad (27)$$

The precision with B-TIS is then better than with LTI and on the same order of magnitude as with QTI.

As stated in Section 2, the frequency of NCR satisfy  $\omega = k_x \beta_x c$  with  $\beta_x$  being the normalized velocity of the particle generating the NCR along the x direction. This means, with the same notation as previously that  $\delta\varphi = \frac{1}{2} \beta_x k_x \Delta t$  and  $\delta\widehat{\varphi} = \frac{1}{2} k_x (\Delta x - \beta_x c \Delta t)$ . Using our particular numerical parameters and  $\beta_x = 0.99995$  ( $p_x \approx 100m_e c$ ) we get, for all possible values of  $k_x$ :

$$0.011 \leq \tilde{\epsilon}(k_x) \leq 0.99 \quad (28)$$

$$0.0016 \leq \hat{\epsilon}(k_x) \leq 1.10 \quad (29)$$

$$0.0010 \leq \widehat{\epsilon}(k_x) \leq 0.011 \quad (30)$$

As expected the results are significantly better for B-TIS for all the possible spectrum of NCR but especially for higher frequencies where the difference can be as big as two orders of magnitude. Note that for those highest frequencies QTI is no better than LTI.

### 3.4.3. Error on wakefield and beam self-field

Beam self-field and wakefield are not purely electromagnetic fields so they do not satisfy the numerical dispersion relation given by Eq. (1). Instead, as long as the quasistatic approximation can be applied [23], these fields are characterised

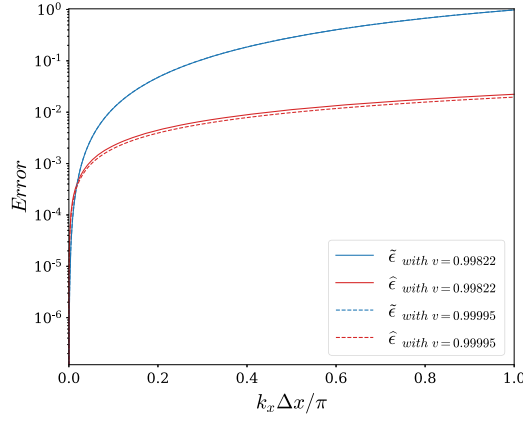


Fig. 10. Absolute error on B field using LTI or B-TIS with  $\Delta t = 0.99 \Delta t_{\text{CFL}}$ .

by  $\omega = vk_x$  where  $v = v_b$  is the beam velocity in the case of the beam self-field or  $v = v_{wf}$  is the wakefield velocity in the wakefield case, both moving along the  $x$  axis.

Thus, in that case,  $\delta\varphi = \frac{k_x v \Delta t}{2}$  and  $\delta\widehat{\varphi} = \frac{1}{2}k_x(\Delta x - v\Delta t)$  and we can show similarly to previous cases that:

$$\widetilde{\epsilon}(k_x) \simeq \frac{1}{2}\delta\varphi^2(k_x) \tag{31}$$

$$\widetilde{\epsilon}(k_x) \simeq \frac{1}{2}\delta\varphi^3(k_x) \tag{32}$$

$$\widehat{\epsilon}(k_x) \simeq \delta\widehat{\varphi}(k_x) \tag{33}$$

Fig. 10 compares the errors  $\widetilde{\epsilon}(k_x)$  of LTI and  $\widehat{\epsilon}(k_x)$  of B-TIS, both for  $v = v_{wf} = 0.99822$  (case of laser-driven wakefield in a plasma with  $n_e = 0.00357n_c$ ) and  $v = v_b = 0.99995$  (case of a 50 MeV electron beam).

The value of  $v$  has a very small impact on the precision as in both cases  $v \approx c$  though its effect is more noticeable with B-TIS. For very low frequencies such as the wakefield frequency  $k_p = \omega_p/c$  ( $k_p \Delta x/\pi \approx 0.005$  if  $\Delta x \approx \lambda_0/40 \approx \lambda_p/400$ ), LTI ensures a better precision than B-TIS but both methods give very small errors in that case. The error of LTI increases very rapidly with the longitudinal frequency so that for higher frequencies B-TIS again gives an error at least an order of magnitude smaller.

Using again the numerical parameters of the simulation introduced in section 2, we can compute the error for typical values of  $k_x$  for the wakefield and the beam self-field. Choosing  $k_x = k_p$  for the wakefield we get:

$$\widetilde{\epsilon} \approx 1.10^{-5}, \quad \widetilde{\epsilon} \approx 4.10^{-8}, \quad \widehat{\epsilon} \approx 4.10^{-5} \tag{34}$$

and choosing  $k_x = 4k_p$  for the beam self-field (assuming a electron beam as long as a quarter of the bubble length) we get:

$$\widetilde{\epsilon} \approx 2.10^{-4}, \quad \widetilde{\epsilon} \approx 3.10^{-6}, \quad \widehat{\epsilon} \approx 1.10^{-4} \tag{35}$$

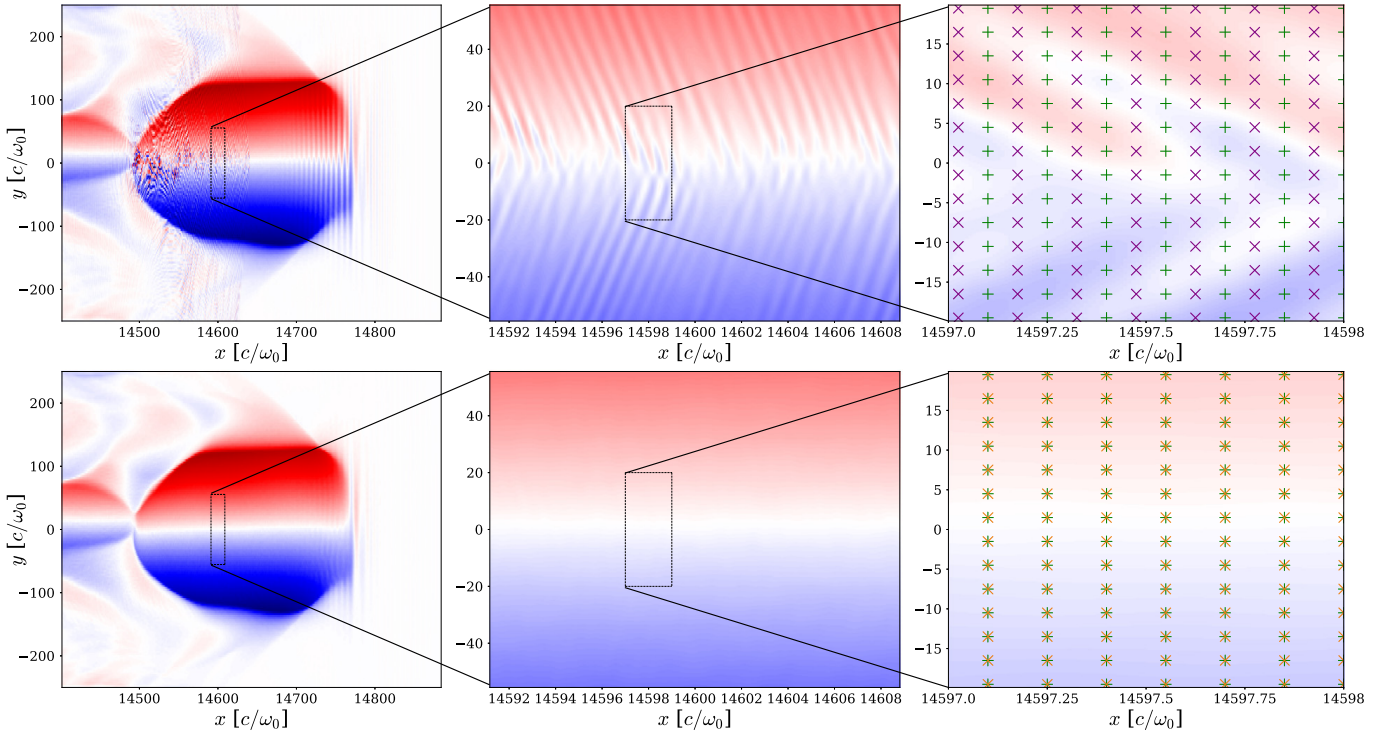
For those typical values, LTI and B-TIS give pretty similar values resulting in good accuracy for both methods. However higher frequencies may arise due to inhomogeneities in the electron beam or high electron density gradients in the wake, those would benefit from the improved accuracy of B-TIS at higher frequencies. Beam hosing or transverse evolution of the bubble may also occur but would result in very low longitudinal frequency oscillations where both methods give good results.

### 3.5. Implementation of B-TIS in calder

We show in Fig. 11 a comparison of the resulting transverse force  $F_y = e(E_y - cB_z)$  calculated with either LTI or B-TIS. The pictures are successive zooms in the  $(xy)$  plane of the simulation. The first one shows the bubble in its entirety while the second focuses on fine details around the axis of the bubble and in the rightmost one grid points used to calculate the EM fields are visible. Between those grid points, the fields are interpolated in the same way as they would in CALDER to calculate fields at the particles positions. The force  $F_y$  that would apply to an electron is the difference between the interpolated  $E_y$  and interpolated  $B_z$ ,  $F_y^{\text{LTI}}$  is shown on the first row and  $F_y^{\text{B-TIS}}$  on the second, with:

$$F_y^{\text{LTI}}(x, y, z) = e \sum_{i,j,k} S_{i,j,k}(x, y, z) E_{i,j,k}^n - S_{i+\frac{1}{2},j,k}(x, y, z) c \widetilde{B}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \tag{36}$$





**Fig. 11.** Successive zooms on a map of the interpolated transverse force  $F_y$  that would apply to an electron. The first row when using LTI, the second row when using B-TIS. For each on the rightmost picture, + and  $\times$  materialize the grid points used for the spatial interpolation: + for  $E^n$ ,  $\times$  (purple) for  $\hat{B}^n$  and  $\times$  (orange) for  $\hat{B}^n$ .

$$F_y^{\text{B-TIS}}(x, y, z) = e \sum_{i,j,k} S_{i,j,k}(x, y, z) E_{i,j,k}^n - S_{i,j,k}(x, y, z) c \hat{B}_{i,j,k}^n \quad (37)$$

where  $i, j, k$  are the indices on the spatial grid along the  $x, y, z$  directions respectively, and  $S_{i,j,k}(x, y, z)$  is the interpolation form factor. A third order form factor (cubic interpolation) was used here as in the simulations for spatial interpolation.

When calculating  $F_y = e(E_y - cB_z)$ , the laser field, the beam self field and NCR are expected to cancel out leaving only the transverse force created by the bubble fields. Yet we can clearly see in Fig. 11 on the first row that  $F_y$  has some higher frequency components. At the front of the bubble we can observe oscillations clearly due to the laser beam while there are even higher frequency perturbations all along the beam position. Looking at the right-most picture, we can estimate that  $\lambda \approx 4\Delta x$  or  $k_x \approx 10\omega_0/c$  which is coherent with NCR characteristics as seen in Fig. 2, we can therefore conclude that the aforementioned perturbations are indeed caused by NCR.

The spurious rapid oscillations of the field are effectively suppressed when using B-TIS instead of LTI and only the expected transverse bubble field are left on the bottom row of Fig. 11. Coincidentally, the error due to the laser fields in front of the bubble is reduced as expected according to the error levels reported earlier. From the above observations, we conclude that B-TIS provides better accuracy than the other above-mentioned methods with regards to the motion of particles in LWFA simulations.

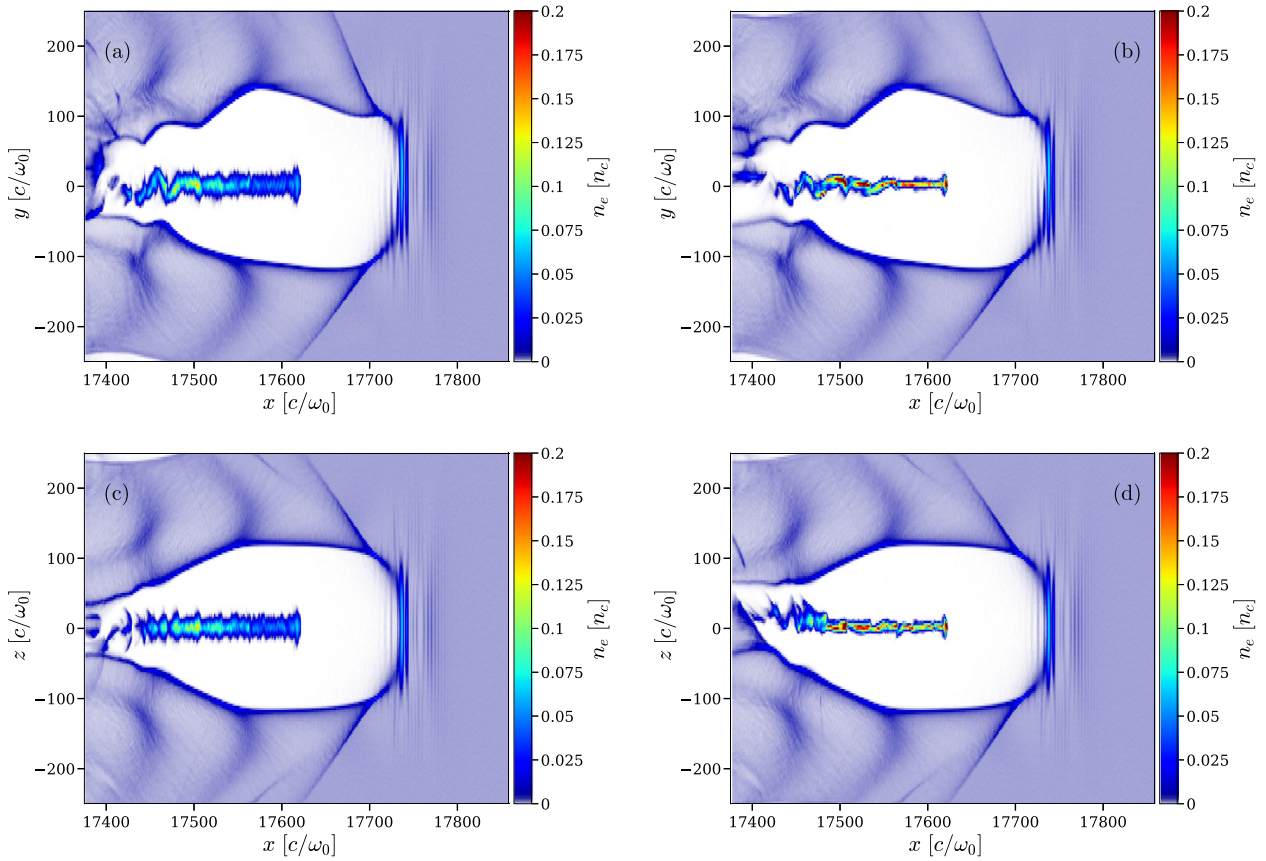
## 4. Comparison of results for LWFA simulations

### 4.1. Influence on the bubble and the beam

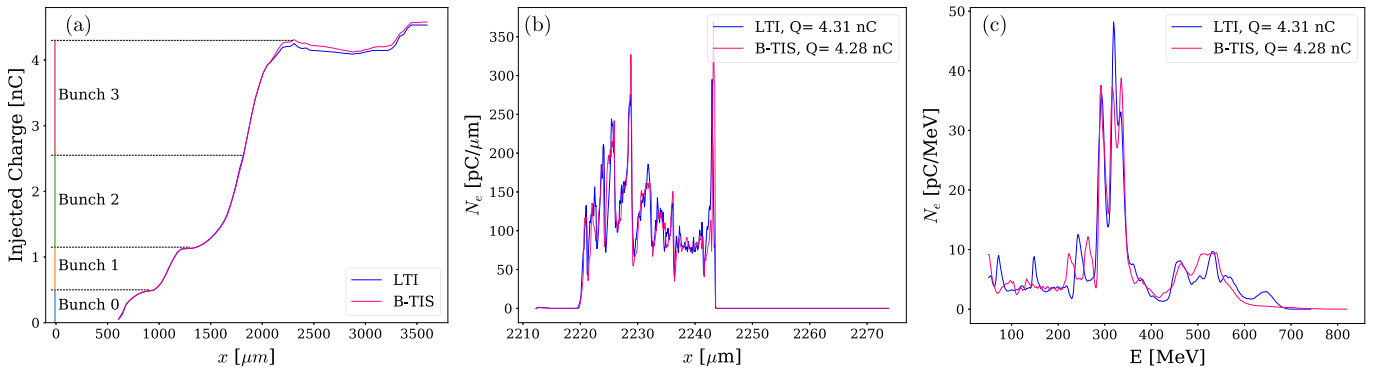
We implemented the modified interpolation scheme B-TIS into CALDER, applying it for every particle with  $p_x > 50m_e c$ . Indeed, the underlying approximation works well inside the cavity for the injected electrons with  $v_x \approx c$  but would give poor results with slower electrons. It shall therefore only be applied to particles satisfying  $\beta_x > 0.9998$  ( $p_x > 50m_e c$ ) while other particles shall be treated using the previously existing temporal interpolation method.

A 3D simulation was run with the exact same parameters as presented in Sec. 2 but using our newly implemented B-TIS instead of the previous LTI method. Comparison of their results reveal a high degree of similarity, with almost identical bubbles - same shape, same fields - the differences coming from the accelerated beam itself and its generated fields. Fig. 12 shows electron density maps in the two different cases, the shape of the bubble appears identical in both instances but the injected beam is much more narrow with the modified scheme. In fact, only the transverse spatial distribution of the beam seems to be really affected by the change, with higher local electron density because of the beam focusing.

Looking at Fig. 13, the injection process appears unaffected. The injected charge is almost identical for the whole duration of the simulation and the linear density of the beam is also extremely similar. Four auto-injection events can clearly be



**Fig. 12.** Comparison of the bubble and beam shape. Those are slice-cuts showing the electronic density normalised to the critical density  $n_e/n_c$ . (a) and (c) are slices in the (xy) and (xz) planes respectively in the case using LTI, while (b) and (d) are their counterparts with B-TIS.



**Fig. 13.** Comparison of beam properties when using the LTI scheme or the new B-TIS: (a) Total injected charge ( $p_x > 50m_e c$ ) with the length of propagation in the plasma. (b) Beam distribution along the  $x$  axis and (c) energy spectrum of the accelerated electrons, both after 2.25 mm propagation in the plasma.

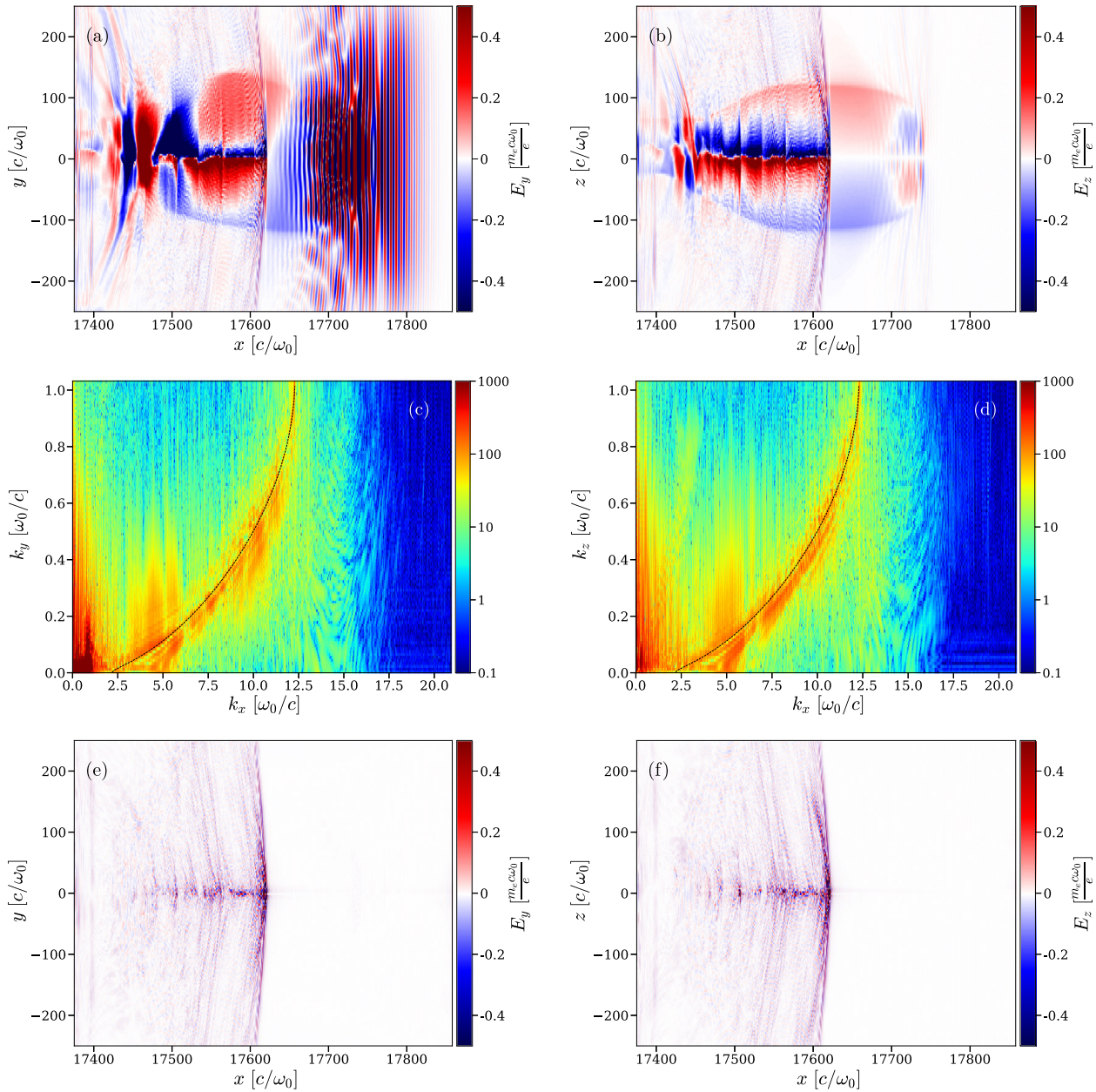
identified in Fig. 13.a when the injected charge jumps from one plateau to another. The third event is the most important and occurring for a relatively long time. The energy spectrum of the accelerated electrons is also quite comparable.

The above results seem to confirm that our modified scheme does not impact the physics of wakefield creation, injection or acceleration process but merely corrects the spurious effect of NCR on the accelerated beam without actually suppressing the radiation.

Looking at the electromagnetic fields in the simulation with B-TIS, the numerical Cherenkov radiation is indeed still present as expected. Fig. 14 presents maps of the electric fields  $E_y$  and  $E_z$  and their respective Fourier transform, to be compared with Fig. 2. Once again the bubbles and their associated fields are extremely similar in both cases, the numerical Cherenkov radiation is the main observable difference between the two simulations. The NCR is much more intense around the electron bunch in the new simulation, especially at the front of the beam, and seems more focused and clearly defined in Fourier space, this is likely due to the beam being much more narrow and more dense.

The differences in terms of transverse force, though not visible when looking at the fields, translate into important difference in terms of beam emittance. Fig. 15 and Fig. 16 present the evolution with time of the normalized emittance of sections of the electron beam.





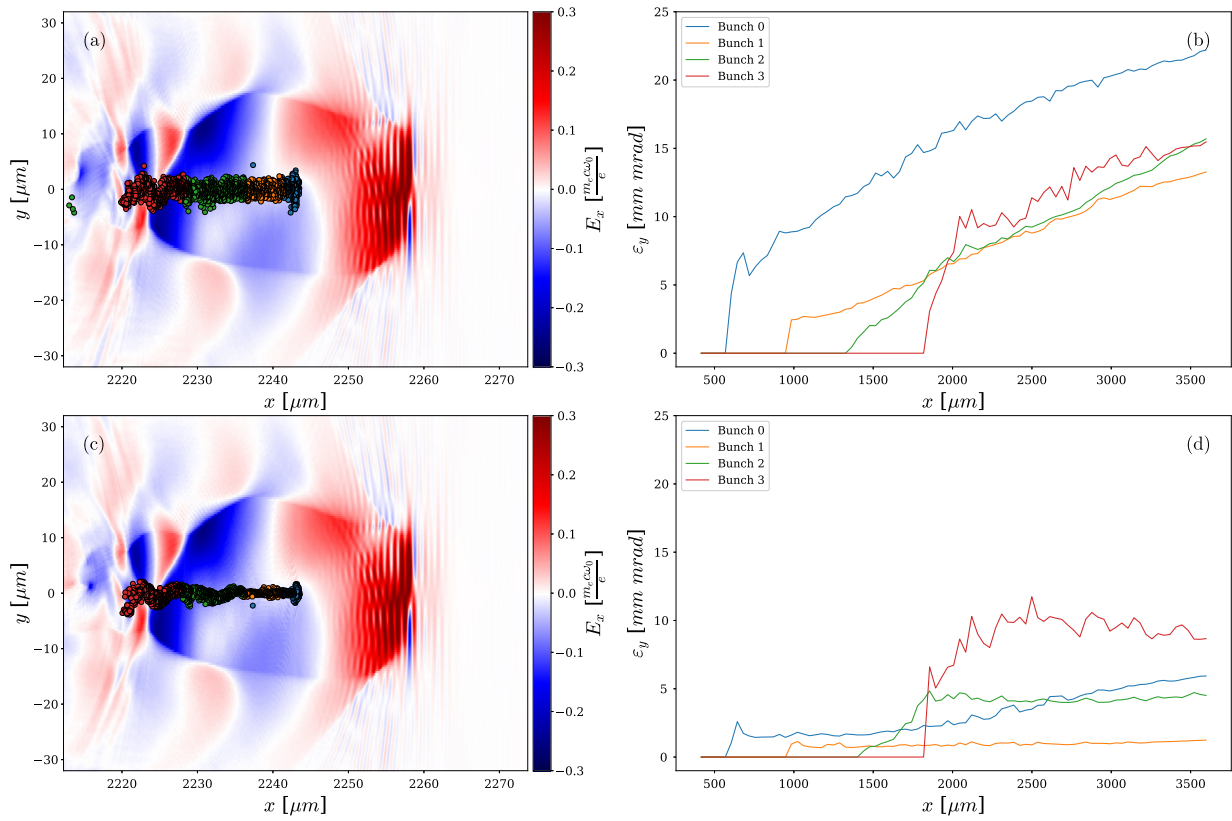
**Fig. 14.** Similar results to Fig. 2 but using the B-TIS for electrons with  $p_x > 50m_e c$ : (a) shows a map of the transverse field  $E_y$  in the  $(xy)$  plane while (b) shows a map of  $E_z$  in the  $(xz)$  plane. (c) and (d) show their respective spatial Fourier transform with the black dashed lines corresponding to Eq. (3) and (4) respectively for a particle with  $p_x \approx 100m_e c$ . (e) and (f) show maps of the transverse field for  $k_x > 2.5 \omega_0/c$  only.

The coloured bunches were defined by the number of injection events occurring during the simulation as can be seen on Fig. 13.a. We can observe the spurious growth of emittance described by Lehe [4] for all sections of the beam and in both directions for the simulations using LTI. Instead, with B-TIS, the emittance of the beam is smaller, but in addition it also tends to stay constant during the acceleration of the beam. This is in line with what is expected according to theoretical models: in the case of a fully evacuated plasma bubble, the transverse fields are linear functions of the radius [18,19] and thus the normalized emittance should remain constant during acceleration barring other phenomena disturbing the accelerating field.

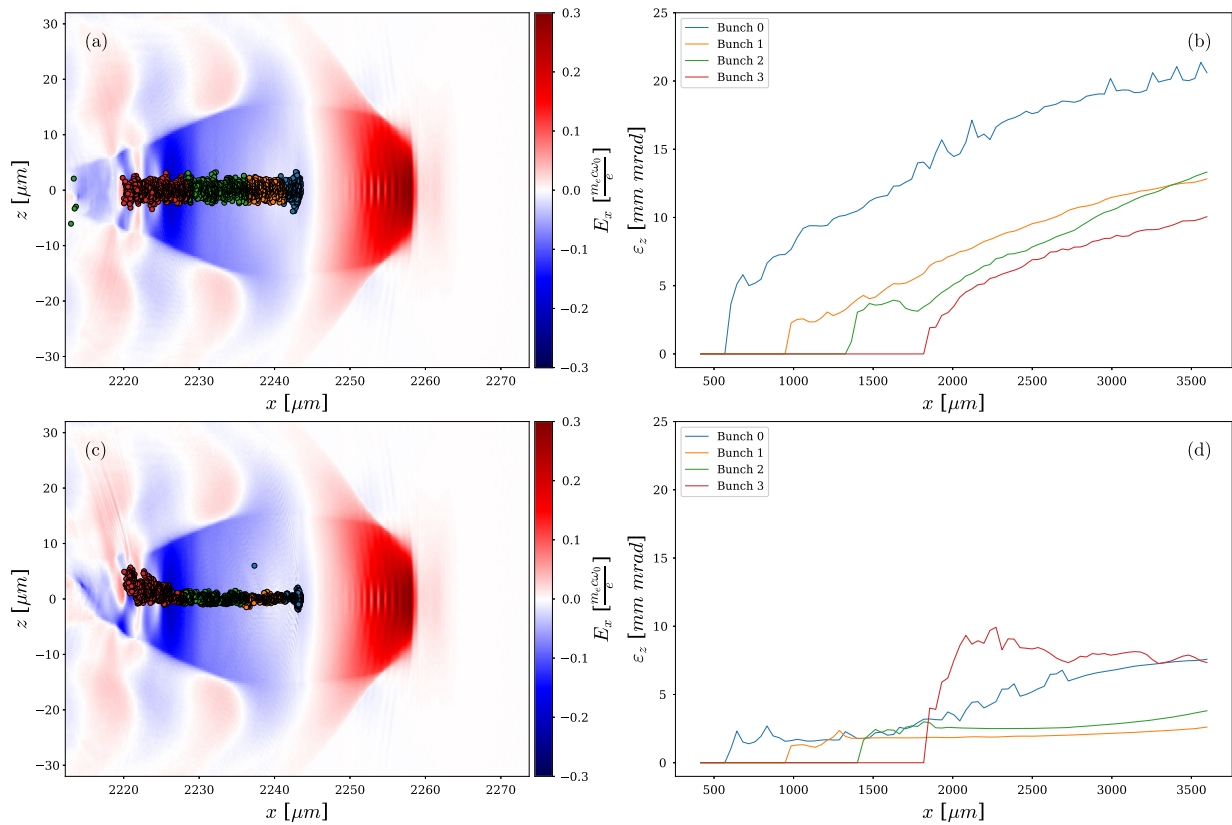
#### 4.2. Influence on electrons trajectories

Looking in more details into the individual electron trajectories, the effect of the modification is quite remarkable. Fig. 17 presents an example of such trajectories to be compared to those from Fig. 4. The oscillations of the electrons are far more regular and there is a much stronger correlation between the position of the particle and the transverse force especially in the  $(xz)$ -plane. There are still however some remaining disparities along the  $y$  direction which we will discuss further on.

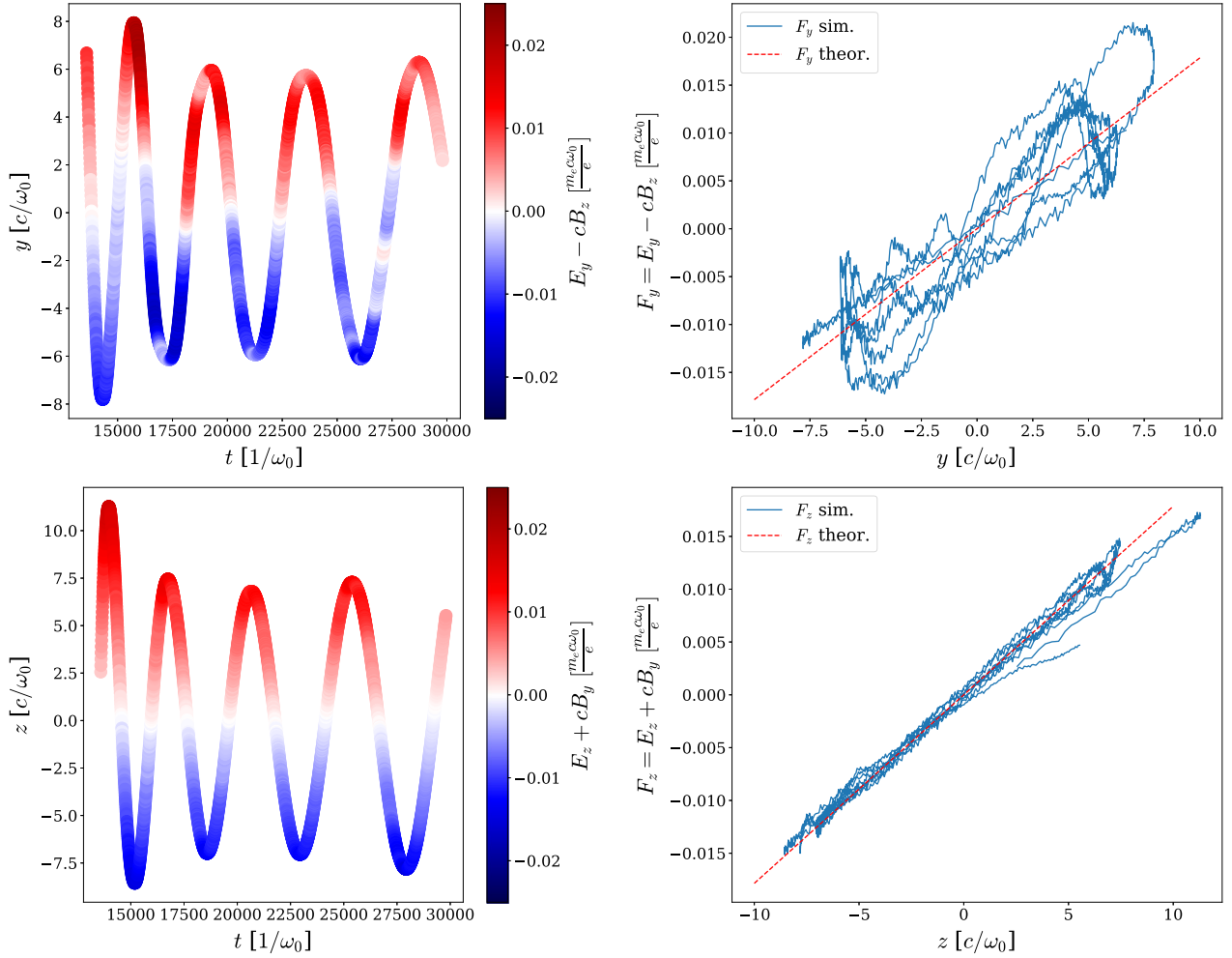
Fig. 18 shows a comparison between the two simulations of the average difference between the recorded transverse force and its theoretical value for every recorded particles. The difference between the theoretical values and the recorded



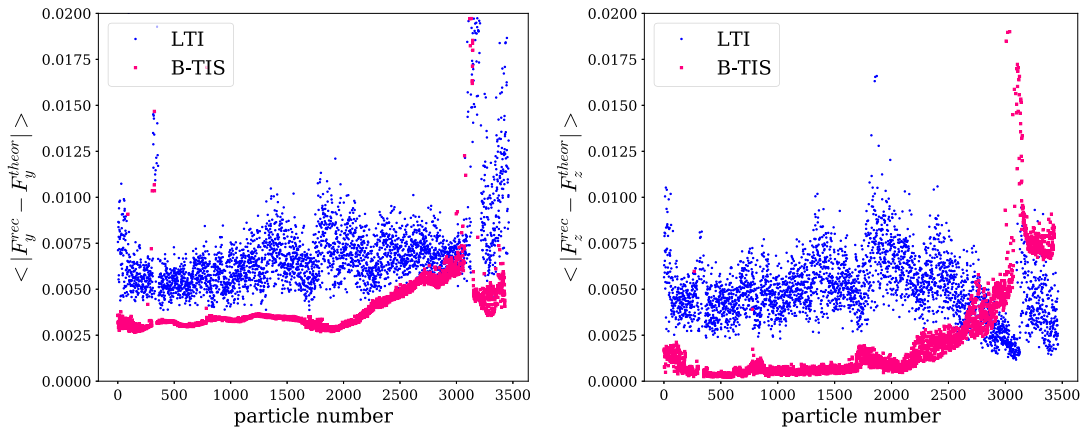
**Fig. 15.** Beam transverse size and emittance in the  $(xy)$  plane. (a) and (c): map of the longitudinal electric field  $E_x$  and distribution of the beam particles (coloured circles). (b) and (d): Evolution of the normalized emittance  $\varepsilon_y$  of the different electron bunches defined in Fig. 13. The results in (a) and (b) are obtained using LTI, while (c) and (d) used B-TIS.



**Fig. 16.** Beam transverse size and emittance in the  $(xz)$  plane. (a) and (c): map of the longitudinal electric field  $E_x$  and distribution of the beam particles (coloured circles). (b) and (d): Evolution of the normalized emittance  $\varepsilon_z$  of the different electron bunches defined in Fig. 13. The results in (a) and (b) are obtained using LTI, while (c) and (d) used B-TIS.



**Fig. 17.** Trajectories of an electron from the simulation with the modified scheme B-TIS. The top row is along the y-axis, the bottom one along the z-axis. On the left is the y (respectively z) position of the electron with time, the colour showing the transverse force  $F_y = E_y - v_x B_z$  (respectively  $F_z = E_z + v_x B_y$ ) recorded by the particle. On the right the transverse force has been plotted against the position (blue line), to be compared with the theoretical  $F_y = \frac{1}{2} m_e \omega_p^2 y$  (red dashed line) (respectively  $F_z = \frac{1}{2} m_e \omega_p^2 z$ ).



**Fig. 18.** The picture on the left presents the temporal average  $\langle |F_y^{rec} - F_y^{theor}| \rangle$  for each selected particle where  $F_y^{rec}$  is the force recorded by the particle (ie computed using Eq. (36) and (37)) and  $F_y^{theor} = \frac{1}{2} m_e \omega_p^2 y$ . Blue dots represent results using the LTI while the red squares are obtained with B-TIS. The picture on the right shows the same for the z direction.

values are quite significant when using the LTI scheme revealing that the electrons are influenced by something other than the ideal EM fields of a perfect bubble. These effects are much less visible when B-TIS is used, especially in the (xz)-plane.

The difference of behaviour between the two planes can be explained by the polarisation of the laser beam along the y-axis. A ‘wiggling’ of the bubble in that plane is frequently observed in LWFA simulations and is indeed visible in Fig. 12. It is a well-known physical effect due to the increasing dissymmetry of the laser beam as it is depleted. This ‘wiggling’



may affect the electromagnetic fields inside the cavity leading to significant disparity with the theoretical fields inside the bubble. This effect is actually visible on Fig. 17. Note how the trajectory along the  $y$  direction is still somewhat irregular and the correlation between  $F_y$  and  $y$  - although much better than previously - is not as good as between  $F_z$  and  $z$ . This is the consequence of the asymmetry of the bubble in the  $y$  plane due to its 'wiggling'. The axis of the bubble where  $F_y \approx 0$  is effectively constantly displaced thus impacting the correlation between  $F_y$  and the particle position along  $y$ .

This effect may be as important as the error introduced by NCR which would explain the small improvement in the  $(xy)$ -plane relative to the one in the  $(xz)$ -plane. Using B-TIS allows us to clearly see the impact of this effect while it was previously masked by the effects of NCR. Our new improved scheme thus enables us to study rather subtle physical effects that might otherwise be lost due to numerical errors.

## 5. Conclusion

We showed that the simple Yee scheme used by most PIC codes, though quite robust, has some intrinsic problems when simulating wakefield accelerators leading to an overestimation of the transverse size and emittance of the accelerated beam as well as a misrepresentation of the particle trajectories due to non physical numerical Cherenkov radiation. Using a simple modification of the interpolation scheme, we were able to significantly reduce the impact of this spurious radiation and improve the accuracy of our LWFA simulations. The improved accuracy on particle trajectories might especially help better understand electron motion and thus subtle beam evolution or even betatron radiation sources which are one very promising application of LWFA.

Though this paper is focused on LWFA, this work could be extended to study other wakefield acceleration methods, or even any simulation of charged particles propagating relativistically in a plasma as long as all the main EM fields propagate at a velocity close to  $c$  in the beam propagation direction. In addition, as it does not modify the Maxwell solver, our B-TIS could potentially be used with any FDTD scheme, especially with a dispersion free scheme that can allow use of  $\Delta t = \Delta x$ , making it a simple yet versatile tool to deal with NCR.

Finally, B-TIS might prove useful to improve the simulated motion of the particles for any simulation of relativistic particles co-propagating with electromagnetic fields such as direct laser acceleration or vacuum laser accelerations cases where electrons are accelerated directly by the co-propagating laser field, in order to improve the accuracy on the interaction.

## Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

## Acknowledgements

This work has been supported by Laserlab-Europe (EU-H2020 654148). We also acknowledge GENCI for granting us access to the supercomputer Irene under the grants No. A0050506129 and No. A0060507594.

## References

- [1] K. Yee, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. Antennas Propag.* 14 (3) (1966) 302–307.
- [2] B.B. Godfrey, Numerical Cherenkov instabilities in electromagnetic particle codes, *J. Comput. Phys.* 15 (4) (1974) 504–521.
- [3] A.D. Greenwood, et al., On the elimination of numerical Cherenkov radiation in pic simulations, *J. Comput. Phys.* 201 (2) (2004) 665–684.
- [4] R. Lehe, et al., Numerical growth of emittance in simulations of laser-wakefield acceleration, *Phys. Rev. Spec. Top., Accel. Beams* 16 (2013) 021301.
- [5] X. Xu, et al., Numerical instability due to relativistic plasma drift in em-pic simulations, *Comput. Phys. Commun.* 184 (11) (2013) 2503–2514.
- [6] B.B. Godfrey, J.-L. Vay, Suppressing the numerical Cherenkov instability in FDTD pic codes, *J. Comput. Phys.* 267 (2014) 1–6.
- [7] R. Lehe, et al., Elimination of numerical Cherenkov instability in flowing-plasma particle-in-cell simulations by using Galilean coordinates, *Phys. Rev. E* 94 (2016) 053305.
- [8] R. Nuter, V. Tikhonchuk, Suppressing the numerical Cherenkov radiation in the Yee numerical scheme, *J. Comput. Phys.* 305 (2016) 664–676.
- [9] A. Blinne, et al., A systematic approach to numerical dispersion in Maxwell solvers, *Comput. Phys. Commun.* 224 (2018) 273–281.
- [10] F. Li, et al., Controlling the numerical Cherenkov instability in pic simulations using a customized finite difference Maxwell solver and a local FFT based current correction, *Comput. Phys. Commun.* 214 (2017) 6–17.
- [11] A. Pukhov, X-dispersionless Maxwell solver for plasma-based particle acceleration, 2019.
- [12] I. Blumenfeld, et al., Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator, *Nature* 445 (2007) 741–744.
- [13] E. Adli, et al., Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch, *Nature* 561 (7723) (2018) 363–367.
- [14] T. Tajima, J.M. Dawson, Laser electron accelerator, *Phys. Rev. Lett.* 43 (1979) 267–270.
- [15] J. Faure, et al., A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams, *Nature* 431 (2004) 541–544.
- [16] C.G.R. Geddes, et al., High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding, *Nature* 431 (2004) 538–541.
- [17] S.P.D. Mangles, et al., Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions, *Nature* 431 (2004) 535–538.
- [18] I. Kostyukov, et al., Phenomenological theory of laser-plasma interaction in "bubble" regime, *Phys. Plasmas* 11 (11) (2004) 5256–5264.
- [19] W. Lu, et al., Nonlinear theory for relativistic plasma wakefields in the blowout regime, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 165002.
- [20] W.P. Leemans, et al., Multi-GeV electron beams from capillary-discharge-guided subpetawatt laser pulses in the self-trapping regime, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 245002.
- [21] E. Lefebvre, et al., Electron and photon production from relativistic laser-plasma interactions, *Nucl. Fusion* 43 (7) (2003) 629–633.
- [22] A. Friedman, A second-order implicit particle mover with adjustable damping, *J. Comput. Phys.* 90 (2) (1990) 292–312.
- [23] P. Sprangle, et al., Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2011–2014.



# Table des figures

1.1	Représentation de l'évolution d'un faisceau gaussien. Les courbes noires représentent la taille transverse du faisceau à $1/e$ du maximum du champ électrique tandis que les courbes rouges donnent l'évolution de la forme du front d'onde.	13
1.2	Potentiel de liaison de l'électron (bleu) (a) : dans le cas non perturbé, (b) : dans le cas où le champ laser est suffisamment intense pour modifier le potentiel. La courbe en tirets rouges représente le potentiel créé par le champ laser. Le trait vert indique le niveau énergétique de l'électron.	15
1.3	Perturbation électronique (vert) et champ électrique longitudinal (bleu) pour une impulsion laser gaussienne avec (a) $a_0 = 0.2$ (cas linéaire) et (b) $a_0 = 2$ (cas non-linéaire).	22
1.4	Effet du <i>beamloading</i> sur le champ $E_x$ avec un faisceau électronique gaussien de densité $n_{f,0} = 0.4 n_0$ et $\sigma_{f,0} = \pi/4k_p$ .	23
1.5	Trajectoires possibles pour les électrons dans l'espace des phases $(1 + p_x, \xi)$ calculées à partir de l'équation (1.51). L'orbite fluide est tracée en bleu, la séparatrice en rouge, les pointillés noirs donnent plusieurs exemples divers d'orbites possibles.	25
1.6	L'impulsion laser (rouge) se propage dans le plasma (bleu). Les électrons rencontrés sont repoussés sur les côtés par la force pondéromotrice longitudinale et transverse du laser, créant une cavité ionique (blanc) derrière celui-ci (trajectoire des électrons en pointillés roses). La présence des ions chargés positivement dans la bulle mène à l'apparition de champs focalisants qui agissent comme une force de rappel sur les électrons (trajectoire des électrons en trait plein rose).	28
1.7	Fonction d'émission synchrotron $S(x)$ donnée à l'équation (1.86).	34
1.8	Représentation d'une trajectoire sinusoïdale d'électron (en bleu) d'amplitude $y_0$ et de longueur d'onde $\lambda_b$ . On représente (en rouge) deux positions successives de l'électron (espacées par une période d'oscillation) et on illustre le calcul de la longueur d'onde $\lambda_r$ du rayonnement observé dans la direction $\mathbf{n}$ .	35
1.9	Représentation d'une trajectoire d'électron dans le régime (a) de l'onduleur ( $K \ll 1$ ), (b) du wiggler ( $K \gg 1$ ).	36
1.10	Énergie rayonnée par unité d'angle solide et de fréquence dans la direction de l'axe de propagation dans le cas du wiggler. Le spectre d'harmoniques (courbe noire) est modulé par le spectre synchrotron (courbe bleue) donné par la formule (1.94). Les unités sont arbitraires.	38
2.1	Représentation d'une maille 3D dans le schéma de Yee. Le maillage primal est numéroté par les indices entiers (trait plein et interrompu) tandis que le maillage dual est numéroté par les indices demi-entiers (trait pointillé).	47

2.2	Facteurs de forme $S^\alpha$ pour les ordres 0 à 4. . . . .	49
2.3	Cœur du Advanced Test Reactor, Idaho National Laboratory (Image originellement publiée sur Flickr par Argonne National Laboratory sous les termes de la licence cc-by-sa-2.0). . . . .	52
2.4	Ondes sphériques émises par une particule chargée se déplaçant à $v_p < v_\varphi$ (a), $v_p = v_\varphi$ (b) et $v_p > v_\varphi$ (c). Dans le dernier cas, une "onde de choc" apparaît et se propage à $v_\varphi$ dans la direction $\theta$ . (Figure d'après [97]) . . . . .	52
2.5	Vitesse de phase numérique $v_\varphi^{num}$ des ondes électromagnétiques se propageant uniquement selon $x$ ( $k = k_x$ ) en fonction du rapport $c\Delta t/\Delta x$ avec le schéma de Yee. . . . .	54
2.6	Solutions de l'équation (2.38) (avec $k_z = 0$ ) correspondant aux modes possibles pour le rayonnement Cherenkov numérique dans le plan $x - y$ pour différentes vitesses de particule $\beta$ (normalisées à $c$ ). Figure réalisée avec $c\Delta t = 0.99\Delta x$ et $\Delta y = 20\Delta x$ . . . . .	55
3.1	Schéma du profil plasma simulé . . . . .	62
3.2	Carte de densité électronique (a) et espace des phases longitudinal (b) après 2.25 mm de propagation dans le plasma. . . . .	63
3.3	Rayonnement Cherenkov numérique dans une simulation d'accélération par sillage laser : (a) présente une carte du champ $E_y$ dans le plan $(xy)$ et (b) sa transformée de Fourier, la courbe noire correspondant à la solution de l'équation (3.1) pour une particule avec $p_x \approx 100 m_e c$ . (c) présente la même carte que (a) mais avec uniquement $k_x > 2.5 \omega_0/c$ (les basses fréquences ont été filtrées). (d),(e) et (f) présentent les mêmes figures mais pour $E_z$ dans le plan $(xz)$ et l'équation (3.2). . . . .	64
3.4	Carte de champ montrant $E_z + cB_y$ , coupe dans le plan $(xz)$ . Les zones grisées correspondent aux régions de plus forte densité électronique. La figure (a) correspond à ce qu'on attend théoriquement, la figure (b) présente ce qui est observé dans la simulation. . . . .	65
3.5	Trajectoires d'une particule en présence de rayonnement Cherenkov numérique. Sur la première ligne, la figure de gauche présente la position $y$ de la particule en fonction du temps avec la couleur représentant la différence $E_y - v_x B_z$ ressentie en chaque instant. À droite, est tracée la force ressentie $F_y = -e(E_y - v_x B_z)$ en fonction de la position $y$ de la particule, à comparer à la courbe théorique $F_y = -\frac{1}{2}m_e\omega_p^2 y$ (tracée en pointillés rouges). La ligne suivante présente les figures correspondantes pour le mouvement dans le plan $(xz)$ au lieu de $(xy)$ . . . . .	66
3.6	Description du processus usuel d'interpolation des champs EM à la position d'une particule au pas de temps $n$ (représentée par le point jaune). (a) présente la configuration initiale et l'interpolation temporelle pour obtenir $\tilde{B}^n$ (flèches pointillées). (b) présente l'interpolation spatiale (flèches pointillées) de $E^n$ et $\tilde{B}^n$ sur la particule. . . . .	68

3.7	Processus modifié d'interpolation des champs EM sur la position d'une particule (représentée par le point jaune). On considère ici uniquement un maillage spatial 1D au pas de temps $n$ . (a) présente une configuration initiale identique à celle de la figure 3.6.a mais l'interpolation temporelle est remplacée par une translation de B utilisant la relation $\hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ . (b) présente donc cette fois l'interpolation spatiale de $E^n$ et $\hat{B}_i^n$ sur la particule. Toujours par souci de simplicité, les interpolations ont encore été représentées uniquement au premier ordre. . . . .	69
3.8	Erreur maximale selon la phase $\varphi$ obtenue avec les différentes méthodes d'interpolation en fonction du $k_x$ du rayonnement de type Cherenkov numérique estimé en supposant $\beta_x = 0.9998$ . . . . .	73
3.9	Différents zooms sur la carte de la force $F_y$ ressentie par une macro-particule se déplaçant à une vitesse $v_x \approx c$ . La première ligne utilise la méthode LTI, la seconde B-TIS. À droite, les symboles + et $\times$ matérialisent les points des maillages utilisés pour l'interpolation spatiale avec + pour $E^n$ , $\times$ pour $\tilde{B}^n$ et $\times$ pour $\hat{B}^n$ . . . . .	74
3.10	Cartes de densité électronique $n_e/n_c$ . (a) et (c) sont des coupes dans les plans (xy) et (xz) respectivement avec le schéma de Yee et la méthode LTI, tandis (b) et (d) sont leurs équivalents avec la méthode B-TIS. . . . .	76
3.11	Comparaison des propriétés du faisceau pour les trois simulations : (a) Charge totale injectée ( $p_x > 50 m_e c$ ) en fonction de la longueur de propagation du laser dans le plasma. (b) Distribution électronique du faisceau selon l'axe $x$ et (c) spectre en énergie des électrons accélérés, tous les deux après 2.25 mm de propagation dans le plasma. . . . .	76
3.12	Figure analogue à la figure 3.3 mais pour la simulation Yee(B-TIS) : (a) présente une carte du champ $E_y$ dans le plan (xy) et (c) sa transformée de Fourier, la courbe noire correspondant à l'équation (3.1) pour une particule avec $p_x \approx 100 m_e c$ . (e) présente la même carte que (a) mais avec uniquement $k_x > 2.5 \omega_0/c$ . (b),(d) et (f) présentent les mêmes figures mais pour $E_z$ dans le plan (xz) et l'équation (3.2). . . . .	77
3.13	Taille transverse et émittance du faisceau dans le plan (xy). (a) : carte du champ $E_x$ et distribution spatiale des particules simulées (ronds colorés). (b) : Évolution de l'émittance normalisée $\varepsilon_y$ des différents groupes d'électrons définis à la figure 3.11. Les résultats présentés en (a) et (b) correspondent à la simulation Yee(LTI), tandis que (c) et (d) sont leurs équivalents pour Lehe(LTI), (e) et (f) pour Yee(B-TIS). . . . .	78
3.14	Taille transverse et émittance du faisceau dans le plan (xz). (a) : carte du champ $E_x$ et distribution spatiale des particules simulées (ronds colorés). (b) : Évolution de l'émittance normalisée $\varepsilon_z$ des différents groupes d'électrons définis à la figure 3.11. Les résultats présentés en (a) et (b) correspondent à la simulation Yee(LTI), tandis que (c) et (d) sont leurs équivalents pour Lehe(LTI), (e) et (f) pour Yee(B-TIS). . . . .	79



3.15	Trajectoires d'une particule accélérée dans la simulation Yee(B-TIS). Sur la première ligne, la figure de gauche présente la position $y$ de la particule en fonction du temps avec la couleur représentant la différence $E_y - v_x B_z$ ressentie en chaque instant par la particule. À droite est tracée la force ressentie $F_y = -e(E_y - v_x B_z)$ en fonction de la position $y$ de la particule, à comparer à la courbe théorique $F_y = -\frac{1}{2}m_e\omega_p^2 y$ (tracée en pointillés rouges). La ligne suivante présente les figures correspondantes pour le mouvement dans le plan $(xz)$ au lieu de $(xy)$ . . . . .	81
3.16	Écart moyen entre la force transverse ressentie $F^{rec}$ et la force théorique $F^{theor}$ pour chaque particule des trois simulations. À gauche selon la direction $y$ , à droite selon la direction $z$ . . . . .	82
3.17	Comparaison des spectres en énergie du rayonnement bêatron émis par le faisceau accéléré selon les simulations. Les courbes en trait plein présentent les résultats obtenus dans les simulations en utilisant l'équation (1.98) et en intégrant sur tous les angles pour obtenir $\frac{dI}{d\omega}$ . Les courbes en trait pointillé représentent les fits synchrotron utilisant l'équation (1.85). . . . .	83
3.18	Comparaison de la distribution angulaire du rayonnement bêatron émis par le faisceau accéléré selon les simulations : (a), (b) et (c) présentent respectivement les résultats pour les simulations Yee(LTI), Lehe(LTI) et Yee(B-TIS). Ces résultats sont obtenus en intégrant sur toutes les fréquences l'équation (1.98) pour obtenir $\frac{dI}{d\Omega}$ . . . . .	84
4.1	(a) Profil temporel (potentiel vecteur normalisé $a$ ) de l'onde incidente. Le trait discontinu représente l'enveloppe trapézoïdale. (b) Situation initiale de la simulation. L'onde incidente se propageant vers la droite, la position de la particule est repérée en noir. . . . .	88
4.2	Évolution des impulsions normalisées $p_x$ (a) et $p_y$ (b) de l'électron en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ pour les différentes méthodes utilisées. Le trait discontinu rouge représente le $p_x$ (respectivement $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)). . . . .	89
4.3	Comparaison des méthodes LTI et B-TIS. On considère ici uniquement un maillage spatial 1D au pas de temps $n$ . (a) présente l'interpolation temporelle $\tilde{B}^n = \frac{1}{2}(B^{n-\frac{1}{2}} + B^{n+\frac{1}{2}})$ effectuée par LTI (b) présente les deux translations possibles de B utilisant les relations $\hat{B}_i^n = B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\hat{B}_i^n = B_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$ . . . . .	92
4.4	Évolution des impulsions normalisées $p_x$ (a) et $p_y$ (b) de l'électron en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ pour les différentes méthodes B-TIS et LTI. Le trait discontinu rouge représente le $p_x$ (respectivement $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)). . . . .	93
4.5	Évolution de l'impulsion normalisée : (a) $p_x$ , (b) $p_y$ et de la position normalisée de l'électron : (c) $x$ , (d) $y$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente la valeur attendue pour la grandeur tracée d'après le modèle théorique présenté précédemment. . . .	94

4.6	Évolution de l'impulsion normalisée (a) $p_x$ et (b) $p_y$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ avec $p_0 = m_e c$ pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente le $p_x$ (respectivement $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)). . . . .	96
4.7	Évolution de l'impulsion normalisée (a) $p_x$ et (b) $p_y$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ avec $p_0 = 5 m_e c$ pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente le $p_x$ (respectivement $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)). . . . .	97
4.8	Évolution de de l'impulsion normalisée (a) $p_x$ et (b) $p_y$ en fonction de la coordonnée normalisé $t - x$ avec $p_0 = 10 m_e c$ pour LTI et B-TIS3. Le trait discontinu rouge représente le $p_x$ (respectivement $p_y$ ) attendu d'après l'équation (4.17) (respectivement l'équation (4.18)). . . . .	98
4.9	Évolution de l'impulsion normalisée $p_x$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ avec $p_0 = 10 m_e c$ pour LTI et B-TIS3, avec deux pousseurs différents (pousseur de Boris [46] ou pousseur de Vay [90]). Le trait discontinu rouge représente le $p_x$ attendu d'après l'équation (4.17). . . . .	99
4.10	Évolution de l'impulsion normalisée $p_y$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ avec $p_0 = 10 m_e c$ pour LTI et B-TIS3, avec deux pousseurs différents (pousseur de Boris [46] ou pousseur de Vay [90]). Le trait discontinu rouge représente le $p_y$ attendu d'après l'équation (4.18). . . . .	100
4.11	Situation initiale avec une onde au profil spatial gaussien. . . . .	101
4.12	Évolution de l'impulsion normalisée (a) $p_x$ , (b) $p_y$ et de la position normalisée : (c) $x$ , (d) $y$ de l'électron en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ pour LTI et B-TIS3. . . . .	102
4.13	Évolution de l'impulsion normalisée (a) $p_x$ et (b) $p_y$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ avec $p_0 = m_e c$ pour LTI et B-TIS3, avec différentes valeurs des pas d'espace et de temps. . . . .	103
4.14	Évolution de l'impulsion normalisée $p_x$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ avec $p_0 = m_e c$ pour LTI et B-TIS3 pour différentes valeurs de la position transverse initiale $y_0$ de l'électron. . . . .	104
4.15	Évolution de l'impulsion normalisée $p_y$ en fonction de la coordonnée normalisée $t - x$ avec $p_0 = m_e c$ pour LTI et B-TIS3 pour différentes valeurs de la position transverse initiale $y_0$ de l'électron. . . . .	105
4.16	Situation initiale avec une onde au profil spatial gaussien et un ensemble d'électrons. . . . .	106
4.17	Charge contenue dans la boîte de simulation en fonction de la distance parcourue.	106
4.18	Première ligne : carte de densité électronique (nuances de gris) superposée à la carte du champ électrique $E_y$ (couleurs) après 570 $\mu\text{m}$ de propagation pour (a) LTI et (b) B-TIS3. Deuxième ligne : espace des phases $(x, p_x)$ après 570 $\mu\text{m}$ de propagation pour (c) LTI et (d) B-TIS3. . . . .	107
4.19	Première ligne : carte de densité électronique (nuances de gris) superposée à la carte du champ électrique $E_y$ (couleurs) après 950 $\mu\text{m}$ de propagation pour (a) LTI et (b) B-TIS3. Deuxième ligne : espace des phases $(x, p_x)$ après 950 $\mu\text{m}$ de propagation pour (c) LTI et (d) B-TIS3. . . . .	108

4.20 Spectre en énergie des électrons accélérés après (a) 570 $\mu\text{m}$ de propagation, (b) 950 $\mu\text{m}$ de propagation. . . . .	108
4.21 Carte de densité électronique normalisée à la densité critique $n_c$ (nuances de gris) superposée à la carte du champ électrique $E_y$ . . . . .	109
4.22 Profil temporel du champ électrique $E_y$ . . . . .	110
4.23 Carte densité électronique après 2.65 mm de propagation du laser dans le plasma, pour la simulation utilisant (a) LTI, (b) B-TIS3 . . . . .	110
4.24 Carte de l'espace des phases $(p_x, p_y)$ après 2.65 mm de propagation du laser dans le plasma, pour la simulation utilisant (a) LTI, (b) B-TIS3 . . . . .	111
4.25 Spectre en énergie des électrons accélérés après 2.65 mm de propagation du laser dans le plasma. . . . .	112

# Liste des tableaux

1.1	Valeurs d'énergies d'ionisations pour quelques gaz couramment utilisés en accélération par sillage laser ainsi que les valeurs associées d'intensité de suppression de barrière $I_{sb}$ . . . . .	15
3.1	Précision minimale assurée par chaque méthode selon les types de champs étudiés. Les applications numériques présentées dans ce tableau sont réalisées avec les paramètres de notre simulation de référence, <i>i.e.</i> $\Delta x = 0.019 \mu\text{m}$ , $\Delta y = \Delta z = 0.38 \mu\text{m}$ , $c\Delta t = 0.993 \Delta x$ . $n_e = 6.22 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3} = 3.57 \times 10^{-3} n_c$ ce qui donne $v_g \approx 0.998c$ . $\beta_x = 0.9998$ . . . . .	73



# Bibliographie

“ - *But we're a university! We have to have a library!*  
[...] *What sort of people would we be if we didn't go into  
the Library?*  
- *Students.*”

– **Terry Pratchett**, *The Last Continent*

- [1] T. Tajima and J. M. Dawson. Laser electron accelerator. *Phys. Rev. Lett.*, 43 :267–270, Jul 1979.
- [2] C. Joshi, W. B. Mori, T. Katsouleas, J. M. Dawson, J. M. Kindel, and D. W. Forslund. Ultrahigh gradient particle acceleration by intense laser-driven plasma density waves. *Nature*, 311(5986) :525–529, 1984.
- [3] C. E. Clayton, C. Joshi, C. Darrow, D. Umstadter, and F. F. Chen. Experimental study of the plasma beat wave accelerator. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 32(5) :3551–3553, Oct 1985.
- [4] Pisin Chen, J. M. Dawson, Robert W. Huff, and T. Katsouleas. Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with a plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 54 :693–696, Feb 1985.
- [5] Ian Blumenfeld, Christopher E. Clayton, Franz-Josef Decker, Mark J. Hogan, Chengkun Huang, Rasmus Ischebeck, Richard Iverson, Chandrashekhara Joshi, Thomas Katsouleas, Neil Kirby, Wei Lu, Kenneth A. Marsh, Warren B. Mori, Patric Muggli, Erdem Oz, Robert H. Siemann, Dieter Walz, and Miaomiao Zhou. Energy doubling of 42 gev electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator. *Nature*, 445 :741 EP –, Feb 2007.
- [6] Antoine Doche. *Particle acceleration with beam driven plasma wakefield*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, Ecole Polytechnique, 2018.
- [7] E. Adli, A. Ahuja, O. Apsimon, R. Apsimon, A.-M. Bachmann, D. Barrientos, F. Batsch, J. Bauche, V. K. Berglyd Olsen, M. Bernardini, T. Bohl, C. Bracco, F. Braummüller, G. Burt, B. Buttenschön, A. Caldwell, M. Cascella, J. Chappell, E. Chevally, M. Chung, D. Cooke, H. Damerau, L. Deacon, L. H. Deubner, A. Dexter, S. Doebert, J. Farmer, V. N. Fedosseev, R. Fiorito, R. A. Fonseca, F. Friebel, L. Garolfi, S. Gessner, I. Gorgisyan, A. A. Gorn, E. Granados, O. Grulke, E. Gschwendtner, J. Hansen, A. Helm, J. R. Henderson, M. Hüther, M. Ibison, L. Jensen, S. Jolly, F. Keeble, S.-Y. Kim, F. Kraus, Y. Li, S. Liu, N. Lopes, K. V. Lotov, L. Mariscalva Brun, M. Martyanov, S. Mazzoni, D. Medina Godoy, V. A. Minakov, J. Mitchell,

- J. C. Molendijk, J. T. Moody, M. Moreira, P. Muggli, E. Öz, C. Pasquino, A. Pardons, F. Peña Asmus, K. Pepitone, A. Perera, A. Petrenko, S. Pitman, A. Pukhov, S. Rey, K. Rieger, H. Ruhl, J. S. Schmidt, I. A. Shalimova, P. Sherwood, L. O. Silva, L. Soby, A. P. Sosedkin, R. Speroni, R. I. Spitsyn, P. V. Tuev, M. Turner, F. Velotti, L. Verra, V. A. Verzilov, J. Vieira, C. P. Welsch, B. Williamson, M. Wing, B. Woolley, and G. Xia. Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch. *Nature*, 561(7723) :363–367, 2018.
- [8] N.E. Andreev, L M. Gorbunov, V I. Kirsanov, A.A. Pogosova, and R R. Ramazashvili. Resonant excitation of wakefields by a laser pulse in a plasma. *JETP Letters*, 55, 01 1992.
- [9] S. P. D. Mangles, C. D. Murphy, Z. Najmudin, A. G. R. Thomas, J. L. Collier, A. E. Dangor, E. J. Divall, P. S. Foster, J. G. Gallacher, C. J. Hooker, D. A. Jaroszynski, A. J. Langley, W. B. Mori, P. A. Norreys, F. S. Tsung, R. Viskup, B. R. Walton, and K. Krushelnick. Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions. *Nature*, 431 :535–538, 2004.
- [10] J. Faure, Y. Glinec, A. Pukhov, S. Kiselev, S. Gordienko, E. Lefebvre, J.-P. Rousseau, F. Burgy, and V. Malka. A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams. *Nature*, 431 :541–544, 2004.
- [11] C. G. R. Geddes, Cs. Toth, J. van Tilborg, E. Esarey, C. B. Schroeder, D. Bruhwiler, C. Nieter, J. Cary, and W. P. Leemans. High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding. *Nature*, 431 :538–541, 2004.
- [12] F. J. McClung and R. W. Hellwarth. Giant optical pulsations from ruby. *Journal of Applied Physics*, 33(3) :828–829, 1962.
- [13] C. V. Shank and E. P. Ippen. Subpicosecond kilowatt pulses from a mode-locked cw dye laser. *Applied Physics Letters*, 24(8) :373–375, 1974.
- [14] Donna Strickland and Gerard Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics Communications*, 56(3) :219 – 221, 1985.
- [15] A. Modena, Z. Najmudin, A. E. Dangor, C. E. Clayton, K. A. Marsh, C. Joshi, V. Malka, C. B. Darrow, C. Danson, D. Neely, and F. N. Walsh. Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves. *Nature*, 377(6550) :606–608, 1995.
- [16] V. Malka, S. Fritzler, E. Lefebvre, M.-M. Aeonard, F. Burgy, J.-P. Chambaret, J.-F. Chemin, K. Krushelnick, G. Malka, S. P. D. Mangles, Z. Najmudin, M. Pittman, J.-P. Rousseau, J.-N. Scheurer, B. Walton, and A. E. Dangor. Electron acceleration by a wake field forced by an intense ultrashort laser pulse. *Science*, 298(5598) :1596–1600, 2002.
- [17] W. P. Leemans, B. Nagler, A. J. Gonsalves, Cs Tóth, K. Nakamura, C. G. R. Geddes, E. Esarey, C. B. Schroeder, and S. M. Hooker. Gev electron beams from a centimetre-scale accelerator. *Nature Physics*, 2(10) :696–699, 2006.

- [18] W. P. Leemans, A. J. Gonsalves, H.-S. Mao, K. Nakamura, C. Benedetti, C. B. Schroeder, Cs. Tóth, J. Daniels, D. E. Mittelberger, S. S. Bulanov, J.-L. Vay, C. G. R. Geddes, and E. Esarey. Multi-gev electron beams from capillary-discharge-guided subpetawatt laser pulses in the self-trapping regime. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :245002, Dec 2014.
- [19] Colin N. Danson, Constantin Haefner, Jake Bromage, Thomas Butcher, Jean-Christophe F. Chanteloup, Enam A. Chowdhury, Almantas Galvanauskas, Leonida A. Gizzi, Joachim Hein, David I. Hillier, and et al. Petawatt and exawatt class lasers worldwide. *High Power Laser Science and Engineering*, 7 :e54, 2019.
- [20] S. Corde, K. Ta Phuoc, G. Lambert, R. Fitour, V. Malka, A. Rousse, A. Beck, and E. Lefebvre. Femtosecond x rays from laser-plasma accelerators. *Rev. Mod. Phys.*, 85 :1–48, Jan 2013.
- [21] Félicie Albert and Alec G R Thomas. Applications of laser wakefield accelerator-based light sources. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 58(10) :103001, 2016.
- [22] Y. Glinec, J. Faure, L. Le Dain, S. Darbon, T. Hosokai, J. J. Santos, E. Lefebvre, J. P. Rousseau, F. Burgy, B. Mercier, and V. Malka. High-resolution  $\gamma$ -ray radiography produced by a laser-plasma driven electron source. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :025003, Jan 2005.
- [23] Zhirong Huang, Yuantao Ding, and Carl B. Schroeder. Compact x-ray free-electron laser from a laser-plasma accelerator using a transverse-gradient undulator. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :204801, Nov 2012.
- [24] Eric Esarey, Sally K. Ride, and Phillip Sprangle. Nonlinear thomson scattering of intense laser pulses from beams and plasmas. *Phys. Rev. E*, 48 :3003–3021, Oct 1993.
- [25] N. D. Powers, I. Ghebregziabher, G. Golovin, C. Liu, S. Chen, S. Banerjee, J. Zhang, and D. P. Umstadter. Quasi-monoenergetic and tunable x-rays from a laser-driven compton light source. *Nature Photonics*, 8(1) :28–31, 2014.
- [26] K. Ta Phuoc, S. Corde, C. Thaury, V. Malka, A. Tafzi, J. P. Goddet, R. C. Shah, S. Sebban, and A. Rousse. All-optical compton gamma-ray source. *Nature Photonics*, 6(5) :308–311, 2012.
- [27] Antoine Rousse, Kim Ta Phuoc, Rahul Shah, Alexander Pukhov, Eric Lefebvre, Victor Malka, Sergey Kiselev, Frédéric Burgy, Jean-Philippe Rousseau, Donald Umstadter, and Danièle Hulin. Production of a kev x-ray beam from synchrotron radiation in relativistic laser-plasma interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :135005, Sep 2004.
- [28] F. Albert, K. Ta Phuoc, R. Shah, S. Corde, R. Fitour, A. Tafzi, F. Burgy, D. Douillet, T. Lefrou, and A. Rousse. Full characterization of a laser-produced kev x-ray betatron source. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50(12) :124008, 2008.
- [29] S Fourmaux, S Corde, K Ta Phuoc, P M Leguay, S Payeur, P Lassonde, S Gnediyuk, G Lebrun, C Fourment, V Malka, S Sebban, A Rousse, and J C Kieffer. Demonstration



- of the synchrotron-type spectrum of laser-produced betatron radiation. *New Journal of Physics*, 13(3) :033017, mar 2011.
- [30] J. Ferri, S. Corde, A. Döpp, A. Lifschitz, A. Doche, C. Thaury, K. Ta Phuoc, B. Mahieu, I. A. Andriyash, V. Malka, and X. Davoine. High-brilliance betatron gamma-ray source powered by laser-accelerated electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 120 :254802, Jun 2018.
- [31] C. B. Schroeder, E. Esarey, J. van Tilborg, and W. P. Leemans. Theory of coherent transition radiation generated at a plasma-vacuum interface. *Phys. Rev. E*, 69 :016501, Jan 2004.
- [32] W. P. Leemans, C. G. R. Geddes, J. Faure, Cs. Tóth, J. van Tilborg, C. B. Schroeder, E. Esarey, G. Fubiani, D. Auerbach, B. Marcellis, M. A. Carnahan, R. A. Kaindl, J. Byrd, and M. C. Martin. Observation of terahertz emission from a laser-plasma accelerated electron bunch crossing a plasma-vacuum boundary. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :074802, Aug 2003.
- [33] J. Déchard, A. Debayle, X. Davoine, L. Gremillet, and L. Bergé. Terahertz pulse generation in underdense relativistic plasmas : From photoionization-induced radiation to coherent transition radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 120 :144801, Apr 2018.
- [34] J. Déchard, X. Davoine, and L. Bergé. Thz generation from relativistic plasmas driven by near- to far-infrared laser pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 123 :264801, Dec 2019.
- [35] Kim Ta Phuoc, Sebastien Corde, Rahul Shah, Felicie Albert, Romuald Fitour, Jean-Philippe Rousseau, Frédéric Burgy, Brigitte Mercier, and Antoine Rousse. Imaging electron trajectories in a laser-wakefield cavity using betatron x-ray radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :225002, Nov 2006.
- [36] S. Fourmaux, S. Corde, K. Ta Phuoc, P. Lassonde, G. Lebrun, S. Payeur, F. Martin, S. Sebban, V. Malka, A. Rousse, and J. C. Kieffer. Single shot phase contrast imaging using laser-produced betatron x-ray beams. *Opt. Lett.*, 36(13) :2426–2428, Jul 2011.
- [37] Bo Guo, Xiaohui Zhang, Jie Zhang, Jianfei Hua, Chih-Hao Pai, Chaojie Zhang, Hsu-Hsin Chu, Warren Mori, Chan Joshi, Jyhpyng Wang, and Wei Lu. High-resolution phase-contrast imaging of biological specimens using a stable betatron x-ray source in the multiple-exposure mode. *Scientific Reports*, 9(1) :7796, 2019.
- [38] J. Wenz, S. Schleede, K. Khrennikov, M. Bech, P. Thibault, M. Heigoldt, F. Pfeiffer, and S. Karsch. Quantitative x-ray phase-contrast microtomography from a compact laser-driven betatron source. *Nature Communications*, 6(1) :7568, 2015.
- [39] J. M. Cole, J. C. Wood, N. C. Lopes, K. Poder, R. L. Abel, S. Alatabi, J. S. J. Bryant, A. Jin, S. Kneip, K. Mecseki, D. R. Symes, S. P. D. Mangles, and Z. Najmudin. Laser-wakefield accelerators as hard x-ray sources for 3d medical imaging of human bone. *Scientific Reports*, 5(1) :13244, 2015.

- [40] A. Döpp, L. Hehn, J. Götzfried, J. Wenz, M. Gilljohann, H. Ding, S. Schindler, F. Pfeiffer, and S. Karsch. Quick x-ray microtomography using a laser-driven betatron source. *Optica*, 5(2) :199–203, Feb 2018.
- [41] K. Svendsen, I. Gallardo González, M. Hansson, J. Björklund Svensson, H. Ekerfelt, A. Persson, and O. Lundh. Optimization of soft x-ray phase-contrast tomography using a laser wakefield accelerator. *Opt. Express*, 26(26) :33930–33941, Dec 2018.
- [42] S. Fourmaux, E. Hallin, P. G. Arnison, and J. C. Kieffer. Optimization of laser-based synchrotron x-ray for plant imaging. *Applied Physics B*, 125(3) :34, Feb 2019.
- [43] M. Z. Mo, Z. Chen, S. Fourmaux, A. Saraf, S. Kerr, K. Otani, R. Masoud, J.-C. Kieffer, Y. Tsui, A. Ng, and R. Fedosejevs. Measurements of ionization states in warm dense aluminum with betatron radiation. *Phys. Rev. E*, 95 :053208, May 2017.
- [44] B. Mahieu, N. Jourdain, K. Ta Phuoc, F. Dorchies, J.-P. Goddet, A. Lifschitz, P. Renaudin, and L Lecherbourg. Probing warm dense matter using femtosecond x-ray absorption spectroscopy with a laser-produced betatron source. *Nature Communications*, 9 :3276, 2018.
- [45] Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307, May 1966.
- [46] J. P. Boris. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. In *Proceeding of Fourth Conference on Numerical Simulations of Plasmas*, page 3–67. Naval Res. Lab, November 1970.
- [47] John M. Dawson. Particle simulation of plasmas. *Rev. Mod. Phys.*, 55 :403–447, Apr 1983.
- [48] Alex Friedman, David P. Grote, and Irving Haber. Three-dimensional particle simulation of heavy-ion fusion beams. *Physics of Fluids B : Plasma Physics*, 4(7) :2203–2210, 1992.
- [49] J-L Vay, D P Grote, R H Cohen, and A Friedman. Novel methods in the particle-in-cell accelerator code-framework warp. *Computational Science & Discovery*, 5(1) :014019, dec 2012.
- [50] R. A. Fonseca, L. O. Silva, F. S. Tsung, V. K. Decyk, W. Lu, C. Ren, W. B. Mori, S. Deng, S. Lee, T. Katsouleas, and J. C. Adam. Osiris : A three-dimensional, fully relativistic particle in cell code for modeling plasma based accelerators. In Peter M. A. Sloot, Alfons G. Hoekstra, C. J. Kenneth Tan, and Jack J. Dongarra, editors, *Computational Science — ICCS 2002*, pages 342–351, Berlin, Heidelberg, 2002. Springer Berlin Heidelberg.
- [51] E Lefebvre, N Cochet, S Fritzler, V Malka, M.-M Al onard, J.-F Chemin, S Darbon, L Disdier, J Faure, A Fedotoff, O Landoas, G Malka, V M ot, P Morel, M. Rabec Le Gloahec, A Rouyer, Ch Rubbelynck, V Tikhonchuk, R Wrobel, P Audebert,

- and C Rousseaux. Electron and photon production from relativistic laser–plasma interactions. *Nuclear Fusion*, 43(7) :629–633, jul 2003.
- [52] A.F. Lifschitz, X. Davoine, E. Lefebvre, J. Faure, C. Rechatin, and V. Malka. Particle-in-cell modelling of laser–plasma interaction using fourier decomposition. *Journal of Computational Physics*, 228(5) :1803 – 1814, 2009.
- [53] T D Arber, K Bennett, C S Brady, A Lawrence-Douglas, M G Ramsay, N J Sircombe, P Gillies, R G Evans, H Schmitz, A R Bell, and C P Ridgers. Contemporary particle-in-cell approach to laser-plasma modelling. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 57(11) :113001, sep 2015.
- [54] J. Derouillat, A. Beck, F. Pérez, T. Vinci, M. Chiaramello, A. Grassi, M. Flé, G. Bouchard, I. Plotnikov, N. Aunai, J. Dargent, C. Riconda, and M. Grech. Smilei : A collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation. *Computer Physics Communications*, 222 :351 – 373, 2018.
- [55] A. Pukhov and J. Meyer-ter Vehn. Laser wake field acceleration : the highly non-linear broken-wave regime. *Applied Physics B*, 74(4) :355–361, Apr 2002.
- [56] I. Kostyukov, A. Pukhov, and S. Kiselev. Phenomenological theory of laser-plasma interaction in "bubble" regime. *Physics of Plasmas*, 11(11) :5256–5264, 2004.
- [57] W. Lu, C. Huang, M. Zhou, M. Tzoufras, F. S. Tsung, W. B. Mori, and T. Katsouleas. A nonlinear theory for multidimensional relativistic plasma wave wakefields. *Physics of Plasmas*, 13(5) :056709, 2006.
- [58] F. Albert, B. B. Pollock, J. L. Shaw, K. A. Marsh, J. E. Ralph, Y.-H. Chen, D. Alessi, A. Pak, C. E. Clayton, S. H. Glenzer, and C. Joshi. Angular dependence of betatron x-ray spectra from a laser-wakefield accelerator. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :235004, Dec 2013.
- [59] Andreas Döpp, Benoit Mahieu, Agustin Lifschitz, Cedric Thauray, Antoine Doche, Emilien Guillaume, Gabriele Grittani, Olle Lundh, Martin Hansson, Julien Gautier, Michaela Kozlova, Jean Philippe Goddet, Pascal Rousseau, Amar Tafzi, Victor Malka, Antoine Rousse, Sebastien Corde, and Kim Ta Phuoc. Stable femtosecond x-rays with tunable polarization from a laser-driven accelerator. *Light : Science & Applications*, 6 :e17086, 2017.
- [60] J. Ferri and X. Davoine. Enhancement of betatron x rays through asymmetric laser wakefield generated in transverse density gradients. *Phys. Rev. Accel. Beams*, 21 :091302, Sep 2018.
- [61] B. Martinez, M. Lobet, R. Duclous, E. d’Humières, and L. Gremillet. High-energy radiation and pair production by coulomb processes in particle-in-cell simulations. *Physics of Plasmas*, 26(10) :103109, 2019.

- [62] A. Kramida, Yu. Ralchenko, J. Reader, and NIST ASD Team. NIST Atomic Spectra Database (ver. 5.7.1), [Online]. Available : <https://physics.nist.gov/asd> [2020, February 24]. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD., 2019.
- [63] E. Esarey, P. Sprangle, J. Krall, and A. Ting. Overview of plasma-based accelerator concepts. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 24(2) :252–288, April 1996.
- [64] Eric Esarey and Mark Pilloff. Trapping and acceleration in nonlinear plasma waves. *Physics of Plasmas*, 2(5) :1432–1436, 1995.
- [65] T. Katsouleas, S. Wilks, P. Chen, J. M. Dawson, and J. J. Su. Beam loading in plasma accelerators. *Particle Accelerators*, 22(1) :81–99, 1987.
- [66] C. Rechatin, X. Davoine, A. Lifschitz, A. Ben Ismail, J. Lim, E. Lefebvre, J. Faure, and V. Malka. Observation of beam loading in a laser-plasma accelerator. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :194804, Nov 2009.
- [67] M. Tzoufras, W. Lu, F. S. Tsung, C. Huang, W. B. Mori, T. Katsouleas, J. Vieira, R. A. Fonseca, and L. O. Silva. Beam loading in the nonlinear regime of plasma-based acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :145002, Sep 2008.
- [68] G. Fubiani, E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans. Beat wave injection of electrons into plasma waves using two interfering laser pulses. *Phys. Rev. E*, 70 :016402, Jul 2004.
- [69] E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Rev. Mod. Phys.*, 81 :1229–1285, Aug 2009.
- [70] I. Kostyukov, E. Nerush, A. Pukhov, and V. Seredov. Electron self-injection in multi-dimensional relativistic-plasma wake fields. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :175003, Oct 2009.
- [71] S. Kalmykov, S. A. Yi, V. Khudik, and G. Shvets. Electron self-injection and trapping into an evolving plasma bubble. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :135004, Sep 2009.
- [72] S. Bulanov, N. Naumova, F. Pegoraro, and J. Sakai. Particle injection into the wave acceleration phase due to nonlinear wake wave breaking. *Phys. Rev. E*, 58 :R5257–R5260, Nov 1998.
- [73] H. Suk, N. Barov, J. B. Rosenzweig, and E. Esarey. Plasma electron trapping and acceleration in a plasma wake field using a density transition. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :1011–1014, Feb 2001.
- [74] Henrik Ekerfelt, Martin Hansson, Isabel Gallardo González, Xavier Davoine, and Olle Lundh. A tunable electron beam source using trapping of electrons in a density down-ramp in laser wakefield acceleration. *Scientific Reports*, 7(12229) :2045–2322, Sep 2017.
- [75] E. Esarey, R. F. Hubbard, W. P. Leemans, A. Ting, and P. Sprangle. Electron injection into plasma wakefields by colliding laser pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :2682–2685, Oct 1997.

- [76] J. Faure, C. Rechatin, A. Norlin, A. Lifschitz, Y. Glinec, and V. Malka. Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses. *Nature*, 444(7120) :737–739, 2006.
- [77] X. Davoine, E. Lefebvre, J. Faure, C. Rechatin, A. Lifschitz, and V. Malka. Simulation of quasimonoenergetic electron beams produced by colliding pulse wakefield acceleration. *Physics of Plasmas*, 15(11) :113102, 2008.
- [78] E. Oz, S. Deng, T. Katsouleas, P. Muggli, C. D. Barnes, I. Blumenfeld, F. J. Decker, P. Emma, M. J. Hogan, R. Ischebeck, R. H. Iverson, N. Kirby, P. Krejcik, C. O’Connell, R. H. Siemann, D. Walz, D. Auerbach, C. E. Clayton, C. Huang, D. K. Johnson, C. Joshi, W. Lu, K. A. Marsh, W. B. Mori, and M. Zhou. Ionization-induced electron trapping in ultrarelativistic plasma wakes. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :084801, Feb 2007.
- [79] A. Pak, K. A. Marsh, S. F. Martins, W. Lu, W. B. Mori, and C. Joshi. Injection and trapping of tunnel-ionized electrons into laser-produced wakes. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :025003, Jan 2010.
- [80] S. Gordienko and A. Pukhov. Scalings for ultrarelativistic laser plasmas and quasimonoenergetic electrons. *Physics of Plasmas*, 12(4) :043109, 2005.
- [81] W. Lu, C. Huang, M. Zhou, W. B. Mori, and T. Katsouleas. Nonlinear theory for relativistic plasma wakefields in the blowout regime. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :165002, Apr 2006.
- [82] W. Lu, M. Tzoufras, C. Joshi, F. S. Tsung, W. B. Mori, J. Vieira, R. A. Fonseca, and L. O. Silva. Generating multi-gev electron bunches using single stage laser wakefield acceleration in a 3d nonlinear regime. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 10 :061301, Jun 2007.
- [83] C. D. Decker, W. B. Mori, K.-C. Tzeng, and T. Katsouleas. The evolution of ultra-intense, short-pulse lasers in underdense plasmas. *Physics of Plasmas*, 3(5) :2047–2056, 1996.
- [84] John D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, chapter 14 Radiation by moving charges, pages 661–693. John Wiley & sons, 1998.
- [85] N. N. Bogoliubov. Kinetic equations. *Journal of Physics-USSR*, 10(256) :265, 1946.
- [86] Max Born and H. S. Green. A general kinetic theory of liquids i. the molecular distribution functions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 188(1012) :10–18, 1946.
- [87] John G. Kirkwood. The statistical mechanical theory of transport processes i. general theory. *The Journal of Chemical Physics*, 14(3) :180–201, 1946.
- [88] Jacques Yvon. *La théorie statistique des fluides et l’équation d’état*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann & cie, 1935.

- [89] Mathieu Lobet. *Effets radiatifs et d'électrodynamique quantique dans l'interaction laser-matière ultra-relativiste*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2015.
- [90] J.-L. Vay. Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity. *Physics of Plasmas*, 15(5) :056701, 2008.
- [91] T.Zh. Esirkepov. Exact charge conservation scheme for particle-in-cell simulation with an arbitrary form-factor. *Computer Physics Communications*, 135(2) :144 – 153, 2001.
- [92] Brendan B Godfrey. Numerical cherenkov instabilities in electromagnetic particle codes. *Journal of Computational Physics*, 15(4) :504 – 521, 1974.
- [93] BB Godfrey. Time-biased field solver for electromagnetic pic codes. In *Proceedings of the Ninth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, 1980.
- [94] P. W. Rambo, J. J. Ambrosiano, A. Friedman, and D. E. Nielsen, Jr. Temporal and spatial filtering remedies for dispersion in electromagnetic particle codes. In *13th Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, July 1989.
- [95] A. Friedman, J.J. Ambrosiano, J.K. Boyd, S.T. Brandon, D.E. Jr. Nielsen, and P.W. Rambo. Damped time advance methods for particles and em fields. In *US-Japan workshop on advances in simulation techniques applied to plasmas and fusion*. Lawrence Livermore National Lab., CA (USA), 10 1990.
- [96] Alex Friedman. A second-order implicit particle mover with adjustable damping. *Journal of Computational Physics*, 90(2) :292 – 312, 1990.
- [97] John D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, chapter 13 Energy Loss, Scattering; Cherenkov and Transition Radiation, pages 631–640. John Wiley & sons, 1998.
- [98] R. Lehe, A. Lifschitz, C. Thaury, V. Malka, and X. Davoine. Numerical growth of emittance in simulations of laser-wakefield acceleration. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 16 :021301, Feb 2013.
- [99] Andrew D. Greenwood, Keith L. Cartwright, John W. Luginsland, and Ernest A. Baca. On the elimination of numerical cherenkov radiation in pic simulations. *Journal of Computational Physics*, 201(2) :665 – 684, 2004.
- [100] Xinlu Xu, Peicheng Yu, Samuel F. Martins, Frank S. Tsung, Viktor K. Decyk, Jorge Vieira, Ricardo A. Fonseca, Wei Lu, Luis O. Silva, and Warren B. Mori. Numerical instability due to relativistic plasma drift in em-pic simulations. *Computer Physics Communications*, 184(11) :2503 – 2514, 2013.
- [101] Brendan B. Godfrey and Jean-Luc Vay. Suppressing the numerical cherenkov instability in fdtd pic codes. *Journal of Computational Physics*, 267 :1 – 6, 2014.
- [102] Remi Lehe, Manuel Kirchen, Brendan B. Godfrey, Andreas R. Maier, and Jean-Luc Vay. Elimination of numerical cherenkov instability in flowing-plasma particle-in-cell simulations by using galilean coordinates. *Phys. Rev. E*, 94 :053305, Nov 2016.

- [103] Rachel Nuter and Vladimir Tikhonchuk. Suppressing the numerical cherenkov radiation in the yee numerical scheme. *Journal of Computational Physics*, 305 :664 – 676, 2016.
- [104] Alexander Blinne, David Schinkel, Stephan Kuschel, Nina Elkina, Sergey G. Rykovanov, and Matt Zepf. A systematic approach to numerical dispersion in maxwell solvers. *Computer Physics Communications*, 224 :273 – 281, 2018.
- [105] Q. H. Liu. The pstd algorithm : A time-domain method requiring only two cells per wavelength. *Microwave and Optical Technology Letters*, 15(3) :158–165, 1997.
- [106] Brendan B. Godfrey and Jean-Luc Vay. Improved numerical cherenkov instability suppression in the generalized pstd pic algorithm. *Computer Physics Communications*, 196 :221 – 225, 2015.
- [107] S. Jalas, I. Dornmair, R. Lehe, H. Vincenti, J.-L. Vay, M. Kirchen, and A. R. Maier. Accurate modeling of plasma acceleration with arbitrary order pseudo-spectral particle-in-cell methods. *Physics of Plasmas*, 24(3) :033115, 2017.
- [108] J.-L. Vay, C.G.R. Geddes, E. Cormier-Michel, and D.P. Grote. Numerical methods for instability mitigation in the modeling of laser wakefield accelerators in a lorentz-boosted frame. *Journal of Computational Physics*, 230(15) :5908 – 5929, 2011.
- [109] E. N. Nerush and I. Yu. Kostyukov. Carrier-envelope phase effects in plasma-based electron acceleration with few-cycle laser pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :035001, Jul 2009.
- [110] J. B. Cole. High-accuracy yee algorithm based on nonstandard finite differences : new developments and verifications. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 50(9) :1185–1191, Sep. 2002.
- [111] Mikko Karkkainen, Erion Gjonaj, Thomas Lau, and Thomas Weiland. Low-dispersion wake field calculation tools. 2006.
- [112] Pierre-Louis Bourgeois and Xavier Davoine. New mitigation approach to numerical cherenkov radiation in pic simulations of wakefield accelerators. *Journal of Computational Physics*, page 109426, 2020.
- [113] Eric Esarey, Phillip Sprangle, and Jonathan Krall. Laser acceleration of electrons in vacuum. *Phys. Rev. E*, 52 :5443–5453, Nov 1995.
- [114] Brice Quesnel and Patrick Mora. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum. *Phys. Rev. E*, 58 :3719–3732, Sep 1998.
- [115] Wei Yu, M. Y. Yu, J. X. Ma, Z. M. Sheng, J. Zhang, H. Daido, S. B. Liu, Z. Z. Xu, and R. X. Li. Ponderomotive acceleration of electrons at the focus of high intensity lasers. *Phys. Rev. E*, 61 :R2220–R2223, Mar 2000.

- [116] D. Cline, L. Shao, X. Ding, Y. Ho, Q. Kong, and P. Wang. First observation of acceleration of electrons by a laser in a vacuum. *Journal of Modern Physics* 10.4236/jmp.2013.41001, Vol. 4 No. 1 :1–6, 2013.
- [117] C. Varin, S. Payeur, V. Marceau, S. Fourmaux, A. April, B. Schmidt, P.-L. Fortin, N. Thiré, T. Brabec, F. Légaré, J.-C. Kieffer, and M. Piché. Direct electron acceleration with radially polarized laser beams. *Applied Science*, 3 :70–93, 2013.
- [118] Neil Zaim. *Modeling electron acceleration driven by relativistic intensity few-cycle laser pulses on overdense plasmas*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2019.
- [119] N. Zaïm, M. Thévenet, A. Lifschitz, and J. Faure. Relativistic acceleration of electrons injected by a plasma mirror into a radially polarized laser beam. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :094801, Aug 2017.







**Titre :** Modélisation de sources X synchrotron générées par interaction laser-plasma en régime relativiste

**Mots clés :** Interaction Laser-plasma, Codes PIC (Particle-In-Cell), Rayonnement Cherenkov numérique, Rayonnement Bêatron

**Résumé :** Lors de la propagation d'une impulsion laser ultra courte, ultra intense dans un gaz de faible densité, un plasma est créé et une partie des électrons vont pouvoir être accélérés grâce à la technique de sillage laser à des énergies de plusieurs GeV en quelques centimètres. Ces électrons, lors de leur accélération, émettent un rayonnement X appelé bêatron, qui est fortement collimaté et possède de très bonnes propriétés spatiales et temporelles, lui donnant de nombreuses applications dont l'imagerie ultra-haute résolution.

Dans cette thèse, on étudie comment améliorer les outils numériques utilisés pour simuler ces phénomènes physiques : les codes Particle-In-Cell (CALDER). On s'intéresse notamment à un artefact numérique appelé rayonnement Cherenkov numérique, qui survient lorsque les particules accélérés se déplacent à des vitesses proches de la vitesse de la lumière dans le vide.

On démontre que cet artefact a un effet néfaste sur le comportement du faisceau d'électrons accélérés, en particulier sur son mouvement transverse, ce qui

conduit à des erreurs importantes sur le calcul du rayonnement bêatron à partir des simulations PIC. On propose alors une nouvelle approche pour limiter l'impact de ce rayonnement Cherenkov numérique sur les simulations d'accélération par sillage laser en modifiant la méthode d'interpolation des champs habituellement utilisée dans un code PIC. Les résultats obtenus avec cette nouvelle technique mettent en évidence une nette amélioration de la modélisation du mouvement des électrons, qui se rapproche du comportement attendu théoriquement. Fort de ces premiers résultats, d'autres applications de cette technique sont ensuite explorées, pour améliorer la modélisation des sources bêatron, de l'accélération par laser dans le vide ou de l'accélération directe par laser.

La plus grande précision sur le calcul du mouvement transverse des particules qu'apporte cette nouvelle méthode permet d'améliorer les résultats mais aussi d'étudier des phénomènes physiques aux effets subtils qui sont autrement cachés par le bruit numérique des simulations.

**Title :** Modelization of synchrotron X ray sources created by laser-plasma interaction in the relativistic regime

**Keywords :** Laser-plasma interaction, PIC codes, Numerical Cherenkov Radiation, Betatron radiation

**Abstract :** When an ultra-short ultra-intense laser impulsion propagates through a low density gas jet, a plasma is created and a bunch of electrons can be accelerated through laser wakefield acceleration to GeV energies in only a few centimetres. Those accelerated electrons then emit what is called Betatron radiation: a highly focused X-ray source with extremely good spatial and temporal properties, which has a lot of possible applications including ultra-high resolution imaging.

In this thesis, we investigate possible improvements to one of the main numerical tools used to simulate those phenomenons: the Particle-In-Cell codes (CALDER). We have especially studied a numerical artefact called the numerical Cherenkov radiation, that occurs when relativistic particles move at speeds approaching the speed of light in a vacuum.

We show that this artefact has a negative impact on the behaviour of the accelerated electron beam, espe-

cially on its transverse motion, which leads to important errors on the betatron radiation calculated using PIC simulations. We then introduce a new approach to mitigate the impact of this numerical Cherenkov radiation on laser wakefield acceleration simulation with a simple modification of the electromagnetic field interpolation method used in PIC codes. The results obtained with this new technique show a meaningful improvement on the electron motion which becomes close to the theoretically expected behaviour. We then explore other possible applications for this new technique, notably improving the modelization of betatron sources, vacuum laser acceleration or direct laser acceleration. The improvement of the computation of the particles transverse motion thanks to this new method leads to more accurate results but also enables us to study physical phenomenon with subtle effects that would otherwise be hidden among the numerical noise of the simulation.