

Aspects ergodiques et algébriques des automates cellulaires.

Paul Lanthier

▶ **To cite this version:**

Paul Lanthier. Aspects ergodiques et algébriques des automates cellulaires.. Théorie de l'information et codage [math.IT]. Normandie Université, 2020. Français. NNT : 2020NORMR034 . tel-03100340v2

HAL Id: tel-03100340
https://theses.hal.science/tel-03100340v2

Submitted on 6 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité 4200001 MATHEMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Rouen Normandie

Aspects ergodiques et algébriques des automates cellulaires

Présentée et soutenue par
Paul LANTHIER

Thèse soutenue publiquement le 07/12/2020 devant le jury composé de		
Mr Pierre CALKA	Professeur/ Université de Rouen Normandie/ LMRS	Examinateur
Mme Elise JANVRESSE	Professeur/ Université de Picardie Jules Verne/ LAMFA	Examinateur
Mr Christophe LEURIDAN	Maître de conférences/Université de Grenoble-Alpes/ Institut Fourier	Rapporteur
Mr Alejandro MAASS	Professeur/ University of Chile/ Center for mathematical Modeling	Rapporteur
Mme Irène MARCOVICI	Maître de conférences/ Université de Lorraine/ Institut Elie Cartan de Lorraine	Examinateur
Mr Thierry DE LA RUE	Chargé de recherche CNRS/ Université de Rouen Normandie/ LMRS	Directeur de thèse

Thèse dirigée par Thierry DE LA RUE, laboratoire LMRS

UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE

MIIS

LMRS

Remerciements

Une thèse semble être un travail solitaire. Cependant, il n'est quasiment pas possible de le réaliser seul. Je tiens ici à remercier les personnes qui m'ont soutenu et épaulé pendant ce périple de plusieurs années. Sans leur aide, ce travail n'aurait pas été possible.

— Thierry de la Rue, pour sa direction humaine et sans faille, pour m'aider à mener à bout mes travaux. Un grand merci pour sa patience, pour m'avoir soutenu dans les moments hauts ou bas et pour m'avoir permis de m'exprimer librement.

— Alejandro Maass, pour son accueil à Santiago lors d'un stage de trois mois où j'ai pu m'épanouir en autonomie. Le défi qu'il m'a donné d'utiliser les automates cellulaires en musique a été un réel déclencheur pour me lancer sur la seconde partie de ce manuscrit. Je le remercie également d'avoir accepté d'être rapporteur de ce manuscrit.

— Christophe Leuridan, qui lui aussi a gentiment accepté d'être rapporteur de ce manuscrit. Son analyse minutieuse et ses nombreuses suggestions de correction ont grandement amélioré la qualité de ce manuscrit. Il a soulevé beaucoup de questions intéressantes, aussi bien dans la première que dans la seconde partie de la thèse.

— Irène Marcovici, dont la thèse sur les automates cellulaires probabilistes a été une source d'inspiration majeure. Certaines idées importantes de la première partie de la thèse proviennent de discussions avec elle. Merci également d'avoir fait partie de mon comité de suivi de thèse et également d'accepter d'être membre du jury.

— Élise Janvresse et Pierre Calka pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Pierre Calka a été directeur du LMRS pendant la majeure partie mon doctorat, et ce dernier a toujours eu à cœur de donner les meilleures conditions de travail aux doctorants.

— Witold Respondek, pour avoir été membre de mon comité suivi de thèse. Je le remercie également de m'avoir fait rencontrer Thierry de la Rue à la fin de mon année de master 2. Il a toujours été un soutien de taille tout au long de mes études et m'a donné le goût à la recherche en mathématiques.

— Rodolphe Bourotte et le centre Iannis Xenakis, pour m'avoir permis de travailler sur un projet ambitieux et de donner une application concrète de mes recherches dans un logiciel.

— Moreno Andreatta, pour m'avoir signalé le lien entre les automates cellulaires et la musique et pour m'avoir reçu à Strasbourg pour un stage de recherche autour duquel j'ai commencé l'écriture de la seconde partie du manuscrit.

— Corentin Guichaoua, avec qui j'ai passé de longues heures à Strasbourg et à Rouen pour écrire notre article commun à la base de la seconde partie de cette thèse.

— Benjamin Hellouin, Reem Yassawi, Jean-Paul Allouche et Pablo Rotondo pour des discussions passionnantes au sujet d'actions d'automates cellulaires.

— Ma famille, sur qui j'ai toujours pu compter et qui a supporté de longs mois d'absence.

— Elsa, mon amie, qui m'a donné le courage d'achever ce travail, pardon pour toutes ces heures dérobées.

Table des matières

Introduction générale **9**

I Filtrations engendrées par des automates cellulaires **14**

Introduction **15**

1 Notions de base sur les filtrations et les chaînes de Markov **17**
1.1 Principales notations et définitions 17
1.2 Classification des filtrations 22
1.2.1 Isomorphisme entre filtrations 22
1.2.2 Immersion et immersibilité de filtrations 26
1.2.3 Filtration standard 29
1.2.4 Le I-confort 30
1.2.5 I-confort et standardité 34

2 Standardité des filtrations engendrées par deux versions de l'automate additif **36**
2.1 L'automate additif déterministe τ 36
2.1.1 Généralités 36
2.1.2 La filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ 39
2.2 Perturbation aléatoire τ_ε de l'automate additif 44
2.2.1 Construction de l'ACP τ_ε et chaîne de Markov associée 44
2.2.2 Standardité de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ 46
2.3 Lien entre le I-confort et l'ergodicité du noyau markovien 53

3 Vers une classification dynamique des filtrations **56**
3.1 Filtration facteur dans un système dynamiques mesuré 57
3.2 Classification dynamique des filtrations facteurs 58
3.2.1 La filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma)$ n'est pas dynamiquement standard . . 61
3.3 Étude dynamique de la filtration engendrée par τ_ε 66
3.3.1 Standardité dynamique pour ε assez grand : automate enveloppe et percolation 66

3.3.2 Question ouverte pour le cas ε proche de 0 . . . 76
3.4 Le I-confort dynamique simple entraîne la standardité dynamique . . . 76

II Actions d'automates cellulaires algébriques sur des suites périodiques 80

Introduction 81

4 Généralités sur les automates sigma-polynomiaux 92
4.1 Automates cellulaires sigma-polynomiaux . . . 92
4.2 Antécédents et dualité entre automates . . . 94

5 Suites réductibles et reproductibles 102
5.1 Automates sigma-polynomiaux agissant sur des suites périodiques . . . 102
5.1.1 Les suites périodiques et automates . . . 102
5.1.2 Deux sous groupes importants : Les suites réductibles et reproductibles . . . 103
5.1.3 Décomposition en sous-groupes p-maximaux de $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ . . . 109
5.1.4 Utilisation du théorème de structure . . . 110
5.2 Réductibilité et reproductibilité pour l'action de τ et Δ . . . 113
5.2.1 Caractérisation de la réductibilité . . . 113
5.2.2 Caractérisation de la reproductibilité . . . 122
5.2.3 Temps de reproductibilité . . . 127
5.3 Évolution des périodes . . . 129

Perspectives 140

Bibliographie 142

"On trouve l'ordre que l'on veut à partir du chaos que l'on cause"

Inscription dans un dortoir d'université au Texas.

Introduction générale

Un automate cellulaire décrit l'évolution d'une grille de cellules pouvant prendre différents états, selon le principe suivant : l'état d'une cellule au temps $n+1$ est une fonction locale des états des cellules lui étant voisines au temps n. Ce type de dynamique a été introduit par le mathématicien Von Neumann [1], et un exemple célèbre, le « jeu de la vie » a été proposé par Conway dans les années 70 pour simuler l'évolution d'un système biologique. Dans ces deux exemples historiques, la fonction locale est de nature déterministe, mais on peut également définir des automates cellulaires dans lesquels cette fonction locale est de nature probabiliste. Les automates cellulaires sont à la fois des systèmes dynamiques discrets et des modèles de calcul. Leur richesse réside principalement dans la comparaison entre la simplicité de leur évolution locale et la complexité de certains comportements macroscopiques. Ils peuvent modéliser de nombreux systèmes, par exemple biologiques comme dans l'exemple du jeu de la vie, mais également rendre compte de notre perception de notre entourage : quand nous regardons une peinture, écoutons de la musique par exemple, nous réalisons inconsciemment des calculs locaux, comme les écarts entre les notes de musique ou le mélange de couleurs voisines en peinture.

Dans notre étude, nous allons considérer des configurations unidimensionnelle, indexées par $\mathbb{Z}$. Un **diagramme espace temps** (**DET**) est alors la représentation d'un scénario possible sous forme d'une grille $\mathbb{Z}^2$ où les configurations sont représentées par des lignes horizontales, l'action de l'automate étant figurée par le passage à la ligne suivante.

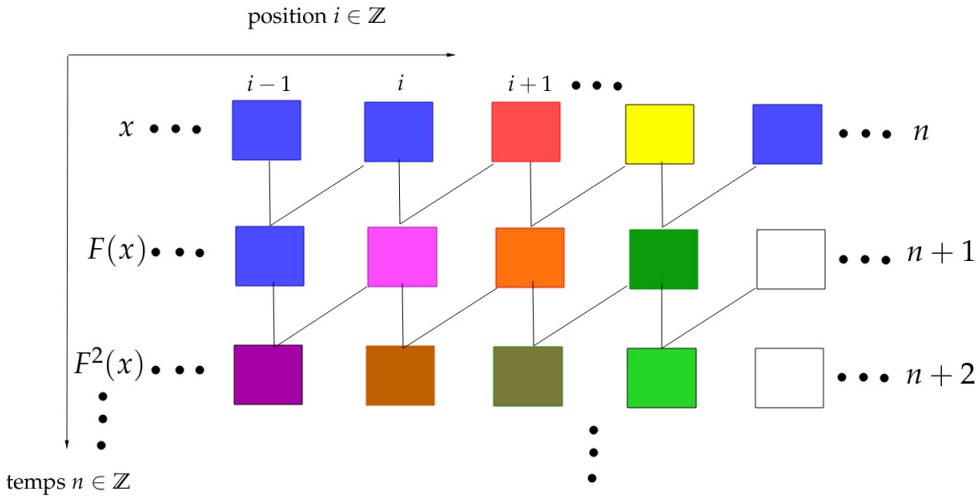


FIGURE 1 – Un diagramme espace temps d'un automate F. Ici les cellules peuvent prendre des couleurs différentes et la loi locale opérant consiste à mélanger les couleurs de deux cellules voisines.

Un exemple basique mais essentiel d'automate cellulaire déterministe est la transfor-

mation appelé **shift** et qui décale les configurations sur lesquelles on travaille :

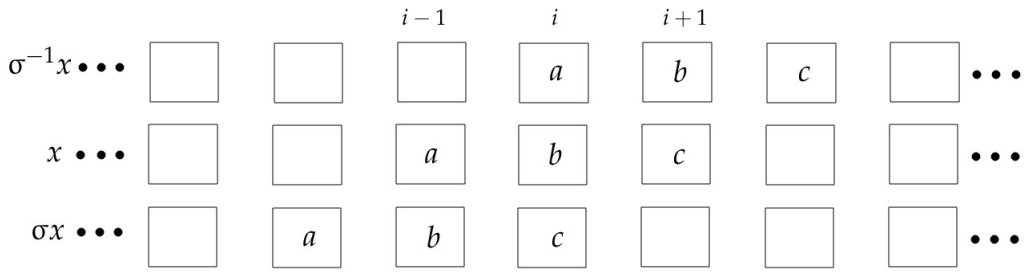


FIGURE 2 – Le shift, un exemple simple mais important

Le shift sera noté σ dans ce travail, et il est à noter qu'il s'agit d'une transformation inversible contrairement aux autres automates que nous considérerons.

Les deux autres exemples importants sur lesquels portera principalement notre travail considèrent la situation où l'espace d'états d'une cellule est un groupe abélien fini $(\mathbb{A}, +)$, et agissent de la manière suivante : l'automate τ additionne deux coordonnées successives d'une configuration, tandis que Δ effectue la différence entre ces coordonnées.

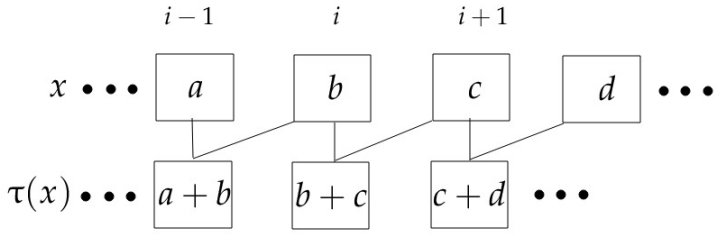


FIGURE 3 – L'automate τ

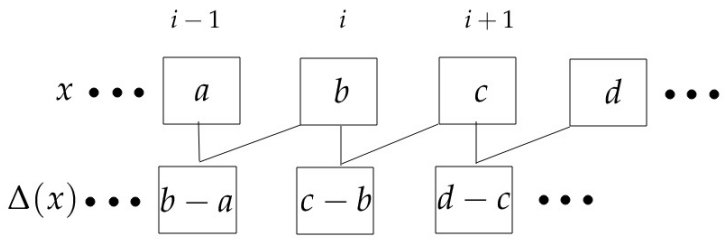


FIGURE 4 – L'automate Δ

Ces deux automates peuvent être exprimés de manière algébrique de la façon suivante : $\tau = \sigma + id$, et $\Delta = \sigma - id$.

Nous étudierons également une perturbation probabiliste de l'automate τ, notée τ_ε :

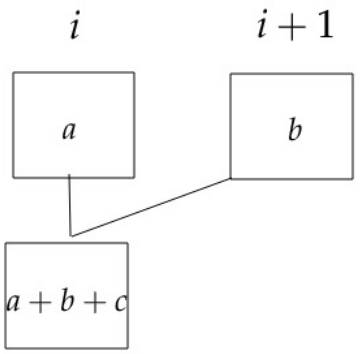


FIGURE 5 – τ_ε version probabiliste de τ. Le terme additionnel c représente ici une erreur aléatoire, qui n'est pas nulle avec probabilité ε.

Cette thèse est scindée en deux parties. La première considère des processus stochastiques définis à partir d'automates cellulaires et aborde des questions de théorie des probabilités et de théorie ergodique. La seconde traite de problèmes de nature plus algébrique, motivés par des questions liées à la composition musicale.

La première partie utilise comme point de départ les travaux initiés par Vershik [2] sur la classification des filtrations engendrées par un processus stochastique. La filtration d'un processus stochastique peut être interprétée comme l'objet mathématique représentant l'acquisition de l'information au fur et à mesure de la réalisation du processus. On

cherche dans cette théorie à caractériser la nature de la filtration engendrée par un processus stochastique et à établir des ressemblances entre les filtrations de processus à priori très différents. Les automates τ et τ_ε vont nous permettre d'étudier deux filtrations différentes qui seront nos filtrations de référence. Après avoir envisagé la classification classique sur nos deux filtrations, qui considère simplement les filtrations dans un espace de probabilité, une idée nouvelle pour étendre la théorie de la classification est apparue, spécialement adaptée au cas des automates cellulaires : celle de développer une classification des filtrations valable dans le cadre des systèmes dynamiques mesurés. En effet, comme le shift commute avec n'importe quel automate cellulaire, on peut envisager l'action de l'automate cellulaire sur le système dynamique défini par le shift. La notion de filtrations invariantes par le shift, les **filtrations facteurs** apparaît et donne lieu à une classification nouvelle. On verra ainsi que les résultats valables dans le cadre classique (premier chapitre) ne seront pas forcément valables dans la classification dynamique vue dans le deuxième chapitre.

Les travaux présentés dans la première partie vont donner lieu prochainement à la soumission d'un article qui est en cours de rédaction, en collaboration avec mon directeur de thèse Thierry de la Rue.

La seconde partie de cette thèse est de nature plus algébrique et provient initialement d'un problème musical. Un compositeur Roumain du XXème siècle nommé Anatol Vieru a étudié, sans le savoir, l'action de l'automate cellulaire Δ sur des suites périodiques d'intervalles pour chercher à étudier une transformation naturelle en musique [3, 4, 5] : le calcul d'intervalles. Ce dernier a observé de nombreuses question intéressantes et a cherché à créer des relations entre des mélodies initialement éloignées mais finalement que l'on pouvait rapprocher grâce au calcul d'intervalles.

Cette partie porte ainsi sur l'action des automates déterministes τ et Δ sur des suites de faible complexité (périodiques) et reprend les questions posées par Vieru. Elle repose principalement sur un article écrit en collaboration avec Corentin Guichaoua et Moreno Andreatta [6]. Une application concrète des résultats mathématiques a été réalisée dans un logiciel de création musicale, logiciel dont j'ai contribué au développement, notamment mathématiques en parallèle de ma thèse. Ce dernier est nommé UPISketch en référence à l'UPIC de Xenakis et la paternité du logiciel revient à Rodolphe Bourotte, chercheur principal du CIX avec qui je collabore activement.
(http ://www.interfacesnetwork.eu/post.php ?pid=289-upisketch-2-0-released).

Principales définitions et notations sur les automates cellulaires

On note $\mathbb{A}$ l'ensemble fini des états possibles d'une cellule. Soit E un semi groupe dénombrable appelé **grille** (et qui sera $\mathbb{Z}$ dans ce travail). On appelle **espace des configurations** l'ensemble $\mathcal{X} = \mathbb{A}^E$ de toutes les configurations possibles. Soit $\mathcal{N} = \{k_0, ..., k_n\}$

partie finie que l'on appelle le **voisinage** qui décrit la portée de l'interaction entre les cellules de la grille sous l'action de l'automate. (Pour les automates que nous considérerons, nous prendrons $\mathcal{N} = \{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$.)

Automate cellulaire déterministe

Un **automate cellulaire déterministe** (**ACD**) de voisinage $\mathcal{N}$ est une transformation

$$F : \mathbb{A}^E \to \mathbb{A}^E$$

définie par une fonction locale $f : \mathbb{A}^{\mathcal{N}} \to \mathbb{A}$ par la relation :

$$\forall i \in E : \big(F\boldsymbol{x}\big)(i) = f\big(\boldsymbol{x}(i+k_0), ..., \boldsymbol{x}(i+k_n)\big) = f\big((\boldsymbol{x}(i+v)_{v\in\mathcal{N}}\big).$$

Automate cellulaire probabiliste

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathbb{A}$ et $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ sur $\mathcal{X}$. On définit la notion de cylindre : soit $I \subset \mathbb{Z}$ un ensemble fini d'indices, soit $w \in \mathbb{A}^I$, le cylindre de base w et K est défini par :

$$[w]_I := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} : \boldsymbol{x}\big|_I = w\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in I,\ \boldsymbol{x}(i) = w(i)\}.$$

On définit également $\mathcal{C}(I) = \{[w]_I / w \in \mathbb{A}^I\}$ l'ensemble des cylindres de base I.

Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ une partie finie. Dans le cas probabiliste un noyau local de transition de voisinage $\mathcal{N}$ est une fonction :

$$f : \mathbb{A}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{M}(\mathbb{A}).$$

Un **automate cellulaire probabiliste** (**ACP**) F de fonction locale f est un noyau de transition markovien F, défini grâce à f sur les cylindres par :

$$\forall I \subset \mathbb{Z}, \forall w \in \mathbb{A}^I, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : F\big(\boldsymbol{x}, [w]_I\big) = \prod_{i\in I} f\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big)\big(w(i)\big).$$

En chaque site i, l'automate choisit la nouvelle lettre suivant la probabilité $f\big(\boldsymbol{x}(i+v)_{v\in\mathcal{N}}\big)$.

Première partie

Filtrations engendrées par des automates cellulaires

Introduction

« Hugues songeait : quel pouvoir indéfinissable que celui de la ressemblance ! Elle correspond aux deux besoins contradictoires de la nature humaine : l'habitude et la nouveauté. » Bruges-la-Morte, Georges Rodenbach.

Dans cette partie nous envisageons les automates cellulaires sous un angle probabiliste, en étudiant les processus stochastiques qui leurs sont associés. Si ce point de vue paraît tout à fait naturel concernant les automates cellulaires probabilistes, il semble moins évident pour des automates cellulaires déterministes. Nous allons cependant voir qu'une chaîne de Markov aux propriétés particulièrement intéressantes peut aussi être définie à partir d'un automate cellulaire déterministe (voir section 2.1.2).

Nous nous focaliserons sur des processus stochastiques à temps discret négatif, et dans ce cadre un invariant à étudier est la filtration engendrée par ces derniers. Celle-ci formalise l'acquisition de l'information au fur et à mesure de la réalisation du processus, et sa description renseigne sur les manières de générer le processus. La théorie cherchant à classifier les filtrations générées par des processus stochastique en temps négatif a été initiée par Vershik dans sa thèse dans les années 1970, mais diffusée seulement dans les années 1990 [2]. Vershik y introduit notamment la notion de **filtration standard**, qui traduit le fait que le processus engendrant la filtration peut être construit à partir d'un processus ayant des coordonnées indépendantes. Plusieurs critères de standardité ont été décrits, mais nous nous intéresserons particulièrement ici au critère appelé **I-confort** (en anglais : *I-cosiness*), présenté notamment par Laurent dans son article de référence sur le sujet [7].

Après avoir rappelé les notions de base concernant la classification des filtrations au chapitre 1, nous établissons dans le chapitre 2 la standardité des filtrations engendrées

— par l'automate déterministe additif τ : les cellules prennent leurs valeurs dans un groupe abélien fini additif, et l'automate consiste à additionner deux coordonnées successives (section 2.1),

— par une version probabiliste τ_ε de ce dernier, dans laquelle une erreur aléatoire est ajoutée (section 2.2).

Une caractéristique commune à tous les automates cellulaires, qu'ils soient détermi-

nistes ou probabilistes, est que la loi de leur évolution commute avec le décalage « horizontal » des coordonnées, noté σ dans ce travail. De plus les mesures de probabilité utilisées sont σ-invariantes, et il s'ensuit que les tribus formant les filtrations engendrées par des automates cellulaires sont des **tribus facteurs** du système dynamique mesuré engendré par le décalage. Les exemples donnés par les automates cellulaires sont donc une motivation pour introduire dans le chapitre 3 le concept de **filtration facteur** dans un système mesuré. Nous envisageons la classification de ces filtrations facteurs en tentant de traduire les notions de classification des filtrations dans ce cadre dynamique. Le point crucial qui différencie cette nouvelle classification de celle initiée par Vershik est l'action d'une dynamique sur l'ensemble de la filtration, que l'on prend en compte pour assimiler deux filtrations facteurs. Cette nouvelle classification est particulièrement pertinente dans l'étude des systèmes dynamiques mesurés, puisque un isomorphisme de systèmes dynamiques mesurés donnera automatiquement lieu à l'isomorphisme des filtrations facteurs dans ces systèmes.

Nous définissons les notions de **standardité dynamique** et **I-confort dynamique**, et montrons que le I-confort dynamique est nécessaire pour la standardité dynamique (Théorème 73).

Chapitre 1

Notions de base sur les filtrations et les chaînes de Markov

1.1 Principales notations et définitions

Nous commençons par donner les notations et définitions de base concernant les objets de notre étude. Étant donnée une variable aléatoire X à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et définie sur un espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note $\mathcal{L}(X)$ la loi de X, c'est-à-dire la mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{E},\ \mathcal{L}(X)(A) := \mathbb{P}(X \in A).$$

On note également $\mathbf{\Sigma}(X)$ la sous-tribu engendrée par X, qui peut être définie par

$$\mathbf{\Sigma}(X) := \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}.$$

Définition 1. *Un **processus stochastique** sur un espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une famille de variables aléatoires*

$$X = (X_n)_{n \in \mathcal{T}}$$

où chaque X_n est à valeurs dans un espace mesurable $\big((E_n, \mathcal{E}_n)\big)_{n \in \mathcal{T}}$ et où $\mathcal{T}$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$ désignant le temps, et pour chaque $n \in \mathcal{T}$, la variable aléatoire X_n est à valeurs dans un espace mesurable $(E_n, \mathcal{E}_n)$.

Un processus stochastique peut aussi être vu comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace produit $\prod_{n \in \mathcal{T}} E_n$, et comme ci-dessus on note $\mathcal{L}(X)$ sa loi.

Dans ce travail, nous considérerons principalement des processus indexés par les entiers négatifs ou nuls, c'est-à-dire le cas où $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_-$. En général les espaces E_n seront tous identiques. Nous nous placerons souvent dans le cas où ces espaces E_n sont de la forme $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, où $\mathbb{A}$ est un alphabet fini (ou éventuellement un espace métrique compact).

Dans ce cas chaque variable aléatoire X_n est elle-même une famille $\big(X_n(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{A}$. Pour $i < j$ dans $\mathbb{Z}$, on notera $X_n[i,j]$ la famille finie $\big(X_n(i), X_n(i+1), \ldots, X_n(j)\big)$.

Filtrations

Définition 2. *On appelle **filtration en temps négatif** sur un espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ de sous-tribus telle que*

$$\forall n < 0 \;\; \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{A}.$$

À chaque processus stochastique $(X_n)_{n\leq 0}$ est associée une filtration en temps négatif $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ engendrée par le processus : celle définie par

$$\forall n \leq 0, \; \mathcal{F}_n := \mathbf{\Sigma}(..., X_{n-1}, X_n).$$

Définition 3. *On dit qu'une filtration en temps négatif est **séparable** quand elle est engendrée par un processus $(X_n)_{n\leq 0}$ où pour chaque n, X_n est à valeurs dans un espace $(E_n, \mathcal{E}_n)$ formé d'un espace métrisable séparable muni de sa tribu borélienne.*

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce travail seront supposées à valeurs dans des espaces polonais (métrisables séparables et complets), et toutes les filtrations seront en temps négatif et supposées séparables.

Définition 4. *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations. On définit le sup $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ des deux filtrations par*

$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})_n := \mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}_n = \Sigma(\mathcal{F}_n \cup \mathcal{G}_n).$$

Chaînes de Markov

Une classe importante de processus sont les processus markoviens. Ces derniers peuvent être à valeurs dans un espace d'état infini d'où la nécessité de les définir de manière générale grâce au noyau de transition.

Définition 5 (Noyau de transition markovien)**.** *Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.*
Une fonction $\mathcal{Q} : \mathcal{X} \times \mathcal{B} \to [0,1]$ est appelée noyau de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ à $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ si les conditions suivantes sont réalisées :

- *pour tout $B \in \mathcal{B}$, l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{Q}(\boldsymbol{x}, B)$ est $\mathcal{A}$-mesurable.*
- *pour tout $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, l'application $B \mapsto \mathcal{Q}(\boldsymbol{x}, B)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$.*

Autrement dit on associe à n'importe quel point $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ une mesure de probabilité $\mathcal{Q}(\boldsymbol{x}, .)$ de sorte que la dépendance en $\boldsymbol{x}$ soit $\mathcal{A}$-mesurable.

Définition 6 (Chaînes de Markov homogène)**.** *Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ un espace mesurable métrique séparable et soit $\mathcal{Q}$ un noyau de transition markovien de $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ sur lui même. Une chaîne de Markov homogène de noyau de transition $\mathcal{Q}$ est un processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathcal{T}}$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, qui satisfait, pour tout $n \in \mathcal{T}$ tel que $n+1$ soit aussi dans $\mathcal{T}$:*

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(X_{n+1} \in A/(X_m)_{m\leq n}) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A/X_n) = \mathcal{Q}(X_n, A) \; p.s.$$

Pour une chaîne de Markov homogène on a simplement :

$$\forall n,\ \mathcal{L}(X_{n+1}/(X_m)_{m\leq n}) = \mathcal{L}(X_{n+1}/X_n) = \mathcal{Q}(X_n, .).$$

Un noyau de transition $\mathcal{Q}$ de $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ sur lui même induit une transformation $\mathcal{Q}_*$ agissant sur les mesure de probabilité μ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ en donnant une nouvelle mesure $\mathcal{Q}_*\mu$ définie par la formule suivante :

$$\forall A \in \mathcal{A} :\ \mathbb{P}(X_1 \in A) := \mathcal{Q}_*\mu(A) = \int_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \mathcal{Q}(\boldsymbol{x}, A) d\mu(\boldsymbol{x}).$$

Si (X_n) est une chaîne de Markov homogène de noyau de transition $\mathcal{Q}$, et si μ désigne la loi de X_n alors $\mathcal{L}(X_{n+1}) = \mathcal{Q}_*\mu$ et $\mathcal{L}(X_{n+k}) = \mathcal{Q}_*^k\mu$.

On dit qu'une mesure μ est **invariante** par un noyau de transition $\mathcal{Q}$ quand $\mathcal{Q}_*\mu = \mu$.

Si $\mathcal{X}$ est un espace métrique compact, l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ des mesures de probabilité sur $\mathcal{X}$ est muni de la topologie faible-étoile caractérisée par $\mu_n \longrightarrow \mu$ si et seulement si pour toute fonction continue $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $\int_{\mathcal{X}} f\, d\mu_n \to \int_{\mathcal{X}} f\, d\mu$. Cette topologie fait de $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ un espace métrisable compact.

Le noyau de transition $\mathcal{Q}$ est dit **ergodique au sens de Markov** si il existe une mesure de probabilité invariante μ telle que, pour toute mesure $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, on a la convergence $\mathcal{Q}_*^k\mu_0 \longrightarrow \mu$ quand $k \to \infty$. Ceci implique en particulier l'unicité de la mesure invariante.

Paramétrisation d'une chaîne de Markov

Nous explicitons une manière de construire une chaîne de Markov, qui est de réaliser une paramétrisation de son noyau de transition.

Soit $\mathcal{Q} : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \to [0,1]$ un noyau de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ dans lui même, et soit (I, λ) un espace de probabilités auxilliaire qui va nous servir pour la paramétrisation (on prendra souvent $I = [0,1]$ et λ la mesure de Lebesgue, ou parfois $I = [0,1]^{\mathbb{Z}}$ et λ la mesure de Lebesgue produit).

Paramétrer $\mathcal{Q}$ revient à construire une fonction fonction mesurable ϕ de $\mathcal{X} \times I$ dans $\mathcal{X}$ telle que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X},\ \forall A \in \mathcal{A},\ \lambda(\{u : \phi(\boldsymbol{x}, u) \in A\}) = \mathcal{Q}(\boldsymbol{x}, A). \tag{1.1}$$

On appelle une telle fonction ϕ une **fonction de mise à jour** pour $\mathcal{Q}$. Si ϕ est une fonction de mise à jour, on peut en construire d'autres en composant avec une transformation

de I qui préserve λ. La figure 1.1 donne plusieurs exemples de fonctions de mise à jour associées à la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.

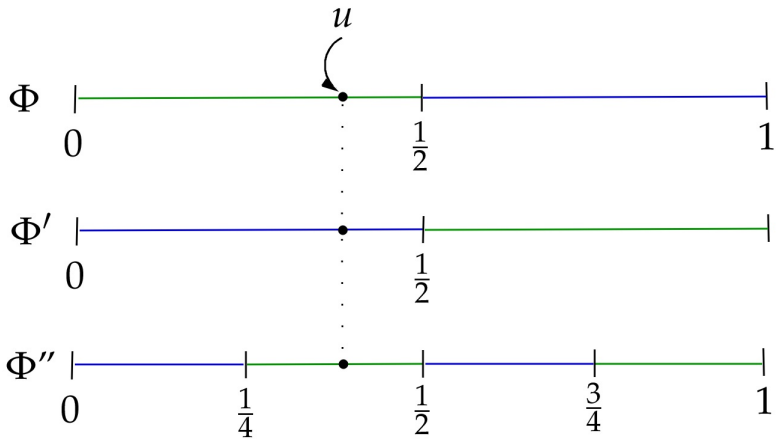


FIGURE 1.1 – Trois exemples de fonctions de mise à jour pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Les points de couleur bleue correspondent aux u tels que $\phi(n,u) = n-1$, ceux de couleur verte correspondent aux u tels que $\phi(n,u) = n+1$.

Soit μ une loi de probabilité arbitraire sur $(\mathcal{X},\mathcal{A})$. Pour définir une chaîne de Markov de noyau Q et de loi initiale μ à partir d'un instant $n_0 \in \mathbb{Z}$ donné, on se donne comme point de départ une variable aléatoire X_{n_0} de loi initiale μ_{n_0} (probabilité arbitraire sur $(\mathcal{X},\mathcal{A})$), puis on utilise ensuite une famille de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq n_0+1}$ i.i.d de loi λ, appelées **innovations**, indépendante de X_{n_0}. On construit récursivement le processus stochastique $X := (X_n)_{n\geq n_0+1}$ par $X_{n+1} := \phi(X_n, U_{n+1})$, on obtient alors une chaîne de Markov de noyau $\mathcal{Q}$. Pour la filtration naturelle du processus (X,U), il s'agit de sur-innovations, car on a seulement l'inclusion $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1} \vee \Sigma(U_n)$. Puisqu'il existe de multiples fonctions de mise à jour compatibles avec un noyau donné $\mathcal{Q}$, il est possible dans cette construction de changer de fonction de mise à jour à chaque instant en posant $X_{n+1} := \phi_{n+1}(X_n, U_{n+1})$. Il est même possible que le choix de cette fonction ϕ_{n+1} dépende de la réalisation du processus jusqu'au temps n, du moment que la condition (1.1) est vérifiée pour chaque choix de ϕ_{n+1}.

Le procédé décrit ci-dessus n'est cependant possible que si l'on dispose d'une condition initiale, qui est la donnée de la loi initiale μ_{n_0}. Dans le cas où l'on souhaite définir la chaîne de Markov sur un intervalle de temps $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^-$, on ne dispose pas d'un temps initial n_0 et donc on ne peut pas appliquer la méthode ci-dessus.

Chaîne de Markov stationnaire en temps négatif

Comment construire une chaîne de Markov en partant du temps $-\infty$? Une difficulté majeure réside dans l'absence d'un point de départ. Nous exposons une condition suffisante pour définir une chaîne de Markov en temps négatif i.e. pour $\mathcal{T} = \mathbb{Z}^-$, qui utilise l'existence d'une loi invariante pour le noyau markovien.

Soient $\mathcal{X}$ un espace polonais, $\mathcal{A}$ sa tribu des boréliens, et $\mathcal{Q}$ un noyau de transition markovien sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ invariante par $\mathcal{Q}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de noyau $\mathcal{Q}$ de loi initiale μ (que l'on peut construire par la méthode expliquée ci-dessus par exemple). On appelle $\mathbb{P}_\mu^+$ la loi de cette chaîne de Markov, c'est une mesure probabilité sur $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$. L'invariance de μ par $\mathcal{Q}$ entraîne que $\mathbb{P}_\mu^+$ est invariante par translation : pour tous n, r dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{L}\big(X_n, ..., X_{n+r}\big) = \mathcal{L}\big(X_0, ..., X_r\big)$.

Pour $n \leq 0$ on définit $\mathbb{P}_\mu^{\geq n}$ la probabilité sur $\mathcal{X}^{\{n,n+1,...\}}$ telle que, pour tout $m \geq n$ et $r \geq 0$,

$$\mathbb{P}_\mu^{\geq n}(\boldsymbol{x}_n \in B_0, ..., x_{n+r} \in B_r) := \mathbb{P}_\mu^+(\boldsymbol{x}_0 \in B_0, ..., \boldsymbol{x}_r \in B_r).$$

Pour tous $m < n \leq 0$, $\mathbb{P}_\mu^{\geq m}$ a pour marginale sur $\mathcal{X}^{\{n,n+1,...\}}$ la probabilité $\mathbb{P}_\mu^{\geq n}$. On peut donc utiliser le théorème d'extension de Kolmogorov, qui assure l'existence d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}_\mu$ sur $\mathcal{X}^{\mathbb{Z}}$ dont la projection sur $\mathcal{X}^{\{n,n+1,...\}}$ est pour tout n la probabilité $\mathbb{P}_\mu^{\geq n}$. Cette probabilité $\mathbb{P}_\mu$ est la loi d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de noyau de transition $\mathcal{Q}$ et dont chaque coordonnée X_n a pour loi la mesure invariante μ.

Nous nous intéresserons particulièrement au cas où $\mathcal{T} = \mathbb{Z}^-$, ce qui correspond à la projection de la mesure $\mathbb{P}_\mu$ sur $\mathcal{X}^{\mathbb{Z}^-}$. C'est la loi d'une chaîne de Markov en temps négatif mais ayant pour temps final le temps 0.

Paramétrisation d'une chaîne de Markov définie par un ACP

Soit F un ACP de voisinage $\mathcal{N}$ sur un alphabet fini $\mathbb{A} = \{a_1, ..., a_p\}$, et soit $f : \mathbb{A}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{M}(\mathbb{A})$ sa loi locale. À cet ACP est associé un noyau de transition $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{X} := \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ vers lui-même, défini comme suit : pour tout $\boldsymbol{x} = \big(\boldsymbol{x}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$, $\mathcal{Q}(\boldsymbol{x}, \cdot)$ est la mesure de probabilité produit

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{x}, \cdot) = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} f\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big).$$

Cette définition signifie que l'automate va agir localement comme une mesure de probabilités en modifiant la cellule située à la position i en utilisant sa fonction locale f qui est une loi de probabilité qui prendra comme argument l'état des cellules dans $i + \mathcal{N}$.

On peut paramétrer une chaîne de Markov ayant un tel noyau de transition par une fonction de mise à jour $\Phi : \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} \times [0,1]^{\times\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ définie de manière locale par une fonction de mise à jour locale

$$\varphi : \mathbb{A}^{\mathcal{N}} \times [0,1] \to \mathbb{A}.$$

Le lien entre la fonction de mise à jour locale φ et la fonction locale f se traduit de la manière suivante : soit U une variable aléatoire telle que $\mathcal{L}(U) = \mathcal{U}_{[0,1]}$ (loi uniforme sur $[0,1]$), alors

$$\forall i \in \mathbb{Z} : \mathcal{L}(\varphi\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big), U) = f\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big).$$

Une manière d'implémenter une telle fonction de mise à jour locale est par exemple de poser, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ et tout $u \in [0,1]$:

$$\varphi\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}, u\big) = \begin{cases} a_1 \text{ si } 0 \leq u < f\big(((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big)(\{a_1\}) \\ a_2 \text{ si } f\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big)(a_1) \leq u < f\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big)(\{a_1, a_2\}) \\ ... \\ a_p \text{ si } f\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}\big)(\{a_1, a_2, ..., a_{p-1}\}) \leq u. \end{cases}$$

La fonction de mise à jour $\Phi : \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} \times [0,1]^{\times\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ associée est alors définie par

$$\forall \boldsymbol{x} = \big(\boldsymbol{x}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}},\ \forall u = \big(u(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in [0,1]^{\mathbb{Z}}, \Phi(\boldsymbol{x}, u) := \big(\varphi\big((\boldsymbol{x}(i+v))_{v\in\mathcal{N}}, u(i)\big)\big)_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Comme on l'a expliqué dans le cas d'une chaîne de Markov homogène générale, il est possible de modifier la fonction de mise à jour à chaque étape, et même de la choisir en fonction des réalisations passées de l'ACP.

1.2 Classification des filtrations

L'objet de cette section est de rappeler les notions de bases concernant la classification des filtrations en temps négatif. La plupart des résultats présentés ici sont contenus dans l'article de Laurent [7], auquel nous renvoyons pour plus de détails (même si on formule ici les choses de manière parfois différente).

Le premier point consiste à préciser dans quelles conditions on considère que deux filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, pas forcément définies sur le même espace de probabilité, sont essentiellement identiques. C'est la notion d'*isomorphisme entre filtrations*, présentée maintenant.

1.2.1 Isomorphisme entre filtrations

Nous présentons d'abord le lemme classique suivant qui caractérise le fait qu'une variable aléatoire est mesurable par rapport à une autre.

Lemme 7. *Soient X et Y des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs respectivement dans deux espaces E et F avec F polonais. Alors Y est $\mathbf{\Sigma}(X)$-mesurable si et seulement si il existe $\phi : E \to F$ mesurable telle que $Y = \phi(X)$.*

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe $\phi : E \to F$ mesurable tel que $Y = \phi \circ X$. Alors $\mathbf{\Sigma}(Y) = \{Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(F)\} = \{X^{-1}(\phi^{-1}(A)) : A \in \mathcal{B}(F)\} \subset \mathbf{\Sigma}(X)$. Donc Y est $\mathbf{\Sigma}(X)$-mesurable.

Réciproquement, supposons que Y est $\mathbf{\Sigma}(X)$-mesurable. On a par définition $\mathbf{\Sigma}(Y) \subset \mathbf{\Sigma}(X)$ avec $\mathbf{\Sigma}(X) = \left\{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(E)\right\}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans F. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_{n,k} := B(f_n, \frac{1}{2^k}) \in \mathcal{B}(F)$ la boule de centre f_n et de rayon $\frac{1}{2^k}$ (on a fixé une métrique d_F induisant la topologie sur F et telle que l'espace métrique (F, d_F) soit complet). Pour tous n et k on a $Y^{-1}(B_{n,k}) \in \mathbf{\Sigma}(Y) \subset \mathbf{\Sigma}(X)$, donc il existe $A_{n,k} \in \mathcal{B}(E)$ tel que $Y^{-1}(B_{n,k}) = X^{-1}(A_{n,k})$. Pour $k \geq 1$ fixé on définit pour tout $\boldsymbol{x} \in E$

$$n_k(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \min\{n : \boldsymbol{x} \in A_{n,k}\} \text{ si } \{n : \boldsymbol{x} \in A_{n,k}\} \neq \varnothing, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Puis construisons l'application mesurable

$$\phi_k : \begin{cases} E \to F \\ \boldsymbol{x} \mapsto f_{n_k(\boldsymbol{x})}. \end{cases}$$

Fixons $w \in \mathcal{W}$, posons $\boldsymbol{x} := X(w) \in E$ et $y := Y(w) \in F$. Par densité de (f_n) dans F, pour tout k il existe n tel que $\boldsymbol{y} \in B_{n,k}$, et alors $\boldsymbol{x} \in A_{n,k}$. Donc $\boldsymbol{x} \in A_{n_k(\boldsymbol{x}),k}$, et par définition des $A_{n,k}$ on a aussi $\boldsymbol{y} \in B_{n_k(x),k}$. Comme $\phi_k(X(w)) = f_{n_k(\boldsymbol{x})}$, on a $d_F(\phi_k(X(w)), Y(w)) < \frac{1}{2^k}$. Il vient donc

$$Y(w) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(X(w)).$$

Pour construire l'application mesurable $\phi : E \to F$ annoncée dans l'énoncé, on procède alors comme suit : on note C l'ensemble des $\boldsymbol{x} \in E$ tels que la suite $\left(\phi_k(\boldsymbol{x})\right)_{k\geq 1}$ soit de Cauchy dans F, qui est une partie mesurable de E. Pour $\boldsymbol{x} \in C$, on pose $\phi(\boldsymbol{x}) := \lim_{k\to\infty} \phi_k(\boldsymbol{x})$, et pour $\boldsymbol{x} \in E \setminus C$, on pose $\phi(\boldsymbol{x}) := f_0$. De cette façon, on obtient bien une application mesurable vérifiant la propriété voulue. □

Remarque 8. *Dans le cas traité dans le lemme précédent, il est clair que la fonction ϕ est unique presque-sûrement (relativement à la loi de X).*

Dans un espace de probabilité $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$ est **presque sûrement contenue** dans $\mathcal{C}$ si pour tout $B \in \mathcal{B}$ il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $\mathbb{P}(B \triangle C) = 0$. On note dans ce cas $\mathcal{B} \overset{\text{p.s.}}{\subset} \mathcal{C}$. De même, on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ **coïncident presque sûrement** si on a à la fois $\mathcal{B} \overset{\text{p.s.}}{\subset} \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \overset{\text{p.s.}}{\subset} \mathcal{B}$. On note dans ce cas $\mathcal{B} \overset{\text{p.s.}}{=} \mathcal{C}$.

On dit qu'une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est **engendrée presque sûrement** par une variable aléatoire X si $\mathbf{\Sigma}(X) \overset{\text{p.s.}}{=} \mathcal{B}$. De même on dit qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est engendrée presque sûrement par un processus $(X_n)_{n\leq 0}$ si pour tout $n \leq 0$ on a $\mathcal{F}_n \overset{\text{p.s.}}{=} \mathbf{\Sigma}(X_m : m \leq n)$.

On aura besoin également du lemme suivant qui concerne l'inclusion presque sûre des sous-tribus.

Lemme 9. *Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace polonais F. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Si $\mathbf{\Sigma}(Y) \overset{p.s.}{\subset} \mathcal{B}$, alors il existe une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable Y' telle que $Y' = Y$ presque sûrement.*

Démonstration. On fixe une base dénombrable d'ouverts bornés $(B_n)_{n\geq 0}$ de F. Alors l'application $\Psi : F \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par $\Psi(y) = (\mathbb{1}_{B_n}(y))_{n\geq 0}$ est injective, d'image borélienne dans le compact produit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et son inverse Ψ^{-1} est borélienne de $\Psi(F)$ dans F (voir le lemme 2-1 dans [8]).

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{Y \in B_n\}$ coïncide presque sûrement avec un événement A_n de $\mathcal{B}$, donc la variable aléatoire $\Psi(Y)$ coïncide presque sûrement avec la variable aléatoire $Z := (\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 0}$. Donc la variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable Z est presque sûrement à valeurs dans $\Psi(F)$. En fixant un point y_0 arbitraire dans F, on obtient le résultat annoncé en posant $Y' := \Psi^{-1}(Z)$ sur l'événement $\{Z \in \Psi(F)\}$ et $Y' := y_0$ sur l'événement $\{Z \notin \Psi(F)\}$. □

En combinant les deux lemmes précédents, on obtient immédiatement le résultat suivant qui sera utilisé dans la suite :

Lemme 10. *Soient X et Y des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs respectivement dans deux espaces polonais E et F. On a $\mathbf{\Sigma}(Y) \overset{p.s.}{\subset} \mathbf{\Sigma}(X)$ si et seulement si il existe $\phi : E \to F$ mesurable telle que $Y = \phi(X)$ presque sûrement.*

On introduit à présent des notions fondamentales que sont l'isomorphisme entre des filtrations et les copies de variables aléatoires. En effet il est nécessaire pour pouvoir classer et comparer des filtrations d'étudier ces relations entre ces dernières.

Définition 11 (Isomorphisme entre deux filtrations)**.** *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$ deux filtrations définies sur des espaces de probabilité éventuellement différents. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **isomorphes** s'il existe deux processus $X_\mathcal{F}$ et $X_\mathcal{G}$ engendrant presque sûrement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement, tels que*

$$\mathcal{L}(X_\mathcal{F}) = \mathcal{L}(X_\mathcal{G}).$$

On notera dans ce cas $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$. On dira que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont isomorphes via $(X_\mathcal{F}, X_\mathcal{G})$ quand il s'agira de préciser quels processus sont en jeu, on notera alors $\mathcal{F} \overset{(X_\mathcal{F}, X_\mathcal{G})}{\sim} \mathcal{G}$.

Il n'est pas évident à priori en lisant la définition précédente que la relation d'isomorphisme entre deux filtrations est une relation d'équivalence. Pour le prouver, nous avons besoin d'un outil important que nous appelons les copies de variables aléatoires entre filtrations isomorphes.

Définition 12 (Copie de v.a)**.** *Conservons les notations de la définition 11. Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable. D'après le lemme 7 il existe une fonction mesurable ϕ telle que $Y = \phi(X_\mathcal{F})$. On appellera **copie** de Y la variable aléatoire $\mathcal{G}_0$-mesurable $Y' := \phi(X_\mathcal{G})$.*

Si de plus Y est un processus en temps négatif engendrant une filtration $\mathcal{F}_Y$, la filtration $\mathcal{F}_{Y'}$ engendrée par sa copie Y' sera elle même appelée ***copie de la filtration*** $\mathcal{F}_Y$.

Il est fondamental de comprendre que la notion de copie dépend fortement du choix des processus $X_\mathcal{F}$ et $X_\mathcal{G}$ qui ont la même loi et engendrent les filtrations correspondantes.

Mais une fois ces processus fixés la notion de copie est uniquement déterminée modulo l'égalité presque sûre (*cf.* remarque 8).

Remarquons par ailleurs que, comme $\mathcal{L}(X_\mathcal{F}) = \mathcal{L}(X_\mathcal{G})$, il vient $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y')$.

Théorème 13. *La relation d'isomorphisme entre deux filtrations est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont immédiates. Pour la transitivité, considérons $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ trois filtrations et des couples de processus $(X^\mathcal{F}, X^\mathcal{H})$ et $(Y^\mathcal{H}, Y^\mathcal{G})$ tels que l'on ait $\mathcal{F} \overset{(X^\mathcal{F}, X^\mathcal{H})}{\sim} \mathcal{H}$ et $\mathcal{H} \overset{(Y^\mathcal{H}, Y^\mathcal{G})}{\sim} \mathcal{G}$. Comme $Y^\mathcal{H}$ engendre $\mathcal{H}$ presque sûrement, le lemme 10 donne une fonction mesurable π telle que $X^\mathcal{H} = \pi(Y^\mathcal{H})$ presque sûrement. Puis, comme $\mathcal{H} \overset{(Y^\mathcal{H}, Y^\mathcal{G})}{\sim} \mathcal{G}$, on peut réaliser la copie $X^\mathcal{G}$ de $X^\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ en posant : $X^\mathcal{G} := \pi(Y^\mathcal{G})$. On a alors $\mathcal{L}(X^\mathcal{G}) = \mathcal{L}(X^\mathcal{H}) = \mathcal{L}(X^\mathcal{F})$, car $\mathcal{F} \overset{(X^\mathcal{F}, X^\mathcal{H})}{\sim} \mathcal{H}$. Il reste à montrer que le processus $X^\mathcal{G}$ engendre bien la filtration $\mathcal{G}$ presque sûrement.

Pour cela, on note que $\mathbf{\Sigma}\left(Y^\mathcal{H}\right) \overset{\text{p.s.}}{\subset} \mathbf{\Sigma}\left(X^\mathcal{H}\right)$, donc toujours d'après le lemme 10 il existe une fonction mesurable θ telle que $Y^\mathcal{H} = \theta(X^\mathcal{H})$ presque sûrement. Il vient alors $Y^\mathcal{H} = \theta \circ \pi(Y^\mathcal{H})$ p.s. Comme la loi du couple $(X^\mathcal{G}, Y^\mathcal{G})$ est la même que celle de $(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})$, on peut transposer cette relation au niveau de $\mathcal{G}$ pour obtenir

$$Y^\mathcal{G} = \theta \circ \pi(Y^\mathcal{G}) = \theta(X^\mathcal{G}) \quad \text{(p.s.)}.$$

Ceci prouve que $X^\mathcal{G}$ (vu comme une variable aléatoire) engendre presque sûrement la tribu finale $\mathcal{G}_0$. Pour compléter le résultat, il faut raisonner de manière analogue pour chaque instant $n \leq 0$. Introduisons les projections $P_n : (\boldsymbol{x}_m)_{m\leq 0} \mapsto (\boldsymbol{x}_m)_{m\leq n}$ et $Q_n : (\boldsymbol{y}_m)_{m\leq 0} \mapsto (\boldsymbol{y}_m)_{m\leq n}$ agissant respectivement sur les espaces dans lesquels $X^\mathcal{H}$ et $Y^\mathcal{H}$ prennent leurs valeurs. En utilisant $\mathbf{\Sigma}(X_m^\mathcal{H} : m \leq n) \overset{\text{p.s.}}{\subset} \mathbf{\Sigma}(Y_m^\mathcal{H} : m \leq n)$, on obtient une fonction mesurable π_n telle que

$$\left((X_m^\mathcal{H})_{m\leq n}\right) = \pi_n\left((Y_m^\mathcal{H})_{m\leq n}\right) \quad \text{(p.s.)}$$

Par la remarque 8, on a $\pi_n \circ Q_n = P_n \circ \pi$ presque sûrement relativement à la loi de $Y^\mathcal{H}$. Comme $Y^\mathcal{G}$ a la même loi que $Y^\mathcal{H}$, il s'ensuit que

$$\left((X_m^\mathcal{G})_{m\leq n}\right) = P_n \circ \pi\left((Y_m^\mathcal{G})_{m\leq 0}\right) = \pi_n\left((Y_m^\mathcal{G})_{m\leq n}\right) \quad \text{(p.s.)}$$

Ainsi on a

$$\mathbf{\Sigma}(X_m^\mathcal{G} : m \leq n) \overset{\text{p.s.}}{\subset} \mathbf{\Sigma}(Y_m^\mathcal{G} : m \leq n) \overset{\text{p.s.}}{=} \mathcal{G}_n.$$

Pour l'inclusion réciproque, des arguments similaires donnent une fonction mesurable θ_n telle que

$$(Y_m^{\mathcal{H}})_{m\leq n} = \theta_n\big((X_m^{\mathcal{H}})_{m\leq n}\big),$$

et qui vérifie $\theta_n \circ P_N = Q_n \circ \theta$ presque sûrement relativement à la loi de $X^{\mathcal{H}}$. On a alors

$$\big((Y_m^{\mathcal{G}})_{m\leq n}\big) = \theta_n\big((X_m^{\mathcal{G}})_{m\leq n}\big) \quad \text{(p.s.)}$$

et donc

$$\mathcal{G}_n \overset{\text{p.s.}}{=} \mathbf{\Sigma}(Y_m^{\mathcal{G}} :\ m \leq n) \overset{\text{p.s.}}{\subset} \mathbf{\Sigma}(X_m^{\mathcal{G}} :\ m \leq n).$$

□

1.2.2 Immersion et immersibilité de filtrations

On présente ici les notions d'immersion et d'immersibilité qui sont centrales dans le problème de la classification des filtration. Elles reposent sur la propriété d'indépendance conditionnelle, dont on rappelle maintenant les principaux aspects.

La notion d'immersion est une notion naturelle et importante en théorie des filtrations. En fait, on l'utilise souvent de façon implicite. Par exemple, quand on parle de chaîne de Markov dans une filtration donnée (plus grosse que la filtration naturelle de la chaîne), cela signifie que la filtration naturelle est non seulement incluse mais immergée dans la filtration donnée.

Indépendance conditionnelle

Définition 14 (Indépendance conditionnelle de sous-tribus)**.** *soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois sous-tribus d'un espace de probabilité, telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{A}$ est indépendante de $\mathcal{B}$ conditionnellement à $\mathcal{C}$, et on note $\mathcal{A} \overset{\mathcal{C}}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{B}$, si pour toutes variables aléatoires réelles bornées X et Y avec X $\mathcal{A}$-mesurable et Y $\mathcal{B}$-mesurable,*

$$\mathbb{E}[XY/\mathcal{C}] \overset{p.s}{=} \mathbb{E}[X/\mathcal{C}]\mathbb{E}[Y/\mathcal{C}].$$

Définition 15. *Soit X, Y et Z des v.a. On dit que X et Y sont indépendantes conditionnellement à Z, ce que l'on note $X \overset{Z}{\perp\!\!\!\perp} Y$, si les tribus $\Sigma(X)$ et $\Sigma(Y)$ sont indépendantes conditionnellement à $\Sigma(Z)$.*

Proposition 16. *Soit X, Y et Z des v.a. telles que $X \overset{Z}{\perp\!\!\!\perp} Y$. Soit f et g des applications mesurables bornées. Alors $\mathbb{E}[f(X)g(Y)/Z] = \mathbb{E}[f(X)/Z]\mathbb{E}[g(Y)/Z]$.*

Proposition 17. *Soit X, Y et Z des v.a. telles que X et Y sont à valeurs dans des espaces polonais. On suppose que $X \overset{Z}{\perp\!\!\!\perp} Y$. Alors*

$$\mathcal{L}(X, Y/Z) \overset{p.s}{=} \mathcal{L}(X/Z) \otimes \mathcal{L}(Y/Z).$$

Lemme 18 (caractérisation de l'indépendance conditionnelle)**.** *La condition donnée dans la définition 14 équivaut à ce que pour toute variable aléatoire réelle bornée X $\mathcal{A}$-mesurable*

$$\mathbb{E}[X/\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X/\mathcal{C}].$$

Autrement dit : si l'on connaît déjà la tribu $\mathcal{C}$, la tribu $\mathcal{B}$ n'apporte pas plus d'information sur les variables $\mathcal{A}$-mesurables.

Démonstration. Supposons la condition donnée dans l'énoncé du lemme satisfaite. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées, respectivement $\mathcal{A}$-mesurable et $\mathcal{B}$-mesurable. Pour toute variable aléatoire réelle bornée et $\mathcal{C}$-mesurable Z, la variable aléatoire YZ est $\mathcal{B}$-mesurable, donc

$$\mathbb{E}[XYZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]YZ].$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY/\mathcal{C}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]Y/\mathcal{C}] \\ &= \mathbb{E}[\overbrace{\mathbb{E}[X/\mathcal{C}]}^{\mathcal{C}\text{-mesurable}} Y/\mathcal{C}] \text{ par hypothèse} \\ &= \mathbb{E}[X/\mathcal{C}]\mathbb{E}[Y/\mathcal{C}].\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons la condition donnée dans la définition 14 satisfaite. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées, respectivement $\mathcal{A}$-mesurable et $\mathcal{B}$-mesurable. Soient X $\mathcal{A}$-mesurable et Y $\mathcal{B}$-mesurable, bornées. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY/\mathcal{C}]] \quad \text{en intégrant sur } \mathcal{C} \\ &= \mathbb{E}[\overbrace{\mathbb{E}[X/\mathcal{C}]}^{\mathcal{C}\text{-mesurable}} \mathbb{E}[Y/\mathcal{C}]] \quad \text{par hypothèse} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{C}]Y].\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[X/\mathcal{C}] = \mathbb{E}[X/\mathcal{B}].$$

□

On se servira de l'exemple suivant qui est un cas particulier du lemme 1.5 présent dans [7].

Exemple 19. *Prenons deux sous-tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, et soit $\mathcal{U} \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A} \overset{\mathcal{C}}{\perp\!\!\!\perp} (\mathcal{C} \vee \mathcal{U})$.*

Étant données deux filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur le même espace de probabilité, il est naturel de dire que $\mathcal{F}$ est une sous-filtration de $\mathcal{G}$ si pour tout n, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$. On notera alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Mais pour l'étude de la classification des filtrations on a besoin d'une relation plus forte, appelée **immersion**.

Définition 20 (immersion)**.** *$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations définies sur le même espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. $\mathcal{F}$ est dite **immergée** dans $\mathcal{G}$ (noté $\mathcal{F} \prec \mathcal{G}$) lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :*

— *pour tout $n \leq 0$, $\mathcal{F}_n \overset{p.s.}{\subset} \mathcal{G}_n$,*

— *pour tout $n \leq -1$, $\mathcal{F}_{n+1} \overset{\mathcal{F}_n}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}_n$.*

Nous donnons l'explication intuitive du deuxième point : à chaque instant $n \leq -1$, la plus grosse filtration $\mathcal{G}_n$ ne donne pas plus d'information que $\mathcal{F}_n$ sur le futur de la filtration $\mathcal{F}$.

Le lemme qui suit est simplement la traduction du lemme 18 dans ce cadre.

Lemme 21. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$ deux filtrations définies sur le même espace de probabilités $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*

Sont équivalents :

— *La filtration $\mathcal{F}$ est immergée dans $\mathcal{G}$.*

— *Pour toute variable aléatoire réelle intégrable $\mathcal{F}_0$-mesurable Z et tout $n \leq 0$,*

$$\mathbb{E}[Z/\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[Z/\mathcal{F}_n] \quad p.s.$$

— *Toute martingale dans $\mathcal{F}$ est aussi une martingale dans $\mathcal{G}$.*

Corollaire 22. *La notion d'immersion est transitive.*

Un exemple très simple d'immersion est donné par le cas de filtrations indépendantes.

Proposition 23. *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations indépendantes, alors $\mathcal{F} \prec \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$.*

On donne un exemple simple de deux filtrations $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ mais où $\mathcal{F}$ n'est pas immergée dans $\mathcal{G}$:

Exemple 24. *Soit $\mathcal{G}$ une filtration strictement croissante (par exemple engendrée par un processus i.i.d. $(X_n)_{n\leq 0}$ où $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$), et pour tout $n \leq 0$ posons $\mathcal{F}_n := \mathcal{G}_{n-1}$. Alors il est clair que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, mais cependant $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{G}_n$ n'est pas indépendante de $\mathcal{G}_n$ conditionnellement à $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_{n-1}$.*

Donnons aussi un exemple important de filtration immergée dans une autre : celui d'une filtration paramétrée.

Définition 25. *Un processus $(U_n)_{n\leq 0}$ à valeurs dans un espace mesurable séparable est appelé **paramétrisation d'une filtration** $\mathcal{F}$ si pour tout $n \leq -1$ les conditions suivantes sont réalisées :*

— *$U_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n \vee \mathbf{\Sigma}(U_m : m \leq n)$ (en particulier, le processus $(U_n)_{n\leq 0}$ est constitué d'une famille de variables aléatoires indépendantes),*

— *$\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n \vee \mathbf{\Sigma}(U_{n+1})$. En particulier, X_{n+1} est une fonction mesurable de $(X_m)_{m\leq n}$ et de U_{n+1}.*

On dit que la paramétrisation est **génératrice si pour tout** $n \leq 0$

$$\mathcal{F}_n \overset{\text{p.s.}}{\subset} \Sigma\big((U_m)_{m\leq n}\big).$$

Proposition 26. *Soit $\mathcal{F}$ une filtration ayant pour paramétrisation un processus $(U_n)_{n\leq 0}$. La filtration $\mathcal{F}$ est immergée dans la filtration $\mathcal{F}\vee\mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est la filtration engendrée par $(U_n)_{n\leq 0}$.*

Démonstration. En effet pour chaque $n \leq -1$ il suffit de voir que l'on est dans le cadre de l'exemple 19 en posant $\mathcal{C} := \mathcal{F}_n$, $\mathcal{A} := \mathcal{G}_n$ et $\mathcal{U} := \mathbf{\Sigma}(U_{n+1})$ (de sorte que $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{C}\vee\mathcal{U}$). □

Il faut remarquer qu'il est souvent nécessaire d'agrandir l'espace probabilisé lorsqu'on le souhaite construire une paramétrisation.

La notion suivante d'immersibilité peut être vue comme une immersion « à isomorphisme près ».

Définition 27 (immersibilité)**.** *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations définies sur des espaces de probabilité éventuellement différents. On dit que $\mathcal{F}$ est* ***immersible*** *dans $\mathcal{G}$ s'il existe une filtration $\mathcal{F}'$ définie sur le même espace de probabilité que $\mathcal{G}$ telle que :*
— $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$,
— $\mathcal{F}' \prec \mathcal{G}$.
On notera dans ce cas $\mathcal{F} \underset{\sim}{\prec} \mathcal{G}$.

1.2.3 Filtration standard

Une question essentielle traitée par la théorie de classification des filtrations est de savoir quand une filtration donnée possède une structure simple, nous le formalisons via les deux définitions suivantes :

Définition 28. *Une filtration $\mathcal{F}$ est dite* ***de type produit*** *si elle est engendrée par un processus constitué de variables aléatoires indépendantes.*

Définition 29. *Une filtration $\mathcal{F}$ est dite* ***standard*** *si elle est immersible dans une filtration de type produit.*

La proposition suivante découle directement de la proposition 26 :

Proposition 30. *Une filtration possédant une paramétrisation génératrice est standard.*

En effet, dans ce cas la filtration est immergée dans la filtration naturelle de la paramétrisation. Cependant on ne sait pas en général si la standardité entraîne ou non l'existence d'une paramétrisation génératrice.

D'après la loi du zéro-un de Kolmogorov, toute filtration $\mathcal{F}$ de type produit et donc toute filtration standard vérifie la propriété de trivialité asymptotique

$$\forall A \in \bigcap_{n\leq 0} \mathcal{F}_n,\ \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Une filtration satisfaisant la propriété ci-dessus est dite **kolmogorovienne**. L'un des résultats marquants de la théorie de la classification des filtrations est l'existence de filtrations kolmogoroviennes qui ne sont pas standard. Pour prouver qu'une filtration est ou n'est pas standard, plusieurs critères ont été développés par Vershik dans [2], puis Smorodinsky [9] , Tsirelson [10], Émery-Schachermayer [11]. Dans la section suivante nous allons nous intéresser à l'un de ces critères, appelé « I-confort » (en anglais : *I-cosiness*), qui sera central dans la suite de ce travail.

1.2.4 Le I-confort

La notion de I-confort repose sur celle de couplage en temps réel d'une filtration, que l'on définit maintenant.

Définition 31 (Couplage en temps réel)**.** *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ une filtration.Un **couplage en temps réel (CTR)** de $\mathcal{F}$ est un couple $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de filtrations définies sur un même espace de probabilité (pas nécessairement le même que celui où est définie $\mathcal{F}$), telles que :*

- *$\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont toutes les deux isomorphes à $\mathcal{F}$,*
- *$\mathcal{F}' \prec \mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$,*
- *$\mathcal{F}'' \prec \mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$.*

Les conditions d'immersion signifient que pour chaque $n \leq -1$, on a les indépendances conditionnelles

- $\mathcal{F}'_{n+1} \overset{\mathcal{F}'_n}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n$,
- $\mathcal{F}''_{n+1} \overset{\mathcal{F}''_n}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n$.

Le lemme qui suit est une conséquence du lemme 18 :

Lemme 32. *Soit $X = (X_n)_{n\leq 0}$ un processus engendrant la filtration $\mathcal{F}$, où chaque X_n est à valeurs dans un espace polonais E_n. Soient X' et X'' deux copies du processus X définies sur un même espace probabilisé. Notons $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ les filtrations naturelles de X' et X''. Pour que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ soit un couplage en temps réel de $\mathcal{F}$, il faut et il suffit que pour tout $n \leq -1$,*

$$\mathcal{L}'(X'_{n+1}|\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n) = \mathcal{L}'(X'_{n+1}|\mathcal{F}'_n) \text{ et } \mathcal{L}'(X''_{n+1}|\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n) = \mathcal{L}'(X'_{n+1}|\mathcal{F}''_n).$$

Ainsi, si on a déjà construit les processus jusqu'au temps $n \leq -1$, la construction se poursuit au temps $n+1$ en réalisant, conditionnellement à $\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n$, un couplage des

deux lois conditionnelle $\mathcal{L}(X'_{n+1}/\mathcal{F}'_n)$ et $\mathcal{L}(X''_{n+1}/\mathcal{F}''_n)$. C'est ce qui explique la dénomination « couplage en temps réel ».

L'exemple simple suivant est une conséquence de la proposition 23.

Exemple 33 (Couplage indépendant)**.** *Si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont deux filtrations définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes les deux isomorphes à $\mathcal{F}$, alors $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est un CTR de $\mathcal{F}$.*

Définition 34. *Soit $n_0 \leq 0$. Un CTR $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est dit n_0-**indépendant** si les tribus $\mathcal{F}'_{n_0}$ et $\mathcal{F}''_{n_0}$ sont indépendantes.*

Couplage en temps réel avec paramétrisation

On se place ici dans le cas où $\mathcal{F}$ est engendrée par $(X_n)_{n\leq 0}$ un processus de Markov stationnaire de noyau $\mathcal{Q}$, et où l'on dispose de fonctions de mises à jour associées à des innovations de loi λ sur un espace I. Étant donné $n_0 \leq 0$, on peut construire un CTR n_0-indépendant en procédant de la façon suivante :

— On construit d'abord deux copies indépendantes $(X'_n)_{n\leq n_0}$ et $(X''_n)_{n\leq n_0}$ du processus jusqu'au temps n_0 (ce qui assure que l'on aura bien $\mathcal{F}'_{n_0} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}''_{n_0}$).

— On se donne ensuite, sur le même espace de probabilité, une famille $(U_n)_{n_0<n\leq 0}$ d'innovations de loi λ, indépendante de $\mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}$.

— Cette famille va servir à la fois pour construire les temps suivants des processus $(X'_n)_{n\geq n_0+1}$ et $(X''_n)_{n\geq n_0+1}$ en définissant récursivement, pour chaque $n_0 \leq n < 0$:

$$\begin{aligned} & X'_{n+1} := \phi'_{n+1}(X'_n, U_{n+1}) \\ \text{et} \quad & X''_{n+1} := \phi''_{n+1}(X''_n, U_{n+1}), \end{aligned}$$

où ϕ'_{n+1} et ϕ''_{n+1} sont des fonctions de mise à jour éventuellement choisies en fonction des réalisations des processus jusqu'au temps n.

Dans cette construction paramétrée, c'est le choix des fonctions de mise à jour utilisées à chaque étape qui permet de construire des CTR vérifiant diverses propriétés. On peut en particulier espérer que si $|n_0|$ est suffisamment grand, on puisse réaliser un tel couplage de sorte que les processus X' et X'' finissent par se rapprocher suffisamment. C'est cette idée qui est formalisée dans la définition suivante.

Définition 35 (I-confort)**.** *On dit qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est **I-confortable** si, pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable Y à valeurs dans un espace (E, d) métrique compact, pout tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$ (dépendant seulement de δ et de Y) et un CTR $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de $\mathcal{F}$, n_0-indépendant, tel que*

$$\mathbb{P}\big(d(Y', Y'') < \delta\big) > 1 - \delta,$$

où Y' et Y'' sont les copies de Y dans $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ respectivement.

On dit qu'une variable aléatoire Y $\mathcal{F}_0$-mesurable satisfait la propriété de I-confort si la condition énoncée ci-dessus est valable pour Y.

La variable aléatoire Y est appelée « variable cible ». Nous allons voir comment grâce au théorème des martingales rappelé ci-dessous, il suffit de considérer des variables aléatoires cibles dépendant seulement d'un nombre fini de coordonnées du processus engendrant la filtration.

Théorème 36 (Théorème des martingales)**.** *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de variables aléatoires. Soit $I = \bigcup_{m\geq 0} I_m$ où $I_{m-1} \subset I_m$. Soit $\mathcal{F}_m := \mathbf{\Sigma}(X_i : i \in I_m)$ et $\mathcal{F}_\infty := \mathbf{\Sigma}(X_i : i \in I) = \bigvee_{m\geq 0} \mathcal{F}_m$. Soit Y une variable aléatoire réelle bornée. Alors*

$$\mathbb{E}[Y/\mathcal{F}_m] \xrightarrow[m\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[Y/\mathcal{F}_\infty].$$

Lemme 37. *Soient $\mathcal{F}_m$ et $\mathcal{F}_\infty$ comme dans l'énoncé du théorème 36. Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, à valeurs dans un espace métrique (E, d) compact. Pour tout $\delta > 0$, il existe $m \geq 0$ et une variable aléatoire Z, $\mathcal{F}_m$ mesurable, telle que $\mathbb{P}(d(Y, Z) < \delta) > 1 - \delta$.*

Démonstration. On considère plusieurs cas suivant la nature de l'espace où Y prend ses valeurs.

— Cas où (E, d) compact de $\mathbb{R}$. On considère pour $m \geq 0$, $Z_m := \mathbb{E}[Y/\mathcal{F}_m]$. D'après le théorème des martingales, Z_m converge presque sûrement, donc aussi en probabilité, vers Y. Donc pour m assez grand on aura l'inégalité voulue.

— Cas où (E, d) est un espace fini. Soit $\tilde{E} := \{1, 2, ..., |E|\} \subset \mathbb{R}$, et fixons une bijection $\phi : E \to \tilde{E}$. On considère la nouvelle variable aléatoire réelle $\tilde{Y} := \phi \circ Y$, à valeurs dans $\tilde{E} \subset \mathbb{R}$. D'après le cas ci-dessus, on peut trouver m et $\overline{Z}$ à valeurs réelles, $\mathcal{F}_m$ mesurable, tels que $\mathbb{P}(|\tilde{Y} - \overline{Z}| < \delta) > 1 - \delta$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\delta < 1/2$. Soit $\tilde{Z}$ à valeurs dans $\tilde{E}$ telle que $\tilde{Z} = i \in \{1, ..., |E|\}$ si $|\overline{Z} - i| < \delta$. Il vient donc

$$\mathbb{P}(\tilde{Z} = \tilde{Y}) > 1 - \delta.$$

On repasse à présent de $\tilde{E}$ à E : on obtient une variable aléatoire $Z := \phi^{-1} \circ \tilde{Z}$, $\mathcal{F}_m$ mesurable, telle que $\mathbb{P}(Z = Y) > 1 - \delta$.

— Cas général : par compacité, on peut recouvrir E par un nombre fini k de boules ouvertes de rayon δ, dont on note $e_1, ..., e_k$ les centres. Soit $\tilde{Y}$ la variable aléatoire définie par $\tilde{Y} = e_j$ où j est le plus petit entier dans $\{1, \ldots, k\}$ tel que $d(e_j, Y) < \delta$. On a donc $d(\tilde{Y}, Y) < \delta$. Puis on applique le résultat du cas de l'espace fini pour $\tilde{Y}$: on obtient un entier m et une variable aléatoire $\mathcal{F}_m$ mesurable Z, tels que

$$\mathbb{P}(Z = \tilde{Y}) > 1 - \delta,$$

et donc

$$\mathbb{P}(d(Z, Y) < \delta) \geq \mathbb{P}(Z = \tilde{Y}) > 1 - \delta.$$

□

Une conséquence directe de la définition du I-confort est la suivante :

Lemme 38. *Parmi les variables aléatoires $\mathcal{F}_0$-mesurables à valeurs dans un espace métrique compact (E, d), celles qui vérifient la propriété de I-confort forment une partie fermée pour la convergence en probabilité.*

Lemme 39. *Si une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable X à valeurs dans un espace métrique compact (E, d_E) vérifie la propriété de I-confort, si φ est une application borélienne de (E, d_E) dans un autre espace métrique compact (F, d_F), alors $\varphi(X)$ vérifie la propriété de I-confort.*

Démonstration. On se donne $\delta > 0$, et on note μ la loi de X. Par application d'une version du théorème de Lusin (voir par exemple [12, p. 367], ou [13, théorème 7.1.13]), il existe un compact $K_\delta \subset E$ avec $\mu(K_\delta) > 1 - \delta/3$, tel que la restriction de φ à K_δ soit (uniformément) continue. Donc il existe δ' tel que pour tous $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''$ dans K_δ,

$$d_E(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') < \delta' \Longrightarrow d_F\big(\varphi(\boldsymbol{x}'), \varphi(\boldsymbol{x}'')\big) < \delta.$$

Puis, comme X vérifie la propriété de I-confort, il existe n_0 et un CTR n_0-indépendant dans lequel les deux copies X' et X'' de X véfifient

$$\mathbb{P}(d_E(X', X'') < \delta') > 1 - \delta/3.$$

Sur l'événement $(X' \in K_\delta) \cap (X'' \in K_\delta) \cap (d_E(X', X'') < \delta')$, qui est de probabilité supérieure à $1 - \delta$, on a alors $d_F\big(\varphi(\boldsymbol{x}'), \varphi(\boldsymbol{x}'')\big) < \delta$, ce qui prouve que $\varphi(X)$ vérifie aussi la propriété de I-confort. □

Les lemmes précédents permettent de réduire notablement le nombre de variables cibles à considérer pour vérifier la propriété de I-confort de la filtration. La proposition suivante en est une illustration frappante.

Proposition 40. *Supposons que $\mathcal{F}$ soit engendrée par un processus $(X_n)_{n\leq 0}$ à valeurs dans des espaces métriques compacts (E_n, d_n), et admette une paramétrisation. Pour que $\mathcal{F}$ soit I-confortable, il suffit que chaque X_n vérifie la propriété de I-confort. Si de plus le processus est stationnaire, il suffit que X_0 vérifie la propriété de I-confort.*

Démonstration. Soit $(U_n)_{n\leq 0}$ une paramétrisation qu'on peut supposer à valeur dans $[0, 1]$. En munissant $E_n \times [0, 1]^{|n|}$ et $E_n \times ... \times E_0$ de la métrique produit, on remarque que si X_n vérifie la propriété de I-confort alors $(X_n, U_{n+1}, ..., U_0)$ aussi et ainsi $(X_n, ..., X_0)$ vérifie également le I-confort, et toute fonction mesurable de $(X_n, ..., X_0)$ aussi par le lemme 39. □

Un exemple concret de CTR n_0-indépendant permettant de montrer le I-confort d'une filtration est donné plus loin dans le cadre de l'automate additif déterministe (page 43).

1.2.5 I-confort et standardité

On souhaite à présent montrer deux lemmes importants visant à démontrer que l'isomorphisme et l'immersion préservent le I-confort :

Lemme 41. *Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations.*

$$\mathcal{G} \text{ I-confortable et } \mathcal{H} \prec \mathcal{G} \Longrightarrow \mathcal{H} \text{ I-confortable.}$$

Démonstration. Soit $Y_{\mathcal{H}}$ une variable aléatoire cible dans $\mathcal{H}$ et soit $\delta > 0$. Comme $\mathcal{H} \prec \mathcal{G}$, $Y_{\mathcal{H}}$ est une variable aléatoire cible dans $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{G}$ est I-confortable, il existe un entier $n_0 \leq 0$ et un CTR n_0-indépendant $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ de $\mathcal{G}$, tel que les copies $Y_{\mathcal{G}'}$ et $Y_{\mathcal{G}''}$ de $Y_{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ vérifient

$$\mathbb{P}(d(Y_{\mathcal{G}'}, Y_{\mathcal{G}''}) < \delta) > 1 - \delta. \tag{1.2}$$

Soit $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ les copies de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$. On remarque que $\mathcal{H}' \sim \mathcal{H}$, $\mathcal{H}'' \sim \mathcal{H}$, $Y_{\mathcal{G}'}$ est $\mathcal{H}'_0$-mesurable et que $Y_{\mathcal{G}''}$ est $\mathcal{H}''_0$-mesurable car $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ sont des copies de $\mathcal{H}$. On remarque aussi que $Y_{\mathcal{G}'}$ et $Y_{\mathcal{G}''}$ sont également les copies de $Y_{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{H}' \prec \mathcal{G}'$ et $\mathcal{H}'' \prec \mathcal{G}''$. Comme $\mathcal{H}' \prec \mathcal{G}' \prec \mathcal{G}' \vee \mathcal{G}''$, pour toute variable aléatoire $\mathcal{H}'_0$-mesurable bornée Z et tout $n \leq 0$, on a

$$\mathbb{E}[Z/\mathcal{H}'_n] = \mathbb{E}[Z/\mathcal{G}'_n] = \mathbb{E}[Z/\mathcal{G}'_n \vee \mathcal{G}''_n].$$

En prenant ensuite les espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{H}'_n \vee \mathcal{H}''_n$, on obtient

$$\mathbb{E}[Z/\mathcal{H}'_n] = \mathbb{E}[Z/\mathcal{H}'_n \vee \mathcal{H}''_n],$$

ce qui prouve d'après le lemme 21 que $\mathcal{H}' \prec \mathcal{H}' \vee \mathcal{H}''$. De même $\mathcal{H}'' \prec \mathcal{H}' \vee \mathcal{H}''$. Il vient donc que $(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ est un CTR n_0-indépendant de $\mathcal{H}$ dans lequel les copies de la variable cible vérifient la propriété (1.2). Ainsi $\mathcal{H}$ est I-confortable. □

Lemme 42. *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ deux filtrations.*

$$\mathcal{H} \text{ I-confortable et } \mathcal{F} \sim \mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{F} \text{ I-confortable.}$$

Démonstration. Soit $Y_{\mathcal{F}}$ une variable aléatoire cible pour $\mathcal{F}$ et soit $\delta > 0$. On considère $Y_{\mathcal{H}}$ sa copie dans $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}$ est I-confortable, il existe n_0 et un CTR $(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ indépendant jusqu'à n_0 où les copies $Y_{\mathcal{H}'}$ et $Y_{\mathcal{H}''}$ de $Y_{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ (aussi copies de Y_F par transitivité) vérifient

$$\mathbb{P}(d(Y_{\mathcal{H}'}, Y_{\mathcal{H}''}) < \delta) > 1 - \delta.$$

Or l'isomorphisme est une relation d'équivalence d'après le théorème 13, donc $(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ est aussi un CTR n_0-indépendant de $\mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est I-confortable. □

Le lemme suivant constitue la base du lien entre I-confort et standardité.

Lemme 43. *Soit $\mathcal{G}$ une filtration.*

$$\mathcal{G} \text{ de type produit} \implies \mathcal{G} \text{ I-confortable.}$$

Démonstration. Si la filtration $\mathcal{G}$ est de type produit, elle est engendrée par un processus $U = (U_n)_{n\leq 0}$ formé de variables aléatoires indépendantes. Pour vérifier le I-confort pour $\mathcal{G}$, il suffit d'après le lemme 37 de considérer une variable aléatoire cible $Y_{\mathcal{G}}$ dans $\mathcal{G}$ qui n'est fonction que d'un nombre fini de variables aléatoires U_n. On prend donc Y_G telle qu'il existe n_0 et une fonction g mesurable avec

$$Y_{\mathcal{G}} = g(U_{n_0+1}, ..., U_{-1}, U_0).$$

Dans un espace de probabilité assez riche, il est possible de construire une copie $U' = (U'_n)_{n\leq 0}$ du processus U, et une copie $(U''_n)_{n\leq n_0}$ de $(U_n)_{n\leq n_0}$ indépendante de U'. On pose ensuite, pour tout $n_0 + 1 \leq n \leq 0$, $U''_n := U'_n$. On obtient ainsi deux processus U' et U'' qui ont la même loi que U, qui sont indépendants jusqu'au temps n_0 et coïncident à partir de $n_0 + 1$. On appelle $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ les filtrations respectivement engendrées par U' et U''. On obient ainsi un CTR n_0-indépendant de $\mathcal{G}$.

On peut alors construire les copies de $Y_{\mathcal{G}}$ dans $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, en posant

$$\begin{aligned} Y_{\mathcal{G}'} &:= g(U'_{n_0+1}, ..., U'_{-1}, U'_0) \\ \text{et} \quad Y_{\mathcal{G}''} &:= g(U''_{n_0+1}, ..., U''_{-1}, U''_0). \end{aligned}$$

Par construction on a $Y_{\mathcal{G}'} = Y_{\mathcal{G}''}$. On en conclut que $\mathcal{G}$ est I-confortable.

□

Ces derniers lemmes permettent de montre que le I-confort est une condition nécessaire pour la standardité. En effet, par définition si $\mathcal{F}$ est standard, $\mathcal{F}$ est immersible dans une filtration de type produit, ce qui signifie qu'il existe $\mathcal{F}'$ isomorphe à $\mathcal{F}$ immergée dans une filtration de type produit $\mathcal{G}$. Par le lemme 43, $\mathcal{G}$ est I-confortable. Puis le lemme 1.2.5 prouve que $\mathcal{F}'$ est I-confortable, et enfin le lemme 42 nous donne que $\mathcal{F}$ est I-confortable.

La réciproque est également vraie, mais sa démonstration est beaucoup plus complexe. On renvoie par exemple à l'article [7]. On obtient que le I-confort est un critère nécessaire et suffisant de standardité.

Théorème 44. *Soit $\mathcal{F}$ une filtration.*

$$\mathcal{F} \text{ standard} \iff \mathcal{F} \text{ I-confortable.}$$

Chapitre 2

Standardité des filtrations engendrées par deux versions de l'automate additif

Dans toute la suite, et sauf mention contraire, $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe abélien fini, qui nous servira d'alphabet pour construire nos automates cellulaires. On présente dans ce chapitre deux versions de l'automate algébrique construit à partir de l'addition dans le groupe $\mathbb{A}$: une première version déterministe notée τ, puis une perturbation probabiliste de τ qui dépend d'un paramètre $\varepsilon > 0$ et que l'on note τ_ε.

On va notamment définir et étudier les filtrations engendrées par ces deux automates.

2.1 L'automate additif déterministe τ

2.1.1 Généralités

On considère l'automate $\tau : \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ de voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$ défini par sa règle locale :

$$\begin{aligned} f_\tau : \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{A}. \\ (a, b) &\mapsto a + b. \end{aligned}$$

On identifie ici $\mathbb{A}^{\{0,1\}}$ à $\mathbb{A}^2$.

On définit aussi l'action de cet automate sur les mots finis indexés par des intervalles finis de $\mathbb{Z}$: si $I = \{n, n+1, \dots, n+\ell\}$ est un tel intervalle, on définit $I^+ := \{n, n+1, \dots, n+\ell, n+\ell+1\}$ et on note également τ l'application de $\mathbb{A}^{I^+}$ dans $\mathbb{A}^I$ qui à $w = w(n) \cdots w(n+\ell+1)$ associe le mot $v(n) \cdots v(n+\ell)$, où $v(i) := w(i) + w(i+1)$.

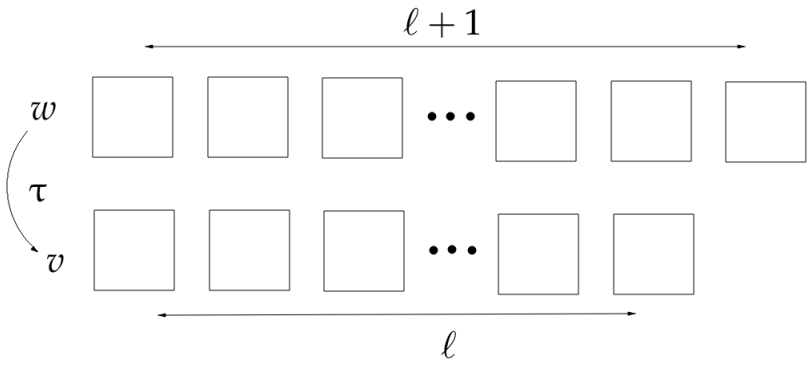


FIGURE 2.1 – L'action de τ sur un mot fini

Nous présentons ici la nature de l'automate τ, il s'agit d'une famille d'automates cellulaires bien particulière :

Définition 45. *On dit qu'un automate cellulaire F sur l'alphabet $\mathbb{A}$, de voisinage $\{0,1\}$ et de fonction locale f, est* ***permutatif à gauche*** *si $\forall b \in \mathbb{A}$, $a \mapsto f(a,b)$ est une bijection de $\mathbb{A}$. De même, on dit que l'automate est* ***permutatif à droite*** *si $\forall a \in \mathbb{A}$, $b \mapsto f(a,b)$ est une bijection de $\mathbb{A}$.*

Une conséquence immédiate des propriétés de l'addition dans le groupe $(\mathbb{A}, +)$ est la suivante :

Propriété 1. *τ est permutatif à gauche et à droite.*

Démonstration. Soit $b \in \mathbb{A}$ fixé. Par calcul immédiat dans le groupe $(\mathbb{A}, +)$, on vérifie que l'application $a \mapsto a + b$ de $\mathbb{A}$ dans lui-même est bijective, de bijection réciproque $c \mapsto c - b$. Il s'ensuit que τ est permutatif à gauche. Puis en fixant a au lieu de b on obtient de même la permutativité à droite. □

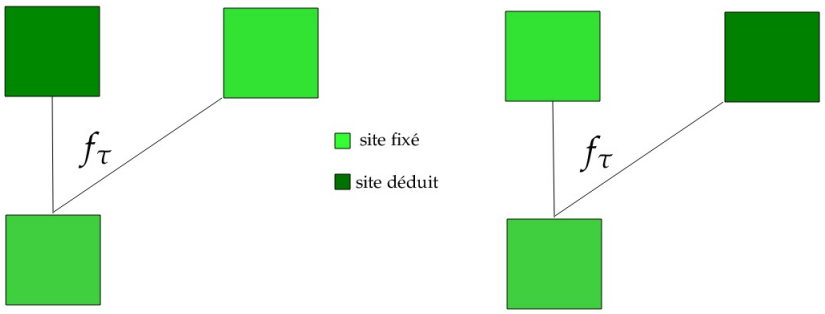


FIGURE 2.2 – La permutativité à gauche et à droite de τ

Cette dernière propriété bien que simple à première vue aura un impact important pour la compréhension du lien entre τ et f_τ, car nous allons nous intéresser autant aux images qu'aux antécédents de τ.

Images réciproques

Pour $y \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, $i \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{A}$, on définit

$$\tau_{a,i}^{-1}(y) := \{x \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} / \tau(x) = y \text{ et } x(i) = a\}.$$

De même, pour I intervalle fini de $\mathbb{Z}$, $w \in \mathbb{A}^I$, $a \in \mathbb{A}$ et $i \in I'$, on définit

$$\tau_{a,i}^{-1}(w) := \{v \in \mathbb{A}^{I^+} / \tau(v) = w \text{ et } v(i) = a\}.$$

On notera $\tau_a^{-1}(y) := \tau_{a,0}^{-1}(y)$ et $\tau_a^{-1}(w) := \tau_{a,0}^{-1}(w)$ car la position $i = 0$ est un site que nous prendrons souvent comme référence à partir de maintenant pour simplifier.

On peut se poser la question du nombre d'éléments présents dans $\tau_{a,i}^{-1}(y)$, nous allons démontrer à présent qu'il n'y a qu'un seul antécédent :

Propriété 2. *Pour tout intervalle fini I de $\mathbb{Z}$, $w \in \mathbb{A}^I$, $a \in \mathbb{A}$ et $i \in I'$, on a*

$$|\tau_{a,i}^{-1}(w)| = 1.$$

Pour tout $y \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, $i \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{A}$, on a

$$|\tau_{a,i}^{-1}(y)| = 1.$$

Démonstration. Commençons par le cas des mots finis. Fixons $w \in \mathbb{A}^I$, $a \in \mathbb{A}$ et $i \in I'$. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{I'}$, la permutativité à gauche et à droite de τ illustrée sur la figure 2.2 donne l'équivalence

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(i) = a \\ \tau(\boldsymbol{x}) = w \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x}(i) = a \\ \forall j \in I', j < i \Longrightarrow \boldsymbol{x}(j) = w(j) - \boldsymbol{x}(j+1), \\ \forall j \in I', j > i \Longrightarrow \boldsymbol{x}(j) = w(j-1) - \boldsymbol{x}(j). \end{cases}$$

Par récurrence ascendante et descendante à partir de i, cela détermine un unique $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{I'}$.

Le cas des configurations bi-infinies indexées par $\mathbb{Z}$ se prouve de la même façon en remplaçant I et I' par $\mathbb{Z}$.

□

Remarque 46. *Dans la suite, on identifiera $\tau_{a,i}^{-1}$ comme étant la fonction associant à une suite $\boldsymbol{y}$ son unique antécédent $\boldsymbol{x}$ satisfaisant la contrainte $\boldsymbol{x}(i) = a$.*

Remarque 47. *Grâce à la propriété 2, on déduit que pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, $|\tau^{-1}(\boldsymbol{y})| = |\mathbb{A}|$. En effet pour un i fixé arbitrairement dans $\mathbb{Z}$, $\tau^{-1}(\boldsymbol{y})$ est la réunion disjointe des $\tau_{a,i}^{-1}(\boldsymbol{y})$, $a \in \mathbb{A}$. De même pour tout sous-intervalle fini I de $\mathbb{Z}$ et tout $w \in \mathbb{A}^I$, on a aussi $|\tau^{-1}(w)| = |\mathbb{A}|$.*

Remarque 48. *Pour toute configuration $\boldsymbol{y} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, les $|\mathbb{A}|$ éléments de $\tau^{-1}(\boldsymbol{y})$ sont tous différents en position i.*

Remarque 49. *Ayant fixé une configuration $\boldsymbol{y} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, un sous-intervalle fini I de $\mathbb{Z}$ et un entier $i \in \mathbb{Z}$, les $|\mathbb{A}|$ mots $\tau_{a,i}^{-1}(\boldsymbol{y})[I']$ ($a \in \mathbb{A}$) sont exactement les $|\mathbb{A}|$ mots appartenant à $\tau^{-1}(\boldsymbol{y}[I])$.*

2.1.2 La filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$

On définit ici une filtration notée $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ associée à l'automate additif déterministe τ. Pour cela on va préciser le cadre probabiliste, et construire une chaîne de Markov stationnaire qui renverse le temps de l'automate (d'où la notation τ^{-1}).

Cadre probabiliste

On considère l'espace de probabilité $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{A}, \mu)$, où $\mathcal{A}$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ et où $\mu := \mathcal{U}_{\mathbb{A}}^{\otimes \mathbb{Z}}$ avec $\mathcal{U}_{\mathbb{A}}$ la mesure uniforme sur $\mathbb{A}$.

Lemme 50. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si X est de loi μ, alors $\tau(X)$ est aussi de loi μ.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{L}(X) = \mu$ est caractérisé par la propriété suivante : pour tout sous-intervalle fini I de $\mathbb{Z}$, pour tout mot $w \in \mathbb{A}^I$,

$$\mathbb{P}\big(X[I] = w\big) = \frac{1}{|\mathbb{A}|^{|I|}}.$$

Soit $X' := \boldsymbol{\tau}(X)$. Si I et w sont tels que ci-dessus, on a

$$\mathbb{P}\big(X'[I] = w\big) = \sum_{v \in \boldsymbol{\tau}^{-1}(w)} \mathbb{P}\big(X[I^+] = v\big) \overset{47}{=} \frac{|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|^{|I^+|}} = \frac{1}{|\mathbb{A}|^{|I|}}.$$

Donc X' est aussi de loi μ. □

Sur l'espace de probabilité $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{A}, \mu)$, on considère la variable aléatoire X_0 de loi μ, simplement définie comme l'identité sur $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$. Ainsi $X_0 = \big(X_0(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ où $X_0(i)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(i)$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$.

On considère le processus à temps négatifs $(X_n)_{n\leq 0}$, défini par :

$$\forall n \leq 0,\ X_n := \boldsymbol{\tau}^{|n|} X_0.$$

D'après le lemme 50, une récurrence immédiate donne que chaque X_n est de loi μ. On a alors pour tout $n < 0$

$$X_{n+1} = \boldsymbol{\tau}^{-1}_{X_{n+1}(0)} X_n,$$

où $\mathcal{L}(X_{n+1}(0)) = \mathcal{U}_{\mathbb{A}}$.

On note $\mathcal{F}^{\tau^{-1}} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ la filtration engendrée par ce processus $(X_n)_{n\leq 0}$. On a donc, pour $n \leq 0$,

$$\mathcal{F}_n := \boldsymbol{\Sigma}(..., X_{n-1}, X_n) = \boldsymbol{\Sigma}(X_n, \boldsymbol{\tau}(X_n), \ldots) = \boldsymbol{\Sigma}(X_n).$$

On rappelle le résultat classique suivant sur les espérances conditionnelles.

Lemme 51. *Soit $\mathcal{S}$ une sous-tribu de l'espace probabilisé, X une variable aléatoire $\mathcal{S}$-mesurable, à valeurs dans un espace E, et Y une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{S}$ à valeurs dans un espace F. Soit ψ une application mesurable définie sur $E \times F$ et à valeurs dans un espace G. Alors la loi conditionnelle $\mathcal{L}\big(\psi(X,Y)/\mathcal{S}\big)$ est aussi la loi conditionnelle $\mathcal{L}\big(\psi(X,Y)/X\big)$, et cette loi est donnée par*

$$\mathcal{L}\big(\psi(X,Y)/X = \boldsymbol{x}\big) = \mathcal{L}\big(\psi(\boldsymbol{x},Y)\big).$$

Propriété 3. *Pour tout $n < 0$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\mathcal{L}\big(X_{n+1}(i)/X_n\big) = \mathcal{U}_{\mathbb{A}},$$

et

$$\mathcal{L}(X_{n+1}/X_n) = \mathcal{L}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \frac{1}{|\mathbb{A}|}\sum_{a\in\mathbb{A}} \delta_{\boldsymbol{\tau}_a^{-1} X_n} = \frac{1}{|\mathbb{A}|}\sum_{a\in\mathbb{A}} \delta_{\boldsymbol{\tau}^{-1}_{(a,i)} X_n}.$$

Démonstration. Pour tout sous-intervalle fini I de $\mathbb{Z}$, tout $a \in \mathbb{A}$ et mot $w \in \mathbb{A}^I$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(X_n[I] = w, X_{n+1}(i) = a\big) &= \mathbb{P}\big(X_{n+1}(I^+) = \boldsymbol{\tau}^{-1}_{a,i}(w)\big)\\ &= \frac{1}{|\mathbb{A}|^{|I|+1}} \text{ car } \mathcal{L}(X_{n+1}) = \mathcal{U}_{\mathbb{A}}^{\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\mathbb{P}\big(X_{n+1}(i)=a/X_n[I]=w\big)=\frac{\mathbb{P}\big(X_n[I]=w,X_{n+1}(i)=a\big)}{\mathbb{P}\big(X_n[I]=w\big)}=\frac{1}{|\mathbb{A}|}=\mathbb{P}(X_{n+1}(i)=a)$$

Donc $\mathcal{L}\big(X_{n+1}(i)/X_n\big)=\mathcal{U}_{\mathbb{A}}=\mathcal{L}\big(X_{n+1}(i)\big)$. En particulier $X_{n+1}(i)$ est indépendant de X_n.

Le deuxième point s'en déduit comme application du lemme 51 avec $\mathcal{S}:=\mathcal{F}_n=\mathbf{\Sigma}(X_n)$, $X:=X_n$, $Y:=X_{n+1}(i)$, et ψ définie sur $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{A}$ par $\psi(\boldsymbol{x},a):=\boldsymbol{\tau}_{a,i}^{-1}(\boldsymbol{x})$, de sorte que $X_{n+1}=\psi\big(X_n,X_{n+1}(a)\big)$. □

On peut ainsi considérer le processus $(X_n)_{n\leq 0}$ comme une chaîne de Markov stationnaire à temps négatif, de noyau de transition $\mathcal{Q}$ donné grâce à la propriété 3, pour tout $i\in\mathbb{Z}$ par :

$$\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{A}^{\mathbb{Z}},\ \mathcal{Q}(\boldsymbol{y},.)=\frac{1}{|\mathbb{A}|}\sum_{a\in\mathbb{A}}\delta_{\boldsymbol{\tau}_a^{-1}\boldsymbol{y}}=\frac{1}{|\mathbb{A}|}\sum_{a\in\mathbb{A}}\delta_{\boldsymbol{\tau}_{a,i}^{-1}(\boldsymbol{y})}.$$

Standardité de $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$

Lemme 52. *Soit $m\leq n\leq 0$ et $(i_m,i_{m+1},...,i_n)$ une finie d'entiers tels que $\forall m\leq\ell\leq n-1$,*

$$i_{\ell+1}=i_\ell \text{ ou } i_{\ell+1}=i_\ell+1$$

alors

$$\Sigma(X_n[i_m,i_m+n-m])=\Sigma(X_m(i_m),...,X_n(i_n))$$

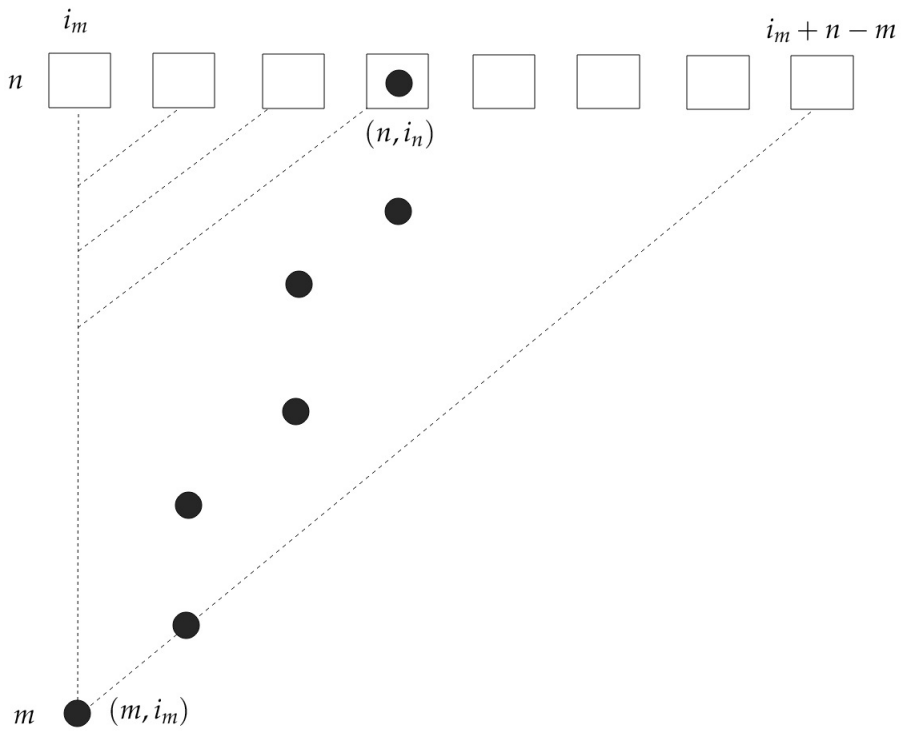


FIGURE 2.3 – La tribu engendrée par les sites symbolisés par des points noirs coïncide avec celle engendrée par les sites symbolisés par des carrés.

Démonstration. Par récurrence sur n à m fixé.

— Si $n = m$, c'est évident.

— Soit $n \geq m + 1$ et supposons la propriété vraie jusqu'à $n - 1$. Alors

$$\Sigma(X_{n-1}[i_m, i_m + n - 1 - m]) = \Sigma(X_m(i_m), ..., X_{n-1}(i_{n-1})),$$

puis

$$X_n[i_m, i_m + n - m] = \tau^{-1}_{X_n(i_n), i_n}(X_{n-1}[i_m, i_m + n - 1 - m]),$$

donc

$$X_n[i_m, i_m + n - m] \text{ est } \Sigma(X_m(i_m), ..., X_{n-1}(i_{n-1}), X_n(i_n))\text{-mesurable .}$$

Inversement, par hypothèse de récurrence les variables aléatoires $X_m(i_m), \ldots, X_{n-1}(i_{n-1})$ sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par $X_{n-1}[i_m, i_m + n - 1 - m]$. Or

$$X_{n-1}[i_m, i_m + n - 1 - m] = \tau(X_n[i_m, i_m + n - m]),$$

ainsi on obtient que $X_m(i_m), \dots, X_{n-1}(i_{n-1})$ sont $\Sigma(X_n[i_m, i_m + n - m])$-mesurables. Enfin, les conditions sur la suite (i_ℓ) imposent que $i_n \in \{i_m, i_{m+1}, ..., i_m + n - m\}$, la variable aléatoire $X_n(i_n)$ est donc aussi mesurable dans $\Sigma(X_n[i_m, i_m + n - m])$.

□

Théorème 53. *La filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ est de type produit et donc standard.*

Démonstration. Considérons un chemin infini $\big((0, i_0), (-1, i_{-1}), \dots, (m, i_m), \dots\big)$ tel que

$$i_{\ell+1} = i_\ell \text{ ou } i_{\ell+1} = i_\ell + 1, i_m \underset{m\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ et } i_{-m} \underset{m\to-\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Un tel chemin existe : on peut prendre par exemple $i_m = -\lfloor |m|/2 \rfloor$ pour tout $m \leq 0$. Le lemme 52 montre que pour tout $m \leq n \leq 0$, $X_n[i_m, i_m + n - m]$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les variables $X_\ell(i_\ell)$, $\ell \leq n$. On en déduit que X_n est mesurable par rapport à la tribu $\mathbf{\Sigma}(X_m(i_m) : m \leq n)$. Ainsi la filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ est engendrée par le processus $\big(X_n(i_n)\big)_{n\leq 0}$. Or, il découle de la propriété 3 que

$$\mathcal{L}\big(X_n(i_n)/X_m(i_m), m < n\big) = \mathcal{L}\big(X_n(i_n)/X_{m-1}\big) = \mathcal{U}_{\mathbb{A}}.$$

Ainsi le processus $\big(X_n(i_n)\big)_{n\leq 0}$ est formé de variables aléatoires indépendantes (et uniformément distribuées sur $\mathbb{A}$), et la filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ qu'il engendre est donc de type produit. □

Vérification du I-confort pour $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$

Les arguments utilisés pour la preuve de la standardité de $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ peuvent également être utilisés directement pour vérifier que cette filtration possède la propriété du I-confort, ce que l'on va faire maintenant pour donner un exemple concret de couplage en temps réel.

Pour cela, on commence par se donner une variable cible Y, $\mathcal{F}_0$-mesurable. Grâce aux lemmes 37, 38, 39 et à la proposition 40, on peut se limiter aux variables cibles de la forme $X_0[-k, k]$ pour un certain entier $k \geq 0$. On pose $n_0 := -2k - 1$, et on construit un CTR n_0-indépendant de $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ comme suit.

— On commence par prendre deux copies indépendantes X'_{n_0} et X''_{n_0} de X_{n_0}, et on pose pour tout $h \geq 0$:

$$X'_{n_0-h} := \tau^h(X'_{n_0}), \quad et \quad X''_{n_0-h} := \tau^h(X''_{n_0}).$$

— On prend $2k + 1$ variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{U}_{\mathbb{A}}$, notées $U_0, U_{-1}, \dots, U_{-2k}$, indépendantes de $\mathbf{\Sigma}\big(X'_{n_0}, X''_{n_0}\big)$.

— On considère le chemin $\big((0, i_0), (-1, i_{-1}), \dots, (-2k, i_{-2k})\big)$ où pour chaque entier m de $-2k$ à 0, on pose $i_m := -\lfloor |m|/2 \rfloor$.

— On définit récursivement, pour m allant de $-2k = n_0 + 1$ à 0 :

$$X'_m := \tau^{-1}_{U_m, i_m}(X'_{m-1}), \quad \text{et} \quad X''_m := \tau^{-1}_{U_m, i_m}(X''_{m-1}).$$

Notons $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_n)_{n\leq 0}$ et $\mathcal{F}'' = (\mathcal{F}''_n)_{n\leq 0}$ les filtrations engendrées par les processus $(X'_n)_{n\leq 0}$ et $(X''_n)_{n\leq 0}$ respectivement. Observons que dans cette construction, par application du lemme 51, on a pour tout $n_0 + 1 \leq m \leq 0$

$$\mathcal{L}(X'_m / \mathcal{F}'_{m-1} \vee \mathcal{F}''_{m-1}) = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \sum_{a\in\mathbb{A}} \delta_{\tau^{-1}_{a,i_m}(X'_{n-1})}$$

et

$$\mathcal{L}(X''_m / \mathcal{F}'_{m-1} \vee \mathcal{F}''_{m-1}) = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \sum_{a\in\mathbb{A}} \delta_{\tau^{-1}_{a,i_m}(X''_{n-1})}.$$

On a ainsi réalisé un CTR de la filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ qui est par construction n_0-indépendant. De plus, puisque les mêmes U_m sont utilisés pour obtenir $(X'_m)_{n_0+1\leq m\leq 0}$ et $(X''_m)_{n_0+1\leq m\leq 0}$, on a pour $-2k \leq m \leq 0$,

$$X'_m(i_m) = X''_m(i_m) = U_m,$$

et le lemme 52 assure alors que

$$X'_0[-k, k] = X''_0[-k, k].$$

Les copies respectives Y' et Y'' de Y dans les filtrations $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'$ vérifient donc $Y' = Y''$. La filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ est donc I-confortable.

2.2 Perturbation aléatoire τ_ε de l'automate additif

2.2.1 Construction de l'ACP τ_ε et chaîne de Markov associée

On construit un automate cellulaire probabiliste (ACP) qui peut être interprété comme une perturbation aléatoire de l'automate déterministe τ étudié précédemment. Cette perturbation fait intervenir un paramètre $\varepsilon > 0$ qui est la probabilité de faire une erreur dans le calcul de l'addition. On note τ_ε cet ACP. Comme τ, il agit sur les suites dans $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, et son voisinage est $\mathcal{N} = \{0, 1\}$. Il est caractérisé par sa fonction locale :

$$\begin{aligned} f_{\tau_\varepsilon} : \mathbb{A}^{\mathcal{N}} &\to \mathcal{M}(\mathbb{A}) \\ (a, b) &\mapsto (1-\varepsilon)\delta_{a+b} + \varepsilon \mathcal{U}_{\mathbb{A}\setminus\{a+b\}} \end{aligned}$$

où $\mathcal{U}_{\mathbb{A}\setminus\{a+b\}}$ est la loi uniforme sur $\mathbb{A} \setminus \{a + b\}$.

Dans la suite, on supposera toujours que $0 < \varepsilon < \frac{|\mathbb{A}|-1}{|\mathbb{A}|}$, ce qui nous permet d'écrire $f_{\tau_\varepsilon}(a, b)$ comme une combinaison convexe de la forme

$$f_{\tau_\varepsilon}(a, b) = (1 - \tilde{\varepsilon})\delta_{a+b} + \tilde{\varepsilon}\mathcal{U}_{\mathbb{A}}, \tag{2.1}$$

où

$$\tilde{\varepsilon} := \varepsilon \frac{|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1} < 1.$$

L'ACP τ_ε peut donc être vu comme un noyau de transition sur $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ qui à une suite x fait correspondre la loi de $\tau(x) + \xi$, où ξ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ qui représente l'erreur, de loi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi) &= \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \left((1-\varepsilon)\delta_{0_{\mathbb{A}}} + \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1} \sum_{a\in\mathbb{A}\setminus\{0_{\mathbb{A}}\}} \delta_a \right) \\ &= \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \left((1-\tilde{\varepsilon})\delta_{0_{\mathbb{A}}} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{|\mathbb{A}|} \sum_{a\in\mathbb{A}} \delta_a \right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Propriété 4. *La mesure uniforme $\mu = \left(\mathcal{U}_{\mathbb{A}}\right)^{\otimes\mathbb{Z}}$ est invariante par τ_ε, i.e. $\tau_{\varepsilon *}\mu = \mu$.*

Démonstration. On considère une variable aléatoire X de loi μ. Soit ξ une variable aléatoire indépendante de X, de loi donnée par (2.2) Posons $Y := \tau(X) + \xi$: Y est une variable aléatoire de loi $\tau_{\varepsilon *}\mu$. Soit ℓ un entier positif et soit $v \in \mathbb{A}^{2\ell+1}$. En conditionnant par rapport à ξ et en utilisant l'indépendance de X et ξ, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(Y[-\ell,\ell] = v\big) &= \sum_{\eta\in\mathbb{A}^{\{-\ell,\dots,\ell+1\}}} \sum_{u/\tau(u)+\eta=v} \mathbb{P}\big(X[-\ell,\ell+1] = u, \xi[-\ell,\ell] = \eta\big) \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{A}^{\{-\ell,\dots,\ell+1\}}} \mathbb{P}\big(\xi[-\ell,\ell] = \eta\big) \sum_{u/\tau(u)+\eta=v} \overbrace{\mathbb{P}\big(\tau(u)+\eta = v\big)}^{=|\mathbb{A}|^{-2\ell-2}} \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{A}^{\{-\ell,\dots,\ell+1\}}} \mathbb{P}\big(\xi[-\ell,\ell] = \eta\big) \left|\{u/\tau(u) = v-\eta\}\right| |\mathbb{A}|^{-2\ell-2} \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{A}^{\{-\ell,\dots,\ell+1\}}} \mathbb{P}\big(\xi[-\ell,\ell] = \eta\big)|\mathbb{A}|^{-2\ell-1} \quad \text{d'après la remarque 47} \\ &= |\mathbb{A}|^{-2\ell-1} = \mathbb{P}(X[-\ell,\ell] = v). \end{aligned}$$

□

Remarque 54. *Dans la preuve de la précédente propriété on peut remarquer que la loi de l'erreur n'a aucune importance pour ce résultat.*

On dispose d'une loi invariante μ, ce qui nous permet grâce à l'argument développé page 21 de considérer un processus de Markov stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de noyau de transition τ_ε, où chaque X_n est de loi μ.

On note $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ la filtration engendrée par la partie en temps négatif de ce processus.

2.2.2 Standardité de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$

On veut dans cette section étudier la standardité de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$, en voyant si l'on peut établir pour cette filtration la propriété de I-confort. On expose tout d'abord la stratégie générale pour construire un CTR de $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$. En pratique, on construit en fait deux copies du processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

On fixe un entier $k \geq 0$, et on considère la variable cible $Y := X_0[-k,k]$.

Étant donné $n_0 \leq 0$, on crée deux copies indépendantes $(X'_n)_{n\leq n_0}$ et $(X''_n)_{n\leq n_0}$ de $(X_n)_{n\leq n_0}$. On va ensuite construire les suites des deux processus en les paramétrant par des innovations $(U_n)_{n\geq n_0+1} = \big(U_n(i), i\in\mathbb{Z}\big)_{n\geq n_0+1}$ où les $U_n(i)$ sont des variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ et $(U_n)_{n\geq n_0+1}$ est indépendant de $\mathcal{F}'_{n_0}\vee\mathcal{F}''_{n_0}$. Ces innovations sont utilisées pour construire les erreurs $(\xi'_n)_{n\geq n_0+1} = \big(\xi'_n(i), i\in\mathbb{Z}\big)_{n\geq n_0+1}$ et $(\xi''_n)_{n\geq n_0+1} = \big(\xi''_n(i), i\in\mathbb{Z}\big)_{n\geq n_0+1}$. Pour cela, on choisit pour chaque $n \geq n_0+1$ et chaque $i\in\mathbb{Z}$ des applications aléatoires $g'_{n,i}$ et $g''_{n,i}$ mesurables pour $\mathcal{F}'_{n-1}\vee\mathcal{F}''_{n-1}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{A}$, de même loi et telles que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(g'_{n,i}(U_n(i))/\mathcal{F}'_{n-1}\vee\mathcal{F}''_{n-1}\big) &= (1-\varepsilon)\delta_{0_\mathbb{A}} + \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1}\sum_{a\in\mathbb{A}\setminus\{0_\mathbb{A}\}}\delta_a\\ &= (1-\tilde{\varepsilon})\delta_{0_\mathbb{A}} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{|\mathbb{A}|}\sum_{a\in\mathbb{A}}\delta_a\\ &= \mathcal{L}\big(g''_{n,i}(U_n(i))/\mathcal{F}'_{n-1}\vee\mathcal{F}''_{n-1}\big).\end{aligned}$$

On définit alors les erreurs par

$$\xi'_n(i) := g'_{n,i}(U_n(i)) \quad \text{et} \quad \xi''_n(i) := g''_{n,i}(U_n(i)).$$

Le choix des applications $g'_{n,i}$ et $g''_{n,i}$ peut non seulement varier pour chaque (n,i), mais peut également dépendre des réalisations des processus jusqu'au temps $n-1$.

Les parties finales des deux processus sont ensuite construites en posant récursivement pour $n \geq n_0+1$:

$$X'_n := \tau(X'_{n-1}) + \xi'_n \quad \text{et} \quad X''_n := \tau(X''_{n-1}) + \xi''_n.$$

Pour chaque $n\leq 0$, on introduit la variable aléatoire $Z_n := X'_n - X''_n$. Il résulte de la construction ci-dessus et du fait que τ est un morphisme du groupe $\mathbb{A}^\mathbb{Z}$ que l'on a pour tout $n<0$

$$Z_n = \tau(Z_{n-1}) + \xi'_n - \xi''_n. \tag{2.3}$$

On note également que pour n'importe quel choix des applications $g'_{n,i}$ et $g''_{n,i}$, on a tou-

jours

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}\big(Z_n(i) \neq \boldsymbol{\tau} Z_{n-1}(i)\big) &= \mathbb{P}\big(\xi'_n(i) \neq \xi''_n(i)\big) \\ &\leq \mathbb{P}\big(\xi'_n(i) \neq 0 \text{ ou } \xi''_n(i) \neq 0\big) \\ &\leq \mathbb{P}\big(\xi'_n(i) \neq 0\big) + \mathbb{P}\big(\xi''_n(i) \neq 0\big) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour démontrer la propriété de I-confort, on souhaite établir que pour un choix approprié des applications $G'_{n,i}$ et $G''_{n,i}$, la probabilité que $Z_0[-k,k] \neq (0_{\mathbb{A}}, \ldots, 0_{\mathbb{A}})$ se rapproche de 0 quand $|n_0|$ est grand. (On rappelle que la variable cible est $Y = X_0[-k,k]$.)

Une fausse bonne idée pour le I-confort

On présente tout d'abord une idée naturelle pour obtenir la propriété souhaitée. Pour fixer les idées et simplifier les notations, on suppose ici que $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme $|\mathbb{A}| = 2$, l'hypothèse $\varepsilon < \frac{|\mathbb{A}-1|}{\mathbb{A}}$ devient $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

L'idée étant de favoriser l'apparition de zéros dans le processus Z_n, en se basant sur (2.3) et (2.4), on propose de maximiser la probabilité que $Z_{n+1}(i) = \boldsymbol{\tau}(Z_n)(i)$ si on a déjà $\boldsymbol{\tau}(Z_n)(i) = 0$, et au contraire de minimiser cette probabilité si $\boldsymbol{\tau}(Z_n)(i) = 1$. Pour cela, ayant déjà construit les deux processus jusqu'au temps $n \geq n_0$), on va construire pour tout $i \in \mathbb{Z}$ les applications $g'_{n+1,i}$ et $g''_{n+1,i}$ de la façon suivante (voir la figure 2.4) :

— si $\boldsymbol{\tau}(Z_n)(i) = 0$, on fait en sorte que les deux intervalles où $g'_{n+1,i}$ et $g''_{n+1,i}$ prennent la valeur 0 soient identiques. De cette façon on a automatiquement $\xi'_n(i) = \xi''_n(i)$ avec probabilité 1, et donc aussi $Z_{n+1}(i) = \boldsymbol{\tau}(Z_n)(i) = 0$.

— si $\boldsymbol{\tau}(Z_n)(i) \neq 0$, on fait en sorte que les deux intervalles où $G'_{n+1,i}$ et $G''_{n+1,i}$ prennent la valeur 0 soient disjoints. De cette façon on a

$$\mathbb{P}\big(Z_{n+1}(i) \neq \boldsymbol{\tau}(Z_n)(i)\big) = 2\varepsilon,$$

ce qui d'après (2.4) est bien la plus grande valeur possible. En procédant ainsi on obtient un CTR de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$, et on aimerait vérifier que, en prenant $|n_0|$ assez grand, $\mathbb{P}\big(Z_0[-k,k] = 0\big)$ peut être rendu arbitrairement proche de 1.

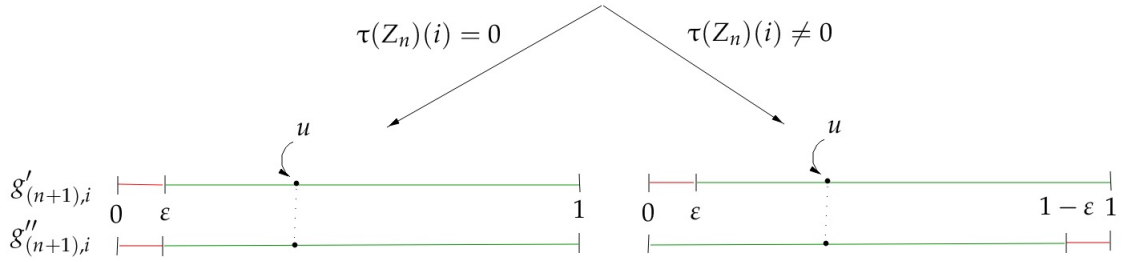


FIGURE 2.4 – Construction des applications $g'_{n+1,i}$ et $g''_{n+1,i}$ suivant les observations faites jusqu'à l'instant n.

Regardons l'évolution du processus (Z_n) dans ce couplage. Au temps n_0, on a X'_{n_0} indépendant de X''_{n_0} donc Z_{n_0} est constitué de variables aléatoires i.i.d. $Z_{n_0}(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, qui sont uniformément distribuées sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Puis, à partir de n_0, l'évolution du processus Z_n est donnée par un nouvel ACP qui peut être décrit comme suit :

— si $\tau(Z_n)(i) = 0$, alors $Z_{n+1}(i) := 0$ (on n'efface pas les zéros produits par l'action de l'automate déterministe τ)

— si $\tau(Z_n)(i) = 1$, alors $Z_{n+1}(i)$ garde la valeur 1 avec probabilité $1 - 2\varepsilon$, mais prend la valeur 0 avec probabilité 2ε (les 1 produits par l'action de l'automate déterministe τ sont effacés avec probabilité 2ε).

On pourrait naïvement penser que, puique les 0 sont systématiquement gardés tandis que les 1 sont effacés avec probabilité 2ε, la dynamique suivie par le processus (Z_n) finit sur le long terme par éliminer tous les 1. En effet ce couplage est un algorithme glouton qui à chaque étape minimise la proportion de 1 dans Z_{n+1} compte-tenu de l'observation de Z_n. Cependant, si à une étape, cette proportion p de 1 très proche de 0, et si les 1 n'apparaissent pas systématiquement en longs clusters, alors la proportion de 11 parmi les couples de deux lettres consécutives est $o(p)$ quand $p \to 0$, celle de 01 et celle de 10 sont donc $p - o(p)$. À l'étape suivante, la proportion de 1 sera donc $2(p - o(p))(1 - 2\varepsilon)$, et sera donc supérieure à p pour $\varepsilon < 1/4$. L'extinction des 1 par cet algorithme glouton n'est donc pas si évidente.

Il se trouve que ce type d'évolution a été étudié par Bramson et Neuhauser [14], qui ont montré que si ε est suffisamment petit, les 1 survivent dans cette évolution. Plus précisément, on peut formuler la conséquence suivante de leur résultat :

Théorème 55 (Bramson-Neuhauser)**.** *Dans le CTR construit ci-dessus, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$\liminf_{|n_0| \to \infty} \mathbb{P}\big(Z_0(0) = 1\big) \geq \rho.$$

Ceci contredit le but que l'on s'était fixé pour obtenir le I-confort, et donc la stratégie envisagée ici pour construire le CTR ne permet pas d'obtenir ce que l'on souhaitait.

On présente donc dans la section suivante une méthode différente pour construire le CTR.

Le bon couplage

On se replace dans le cadre général où $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe abélien fini quelconque. Rappelons que l'on veut construire un CTR de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ dans lequel, avec les notations introduites précédemment, $Z_0[-k,k] = (0_\mathbb{A}, \dots, 0_\mathbb{A})$ avec probabilité proche de 1 si $|n_0|$ est grand. Pour cela on doit décrire la stratégie pour choisir les fonctions $g'_{n,i}$ et $g''_{n,i}$ pour $n \geq n_0 + 1$ et $i \in \mathbb{Z}$. L'idée principale va être de faire grandir la borne

$$\inf\{i \geq -k : \tau^{|n|}(Z_n)(i) \neq 0_\mathbb{A}\}$$

quand l'entier $n \leq 0$ se rapproche de $-\infty$.

Un site (n,i) étant fixé, on définit pour tout $a \in \mathbb{A}$ la stratégie S_a pour le choix de telles fonctions en suivant la méthode suivante.

— On découpe l'intervalle $[0,1]$ en $|\mathbb{A}|+1$ sous-intervalles, les $|\mathbb{A}|$ premiers étant de longueur $\frac{\tilde{\varepsilon}}{|\mathbb{A}|}$, et le dernier de longueur $1-\tilde{\varepsilon}$.

— Les $|\mathbb{A}|$ premiers morceaux sont appelés J_b, $b \in \mathbb{A}$, ils correspondent à la partie « mesure uniforme sur $\mathbb{A}$ » dans la deuxième façon d'écrire la fonction locate f_{τ_ε} (*cf* (2.1)). On pose pour $u \in J_b$:

$$g'_{n,i}(u) := b \quad \text{et } g''_{n,i}(u) := b + a.$$

— Sur le dernier morceau, on pose $g'_{n,i}(u) := g''_{n,i}(u) := 0_\mathbb{A}$.

Ainsi, lorsque l'on applique cette stratégie, on obtient

$$\xi''_n(i) - \xi'_n(i) = \begin{cases} a & \text{si } U_n(i) \text{ tombe dans } [0,\tilde{\varepsilon}), \\ 0_\mathbb{A} & \text{si } U_n(i) \text{ tombe dans le dernier morceau } [\tilde{\varepsilon},1]. \end{cases}$$

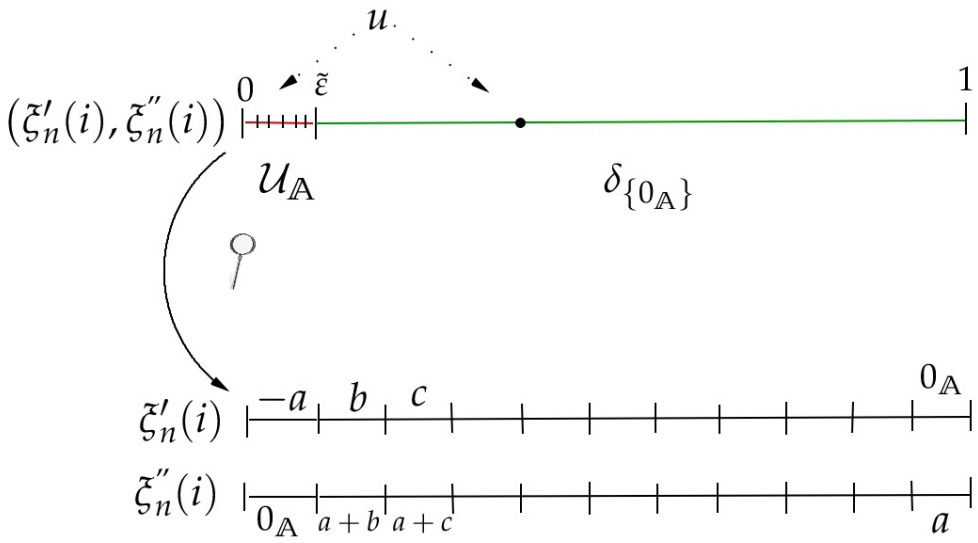


FIGURE 2.5 – Choix de $g'_{n,i}$ et $g''_{n,i}$ quand on applique la stratégie S_a

Le cas particulier où $a = 0_{\mathbb{A}}$ permet en particulier d'assurer que $\xi''_n(i) - \xi'_n(i) = 0_{\mathbb{A}}$, et donc la stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$ ramène localement, pour le processus Z, au cas de l'automate déterministe τ.

L'ensemble des sites (n, i) pour lesquels ont doit définir $g'_{n,i}$ et $g''_{n,i}$ est partitionné en « diagonales » $\mathcal{D}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, où

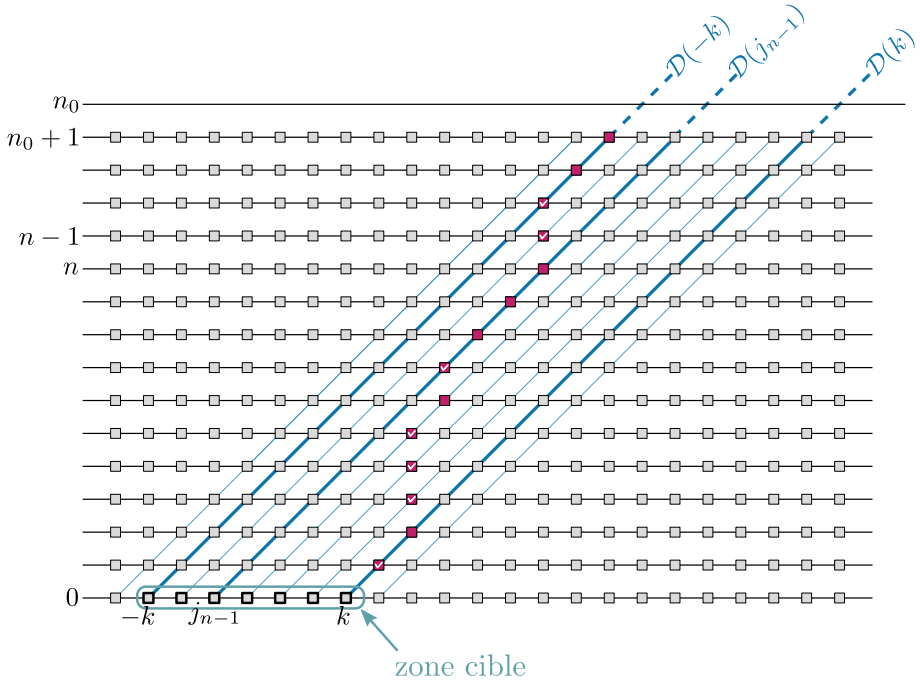
$$\mathcal{D}(j) := \{(n, i)/n \geq n_0 + 1,\ i = j - n\}.$$

(Voir Figure 2.6.) On note que toute erreur ajoutée sur la diagonale $\mathcal{D}(j)$ est sans influence sur $Z_0(i)$ pour tous les $i < j$.

Sur toutes les diagonales $\mathcal{D}(j)$, $j < -k$ ou $j > k$, on applique systématiquement la stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$, et donc Z évolue suivant l'automate déterministe τ dans ces zones. Il reste à expliquer le choix de la stratégie pour les sites sur les diagonales $\mathcal{D}(j)$, $-k \leq j \leq k$.

Considérons un entier n, $n_0 < n \leq 0$, et supposons connu le processus Z jusqu'au temps $n-1$. On calcule $\tau^{|n-1|}(Z_{n-1})$, qui correspondrait à ce que l'on obtiendrait pour Z_0 en choisissant la stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$ pour tous les sites à venir.

— Si $\tau^{|n-1|}(Z_{n-1})[-k, k] = (0_{\mathbb{A}}, \ldots, 0_{\mathbb{A}})$, on a déjà obtenu ce que l'on veut et on choisit donc la stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$ pour tous les sites. On définit dans ce cas $j_{n-1} := k + 1$.



- Stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$
- Stratégie S_a, $a \neq 0_{\mathbb{A}}$, sans succès : $U_n(i) \in [\tilde{\epsilon}, 1]$
- Stratégie S_a, $a \neq 0_{\mathbb{A}}$, avec succès : $U_n(i) \in [0, \tilde{\epsilon})$

FIGURE 2.6 – Le choix des stratégies pour construire le CTR

— Sinon, on définit j_{n-1} comme le plus petit entier $j \in \{-k, \dots, k\}$ tel que

$$\tau^{|n-1|}(Z_{n-1})(j) \neq 0_{\mathbb{A}},$$

et on note $a_{n-1} := \tau^{|n-1|}(Z_{n-1})(j_{n-1})$. Pour $j < j_{n-1}$ et $(n,i) \in \mathcal{D}_j$, on applique la stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$. Pour $(n,i) \in \mathcal{D}_{j_{n-1}}$ on applique la stratégie $S_{-a_{n-1}}$. Enfin pour $j > j_{n-1}$ et $(n,i) \in \mathcal{D}_j$, on reprend la stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$.

Avec cette méthode, le seul i pour lequel $Z_{n,i}$ n'est pas déterminé est celui tel que $(n,i) \in \mathcal{D}_{j_{n-1}}$, (c'est-à-dire pour $i = j_{n-1} + |n|$), et tout dépend de l'innovation $U_n(j_{n-1} + |n|)$:

— Si $U_n(j_{n-1} + |n|)$ tombe dans $[0, \tilde{\varepsilon})$, la différence $\xi'_n(i) - \xi''_n(i)$ prend la valeur $-a_{n-1}$. Elle compense donc exactement l'action déterministe de τ au niveau du site cible $(0,j)$, ce qui assure qu'à l'étape suivante on aura $\tau^{|n|}(Z_n)(j_{n-1}) = 0_{\mathbb{A}}$, et donc $j_n > j_{n-1}$.

— Dans le cas contraire, on aura $\xi'_n(i) - \xi''_n(i) = 0$, donc toujours $\tau^{|n|}(Z_n)(j_{n-1}) = a(n)$ et $j_n = j_{n-1}$.

Ainsi, à l'étape n, $j_n = j_{n-1}$ avec probabilité $1 - \tilde{\varepsilon}$ et $j_n \geq j_{n+1}$ avec probabilité $\tilde{\varepsilon}$, donc la probabilité de succès est $\tilde{\varepsilon}$ et elle ne dépend pas des essais précédents.

On construit le couplage en temps réel en appliquant la méthode ci-dessus successivement pour n allant de $n_0 + 1$ à 0. La construction du couplage pour les temps $n \geq 0$ est sans importance, on peut par exemple se contenter d'appliquer systématiquement la stratégie $S_{0_{\mathbb{A}}}$. Il reste à voir pourquoi dans ces conditions on obtient la propriété voulue pour le I-confort.

On définit par récurrence des temps aléatoires $T(-k), \dots, T(k)$. On commence par $T(-k)$, qui ne dépend que des innovations $U_n(i)$, $(n,i) \in \mathcal{D}(-k)$:

$$T(-k) := \min\big\{n \geq n_0 + 1 \,/\, U_n(-k-n) \in [0, \tilde{\varepsilon})\big\}.$$

(Avec la convention que $\min \emptyset = +\infty$.) La variable aléatoire $T(-k) - n_0$ suit alors une loi géométrique de paramètre $\tilde{\varepsilon}$.

On note que la probabilité $\mathbb{P}(T(j) \leq 0)$ est la probabilité qu'une variable géométrique de paramètre $\tilde{\varepsilon}$ prenne une valeur inférieure ou égale à $|n_0|$. De plus, par construction du CTR, pour tout entier $n \leq 0$ on a

$$T(-k) \leq n \Longrightarrow j_n > -k.$$

Puis ayant déjà défini $T(j)$, on pose

$$T(j+1) := \min\big\{n \geq T(j) + 1 \,/\, U_n(j+1-n) \in [0, \tilde{\varepsilon})\big\}.$$

Notons que $T(j+1)$ ne dépend que de $T(j)$ et des innovations $U_n(i)$, $(n,i) \in \mathcal{D}(j+1)$.

Pour tout $j \in \{-k, \dots, k\}$, $T(j+1) - T(j)$ suit une loi géométrique de paramètre $\tilde{\varepsilon}$ et est indépendante des variables $T(-k), ..., T(j)$. En conséquence, puisque $\tilde{\varepsilon}$ et k sont fixés, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(T(k) \leq 0\big) \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad n_0 \to -\infty. \tag{2.5}$$

Par ailleurs, on vérifie également par récurrence en utilisant la construction du CTR que pour tout $j \in \{-k, \dots, k\}$ et tout $n \leq 0$,

$$T(j) \leq n \Longrightarrow j_n > j.$$

En particulier,

$$T(k) \leq 0 \Longrightarrow j_0 > k \Longrightarrow Z_0[-k,k] = (0_{\mathbb{A}}, \dots, 0_{\mathbb{A}}). \tag{2.6}$$

Grâce à (2.5) et (2.6), on conclut que si $|n_0|$ est assez grand on peut construire un CTR n_0-indépendant dans lequel $X'_0[-k,k] = X''_0[-k,k]$ avec une probabilité arbitrairement proche de 1.

On en conclut que pour tout $k \geq 0$, la variable cible $X_0[-k,k]$ vérifie la propriété du I-confort, ce qui grâce aux lemmes 37, 38, 39 et à la proposition 40 permet d'établir le I-confort de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$.

En appliquant le théorème 44, on obtient finalement :

Théorème 56. *La filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ est standard.*

2.3 Lien entre le I-confort et l'ergodicité du noyau markovien

Quand on analyse la preuve de la propriété de I-confort pour la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$, on voit que la probabilité que les deux copies de la variable cible coïncident dans le CTR converge vers 1 quand $|n_0| \to \infty$, uniformément par rapport à l'état des processus au temps n_0. On obtient en fait une propriété plus forte que le I-confort, que nous appelons le **I-confort uniforme**, et qui entraîne non seulement le I-confort mais aussi l'ergodicité au sens de Markov du noyau de transition.

Définition 57 (I-confort uniforme)**.** *Soit $\mathcal{Q}$ un noyau de transition sur un espace métrique compact $(\mathcal{X}, d)$. On dit que $\mathcal{Q}$ est **uniformément confortable** si, pour tout $\delta > 0$, si $n_0 \leq 0$ est un entier tel que $|n_0|$ est assez grand (dépendant de δ), pour tous $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \mathcal{X}$ il existe une mesure de probabilité $m_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''}$ sur $\big(\mathcal{X}^{\{n_0,\dots,0\}}\big)^2$ dépendant de façon mesurable de $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')$ telle que, en désignant par $(X'_n)_{n_0 \leq n \leq 0}$ et $(X''_n)_{n_0 \leq n \leq 0}$ les processus canoniques définis par les coordonnées sur $\big(\mathcal{X}^{\{n_0,\dots,0\}}\big)^2$, on ait :*

— *$X'_{n_0} = \boldsymbol{x}'$ et $X''_{n_0} = \boldsymbol{x}''$, $m_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''}$-presque sûrement,*

— *sous $m_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''}$, pour tout $n_0 \leq n < 0$, la loi conditionnelle*

$$\mathcal{L}\big((X'_{n+1}, X''_{n+1}) / \boldsymbol{\Sigma}(X'_{n_0}, \dots, X'_n, X''_{n_0}, \dots, X''_n)\big)$$

est un couplage des deux lois $\mathcal{Q}(X'_n, \cdot)$ et $\mathcal{Q}(X''_n, \cdot)$ (on réalise donc à partir du temps n_0 un couplage en temps réel de deux processus de Markov de transition $\mathcal{Q}$, l'un issu de $\boldsymbol{x}'$ et l'autre de $\boldsymbol{x}''$).

— $m_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''}\big(d(X'_0, X''_0) > \delta\big) < \delta$.

Par exemple, la preuve précédente montre que le noyau de transition associé à l'automate τ_ε est uniformément confortable.

Théorème 58. *Soit $\mathcal{Q}$ un noyau de transition uniformément confortable sur un espace métrique compact $(\mathcal{X}, d)$. Alors $\mathcal{Q}$ est ergodique au sens de Markov.*

Démonstration. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{X}$ invariante par $\mathcal{Q}$, et soit ν une mesure de probabilité quelconque sur $\mathcal{X}$. On veut montrer que $\mathcal{Q}^{*k}\nu \longrightarrow \mu$ quand $k \to \infty$, et pour cela il suffit de voir que pour toute fonction continue $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f \, d\mathcal{Q}^{*k}\nu - \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu \right| < \varepsilon$$

si k est assez grand. Étant donnés f et ε, on utilise la continuité uniforme de f sur le compact $\mathcal{X}$ pour trouver $\delta > 0$ vérifiant :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{X},\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon/2.$$

On peut de plus supposer que δ est assez petit pour que $\delta \|f\|_\infty < \varepsilon/4$.

On considère alors n_0 et la famille de mesures $(m_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''})_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'' \in \mathcal{X}}$ associés à ce δ donnés par la définition du I-confort uniforme. On définit alors la mesure de probabilité $m_{\mu,\nu}$ sur $\left(\mathcal{X}^{\{n_0,\dots,0\}}\right)^2$ par

$$m_{\mu,\nu} := \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} m_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''} \, d\mu(\boldsymbol{x}') \, d\nu(\boldsymbol{x}'').$$

Sous $m_{\mu,\nu}$, $(X'_n)_{n_0 \leq n \leq 0}$ et $(X''_n)_{n_0 \leq n \leq 0}$ sont deux chaînes de Markov de noyau $\mathcal{Q}$, de lois initiales respectives $\mathcal{L}(X'_{n_0}) = \mu$ et $\mathcal{L}(X''_{n_0}) = \nu$. On a alors

$$\mathcal{L}(X'_0) = \mathcal{Q}^{*|n_0|}\mu = \mu$$

car μ est invariante, et

$$\mathcal{L}(X''_0) = \mathcal{Q}^{*|n_0|}\nu.$$

Grâce au confort uniforme, il vient

$$m_{\mu,\nu}\big(d(X'_0, X''_0) > \delta\big) = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} \underbrace{m_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''}\big(d(X'_0, X''_0) > \delta\big)}_{<\delta} \, d\mu(x') \, d\nu(x'') < \delta.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{X}} f\, d\mathcal{Q}^{*|n_0|}\nu - \int_{\mathcal{X}} f\, d\mu\right| &\leq \mathbb{E}_{m_{\mu,\nu}}\left[\left|f(X_0'') - f(X_0')\right|\right] \\ &\leq \int_{d(X_0',X_0'')>\delta} \left|f(X_0'') - f(X_0')\right| dm_{\mu,\nu} + \varepsilon/2 \\ &\leq 2\delta\|f\|_\infty + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Corollaire 59. *Le noyau de transition associé à l'automate τ_ε est ergodique au sens de Markov.*

Chapitre 3

Vers une classification dynamique des filtrations

Dans les exemples de filtrations engendrées par des automates cellulaires et étudiées au chapitre précédent, toutes les sous-tribus en jeu sont invariantes par le décalage horizontal des coordonnées, qui préserve également la mesure de probabilité sous-jacente. Ces sous-tribus sont donc des **facteurs** du système dynamique mesuré défini par ce décalage (voir définition 61), et on envisage dans ce nouveau chapitre d'étudier la classification de telles filtrations en tenant compte de cette dynamique. Cela signifie que les objets qui nous intéressent maintenant ne sont plus des simples filtrations, mais des couples $(\mathcal{F}, T)$ où $\mathcal{F}$ est une filtration et T une transformation préservant la mesure et laissant invariante chaque tribu constituant la filtration.

La notion d'isomorphisme entre de tels objets, que nous appelons des **filtrations facteurs**, est donc plus contraignante. On en propose une formalisation concrète dans la définition 63. Il s'ensuit que la classification de ces filtrations facteurs peut aboutir à des résultats différents de la classification classique. En effet, si la notion de filtration standard se transcrit naturellement dans le cadre dynamique (définition 67), l'exemple de $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ montre qu'il existe des filtrations standard (et même de type produit) au sens classique, mais non dynamiquement standard (théorème 74). On utilise pour cela la version dynamique du critère du I-confort (définition 69), et on montre que comme dans le cadre classique, le I-confort dynamique est nécessaire pour la standardité dynamique (théorème 73). La question de savoir s'il est également suffisant reste ouverte, mais on montre qu'une version forte du I-confort dynamique (appelée **I-confort dynamique simple**, définition 92) entraîne la standardité dynamique (théorème 93). On aborde également dans la section 3.2 la question de la classification dynamique de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$. À l'aide de la notion d'automate enveloppe introduite par I. Marcovici, un argument de couplage avec un modèle de percolation permet de montrer la standardité dynamique de $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ pour ε assez loin de zéro (théorème 90). La question de la standardité dynamique de $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ pour ε petit reste elle

aussi ouverte, mais on peut conjecturer que la situation n'est pas la même que dans le cas classique (voir la section 3.3.2).

3.1 Filtration facteur dans un système dynamiques mesuré

Définition 60. *Un **système dynamique mesuré** est un quadruplet $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ où $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est un espace mesurable Borel standard, $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, et T est une transformation bimesurable T inversible de $\mathcal{X}$ dans lui même, qui préserve la mesure $\mathbb{P}$.*

On dit qu'un système dynamique $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{\mathcal{Y}}, S)$ est un **facteur** du système dynamique $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ lorsqu'il existe une application mesurable $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, appelée **application facteur**, telle que $\pi \circ T = S \circ \pi$ et qui envoie la mesure $\mathbb{P}$ sur la mesure $\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}$: pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}\big(\pi^{-1}(B)\big) = \mathbb{P}_{\mathcal{Y}}(B)$.

Définition 61. *Soit $\mathcal{C}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{C}$ est une **tribu facteur** dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ si pour tout $A \in \mathcal{C}$, $T(A) \in \mathcal{C}$ et $T^{-1}(A) \in \mathcal{C}$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. À toute variable aléatoire ξ et tout automorphisme T, on associe le processus stationnaire $(\xi \circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et la tribu facteur $\Sigma((\xi \circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}})$.*

On note que si $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{\mathcal{Y}}, S)$ est un **facteur** de $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ via l'application facteur π, alors la tribu $\pi^{-1}(\mathcal{B})$ est une tribu facteur.

Définition 62. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ une filtration où pour tout $n \leq 0$, $\mathcal{F}_n$ est une tribu facteur, on dit alors que $(\mathcal{F}, T)$ est une **filtration facteur** dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$.*

Propriété 5. *Soit $\mathcal{F}$ une filtration dans un système dynamique mesuré $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$. Alors $(\mathcal{F}, T)$ est une filtration facteur si et seulement si on peut l'engendrer par un processus stationnaire $(X_n)_{n\leq 0}$ qui est de la forme $(X_n)_{n\geq 0} = \big((X_n(i))_{i\in\mathbb{Z}}\big)_{n\geq 0}$, où pour tous n, i, $X_n(i) = X_n(0) \circ T^i$.*

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est engendrée par un processus de cette forme, chaque tribu $\mathcal{F}_n$ est clairement une tribu facteur du système dynamique mesuré. Réciproquement, si $(\mathcal{F}, T)$ est une filtration facteur, on considère un processus $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ qui engendre $\mathcal{F}$, et on pose pour tout $n \geq 0$ et tout $i \in \mathbb{Z}$: $X_n(i) := Y_n \circ T^i$. Alors $X_n(i)$ est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable, et a fortiori la famille $\big(X_n(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ engendre aussi $\mathcal{F}_n$. □

Exemples de filtrations facteurs

Nous décrivons maintenant les deux exemples de filtrations facteurs associés à des automates cellulaires, qui seront étudiés dans la suite.

Le premier exemple est celui associé à l'automate additif τ. Dans ce cas $\mathcal{X}$ est l'espace des configurations $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}})$, $\mathbb{P}$ est la mesure $\mathcal{U}_{\mathbb{A}}^{\otimes\mathbb{Z}}$, et la transformation est le décalage des coordonnées

$$\sigma \ : \ \boldsymbol{x} = \big(\boldsymbol{x}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto \boldsymbol{y} = \big(\boldsymbol{y}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{où pour tout } i,\ \boldsymbol{y}(i) := \boldsymbol{x}(i+1).$$

En considérant la filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ définie dans la section 2.1.2, il est clair que $\left(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma\right)$ est une filtration facteur du système dynamique mesuré $\left(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}), \mathbb{P}, \sigma\right)$.

Dans le second exemple, on veut considérer la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ engendrée par la version bruitée τ_ε de l'automate additif. On peut ici se placer sur l'espace canonique du diagramme espace-temps de l'automate, qui est $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}}$. Un point x de cet espace est noté $x = \left(x_n(i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)_{n\leq 0}$. La mesure de probabilité considérée sur cet espace est la loi $\mathbb{P}_\varepsilon$ d'une chaîne de Markov stationnaire à temps négatif et de noyau de transition τ_ε. En particulier la loi de chaque ligne est l'unique mesure invariante de cette chaîne, c'est-à-dire $\mathcal{U}_{\mathbb{A}}^{\otimes\mathbb{Z}}$. La transformation est le décalage « horizontal » des coordonnées, c'est-à-dire la transformation (toujours notée σ) définie par

$$\sigma\big(x_n(i)\big) := \big(y_n(i)\big) \quad \text{où pour tous } n, i,\ y_n(i) := x_n(i+1).$$

Sur l'espace probabilisé ainsi défini, on considère la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ engendrée par le processus $(X_n)_{n\leq 0} = \left(X_n(i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)_{n\leq 0}$, où $X_n(i)(x) := x_n(i)$. Là aussi il est clair que $(\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}, \sigma))$ est une filtration facteur du système dynamique mesuré $\left(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}}), \mathbb{P}_\varepsilon, \sigma\right)$.

3.2 Classification dynamique des filtrations facteurs

On propose ici des versions dynamiques des différentes notions liées à la classification des filtrations. On commence par expliciter quand deux filtrations facteurs seront considérées comme étant essentiellement les mêmes : c'est la notion d'isomorphisme dynamique.

Définition 63. *(Isomorphisme dynamique) Soient $(\mathcal{F}, T)$ et $(\mathcal{G}, S)$ deux filtrations facteurs définies sur deux systèmes dynamiques $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\mathcal{Y}, S)$. On dit que $(\mathcal{F}, T)$ et $(\mathcal{G}, S)$ sont **dynamiquement isomorphes** s'il existe deux processus $X_\mathcal{F}$ et $Y_\mathcal{G}$ à valeurs dans le même espace, engendrant respectivement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, tels que*

- $X_\mathcal{F} = \left(X_n(i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)_{n\leq 0}$, $Y_\mathcal{G} = \left(Y_n(i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)_{n\leq 0}$,
- *pour tous n, i, $X_n(i) = X_n(0)\circ T^i$ et $Y_n(i) = Y_n(0)\circ S^i$,*
- $\mathcal{L}(X_\mathcal{F}) = \mathcal{L}(Y_\mathcal{G})$.

On notera dans ce cas $(\mathcal{F}, T) \sim (\mathcal{G}, S)$, ou $(\mathcal{F}, T) \overset{(X_\mathcal{F}, Y_\mathcal{G})}{\sim} (\mathcal{G}, S)$ si l'on veut préciser via quels processus les filtrations facteurs sont dynamiquement isomorphes.

Un exemple typique d'isomorphisme dynamique arrive dans le cas où une filtration facteur $(\mathcal{G}, S)$ existe dans un système $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\mathcal{Y}, S)$, qui est lui-même facteur de $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ via une application facteur $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Alors la filtration facteur $(\mathcal{F}, T)$ où $\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}_n\right)_{n\leq 0} := \left(\pi^{-1}(\mathcal{G}_n)\right)_{n\leq 0}$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ est dynamiquement isomorphe à $(\mathcal{G}, S)$: en effet si on se donne un processus $Y_\mathcal{G} = \left((Y_n(i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)_{n\leq 0}$ qui engendre $\mathcal{G}$, alors on peut engendrer $\mathcal{F}$ avec le processus $X_\mathcal{F} = \left((X_n(i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)_{n\leq 0}$, où $X_n(i) := Y_n(i)\circ\pi$. Puisque la mesure image de $\mathbb{P}$ par π est $\mathbb{P}_\mathcal{Y}$, les deux processus $X_\mathcal{F}$ et $Y_\mathcal{G}$ ont la même loi.

On montre exactement comme dans le cadre classique (théorème 13) que l'isomorphisme dynamique entre des filtrations facteurs est une relation d'équivalence. La notion d'isomorphisme dynamique définie ci-dessus est plus forte que l'isomorphisme des filtrations suivant la définition 11, mais ici on demande en plus que cet isomorphisme soit compatible avec les deux dynamiques des systèmes sous-jacents. Cela transparaît dans la définition suivante de copie dynamique.

Définition 64 (Copie dynamique)**.** *Soit $(\mathcal{F}, T)$ et $(\mathcal{G}, S)$ deux filtrations facteurs isomorphes dynamiquement et engendrées respectivement par deux processus $X_{\mathcal{F}}$ et $X_{\mathcal{G}}$. On suppose que $(\mathcal{F}, T) \overset{(X_{\mathcal{F}}, X_{\mathcal{G}})}{\sim} (\mathcal{G}, S)$. Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable, d'après le lemme 7 il existe ϕ une fonction mesurable telle que $Y = \phi(X_{\mathcal{F}})$. On appellera* ***copie dynamique*** *de Y la variable aléatoire $Y' := \phi(X_{\mathcal{G}})$. C'est une copie classique mais celle ci bénéficie en plus du fait que $Y \circ T$ sera aussi la copie de $Y' \circ S$, i.e. la notion de copie devient elle aussi dynamique en étant invariante par l'action de T et S.*

La notion d'immersion de filtration (définition 20) s'applique sans changement particulier au cas des filtrations facteurs. La notion d'immersibilité dynamique est mot à mot la même que l'immersibilité classique des filtrations, à la différence près que l'isomorphisme des filtrations est remplacé par l'isomorphisme dynamique des filtrations facteurs :

Définition 65. *Soient $(\mathcal{F}, T)$ et $(\mathcal{G}, S)$ deux filtrations facteurs dans des systèmes dynamiques $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{\mathcal{Y}}, S)$. On dit que $(\mathcal{F}, T)$ est* ***dynamiquement immersible*** *dans $(\mathcal{G}, S)$ si il existe une filtration facteur $(\mathcal{F}', S)$ telle que $(\mathcal{F}, T) \sim (\mathcal{F}', S)$ et $\mathcal{F}' \prec \mathcal{G}$.*

On notera dans ce cas $(\mathcal{F}, T) \underset{\sim}{\prec} (\mathcal{G}, S)$.

Définition 66. *Soit $(\mathcal{G}, T)$ une filtration facteur avec $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$. S'il existe $(\mathcal{H}_n)_{n \leq 0}$ une famille de tribus facteurs* indépendantes *telle que pour tout $n \leq 0$, $\mathcal{G}_n = \bigvee_{m \leq n} \mathcal{H}_m$, alors on dit que $\mathcal{G}$ est une* ***filtration facteur de type produit*** *dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$.*

On peut désormais définir la notion de standardité dynamique :

Définition 67. *Soit un système dynamique $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ et une filtration facteur $(\mathcal{F}, T)$. On dit que $(\mathcal{F}, T)$ est* ***dynamiquement standard*** *si il existe un système dynamique $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{\mathcal{Y}}, S)$ et une filtration facteur $(\mathcal{G}, S)$ de type produit telle que*

$$(\mathcal{F}, T) \underset{\sim}{\prec} (\mathcal{G}, S).$$

On cherche maintenant à écrire une version dynamique du critère de standardité énoncé dans la section 1.2.5. Il nous faut pour cela les notions de couplage en temps réel dynamique et de I-confort dynamique, qui sont les transcriptions naturelles des notions correspondantes dans le cas classique.

Définition 68 (Couplage en temps réel dynamique)**.** *Soit $(\mathcal{F}, T)$ une filtration facteur dans un système dynamique $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$. Un* ***couplage en temps réel dynamique*** *de $(\mathcal{F}, T)$ est un couple $\big((\mathcal{F}', \overline{T}), (\mathcal{F}'', \overline{T})\big)$ de filtrations facteurs définies sur un même système dynamique $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}}, \overline{T})$, toutes les deux dynamiquement isomorphes à $(\mathcal{F}, T)$ et telles que :*

— $\mathcal{F}' \prec \mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$,

— $\mathcal{F}'' \prec \mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$.

Même si la définition ci-dessus est une fois encore mot à mot celle donnée dans le cadre classique, en remplaçant simplement l'isomorphisme par l'isomorphisme dynamique, il est important de voir en quoi la version dynamique du CTR est beaucoup plus contraignante. En effet si $X = \big((X_n(i)\big)$ est un processus engendrant la filtration facteur $(\mathcal{F}, T)$, on construit un CTR dynamique de $(\mathcal{F}, T)$ en en réalisant deux copies $X' = \big((X'_n(i)\big)$ et $X'' = \big((X''_n(i)\big)$, mais les conditions $X'_n(i) = X'_n(0) \circ T'^i$ et $X''_n(i) = X''_n(0) \circ T'^i$ imposent que la loi jointe des deux processus X' et X'' soit invariante par décalage des coordonnées.

Par exemple le couplage présenté page 49 pour montrer la standardité de $\mathcal{F}_{\tau_\varepsilon}$ n'est pas à priori un CTR dynamique. En effet, il vise à faire coïncider au niveau 0 les deux copies du processus sur une fenêtre fixée centrée en 0. Si l'on décale vers la gauche les coordonnées des deux processus, la fenêtre où ils coïncident au niveau 0 sera elle-même décalée vers la gauche, ce qui semble indiquer que la loi jointe du couple n'est pas invariante par ce décalage.

On peut maintenant donner la version dynamique de la propriété de I-confort :

Définition 69 (I-confort dynamique)**.** *Soit $(\mathcal{F}, T)$ une filtration facteur dans un système dynamique $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$. On dit que $(\mathcal{F}, T)$ est* ***dynamiquement I-confortable*** *si pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable Y à valeurs dans un espace métrique compact (E, d), pour tout $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 = n_0(\delta, Y) \leq 0$ et un CTR dynamique $\big((\mathcal{F}', T'), (\mathcal{F}'', T')\big)$ défini sur un système dynamique $(\mathcal{X}', \mathcal{A}', \mathbb{P}', T')$ tel que :*

— *$\mathcal{F}'_{n_0}$ et $\mathcal{F}''_{n_0}$ sont indépendantes,*

— *$\mathbb{P}'(d(Y', Y'') < \delta) > 1 - \delta$, où Y' et Y'' sont les copies dynamiques de Y dans $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ respectivement.*

Soulignons à nouveau la différence avec le critère classique du I-confort : si on note $X = \big((X_n(i)_{i\in\mathbb{Z}}\big)_{n\leq 0}$ un processus engendrant $\mathcal{F}$, en considérant comme variable cible $Y := X_0(0)$, la deuxième condition et l'invariance du couplage par la transformation T' impliquent que pour *tout* $i \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}'\big(X'_0(i) = X''_0(i)\big) > 1 - \delta$.

Grâce à la très grande similarité entre le cadre classique et le cadre dynamique, on prouve exactement comme dans la section 1.2.5 que la propriété de I-confort dynamique est préservée par immersion dynamique et par isomorphisme dynamique. On ne répète donc pas les preuves, qui sont mot à mot identiques à celles des lemmes 1.2.5 et 42.

Lemme 70. *Soit $(\mathcal{F}, T)$ et $(\mathcal{G}, T)$ deux filtrations facteurs dans un système dynamique $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$.*

$$(\mathcal{G}, T) \text{ dynamiquement I-confortable et } \mathcal{F} \prec \mathcal{G} \Longrightarrow (\mathcal{F}, T) \text{ dynamiquement I-confortable.}$$

Lemme 71. *Soit $(\mathcal{F}, T)$ et $(\mathcal{G}, T')$ deux filtrations facteurs dans des systèmes dynamiques éventuellement différents.*

$$(\mathcal{G}, T') \text{ dynamiquement I-confortable et } (\mathcal{F}, T) \sim (\mathcal{G}, T') \Longrightarrow (\mathcal{F}, T) \text{ dynamiquement I-confortable.}$$

De même, la démonstration du lemme 43 s'adapte sans difficulté au cadre dynamique et l'on obtient :

Lemme 72. *Soit $(\mathcal{F}, T)$ une filtration facteur.*

$$(\mathcal{F}, T) \text{ de type produit } \Longrightarrow (\mathcal{F}, T) \text{ dynamiquement I-confortable.}$$

Des trois lemmes ci-dessus on déduit la conséquence suivante :

Théorème 73. *Soit $(\mathcal{F}, T)$ une filtration facteur.*

$$(\mathcal{F}, T) \text{ dynamiquement standard } \Longrightarrow (\mathcal{F}, T) \text{ dynamiquement I-confortable.}$$

On va maintenant utiliser cette condition nécessaire pour étudier la standardité dynamique de la filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ engendrée par l'automate additif τ.

3.2.1 La filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma)$ n'est pas dynamiquement standard

On reprend ici les notations introduites dans la section 2.1.2. On est donc dans le cadre du système dynamique $\left(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}), \mu, \sigma\right)$ où $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe abélien fini de cardinal $|\mathbb{A}| \geq 2$, $\mu = (\mathcal{U}_{\mathbb{A}})^{\otimes \mathbb{Z}}$ et σ le décalage des coordonnées vers la gauche. On veut étudier la standardité dynamique de la filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma)$.

On rappelle que l'on a déjà montré que la filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ est standard au sens classique de la classification des filtrations (théorème 53). Cependant, comme on va le voir avec le résultat qui suit, lorsque l'on se place dans un cadre dynamique la notion de standardité peut changer.

Théorème 74. *La filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma)$ n'est pas dynamiquement standard.*

La démonstration de ce théorème que l'on va présenter maintenant utilise l'entropie de Kolmogorov pour les systèmes dynamiques mesurés. On rappelle ici quelques résultats classiques qui nous seront utiles (voir par exemple [15]).

Rappels sur l'entropie de Kolmogorov

Dans un espace probabilisé $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, si V est une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathbb{A}$, son entropie est définie par

$$H(V) := -\sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbb{P}(V = a) \log \mathbb{P}(V = a).$$

Dans un système dynamique mesuré $\big(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T\big)$, si l'on dispose d'un processus stationnaire $Z = \big(Z(i)\big)_{i \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans l'ensemble fini $\mathbb{A}$, où $Z(i) = Z(0) \circ T^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit l'entropie du processus Z par

$$h(Z, T) := \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} H\big(Z[0, k-1]\big) = \inf_{k \geq 1} \frac{1}{k} H(Z[0, k-1]),$$

où $Z[0, k-1]$ est vu comme une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble fini $\mathbb{A}^k$. Il est important de noter que la suite $(\frac{1}{k} H(Z[0, k-1]))_{k \geq 1}$ est une suite décroissante. Pour un processus Z à valeurs dans un espace quelconque $\mathbb{E}$, on définit l'entropie du processus Z par

$$h(Z, T) := \sup_{\mathbb{A}, \pi} h(\pi \circ Z),$$

le sup étant pris sur toutes les applications mesurables π définies sur $\mathbb{E}$ et à valeurs dans un ensemble fini $\mathbb{A}$.

On utilisera les deux propriétés suivantes :

— Si Z est un processus stationnaire à valeurs dans l'ensemble fini $\mathbb{A}$, alors

$$h(Z, T) \leq \log |\mathbb{A}|,$$

avec égalité si et seulement si les $Z(i)$ sont indépendants et uniformément distribués sur $\mathbb{A}$.

— Si Z_1 et Z_2 sont deux processus stationnaires à valeurs dans des ensembles finis pas nécessairement identiques, et si Z_2 est mesurable par rapport à $\mathbf{\Sigma}(Z_1)$, alors $h(Z_2, T) \leq h(Z_1, T)$.

Démonstration du théorème 74. On va montrer que la filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma)$ ne respecte pas le critère de I-confort dynamique. Pour cela, on choisit $X_0(0)$ comme variable aléatoire cible, et on va montrer que pour tout $n_0 \leq 0$, tout CTR dynamique n_0-indépendant vérifie

$$\mathbb{P}\big(X_0'(0) = X_0''(0)\big) = \frac{1}{|\mathbb{A}|} < 1. \tag{3.1}$$

Soit un entier $n_0 \leq 0$, on suppose que l'on construit un CTR dynamique n_0-indépendant sur un système dynamique $(\mathcal{X}', \mathcal{A}', \mu', \sigma')$. Pour tout $n \leq 0$, on note $Z_n := X_n' - X_n''$.

Chaque Z_n est un processus stationnaire à valeurs dans $\mathbb{A}$. Puisque X'_{n_0} et X''_{n_0} sont supposés indépendants, et qu'ils sont tous les deux de loi $(\mathcal{U}_\mathbb{A})^{\otimes\mathbb{Z}}$, Z_{n_0} est lui aussi de loi $(\mathcal{U}_\mathbb{A})^{\otimes\mathbb{Z}}$. On en déduit que son entropie vaut

$$h(Z_{n_0}, \sigma') = \log|\mathbb{A}|.$$

Mais par ailleurs on rappelle que $Z_{n_0} = \tau^{|n_0|} Z_0$. En particulier, Z_{n_0} est $\mathbf{\Sigma}(Z_0)$-mesurable, et donc $h(Z_{n_0}, \sigma') \leq h(Z_0, \sigma')$. Ainsi Z_0 est un processus à valeurs dans $\mathbb{A}$, et son entropie est supérieure ou égale à celle de Z_{n_0} qui est $\log|\mathbb{A}|$. La seule possibilité est que la loi de Z_0 soit elle aussi $(\mathcal{U}_\mathbb{A})^{\otimes\mathbb{Z}}$, et donc en particulier on a (3.1).

On en conclut donc que $(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma)$ n'est pas dynamiquement I-confortable et donc pas dynamiquement standard par le théorème 73.

□

Cas général d'un groupe compact abélien

L'argument utilisé dans la preuve ci-dessus utilise de façon cruciale l'entropie et le fait que l'automate soit défini sur un groupe fini. On peut donc se demander si le résultat persiste lorsque l'on remplace « $(\mathbb{A}, +)$ groupe abélien fini » par « $(G, +)$ groupe abélien compact » (par exemple, on pourrait vouloir étudier le cas où le groupe dans lequel chaque coordonnée prend ses valeurs est le tore unidimensionnel $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). En remplaçant la mesure uniforme $\mathcal{U}_\mathbb{A}$ par la mesure de Haar normalisée λ_G sur G, on peut étendre sans difficulté la construction de la filtration $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ à cadre plus général, mais on voit que la démonstration utilisant l'entropie ne s'adapte pas à cette situation où le groupe est continu. En effet dans ce cas l'entropie des processus utilisés dans la démonstration précédente est infinie.

C'est pourquoi on propose maintenant une démonstration alternative du théorème 74, valable dans le cas général où le groupe est compact abélien. Dans cette nouvelle preuve, l'argument d'entropie est remplacé par un argument de disjonction en théorie ergodique.

Quelques résultats sur les couplages et la disjonction en théorie ergodique

La théorie des couplages et de la disjonction en théorie ergodique a été introduite par Furstenberg en 1967 [16], et on en rappelle quelques résultats dont on aura besoin pour la seconde preuve du théorème 74.

Définition 75. *Soient* $X = \big(X(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(X(0)\circ T^i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ *et* $Y = \big(Y(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(Y(0)\circ S^i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ *deux processus stationnaires définis sur des systèmes dynamiques mesurés possiblement différents* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ *et* $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\mathcal{Y}, S)$. *On appellera* ***couplage dynamique*** *de* X *et* Y *la réalisation simultanée de deux processus stationnaires* $\overline{X} = \big(\overline{X}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(\overline{X}(0)\circ\overline{T}^i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ *et* $\overline{Y} = \big(\overline{Y}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(\overline{Y}(0)\circ\overline{T}^i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ *dans un* même *système dynamique* $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}}, \overline{T})$, *avec* $\mathcal{L}(\overline{X}) = \mathcal{L}(X)$ *et* $\mathcal{L}(\overline{Y}) = \mathcal{L}(Y)$.

Cette définition de couplage dynamique s'étend de manière évidente à un nombre fini ou dénombrable de processus stationnaires.

Définition 76. *Les deux processus stationnaires* $X = \big(X(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(X(0)\circ T^i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ *et* $Y = \big(Y(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(Y(0)\circ S^i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ *sont dits* ***disjoints*** *si pour tout couplage dynamique* $(\overline{X},\overline{Y})$ *de* X *et* Y *on a* $\overline{X}$ *indépendant de* $\overline{Y}$*.*

Un des premiers exemples de disjonction a été donné par Furstenberg [16] :

Théorème 77. *Si* X *est un processus stationnaire dont les coordonnées sont i.i.d., et si* Y *est un processus stationnaire d'entropie nulle, alors* X *et* Y *sont disjoints.*

Le résultat suivant est une application directe de l'existence du « couplage relativement indépendant au-dessus d'un facteur commun » (voir par exemple [17]) :

Lemme 78. *Soient* X_1 *et* Y_1 *deux processus stationnaires définis dans un système dynamique* $(\mathcal{X}_1,\mathcal{A}_1,\mathbb{P}_1,T_1)$*, et soient* X_2 *et* Y_2 *deux processus stationnaires définis dans un système dynamique* $(\mathcal{X}_2,\mathcal{A}_2,\mathbb{P}_2,T_2)$*. On suppose que les deux processus* Y_1 *et* Y_2 *ont même loi. Alors il existe un couplage dynamique* $(\overline{X}_1,,\overline{Y}_1,\overline{X}_2,\overline{Y}_2)$ *de* X_1*,* Y_1*,* X_2*,* Y_2*, dans lequel*
— $\mathcal{L}(\overline{X}_1,\overline{Y}_1) = \mathcal{L}(X_1,Y_1)$,
— $\mathcal{L}(\overline{X}_2,\overline{Y}_2) = \mathcal{L}(X_2,Y_2)$,
— $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2$.

On considère donc ici l'action de l'automate cellulaire additif τ sur $G^{\mathbb{Z}}$, où $(G,+)$ est un groupe abélien compact. On note λ_G la mesure de Haar normalisée sur G. On se servira de ce résultat classique sur la mesure de Haar :

Lemme 79. *Soient* X *et* Z *deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* G*, avec* $\mathcal{L}(X) = \lambda_G$*. Alors* $\mathcal{L}(X+Z) = \lambda_G$*.*

Démonstration. Notons ρ la loi de Z. Pour tout ensemble $A \subset G$ mesurable, en conditionnant par rapport à Z, en utilisant l'indépendance de X et Z, puis l'invariance de la mesure de Haar par translation sur G, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Z\in A) &= \int_G \mathbb{P}\big(X+z\in A \,/\, Z=z\big)\,d\rho(z)\\ &= \int_G \mathbb{P}\big(X\in A-z\big)\,d\rho(z)\\ &= \mathbb{P}(X\in A).\end{aligned}$$

□

Notons que $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$ est la mesure de Haar normalisée sur le groupe produit $G^{\mathbb{Z}}$. Le lemme 50 reste valide dans ce cadre plus général, et devient :

Lemme 80. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}}$. Si X est de loi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$, alors $\tau(X)$ est aussi de loi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$.*

La proposition suivante est la clé pour la démonstration alternative du théorème 74, et c'est en fait la réciproque du lemme 80 :

Proposition 81. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}}$, dont la loi ρ est σ-invariante. Si $\tau(X)$ est de loi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$, alors $\rho = \lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$.*

Démonstration. Soit ρ une mesure σ-invariante sur $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}}$, dont l'image $\tau_*(\rho)$ par l'automate additif est $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$. Dans le système dynamique $\big(G^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(G^{\otimes\mathbb{Z}}), \rho, \sigma\big)$, on considère le processus stationnaire X_1 de loi ρ défini par les coordonnées, et $Y_1 := \tau(X_1)$ de loi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$. On considère également dans le système dynamique $\big(G^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(G^{\otimes\mathbb{Z}}), \lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}, \sigma\big)$ le processus stationnaire X_2 de loi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$ défini par les coordonnées, et $Y_2 := \tau(X_2)$. Par le lemme 80, Y_2 est également de loi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$. Comme $\mathcal{L}(Y_1) = \mathcal{L}(Y_2)$, on peut trouver par le lemme 78 un couplage dynamique $(\overline{X}_1, , \overline{Y}_1, \overline{X}_2, \overline{Y}_2)$ réalisé dans un système dynamique $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}}, \overline{T})$, tel que :

— $\mathcal{L}(\overline{X}_1) = \rho$,
— $\mathcal{L}(\overline{X}_2) = \lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$,
— $\tau(\overline{X}_1) = \overline{Y}_1 = \overline{Y}_2 = \tau(\overline{X}_2)$.

Soit $Z := \overline{X}_1 - \overline{X}_2$. On a $\tau(Z) = \tau(\overline{X}_1) - \tau(\overline{X}_2) = 0$, donc pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$Z(i) = Z(0) \circ \overline{T}^i = (-1)^i Z(0).$$

Il vient que pour tout ensemble fini $\mathbb{A}$ et toute application $\pi : \mathbb{T} \to \mathbb{A}$, le processus $Z \circ \pi$ est périodique de période 2, donc d'entropie nulle. Ceci prouve que $h(Z, \overline{T}) = 0$.

Par ailleurs, $\overline{X}_2$ est un processus stationnaire i.i.d. puisque sa loi est $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$, donc disjoint de Z par le théorème 77. Ainsi $\overline{X_2}$ est indépendant de Z. Mais comme $\overline{X}_1 = Z + \overline{X}_2$, en utilisant le lemme 79 dans le groupe $G^{\otimes\mathbb{Z}}$, on obtient que la loi ρ de $\overline{X}_1$ est aussi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$. □

Démonstration alternative du théorème 74. Comme dans la première démonstration page 62, on prend comme variable cible $X_0(0)$ et on considère un CTR dynamique (X', X'') de la filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau^{-1}}, \sigma)$ dans un système dynamique $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}}, \overline{\sigma})$. On suppose que ce CTR dynamique est n_0-indépendant pour un certain $n_0 \leq 0$. On pose également, pour tout $n \leq 0$, $Z_n := X'_n - X''_n$. Chaque Z_n est un processus stationnaire à valeurs dans G, et puisque X'_{n_0} et X''_{n_0} sont indépendants et de loi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$, la loi de Z_{n_0} est aussi $\lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$. Mais on rappelle que dans cette construction on a, pour tout $n \leq 0$, $\tau(Z_n) = Z_{n-1}$. Par la proposition 81, une récurrence immédiate prouve que pour tout $n_0 \leq n \leq 0$, on a $\mathcal{L}(Z_n) = \lambda_G^{\otimes\mathbb{Z}}$. Il vient alors pour tout $\delta > 0$

$$\mathbb{P}'\big(d(X'_0, X''_0) < \delta\big) = \lambda_G\big(B_\delta\big),$$

où B_δ désigne la boule de centre 0_G et de rayon δ. Or, quand $\delta \to 0$, $\lambda_G(B_\delta)$ converge vers $\lambda_G(\{0_G\}) < 1$ (en excluant bien sûr le cas trivial où G est réduit à un seul élément). Ainsi la propriété du I-confort dynamique n'a pas lieu. □

3.3 Étude dynamique de la filtration engendrée par τ_ε

On va étudier maintenant la standardité dynamique de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ engendrée par l'ACP τ_ε. On va voir que, contrairement au cas statique où la standardité est établie pour toute valeur de ε, on a besoin dans le cas dynamique d'une hypothèse sur le paramètre ε pour établir la standardité dynamique : la méthode présentée ici ne fonctionne que lorsque ε n'est pas trop proche de 0. La question de savoir ce qui se passe pour ε petit reste ouverte (voir la discussion en section 3.3.2).

3.3.1 Standardité dynamique pour ε assez grand : automate enveloppe et percolation

Pour étudier le cas où ε n'est pas trop proche de 0, on va s'appuyer sur une méthode de couplage introduite par I. Marcovici dans [18] utilisant un ACP annexe appelé ACP « enveloppe » associé à l'ACP τ_ε. Cette dernière sorte d'automate a été introduite pour prouver certains résultats sur des ACP classiques comme l'ergodicité au sens de Markov. Nous allons voir que cette méthode permet également de montrer la standardité dynamique de certaines filtrations facteurs.

Percolation de sites orientée

La théorie de la percolation est développée depuis les années 1950 pour étudier mathématiquement certains phénomènes physiques ou naturels, comme l'écoulement d'un liquide dans un milieu poreux, la propagation d'un incendie ou celle d'une épidémie. Dans le contexte où nous l'utilisons ici, il s'agit plutôt de contrôler la transmission de l'information depuis les temps lointains d'un processus jusqu'au présent.

Le principe général de cette théorie consiste à étudier un graphe aléatoire infini, typiquement construit à partir d'un réseau comme $\mathbb{Z}^d$, dans lequel les sommets (ou les arêtes) sont fermés aléatoirement. La question principale est celle de l'existence de composantes connexes infinies.

De nombreux modèles de percolation ont été étudiés comme dans [19], mais celui qui est adapté à notre problème est celui dit de « percolation de site orientée sur $\mathbb{Z}^2$. On fixe une grille $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et l'on considère un graphe où les arêtes lient chaque sommet (n, i) aux sommets $(n+1, i)$ et $(n+1, i-1)$. On se donne une famille i.i.d. $\left(Y_n(i)\right)_{(n,i)\in\mathbb{Z}^2}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Pour chaque sommet (n, i) on décide si il est ouvert en fonction de $Y_n(i)$: (n, i) est ouvert si $Y_n(i) = 1$, fermé sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note O_n l'événement « $(0, 0)$ est connecté au niveau n », et O_{-n} l'événement « le niveau $-n$ est connecté au site $(0, 0)$ ». On remarque que $\mathbb{P}(O_n) = \mathbb{P}(O_{-n})$ car

échanger chaque variable aléatoire $Y_n(i)$ avec $Y_{-n}(-i)$ ne change pas la loi du processus, mais échange O_n et O_{-n}.

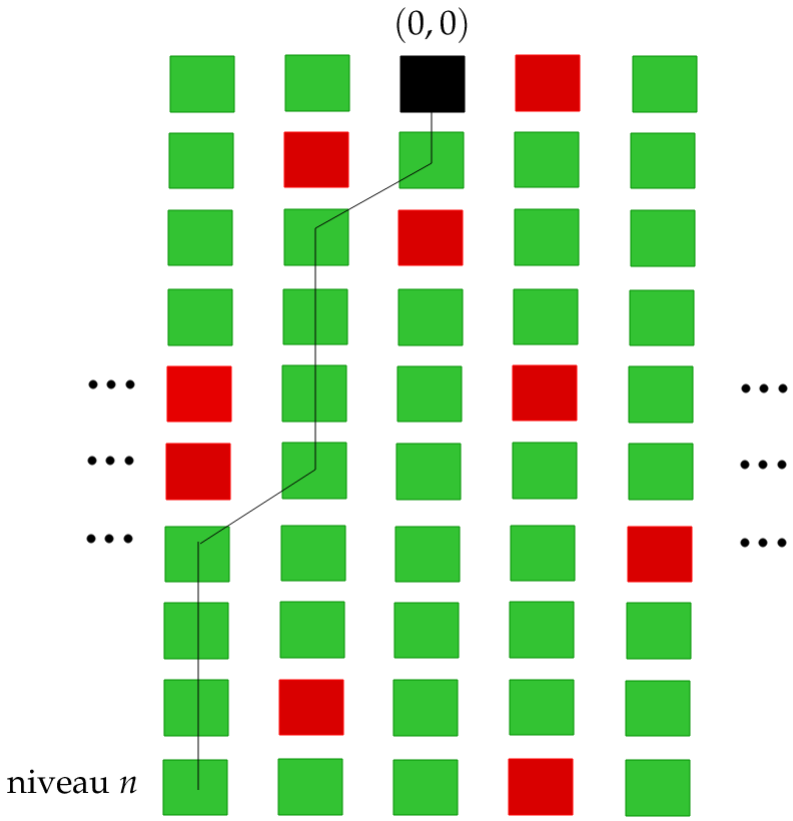


FIGURE 3.1 – Un exemple de percolation orientée où le niveau n est connecté au point source. Les sites fermés sont en rouge et les sites ouverts en vert.

La question essentielle en percolation est de déterminer la probabilité d'avoir un chemin infini partant de $(0,0)$, c'est à dire la probabilité de l'événement O_∞.

Lemme 82. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = O_\infty$

Démonstration. Supposons que O_∞ est réalisé. Il existe donc un chemin infini de sites ouverts $\{(0,0),(1,i_1),(2,i_2),...\}$, ainsi chaque niveau $n \in \mathbb{N}$ peut être atteint depuis $(0,0)$, donc O_n est réalisé pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est réalisé. Il vient que $O_\infty \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

Réciproquement, supposons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est réalisé, *i.e.* pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe au moins un site (n,i) connecté à $(0,0)$. On appelle *descendants* d'un site (n,i) l'ensemble des sites ouverts (m,j) avec $m > n$ tel que (m,j) soit connecté à (n,i). On note $d(n,i) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le nombre de descendants pour un site (n,i). Nous allons construire par récurrence un chemin infini de sites ouverts $\{(0,0),(1,i_1),\dots\}$ tel que $d(n,i_n) = \infty$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Comme $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est réalisé on a $d(0,0) = \infty$, ce qui initie la construction du chemin. Supposons le chemin construit jusqu'au niveau $n \geq 0$. On a

$$\overbrace{d(n,i_n)}^{=\infty} \leq d(n+1,i_n)\mathbb{1}_{\{(n+1,i_n) \text{ ouvert}\}} + d(n+1,i_n-1)\mathbb{1}_{\{(n+1,i_n-1) \text{ ouvert}\}} + 2,$$

donc au moins un des deux sites $(n+1,i_n)$ ou $(n+1,i_n-1)$ est ouvert et a une infinité de descendants. On peut donc choisir $(n+1,i_{n+1}) \in \{(n+1,i_n),(n+1,i_n-1)\}$ satisfaisant cette propriété. On construit ainsi récursivement le chemin infini annoncé donc O_∞ est réalisé. □

Une question importante est l'existence d'une probabilité critique p_c permettant de déterminer si oui ou non l'existence de chemins infinis partant du site $(0,0)$ est probable ou non. Dans le cadre du modèle de percolation qui nous intéresse, cette question a été étudiée par Liggett [20] :

Théorème 83 (Liggett)**.** *Il existe une probabilité critique $p_c \in [\frac{2}{3},\frac{3}{4}]$ pour le processus de percolation de sites orientée de probabilité p telle que si $p < p_c$ alors $\mathbb{P}(O_\infty) = 0$ et si $p > p_c$ alors $\mathbb{P}(O_\infty) > 0$.*

Corollaire 84. *Si $0 \leq p < p_c$, on peut trouver avec probabilité 1 un entier aléatoire $N_0 \leq 0$ ne dépendant que des $Y_n(i)$ ($n \leq 0$, $i \in \mathbb{Z}$), tel qu'il n'existe aucun chemin ouvert reliant le niveau N_0 à $(0,0)$.*

Démonstration. On a évidemment $O_{n+1} \subset O_n$ pour $n \geq 0$ et $O_{n-1} \subset O_n$ pour $n \leq 0$.

Si $0 \leq p < p_c$, par le Lemme 82 on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0} O_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(O_n\right) = 0.$$

Mais par ailleurs, on a vu que pour tout n on a $\mathbb{P}(O_n) = \mathbb{P}(O_{-n})$. Donc on a aussi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\leq 0} O_n\right) = \lim_{n\to-\infty} \mathbb{P}\left(O_n\right) = 0.$$

Presque sûrement, il existe donc un plus grand entier $N_0 \leq 0$ tel que l'événement O_{N_0} n'a pas lieu. Comme chaque événement O_n, $n \leq 0$, est mesurable par rapport aux $Y_n(i)$ ($n \leq 0$, $i \in \mathbb{Z}$), il en va de même pour N_0. □

Automate enveloppe

On considère un ACP F sur un alphabet $\mathbb{A}$, de voisinage $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$. Soit l'alphabet $\mathbb{A}_? := \mathbb{A} \cup \{?\}$. Un mot sur $\mathbb{A}_?$ peut être interprété comme un mot sur $\mathbb{A}$ dans lequel les symboles ? sont des lettres de $\mathbb{A}$ inconnues. Pour tout mot $w \in \mathbb{A}_?$ on définit $\overline{w} \subset \mathbb{A}^*$ comme l'ensemble des mots sur $\mathbb{A}$ qui sont obtenus à partir de w en remplaçant chaque point d'interrogation peut être n'importe quel symbole de $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A} = \{0,1\}$ par exemple, on aura $\overline{?1?} = \{010, 011, 110, 111\}$.

On associe maintenant à l'ACP F de fonction locale f l'**automate cellulaire probabiliste enveloppe** F^{env} d'alphabet $\mathbb{A}_?$ et de voisinage $\mathcal{N}$, de fonction locale $f^{\text{env}} : \mathbb{A}_?^{\mathcal{N}} \to \mathcal{M}(\mathbb{A}_?)$ définie pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{A}_?^{\mathcal{N}}$ par :

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{A}, f^{\text{env}}(\boldsymbol{y})(a) &:= \min_{x \in \overline{y}} f(\boldsymbol{x})(a), \\ \text{et} \quad f^{\text{env}}(\boldsymbol{y})(?) &:= 1 - \sum_{a \in \mathbb{A}} \min_{\boldsymbol{x} \in \overline{y}} f(\boldsymbol{x})(a). \end{aligned}$$

Si un mot y ne contient pas de point d'interrogation, i.e. si $\bar{y} = \{y\}$, on aura alors

$$\forall a \in \mathbb{A} : f^{\text{env}}(\boldsymbol{y})(a) = \min_{x \in \overline{\boldsymbol{y}}} f(\boldsymbol{x})(a) = f(y)(a),$$

et on aura également

$$\begin{aligned} f^{\text{env}}(\boldsymbol{y})(?) &= 1 - \sum_{a \in \mathbb{A}} \min_{\boldsymbol{x} \in \overline{\boldsymbol{y}}} f(\boldsymbol{x})(a) \\ &= 1 - \sum_{a \in \mathbb{A}} \min_{\boldsymbol{x} \in \overline{y}} f(\boldsymbol{x})(a) \quad \text{car } \bar{\boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{y}\} \\ &= 1 - \overbrace{\sum_{a \in \mathbb{A}} f(\boldsymbol{y})(a)}^{=1} = 0 \quad \text{car } f \text{ est une mesure de probabilités.} \end{aligned}$$

On ne peut donc pas faire apparaître de point d'interrogation en partant d'un mot dont toutes les lettres sont dans $\mathbb{A}$ par construction, et sur de tels mots la fonction locale de F^{env} coïncide avec celle de F.

Nous nous intéressons à présent au cas où F est l'automate τ_ε, agissant sur un alphabet $\mathbb{A}$ où $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe abélien fini, de voisinage $\mathcal{N} = \{0,1\}$ et de fonction locale

$$f_{\tau_\varepsilon} : \begin{cases} \mathbb{A}^2 & \to \mathcal{M}(\mathbb{A}) \\ (a,b) & \mapsto (1-\varepsilon)\delta_{(a+b)} + \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1} \sum\limits_{a \neq (a+b)} \delta_a. \end{cases}$$

On suppose toujours dans la suite que

$$\frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}| - 1} \leq 1 - \varepsilon, \tag{3.2}$$

ce qui est équivalent à la condition

$$\varepsilon \leq \frac{|\mathbb{A}|-1}{|\mathbb{A}|}.$$

On peut expliciter la fonction locale de l'automate enveloppe $\tau_\varepsilon^{\text{env}}$ associé à l'ACP τ_ε.

Propriété 6. *Pour tous $a, b, c \in \mathbb{A}_?$, on a*

$$f_{\tau_\varepsilon}^{env}(b,c)(a) = \begin{cases} f_{\tau_\varepsilon}(b,c)(a) & si\ \ a,b,c \in \mathbb{A}, \\ 0 & si\ \ a,b \in \mathbb{A}\ et\ \ a =?, \\ \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1} & si\ \ b\ ou\ \ c =?\ et\ \ a \in \mathbb{A}, \\ 1-\frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1} & si\ \ b\ ou\ \ c =?\ et\ \ a =?. \end{cases}$$

Démonstration. Les deux premiers cas découlent du fait que $f_{\tau_\varepsilon}^{\text{env}}$ coïncide avec f_{τ_ε} sur les mots de $\mathbb{A}$.

Pour le troisième cas, rappelons que pour $a \in \mathbb{A}$ fixé, on a pour tous $b, c \in \mathbb{A}$,

$$f_{\tau_\varepsilon}(b,c)(a) = \begin{cases} 1-\varepsilon & \text{si}\ \ b+c=a, \\ \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1} & \text{si}\ \ b+c \neq a. \end{cases}$$

Par ailleurs, si b ou c vaut ?, il y a toujours au moins un mot $b'c' \in \overline{bc}$ tel que $b'+c' \neq a$. Or on a supposé que $\frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1} \leq 1-\varepsilon$, donc

$$f_{\tau_\varepsilon}^{\text{env}}(b,c)(a) = \min_{b'c' \in \overline{bc}} f_{\tau_\varepsilon}(b,c)(a) = \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1}.$$

Finalement, si b ou c vaut ?, on a

$$f_{\tau_\varepsilon}^{\text{env}}(bc)(?) = 1 - \sum_{a \in \mathbb{A}} f_{\tau_\varepsilon}^{\text{env}}(b,c)(a) = 1 - \varepsilon\frac{|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}$$

□

Couplage des différents processus

On se donne au départ une famille de variables aléatoires i.i.d. $(U_n(i)_{n,i\in\mathbb{Z}})$ suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour un temps $n_0 \leq 0$ fixé, nous allons implémenter simultanément l'ACP τ_ε et l'ACP enveloppe $\tau_\varepsilon^{\text{env}}$ à partir de $n_0 \leq 0$, en construisant des processus paramétrés par la famille des variables aléatoires $(U_n(i)_{n,i\in\mathbb{Z}})$ au moyen de fonction de mise à jour locales $\varphi_\varepsilon : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \times [0,1] \to \mathbb{A}$ et $\varphi_\varepsilon^{\text{env}} : \mathbb{A}_? \times \mathbb{A}_? \times [0,1] \to \mathbb{A}_?$.

On a le choix pour le couple $(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon^{\text{env}})$ tant qu'elles respectent les lois indiquées. On choisit l'organisation suivante. On découpe l'intervalle $[0,1]$ en $|\mathbb{A}|+1$ sous-intervalles disjoints indexés par les symboles de $\mathbb{A}_?$. Le premier est

$$I_? := \left[0, 1 - \frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}\right[,$$

l'intervalle restant étant ensuite subdivisé en $|\mathbb{A}|$ morceaux notés I_a, $a \in \mathbb{A}$, tous de longueur $\frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1}$. Pour $b, c \in \mathbb{A}$ et $u \in [0,1]$, on définit

$$\varphi_\varepsilon(b,c,u) := \begin{cases} b+c & \text{si } u \in I_?, \\ a & \text{si } u \in I_a,\ a \in \mathbb{A}. \end{cases}$$

De cette façon, si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, on a pour tous $b, c \in \mathbb{A}$,

$$\mathbb{P}\left(\varphi_\varepsilon(b,c,U) = b+c\right) = 1 - \frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1} + \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1} = 1-\varepsilon,$$

et pour $a \neq b+c$,

$$\mathbb{P}\left(\varphi_\varepsilon(b,c,U) = a\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1},$$

ce qui correspond bien à la loi d'évolution de l'ACP τ_ε.

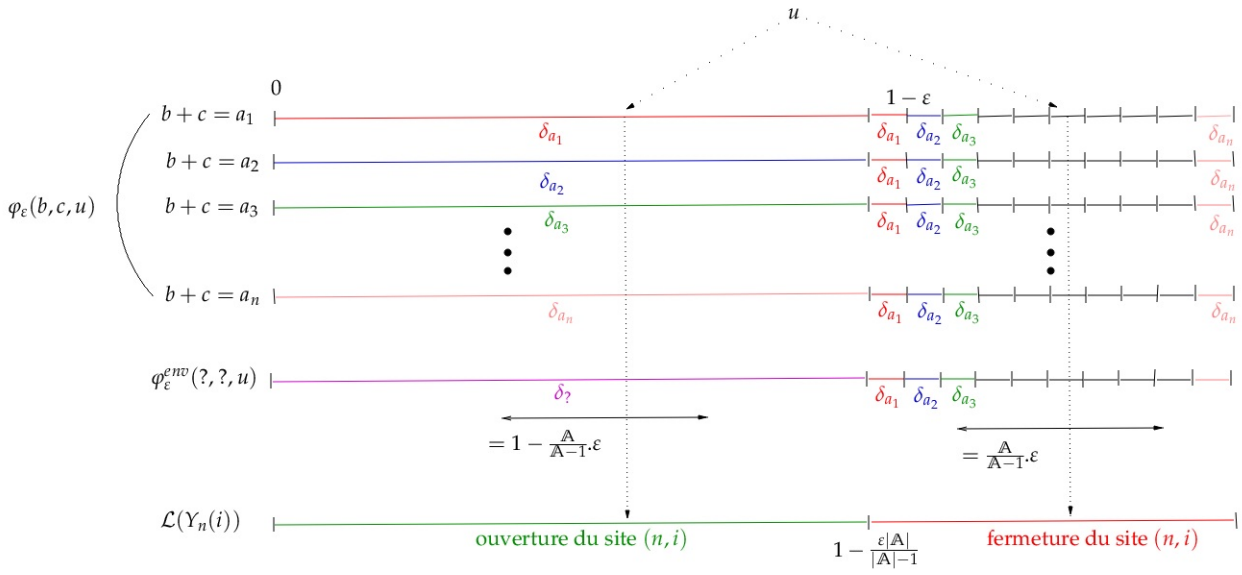


FIGURE 3.2 – Le couplage de l'automate enveloppe $\tau_\varepsilon^{\text{env}}$, l'automate τ_ε et le processus de percolation avec nos variables indépendantes.

Pour définir $\varphi_\varepsilon^{\text{env}}$, on utilise le même découpage de l'intervalle $[0,1]$, et on pose

$$\varphi_\varepsilon^{\text{env}}(b,c,u) := \begin{cases} b+c & \text{si } b,c \in \mathbb{A} \text{ et } u \in I_? , \\ ? & \text{si } b \text{ ou } c = ? \text{ et } u \in I_? , \\ a & \text{si } u \in I_a,\ a \in \mathbb{A}. \end{cases}$$

On voit que $\varphi_\varepsilon^{\text{env}}(b,c,u)$ coïncide avec $\varphi_\varepsilon(b,c,u)$ pour $b,c \in \mathbb{A}$. Par ailleurs si b ou c vaut ? et si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, on a bien pour tout $a \in \mathbb{A}_?$

$$\mathbb{P}\left(\varphi_\varepsilon^{\text{env}}(b,c,U) = a\right) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{|\mathbb{A}|-1} & \text{si } a \in A, \\ 1 - \frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1} & \text{si } a = ?. \end{cases}$$

Pour implémenter l'automate τ_ε, on fixe une configuration initiale arbitraire $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}(i))_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, et on initialise le processus au temps n_0 par $X_{n_0}^{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x}$. les temps suivants du processus $(X_n^{\boldsymbol{x}})_{n\geq n_0}$ sont donnés récursivement par la formule

$$X_{n+1}^{\boldsymbol{x}}(i) := \varphi_\varepsilon\big(X_n^{\boldsymbol{x}}(i), X_n^{\boldsymbol{x}}(i+1), U_{n+1}(i)\big). \tag{3.3}$$

Pour l'automate enveloppe, on choisit d'initialiser la construction par la configuration initiale monochromatique $X_{n_0}^{\text{env}} := \ldots ????? \ldots$ De même, les temps suivants du processus enveloppe sont donnés récursivement par

$$X_{n+1}^{\text{env}}(i) := \varphi_\varepsilon^{\text{env}}\left(X_n^{\text{env}}(i), X_n^{\text{env}}(i+1), U_{n+1}(i)\right). \tag{3.4}$$

À l'aide de la même famille de variables aléatoires i.i.d. $(U_n(i)_{\in\mathbb{Z},i\in\mathbb{Z}})$, on construit en parallèle un processus de percolation de sites orientée $(Y_n(i))_{\in\mathbb{Z},i\in\mathbb{Z}}$ où un site est ouvert avec probabilité $p := 1 - \frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}$ et fermé avec probabilité $\frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}$. Plus précisément, on pose pour tous $n,i \in \mathbb{Z}$,

$$Y_n(i) := \begin{cases} 1 \text{ si } U_n(i) \in \left[0, 1 - \frac{|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}\varepsilon\right] & (\text{ouverture du site } (n,i)) \\ 0 \text{ si } U_n(i) \in \left(1 - \frac{|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}\varepsilon, 1\right] & (\text{fermeture du site } (n,i)). \end{cases} \tag{3.5}$$

Nous avons donc construit à partir de la seule famille des $(U_n(i)_{n\in\mathbb{Z},i\in\mathbb{Z}})$ un couplage
— d'une famille $(X_n^{\boldsymbol{x}})_{n\geq n_0}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, d'implémentations de l'ACP τ_ε, où le processus $(X_n^{\boldsymbol{x}})$ est initialisée à une configuration arbitraire $\boldsymbol{x}$ au temps n_0,
— d'une implémentation $(X_n^{\text{env}})_{n\geq n_0}$ de l'ACP enveloppe, initialisée à la configuration $\ldots ????? \ldots$ au temps n_0,
— d'un processus $(Y_n(i))_{(n,i)\in\mathbb{Z}^2}$ de percolation orientée de sites, de paramètre $p = 1 - \frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}$.

Nous allons présenter maintenant les propriétés essentielles de ce couplage. Le premier lemme ci-dessous établit un lien entre les valeurs prises par l'ACP enveloppe et l'existence de chemins ouverts dans le processus de percolation orientée.

Lemme 85. *Pour tout $n \geq n_0 + 1$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, $X_n^{env}(i) =?$ si et seulement si, dans le processus de percolation, il existe un chemin ouvert $\big((n_0+1, i_{n_0+1}), \ldots, (n,i)\big)$ reliant le niveau n_0+1 jusqu'au site (n,i).*

Démonstration. On prouve le résultat par récurrence sur $n \geq n_0 + 1$. Puisque $X_{n_0}^{\mathrm{env}}(i) =?$, on a $X_{n_0+1}^{\mathrm{env}}(i) =?$ si et seulement si $U_{n_0+1}(i) \in I_?$, c'est-à-dire si et seulement si (n_0+1, i) est ouvert, ce qui prouve la propriété énoncée dans le lemme pour $n = n_0 + 1$. Supposons que cette propriété soit vraie jusqu'au niveau $n \geq n_0 + 1$. Par construction du couplage, $X_{n+1}^{\mathrm{env}}(i) =?$ si et seulement si on a à la fois

- $X_n^{\mathrm{env}}(i) =?$ ou $X_n^{\mathrm{env}}(i+1) =?$, ce qui se traduit par hypothèse de récurrence qu'il existe un chemin ouvert reliant le niveau n_0+1 à (n,i) ou $(n, i+1)$,
- $U_{n+1}(i) \in I_?$, c'est-à-dire $(n+1, i)$ ouvert.

Ainsi $X_{n+1}^{\mathrm{env}}(i) =?$ si et seulement si il existe un chemin ouvert reliant le niveau n_0+1 à $(n+1, i)$, ce qui achève la preuve. □

Le prochain lemme est un résultat clé, puisqu'il montre que là où les points d'interrogations disparaissent dans l'ACP enveloppe, toutes les implémentations de l'ACP τ_ε prennent la même valeur (indépendamment de la configuration initiale $\boldsymbol{x}$).

Lemme 86. *Pour tout $n \geq n_0$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, si $X_n^{env}(i) \neq ?$ alors pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, on a $X_n^{\boldsymbol{x}}(i) = X_n^{env}(i)$.*

Démonstration. On prouve là aussi le résultat par récurrence sur $n \geq n_0$. Pour $n = n_0$ c'est évident puisque $X_{n_0}^{\mathrm{env}}(i)$ vaut toujours ?. Supposons la propriété établie jusqu'au niveau $n \geq n_0$, et considérons un site $(n+1, i)$. On distingue deux cas.

- Premier cas : $X_n^{\mathrm{env}}(i) =?$ ou $X_n^{\mathrm{env}}(i+1) =?$. Alors la seule possibilité pour que $X_n^{\mathrm{env}}(i) \neq ?$ est qu'il existe $a \in \mathbb{A}$ tel que $U_{n+1}(i) \in I_a$. Par construction des fonctions de mise à jour locales, cela implique que pour toute configuration initiale $\boldsymbol{x}$, $X_{n+1}^{\boldsymbol{x}}(i) = a = X_{n+1}^{\mathrm{env}}(i)$.
- Deuxième cas : $X_n^{\mathrm{env}}(i) \in \mathbb{A}$ et $X_n^{\mathrm{env}}(i+1) \in \mathbb{A}$. Par hypothèse de récurrence, cela implique que pout toute configuration initiale $\boldsymbol{x}$, on a $X_n^{\boldsymbol{x}}(i) = X_n^{\mathrm{env}}(i)$ et $X_n^{\boldsymbol{x}}(i+1) = X_n^{\mathrm{env}}(i+1)$. Par construction des fonctions de mise à jour locales, on en déduit d'une part que $X_{n+1}^{\mathrm{env}}(i) \in \mathbb{A}$, et d'autre part que $X_{n+1}^{\boldsymbol{x}}(i) = X_{n+1}^{\mathrm{env}}(i)$.

Dans les deux cas on voit que la propriété est encore vraie pour le site $(n+1, i)$ ce qui termine la preuve. □

Standardité dynamique de $(\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}, \sigma)$ pour ε assez grand

Nous allons maintenant établir la standardité dynamique de la filtration associée à l'ACP τ_ε, mais il faut pour cela commencer par expliciter le système dynamique dans

lequel on considère cette filtration.

On se place ici sur l'espace $\Omega := [0,1]^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{A}$ et de la mesure de probabilité μ sous laquelle toutes les coordonnées sont indépendantes et suivent la mesure uniforme sur $[0,1]$. On considère sur Ω l'action de $\mathbb{Z}^2$ des décalages bidimensionels définie comme suit :

$$\forall (n,i) \in \mathbb{Z}^2,\ \sigma_{n,i}\big((\omega_{m,j})_{(m,j)\in\mathbb{Z}^2}\big) = (\omega'_{m,j})_{(m,j)\in\mathbb{Z}^2}, \quad \text{où } \omega'_{m,j} := \omega_{m+n,j+i}.$$

Cette action préserve la mesure de probabilité μ, et on particularise le décalage des coordonnées vers la gauche en posant $\sigma := \sigma_{0,1}$.

On peut se représenter un point $\omega = (\omega_{n,i})_{n\in\mathbb{Z},i\in\mathbb{Z}}$ de Ω comme la suite indexée par $n \in \mathbb{Z}$ des colonnes $(\omega_{n,i})_{i\in\mathbb{Z}}$. Sous μ, ces colonnes sont i.i.d., et σ consiste à décaler les colonnes. On obtient donc le lemme suivant.

Lemme 87. *Le système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \sigma)$ est un schéma de Bernoulli, en particulier il est mélangeant, donc ergodique.*

Pour $n, i \in \mathbb{Z}$, on note $U_n(i)$ la projection sur la coordonnée indexée par le couple (n,i) : les $U_n(i)$, $n,i \in \mathbb{Z}$ forment une famille de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. On peut donc effectuer la construction du couplage expliquée dans la section précédente à partir de ces variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Cependant, pour rendre explicite la dépendance en n_0, on note maintenant $(X_n^{n_0,\boldsymbol{x}})_{n\geq n_0}$ et $(X_n^{n_0,\mathrm{env}})_{n\geq n_0}$ les processus initialisés respectivement à la configuration $\boldsymbol{x}$ et à la configuration $\ldots????\ldots$, et définis récursivement par (3.3) et (3.4). Les $Y_n(i)$ pour le processus de percolation sont de même définis par (3.5).

Nous avons maintenant un couplage dans lequel une famille infinie d'implémentations de l'ACP enveloppe apparaissent, paramétrée par le niveau d'initialisation n_0. Notons que, puisque la configuration initiale des processus enveloppe est invariante par le décalage horizontal, l'action des décalages $\sigma_{n,i}$ sur ces différents processus enveloppe donne la relation suivante, valable pour tous $n_0 \leq n$ et tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$X_n^{n_0,\mathrm{env}}(i) = X_0^{n_0-n,\mathrm{env}}(0) \circ \sigma_{n,i}. \tag{3.6}$$

Par un argument identique à la démonstration du lemme (86), on obtient le lien suivant entre ces implémentations.

Lemme 88. *Pour tous n, n_0 avec $n \geq n_0$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, si $X_n^{n_0,env}(i) \neq ?$ alors pour tout $n_1 \leq n_0$ on a $X_n^{n_1,env}(i) = X_n^{n_0,env}(i)$.*

La proposition suivante permet de définir une implémentation de l'automate τ_ε depuis $-\infty$, sous la condition que ε ne soit pas trop proche de 0. On rappelle que p_c désigne la probabilité critique pour le processus de percolation orientée, introduite dans le théorème 83.

Proposition 89. *Supposons*

$$(1-p_c)\frac{|\mathbb{A}|-1}{|\mathbb{A}|} < \varepsilon \leq \frac{|\mathbb{A}|-1}{|\mathbb{A}|}. \tag{3.7}$$

Alors avec probabilité 1, pour tous $n, i \in \mathbb{Z}$, il existe $N_0(n,i) \leq n$, à valeurs entières, vérifiant les propriétés suivantes :

- *$N_0(n,i)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}_n$ engendrée par les $U_m(j)$, $m \leq n$, $j \in \mathbb{Z}$.*
- *Si $n_0 \leq N_0(n,i)$, alors $X_n^{n_0,env}(i) \neq ?$.*
- *Si $n_1 \leq n_0 \leq N_0(n,i)$, alors $X_n^{n_1,env}(i) = X_n^{n_0,env}(i)$.*
- *Pour tous $n, i \in \mathbb{Z}$, $N_0(n,i) = N_0(0,0) \circ \sigma_{n,i}$.*

Démonstration. Rappelons que l'inégalité de droite, $\varepsilon \leq \frac{|\mathbb{A}|-1}{|\mathbb{A}|}$, est simplement là pour assurer que la condition (3.2) soit satisfaite. L'inégalité de gauche, $(1-p_c)\frac{|\mathbb{A}|-1}{|\mathbb{A}|} < \varepsilon$ est équivalente à $p < p_c$, où $p := 1 - \frac{\varepsilon|\mathbb{A}|}{|\mathbb{A}|-1}$ est le paramètre du processus de percolation orientée $(Y_n(i))$ construit dans le couplage.

Considérons le cas où $(n,i) = (0,0)$. Pour $p < p_c$, le corollaire 84 donne l'existence de $N_0 = N_0(0,0)$, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}_0$, tel que si $n_0 \leq N_0(0,0)$, alors $X_0^{n_0,\mathrm{env}}(0) \neq ?$. Par le lemme 88, on obtient pour $n_1 \leq n_0 \leq N_0(0,0)$, $X_0^{n_1,\mathrm{env}}(0) = X_0^{n_0,\mathrm{env}}(0)$.

On peut ensuite généraliser ce résultat à tout site $(n,i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en définissant $N_0(n,i) := N_0 \circ \sigma_{n,i}$. Notons que $N_0(n,i)$ est le plus grand entier $n_0 \leq n$ tel qu'il n'existe pas de chemin ouvert reliant le niveau n_0 à (n,i). □

Grâce à la proposition précédente, on peut donc avec probabilité 1 définir, pour tous $n, i \in \mathbb{Z}$,

$$X_n(i) := X_n^{N_0(n,i),\mathrm{env}}(i) = \lim_{n_0 \to -\infty} X_n^{n_0,\mathrm{env}}(i). \tag{3.8}$$

En considérant $n_0 \leq \min\{N_0(n,i), N_0(n,i+1), N_0(n+1,i)\}$, on a par la troisième propriété énoncée dans la proposition 89 : $X_n(i) = X_n^{n_0,\mathrm{env}}(i)$, $X_n(i+1) = X_n^{n_0,\mathrm{env}}(i+1)$ et $X_{n+1}(i) = X_{n+1}^{n_0,\mathrm{env}}(i)$. Puisque le processus $\left(X_n^{n_0,\mathrm{env}}\right)$ satisfait la relation de récurrence (3.4) en $(n+1,i)$, il en va donc de même pour (X_n). On prouve ainsi que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien une implémentation de l'ACP τ_ε. De plus, de (3.6) on déduit que tous $n, i \in \mathbb{Z}$, on a

$$X_n(i) = X_0(0) \circ \sigma_{n,i}.$$

En particulier, $X_n = X_0 \circ \sigma_{n,0}$. Tous les X_n suivent donc la même loi, qui est l'unique loi invariante de l'ACP τ_ε.

Nous pouvons maintenant considérer la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ engendrée par le

processus $(X_n)_{n\leq 0}$ [1]. Puisque pour tout n, $X_n = \big(X_n(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = X_n(0)\circ\sigma^i$, on peut dire que $(\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon},\sigma)$ est une filtration facteur dans le système dynamique $(\Omega,\mathcal{A},\mu,\sigma)$. On dispose également d'une autre filtration facteur, donnée par $(\mathcal{G},\sigma)$ où $\mathcal{G} = \big(\mathcal{G}_n\big)_{n\geq 0}$, et $\mathcal{G}_n$ est la tribu engendrée par la famille $(U_m(j))_{m\leq n, j\in\mathbb{Z}}$. Par construction, chaque $X_n(i)$ est $\mathcal{G}_n$-mesurable, donc $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{G}_n$. De plus, $\mathcal{F}_{n+1}\subset\mathcal{F}_n\vee\mathcal{I}_{n+1}$, où $\mathcal{I}_{n+1}$ est la tribu engendrée par la famille $\big(U_{n+1}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$. Comme $\mathcal{I}_{n+1}\overset{\mathcal{C}}{\perp\!\!\!\perp}\mathcal{G}_n$, $\mathcal{F}_{n+1}\overset{\mathcal{C}}{\perp\!\!\!\perp}\mathcal{G}_n$, ce qui prouve que la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ est immergée dans la filtration $\mathcal{G}$. Or $(\mathcal{G},\sigma)$ est une filtration facteur produit, et on a donc obtenu le résultat suivant.

Théorème 90. *Si ε vérifie (3.7), la filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon},\sigma)$ est dynamiquement standard.*

3.3.2 Question ouverte pour le cas ε proche de 0

L'analyse précédente ne traite que le cas où ε n'est pas trop proche de 0, ce qui nous permet d'utiliser l'argument de percolation sous-critique. Lorsque ε devient trop petit, cet argument ne fonctionne plus et les points d'interrogation survivent dans l'automate enveloppe. Le couplage dynamique construit à l'aide de l'automate enveloppe ne permet donc pas d'obtenir le I-confort dynamique.

Par ailleurs, dans le cas où $\mathbb{A}$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous avons introduit dans le chapitre précédent un couplage en temps réel « naturel »pour l'ACP τ_ε et constaté qu'il ne permettait pas de montrer le I-confort pour ε petit à cause du résultat de Bramson et Neuhauser. On peut remarquer que ce couplage « naturel » est lui-même également un couplage dynamique (sa loi est invariante par décalage horizontal). Le résultat de Bramson et Neuhauser semble aussi un obstacle au I-confort dynamique de $(\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon},\sigma)$ pour ε petit.

Question 91. *Peut-on démontrer que pour ε assez proche de 0, la filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon},\sigma)$ ne satisfait pas le I-confort dynamique ?*

3.4 Le I-confort dynamique simple entraîne la standardité dynamique

La question de savoir si, comme dans le cas statique, le I-confort dynamique entraîne la standardité dynamique reste ouverte. Cependant la construction effectuée dans la section précédente (pour ε pas trop proche de 0) fournit un exemple de filtration facteur engendrée par un ACP où une certaine forme de I-confort dynamique apparaît, et cette forme est suffisamment simple pour que l'on puisse en déduire la standardité dynamique de la filtration. Le paragraphe suivant précise cette forme de I-confort dynamique qui permet de montrer la standardité dynamique.

1. Pour être précis, nous réalisons ici une *copie* de la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ engendrée par le processus de Markov stationnaire (X_n) évoluant suivant τ_ε, définie canoniquement page 58. Cependant pour ne pas alourdir les notations nous noterons de la même façon $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ et (X_n) ces copies.

Soit F un ACP sur un alphabet fini $\mathbb{A}$, de voisinage $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$. Dans un système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \sigma)$, on considère une implémentation $X = (X_n)_{n\leq 0} = \big(X_n(i), i \in \mathbb{Z}\big)_{n\leq 0}$ de l'ACP F, où $X_n(i) = X_n(0) \circ \sigma^i$ pour tous n, i, et où tous les X_n suivent la même loi, qui est donc invariante par l'ACP F. On suppose qu'il existe une famille $(U_n)_{n\leq 0} = \big(U_n(i), i \in \mathbb{Z}\big)_{n\leq 0}$ où les $U_n(i)$ sont des variables aléatoires i.i.d. uniformément distribuées sur $[0,1]$, avec $U_n(i) = U_n(0) \circ \sigma^i$ pour tous n, i, et que pour une certaine fonction de mise à jour locale $\varphi : \mathbb{A}^{\mathcal{N}} \times [0,1] \to \mathbb{A}$, on a pour tous $n \leq -1, i \in \mathbb{Z}$

$$X_{n+1}(i) = \varphi\Big((X_n(i+h))_{h\in\mathcal{N}}, U_{n+1}(i)\Big).$$

Pour chaque n, U_{n+1} est supposée indépendante de $(X_m)_{m\leq n}$. On se donne sur le même espace une autre implémentation $\bar{X} = (\bar{X}_n)_{n\leq 0}$ de l'ACP F, de même loi que X, avec $\bar{X}_n(i) = \bar{X}_n(0) \circ \sigma^i$ pour tous n, i, et telle que $\bar{X}$ est indépendant de la tribu engendrée par X et les $U_n(i)$. Pour tout $n_0 < 0$, on construit une nouvelle implémentation $\bar{X}^{n_0} = (\bar{X}^{n_0}_n)_{n\leq 0}$ de F en posant $X^{n_0}_n := \bar{X}^{n_0}_n$ pour tout $n \leq n_0$, puis en définissant récursivement les $X^{n_0}_n$, $n \geq n_0 + 1$ au moyen des mêmes variables aléatoires $U_n(i)$ et en utilisant la même formule de récurrence que pour X :

$$\bar{X}^{n_0}_{n+1}(i) := \varphi\Big((\bar{X}^{n_0}_n(i+h))_{h\in\mathcal{N}}, U_{n+1}(i)\Big).$$

On note $(\mathcal{F}, \sigma)$ la filtration facteur engendrée par X, et $(\bar{\mathcal{F}}^{n_0}, \sigma)$ celle engendrée par $\bar{X}^{n_0}$. Alors $\big(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}^{n_0}\big)$ est un couplage dynamique en temps réel, indépendant jusqu'au temps n_0, de la filtration facteur $(\mathcal{F}, \sigma)$.

Définition 92 (I-confort dynamique simple)**.** *Si la construction ci-dessus vérifie : pour tout $\delta > 0$, il existe n_0 tel que*

$$\mu\Big(\bar{X}^{n_0}_0(0) = X_0(0)\Big) > 1 - \delta, \tag{3.9}$$

alors on dit que $(\mathcal{F}, \sigma)$ est simplement dynamiquement I-confortable.

Notons qu'à une modification mineure près, la filtration facteur $(\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}, \sigma)$ construite dans la section 3.3.1 est simplement dynamiquement I-confortable lorsque ε vérifie (3.7). Le seul point qui pose problème est l'existence d'une copie indépendante du processus (X_n), ce que l'on résout en se plaçant dans un système plus gros, par exemple le carré cartésien $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu, \sigma \times \sigma)$. La propriété (3.9) découle du lemme 86 et de la proposition 89.

Le théorème suivant donne une réponse partielle à la question posée au début de la section.

Théorème 93. *Si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est simplement dynamiquement I-confortable, alors $(\mathcal{F}, \sigma)$ est dynamiquement standard.*

Démonstration. Pour tout $n_0 \leq -1$, on désigne par $U_{n_0+1}^0$ la collection des variables $U_{n_0+1}, \ldots, U_0$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bar{X}_0^{n_0}(0) = X_0(0)\Big) &= \sum_{a\in\mathbb{A}} \mu\Big(\bar{X}_0^{n_0}(0) = X_0(0) = a\Big) \\ &= \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbb{E}_\mu\left[\mu\Big(\bar{X}_0^{n_0}(0) = X_0(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)\right].\end{aligned}$$

Or, $\bar{X}_0^{n_0}(0)$ et $X_0(0)$ sont indépendants conditionnellement à $U_{n_0+1}^0$, car sachant $U_{n_0+1}^0$, $\bar{X}_0^{n_0}(0)$ ne dépend que de $\bar{X}_{n_0}$ tandis que $X_0(0)$ ne dépend que de X_{n_0}. On obtient donc

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bar{X}_0^{n_0}(0) = X_0(0)\Big) &= \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbb{E}_\mu\left[\mu\Big(\bar{X}_0^{n_0}(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)\mu\Big(X_0(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)\right] \\ &= \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbb{E}_\mu\left[\mu\Big(X_0(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)^2\right] \\ &= \mathbb{E}_\mu\left[\sum_{a\in\mathbb{A}} \mu\Big(X_0(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)^2\right].\end{aligned}$$

Soit M_{n_0} la variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu engendrée par $U_{n_0+1}^0$ définie par

$$M_{n_0} := \arg\max_{a\in\mathbb{A}} \mu\Big(X_0(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big).$$

(Si le maximum est atteint en plusieurs symboles de $\mathbb{A}$, on prend le premier dans un ordre convenu à l'avance sur $\mathbb{A}$.) On arrive alors à

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bar{X}_0^{n_0}(0) = X_0(0)\Big) &\leq \mathbb{E}_\mu\left[\sum_{a\in\mathbb{A}} \mu\Big(X_0(0) = M_{n_0} \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)\mu\Big(X_0(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)\right] \\ &= \mathbb{E}_\mu\left[\mu\Big(X_0(0) = M_{n_0} \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)\underbrace{\sum_{a\in\mathbb{A}} \mu\Big(X_0(0) = a \,|\, U_{n_0+1}^0\Big)}_{=1}\right] \\ &= \mu\Big(X_0(0) = M_{n_0}\Big).\end{aligned}$$

Comme $(\mathcal{F}, \sigma)$ est simplement dynamiquement I-confortable, étant donné $\delta > 0$ on peut choisir n_0 de sorte que (3.9) soit valide, et on obtient

$$\mu\Big(X_0(0) = M_{n_0}\Big) > 1 - \delta.$$

Choisissons δ de la forme 2^{-k} pour $k \geq 1$, l'argument ci-dessus nous fournit une variable aléatoire M_{n_k} à valeurs dans $\mathbb{A}$, mesurable par rapport à la tribu engendrée par les U_n, $n \leq 0$, telle que

$$\mu\Big(X_0(0) \neq M_{n_k}\Big) < 2^{-k}.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement $X_0(0) = \lim_{k\to\infty} M_{n_k}$, et donc $X_0(0)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}_0$ engendrée par les U_n, $n \leq 0$. Puis, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, comme $X_0(i) = X_0(0) \circ \sigma^i$ et puisque $\mathcal{G}_0$ est une tribu facteur, on a aussi $X_0(i)$ mesurable par rapport à $\mathcal{G}_0$. Enfin, comme la loi de X_n est invariante par F, pour tout $m \leq 0$ la loi jointe de $\Big((X_n)_{n\leq 0}, (\bar{X}_n)_{n\leq 0}, (U_n)_{n\leq 0}\Big)$ est la même que celle de $\Big((X_n)_{n\leq m}, (\bar{X}_n)_{n\leq m}, (U_n)_{n\leq m}\Big)$. En particulier, pour tout $n_0 < 0$, la loi jointe de $\big(X_0, \bar{X}_0^{n_0}\big)$ coïncide avec celle de $\big(X_m, \bar{X}_m^{n_0+m}\big)$. L'argument utilisé pour X_0 est donc également valable pour X_m, et on obtient que pour tout $m \leq 0$, X_m est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}_m$ engendrée par les U_n, $n \leq m$. On conclut comme pour le théorème 90 que la filtration facteur $(\mathcal{F}, \sigma)$ est immergée dans la filtration facteur produit $(\mathcal{G}, \sigma)$ engendrée par $(U_n)_{n\leq 0}$. □

Deuxième partie

Actions d'automates cellulaires algébriques sur des suites périodiques

Introduction

"On manque toutes les fréquences que l'on n'atteint pas." Ivan Wischnegradsky.

Nous allons voir au sein de cette partie qu'une discipline comme la musique peut amener à se poser des questions mathématiques liées aux automates cellulaires. Nous allons voir que les résultats mathématiques issus de ces questions peuvent ensuite être utilisés en composition musicale, comme un outil, et même avoir une application concrète dans un logiciel de composition grâce à l'informatique.

Lorsque nous entendons une mélodie, c'est à dire une suite de sons ayant chacun leur fréquence propre (un réel strictement positif en hertz), nous apprécions inconsciemment les « écarts » entre ces sons. Cette appréciation des écarts est nommée **loi de Weber**, qui est une loi psycho-physiologique, notre oreille est sensible non pas aux différences mais aux rapports de fréquences de sons. On peut donc introduire la relation d'équivalence sur l'ensemble $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$(f_1, f_2)\ \mathcal{R}\ (f_3, f_4) \Longleftrightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_4}{f_3}.$$

Les classes modulo $\mathcal{R}$ sont appelés **intervalles**. Soit $\{(f, rf)/f \in \mathbb{R}_+^*\}$, l'ensemble des couples de fréquences liés à l'intervalle r, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ donné. On notera que l'intervalle $r = 1$ est associé à l'ensemble des couples (f, f), c'est un intervalle appelé unisson. Si $r > 1$, c'est un intervalle ascendant et si $r < 1$ on dit que ce dernier est descendant.

On peut représenter le squelette d'une mélodie en connaissant seulement les intervalles qui la constituent et en projetant ensuite la structure intervallique sur une note de départ. On peut donc définir une mélodie de taille $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ grâce un couple

$$(f_0, R_{\ell-1}) \in \mathbb{R}_+^* \times (\mathbb{R}_+^*)^{\ell-1}$$

avec $R_{\ell-1} = \{r_1, r_2, ..., r_{\ell-1}\}$ les intervalles et $m_\ell := (f_0, f_0.r_1, f_0.r_1.r_2, ...) = (f_0.\prod_{i=1}^{s} r_i)_{s\in\{0,...,\ell-1\}}$
On notera que la mélodie m_ℓ peut être obtenue directement grâce à $(f_0, R_{\ell-1})$.

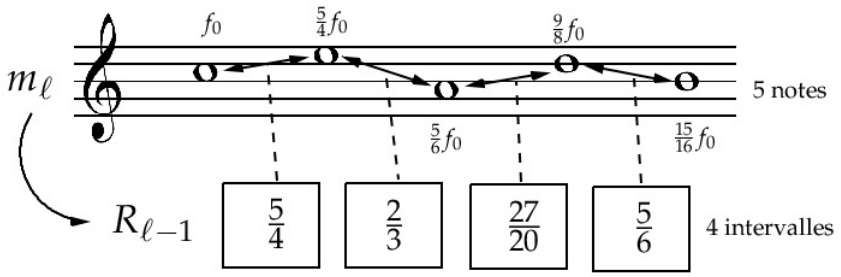


FIGURE 3.3 – Exemple de mélodie et ses intervalles

La structure intervallique $R_{\ell-1}$ d'une mélodie m_ℓ est invariante par homothéties : pour tout intervalle $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, soit

$$\begin{aligned} \varsigma_r : (\mathbb{R}_+^*)^\ell &\to (\mathbb{R}_+^*)^\ell \\ m_\ell &\mapsto r.m_\ell \end{aligned}$$

On a $\varsigma_r\Big((f_0.\prod_{i=1}^{s} r_i)_{s\in\{0,\dots,\ell-1\}}\Big) = (r.f_0.\prod_{i=1}^{s} r_i)_{s\in\{0,\dots,\ell-1\}}$ obtenable grâce à $(r.f_0, R_{\ell-1})$.

Notre oreille n'est donc pas sensible au point de départ mais aux intervalles qui constituent une mélodie. Quand nous écoutons une mélodie, nous cherchons à déterminer ses intervalles, mais le calcul ne s'arrête pas là. Nous sommes en effet capable de comparer les intervalles entre eux, dans leur manière de se succéder, s'ils sont identiques ou si ces derniers contiennent des symétries : **Notre oreille et notre cerveau se comportent dès lors comme un automate cellulaire**. En effet nous répétons des calculs locaux tous identiques selon une loi locale en passant d'une note après l'autre puis d'un intervalle après l'autre en les comparant. Nous présentons deux exemples significatifs :

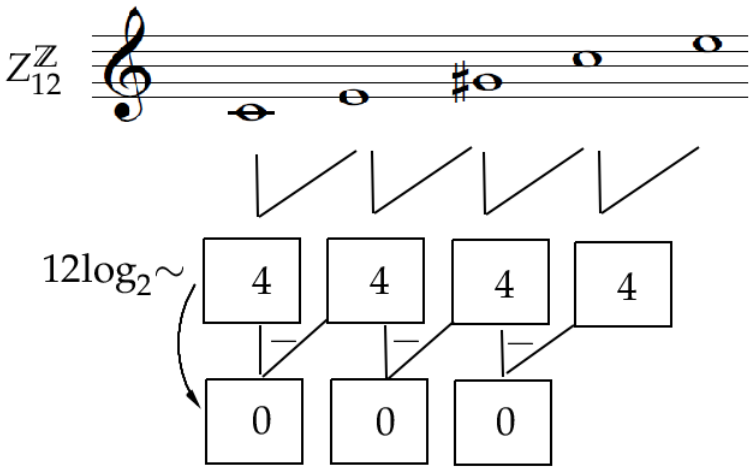


FIGURE 3.4 – L'automate Δ

Dans la figure ci-dessus, on se rend compte que l'intervalle reste toujours le même dans la mélodie. Notre cerveau réalise le calcul suivant : il compare l'intervalle $2^{\frac{4}{12}}$ (une tierce majeure du tempérament à 12 notes) qui se répète, et est donc capable de nous dire que cette suite intervallique est simple, car constituée du même intervalle.

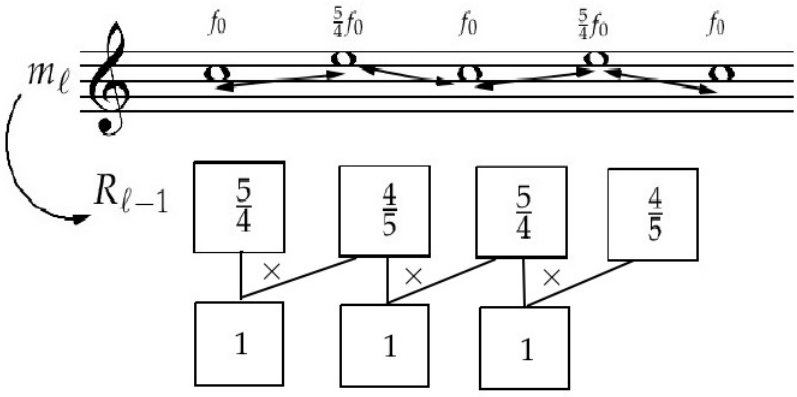


FIGURE 3.5 – L'automate τ

Dans la figure ci-dessus, on remarque que l'intervalle $\frac{5}{4}$ et son inverse $\frac{4}{5}$ se succèdent de manière périodique. Nous sommes également sensibles à cette symétrie, il s'agit également d'un automate particulier, de l'automate additif τ en l'occurrence même si la loi est multiplicative.

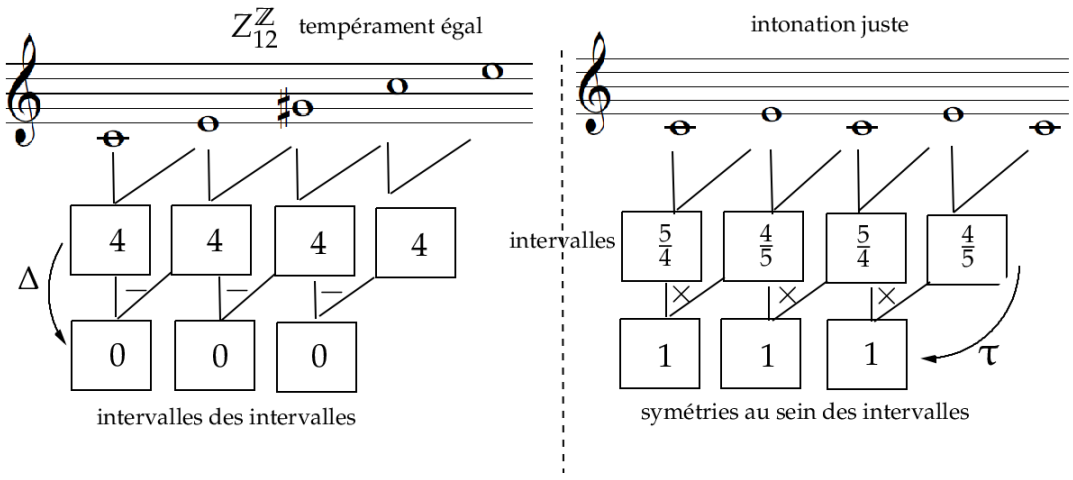


FIGURE 3.6 – La comparaison entre intervalles et des symétries au sein des intervalles, un calcul naturel. Les intervalles peuvent être de différentes natures, les lois également.

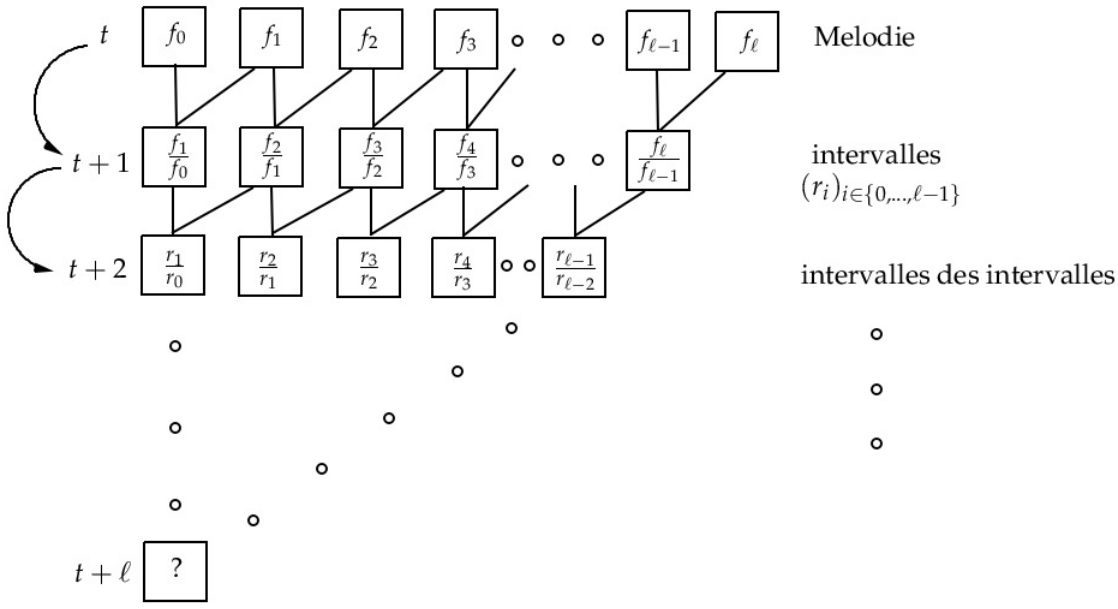


FIGURE 3.7 – Le calcul d'intervalles, un outil de classification permettant de réunir des mélodies différentes en apparence mais proches algébriquement.

Malgré sa nature multiplicative d'un point de vue physique et acoustique, nous nous représentons mentalement les enchaînements d'intervalles plutôt comme des additions d'intervalles, plutôt que comme des multiplications. En effet, notre cerveau et notre oreille appliquent naturellement un isomorphisme qui est la fonction $\log_2$, car notre écoute et notre perception des intervalles, les « écarts » est logarithmique. On pourra ainsi remplacer aisément la loi $\times$ par la loi $+$ grâce à cet isomorphisme et travailler sur $(\mathbb{R}, +)$ au lieu de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, par souci de simplicité comme vu dans la figure 3.7.

Pourquoi choisir le logarithme en base 2 ? Quand on fait jouer une même mélodie à divers instruments ne pouvant pas jouer à la même hauteur, on se rend compte d'un phénomène important : les sons joués ne sont pas à la même hauteur et pourtant, nous ne sommes pas choqués par le résultat. En effet, les instruments jouent à **l'octave** les uns par rapport aux autres. La notion d'octave est commune à toutes les civilisations. les fréquences jouées sont en fait toutes liées entre elles par la relation suivante dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$f_1 \mathcal{O} f_2 \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } f_2 = 2^n f_1.$$

Les classes modulo $\mathcal{O}$ sont appelées **notes** et sont notées pour $f \in \mathbb{R}_+^*$

$$\overline{f} = \{2^n.f / n \in \mathbb{Z}\}.$$

En utilisant l'isomorphisme entre $\left(\mathbb{R}_*^+, \times\right)$ et $\left(\mathbb{R}, +\right)$, on pourra considérer qu'une suite intervallique de taille ℓ étant codée comme une suite d'intervalles

$$\left(\boldsymbol{x}(i)\right)_{i\in\{0,\dots,\ell-1\}} \in \mathbb{R}^\ell$$

et que les opérations entre ces suites seront de nature additive. Si la suite intervallique est infinie dans les deux sens, on travaillera avec une suite

$$\left(\boldsymbol{x}(i)\right)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}.$$

Un problème survient alors : peut on travailler avec une infinité de notes ? Cette question est compliquée. On peut le faire grâce à l'informatique (UPISketch le permet par exemple), mais la solution universellement adoptée a été de travailler avec un nombre fini de notes, ce qui est appelé une échelle musicale.

Construire une échelle reviendra à choisir un nombre $\ell > 0$ fini, et ℓ réels : $f_0, f_1, f_2, ..., f_{\ell-1}$ appartenant à l'intervalle $[f_0, 2f_0[$.

Pour pouvoir jouer une mélodie à partir de n'importe quelle note, tout en conservant la structure intervallique de cette dernière, un système a émergé à partir du XVIIème siècle : le **tempérament égal**. Il s'agit de remplir une octave en douze sons ayant des intervalles tous égaux quand on passe d'une note à la suivante. Mathématiquement cela donne l'échelle suivante :

$$E_{12} := \{2^{\frac{k}{12}} f_0 / k \in \{0, ..., 11\}\} \overset{12.\log_2}{\sim} \mathbb{Z}_{12}.$$

Cette échelle a été retenue dans l'histoire de la musique, car avec un nombre limité de notes, on pouvait approcher les intervalles justes suivants : des approximations satisfaisantes de la quinte pure $\frac{3}{2}$ par $2^{\frac{7}{12}}$ et la quarte pure $\frac{4}{3}$ par $2^{\frac{5}{12}}$, et une approximation correcte de la tierce pure $\frac{5}{4}$ par $2^{\frac{4}{12}}$. On peut généraliser cette définition pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ avec

$$E_N := \{2^{\frac{k}{N}} f_0 / k \in \{0, ..., N-1\}\} \overset{N.\log_2}{\sim} \mathbb{Z}_N.$$

Ce système permet de partir de n'importe quelle note et de garder la structure intervallique d'une mélodie intacte mais des problèmes surviennent tels que le fait $2^{\frac{k}{12}} \notin \mathbb{Q}$. En effet, l'ensemble des intervalles appartenant aux rationnels, appelé **harmoniques naturelles** contient les intervalles les plus purs et stables acoustiquement. C'est à dire que dès que deux fréquences (f_1, f_2) sont émises ensemble avec $\frac{f_2}{f_1} \notin \mathbb{Q}$, un phénomène appelé battement intervient, les sinusoïdes ne sont plus en accord pur, une pollution sonore est alors émise. Cependant choisir comme échelle musicale E_N présente des avantages algébriques car $(E_N, \times) \overset{N.\log_2}{\sim} (\mathbb{Z}_N, +)$. **Quand on choisit un tempérament égal, on se munit finalement de la structure d'un groupe cyclique fini qui est un objet classique en mathématique**. Cependant il est important de remarquer qu'en choisissant cette structure de groupe, les directions descendantes sont supprimées à cause de l'équivalence à l'octave qui donne un caractère modulaire. On peut cependant utiliser l'équivalence à l'octave pour justifier par exemple dans $\mathbb{Z}_{12}$ que "$8 = -4$" c'est à dire prendre un intervalle modulo 12, pour ainsi obtenir également des intervalles descendants.

On choisira de travailler dans cette partie avec $(Z_N^{\mathbb{Z}}, +)$ pour étudier un premier cas concret car ce dernier possède des propriétés algébriques pratiques. Les automates que nous étudierons dans cette partie seront les automates τ et Δ qui sont isomorphes au calcul exposés dans la figure II.

Maintenant que nous avons fixé l'alphabet sur lequel nous allons travailler et les automates à étudier, nous allons nous focaliser majoritairement sur un type de suites particulière : **Les suites périodiques**. Les suites périodiques sont les suites de complexité minimale en mathématiques, ce sont des objets fréquemment étudiés et également quand des automates cellulaires agissent sur ces dernières mais aussi en musique : la notion de retour à un élément fixe est une caractéristique propre à beaucoup de civilisations et la musique occidentale n'y échappe pas. Les patterns mélodiques récurrents font partie des outils compositionnels auquels beaucoup de compositeurs ont fait et font appel. Pourquoi ne pas étudier l'action de τ et de Δ sur de telles suites ?

Vieru, un compositeur Roumain s'est posé des questions algébriques [3, 4, 5] sur le calcul d'intervalles, sans se rendre compte qu'il étudiait les itérations de l'automate Δ agissant sur des suites à valeurs dans $\mathbb{Z}_{12}$. Des mathématiciens étant également musiciens ont par la suite intéressés aux travaux d'A.Vieru et parmi eux, on peut citer comme principaux investigateurs Dan Vuza et Moreno Andreatta. Ces derniers ont repris les questions posées par A.Vieru et se sont placés dans le cadre de la théorie des opérateurs avec une approche algébrique et ont continué le travail sur $\mathbb{Z}_{12}^{\mathbb{Z}}$. Ces derniers ont caractérisé un certains nombre de résultats pour l'action de Δ dans le sens des images dans [21, 22, 23]. Au cours de ma thèse, j'ai pris contact avec M.Andreatta qui a établi le lien entre mon travail de thèse sur les automates cellulaires et la recherche qu'avait entamé A.Vieru sur le calcul d'intervalles. Ce dernier m'a fait remarquer qu'il n'avait jamais fait le lien entre son travail sur les intervalles et les automates cellulaires et que grâce au formalisme lié aux automates cellulaires de nouvelles avancées pourraient avoir lieu. Cette collaboration a donné lieu à un stage et une parution d'article mêlant mathématiques et musique dans [6] et enfin, à la seconde partie de cette thèse.

Nous nous sommes intéressés aux questions suivantes concernant l'action des automates τ et Δ agissant sur des suites périodiques :

— Comment décrire l'orbite d'une configuration périodique sous l'action de nos automates, y compris calculer les différents antécédents possibles ?

— Quelles sont les configurations périodiques dont l'orbite est cyclique ? Que peut on dire sur la longueur des cycles ?

— Quelles sont les configurations périodiques menant à la suite nulle ? Peut on trouver le temps relatif à cette notion ?

— Peut on décrire l'évolution de la période d'une configuration périodique au cours des itérations des nos automates ? Que se passe-t-il dans le sens des images et des antécédents ?

Pour répondre aux questions précédentes, Nous avons étudié τ et Δ dans le cadre plus général de la classe des automates **sigma polynomiaux**, c'est à dire qui sont des polynômes en σ, σ^{-1}, issues de puissance du shift. Comme nous le verrons, il existe un morphisme entre les polynômes de Laurent et cette classe d'automates cellulaires.

Nous verrons que si l'on connaît une suite de départ x alors il sera facile de donner une expression de son image par les automates grâce à l'isomorphisme avec l'anneau des polynômes de Laurent. On pourra en effet considérer un automate comme un polynôme. Cependant calculer les antécédents est une tâche plus compliquée. Une méthode exposée

dans cette partie est de trouver un automate appelé **dual**, qui permettra de calculer les antécédents de F et nous verrons en l'occurrence que Δ et τ sont duals. Le calcul des antécédents sera alors utilisé pour caractériser les changements de périodes dans le sens des antécédents car comme nous le verrons, la caractérisation des changements de périodes dépend des valeurs prises par les antécédents.

Pour $N \geq 2$, le théorème chinois permet de décomposer toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}_N$ en suites à valeurs dans $\mathbb{Z}_{p^k}$, où les p^k sont les puissances des nombres premiers apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de N, nous effectuons cette décomposition dans le cadre des suites périodiques. Chaque composante se décompose à son tour en suite **réductible**, c'est à dire donnant la suite **0** au bout d'un certain nombre d'itérations et une suite dite **reproductible**, c'est à dire revenant à son point initial après un certain nombre d'itérations. Nous proposons dans cette partie une caractérisation complète de la réductibilité et de la reproductibilité pour les deux automates Δ et τ ainsi qu'une étude des temps liés à ces notions, c'est à dire combien de temps une suite met pour se reconstituer ou devenir la suite nulle. Nous proposons aussi une caractérisation complète des antécédents, ce qui laisse une certaine part de liberté au compositeur.

Une question importante concerne l'évolution de la période dans le sens des images et des antécédents. Cette question est traitée dans le cas des automates τ et Δ dans la section 5.3.

Implémentation dans un logiciel

Lors de mon stage au Chili pendant l'été 2017, Alejandro Maas m'a dit : "Un jour tu feras peut être de la musique avec des automates cellulaires !".

L'UPIC est l'un des premiers outils de composition assistée par ordinateur. Sa particularité est qu'il prend le dessin comme principal moyen de saisie de l'information musicale. UPISketch, projet financé par des fonds européens et français en partenariat avec l'Université Européenne de Chypre, avait pour objectif de reproduire basiquement le concept de l'UPIC sur un type de machine bien particulier : la tablette. Cela a permis notamment d'en disséminer, en 2018, une dizaine d'exemplaires en libre accès dans des bornes spécialement conçues à cet effet dans plusieurs villes de Chypre. Il en existe maintenant des versions compatibles pour les systèmes Windows et OSX[2]. En parallèle de ma thèse j'ai collaboré avec le centre Iannis Xenakis pour participer au projet UPISketch. Mon travail a notamment consisté à implémenter les résultats mathématiques exposés dans cette deuxième partie dans un module appelé « automaton » dans le logiciel.

2. Liens de téléchargement des différentes versions : http ://centre-iannis-xenakis.org/upisketch

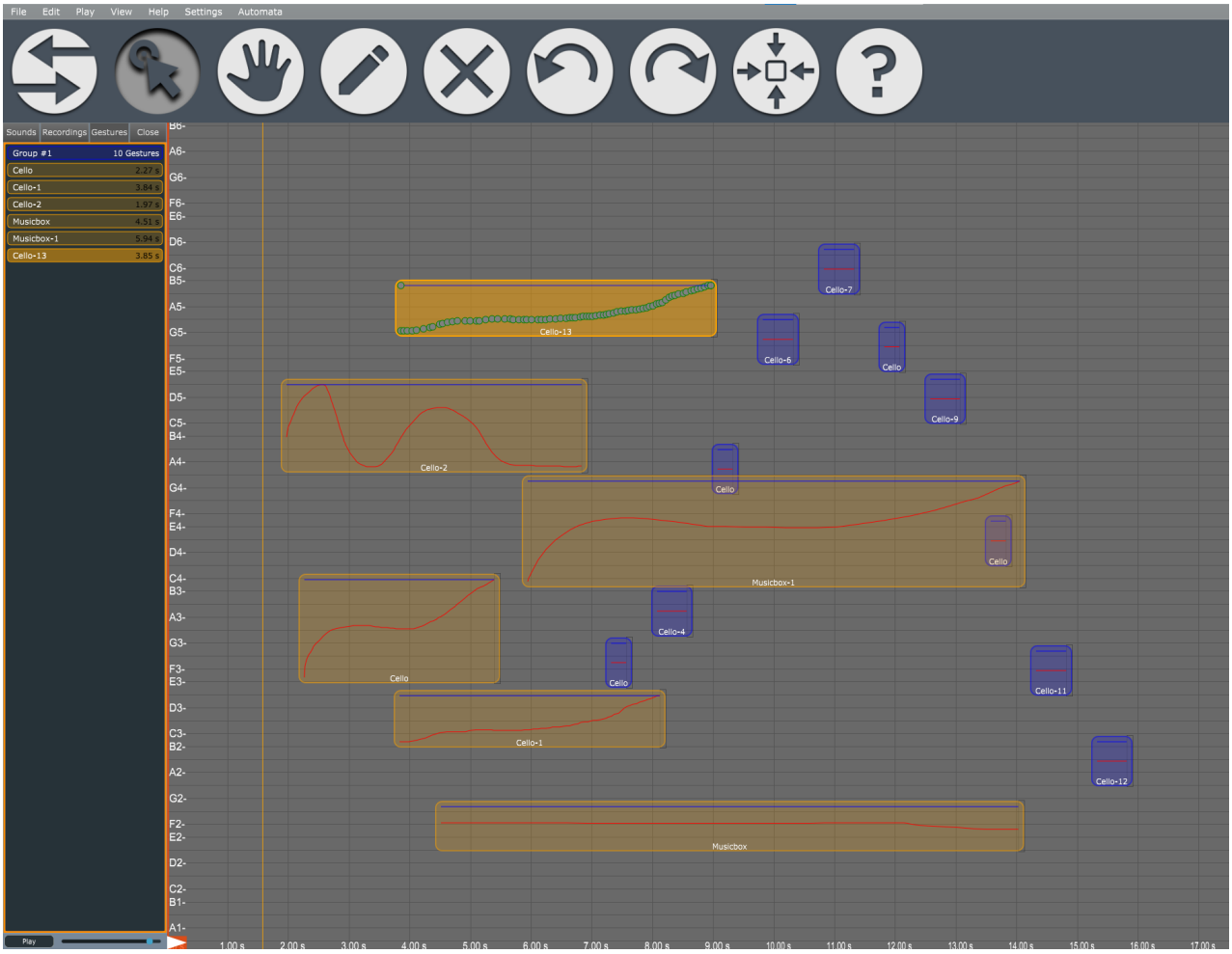


FIGURE 3.8 – Présentation d'UPISketch2, permettant de dessiner la musique et de se débarasser du problème de l'usage d'un nombre fini de possibilités fréquentiellement et rythmiquement. Le temps est représenté en abscisse et les fréquences en ordonnée.



FIGURE 3.9 – Choix des paramètres du module automaton permettant de générer des mélodies issues des automates τ et Δ.

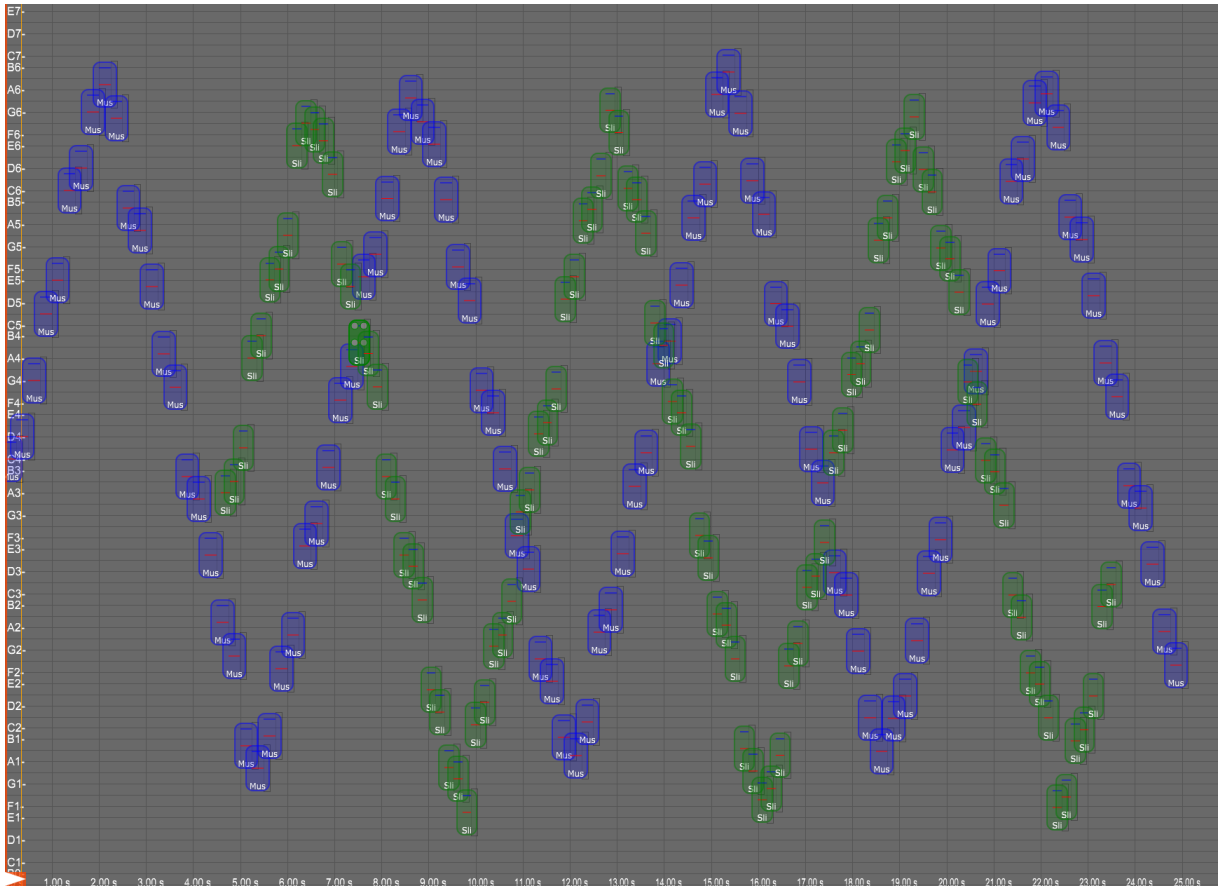


FIGURE 3.10 – Des lignes mélodiques provenant d'itérations d'automates cellulaires, créées à partir du module automaton.

Chapitre 4

Généralités sur les automates sigma-polynomiaux

Ce chapitre sert de boîte à outils commune aux deux chapitres suivants car les résultats sont indépendants de la nature de la suite sur laquelle agit l'automate. On rappelle que $(\mathbb{A}, +)$ désigne un groupe abélien fini dont la loi est notée additivement. On note toujours σ le décalage des coordonnées vers la gauche agissant sur $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$. On s'intéresse particulièrement dans cette partie à deux automates cellulaires déterministes de voisinage $\{0, 1\}$: τ, de fonction locale $(a, b) \mapsto a + b$, et Δ de fonction locale $(a, b) \mapsto b - a$. On remarque que ces deux automates peuvent s'écrire respectivement $\tau = \sigma + id$ et $\Delta = \sigma - id$. Ils font donc partie de la classe des automates cellulaires dits « σ-polynomiaux », présentée maintenant.

4.1 Automates cellulaires sigma-polynomiaux

Il est important de rappeler que tout groupe abélien $(\mathbb{A}, +)$ a naturellement une structure naturelle de $\mathbb{Z}$-module. On définit le produit d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ par un élément $g \in \mathbb{A}$ par

$$kg = \sum_{i=1}^{k} g \text{ si } k \geq 1,\ kg = 0_{\mathbb{A}} \text{ si } k = 0,\ kg = -\sum_{i=1}^{|k|} g \text{ si } k \leq 1.$$

Remarque 94. *Les morphismes d'un groupe abélien additif vers un autre sont exactement les applications $\mathbb{Z}$-linéaires. En particulier, σ est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, +)$ et donc du $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, +, .)$.*

Définition 95 (Automates σ-polynomiaux). *Un automate cellulaire F agissant sur $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ et de voisinage $\mathcal{N}$ partie finie de $\mathbb{Z}$ est dit* ***σ-polynomial*** *si il est de la forme*

$$F = \sum_{i \in \mathcal{N}} a_i \sigma^i$$

où $\mathcal{N}$ est une partie finie de $\mathbb{Z}$ et les a_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$ l'ensemble des automates σ-polynomiaux.

Puisque le décalage σ est un endomorphisme du groupe $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, comme cité dans la remarque 94 , la propriété suivante est immédiate :

Propriété 7. *Tout $F \in \mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$ est un endomorphisme de groupe de $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration. Soit $F = \sum_{i \in \mathcal{N}} a_i \sigma^i$ et soit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\mathbb{A}^{\mathbb{Z}})^2$ on a

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (\sum_{i \in \mathcal{N}} a_i \sigma^i)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} a_i \sigma^i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \text{ en distribuant sur } \sigma \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} a_i(\sigma^i \boldsymbol{x} + \sigma^i \boldsymbol{y}) \text{ car } \sigma \text{ est un morphisme} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} a_i \sigma^i \boldsymbol{x} + \sum_{i \in \mathcal{N}} a_i \sigma^i \boldsymbol{y} \\ &= \underbrace{F(\boldsymbol{x})}_{\in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}} + \underbrace{F(\boldsymbol{y})}_{\in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Donc F est un morphisme de groupes.

□

Propriété 8. *$(\mathbb{Z}[\sigma^{\pm}], +, \circ)$ est un anneau commutatif.*

Après avoir exposé la nature algébrique des automates σ-polynomiaux, nous exposons à présent un outil clef pour cette partie : le lien avec l'anneau des polynômes de Laurent. Ce dernier nous permettra d'utiliser des formules telles que le binôme de Newton dans cette partie et facilitera grandement le calcul des images d'un automate sigma-polynomial.

On rappelle que l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers est noté $(\mathbb{Z}[\mathbb{X}^{\pm}], +, \times)$. On écrit les polynômes de Laurent sous la forme :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \mathbb{X}^i \text{ où } (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \text{ est une familles presque nulle d'entiers.}$$

On note par $\mathbb{X}$ le monôme de premier degré pour ne pas confondre avec les variables aléatoires de la première partie. La preuve de la propriété suivante est laissée au lecteur.

Propriété 9 (Morphisme)**.** *L'anneau $(\mathbb{Z}[\sigma^{\pm}], +, \circ)$ est lié à l'anneau des polynômes de Laurent $(\mathbb{Z}[\mathbb{X}^{\pm}], +, \times)$ via le morphisme surjectif φ défini par :*

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}[\mathbb{X}^{\pm}], +, \times) &\to (\mathbb{Z}[\sigma^{\pm}], +, \circ) \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \mathbb{X}^i &\mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \sigma^i. \end{aligned}$$

Exemple 96. *En prenant les automates Δ et τ et en appliquant l'isomorphisme on réalise que* $\varphi((\mathbb{X}-1)(\mathbb{X}+1)) = \varphi(\mathbb{X}^2-1) = \sigma^2 - id = \Delta \circ \tau = \tau \circ \Delta$.

Les calculs seront donc énormément simplifiés. Nous présentons donc une proposition concernant τ et Δ qui sont les automates qui nous intéressent dans cette partie :

Propriété 10.

$$\tau^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sigma^i$$
$$et\ \ \Delta^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \binom{n}{i} \sigma^i.$$

Démonstration. En utilisant l'isomorphisme cité dans la propriété 9 il vient que :

$$\tau^n = (\sigma + id)^n \overset{prop.\ 9}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sigma^i$$
$$\text{et}\ \ \Delta^n = (\sigma - id)^n \overset{prop.\ 9}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \sigma^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \binom{n}{i} \sigma^i$$

Car il suffit d'appliquer le binôme de Newton dans les deux cas, en effet $\varphi((\mathbb{X}-1)^n) = \Delta^n$ et $\varphi((\mathbb{X}+1)^n) = \tau^n$. □

On comprend dès lors que, lorsque le groupe de base est $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, le **triangle de Pascal modulo** N va avoir une place cruciale dans la suite de cette partie quand nous étudierons l'action de τ et Δ sur des suites.

4.2 Antécédents et dualité entre automates

Nous nous intéressons dans cette partie aux images et antécédents d'un automate σ-polynomial et en particulier à l'action de τ et Δ. Nous présentons ici un lien unit ces deux automates, que l'on nommera **dualité**. Cette dualité signifie que le calcul des antécédents par l'un des automates revient à étudier les images par l'autre automate.

On rappelle que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ et tout $a \in \mathbb{A}$, on a défini page 39 $\tau_a^{-1}(\boldsymbol{x})$ comme l'unique configuration $\boldsymbol{y} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ telle que $\tau(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}(0) = a$. Récursivement on définit aussi, pour tout entier $n \leq -1$ et $a_{-1}, \dots, a_n \in \mathbb{A}$,

$$\tau^n_{a_{-1},\dots,a_n}(\boldsymbol{x}) := \tau^{-1}_{a_n}(\tau^{n+1}_{a_{-1},\dots,a_{n+1}}(\boldsymbol{x})).$$

La seule propriété de τ utilisée pour pouvoir définir cette notation était la bipermutativité. Ainsi on peut étendre cette notation au cas de tout automate bipermutatif, en particulier au cas de Δ.

Définition 97. *Pour tout automate F bipermutatif et tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, on note $F_a^{-1}(\boldsymbol{x})$ l'unique antécédent de $\boldsymbol{x}$ par F ayant comme coordonnée a en 0. Pour $n \leq 0$ et $A_n = (a_{-1}, ..., a_n) \in \mathbb{A}^{|n|}$, on note $F_{A_n}^n(\boldsymbol{x}) := F_{a_n}^{-1} \circ ... \circ F_{a_{-1}}^{-1}(\boldsymbol{x})$.*

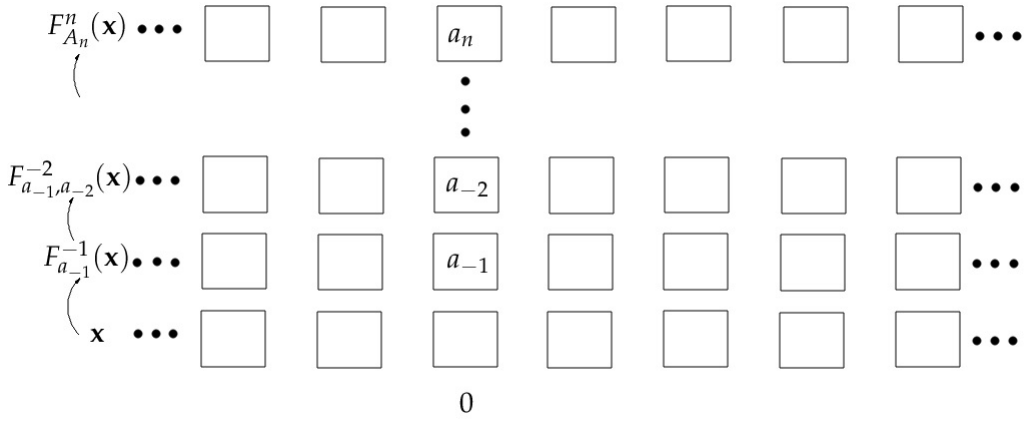


FIGURE 4.1 – Un seul élément permet de déterminer l'antécédent de l'étape n à $n-1$ pour un automate bipermutatif.

Nous en venons à la dualité qui permet de relier images et antécédents de τ et Δ.

Définition 98. *Soient F et G deux automates cellulaires agissant sur $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, de voisinage $\{0,1\}$ et de fonctions locales respectives f_F et f_G. On dit que F et G sont duals si*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{A},\ c = f_F(a, b) \iff b = f_G(a, c).$$

Remarque 99. *On remarque que si F et G sont duals, alors ils sont permutatifs à droite, puisque pour tout $a \in \mathbb{A}$, les applications $f_F(a, .)$ et $f_G(a, .)$ sont des bijections réciproques.*

Remarquons que σ est son propre dual, mais le cas qui nous intéresse ici est bien sûr la dualité de τ et Δ, qui découle de l'équivalence

$$\forall a, b, c \in \mathbb{A},\ c = a + b \iff b = c - a.$$

(Voir Figure 4.2.)

Soient F et G deux automates duals. Soit $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\boldsymbol{x}_n(i), i \in \mathbb{Z}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de configurations qui constitue un diagramme espace-temps pour F, c'est-à-dire telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{x}_{n+1} = F(\boldsymbol{x}_n)$. On considère pour tout $i \in \mathbb{Z}$ la configuration $\boldsymbol{y}_i$ définie par $\boldsymbol{y}_i(n) := \boldsymbol{x}_n(i)$. Alors $(\boldsymbol{y}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ constitue un diagramme espace-temps pour G.

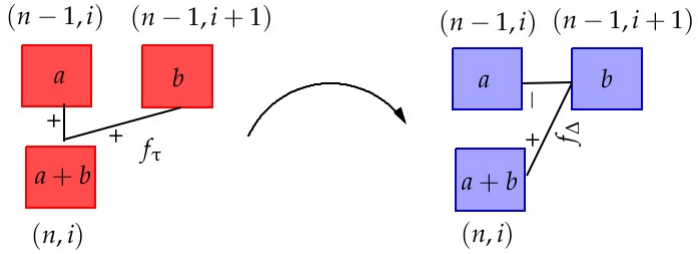


FIGURE 4.2 – Dualité de τ et Δ.

Si de plus F et G sont bipermutatifs, on en déduit que pour tous $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, $n \leq 0$, $A_n = (a_{-1}, ..., a_n) \in \mathbb{A}^{|n|}$ et $i \geq 0$,

$$F^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) = G^i(\boldsymbol{y})(n) \tag{4.1}$$

pour n'importe quelle configuration $\boldsymbol{y}$ telle que $\boldsymbol{y}(m) = (F^m\boldsymbol{x})(0)$ quand $m \geq 0$ et $\boldsymbol{y}(m) = a_m$ quand $n \leq m \leq -1$.

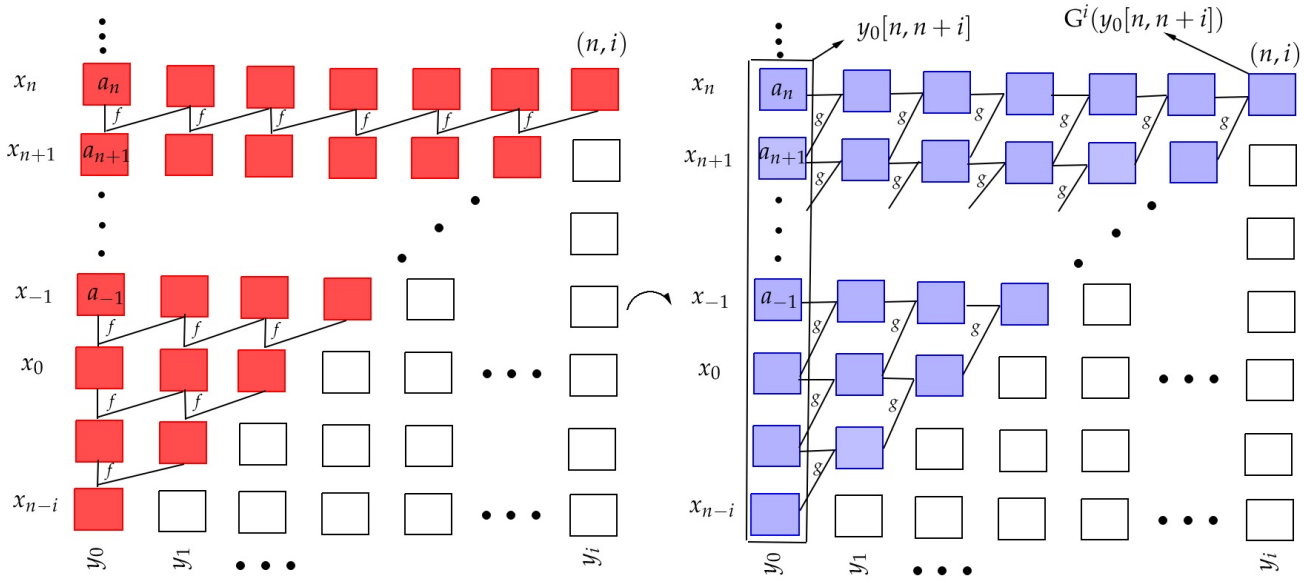


FIGURE 4.3 – Avec la dualité, on peut lire une grille de deux manières différentes et ainsi calculer le site (n,i) qui est un antécédent de la suite $\boldsymbol{x}_0$ par l'automate F.

Nous faisons le rappel suivant concernant les coefficients binomiaux : on définit les coefficients du binôme dans $\mathbb{Z}$ par

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \text{ si } k \geq 0, \binom{n}{k} = 0 \text{ sinon.}$$

La formule classique de récurrence

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

reste valable pour k et n dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons désormais voir un lemme qui va nous permettre de traiter plus facilement le calcul des antécédents, en effet dans la figure 4.2, on voit clairement que l'expression de la valeur du site (n,i) dépend des valeurs choisies pour les antécédents (i.e. le vecteur $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) mais aussi de sites étant l'image de la suite $\boldsymbol{x}$ de départ par l'automate F :

Lemme 100. *Pour $n \leq 0$, $k \geq 0$ et $i \geq 0$ avec $i > |n|$, soit $B(n,i,k) = \sum_{j=|n|}^{i} (-1)^j \binom{i}{j}\binom{n+j}{k}$ on a*

$$B(n,i,k) = \sum_{j=|n|}^{i} (-1)^j \binom{i}{j}\binom{n+j}{k} = (-1)^{k+n}\binom{i-k-1}{|n|-1}.$$

Démonstration. On note

$$c(n,i,k) := (-1)^n \binom{i-1}{|n|-1}\binom{0}{k}.$$

On remarque que pour $q > k$: $B(n, i-q, k-q) = 0$ car

$$B(n,i-q,k-q) = \sum_{j=|n|}^{i-q} (-1)^j \binom{i-q}{j}\binom{n+j}{k-q}$$

et pour tout $k > 0$: $c(n,i,k) = 0$ car $\binom{0}{k} = 0$.

Nous allons effectuer au sein de la preuve, une transformation d'Abel. On a en effet :

$$
\begin{aligned}
B(n,i,k) &= \sum_{j=|n|}^{i} (-1)^j \binom{i}{j}\binom{n+j}{k} \\
&= \sum_{j=|n|}^{i} (-1)^j \Big[\binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}\Big]\binom{n+j}{k} \\
&= \sum_{j=|n|}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-1}\binom{n+j}{k} + \sum_{j=|n|}^{i} \binom{i-1}{j}\binom{n+j}{k} \\
&= \sum_{j=|n|-1}^{i-1} (-1)^{j+1} \binom{i-1}{j}\binom{n+j+1}{k} + \sum_{j=|n|}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j}\binom{n+j}{k} \\
&= (-1)^n \binom{i-1}{|n|-1}\binom{0}{k} + \sum_{j=|n|}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j} \overbrace{\Big[\binom{n+j}{k} - \binom{n+j+1}{k}\Big]}^{=-\binom{n+j}{k-1}} \\
&= (-1)^n \binom{i-1}{|n|-1}\binom{0}{k} - \sum_{j=|n|}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j}\binom{n+j}{k-1} \\
&= c(n,i,k) - B(n,i-1,k-1) \\
&= \sum_{q=0}^{k} (-1)^q c(n,i-q,k-q) + \overbrace{B(n,i-k-1,-1)}^{=0} \\
&= (-1)^k c(n,i-k,0) \\
&= (-1)^k (-1)^n \binom{i-k-1}{|n|-1} \\
&= (-1)^{k+n} \binom{i-k-1}{|n|-1}.
\end{aligned}
$$

□

Proposition 101. *Pour $n \leq -1$ et $A_n = (a_{-1}, \ldots, a_n)$ donné. Soit $i \geq 0$.*
Si $i < |n|$ alors

$$\Delta^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_{n+j}$$

$$\text{et } \tau^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} a_{n+j}.$$

Si $i \geq |n|$ alors

$$\Delta^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) = \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+i} \binom{i-k-1}{|n|-1} \boldsymbol{x}(k)$$

$$\text{et } \tau^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) = \sum_{j=0}^{|n|-1} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+i} (-1)^{i+n+k} \binom{i-k-1}{|n|-1} \boldsymbol{x}(k).$$

Démonstration. Le cas où $i < |n|$ est simplement issu d'une application direct du morphisme de la propriété 9 et la dualité entre τ et Δ.

En effet, en prenant $F = \tau$, $G = \Delta$ et $\boldsymbol{y}$ comme dans (4.1), on a

$$\begin{aligned}
\Delta^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) &= \tau^i(\boldsymbol{y})(n) \text{par dualité de } \tau \text{ et } \Delta, \text{ et (4.1)} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \boldsymbol{y}(n+j) \text{ par la propriété 10} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_{n+j} \text{ par définition de } \boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

On a aussi en inversant les rôles de τ et Δ et en redéfinissant $\boldsymbol{y}$ en conséquence :

$$\begin{aligned}
\tau^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) &= \Delta^i(\boldsymbol{y})(n) \text{ par dualité} \\
&= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \boldsymbol{y}(n+j) \text{ par la propriété 10} \\
&= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} a_{n+j} \text{ par définition de } \boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

Pour $i \geq |n|$ nous avons (en choisissant à chaque fois la configuration $\boldsymbol{y}$ appropriée

suivant le sens de la dualité utilisée) :

$$
\begin{aligned}
\Delta^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) &= \boldsymbol{\tau}^i(\boldsymbol{y})(n) \text{ par dualité} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \boldsymbol{y}(n+j) \text{ par la propriété } 10 \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{j=|n|}^{i} \binom{i}{j} \Delta^{n+j}(\boldsymbol{x})(0) \text{ par définition de } \boldsymbol{y} \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{j=|n|}^{i} \binom{i}{j} \Big(\sum_{k=0}^{n+j} (-1)^{n+k+j} \binom{n+j}{k} \boldsymbol{x}(k) \Big) \text{ par définition de } \Delta \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{j=|n|}^{i} \binom{i}{j} \Big(\sum_{k=0}^{n+i} (-1)^{n+k+j} \binom{n+j}{k} \boldsymbol{x}(k) \Big) \text{ car pour } k > n+j : \binom{n+j}{k} = 0 \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{j=|n|}^{i} \Big(\sum_{k=0}^{n+i} (-1)^{n+k+j} \binom{i}{j} \binom{n+j}{k} \boldsymbol{x}(k) \Big) \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+i} \Big(\sum_{j=|n|}^{i} (-1)^{n+k+j} \binom{i}{j} \binom{n+j}{k} \boldsymbol{x}(k) \Big) \text{ en inversant les sommes} \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+i} (-1)^{n+k} \boldsymbol{x}(k) \overbrace{\Big(\sum_{j=|n|}^{i} (-1)^{j} \binom{i}{j} \binom{n+j}{k} \Big)}^{\overset{100}{=} B(n,i,k)} \\
&\overset{\text{prop. } 100}{=} \sum_{j=0}^{|n|-1} \binom{i}{j} a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+i} \binom{i-k-1}{|n|-1} \boldsymbol{x}(k).
\end{aligned}
$$

On a d'autre part :

$$
\begin{aligned}
\tau^n_{A_n}(\boldsymbol{x})(i) &= \Delta^i(\boldsymbol{y})(n) \text{ par dualité} \\
&= \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}\boldsymbol{y}(n+j) \text{ par la propriété } 10 \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}a_{n+j} + \sum_{j=|n|}^{i}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}\tau^{n+j}(\boldsymbol{x})(0) \text{ par définition de } \boldsymbol{y} \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}a_{n+j} + \sum_{j=|n|}^{i}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}\Big(\sum_{k=0}^{n+j}\binom{n+j}{k}\boldsymbol{x}(k)\Big) \text{ par définition de } \tau \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}a_{n+j} + (-1)^i\sum_{j=|n|}^{i}\sum_{k=0}^{n+i}\binom{i}{j}\binom{n+j}{k}\boldsymbol{x}(k) \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}a_{n+j} + (-1)^i\sum_{k=0}^{n+i}\sum_{j=|n|}^{i}\binom{i}{j}\binom{n+j}{k}\boldsymbol{x}(k) \text{ en inversant les sommes} \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}a_{n+j} + (-1)^i\sum_{k=0}^{n+i}\boldsymbol{x}(k)\Big[\overbrace{\sum_{j=|n|}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{n+j}{k}}^{=B(n,i,k)}\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{|n|-1}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+j}(-1)^{k+n+i}\binom{i-k-1}{|n|-1}\boldsymbol{x}(k).
\end{aligned}
$$

□

Chapitre 5

Suites réductibles et reproductibles

5.1 Automates sigma-polynomiaux agissant sur des suites périodiques

5.1.1 Les suites périodiques et automates

On s'intéresse aux suites périodiques à valeurs dans $\mathbb{Z}_N$, où $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Les résultats de cette partie se généralisent à tout groupe abélien fini $(\mathbb{A}, +)$.

Définition 102 (Suite ℓ-périodique)**.** *Soit $\ell \geq 1$, une suite $\boldsymbol{x}$ est dite ℓ-**périodique** si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{x}(i) = \boldsymbol{x}(i+\ell)$, i.e $\sigma^\ell \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.*
On note $\mathcal{C}_N^\ell$ l'ensemble des suites ℓ-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{Z}_N$.

On définit à présent la fonction donnant la période minimale d'une suite :

Définition 103 (La fonction période)**.** *On définit la fonction*

$$\begin{aligned} \pi :\ & \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}_* \cup \{\infty\} \\ & \boldsymbol{x} \mapsto \pi(\boldsymbol{x}) := \min\{\ell \geq 1 / \sigma^\ell \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\} \end{aligned}$$

avec la convention usuelle $\min \emptyset := \infty$.

Si $\boldsymbol{x}$ est ℓ-périodique alors $\pi(\boldsymbol{x}) | \ell : \ell$ n'est pas forcément la période minimale. On peut donc dire que $\mathcal{C}_N^\ell = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}} / \pi(\boldsymbol{x}) | \ell\}$. Quand on désigne la période minimale $\pi(\boldsymbol{x})$, on dira que **la période de $\boldsymbol{x}$ est** ℓ ou que $\boldsymbol{x}$ **est de période** ℓ. On définit l'ensemble des suites de période ℓ par $\mathcal{P}_N^\ell := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}} / \pi(\boldsymbol{x}) = \ell\}$. Bien évidemment $\mathcal{P}_N^\ell \subset \mathcal{C}_N^\ell$.

Propriété 11. *Soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ périodiques.*

$$\pi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) | \text{PPCM}(\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})).$$

Si $\pi(\boldsymbol{x})$ et $\pi(\boldsymbol{y})$ sont premiers entre eux alors $\pi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \pi(\boldsymbol{x}).\pi(\boldsymbol{y})$

Démonstration. — $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux suites dans $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$.
Soit $m := \text{PPCM}(\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) = \min\{\ell \geq 1 / \pi(\boldsymbol{x}) | \ell \text{ et } \pi(\boldsymbol{y}) | \ell\}$. Donc il existe k_1 et k_2 entiers tels que $m = k_1\pi(\boldsymbol{x}) = k_2\pi(\boldsymbol{y})$, et

$$\begin{aligned}\sigma^m(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \sigma^m(\boldsymbol{x}) + \sigma^m(\boldsymbol{y}) \\ &= \overbrace{\sigma^{k_1\pi(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}}^{=\boldsymbol{x}} + \overbrace{\sigma^{k_2\pi(\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}}^{=\boldsymbol{y}} \\ &= \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

Donc $\pi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) | \text{PPCM}(\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y}))$.

— Supposons à présent que $\pi(\boldsymbol{x})$ et $\pi(\boldsymbol{y})$ soient premiers entre eux. Soit $p \geq 1$ tel que p soit diviseur premier de $\pi(\boldsymbol{x})\pi(\boldsymbol{y})$. On constate que p divise $\pi(\boldsymbol{x})$ ou $\pi(\boldsymbol{y})$ mais pas les deux, et que $\ell := \frac{\pi(\boldsymbol{x})\pi(\boldsymbol{y})}{p}$ est multiple de $\pi(\boldsymbol{x})$ ou $\pi(\boldsymbol{y})$ mais pas les deux.

On ne peut pas avoir $\boldsymbol{x}$ qui soit ℓ-périodique et $\boldsymbol{y}$ qui le soit aussi et vice versa. On peut ainsi trouver $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\boldsymbol{x}(i+\ell) - \boldsymbol{x}(i) = 0$ mais $\boldsymbol{y}(i+\ell) - \boldsymbol{y}(i) \neq 0$
Donc $\pi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \min\{s \in \mathbb{N} / \sigma^s(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\} = \text{PPCM}(\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) = \pi(\boldsymbol{x})\pi(\boldsymbol{y})$, puisque $\pi(\boldsymbol{x})$ et $\pi(\boldsymbol{y})$ sont premiers entre eux.

□

Propriété 12. *Soit $F \in \mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$ et $\ell \geq 1$. Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_N^{\ell}$, alors $F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{C}_N^{\ell}$.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_N^{\ell}$, on remarque simplement que comme F et σ commutent il vient $\sigma^{\ell} \circ F(\boldsymbol{x}) = F \circ \sigma^{\ell}(\boldsymbol{x}) = F\big(\overbrace{\sigma^{\ell}(\boldsymbol{x})}^{=\boldsymbol{x}}\big) = F(\boldsymbol{x})$, donc $F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{C}_N^{\ell}$. □

Une propriété naturelle découle directement de la propriété 12.

Propriété 13. *Si $\boldsymbol{x}$ est une suite périodique, alors $\pi\big(F(\boldsymbol{x})\big) | \pi(x)$.*
En particulier la suite $\Big(\pi\big(F^n(\boldsymbol{x})\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour la relation de divisibilité.

Nous étudierons l'évolution de la période sous l'action des automates Δ et τ dans la section 5.3.

5.1.2 Deux sous groupes importants : Les suites réductibles et reproductibles

Nous allons voir à présent deux sous groupes fondamentaux de $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ pour cette partie :

Définition 104 (Réductibilité)**.** *Soit $F \in \mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$. Une suite $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ est dite F-**réductible** si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F^n(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. L'ensemble des suites F-réductibles est noté*

$$\text{Red}_F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(F^n),$$

et l'ensemble des suites F-réductibles et ℓ-périodiques est noté

$$\mathrm{Red}_F(\mathcal{C}_N^\ell) := \mathcal{C}_N^\ell \bigcap \mathrm{Red}_F.$$

On définit le ***le temps de réductibilité*** *d'une suite* $\boldsymbol{x}$ *par*

$$t_{\mathrm{red}}(\boldsymbol{x}) := \min\{t \geq 0 / F^t(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

On remarque que pour tout $t \geq t_{\mathrm{rep}}(\boldsymbol{x})$ on a aussi $F^t(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

Définition 105 (Reproductibilité)**.** *Soit $F \in \mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$. Une suite $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ est dite* ***F-reproductible*** *si il existe $n \geq 1$ tel que $F^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. L'ensemble des suites reproductibles est noté*

$$\mathrm{Rep}_F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F^n - id),$$

et l'ensemble des suites reproductibles et ℓ-périodiques est noté

$$\mathrm{Rep}_F(\mathcal{C}_N^\ell) := \mathcal{C}_N^\ell \bigcap \mathrm{Rep}_F.$$

On définit le ***le temps de reproductibilité*** *d'une suite* $\boldsymbol{x}$ *par*

$$t_{\mathrm{rep}}(\boldsymbol{x}) := \min\{t \geq 1 / F^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}.$$

On remarque que pour tout t multiple de $t_{\mathrm{rep}}(\boldsymbol{x})$ on a aussi $F^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Remarque 106. *Pour tout $F \in \mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$ et tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\mathcal{C}_N^\ell$, $\mathrm{Rep}_F(\mathcal{C}_N^\ell)$ et $\mathrm{Red}_F(\mathcal{C}_N^\ell)$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ stables par F. Red_F est un sous groupe de $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ stable par F étant une union croissante des sous groupes $\ker(F^n)$ qui sont stables par F. De même Rep_F est un sous groupe de $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ stable par F étant une union croissante des sous groupes $\ker(F^{n!} - id)$ qui sont aussi stables par F.*

Proposition 107.

$$\mathrm{Red}_F(\mathcal{C}_N^\ell) \cap \mathrm{Rep}_F(\mathcal{C}_N^\ell) = \mathrm{Red}_F \cap \mathrm{Rep}_F = \{\mathbf{0}\}.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Red}_F \cap \mathrm{Rep}_F$. La réductibilité de $\boldsymbol{x}$ entraîne que $F^t(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ pour tout $t \geq t_{\mathrm{red}}(\boldsymbol{x})$, et la reproducibilité entraîne que $F^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ pour tout t multiple de $t_{\mathrm{rep}}(\boldsymbol{x})$. En prenant t à la fois supérieur à $t_{\mathrm{red}}(\boldsymbol{x})$ et multiple de $t_{\mathrm{rep}}(\boldsymbol{x})$, on obtient $F^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

□

Décomposition en suites réductibles et reproductibles

Nous voyons à présent un théorème qui généralise un théorème de Andreatta et Vuza présent dans [21], qui traitait seulement le cas de l'automate Δ.

Théorème 108. *Soit $F \in \mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$. Toute suite $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_N^\ell$ peut être décomposée de manière unique comme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{red} + \boldsymbol{x}_{rep}$, avec $\boldsymbol{x}_{red} \in \mathrm{Red}_F(\mathcal{C}_N^\ell)$ et $\boldsymbol{x}_{rep} \in \mathrm{Rep}_F(\mathcal{C}_N^\ell)$. En d'autres termes,*

$$\mathcal{C}_N^\ell = \mathrm{Rep}_F(\mathcal{C}_N^\ell) \oplus \mathrm{Red}_F(\mathcal{C}_N^\ell).$$

Démonstration. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_N^\ell$, comme $\mathcal{C}_N^\ell$ est un ensemble fini, d'après le principe des tiroirs, il existe un couple (r,t) avec $r \geq 0$ et $t \geq 1$ tel que $F^r(\boldsymbol{x}) = F^{r+t}(\boldsymbol{x})$ et par induction pour tout $s \geq 0$ on a $F^r(\boldsymbol{x}) = F^{r+st}(\boldsymbol{x})$. Puis pour tout $m \geq r$ et tout $s \geq 0$, on a aussi $F^{m+st}(\boldsymbol{x}) = F^m(\boldsymbol{x})$. Soit $k \geq 1$ tel que $kt \geq r$, on a $F^{kt+st}(\boldsymbol{x}) = F^{kt}(\boldsymbol{x})$. On pose $\boldsymbol{x}_{\text{red}} := \boldsymbol{x} - F^{kt}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{x}_{\text{rep}} := F^{kt}(\boldsymbol{x})$, de sorte que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\text{red}} + \boldsymbol{x}_{\text{rep}}$.

On a

$$F^r(\boldsymbol{x}_{\text{red}}) = F^r(\boldsymbol{x} - F^{kt}(\boldsymbol{x})) = F^r(\boldsymbol{x}) - \overbrace{F^{r+kt}(\boldsymbol{x})}^{=F^r(\boldsymbol{x})} = \mathbf{0}$$

donc $\boldsymbol{x}_{\text{red}}$ est réductible. D'autre part :

$$F^{st}(\boldsymbol{x}_{\text{rep}}) = F^{(k+s)t}(\boldsymbol{x}) = F^{st} \circ F^{kt}(\boldsymbol{x}) = F^{kt}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_{\text{rep}}$$

donc $\boldsymbol{x}_{\text{rep}}$ est reproductible.

Grâce à la proposition 107 il vient que $\mathcal{C}_N^\ell = \mathrm{Rep}_F(\mathcal{C}_N^\ell) \oplus \mathrm{Red}_F(\mathcal{C}_N^\ell)$.

□

Remarque 109. *Le théorème ci dessus est un cas particulier d'un résultat classique sur l'itération d'une application d'un ensemble fini dans lui-même utilisé en cryptographie dans la méthode rho de Pollard.*

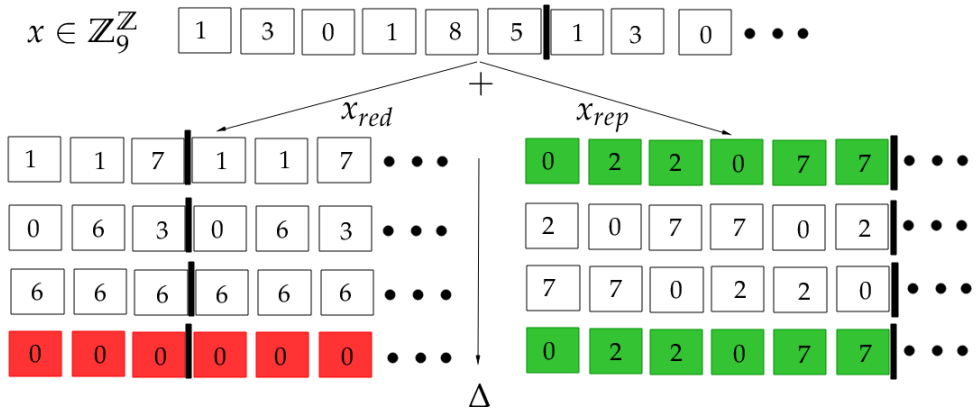


FIGURE 5.1 – Une décomposition bien particulière, exemple où $F = \Delta$.

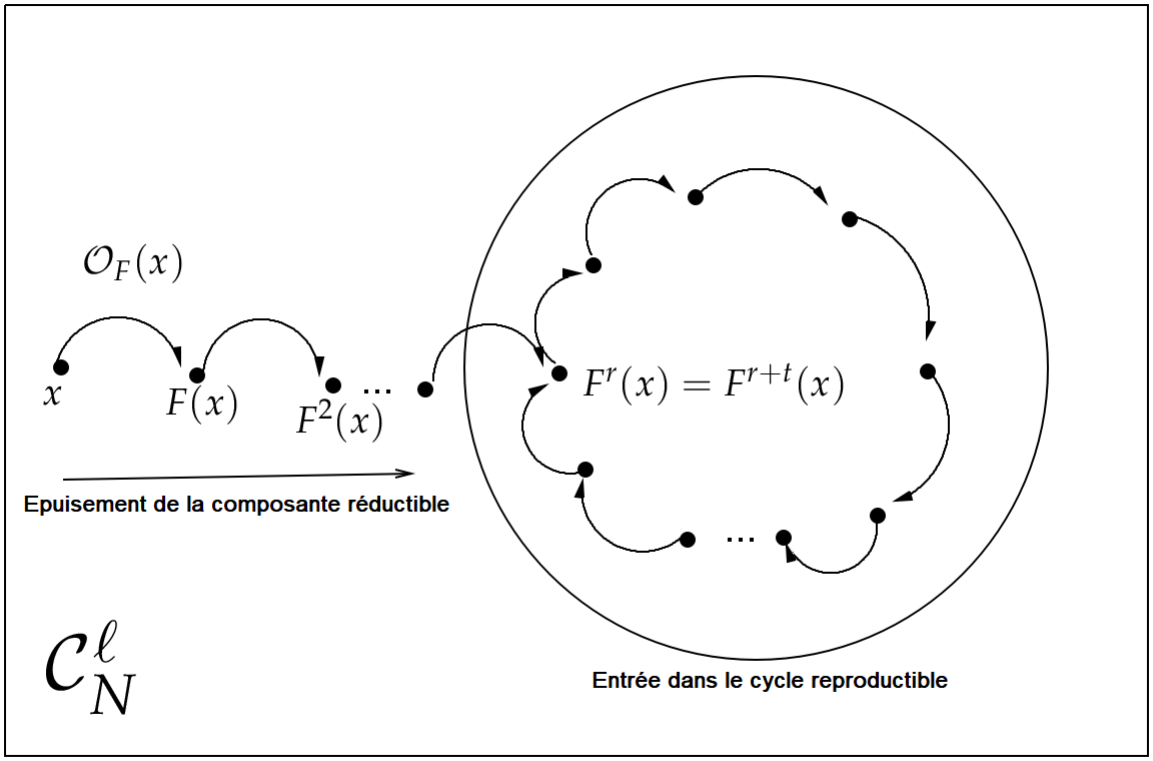


FIGURE 5.2 – Action d'un automate sigma-polynomial F sur une configuration périodique $\boldsymbol{x}$, et les différents temps mis en jeu. Cas où le couple d'entiers (r, t) est le plus petit pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$ ayant les propriétés $r \geq 0$, $t \geq 1$ et $F^r(\boldsymbol{x}) = F^{r+t}(\boldsymbol{x})$.

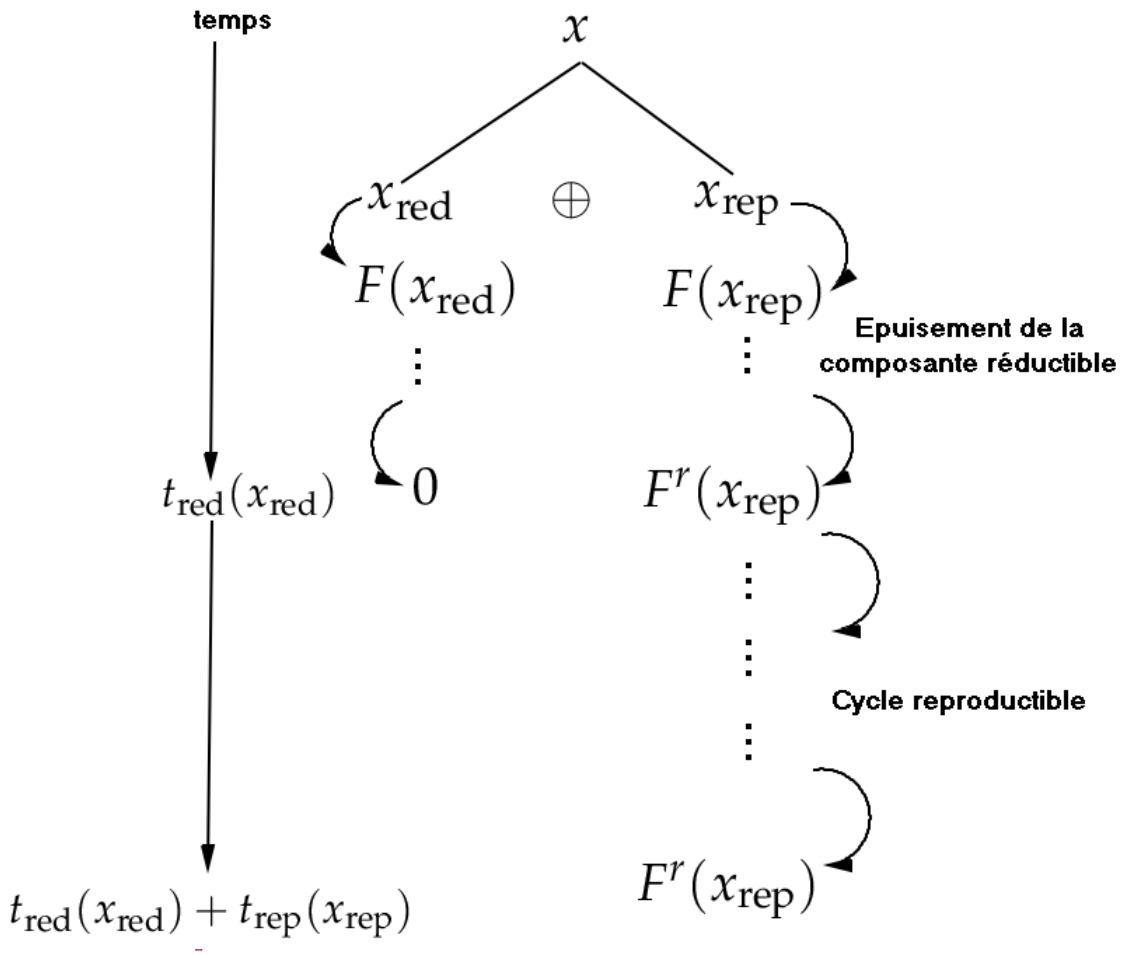


FIGURE 5.3 – Action d'un automate sigma-polynomial F sur une configuration périodique x, et les différents temps mis en jeu.

Des questions comme le temps de réductibilité, de reproductibilité, la taille de l'orbite d'une suite seront étudiées plus tard dans cette partie.

Nous nous concentrons à présent exclusivement sur le cas où $F \in \{\Delta, \tau\}$.

5.1.3 Décomposition en sous-groupes p-maximaux de $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$

Soit $N = p_1^{k_1}...p_\ell^{k_\ell}$ où $(p_i)_{i\in\{1,...,\ell\}}$ sont les facteurs premiers de N. On rappelle le théorème classique suivant, qui peut être vu comme une conséquence du théorème des restes chinois que nous allons étendre par la suite sur $\mathbb{Z}$:

Théorème 110 (décomposition en sous groupe de $\mathbb{Z}_N$)**.** *Pour tout $i \in \{1,\dots,\ell\}$, notons $Q_i = N/p_i^{k_i}$. Alors*

1. *Les entiers $Q_1,\dots,Q_\ell$ sont premiers entre eux.*
2. *Pour tout $i \in \{1,\dots,\ell\}$, l'ensemble $G_{p_i^{k_i}} := Q_i\mathbb{Z}_N$ est l'unique sous-groupe de $Q_i\mathbb{Z}_N$ à $p_i^{k_i}$ éléments. Ce groupe est cyclique.*
3. *Le morphisme surjectif $z \mapsto Q_i z \mod N$ de $\mathbb{Z}$ dans G_i a pour noyau $p_i^{k_i}\mathbb{Z}_N$. Par passage au quotient, il fournit l'isomorphisme $z \mod p_i^{k_i} \mapsto Q_i z \mod N$ de $\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$ dans $G_{p_i^{k_i}}$.*
4. *Soit $(a_1,\dots,a_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ une solution de l'équation de Bezout $a_1Q_1 + \cdots + a_\ell Q_\ell = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}_N$, le ℓ-uplet $(a_1Q_1x,\dots,a_\ell Q_\ell x)$ est l'unique $(y_1,\dots,y_\ell) \in G_{p_1^{k_1}} \times \cdots \times G_{p_\ell^{k_\ell}}$ tel que $y_1 + \cdots + y_\ell = x$.*
5. *Ainsi, le groupe $\mathbb{Z}_N = \bigoplus_{i=1}^{\ell} G_{p_i^{k_i}}$ est isomorphe à $\bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$.*

En effet, prenons $\mathbb{Z}_{12}$ comme exemple :

$$\mathbb{Z}_{12} = \frac{12}{2^2}\mathbb{Z}_{12} \oplus \frac{12}{3}\mathbb{Z}_{12} = 3\mathbb{Z}_{12} \oplus 4\mathbb{Z}_{12} = \{0,3,6,9\} \oplus \{0,4,8\} := G_4 \oplus G_3.$$

En étendant sur $\mathbb{Z}$ le théorème précédent, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 111 (Isomorphisme)**.**

$$\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{i\in\{1,\dots,\ell\}} G_{p_i^{k_i}}^{\mathbb{Z}} \overset{\varphi}{\sim} \bigotimes_{i\in\{1,\dots,\ell\}} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}^{\mathbb{Z}}.$$

Nous donnons sur la figure 5.4, un exemple dans $\mathbb{Z}_{12}^{\mathbb{Z}}$ de la décomposition en sous groupe p-maximaux avec l'isomorphisme précedemment évoqué.

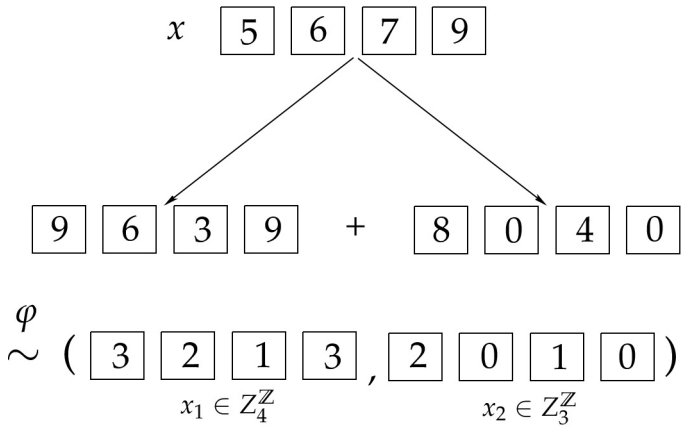


FIGURE 5.4 – Le recodage d'une suite de $\mathbb{Z}_{12}^{\mathbb{Z}}$.

5.1.4 Utilisation du théorème de structure

Proposition 112. *Soit $F \in \mathbb{Z}[\sigma^{\pm}]$. Supposons qu'on a un isomorphisme ψ du groupe additif fini $\mathbb{A}$ vers un produit fini $\mathbb{A}_1 \times \cdots \times \mathbb{A}_r$ de groupes additifs finis. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, notons F_i l'automate cellulaire sur $\mathbb{A}_i^{\mathbb{Z}}$ défini comme F en remplaçant σ par le décalage σ_i sur $\mathbb{A}_i^{\mathbb{Z}}$. Notons Ψ l'isomorphisme de $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ vers $\mathbb{A}_1^{\mathbb{Z}} \times \cdots \times \mathbb{A}_r^{\mathbb{Z}}$ défini par $\Psi(\boldsymbol{x}) := (\psi(\boldsymbol{x}(i))_{i\in\mathbb{Z}}$. Notons $(F_1, \ldots, F_r)$ le morphisme de $\mathbb{A}_1^{\mathbb{Z}} \times \cdots \times \mathbb{A}_r^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même défini par*

$$(F_1, \ldots, F_r)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r) := (F_1(\boldsymbol{x}_1), \ldots, F_r(\boldsymbol{x}_r)).$$

Alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\Psi} & \prod_{i=1}^{r} \mathbb{A}_i^{\mathbb{Z}} \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (F_1,\ldots,F_r)} \\ \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow[\Psi]{} & \prod_{i=1}^{r} \mathbb{A}_i^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Corollaire 113. *Gardons les hypothèses et notations de la proposition précédente. Fixons $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ et notons $\Psi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r)$.*

1. *La suite $\boldsymbol{x}$ est réductible pour F si et seulement si $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ le sont pour $F_1, \ldots, F_r$ respectivement. Dans ce cas, $t_{\mathrm{red}}(F) = \max_{i=1}^{r} t_{\mathrm{red}}(F_i)$.*
2. *La suite $\boldsymbol{x}$ est reproductible pour F si et seulement si $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ le sont pour $F_1, \ldots, F_r$ respectivement. Dans ce cas, $t_{\mathrm{rep}}(F) = \bigvee_{i=1}^{r} t_{\mathrm{red}}(F_i)$.*

Démonstration. Ce résultat découle des équivalences suivantes, valables pour tout entier $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} F^n(\boldsymbol{x}) = 0_{\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}} &\iff \forall i \in \{1,\dots,r\}, \quad F_i^n(\boldsymbol{x}_i) = 0_{\mathbb{A}_i^{\mathbb{Z}}} \\ &\iff \forall i \in \{1,\dots,r\}, \quad n \geq t_{\mathrm{red}}(F_i) \\ &\iff n \geq \max_{i=1}^{r} t_{\mathrm{red}}(F_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} &\iff \forall i \in \{1,\dots,r\}, \quad F_i^n(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_i \\ &\iff \forall i \in \{1,\dots,r\}, \quad t_{\mathrm{red}}(F_i) \mid n \\ &\iff \bigvee_{i=1}^{r} t_{\mathrm{red}}(F_i) \mid n. \end{aligned}$$

□

Ces résultats permettent de simplifier l'étude des automates Δ et τ. En effet, tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit fini de groupes cycliques, ce qui permet de se ramener au cas où $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_N$. Ensuite, le théorème chinois montre que tout groupe cyclique est isomorphe à un produit fini de groupes cycliques dont les ordres sont des puissances de nombres premiers, ce qui permet de se ramener au cas où $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_{p^k}$ avec p premier et $k \geq 1$.

Prenons pour exemple $F = \tau$:

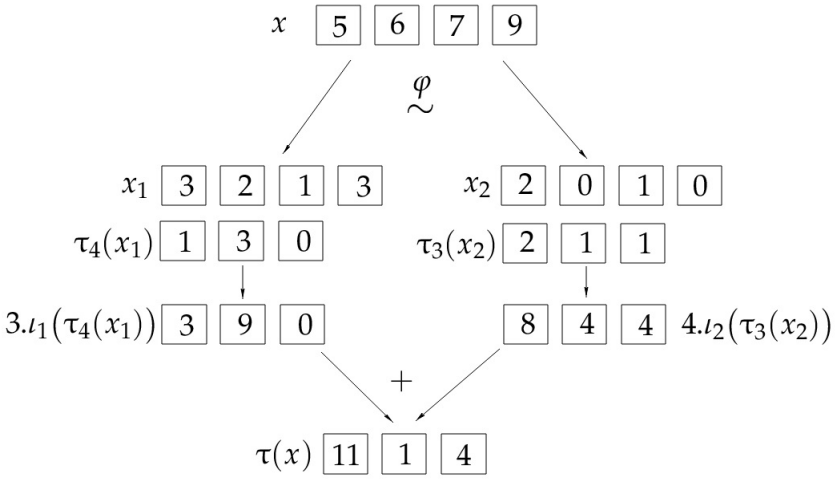


FIGURE 5.5 – Exemple avec une suite dans $\mathbb{Z}_{12}^{\mathbb{Z}}$, avec ι_i les identités.

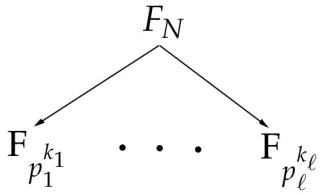


FIGURE 5.6 – Un automate sigma-polynomal se scinde en plusieurs automates suivant la décomposition en nombres premiers de N.

On pourra donc grâce à cette décomposition se ramener au cas où N est une puissance d'un nombre premier p, ce que l'on suppose désormais.

Nous allons nous centrer sur l'étude des automates τ et Δ comme évoqué précédemment, dont les formules sont données explicitement dans les propriétés 10 et 101.

Nous présentons à présent une propriété essentielle dans le cas de l'étude de τ_p et Δ_p pour p premier donné. Cette dernière est un conséquence directe du lemme de Lucas sur la divisilité des coefficients binomiaux :

Lemme 114 (p-scaling)**.** *Soit p premier et $k \geq 1$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$.*
Pour tout $n \geq 0$ on a

$$\tau^{p^n}(\boldsymbol{x}) = \sigma^{p^n}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}$$
$$\Delta^{p^n}(\boldsymbol{x}) = \sigma^{p^n}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}.$$

Démonstration. D'après le lemme de Lucas, on sait que pour tout $i \in \{1, ..., p^n - 1\}$:

$$\binom{p^n}{i} = 0 \mod p.$$

Ceci a pour conséquence directe que

$$\tau^{p^n}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{p^n} \binom{n}{i} \sigma^i \boldsymbol{x} = \overbrace{\sum_{i=1}^{p^n-1} \binom{n}{i} \sigma^i \boldsymbol{x}}^{=\mathbf{0}} + \boldsymbol{x} + \sigma^{p^n}\boldsymbol{x}$$
$$\text{et } \Delta^{p^n}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{p^n} (-1)^{n+i} \binom{n}{i} \sigma^i \boldsymbol{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^{p^n-1} (-1)^{n+i} \binom{n}{i} \sigma^i \boldsymbol{x}}_{=\mathbf{0}} - \boldsymbol{x} + \sigma^{p^n}\boldsymbol{x}$$

□

On utilisera également le corollaire ci-dessous du lemme de Lucas utilisé dans le lemme précédent :

Corollaire 115. *Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $i \in \{0, ..., p^n - 1\}$*

$$\binom{p^n - 1}{i} = (-1)^i \mod p.$$

5.2 Réductibilité et reproductibilité pour l'action de τ et Δ

5.2.1 Caractérisation de la réductibilité

Caractérisation de la Δ-réductibilité

Pour montrer le théorème concernant la caractérisation de la Δ-réductibilité, nous allons devoir utiliser le lemme suivant :

Lemme 116. *Soient $N \geq 2$, $K \geq 1$ et $L \geq 1$ des entiers. Notons M le PPCM de K et de L. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$. Si $\boldsymbol{x}$ est dans le noyau de $(\sigma^K - id)(\sigma^L - id)$, alors $\boldsymbol{x}$ est MN-périodique.*

Démonstration. En effet, notons d le PGCD de K et de L et K', L' les entiers tels que $K = dK'$ et $L = dL'$. Alors $M = KL' = K'L$. Les identités remarquables

$$(\mathbb{X}^K - 1) \sum_{n=0}^{L'-1} \mathbb{X}^{Kn} = \mathbb{X}^M - 1 = (\mathbb{X}^L - 1) \sum_{n=0}^{K'-1} \mathbb{X}^{Ln}$$

permettent d'écrire $(\mathbb{X}^M - 1)^2 = (\mathbb{X}^K - 1)(\mathbb{X}^L - 1)Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}[\mathbb{X}]$. Donc

$$(\sigma^M - id)^2(\boldsymbol{x}) = \big(Q(\sigma) \circ (\sigma^K - id)(\sigma^L - id)\big)(\boldsymbol{x}) = Q(\sigma)(0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}) = 0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}.$$

La suite $\boldsymbol{y} := (\sigma^M - id)(\boldsymbol{x})$ est donc M-périodique. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\boldsymbol{x}(i + MN) - \boldsymbol{x}(i) = \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{y}(i + nM) = \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{y}(i) = N\boldsymbol{y}(i) = 0_{\mathbb{Z}_N}.$$

La suite $\boldsymbol{x}$ est donc MN-périodique. □

Nous donnons à présent l'énoncé du théorème permettant de caractériser la nature des suites réductibles et leur temps de réductibilité :

Théorème 117. *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$. Alors $\boldsymbol{x}$ est Δ-réductible si et seulement si $\boldsymbol{x}$ est périodique de période une puissance de p. Dans ce cas, on a $t_{\text{red}}(\boldsymbol{x}) \leq k\pi(\boldsymbol{x})$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur l'exposant $k \geq 1$.

Dans le cas où $k = 1$, la suite $\boldsymbol{x}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $\Delta^{p^n}(\boldsymbol{x}) = \sigma^{p^n}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$. Ainsi, $\Delta^{p^n}(\boldsymbol{x}) = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{x}$ est p^n-périodique. On en déduit l'équivalence annoncée et l'inégalité $t_{\text{red}}(x) \leq \pi(\boldsymbol{x})$, en encadrant $t_{\text{red}}(\boldsymbol{x})$ entre deux puissances consécutives de p. Cela montre le résultat lorsque $k = 1$.

Fixons maintenant $k \geq 2$ et supposons la propriété vraie au rang $k-1$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$. Alors la suite $p\boldsymbol{x}$ est à valeurs dans le sous-groupe $p\mathbb{Z}_{p^k}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_{p^{k-1}}$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $p\boldsymbol{x}$.

Si $\boldsymbol{x}$ est périodique de période p^m, alors $p\boldsymbol{x}$ est périodique de période divisant p^m. Par hypothèse de récurrence, px est donc Δ-réductible et $t_{\text{red}}(p\boldsymbol{x}) \leq (k-1)\pi(p\boldsymbol{x}) \leq (k-1)p^m$. Donc

$$p\Delta^{(k-1)p^m}(\boldsymbol{x}) = \Delta^{(k-1)p^m}(p\boldsymbol{x}) = 0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}.$$

La suite $\Delta^{(k-1)p^m}(x)$, elle aussi p^m-périodique, est donc à valeurs dans le sous-groupe $p^{k-1}\mathbb{Z}_{p^k}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. La propriété au rang 1 assure que

$$\Delta^{kp^m}(x) = \Delta^{p^m}\left(\Delta^{(k-1)p^m}(\boldsymbol{x})\right) = 0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}.$$

Ainsi, $\boldsymbol{x}$ est Δ-réductible et $t_{\text{red}}(\boldsymbol{x}) \leq kp^m$.

Réciproquement, supposons que $\boldsymbol{x}$ est Δ-réductible, Soit n le plus petit entier naturel n tel que $\Delta^{p^n}(\boldsymbol{x}) = 0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}$. Par linéarité, $\Delta^{p^n}(p\boldsymbol{x}) = 0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}$. Par hypothèse de récurrence, $p\boldsymbol{x}$ est donc périodique et sa période de la forme $\pi(p\boldsymbol{x}) = p^\ell$ avec ℓ entier naturel. Notons $\boldsymbol{y} = \sigma^{p^\ell}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$. Comme $p\boldsymbol{y} = \sigma^{p^\ell}(p\boldsymbol{x}) - p\boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}$, la suite y est à valeurs dans le sous-groupe $p^{k-1}\mathbb{Z}_{p^k}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Le lemme 116 montre que

$$\sigma^{p^n}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y} = \Delta^{p^n}(\boldsymbol{y}) = \left(\Delta^{p^n} \circ (\sigma^{p^\ell} - id)\right)(\boldsymbol{y}) = \left((\sigma^{p^\ell} - id) \circ \Delta^{p^n}\right)(\boldsymbol{x}) = 0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}$$

Donc $\left((\sigma^{p^n} - id) \circ (\sigma^{p^\ell} - id)\right)(\boldsymbol{x}) = 0$. D'après le lemmme 116, la suite $\boldsymbol{x}$ est donc $p^{\max(n,\ell)}p^k$-périodique, ce qui achève la récurrence.

□

Remarque 118. *Le fait qu'une suite $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$ réductible selon Δ soit p^m-périodique a déjà été prouvé dans [22]. A été apporté ici, une preuve plus claire et plus explicite, ainsi qu'une borne nouvelle sur le temps de réductibilité.*

Une autre manière de voir la réductibilité selon Δ : les polynômes de Hilbert.

Comme $\mathbb{Z}$ est infini on peut identifier tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[\mathbb{X}]$ à la suite $\left(P(i)\right)_{i\in\mathbb{Z}}$. On note $\vartheta(P)$ cette suite. On note également $\vartheta_N(P) := \left(P(i) \mod N\right)_{i\in\mathbb{Z}}$, pour $N \geq 2$. Notons $\tilde{\Delta}$ l'endomorphisme de $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$ défini par

$$(\tilde{\Delta}P)(\mathbb{X}) = P(\mathbb{X}+1) - P(\mathbb{X}).$$

de sorte que l'on a la relation de conjugaison suivante

$$\Delta \circ \vartheta = \vartheta \circ \tilde{\Delta},$$

qui se traduit par le diagramme commutatif suivant

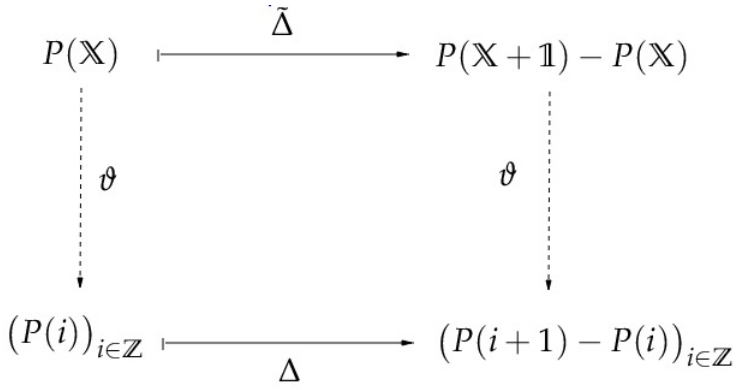


FIGURE 5.7 – Relation de conjugaison entre Δ et $\tilde{\Delta}$.

Remarque 119. *Le diagramme commutatif précédent est également valable quand on remplace ϑ par ϑ_N.*

On définit à présent la famille des **polynômes de Hilbert** :

Définition 120. *On définit la famille des polynômes de Hilbert, notée $(H_d)_{d\geq 0}$ par*

$$H_d(\mathbb{X}) := \frac{1}{d!}\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)...(\mathbb{X}-d+1) = \frac{1}{d!}\prod_{i=0}^{d-1}(\mathbb{X}-i).$$

Les propriétés classiques des polynômes de Hilbert sont introduites dans [24], nous citerons donc rapidement certaines propriétés remarquables sans démonstration :

Propriété 14. *On a les propriétés suivantes :*

- *Ces polynômes prennent des valeurs entières aux points entiers.*
- *Pour tout $d \geq 1$, $\tilde{\Delta}H_d = H_{d-1}$ et $\tilde{\Delta}H_0 = 0$.*
- *La famille $(H_d)_{d\geq 1}$ est une base de $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$, et tout polynômes $P \in \mathbb{Q}[\mathbb{X}]$ peut s'écrire sous la forme :*

$$P = \sum_{d=0}^{\infty}(\tilde{\Delta}^d P)(0)H_d.$$

— *Les polynômes de $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$ qui prennent des valeurs entières aux points entiers sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers des H_d.*

Nous énonçons à présent une proposition importante permettant de lier Δ et $(H_d)_{d\geq 0}$:

Proposition 121. *Dans le cas où Δ agit sur des suites à valeurs dans $\mathbb{Z}_N$, avec $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 0$ on a*

$$\ker(\Delta^n) = Vect\big(\vartheta_N(H_0), ..., \vartheta_N(H_{n-1})\big).$$

Démonstration. $\supset$: Soit une suite $\boldsymbol{x}$ telle qu'il existe $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1})$ avec $\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \vartheta_N(H_k)$. Il vient

$$\begin{aligned}\Delta^n(\boldsymbol{x}) = \Delta^n\big(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \vartheta_N(H_k)\big) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \Delta^n\big(\vartheta_N(H_k)\big), \text{ car } \Delta \text{ est un morphisme} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \vartheta_N\big(\overbrace{\tilde{\Delta}^n(H_k)}^{=0}\big) \text{ d'après la propriété 14 et la relation 5.2.1} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

$\subset$: On procède par récurrence : Le cas où n est égal à 0 est immédiat, puisque les deux sous groupes sont réduits à $\{0_{\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}}\}$. Si la propriété est vraie au rang n, et si $\boldsymbol{x} \in \ker(\Delta^{n+1})$, alors $\Delta(\boldsymbol{x}) \in \ker(\Delta^n)$. Par hypothèse de récurrence, il existe des entiers $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vartheta_N(H_{k-1}) = \Delta\big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vartheta_N(H_k)\big).$$

Comme Δ est un morphisme, la suite $\boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vartheta_N(H_k)$ est dans le noyau de Δ. Cette dernière est ainsi constante, autrement dit de la forme $\alpha_0 \vartheta_N(H_0)$, avec α_0 entier, ce qui montre la propriété au rang $n+1$.

□

Il se trouve que les suites polynomiales envoyant $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_N$ sont périodiques, cela découle du fait suivant.

Lemme 122. *Soit $d \in \mathbb{N}$. Factorisons $d!$ sous la forme $A_d B_d$ avec A_d divisant une puissance de N et B_d premier avec N : Alors la suite $(H_d(i) \mod N)_{i\in\mathbb{Z}}$ est $A_d N$-périodique.*

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{Z}$. Alors $A_d N$ divise le produit

$$d!\big(H_d(i + A_d N) - H_d(i)\big) = \prod_{j=0}^{d-1}(i + A_d N - j) - \prod_{j=0}^{d-1}(i - j).$$

Donc N divise $B_d\big(H_d(i+\ell_d) - H_d(i)\big)$. Comme B_d premier avec N, le théorème de Gauss montre que N divise $H_d(i+\ell_d) - H_d(i)$.

□

Dans le cas où $N = p^k$ avec p premier et $k \geq 1$, l'énoncé se simplifie.

Corollaire 123. *Soient $d \in \mathbb{N}$. Notons $\nu_p(d!)$ l'exposant de p dans la décomposition de facteurs premiers de $d!$. Alors la suite $(H_d(i) \mod p^k)_{i\in\mathbb{Z}}$ est $p^{k+\nu_p(d!)}$-périodique.*

En remarquant que pour tout entier $\mu \geq 1$, le nombre de multiples de p^μ dans $\{1,\dots,d\}$ est $\lfloor d/p^\mu \rfloor$, on obtient

$$\nu_p(d!) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \Big\lfloor \frac{d}{p^\mu} \Big\rfloor \leq \Big\lfloor \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{d}{p^\mu} \Big\rfloor = \Big\lfloor \frac{d}{p-1} \Big\rfloor.$$

Tous ces résultats fournissent une preuve directe de l'implication

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}, \quad \boldsymbol{x} \text{ réductible } \implies \boldsymbol{x} \text{ périodique de période une puissance de } p.$$

Plus précisément, si $\Delta^n(\boldsymbol{x}) = 0$, alors $\boldsymbol{x}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des $(H_d)_{0\leq d\leq n-1}$, si bien que $\pi(\boldsymbol{x})$ divise $p^{k+\lfloor (n-1)/(p-1)\rfloor}$.

Trouver une borne inférieure du temps de Δ-réductibilité, une question difficile

Comme vu précédemment, il est possible de donner une borne supérieure pour le temps de réductibilité. Cependant la question de l'existence d'une borne inférieure est assez compliquée. Dans une première approche, on pensait que si $\pi(\boldsymbol{x}) = p^m$ alors $t^{\Delta}_{\text{red}}(\boldsymbol{x}) \geq p^{m-1}+1$.

Une première idée était de comparer les ensembles $\mathcal{P}_p^{p^m}$ et $\Delta^{-p^m}(\boldsymbol{x})$ et de prouver l'égalité entre ces deux ensembles. Hélas on obtient que $\mathcal{P}_p^{p^m} \subset \Delta^{-p^m}$ mais pas la réciproque en général.

Cette minoration du temps de réductibilité par $p^{m-1}+1$ est ainsi fausse, sauf pour $k = 1$. Pour s'en convaincre, regarder la suite $\boldsymbol{x}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_{p^2}$ définie par $\boldsymbol{x}(i) = H_{p-1}(i) \mod p^2$. Cette suite vérifie que $\boldsymbol{x}$ est dans le noyau de Δ^p et est p^2-périodique, mais pas p-périodique (car $H_{p-1}(0) = 0$ et $H_{p-1}(p) = 1$), donc $\pi(\boldsymbol{x}) = p^2$ alors que $t_{\text{red}}(\boldsymbol{x}) = p$.

En revanche, la proposition 123 fournit une majoration de la période en fonction du temps de réductibilité (et indirectement un minoration). Si une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$ est réductible en temps t, elle est combinaison linéaire de $H_0, H_1, ..., H_{t-1}$ modulo p^k et donc $p^{k+\nu_p((t-1)!)}$ périodique.

Relation de conjugaison entre Δ et τ

Comme nous allons le voir à présent, les résultats valables pour Δ peuvent être utilisés pour τ, nous l'explicitons via la propriété suivante :

Soit ζ l'endomorphisme de $\mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$, que l'on appelle l'**alternant**, défini par

$$\zeta : \boldsymbol{x} \mapsto \big((-1)^i \boldsymbol{x}(i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}.$$

On remarque aisément que $\zeta^{-1} = \zeta$ car $\zeta^2 = id$. Soit $-\Delta = id - \sigma$, nous donnons une relation permettant de lier tout d'abord $-\Delta$ et τ grâce à ζ :

Proposition 124. *On a la relation suivante :*

$$\tau = \zeta \circ (-\Delta) \circ \zeta$$

et on a la relation de conjugaison suivante :

$$(-\Delta) \circ \zeta = \zeta \circ \tau.$$

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a :

$$(-\Delta) \circ \zeta(\boldsymbol{x})(i) = \zeta(\boldsymbol{x})(i) - \zeta(\boldsymbol{x})(i+1) = (-1)^i\big(\boldsymbol{x}(i) + \boldsymbol{x}(i+1)\big)$$

on a donc

$$\zeta \circ (-\Delta) \circ \zeta(\boldsymbol{x})(i) = \boldsymbol{x}(i) + \boldsymbol{x}(i+1) = \tau(\boldsymbol{x})(i).$$

La deuxième formule est un conséquence directe du fait que $\zeta^{-1} = \zeta$. □

Remarque 125. *Comme ζ et Δ sont des endomorphismes, il vient que*

$$\tau = \zeta \circ -\Delta \circ \zeta = -\zeta \circ \Delta \circ \zeta.$$

x	$\bullet\bullet\bullet$	$x(-1)$	$x(0)$	$x(1)$	$\bullet\bullet\bullet$
$\zeta(x)$	$\bullet\bullet\bullet$	$-x(-1)$	$x(0)$	$-x(1)$	$\bullet\bullet\bullet$
$\Delta \circ \zeta(x)$	$\bullet\bullet\bullet$	$x(-1)+x(0)$	$-x(0)-x(1)$	$x(1)+x(2)$	$\bullet\bullet\bullet$
$\zeta \circ \Delta \circ \zeta(x)$	$\bullet\bullet\bullet$	$-x(-1)-x(0)$	$-x(0)-x(1)$	$-x(1)-x(2)$	$\bullet\bullet\bullet$
$-\zeta \circ \Delta \circ \zeta(x)$ $= \tau(x)$	$\bullet\bullet\bullet$	$x(-1)+x(0)$	$x(0)+x(1)$	$x(1)+x(2)$	$\bullet\bullet\bullet$

FIGURE 5.8 – Le lien entre ζ, Δ et τ

En utilisant le fait que Δ et ζ sont des endomorphismes on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 126. *pour tout $n > 0$:*

$$\tau^n = \zeta \circ (-\Delta)^n \circ \zeta = (-1)^n \zeta \circ \Delta^n \circ \zeta.$$

Nous explicitons maintenant le lien entre les noyaux de τ^n et de Δ^n :

Proposition 127 (Lien entre Δ^n et τ^n)**.** *pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\ker(\tau^n) = \ker(\Delta^n \circ \zeta).$$

Démonstration. Nous allons prouver que pour toute suite $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ et $n > 0$,

$$\tau^n(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \text{ ssi } \Delta^n(\zeta(\boldsymbol{x})) = 0.$$

— Si $\Delta^n\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big) = \mathbf{0}$, on a par la remarque 126 que

$$\tau^n(\boldsymbol{x}) = (-1)^n \zeta\Big(\overbrace{\Delta^n\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big)}^{=\mathbf{0}}\Big) = \mathbf{0}.$$

— D'autre part si $\tau^n(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ alors

$$(-1)^n \zeta \circ \Delta^n \circ \zeta(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

or $\ker(\zeta) = \{\mathbf{0}\}$ donc il vient directement que $\Delta^n\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big) = \mathbf{0}$.

□

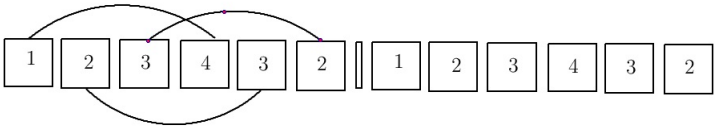
Nous avons ainsi établi le lien nécessaire entre Δ et τ pour ensuite passer à la caractérisation de la τ-réductibilité.

Caractérisation de la τ-réductibilité

Nous avons vu l'importance des suites p^m-périodiques pour caractériser la réductibilité pour Δ. Pour l'étude de la caractérisation de la réductibilité pour τ nous introduisons une notion proche de la périodicité, en lien avec l'alterné ζ précédemment introduit :

Définition 128 (Antipériodicité)**.** *Une suite $\boldsymbol{x}$ est dite ℓ-antipériodique si $\sigma^\ell \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$. Si $\ell > 0$ est le plus petit entier vérifiant la dernière condition, on dit que $\boldsymbol{x}$ est d'**antipériode** ℓ et on la note $\overline{\pi}(\boldsymbol{x})$.*

Voici un exemple de suite $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbb{Z}_5$ qui est d'antipériode 3 :



Nous lions à présent les notions de périodicité et d'antipériodicité

Lemme 129. *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ une suite antipériodique à valeurs dans $\mathbb{Z}_N$, telle que $-\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}$. Alors $\boldsymbol{x}$ est périodique et $\pi(\boldsymbol{x}) = 2\overline{\pi}(\boldsymbol{x})$.*

Démonstration. Notons $\ell = \overline{\pi}(\boldsymbol{x})$. Une fois qu'on a vu que 2ℓ est une période, on sait seulement que la période L divise 2ℓ. Comme $-\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}$, on a $L \neq \ell$. On ne peut pas avoir $L < \ell$, sans quoi $\ell - L$ serait une antipériode de $\boldsymbol{x}$ strictement inférieure à ℓ. Donc $L > \ell$, et comme L divise 2ℓ, on obtient $L = 2\ell$. □ □

On remarque également que si $\overline{\pi}(\boldsymbol{x}) = \ell$ alors pour tout $n \geq 0, \boldsymbol{x}$ est $2n\ell$-périodique et $(2n+1)\ell$- antipériodique. Ainsi la suite montrée dans le dernier exemple est aussi 9-antipériodique. On note $\overline{\mathcal{P}}_{p^k}^{\ell}$ l'ensemble des suites ℓ-antipériodique à valeurs dans $\mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$.

Proposition 130. *Soit une suite $\boldsymbol{x}$ telle que $\overline{\pi}(\boldsymbol{x}) = \ell$ alors $\overline{\pi}(\tau(\boldsymbol{x}))|\overline{\pi}(\boldsymbol{x})$*

Démonstration. Soit $\ell = \overline{\pi}(\boldsymbol{x})$ a

$$\sigma^{\ell}(\tau(\boldsymbol{x})) = \tau(\sigma^{\ell}(\boldsymbol{x})) = \tau(-\boldsymbol{x}) = -\tau(\boldsymbol{x}).$$

□

Nous présentons maintenant une proposition importante, permettant de lier la périodicité de $\zeta(\boldsymbol{x})$ et de $\boldsymbol{x}$:

Proposition 131. *Soit $r \in \mathbb{N}$. De deux choses l'une :*

— *ou bien r est impair et alors*

$$\zeta(\boldsymbol{x}) \textit{ est } r\textit{-antipériodique ssi } \boldsymbol{x} \textit{ est } r\textit{-périodique .}$$

— *ou bien r est pair et alors*

$$\zeta(\boldsymbol{x}) \textit{ est } r\textit{-périodique ssi } \boldsymbol{x} \textit{ est } r\textit{-périodique .}$$

Démonstration. — Cas impair :

Soit $\boldsymbol{x}$ r-périodique, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned}\zeta(\boldsymbol{x})(i+r)+\zeta(\boldsymbol{x})(i) &= (-1)^{i+r}\boldsymbol{x}(i+r)+(-1)^{i}\boldsymbol{x}(i)\\ &= (-1)^{i}\big((-1)^{r}\boldsymbol{x}(i+r)+\boldsymbol{x}(i)\big)\\ &= (-1)^{i}(-\boldsymbol{x}(i+r)+\boldsymbol{x}(i))=0.\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\zeta(\boldsymbol{x})$ r-antipériodique. pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a

$$\zeta(\boldsymbol{x})(i+r)+\zeta(\boldsymbol{x})(i)=0$$

donc $(-1)^{i}\big(\boldsymbol{x}(i)-\boldsymbol{x}(i+r)\big)=0$ et donc $\boldsymbol{x}(i)=\boldsymbol{x}(i+r)$.

— Cas pair :

Si $\boldsymbol{x}$ est r-périodique, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il vient que

$$\zeta(\boldsymbol{x})(i+r)-\zeta(\boldsymbol{x})(i)=(-1)^{i}\big(\boldsymbol{x}(i+r)-\boldsymbol{x}(i)\big)=0.$$

Réciproquement, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a

$$\zeta(\boldsymbol{x})(i+r)-\zeta(\boldsymbol{x})(i)=0$$

donc $\boldsymbol{x}(i+r)=\boldsymbol{x}(i)$ et $\boldsymbol{x}$ est r-périodique.

□

Théorème 132. — *Pour p premier, impair, $k \geq 1$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$.*

$\boldsymbol{x}$ est τ-réductible ssi elle est antipériodique d'antipériode une puissance de p.

Dans ce cas $t_{\mathrm{red}}(\boldsymbol{x}) \leq k\overline{\pi}(\boldsymbol{x})$.

— *Pour $p=2$, $k \geq 1$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{2^k}^{\mathbb{Z}}$.*

$\boldsymbol{x}$ est τ-réductible ssi elle est périodique de période une puissance de 2.

On a également $t_{\mathrm{red}}^{\tau}(\boldsymbol{x}) \leq k\pi(\boldsymbol{x})$.

Démonstration. — Soit p impair.

Supposons que $\boldsymbol{x}$ soit τ-réductible. D'après la proposition 127, on sait que

$$\ker(\tau^{n})=\ker(\Delta^{n}\circ\zeta)$$

il vient donc que $\zeta(\boldsymbol{x})$ est Δ-réductible et ainsi d'après le théorème 117, $\zeta(\boldsymbol{x})$ est tel qu'il existe m avec $\overline{\pi}(\zeta(\boldsymbol{x}))=p^{m}$. Or d'après la proposition 131, il vient que $\boldsymbol{x}$ est

p^m antipériodique.

Supposons à présent que $\boldsymbol{x}$ soit tel qu'il existe m avec $\overline{\pi}(\boldsymbol{x}) = p^m$. On sait d'après la proposition 131 que $\zeta(\boldsymbol{x})$ est de période p^m. Or d'après le théorème 117, cela implique que $\zeta(\boldsymbol{x})$ est Δ-réductible. d'après la proposition 127, il vient que $\boldsymbol{x}$ est τ-réductible.

— Soit $p = 2$. Le raisonnement est le même mais dans ce cas d'après la proposition 131 on obtient que $\boldsymbol{x}$ périodique, de période 2^m.
La majoration du temps de réductibilité selon τ se déduit du fait que

$$t^{\tau}_{\text{red}}(\boldsymbol{x}) = t^{\Delta}_{\text{red}}\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big) \leq k\pi\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big).$$

□

5.2.2 Caractérisation de la reproductibilité

Nous allons maintenant nous intéresser à la caractérisation des suites périodiques qui sont Δ-reproductibles et τ-reproductibles. Nous allons voir que deux suites particulières issues de la suite $\boldsymbol{x}$ initiale nous permettrons de caractériser la Δ-reproductibilité et la τ-reproductibilité. Des travaux concernant la caractérisation de la reproductibilité selon Δ existent dans [21] et [22], cependant aucun n'existait sur τ et les temps en jeu.

Définition 133 (Les périodisés). *Soit $\boldsymbol{x}$ une suite de période $\ell > 0$. Pour tout $d > 0$ divisant ℓ on appelle le d-**périodisé** selon Δ de $\boldsymbol{x}$ que l'on notera $P^{\Delta}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$, la suite définie par*

$$P^{\Delta}_{d,\ell}(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1} \sigma^{di}\boldsymbol{x}.$$

On introduit une notion similaire pour l'automate τ, or nous savons qu'étudier la réductibilité selon τ d'une suite $\boldsymbol{x}$ revient à étudier la réductibilité selon Δ de la suite $\zeta(\boldsymbol{x})$.
*On appelle le d-**périodisé** de $\boldsymbol{x}$ selon τ, que l'on notera $P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$, la suite définie par*

$$P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x}) := P^{\Delta}_{d,\ell}(\zeta\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1} (-1)^{di}\sigma^{di}\boldsymbol{x}.$$

Remarque 134. *Il est important de voir que pour le cas où d est pair alors $P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x}) = P^{\Delta}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$.*

Remarque 135. *Une intuition de l'origine du périodisé est donné plus loin dans le manuscrit dans la démonstration du théorème 143.*

Propriété 15. — *Soit $\boldsymbol{x}$ une suite de période ℓ, pour $\ell > 0$. Alors $P^{\Delta}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$ est d-périodique.*

— *Soit $\boldsymbol{x}$ une suite de période ℓ avec ℓ pair et soit d pair, alors $P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$ est d-périodique.*
— *Soit $\boldsymbol{x}$ une suite d'antipériode ℓ avec ℓ impair, alors $P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$ est d-antipériodique.*

Démonstration. — Pour $\ell > 0$:

$$\begin{aligned}(\sigma^d - id)P^{\Delta}_{d,\ell}(\boldsymbol{x}) &= (\sigma^d - id)\sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}\sigma^{di}\boldsymbol{x}\\ &= \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}(\sigma^d - id)\sigma^{di}\boldsymbol{x}\\ &= \sum_{i=1}^{\frac{\ell}{d}}\sigma^{di}\boldsymbol{x} - \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}\sigma^{di}\boldsymbol{x}\\ &= \overbrace{\sigma^{\ell}\boldsymbol{x}}^{=\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

— Le cas où ℓ et d sont pairs se déduit de la remarque 134. On se sert de l'identité remarquable suivante :

$$\mathbb{X}^{\ell} - 1 = (\mathbb{X}^d - 1)\sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}\mathbb{X}^{di}$$

qui nous donne

$$\overbrace{(\sigma^{\ell} - id)(\boldsymbol{x})}^{=\boldsymbol{0}} = (\sigma^d - id)(\sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}\sigma^{di}\boldsymbol{x}) \text{ car } \boldsymbol{x} \text{ de période } \ell.$$

D'après la remarque 134, on a $P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x}) = P^{\Delta}_{d,\ell}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}\sigma^{di}\boldsymbol{x}$ donc $P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$ est d-périodique.

— Soit ℓ impair et $\boldsymbol{x}$ d'antipériode ℓ. On se sert de l'identité remarquable suivante :

$$\mathbb{X}^{\ell} + 1 = (\mathbb{X}^d + 1)\sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}(-1)^{di}\mathbb{X}^{di}$$

qui nous donne que

$$\overbrace{(\sigma^{\ell} + id)(\boldsymbol{x})}^{=\boldsymbol{0}} = (\sigma^d + id)(\sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1}(-1)^{di}\sigma^{di}\boldsymbol{x}) \text{ car } \boldsymbol{x} \text{ d'antipériode } \ell.$$

on en déduit donc que $P^{\tau}_{d,\ell}(\boldsymbol{x})$ est d-antipériodique.

□

Avant de voir la caractérisation des suites reproductibles selon Δ, nous introduisons un lemme préliminaire :

Lemme 136. *Soit $\ell > 0$. Il existe $m \geq 0$ tel que*

$$\mathrm{Red}_\Delta(\mathcal{C}_N^\ell) = \mathcal{C}_{p^k}^{p^m}.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Red}_F(\mathcal{C}_N^\ell)$. D'après le théorème 117, on sait qu'il existe $m \geq 0$ tel que $\pi(\boldsymbol{x}) = p^m$. Or $\boldsymbol{x}$ est ℓ-périodique, donc $\pi(\boldsymbol{x})|\ell$ donc $\ell = p^m.q$ avec q premier avec p. D'après le théorème de Gauss, il vient que $\pi(\boldsymbol{x})|p^m$ donc par définition $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{p^k}^{p^m}$. La réciproque découle directement de la caractérisation des suites Δ-réductibles du théorème 117. □

Théorème 137 (Caractérisation de la Reproductibilité pour Δ)**.** *Soit $\boldsymbol{x}$ ℓ-périodique $\in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$ avec $\ell > 0$, soit $m \geq 0$ le plus grand entier tel que $p^m|\ell$, i.e. $\ell = q.p^m$ avec q un entier premier avec ℓ.*

$$\boldsymbol{x} \text{ est } \Delta\text{-reproductible} \iff P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

Démonstration. Supposons que $\boldsymbol{x}$ soit Δ-reproductible. Il existe $t > 0$ tel que $\Delta^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ et l'on remarque que

$$\Delta^t P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}) = \Delta^t \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1} \sigma^{di}\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1} \sigma^{di}(\overbrace{\Delta^t(\boldsymbol{x})}^{=\boldsymbol{x}}) = P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}).$$

Donc $P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x})$ est Δ-reproductible en t itérations également. D'autre part, on sait que $P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x})$ est p^m périodique d'après la propriété 15 donc il vient d'après le théorème 117 que $P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x})$ est Δ-réductible. Or on sait que $\mathrm{Red}\,(\Delta) \cap \mathrm{Rep}\,(\Delta) = \mathbf{0}$ donc $P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

Réciproquement : on suppose que $P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. On sait d'après le théorème 108 que l'on peut décomposer la suite $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}} + \boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{rep}}$ avec $\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}}$ et $\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{rep}}$ ℓ-périodiques. Or,

$$\begin{aligned}
P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1} \sigma^{di}\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{d}-1} \sigma^{di}(\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}} + \boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{rep}}) \\
&= P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}}) + \overbrace{P_{p^m,\ell}^\Delta(\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{rep}})}^{=\mathbf{0} \text{ par } \Rightarrow} \text{ car } \sigma \text{ est un automorphisme} \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } P^{\Delta}_{p^m,\ell}(\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}}) = \mathbf{0}.$$

Or d'après le théorème 117, nous savons qu'il existe $r > 0$ telle que $\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}}$ soit p^r-périodique. Comme $\boldsymbol{x}$ est de période ℓ, on en déduit par le théorème de Gauss, que $p^r|\ell$. D'autre part on sait que m est le plus grand entier divisant ℓ, on en déduit que $p^r|p^m$ et donc que $\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}}$ est p^m-périodique. On a

$$P^{\Delta}_{p^m,\ell}(\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}}) = \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{p^m}-1} \sigma^{ip^m}\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}} = \frac{\ell}{p^m}.\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}} = \mathbf{0}.$$

Comme p^m est le plus grand diviseur de ℓ, on a $\frac{\ell}{p^m} \wedge p^k = 1$ et par conséquent la multiplication par $\frac{\ell}{p^m}$ est un automorphisme de $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}_{p^k}$. Comme $\frac{\ell}{p^m}.\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}} = \mathbf{0}$, on en conclut que $\boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{red}} = \mathbf{0}$, ainsi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\Delta\mathbf{rep}}$ c'est à dire que $\boldsymbol{x}$ est forcément reproductible.

□

Nous donnons à présent l'outil clef permettant de relier la reproductibilité selon Δ avec celle selon τ :

Lemme 138.

$$\boldsymbol{x} \textit{ est } \tau\textit{-reproductible } \iff \zeta(\boldsymbol{x}) \textit{ est } \Delta\textit{-reproductible .}$$

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{x}$ τ-reproductible , il existe $n \geq 0$ tel que $\tau^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. On a également $\tau^{2n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ donc d'après la formule 126 on a

$$\zeta\Big(\Delta^{2n}\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big)\Big) = \boldsymbol{x}$$
$$\text{puis } \overbrace{\zeta \circ \zeta}^{=id}\Big(\Delta^{2n}\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big)\Big) = \zeta(\boldsymbol{x})$$

donc $\zeta(\boldsymbol{x})$ est bien Δ-reproductible.

— Supposons que $\zeta(\boldsymbol{x})$ est reproductible selon Δ, il existe donc $n \geq 0$ tel que $\Delta^n\big(\zeta(\boldsymbol{x})\big) = \zeta(\boldsymbol{x})$.

$$\begin{aligned}\tau^{2n}(\boldsymbol{x}) &= \zeta\big(\Delta^{2n}(\zeta\boldsymbol{x})\big)\\ &= \zeta \circ \zeta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\end{aligned}$$

donc $\boldsymbol{x}$ est bien reproductible selon τ.

□

Une conséquence du lemme précédent est le théorème suivant :

Théorème 139. *Soit $\boldsymbol{x}$ ℓ-périodique $\in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$ avec $\ell > 0$, soit $m \geq 0$ le plus grand entier tel que $p^m | \ell$.*

$$\boldsymbol{x} \text{ est } \tau\text{-reproductible} \iff P^{\tau}_{p^m,\ell}(\boldsymbol{x}) = P^{\Delta}_{p^m,\ell}(\zeta(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}.$$

Démonstration. Le lemme 138 nous donne qu'il suffit d'étudier la reproductibilité selon Δ de la suite $\zeta(\boldsymbol{x})$, or on sait d'après le théorème 137 que $\zeta(\boldsymbol{x})$ est reproductible selon Δ ssi $P^{\Delta}_{p^m,\ell}(\zeta(\boldsymbol{x})) = 0$, or $P^{\tau}_{p^m,\ell}(\boldsymbol{x}) = P^{\Delta}_{p^m,\ell}(\zeta(\boldsymbol{x}))$ par définition. □

Nous allons chercher à présent à caractériser le temps de reproductibilité. Pour ce faire nous allons avoir besoin de plusieurs résultats.

Proposition 140. *Soit p premier, et $\ell > 0$. soit $m \geq 0$ le plus grand entier tel que $p^m | \ell$ et soit $k > 0$.*

$$|Rep\ (\Delta) \cap \mathcal{P}^{\ell}_{p^k}| = p^{k(\ell - p^m)}.$$

Démonstration. D'après le théorème 137 on a

$$\text{Rep } (\Delta) \cap \mathcal{P}^{\ell}_{p^k} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}} / \pi(\boldsymbol{x}) | \ell \text{ et } P^{\Delta}_{p^m,\ell}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Quand on crée notre suite reproductible, on doit respecter comme contrainte que

$$P^{\Delta}_{p^m,\ell}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{p^m}-1} \sigma^{ip^m}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \sigma^{p^m}\boldsymbol{x} + .. + \sigma^{\ell - p^m}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Quand on construit le motif de notre suite reproductible $\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}(1)...\boldsymbol{x}(\ell-1)$ on doit donc veiller à ce que pour tout $i \in \{0, ..., p^m - 1\}$,

$$\underbrace{\overbrace{\boldsymbol{x}(i)}^{p^k \text{ choix}} + \overbrace{\boldsymbol{x}(i+p^m)}^{p^k \text{ choix}} + ... + \overbrace{\boldsymbol{x}(i+\ell-2p^m)}^{p^k \text{ choix}}}_{\frac{\ell}{p^m}-1 \text{ éléments}} + \overbrace{\boldsymbol{x}(i+\ell-p^m)}^{1 \text{ choix}} = 0.$$

On peut ainsi choisir $\frac{\ell}{p^m} - 1$ symboles mais pour respecter l'équation du périodisé, le dernier sera fixé. On en déduit

$$|\text{Rep } (\Delta) \cap \mathcal{P}^{\ell}_{p^k}| = (p^k)^{p^m(\frac{\ell}{p^m}-1)} = p^{k(\ell-p^m)}.$$

□

Dans $\mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$, l'ensemble des suites reproductibles ℓ-périodique est donc un ensemble fini de cardinal $p^{k(\ell-p^m)}$ et cela va nous permettre d'établir une première majoration du temps de reproductibilité.

5.2.3 Temps de reproductibilité

Après avoir dénombré le nombre de suites reproductibles que l'on peut créer grâce à la proposition 140, on donne à présent des bornes pour le temps de reproductibilité.

Théorème 141. *Soit p premier et soit $k \geq 0$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$, Δ-reproductible, ℓ-périodique avec $\ell > 0$. Soit $m \geq 0$ le plus grand entier tel que $p^m | \ell$. Soit $t_{rep}^{\Delta}(\boldsymbol{x})$ le nombre d'itérations nécessaires t pour que $\Delta^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.*

$$t_{rep}^{\Delta}(\boldsymbol{x}) \leq p^{k(\ell - p^m)} - 1.$$

Démonstration. D'après le théorème 140 on sait qu'il y a $p^{k(\ell-p^m)}$ suites reproductibles qui sont ℓ-périodiques. Pour toute telle suite $\boldsymbol{x}$, ou bien $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ qui est reproductible en une itération ou bien $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Dans ce dernier cas, on considère la famille $\{\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}, ..., \Delta^{p^{k(\ell-p^m)}}\boldsymbol{x}\}$ qui contient $p^{k(\ell-p^m)}$ suites qui sont toutes reproductibles et ℓ-périodiques.
Or $\boldsymbol{0} \notin \{\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}, ..., \Delta^{p^{k(\ell-p^m)}}\boldsymbol{x}\}$ donc, par le principe des tiroirs, il existe forcément deux suites identiques dans cette famille. Or toutes ces suites ont le même temps de reproductibilité car elles sont dans l'orbite de $\boldsymbol{x}$ par Δ. Donc

$$t_{\text{rep}}^{\Delta}(\boldsymbol{x}) \leq p^{k(\ell - p^m)} - 1.$$

□

Remarque 142. *La même logique s'applique pour τ, on en déduit que $t_{\text{rep}}^{\tau}(\boldsymbol{x}) \leq p^{k(\ell-p^m)} - 1$.*

Théorème 143. *Soit p et ℓ premiers avec $p \neq \ell$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$, Δ-reproductible et de période ℓ. Alors*

$$t_{rep}^{\Delta}(\boldsymbol{x}) | p^{\ell-1} - 1.$$

Démonstration. Puisque $\boldsymbol{x}$ est reproductible et que p et ℓ sont premiers entre eux, on a $P_{1,\ell}^{\Delta}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \sigma\boldsymbol{x} + ... + \sigma^{\ell-1}\boldsymbol{x}$. D'après le théorème 140 on sait qu'il y a $p^{\ell-1}$ suites ℓ-périodiques reproductibles possibles. D'autre part on sait également que $\ell | p^{\ell-1} - 1$ d'après le petit théorème de Fermat. Considérons les $p^{\ell-1} - 1$ ème et $p^{\ell-1}$ème actions de Δ sur une suite $\boldsymbol{x}$ satisfaisant les hypothèses du théorème. Cela revient à considérer les $p^{\ell-1} - 1$ème et $p^{\ell-1}$ème itérations de Δ sur la suite $0^{\infty}10^{\infty}$: On présente le schéma explicatif suivant :

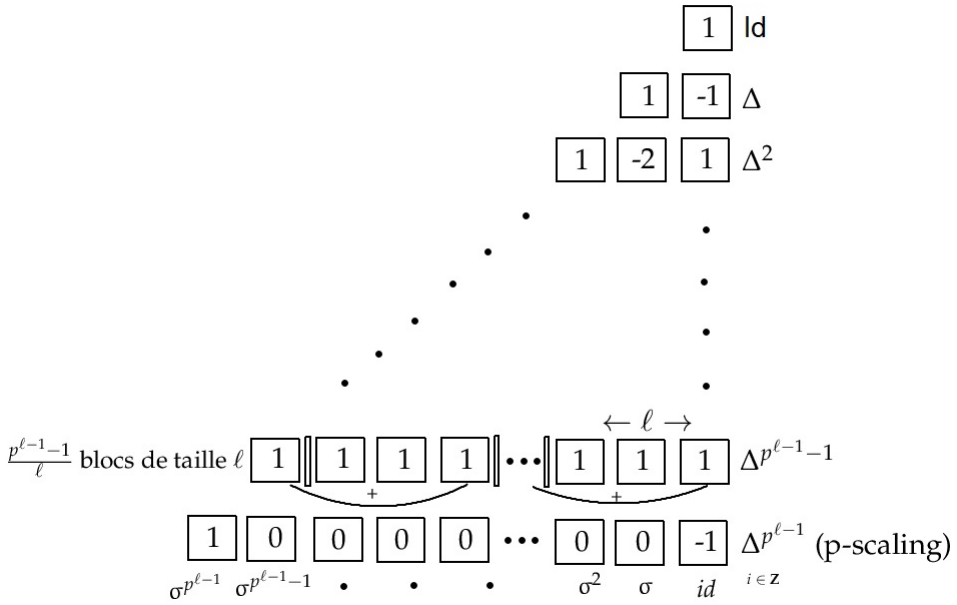


FIGURE 5.9 – Un triangle de Pascal bien particulier, la dépendance de Δ à chaque itération en fonction des puissances de σ.

Il s'agit du triangle de Pascal alterné modulo p où l'on organise les cellules par blocs de longueur ℓ.

En utilisant la ℓ périodicité, en "repliant" le triangle de Pascal alterné, il vient que pour tout suite $\boldsymbol{x}$ on a :

$$\begin{aligned}\Delta^{p^{\ell-1}-1}(\boldsymbol{x}) &= (\frac{p^{\ell-1}-1}{\ell}+1)\boldsymbol{x} + \frac{p^{\ell-1}-1}{\ell}\sigma\boldsymbol{x} + ... + \frac{p^{\ell-1}-1}{\ell}\sigma^{\ell-1}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x} + \frac{p^{\ell-1}-1}{\ell}\underbrace{(\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{x}+...+\sigma^{\ell-1}\boldsymbol{x})}_{=\mathbf{0}} \text{ car } P^{\Delta}_{1,\ell}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \\ &= \boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Donc $t_{\text{rep}}(\boldsymbol{x}) | p^{\ell-1}-1$. □

Dans le cas précédent il n'existe qu'une grande orbite de taille $p^{\ell-1}-1$ et le singleton $\{\mathbf{0}\}$. Dans certains cas, il existe plusieurs orbites de tailles différentes liées à des temps de reproductibilité également différents.

On peut généraliser le dernier résultat, qui représente une première intuition de comment le périodisé intervient :

Théorème 144. *Soit p et ℓ premiers avec $p \neq \ell$. On note $\ell = p^m q$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$, Δ-reproductible et de période ℓ. On note $O_q(p)$ l'ordre de p dans le groupe multiplicatif $\left((\mathbb{Z}_q)^\times, \times\right)$. Alors*

$$t^{\Delta}_{rep}(\boldsymbol{x}) | p^m (p^{O_q(p)} - 1).$$

Démonstration. On remarque premièrement que $q | p^{O_q(p)} - 1$. Notons $p^{O_q(p)} - 1 = dq$. On voit d'abord l'identité suivante grâce au morphisme avec les polynômes de Laurent :

$$\begin{aligned}
\Delta^{p^m(p^{O_q(p)}-1)} &= (\sigma^{p^m} - id)^{(p^{O_q(p)}-1)} \text{ grâce au } p\text{-scaling} \\
&= \sum_{i=0}^{p^{O_q(p)}-1} (-1)^i \binom{p^{O_q(p)} - 1}{i} \sigma^{p^m i} \\
&= \sum_{i=0}^{p^{O_q(p)}-1} \sigma^{p^m i} \quad \text{par le corollaire 115} \\
&= id + \sigma^{p^m} \circ \Big(\sum_{i=0}^{dq-1} \sigma^{p^m i} \Big) \\
&= id + \sigma^{p^m} \circ \Big(\sum_{j=0}^{d-1} \sigma^{p^m qj} \Big) \circ \Big(\sum_{r=0}^{q-1} \sigma^{r p^m} \Big) \text{ en posant } i = jq + r \\
&= id + \sigma^{p^m} \circ \Big(\sum_{j=0}^{d-1} \sigma^{p^m qj} \Big) \circ P^{\Delta}_{p^m, \ell}.
\end{aligned}$$

En l'appliquant à notre suite $\boldsymbol{x}$, il vient

$$\Delta^{p^m(p^{O_q(p)}-1)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \sigma^{p^m} \circ \Big(\sum_{j=0}^{d-1} \sigma^{p^m qj} \Big) \big(\overbrace{P^{\Delta}_{p^m, \ell}(\boldsymbol{x})}^{=\mathbf{0}} \big) \quad \text{car } \boldsymbol{x} \in \text{Rep}\,(\Delta).$$

Ainsi $\Delta^{p^m(p^{O_q(p)}-1)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. □

Remarque 145. *Sachant que les résultats valables pour Δ peuvent être utilisés pour τ grâce à la relation de conjugaison présente dans le paragraphe 5.2.1, on conjecture que les bornes sont identiques pour τ.*

5.3 Évolution des périodes

« Un sens interdit, en somme, ce n'est qu'un sens autorisé, mais pris à l'envers. » Pierre Dac.

Lorsque l'on dispose d'une suite périodique $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ et que l'on fait agir soit τ ou soit Δ, il est facile de comprendre que cette dernière aura une période divisant la période de $\boldsymbol{x}$, comme vu dans la propriété 12. Cependant, il est compliqué de comprendre exactement quand la période d'une suite va diminuer. Une manière de traiter ce problème est de prendre le problème à l'envers : Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ périodique, nous allons nous intéresser, pour $F \in \{\tau, \Delta\}$ à l'étude de l'évolution dans les temps négatifs de la suite

$$(\pi_n)_{n\in\mathbb{Z}^-} := \left(\pi\left(F^n_{A_n}(\boldsymbol{x})\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}^-}$$

avec A_n le vecteur des antécédents défini de la même manière que dans le paragraphe 4.2.

Nous allons avoir besoin d'un outil, la **caractéristique**, qui est un indicateur permettant de caractériser les changements de périodes du temps n au temps $n-1$ et pouvoir les étudier. Nous allons également nous appuyer sur le fait que les automates τ et Δ sont liés, comme cela a été évoqué dans la section 4.2.

Nous savons que si la période à un temps $n \leq 0$ est de taille ℓ alors au temps suivant, cette dernière est de taille $k.\ell$ pour un certain k que nous allons pouvoir expliciter à l'aide du caractéristique dans la proposition 156. Nous savons également qu'il faut choisir un symbole $a \in \mathbb{Z}_N$ pour passer du temps n au temps $n-1$, car il y a à chaque nouveau temps N antécédents possibles.

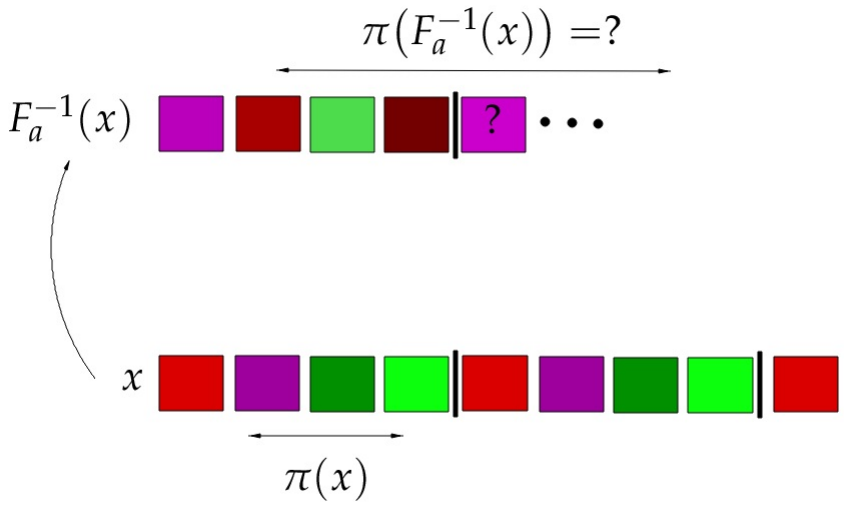


FIGURE 5.10 – Comment la période va-t-elle évoluer ?

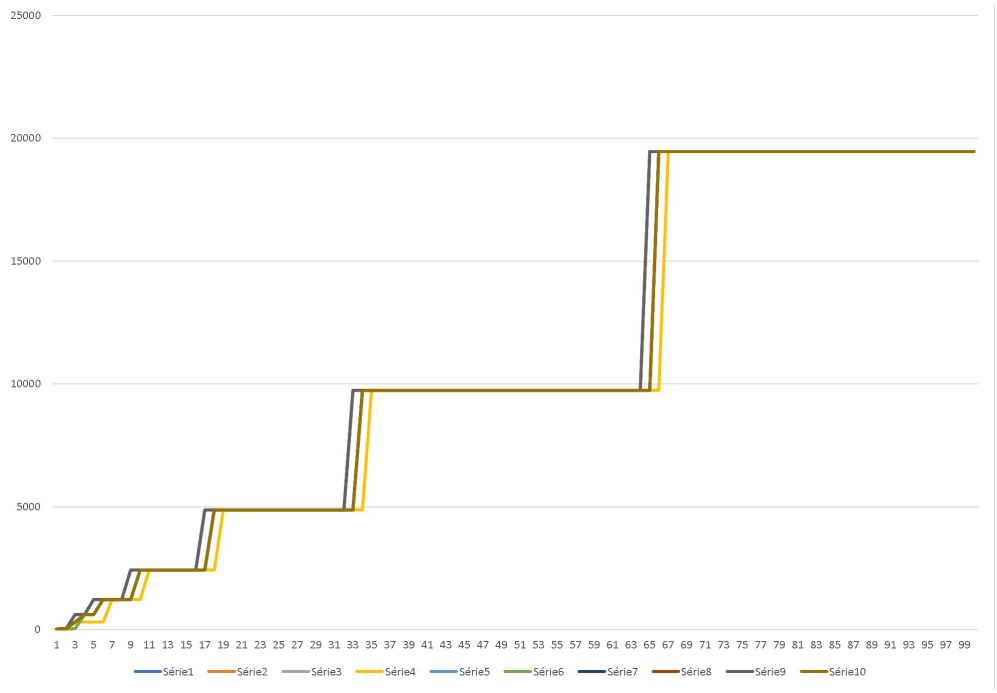


FIGURE 5.11 – Simulations où l'on fixe une suite $\boldsymbol{x}$ et l'on tire $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ aléatoirement suivant la loi uniforme dans $\mathbb{Z}_{16}^{\mathbb{Z}}$ et avec une période initiale $\pi(\boldsymbol{x})$ égale à 9. On met en abscisse la valeur absolue de l'entier négatif n et en ordonnée la période π_n.

Remarque 146. *Le comportement de $(\pi_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ est remarquable car il semble que qu'importe le choix du vecteur d'antécédents, le comportement est quasi-identique. Les changements de périodes s'opèrent à partir de chaque temps p^m et pas avant. Ce phénomène remarquable est discuté dans les perspectives en fin de manuscrit.*

Question 147. *étant donnée une suite périodique $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$, est-il possible de choisir $a \in \mathbb{A}$ tel que $F_a^{-1}(\boldsymbol{x})$ ait même période que $\boldsymbol{x}$? Dans le cas où $F = \Delta$, il est clair ce n'est pas toujours possible : par exemple si la suite $\boldsymbol{x}$ est constante non nulle, la suite $F_a^{-1}(\boldsymbol{x})$ n'est pas constante donc $\pi(F_a^{-1}(\boldsymbol{x})) > 1 = \pi(\boldsymbol{x})$.*

Nous donnons à présent la définition du caractéristique :

Définition 148 (Caractéristique)**.** *Soit $F \in \{\tau, \Delta\}$ et une suite $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ périodique. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ le vecteur des antécédents possibles. Pour tout temps $n \leq -1$ on définit une suite $\left(C_n^F\right)_{n\in\mathbb{Z}^{*-}}$ appelée* ***suite caractéristique*** *par :*

$$C_n^F := F_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(\pi_{n+1}) - \overbrace{F_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(0)}^{=a_n} = F_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(\pi_{n+1}) - a_n.$$

Par souci de simplicité, nous nous concentrons d'abord sur l'étude de C^F_{-1}, pour comprendre le passage du temps 0 au temps -1 quand on part d'une suite $\boldsymbol{x}$ donnée avant de généraliser pour comprendre le comportement de $(\pi_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$.

Remarque 149. *On peut remarquer que pour une suite $\boldsymbol{x}$ de période π_0,*

$$C^\Delta_{-1} \overset{154}{=} \sum_{i=0}^{\pi_0-1} \boldsymbol{x}(i) = P^\Delta_{1,\ell}(\boldsymbol{x}) \text{ d'après la définition 133 .}$$

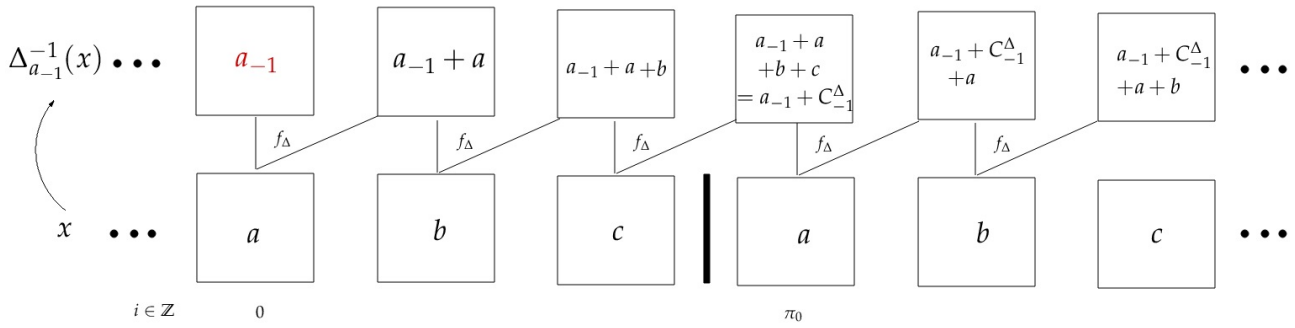


FIGURE 5.12 – La caractéristique C^Δ_{-1}.

De manière générale,

$$C^\tau_{-1} = (-1)^{\pi_0-1} \sum_{i=0}^{\pi_0-1} (-1)^i \boldsymbol{x}(i) + ((-1)^{\pi_0}-1)a.$$

Si π_0 est paire alors

$$C^\tau_{-1} \overset{154}{=} \sum_{k=0}^{\pi_0-1} (-1)^{\pi_0-1+k} \boldsymbol{x}(k) = -\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{x}(1)+\ldots+\boldsymbol{x}(\pi_0-1) = -P^\tau_{1,\ell}(\boldsymbol{x}) \text{ d'après la définition 133.}$$

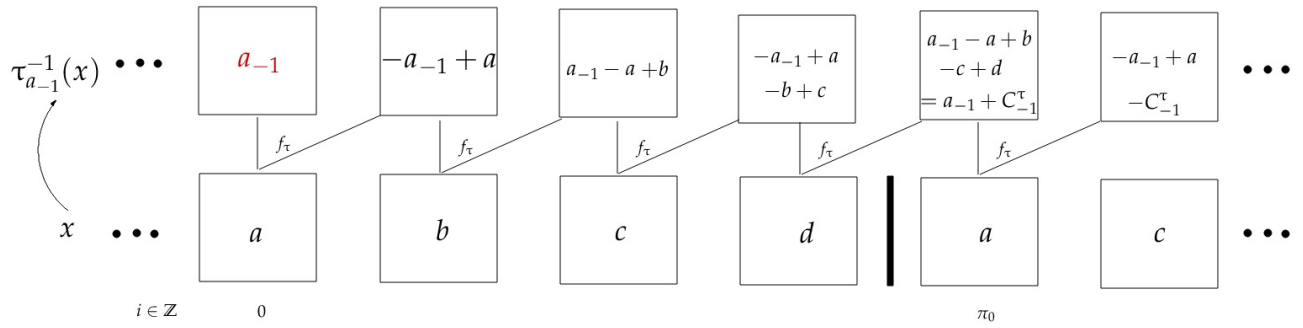


FIGURE 5.13 – La caractéristique C_{-1}^{Δ}, cas où π_0 est paire

Si π_0 est impaire alors

$$C_{-1}^{\tau} \overset{154}{=} \sum_{k=0}^{\pi_0-1}(-1)^{\pi_0-1+k}\boldsymbol{x}(k)-2a_{-1}=\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}(1)+\ldots+\boldsymbol{x}(\pi_0-1)-2a_{-1}=P_{1,\ell}^{\tau}(\boldsymbol{x})-2a_{-1}.$$

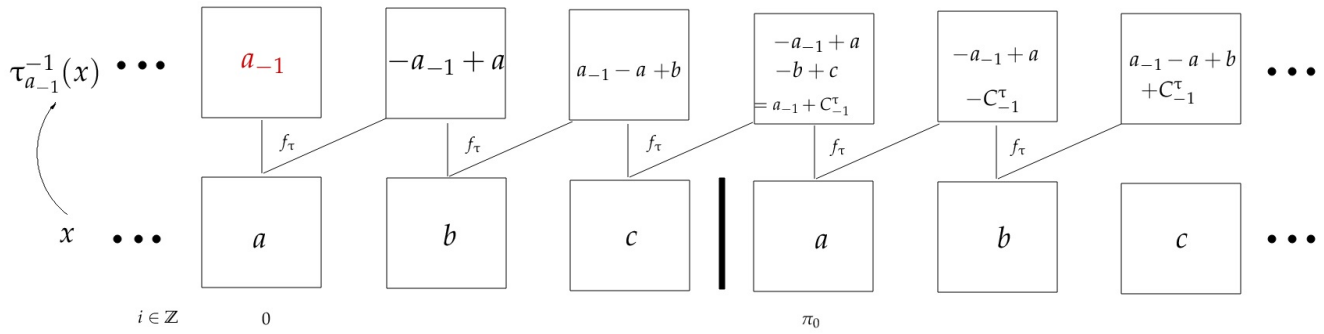


FIGURE 5.14 – La caractéristique C_{-1}^{Δ}, cas où π_0 est impaire.

Proposition 150. *Pour tout $i\in\mathbb{Z}$,*

$$\Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})(i+\pi(\boldsymbol{x}))-\Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})(i)=C_{-1}^{\Delta},$$

$$\boldsymbol{\tau}_a^{-1}(\boldsymbol{x})(i+\pi(\boldsymbol{x}))-\boldsymbol{\tau}_a^{-1}(\boldsymbol{x})(i)=(-1)^i C_{-1}^{\tau}.$$

Démonstration. Ces égalités sont vraies si $i = 0$, par définition de la caractéristique. Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que $\sigma^{\pi(x)}\left(\Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})\right) - \Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})$ est constante, i.e. dans le noyau de Δ, et que la suite $\sigma^{\pi(x)}\left(\tau_a^{-1}(\boldsymbol{x})\right) - \tau_a^{-1}(\boldsymbol{x})$ est proportionnelle à la suite $((-1)^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, i.e. dans le noyau de τ car $\ker(\tau) = \ker(\Delta \circ \zeta)$.

Un argument commun à τ et Δ peut être utilisé. En effet pour $F \in \{\Delta, \tau\}$, comme F est linéaire et commute avec σ, on a bien

$$F\Big(\sigma^{\pi(x)}\left(F_a^{-1}(\boldsymbol{x})\right) - F_a^{-1}(\boldsymbol{x})\Big) = \sigma^{\pi(x)}\Big(F\left(F_a^{-1}(\boldsymbol{x})\right)\Big) - F(F_a^{-1}(\boldsymbol{x})) = \sigma^{\pi(x)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

ce qui achève la preuve.

□

Remarque 151. *On peut directement remarquer que si C_{-1}^{τ} ou C_{-1}^{Δ} sont nuls alors la période reste inchangée, car dans ce cas $\Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})(\pi_0 + i) = \Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})(i)$ et $\tau_a^{-1}(\boldsymbol{x})(\pi_0 + i) = \tau_a^{-1}(\boldsymbol{x})(i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, i.e. $\pi_{-1} = \pi_0$.*

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, soit $O_N(a) := \min\{k \in \mathbb{N}^* / k.a = 0 \mod N\}$, l'ordre de la classe de a dans le groupe additif $\mathbb{Z}_N$. On a $O_N(c) = N/(c \wedge N)$, où $c \wedge N$ est le PGCD de c et N.

Théorème 152.

$$\textit{Pour } \Delta : \ \frac{\pi_{-1}}{\pi_0} = O_N\left(C_{-1}^{\Delta}\right)$$

$$\textit{Pour } \tau : \ \frac{\pi_{-1}}{\pi_0} = \begin{cases} O_N(C_{-1}^{\tau}) \textit{ si } \pi_0 \textit{ paire} \\ 2 \textit{ si } \pi_0 \textit{ est impaire et } C_{-1}^{\tau} \neq 0 \\ 1 \textit{ si } \pi(\boldsymbol{x}) \textit{ est impaire et } C_{-1}^{\tau} = 0. \end{cases}$$

Démonstration. On a vu que les suites $\Delta_a^{-1}(x)$ sont périodiques, de période multiple de $\pi(\boldsymbol{x})$. On a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \pi(\Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x}))|r\pi(\boldsymbol{x}) \quad &\iff \quad \sigma^{r\pi(x)}\left(\Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})\right)) = \Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x}) \\ &\iff \quad rC_{-1}^{\Delta} = 0 \text{ d'après la proposition 150.} \\ &\iff \quad O_N(C_{-1}^{\Delta})|r. \end{aligned}$$

Ainsi, $\pi(\Delta_a^{-1}(\boldsymbol{x})) = O(C_{-1}^{\Delta})\pi(\boldsymbol{x})$. De même

$$\begin{aligned} \pi(\tau_a^{-1}(\boldsymbol{x}))|r\pi(\boldsymbol{x}) \quad &\iff \quad \sigma^{r\pi(x)}\left(\tau_a^{-1}(\boldsymbol{x})\right) = \tau_a^{-1}(x) \\ &\iff \quad \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j\pi(x)}C_{-1}^{\tau} = 0 \text{ d'après la proposition 150.} \end{aligned}$$

Si $\pi(\boldsymbol{x})$ est paire, on obtient

$$\pi(\boldsymbol{\tau}_a^{-1}(x))|r\pi(\boldsymbol{x}) \iff rC_{-1}^{\Delta} = 0 \iff O_N(C_{-1}^{\Delta})|r,$$

ainsi $\pi(\boldsymbol{\tau}_a^{-1}(\boldsymbol{x})) = O(C_{-1}^{\Delta})\pi(\boldsymbol{x})$.

Si $\pi(\boldsymbol{x})$ est impaire, on obtient

$$\pi(\boldsymbol{\tau}_a^{-1}(\boldsymbol{x}))|r\pi(\boldsymbol{x}) \iff \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j C_{-1}^{\tau} = 0 \iff \big(C_{-1}^{\tau} = 0 \text{ ou } 2|r\big),$$

donc $\pi(\boldsymbol{\tau}_a^{-1}(\boldsymbol{x})) = \pi(\boldsymbol{x})$ si $C_{-1}^{\tau} = 0$, et $\pi(\boldsymbol{\tau}_a^{-1}(\boldsymbol{x})) = 2\pi(\boldsymbol{x})$ si $C_{-1}^{\tau} \neq 0$. □

Corollaire 153. *Si N est impair, toute suite $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^{\mathbb{Z}}$ périodique de période impaire admet un unique antécédent par $\boldsymbol{\tau}$ de même période.*

Nous donnons à présent l'expression du caractéristique pour $\boldsymbol{\tau}$ et Δ pour tout temps $n \leq -1$ et généralisons le passage du temps 0 au temps -1 à celui du cas où l'on passe du temps $n+1$ au temps n pour $n \leq -1$.

Proposition 154. *Pour tout $n \leq -1$, pour toute suite de période π_{n+1} on a :*

$$C_n^{\Delta} = \sum_{j=1}^{|n|-1}\binom{\pi_{n+1}}{j}a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+\pi_{n+1}}\binom{\pi_{n+1}-k-1}{|n|-1}\boldsymbol{x}(k),$$

et $C_n^{\tau} = \sum_{j=1}^{|n|-1}(-1)^{\pi_{n+1}+j}\binom{\pi_{n+1}}{j}a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+\pi_{n+1}}(-1)^{\pi_{n+1}+n+k}\binom{\pi_{n+1}-k-1}{|n|-1}\boldsymbol{x}(k)$ *si* π_{n+1} *paire*

ou $C_n^{\tau} = \sum_{j=1}^{|n|-1}(-1)^{\pi_{n+1}+j}\binom{\pi_{n+1}}{j}a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+\pi_{n+1}}(-1)^{\pi_{n+1}+n+k}\binom{\pi_{n+1}-k-1}{|n|-1}\boldsymbol{x}(k) - 2a_n$ *si* π_{n+1} *impaire.*

Démonstration. Nous avons vu les formules des antécédents pour $\boldsymbol{\tau}$ et Δ dans 4.2. En nous appuyant sur ces dernières formules, il vient :

Pour Δ :

$$\begin{aligned} C_n^{\Delta} &= \Delta_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(\pi_{n+1}) - a_n \\ &= \sum_{j=0}^{|n|-1}\binom{\pi_{n+1}}{j}a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+\pi_{n+1}}\binom{\pi_{n+1}-k-1}{|n|-1}\boldsymbol{x}(k) - a_n \\ &= \sum_{j=1}^{|n|-1}\binom{\pi_{n+1}}{j}a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+\pi_{n+1}}\binom{\pi_{n+1}-k-1}{|n|-1}\boldsymbol{x}(k). \end{aligned}$$

Pour τ :

$$\begin{aligned} C_n^\tau &= \tau_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(\pi_{n+1}) - a_n \\ &= \sum_{j=0}^{|n|-1} (-1)^{\pi_{n+1}+j} \binom{\pi_{n+1}}{j} a_{n+j} + \sum_{k=0}^{n+\pi_{n+1}} (-1)^{\pi_{n+1}+n+k} \binom{\pi_{n+1}-k-1}{|n|-1} \boldsymbol{x}(k) - a_n. \end{aligned}$$

Suivant que π_{n+1} est paire ou impaire, on trouve le résultat voulu pour C_n^τ. □

La proposition suivante se déduit directement de la proposition 150 mais quand on passe d'un temps $n+1$ à un temps n au lieu de 0 au temps -1.

Proposition 155. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\Delta_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(\pi_{n+1}+i) = \Delta_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(i) + C_n^\Delta$$

et

$$\tau_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(\pi_{n+1}+i) = \tau_{A_n}^n(\boldsymbol{x})(i) + (-1)^i C_n^\tau.$$

On déduit également le théorème suivant de la même manière que dans la proposition 152 pour le passage du temps $n+1$ au temps n :

Théorème 156. *Pour tout $n \leq -1$ on a :*

$$\text{Pour } \Delta : \ \frac{\pi_n}{\pi_{n+1}} = O_N\big(C_n^\Delta\big).$$

$$\text{Pour } \tau : \ \frac{\pi_n}{\pi_{n+1}} = \begin{cases} O_N(C_n^\tau) \text{ si } \pi_{n+1} \text{ paire} \\ 2 \text{ si } \pi_{n+1} \text{ est impaire et } C_n^\tau \neq 0 \\ 1 \text{ si } \pi_{n+1} \text{ est impaire et } C_n^\tau = 0. \end{cases}$$

Conclusion et perspectives

Partie I

La classification des filtrations facteurs, ou classification dynamique, n'en est qu'à ses débuts. Les automates cellulaires fournissent un premier exemple convaincant car les résultats de la classification statique ne s'étendent pas trivialement à la classification dynamique. En effet, après avoir étudié la classification classique dans le cadre des automates cellulaires, nous avons vu que les filtrations $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ et $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ sont standards (ε assez grand) mais que $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$n'est pas dynamiquement standard. Il reste encore beaucoup de questions ouvertes parmi lesquelles nous mentionnons les suivantes.

Une filtration kolmogorovienne non standard issue d'un automate

Nous avons vu que $\mathcal{F}^{\tau^{-1}}$ et $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ étaient standards, une question naturelle est la suivante : peut on construire une filtration kolmogorovienne issue d'un automate cellulaire qui ne soit pas standard ? Cette question n'est pas évidente car un automate cellulaire fonctionne grâce à sa loi locale qui lui permet de passer du temps n au temps $n+1$ (ou $n-1$ dans le sens des antécédents). Il semble difficile de créer un tel automate dont la filtration qui ne soit pas immersible dans une filtration de type produit.

Le critère de I-confort dynamique

Nous avons établi partiellement la version dynamique du critère de I-confort. Partiellement, car le critère donné est une condition nécessaire pour qu'une filtration soit dynamiquement standard. Se demander si ce critère est également une condition suffisante pour la standardité dynamique est une question naturelle. Cela permettrait de compléter la transition d'une classification des filtrations valable dans le cadre des espaces probabilisés vers les systèmes dynamiques. À noter que le I-confort dynamique simple implique la standardité dynamique, comme vu dans la section 3.4.

Non standardité de $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ pour ε petit

La filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ est dynamiquement standard pour ε suffisamment grand dans le théorème 90. La question pour ε plus petit que le seuil de percolation est compliquée. En effet, elle exige d'abord d'envisager tous les couplages en temps réel possibles, ce qui est une tâche ardue. Une heuristique intéressante nous permet cependant de nous positionner vis à vis de cette question. Comme vu page 47, la « fausse bonne idée » semble être la façon optimale de réaliser un couplage en temps réel dynamique. Or pour ε petit, l'article [14] montre que cette stratégie ne permet pas d'arriver à un couplage satisfaisant. Cela pourrait être une piste pour montrer que la filtration $\mathcal{F}^{\tau_\varepsilon}$ n'est pas dynamiquement standard.

Partie II

Nous avons vu que cette partie est motivée par une problématique de composition musicale, le calcul d'intervalles, qui est en fait l'itération d'un automate cellulaire sur des suites. Les résultats mathématiques de la partie II ont été implémentés dans le logiciel de composition UPISketch et permettent à l'utilisateur de contrôler le comportement des itérations. En effet, le logiciel utilise les caractérisations des suites réductibles et reproductibles pour les deux automates, ainsi que les temps de réductibilité et de reproductibilité. L'utilisateur peut comprendre l'importance de la décomposition en nombres premiers du cardinal de la gamme qu'il choisit. S'il souhaite aller dans le sens des antécédents, l'usage de la caractéristique lui permet de contrôler l'évolution de la période.

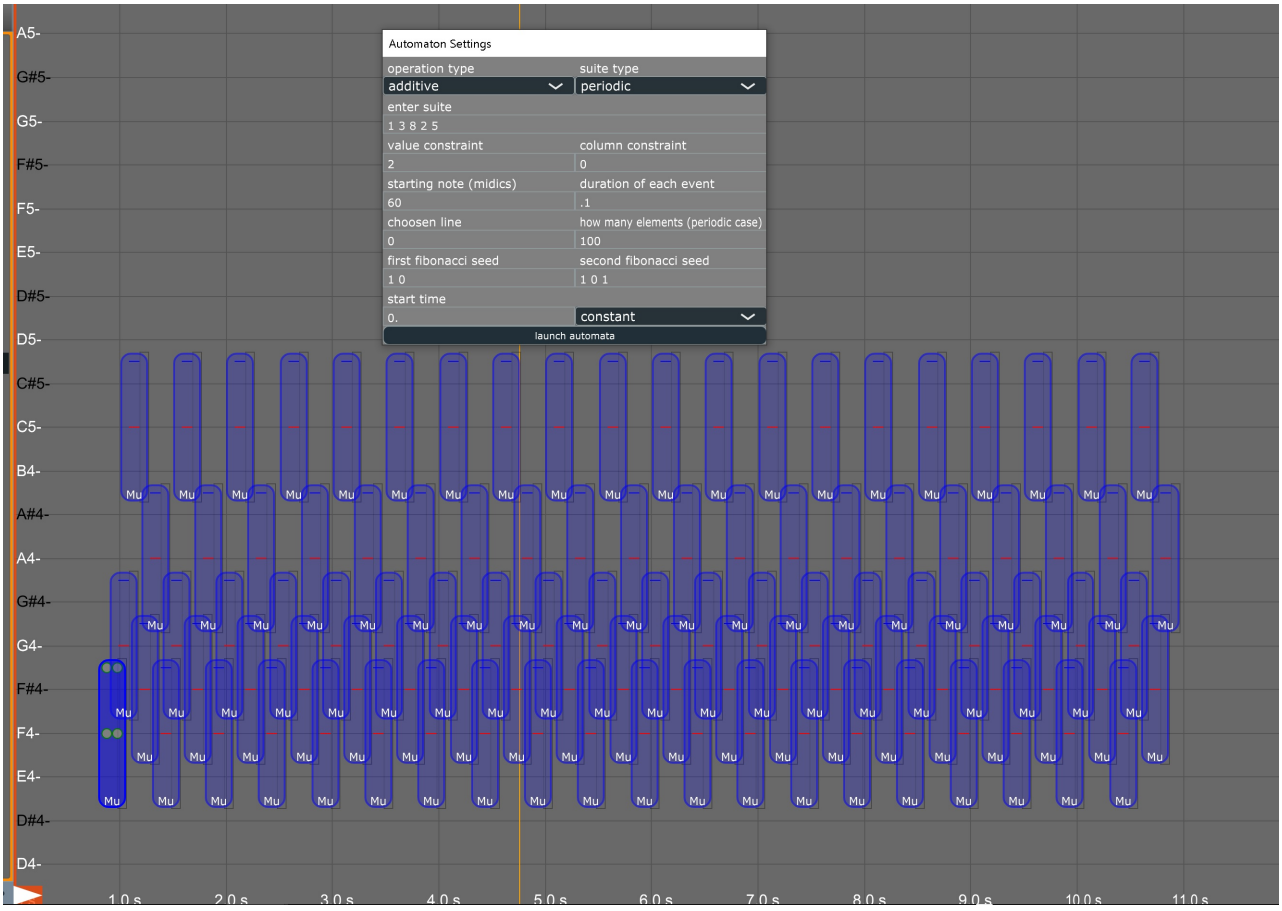


FIGURE 5.15 – Exemple d'utilisation du module *Automaton* dans le logiciel UPISketch.

D'autre liens intéressants ont été établis, notamment celui entre les automates sigma-polynomiaux et les polynômes de Laurent, la relation de dualité entre τ et Δ, et enfin une relation de conjugaison permettant de retranscrire à l'automate τ de nombreux résultats valables pour l'automate Δ. Nous présentons à présent certaines questions qui n'ont pas été complètement résolues et quelques perspectives.

Décrire plus précisément les temps de réductibilité et de reproductibilité

Des bornes supérieures ont été trouvées pour les temps de réductibilité et de reproductibilité, cependant la question des bornes inférieures est plus ardue que prévue. En effet, comme montré dans le paragraphe 5.2.1, la première borne trouvée était fausse. Nous souhaiterions trouver les bornes inférieures optimales en fonction de la période de la suite considérée.

L'évolution bien particulière des périodes dans le sens des antécédents

Il serait intéressant de comprendre le problème soulevé par l'évolution des périodes dans le sens des antécédents, illustré par la figure 5.3. Il semble que le comportement de la suite $(\pi_n)_{n\leq 0}$ soit le suivant : Pour une suite $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$ donnée, de période $\pi(\boldsymbol{x})$, les changements de période pour les antécédents de $\boldsymbol{x}$ semblent se faire par pallier, aléatoirement mais d'un ordre de grandeur une puissance de p. Pour comprendre ce phénomène, il semble utile d'employer les différents outils vus dans la partie II, notamment le caractéristique qui permet de contrôler explicitement les changements de période et la propriété de p-scaling qui joue probablement un rôle.

Action des automates sur des suites stürmiennes

Nous avons vu l'action d'automates cellulaires sur des suites périodiques, qui sont les suites de plus faible complexité. Un travail a été initié cette année avec Pablo Rotondo, sur l'étude de l'action des mêmes automates cellulaires sur des suites de complexité minimales parmi les suites non périodiques : les suites **stürmiennes**. Dans ce cas l'alphabet est réduit à deux éléments, une interprétation possible d'telle suite en musique peut être la suivante : 0 signifie un silence et 1 qu'une note sera jouée relativement à une unité de temps.

Nous étudions comment évolue la complexité des images et des antécédents d'une suite stürmienne par les automates cellulaires. Nous souhaitons notamment caractériser dans quel cas l'image d'une suite stürmienne reste stürmienne.

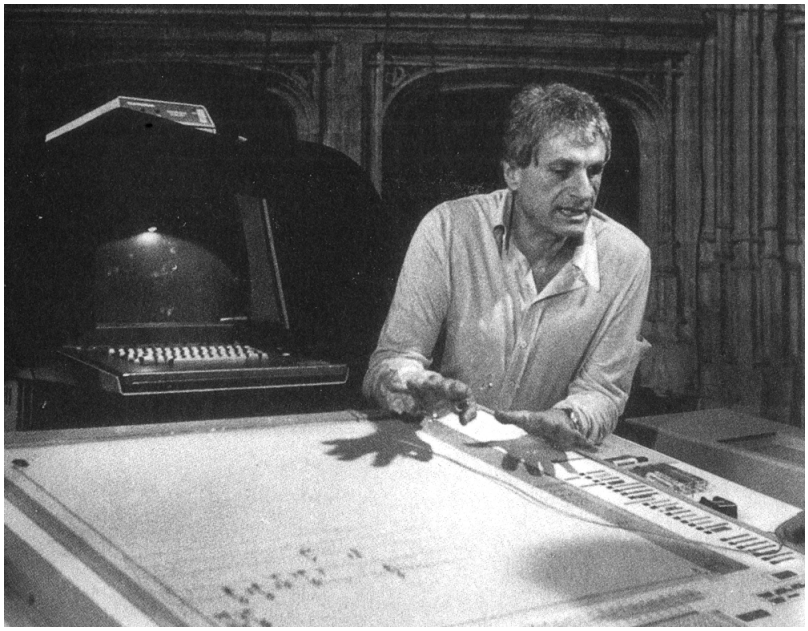
Nous souhaitons également étudier le cas où l'on fait agir des automates cellulaires sur des suites **épistürmiennes**, c'est à dire la généralisation des suites stürmiennes mais dans $\mathbb{Z}_N$ pour $N \geq 3$. En musique ces dernières pourraient être interprétées comme des suites intervalliques, donc projetables comme des mélodies. Nous planifions d'implémen-

ter les résultats sur les suites stürmiennes et épistürmiennes en musique dans le logiciel UPISketch.

Utilisation de la partie I dans UPISketch

Iannis Xenakis dans [25], parle de musique issue de processus markoviens. Les filtrations étudiées dans la partie I sont issues par de tels processus. Il est envisagé d'étudier et d'immerger dans UPISketch, le cas de deux suites d'intervalles indépendantes tirées aléatoirement et que l'on essaie de faire coïncider par exemple. Étudier le cas des automates probabilistes étant des versions bruitées des automates déterministes est également une piste prometteuse d'un point de vue applicatif.

« Comme mes sens sont réduits de moitié, c'est comme si je me trouvais dans un puits, et qu'il me fallait appréhender l'extérieur à travers un trou [...] J'ai été obligé de réfléchir plus que de sentir. Donc je suis arrivé à des notions beaucoup plus abstraites. » Iannis Xenakis.



Bibliographie

[1] A W Burks Von Neumann J. *Theory of self-reproducing automata*. University of Illinois Press, 1966.

[2] A. M. Vershik. The theory of decreasing sequences of measurable partitions. *St. Petersbg. Math. J.*, 6(4) :1–68, 1994.

[3] Anatol Vieru. Modalism-A" Third World". *Perspectives of New Music*, pages 62–71, 1985.

[4] Anatol Vieru. Generating Modal Sequences (A remote approach to minimal music). *Perspectives of New Music*, pages 178–200, 1992.

[5] Anatol Vieru. *The Book of Modes (I, II) : From Modes to a Model of the Intervallic Musical Thought : from Modes to Musical Time*. Editura Muzicală, 1993.

[6] Paul Lanthier, Corentin Guichaoua, and Moreno Andreatta. Reinterpreting and extending anatol vieru's periodic sequences through the cellular automata formalisms. In Mariana Montiel, Francisco Gomez-Martin, and Octavio A. Agustín-Aquino, editors, *Mathematics and Computation in Music*, pages 261–272. Springer International Publishing, 2019.

[7] Stéphane Laurent. On standardness and I-cosiness. In *Séminaire de Probabilités XLIII, Poitiers, France, Juin 2009.*, pages 127–186. Berlin : Springer, 2011.

[8] Thierry de la Rue. Espaces de Lebesgue. In *Séminaire de probabilités XXVII*, pages 15–21. Berlin : Springer-Verlag, 1993.

[9] Meir Smorodinsky. Processes with no standard extension. *Isr. J. Math.*, 107 :327–331, 1998.

[10] B. Tsirelson. Triple points : From non-Brownian filtrations to harmonic measures. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6) :1096–1142, 1997.

[11] M. Émery and W. Schachermayer. On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness. In *Séminaire de Probabilités XXXV*, pages 265–305. Berlin : Springer, 2001.

[12] Claude Dellacherie. Mesurabilité des débuts et théorème de section : le lot à la portée de toutes les bourses. Séminaire de probabilités XV, Univ. Strasbourg 1979/80, Lect. Notes Math. 850, 351-370 (1981)., 1981.

[13] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. II*. Berlin : Springer, 2007.

[14] Maury Bramson and Claudia Neuhauser. Survival of one-dimensional cellular automata under random perturbations. *Ann. Probab.*, 22(1) :244–263, 01 1994.

[15] P. Billingsley. *Ergodic theory and information.* John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1965.

[16] Harry Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. *Math. Syst. Theory*, 1 :1–49, 1967.

[17] Thierry de la Rue. An introduction to joinings in ergodic theory. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 15(1) :121–142, 2006.

[18] Irène Marcovici. Ergodicity of noisy cellular automata : the coupling method and beyond. In *Pursuit of the universal. 12th conference on computability in Europe, CiE 2016, Paris, France, June 27 – July 1, 2016. Proceedings*, pages 153–163. Cham : Springer, 2016.

[19] Geoffrey Grimmett. *Percolation. 2nd ed.*, volume 321. Berlin : Springer, 2nd ed. edition, 1999.

[20] Thomas M. Liggett. Survival of discrete time growth models, with applications to oriented percolation. *Ann. Appl. Probab.*, 5(3) :613–636, 1995.

[21] Moreno Andreatta and Dan Tudor Vuza. On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory. *Tatra Mt. Math. Publ*, 23(1) :1–15, 2001.

[22] Moreno Andreatta, Dan Tudor Vuza, and Carlos Agon. On some theoretical and computational aspects of Anatol Vieru's periodic sequences. *Soft Computing*, 8(9) :588–596, 2004.

[23] Dan Tudor Vuza. *Aspects mathématiques dans la théorie modale d'Anatol Vieru*. Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1982.

[24] Oscar Zariski and Pierre Samuel. Commutative algebra. Vol. 1. With the cooperation of I. S. Cohen. 1958.

[25] Iannis Xenakis. *Musiques formelles*. La revue musicale, 1963.