



HAL
open science

Problème de l'auto-contact avec frottement dans une tige élastique et solutions analytiques approximatives pour des problèmes d'obstacles.

Mohamed Ali Latrach

► **To cite this version:**

Mohamed Ali Latrach. Problème de l'auto-contact avec frottement dans une tige élastique et solutions analytiques approximatives pour des problèmes d'obstacles.. Mathématiques [math]. UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR - ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS, 2020. Français. NNT: . tel-03091354

HAL Id: tel-03091354

<https://hal.science/tel-03091354>

Submitted on 30 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR
ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS



Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur



THÈSE DE DOCTORAT

En vue de l'obtention du titre de
Docteur en Mathématiques Appliquées

Présenté par
Mohamed Ali Latrach

Sujet
**Problème de l'auto-contact avec frottement
dans une tige élastique**
-Solutions analytiques approximatives pour des problèmes d'obstacles-

Soutenu le 24/06/2020 devant le jury composé de :

Maher Moakher	Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis	Président
Mekki Ayadi	Ecole Supérieure des Sciences et Technologies de Hammam Sousse	Directeur
Mourad Chamekh	Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis	Co-directeur
Mohamed Mahdi Tekitek	Faculté des Sciences de Tunis	Rapporteur
Adel Blouza	Université de Rouen	Rapporteur
Saloua Aouadi	Faculté des Sciences de Tunis	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier, tout particulièrement, mes directeurs de thèse le Pr. Mekki Ayadi et le Pr. Belhassen Dahmen pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée, leurs patiences et leurs conseils, leurs qualités humaines qui ont très largement contribué à un environnement de travail agréable, qu'ils reçoivent l'expression de toute ma gratitude.

Je souhaite remercier très vivement M. Mourad Chamekh qui m'a co-dirigé tout au long de ces années de thèse, pour ses contributions en temps et en idées pour faire mon doctorat. Je tiens à lui exprimer ma sincère gratitude pour ses idées, conseils et ses encouragements continus. J'apprécie hautement ses connaissances approfondies et son précieux soutien pour ma recherche.

Ma profonde gratitude à mon conseiller scientifique, le Pr. Yves Renard qui m'avait accueilli au sein du laboratoire ICJ à L'INSA de Lyon, qu'il m'a fait profiter tant de ses suggestions fructueuses, et n'a cessé de m'orienter en m'encadrant durant mon stage aussi bien durant toutes les années de ma thèse après ce stage. Il m'a fait découvrir un autre chemin et m'a donné un autre goût pour la recherche.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, doctorants et toutes les personnes au sein du laboratoire LAMSIN qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches. Je voudrais remercier tout particulièrement le Pr. Maher Moakher pour ses discussions fructueuses au cours de ce travail, et mon ami proche M. Nizar Ferchichi pour son soutien et son encouragement extraordinaires et inconditionnels.

Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à M. Adel Blouza, Maître de conférences à l'Université de Rouen, d'avoir accepté d'être rapporteurs ainsi que M. Mohamed Mahdi Tekitek, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Tunis. Je voudrais de plus remercier grandement M. Maher Moakher, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, et Mme. Saloua Aouadi, Professeur à la Faculté des Sciences de Tunis d'avoir participé au jury de cette thèse et de l'intérêt qu'ils ont manifesté.

Enfin, je tiens évidemment à remercier très vivement toute ma famille, qui a toujours été là pour moi. Son soutien inconditionnel et son encouragement extraordinaire ont été d'une grande aide.

Résumé

Cette thèse est composée de deux parties. Dans la première partie, nous proposons d'étudier la modélisation d'une tige hyperélastique en grands déplacements se déformant dans un espace à trois dimensions en présence de l'auto-contact avec frottement décrit par la loi de Coulomb. En comparaison avec d'autres travaux, le sujet de contact avec frottement est considéré comme un problème en lui-même. Ce problème génère des contraintes non linéaires entraînant des difficultés pour l'analyse mathématique et numérique. Pour relaxer le problème de ces contraintes, une méthode du Lagrangien augmenté a été utilisée. En conséquence, nous avons surmonté la nature implicite des formules d'auto-contact avec frottement de Signorini-Coulomb. Nous avons également présenté un résultat de l'existence de la solution. D'autre part, nous avons proposé une approche qui peut être utile pour une implémentation numérique de ce problème.

Dans la deuxième partie, nous proposons d'utiliser une méthode semi-analytique qui s'appelle la méthode de He ou «Variational Iteration Method» pour approximer des solutions à certains problèmes d'obstacle. Par exemple, nous avons traité le problème du contact d'une poutre déformée en présence d'une fondation élastique en tant que problème d'obstacle, suivi par des exemples linéaires et non linéaires pouvant couvrir d'autres applications physiques.

Mots clés : Auto-contact ; Frottement ; Vecteur distance ; Vitesse de glissement tangentielle ; Frottement de Signorini-Coulomb ; Problèmes d'obstacle ; Méthodes de pénalisation ; Méthode d'itération variationnelle (VIM).

Abstract

This thesis consists of two parts. In the first part, we studied the modeling of a hyperelastic rod during large displacements in the presence of a frictional self-contact described by the Coulomb's law. Compared to other works the self-contact with friction is considered as a problem in itself. This problem generates non-linear constraints leading to difficulties in mathematical and numerical analysis. To simplify the problem, an augmented Lagrangian method was used. As a result, we overcame the implicit nature of the Signorini-Coulomb-self-contact formulas. We presented, on one side, a result of the existence of the solution. On the other side, we have proposed an approach that can be used for a numerical implementation of this problem.

In the second part, we propose to use a semi-analytical method called the He's method or «Variational Iteration Method» to give approximate solutions to some obstacle problems. For example, we have studied the contact problem of a deformed beam in the presence of an elastic foundation as an obstacle problem, followed by linear and non-linear examples that can cover other physical applications.

Keywords : Frictional self-contact ; Gap vector ; Tangential sliding velocity ; Signorini-Coulomb friction ; Obstacle problems ; Penalty function method ; Variational Iteration Method (VIM).

Table des matières

Table des figures	9
Nomenclature	10
1 Introduction générale	13
1.1 Généralités et motivation	13
1.2 Présentation de la thèse	14
1.3 Hypothèses et notations utilisées	16
1.4 Plan de thèse	17
I Problème de l’auto-contact frottant dans une tige élastique	19
2 Modélisation d’une tige élastique	21
2.1 Introduction	21
2.2 Théorie géométriquement exacte d’une tige élastique (GET)	21
2.2.1 Modèle de Cosserat	22
2.2.2 Description géométrique	25
2.2.3 Description cinématique et mesures de déformations	27
2.3 Formulation variationnelle : cas sans contact	30
2.3.1 Équations d’équilibre et loi de comportement	30
2.3.2 Expression de l’énergie totale	33
2.3.3 Espace des variations admissibles	33
2.3.4 Variation première de l’énergie	34
3 Modélisation de l’auto-contact avec frottement	39
3.1 Introduction	39
3.2 Modélisation de l’auto-contact	39
3.2.1 Géométrie de l’auto-contact	40
3.2.2 Distance d’auto-contact	40

3.3	Caractérisation du frottement	42
3.4	Loi de frottement de Signorini-Coulomb	44
3.5	Formulation variationnelle : Problématique du frottement dans le cas de grands déplacements	46
4	Implémentation numérique	49
4.1	Introduction	49
4.2	Formulation variationnelle faible	49
4.3	Existence d'une solution pour le problème pénalisé	55
4.4	Linéarisation de travail virtuel dû au contact avec frottement	57
II	Méthode d'Itération Variationnelle : VIM	61
5	Solutions approximatives pour des problèmes d'obstacles	63
5.1	Introduction	63
5.2	Problème d'obstacle	63
5.3	Méthode de pénalisation	64
5.4	Méthode d'itération variationnelle	65
5.5	Des exemples numériques	66
5.5.1	Problème d'obstacle linéaire de troisième ordre	66
5.5.2	Problème d'obstacle non linéaire de troisième ordre	71
	Conclusion	75
	Bibliographie	77

Table des figures

2.1	Les différentes configurations d'une tige.	26
2.2	Équilibre des forces et moments appliqués sur un petit morceau de la tige,.	32
3.1	Exemples de situations où $\mathbf{r}'(s)$ et $\mathbf{r}'(\bar{s})$ sont orthogonaux.	41
3.2	Situation physiquement admissible et situation physiquement non admissible d'une tige élastique déformée.	42
3.3	Domaine de la loi de Signorini-Coulomb.	45
4.1	Représentation graphique de la force de contact et de frottement en fonction de la distance du contact et la vitesse de glissement tangentielle données par les conditions de Kuhn-Tucker et les conditions de frottement de Signorini-Coulomb (en haut) et la méthode de pénalisation (en bas). Si μ_N et μ_T tendent vers zéro les deux diagrammes coïncident.	54
5.1	Courbes comparatives entre la solution exacte et la solution VIM à deux itérations.	70
5.2	La courbe d'erreur relative	71
5.3	Courbes comparatives entre la solution VIM à deux itérations et la solution Ado- mian.	73

Nomenclature

l, ε	Longueur et rayon de la tige.
$(O; \mathbf{e}_i)_i$	Repère spatial fixé sur l'extrémité de la tige dans la configuration initiale.
$(\mathbf{r}_{0i}; \mathbf{d}_{0i})_i$	Repère orthonormé local dans la configuration de référence.
$(\mathbf{r}_i; \mathbf{d}_i)_i$	Repère orthonormé local dans la configuration déformée.
$SO(3)$	Groupe des rotations 3D.
$\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_r, \mathbf{R}$	Tenseurs orthogonaux : $\mathbf{R}_0 = \mathbf{d}_{0i} \otimes \mathbf{e}_i$, $\mathbf{R}_r = \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_{0i}$ et $\mathbf{R} = \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{e}_i$.
$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_r, \mathbf{r}$	Vecteurs déplacements pour chaque configuration.
\mathbf{v}	Dérivée du vecteur déplacement \mathbf{r} .
\mathbf{u}	Vecteur axial associé au tenseur antisymétrique $\mathbf{R}'\mathbf{R}^T$: $\mathbf{u} = \text{axial}(\mathbf{R}'\mathbf{R}^T)$.
\mathbf{v}, \mathbf{u}	Mesures de déformations $\mathbf{v} = \mathbf{R}^T \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} = \mathbf{R}^T \mathbf{u}$.
$\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_r, \boldsymbol{\theta}$	Vecteurs des rotations $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_r$ et \mathbf{R} .
$(b_{00}, \mathbf{b}_0), (b_{0r}, \mathbf{b}_r), (b_0, \mathbf{b})$	Couples de quaternions associés aux tenseurs orthogonaux $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_r$ et \mathbf{R} .
\mathcal{V}	Espace des configurations admissibles.
\mathbf{p}, \mathbf{q}	Variations admissibles de déplacement et de rotation.
$T_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})}\mathcal{V}$	Espace des variations admissibles : Espace tangent à \mathcal{V} .
\mathbf{n}	Résultante de la force intérieure.
\mathbf{m}	Moment intérieur résultant.
\mathcal{W}	Densité d'énergie.
$\mathbf{f}, \mathbf{f}_i, i = 1, 2$	Forces extérieures.
\mathbf{f}_c	Force d'auto-contact avec frottement.
\mathbf{N}, \mathbf{T}	Vecteur unitaire normal et vecteur unitaire tangent.

f_N, \mathbf{f}_T	Contrainte normale et contrainte tangentielle.
μ_N, μ_T	Paramètre de pénalité normale et paramètre de pénalité tangentielle.
$f_N^{\mu_N}, \mathbf{f}_T^{\mu_T}$	Contrainte pénalisée normale et contrainte pénalisée tangentielle.
\mathbf{D}_r	Vecteur de contact.
d_r	Distance de contact.
\mathbf{g}_r	Vecteur vitesse de glissement tangentiel.
\mathcal{V}_c	Espace des configurations cinématiquement et physiquement admissibles.
γ_T	Coefficient de frottement tangentiel.
$\lambda_N^n, \boldsymbol{\lambda}_T^n$	Multiplicateur de Lagrange normal et multiplicateur de Lagrange tangentiel.

1 Introduction générale

Dans plusieurs systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps élastique subit de l'auto-contact ou entre en contact avec d'autres corps. Nous citons parmi les systèmes récemment étudiés, le surenroulement des fragments de la molécule d'ADN considérés comme tiges élastiques. L'objectif de cette thèse est d'étudier l'auto-contact avec frottement dans une tige élastique en grands déplacements se déformant dans un espace à trois dimensions. Le problème d'une tige en grands déplacements et la non-interpénétration de la matière génèrent des contraintes fortement non linéaires au problème de modélisation qui mène à des difficultés d'analyses mathématiques et numériques tels que la non-existence et la non-unicité de solution.

1.1 Généralités et motivation

Le contact est le problème mécanique des solides qui présente les non-linéarités les plus difficiles à traiter analytiquement et même numériquement. Typiquement, dans la littérature scientifique classique, l'auto-contact n'a pas été considéré analytiquement comme un sujet autonome, mais il est généralement considéré comme un cas particulier, qui doit être donc traité en conséquence. Motivé par le « self-contact » dû aux phénomènes de DNA-supercoiling (surenroulement de l'ADN), Van der Heijden et al. dans [19] ont étudié l'auto-contact provoqué par la torsion des tiges serrées. Dans [52], Moakher et Maddocks utilisent actuellement la théorie de Cosserat dans les travaux de modélisation de la molécule d'ADN. Dans ces travaux, la courbe moyenne représente la moyenne des deux brins d'ADN. Les propriétés géométriques des tiges sont celles utilisées par Coleman et Swigon dans [12]. Dans le domaine du vivant, plusieurs modèles de tiges élastiques ont été appliqués à l'étude des déformations et du surenroulement des fragments de la molécule d'ADN et modèles de pipelines dans le domaine pétrolier [50, 12, 69, 19, 52, 9, 32, 31]. Les tiges minces pour la simulation de structure physique dans le domaine des animations [40, 27, 24], les poutres dans le domaine de construction et les câbles

dans le domaine marin et industriel [48, 68, 71, 72].

Outre le surenroulement de l'ADN et de la chromatine où le changement de configuration peut modifier leur structure locale et globale dans le domaine du vivant, un autre exemple possible pourrait être l'utilisation accrue du stent dans le domaine biomédical. Par exemple, l'utilisation d'endoprothèses pour réparer l'endovasculaire peut entraîner une complication grave [17, 18], malgré les vastes travaux expérimentaux et informatiques qui ont été étudiés. Bertails et al. dans [23] ont utilisé des modèles de tiges élastiques de Kirchhoff pour modéliser les cheveux qui imposent naturellement de structure physique réelle pour les animations. De nombreux travaux ont montré l'importance d'inclure les effets de frottement dans ces modélisations [27, 24, 1, 15]. Les modèles de collision typiques basés sur les impulsions pour les tiges élastiques peuvent entraîner des instabilités via l'excitation de modes d'étirement, et qu'un modèle non linéaire amélioré de collision de manière adapté conduit à des simulations plus robustes et plus précises [15].

Les problèmes d'obstacle sont des problèmes bien étudiés dans beaucoup des littératures scientifiques, y compris les problèmes de déformation d'une tige élastique en présence d'un obstacle élastique ou rigide. Ces problèmes sont en général difficiles main en main avec le problème d'auto-contact sans ou avec frottement dans une tige élastique. Pour cette raison, la plupart des problèmes d'obstacles étudiés dans la littérature traitant des modèles beaucoup plus simples limités aux petites déformations avec négligence du cisaillement et allongement pour garantir que le problème conduit à une inégalité variationnelle avec un ensemble des déformations admissibles convexe. Il s'agit d'un sujet largement étudié dans lequel les résultats reposent essentiellement sur des arguments de monotonie et de convexité. Nous citons dans ce cadre les travaux de Fichera [26], Lewy et Stampacchia [46] et Kikuchi et Oden [42].

Pour les problèmes d'obstacles en tant que déformation d'une poutre en présence d'un obstacle élastique, l'ensemble des déformations possibles est un sous-ensemble convexe fermé dans un espace fonctionnel approprié et l'approche variationnelle conduit à une inégalité variationnelle en tant que condition de solvabilité nécessaire. Il existe quelques résultats sur l'existence et la régularité de telles solutions pour le modèle linéarisé (voir par exemple [30, 43, 46, 3]). Outre les solutions exactes et régularisées de ces problèmes d'obstacle, il existe des méthodes numériques pouvant présenter des solutions semi-analytiques approximatives telles que la méthode de décomposition adomian et la méthode d'itération variationnelle (VIM). Le VIM est une méthode proposée par He [33] et développée par Wazwaz [70] et Martin [45].

1.2 Présentation de la thèse

La thématique de cette thèse est dédiée à l'étude de l'auto-contact avec frottement dans une tige hyperélastique de Cosserat basée sur la théorie géométriquement exacte. Ensuite, nous pro-

posons la résolution de quelques problèmes de l'obstacle par la méthode semi-analytique d'itération variationnelle. La modélisation d'une tige élastique en présence de l'auto-contact avec frottement est primordiale pour la déformation qui doit prendre en compte la contrainte de non-auto-pénétration tout en évitant numériquement les configurations inadmissibles. Pour étudier le problème de l'auto-contact, nous profitons des conditions aux limites imposées à la tige, et pour développer la cinématique de frottement, nous supposons que le contact est persistant au cours du glissement.

La nature du contact dans une tige élastique joue un rôle déterminant dans son comportement. Les rôles-clés dans l'étude de problème du contact sont la manière dont ces structures qui réagissent quand elles subissent ces forces de contact. Dans cette étude, la prise en compte des effets de frottement sur ce type de problème pose des difficultés majeures dans la modélisation, aussi bien que dans l'analyse mathématique et numérique. Les modèles mathématiques utilisés sont eux-mêmes non linéaires et conduisent à des systèmes d'inéquations non linéaires. La théorie générale des problèmes de contact peut être attribuée à Duvaut et Lions [28], qui ont donné les formulations variationnelles des problèmes de contact et ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution aux problèmes de contact bilatéraux en utilisant la loi de frottement de Tresca. Nécas et al. [37] ont prouvé l'existence de solution pour le problème du contact unilatéral à l'état statique en utilisant une loi locale de frottement de Coulomb. Ce résultat a été prolongé par Jarušek [39]. Pour un problème statique, où le contact est décrit par une loi de conformité normale, nous pouvons nous référer à Oden et Martins [51], Klarbring et al. [2]. Les problèmes de contact unilatéral avec la loi de frottement de Coulomb non locale ont été étudiés par Duvaut [20], Demkowicz et Oden [44], Oden et Pires [38] et Cocu [11], Renard [60]. Récemment, Chamekh et al. ont donné un résultat d'existence pour le problème de l'auto-contact sans frottement suivi d'une approche numérique et une étude de stabilité de solution obtenue [9, 10].

Les problèmes de contact semblent être difficiles à traiter analytiquement et même numériquement. Cependant, les techniques qui prennent en compte les conditions de contact unilatéral sont bien avancées avec les grands progrès des machines informatiques et des outils mathématiques. Ces techniques qui ont résolu ces problèmes doivent encore être examinées en retour, en particulier pour le problème de l'auto-contact et surtout en présence de frottement.

Dans le cadre de cette thèse, les outils mathématiques dont on dispose ne peuvent pas démontrer ni l'existence ni l'unicité de solution dans le cas avec frottement, Bien qu'un résultat d'existence sans unicité pour le problème de l'auto-contact sans frottement a été prouvé dans [9]. Nous avons cherché à étendre ce résultat d'existence à un nouveau résultat du problème d'auto-contact qui prend en compte le frottement obéissant au critère de Coulomb ou de Tresca. Le premier problème auquel on est confronté c'est que le frottement de Coulomb n'admet pas de potentiel en général et ce, parce que le seuil de frottement de Coulomb dépend de la compression normale. Le deuxième problème est que le frottement de Tresca, aussi bien, n'admet pas de potentiel dans le cas de grands déplacements/déformations. Par conséquent, ce problème ne peut pas être un problème de minimisation d'énergie classique. Nous avons décrit la formulation

variationnelle du problème d'auto-contact avec frottement en se basant sur les équations d'équilibre, il n'est cependant pas du tout évident que le problème que nous avons obtenu admette une solution due au matériau, à la non-linéarité géométrique et à la présence du contact avec frottement. Pour cela, nous avons donné un résultat d'existence particulier pour ce problème dont la force de contact est connue, fixée et proposée comme force d'auto-contact frottant pénalisée. C'est-à-dire, nous avons prouvé l'existence de solutions pour le problème non linéaire qui peut être traité par l'algorithme d'Uzawa avant l'actualisation des multiplicateurs de Lagrange avec une force de contact exprimée par des vecteurs régularisés. Cette régularisation est appliquée à la pression de contact pour étendre également la portée des résultats. Pour avoir l'unicité de cette solution, il doit falloir supposer que l'énergie associée obéit aux hypothèses de convexité et de coercivité par rapport aux mesures de déformations. Pour prouver l'existence de solution pour ce problème, nous avons proposé une démonstration basée sur une théorie généralisée de Weierstrass, à cause de l'ensemble des configurations admissibles (l'ensemble dans lequel on va devoir chercher les solutions) n'est pas convexe. Nous rappelons que cette théorie était utilisée par Chamekh et al. [9] pour démontrer l'existence de solutions dans le cas sans frottement.

La méthode d'itération variationnelle est une méthode de résolution numérique qui peut donner une solution semi-analytique d'un problème d'équations ou/et inéquations linéaire ou non linéaire. Cette méthode a été développée sur les alternatives de la méthode des multiplicateurs de Lagrange depuis la fin du siècle dernier [33]. Depuis lors, le VIM est de plus en plus utilisé dans différents types de recherche. Par exemple, H. Lewy et al. ont utilisé le VIM pour l'analyse de poutres viscoélastiques [45], T.M. Elzaki et al. pour les comportements des fluides [49] etc...

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons une solution semi-analytique de problème de la déformation d'une poutre en présence d'une fondation élastique, c'est le cadre du problème d'obstacle. Les réponses qui entourent cette application technique ne doivent pas empêcher d'appliquer ces résultats à d'autres spécialités, mais doivent au contraire ouvrir la voie à des problèmes d'obstacles plus importants et plus complexes. Dans les littératures scientifiques, un large éventail de problèmes non liés qui existent dans les sciences de l'ingénieur appliquées peuvent être formulés comme des problèmes d'obstacles [58, 5, 67, 16, 22, 56, 36, 21].

1.3 Hypothèses et notations utilisées

Au cours de cette thèse, on considère un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = \{\mathbf{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 , les vecteurs de ce repère seront utilisés comme une base appelée spatiale dans les différentes configurations de la tige, ainsi que d'autres bases appelées locales connues en tant que vecteurs de Darboux. Pour tous vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, nous notons par $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, respectivement, le produit vectoriel et le produit scalaire de \mathbf{a} et \mathbf{b} . Nous désignons par $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^3 , i.e. pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$ avec $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \sum_i a_i^2$. Le

produit tensoriel $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} est le tenseur du second-ordre défini par :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix},$$

et notons que

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}, \quad \text{et} \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}), \quad \forall (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Pour un vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, nous désignons par \mathbf{a}^\times le tenseur antisymétrique associé, i.e.

$$\mathbf{a}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

et notons que $\mathbf{a}^\times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pour tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Nous désignons par $\text{axial}(\mathbf{A})$ le vecteur axial associé au tenseur antisymétrique \mathbf{A} , c'est-à-dire, tel que $(\text{axial}(\mathbf{A}))^\times = \mathbf{A}$. La projection d'un vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ sur une boule centrée à l'origine et de rayon ν est définie comme suit :

$$P_{B(\nu)}[\mathbf{a}] = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{si } \|\mathbf{a}\| < \nu, \\ \nu \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Tout au long de cette thèse, les dérivées d'une telle fonction G par rapport au temps et par rapport à une abscisse curviligne sont définies respectivement par $(\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t})$ et $(G' = \frac{\partial G}{\partial s})$.

1.4 Plan de thèse

Cette thèse comporte deux parties essentielles. Une première partie s'insère dans l'étude d'auto-contact avec frottement pour une tige élastique qui peut subir des grandes déformations/déplacements. La deuxième partie propose l'étude de la méthode d'itération variationnelle pour obtenir une solution semi-analytique à certains problèmes de contact pour une poutre déformée avec un obstacle élastique. La thèse se décompose de cinq chapitres. Dans le chapitre deux, on utilisera la théorie géométriquement exacte des tiges hyperélastiques qui est une modélisation basée sur la tige de Cosserat soumise à des efforts extérieurs. Dans le chapitre qui suit, on présentera une modélisation d'auto-contact dans une tige élastique et on comptera sur la loi de Coulomb pour discuter le problème du frottement. Un développement des formulations pour ce problème peut-être utile pour une implémentation numérique est le sujet du chapitre quatre.

Dans le chapitre cinq, on utilisera une méthode semi-analytique qui s'appelle la méthode de He ou Variational Iteration Method (VIM) pour traiter le problème de contact d'une poutre déformée en présence d'un obstacle élastique.

Première partie

Problème de l'auto-contact frottant dans une tige élastique

2 Modélisation d'une tige élastique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle de tige à un comportement élastique et on se base sur la théorie géométriquement exacte¹ des tiges qui joue un rôle important dans de nombreuses recherches récentes en mécanique (voir par exemple [63, 35] ou [4]). Cette théorie est basée sur le modèle de Cosserat [13], régie par les équations développées par Reissner [59], Simo et Vu-Quoc [66, 64], plus récemment mise au point par Ibrahimovic [34], exploitée par Crisfield et Jelenić [14], et basée sur la théorie des vecteurs directeurs développée par Antman [4]. La théorie géométriquement exacte a un avantage de paramétrer la configuration 3D de la tige par une paramétrisation 1D et de prendre en compte les deux déformations translationnelle et rotationnelle, y compris le cisaillement, allongement, flexion et la torsion. Dans ce modèle, on suppose que les sections sont rigides et planes de rayon invariant et que la longueur de la tige est invariante au cours de déformation, c'est-à-dire que les sections sont initialement planes et qu'elles restent planes au cours de la déformation et ne changent pas de forme.

2.2 Théorie géométriquement exacte d'une tige élastique (GET)

La théorie géométriquement exacte des tiges est basée sur le modèle de Cosserat introduite en 1909 par les frères Eugène et François Cosserat [13]. Ce modèle a un avantage de modéliser une tige élastique qui peut subir des grands déplacements et qui prend en compte la flexion, la torsion, l'allongement et le cisaillement. Il permet de réduire le problème d'élasticité 3D au problème d'élasticité 1D en se basant sur la paramétrisation de la ligne centrale de la tige. C'est-à-dire, la possibilité de grands déplacements/rotations permet de développer la cinématique de chaque section transversale et la déformation globale de la tige à partir de la déformation de la

1. Le terme «géométriquement exact» fait référence au fait que la description cinématique ne contient pas d'approximation géométrique de type petits déplacements.

ligne centrale qui repère la tige par une courbe à trois dimensions dans l'espace usuel (voir par exemple Kapania et Jing Li [41]). Pour ce faire, nous donnons un bref rappel sur le modèle de Cosserat.

2.2.1 Modèle de Cosserat

Une tige de longueur initiale $l_0 > 0$ est un ensemble régulier des sections transversales $\{A(s_0); s_0 \in [0, l_0]\}$ ², défini par :

$$\mathcal{T}^0 = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, s_0) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } 0 \leq s_0 \leq l_0, (\xi_1, \xi_2) \in A(s_0)\}. \quad (2.1)$$

On suppose que la tige approuvée dans cette thèse est cylindrique régulière, c'est-à-dire, telle qu'un ensemble cylindrique des sections transversales circulaires de rayon constant $\varepsilon_0 > 0$ (voir FIG.2.1) :

$$\mathcal{T}^0 = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, s_0) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } 0 \leq s_0 \leq l_0, \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq \varepsilon_0^2\}. \quad (2.2)$$

Cette configuration de la tige est appelée configuration initiale (droite) définie par le vecteur position de chaque abscisse curviligne $s_0 \in [0, l_0]$ colinéaire à l'axe \mathbf{e}_3 et par le vecteur position d'un point matériel $\boldsymbol{\xi}(s_0) = (\xi_1, \xi_2) \in A(s_0)$ comme suit :

$$\mathbf{r}_{00} := \mathbf{r}_{00}(s_0) = s_0 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}_{00}(\boldsymbol{\xi}) = s_0 \mathbf{e}_3 + \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2. \quad (2.4)$$

La configuration de la tige sans contrainte physique est appelée configuration de référence (relaxée) définie par une courbe de référence tordue dans la base spatiale $(\mathbf{e}_i)_i$ avec le vecteur position

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}_0(s) \in \mathbb{R}^3, \quad s \in [0, l] \equiv s_0 \in [0, l_0]. \quad (2.5)$$

Considérons le repère orthonormé local $(\mathbf{r}_0(s); \mathbf{d}_{0i}(s))_i$ qu'est rigidement fixé sur $A(s)$ d'origine $\mathbf{r}_0(s)$ et de vecteurs orthonormés

$$\mathbf{d}_{0i} := \mathbf{d}_{0i}(s) = d_{0ji}(s) \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{d}_{0i} \cdot \mathbf{d}_{0j} = \delta_{ij}^3. \quad (2.6)$$

Ce repère est renvoyé par le repère spatial $(O; \mathbf{e}_i)_i$ et engendré par la base orthonormale $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^3$. Sans perdre de la généralité, comme la configuration de référence à un état relaxée sans contrainte

2. $A(s_0) \subset \mathbb{R}^2$ est l'adhérence d'un ouvert borné de \mathbb{R}^2 qui contient $\mathbf{0}$ pour tout $s_0 \in [0, l_0]$ et qui servira à décrire la «forme» et la «taille» des sections transversales de la tige. Dans la configuration initiale d'une tige cylindrique, $A(s_0)$ est constant donné par $A(s_0) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq \varepsilon_0^2\}$.

3. δ_{ij} dénote le symbole de Kronecker, i.e. une fonction de deux variables qui est égale à 1 si celles-ci sont égales, et 0 sinon.

physique, il est convenu de supposer que le plan de la section transversale $A(s)$ est orthogonal à $\mathbf{r}'_0(s)$ et on définit

$$\mathbf{d}_{03}(s) = \mathbf{r}'_0(s) = \mathbf{d}_{01}(s) \times \mathbf{d}_{02}(s), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{r}'_0(s) \cdot \mathbf{d}_{0i}(s) = \delta_{3i}. \quad (2.8)$$

Puisque les deux bases $(\mathbf{e}_i)_i$ et $(\mathbf{d}_{0i}(s))_i$ sont orthonormales, le vecteur de position d'un point matériel $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, s) \in \mathbb{R}^3$ de la section transversale dans la configuration de référence de la tige est défini par :

$$\mathbf{P}_0(s) = \mathbf{r}_0(s) + \xi_1 \mathbf{d}_{01}(s) + \xi_2 \mathbf{d}_{02}(s), \quad (2.9)$$

$$= \mathbf{r}_0(s) + \xi_1 \mathbf{R}_0(s) \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{R}_0(s) \mathbf{e}_2, \quad (2.10)$$

avec $\mathbf{R}_0(s) \in SO(3)^4$ est le tenseur orthogonal qui associe à la base $(\mathbf{e}_i)_i$ la base $(\mathbf{d}_{0i}(s))_i$ comme suit :

$$\mathbf{d}_{0i}(s) = \mathbf{R}_0(s) \mathbf{e}_i \iff \mathbf{R}_0(s) = \mathbf{d}_{0i}(s) \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.11)$$

En suite, on observe que \mathbf{R}_0 est de la forme :

$$\mathbf{R}_0(s) = d_{0ji}(s) \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} d_{011}(s) & d_{012}(s) & d_{013}(s) \\ d_{021}(s) & d_{022}(s) & d_{023}(s) \\ d_{031}(s) & d_{032}(s) & d_{033}(s) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

Pour la configuration initiale le tenseur orthogonal correspondant est défini par :

$$\mathbf{R}_{00}(s) = \mathbf{d}_{00i}(s) \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}_3 = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i; \quad \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}. \quad (2.13)$$

On considère la base locale $(\mathbf{d}_{00i}(s))_i$ dans la configuration initiale, d'après (2.4) on a aussi pour le vecteur position d'un point matériel $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, s) \in \mathbb{R}^3$ de la section transversale

$$\mathbf{P}_{00}(s) = \mathbf{r}_{00}(s) + \xi_1 \mathbf{d}_{001}(s) + \xi_2 \mathbf{d}_{002}(s); \quad \mathbf{r}_{00}(s) = s \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad s \equiv s_0, \quad (2.14)$$

$$= \mathbf{r}_{00}(s) + \xi_1 \mathbf{R}_{00}(s) \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{R}_{00}(s) \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{d}_{00i} \equiv \mathbf{e}_i, \quad (2.15)$$

où \mathbf{I}_3 est le tenseur identité de second-ordre de dimension 3.

Maintenant, sous l'action des efforts extérieurs, la tige se déplace et se déforme de la configuration de référence à une nouvelle configuration dite déformée. Cette configuration est alors décrite comme suit :

4. Le groupe $SO(3)$ est l'ensemble des matrices de rotation \mathbf{R} dans l'espace \mathbb{R}^3 , i.e. $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ et $\det(\mathbf{R}) = 1$.

- Le vecteur position d'une abscisse curviligne $s \in [0, l] \equiv s_0 \in [0, l_0]$ de la configuration de référence se déplace de $\mathbf{r}_0(s) \in \mathbb{R}^3$ à $\mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^3$ par un déplacement en translation $\mathbf{r}_r(s) \in \mathbb{R}^3$, i.e.

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0(s) + \mathbf{r}_r(s). \quad (2.16)$$

- Au cours de la déformation et le processus de mouvement, le repère spatiale $(\mathbf{r}_0(s); \mathbf{d}_{0i}(s))_i$ de la configuration de référence se déplace par la même déplacement en translation $\mathbf{r}_r(s)$ et se tourne avec son section transversale $A(s)$ au repère matériel $(\mathbf{r}(s); \mathbf{d}_i(s))_i$, qu'est reste orthonormale direct. Ainsi, il existe un tenseur orthogonal noté $\mathbf{R}_r(s) \in SO(3)$ qui associe à la base $(\mathbf{d}_{0i}(s))_i$ la base $(\mathbf{d}_i(s))_i$.
- Le vecteur position d'une particule matérielle $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, s) \in \mathbb{R}^3$ de la section transversale $A(s)$ dans la configuration déformée est défini dans la base spatiale fixée $(\mathbf{e}_i)_i$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s) &= \mathbf{r}(s) + \xi_1 \mathbf{d}_1(s) + \xi_2 \mathbf{d}_2(s), \\ &= \mathbf{r}(s) + \xi_1 \mathbf{R}_r(s) \mathbf{d}_{01}(s) + \xi_2 \mathbf{R}_r(s) \mathbf{d}_{02}(s), \\ &= \mathbf{r}(s) + \xi_1 \mathbf{R}_r(s) \mathbf{R}_0(s) \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{R}_r(s) \mathbf{R}_0(s) \mathbf{e}_2, \\ &= \mathbf{r}(s) + \xi_1 \mathbf{R}(s) \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{R}(s) \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

où $\mathbf{R}(s) \in SO(3)$ est le tenseur orthogonal qui détermine l'orientation globale de la section transversale de la tige dans la configuration déformée. C'est-à-dire, le tenseur qui associe à la base \mathbf{e}_i la base $\mathbf{d}_i(s)$ comme suit :

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{d}_i(s) \otimes \mathbf{e}_i = d_{ji}(s) \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} d_{11}(s) & d_{12}(s) & d_{13}(s) \\ d_{21}(s) & d_{22}(s) & d_{23}(s) \\ d_{31}(s) & d_{32}(s) & d_{33}(s) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Le schéma suivant explique la relation entre les tenseurs orthogonaux \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_r et \mathbf{R} :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) & \xrightarrow{\mathbf{R}_0} & (\mathbf{d}_{01}, \mathbf{d}_{02}, \mathbf{d}_{03}) \\ & \searrow \mathbf{R} & \downarrow \mathbf{R}_r \\ & & (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \end{array}$$

Pour la paramétrisation monodimensionnelle de la tige, chaque configuration de la tige peut être complètement déterminée par le vecteur position et le tenseur orthogonal de la section transversale (voir par exemple [62] et [65]) :

$$\boldsymbol{\varphi}(s) = (\mathbf{r}(s), \mathbf{R}(s)), \quad \text{Pour la configuration déformée,} \quad (2.18a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0(s) = (\mathbf{r}_0(s), \mathbf{R}_0(s)), \quad \text{Pour la configuration de référence,} \quad (2.18b)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{00}(s_0) = (\mathbf{r}_{00}(s_0), \mathbf{R}_{00}(s_0)), \quad \text{Pour la configuration initiale } (s_0 \equiv s). \quad (2.18c)$$

Ainsi, l'espace des configurations admissibles de la tige satisfait certaines conditions aux limites CL^5 [9] est donné par :

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in H^1([0, l]; \mathbb{R}^3 \times SO(3)), (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \text{ vérifie } CL\}. \quad (2.19)$$

2.2.2 Description géométrique

Nous pouvons un peu développer d'une manière approfondie la relation entre les tenseurs orthogonaux. Pour ce faire, on considère $\boldsymbol{\theta}_0(s) = \theta_0(s)\boldsymbol{\omega}_0(s)$, $\boldsymbol{\theta}_r(s) = \theta_r(s)\boldsymbol{\omega}_r(s)$ et $\boldsymbol{\theta}(s) = \theta(s)\boldsymbol{\omega}(s)$, respectivement, les vecteurs de rotations $\mathbf{R}_0(s)$, $\mathbf{R}_r(s)$ et $\mathbf{R}(s)$. Alors, d'après la formule de Rodrigues, on a

$$\mathbf{R}_0(s) = \mathbf{I}_3 + \sin(\theta_0(s))\boldsymbol{\omega}_0^\times(s) + [1 - \cos(\theta_0(s))](\boldsymbol{\omega}_0^\times(s))^2, \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{R}_r(s) = \mathbf{I}_3 + \sin(\theta_r(s))\boldsymbol{\omega}_r^\times(s) + [1 - \cos(\theta_r(s))](\boldsymbol{\omega}_r^\times(s))^2, \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{I}_3 + \sin(\theta(s))\boldsymbol{\omega}^\times(s) + [1 - \cos(\theta(s))](\boldsymbol{\omega}^\times(s))^2. \quad (2.20c)$$

En utilisant que pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ on a $(\mathbf{a}^\times)^2 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{I}_3$, on obtient :

$$\mathbf{R}_0(s) = \cos(\theta_0(s))\mathbf{I}_3 + \sin(\theta_0(s))\boldsymbol{\omega}_0^\times(s) + [1 - \cos(\theta_0(s))]\boldsymbol{\omega}_0(s) \otimes \boldsymbol{\omega}_0(s),$$

$$\mathbf{R}_r(s) = \cos(\theta_r(s))\mathbf{I}_3 + \sin(\theta_r(s))\boldsymbol{\omega}_r^\times(s) + [1 - \cos(\theta_r(s))]\boldsymbol{\omega}_r(s) \otimes \boldsymbol{\omega}_r(s),$$

$$\mathbf{R}(s) = \cos(\theta(s))\mathbf{I}_3 + \sin(\theta(s))\boldsymbol{\omega}^\times(s) + [1 - \cos(\theta(s))]\boldsymbol{\omega}(s) \otimes \boldsymbol{\omega}(s).$$

Ainsi, les trois rotations sont complètement déterminées respectivement par les couples de quaternions $(b_{00}(s), \mathbf{b}_0(s))$, $(b_{0r}(s), \mathbf{b}_r(s))$ et $(b_0(s), \mathbf{b}(s))$ comme suit :

$$\mathbf{R}_0(s) = (2(b_{00}(s))^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2b_{00}(s)\mathbf{b}_0^\times(s) + 2\mathbf{b}_0(s) \otimes \mathbf{b}_0(s),$$

$$\mathbf{R}_r(s) = (2(b_{0r}(s))^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2b_{0r}(s)\mathbf{b}_r^\times(s) + 2\mathbf{b}_r(s) \otimes \mathbf{b}_r(s),$$

$$\mathbf{R}(s) = (2(b_0(s))^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2b_0(s)\mathbf{b}^\times(s) + 2\mathbf{b}(s) \otimes \mathbf{b}(s),$$

avec,

$$b_{00}(s) = \cos\left(\frac{\theta_0(s)}{2}\right), \quad b_{0r}(s) = \cos\left(\frac{\theta_r(s)}{2}\right), \quad b_0(s) = \cos\left(\frac{\theta(s)}{2}\right),$$

$$\mathbf{b}_0(s) = \sin\left(\frac{\theta_0(s)}{2}\right)\boldsymbol{\omega}_0(s), \quad \mathbf{b}_r(s) = \sin\left(\frac{\theta_r(s)}{2}\right)\boldsymbol{\omega}_r(s), \quad \mathbf{b}(s) = \sin\left(\frac{\theta(s)}{2}\right)\boldsymbol{\omega}(s).$$

5. Un exemple typique des conditions aux limites est $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}(0)\mathbf{e}_i = 1$ et $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ pour une tige de Cosserat fixée et encastée en 0. Ces conditions sont équivalentes à $b_0(0) = 1$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$.

Finalement, on obtient les relations suivantes entre les couples de quaternions associés aux tenseurs orthogonaux :

$$b_0(s) = b_{00}(s)b_{0r}(s) - \mathbf{b}_0(s) \cdot \mathbf{b}_r(s),$$

$$\mathbf{b}(s) = b_{00}(s)\mathbf{b}_r(s) + b_{0r}(s)\mathbf{b}_0(s) + \mathbf{b}_0(s) \times \mathbf{b}_r(s).$$

Par suite, la configuration déformée de la tige peut être complètement déterminée par le vecteur position \mathbf{r} et le couple de quaternion (b_0, \mathbf{b}) associé au tenseur orthogonal \mathbf{R} . Par conséquent, l'espace des configurations admissibles est équivalent à

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{r}, b_0, \mathbf{b}) \in H^1([0, l]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), (\mathbf{r}, b_0, \mathbf{b}) \text{ vérifie CL}\}. \quad (2.24)$$

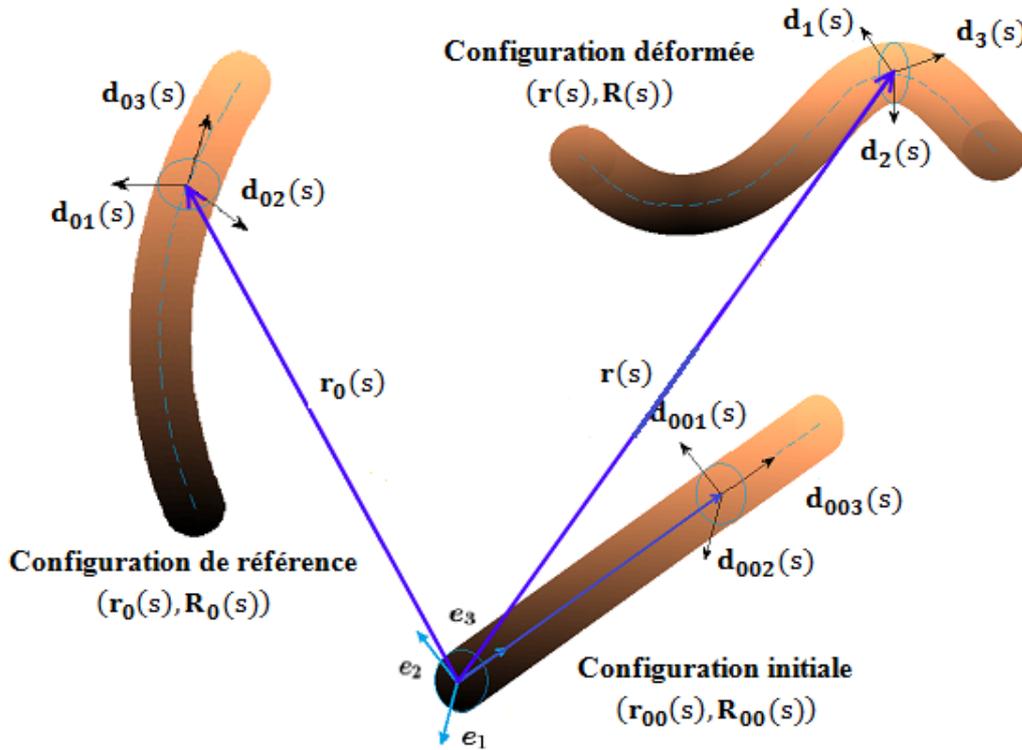


FIGURE 2.1 – Les différentes configurations d'une tige.

2.2.3 Description cinématique et mesures de déformations

Par définition de l'ensemble des matrices $SO(3)$ et le fait que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_r \mathbf{R}_0$, les transformations $\mathbf{R}'_0(s) \mathbf{R}_0^T(s)$, $\mathbf{R}'_r(s) \mathbf{R}_r^T(s)$ et $\mathbf{R}'(s) \mathbf{R}^T(s)$ sont antisymétriques, et on a

$$\mathbf{R}'(s) \mathbf{R}^T(s) = \mathbf{R}'_r(s) \mathbf{R}_0(s) \mathbf{R}_0^T(s) \mathbf{R}_r^T(s) + \mathbf{R}_r(s) \mathbf{R}'_0(s) \mathbf{R}_0^T(s) \mathbf{R}_r^T(s), \quad (2.25)$$

$$= \mathbf{R}'_r(s) \mathbf{R}_r^T(s) + \mathbf{R}_r(s) \mathbf{R}'_0(s) \mathbf{R}_0^T(s) \mathbf{R}_r^T(s). \quad (2.26)$$

Ainsi, il existe trois vecteurs $\mathbf{u}_0(s)$, $\mathbf{u}_r(s)$ et $\mathbf{u}(s)$ de \mathbb{R}^3 tels que pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}_0(s) \times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}_0(s)^\times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{R}'_0(s) \mathbf{R}_0^T(s) \boldsymbol{\xi},$$

$$\mathbf{u}_r(s) \times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}_r(s)^\times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{R}'_r(s) \mathbf{R}_r^T(s) \boldsymbol{\xi},$$

$$\mathbf{u}(s) \times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}(s)^\times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{R}'(s) \mathbf{R}^T(s) \boldsymbol{\xi},$$

vérifiant les relations suivantes :

$$\mathbf{u}^\times(s) = \mathbf{u}_r^\times(s) + \mathbf{R}_r(s) \mathbf{u}_0^\times(s) \mathbf{R}_r^T(s), \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}_r(s) + \mathbf{R}_r(s) \mathbf{u}_0(s). \quad (2.28b)$$

Nous dérivons les vecteurs de Darboux $\mathbf{d}'_{0i}(s)$ et $\mathbf{d}_i(s)$, on obtient

$$\mathbf{d}'_{0i}(s) = \mathbf{R}'_0(s) \mathbf{e}_i = \mathbf{R}'_0(s) \mathbf{R}_0^T(s) \mathbf{d}_{0i}(s) = \mathbf{u}_0(s) \times \mathbf{d}_{0i}(s), \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{d}'_i(s) = \mathbf{R}'(s) \mathbf{e}_i = \mathbf{R}'(s) \mathbf{R}^T(s) \mathbf{d}_i(s) = \mathbf{u}(s) \times \mathbf{d}_i(s), \quad (2.29b)$$

et d'une autre façon nous pouvons retrouver les relations (2.28a) et (2.28b) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_i(s) &= \mathbf{R}'_r(s) \mathbf{d}_{0i}(s) + \mathbf{R}_r(s) \mathbf{d}'_{0i}(s), \\ &= \mathbf{R}'_r(s) \mathbf{R}_r^T(s) \mathbf{d}_i(s) + \mathbf{R}_r(s) \boldsymbol{\chi}_0(s) \mathbf{d}_{0i}(s), \\ &= \boldsymbol{\chi}_r(s) \mathbf{d}_i(s) + \mathbf{R}_r(s) \boldsymbol{\chi}_0(s) \mathbf{R}_r^T(s) \mathbf{d}_i(s), \\ &= [\boldsymbol{\chi}_r(s) + \mathbf{R}_r(s) \boldsymbol{\chi}_0(s) \mathbf{R}_r^T(s)] \mathbf{d}_i(s), \\ &= \mathbf{u}_r(s) \times \mathbf{d}_i(s) + \mathbf{R}_r(s) \mathbf{u}_0(s) \times \mathbf{d}_i(s). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbf{d}'_{0i}(s) \cdot \mathbf{d}_{0j}(s) = \mathbf{u}_0(s) \cdot (\mathbf{d}_{0i}(s) \times \mathbf{d}_{0j}(s)), \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{d}'_i(s) \cdot \mathbf{d}_j(s) = \mathbf{u}(s) \cdot (\mathbf{d}_i(s) \times \mathbf{d}_j(s)) = [\mathbf{u}_r(s) + \mathbf{R}_r(s) \mathbf{u}_0(s)] \cdot (\mathbf{d}_i(s) \times \mathbf{d}_j(s)). \quad (2.30b)$$

Les transformations $\mathbf{u}_0^\times(s)$, $\mathbf{u}_r^\times(s)$ et $\mathbf{u}^\times(s)$ s'écrivent, respectivement, dans les bases $(\mathbf{d}_{0i}(s))_i$, $(\mathbf{d}_i(s))_i$ et $(\mathbf{d}_i(s))_i$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0^\times(s) &= (\chi_0^{ij}(s))\mathbf{d}_{0i}(s) \otimes \mathbf{d}_{0j}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -u_0^3(s) & u_0^2(s) \\ u_0^3(s) & 0 & -u_0^1(s) \\ -u_0^2(s) & u_0^1(s) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_r^\times(s) &= (\chi_r^{ij}(s))\mathbf{d}_i(s) \otimes \mathbf{d}_j(s) = \begin{pmatrix} 0 & -u_r^3(s) & u_r^2(s) \\ u_r^3(s) & 0 & -u_r^1(s) \\ -u_r^2(s) & u_r^1(s) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}^\times(s) &= (\chi^{ij}(s))\mathbf{d}_i(s) \otimes \mathbf{d}_j(s) = \begin{pmatrix} 0 & -u^3(s) & u^2(s) \\ u^3(s) & 0 & -u^1(s) \\ -u^2(s) & u^1(s) & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

où $u_0^i(s) = \mathbf{u}_0(s) \cdot \mathbf{d}_{0i}(s)$, $u_r^i(s) = \mathbf{u}_r(s) \cdot \mathbf{d}_i(s)$ et $u^i(s) = \mathbf{u}(s) \cdot \mathbf{d}_i(s)$.

Nous pouvons prouver l'existence des vecteurs $\mathbf{u}_0(s)$, $\mathbf{u}_r(s)$ et $\mathbf{u}(s)$ par deux méthodes, nous allons prendre soin à prouver l'existence de vecteur $\mathbf{u}(s)$ et les autres vecteurs restent d'une façon analogue. Pour la première méthode, nous utilisons les séries de Taylor pour $\sin(\theta(s))$ et $\cos(\theta(s))$ et les relations $(\boldsymbol{\omega}^\times(s))^{2n+1} = (-1)^n \boldsymbol{\omega}^\times(s)$ et $(\boldsymbol{\omega}^\times(s))^{2n} = (-1)^{n-1} (\boldsymbol{\omega}^\times(s))^2$ dans (2.20c), on obtient

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{I}_3 + \frac{[\theta(s)\boldsymbol{\omega}^\times(s)]}{1!} + \frac{[\theta(s)\boldsymbol{\omega}^\times(s)]^2}{2!} + \dots = \exp[\theta(s)\boldsymbol{\omega}^\times(s)] = \exp[\boldsymbol{\theta}^\times(s)]. \quad (2.32)$$

Nous avons alors

$$\mathbf{R}'(s)\mathbf{R}^T(s) = [\theta(s)\boldsymbol{\omega}^\times(s)]' = \boldsymbol{\theta}'^\times(s) = \mathbf{u}^\times(s). \quad (2.33)$$

On en déduit alors que $\mathbf{u}(s)$ n'est rien que la dérivée de $\boldsymbol{\theta}(s)$ et à partir de (2.28b) on obtient la relation suivante entre les angles des tenseurs orthogonaux :

$$\boldsymbol{\theta}'(s) = \boldsymbol{\theta}'_r(s) + \mathbf{R}_r(s)\boldsymbol{\theta}'_0(s). \quad (2.34)$$

Pour la deuxième méthode, on a comme forme générale de la règle de dérivation

$$\mathbf{d}'_i(s) = \left[\sum_{l=1}^3 \gamma_l^i(s)\mathbf{d}_l(s) \right] \times \mathbf{d}_i(s) = \gamma_j^i(s)\mathbf{d}_j(s) + \gamma_k^i(s)\mathbf{d}_k(s). \quad (2.35)$$

Alors, avec la notation $\mathbf{R}(s) = (\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s))$ on a

$$\mathbf{R}'(s) = (\gamma_j^i(s))_{ij}\mathbf{R}(s), \quad \text{avec : } \gamma_i^i(s) = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (2.36)$$

D'après (2.35) on a $\mathbf{d}'_i(s) \cdot \mathbf{d}_j(s) = \gamma_j^i(s)$, et puisque $\mathbf{d}_i(s) \cdot \mathbf{d}_j(s) = 0$ alors

$$0 = (\mathbf{d}_i(s) \cdot \mathbf{d}_j(s))' = \gamma_j^i(s) + \gamma_i^j(s). \quad (2.37)$$

C'est-à-dire $\gamma_j^i(s) = -\gamma_i^j(s)$ pour tous $i \neq j$ et $\gamma_i^i(s) = 0$ pour tout $i = 1, 2, 3$.

Par conséquent, nous remplaçons ces résultats dans (2.36), on obtient

$$\mathbf{R}'(s)\mathbf{R}^T(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1^2(s) & \gamma_3^1(s) \\ \gamma_1^2(s) & 0 & -\gamma_2^3(s) \\ -\gamma_3^2(s) & \gamma_2^3(s) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

D'après (2.30b) et ce qu'est précédente on a

$$\mathbf{d}'_i(s) \cdot \mathbf{d}_j(s) = \mathbf{u}(s) \cdot [\mathbf{d}_i(s) \times \mathbf{d}_j(s)] = u^k(s) = \gamma_j^i(s). \quad (2.39)$$

On conclut l'existence de $\mathbf{u}(s)$ avec

$$\mathbf{u}(s) = \gamma_j^i(s)\mathbf{d}_k(s) = u^k(s)\mathbf{d}_k(s). \quad (2.40)$$

De la même façon pour les vecteurs $\mathbf{u}_0(s)$ et $\mathbf{u}_r(s)$, et d'après (2.28b) on obtient

$$u_0^k(s) = \mathbf{d}'_{0i}(s) \cdot \mathbf{d}_{0j}(s),$$

$$u_r^k(s) = u^k(s) - \sum_{j=1}^3 d_{k0j}(s)u_0^j(s),$$

avec $\mathbf{R}_r(s) = d_{i0j}(s)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

Pour donner un sens à une telle théorie, nous devons donner une description cinématique et une interprétation mécanique. Pour ce faire, on introduit les équations cinématiques suivantes :

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{r}'(s) = \mathbf{d}_3(s) + \mathbf{r}'_r(s), \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{u}(s) = \boldsymbol{\theta}'(s) = \text{axial}(\mathbf{R}'(s)\mathbf{R}^T(s)). \quad (2.42b)$$

Les équations cinématiques mesurent les déformations de la tige à partir de la base mobile $(\mathbf{d}_i(s))_i$. Pour suivre les déformations à partir de la base fixe $(\mathbf{e}_i)_i$, il faut introduire les mesures de déformations suivantes :

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{R}^T(s)\mathbf{v}(s) = \mathbf{e}_3 + \mathbf{R}^T(s)\mathbf{r}'_r(s), \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{R}^T(s)\mathbf{u}(s) = \mathbf{R}^T(s)\boldsymbol{\theta}'(s). \quad (2.43b)$$

Nous remarquons que la deuxième mesure de déformation (2.43b) est équivalente à

$$\mathbf{u}^\times(s) = \mathbf{R}^T(s)\mathbf{u}(s)\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}^T(s)\mathbf{R}'(s). \quad (2.44)$$

On note

$$\mathbf{v}(s) = v_i(s)\mathbf{e}_i(s) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(s) = u_i(s)\mathbf{e}_i(s).$$

Les triples $\mathbf{v}(s) = (v_1(s), v_2(s), v_3(s))$ et $\mathbf{u}(s) = (u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ sont les variables de déformation correspondant au mouvement de la tige sous l'action des efforts extérieurs. Les quantités $u_1(s)$, $u_2(s)$ mesurent la flexion respectivement dans les plans $(\mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s))$, $(\mathbf{d}_3(s), \mathbf{d}_1(s))$ et $u_3(s)$ mesure la torsion autour du vecteur $\mathbf{d}_3(s)$. Les quantités $v_1(s)$ et $v_2(s)$ mesurent le cisaillement dans le plan $(\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s))$ et $v_3(s)$ mesure l'allongement suivant le vecteur $\mathbf{d}_3(s)$. En général, on dit que la tige subit des déformations sans cisaillement si $v_1(s) = v_2(s) = 0$ et sans allongement si $v_3(s) = 1$, i.e. $\mathbf{v}(s) = \mathbf{e}_3$. C'est-à-dire, le vecteur $\mathbf{r}'(s)$ tangent à la courbe moyenne déformée coïncide avec le vecteur unitaire $\mathbf{d}_3(s)$ normal au plan de la section courante dans la configuration déformée qui contient les vecteurs unitaires $\mathbf{d}_1(s)$ et $\mathbf{d}_2(s)$.

Remarque 2.1. *Le triple $\mathbf{v}_0(s) = \mathbf{R}_0^T(s)\mathbf{r}'_0(s) = (v_{01}(s), v_{02}(s), v_{03}(s))$ contient les variables de déformation en translation (cisaillement et allongement) correspondant à l'état relaxé de la tige dans la configuration de référence. Dans cette configuration nous avons supposé que $\mathbf{r}'_0(s)$ coïncide avec le vecteur $\mathbf{d}_{03}(s)$, alors $\mathbf{v}_0(s)$ coïncide avec le vecteur unitaire $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.*

2.3 Formulation variationnelle : cas sans contact

2.3.1 Équations d'équilibre et loi de comportement

Dans la suite, nous supposons que les transformations sont très lentes afin de pouvoir négliger les forces d'inertie car nous nous intéressons au problème quasi-statique. Le paramètre temporel ne doit pas apparaître même dans les équations d'équilibre, mais nous devons utiliser, dans le chapitre 3, une approximation d'Euler pour discrétiser le champ des vitesses tangentielles dans le temps.

Les équations d'équilibre sont les équations qui décrivent la variation de la force et le moment internes sur la ligne centrale de la tige, ce sont des équations différentielles ordinaires. On établit ces équations en considérant l'équilibre d'un petit morceau de la tige, entre s et $s + \delta s$, dans la limite où la longueur du morceau tend vers zéro ($\delta s \rightarrow 0$). On considère les forces appliquées au morceau de tige entre s et $s + \delta s$: à droite les efforts intérieurs se résument une force $\mathbf{n}(s + \delta s)$ et un moment $\mathbf{m}(s + \delta s)$, et à gauche la force et le moment intérieurs appliqués en s sont $-\mathbf{n}(s)$ et $-\mathbf{m}(s)$, voir FIG.2.2. On ajoute à ce bilan les densités linéiques des forces et des couples

extérieurs \mathbf{f} et $(\mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i, i = 1, 2)$ qui agissent sur le morceau, dues par exemple à la pesanteur :

$$\int_s^{s^+} \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{f}(s) \delta s, \quad (2.45a)$$

$$\int_s^{s^+} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{f}(t) + \mathbf{d}_i(t) \times \mathbf{f}_i(t)] dt = [\mathbf{r}(s) \times \mathbf{f}(s) + \mathbf{d}_i(s) \times \mathbf{f}_i(s)] \delta s, \quad (2.45b)$$

avec la notation de $s^+ = s + \delta s$.

L'équilibre des forces et des moments pour le morceau de la tige sont ainsi écrites :

$$\mathbf{n}(s^+) - \mathbf{n}(s) + \mathbf{f}(s) \delta s = 0,$$

$$\mathbf{m}(s^+) - \mathbf{m}(s) + \mathbf{r}(s) \times (-\mathbf{n}(s)) + \mathbf{r}(s^+) \times \mathbf{n}(s^+) + [\mathbf{r}(s) \times \mathbf{f}(s) + \mathbf{d}_i(s) \times \mathbf{f}_i(s)] \delta s = 0.$$

Dans la deuxième équation, on ne considère pas de moment distribué. Il faut par contre ajouter le couple créé par le fait que les forces $\mathbf{n}(s)$ et $\mathbf{n}(s^+)$ n'agissent pas au même point. On obtient finalement la forme locale des équations d'équilibre :

$$\mathbf{n}'(s) + \mathbf{f}(s) = \mathbf{0} \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{m}'(s) + \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{d}_i(s) \times \mathbf{f}_i(s) = \mathbf{0}. \quad (2.47b)$$

Lorsque les seuls chargements externes sont des couples et des forces appliqués aux extrémités de la tige, les vecteurs $\mathbf{f}(s)$ et $\mathbf{f}_i(s)$ sont réduits à 0.

En ce qui concerne les lois de comportement, nous considérons un matériau hyperélastique⁶ de tige, à savoir un matériau de telle sorte que les relations suivantes sont satisfaites :

$$\mathbf{n}(s, \mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s)) = \mathbf{R}(s) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{v}}(s, \mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s)), \quad (2.48a)$$

$$\mathbf{m}(s, \mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s)) = \mathbf{R}(s) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{u}}(s, \mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s)), \quad (2.48b)$$

où \mathcal{W} est une densité d'énergie supposée convexe, coercive et continûment différentiable par rapport à ses deux derniers arguments [9].

Pour une densité d'énergie donnée, nous notons que la relation (2.48) satisfait le principe de l'indifférence matérielle⁷. Le problème de recherche des positions d'équilibre d'une tige hyperélastique pouvant subir à la fois de l'allongement, de la torsion, de la flexion et du cisaillement est

6. Au cours de la déformation de tige élastique qui constituée d'un matériau hyperélastique, aucune énergie n'est emmagasinée dans le matériau lors de cycles de charge-décharge admissibles. Ce type de comportement est très bien adapté pour des matériaux pouvant subir de très grandes déformations élastiques réversibles et donc avec des matériaux caoutchouteux.

7. C'est un axiome qui exprime le fait qu'une loi de comportement doit être invariante par un mouvement rigide.

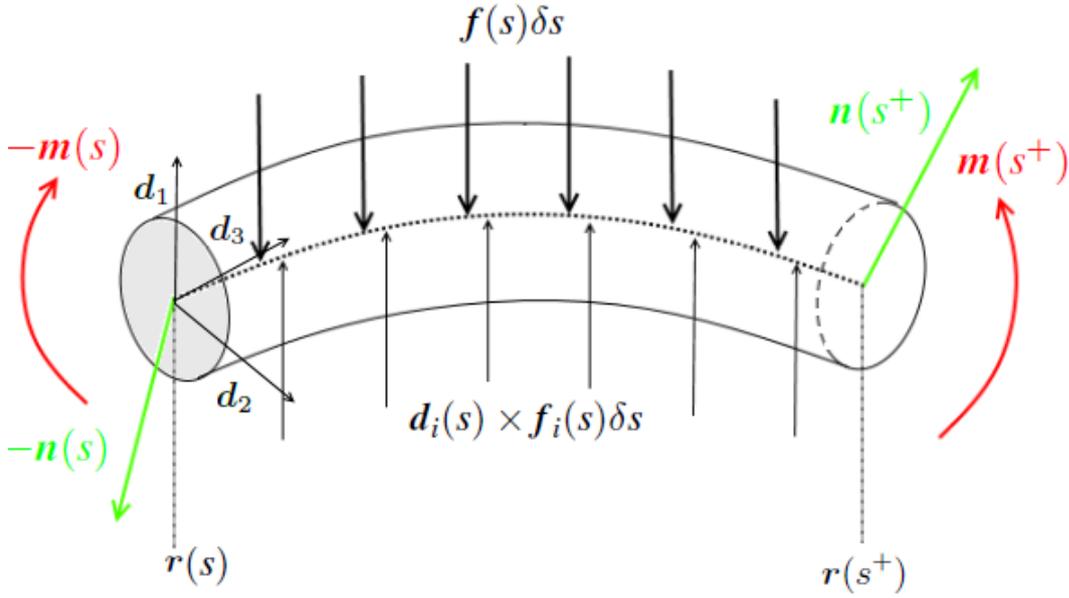


FIGURE 2.2 – Équilibre des forces et moments appliqués sur un petit morceau de la tige,.

décrit par les relations (2.47) et (2.48) qu'il faut compléter par le choix d'une densité d'énergie \mathcal{W} .

On peut citer comme exemple de densité d'énergie suivante [7] :

$$\mathcal{W}(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{EA(s)}{2}(v_3 - 1)^2 + \frac{GA(s)}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{EI(s)}{2}(u_1^2 + u_2^2) + GI(s)u_3^2. \quad (2.49)$$

où E et A sont respectivement le module de Young et l'aire de la section transversale et G et I sont respectivement le module de cisaillement et le moment d'inertie principal pour une section transversale circulaire hypothétique de la tige.

Dans le cas de déformations sans allongement ni cisaillement, cette densité s'écrit

$$\mathcal{W}(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{EI(s)}{2}(u_1^2 + u_2^2) + GI(s)u_3^2. \quad (2.50)$$

Dans le cadre de cette thèse et sans perte de généralité, nous adaptons une telle densité d'énergie typique implique à la fois un allongement, cisaillement, torsion et flexion [9] :

$$\mathcal{W}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u}\}, \quad (2.51)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{A} sont des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ coercives, symétriques et définies positives.

2.3.2 Expression de l'énergie totale

Nous supposons d'établir une expression d'énergie qui ne prend pas en compte les déformations de la configuration de référence. D'après les mesures de déformations (2.43), la densité d'énergie peut s'exprimer en fonction des vecteurs déformation \mathbf{u} et \mathbf{v} ou en fonction de \mathbf{r} et \mathbf{R} , i.e.

$$\mathcal{W}(\cdot, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathcal{W}(\cdot, \mathbf{R}^T \mathbf{r}', \mathbf{R}^T (\text{axial}(\mathbf{R}' \mathbf{R}^T))) =: \check{\mathcal{W}}(\cdot, \mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (2.52)$$

Alors, le potentiel d'énergie interne s'écrit

$$\mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int_0^l \check{\mathcal{W}}(s, \mathbf{r}, \mathbf{R}) ds. \quad (2.53)$$

Par conséquent, sous l'action des forces extérieures \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 et \mathbf{f} , l'expression de l'énergie totale pour une tige hyperélastique est donné par :

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) - \mathcal{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}), \quad (2.54)$$

avec

$$\mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int_0^l \mathcal{W}(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) ds, \quad (2.55a)$$

$$\mathcal{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int_0^l (\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{d}_i) ds. \quad (2.55b)$$

L'état d'équilibre d'une tige élastique soumise à des efforts extérieurs est un minimum de l'énergie totale (2.54). Une condition nécessaire sur cette énergie pour qu'elle admette un minimum en (\mathbf{r}, \mathbf{R}) est que leur variation première s'annule pour toutes les variations admissibles (\mathbf{p}, \mathbf{q}) de (\mathbf{r}, \mathbf{R}) , i.e. $\delta \mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R})(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. Finalement, le problème d'équilibre en l'absence de frottement est décrit par le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \leq \mathcal{J}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{R}}) \quad \forall (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{R}}) \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (2.56)$$

L'objectif des paragraphes suivants est d'écrire la formulation variationnelle associée à ce problème de minimisation, nous allons calculer la variation d'énergie $\delta \mathcal{J}$ et les variations de \mathbf{r} et \mathbf{R} .

2.3.3 Espace des variations admissibles

L'espace des matrices de rotation $SO(3)$ n'est pas linéaire mais on peut prouver, par le théorème du rang qu'est une variété différentielle, par suite l'ensemble des déformations admissibles

\mathcal{V} défini par (3.9) n'est pas un espace vectoriel mais c'est une structure de variété différentielle. Il faudrait donner beaucoup de soin pour le calcul de l'espace des variations admissibles, espace qui joue un rôle essentiel dans l'écriture de la formulation variationnelle associée au problème de minimisation (2.56) et bien évidemment dans la résolution numérique de ce problème.

On considère une famille de courbes $\xi_\epsilon(s)$ régulière à un paramètre $\epsilon(s)$ telle que $\xi_{\epsilon=0}(s) = \xi(s)$ pour tout s . Alors, la variation première notée $\delta\xi$ est donnée par :

$$\delta\xi = \left. \frac{d}{d\epsilon} \xi_\epsilon \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.57)$$

Dans la suite, nous supposons de construire une configuration perturbée notée $(\mathbf{r}_\epsilon, \mathbf{R}_\epsilon)$ associée à une configuration admissible $(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V}$. On suppose que les fonctions \mathbf{r}, \mathbf{R} sont suffisamment régulières. Pour $\epsilon > 0$ donné, on pose

$$\mathbf{r}_\epsilon(s) = \mathbf{r}(s) + \epsilon \mathbf{p}(s), \quad (2.58a)$$

$$\mathbf{R}_\epsilon(s) = \exp(\epsilon \mathbf{q}^\times(s)) \mathbf{R}(s), \quad (2.58b)$$

où $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ est interprétée comme une superposition de déplacements infinitésimaux sur l'axe de la tige définie par \mathbf{r} , et \mathbf{q}^\times est un tenseur antisymétrique interprété comme une superposition de rotations infinitésimales sur les sections transversales $A(\cdot)$.

La matrice \mathbf{q}^\times est antisymétrique associée au vecteur \mathbf{q} , alors son exponentiel est une matrice de rotation et le produit de deux matrices de rotation est une matrice rotation, par suite $(\mathbf{r}_\epsilon(s), \mathbf{R}_\epsilon(s)) \in \mathcal{V}$ pour tout $\epsilon > 0$ et constitue une configuration perturbée. La paire $(\mathbf{p}, \mathbf{q}^\times \mathbf{R})$ telle que $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ sera donc une variation de (\mathbf{r}, \mathbf{R}) . L'espace des variations admissibles peut s'écrire alors

$$T_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})} \mathcal{V} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^\times \mathbf{R}) / (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in H^1([0, l], \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3); (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \text{ vérifie CLH}\}. \quad (2.59)$$

où CLH sont les conditions aux limites homogènes associées aux CL.

2.3.4 Variation première de l'énergie

On achève ce chapitre par le calcul de la variation première des vecteurs déformations afin que nous puissions donner l'expression finale de la variation première de l'énergie. Préliminairement, cette variation s'écrit

$$\delta\mathcal{J} = \int_0^l \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{d}_i \right\} ds, \quad (2.60)$$

$$= \int_0^l \{ \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{d}_i \} ds. \quad (2.61)$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{R}^T \mathbf{n}$ et $\mathbf{m} = \mathbf{R}^T \mathbf{m}$.

Puisque $\delta \mathbf{R} = \mathbf{q}^\times \mathbf{R}$, alors

$$\delta \mathbf{d}_i = \delta \mathbf{R} \mathbf{e}_i = \mathbf{q}^\times \mathbf{R} \mathbf{e}_i = \mathbf{q} \times \mathbf{d}_i.$$

Par conséquent, on obtient

$$\mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{q} \times \mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{q}. \quad (2.62)$$

Nous devons maintenant calculer $\delta \mathbf{v}$. Pour ce faire on a $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$, alors

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \delta \mathbf{R}^T = \mathbf{q}^\times + \mathbf{R} \delta \mathbf{R}^T = 0.$$

Par suite

$$\delta \mathbf{R}^T = -\mathbf{R}^T \mathbf{q}^\times.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v} &= \delta(\mathbf{R}^T \mathbf{r}'), \\ &= \delta \mathbf{R}^T \mathbf{r}' + \mathbf{R}^T \delta \mathbf{r}', \\ &= -\mathbf{R}^T \mathbf{q}^\times \mathbf{r}' + \mathbf{R}^T \mathbf{p}', \\ &= \mathbf{R}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (2.63)$$

avec $\delta \mathbf{r}' = (\delta \mathbf{r})' = \mathbf{p}'$.

Pour calculer $\delta \mathbf{u}$, nous devons calculer $\delta \mathbf{R}'$ par la méthode décrite par (2.57). D'après (2.58b), on a

$$\mathbf{R}'_\epsilon = \epsilon \exp(\epsilon \mathbf{q}^\times) \mathbf{q}^{\times'} \mathbf{R} + \exp(\epsilon \mathbf{q}^\times) \mathbf{R}'.$$

On dérive par rapport à ϵ , on obtient

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathbf{R}'_\epsilon = \exp(\epsilon \mathbf{q}^\times) \mathbf{q}^{\times'} \mathbf{R} + \epsilon \exp(\epsilon \mathbf{q}^\times) \mathbf{q}^\times \mathbf{q}^{\times'} \mathbf{R} + \exp(\epsilon \mathbf{q}^\times) \mathbf{q}^\times \mathbf{R}'.$$

On en déduit que

$$\delta \mathbf{R}' = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{R}'_\epsilon \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{q}^{\times'} \mathbf{R} + \mathbf{q}^\times \mathbf{R}'.$$

Nous utilisons maintenant (2.44), on obtient

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^\times &= \delta(\mathbf{R}^T \mathbf{R}'), \\ &= \delta \mathbf{R}^T \mathbf{R}' + \mathbf{R}^T \delta \mathbf{R}', \\ &= -\mathbf{R}^T \mathbf{q}^\times \mathbf{R}' + \mathbf{R}^T (\mathbf{q}^{\times'} \mathbf{R} + \mathbf{q}^\times \mathbf{R}'), \\ &= \mathbf{R}^T \mathbf{q}^{\times'} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Puisque, on a $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$, alors

$$\delta(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\delta\mathbf{R}^T = 0.$$

Donc, la matrice $\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ est antisymétrique et par suite, il existe un vecteur \mathbf{q} tel que $\delta\mathbf{q}^\times = \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T$. Le vecteur \mathbf{q} représente une variation de la rotation \mathbf{R} . On note $\mathbf{q}' = \text{axial}(\mathbf{q}^\times)$ et $\mathbf{u} = \text{axial}(\mathbf{u}^\times)$. On déduit de (2.64) que

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{R}^T \mathbf{q}'. \quad (2.65)$$

Par regroupement des termes (2.62), (2.63) et (2.65) dans (2.61) nous obtenons, (voir Ibrahimbegović [34])

$$\delta\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') + \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{q}' - \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{q} \} ds. \quad (2.66)$$

Puisque $\mathbf{n} = \mathbf{R}^T \mathbf{n}$ et $\mathbf{m} = \mathbf{R}^T \mathbf{m}$, alors

$$\delta\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') + \mathbf{m} \cdot \mathbf{q}' - \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{q} \} ds. \quad (2.67)$$

Notons que

$$\delta\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta\mathcal{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) - \delta\mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (2.68)$$

avec

$$\delta\mathcal{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') + \mathbf{m} \cdot \mathbf{q}' \} ds, \quad (2.69a)$$

$$\delta\mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{q} \} ds. \quad (2.69b)$$

Dans l'espace des configurations admissibles \mathcal{V} , la condition nécessaire de minimisation de l'énergie totale (2.56) est donnée par :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{m} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{q} \} ds = 0, \quad (2.70)$$

pour toute variation admissible $(\mathbf{p}, \mathbf{q}^\times \mathbf{R}) \in T_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})} \mathcal{V}$.

Le problème d'équilibre est décrit par les équations d'équilibre (2.47) et le problème de minimisation (2.56). Par conséquent, la condition nécessaire de minimisation de l'énergie totale (2.56) est aussi une condition nécessaire pour que le système d'équilibre (2.47) admet une solution. La condition (2.71) est équivalente à

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ (\mathbf{n}' + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{n} + \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{q} \} ds = 0. \quad (2.71)$$

La forme faible du problème d'équilibre (2.47) est une condition nécessaire pour que ce système admette une solution :

$$\begin{cases} \int_0^l \{(\mathbf{n}' + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{p}\} ds = 0, \\ \int_0^l \{(\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{n} + \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{q}\} ds = 0, \end{cases} \quad (2.72)$$

pour toute variation admissible $(\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}) \in T_{(r, \mathbf{R})} \mathcal{V}$.

Dans [9], Chamekh et al. ont prouvé l'existence de solutions pour le problème de minimisation (2.56) en se basant sur le théorème de Weierstrass généralisé [42, p. 382].

3 Modélisation de l'auto-contact avec frottement d'une tige élastique

3.1 Introduction

Il est très important de modéliser les contacts entre les éléments de la tige au cours de la déformation pour prendre en compte toutes les contraintes des positions physiquement impossibles et éviter que ces contraintes se produisent numériquement. La pénétration de la matière étant impossible, c'est une loi physiquement évidente qui exprime le fait que deux points différents ne peuvent pas occuper la même place. Pour cette raison, nous imposons une contrainte qui s'appelle contrainte d'impénétrabilité pour assurer qu'une configuration soit admissible au sens physique [9]. Généralement, l'auto-contact ne se fait pas sans frottement sauf si on néglige la contrainte tangentielle à l'interface. Pour modéliser le frottement il est nécessaire de déterminer la vitesse de glissement qui permettra d'évaluer la puissance des efforts de frottements. La mesure de glissement doit s'effectuer dans le plan tangent à la section transversale et orthogonale au plan déterminé par la normale et la tangente à la ligne centrale de la tige au point d'auto-contact qui est supposé persistant au cours du glissement.

3.2 Modélisation de l'auto-contact

On s'intéresse dans cette partie à la modélisation mécanique de l'auto-contact. Le problème d'auto-pénétration physique conduit à une construction d'un espace des configurations cinématiquement admissibles sous une contrainte de non auto-pénétration définie par une fonction distance signée.

3.2.1 Géométrie de l'auto-contact

On définit à partir d'une abscisse curviligne $s \in [0, l]$ de la ligne centrale de la tige l'ensemble des points susceptibles de rentrer en contact avec $\mathbf{r}(s)$ par \mathcal{J}_s (voir [9]), alors que $\bar{\mathcal{J}}_s = [0, l] \setminus \mathcal{J}_s$ est l'ensemble des points très proche et qui ne peuvent pas entrer en contact avec $\mathbf{r}(s)$. La recherche d'un point de contact consiste à résoudre pour chaque abscisse curviligne $s \in [0, l]$ le problème de minimisation non linéaire suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{s} \in \mathcal{J}_s \text{ tel que} \\ \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})\|^2 \leq \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\sigma)\|^2 \quad \forall \sigma \in \mathcal{J}_s. \end{cases} \quad (3.1)$$

Puisque \mathcal{J}_s est un compact de \mathbb{R} , le problème ci-dessus admet au moins une solution qui est également représentée par le point le plus proche de s , c'est-à-dire

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \operatorname{argmin}_{\sigma \in \mathcal{J}_s} \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\sigma)\|^2. \quad (3.2)$$

Dans la suite, le vecteur unitaire normal et le vecteur unitaire tangent au point $\mathbf{r}(\bar{s})$ à la courbe $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); s \in [0, l]\}$ qui décrit la déformation de la ligne centrale de la tige sont, respectivement, données par :

$$\mathbf{N}(s, \bar{s}) = \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})}{\|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})\|}, \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{T}(s, \bar{s}) = \frac{\mathbf{r}'(\bar{s})}{\|\mathbf{r}'(\bar{s})\|}. \quad (3.3b)$$

Remarques 3.1. 1. *Le problème de minimisation (3.1) qui consiste à trouver le point de contact avec $\mathbf{r}(s)$ peut se traduire à trouver les zéros de son gradient, ce qui donne la condition d'orthogonalité suivante :*

$$\mathbf{r}'(\bar{s}) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})) = 0. \quad (3.4)$$

C'est-à-dire, il est également représenté par la projection orthogonale $\mathbf{r}(\bar{s})$ d'un point $\mathbf{r}(s)$ sur la partie \mathcal{J}_s de la tige.

2. *D'après la condition d'orthogonalité (3.4), le vecteur $\mathbf{N}(s, \bar{s})$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{T}(s, \bar{s})$ et au vecteur $\mathbf{r}'(s)$ dans le cas de déformation sans cisaillement. Les vecteur $\mathbf{T}(s, \bar{s})$ et $\mathbf{r}'(s)$ sont parfois orthogonaux (voir Fig.3.1).*

3.2.2 Distance d'auto-contact

On suppose que la tige étudiée dans cette thèse est non fermée, par suite la courbe $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); s \in [0, l]\}$ est non fermée. Sur cette courbe nous pouvons exclure, pour chaque $s \in [0, l]$,



FIGURE 3.1 – Exemples de situations où $\mathbf{r}'(s)$ et $\mathbf{r}'(\bar{s})$ sont orthogonaux.

les points très proches qui ne peuvent pas entrer en contact avec $\mathbf{r}(s)$ comme suit : On choisit une constante δ strictement positive suivant la rigidité et le rayon de la section transversale de la tige ($\delta > \varepsilon$) ou tout simplement suivant la courbure maximale de la tige, et on note par

$$\Gamma_s = \begin{cases} \mathbf{r}([s - \delta, s + \delta]) & \text{si } s \in]0, l[, \\ \mathbf{r}([0, \delta]) & \text{si } s = 0, \\ \mathbf{r}([l - \delta, l]) & \text{si } s = l. \end{cases} \quad (3.5)$$

Cet ensemble est un petit morceau de la tige centré en $\mathbf{r}(s)$, on remarque que $\bar{\mathcal{J}}_s = \mathbf{r}^{-1}(\Gamma_s)$.

Pour chaque abscisse curviligne $s \in [0, l]$, on définit le vecteur le plus court vers \mathcal{J}_s que nous allons appeler le vecteur de contact, il est donné par :

$$\mathbf{D}_r(s, \bar{s}) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s}) - 2\varepsilon \mathbf{N}(s, \bar{s}) = -d_r(s, \bar{s}) \mathbf{N}(s, \bar{s}). \quad (3.6)$$

Tandis que

$$d_r(s, \bar{s}) = -(\mathbf{D}_r(s, \bar{s}) \cdot \mathbf{N}(s, \bar{s})) = 2\varepsilon - \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})\|,$$

est la distance de contact, elle permet de mesurer la distance relative entre deux points de la tige au cours de la déformation. Cette distance est également appelée la fonction "Gap" [8] ou la fonction d'auto-pénétration, c'est-à-dire elle permet de mesurer la pénétration de la tige sur elle-même et de mesurer le jeu entre les surfaces latérales de cette tige.

Dans le but de garantir une injectivité locale et globale de la déformation, nous allons imposer une contrainte d'impénétrabilité sur la distance de contact sous forme d'une condition qui autorise les points de la tige de rentrer en contact sans s'interpénétrer (voir FIG. 3.2). Ainsi, un contact physiquement admissible peut être défini par la condition suivante :

$$d_r(s, \bar{s}) \leq 0, \quad \forall s \in [0, l]. \quad (3.7)$$

Par conséquent, cette contrainte de la non auto-pénétration du matériau conduit à un espace des configurations cinématiquement et physiquement admissibles défini par :

$$\mathcal{V}_c = \{(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V} : d_r(s, \bar{s}) \leq 0, \forall s \in [0, l]\}. \quad (3.8)$$

On rappelle que

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in H^1([0, l]; \mathbb{R}^3 \times SO(3)), (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \text{ vérifie CL}\}. \quad (3.9)$$

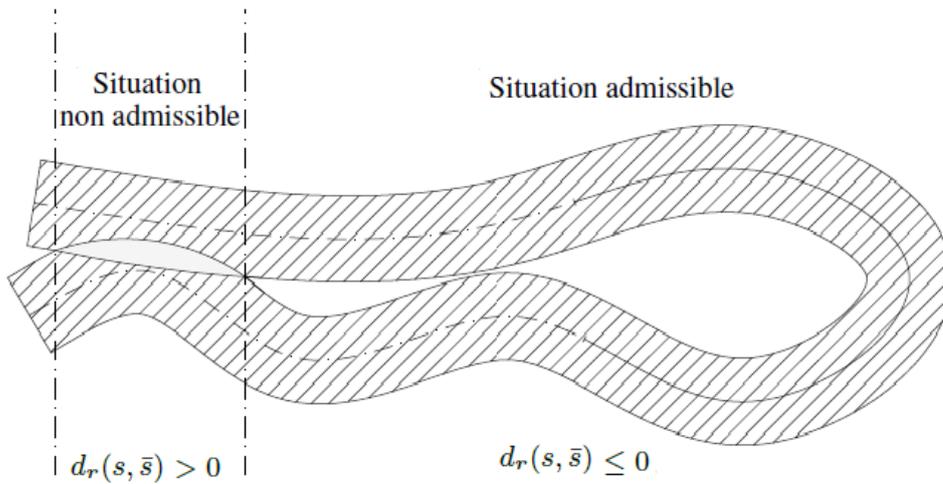


FIGURE 3.2 – Situation physiquement admissible et situation physiquement non admissible d'une tige élastique déformée.

3.3 Caractérisation du frottement

Comme dans le cas d'auto-contact sans frottement dans une tige hyperélastique [9], la contrainte d'impenétrabilité (3.7) peut se traduire en terme d'une force de contact appliquée entre deux points qui se trouvent respectivement sur les frontières des sections transversales $A(\mathbf{r}(s))$ et $A(\mathbf{r}(\bar{s}))$ pour chaque abscisse curviligne $s \in [0, l]$ tel que $d_r(s, \bar{s}) = 0$. Dans le cas sans frottement cette force admet seulement une composante normale. Cependant, sous l'hypothèse de présence de frottement cette force doit être admise trois composantes afin que nous puissions suivre la pression de contact (force normale) et les efforts de frottement (force tangentielle et rotationnelle de frottement) sans tomber dans le problème de l'auto-pénétration. Si nous négligeons

le frottement rotationnel, la force de contact doit être définie par (voir FIG. 3.3)

$$\mathbf{f}_c(s) = f_N^c(s)\mathbf{N}(s, \bar{s}) + \mathbf{f}_T^c(s).$$

En présence du frottement, les contraintes normales et tangentielles dans l'interface de contact sont couplées par le vecteur vitesse de glissement tangentiel. Cela signifie que le frottement s'applique normalement aux problèmes transitoires, bien qu'il existe également des cas d'équilibre statique qui ont un sens physique. Afin d'étendre notre formulation de contact au frottement de Signorini-Coulomb, un processus quasi statique sera considéré avec un auto-contact persistant au cours du glissement, c'est-à-dire

$$\text{si } d_r(s, \bar{s}) = 0, \text{ alors } \dot{d}_r(s, \bar{s}) = 0, \quad (3.10)$$

avec

$$\dot{d}_r(s, \bar{s}) = \frac{d_r(s, \bar{s}) - d_r(s_0, \bar{s}_0)}{\Delta t}, \quad (3.11)$$

où s_0 et \bar{s}_0 sont les abscisses curvilignes associées aux points de contact au pas de temps précédent et Δt est la différence entre le pas de temps courant et le pas de temps précédent.

La mesure de glissement tangentiel doit s'effectuer dans le plan tangent à la section transversale et orthogonale au plan (\mathbf{N}, \mathbf{T}) . Pour déterminer la vitesse de glissement qui permettra d'évaluer la puissance des efforts de frottements, nous dérivons le vecteur de contact $\mathbf{D}_r(s, \bar{s})$ par rapport au temps à partir de (3.6) avec la prise en compte de la condition de persistance de contact (3.10), on obtient

$$\dot{\mathbf{D}}_r(s, \bar{s}) = \dot{\mathbf{r}}(s) - \dot{\mathbf{r}}(\bar{s}) - \dot{\bar{s}}\mathbf{r}'(\bar{s}) + 2\varepsilon\dot{\mathbf{N}}(s, \bar{s}), \quad (3.12a)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_r(s, \bar{s}) = \dot{d}_r(s, \bar{s})\mathbf{N}(s, \bar{s}) + d_r(s, \bar{s})\dot{\mathbf{N}}(s, \bar{s}) = 0, \quad (3.12b)$$

où $\dot{\mathbf{r}}(s)$ et $\dot{\mathbf{r}}(\bar{s})$ sont, respectivement, les vecteurs vitesses des points s et \bar{s} .

La différence entre les vecteurs $\dot{\mathbf{r}}(s)$ et $\dot{\mathbf{r}}(\bar{s})$ avec la prise en compte de la contrainte d'im-pénétrabilité donnent le vecteur vitesse de glissement tangentiel suivant :

$$\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) = \dot{\mathbf{r}}(s) - \dot{\mathbf{r}}(\bar{s}) + 2\varepsilon\dot{\mathbf{N}}(s, \bar{s}), \quad (3.13)$$

$$= \dot{\bar{s}}\mathbf{r}'(\bar{s}). \quad (3.14)$$

Physiquement, le phénomène de frottement peut être interprété comme suit :

- si $\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) = \mathbf{0}$ alors la courbe est en état d'auto-adhérence tangentielle ;
- si $\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) \neq \mathbf{0}$ alors la courbe est en état d'auto-glissement tangentiel.

Dans cette thèse et comme nous avons vu dans (3.11), la discrétisation temporelle du vecteur vitesse de glissement tangentiel est basée sur une approximation d'Euler comme suit :

$$\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) = \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)}{\Delta t} - \frac{\mathbf{r}(\bar{s}) - \mathbf{r}(\bar{s}_0)}{\Delta t} + 2\varepsilon \frac{\mathbf{N}(s, \bar{s}) - \mathbf{N}(s_0, \bar{s}_0)}{\Delta t}, \quad (3.15)$$

ou encore

$$\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) = \frac{\bar{s} - \bar{s}_0}{\Delta t} \mathbf{r}'(\bar{s}). \quad (3.16)$$

3.4 Loi de frottement de Signorini-Coulomb

La plus simple des lois de frottement est la loi de Tresca, elle a l'avantage de pouvoir se ramener à un problème de minimisation de l'énergie potentielle totale sous les contraintes associées au contact [42] et est basé sur un potentiel de glissement qui ne dépendent pas de la contrainte normale. Cette loi a été ajoutée aux problèmes de contact lorsque les compressions normales sont importantes. Cependant, le phénomène de frottement de Tresca est très délicat dans le cas où la tige peut subir de grands déplacements, il commence par analyser le frottement et autorise un peu de glissements avant l'auto-contact. La sensibilité de ce phénomène peut mener à une instabilité complexe de la tige au cours de déplacements/déformations et à une divergence large au niveau du calcul numérique. Un deuxième problème inattendu est que le frottement de Tresca n'admet pas de potentiel dans le cadre de grands déplacements/déformations.

La loi de frottement Coulomb généralise le phénomène de frottement de Tresca et qui est capable d'analyser le frottement même pour les tiges élastiques en grands déplacements. Les efforts de frottement de Coulomb ne peuvent dépasser le seuil positif donné par la multiplication de la pression normale de contact par un coefficient de frottement donné généralement constant dépendant en réalité des matériaux et des milieux considérés (des états de surface, de la température, de la vitesse de glissement, etc. . .). Malheureusement, la loi de frottement de Coulomb n'admet pas de potentiel parce que le seuil de frottement de Coulomb dépend de la compression normale. Ainsi, on ne peut pas se ramener à un problème de minimisation d'une énergie potentielle comme dans le cas sans frottement.

Les conditions d'auto-contact de type Signorini-Coulomb doivent être satisfaites sur l'ensemble de la frontière de contact, et sont des conditions de Kuhn-Tucker (les premières trois conditions) et des conditions de frottement (les deux conditions restantes) comme suit :

$$d_r(s, \bar{s}) \leq 0, \quad (3.17a)$$

$$f_N^c(s) \geq 0, \quad (3.17b)$$

$$d_r(s, \bar{s}) f_N^c(s) = 0, \quad (3.17c)$$

$$\|\mathbf{f}_T^c(s)\| < \gamma_T f_N^c(s), \quad \text{si } \mathbf{g}_r(s, \bar{s}) = \mathbf{0}, \quad (3.17d)$$

$$\mathbf{f}_T^c(s) = \gamma_T f_N^c(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|}, \quad \text{si } \mathbf{g}_r(s, \bar{s}) \neq \mathbf{0}, \quad (3.17e)$$

où γ_T est le coefficient de frottement tangentiel pour le point maître qui dépend généralement des matériaux et des environnements considérés (états de surface, température, vitesse de glissement tangentiel, ...).

L'inégalité (3.17a) exprime la condition de non auto-pénétration de la matière et (3.17b) le fait que la contrainte de contact normale est de compression qui doit être nulle ainsi que la contrainte tangentielle s'il n'y a pas de contact (3.17c, 3.17d) : si le contact est établi alors $d_r(s, \bar{s}) = 0$; s'il y a décollement alors $(f_N^c(s), \mathbf{f}_T^c(s)) = (0, \mathbf{0})$. Les conditions de frottement (3.17d, 3.17e) expriment le fait que les efforts tangentiels de frottement de Signorini-Coulomb ne peuvent pas dépasser le seuil positif donné par $\gamma_T f_N^c$: si la contrainte tangentielle de la force de contact atteint le seuil $\gamma_T f_N^c$, il se produit alors un auto-glissement tangentiel le long du vecteur tangent correspondant ou dans le sens contraire ; sinon il y a une auto-adhérence tangentielle. En d'autres termes, le cône de frottement défini par l'angle $\alpha = \arctan(\gamma_T)$ détermine s'il existe un glissement tangentiel ou non, voir FIG. 3.3.

La condition de la persistance de l'auto-contact (3.10) est exprimée par l'égalité suivante :

$$\dot{d}_r(s, \bar{s}) f_N^c(s) = 0.$$

Cette condition est particulièrement utilisée pour développer la cinématique de frottement.

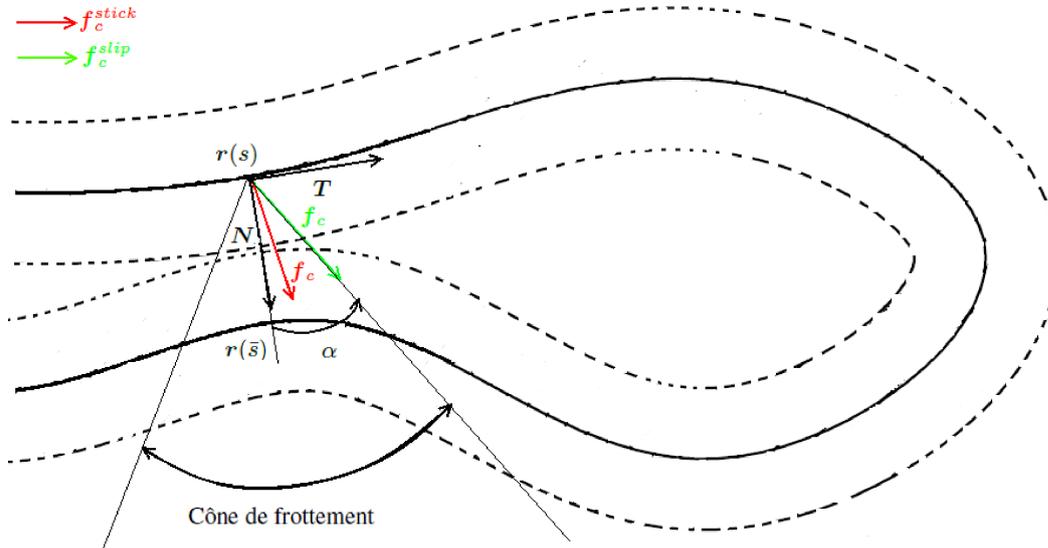


FIGURE 3.3 – Domaine de la loi de Signorini-Coulomb.

3.5 Formulation variationnelle : Problématique du frottement dans le cas de grands déplacements

Dans cette section, nous présentons une formulation variationnelle de ce problème quasi statique d'auto-contact avec frottement de Signorini-Coulomb pour une tige élastique qui peut subir des grands déplacements/déformations. Pour décrire cette formulation, les équations d'équilibres (2.47) nous serviront de base. En ajoutant la force de contact \mathbf{f}_c à ces équations, on obtient

$$\mathbf{n}'(s) + \mathbf{f}(s) + \mathbf{f}_c(s) = \mathbf{0}, \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{m}'(s) + \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{d}_i(s) \times \mathbf{f}_i(s) = \mathbf{0}. \quad (3.18b)$$

Les problèmes d'auto-contact avec frottement en tant que cas particulier de problèmes de contact avec frottement ont une importance aussi bien pratique que théorique. Un grand nombre d'algorithmes permettant de résoudre numériquement les équations et les inéquations par des éléments finis associés tels que des problèmes de minimisation de l'énergie potentielle totale ont été présentés dans la littérature [9]. Mais théoriquement, on sait que les problèmes quasi statiques d'auto-contact avec frottement présentent des caractéristiques «inattendues» telles que la non-existence et la non-unicité de solution.

Nous rappelons qu'une densité d'énergie typique a été considéré qui prend en compte la flexion, la torsion et aussi le cisaillement et l'allongement :

$$\mathcal{W}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} \}, \quad (3.19)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{A} sont coercives, symétriques et définies positives.

En utilisant les relations (2.48) avec le choix de l'expression d'énergie (3.19), on obtient

$$\mathbf{n}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{m}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{u}. \quad (3.20b)$$

Alors, la forme forte du problème d'équilibre est finalement décrite par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V}_c \text{ telle que} \\ (\mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{v})' + \mathbf{f} + \mathbf{f}_c = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{u})' + \mathbf{R}\mathbf{v} \times \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Par conséquent, la forme faible du problème est écrite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V}_c \text{ telle que} \\ \int_0^l \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{R}^T \mathbf{r}' \cdot \mathbf{p}' ds + \int_0^l \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} ds + \int_0^l \mathbf{f}_c \cdot \mathbf{p} ds = \mathbf{0}, \\ \int_0^l \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T \mathbf{d}'_i \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{d}_i)' ds + \int_0^l (\mathbf{r}' \times \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{R}^T \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{d}_i) ds \\ + \int_0^l \mathbf{f}_i \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{d}_i) ds = \mathbf{0}, \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q} \times \mathbf{R}) \in T_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})} \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Le contact avec frottement en grands déplacements/déformations est un sujet délicat et ce, parce que dans ce cadre fortement non linéaire, le principal point qui posera problème est l'existence de solutions. En fait, ce n'est pas complètement une surprise car même dans un cadre d'élasticité linéaire, les résultats d'existence sont très techniques pour le problème du contact avec frottement de Signorini-Coulomb.

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution aux problèmes de contact de Signorini-Coulomb, il serait vain de penser à utiliser des méthodes variationnelles classiques, ce qui pourrait également expliquer en partie pourquoi les théorèmes de point fixe sont largement utilisés par de nombreux auteurs, comme dans [37, 39]. Les théorèmes de point fixe sont inapplicables pour le problème (3.22) en raison de la non-linéarité forte présentée par le couplage entre \mathbf{r} et \mathbf{R} au niveau de chaque équation, afin que nous ne puissions pas prouver que ce problème même admet une solution.

Nous notons que si on supprime le couplage entre \mathbf{r} et \mathbf{R} par exemple en supprimant la rotation \mathbf{R} dans la force interne \mathbf{n} et le moment \mathbf{m} donné par (5.27) (ce qui est, en fait, physiquement interdit), on obtient un problème linéaire mathématique pur donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V}_c \text{ telle que} \\ \int_0^l \mathbf{B}\mathbf{r}' \cdot \mathbf{p}' ds + \int_0^l \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} ds + \int_0^l \mathbf{f}_c \cdot \mathbf{p} ds = \mathbf{0}, \\ \int_0^l \mathbf{A}\mathbf{d}'_i \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{d}_i)' ds + \int_0^l (\mathbf{r}' \times \mathbf{B}\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{d}_i) ds \\ + \int_0^l \mathbf{f}_i \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{d}_i) ds = \mathbf{0}, \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q} \times \mathbf{R}) \in T_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})} \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Ce problème admet une solution unique démontrable par le théorème de point fixe de Schauder pour une force d'auto-contact avec frottement pénalisée proposée et définie par

$$\mathbf{f}_c^\mu(s) = \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{J}_s} [d_r(s, \bar{s})]_+ (\mathbf{N}^\varepsilon(s, \bar{s}) + \gamma_T \mathbf{T}^\mu(s, \bar{s})) d\bar{s}, \quad [x]_+ = \frac{1}{2}(x + |x|), \quad (3.24)$$

avec les régularisations suivantes :

$$\mathbf{N}^\varepsilon(s, \bar{s}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})}{2\varepsilon} & \text{si } \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})\| \leq 2\varepsilon, \\ \mathbf{N}(s, \bar{s}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{T}^\mu(s, \bar{s}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\mu} & \text{si } \|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\| \leq \mu, \\ \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.25b)$$

Ensuite, nous pouvons prouver la convergence du problème pénalisé. La solution du problème pénalisé doit être dans l'espace des configurations admissibles \mathcal{V} , parce que les techniques de la méthode de pénalisation autorise une petite pénétration. Mais, la solution du problème non pénalisé doit être dans l'espace de configurations cinématiquement et physiquement admissibles \mathcal{V}_c . Cette pénétration ne peut pas être entièrement de telle sorte qu'on ne peut pas dépasser ou atteindre la ligne médiane de la tige, cette technique est localisée par le paramètre de pénalisation μ .

4 Implémentation numérique

4.1 Introduction

Dans la littérature, les méthodes de pénalisation et la méthode du Lagrangien augmenté sont les méthodes les plus utilisées numériquement, et sont capables de respecter les conditions de contact et de frottement même sur une forme faible. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à ces méthodes qui sont théoriquement détaillées par Kikuchi et Oden dans [42]. Les méthodes de pénalisation autorisent, d'une part, une auto-pénétration négligeable et, d'autre part, un glissement léger sans respecter les conditions de frottement. Ces autorisations dépendent des paramètres de pénalité normale et tangentielle. Plus précisément, lorsque les paramètres de pénalité sont plus petits, la pénétration et les taux de frottement non autorisés physiquement sont plus faibles (voir Fig. 4.1). Les méthodes de pénalisation et la méthode du Lagrangien augmenté ont été utilisées dans [57, 29] pour le contact sans frottement entre deux poutres à sections circulaires, et récemment dans [9] pour le traitement numérique d'auto-contact sans frottement pour une tige fermée à sections transversales circulaires.

4.2 Formulation variationnelle faible

La formulation variationnelle de ce problème dans le cas sans frottement était étudiée par Chamekh et al. [9]. Dans le cas d'auto-contact avec frottement, nous introduisons le principe des travaux virtuels pour la méthode du Lagrangien augmenté sous forme d'une condition nécessaire pour minimiser l'énergie totale dans l'espace de configurations cinématiquement et physiquement admissibles \mathcal{C} :

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \int_0^l (f_N^{\mu N}(s) \mathbf{N}(s, \bar{s}) + \mathbf{f}_T^{\mu T}(s)) \cdot (\mathbf{p}(\bar{s}) - \mathbf{p}(s)) ds = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

où $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q})$ est l'expression de la différence entre le travail virtuel intérieur et le travail virtuel extérieur développée par Chamekh et al. [9], elle est donnée par

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta \mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) - \delta \mathcal{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (4.2)$$

$$= \int_0^l (\{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') + \mathbf{m} \cdot \mathbf{q}'\} - \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{q}\}) ds, \quad (4.3)$$

et où δ désigne la dérivée directionnelle par rapport au vecteur déplacement.

Par souci de simplicité et sans perdre de généralité, nous supposons que la tige ne soit pas soumise à un couple distribué, i.e.

$$\int_0^l \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{d}_i ds = 0. \quad (4.4)$$

Alors, l'expression (4.3) est devenue

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') + \mathbf{m} \cdot \mathbf{q}' - \mathbf{f} \cdot \mathbf{p}\} ds. \quad (4.5)$$

La partie intégrale de (4.1) est le travail virtuel des forces d'auto-contact et de frottement, respectivement données par

$$\mathbf{f}_N^{\mu_N}(s) = \frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s)]_+, \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{f}_T^{\mu_T}(s) = \frac{1}{\mu_T} P_{B_T} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s)], \quad (4.6b)$$

où μ_N et μ_T sont les paramètres de pénalité, respectivement, normale et tangentielle, et B_T est une boule centrée à l'origine et de rayon $\mu_T \gamma_T f_N^{\mu_N}$.

Les approches itératives $\lambda_N^n(s)$ et $\boldsymbol{\lambda}_T^n(s)$ des forces du contact et du frottement sont mises à jour par les formules itératives suivantes :

$$\lambda_N^{n+1}(s) = \frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s)]_+, \quad (4.7a)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_T^{n+1}(s) = \frac{1}{\mu_T} P_{B_T^{n+1}} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s)], \quad (4.7b)$$

avec $B_T^n = B(\mu_T \gamma_T \lambda_N^n)$.

Nous notons que la méthode de pénalisation consiste au choix de $\lambda_N^n \mathbf{N} = \boldsymbol{\lambda}_T^n = \mathbf{0}$ dans (4.6). Dans la proposition suivante, la méthode du Lagrangien augmenté nous rassure sur les conditions de Kuhn-Tucker et les condition de frottement de Signorini-Coulomb (3.17) :

Proposition 4.1. *Les conditions d'auto-contact et de frottement (3.17) sont équivalentes à :*

$$f_N(s) = \frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N f_N(s)]_+, \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{f}_T(s) = \frac{1}{\mu_T} P_{B_T} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)], \quad (4.8b)$$

où $B_T := B(\mu_T \gamma_T f_N)$.

Preuve 4.1. *Nous allons commencer par montrer que les conditions d'auto-contact et de frottement (3.17) implique (4.8). Nous considérons une configuration régulière (\mathbf{r}, \mathbf{R}) de \mathcal{V} tel que $\mathbf{f}_c(s)$, $d_r(s, \bar{s})$ et $\mathbf{g}_r(s, \bar{s})$ vérifiant les conditions (3.17).*

Tout d'abord, d'après la condition (3.17b) on a $f_N(s) = 0$ ou $f_N(s) > 0$. Supposons que $f_N(s) = 0$, la condition (3.17a) prouve que

$$\frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N f_N(s)]_+ = \frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s})]_+ = 0 = f_N(s), \quad (4.9)$$

Ensuite, supposons que $f_N(s) > 0$. La condition (3.17c) implique que $d_r(s, \bar{s}) = 0$, donc

$$\frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N f_N(s)]_+ = \frac{1}{\mu_N} [\mu_N f_N(s)]_+ = f_N(s). \quad (4.10)$$

On en déduit alors que (4.8a) est vérifiée.

Maintenant, dans les conditions de frottement (3.17) nous considérons le cas où $\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) = \mathbf{0}$. D'après la condition (3.17d) on a

$$\|\mu_T \mathbf{f}_T(s)\| < \mu_T \gamma_T f_N(s),$$

donc

$$\frac{1}{\mu_T} P_{B_T} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)] = \frac{1}{\mu_T} P_{B_T} [\mu_T \mathbf{f}_T(s)] = \mathbf{f}_T(s). \quad (4.11)$$

Dans le cas où $\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) \neq \mathbf{0}$ on a $\mathbf{f}_T(s) = \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|}$. Donc

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| &= \left\| \mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|} \right\|, \\ &= \|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\| \left(1 + \frac{\mu_T \gamma_T f_N(s)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|} \right), \\ &= \|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\| + \mu_T \gamma_T f_N(s), \\ &\geq \mu_T \gamma_T f_N(s). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_T} P_{B_T} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)] &= \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\|}, \\ &= \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|}}{\left\| \mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|} \right\|}, \\ &= \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) \left(1 + \frac{\mu_T \gamma_T f_N(s)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|} \right)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\| \left\| 1 + \frac{\mu_T \gamma_T f_N(s)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|} \right\|}, \\ &= \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|} = \mathbf{f}_T(s). \end{aligned} \quad (4.12)$$

On en déduit alors que (4.8b) est vérifiée.

Inversement, nous allons montrer que les forces d'auto-contact et de frottement données par (4.8) vérifiant les conditions de Kuhn-Tucker et les conditions de frottement de Signorini-Coulomb (3.17). Nous considérons une configuration régulière $(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V}$ tel que (4.8) sont vérifiées. D'après (4.8a) on obtient que $f_N(s) \geq 0$. On considère le cas où $f_N(s) = 0$, alors

$$f_N(s)d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) = 0, \quad (4.13)$$

et

$$f_N(s) = \frac{1}{\mu_N} [d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) + \mu_N f_N(s)]_+ = \frac{1}{\mu_N} [d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s})]_+ = 0,$$

ce qui implique que

$$d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) \leq 0. \quad (4.14)$$

Dans le cas où $f_N(s) > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mu_N f_N(s) &= [d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) + \mu_N f_N(s)]_+ \\ &= d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) + \mu_N f_N(s), \end{aligned}$$

on conclut que

$$d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) = 0 \quad \text{et} \quad f_N(s)d_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) = 0. \quad (4.15)$$

Alors, les conditions de Kuhn-Tucker (3.17) sont vérifiées.

Maintenant, dans la force de frottement (4.8b) supposons que $\mathbf{g}_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) = 0$. Alors

$$\mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s) = \frac{1}{\mu_{\mathbf{T}}} P_{B_{\mathbf{T}}} [\mu_{\mathbf{T}} \mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s)].$$

Par conséquent

$$\|\mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s)\| < \gamma_{\mathbf{T}} f_N(s), \quad (4.16)$$

c'est-à-dire (3.17d) est vérifiée.

Dans le cas où $\mathbf{g}_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) \neq 0$, si on suppose que

$$\|\mathbf{g}_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) + \mu_{\mathbf{T}} \mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s)\| < \mu_{\mathbf{T}} \gamma_{\mathbf{T}} f_N(s), \quad (4.17)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s) &= \frac{1}{\mu_{\mathbf{T}}} P_{B_{\mathbf{T}}} [\mathbf{g}_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) + \mu_{\mathbf{T}} \mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s)], \\ &= \frac{1}{\mu_{\mathbf{T}}} \mathbf{g}_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) + \mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbf{g}_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) = 0$, d'où la contradiction. On conclut que

$$\|\mathbf{g}_{\mathbf{r}}(s, \bar{s}) + \mu_{\mathbf{T}} \mathbf{f}_{\mathbf{T}}(s)\| \geq \mu_{\mathbf{T}} \gamma_{\mathbf{T}} f_N(s). \quad (4.18)$$

Ensuite, la relation (4.8b) peut s'écrire alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_T(s) &= \frac{1}{\mu_T} P_{B_T} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)], \\
&= \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\|}, \\
&= \gamma_T f_N(s) \frac{(\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)) \left(\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s) \right)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| \left(\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s) \right)}, \\
&= \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s)} \\
&\quad + \gamma_T f_N(s) \frac{\mu_T \mathbf{f}_T(s) \|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s) (\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s))}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| \left(\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s) \right)}, \\
&= \frac{\gamma_T f_N(s)}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s)} \mathbf{g}_r(s, \bar{s}). \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Puisque $P_{B_T} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)] \in \partial B_T$ et d'après la relation (4.8b) on obtient d'une part

$$\|\mathbf{f}_T(s)\| = \gamma_T f_N(s),$$

et d'autre part, d'après (4.19)

$$\|\mathbf{f}_T(s)\| = \gamma_T f_N(s) \frac{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s)}.$$

Par suite

$$\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\| = \|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s).$$

Alors, nous remplaçons $\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \mathbf{f}_T(s)\| - \mu_T \gamma_T f_N(s)$ par $\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|$ dans (4.19) pour obtenir que

$$\mathbf{f}_T(s) = \gamma_T f_N(s) \frac{\mathbf{g}_r(s, \bar{s})}{\|\mathbf{g}_r(s, \bar{s})\|}.$$

On en déduit alors que (3.17e) est vérifiée. \square

Le problème de recherche des positions d'équilibre de la tige en présence de l'auto-contact avec frottement s'écrit finalement :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0, \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \text{ tel que } (\mathbf{p}, \mathbf{q}^\times \mathbf{R}) \in T_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})} \mathcal{V}, \end{cases} \tag{4.20}$$

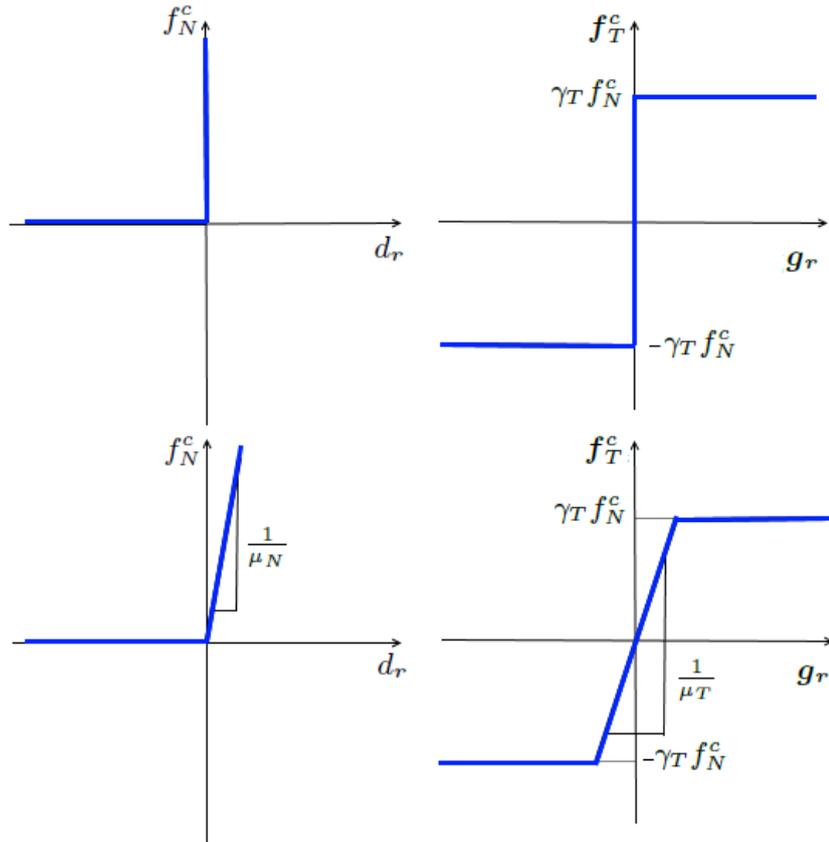


FIGURE 4.1 – Représentation graphique de la force de contact et de frottement en fonction de la distance du contact et la vitesse de glissement tangentielle données par les conditions de Kuhn-Tucker et les conditions de frottement de Signorini-Coulomb (en haut) et la méthode de pénalisation (en bas). Si μ_N et μ_T tendent vers zéro les deux diagrammes coïncident.

où $T_{(r, R)}\mathcal{V}$ est l'espace tangent à \mathcal{V} au point (r, R) défini dans (2.59).

Le problème non linéaire (4.20) peut être résolu itérativement par une méthode du type Newton. Cette méthode consiste à chaque itération n à estimer les quantités (r^n, R^n) et résoudre pour (η, θ) le problème linéarisé

$$\mathcal{H}(r^n, R^n; p, q) + \Delta\mathcal{H}(r^n, R^n; p, q; \eta, \theta) = 0, \quad (4.21)$$

avec

$$\Delta\mathcal{H}(r^n, R^n; p, q; \eta, \theta) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{H}(r^n + \epsilon\eta, \exp(\epsilon\theta^\times)R^n; p, q). \quad (4.22)$$

La mise à jour multiplicative de (r, R) peut être effectuée directement en fonction de vecteurs

de correction $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{n+1} &\leftarrow \mathbf{r}^n + \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{R}^{n+1} &\leftarrow \exp(\boldsymbol{\theta}^\times) \mathbf{R}^n.\end{aligned}$$

Le processus itératif se poursuit jusqu'à ce que la norme des vecteurs de correction $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta})$ de l'itération actuelle devienne inférieure au seuil prescrit. Les étapes principales pour la résolution incrémentielle du problème non linéaire d'auto-contact avec frottement par association des méthodes du Lagrangien augmenté et de Newton sont résumées dans le tableau 4.1.

4.3 Existence d'une solution pour le problème pénalisé

Dans cette section, nous adoptons la formulation lagrangienne augmentée décrite ci-dessus et la formulation variationnelle classique de l'auto-contact (2.56) dans le but d'écrire un problème de recherche des configurations d'équilibre approchées.

Nous comptons sur les multiplicateurs de Lagrange λ_N^n et λ_T^n (4.6), pour mettre la force pénalisée auto-contact avec frottement suivante :

$$\mathbf{f}_c^{\mu,n}(s) = \lambda_N^n(s) \mathbf{N}^\varepsilon(s, \bar{s}) + \lambda_T^n(s), \quad \mu_N = \mu_T = \mu. \quad (4.24)$$

avec la régularisation (3.25), i.e.

$$\mathbf{N}^\varepsilon(s, \bar{s}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})}{2\varepsilon} & \text{si } \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})\| \leq 2\varepsilon, \\ \mathbf{N}(s, \bar{s}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette régularisation a pour but de garantir que $\mathbf{f}_c^{\mu,n}$ soit dans $L^2([0, l]; \mathbb{R}^3)$. Nous rappelons que pour des raisons de simplicité nous avons adapté au cas où $\int_0^l \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{d}_i ds = 0$. Par conséquent, l'expression de l'énergie totale est donnée par :

$$\mathcal{J}_\mu^n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int_0^l \{ \mathcal{W}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{f}_c^{\mu,n} \cdot \mathbf{r} \} ds, \quad (4.25)$$

avec

$$\mathcal{W}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{Bv} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{Au} \}.$$

Le problème de recherche des positions d'équilibre approchées de la tige s'écrit finalement par le problème de minimisation approximative non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{r}_\mu^n, \mathbf{R}_\mu^n) \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \mathcal{J}_\mu^n(\mathbf{r}_\mu^n, \mathbf{R}_\mu^n) \leq \mathcal{J}_\mu^n(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{R}}) \quad \forall (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{R}}) \in \mathcal{V}_c, \end{cases} \quad (4.26)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0, 1[$.

Théorème 4.1. *Si la force extérieure $\mathbf{f} \in L^2([0, l]; \mathbb{R}^3)$, alors le problème (4.26) admet au moins une solution pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0, 1[$.*

Preuve 4.2. *Une grande partie pour l'existence de solution a été prouvée par Chamekh et al. dans [9] pour le problème d'auto-contact sans frottement basé sur le théorème de Weierstrass généralisé [42, p. 382]. L'unicité est une conséquence de la convexité de la densité d'énergie $\mathcal{W}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ par rapport aux mesures de déformations, et du type de la force contact proposée (4.24) qu'est connue et fixée.*

Selon l'expression de l'énergie totale (4.25), on note par

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mu,0}^n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) &= \int_0^l \{\mathcal{W}(\cdot, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}\} ds, \\ \mathcal{J}_{\mu,c}^n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) &= \int_0^l \mathbf{f}_c^{\mu,n} \cdot \mathbf{r} ds.\end{aligned}$$

Chamekh et al. dans [9] ont prouvé que l'espace \mathcal{V}_c est séquentiellement faiblement fermé dans $H^1((0, l), \mathbb{R}^3 \times M_3(\mathbb{R}))$, ainsi que $\mathcal{J}_{\mu,0}^n$ la première partie de l'énergie fonctionnelle donnée par (4.25) est faiblement semicontinue inférieurement sur $H^1((0, l), \mathbb{R}^3 \times M_3(\mathbb{R}))$ et coercive dans \mathcal{V}_c . Il reste à prouver que la deuxième partie $\mathcal{J}_{\mu,c}^n$ est faiblement semicontinue inférieurement sur $H^1((0, l), \mathbb{R}^3)$ et que $\mathcal{J}_{\mu,0}^n$ reste coercive dans \mathcal{V}_c après avoir ajouté le terme non linéaire pénalisé associé à l'auto-contact avec frottement $\mathcal{J}_{\mu,c}^n$.

La force de contact $\mathbf{f}_c^{\mu,n}$ est dans $L^2([0, l]; \mathbb{R}^3)$. Alors, la fonctionnelle

$$\mathbf{r} \in H^1((0, l), \mathbb{R}^3) \mapsto \int_0^l \mathbf{f}_c^{\mu,n}(s) \cdot \mathbf{r}(s) ds \in \mathbb{R}_+,$$

est continue et donc elle est faiblement semicontinue inférieurement. De plus, ils ont prouvé dans [9] qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\mathcal{J}_{\mu,0}^n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \geq c_1 \|\mathbf{r}\|_{1,2}^2 + \frac{c_2}{2} (\|\mathbf{R}\|_{1,2}^2 - l) - \|\mathbf{f}\|_{2,2} \|\mathbf{r}\|_{1,2},$$

où $\|\cdot\|_{1,2}$ dénote la norme usuelle dans $H^1([0, l]; \mathbb{R}^3)$ si l'argument est dans \mathbb{R}^3 , ou $H^1([0, l]; M_3(\mathbb{R}))$ si l'argument est dans $M_3(\mathbb{R})$.

Puisque $\mathbf{f}_c^{\mu,n} \in L^2([0, l]; \mathbb{R}^3)$, on obtient

$$\mathcal{J}_{\mu}^n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \geq c_1 \|\mathbf{r}\|_{1,2}^2 + \frac{c_2}{2} (\|\mathbf{R}\|_{1,2}^2 - l) - \|\mathbf{f}\|_{2,2} \|\mathbf{r}\|_{1,2} - \|\mathbf{f}_c^{\mu,n}\|_{2,2} \|\mathbf{r}\|_{1,2}.$$

Par conséquent, la fonctionnelle $\mathcal{J}_{\mu,0}^n$ reste coercive dans \mathcal{V}_c , ce qui termine la preuve. \square

4.4 Linéarisation de travail virtuel dû au contact avec frottement

Nous rappelons que la formulation faible du problème d'auto-contact avec frottement s'écrit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \int_0^l (f_N^{\mu_N}(s) \mathbf{N}(s, \bar{s}) + \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s)) \cdot (\mathbf{p}(\bar{s}) - \mathbf{p}(s)) ds = \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

La partie intégrale dans cette formulation est le travail virtuel des forces d'auto-contact avec frottement donné par :

$$\mathcal{G}_c(\mathbf{r}; \mathbf{p}) = \int_0^l (f_N^{\mu_N}(s) \mathbf{N}(s, \bar{s}) + \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s)) \cdot (\mathbf{p}(\bar{s}) - \mathbf{p}(s)) ds, \quad (4.29)$$

avec

$$f_N^{\mu_N}(s) = \frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s)]_+, \quad (4.30a)$$

$$\mathbf{f}_T^{\mu_T}(s) = \frac{1}{\mu_T} P_{B_T} [\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s)], \quad (4.30b)$$

où $P_{B_T}[\cdot]$ est la projection définie dans (1.2).

La première partie se décompose comme suit :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta \mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) - \delta \mathcal{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

avec

$$\delta \mathcal{J}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') + \mathbf{m} \cdot \mathbf{q}' \} ds, \quad (4.31a)$$

$$\delta \mathcal{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^l \{ \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{d}_i \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{q} \} ds, \quad (4.31b)$$

sont, respectivement, le travail virtuel des forces et moments internes et le travail des efforts/couples extérieurs. Les linéarisations de ces travaux ont été bien détaillé par Chamekh et al. dans [9]. Nous proposons désormais de linéariser le travail virtuel dû au contact avec frottement (4.29). En appliquant la dérivée directionnelle à \mathcal{G}_c , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}_c(\mathbf{r}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\eta}) &= \int_0^l [- (\Delta f_N^{\mu_N}(s) \mathbf{N}(s, \bar{s}) + f_N^{\mu_N}(s) \Delta \mathbf{N}(s, \bar{s}) + \Delta \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s)) \cdot \bar{\mathbf{p}}(s) \\ &\quad + \Delta \bar{s} (f_N^{\mu_N}(s) \mathbf{N}(s, \bar{s}) + \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s)) \cdot \mathbf{p}'(\bar{s})] ds, \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec $\bar{h}(s) = h(s) - h(\bar{s})$, pour toute fonction à valeurs vectorielles $h(\cdot)$, et le symbole de dérivation Δ désigne la dérivée directionnelle comme décrit dans (4.22).

Dans la suite, il est nécessaire de calculer les dérivées directionnelles $\Delta f_N^{\mu_N}$, $\Delta \mathbf{f}_T^{\mu_T}$, $\Delta \bar{s}$ et $\Delta \mathbf{N}$. Pour calculer $\Delta f_N^{\mu_N}$, il faudrait calculer Δd_r . Mais d'abord, la dérivée directionnelle de $f_N^{\mu_N}$ dans (4.30a) est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta f_N^{\mu_N}(s) &= \Delta \left\{ \frac{1}{\mu_N} [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s)]_+ \right\}, \\ &= \frac{\partial [d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s)]_+}{\mu_N \partial d_r(s, \bar{s})} \Delta d_r(s, \bar{s}), \\ &= \frac{1}{\mu_N} H(d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s)) \Delta d_r(s, \bar{s}), \end{aligned}$$

où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside suivante [9] :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Notons que la fonction $f_N^{\mu_N}$ n'est pas différentiable au sens classique en $d_r = 0$, et pour ignorer généralement le problème en pratique nous prenons $H(x)|_{x=0} = 1$. Nous rappelons que la distance de contact d_r est donnée par

$$\begin{aligned} d_r(s, \bar{s}) &= 2\varepsilon - \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})\|, \\ &= 2\varepsilon - (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})) \cdot \mathbf{N}(s, \bar{s}). \end{aligned}$$

Alors par la notation $\Delta \mathbf{r}(s) = \boldsymbol{\eta}(s)$, la dérivée directionnelle de d_r s'écrit

$$\Delta d_r(s, \bar{s}) = -(\bar{\boldsymbol{\eta}}(s) - \Delta \bar{s} \mathbf{r}'(\bar{s})) \cdot \mathbf{N}(s, \bar{s}) - (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s})) \cdot \Delta \mathbf{N}(s, \bar{s}). \quad (4.34)$$

Les vecteurs $\mathbf{r}'(\bar{s})$ et $\mathbf{N}(s, \bar{s})$ sont orthogonaux aussi bien que les vecteurs $(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\bar{s}))$ et $\Delta \mathbf{N}(s, \bar{s})$. Alors, la quantité (4.34) devient

$$\Delta d_r(s, \bar{s}) = -\bar{\boldsymbol{\eta}}(s) \cdot \mathbf{N}(s, \bar{s}).$$

Par conséquent on a

$$\Delta f_N^{\mu_N}(s) = -\frac{1}{\mu_N} H(d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s)) \bar{\boldsymbol{\eta}}(s) \cdot \mathbf{N}(s, \bar{s}). \quad (4.35)$$

Pour calculer $\Delta \mathbf{f}_T^{\mu_T}$, il faudrait calculer la dérivée directionnelle du vecteur vitesse de glissement tangentiel \mathbf{g}_r . On a d'abord, à partir de (4.30b)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s) &= \Delta \left\{ \frac{1}{\mu_T} P_{B_T^{n+1}}(s) (\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s)) \right\}, \\ &= \frac{1}{\mu_T} \frac{\partial [P_{B_T^{n+1}}(s) (\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s))]}{\partial \mathbf{g}_r(s, \bar{s})} \Delta \mathbf{g}_r(s, \bar{s}), \\ &= \frac{1}{\mu_T} H_1(\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s)) \Delta \mathbf{g}_r(s, \bar{s}), \end{aligned}$$

où $H_1(\cdot)$ est la fonction définie par :

$$H_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \|\mathbf{x}\| \leq \mu_T \gamma_T f_N^{\mu_N}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

En utilisant l'approximation d'Euler (3.15), on obtient

$$\Delta \mathbf{g}_r(s, \bar{s}) = \frac{1}{\Delta t} (\bar{\boldsymbol{\eta}}(s) - \Delta \bar{s} \mathbf{r}'(\bar{s}) + 2\varepsilon \Delta \mathbf{N}(s, \bar{s})). \quad (4.36)$$

Alors

$$\Delta \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s) = \frac{H_1(\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s))}{\mu_T \Delta t} (\bar{\boldsymbol{\eta}}(s) - \Delta \bar{s} \mathbf{r}'(\bar{s}) + 2\varepsilon \Delta \mathbf{N}(s, \bar{s})). \quad (4.37)$$

Nous appliquons la dérivée directionnelle sur (3.4), nous obtenons l'égalité suivante qui donne une expression pour $\Delta \bar{s}$ avec des difficultés moyennes sur le plan numérique peut-être surmontées, voit [9] :

$$[\|\mathbf{r}'(\bar{s})\|^2 - \mathbf{r}''(\bar{s}) \cdot \bar{\mathbf{r}}(s)] \Delta \bar{s} = \bar{\boldsymbol{\eta}}(s) \cdot \mathbf{r}'(\bar{s}) + \bar{\mathbf{r}}(s) \cdot \boldsymbol{\eta}'(\bar{s}), \quad (4.38)$$

Ensuite, par application de la dérivée directionnelle sur (3.3a), on obtient [9]

$$\Delta \mathbf{N}(s, \bar{s}) = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{N}(s, \bar{s}) \otimes \mathbf{N}(s, \bar{s})) \bar{\boldsymbol{\eta}}(s) - \Delta \bar{s} \mathbf{r}'(\bar{s})}{2\varepsilon - d_r(s, \bar{s})}. \quad (4.39)$$

Ainsi, en regroupant (4.35), (4.37), (4.38) et (4.39) dans (4.32), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}_c(\mathbf{r}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\eta}) &= \int_0^l \left[\frac{H(d_r(s, \bar{s}) + \mu_N \lambda_N^n(s))}{\mu_N (2\varepsilon - d_r(s, \bar{s}))} \mathbf{Q}_N(\mathbf{r}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{Q}_T(\mathbf{r}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\eta}) \right. \\ &\left. + \frac{H_1(\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s))}{\mu_T \Delta t (2\varepsilon - d_r(s, \bar{s}))} \bar{\boldsymbol{\eta}}(s) \cdot (2\varepsilon \mathbf{N}(s, \bar{s}) \otimes \mathbf{N}(s, \bar{s}) - d_r \mathbf{I}) \bar{\mathbf{p}}(s) \right] ds, \end{aligned} \quad (4.40)$$

où

$$\mathbf{Q}_N(\mathbf{r}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\eta}) = \Omega(s) d_r(s, \bar{s}) \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\eta}}(s) \\ \boldsymbol{\eta}'(\bar{s}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}'(\bar{s}) \otimes \mathbf{r}'(\bar{s}) & \mathbf{r}'(\bar{s}) \otimes \bar{\mathbf{r}}(s) \\ \bar{\mathbf{r}}(s) \otimes \mathbf{r}'(\bar{s}) & \bar{\mathbf{r}}(s) \otimes \bar{\mathbf{r}}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}}(s) \\ \mathbf{p}'(\bar{s}) \end{pmatrix}$$

$$+ \bar{\boldsymbol{\eta}}(s) \cdot (2\varepsilon \mathbf{N}(s, \bar{s}) \otimes \mathbf{N}(s, \bar{s}) - d_r(s, \bar{s}) \mathbf{I}) \bar{\mathbf{p}}(s),$$

$$\mathbf{Q}_T(\mathbf{r}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\eta}) = \Omega(s) \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\eta}}(s) \\ \boldsymbol{\eta}'(\bar{s}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Xi(s) \mathbf{r}'(\bar{s}) \otimes \mathbf{r}'(\bar{s}) & \mathbf{r}'(\bar{s}) \otimes \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s) \\ \Xi(s) \bar{\mathbf{r}}(s) \otimes \mathbf{r}'(\bar{s}) & \bar{\mathbf{r}}(s) \otimes \mathbf{f}_T^{\mu_T}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}}(s) \\ \mathbf{p}'(\bar{s}) \end{pmatrix},$$

$$\Xi(s) = \frac{H_1(\mathbf{g}_r(s, \bar{s}) + \mu_T \boldsymbol{\lambda}_T^n(s)) (4\varepsilon - d_r(s, \bar{s}))}{\mu_T \Delta t (2\varepsilon - d_r(s, \bar{s}))}, \quad \text{et} \quad \Omega(s) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(\bar{s})\|^2 - \mathbf{r}''(\bar{s}) \cdot \bar{\mathbf{r}}(s)}.$$

TABLE 4.1 – Algorithme de résolution du problème de l’auto-contact avec frottement par la méthode du Lagrangien augmenté

```

Début {Chargement des étapes incrémentielles}

Initialisation des multiplicateurs de Lagrange augmenté
( $\lambda_N^0 \leftarrow 0$  et  $\lambda_T^0 \leftarrow \mathbf{0}$ ) .

Initialisation du pointeur en zéro ( $n \leftarrow 0$ ) .

Début {Méthode du Lagrangien augmenté}

    Début { Méthode de Newton}
        Résolution du problème linéarisé de Newton
    Fin

    Tant que ( $d_r(s) > TOL$  pour certains  $s$ ) faire
        Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange

             $\lambda_N^{n+1} \leftarrow \frac{1}{\mu_N} [d_r + \mu_N \lambda_N^n]_+$ 
             $\lambda_T^{n+1} \leftarrow \frac{1}{\mu_T} P_{B_T^{n+1}}(\mathbf{g}_r + \mu_T \lambda_T^n)$ 

        Incrémentation du pointeur ( $n \leftarrow n + 1$ ).

    Fin

Fin

Fin

```

Deuxième partie

Méthode d'Itération Variationnelle : VIM

5 Solutions analytiques approximatives pour des problèmes d'obstacles

5.1 Introduction

Ce chapitre met l'accent sur les solutions semi-analytiques d'études liées au problème des obstacles. Le terme problème d'obstacle est généralement utilisé pour un exemple classique de motivation dans l'étude analytique d'inégalités différentielles et de problème de frontière libre. Dans la littérature scientifique, nous pouvons trouver un bon nombre d'applications dont le modèle est construit sur le problème des obstacles, tels que les finances, les problèmes d'ingénierie, le problème de Stefan. Nous pouvons par exemple consulter ces références [6, 25, 61]. L'idée de départ est de trouver une solution semi-analytique de la déformation d'une poutre en présence d'une fondation élastique.

5.2 Problème d'obstacle

Parmi les problèmes d'ingénierie conduisant à un problème d'obstacle qui sont soulevés d'une manière classique est l'analyse de la flexion des poutres Euler–Bernoulli sur une fondation élastique et soumise à une charge appliquée. Le but est de trouver la déflexion, la déflexion maximale de cette poutre. Cela pourrait également être dans le cas d'une membrane mais avec une forme alternative occupant un domaine limité du plan avec un obstacle rigide. Le déplacement vertical de la membrane est représenté par le graphique d'une fonction U définie sur $\Omega := [a, d] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} . Nous regardons ensuite la position d'équilibre en considérant la membrane soumise à une force externe sous la contrainte de non pénétration $U \geq \Psi$ sur Ω .

À l'état d'équilibre, si la membrane n'est pas en contact avec l'obstacle, l'élasticité produit un équilibre de la tension de la membrane, et la surface de la membrane est décrite par U . Si la membrane entre en contact avec l'obstacle, la fonction remplit les courbures de U . Plus généralement, dans les cas monodimensionnels, ces problèmes discutés peuvent proposer le type de

système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^{(k)}U(x)}{\partial x^k} \geq F(U(x), x) & x \in [a, d], \\ U(x) \geq \Psi(x) & x \in [a, d], \\ \left[\frac{\partial^{(k)}U(x)}{\partial x^k} + F(U, x) \right] [U(x) - \Psi(x)] = 0 & x \in [a, d], \\ \Psi(x) \leq 0 & x \in \partial[a, d], \end{array} \right. \quad (5.1)$$

et soumis à k conditions aux limites choisies parmi les conditions suivantes :

$$\frac{\partial^{(i)}U(a)}{\partial x^i} = \alpha_i, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{(j)}U(d)}{\partial x^j} = \beta_j, \quad i + j = 0, 1, \dots, k - 1, \quad (5.2)$$

où α_i et β_j sont des constantes réelles finies.

Le problème d'obstacle a de nombreuses extensions bien respectées dans la littérature, en particulier dans la non linéarité des réactions élastiques et/ou les effets non commutatifs de la membrane, à cause de cela, nous avons obtenu la dernière forme généralisée possible. La fonction $F(U(\cdot), \cdot)$ est continue sur Ω et Ψ est la fonction obstacle. Le système (5.1)-(5.2) résulte de la modélisation mathématique de problèmes contenant la valeur de contact, unilatérale, obstacle, déformation et /ou libre. Dans la suite, nous allons discuter certaines possibilités concernant les solutions semi-analytiques de ce type de système en utilisant le VIM.

5.3 Méthode de pénalisation

La méthode des pénalités est la méthode de gestion des contraintes la plus couramment utilisée. L'objectif est de tirer parti du fait que cette pénalité peut réduire les inégalités différentielles sous forme d'égalités. À cet égard, en utilisant la technique de pénalité qui a été appliquée par Lewy-Stampacchia [47] pour donner la régularité des solutions des inégalités variationnelles, le système (5.1) est équivalent à

$$-\frac{\partial^{(k)}U(x)}{\partial x^k} - [U(x) - \Psi(x)]_+ = F(U(x), x), \quad x \in [a, d], \quad (5.3)$$

où $[s]_+ = \max(0, s)$ est la fonction de pénalisation.

Dans la suite, pour des raisons de simplicité, nous supposons que la fonction d'obstacle est donnée comme suit (voir [3]) :

$$\Psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [a, b[, \\ 1 & \text{si } x \in [b, c[, \\ -1 & \text{si } x \in [c, d], \end{cases} \quad (5.4)$$

où $a < b < c < d$.

En remplaçant (5.4) dans (5.3) avec la prise en compte de la fonction de pénalité, on obtient

$$-\frac{\partial^{(k)}U(x)}{\partial x^k} = \begin{cases} F(U(x), x) + U(x) + 1 & \text{si } x \in [a, b[, \\ F(U(x), x) & \text{si } x \in [b, c[. \\ F(U(x), x) + U(x) + 1 & \text{si } x \in [c, d]. \end{cases} \quad (5.5)$$

En plus, selon [3] nous devons prendre en compte les conditions aux limites (5.2) et les conditions de continuité de $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{(p)}U}{\partial x^p}$ en b et c pour tout $p < k$.

5.4 Méthode d'itération variationnelle

La méthode d'itération variationnelle est une méthode simple et capable de résoudre d'une manière efficace une grande classe de problèmes non linéaires, elle a été appliquée avec succès à de nombreux problèmes. Par exemple, cette méthode a été utilisée pour résoudre l'équation classique de Blasius, quelques problèmes non linéaires bien connus et des systèmes différentiels ordinaires. Actuellement, le VIM a été utilisé dans de nombreux domaines, il est capable de gérer une grande classe d'équations différentielles linéaires ou non linéaires. L'adaptabilité et l'ajustement obtenus grâce à cette méthode ont permis de l'adapter rapidement aux cas où les solutions analytiques ne sont pas disponibles, comme c'est souvent le cas dans les sciences appliquées et l'ingénierie. Cette méthode ne nécessite pas l'utilisation d'algorithmes de calcul additifs régulièrement utilisés pour confronter les termes non linéaires comme la méthode de décomposition adomian qui compliquerait les calculs analytiques. Le VIM aborde directement les problèmes linéaires et non linéaires de la même manière.

Nous rappelons le concept de base de VIM associé au problème (5.5) suit la formule itérative suivante [33] :

$$U_{n+1}(x) = U_n(x) + \begin{cases} \int_a^x \lambda(s) \left[\frac{\partial^{(k)}U_n(s)}{\partial s^k} + F(U_n(s), s) + U_n(s) + 1 \right] ds, & a \leq x < b, \\ \int_b^x \lambda(s) \left[\frac{\partial^{(k)}U_n(s)}{\partial s^k} + F(U_n(s), s) \right] ds, & b \leq x < c, \\ \int_c^x \lambda(s) \left[\frac{\partial^{(k)}U_n(s)}{\partial s^k} + F(U_n(s), s) + U_n(s) + 1 \right] ds, & c \leq x \leq d, \end{cases} \quad (5.6)$$

avec λ est le multiplicateur de Lagrange. La forme pratique possible de λ est donnée par :

$$\lambda(s) = (-1)^k \frac{(s-x)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad x \in [a, d]. \quad (5.7)$$

Cependant, il convient de noter que dans certains cas particuliers, nous devons peut-être d'abord relever le défi de trouver la valeur optimale de λ pour accélérer la convergence de la solution. Nous devons donc reprendre le calcul des variations nécessaires pour trouver λ . Les techniques itératives reposent sur le calcul d'une récurrence à partir d'une fonction initiale U_0 et qui, étape par étape, tend vers la solution. Ces techniques sont efficaces tant que nous partons d'une valeur U_0 proche de la solution souhaitée. Dans certains cas, cette méthode peut ne pas converger si le point de départ est mal choisi. Pour ce faire, nous allons essayer de discuter du choix de la valeur initiale des différents exemples traités dans la section numérique. Une autre mesure intéressante à prendre en compte dans le choix de U_0 concerne les conditions de continuité de la solution et de ses dérivés sur $\overset{\circ}{\Omega}$.

5.5 Des exemples numériques

Les exemples que nous proposons traitent des problèmes linéaires et non linéaires. L'objectif est de montrer l'efficacité de l'approximation étudiée. Les exemples classiques où nous pouvons trouver la solution analytique, sont proposés pour l'illustration de VIM et l'évaluation de la précision des solutions obtenues. Les solutions des problèmes traités sont calculées grâce au calcul symbolique avec MATLAB en utilisant Symbolic Math Toolbox.

5.5.1 Problème d'obstacle linéaire de troisième ordre

Dans les domaines de l'océanographie [3], par exemple, la modélisation peut contribuer aux équations différentielles du troisième ordre. Prenant $F(U, \cdot) = U$, $k = 3$, $a = 0$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{3}{4}$ et $d = 1$, avec les conditions aux limites suivantes :

$$U(0) = U'(0) = 0 \text{ et } U(1) = 0. \quad (5.8)$$

Alors, le problème (5.1) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^{(3)}U(x)}{\partial x^3} \geq U(x) & x \in [0, 1], \\ U(x) \geq \Psi(x) & x \in [0, 1], \\ \left[\frac{\partial^{(3)}U(x)}{\partial x^3} + U(x) \right] [U(x) - \Psi(x)] = 0 & x \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (5.9)$$

avec la fonction d'obstacle

$$\Psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \quad (5.10)$$

Nous étudions la régularité de la solution du problème (5.9) à partir d'une formulation variationnelle dans l'espace de Sobolev $H^2([0, 1])$ qui est un espace de Hilbert. Nous définissons donc le sous-espace $H_0^2([0, 1])$ de $H^2([0, 1])$ par

$$H_0^2([0, 1]) = \{U \in H^2([0, 1]); U(0) = U'(0) = 0 \text{ et } U(1) = 0\}. \quad (5.11)$$

Ensuite, nous définissons l'ensemble \mathbb{K} qui est convexe fermé dans $H_0^2([0, 1])$ par

$$\mathbb{K} = \{U \in H_0^2([0, 1]); U(x) \geq \Psi(x), x \in [0, 1]\}. \quad (5.12)$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème d'obstacle est donnée par :

$$\begin{aligned} I[V] &= - \int_0^1 \left[\frac{\partial^{(3)}V(x)}{\partial x^3} + V(x) \right] \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx, \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^{(2)}V(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^1 V(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx, \\ &= \langle \mathbf{T}V, g(V) \rangle + \langle V, g(V) \rangle, \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $g = \frac{\partial}{\partial x}$ est un opérateur linéaire, et

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}U, g(V) \rangle &= \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}U(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^{(2)}V(x)}{\partial x^2} dx, \\ \langle U, g(V) \rangle &= \int_0^1 U(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

On peut montrer que l'opérateur \mathbf{T} est linéaire, g -symétrique et g -positif, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}U, g(V) \rangle &= \langle g(U), \mathbf{T}V \rangle, \text{ et } \langle U, g(V) \rangle = \langle g(U), V \rangle, \quad \forall (U, V) \in (H_0^2([0, 1]))^2, \\ \langle \mathbf{T}U, g(V) \rangle &\geq 0, \text{ et } \langle U, g(V) \rangle \geq 0, \quad \forall U \in H_0^2([0, 1]). \end{aligned}$$

Ensuite, le problème d'obstacle (5.9) est équivalent au problème de minimisation de la fonctionnelle d'énergie $I[V]$ définie par (5.13) sur \mathbb{K} qui est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in H_0^2([0, 1]) \text{ tel que } g(U) \in \mathbb{K} \text{ et} \\ \langle \mathbf{T}U, g(V) - g(U) \rangle \geq 0, \quad \langle U, g(V) - g(U) \rangle \geq 0 \quad \forall g(V) \in \mathbb{K}. \end{cases} \quad (5.16)$$

Un problème de type (5.16) est connu sous le nom de problème variationnel généralisé, il admet une unique solution (voir [54, 55]).

Pour la résolution numérique, nous commençons dans cet exemple par la méthode de pénalisation (5.5). Le problème (5.9) est équivalent à

$$-\frac{\partial^{(3)}U(x)}{\partial x^3} = \begin{cases} 2U(x) + 1 & x \in [0, \frac{1}{4}[, \\ U(x) & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[, \\ 2U(x) + 1 & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \quad (5.17)$$

La solution exacte de (5.17) est la suivante :

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + a_0 e^{-\sqrt[3]{2}x} + \left[a_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}x}{2}\right) + a_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}x}{2}\right) \right] e^{\frac{\sqrt[3]{2}x}{2}} & x \in [0, \frac{1}{4}[, \\ b_0 e^{-x} + \left[b_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + b_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right] e^{\frac{x}{2}} & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[, \\ -\frac{1}{2} + c_0 e^{-\sqrt[3]{2}x} + \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}x}{2}\right) \right] e^{\frac{\sqrt[3]{2}x}{2}} & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \quad (5.18)$$

Par application des conditions de continuité sur U , U' et U'' aux points $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, les constantes a_i , b_i et c_i , $i = 1, \dots, 3$ sont données par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.220300649527402, & a_1 &= 0.279699350472598, & a_2 &= 0.0928967833270709 \\ b_0 &= -0.00973786559844113, & b_1 &= 0.0208426867753722, & b_2 &= 0.00712428122870885, \\ c_0 &= 0.423614465941949, & c_1 &= 0.145695066676027, & c_2 &= 0.168780738107810. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant trouver la solution approximative du problème (5.17) en utilisant le VIM. Le multiplicateur de Lagrange dans cet exemple est donné par (5.7) :

$$\lambda(s) = -\frac{(s-x)^2}{2}.$$

D'après la formule itérative (5.6), nous pouvons écrire le problème (5.17) sous la forme itérative

suivante :

$$U_{n+1}(x) = U_n(x) + \begin{cases} -\frac{1}{2} \int_0^x (s-x)^2 \left[\frac{\partial^{(3)} U_n(s)}{\partial s^3} + 2U_n(s) + 1 \right] ds, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^x (s-x)^2 \left[\frac{\partial^{(3)} U_n(s)}{\partial s^3} + U_n(s) \right] ds, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -\frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}}^x (s-x)^2 \left[\frac{\partial^{(3)} U_n(s)}{\partial s^3} + 2U_n(s) + 1 \right] ds, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.19)$$

En utilisant les conditions aux limites à 0, on obtient une expression paramétrique possible de U_0 donnée par :

$$U_0(x) = \begin{cases} a_2 x^2 + a_1 x + a_0, & x \in \left[0, \frac{1}{4} \right], \\ b_2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + b_1 \left(x - \frac{1}{4} \right) + b_0 & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right], \\ c_2 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 + c_1 \left(x - \frac{3}{4} \right) + c_0, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right]. \end{cases} \quad (5.20)$$

Nous adaptons à cette expression avec la formule itérative (5.19) pour obtenir une expression paramétrique de U_2 après deux itérations VIM. Ensuite, en appliquant les conditions de continuité de U, U' et U'' aux points $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ et les conditions aux limites (5.8), nous obtenons un système d'équations linéaires à sept variables $a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1$ et c_2 . Ce système aboutit aux solutions suivantes :

$$a_2 = 955/7478,$$

$$b_0 = 103/19166, \quad b_1 = 252/7745, \quad b_2 = 52/23575,$$

$$c_0 = 184/8365, \quad c_1 = 749/22436, \quad c_2 = -31/25704.$$

Ainsi, l'expression de U_2 est la suivante :

$$U_2(x) = \begin{cases} \frac{21x^8}{828766} + \frac{x^6}{360} - \frac{45x^5}{10571} - \frac{x^3}{6} + \frac{955x^2}{7478}, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -\frac{x^8}{9139846} + \frac{3x^7}{481004} - \frac{x^6}{274566} - \frac{7x^5}{176854} - \frac{24x^4}{18373} \\ + \frac{23x^3}{52801} + \frac{37x^2}{15578} + \frac{127x}{4051} - \frac{99}{37879}, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -\frac{x^8}{4178973} + \frac{3x^7}{3107408} + \frac{63x^6}{22850} - \frac{44x^5}{3467} + \frac{154x^4}{7285} \\ - \frac{463x^3}{2442} + \frac{1637x^2}{4151} - \frac{224x}{869} + \frac{397}{5728}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.22)$$

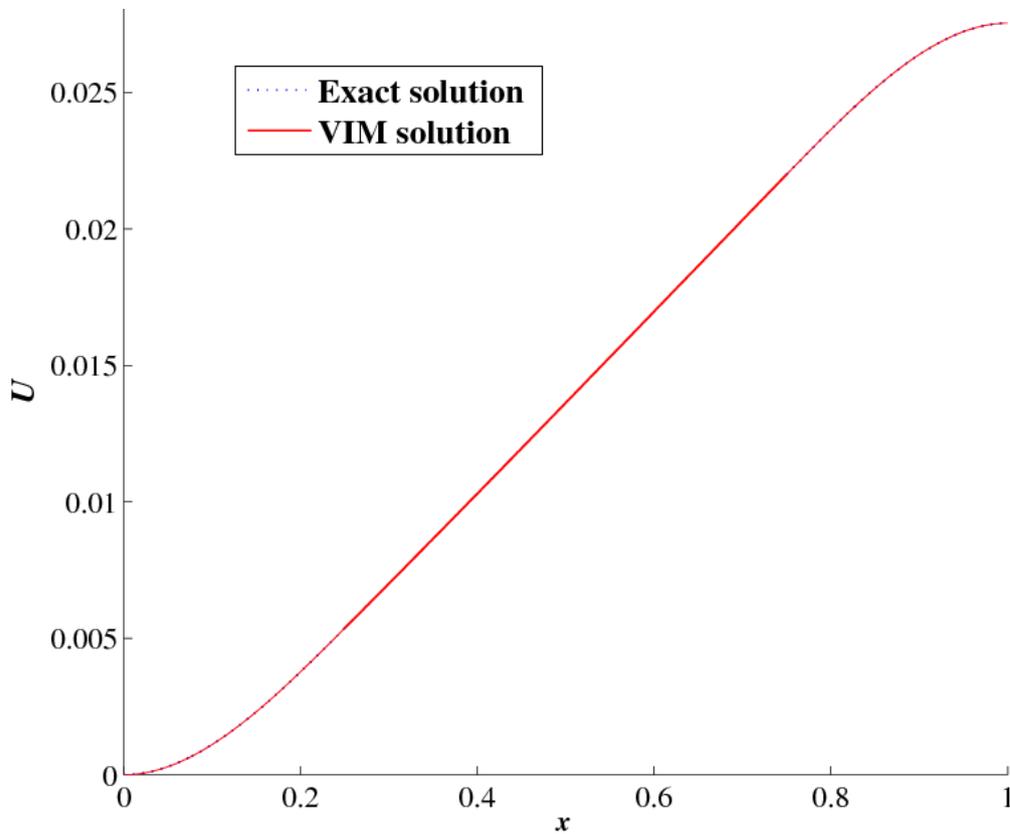


FIGURE 5.1 – Courbes comparatives entre la solution exacte et la solution VIM à deux itérations.

Dans FIG. 5.1, la courbe de la solution exacte coïncide avec celle de la solution VIM. Ce résultat précis peut être plus clair dans FIG. 5.2 où nous remarquons que l'ordre de l'erreur rela-

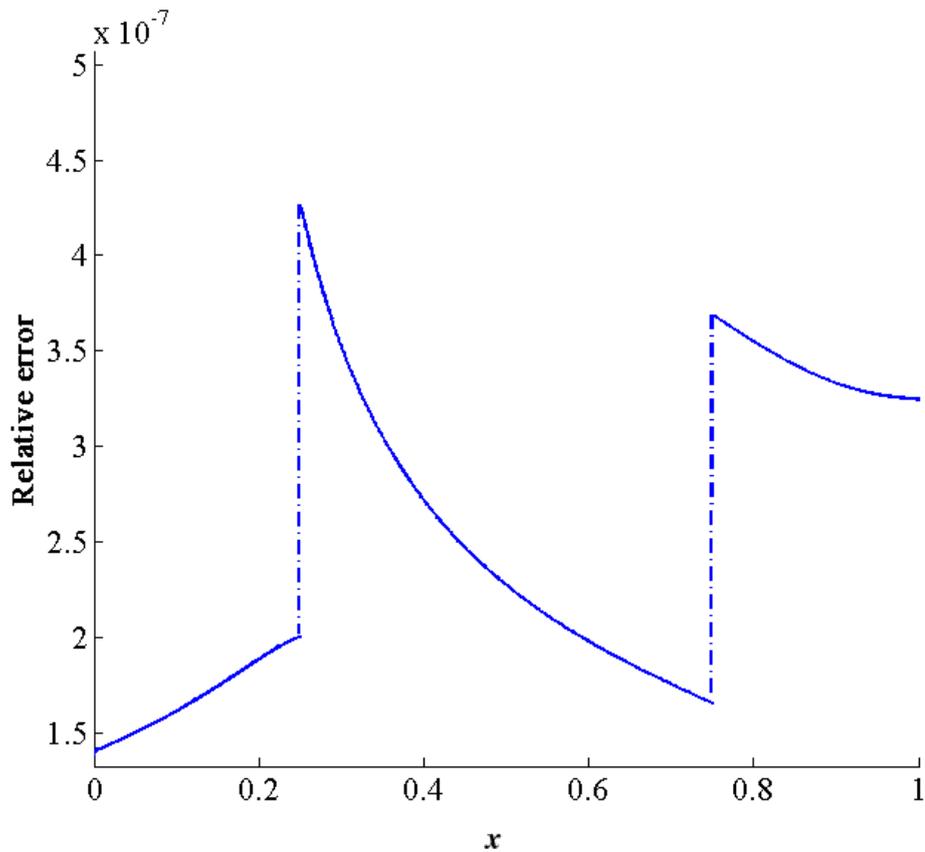


FIGURE 5.2 – La courbe d'erreur relative

tive est 10^{-7} . Après la deuxième itération de VIM, nous avons obtenu des résultats satisfaisants, qui indiquent l'efficacité et la grande précision de cette méthode pour un coût de calcul optimal.

5.5.2 Problème d'obstacle non linéaire de troisième ordre

Dans cet exemple, nous prenons $F(U, \cdot) = U^2$, $k = 3$, $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ et $d = 1$, avec les conditions aux limites suivantes :

$$U(-1) = U'(-1) = 0 \text{ et } U(1) = 0. \quad (5.23)$$

D'après (5.5) nous obtenons le problème suivant

$$-\frac{\partial^{(3)}U(x)}{\partial x^3} = \begin{cases} U^2(x) + 2U(x) + 1, & x \in [-1, -\frac{1}{2}[, \\ U^2(x) + U(x), & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \\ U^2(x) + 2U(x) + 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (5.24)$$

Nous pouvons utiliser la formule itérative (5.6) associée à VIM pour trouver une solution approximative du problème précédent, nous avons

$$U_{n+1}(x) = U_n(x) + \begin{cases} -\frac{1}{2} \int_0^x (s-x)^2 \left[\frac{\partial^{(3)}U_n(s)}{\partial s^3} + U_n^2(s) + 2U_n(s) + 1 \right] ds, & -1 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^x (s-x)^2 \left[\frac{\partial^{(3)}U_n(s)}{\partial s^3} + U_n^2(s) + U_n(s) \right] ds, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}}^x (s-x)^2 \left[\frac{\partial^{(3)}U_n(s)}{\partial s^3} + U_n^2(s) + 2U_n(s) + 1 \right] ds, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.25)$$

Avec les mêmes procédures, nous considérons l'expression suivante de U_0 :

$$U_0(x) = \begin{cases} a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2, & -1 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ b_0 + b_1(x+\frac{1}{2}) + b_2(x+\frac{1}{2})^2, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ c_0 + c_1(x-\frac{1}{2}) + c_2(x-\frac{1}{2})^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.26)$$

Nous adaptons à cette expression avec la formule itérative (5.25) pour obtenir une expression paramétrique de U_2 après deux itérations VIM. Ensuite, en appliquant les conditions de continuité de U , U' et U'' aux points $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et les conditions aux limites (5.23), nous obtenons un système d'équations non linéaires à neuf variables a_i , b_i et c_i , where $i = 0, 1, 2$. Pour résoudre le système obtenu nous utilisons une méthode de Newton qui donne la solution suivante :

$$\begin{aligned} a_0 &= 321/6281, & a_1 &= -160/463, & a_2 &= -520/2191, \\ b_0 &= 155/3403, & b_1 &= 849/3166, & b_2 &= 93/14320, \\ c_0 &= 311/989, & c_1 &= 721/2197, & c_2 &= -419/1566. \end{aligned}$$

Nous notons qu'après deux itérations VIM, la solution obtenue est sous forme des polynômes du 14ème degré. Pour des raisons de simplicité et sans perdre de la précision du résultat, nous réservons seulement le quatrième ordre de U_2 :

$$U_2(x) = \begin{cases} -\frac{242x^4}{19403} - \frac{403x^3}{1799} - \frac{520x^2}{2191} + \frac{323x}{2502} + \frac{243}{1525}, & -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{207x^4}{13696} - \frac{247x^3}{6889} + \frac{113x^2}{2871} + \frac{409x}{1538} + \frac{271}{1489}, & -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{133x^4}{11509} - \frac{299x^3}{1230} + \frac{415x^2}{1166} + \frac{547x}{5163} + \frac{671}{3213}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.28)$$

Dans FIG. 5.3, la courbe de la solution Adomian se coïncide avec celle de la solution VIM. Il

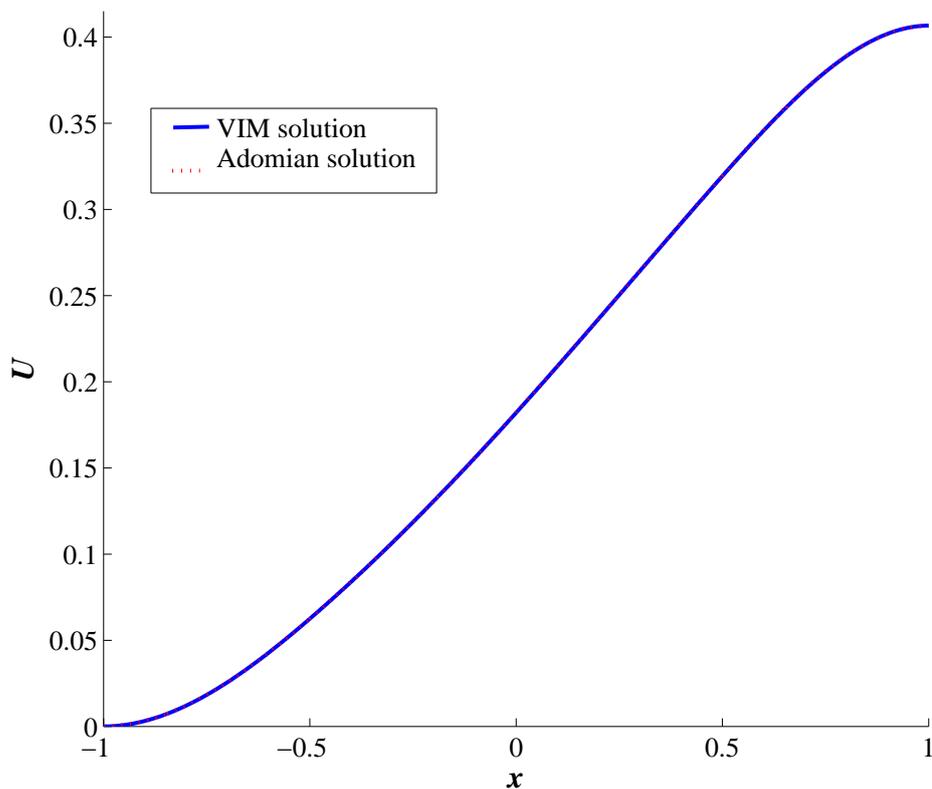


FIGURE 5.3 – Courbes comparatives entre la solution VIM à deux itérations et la solution Adomian.

convient toutefois de noter que nous avons utilisé la méthode Adomian à des fins de comparaison, nous pouvons donc conclure que le VIM et la méthode de décomposition Adomian (ADM) donnent presque la même précision pour ce problème non linéaire d'obstacle [53].

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons présenté dans une première partie une modélisation d'une tige élastique en grands déplacements soumise à des efforts extérieurs et qui présente des points d'auto-contact frottant non connus a priori. Nous avons fondé notre développement sur la théorie de Cosserat et la théorie "géométriquement exacte" de Simo-Reissner. Le modèle que nous préconisons permet une paramétrisation unidimensionnelle des tiges dont les déplacements sont dans l'espace tridimensionnel, elle permet la prise en compte à la fois de la flexion, de l'allongement, de la torsion et du cisaillement. Cependant, ce modèle repose sur l'hypothèse des sections indéformables et suppose donc que les sections sont rigides. La fusion de l'auto-contact et du frottement dans une tige élastique génère un problème fortement non linéaire et à une de modélisation assez riche. Théoriquement, l'existence et l'unicité de la solution au problème constituent un défi majeur. Nous avons utilisé la méthode lagrangienne augmentée pour aborder l'étude mathématique du problème d'auto-contact de Signorini-Coulomb. Nous avons surmonté les obstacles importants rencontrés dans la nature implicite des formulations liées à l'utilisation de la loi de Coulomb. De plus, nous avons développé des formulations pour le problème du frottement, qui peuvent être implémentées numériquement dans des futures recherches.

Dans une deuxième partie, nous avons débordé l'étude des solutions semi-analytiques pour des problèmes d'obstacle. Nous avons discuté l'efficacité de la méthode d'itération variationnelle (VIM), les exemples traités montrent certains avantages du VIM. Grâce à cette méthode nous avons obtenu des solutions analytiques approchées sous formes explicites pour des problèmes d'obstacles. Ce problème peut modéliser une poutre déformée en présence d'une fondation élastique. Il laisse la liberté de choix sur diverses charges en un point arbitraire ou une région de la poutre et sur les conditions aux limites imposées aux extrémités de la poutre. En conséquence, la mise en œuvre numérique est simple et les compétences de programmation habituellement requises ne sont pas nécessaires.

Nous finissons par des perspectives de recherche dans le prolongement du travail actuel. La prise en compte du frottement dans la déformation d'une tige élastique génère un problème fortement non linéaire, le champ de recherches mathématiques est encore ouvert pour montrer

l'existence et l'unicité de solution de ce problème. Dans un futur proche, nous estimons qu'une étude numérique de ce problème est nécessaire. Ceci exige en particulier une méthode du type Newton récemment utilisée dans [9] pour développer un code Fortran concernant le cas sans frottement.

Enfin, pour la méthode semi-analytique que nous avons discuté, nous avons remarqué sa performance pour les exemples traités. Cependant, nous devons comparer les résultats de VIM avec les méthodes numériques classiques.

Bibliographie

- [1] G. Daviet A. Derouet-Jourdan, F. Bertails-Descoubes and J. Thollot. Inverse dynamic hair modeling with frictional contact. *ACM Trans Graph* 32, 6 :159 :1–159 :10, 2013.
- [2] M. Shillor A. Klarbring, A. Mikelić. On friction problems with normal compliance. non-linear anal. *Theory Meth. Appl.*, 13 :935–955, 1989.
- [3] M. A. Al-Said, E. A. Noor and A. K Khalifa. Finite difference scheme for variational inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89(2), 1996.
- [4] S.S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, New York, 1995.
- [5] L. Banz and E. P. Stephan. A posteriori error estimates of hp-adaptive ipdg-fem for elliptic obstacle problems. *Applied Numerical Mathematics*, 76 :76–92, 2014.
- [6] M.W. BAXTER and A RENNIE. Financial calculus : An introduction to derivative pricing. *Cambridge University Press, Cambridge, U.K.*, 1996.
- [7] P. Béal and R. Touzani. Analysis of contact of elastic rods subject to large displacements. *Applied Mathematics Letters*, 16 :619–625, (2003).
- [8] T. Belytschko, W.J.T. Daniel, and G. Ventura. A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55 :101–125, 2002.
- [9] M. Chamekh, S. Mani-Aouadi, and M. Moakher. Modeling and numerical treatment of elastic rods with frictionless self contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :3751–3764, 2009.
- [10] M. Chamekh, S. Mani-Aouadi, and M. Moakher. Stability of elastic rods with self-contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 279 :227–246, 2014.
- [11] M. Cocu. Existence of solutions of signorini problems with friction. *Int. J. Engng. Sci*, 22, 1984.
- [12] B.D. Coleman and D. Swigon. Theory of supercoiled elastic rings with self-contact and its application to DNA plasmids. *Journal of Elasticity*, 60 :173–221, 2000.
- [13] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. Hermann, Paris, 1909.

- [14] M.A. Crisfield and G. Jelenić. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. *Proceedings of the Royal Society of London*, 455 :1125–1147, 1999.
- [15] B. Smith J. Aubry D. Kaufman, R. Tamstorf and E. Grinspun. Adaptive nonlinearity for collisions in complex rod assemblies. *ACM Trans Graph* 33, 4 :123 :1–123 :12, 2014.
- [16] P. Daskalopoulos and P. M. Feehan. $C^{(1,1)}$ regularity for degenerate elliptic obstacle problems. *Journal of Differential Equations*, 260(6), 2016.
- [17] Avril S. Badel P. et al. Demanget, N. Computational comparison of the bending behavior of aortic stentgrafts. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater*, 5 :272–282, 2012.
- [18] Duprey A. Badel P. et al. Demanget, N. Finite element analysis of the mechanical performances of marketed aortic stent-grafts. *J. Endovasc. Ther*, 20 :523–535, 2013.
- [19] G.H.M. Van der Heijden, S. Neukirch, V.G.A. Goss, and J.M.T. Thompson. Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45 :161–196, 2003.
- [20] G. Duvaut. Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de coulomb. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1980.
- [21] M. G. Larson E. Burman, P. Hansbo and R. Stenberg. Galerkin least squares finite element method for the obstacle problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 313 :362–374, 2017.
- [22] A. H. Erhardt. Regularity results for nonlinear parabolic obstacle problems with subquadratic growth. *Journal of Differential Equations*, 261(12), 2016.
- [23] M. Cani B. Querleux F. Leroy F. Bertails, B. Audoly and J. Lévêque. Superhelices for predicting the dynamics of natural hair. *ACM Trans Graph* 25, 3 :1180–1187, 2006.
- [24] G. Daviet F. Bertails-Descoubes, F. Cadoux and V. Acary. A nonsmooth newton solver for capturing exact coulomb friction in fiber assemblies. *ACM Trans Graph* 30, 1 :6 :1–6 :14, 2011.
- [25] W. W. Hager F. Brezzi and P. A. Raviart. Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. part 2. *Mixed methods*, 31 :1–16, 1978.
- [26] G. Fichera. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. In S. Flügge and C. Truesdell, editors, *Handbuch der Physik VIa/2. Festkörper mechanik II*. Springer, 1972.
- [27] F. Bertails-Descoubes G. Daviet and L. Boissieux. A hybrid iterative solver for robustly capturing coulomb friction in hair dynamics. *ACM Trans Graph* 30, 6, 2011.
- [28] J. L. Lions G. Duvaut. Les inequations en mecanique et physique. *Dunod, Paris*, 1972.
- [29] P. Wriggers G. Zavarise. Contact with friction between beams in 3-d space. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49 :977–1006, 2000.

- [30] F. Gastaldi and D. Kinderlehrer. The partially supported beam. *J. Elasticity*, 13 :71–82, 1983.
- [31] Allan J. Gilbert, N. Supercoiling in DNA and chromatin. *Curr. Opin. Genet. Develop.*, 25 :15–21, 2014.
- [32] Chung-Hao Lee Hailong Teng and Jiun-Shyan Chen. On the continuum formulation for modeling DNA loop formation. *Interaction and Multiscale Mechanics*, 4(3) :219–237, 2011.
- [33] J. H. He. Variational iteration method a kind of nonlinear analytical technique : some examples. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 34 :699–708, 1999.
- [34] A. Ibrahimbegović. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner’s beam theory : A three-dimensional curved beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122 :11–26, 1995.
- [35] A. Ibrahimbegovic. Finite elastic deformations of three-dimensional continuum with independent rotation field. in : *T.J.R. Hughes et al., eds., Recent Developments in FE Analysis : A book dedicated to R.L. Taylor*, pages 151–160, (CIMNE, Barcelona 1994).
- [36] A. Bjrn J. Arnlind and J. Bjrn. An axiomatic approach to gradients with applications to dirichlet and obstacle problems beyond function spaces. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 134 :70–104, 2016.
- [37] J. Haslinger J. Nečas, J. Jarušek. On the solution of the variational inequality to signorini problem with small friction. *Bolletino U.M.I.*, 17, 1980.
- [38] E. Pires J. T. Oden. Contact problems in elastostatics with non-local friction law. *Appl. Mech.*, 50 :67–76, 1983.
- [39] J. Jarušek. Contact problems with bounded friction coercive case. *Czechoslovak Math. J.*, 33(108) :237–261, 1983.
- [40] Gast T. Teran J. Jiang, C. Anisotropic elastoplasticity for cloth, knit and hair frictional contact. *ACM Trans. Graph.*, 36(4), 2017.
- [41] R. K. Kapania and J. Li. A formulation and implementation of geometrically exact curved beam elements incorporating finite strains and finite rotations. *Computational Mechanics Springer-Verlag*, 30 :444–459, 2003.
- [42] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [43] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. An introduction to variational inequalities and their applications. *Academic Press*, 1980.
- [44] J. T. Oden L. Demkowicz. On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction. *Nonlinear Anal. Theory Meth*, 1982.

- [45] H. Lewy and G. Stampacchia. A modified variational iteration method for the analysis of viscoelastic beams. *Applied Mathematical Modelling*, 40 :7988–7995, 17-18 (2016).
- [46] H. Lewy and G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. *Comm. Pure Appl. Math*, 22 :153–188, 1969.
- [47] H. Lewy and G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(2) :153–188, 1969.
- [48] C. Lu and N. Perkins. Complex spatial equilibria of U-joint supported cables under torque, trust and self-weight. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 30 :271–285, 1995.
- [49] T.M. Elzaki M. Chamekh. Explicit solution for some generalized fluids in laminar flow with slip boundary conditions. *J Math Computer Sci*, 18 :272–281, 2018.
- [50] R.S. Manning, J.H. Maddocks, and J.D. Kahn. A continuum rod model of sequence-dependent DNA structure. *Journal of Chemical Physics*, 105 :5626–5646, 1996.
- [51] J. T. Oden . A. C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50, (1985).
- [52] M. Moakher and J.H. Maddocks. A double-strand elastic rod theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 177 :53–91, 2005.
- [53] Mohamed Ali Latrach Mourad Chamekh and Yves Renard. Frictional self-contact problem of elastic rods. *Journal of King Saud University - Science*, mar 2019.
- [54] M. A. Noor. General variational inequalities. *Applied Mathematics Letters*, 1 :119–122, 1988.
- [55] M. A. Noor. Variational inequalities in physical oceanography, ocean waves engineering, edited by m. rahman. *Computational Mechanics Publications, Southampton, England*, 1 :201–226, 1994.
- [56] J. Ok. Regularity results for a class of obstacle problems with nonstandard growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 444(2), 2016.
- [57] G. Zavarise P. Wriggers. On contact between three-dimensional beams undergoing large deflection. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13 :429–438, 1997.
- [58] M. Rafiq. Numerical methods for solving obstacle problems. *PhD dissertation, COMSATS Institute of Information Technology, Islamabad, Pakistan*, 2012.
- [59] E. Reissner. On finite deformations of space curved beams. *Journal of Applied Mathematical Physics*, 32 :734–744, 1981.
- [60] Y. Renard. A uniqueness criterion for the signorini problem with coulomb friction. *SIAM journal on mathematical analysis*, 38, 2006.
- [61] Gupta S.C. The classical stefan problem : basic concepts, modelling and analysis. *Amsterdam : Elsevier*, 2003.

- [62] J.C. Simo. finite strain beam formulation : the three-dimensional dynamics. parti. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49 :55–70, 1985.
- [63] J.C. Simo. The (symmetric) hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics : Intrinsic definition and geometric interpretation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 96 :189–200, (1992).
- [64] J.C. Simo, N. Tarnow, and M. Doblare. Non-linear dynamics of three-dimensional rods : Exact energy and momentum conserving algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :1431–1473, 1995.
- [65] J.C. Simo and Vu-Quoc. A three dimensional finite-strain rod model. part ii : computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :79–116, 1986.
- [66] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions — A geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2) :125–161, 1988.
- [67] Y. Cho S.S. Byun and J. Oh. Global caldernzygmund theory for nonlinear elliptic obstacle problems with asymptotically regular nonlinearities. *G. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 76 :123124 :150–157, 2015.
- [68] D.M. Stump. The hocking of cables : A problem in shearable and extensible rods. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :515–533, 2000.
- [69] I. Tobias, D. Swigon, and B.D. Coleman. Elastic stability of DNA configurations : I. General theory. *Physical Review E*, 61 :759–770, 2000.
- [70] A.-M. Wazwaz. The variational iteration method for solving a system of pdes. *Comput. Math. Appl*, 54 :895–902.2.1, 2007.
- [71] T. Yabuta. Submarine cable kink analysis. *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 27(584) :1821–1828, 1984.
- [72] E. Zajac. Stability of two planar loop elasticas. *Journal of Applied Mechanics*, 29 :136–142, 1962.