



**HAL**  
open science

# Analyse et probabilité sur les groupes quantiques (localement) compacts et les groupes duaux

Isabelle Baraquin

► **To cite this version:**

Isabelle Baraquin. Analyse et probabilité sur les groupes quantiques (localement) compacts et les groupes duaux. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2019. Français. NNT : 2019UBFCD009 . tel-03097347

**HAL Id: tel-03097347**

**<https://theses.hal.science/tel-03097347>**

Submitted on 5 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



---

# Thèse de Doctorat

présentée par

**Isabelle BARAQUIN**

*Pour obtenir le grade de  
Docteur en Mathématiques de l'Université  
Bourgogne Franche-Comté*

---

## Analyse et probabilité sur les groupes quantiques (localement) compacts et les groupes duaux

---

Thèse soutenue le 2 juillet 2019, devant le jury composé de :

Uwe FRANZ Directeur de thèse Université Bourgogne - Franche-Comté  
Amaury FRESLON Examineur Université Paris-Sud XI  
Yulia KUZNETSOVA Examinatrice Université Bourgogne Franche-Comté  
Christian LE MERDY Président du jury Université Bourgogne Franche-Comté  
Roland VERGNIoux Examineur Université de Caen Normandie  
Moritz WEBER Rapporteur Saarland University Allemagne  
Benoît COLLINS Rapporteur Membre du jury absent lors de la soutenance



# Remerciements

Je voudrais profiter de l'occasion qui m'est donnée ici pour remercier tout d'abord les membres du jury qui ont accepté d'étudier ce travail. Merci en particulier aux rapporteurs qui ont pris le temps de lire ce manuscrit avec attention.

Je voudrais tout particulièrement remercier Uwe Franz qui m'a proposé de faire une thèse à la suite des projets de master. Il a été un professeur rigoureux, exigeant et attentif pour me permettre de découvrir le monde non commutatif et celui de la recherche.

La recherche en mathématiques demande beaucoup de discussions et de rencontres pour échanger des idées ou de nombreuses questions. Durant ces trois années, j'ai eu l'occasion de faire plusieurs voyages financés par les Partenariats Hubert Curien Sakura, Polonium et Procope, au Japon, en Pologne et en Allemagne. Je tiens à remercier non seulement les organismes financeurs, mais aussi les personnes qui m'ont accueillie lors de mes déplacements : Benoît Collins, Gunjan Sapra et Sushma Kumari à Kyoto, l'IMPAN et plus particulièrement Adam Skalski à Varsovie, Moritz Weber, Laura Maassen et Miguel Pulma à Sarrebruck, Anna Wysoczańska-Kula et Biswarup Das à Wrocław. Leurs sourires ont rendu le travail agréable, malgré la fatigue des trajets. Ce travail était aussi soutenu par le programme « Investissements d'Avenir », projet ISITE-BFC (contrat ANR-15-IDEX-03).



De plus, j'avais eu la chance d'obtenir un contrat doctoral financé par la région Bourgogne Franche-Comté. Que les élus soient ici remerciés pour leur soutien à la recherche dans notre région.

J'ai effectué mes enseignements au sein du service Mathématiques de l'École nationale supérieure de Mécanique et des Microtechniques (ENSM). Je remercie tous les enseignants qui m'ont accueillie parmi eux. Merci aussi à Charlotte et Aude pour les fiches qui m'ont permis de débiter plus facilement.

Je tiens aussi à saluer mes collègues doctorants. Je ne les citerai pas tous, pour ne pas risquer d'en oublier, mais je suis sûre qu'ils sauront se reconnaître. Merci pour les discussions, les échanges et les conseils pour les mathématiques, l'administratif de l'agrégation ou les responsabilités d'organisation, aussi bien dans l'un des bureaux, qu'autour d'un thé ou au RU. J'espère que la relève sera assurée pour l'organisation des séminaires, de la Journée des Jeunes Chercheurs en mathématiques de l'UBFC et pour les Journées de

l'école doctorale Carnot-Pasteur. Ces évènements rythment la vie des doctorants et sont toujours l'occasion de rencontres humaines riches et intéressantes.

Le travail au LmB ne serait pas possible sans le soutien de la bibliothèque et des services administratif et financier, et informatique. Merci à Odile et Émilie pour leur disponibilité et les recherches d'articles quand celui qui nous intéresse est justement celui qui n'est pas accessible par les voies habituelles (et, plus difficile, pour celles sur le fonctionnement d'ADUM!). Merci à Catherine, Pascaline, Lydie, Claudia et Charlène pour leur accueil et leurs conseils pour l'organisation des séminaires et conférences, les prêts d'ordinateurs portables (le fameux PS09 avec la petite pochette est vraiment très pratique), les bons de commande et les remboursements. Merci à Richard, Christopher, Jean-Pierre et Olivier pour les dépannages informatiques quand le copieur ou l'imprimante ne veulent plus faire ce qu'on leur demande. Merci aussi à Sylvie pour son sourire et le bureau tout propre malgré les poussières des travaux! Les conditions matérielles rendent le quotidien plus ou moins agréable, les périodes de travaux ont été difficiles mais tout ce personnel contribue à aider le doctorant.

Pour finir, je remercie ma famille pour son soutien. Vous ne saurez toujours pas très bien ce que je fais, mais vous pourrez lire les premiers chapitres en français!

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Étude des traces de puissances des représentations . . . . .	2
1.2	Marches aléatoires et groupes quantiques finis . . . . .	3
1.3	Présentation des résultats . . . . .	4
1.4	Conventions et notations . . . . .	5
<b>I</b>	<b>Mathématiques non commutatives</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Outils nécessaires</b>	<b>9</b>
2.1	Algèbres . . . . .	9
2.2	Produit tensoriel . . . . .	11
2.3	Produit libre . . . . .	12
2.4	Bigèbres et algèbres de Hopf . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Groupes quantiques</b>	<b>15</b>
3.1	Du classique au quantique . . . . .	15
3.2	Propriétés . . . . .	16
3.2.1	État de Haar . . . . .	16
3.2.2	Théorie des représentations . . . . .	16
3.2.3	Transformée de Fourier . . . . .	17
3.3	Exemples . . . . .	19
3.3.1	Groupes quantiques orthogonaux . . . . .	19
3.3.2	La famille des $SU_q(N)$ . . . . .	19
3.3.3	Groupe de Kac-Paljutkin . . . . .	20
3.3.4	Famille de Sekine . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Groupes duaux</b>	<b>23</b>
4.1	Définitions . . . . .	23
4.2	Le groupe dual unitaire . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Théorie des probabilités non commutatives</b>	<b>27</b>
5.1	Espaces de probabilité non commutatifs . . . . .	27
5.2	Différentes notions d'indépendance . . . . .	29
5.2.1	Cas classique : l'indépendance tensorielle . . . . .	29
5.2.2	L'indépendance libre . . . . .	29
5.3	Cumulants . . . . .	31

TABLE DES MATIÈRES

5.3.1	Partitions non croisées . . . . .	31
5.3.2	Cumulants libres . . . . .	32
<b>II</b>	<b>Finite quantum groups</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Kac-Paljutkin finite quantum group</b>	<b>37</b>
6.1	Representation theory . . . . .	37
6.1.1	The group of group-like elements . . . . .	37
6.1.2	Matrix elements and fundamental representation . . . . .	38
6.1.3	Fusion rules . . . . .	39
6.2	Traces of the fundamental representation and its powers . . . . .	40
6.2.1	Powers of the fundamental representation . . . . .	40
6.2.2	Independence . . . . .	42
6.3	Random walks . . . . .	43
6.3.1	Upper and lower bounds . . . . .	44
6.3.2	Asymptotic behavior . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Sekine family of finite quantum groups</b>	<b>47</b>
7.1	Representation theory . . . . .	47
7.1.1	Case $n$ odd . . . . .	47
7.1.2	Case $n$ even . . . . .	47
7.1.3	Fusion rules . . . . .	49
7.2	Character spaces . . . . .	49
7.2.1	Characters . . . . .	49
7.2.2	Algebra of characters . . . . .	50
7.2.3	A commutative (sub)algebra . . . . .	51
7.3	Asymptotic properties of characters associated with the representations $\mathfrak{X}^{u,v}$ . . . . .	53
7.3.1	Asymptotic distributions . . . . .	53
7.3.2	Asymptotic pairwise independence . . . . .	56
7.4	Random walks . . . . .	57
7.4.1	Conditions for convergence . . . . .	58
7.4.2	Distance to uniformity . . . . .	59
7.4.3	Cut-off phenomenon . . . . .	60
7.4.4	Asymptotic behavior . . . . .	63
7.5	The dual family . . . . .	68
7.5.1	Representation theory . . . . .	69
7.5.2	Traces of powers of the generating representation . . . . .	69
7.5.3	Random walks . . . . .	69
<b>III</b>	<b>Study of dual groups</b>	<b>71</b>
<b>8</b>	<b>Asymptotic aspects of the unitary dual group</b>	<b>73</b>
8.1	Mixed $*$ -moments . . . . .	73
8.2	Asymptotic distributions . . . . .	76

<b>9</b>	<b>The orthogonal dual group</b>	<b>79</b>
9.1	Real $C^*$ -algebra . . . . .	79
9.2	Free products of real unital $*$ -algebras . . . . .	80
9.3	Orthogonal dual group . . . . .	81
9.4	The Haar state in the one-dimensional case . . . . .	83
9.5	The non-existence of the Haar state in the free and tensor cases, $n \geq 2$ . . . . .	83
9.6	The non-existence of the Haar state and the Haar trace in the boolean case, $n \geq 2$ . . . . .	85
9.7	The non-existence of the Haar state and the Haar trace in the monotone and antimonotone cases, $n \geq 2$ . . . . .	85
9.8	Existence of the Haar trace for the free and the tensor convolution, $n \geq 2$ . . . . .	86
9.9	Construction of the free Haar trace, $n \geq 2$ . . . . .	87
	 <b>Appendix</b>	 <b>89</b>
<b>A</b>	<b>Trace of the square of the fundamental representation of <math>O_n^+</math></b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Multiplication and fusion rules in the finite quantum group <math>\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n</math></b>	<b>95</b>
<b>C</b>	<b>Cumulant of R-cyclic matrices and unitary dual group</b>	<b>97</b>
	<b>Index</b>	<b>101</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>103</b>



# TABLE DES MATIÈRES

# Chapitre 1

## Introduction

L'histoire des mathématiques a été en partie dirigée par l'idée de généralisation pour mieux comprendre certains objets ou relier des concepts similaires provenant de champs mathématiques distincts. Les mathématiques non commutatives n'y font pas exception. Cette démarche a, entre autres, donné naissance à la théorie des groupes quantiques, des groupes duaux et à celle des probabilités libres.

L'idée principale est de définir les objets mathématiques classiques, non plus comme ensemble de points, mais à travers l'algèbre de leurs fonctions à valeurs complexes, puis de supprimer l'hypothèse de commutativité dans cette dernière.

Par exemple, pour  $X$  un espace topologique compact, l'ensemble  $C(X)$  des fonctions continues sur  $X$  et à valeurs complexes est une  $C^*$ -algèbre commutative. Réciproquement, toute  $C^*$ -algèbre commutative est de cette forme, d'après le théorème de Gelfand-Naimark. Cela nous invite donc à considérer les  $C^*$ -algèbres non commutatives comme les algèbres de fonctions d'espaces compacts « non commutatifs ». Si, de plus, nous regardons un groupe compact abélien  $G$ , la  $C^*$ -algèbre  $C(G)$  peut être munie d'une structure supplémentaire qui en fait une  $*$ -algèbre de Hopf unifière.

Dans ce cas, la dualité de Pontryagin nous assure alors que  $G$  est canoniquement isomorphe à son bidual  $\hat{\hat{G}}$ , et il est possible d'étendre cette relation symétrique aux groupes abéliens localement compacts. Malheureusement, ce n'est plus le cas lorsque le groupe étudié est non abélien. Il faut donc trouver une catégorie d'algèbres de Hopf, contenant la sous-catégorie des groupes abéliens localement compacts, et vérifiant une dualité parfaite.

De nombreuses tentatives ont été faites dans cette direction, développées de façon indépendante par différents mathématiciens. Par exemple, Kac et Vainerman, et Enock et Schwartz ont développé en parallèle la théorie des algèbres de Kac [15], qui admettent un dual du même type et généralisent les résultats connus. C'est dans ce contexte, à la fin des années 1980, que Woronowicz a défini le concept de pseudo-groupe, qui a ensuite pris le nom de groupe quantique [41, 22], à l'aide d'une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  et d'un coproduit  $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  coassociatif vérifiant les règles de bisimplifiabilité quantique.

Cette théorie est très riche, et de nombreuses notions définies pour les groupes compacts classiques se généralisent au cas quantique ou y trouvent des notions similaires. C'est par exemple le cas de la théorie des représentations, de l'état de Haar ou de la transformée de Fourier que nous présenterons dans le chapitre 3.

Il est aussi possible de généraliser les groupes classiques dans le cadre non commutatif à l'aide du produit libre d'algèbres. Cette idée nous permet de définir les groupes duaux

au sens de Voiculescu [39]. Remarquons que cette notion de groupe dual est différente de celle prise en compte dans la dualité de Pontryagin. Dans ce cadre, le coproduit prend ses valeurs dans le produit libre de l'algèbre avec elle-même et il ne lui est plus imposé de satisfaire les règles de bisimplifiabilité quantique. En revanche, il est demandé que deux autres  $*$ -homomorphismes existent, il s'agit de la counité  $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  qui joue le rôle de l'élément neutre d'un groupe classique  $G$  et l'antipode  $\Sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  qui joue celui de l'opération inverse dans  $G$ . La présentation de ces groupes duaux fait l'objet du chapitre 4.

D'autre part, en étudiant les algèbres de von Neumann des groupes libres  $\mathbb{F}_n$  à  $n$  générateurs, Voiculescu a introduit la notion de liberté, ce qui a conduit au développement de la théorie des probabilités libres, et plus largement à celle des probabilités non commutatives.

Dans les années 70 et 80, les probabilités non commutatives sont devenues un champ de recherche important, qui généralise la théorie des probabilités formulée par Kolmogorov. Certaines parties ressemblent au cas classique, mais il existe aussi des différences significatives. L'une d'elles est la notion d'indépendance. Alors qu'il n'existe qu'une définition d'indépendance pour deux variables aléatoires classiques, il en existe cinq différentes dans le cas des probabilités non commutatives.

La théorie des probabilités libres possède des liens étroits avec de nombreux domaines, de la théorie des opérateurs aux matrices aléatoires [36], de la combinatoire [30] à la théorie des représentations des groupes symétriques. Nous présenterons dans le chapitre 5 les éléments essentiels pour notre travail.

C'est dans cet esprit d'extension des résultats classiques au cas quantique que nous avons travaillé durant ces trois ans de thèse. Résumons d'abord ces résultats du cas classique et certaines de leurs extensions au cas non commutatif, avant d'exposer nos travaux.

## 1.1 Étude des traces de puissances des représentations

En 1991, Diaconis et Shahshahani [14] ont montré que les traces des puissances d'une matrice, choisie uniformément aléatoirement dans le groupe unitaire, sont asymptotiquement (quand la dimension de la matrice tend vers l'infini) des variables aléatoires indépendantes, gaussiennes complexes et centrées. De plus, la variance de cette loi est égale à la puissance de la matrice.

Ils ont également étudié les groupes orthogonal, symplectique et symétrique. Les variables aléatoires obtenues suivent asymptotiquement respectivement les lois normales  $\mathcal{N}(\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(k), k)$  et  $\mathcal{N}(-\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(k), k)$  et la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\frac{1}{k})$ , où  $k$  est la puissance de la matrice, et  $\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}$  la fonction indicatrice des entiers pairs.

Ces résultats permettent en particulier d'étudier les valeurs propres d'une matrice aléatoire dans ces groupes, comme le montre [12], et d'obtenir des convergences de mesures de probabilité.

Banica, Curran et Speicher [3, 4] ont réalisé le même type d'étude, dans le contexte des groupes quantiques compacts « easy ». Ils ont obtenu des résultats similaires, dans le cadre de la théorie des probabilités libres. Par exemple, pour le groupe orthogonal libre,

ils ont prouvé que les traces des puissances de la représentation fondamentale  $\chi(u^k)$  sont asymptotiquement des variables aléatoires  $*$ -libres, semi-circulaires si  $k \leq 2$  et circulaires lorsque  $k \geq 3$ .

Pour cela ils ont utilisé d'autres techniques, puisque nous ne disposons pas d'une définition satisfaisante des valeurs propres d'une matrice dont les coefficients sont les éléments d'une algèbre non commutative. Ils ont fait appel à la théorie des représentations et à la dualité de Tannaka-Kreĭn, prouvée par Woronowicz [43], puis aux matrices de Weingarten pour déterminer les moments joints puis les cumulants libres de ces traces. Remarquons que cette méthode permet de retrouver les résultats du cas classique en supposant la commutativité de l'algèbre.

Malheureusement, cette technique ne peut se généraliser à tous les groupes quantiques. Par exemple, Banica et Collins [2] ont étudié les matrices de Weingarten du cas unitaire libre, et n'ont pas pu obtenir de formule générale pour exprimer leurs coefficients.

## 1.2 Marches aléatoires et groupes quantiques finis

Pour un groupe fini classique  $G$ , et un point fixé  $h$  dans  $G$ , choisissons aléatoirement, suivant une loi de probabilité fixée, un élément  $g$ , et allons au point  $gh$ . En répétant cette procédure, avec la même loi de probabilité  $\pi$ , nous obtenons une suite d'éléments  $h_k = g_k g_{k-1} \dots g_1 h$  de  $G$  qui définissent une marche aléatoire sur le graphe de Cayley de  $G$ . Une question fréquemment posée est de savoir quand la loi de probabilité  $\pi^{*k}$  de la position actuelle  $h_k$  sera proche de la loi uniforme sur  $G$ . Diaconis et Shahshahani ont répondu à cette question dans [13] pour le cas des groupes de permutations, en utilisant la théorie des représentations.

Ils ont aussi observé qu'après moins de  $t_n$  transpositions aléatoires un paquet de  $n$  cartes n'est pas bien mélangé, mais qu'après plus de  $t_n$  transpositions aléatoires, il est bien mélangé, avec  $t_n = \frac{1}{2}n \log(n)$ . Ce phénomène est appelé « cut-off » ou phénomène de seuil. Pour de plus amples informations sur cette propriété, le lecteur peut consulter l'article de Saloff-Coste [34].

Les marches aléatoires sur les groupes quantiques finis ont été étudiées pour la première fois par Franz et Gohm [16]. Comme nous n'avons pas accès aux éléments du groupe quantique, il faut traduire les propriétés qui nous intéressent. Pour cela, remarquons que les lois de probabilité des positions successives  $\{\pi^{*k}\}_{k \geq 1}$  forment un semi-groupe de convolution dans l'ensemble des mesures de probabilité définies sur le groupe  $G$  dans le cas classique. Dans le cas quantique, nous nous intéresserons donc aux semi-groupes de convolution  $\{\phi^{*k}\}_{k \geq 1}$  dans l'ensemble des états définis sur l'algèbre du groupe quantique considéré.

Dans sa thèse [23], McCarthy a développé la théorie de Diaconis et Shahshahani, dans le cadre des groupes quantiques finis, pour estimer la distance en variation totale entre  $\phi^{*k}$  et la mesure de Haar. Il a également étudié le phénomène de seuil dans ce contexte [24], mais n'a pas pu en démontrer l'existence. Freslon [19, 18] a étendu ces méthodes au groupe quantique compact libre orthogonal  $O_n^+$  et a obtenu un « cut-off » dans ce cadre.

De plus, l'étude de la convergence des marches aléatoires repose en partie sur la connaissance des états idempotents. Ils ont été déterminés par Pal [31] pour le groupe quantique de Kac-Paljutkin et Zhang [44] a récemment classé ceux des groupes quantiques finis de Sekine.

### 1.3 Présentation des résultats

Dans le cadre de notre doctorat, nous avons tout d'abord travaillé sur les groupes quantiques finis pour étudier l' $*$ -distribution des traces des puissances des représentations irréductibles, et la convergence de certaines marches aléatoires. Nous avons ensuite regardé les traces des puissances de la représentation fondamentale du groupe dual unitaire au sens de Voiculescu, par rapport à la trace de Haar libre, avant d'étendre l'étude au cas du groupe dual orthogonal. C'est ce travail que nous présentons ici.

Plus précisément, après avoir déterminé la théorie des représentations des groupes quantiques finis de Kac-Paljutkin  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  et de Sekine  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ , nous nous intéresserons aux traces des puissances de leurs représentations irréductibles. Nous montrerons qu'elles sont dans l'algèbre des caractères, c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les traces des représentations irréductibles. C'est la raison pour laquelle nous les appellerons caractères associés, même s'ils ne correspondent pas à la trace d'une représentation du groupe quantique. Remarquons qu'il existe des groupes quantiques où les traces des puissances de certaines représentations ne sont pas dans l'algèbre des caractères, contrairement aux groupes classiques où elles le sont toujours.

Nous identifierons ensuite l' $*$ -distribution, par rapport à l'état de Haar, de chacun de ces caractères associés, définis sur le groupe de Kac-Paljutkin  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , et déterminerons les relations d'indépendance entre eux. Nous rencontrerons des lois discrètes définies comme combinaison convexe de masses de Dirac. Dans le cas de la famille des groupes quantiques finis de Sekine, nous étudierons tout d'abord de façon plus approfondie l'algèbre engendrée par les caractères irréductibles et une sous-algèbre commutative, avant de déterminer les  $*$ -distributions asymptotiques de ces traces, au sens de la convergence des moments.

D'autre part, nous regarderons certaines marches aléatoires sur ces groupes quantiques finis. Elles seront définies à partir de la transformée de Fourier de combinaisons linéaires des caractères irréductibles. Après avoir trouvé des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces marches aléatoires soient bien définies, nous étudierons leur convergence, tout d'abord vers l'état de Haar à l'aide de la version quantique de la théorie de Diaconis et Shahshahani, puis nous déterminerons les états limites possibles et les conditions de convergence. En particulier, nous montrerons que ces limites sont des états idempotents centraux, i.e. vérifient  $\phi \star \phi = \phi$  et  $\phi \star \psi = \psi \star \phi$  pour toute fonctionnelle linéaire  $\psi$ .

De plus, dans le cadre des groupes de Sekine, nous nous intéresserons également aux phénomènes de seuil. Nous étudierons un exemple de marche aléatoire et montrerons qu'il ne possède pas cette propriété. Nous regarderons aussi les groupes duaux  $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ , engendrés par les représentations irréductibles des groupes de Sekine  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ , et réaliserons dans ce cadre les mêmes études.

L'ensemble de ces résultats est présenté dans la seconde partie de ce document, dans les chapitres 6, pour l'étude du groupe quantique fini de Kac-Paljutkin, et 7, pour celle de la famille des groupes quantiques finis de Sekine et de leurs duaux.

Dans une troisième partie, nous nous tournerons vers le cas des groupes duaux au sens de Voiculescu. Nous réaliserons une étude des traces des puissances de la représentation fondamentale du groupe dual unitaire dans le chapitre 8. Nous déterminerons l' $*$ -distribution de chacune de ces traces par rapport à la trace de Haar libre définie par Cébron et Ulrich [7] et leurs relations d'indépendance dans le cadre des probabilités non commutatives. Nous montrerons que ce sont asymptotiquement toutes des variables

aléatoires circulaires  $*$ -libres.

Dans le chapitre 9, nous étudierons le groupe dual orthogonal défini par Voiculescu, et montrerons que l'étude se déduit en partie de celle du groupe dual unitaire.

## 1.4 Conventions et notations

Sauf mention contraire, nous considérerons les espaces vectoriels, et les algèbres, sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . De plus, les algèbres seront, par définition, associatives, mais pas nécessairement commutatives. Les produits tensoriels mentionnés seront alors les produits tensoriels algébriques sur  $\mathbb{C}$ . Ces notions sont définies avec plus de précision dans la première partie, qui présente les outils nécessaires au travail exposé dans ce document.

Pour tout espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , l'algèbre des opérateurs bornés est notée  $B(\mathcal{H})$ , et la notation  $K(\mathcal{H})$  désigne l'ensemble des opérateurs compacts.

L'ensemble des entiers naturels est noté  $\mathbb{N}$  et, suivant la convention anglo-saxonne, ne contient pas 0. Nous noterons  $\mathbb{Z}_n$  l'ensemble des entiers modulo  $n$  :  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Nous utiliserons plusieurs lois classiques de probabilité. Voici les principales notations :

- $\delta_x$  désigne la masse de Dirac au point  $x$
- $\mathcal{U}(x\mathbb{T})$  correspond à la loi uniforme sur le multiple du cercle unité  $\mathbb{T}$  dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$
- $\mu_{arc(x,y)}$  est la loi arcsinus sur l'intervalle ouvert réel  $]x ; y[$ , c'est-à-dire la loi de probabilité de fonction de densité  $t \mapsto \frac{C}{\sqrt{(t-x)(y-t)}} \mathbf{1}_{]x ; y[}(t)$ , où  $C$  est la constante de normalisation d'inverse  $\int_x^y \frac{1}{\sqrt{(t-x)(y-t)}} dt$ .

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

# Première partie

## Mathématiques non commutatives





# Chapitre 2

## Outils nécessaires

Nous présentons ici les outils nécessaires à l'étude qui va suivre. Nous supposons que le lecteur connaît les notions de base d'algèbre linéaire et de théorie des espaces de Hilbert. La plupart des définitions et résultats donnés ici sont des propriétés classiques, qu'il est possible de trouver dans de nombreuses références.

### 2.1 Algèbres

Malgré leur nom de groupe, nous nous intéressons à des algèbres. Elles peuvent prendre différentes formes et structures algébriques.

**Définition 2.1.1.** Une algèbre  $\mathcal{A}$  sur le corps  $\mathbf{K}$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni d'une multiplication

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

telle que, pour tout  $(x, y, z) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  et tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}$ ,

$$\begin{aligned} (x + y)z &= xz + yz , \\ x(y + z) &= xy + xz , \\ (\lambda x)(\mu y) &= (\lambda\mu)xy , \\ (xy)z &= x(yz) . \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{A}$  contient un élément neutre pour cette multiplication, l'algèbre sera dite unifière et l'élément neutre, noté  $1_{\mathcal{A}}$  ou  $1$  s'il n'y a pas de confusion possible, sera appelé l'unité de  $\mathcal{A}$ . Si la multiplication est commutative, l'algèbre sera dite commutative.

Nous parlerons de sous-algèbre pour un sous-espace stable par la multiplication. S'il contient l'unité de  $\mathcal{A}$ , ce sous-espace sera dit unifière. Un homomorphisme d'algèbres  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un homomorphisme d'espaces vectoriels compatible avec les multiplications, c'est-à-dire tel que  $f(xy) = f(x)f(y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont unifières, l'homomorphisme  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sera dit unifière s'il préserve l'unité, c'est-à-dire vérifie  $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ .

## CHAPITRE 2. OUTILS NÉCESSAIRES

**Définition 2.1.2.** Une  $*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est une algèbre munie d'une involution  $*$ :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , c'est-à-dire d'une application vérifiant, pour tout  $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  et tout  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,

$$\begin{aligned}(x + \lambda y)^* &= x^* + \bar{\lambda}y^* \\ (x^*)^* &= x \\ (xy)^* &= y^*x^*\end{aligned}$$

où  $\bar{\cdot}$  désigne la conjugaison complexe.

Une sous-algèbre, d'une  $*$ -algèbre, stable par l'involution sera appelée une  $*$ -sous-algèbre. Un  $*$ -homomorphisme est un homomorphisme d'algèbres  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  compatible avec l'involution, i.e. tel que  $f(x^*) = f(x)^*$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ .

**Définition 2.1.3.** Un état  $\phi$  sur une  $*$ -algèbre unifère  $\mathcal{A}$  est une fonctionnelle linéaire positive unifère, c'est-à-dire qui préserve l'unité :  $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ . Cela signifie que  $\phi$  est une application linéaire à valeurs dans  $\mathbf{C}$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{A}, \phi(x^*x) \geq 0 .$$

Une trace est un état tel que pour tout  $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ,  $\phi(xy) = \phi(yx)$ . Nous parlerons d'état fidèle s'il vérifie

$$\forall x \in \mathcal{A}, \phi(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

En particulier, tout état  $\phi$  est hermitien, c'est-à-dire  $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ .

**Définition 2.1.4.** Un espace de probabilité non commutatif est la donnée d'une  $*$ -algèbre unifère  $\mathcal{A}$  munie d'un état  $\phi$ . Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés des variables aléatoires non commutatives.

Nous pouvons aussi munir les algèbres d'une topologie lorsqu'elles sont définies à partir d'un espace vectoriel normé.

**Définition 2.1.5.** Une  $C^*$ -algèbre est une  $*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbf{C}$  munie d'une norme complète vérifiant, pour tout  $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ,  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$  et  $\|x^*x\| = \|x\|^2$ .

Remarquons que tout  $*$ -homomorphisme entre  $C^*$ -algèbre est continu, de norme inférieure ou égale à 1. Un état sur une  $C^*$  algèbre peut alors être défini comme une forme linéaire positive de norme 1.

**Définition 2.1.6.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Une algèbre de von Neumann est une  $*$ -sous-algèbre unifère de  $B(\mathcal{H})$  fermée pour la topologie forte, i.e. la topologie la plus grossière qui rend continue l'application

$$\begin{aligned}\phi_x: \mathcal{A} &\rightarrow \mathbf{C} \\ a &\mapsto \|ax\|\end{aligned}$$

quel que soit  $x \in \mathcal{H}$ .

**Proposition 2.1.7.** *Toute algèbre de von Neumann est une  $C^*$ -algèbre.*

Nous dirons qu'une algèbre de von Neumann  $\mathcal{A}$  est de dimension finie lorsqu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $\mathcal{A}$  est isomorphe à une  $*$ -sous-algèbre unifère de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , cela est équivalent au fait que l'algèbre  $\mathcal{A}$ , vue comme espace vectoriel, est de dimension finie.

## 2.2 Produit tensoriel

**Définition 2.2.1.** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. Le produit tensoriel de  $E_1$  et  $E_2$  est le  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E_1 \otimes E_2$  associé à l'application  $\phi: E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \otimes E_2$  vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $F$ , et toute application bilinéaire  $f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ , il existe une unique application linéaire  $\tilde{f}: E_1 \otimes E_2 \rightarrow F$  telle que  $f = \tilde{f} \circ \phi$ , i.e. telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\phi} & E_1 \otimes E_2 \\ \downarrow f & & \swarrow \tilde{f} \\ F & & \end{array}$$

Ainsi le produit tensoriel  $E_1 \otimes E_2$  peut être identifié comme le quotient de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble  $E_1 \times E_2$  par les relations  $\lambda(x, y) - (\lambda x, y)$ ,  $\lambda(x, y) - (x, \lambda y)$ ,  $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$  et  $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$  quels que soient  $x, x'$  éléments de  $E_1$ ,  $y, y'$  de  $E_2$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Si nous notons  $x \otimes y$  la classe de  $(x, y)$ , l'ensemble des  $x \otimes y$  engendrent  $E_1 \otimes E_2$ . En particulier, si  $(e_i)_{i \in I}$  et  $(f_j)_{j \in J}$  sont des bases de  $E_1$  et  $E_2$  respectivement, la famille  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est une base de  $E_1 \otimes E_2$ .

**Proposition 2.2.2.** Soient  $f: E \rightarrow X$  et  $g: F \rightarrow Y$  deux applications linéaires entre les quatre  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels  $E, F, X$  et  $Y$ . Alors nous pouvons définir l'application linéaire  $f \otimes g: E \otimes F \rightarrow X \otimes Y$  par  $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ , pour tout  $(x, y) \in E \times F$ .

De plus, si les espaces sont munis d'une structure d'algèbre, alors le produit tensoriel est aussi une algèbre. Remarquons que dans ce cas nous identifierons  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ .

**Proposition 2.2.3.** Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux algèbres. L'espace vectoriel  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  peut être muni d'une multiplication, définie par

$$((a_1 \otimes b_1), (a_2 \otimes b_2)) \mapsto (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$$

ce qui en fait une algèbre.

Si les algèbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  considérées sont des  $*$ -algèbres, munies respectivement des involutions  $*_{\mathcal{A}}$  et  $*_{\mathcal{B}}$ , il est possible de définir une involution sur le produit tensoriel pour en faire une  $*$ -algèbre, par la formule suivante :  $(a \otimes b)^* = a^{*\mathcal{A}} \otimes b^{*\mathcal{B}}$ .

Par exemple, nous utiliserons souvent le produit tensoriel de l'algèbre des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec une algèbre  $\mathcal{A}$ . Nous noterons  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$  cette algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ , et ses éléments sont des matrices dont les coefficients sont des éléments de  $\mathcal{A}$ . Nous avons alors besoin d'étendre la définition de la trace d'une matrice.

**Définition 2.2.1.** Soit  $\mathcal{M} \in \mathcal{M}_N(\mathcal{A})$  une matrice dont les coefficients  $\mathcal{M}_{i,j}$  appartiennent à l'algèbre  $\mathcal{A}$ . La trace de  $\mathcal{M}$ , notée  $\chi(\mathcal{M})$ , est la somme de ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire  $\chi(\mathcal{M}) = (\text{tr} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})(\mathcal{M}) = \sum_i \mathcal{M}_{ii}$  dans  $\mathcal{A}$ .

## 2.3 Produit libre

**Définition 2.3.1** ([7]). Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux  $*$ -algèbres unifères. Le produit libre de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  est l'unique  $*$ -algèbre unifère  $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$  donnée avec les  $*$ -homomorphismes  $i_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$  et  $i_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ , tels que, pour tous les  $*$ -homomorphismes  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ , il existe un unique  $*$ -homomorphisme  $f \sqcup g: \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  vérifiant  $f = (f \sqcup g) \circ i_{\mathcal{A}}$  et  $g = (f \sqcup g) \circ i_{\mathcal{B}}$ , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} & \xleftarrow{i_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} \\ & \searrow f & \downarrow f \sqcup g & \swarrow g & \\ & & \mathcal{C} & & \end{array}$$

Nous parlons parfois de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  comme les jambes gauche et droite du produit libre  $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ . C'est pourquoi, pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et tout  $b \in \mathcal{B}$ , nous noterons  $i_{\mathcal{A}}(a)$  et  $i_{\mathcal{B}}(b)$  par  $a^{(1)}$  et  $b^{(2)}$ , respectivement. L'algèbre  $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$  peut être vue comme la plus petite  $*$ -algèbre unifère contenant  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  et telle qu'il n'y a aucune relation entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  excepté le fait que les unités sont confondues. Ainsi, comme dans le cas du produit tensoriel, nous identifierons  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A} \sqcup \mathbb{C}$  son produit libre avec  $\mathbb{C}$ .

Nous pouvons définir un produit libre de morphismes plus général.

**Définition 2.3.2.** Soient  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  quatre  $*$ -algèbres unifères, et  $f: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ ,  $g: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  deux  $*$ -homomorphismes unifères. Alors  $f \sqcup g: \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{B}_2$  est l'unique  $*$ -homomorphisme unifère, donné par  $(i_{\mathcal{A}_2} \circ f) \sqcup (i_{\mathcal{B}_2} \circ g)$ , tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{i_{\mathcal{A}_1}} & \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{B}_1 & \xleftarrow{i_{\mathcal{B}_1}} & \mathcal{B}_1 \\ \downarrow f & & \downarrow f \sqcup g & & \downarrow g \\ \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{i_{\mathcal{A}_2}} & \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{B}_2 & \xleftarrow{i_{\mathcal{B}_2}} & \mathcal{B}_2 \end{array}$$

Soient  $(\mathcal{A}_1, \phi_1)$  et  $(\mathcal{A}_2, \phi_2)$  deux espaces de probabilité non commutatifs. Alors le produit libre  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  peut être muni de cinq états produits différents. Il s'agit des notions de produit libre, tensoriel, booléen, monotone et anti-monotone. Pour les définir, nous devons supposer que les  $*$ -algèbres unifères se décomposent, en tant qu'espaces vectoriels, sous la forme  $\mathcal{A}_i = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}_i} \oplus \mathcal{A}_i^0$ , où  $\mathcal{A}_i^0$  est une  $*$ -sous-algèbre de  $\mathcal{A}_i$ .

**Définition 2.3.3** ([7]). Soient  $(\mathcal{A}_1, \phi_1)$  et  $(\mathcal{A}_2, \phi_2)$  deux espaces de probabilité non commutatifs tels que  $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}_1} \oplus \mathcal{A}_1^0$  et  $\mathcal{A}_2 = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}_2} \oplus \mathcal{A}_2^0$ . Il existe cinq états, en général différents,  $\phi_1 * \phi_2$ ,  $\phi_1 \otimes \phi_2$ ,  $\phi_1 \diamond \phi_2$ ,  $\phi_1 \triangleright \phi_2$  et  $\phi_1 \triangleleft \phi_2$  sur  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ , appelés respectivement produit libre, tensoriel, booléen, monotone et anti-monotone, et donnés respectivement, pour tout  $a_1 \dots a_n \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  tel que  $a_i \in \mathcal{A}_{\varepsilon_i}^0$  et  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \dots \neq \varepsilon_n$ , par les relations suivantes :

- $\phi_1 * \phi_2(a_1 \dots a_n) = 0$  lorsque  $\phi_{\varepsilon_i}(a_i) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$

- $\phi_1 \otimes \phi_2(a_1 \dots a_n) = \phi_1 \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \varepsilon_i=1}} a_i \right) \phi_2 \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \varepsilon_i=2}} a_i \right)$
- $\phi_1 \diamond \phi_2(a_1 \dots a_n) = \prod_{i=1}^n \phi_{\varepsilon_i}(a_i)$
- $\phi_1 \triangleright \phi_2(a_1 \dots a_n) = \phi_1 \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \varepsilon_i=1}} a_i \right) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \varepsilon_i=2}} \phi_2(a_i)$
- $\phi_1 \triangleleft \phi_2(a_1 \dots a_n) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \varepsilon_i=1}} \phi_1(a_i) \phi_2 \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \varepsilon_i=2}} a_i \right)$

Remarquons que la décomposition  $\mathcal{A}_i = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}_i} \oplus \mathcal{A}_i^0$  peut ne pas exister, au sens où  $\mathcal{A}_i^0$  peut ne pas être une sous-algèbre, ou ne pas être unique. Dans ces cas, les produits libre et tensoriel peuvent toujours être définis et ne dépendent pas du choix de la décomposition, contrairement aux produits booléen, monotone et anti-monotone.

## 2.4 Bigèbres et algèbres de Hopf

**Définition 2.4.1.** Une bigèbre  $\mathcal{A}$  est une algèbre unifère munie des homomorphismes unifères  $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  et  $\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta &= (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta &= \text{id} = (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \end{aligned}$$

Les applications  $\Delta$  et  $\varepsilon$  sont appelées coproduit et counité.

Lorsque le coproduit est symétrique, c'est-à-dire si  $\sigma \circ \Delta = \Delta$  où  $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ , nous parlerons d'algèbre co-commutative. Si l'algèbre  $\mathcal{A}$  est munie d'une involution telle que les applications  $\Delta$  et  $\varepsilon$  sont des \*-homomorphismes, nous parlerons d'une bigèbre involutive.

**Définition 2.4.2.** Une algèbre de Hopf est une bigèbre munie d'une application linéaire  $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , appelée antipode, vérifiant

$$m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \varepsilon(\cdot)1_{\mathcal{A}} = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta$$

où  $m: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  est la multiplication de l'algèbre.

De même, nous parlerons d'\*-algèbre de Hopf lorsque la bigèbre est involutive, ce qui entraîne que  $S(\cdot^*) = S(\cdot)^*$ . Une algèbre de Hopf-von Neumann est une algèbre de von Neumann munie d'une structure d'algèbre de Hopf.

**Définition 2.4.3** ([15]). Une algèbre de Kac de dimension finie est la donnée d'une algèbre de Hopf-von Neumann involutive de dimension finie  $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S)$  et d'une trace fidèle et normale  $\phi$  telle que

$$(\text{id} \otimes \phi) [(1_{\mathcal{A}} \otimes y^*)\Delta(x)] = S((\text{id} \otimes \phi) [\Delta(y^*)(1_{\mathcal{A}} \otimes x)]) \quad (2.1)$$

pour tout  $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ .

## CHAPITRE 2. OUTILS NÉCESSAIRES

# Chapitre 3

## Groupes quantiques

Les groupes quantiques compacts sont une généralisation non commutative des groupes compacts classiques, du point de vue de l'algèbre des fonctions continues définies sur le groupe. Nous présentons ici le lien avec les groupes classiques, notamment à travers des propriétés communes, avant d'en donner quelques exemples.

### 3.1 Du classique au quantique

**Définition 3.1.1** ([28]). Un groupe quantique compact  $\mathbb{G}$  est la donnée d'une  $C^*$ -algèbre unifère  $\mathcal{A}$  (possiblement non commutative) et d'un coproduit coassociatif satisfaisant les règles de bisimplifiabilité quantique, i.e. un  $*$ -homomorphisme unifère  $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{A}$  vérifiant

$$(\Delta \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}) \circ \Delta = (\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

et la densité des deux sous-espaces  $(1_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A})\Delta(\mathcal{A}) = \text{vect} \{(1_{\mathcal{A}} \otimes a)\Delta(b), a, b \in \mathcal{A}\}$  et  $(\mathcal{A} \otimes 1_{\mathcal{A}})\Delta(\mathcal{A}) = \text{vect} \{(a \otimes 1_{\mathcal{A}})\Delta(b), a, b \in \mathcal{A}\}$  dans  $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{A}$ .

**Remarque 3.1.2.** Les produits tensoriels  $\otimes_{\min}$  considérés dans ce chapitre sont des produits tensoriels minimaux de  $C^*$ -algèbres, c'est-à-dire la complétion du produit tensoriel algébrique par rapport à la norme de  $B(H \otimes H)$ , où  $H$  est un espace de Hilbert tel qu'il existe un plongement de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  dans  $B(H) : \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}} \subset B(H \otimes H)$ .

Nous utiliserons parfois la notation de Sweedler :  $\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ . La coassociativité s'écrit alors sous la forme :

$$\sum_{(a), (a_{(1)})} a_{(1,1)} \otimes a_{(1,2)} \otimes a_{(2)} = \sum_{(a), (a_{(2)})} a_{(1)} \otimes a_{(2,1)} \otimes a_{(2,2)} = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} .$$

Cette définition généralise la définition des groupes compacts classiques. En effet, soit  $(G, \cdot)$  un groupe compact. Alors nous pouvons construire l'ensemble  $C(G)$  des fonctions continues sur ce groupe à valeurs complexes. Il est clair que  $C(G)$  est une  $C^*$ -algèbre unifère commutative. Grâce à la loi de composition interne de  $G$ , nous pouvons définir un  $*$ -homomorphisme unifère  $\Delta: C(G) \rightarrow C(G \times G)$  par

$$\forall (s, t) \in G \times G, \Delta(f)(s, t) = f(s \cdot t) .$$



## CHAPITRE 3. GROUPE QUANTIQUES

En identifiant  $C(G \times G)$  et  $C(G) \otimes_{\min} C(G)$ , l'associativité de la loi de  $G$  nous montre que  $\Delta$  est un coproduit, puisqu'il est coassociatif :

$$[(\Delta \otimes \text{id}) \Delta(f)](s, t, u) = f((s \cdot t) \cdot u) = f(s \cdot (t \cdot u)) = [(\text{id} \otimes \Delta) \Delta(f)](s, t, u).$$

Nous n'avons utilisé pour l'instant que les propriétés d'un semi-groupe compact. Notons qu'un semi-groupe compact est un groupe compact si et seulement si tous ses éléments sont réguliers à gauche et à droite, c'est-à-dire vérifient

$$\forall s \in G, s \cdot r = s \cdot t \Rightarrow r = t \quad \text{et} \quad \forall s \in G, r \cdot s = t \cdot s \Rightarrow r = t.$$

C'est cette propriété qui nous permet de montrer la densité de  $(\mathbb{1}_G \otimes C(G))\Delta(C(G))$  et  $(C(G) \otimes \mathbb{1}_G)\Delta(C(G))$  dans  $C(G \times G)$ .

Cet exemple des groupes classiques nous conduira à noter  $C(\mathbb{G})$  l'algèbre  $\mathcal{A}$  qui définit le groupe quantique  $\mathbb{G} = (\mathcal{A}, \Delta)$ .

## 3.2 Propriétés

Les groupes quantiques compacts étant des généralisations des groupes compacts classiques, ils partagent de nombreuses propriétés. Nous en donnons quelques unes, que nous utiliserons dans la suite.

### 3.2.1 État de Haar

Tout groupe compact  $G$  possède une unique mesure de probabilité  $\lambda$  invariante à gauche et à droite par translation, c'est-à-dire vérifiant

$$\int_G f(s) d\lambda(s) = \int_G f(g \cdot s) d\lambda(s) = \int_G f(s \cdot g) d\lambda(s)$$

pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $G$  et tout élément  $g$  du groupe.

D'autre part, remarquons qu'une mesure de probabilité sur un groupe compact classique nous permet de définir un état sur l'algèbre du groupe, par intégration. La propriété précédente se traduit pour l'état associé à la mesure de Haar, aussi noté  $\lambda$ , par la relation  $(\lambda \otimes \mathbb{1}_G) \circ \Delta = \lambda(\cdot)\mathbb{1}_G = (\mathbb{1}_G \otimes \lambda) \circ \Delta$ , ce qui nous invite à définir ainsi un état de Haar.

**Définition 3.2.1.** Un état de Haar  $h$  sur une bigèbre  $(\mathcal{A}, \Delta)$  est un état sur  $\mathcal{A}$  tel que

$$(h \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}) \circ \Delta = h(\cdot)\mathbb{1}_{\mathcal{A}} = (\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes h) \circ \Delta.$$

**Théorème 3.2.2** ([22]). *Tout groupe quantique compact admet un unique état de Haar.*

### 3.2.2 Théorie des représentations

Pour étudier un groupe, il est parfois utile de le voir agir sur un espace vectoriel. Cela nous donne une représentation du groupe, c'est-à-dire un morphisme  $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Si de plus le groupe est compact, les représentations considérées sont continues, ce qui signifie que l'application  $G \times V \rightarrow V$  définie par  $(g, v) \mapsto \pi(g)(v)$  est continue sur  $G \times V$ . En particulier, si  $V$  est de dimension finie, nous pouvons décrire l'application  $\pi$  comme

une matrice de fonctions continues telle que  $\pi(g) = (\pi_{ij}(g))_{1 \leq i, j \leq \dim(V)}$ , c'est-à-dire  $\pi$  est vue comme un élément de  $\text{End}(V) \otimes_{\min} C(G)$ .

Dans ce contexte, la propriété  $\pi(s \cdot t) = \pi(s)\pi(t)$  devient  $(\text{id}_V \otimes \Delta)\pi = J_{12}(\pi)J_{13}(\pi)$ , où  $J_{12}(a \otimes f) = a \otimes f \otimes \mathbf{1}_G$  et  $J_{13}(a \otimes f) = a \otimes \mathbf{1}_G \otimes f$  dans  $\text{End}(V) \otimes_{\min} C(G) \otimes_{\min} C(G)$ , pour tout  $a \otimes f$  de  $\text{End}(V) \otimes_{\min} C(G)$ , ce qui nous conduit à la définition suivante, où nous noterons  $u_{(ij)}$  au lieu de  $J_{ij}(u)$  :

**Définition 3.2.3** ([28]). Soit  $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$  un groupe quantique compact. Une coreprésentation de l'algèbre  $C(\mathbb{G})$ , aussi appelée une représentation du groupe quantique  $\mathbb{G}$ , est un élément inversible  $u$  de  $M(K(\mathcal{H}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}))$ , pour un certain espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$ , tel que  $(\text{id}_{\mathcal{H}} \otimes \Delta)u = u_{(12)}u_{(13)}$  dans  $M(K(\mathcal{H}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}))$ .

Lorsque  $u$  est un élément unitaire, nous dirons que la représentation est unitaire.

**Remarque 3.2.4.** Ici,  $M(K(\mathcal{H}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}))$  désigne l'algèbre des multiplicateurs du produit tensoriel  $K(\mathcal{H}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G})$ . Lorsque  $\mathcal{H}$  est de dimension finie  $n$ , nous avons

$$M(K(\mathcal{H}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G})) \simeq B(\mathcal{H}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}) .$$

**Définition 3.2.5.** Soient  $u \in M(K(\mathcal{H}_u) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}))$  et  $v \in M(K(\mathcal{H}_v) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}))$  deux représentations du groupe quantique compact  $\mathbb{G}$ . L'opérateur  $T: \mathcal{H}_u \rightarrow \mathcal{H}_v$  entrelace  $u$  et  $v$  lorsqu'il vérifie

$$(T \otimes 1_{C(\mathbb{G})})u = v(T \otimes 1_{C(\mathbb{G})}) .$$

Si un tel opérateur existe,  $u$  et  $v$  seront dites équivalentes. Si de plus  $T$  est unitaire, les représentations  $u$  et  $v$  sont unitairement équivalentes.

Une représentation  $u$  est dite irréductible s'il n'existe pas d'opérateur entrelaçant  $u$  avec elle-même, excepté les multiples scalaires de l'identité  $\text{id}_{\mathcal{H}}$ .

La théorie de Peter-Weyl-Woronowicz généralise la théorie de Peter-Weyl pour les groupes compacts classiques. En particulier, toute représentation se décompose en somme directe de représentations irréductibles et les représentations irréductibles des groupes quantiques compacts sont de dimension finie, i.e. l'espace de Hilbert considéré est de dimension finie. Ainsi, dès qu'une base de l'espace de Hilbert est fixée, nous pouvons voir les représentations irréductibles  $u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\min} C(\mathbb{G}) \simeq \mathcal{M}_n(C(\mathbb{G}))$  comme des matrices dont les coefficients sont des éléments de l'algèbre du groupe quantique et vérifient  $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$ . À équivalence près, nous pouvons considérer uniquement les représentations irréductibles unitaires (de dimension finie).

Pour un groupe quantique  $\mathbb{G}$ , nous noterons  $I(\mathbb{G})$  l'ensemble de ses représentations irréductibles unitaires, et, pour chaque représentation  $\alpha \in I(\mathbb{G})$ ,  $d_\alpha$  désignera sa dimension, i.e. la dimension de l'espace de Hilbert considéré ou encore la taille de matrice  $\alpha$ , et  $\chi(\alpha)$  le caractère associé.

### 3.2.3 Transformée de Fourier

Pour notre étude, nous utiliserons aussi la transformée de Fourier dans le cadre des groupes quantiques finis.

## CHAPITRE 3. GROUPE QUANTIQUES

Dans le cas d'un groupe abélien fini  $(G, +)$ , notons  $\hat{G}$  son dual, c'est-à-dire l'ensemble des caractères de  $G$  muni de la multiplication des applications. Une version de la transformée de Fourier est définie pour  $f$  appartenant à  $\mathbb{C}[G]$ , comme la fonction  $\mathcal{F}(f)$  définie sur  $\hat{G}$  par :

$$\mathcal{F}(f)(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)g(x) = \int_G f(x)g(x) \, d\lambda(x)$$

où  $\lambda = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G}$  est la mesure de Haar de  $G$ .

De plus,  $\mathbb{C}[G]$  peut être muni d'une structure d'algèbre, avec la multiplication donnée par le produit de convolution. Si  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $\mathbb{C}[G]$ , alors leur produit de convolution est défini pour  $x \in G$  par :

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(x-y)g(y) = \int_G f(x-y)g(y) \, d\lambda(y) .$$

La transformée de Fourier transforme alors la convolution de  $\mathbb{C}[G]$  en multiplication dans  $\mathbb{C}[\hat{G}]$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}(f \star g)(h) = \mathcal{F}(f)(h)\mathcal{F}(g)(h)$$

pour tout  $h \in \hat{G}$ .

Remarquons que les caractères d'un groupe abélien fini forment une base de  $C(G)$ , l'ensemble des applications de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ . En étendant la transformée de Fourier de  $f$  par linéarité, nous obtenons une application  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{C}[G]$  dans l'ensemble des applications linéaires définies sur  $C(G)$ . Ceci nous conduit à définir la transformée de Fourier dans le cadre des groupes quantiques finis de la façon suivante :

**Définition 3.2.6.** Soit  $\mathbb{G}$  un groupe quantique fini. Pour  $x$  un élément de  $C(\mathbb{G})$ , notons par  $\mathcal{F}(x)$  la forme linéaire définie sur  $C(\mathbb{G})$  par

$$\mathcal{F}(x)(y) = \int_{\mathbb{G}} yx .$$

Elle sera appelée la transformée de Fourier de  $x$ .

Ceci nous permet de définir un produit de convolution sur  $C(\mathbb{G})$ , aussi noté  $\star$  comme le produit des fonctionnelles linéaires sur  $C(\mathbb{G})$ , grâce à la formule suivante :

$$\mathcal{F}(a \star b) = \mathcal{F}(a) \star \mathcal{F}(b) := (\mathcal{F}(a) \otimes \mathcal{F}(b)) \circ \Delta .$$

En utilisant la notation de Sweedler, nous obtenons :

**Proposition 3.2.7.** Soit  $\mathbb{G}$  un groupe quantique compact. Le produit de convolution est donné par  $a \star b = \sum_{(b)} b_{(2)} \mathcal{F}(a) (S(b_{(1)}))$  dans  $C(\mathbb{G})$ .

Remarquons qu'ici nous imposons la relation entre transformée de Fourier, multiplication et convolution pour définir le produit de convolution, contrairement au cas classique, où la relation est une conséquence des définitions.

### 3.3 Exemples

Nous allons présenter ici quelques groupes quantiques. La plupart de ces groupes sont des déformations des groupes classiques. Il existe plusieurs façons de procéder. Par exemple, les groupes quantiques « easy » sont obtenus en enlevant l'hypothèse de commutativité dans l'algèbre du groupe correspondant, tandis que les groupes  $SU_q(N)$  sont le résultat d'une déformation des relations à l'aide d'un paramètre réel  $q$ .

#### 3.3.1 Groupes quantiques orthogonaux

La  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par  $n^2$  éléments  $u_{i,j}$  satisfaisant

$$u_{i,j}^* = u_{i,j} \text{ and } u^t = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}^t = (u_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n} = u^{-1}$$

et le coproduit donné par

$$\Delta(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n u_{i,k} \otimes u_{k,j}$$

définissent le groupe quantique orthogonal libre  $O_n^+$ .

C'est un cas particulier d'une définition plus large [38, 40] de groupes quantiques orthogonaux, définis comme suit. Il correspond au cas  $F = I_n$ .

**Définition 3.3.1** ([1]). Pour tout entier non nul  $n$  et toute matrice inversible  $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $F\bar{F} = cI_n$ , pour un certain réel  $c$ , notons  $A_o(F)$  la  $C^*$ -algèbre unifère universelle engendrée par  $n^2$  éléments  $\{u_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$  tels que la matrice  $u = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  est unitaire et vérifie  $u = F\bar{u}F^{-1}$ .

Alors, munie du coproduit  $\Delta$ , donné par  $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}$ ,  $(A_o(F), \Delta)$  est un groupe quantique compact orthogonal.

Les groupes quantiques « easy » sont les groupes quantiques compacts déterminés par des ensembles de partitions grâce à la dualité de Tannaka-Kreïn, et vérifiant  $S_n \subset \mathbb{G} \subset O_n^+$  [3, 4]. Nous pouvons ainsi définir, par exemple les groupes quantiques libres symétrique  $S_n^+$ , hyperoctaédral  $H_n^+$ , ou bistochastique  $B_n^+$ , à partir des propriétés des générateurs.

#### 3.3.2 La famille des $SU_q(N)$

La  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par deux éléments  $\alpha$  et  $\gamma$  vérifiant

$$\alpha^* \alpha + \gamma^* \gamma = 1, \quad \alpha \alpha^* + q^2 \gamma \gamma^* = 1, \quad \gamma^* \gamma = \gamma \gamma^*, \quad \alpha \gamma = q \gamma \alpha$$

et le coproduit donné par

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q \gamma^* \otimes \gamma, \quad \Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$$

définissent le groupe quantique compact  $SU_q(2)$  [42].

**Remarque 3.3.2.** Si  $q = 1$ , nous retrouvons l'algèbre des fonctions continues sur groupe classique  $SU(2)$ .

## CHAPITRE 3. GROUPES QUANTIQUES

Plus généralement, pour un réel  $q$  fixé, soit  $\mathcal{A}_N$  la  $C^*$ -algèbre unifère universelle engendrée par  $N^2$  éléments  $\{u_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$  tels que

$$\sum_{k=1}^N u_{kp}^* u_{kq} = \delta_{pq} 1 = \sum_{k=1}^N u_{pk} u_{qk}^*$$

pour tout  $1 \leq p, q \leq N$  et vérifiant

$$\sum_{1 \leq k_1, \dots, k_N \leq N} E(k_1, \dots, k_N) u_{l_1 k_1} \dots u_{l_N k_N} = E(l_1, \dots, l_N) 1$$

où  $E(k_1, \dots, k_N)$  est nul si deux  $k_i$  sont égaux, et vaut  $(-q)^{I(k_1, \dots, k_N)}$  sinon, en notant  $I(k_1, \dots, k_N)$  le nombre d'inversion dans la permutation  $(k_1, \dots, k_N)$ .

Alors, le groupe quantique  $SU_q(N)$  [43] est défini par  $\mathcal{A}_N$  et le coproduit donné sur les générateurs par la relation classique

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^N u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

Remarquons que ces premiers exemples sont tous des groupes quantiques compacts matriciels [41], au sens où les algèbres sont engendrées par les coefficients  $u_{ij}$  d'une matrice inversible  $u$ , telle que la matrice  $\bar{u} = ((u_{ij})^*)_{i,j}$  est aussi inversible, et le coproduit vérifie  $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$ . Nous dirons que  $u$  est la représentation fondamentale du groupe quantique dans ce cas.

### 3.3.3 Groupe de Kac-Paljutkin

Le groupe quantique de Kac-Paljutkin  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , introduit par Kac et Paljutkin dans [21], est le plus petit exemple non trivial de groupe quantique, au sens où il n'est ni commutatif ni co-commutatif. Nous suivons ici la présentation de [16].

Considérons la somme directe d'algèbres de matrices  $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  munie de la multiplication et de l'involution usuelles. C'est une  $*$ -algèbre unifère de dimension huit, de base canonique

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{11} &= 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 &= 0 \dot{+} 1 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{12} &= 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_3 &= 0 \dot{+} 0 \dot{+} 1 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{21} &= 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_4 &= 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{22} &= 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où la notation  $\dot{+}$  est définie de façon naturelle pour désigner les éléments d'une somme directe. L'unité de  $\mathcal{A}$  est  $\mathbb{1} = 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + E_{11} + E_{22}$ .

Les formules suivantes définissent le coproduit, où  $\iota$  désigne l'unité imaginaire :

$$\begin{aligned}
 \Delta(e_1) &= e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 + e_4 \otimes e_4 \\
 &\quad + \frac{1}{2}E_{11} \otimes E_{11} + \frac{1}{2}E_{12} \otimes E_{12} + \frac{1}{2}E_{21} \otimes E_{21} + \frac{1}{2}E_{22} \otimes E_{22} , \\
 \Delta(e_2) &= e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_3 \\
 &\quad + \frac{1}{2}E_{11} \otimes E_{22} + \frac{1}{2}E_{22} \otimes E_{11} - \frac{\iota}{2}E_{12} \otimes E_{21} + \frac{\iota}{2}E_{21} \otimes E_{12} , \\
 \Delta(e_3) &= e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}E_{11} \otimes E_{22} + \frac{1}{2}E_{22} \otimes E_{11} + \frac{\iota}{2}E_{12} \otimes E_{21} - \frac{\iota}{2}E_{21} \otimes E_{12} , \\
 \Delta(e_4) &= e_1 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}E_{11} \otimes E_{11} + \frac{1}{2}E_{22} \otimes E_{22} - \frac{1}{2}E_{12} \otimes E_{12} - \frac{1}{2}E_{21} \otimes E_{21} , \\
 \Delta(E_{11}) &= e_1 \otimes E_{11} + E_{11} \otimes e_1 + e_2 \otimes E_{22} + E_{22} \otimes e_2 \\
 &\quad + e_3 \otimes E_{22} + E_{22} \otimes e_3 + e_4 \otimes E_{11} + E_{11} \otimes e_4 , \\
 \Delta(E_{12}) &= e_1 \otimes E_{12} + E_{12} \otimes e_1 + \iota e_2 \otimes E_{21} - \iota E_{21} \otimes e_2 \\
 &\quad - \iota e_3 \otimes E_{21} + \iota E_{21} \otimes e_3 - e_4 \otimes E_{12} - E_{12} \otimes e_4 , \\
 \Delta(E_{21}) &= e_1 \otimes E_{21} + E_{21} \otimes e_1 - \iota e_2 \otimes E_{12} + \iota E_{12} \otimes e_2 \\
 &\quad + \iota e_3 \otimes E_{12} - \iota E_{12} \otimes e_3 - e_4 \otimes E_{21} - E_{21} \otimes e_4 , \\
 \Delta(E_{22}) &= e_1 \otimes E_{22} + E_{22} \otimes e_1 + e_2 \otimes E_{11} + E_{11} \otimes e_2 \\
 &\quad + e_3 \otimes E_{11} + E_{11} \otimes e_3 + e_4 \otimes E_{22} + E_{22} \otimes e_4 ,
 \end{aligned}$$

la counité est donnée par  $\varepsilon \left( x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} x_3 \dot{+} x_4 \dot{+} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) = x_1$  et l'antipode est l'application de transposition, i.e.  $S(e_i) = e_i$  and  $S(E_{ij}) = E_{ji}$ .

Ceci définit un groupe quantique fini, noté  $\mathbb{K}\mathbb{P} = (\mathcal{A}_0, \Delta)$ . Nous aurons également besoin de son état de Haar, noté  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}}$ :

$$\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \left( x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} x_3 \dot{+} x_4 \dot{+} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{8} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2(c_{11} + c_{22})) .$$

### 3.3.4 Famille de Sekine

En 1996, Sekine a défini sur le même modèle une nouvelle famille de groupes quantiques finis [35], de dimension  $2n^2$  pour tout  $n \geq 2$ , notés  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ . Nous suivons ici la présentation de [23].

Considérons la somme directe d'algèbres de matrices  $\mathcal{A}_n = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \mathbb{C}e_{(i,j)} \oplus \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  munie de la multiplication et de l'involution usuelles. C'est une  $*$ -algèbre unifère de dimension  $2n^2$ , de base  $\{e_{(i,j)}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \cup \{E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$  et d'unité  $\mathbb{1} = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} e_{(i,j)} + \sum_{i=1}^n E_{i,i}$ .

Les formules suivantes définissent le coproduit :

$$\Delta(e_{(i,j)}) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}_n} e_{(k,l)} \otimes e_{(i-k,j-l)} + \frac{1}{n} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}_n} \eta^{i(k-l)} E_{k,l} \otimes E_{k+j,l+j}$$

### CHAPITRE 3. GROUPE QUANTIQUES

$$\Delta(E_{i,j}) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}_n} e_{(-k,-l)} \otimes \eta^{k(i-j)} E_{i-l,j-l} + \sum_{k,l \in \mathbb{Z}_n} \eta^{k(j-i)} E_{i-l,j-l} \otimes e_{(k,l)}$$

où  $\eta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  est une racine primitive de l'unité. La counité est donnée par

$$\varepsilon \left( \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} x_{(i,j)} e_{(i,j)} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{i,j} E_{i,j} \right) = x_{(0,0)}$$

et l'antipode vérifie  $S(e_{(i,j)}) = e_{(-i,-j)}$  et  $S(E_{i,j}) = E_{j,i}$ .

Ceci définit un groupe quantique fini, noté  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n = (\mathcal{A}_n, \Delta, S)$ . Nous aurons également besoin de son état de Haar, noté  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ :

$$\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \left( \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} x_{(i,j)} e_{(i,j)} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{i,j} E_{i,j} \right) = \frac{1}{2n^2} \left( \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} x_{(i,j)} + n \sum_{i=1}^n X_{i,i} \right).$$

Remarquons que même s'ils ont parfois (par erreur) été considérés comme isomorphes,  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  et  $\mathbb{K}\mathbb{P}_2$  sont distincts, leurs coproduits sont différents. De plus,  $\mathbb{K}\mathbb{P}_2$  est co-commutatif, contrairement à  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ .

# Chapitre 4

## Groupes duaux

Nous définissons ici les groupes duaux au sens de Voiculescu et présentons quelques unes de leurs propriétés. Nous introduisons également l'exemple le plus courant de ces groupes, le groupe dual unitaire et sa trace de Haar libre.

### 4.1 Définitions

Les groupes duaux au sens de Voiculescu [39] sont une autre généralisation de groupes, comme les algèbres de Hopf, mais utilisent le produit libre au lieu du produit tensoriel.

**Définition 4.1.1.** Un groupe dual au sens de Voiculescu est la donnée d'une  $*$ -algèbre unifère  $\mathcal{A}$  et de trois  $*$ -homomorphismes unifères  $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}$ ,  $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\Sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , tels que

- l'application  $\Delta$  est un coproduit coassociatif, i.e.  $(\text{id}_{\mathcal{A}} \sqcup \Delta) \circ \Delta = (\Delta \sqcup \text{id}_{\mathcal{A}}) \circ \Delta$ ,
- l'application  $\delta$  est une counité, i.e.  $(\delta \sqcup \text{id}_{\mathcal{A}}) \circ \Delta = \text{id}_{\mathcal{A}} = (\text{id}_{\mathcal{A}} \sqcup \delta) \circ \Delta$ ,
- l'application  $\Sigma$  est un antipode, i.e.  $(\Sigma \sqcup \text{id}_{\mathcal{A}}) \circ \Delta = \delta(\cdot)1_{\mathcal{A}} = (\text{id}_{\mathcal{A}} \sqcup \Sigma) \circ \Delta$ .

**Remarque 4.1.2.** Dans le produit tensoriel  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ , les deux inclusions naturelles de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \otimes 1_{\mathcal{A}}$  et  $1_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A}$ , commutent. Ce n'est pas le cas des images  $\mathcal{A}^{(1)}$  et  $\mathcal{A}^{(2)}$  de  $\mathcal{A}$  dans le produit libre  $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}$ . Les groupes duaux au sens de Voiculescu sont donc une généralisation hautement non commutative des groupes classiques.

Nous pouvons alors décomposer l'algèbre du groupe dual  $(\mathcal{A}, \Delta, \delta, \Sigma)$  sous la forme  $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}} \oplus \ker(\delta)$ , où  $\ker(\delta) = \{a \in \mathcal{A}, \delta(a) = 0\}$  est une  $*$ -sous-algèbre. Nous pouvons alors définir cinq notions différentes de convolution d'états, correspondant aux cinq différents produits d'états sur le produit libre d'algèbres.

**Définition 4.1.3.** Considérons le groupe dual  $(\mathcal{A}, \Delta, \delta, \Sigma)$  et la décomposition de l'algèbre  $\mathcal{A} = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}} \oplus \ker(\delta)$ . Pour deux états  $\phi$  et  $\psi$  sur  $\mathcal{A}$ , nous pouvons définir cinq états différents  $\phi \star_F \psi$ ,  $\phi \star_T \psi$ ,  $\phi \star_B \psi$ ,  $\phi \star_M \psi$  et  $\phi \star_{AM} \psi$ , appelés respectivement produit de convolution libre, tensoriel, booléen, monotone et anti-monotone, et donnés respectivement par

$$\begin{aligned} \phi \star_F \psi &= (\phi * \psi) \circ \Delta, \quad \phi \star_T \psi = (\phi \otimes \psi) \circ \Delta, \quad \phi \star_B \psi = (\phi \diamond \psi) \circ \Delta, \\ \phi \star_M \psi &= (\phi \triangleright \psi) \circ \Delta \quad \text{et} \quad \phi \star_{AM} \psi = (\phi \triangleleft \psi) \circ \Delta. \end{aligned}$$



## CHAPITRE 4. GROUPE DUAUX

Ceci nous conduit à définir cinq notions d'états de Haar différentes, en fonction du produit de convolution utilisé.

**Définition 4.1.4.** L'état de Haar libre (respectivement tensoriel, booléen, monotone, anti-monotone) du groupe dual  $(\mathcal{A}, \Delta, \delta, \Sigma)$  est, s'il existe, l'unique état  $h$  sur  $\mathcal{A}$  tel que, pour tout état  $\phi$  sur  $\mathcal{A}$ ,  $h \star_F \phi = h = \phi \star_F h$  (resp.  $h \star_T \phi = h = \phi \star_T h$ ,  $h \star_B \phi = h = \phi \star_B h$ ,  $h \star_M \phi = h = \phi \star_M h$ ,  $h \star_{AM} \phi = h = \phi \star_{AM} h$ ).

Remarquons que nous n'avons pas de résultat général d'existence comme dans le cas des groupes quantiques compacts. Nous définissons aussi, en ne considérant que les traces, une notion plus faible pour laquelle nous n'avons pas non plus de ce type résultat.

**Définition 4.1.5** ([7]). La trace de Haar libre (respectivement tensorielle, booléenne, monotone, anti-monotone) du groupe dual  $(\mathcal{A}, \Delta, \delta, \Sigma)$  est, si elle existe, l'unique trace  $h$  sur  $\mathcal{A}$  telle que, pour toute trace  $\phi$  sur  $\mathcal{A}$ ,  $h \star_F \phi = h = \phi \star_F h$  (resp.  $h \star_T \phi = h = \phi \star_T h$ ,  $h \star_B \phi = h = \phi \star_B h$ ,  $h \star_M \phi = h = \phi \star_M h$ ,  $h \star_{AM} \phi = h = \phi \star_{AM} h$ ).

En particulier, une trace sur  $\mathcal{A}$  qui est un état de Haar du groupe dual  $(\mathcal{A}, \Delta, \delta, \Sigma)$  est une trace de Haar de ce groupe dual pour le même produit.

**Définition 4.1.6.** Une variable aléatoire quantique définie sur le groupe dual  $(\mathcal{A}, \Delta, \delta, \Sigma)$  et à valeurs dans l'espace de probabilité non commutatif  $(\mathcal{B}, \phi)$  est un  $*$ -homomorphisme unifié  $j: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ .

## 4.2 Le groupe dual unitaire

Soient  $n \geq 1$  et  $U_n^{\text{nc}}$  l' $*$ -algèbre non commutative engendrée par  $n^2$  éléments, notés  $\{u_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ , tels que la matrice  $u = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  soit unitaire. Cette algèbre  $U_n^{\text{nc}}$  est parfois appelée l'algèbre de Brown. Il est possible de munir cette algèbre d'une structure de groupe dual au sens de Voiculescu,  $U\langle n \rangle = (U_n^{\text{nc}}, \Delta, \delta, \Sigma)$ , appelée le groupe dual unitaire.

**Définition 4.2.1.** Soit  $n \geq 1$ . Le groupe dual unitaire  $U\langle n \rangle$  est défini par l' $*$ -algèbre unifiée  $U_n^{\text{nc}}$  et les trois  $*$ -homomorphismes unifiés  $\Delta: U_n^{\text{nc}} \rightarrow U_n^{\text{nc}} \sqcup U_n^{\text{nc}}$ ,  $\delta: U_n^{\text{nc}} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\Sigma: U_n^{\text{nc}} \rightarrow U_n^{\text{nc}}$ , tels que

- $U_n^{\text{nc}}$  est l'algèbre de Brown, engendrée par les  $u_{ij}$  satisfaisant

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \sum_{k=1}^n u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ik} u_{jk}^*,$$

- le coproduit  $\Delta$  est coassociatif et donné sur les générateurs par  $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik}^{(1)} u_{kj}^{(2)}$ ,
- la counité  $\delta$  est donnée par  $\delta(u_{ij}) = \delta_{ij}$ ,
- l'antipode  $\Sigma$  est donné par  $\Sigma(u_{ij}) = u_{ji}^*$ .

Dans [7], Cébron et Ulrich étudient les états et les traces de Haar correspondant aux cinq différentes notions de convolution (libre, tensorielle, booléenne, monotone et anti-monotone). Ils montrent en particulier qu'il n'y a pas d'état de Haar sur  $U\langle n \rangle$  pour chacune de ces convolutions, et même aucune trace de Haar pour la convolution booléenne, monotone ou anti-monotone, pour tout  $n \geq 2$ . Ils démontrent aussi l'existence d'une trace de Haar fidèle sur  $U_n^{\text{nc}}$  pour la convolution libre, notée  $h$ . Il s'agit de la trace définie par McClanahan [25]. De plus, Cébron et Ulrich déterminent les cumulants libres, par rapport à  $h$ , des générateurs  $u_{ij}$  et de leurs adjoints  $(u^*)_{ij} = u_{ji}^*$ .

**Proposition 4.2.1** ([7]). *Les cumulants libres de  $(u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $((u^*)_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  dans l'espace de probabilités non commutatif  $(U_n^{\text{nc}}, h)$  sont donnés comme suit.*

*Soient  $1 \leq i_1, j_1, \dots, i_r, j_r \leq n$  et  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$  les exposants  $\emptyset$  ou  $*$ . Si les indices sont cycliques (i.e. si  $j_{l-1} = i_l$  pour  $2 \leq l \leq r$  et  $i_1 = j_r$ ), si  $r$  est pair et si les  $\epsilon_i$  sont alternés, nous avons*

$$\kappa_r((u^{\epsilon_1})_{i_1 j_1}, \dots, (u^{\epsilon_r})_{i_r j_r}) = n^{1-r} (-1)^{\frac{r}{2}-1} C_{\frac{r}{2}-1}$$

où  $C_i = \frac{(2i)!}{(i+1)!i!}$  est un nombre de Catalan.

*Si non, le terme de gauche est nul.*

Notons qu'il existe aussi une trace de Haar pour le produit tensoriel, définie par Cébron et Ulrich, qui n'est pas fidèle, pour  $n \geq 2$ .

## CHAPITRE 4. GROUPES DUAUX

# Chapitre 5

## Théorie des probabilités non commutatives

Pour cette courte présentation de la théorie des probabilités non commutatives, nous suivrons essentiellement le livre de Nica et Speicher [30]. L'idée est de généraliser les notions classiques de théorie des probabilités au cas où l'algèbre des variables aléatoires peut ne pas être commutative.

### 5.1 Espaces de probabilité non commutatifs

Rappelons qu'un espace de probabilité non commutatif est la donnée d'une  $*$ -algèbre unifère  $\mathcal{A}$  et d'un état  $\phi$  sur cette algèbre. Les éléments de  $\mathcal{A}$  seront appelés les variables aléatoires non commutatives.

**Exemple 5.1.1.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité classique, alors l'ensemble des variables aléatoires ayant des moments finis à tout ordre  $L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P}) := \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathbb{P})$ , muni de l'espérance  $\mathbb{E} := \int_{\Omega} \cdot d\mathbb{P}$ , vérifie la définition d'un espace de probabilité non commutatif, avec une algèbre commutative.

Il en est de même pour  $(C(G), ev_e)$  l'ensemble des fonctions continues définies sur un groupe compact  $G$  et à valeurs complexes, muni de  $ev_e : f \mapsto f(e)$  l'évaluation en l'élément neutre  $e$  du groupe.

L'algèbre des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  munie de la trace normalisée  $tr_n$  constitue quant à elle un premier exemple d'espace de probabilité non commutatif avec une algèbre non commutative.

**Définition 5.1.2.** Nous parlerons d'homomorphisme d'espaces de probabilité non commutatifs lorsque l' $*$ -homomorphisme  $f : (\mathcal{A}_1, \phi_1) \rightarrow (\mathcal{A}_2, \phi_2)$  vérifie  $\phi_1 = \phi_2 \circ f$ .

Un concept essentiel dans l'étude des variables aléatoires est celui de loi de probabilité. Nous l'étendons au cas des variables non commutatives grâce aux définitions suivantes.

**Définition 5.1.3.** Soit  $a$  une variable aléatoire non commutative dans l'espace de probabilité non commutatif  $(\mathcal{A}, \phi)$ . Une expression de la forme  $\phi(a^{\varepsilon_1} \dots a^{\varepsilon_n})$ , pour un entier naturel  $n$  et des exposants  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\emptyset, *\}$ , est appelée  $*$ -moment de  $a$ .

## CHAPITRE 5. THÉORIE DES PROBABILITÉS NON COMMUTATIVES

Notons  $\mathbb{C}\langle X, X^* \rangle$  l'ensemble des polynômes non commutatifs à deux indéterminées  $X$  et  $X^*$ . Il s'agit de l'\*-algèbre unifère librement engendrée par les deux éléments  $X$  et  $X^*$  qui ne commutent pas.

**Définition 5.1.4.** Soit  $a$  une variable aléatoire non commutative dans l'espace de probabilité non commutatif  $(\mathcal{A}, \phi)$ . Nous appellerons \*-distribution de  $a$  la fonctionnelle linéaire  $\mu_a: \mathbb{C}\langle X, X^* \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  déterminée par

$$\mu_a(X^{\varepsilon_1} \dots X^{\varepsilon_n}) = \phi(a^{\varepsilon_1} \dots a^{\varepsilon_n})$$

pour tout entier naturel  $n$  et pour tout choix des exposants  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\emptyset, *\}$ .

Remarquons qu'un élément auto-adjoint de l'algèbre  $\mathcal{A}$ , i.e. tel que  $a^* = a$ , correspond à une variable aléatoire réelle classique, au sens où son \*-distribution est celle d'une telle variable aléatoire.

**Exemple 5.1.5.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité classique, et  $(L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P}), \mathbb{E})$  l'espace de probabilité non commutatif associé. Alors l'\*-distribution  $\mu_X$  de  $X \in L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P})$  correspond à la collection de ses moments de tout ordre, et donc à la loi de probabilité de  $X$  lorsqu'elle est déterminée par ses moments.

Lorsque nous nous intéressons à plusieurs variables aléatoires en même temps, il est courant de considérer leur loi de probabilité jointe. Procédons de même pour étendre ce concept au cas des variables aléatoires non commutatives.

Notons  $\mathbb{C}\langle X_1, X_1^*, \dots, X_s, X_s^* \rangle$  l'\*-algèbre unifère librement engendrée par les  $2s$  indéterminées  $X_1, X_1^*, \dots, X_s, X_s^*$  qui ne commutent pas.

**Définition 5.1.6.** Soit  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espace de probabilité non commutatif et  $a_1, \dots, a_s$  des éléments de  $\mathcal{A}$ . Une expression de la forme  $\phi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n})$ , pour un entier naturel  $n$ , des indices  $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq s$  et des exposants  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\emptyset, *\}$ , est appelée \*-moment joint des variables non commutatives  $a_1, \dots, a_s$ .

L'\*-distribution jointe des variables aléatoires non commutatives  $a_1, \dots, a_s$  est la fonctionnelle linéaire  $\mu_{a_1, \dots, a_s}: \mathbb{C}\langle X_1, X_1^*, \dots, X_s, X_s^* \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\mu_{a_1, \dots, a_s}(P) = \phi(P(a_1, \dots, a_s)) ,$$

où  $P(a_1, \dots, a_s)$  est l'image de  $P$  par l'homomorphisme d'algèbres qui envoie  $X_r$  sur  $a_r$  et  $X_r^*$  sur  $a_r^*$ , pour tout  $1 \leq r \leq s$ .

**Définition 5.1.7** ([9]). Nous dirons qu'une famille de  $s$ -uplets  $(a_1^n, \dots, a_s^n)$  de variables aléatoires non commutatives converge vers le  $s$ -uplet  $(a_1, \dots, a_s)$  si et seulement si

$$\forall P \in \mathbb{C}\langle X_1, X_1^*, \dots, X_s, X_s^* \rangle, \mu_{a_1^n, \dots, a_s^n}(P) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_{a_1, \dots, a_s}(P) .$$

Nous dirons de même qu'une variable aléatoire non commutative admet  $\mu$  comme \*-distribution asymptotique, au sens de la convergence des \*-moments.

## 5.2 Différentes notions d'indépendance

Une des caractéristiques importantes des variables aléatoires classiques est l'indépendance. En effet, lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, il nous suffit de connaître la loi de probabilité de chacune d'elles pour connaître leur loi jointe.

Nous voudrions pouvoir étendre cette propriété au cas des variables aléatoires non commutatives. Il nous faut donc une notion d'indépendance non commutative. Elle peut prendre différents aspects.

### 5.2.1 Cas classique : l'indépendance tensorielle

**Définition 5.2.1.** Soit  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espace de probabilité non commutatif et  $I$  un ensemble fixé d'indices.

1. La famille d'\*-sous-algèbres unifères  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  est appelée tensoriellement indépendante, si les sous-algèbres  $\mathcal{A}_i$  commutent (i.e.  $ab = ba$  pour tout  $a \in \mathcal{A}_i$  et tout  $b \in \mathcal{A}_j$ , avec  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ ) et si  $\phi$  se factorise de la façon suivante

$$\phi \left( \prod_{j \in J} a_j \right) = \prod_{j \in J} \phi(a_j)$$

pour tout sous-ensemble fini  $J \subset I$  et tout  $a_j \in \mathcal{A}_j$ .

2. L'indépendance tensorielle des variables aléatoires non commutatives est définie par l'indépendance tensorielle des \*-algèbres unifères engendrées.

**Remarque 5.2.2.** Deux variables aléatoires non commutatives  $a$  et  $b$  auto-adjointes dans l'espace de probabilité non commutatif  $(\mathcal{A}, \phi)$  seront tensoriellement indépendantes lorsque  $a$  et  $b$  commutent dans  $\mathcal{A}$  et vérifient, pour tout choix des entiers naturels  $m$  et  $n$ ,  $\phi(a^m b^n) = \phi(a^m) \phi(b^n)$ . Cette définition correspond bien à la notion d'indépendance de deux variables aléatoires réelles classiques.

Le nom d'indépendance tensorielle vient du fait que nous pouvons la décrire à partir de la notion de produit tensoriel d'états.

**Proposition 5.2.3.** Soient  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espace de probabilité non commutatif et  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$  deux variables aléatoires non commutatives telles que  $a_1 a_2 = a_2 a_1$ . Alors  $a_1$  et  $a_2$  sont tensoriellement indépendantes si et seulement si  $\phi_1 \otimes \phi_2 = \phi \circ (i_1 \sqcup i_2)$  comme états sur  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ , où  $\phi_i$  est la restriction de  $\phi$  à  $\mathcal{A}_i = \text{*alg}\{1_{\mathcal{A}}, a_i\}$  et  $i_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $i_2: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}$  sont les inclusions naturelles.

### 5.2.2 L'indépendance libre

**Définition 5.2.4.** Soit  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espace de probabilité non commutatif et  $I$  un ensemble fixé d'indices.

1. La famille d'\*-sous-algèbres unifères  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  est appelée \*-librement indépendante, ou \*-libre, si  $\phi(a_1 \dots a_n) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ , et tout  $a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$  vérifiant  $\phi(a_j) = 0$  et  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \dots, i_{n-1} \neq i_n$ .

2. Pour tout  $i \in I$ , soit  $\mathcal{X}_i$  un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$ . Alors la famille  $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$  est appelée  $*$ -librement indépendante si les  $*$ -algèbres unifères  $\mathcal{A}_i = *-\text{alg}\{1_{\mathcal{A}}, \mathcal{X}_i\}$  sont  $*$ -libres dans  $(\mathcal{A}, \phi)$ .
3. En particulier, l'indépendance  $*$ -libre ou  $*$ -liberté des variables aléatoires non commutatives est définie par l'indépendance  $*$ -libre des  $*$ -algèbres unifères engendrées : si les  $*$ -sous-algèbres unifères  $\mathcal{A}_i = *-\text{alg}\{1_{\mathcal{A}}, a_i\}$  sont  $*$ -libres dans  $(\mathcal{A}, \phi)$ , nous dirons que les variables aléatoires non commutatives  $(a_i)_{i \in I}$  sont  $*$ -libres.

Remarquons que la notion d'indépendance  $*$ -libre est relative à un état, mais nous ne le citerons pas lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Nous parlerons de l' $*$ -liberté d'une variable non commutative par rapport à un ensemble d'autres variables non commutatives, lorsque nous serons dans le cas du second point de la définition, et que l'un des ensembles considérés sera un singleton.

L' $*$ -liberté est bien une notion d'indépendance pour les variables aléatoires non commutatives, au sens où elle nous permet de déterminer l' $*$ -distribution jointe à partir des  $*$ -distributions marginales.

**Proposition 5.2.5.** *Soient  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espace de probabilité non commutatif, et  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille  $*$ -libre d' $*$ -sous-algèbres unifères. Notons  $\mathcal{B}$  l' $*$ -sous-algèbre unifère engendrée par toutes les  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B} := *-\text{alg}\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$ . Alors  $\phi|_{\mathcal{B}}$  est déterminé de façon unique par les  $\phi|_{\mathcal{A}_i}$  et la condition d'indépendance libre.*

Ce résultat s'obtient par récurrence, en centrant les variables aléatoires non commutatives, c'est-à-dire en considérant  $a - \phi(a)1_{\mathcal{A}}$ .

**Exemple 5.2.6.** Soient  $a$  et  $b$  deux variables non commutatives  $*$ -libres. Nous savons que  $\phi(ab) = 0$  si  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ . Lorsque ce n'est pas le cas, nous pouvons quand même déterminer  $\phi(ab)$  en centrant les variables :

$$0 = \phi((a - \phi(a)1_{\mathcal{A}})(b - \phi(b)1_{\mathcal{A}})) = \phi(ab) - \phi(a)\phi(b)$$

d'où  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ .

De même, si  $\{a_1, a_2\}$  et  $b$  sont  $*$ -libres,

$$0 = \phi((a_1 - \phi(a_1)1_{\mathcal{A}})(b - \phi(b)1_{\mathcal{A}})(a_2 - \phi(a_2)1_{\mathcal{A}}))$$

entraîne  $\phi(a_1ba_2) = \phi(a_1a_2)\phi(b)$ .

**Remarque 5.2.7.** Deux variables aléatoires classiques sont  $*$ -librement indépendantes si et seulement si l'une des deux au moins est presque sûrement constante. En effet, soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de  $L^{\infty}(\Omega, \mathbb{P})$   $*$ -libres pour l'espérance  $\mathbb{E}$ . Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que ces variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont centrées. Alors

$$0 = \mathbb{E}[XYXY] = \mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$$

où la première égalité suit de la définition d' $*$ -liberté et la dernière de l'exemple ci-dessus. En particulier, nous obtenons que l'une des deux variances au moins doit s'annuler. Ceci montre bien que la  $*$ -liberté est un concept non commutatif, qui ne correspond pas à un cas particulier de dépendance entre des variables aléatoires classiques.

Remarquons que nous pouvons aussi définir l'indépendance libre à partir du produit libre des algèbres en utilisant cette fois le produit libre d'états.

**Proposition 5.2.8.** *Soient  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espace de probabilité non commutatif et  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$  deux variables aléatoires non commutatives. Alors  $a_1$  et  $a_2$  sont  $*$ -libres si et seulement si  $\phi_1 * \phi_2 = \phi \circ (i_1 \sqcup i_2)$  comme états sur  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ , où  $\phi_i$  est la restriction de  $\phi$  à  $\mathcal{A}_i = *-\text{alg}\{1_{\mathcal{A}}, a_i\}$  et  $i_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $i_2: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}$  sont les inclusions naturelles.*

**Définition 5.2.9** ([9]). Nous dirons qu'une suite de familles de variables aléatoires non commutatives est asymptotiquement  $*$ -libre, si elle converge vers une famille de variables aléatoires non commutatives  $*$ -librement indépendante.

## 5.3 Cumulants

Les cumulants  $c_n(X)$  d'une variables aléatoire classique sont des quantités bien déterminées et souvent utilisées. Les premiers sont l'espérance, la variance, le coefficient d'asymétrie et le kurtosis, donnés par

$$c_1(X) = \mathbb{E}[X], \quad c_2(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2, \quad c_3(X) = \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X] + 2\mathbb{E}[X]^3, \\ c_4(X) = \mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X^3]\mathbb{E}[X] - 3\mathbb{E}[X^2]^2 + 12\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X]^2 - 6\mathbb{E}[X]^4.$$

La suite des cumulants est une autre façon de caractériser les lois de probabilité déterminées par leurs moments. Par exemple, la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  correspond à la suite  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ . De plus, ils se comportent bien vis à vis de l'indépendance, puisque  $c_n(X+Y) = c_n(X) + c_n(Y)$  lorsque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. En particulier, les cumulants joints de variables aléatoires indépendantes sont nuls.

Il est possible de définir une notion équivalente dans le cadre des probabilités non commutatives. La notation  $[s]$  désignera l'ensemble  $\{1, 2, \dots, s\}$ , pour tout  $s \geq 1$ . Remarquons alors que la définition des cumulants classiques repose sur les partitions de  $[s]$ , nous utiliserons donc les partitions non croisées pour les cumulants libres.

### 5.3.1 Partitions non croisées

Une partition de  $[s]$  est une famille de sous-ensembles de  $[s]$  non vides et disjoints, telle que leur union est l'ensemble  $[s]$  tout entier. Ces sous-ensembles  $V$  sont appelés les blocs de la partition  $\pi$  qu'ils forment, et nous noterons  $V \in \pi$ . Une partition possède un croisement s'il existe  $1 \leq i < j < k < l \leq s$  tels que  $i$  et  $k$  sont dans un bloc, et  $j$  et  $l$  sont dans un autre. Une partition ne contenant aucun croisement sera dite non croisée.



FIGURE 5.1 – Une partition croisée et une autre non croisée d'un ensemble à cinq éléments

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

- l'ensemble des partitions non croisées de  $[s]$  est noté  $NC(s)$ ,



- $NC_2(s)$  correspond aux appariements, ou partitions par paires, sans aucun croisement.

Nous pouvons munir l'ensemble  $NC(s)$  d'un ordre partiel  $\leq$ , appelé la relation de finesse inverse.

**Definition 5.3.1** ([30]). Soient  $\pi, \sigma \in NC(s)$  deux partitions non croisées. Nous noterons  $\pi \leq \sigma$  si chaque bloc de  $\pi$  est complètement contenu dans l'un des blocs de  $\sigma$ . L'élément maximal de  $NC(s)$  par rapport à cet ordre partiel est la partition constituée d'un seul bloc, et est notée  $1_s$ , c'est-à-dire  $1_s = \sqcup \dots \sqcup$ .

Nous obtenons alors le treillis  $(NC(s), \leq)$ . En particulier, pour toute paire de partitions non croisées  $(\pi, \sigma)$  de  $[s]$  nous pouvons toujours définir la borne supérieure, notée  $\pi \vee \sigma$ , comme la plus petite partition  $\tau$  vérifiant  $\pi \leq \tau$  et  $\sigma \leq \tau$ .

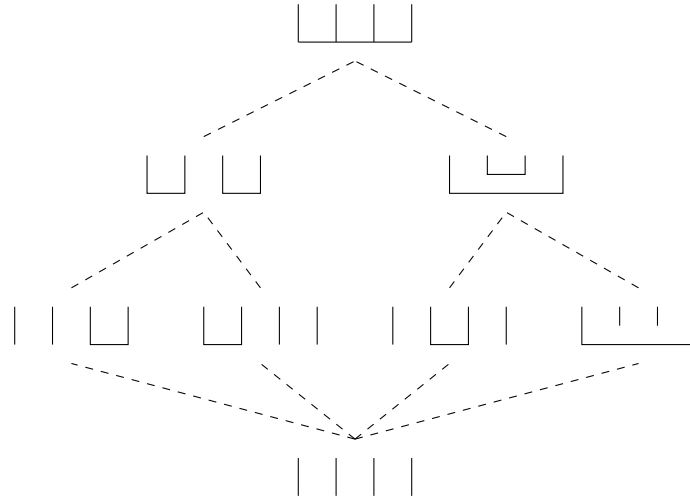


FIGURE 5.2 – Un sous-treillis de  $NC(4)$  contenant  $NC_2(4) = \{ \sqcup \sqcup, \sqcup \sqcup \}$

La structure de treillis nous permet de définir la fonction de Möbius  $\mu_{nc}$  sur  $NC(s)$ . C'est une fonction multiplicative  $\mu_{nc}: NC(s) \times NC(s) \rightarrow \mathbb{N}$ , définie vérifiant [30, équation (10.11)] :

**Proposition 5.3.2** ([30]). Pour tout  $s \geq 1$  et tout  $\sigma \in NC(s)$ ,

$$\sum_{\pi \geq \sigma} \mu_{nc}(\pi, 1_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = 1_s \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases} .$$

### 5.3.2 Cumulants libres

Pour un espace de probabilité non commutatif  $(\mathcal{A}, \phi)$ , les cumulants libres, notés  $\kappa_s$ , sont alors définis par les formules moment-cumulant [30, équations (11.7) et (11.8)] :

$$\phi(a_1 \dots a_s) = \sum_{\pi \in NC(s)} \kappa_{\pi}[a_1, \dots, a_s] \tag{5.1}$$

où  $\kappa_\pi[a_1, \dots, a_s] = \prod_{V \in \pi} \kappa_V[a_1, \dots, a_s] := \prod_{\substack{V \in \pi \\ V = \{v_1 < \dots < v_l\}}} \kappa_l(a_{v_1}, \dots, a_{v_l})$  et

$$\kappa_s(a_1, \dots, a_s) = \sum_{\sigma \in \text{NC}(s)} \phi_\sigma[a_1, \dots, a_s] \mu_{nc}(\sigma, 1_s) \quad (5.2)$$

où  $\phi_\sigma[a_1, \dots, a_s] = \prod_{V \in \sigma} \phi_V[a_1, \dots, a_s] := \prod_{\substack{V \in \sigma \\ V = \{v_1 < \dots < v_l\}}} \phi(a_{v_1} \dots a_{v_l})$ .

Remarquons que les cumulants libres caractérisent l'indépendance  $*$ -libre.

**Proposition 5.3.1.** *Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de variables aléatoires non commutatives de  $(\mathcal{A}, \phi)$ . La famille est  $*$ -libre si et seulement si les  $*$ -cumulants libres joints s'annulent, i.e. pour tout  $s \geq 0$ , pour tout  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s \in \{\emptyset, *\}$  et pour tout  $a_{i_1}, \dots, a_{i_s} \in \mathcal{A}$  tels que  $i_1, \dots, i_s \in I$ , s'il existe  $j \neq j'$  tels que  $i_j \neq i_{j'}$ , alors  $\kappa_s(a_{i_1}, \dots, a_{i_s}) = 0$ .*



## Part II

# Finite quantum groups



# Chapter 6

## Kac-Paljutkin finite quantum group

We present here the study of the Kac-Paljutkin finite quantum group. This chapter is mostly taken from the articles [6, 5]. We use the notation given in subsection 3.3.3.

### 6.1 Representation theory

When Kac and Paljutkin define  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , they also give the list of its irreducible representations. But for completeness, we also do the calculation here.

#### 6.1.1 The group of group-like elements

A group-like element is a nonzero element of  $\mathcal{A}_0$  such that  $\Delta(g) = g \otimes g$ . Group-like elements satisfying  $\varepsilon(g) = 1$ , i.e.  $g_1 = 1$ , correspond to one-dimensional representations of the finite quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ . Moreover, they form a group, with inverse given by the antipode. In particular, the unit  $1$  of  $\mathcal{A}_0$  satisfies these conditions, it is called the trivial representation.

**Proposition 6.1.1.** *The family of group-like elements of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  is a group isomorphic to  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ :*

$$\left\{ 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. 1 \dot{+} -1 \dot{+} -1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 1 \dot{+} -1 \dot{+} -1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

*Proof.* Direct calculations, using the conditions above and the linear basis of the tensor product  $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_0$ , give the list of one-dimensional unitary representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ . Moreover, the multiplication on  $\mathcal{A}_0$  gives the structure of an abelian group on this set and every non-trivial element is of order 2.  $\square$

**Remark 6.1.2.** Note that in [20], Izumi and Kosaki give group-like elements which look a little bit different from ours. The fact is that they do not use the same basis: in their notation,  $z(a)$ ,  $z(b)$  and  $z(c)$  play respectively the role of our  $e_4$ ,  $e_2$  and  $e_3$ .

### 6.1.2 Matrix elements and fundamental representation

Let us look at representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  with dimension at least 2. We will determine matrix elements of representation of dimension 2, i.e. elements  $X_{(11)}, X_{(12)}, X_{(21)}, X_{(22)}$  of  $\mathcal{A}_0$ , such that  $\Delta(X_{(ij)}) = X_{(i1)} \otimes X_{(1j)} + X_{(i2)} \otimes X_{(2j)}$  and  $\varepsilon(X_{(ij)}) = \delta_{i,j}$  for all  $i, j \in \{1, 2\}$ . These are matrix elements of two-dimensional representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ . An argument of dimension allows us to know that, up to equivalence, there is only one two-dimensional irreducible representation, and that there is no irreducible representation of higher dimension.

**Proposition 6.1.3.** *For all  $a \in \{-1, 1\}$  and all  $\lambda \in \mathbb{T}$ , let us fix*

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{a,\lambda} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{(11)} & \mathfrak{X}_{(12)} \\ \mathfrak{X}_{(21)} & \mathfrak{X}_{(22)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \dot{+} a \dot{+} -a \dot{+} -1 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ ia\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\lambda} \\ -ia\bar{\lambda} & 0 \end{pmatrix} & 1 \dot{+} -a \dot{+} a \dot{+} -1 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Then  $\mathfrak{X}_{a,\lambda}$  is a fundamental representation of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , it means that its coefficients generate the algebra  $\mathcal{A}_0$ .

To prove this, we have to define the adjoint  $x^*$  of an element  $x$  in  $\mathcal{A}_0$ . It is given by the following formula:

$$\left( x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} x_3 \dot{+} x_4 \dot{+} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right)^* = \bar{x}_1 \dot{+} \bar{x}_2 \dot{+} \bar{x}_3 \dot{+} \bar{x}_4 \dot{+} \begin{pmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{21} \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} \end{pmatrix}.$$

**Remark 6.1.4.** Remark 6.1.2, about [20], holds again. Moreover, since all  $\mathfrak{X}_{a,\lambda}$  are unitary equivalent, Izumi and Kosaki fix  $a = -1$  and  $\lambda = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

*Proof.* First of all, let us check that  $\mathfrak{X}_{(11)}$  is a matrix element of a two-dimensional representation of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ . The computation for  $\mathfrak{X}_{(12)}$ ,  $\mathfrak{X}_{(21)}$  and  $\mathfrak{X}_{(22)}$  are similar. We have on the first hand

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{X}_{(11)}) &= e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 + e_4 \otimes e_4 \\ &\quad - (e_1 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) \\ &\quad + a(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_3) \\ &\quad - a(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_2) \\ &\quad + E_{12} \otimes E_{12} + E_{21} \otimes E_{21} + iaE_{21} \otimes E_{12} - iaE_{12} \otimes E_{21} \end{aligned}$$

and, on the other hand

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{(11)} \otimes \mathfrak{X}_{(11)} + \mathfrak{X}_{(12)} \otimes \mathfrak{X}_{(21)} &= e_1 \otimes e_1 + ae_1 \otimes e_2 - ae_1 \otimes e_3 - e_1 \otimes e_4 \\ &\quad + a(e_2 \otimes e_1 + ae_2 \otimes e_2 - ae_2 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_4) \\ &\quad - a(e_3 \otimes e_1 + ae_3 \otimes e_2 - ae_3 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_4) \\ &\quad - (e_4 \otimes e_1 + ae_4 \otimes e_2 - ae_4 \otimes e_3 - e_4 \otimes e_4) \\ &\quad + |\lambda|^2 E_{12} \otimes E_{12} - ia|\lambda|^2 E_{12} \otimes E_{21} \\ &\quad + ia|\lambda|^2 E_{21} \otimes E_{12} + a^2|\lambda|^2 E_{21} \otimes E_{21}. \end{aligned}$$

Hence,  $\Delta(\mathfrak{X}_{(11)}) = \mathfrak{X}_{(11)} \otimes \mathfrak{X}_{(11)} + \mathfrak{X}_{(12)} \otimes \mathfrak{X}_{(21)}$ .

Moreover, we can show that  $\mathfrak{X}_{a,\lambda}$  and  $\overline{\mathfrak{X}_{a,\lambda}}$  are unitary matrices and  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^* \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$  equals 1. Hence  $\mathfrak{X}_{a,\lambda}$  defines a unitary irreducible representation of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ .

Finally, the family  $\{\mathfrak{X}_{(11)}, \mathfrak{X}_{(12)}, \mathfrak{X}_{(21)}, \mathfrak{X}_{(22)}\}$  generates  $\mathcal{A}_0$  since

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{4} (\mathfrak{X}_{(11)}^2 + \mathfrak{X}_{(11)}\mathfrak{X}_{(22)}) + \frac{1}{4} (\mathfrak{X}_{(11)} + \mathfrak{X}_{(22)}) \\ e_4 &= \frac{1}{4} (\mathfrak{X}_{(11)}^2 + \mathfrak{X}_{(11)}\mathfrak{X}_{(22)}) - \frac{1}{4} (\mathfrak{X}_{(11)} + \mathfrak{X}_{(22)}) \\ e_2 &= \frac{1}{4} (\mathfrak{X}_{(11)}^2 - \mathfrak{X}_{(11)}\mathfrak{X}_{(22)}) + \frac{a}{4} (\mathfrak{X}_{(11)} - \mathfrak{X}_{(22)}) \\ e_3 &= \frac{1}{4} (\mathfrak{X}_{(11)}^2 - \mathfrak{X}_{(11)}\mathfrak{X}_{(22)}) - \frac{a}{4} (\mathfrak{X}_{(11)} - \mathfrak{X}_{(22)}) \\ E_{11} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_{(12)}\mathfrak{X}_{(12)}^* + ia\mathfrak{X}_{(12)}\mathfrak{X}_{(21)}) \\ E_{22} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_{(12)}\mathfrak{X}_{(12)}^* - ia\mathfrak{X}_{(12)}\mathfrak{X}_{(21)}) \\ E_{12} &= \frac{1}{2} (\bar{\lambda}\mathfrak{X}_{(12)} + \lambda\mathfrak{X}_{(21)}) \\ E_{21} &= -\frac{ia}{2} (\bar{\lambda}\mathfrak{X}_{(12)} - \lambda\mathfrak{X}_{(21)}) . \end{aligned}$$

□

**Remark 6.1.5.** Since the Kac-Paljutkin finite quantum group admits a unitary finite dimensional fundamental representation  $\mathfrak{X}_{a,\lambda}$  such that  $\overline{\mathfrak{X}_{a,\lambda}} = \mathfrak{X}_{a,-ia\bar{\lambda}}$ , it is a compact matrix quantum group [41].

### 6.1.3 Fusion rules

In order to give a complete representation theory, let us also present the fusion rules for  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , i.e. determine the decomposition of each possible tensor product of two irreducible representations as a direct sum of irreducible representations, up to unitary equivalence. Let us recall that, for two finite dimensional Hilbert spaces  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{K}$ ,

$$\bigoplus: (B(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{A}_0) \times (B(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{A}_0) \rightarrow B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{A}_0$$

is given by  $(m \otimes a) \bigoplus (n \otimes b) = m \otimes n \otimes ab$ .

The group structure in Proposition 6.1.1 gives the fusion rules for the one-dimensional representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , since  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ . Hence, if  $g_i$  and  $g_j$  denote two of the four one-dimensional representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ :

$$g_i \bigoplus g_j \simeq g_i g_j = \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}} & \text{if } i = j \\ g_i & \text{if } g_j = \mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \neq g_i \\ g_j & \text{if } g_i = \mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \neq g_j \\ g_k & \text{otherwise, where } \{g_i, g_j, g_k\} = \{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}), d_\alpha = 1, \alpha \neq \mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}}\} \end{cases} .$$

We also need to determine  $\mathfrak{X}_{a,\lambda} \bigoplus \mathfrak{X}_{a,\lambda}$  and  $\mathfrak{X}_{a,\lambda} \bigoplus g_i$ . Let us note that, by definition

$$\chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda} \bigoplus \mathfrak{X}_{a,\lambda}) = \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^2 = (\mathfrak{X}_{(11)} + \mathfrak{X}_{(22)})^2 = 4 + 0 + 0 + 4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



which is the sum of the four one-dimensional irreducible representations. We get

$$\mathfrak{X}_{a,\lambda} \oplus \mathfrak{X}_{a,\lambda} \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}) \\ d_\alpha=1}} \alpha .$$

Moreover, it is easy to see that  $\mathfrak{X}_{a,\lambda} \oplus g_i = g_i \oplus \mathfrak{X}_{a,\lambda}$  is some  $\mathfrak{X}_{a',\lambda'}$ , hence is unitarily equivalent to  $\mathfrak{X}_{a,\lambda}$ .

## 6.2 Traces of the fundamental representation and its powers

To extend the study of Diaconis and Shahshahani in  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , we compute the traces of powers of the fundamental representation. Once we have these elements, we compute their  $*$ -distribution in the finite quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  with respect to the Haar state, and identify them with classical probability distributions determined by moments of all order.

### 6.2.1 Powers of the fundamental representation

**Lemma 6.2.1.** *For all nonnegative integer  $n$ ,  $(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n}$  is a diagonal matrix,*

$$(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} (-ia)^n & 0 \\ 0 & (ia)^n \end{pmatrix} & 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} (ia)^n & 0 \\ 0 & (-ia)^n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

*Proof.* Let  $\{e_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq 2}$  denote the family of matrix unit in  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Then

$$\mathfrak{X}_{a,\lambda} = \sum_{i,j=1}^2 e_{ij} \otimes \mathfrak{X}_{(ij)}$$

as an element of  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}_0$ . The usual multiplication in the algebraic tensor product of algebra gives, going back to the matrix notation,

$$(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^2 = \begin{pmatrix} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix} & 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix} \end{pmatrix} .$$

The result follows for higher powers by similar calculations, using  $(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n} = [(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^2]^n$ .  $\square$

**Lemma 6.2.2.** *For every natural integer  $n$ , we have  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n+1}) = \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$  and  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n}) = 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} ((ia)^n + (-ia)^n)I_2$ , where  $I_2$  is the identity matrix in  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .*

*Proof.* The second relation comes from Lemma 6.2.1 and the componentwise addition. The classical formula  $(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n+1} = (\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n} \mathfrak{X}_{a,\lambda}$  leads to the following expression for  $(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{2n+1}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \dot{+} a \dot{+} -a \dot{+} -1 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & (-ia)^n \lambda \\ (ia)^{n+1} \lambda & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & (ia)^n \bar{\lambda} \\ (-ia)^{n+1} \bar{\lambda} & 0 \end{pmatrix} & 1 \dot{+} -a \dot{+} a \dot{+} -1 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

and the trace does not depend on  $n$ .  $\square$

Let  $\mathbb{E}[Z^n]$  denotes the moment of order  $n$  of a classical random variable  $Z$ . We obtain four different discrete probability distributions for  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k)$ , depending on the power  $k$ .

**Theorem 6.2.3.** *Let  $k$  be a nonnegative integer. Let us denote by  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  and  $\mu_4$  the following distributions:*

$$\mu_0 = \delta_2, \quad \mu_1 = \frac{1}{8}\delta_{-2} + \frac{3}{4}\delta_0 + \frac{1}{8}\delta_2, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2 \quad \text{and} \quad \mu_4 = \frac{1}{2}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_2.$$

Then for all  $a \in \{-1, 1\}$  and  $\lambda \in \mathbb{T}$ ,  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k)$  is self-adjoint and admits  $\mu_\kappa$  as  $*$ -distribution, with

$$\kappa = \begin{cases} 1 & \text{if } k \equiv 1[2] \\ 2 & \text{if } k \equiv 2[4] \\ 4 & \text{if } k \equiv 4[8] \\ 0 & \text{if } k \equiv 0[8] \end{cases}.$$

Moreover, we have

$$\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k) = \begin{cases} 2 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} -2 \dot{+} 0_2 & , \text{ if } k \equiv 1[2] \\ 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 0_2 & , \text{ if } k \equiv 2[4] \\ 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} -2I_2 & , \text{ if } k \equiv 4[8] \\ 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2I_2 & , \text{ if } k \equiv 0[8] \end{cases}.$$

*Proof.* Assume that  $k$  is odd, then  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k) = \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$ , by Lemma 6.2.2, and, by definition, we have

$$\chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda}) = \mathfrak{X}_{(11)} + \mathfrak{X}_{(22)} = 2 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} -2 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so,  $\chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^* = \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$ , and for all nonnegative integer  $n$ , we obtain that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} (\chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda}))^n &= \frac{1}{8}(2^n + 0^n + 0^n + (-2)^n + 2(0^n + 0^n)) \\ &= \frac{(-2)^n}{8} + \frac{3}{4} \times 0^n + \frac{2^n}{8} = \mathbb{E}[Z_1^n] \end{aligned}$$

where  $Z_1$  is a  $\mu_1$ -distributed random variable.

Now, assume that  $k$  is even. Then

$$\chi\left((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k\right) = 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} \begin{pmatrix} (ia)^{\frac{k}{2}} + (-ia)^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & (ia)^{\frac{k}{2}} + (-ia)^{\frac{k}{2}} \end{pmatrix}$$

is self-adjoint and

$$\int_{\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}} \left(\chi\left((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k\right)\right)^n = \frac{1}{2} \left(2^n + \left((ia)^{\frac{k}{2}} + (-ia)^{\frac{k}{2}}\right)^n\right).$$

Let us note that  $(ia)^2 = -1$ , and  $(ia)^4 = 1$ . Hence, we obtain that the distribution of  $\chi\left((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k\right)$  equals  $\mu_2$  if  $k = 4p + 2$ ,  $\mu_4$  if  $k = 8p + 4$  and  $\mu_0$  if 8 divides  $k$ .  $\square$

**Remark 6.2.4.** Like in the classical case, we can express traces of powers of the fundamental representation as linear combinations of characters, it means one-dimensional representations, given in Proposition 6.1.1, and  $\chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda}) = 2 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} -2 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Here we have  $2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2I_2 = 2 \mathbb{1}$ ,  $2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} -2I_2 = 2(1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} -I_2)$  and  $2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 2 \dot{+} 0_2 = 2[(1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} -I_2) + \mathbb{1}]$ . Let us note that this is not true in general for quantum groups. For instance, in the free orthogonal group  $O_n^+$ ,  $\chi(u^2)$  is not a linear combination of characters, where  $u$  is the fundamental representation of  $O_n^+$  (see Appendix A). For further examples, the reader can also look at the dual quantum group  $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n$  in subsection 7.5.1.

## 6.2.2 Independence

We are now able to study the independence relations between the four distinct variables obtained in the previous theorem. Since the characters are commuting, we are looking at tensor independence. To study it, we will use the classical joint cumulants, which vanish when there is a random variable independent from the others.

Let us denote by  $\mathcal{P}_r$  the set of all partitions of  $\{1, 2, \dots, r\}$ , and for  $\pi \in \mathcal{P}_r$ ,  $|\pi|$  is the number of its blocks.

**Theorem 6.2.5.** *For  $i \in \{0, 1, 2, 4\}$ , let  $Z_i$  be a  $\mu_i$ -distributed random variable such that  $Z_0$  and  $Z_1$  are independent from all the others.*

*Then, for all  $a \in \{-1, 1\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{T}$ , and  $(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ ,*

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}} \chi\left((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{k_1}\right) \dots \chi\left((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{k_r}\right) &= \mathbb{E}[Z_{m_1} \dots Z_{m_r}] \\ &= 2^{\#\{i, k_i=0\}} \mathbb{E}\left[Z_1^{\#\{i, k_i=1\}}\right] \mathbb{E}\left[Z_2^{\#\{i, k_i=2\}} Z_4^{\#\{i, k_i=4\}}\right] \end{aligned}$$

$$\text{with } m_i = \begin{cases} 1 & \text{if } k_i \equiv 1[2] \\ 2 & \text{if } k_i \equiv 2[4] \\ 4 & \text{if } k_i \equiv 4[8] \\ 0 & \text{if } k_i \equiv 0[8] \end{cases}.$$

*Proof.* Let us note that the  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^i)$ 's commute. Hence, by definition of the multiplication in the direct sum, and by definition of the Haar state  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \prod_{i=1}^r \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{k_i}) &= \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} 2^r \dot{+} \alpha(k) \dot{+} \alpha(k) \dot{+} (-1)^{\#\{i, k_i=1\}} 2^r \dot{+} \beta(k) \\ &= \frac{1}{8} \left( 2^r \left( 1 + (-1)^{\#\{i, k_i=1\}} \right) + 2\alpha(k) + 2 \operatorname{tr}(\beta(k)) \right) \end{aligned}$$

where  $\alpha(k)$  is 0 if there exists  $i$  such that  $k_i = 1$  and  $2^r$  otherwise, and  $\beta(k)$  is the null matrix if there exists  $i$  such that  $k_i \in \{1, 2\}$  and  $(-1)^{\#\{i, k_i=4\}} 2^r I_2$  otherwise. So, we have

$$\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \prod_{i=1}^r \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{k_i}) = \begin{cases} 0 & \text{if } 2 \nmid \#\{i, k_i = 1\} \\ 2^{r-2} & \text{if } \#\{i, k_i = 1\} \in 2(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \\ 2^{r-1} & \text{if } \#\{i, k_i = 1\} = 0, \#\{i, k_i = 2\} \geq 1 \\ 2^{r-1} \left( 1 + (-1)^{\#\{i, k_i=4\}} \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Clearly,  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^0)$  is independent from the other  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^i)$ 's. To study the independence of  $\chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$ , let us look at classical cumulants. Let  $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  be a subset of  $\{1, 2, 4\}$ , and  $c(p_1, \dots, p_r)$  be the joint cumulant of  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{p_1}), \dots, \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{p_r})$ . By definition, we have

$$c(p_1, \dots, p_r) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_r} (|\pi| - 1)! (-1)^{|\pi|-1} \prod_{B \in \pi} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \prod_{k \in B} \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{p_k})$$

hence, if 1 is in  $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  the cumulant is 0, it means that  $\chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$  is independent from the others. Moreover,

$$c(2, 4) = \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^2) \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^4) - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^2) \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^4) = 2$$

thus  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^2)$  and  $\chi((\mathfrak{X}_{a,\lambda})^4)$  are not independent.  $\square$

## 6.3 Random walks

As already noted by Kac and Paljutkin [21], we have seen that the characters of the elements of  $I(\mathbb{K}\mathbb{P})$  are

$$\begin{aligned} \rho(1) &= 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \rho(2) &= 1 \dot{+} -1 \dot{+} -1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \rho(3) &= 1 \dot{+} -1 \dot{+} -1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \rho(4) &= 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ and} \\ \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda}) &= 2 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} -2 \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Let us fix an element  $g = \sum_{u=1}^4 g_u \rho(u) + g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}} \chi(\mathfrak{x}_{a,\lambda})$  of  $\mathcal{A}_0 = C(\mathbb{K}\mathbb{P})$ , with  $g_\alpha \in \mathbb{C}$  for every  $\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P})$ . Let us note that, by definition of the Fourier transform,

$$\mathcal{F}(e_i)(e_k) = \frac{1}{8} \delta_{ik}, \quad \mathcal{F}(e_i)(E_{kl}) = 0, \quad \mathcal{F}(E_{ij})(e_k) = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(E_{ij})(E_{kl}) = \frac{1}{4} \delta_{il} \delta_{jk}.$$

Then,  $\mathcal{F}(g)$  is a state on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P})$  if and only if  $\mathcal{F}(g)(\mathbf{1}) = 1$  and  $\mathcal{F}(g)$  is positive, which means that  $\mathcal{F}(g)(xe_i) \geq 0$  and  $\mathcal{F}(g)\left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} E_{ij}\right) \geq 0$  for any nonnegative real number  $x$ , any  $1 \leq i \leq 4$  and any positive semidefinite matrix  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . These conditions are equivalent to:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 \\ 1 + g_2 + g_3 + g_4 \pm 2g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}} &\geq 0 \\ 1 + g_2 - g_3 - g_4 &\geq 0 \\ 1 - g_2 + g_3 - g_4 &\geq 0 \\ 1 - g_2 - g_3 + g_4 &\geq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

In particular, it implies that, for all  $\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P})$ ,  $g_\alpha$  is real and moreover

$$|g_\alpha| \leq d_\alpha. \tag{6.2}$$

### 6.3.1 Upper and lower bounds

First, we will study the distance of the random walk to the Haar state, which play the role of uniform randomness in the quantum group. This distance is bounded from above and below, thanks to the quantum version of Diaconis-Shahshahani Lower and Upper Bound Lemmas, given by McCarthy [23].

**Lemma 6.3.1.** *For all  $u \in \{2, 3, 4\}$  and all positive integer  $k$ ,*

$$\frac{1}{2} |g_u|^k \leq \|\mathcal{F}(g)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}}\|_{QTV} \leq \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{v=2}^4 |g_v|^{2k} + \frac{|g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}}|^{2k}}{4^k}} \tag{6.3}$$

*Proof.* The Quantum Diaconis-Shahshahani Upper Bound Lemma (Lemma 5.3.8 in [23]) gives

$$\|\mathcal{F}(g)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}}\|_{QTV}^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}) \\ \beta \neq \mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}}}} d_\beta \operatorname{tr} \left( \widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta)^{\star k} \widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta)^k \right)$$

with  $\widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta)$  the matrix composed by the  $\mathcal{F}(g)(\beta_{ij})$ 's for  $\beta_{ij}$  the matrix coefficients of  $\beta$ .

On the other hand, by the Lower Bound Lemma (Lemma 5.3.9 in [23]), for all non-trivial one-dimensional representation  $\alpha$ ,

$$\|\mathcal{F}(g)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}}\|_{QTV} \geq \frac{1}{2} \left| \widehat{\mathcal{F}(g)}(\alpha) \right|^k.$$

Let us compute  $\widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta)$  for every  $\beta \in I(\mathbb{K}\mathbb{P})$ . First of all, let us note that, by linearity of the Fourier transform  $\mathcal{F}$ ,

$$\widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta) = \sum_{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P})} g_\alpha \widehat{\mathcal{F}(\chi_\alpha)}(\beta) = \left( \sum_{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P})} g_\alpha \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \beta_{ij} \chi_\alpha \right)_{1 \leq i, j \leq d_\beta}.$$

Assume  $d_\beta = 1$ . If  $d_\alpha = 1$ , then  $\gamma = \beta\alpha$  is again an irreducible one-dimensional representation of  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , and  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \gamma = \delta_{\gamma, \mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}}}$ . If  $d_\alpha = 2$ , then  $\alpha = \mathfrak{X}_{a,\lambda}$  and  $\beta\chi_\alpha = \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$ . Since  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda}) = 0$ , we get  $\widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta) = g_{\beta^{-1}}$  and

$$\text{tr} \left( \widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta)^{*k} \widehat{\mathcal{F}(g)}(\beta)^k \right) = |g_{\beta^{-1}}|^{2k}$$

where  $\beta^{-1}$  is the inverse of  $\beta$  in the family of group-like elements.

Now, assume  $d_\beta = 2$ , which means that  $\beta = \mathfrak{X}_{a,\lambda}$ . Then

$$\widehat{\mathcal{F}(g)}(\mathfrak{X}_{a,\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(g) (1 \dot{+} -1 \dot{+} 1 \dot{+} -1 \dot{+} 0_2) & \mathcal{F}(g) (e^{i\frac{\pi}{4}} E_{12} - e^{-i\frac{\pi}{4}} E_{21}) \\ \mathcal{F}(g) (e^{-i\frac{\pi}{4}} E_{12} - e^{i\frac{\pi}{4}} E_{21}) & \mathcal{F}(g) (1 \dot{+} 1 \dot{+} -1 \dot{+} -1 \dot{+} 0_2) \end{pmatrix}$$

is easy to calculate. We obtain  $\widehat{\mathcal{F}(g)}(\mathfrak{X}_{a,\lambda}) = \frac{1}{2} g_{\mathfrak{X}_{a,\lambda}} I_2$ . Therefore

$$\text{tr} \left( \widehat{\mathcal{F}(g)}(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^{*k} \widehat{\mathcal{F}(g)}(\mathfrak{X}_{a,\lambda})^k \right) = \frac{1}{2^{2k-1}} |g_{\mathfrak{X}_{a,\lambda}}|^{2k}.$$

Hence, the Quantum Diaconis-Shahshahani Upper and Lower Bound Lemmas give the bounds announced in (6.3).  $\square$

### 6.3.2 Asymptotic behavior

We can now determine the conditions for the random walk to converge to the Haar state. We then study the other cases, when the random walk does not converge to the Haar state.

**Theorem 6.3.2.** *The random walk defined by  $g = \sum_{u=1}^4 g_u \rho(u) + g_{\mathfrak{X}_{a,\lambda}} \chi(\mathfrak{X}_{a,\lambda})$ , satisfying conditions (6.1), converges to the Haar state if and only if*

$$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}) \setminus \{\mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}}\}, |g_\alpha| < d_\alpha. \quad (6.4)$$

*In this case, the distance to the Haar state decreases exponentially fast from the step on.*

*Proof.* By the upper bound (6.3) in Lemma 6.3.1, the condition (6.4) is sufficient.

By the lower bound (6.3) in Lemma 6.3.1, the convergence implies that  $|g_u|$  is strictly less than 1, for each  $u \in \{2, 3, 4\}$ . Then, the second equation in (6.1) leads to  $|g_{\mathfrak{X}_{a,\lambda}}| < 2$ , i.e. (6.4) holds.

In the case of convergence, let us denote by  $g_m$  the greatest element among  $|g_2|$ ,  $|g_3|$ ,  $|g_4|$  and  $\frac{|g_{\mathfrak{X}_{a,\lambda}}|}{2}$ . Then,  $g_m < 1$  and, by Lemma 6.3.1,

$$\|\mathcal{F}(g)^{*k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}}\|_{QTV} \leq \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{u=2}^4 |g_u|^{2k} + \frac{|g_{\mathfrak{X}_{a,\lambda}}|^{2k}}{4^k}} \leq \frac{\sqrt{7}}{2} g_m^k$$

which shows the exponential decay.  $\square$

By the inequality (6.2), the random walk does not converge to the Haar state if and only if there exists a non-trivial irreducible representation  $\alpha$  such that  $|g_\alpha| = d_\alpha$ , i.e.  $g_\alpha \in \{-d_\alpha, d_\alpha\}$ . Let us note that, in this case, it still might converge, but to some other state. Moreover, the limit state, if it exists, is clearly an idempotent state.

Let us now investigate conditions for the random walk to converge to an idempotent state different from  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}}$ . First of all, let us list the idempotent states on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P})$ , given by Pal [31], i.e. states on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P})$  satisfying  $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta =: \phi \star \phi = \phi$ . Note that, by definition, the Haar state is idempotent. There are height such states on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P})$ , they are

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 8\mathcal{F}(e_1) , \\ \phi_2 &= 4\mathcal{F}(e_1 + e_2) , \\ \phi_3 &= 4\mathcal{F}(e_1 + e_3) , \\ \phi_4 &= 4\mathcal{F}(e_1 + e_4) , \\ \phi_5 &= 2\mathcal{F}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) , \\ \phi_6 &= 2\mathcal{F}(e_1 + e_4 + E_{11}) , \\ \phi_7 &= 2\mathcal{F}(e_1 + e_4 + E_{22}) , \\ \phi_8 &= \mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}}) = \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}} .\end{aligned}$$

Let us also note that  $g^{*k} = \sum_{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P})} \frac{g_\alpha^k}{d_\alpha^{k-1}} \chi_\alpha$ . In particular, its coefficients in front of  $e_2$  and  $e_3$  are equal. Hence the random walk defined by such a  $g$  cannot converge to  $\phi_2$  or  $\phi_3$ . Then, by looking at the different cases, we get:

**Proposition 6.3.3.** *Assume that the random walk associated with  $g$  does not converge to the Haar state  $\phi_8$ . Then, we have six possibilities.*

*If  $g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}} = 2$ , then  $g_u = 1$  for all  $1 \leq u \leq 4$  and  $\mathcal{F}(g) = \phi_1$ .*

*If  $g_\alpha = 1$  for at least two non-trivial one-dimensional representations in  $I(\mathbb{K}\mathbb{P})$  and  $|g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}}| < 2$ , then  $g_u = 1$  for all  $1 \leq u \leq 4$  and the random walk converges to  $\phi_4$ .*

*If  $g_2 = 1$ , then  $g_3 = g_4$ . Assume also that  $|g_4| < 1$  and  $|g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}}| < 2$ , then the random walk converges to  $\phi_6$ .*

*If  $g_3 = 1$ , then  $g_2 = g_4$ . Assume also that  $|g_2| < 1$  and  $|g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}}| < 2$ , then the random walk converges to  $\phi_7$ .*

*If  $g_4 = 1$ , then  $g_2 = g_3$ . Assume also that  $|g_3| < 1$  and  $|g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}}| < 2$ , then the random walk converges to  $\phi_5$ .*

*In all the other cases, it means if  $g_{\mathfrak{x}_{a,\lambda}} = -2$  or if there is  $2 \leq u \leq 4$  such that  $g_u = -1$ , then the random walk is cyclic and does not converge.*

# Chapter 7

## Sekine family of finite quantum groups

We present here the study of the family of Sekine finite quantum groups. This chapter is mostly taken from the articles [6, 5]. We use the notation given in subsection 3.3.4.

### 7.1 Representation theory

Let us first determine the representation theory of the Sekine finite quantum groups. We list here the irreducible unitary representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ , for each  $n \geq 2$ . Note that it depends on the parity of  $n$ .

#### 7.1.1 Case $n$ odd

The representation theory for  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ , with  $n$  odd, was already determined by McCarthy.

**Theorem 7.1.1** ([23]). *If  $n \geq 3$  is odd, the finite quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$  admits  $2n$  one-dimensional non-equivalent unitary representations,*

$$\forall l \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \rho_l^\pm = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{il} e_{(i,j)} \pm \sum_{i=1}^n E_{i,i+l}.$$

*It also admits  $\frac{n(n-1)}{2}$  two-dimensional non-equivalent unitary irreducible representations, indexed by  $u \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  and  $v \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ , given by their matrix-coefficients:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{11}^{u,v} &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{iu+jv} e_{(i,j)} & \mathfrak{X}_{12}^{u,v} &= \sum_{i=1}^n \eta^{-iv} E_{i,i+u} \\ \mathfrak{X}_{21}^{u,v} &= \sum_{i=1}^n \eta^{iv} E_{i,i+u} & \mathfrak{X}_{22}^{u,v} &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{iu-jv} e_{(i,j)} \end{aligned}$$

#### 7.1.2 Case $n$ even

We can do the same study in the even case. There is more one-dimensional representations, but we have the same definition for the two-dimensional irreducible ones.



**Theorem 7.1.2.** *If  $n$  is even, the finite quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$  admits  $4n$  one-dimensional non-equivalent unitary representations,*

$$\forall l \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \begin{cases} \rho_l^\pm &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{il} e_{(i,j)} \pm \sum_{i=1}^n E_{i,i+l} \\ \sigma_l^\pm &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} (-1)^j \eta^{il} e_{(i,j)} \pm \sum_{i=1}^n (-1)^i E_{i,i+l} \end{cases} .$$

*It also admits  $\frac{n(n-2)}{2}$  two-dimensional non-equivalent unitary irreducible representations, indexed by  $u \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  and  $v \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1\}$ , given by their matrix-coefficients:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{11}^{u,v} &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{iu+jv} e_{(i,j)} & \mathfrak{X}_{12}^{u,v} &= \sum_{i=1}^n \eta^{-iv} E_{i,i+u} \\ \mathfrak{X}_{21}^{u,v} &= \sum_{i=1}^n \eta^{iv} E_{i,i+u} & \mathfrak{X}_{22}^{u,v} &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{iu-jv} e_{(i,j)} \end{aligned}$$

*Proof.* The computations done for  $\rho_l^\pm$  and  $\mathfrak{X}^{u,v}$  in the odd case in [23] are still valid.

It is clear that  $\varepsilon(\sigma_l^\pm) = 1$ . By [37, Proposition 3.1.7], it remains to prove that  $\sigma_l^\pm$  are group-like elements. The same steps as for  $\rho_l^\pm$  give

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma_l^\pm) &= \sum_{i,j,s,t \in \mathbb{Z}_n} (-1)^j \eta^{il} e_{(s,t)} \otimes e_{(i-s,j-t)} \\ &\quad + \sum_{\substack{m=1 \\ j \in \mathbb{Z}_n}}^n (-1)^j E_{m,m+l} \otimes E_{m+j,m+j+l} \\ &\quad \pm \sum_{\substack{m=1 \\ s,t \in \mathbb{Z}_n}}^n (-1)^m \eta^{sl} e_{(s,t)} \otimes E_{m+t,m+t+l} \\ &\quad \pm \sum_{\substack{m=1 \\ s,t \in \mathbb{Z}_n}}^n (-1)^m \eta^{sl} E_{m-t,m-t+l} \otimes e_{(s,t)} . \end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \sigma_l^\pm \otimes \sigma_l^\pm &= \sum_{i,j,s,t \in \mathbb{Z}_n} (-1)^{j+t} \eta^{(i+s)l} e_{(i,j)} \otimes e_{(s,t)} \\ &\quad + \sum_{s,t=1}^n (-1)^{s+t} E_{s,s+l} \otimes E_{t,t+l} \\ &\quad \pm \sum_{\substack{m=1 \\ s,t \in \mathbb{Z}_n}}^n (-1)^{t+m} \eta^{sl} e_{(s,t)} \otimes E_{m,m+l} \\ &\quad \pm \sum_{\substack{m=1 \\ s,t \in \mathbb{Z}_n}}^n (-1)^{m+t} \eta^{sl} E_{m,m+l} \otimes e_{(s,t)} \end{aligned}$$

which is the same, up to re-indexation ( $s+i \rightarrow i$ ,  $t+j \rightarrow j$ ,  $i \rightarrow s$  and  $j \rightarrow t$  in the first term,  $t-s \rightarrow j$  in the second one,  $m-t \rightarrow m$  in the third one and  $m+t \rightarrow m$  in the last one).  $\square$

**Remark 7.1.3.** This is another way to see that the Kac-Paljutkin  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  finite quantum group is different from  $\mathbb{K}\mathbb{P}_2$ , since they do not have the same representation theory. The quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  admits four one-dimensional representations and one two-dimensional irreducible representation, whereas the Sekine quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}_2$  admits eight one-dimensional representations and no two-dimensional irreducible representation. In particular,  $\mathbb{K}\mathbb{P}_2$  is cocommutative and therefore a group algebra (of  $D_8$ ).

### 7.1.3 Fusion rules

Like in the case of the Kac-Paljutkin finite quantum group, let us determine the fusion rules for the irreducible representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ .

Once again, the tensor product of two one-dimensional representations is obtain by their product in  $\mathcal{A}_n$ . Then, for any  $k$  and  $l$  in  $\mathbb{Z}_n$  and  $s, s'$  in  $\{+, -\}$ , we get

$$\rho_l^s \oplus \rho_k^{s'} \simeq \rho_{k+l}^{ss'}, \quad \sigma_l^s \oplus \sigma_k^{s'} \simeq \rho_{k+l}^t, \quad \rho_l^s \oplus \sigma_k^{s'} \simeq \sigma_{k+l}^t, \quad \sigma_l^s \oplus \rho_k^{s'} \simeq \sigma_{k+l}^{ss'}$$

where the sum  $k+l$  is taken in  $\mathbb{Z}_n$ ,  $ss'$  is  $+$  if  $s = s'$  and  $-$  otherwise and  $t$  denotes the product of  $(-1)^l$  and  $ss'$ , with the same rules.

A straightforward calculation gives us  $\mathfrak{X}^{u,v} \oplus \rho_l^\pm \simeq \mathfrak{X}^{u+l,v} \simeq \rho_l^\pm \oplus \mathfrak{X}^{u,v}$ . Moreover, thanks to the identity  $\eta^{\frac{n}{2}-v} = -\eta^{-v}$ , we can check that

$$\mathfrak{X}^{u,v} \oplus \sigma_l^\pm \simeq \mathfrak{X}^{u+l, \frac{n}{2}-v} \simeq \sigma_l^\pm \oplus \mathfrak{X}^{u,v}.$$

Let us look at  $\mathfrak{X}^{u_1, v_1} \oplus \mathfrak{X}^{u_2, v_2}$ . Consider the sum  $u_1 + u_2$  in  $\mathbb{Z}_n$ , and let  $w_\pm$  denotes the absolute value of  $v_1 \pm v_2 \pmod{n}$ . Then, if  $w_+$  and  $w_-$  are not zero,

$$\mathfrak{X}^{u_1, v_1} \oplus \mathfrak{X}^{u_2, v_2} \simeq \mathfrak{X}^{u_1+u_2, w_+} \oplus \mathfrak{X}^{u_1+u_2, w_-}.$$

If  $w_- = 0$ , then  $v_1 = v_2$ , and we have to replace  $\mathfrak{X}^{u_1+u_2, w_-}$  by  $\rho_{u_1+u_2}^+ \oplus \rho_{u_1+u_2}^-$  in the formula above. If  $w_+ = \frac{n}{2}$ , then  $n$  is even, and we have to replace  $\mathfrak{X}^{u_1+u_2, w_+}$  by  $\sigma_{u_1+u_2}^+ \oplus \sigma_{u_1+u_2}^-$  in the formula above.

## 7.2 Character spaces

Let us look more precisely at relations between the characters before to study their asymptotic  $*$ -distributions.

### 7.2.1 Characters

We will now consider the traces of powers of the two-dimensional irreducible representations  $\mathfrak{X}^{u,v}$ . In the following, we (incorrectly) call  $k$ th character associated with  $\mathfrak{X}^{u,v}$  the trace of the  $k$ th power of this representation.

**Lemma 7.2.1.** *The even powers of  $\mathfrak{X}^{u,v}$  are diagonal matrices.*

*Proof.* By definition and orthogonality of the  $e_{(i,j)}$ 's and the  $E_{i,j}$ 's, we have

$$\left( (\mathfrak{X}^{u,v})^2 \right)_{12} = \mathfrak{X}_{11}^{u,v} \mathfrak{X}_{12}^{u,v} + \mathfrak{X}_{12}^{u,v} \mathfrak{X}_{22}^{u,v} = 0_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$$

$$\left( (\mathfrak{X}^{u,v})^2 \right)_{21} = \mathfrak{X}_{21}^{u,v} \mathfrak{X}_{11}^{u,v} + \mathfrak{X}_{22}^{u,v} \mathfrak{X}_{21}^{u,v} = 0_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$$

so  $(\mathfrak{X}^{u,v})^2$  is a diagonal matrix and therefore  $(\mathfrak{X}^{u,v})^{2k} = \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^2 \right)^k$  is also diagonal.  $\square$

**Proposition 7.2.2.** *The characters associated with  $\mathfrak{X}^{u,v}$  are*

$$\chi \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^k \right) = 2 \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{ksu} \cos \left( \frac{2ktv\pi}{n} \right) e_{(s,t)} + \mathbb{1}_{2\mathbb{Z}}(k) 2 \cos \left( \frac{kuv\pi}{n} \right) \sum_{r=1}^n E_{r,r+ku}$$

where  $\mathbb{1}_{2\mathbb{Z}}$  denotes the indicator function of the even integers.

*Proof.* By definition, we have

$$\begin{aligned} \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^2 \right)_{11} &= (\mathfrak{X}_{11}^{u,v})^2 + \mathfrak{X}_{12}^{u,v} \mathfrak{X}_{21}^{u,v} \\ &= \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{Z}_n} \eta^{iu+jv} e_{(i,j)} \eta^{ku+lv} e_{(k,l)} + \sum_{i,j=1}^n \eta^{-iv} E_{i,i+u} \eta^{jv} E_{j,j+u} \\ &= \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{2su+2tv} e_{(s,t)} + \sum_{r=1}^n \eta^{uv} E_{r,r+2u} \end{aligned}$$

and by similar calculations, and by Lemma 7.2.1 we have

$$\begin{aligned} \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^{2k} \right)_{11} &= \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{2ksu+2ktv} e_{(s,t)} + \sum_{r=1}^n \eta^{kuv} E_{r,r+2ku} \\ \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^{2k} \right)_{22} &= \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{2ksu-2ktv} e_{(s,t)} + \sum_{r=1}^n \eta^{-kuv} E_{r,r+2ku} \end{aligned}$$

which leads to the result for even powers.

Let  $k = 2p + 1$ , then  $(\mathfrak{X}^{u,v})^{2p+1} = (\mathfrak{X}^{u,v})^{2p} \mathfrak{X}^{u,v}$ , hence we obtain

$$\begin{aligned} \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^k \right)_{11} &= \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^{2p} \right)_{11} (\mathfrak{X}^{u,v})_{11} + \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^{2p} \right)_{12} (\mathfrak{X}^{u,v})_{21} \\ &= \left( \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{2piu+2pju} e_{(i,j)} + \sum_{i=1}^n \eta^{puv} E_{i,i+2pu} \right) \sum_{k,l \in \mathbb{Z}_n} \eta^{ku+lv} e_{(k,l)} \\ &= \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{ksu+ktv} e_{(s,t)} \end{aligned}$$

and similarly  $\left( (\mathfrak{X}^{u,v})^k \right)_{22} = \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{ksu-ktv} e_{(s,t)}$  which leads to the result for odd powers.  $\square$

## 7.2.2 Algebra of characters

**Proposition 7.2.3.** *The algebra of characters, generated by all one-dimensional representations and all the  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$ , contains all  $\chi \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^k \right)$ .*

*Proof.* If  $n$  does not divide  $kv$ , consider  $w$  the absolute value of  $kv \pmod{n}$ . If  $w$  belongs to  $\{1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ , then

$$\chi \left( (\mathfrak{X}^{u,v})^k \right) = \chi \left( \mathfrak{X}^{ku,w} \right) + \mathbb{1}_{2\mathbb{Z}}(k) \cos \left( \frac{kuw\pi}{n} \right) (\rho_{ku}^+ - \rho_{ku}^-)$$

otherwise,  $n$  is even and  $w = \frac{n}{2}$ , and

$$\chi\left((\mathfrak{X}^{u,v})^k\right) = \sigma_{ku}^+ + \sigma_{ku}^- + \mathbb{1}_{2\mathbb{Z}}(k)\mathbb{1}_{2\mathbb{Z}}(u)(-1)^{\frac{u}{2}}(\rho_{ku}^+ - \rho_{ku}^-).$$

If  $kv = an$  then, for  $s$  the sign of  $(-1)^{au}$ ,

$$\chi\left((\mathfrak{X}^{u,v})^k\right) = \begin{cases} \rho_{ku}^+ + \rho_{ku}^- & \text{if } k \text{ is odd} \\ 2\rho_{ku}^s & \text{if } k \text{ is even} \end{cases}.$$

□

**Remark 7.2.4.** This proposition gives us another reason to call character the  $\chi\left((\mathfrak{X}^{u,v})^k\right)$  since, for the classical groups, every linear combination  $\chi$ , with coefficients in  $\mathbb{Z}$ , of characters such that  $\chi(e) > 0$  is again a character. Let us note once again that the traces of powers of a representation do not belong to the character space in general for quantum groups. A counterexample is given by the dual quantum group  $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$  in subsection 7.5.1.

**Proposition 7.2.5.** *The algebra of characters is commutative if  $n$  is odd.*

*Proof.* Note that we have for  $s \neq s'$  or  $t \neq t'$ ,  $e_{(s,t)}e_{(s',t')} = 0_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ ,  $e_{(s,t)}^2 = e_{(s,t)}$  and  $e_{(s,t)}E_{i,j} = E_{i,j}e_{(s,t)} = 0_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ . On the other hand, we also have, for all natural numbers  $a, b$ ,

$$\left(\sum_{m=1}^n E_{m,m+a}\right)\left(\sum_{\mu=1}^n E_{\mu,\mu+b}\right) = \sum_{r=1}^n E_{r,r+a+b} = \left(\sum_{\mu=1}^n E_{\mu,\mu+b}\right)\left(\sum_{m=1}^n E_{m,m+a}\right)$$

which leads to the commutativity of the algebra. □

**Remark 7.2.6.** If  $n$  is even, the subalgebra generated by the  $\rho_l^\pm$ 's and the  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$  is also commutative. But the  $\sigma_l^\pm$ 's do not commute with the  $\rho_l^\pm$ 's, since

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=1}^n (-1)^m E_{m,m+a}\right)\left(\sum_{\mu=1}^n E_{\mu,\mu+b}\right) &= \sum_{r=1}^n (-1)^r E_{r,r+a+b} \\ &\neq \left(\sum_{\mu=1}^n E_{\mu,\mu+b}\right)\left(\sum_{m=1}^n (-1)^m E_{m,m+a}\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+b} E_{r,r+b+a} \end{aligned}$$

when  $b$  is odd.

### 7.2.3 A commutative (sub)algebra

For all  $n$ , the algebra generated by all the  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$ 's and all the  $\rho_l^\pm$ 's is a classical commutative algebra. Thus, by the spectral theorem, it is  $*$ -isomorphic to  $\mathbb{C}^k$  for some  $k \in \mathbb{N}$ . In order to keep track of the restriction of the Haar state, we can view it as a subalgebra of some  $L^\infty(\Omega_n, \mu_n)$ , for a compact space  $\Omega_n$  and a probability distribution  $\mu_n$ . It means that we can see these characters as classical random variables on the classical probability space  $(\Omega_n, \mu_n)$ .

By the Gelfand-Naimark Theorem,  $\Omega_n$  is the spectrum of the algebra, it means the set of all its characters, which means here the set all the nonzero  $*$ -multiplicative linear forms. To determine this space and the measure  $\mu_n$ , we need to investigate deeper the structure of the  $*$ -algebra

$$\mathcal{C}_n = *\text{-alg} \left\{ \rho_l^\pm, \chi(\mathfrak{X}^{u,v}), 0 \leq l, u \leq n-1, 1 \leq v \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

**Lemma 7.2.7.** *For all integers  $k$  and  $l$  between 0 and  $n - 1$ ,  $\rho_k^+ \rho_l^+ = \rho_{k+l}^+$ ,  $\rho_k^- \rho_l^- = \rho_{k+l}^-$  and  $\rho_k^+ \rho_l^- = \rho_{k+l}^- = \rho_k^- \rho_l^+$ , where the sum  $k + l$  is taken in  $\mathbb{Z}_n$ . We also have that, for all integer  $v$  between 1 and  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , and for all integer  $u$  between 0 and  $n - 1$ , there exist integers  $a_i \in \mathbb{Z}$  such that*

$$\chi(\mathfrak{X}^{u,v}) = \rho_u^\pm \left( (\chi(\mathfrak{X}^{0,1}))^v + a_{v-2} (\chi(\mathfrak{X}^{0,1}))^{v-2} + \dots + a_1 \chi(\mathfrak{X}^{0,1}) \right)$$

if  $v$  is odd, or, if  $v$  is even

$$\chi(\mathfrak{X}^{u,v}) = \rho_u^\pm \left( (\chi(\mathfrak{X}^{0,1}))^v + a_{v-2} (\chi(\mathfrak{X}^{0,1}))^{v-2} + \dots + a_0 (\rho_0^+ + \rho_0^-) \right) .$$

*Proof.* The first assertion follows from the definition of the componentwise multiplication.

For the second part of the lemma, we easily see that  $\rho_u^\pm \chi(\mathfrak{X}^{0,v}) = \chi(\mathfrak{X}^{u,v})$ , by the same way. Therefore, we only need to consider the  $\chi(\mathfrak{X}^{0,v})$ .

Let us note that the Tchebychev polynomials  $T_n$  satisfy,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ , for any real  $\theta$ , so we have, thanks to the componentwise multiplication,

$$\begin{aligned} \chi(\mathfrak{X}^{0,v}) &= 2 \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \cos\left(\frac{2\pi tv}{n}\right) e_{(s,t)} \\ &= 2 \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} T_v\left(\cos\left(\frac{2\pi t}{n}\right)\right) e_{(s,t)} \\ &= 2 \tilde{T}_v\left(\frac{\chi(\mathfrak{X}^{0,1})}{2}\right) \end{aligned}$$

where the constant term in  $\tilde{T}_v\left(\frac{\chi(\mathfrak{X}^{0,1})}{2}\right)$  is 0 or  $(\rho_0^+ + \rho_0^-) = \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} e_{(s,t)}$  but not  $\mathbb{1}_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ , what we should have if we substitute  $\chi(\mathfrak{X}^{0,1})$  in  $T_v(X)$ .

Moreover, the Tchebychev polynomial  $T_v$  has degree  $v$  with leading coefficient  $2^{v-1}$ , and all its coefficients are integers. It is symmetric if  $v$  is even, or antisymmetric if  $v$  is odd.  $\square$

This Lemma means that

$$\mathcal{C}_n = \text{*alg} \left\{ \rho_1^+, \rho_1^-, \chi(\mathfrak{X}^{0,1}) \right\} .$$

**Remark 7.2.8.** Since, when  $n$  is odd, we have  $(\rho_1^-)^{n+1} = \rho_1^+$ , the corresponding  $\mathcal{C}_n$  is generated (as an algebra) by  $\left\{ \rho_1^-, \chi(\mathfrak{X}^{0,1}) \right\}$ .

Thus, by the properties of the characters, they are defined by their values on  $\rho_1^+$ ,  $\rho_1^-$  and  $\chi(\mathfrak{X}^{0,1})$ . Moreover, the spectrum  $\sigma(a)$  of an element  $a \in \mathcal{C}_n$  is equal to the set of possible values of characters  $\{\omega(a), \omega \in \Omega_n\}$ , so  $\Omega_n$  is fixed by the spectra of the three elements and some relations. Let us note that  $\mathcal{C}_n$  is a subalgebra of  $\mathcal{A}_n$  containing the unit. Hence, the spectrum with respect to  $\mathcal{C}_n$  is the spectrum with respect to  $\mathcal{A}_n$ . Direct calculations show that:

$$\begin{aligned} \sigma\left(\chi(\mathfrak{X}^{0,1})\right) &= \left\{ 2 \cos\left(\frac{2t\pi}{n}\right), t \in \mathbb{Z}_n \right\} \cup \{0\} , \\ \sigma\left(\rho_1^+\right) &= \{\eta^s, s \in \mathbb{Z}_n\} , \\ \sigma\left(\rho_1^-\right) &= \{\eta^s, s \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{-\eta^s, s \in \mathbb{Z}_n\} . \end{aligned}$$

### 7.3. ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE $\chi((\mathfrak{X}^{U,V})^K)$ 'S

To determine  $\Omega_n$ , let us note that

$$(\rho_1^+)^2 = (\rho_1^-)^2 = \rho_2^+ \text{ and } \rho_1^+ \chi(\mathfrak{X}^{0,1}) = \rho_1^- \chi(\mathfrak{X}^{0,1}) = \chi(\mathfrak{X}^{1,1})$$

which leads to the relations

$$\begin{cases} \forall \omega \in \Omega_n, \omega(\rho_1^+) = \pm \omega(\rho_1^-) \\ \forall \omega \in \Omega_n, \omega(\rho_1^+) = -\omega(\rho_1^-) \Rightarrow \omega(\chi(\mathfrak{X}^{0,1})) = 0 \end{cases} .$$

Finally, we get the following result

**Theorem 7.2.9.** *For all  $n$ ,  $\mathcal{C}_n$ , equipped with the Haar state, can be viewed as an algebra of random variables on the probability space*

$$\begin{aligned} \Omega_n = \left( \{\eta^s, s \in \mathbb{Z}_n\} \times \{1\} \times \left( \left\{ 2 \cos\left(\frac{2t\pi}{n}\right), t \in \mathbb{Z}_n \right\} \cup \{0\} \right) \right) \\ \cup \left( \{-\eta^s, s \in \mathbb{Z}_n\} \times \{-1\} \times \{0\} \right) \end{aligned}$$

endowed with the measure

$$\mu_n = \left( \frac{\mathbb{1}_{4\mathbb{Z}}(n)}{2n(p+1)} + \frac{1 - \mathbb{1}_{4\mathbb{Z}}(n)}{2n(p+2)} \right) \sum_{\substack{\omega=(a,b,c) \in \Omega_n \\ b=1}} \delta_\omega + \frac{1}{2n} \sum_{\substack{\omega=(a,b,c) \in \Omega_n \\ b=-1}} \delta_\omega$$

where  $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  and  $\mathbb{1}_{4\mathbb{Z}}$  is the indicator function of  $4\mathbb{Z}$ , thanks to the Gelfand transform,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}: \mathcal{C}_n &\rightarrow L^\infty(\Omega_n, \mu_n) \\ x &\mapsto (\hat{x}: \omega \mapsto \omega(x)) \end{aligned}$$

given by the following formula

$$\widehat{\rho_1^-}(a, b, c) = a, \quad \widehat{\rho_1^+}(a, b, c) = ab, \quad \widehat{\chi(\mathfrak{X}^{0,1})}(a, b, c) = c .$$

## 7.3 Asymptotic properties of characters associated with the representations $\mathfrak{X}^{u,v}$

Let us return to our study of characters associated the two-dimensional irreducible representations, i.e. traces of powers of some  $\mathfrak{X}^{u,v}$ . More precisely, let us look at what happens for their  $*$ -distribution when the dimension of the algebra  $\mathcal{A}_n$  tends to infinity.

### 7.3.1 Asymptotic distributions

**Definition 7.3.1.** We say that a complex random variable  $Z$  is  $\mathbb{C}$ -arcsine( $\alpha$ ) distributed, if it admits  $z \mapsto \mathbb{1}_{\alpha\mathbb{D}}(z) \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\alpha^2 - |z|^2}}$  as density function. Let us denote by  $\mu_{\mathbb{C}\text{-arc}(\alpha)}$  the corresponding distribution.

**Lemma 7.3.2.** *If  $Z$  is a  $\mathbb{C}$ -arcsine(2) random variable, for all  $k$  and  $l$ , we have*

$$\mathbb{E}[Z^k \bar{Z}^l] = \begin{cases} \binom{2k}{k} & \text{if } k = l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

*Proof.* We need to compute

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{r^{k+l} e^{i(k-l)\theta}}{\sqrt{4-r^2}} d\theta dr .$$

The integral with respect to  $\theta$  vanishes, except if  $k = l$ . In this case, we are left with the  $2k$ th moment of the arcsine distribution on the open interval  $(-2 ; 2)$ .  $\square$

This helps us to find the  $*$ -distribution of characters associated with the irreducible representations  $\mathfrak{X}^{u,v}$ . Since the  $k$ th character depends on the parity of  $k$ , its distribution depends also on this parity.

**Theorem 7.3.3.** *For all  $u, v \geq 1$ ,  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$  is asymptotically (when  $n$  tends to infinity) a  $\left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{C}-\text{arc}(2)}\right)$ -distributed random variable, and  $\chi(\mathfrak{X}^{0,v})$  admits asymptotically the  $*$ -distribution  $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mu_{\text{arc}(-2,2)}$ , where  $\mu_{\text{arc}(-2,2)}$  represents the classical arcsine distribution on the open interval  $(-2, 2)$ .*

*Moreover, the same holds for all  $\chi((\mathfrak{X}^{u,v})^k)$ , with  $k$  odd.*

*Proof.* We only do the computation for  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$ . The case  $\chi((\mathfrak{X}^{u,v})^k)$ , with  $k > 1$  odd, is similar.

Let us remember that, by Proposition 7.2.2,

$$\chi(\mathfrak{X}^{u,v}) = 2 \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{su} \cos\left(\frac{2tv\pi}{n}\right) e_{(s,t)} .$$

Therefore,  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$  commutes with  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})^*$ , and for all  $m \geq 1$

$$(\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^m = 2^m \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{msu} \cos\left(\frac{2tv\pi}{n}\right)^m e_{(s,t)}$$

so we have

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} (\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^{r_1} (\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^{*r_*} \\ &= \frac{2^{r_1+r_*}}{2n^2} \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{(r_1-r_*)su} \cos\left(\frac{2tv\pi}{n}\right)^{r_1+r_*} \\ &= \frac{1}{2n^2} \left( \sum_{s \in \mathbb{Z}_n} \eta^{(r_1-r_*)su} \right) \left( \sum_{l=0}^{r_1+r_*} \binom{r_1+r_*}{l} \sum_{t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{(2l-(r_1+r_*)tv} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{n\mathbb{Z}}((r_1-r_*)u) \sum_{l=0}^{r_1+r_*} \binom{r_1+r_*}{l} \mathbf{1}_{n\mathbb{Z}}((2l-(r_1+r_*)v) . \end{aligned}$$

For all  $u \geq 1$ ,  $r_1 \neq r_*$ ,  $n \geq u(r_1 - r_*) + 1$ , we have  $0 < u(r_1 - r_*) < n$ , so

$$\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} (\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^{r_1} (\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^{*r_*} = 0 .$$

Otherwise, if  $r_1 = r_* = r \geq 1$ , for  $n$  great enough ( $n \geq 2rv + 1$ ), we obtain

$$\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} (\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^r (\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^{*r} = \frac{1}{2} \binom{2r}{r} .$$

### 7.3. ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE $\chi((\mathfrak{X}^{U,V})^K)$ 'S

Hence, if  $u \neq 0$ ,  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$  is asymptotically a  $(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{C}\text{-arc}(2)})$ -distributed random variable.

If  $u = 0$ , let us note that  $\chi(\mathfrak{X}^{0,v})$  is self-adjoint, and

$$\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} (\chi(\mathfrak{X}^{u,v}))^m = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \mathbf{1}_{n\mathbb{Z}}((2l-m)v).$$

Hence, for  $n$  great enough, if  $m$  is odd, the moment vanishes, and if  $m = 2p$ , it is  $\frac{1}{2} \binom{m}{p}$ , which corresponds to the distribution  $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mu_{\text{arc}(-2,2)}$ .  $\square$

**Theorem 7.3.4.** *For all integers  $u, v \geq 1$  and any even  $k$ ,  $\chi((\mathfrak{X}^{u,v})^k)$  is asymptotically (when  $n \rightarrow +\infty$ ) a  $(\frac{1}{2}\mathcal{U}(2\mathbb{T}) + \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{C}\text{-arc}(2)})$ -distributed random variable, and  $\chi((\mathfrak{X}^{0,v})^k)$  admits asymptotically (when  $n \rightarrow +\infty$ )  $\frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\mu_{\text{arc}(-2,2)}$  as  $*$ -distribution.*

*Proof.* The only difference with the characters in the preceding theorem is the part “ $+2 \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right) \sum_{r=1}^n E_{r,r+ku}$ ” in the even characters.

By the properties of the multiplication in  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$  we only need to study it, and show that its moments are asymptotically one half of those for a random variable uniformly distributed on  $2\mathbb{T}$ .

Let us denote this normal matrix by  $M_{k,u,v,n}$ . Then, for all  $m \geq 1$

$$\begin{cases} M_{k,u,v,n}^m &= 2^m \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right)^m \sum_{r=1}^n E_{r,r+mk u} \\ (M_{k,u,v,n}^*)^m &= 2^m \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right)^m \sum_{r=1}^n E_{r,r-mk u} \end{cases}.$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} M_{k,u,v,n}^\alpha (M_{k,u,v,n}^*)^\beta &= \frac{1}{2n^2} n 2^{\alpha+\beta} \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right)^{\alpha+\beta} \text{tr} \left( \sum_{r=1}^n E_{r,r+ku(\alpha-\beta)} \right) \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta}}{2n} \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right)^{\alpha+\beta} \sum_{r=1}^n \mathbf{1}_{n\mathbb{Z}}(ku(\alpha-\beta)) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right) \right)^{\alpha+\beta} \mathbf{1}_{n\mathbb{Z}}(ku(\alpha-\beta)). \end{aligned}$$

For  $u = 0$ , we get  $\frac{1}{2} \left( 2 \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right) \right)^{\alpha+\beta}$  which is one half of  $2^{\alpha+\beta}$ .

For  $u \geq 1$  and  $n$  great enough, this moment goes to one half of the moment of  $\mathcal{U}(2\mathbb{T})$ , which is zero if  $\alpha$  is different from  $\beta$ ,  $2^{2\alpha}$  otherwise. This completes the proof.  $\square$

**Remark 7.3.5.** Let us note that  $\sum_{r=1}^n E_{r,r+ku}$  is a permutation matrix, whose eigenvalues are the  $n$ th roots of unity. Therefore the eigenvalues of the matrix  $2 \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right) \sum_{r=1}^n E_{r,r+ku}$  are the  $n$ th roots of unity multiplied by  $2 \cos\left(\frac{kuv\pi}{n}\right)$ . So when  $n$  goes to infinity, the eigenvalues come out uniformly on  $2\mathbb{T}$  if  $u$  is not zero, which corresponds to the result of the Theorem 7.3.4.



**Remark 7.3.6.** If we let  $n$  go to infinity in Theorem 7.2.9, we see that,  $(\Omega_n, \mu_n)$  converges to  $(\Omega, \mu)$  where

$$\Omega = \mathbb{T} \times \{1\} \times [-2; 2] \sqcup \mathbb{T} \times \{-1\} \times \{0\}, \quad \mu = \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{C}-\text{arc}(2)} + \frac{1}{2}\mathcal{U}(\mathbb{T}).$$

And, we can check easily that

$$\widehat{\rho}_1^-, \widehat{\rho}_1^+ \sim \mathcal{U}(\mathbb{T}) \quad \text{and} \quad \widehat{\chi}(\widehat{\mathfrak{X}}^{0,1}) \sim \frac{1}{2}\mu_{\text{arc}(-2,2)} + \frac{1}{2}\delta_0.$$

**Remark 7.3.7.** The same type of computations for the dihedral group  $D_{2n}$  give similar results. The dihedral group  $D_{2n}$  admits indeed  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  two-dimensional non-equivalent unitary irreducible representations  $\sigma_k$  given by

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \eta^k & 0 \\ 0 & \eta^{-k} \end{pmatrix}$$

where  $s$  and  $t$  generate  $D_{2n}$  with  $s$  of order 2 and  $t$  of order  $n$ . Let us denote by  $\chi_{k,l}$  the class function  $\text{tr}(\sigma_k(\cdot)^l)$ . Then by the moments method, the asymptotic law of  $\chi_{k,l}$  is  $\frac{1}{2}(\mu_{\text{arc}(-2,2)} + \delta_2)$  if  $l$  is even and positive,  $\frac{1}{2}(\mu_{\text{arc}(-2,2)} + \delta_0)$  if  $l$  is odd or  $\delta_2$  when  $l = 0$ .

### 7.3.2 Asymptotic pairwise independence

Since we only consider  $\chi(\mathfrak{X}^{u,v})$  or its adjoint, we work in a commutative setting, and we can use classical cumulants. Let  $b, d, k, l$ , be natural integers,  $a$  and  $c$  be nonnegative integers and  $e, f$  be in  $\{1, *\}$ . Then direct calculation leads to

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c \left( \chi \left( \left( \mathfrak{X}^{a,b} \right)^k \right)^e, \chi \left( \left( \mathfrak{X}^{c,d} \right)^l \right)^f \right) = \delta_{\varepsilon ka, -\varphi lc} \left( \delta_{kb,ld} + 2\mathbf{1}_{(2\mathbb{Z})^2}(k, l) \right) - \delta_{0,a}\delta_{0,c}\mathbf{1}_{(2\mathbb{Z})^2}(k, l)$$

where  $\varepsilon$  (respectively  $\varphi$ ) is 1 if  $e = 1$  (resp.  $f = 1$ ), and  $-1$  if  $e = *$  (resp.  $f = *$ ). This proves

**Proposition 7.3.8.** *Let  $a, b, c, d, e, f, k$  and  $l$  be as above. The followings are equivalent*

1.  $\chi \left( \left( \mathfrak{X}^{a,b} \right)^k \right)^e$  and  $\chi \left( \left( \mathfrak{X}^{c,d} \right)^l \right)^f$  are asymptotically independent

2. at least one of the following conditions holds

- $ka \neq lc$
- $a \neq 0$  or  $c \neq 0$ , and  $e = f$
- $k$  or  $l$  is odd, and  $kb \neq ld$

## 7.4 Random walks

Let us recall that the set of irreducible representations  $I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  depends on the parity of  $n$ . For  $n$  odd, its elements are, for  $l \in \mathbb{Z}_n$ , the one-dimensional representations

$$\rho_l^\pm = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{il} e_{(i,j)} \pm \sum_{m=1}^n E_{m,m+l}$$

with  $\eta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  a primitive  $n$ th root of unity, and the two-dimensional representations  $\mathfrak{X}^{u,v}$ , whose characters are

$$\chi(\mathfrak{X}^{u,v}) = 2 \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} \eta^{su} \cos\left(\frac{2tv\pi}{n}\right) e_{(s,t)}$$

for  $u \in \mathbb{Z}_n$  and  $v \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ . If  $n$  is even, we also need to add, for each  $l \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$\sigma_l^\pm = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} (-1)^j \eta^{il} e_{(i,j)} \pm \sum_{m=1}^n (-1)^m E_{m,m+l}.$$

Note that  $\rho_0^+$ , called the trivial representation, is the unit in  $\mathcal{A}_n = C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ , for each  $n$ .

Let us denote by  $\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}$  the indicator function of even natural integers. Fix an element  $a = \sum_{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)} a_\alpha \chi_\alpha$  of  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ , such that  $a_{\rho_0^+} = 1$ , and for all  $i, j$  in  $\mathbb{Z}_n$ ,

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left( a_{\rho_l^+} + a_{\rho_l^-} + \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(n) (-1)^j (a_{\sigma_l^+} + a_{\sigma_l^-}) + 2 \sum_{v=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{\mathfrak{X}^{l,v}} \cos\left(\frac{2\pi jv}{n}\right) \right) \eta^{il} \geq 0 \quad (7.1)$$

and such that the matrix  $A$  is positive semidefinite, where its coefficient  $A_{i,j}$  is given by  $a_{\rho_{j-i}^+} - a_{\rho_{j-i}^-} + \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(n) (-1)^i (a_{\sigma_{j-i}^+} - a_{\sigma_{j-i}^-})$ .

Then the Fourier transform of  $a$  denoted  $\mathcal{F}(a)$  satisfies the first conditions of [17, Lemma 6.4], which means that  $\mathcal{F}(a)$  is a state on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ . Moreover, these conditions are necessary. To obtain this result, we need to note that

$$\begin{aligned} 2n^2 \mathcal{F}(e_{(s,t)})(e_{(i,j)}) &= \delta_{s,i} \delta_{t,j} & 2n^2 \mathcal{F}(e_{(s,t)})(E_{i,j}) &= 0 \\ 2n \mathcal{F}(E_{p,q})(e_{(i,j)}) &= 0 & 2n \mathcal{F}(E_{p,q})(E_{i,j}) &= \delta_{p,j} \delta_{q,i} \end{aligned}$$

and to express  $a$  in the canonical basis of  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ .

**Remark 7.4.1.** By (7.1) and the property of  $A$ , the coefficient  $a_{\rho_0^-}$  is real and its absolute value is not greater than 1.

**Example 7.4.2.** Let  $p, q$  be two integers such that  $pq = n$ ,  $q > 1$ . Put  $a_{\rho_{lp}^+} = \eta^{lp}$  for all  $0 \leq l \leq q-1$  and  $a_\alpha = 0$  for all the others  $\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ . Then, for all  $i, j \in \mathbb{Z}_n$ , the left-hand-side term in (7.1) is

$$a_{(i,j)} = \sum_{l=0}^{q-1} \eta^{lp} \eta^{ilp} = q \mathbb{1}_{q\mathbb{Z}_n}(i+1)$$

which equals  $q$  if  $i+1$  is a multiple of  $q$  in  $\mathbb{Z}_n$  and 0 otherwise. This is nonnegative, and the matrix  $A$ , defined by  $A_{i,j} = \eta^{lp}$  if  $j = i + lp$  and 0 otherwise, is self-adjoint and its eigenvalues are 0 and  $q$ , i.e.  $A$  is semidefinite positive. Therefore,  $\mathcal{F}(a) = \phi_p$  is a state on the algebra  $\mathcal{A}_n = C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ .

### 7.4.1 Conditions for convergence

First, let us determine the conditions for the random walk defined by such an element  $a \in C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  to converge. Note that, if we extend naturally the notation,  $\mathfrak{X}^{u,0}$  is unitarily equivalent to the direct sum of the representations  $\rho_u^+$  and  $\rho_u^-$ . Similarly, if  $n$  is even,  $\mathfrak{X}^{u,\frac{n}{2}}$  is unitarily equivalent to the direct sum of  $\sigma_u^+$  and  $\sigma_u^-$ , as representations of  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ .

Moreover, the random walk associated with  $a$  converges if and only if the sequences of matrices  $\left(\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v})^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$  converge for all  $u \in \mathbb{Z}_n$  and all  $v \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ , since

$$\left(\widehat{\mathcal{F}(a)}^{\star k}\right)(\mathfrak{X}^{u,v}) = \left(\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v})\right)^k.$$

**Theorem 7.4.3.** *The random walk associated with  $a$  converges if and only if every complex number  $\frac{a_\alpha}{d_\alpha}$  is an element of the open unit disk  $\mathbb{D}$  or equals 1, for all  $\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ .*

*Proof.* First, let us fix  $(u, v)$  such that  $0 \leq u \leq n-1$  and  $1 \leq v \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Then

$$\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v}) = \begin{pmatrix} \sum_{s,t=0}^{n-1} \eta^{su+tv} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} e_{(s,t)} a & \sum_{m=1}^n \eta^{-mv} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} E_{m,m+u} a \\ \sum_{m=1}^n \eta^{mv} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} E_{m,m+u} a & \sum_{s,t=0}^{n-1} \eta^{su-tv} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} e_{(s,t)} a \end{pmatrix}$$

is easy to calculate if we note that  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} e_{(i,j)} a$  equals  $\frac{1}{2n^2} a_{(i,j)}$ , where  $a_{(i,j)}$  is the left-hand-side term in inequality (7.1), and  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} E_{m,m+u} a = \frac{1}{2n} A_{m+u,m}$ . By direct calculations, we obtain  $\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v}) = \frac{1}{2} a_{\mathfrak{X}^{n-u,v}} I_2$ . Hence the corresponding sequences of matrices converge if and only if

$$\frac{1}{2} |a_{\mathfrak{X}^{n-u,v}}| < 1 \text{ or } \frac{1}{2} a_{\mathfrak{X}^{n-u,v}} = 1.$$

The same computation for  $v = 0$  gives

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{\rho_{n-u}^+} + a_{\rho_{n-u}^-} & a_{\rho_{n-u}^+} - a_{\rho_{n-u}^-} \\ a_{\rho_{n-u}^+} - a_{\rho_{n-u}^-} & a_{\rho_{n-u}^+} + a_{\rho_{n-u}^-} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\rho_{n-u}^+} & 0 \\ 0 & a_{\rho_{n-u}^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

This leads to the condition on  $a_{\rho_i^+}$  and  $a_{\rho_i^-}$ .

If  $n$  is even, we get

$$\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,\frac{n}{2}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{\sigma_{n-u}^+} + a_{\sigma_{n-u}^-} & (-1)^u (a_{\sigma_{n-u}^+} - a_{\sigma_{n-u}^-}) \\ (-1)^u (a_{\sigma_{n-u}^+} - a_{\sigma_{n-u}^-}) & a_{\sigma_{n-u}^+} + a_{\sigma_{n-u}^-} \end{pmatrix}$$

whose eigenvalues are  $a_{\sigma_{n-u}^+}$  and  $a_{\sigma_{n-u}^-}$ , and the condition on these coefficients follows.  $\square$

**Remark 7.4.4.** Since the  $\mathfrak{X}^{u,v}$ 's are unitaries, the  $\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v})$ 's have norm not greater than 1, when  $\mathcal{F}(a)$  is a state. In particular, for each irreducible representation  $\alpha$  in  $I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ , the modulus of the coefficient  $a_\alpha$  is bounded from above by the dimension  $d_\alpha$ , i.e.  $|a_\alpha| \leq d_\alpha$ .

### 7.4.2 Distance to uniformity

Now that we have a criterion for convergence, we want to single out conditions ensuring that the limit is the Haar state. As in the case of the Kac-Paljutkin finite quantum group, we look at convergence to the Haar state by using Quantum Diaconis-Shahshahani Upper and Lower Bound Lemmas.

#### Upper bound

**Lemma 7.4.5.** *For any natural integer  $k$ ,*

$$\|\mathcal{F}(a)^{*k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}\|_{QTV} \leq \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \\ \alpha \neq \rho_0^+, d_\alpha=1}} |a_\alpha|^{2k} + \frac{1}{4^k} \sum_{\substack{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \\ d_\alpha=2}} |a_{\mathfrak{X}^{u,v}}|^{2k}} \quad (7.2)$$

*Proof.* The Quantum Diaconis-Shahshahani Upper Bound Lemma [23, Lemma 5.3.8] gives

$$\|\mathcal{F}(a)^{*k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}\|_{QTV}^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \\ \beta \neq \rho_0^+}} d_\beta \operatorname{tr} \left( \widehat{\mathcal{F}(a)}(\beta)^{*k} \widehat{\mathcal{F}(a)}(\beta)^k \right).$$

Let us compute  $\widehat{\mathcal{F}(a)}(\beta)$  for every  $\beta \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ . First of all, let us recall that, by linearity of  $\mathcal{F}$ ,

$$\widehat{\mathcal{F}(a)}(\beta) = \sum_{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)} a_\alpha \widehat{\mathcal{F}(\chi_\alpha)}(\beta) = \left( \sum_{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)} a_\alpha \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \beta_{ij} \chi_\alpha \right)_{1 \leq i, j \leq d_\beta}.$$

Assume  $d_\beta = 1$ . If  $d_\alpha = 1$ , then  $\gamma = \beta\alpha$  is again an irreducible one-dimensional representation of  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ , and  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \gamma = \delta_{\gamma, \rho_0^+}$ . If  $d_\alpha = 2$ , then

$$\beta \cdot \chi(\mathfrak{X}^{u,v}) = \begin{cases} \chi(\mathfrak{X}^{u+l,v}) & \text{if } \beta = \rho_l^\pm \\ \chi(\mathfrak{X}^{u+l, \frac{n}{2}-v}) & \text{if } \beta = \sigma_l^\pm \end{cases}.$$

Since  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \chi(\mathfrak{X}^{u,v}) = 0$ , we get  $\widehat{\mathcal{F}(a)}(\beta) = a_{\beta^{-1}}$  and then

$$\operatorname{tr} \left( \widehat{\mathcal{F}(a)}(\beta)^{*k} \widehat{\mathcal{F}(a)}(\beta)^k \right) = |a_{\beta^{-1}}|^{2k}. \quad (7.3)$$

Now, assume  $d_\beta = 2$ , which means that there exists  $(u, v)$  such that  $\beta = \mathfrak{X}^{u,v}$  for  $0 \leq u \leq n-1$  and  $1 \leq v \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . We already know that  $\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v}) = \frac{1}{2} a_{\mathfrak{X}^{n-u,v}} I_2$ . Therefore

$$\operatorname{tr} \left( \widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v})^{*k} \widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{u,v})^k \right) = \frac{1}{2^{2k-1}} |a_{\mathfrak{X}^{n-u,v}}|^{2k}. \quad (7.4)$$

Finally, we get the bound (7.2) by replacing (7.3) and (7.4) in the Quantum Diaconis-Shahshahani Upper Bound Lemma.  $\square$

Hence, the random walk associated with  $a$  converges to the Haar state if all the complex numbers cited in Theorem 7.4.3 are not equal to 1, except  $a_{\rho_0^+}$ , which means that

$$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \setminus \{\rho_0^+\}, |a_\alpha| < d_\alpha \quad (7.5)$$

### Lower bound

**Lemma 7.4.6.** *For any non-trivial irreducible representation  $\alpha$ ,*

$$\frac{1}{2} \left| \frac{a_\alpha}{d_\alpha} \right|^k \leq \|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} . \quad (7.6)$$

*Proof.* By the quantum version of the Lower Bound Lemma [23, Lemma 5.3.9], for every non-trivial one-dimensional representation  $\alpha$ ,

$$\|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} \geq \frac{1}{2} |a_\alpha|^k .$$

Moreover, the following equality [23] holds

$$\|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} = \frac{1}{2} \sup_{x \in C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n), \|x\|_\infty \leq 1} \left| \mathcal{F}(a)^{\star k}(x) - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} x \right| \quad (7.7)$$

and any two-dimensional irreducible representation satisfies  $\|\frac{\chi(\mathfrak{X}^{u,v})}{2}\|_\infty \leq 1$ . Thus

$$\|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} \geq \frac{1}{4} \left| \mathcal{F}(a)^{\star k}(\chi(\mathfrak{X}^{u,v})) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{a_{\mathfrak{X}^{n-u,v}}}{2} \right|^k .$$

□

**Remark 7.4.7.** If (7.5) is not satisfied for some non-trivial representation, we obtain that the sequence  $(\mathcal{F}(a)^{\star k})_{k \in \mathbb{N}}$  stays "uniformly far away from randomness", since the norm is at least  $\frac{1}{2}$  for all  $k$ .

Finally, combining the previous lemmas, we obtain

**Theorem 7.4.8.** *The random walk  $(\mathcal{F}(a)^{\star k})_{k \in \mathbb{N}}$  converges to the Haar state if and only if the condition (7.5) holds.*

**Remark 7.4.9.** Let us note that if the condition (7.5) is not satisfied for  $\mathfrak{X}^{u,v}$ ,  $a_{\mathfrak{X}^{u,v}} = 2$ , by Theorem 7.4.3. Hence

$$\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{n-u,v}) = \frac{1}{2} a_{\mathfrak{X}^{u,v}} I_2 = I_2$$

and the limit of the sequence  $(\widehat{\mathcal{F}(a)}(\mathfrak{X}^{n-u,v})^k)_{k \in \mathbb{N}}$  is the identity. But,  $\widehat{f}_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}(\mathfrak{X}^{p,q})$  is the null matrix except if  $p = q = 0$ , it means that the limit state is not  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ . This is another way to prove that the condition (7.5) is necessary for the two-dimensional representations.

### 7.4.3 Cut-off phenomenon

In the classical case, we frequently observe cut-off phenomenon, i.e. the distance between  $\mathcal{F}(a)^{\star k}$  and the Haar state is almost 1 for a time and then suddenly tends to 0, exponentially fast. There exist different definitions of the threshold (see for example [34],[11] and [33]), depending on how sharp you want the cut-off.

Note that, by upper and lower bounds, (7.2) and (7.6), we have roughly

$$\frac{1}{2}M_a^k \leq \|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|\|_{QTV} \leq \frac{n}{\sqrt{2}}M_a^k$$

where  $M_a$  is the maximum of the  $\frac{|a_\alpha|}{d_\alpha}$ ,  $\alpha$  non-trivial. For  $n$  fixed, if  $M_a$  is less than 1, the random walk converges to the Haar state. In this subsection, we will look at what happens if  $a$  and  $k$  depend on  $n$ . To give a definition of  $a$  depending quite naturally on  $n$ , we look at some quantum version of the simple random walk on  $\mathbb{Z}_n$ , studied in [10, Theorem 2, Chapter 3C].

If we only consider these bounds and want that  $nM_a^k$  vanishes when  $n$  goes to infinity, then the limit of  $M_a^k$  is also 0. Moreover, since the lower bound is at most  $\frac{1}{2}$ , it will be ineffective to prove the cut-off. Actually, for our example, we are able to prove that there is no cut-off, as in its classical version.

**Remark 7.4.10.** In [24], McCarthy gives another example of a random walk in Sekine family where there is no cut-off, but with a state which formally does not depend on  $n$  and which is not the Fourier transform of an element in the central algebra. Note that in [18] and [19], Freslon finds cut-off examples in compact quantum groups.

**Theorem 7.4.11.** *For  $n$  odd, define the element  $a \in C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  such that for any  $l \in \mathbb{Z}_n$ ,  $a_{\rho_l^+} = \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)$  and  $a_\alpha = 0$  otherwise. Then  $\mathcal{F}(a)$  defines a state on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ , such that, for any nonnegative  $c$ , if  $k = e^c n^2$ ,*

$$\frac{1}{2}e^{-k\left(\frac{\pi^2}{2n^2} + \frac{\pi^4}{4n^4}\right)} \leq \|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|\|_{QTV} \leq e^{-k\frac{\pi^2}{2n^2}}.$$

Moreover, the lower bound still holds when  $k = e^{-c}n^2$ .

**Remark 7.4.12.** If  $n$  is even, the same definition for  $a_{\rho_l^+}$  leads to  $a_{\rho_{\frac{n}{2}}^+} = -1$  and by Theorem 7.4.8 the random walk does not converge to the Haar state.

*Proof.* First let us prove that  $\mathcal{F}(a)$  is a state on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ . We only need to check that every  $a_{(i,j)}$  is nonnegative and that the matrix  $A$  is semidefinite positive, since  $a_{\rho_0^+}$  is equal to 1 by definition.

Note that, for any  $i$  and any  $j$  in  $\mathbb{Z}_n$ ,

$$a_{(i,j)} = \sum_{l=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) \eta^{il} = \frac{n}{2} (\delta_{i,1} + \delta_{i,n-1})$$

is always nonnegative and the equality  $A_{i,j} = \cos\left(\frac{2(j-i)\pi}{n}\right)$  defines a circulant matrix, whose eigenvalues are given by the same formula as the  $a_{(i,j)}$ 's, for  $i$  between 0 and  $n-1$ . Thus, the matrix  $A$  is semidefinite positive.

On the first hand, following the arguments of [10, Theorem 2, Chapter 3C], the upper

bound (7.2) gives

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV}^2 &\leq \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)^{2k} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{l\pi}{n}\right)^{2k} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{kl^2\pi^2}{n^2}} \end{aligned}$$

where we use that  $\cos(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$  for  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ . Finally, since for every natural integer  $j$  we have  $(j+1)^2 - 1 \geq 3j$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV}^2 &\leq \frac{e^{-\frac{k\pi^2}{n^2}}}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{3kj\pi^2}{n^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{k\pi^2}{n^2}}}{2 \left(1 - e^{-\frac{3k\pi^2}{n^2}}\right)}. \end{aligned}$$

This works for any  $k$  and any odd  $n$ . Moreover, for  $k$  greater than  $n^2$ ,  $2 \left(1 - e^{-\frac{3k\pi^2}{n^2}}\right)$  is greater than 1, thus we obtain the announced upper bound.

On the other hand, the lower bound (7.6) leads to

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} &\geq \frac{1}{2} \max_{1 \leq l \leq n-1} \left| \cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right) \right|^k \\ &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^k. \end{aligned}$$

Let us define  $g(x) = \log\left(e^{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}} \cos(x)\right)$ . Since  $g'(x) = x + x^3 - \tan(x)$  is positive on  $(0; \frac{\pi}{3}]$ ,  $g(x)$  is also positive on the same interval. Hence

$$\|\mathcal{F}(a)^{\star k} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} \geq \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^k \geq \frac{1}{2} e^{-\frac{k\pi^2}{2n^2} - \frac{k\pi^4}{4n^4}}.$$

This works for any  $k$  and any odd  $n \geq 3$ . □

**Remark 7.4.13.** Thus, the limit of  $\|\mathcal{F}(a)^{\star k(n)} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV}$ , when  $n$  and  $\frac{k(n)}{n^2}$  go to infinity, is null, and conversely, is always at least  $\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^4}{36}}$  for  $k(n)$  less than  $n^2$ .

**Remark 7.4.14.** These bounds give in particular that for any positive integer  $C$ ,

$$0 < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}(a)^{\star Cn^2} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}(a)^{\star Cn^2} - \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \|_{QTV} < 1.$$

Thus  $k$  should satisfies  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^2} = +\infty$  in order to get the convergence of the upper bound to 0 when  $n$  goes to infinity. But, in this case, the lower bound vanishes too. This is precisely the meaning of a “no cut-off” statement.

### 7.4.4 Asymptotic behavior

We go back to the setting where  $n$  and  $a$  are fixed, and  $k$  does not depend on them. We now study what happens when  $k$  goes to infinity.

#### Possible limit states

Let us note that, when the random walk converges, the limit state  $\mu$  is an idempotent state. Thanks to Zhang [44], we know all the idempotent states on the Sekine quantum groups. There are four different types:

- $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ , the Haar state,
- $h_\Gamma = \frac{2n^2}{\#\Gamma} \sum_{(i,j) \in \Gamma} \mathcal{F}(e_{(i,j)})$  where  $\Gamma$  is a subgroup of  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ ,
- $h_{\Gamma,l} = \frac{n^2}{\#\Gamma} \sum_{(i,j) \in \Gamma} \mathcal{F}(e_{(i,j)}) + q \sum_{m \equiv l[q]} \mathcal{F}(E_{m,m})$  where  $\Gamma = \mathbb{Z}_n \times q\mathbb{Z}_n$ ,  $q \mid n$ ,  $q > 1$  and  $l \in \mathbb{Z}_q$ ,
- $h_{\Gamma,l,\tau} = \frac{n^2}{\#\Gamma} \sum_{(i,j) \in \Gamma} \mathcal{F}(e_{(i,j)}) + q \sum_{i,j \equiv l[q]} \tau_{j-i} \mathcal{F}(E_{i,j})$  where  $\Gamma = p\mathbb{Z}_n \times q\mathbb{Z}_n$ ,  $p > 1$ ,  $pq = n$ ,  $l \in \mathbb{Z}_q$  and  $\tau \in \{-1, 1\}^{q\mathbb{Z}_n}$  such that  $\sum_{j \in q\mathbb{Z}_n} \tau_j \eta^{ij} > 0$  for all  $i \in \mathbb{Z}_p$ .

Let us note that the two first types are Haar idempotent states, which means that they arise from the Haar state of a quantum subgroup.

**Remark 7.4.15.** We already know that

$$\widehat{\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} (\mathfrak{X}^{u,v})} = \delta_{(u,v),(0,0)} I_2 .$$

Note that [44, Remark 2.11] gives a useful characterization of types  $h_{\Gamma,l}$  and  $h_{\Gamma,l,\tau}$  by the  $\widehat{\mu}(\mathfrak{X}^{u,v})$ 's:

$$\widehat{h_{\Gamma,l}}(\mathfrak{X}^{u,v}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \eta^{-vl} \\ \eta^{vl} & 1 \end{pmatrix} & \text{if } u = 0 \text{ and } \frac{n}{q} \mid v \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.8)$$

$$\widehat{h_{\Gamma,l,\tau}}(\mathfrak{X}^{u,v}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau_{-v} \eta^{-vl} \\ \tau_v \eta^{vl} & 1 \end{pmatrix} & \text{if } q \mid u \text{ and } \frac{n}{q} \mid v \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.9)$$

In particular, for  $\mu$  of these types, and for each  $v$  between 1 and  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , the matrix  $\widehat{\mu}(\mathfrak{X}^{n-u,v})$  is either null or not diagonal. Thus, when some  $a_{\mathfrak{X}^{u,v}}$  equals 2, by the proof of Theorem 7.4.8, the limit state should be of type  $h_\Gamma$ , if it exists.

**Proposition 7.4.16.** *If the random walk associated with  $a$  converges, the limit state  $\mu$  is a central idempotent state.*



*Proof.* A central idempotent state is a state  $\phi$  on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  such that  $\phi \star \phi = \phi$  and  $\phi \star \psi = \psi \star \phi$  for every bounded linear functional  $\psi$  on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ .

Let us note that if  $\mathcal{F}(a)^{\star k} \star \psi = \psi \star \mathcal{F}(a)^{\star k}$  holds for all  $k$ , then  $\mu \star \psi = \psi \star \mu$  is verified, where  $\mu$  is the limit state of the random walk  $\mathcal{F}(a)^{\star k}$ . Thus, we will study the commutativity for the random walk. Actually, we only need to check if  $\mathcal{F}(a)$  is central, for  $a$  a linear combination of irreducible characters.

Let  $\psi$  be a linear functional on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ . Then, there exists  $b$  in  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  such that  $\psi = \mathcal{F}(b)$ . We want to prove the equality  $\psi \star \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(a) \star \psi$ . This is to show that if  $a$  is a linear combination of characters,  $a \star b = b \star a$  holds for all  $b$  in  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ .

Using Sweedler notation, by definition of the convolution product on  $C(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ , since the Haar state is a trace and  $S$  is an involution,

$$\begin{aligned} b \star a &= \sum_{(a)} a_{(2)} \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} S(a_{(1)}) b \\ &= \left( \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \otimes \rho_0^+ \right) \left[ (b \otimes \rho_0^+) \cdot (S \otimes \rho_0^+) \Delta(a) \right] \\ &= \left( \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \otimes S \right) \left[ (b \otimes \rho_0^+) \cdot (S \otimes S) \Delta(a) \right]. \end{aligned}$$

Let us denote by  $\sigma$  the morphism  $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ , and note that for any  $\alpha$  in  $I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ ,  $\sigma(\Delta(\chi_\alpha)) = \Delta(\chi_\alpha)$ .

The property of the antipode gives  $(S \otimes S) \Delta(a) = \sigma(\Delta(S(a)))$ . Moreover the element  $S(a)$  is also a linear combination of characters, hence  $\sigma(\Delta(S(a))) = \Delta(S(a))$ . Then

$$\begin{aligned} b \star a &= S \left( \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \otimes \rho_0^+ \right) \left[ (b \otimes \rho_0^+) \cdot \Delta(S(a)) \right] \\ &= S^2 \left( \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \otimes \rho_0^+ \right) \left[ \Delta(b) \cdot (S(a) \otimes \rho_0^+) \right] \\ &= \left( \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} \otimes \rho_0^+ \right) (S \otimes \rho_0^+) \left[ (S \otimes \rho_0^+) \Delta(b) \cdot (a \otimes \rho_0^+) \right] \\ &= a \star b \end{aligned}$$

where the second equality comes from the Kac property (2.1), and the last one from the fact that  $\int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} S(x) = \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n} x$ .  $\square$

**Remark 7.4.17.** This result is true in any quantum group satisfying the Kac property, since the Haar state is always invariant with respect to the antipode.

### Convergence to $h_\Gamma$

Thanks to Theorem 7.4.8, we already know necessary and sufficient conditions for the random walk to converge to the Haar state. We will now study the convergence to an idempotent state of type  $h_\Gamma$ . Note that all  $h_\Gamma$  are not possible limit states, since some of them are not central. The subgroup  $\Gamma$  has to satisfy some symmetry in order to the state  $h_\Gamma$  to be central for the convolution.

**Lemma 7.4.18.** *Assume that the random walk associated with  $a$  converges, and denote by  $\mu$  the limit state. The followings are equivalent:*

i)  $\forall l \in \mathbb{Z}_n$ ,  $a_{\rho_l^+} = a_{\rho_l^-}$  and  $a_{\sigma_l^+} = a_{\sigma_l^-}$  (when  $n$  is even)

ii)  $a_{\rho_0^-} = 1$

iii)  $\mu$  is a  $h_\Gamma$  for  $\Gamma$  a subgroup of  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$  such that

$$(k, l) \in \Gamma \iff (k, -l) \in \Gamma \quad (7.10)$$

*Proof.* The implication i)  $\Rightarrow$  ii) is clear. The converse follows from the fact that  $A$  is positive semidefinite.

Now, let us look at the equivalence between ii) and iii). First of all, let us note that

$$a^{*k} = \sum_{\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)} \frac{a_\alpha^k}{d_\alpha^{k-1}} \chi_\alpha.$$

Let us denote by  $a_{(i,j)}^{(k)}$  and  $A_{i,j}^{(k)}$  its coefficients in the canonical basis, and by  $\mu_{(i,j)}$  and  $M_{i,j}$  the coefficients of  $\mu$  in basis  $\{\mathcal{F}(e_{(i,j)}), \mathcal{F}(E_{i,j}), 1 \leq i, j \leq n\}$ .

Then by [44], either  $\sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \mu_{(i,j)} = 2n^2$  and  $\sum_{m=1}^n M_{m,m} = 0$  and  $\mu$  is of type  $h_\Gamma$ , or

$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \mu_{(i,j)} = n^2$  and  $\sum_{m=1}^n M_{m,m} = n$  and  $\mu$  is of another type.

On the other hand, we have

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \mu_{(i,j)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} a_{(i,j)}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n^2 (1 + a_{\rho_0^-}^k)$$

$$\sum_{m=1}^n M_{m,m} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}_n} A_{i,i}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n (1 - a_{\rho_0^-}^k)$$

Therefore the limit  $\mu$  satisfies  $\sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \mu_{(i,j)} = 2n^2$  and  $\sum_{m=1}^n M_{m,m} = 0$  if and only if  $a_{\rho_0^-} = 1$ .

Moreover, for  $a$  a linear combination of irreducible characters,  $a_{(i,-j)}^{(k)} = a_{(i,j)}^{(k)}$  then  $\mu_{(i,j)} = \mu_{(i,-j)}$ . Thus the subgroup  $\Gamma$  of  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$  satisfies the condition (7.10).  $\square$

**Remark 7.4.19.** By Remark 7.4.15, we obtain that if the random walk converges and there exists  $\alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  such that  $a_\alpha = d_\alpha = 2$ , then  $a_{\rho_0^-} = 1$ .

**Lemma 7.4.20.** *Assume that the random walk associated with the element  $a$  converges. If there exists a one-dimensional representation  $\alpha^+$  in  $I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  such that  $a_{\alpha^+} = a_{\alpha^-} = 1$ , then the limit state is of type  $h_\Gamma$ , with  $\Gamma$  a subgroup of  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$  satisfying (7.10).*

*Proof.* Let us denote by  $\hat{\mathfrak{X}}^\alpha$  the corresponding  $\mathfrak{X}^{u,v}$  with  $u \in \mathbb{Z}_n$  and  $v = 0$  if  $\alpha^+$  is  $\rho_{n-u}^+$  or  $v = \frac{n}{2}$  if  $\alpha^+ = \sigma_{n-u}^+$ . Then  $\widehat{\mathcal{F}(a)^{*k}(\hat{\mathfrak{X}}^\alpha)} = I_2$ . Hence, by characterizations (7.8) and (7.9), the limit state is of type  $h_\Gamma$ . The same argument as in the preceding lemma gives the property of  $\Gamma$ .  $\square$

**Classification**

Let us list all the possible asymptotic behaviors for a random walk defined by the Fourier transform of a linear combination of irreducible characters. Note that the set of limit states depends on the parity of  $n$ .

**Theorem 7.4.21.** *Denote by  $\mu$  the limit state of the random walk associated with  $a$ , if it exists.*

*If  $n$  is odd, there are only four possibilities:*

- *condition (7.5) holds, i.e.  $\mu = \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ ,*
- *$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ ,  $|a_\alpha| < d_\alpha$  or  $a_\alpha = d_\alpha$ , and  $a_{\rho_0^-} = 1$ , i.e.  $\mu = h_\Gamma$ , with  $\Gamma$  a subgroup of  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$  satisfying (7.10)*
- *$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ ,  $|a_\alpha| < d_\alpha$  or  $a_\alpha = 1$ ,  $a_{\rho_0^-} \neq 1$  but condition (7.5) does not hold, i.e.  $\mu = h_{\Gamma,l,\tau}$  with  $q = 1$  (and  $p = n$ ),  $l = 0$  and  $\tau_i = 1$  for all  $i \in \mathbb{Z}_n$ ,*
- *otherwise the random walk diverges.*

*If  $n$  is even, there are six possibilities:*

- *condition (7.5) holds, i.e.  $\mu = \int_{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}$ ,*
- *$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$   $|a_\alpha| < d_\alpha$  or  $a_\alpha = d_\alpha$ , and  $a_{\rho_0^-} = 1$ , i.e.  $\mu = h_\Gamma$ , with  $\Gamma$  a subgroup of  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$  satisfying (7.10)*
- *$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ ,  $|a_\alpha| < d_\alpha$  or  $a_\alpha = 1$ ,  $a_{\rho_0^-} \neq 1$ ,  $a_{\sigma_0^+} = 1$  or  $a_{\sigma_0^-} = 1$  but  $a_{\sigma_0^+} \neq a_{\sigma_0^-}$ ,  $|a_{\sigma_2^+}| < 1$  and  $|a_{\sigma_2^-}| < 1$ , i.e.  $\mu = h_{\Gamma,l}$  with  $q = 2$  and  $l$  equals 0 if  $a_{\sigma_0^+} = 1$ , or 1 if  $a_{\sigma_0^-} = 1$ ,*
- *$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ ,  $|a_\alpha| < d_\alpha$  or  $a_\alpha = 1$ ,  $a_{\rho_0^-} \neq 1$ ,  $|a_{\sigma_0^+}| < 1$  and  $|a_{\sigma_0^-}| < 1$  but condition (7.5) does not hold, i.e.  $\mu = h_{\Gamma,l,\tau}$  with  $q = 1$  (and  $p = n$ ),  $l = 0$  and  $\tau_i = 1$  for all  $i \in \mathbb{Z}_n$ ,*
- *$\forall \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$ ,  $|a_\alpha| < d_\alpha$  or  $a_\alpha = 1$ ,  $a_{\rho_0^-} \neq 1$ ,  $a_{\sigma_0^+} = a_{\sigma_2^+} = 1$  or  $a_{\sigma_0^-} = a_{\sigma_2^-} = 1$  but  $a_{\sigma_0^+} \neq a_{\sigma_0^-}$ , i.e.  $\mu = h_{\Gamma,l,\tau}$  with  $q = 2$  (and  $p = \frac{n}{2}$ ),*
- *otherwise the random walk diverges.*

**Remark 7.4.22.** By Proposition 7.4.16, the limit states are central for the convolution product. One can check that all the central idempotent states arise as limit of such random walks.

*Proof.* We only need to look at the case when the limit  $\mu$  exists but is not the Haar state or some  $h_\Gamma$ . We will again use the characterizations (7.8) and (7.9) of the idempotent states  $h_{\Gamma,l}$  and  $h_{\Gamma,l,\tau}$ .

The limit of the  $\widehat{\mathcal{F}(a)^{\star k}}(\mathfrak{X}^{u,v})$ 's is null for all  $v$  between 1 and  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , which is equivalent to  $q$  equals 1 or 2.

Since  $q$  divides  $n$ , if  $n$  is odd, the only possibility is  $q = 1$ . Hence,  $\mu$  is the state  $h_{\{0\} \times \mathbb{Z}_n, 0, (1)_{i=0}^{n-1}}$ .

If  $n$  is even,  $\mathfrak{X}^{0, \frac{n}{2}}$  exists, and

$$\widehat{\mathcal{F}(a)^{\star k}}(\mathfrak{X}^{0, \frac{n}{2}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{\sigma_0^+}^k + a_{\sigma_0^-}^k & a_{\sigma_0^+}^k - a_{\sigma_0^-}^k \\ a_{\sigma_0^+}^k - a_{\sigma_0^-}^k & a_{\sigma_0^+}^k + a_{\sigma_0^-}^k \end{pmatrix}$$

tends to  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  or  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Let us note that the limit is null if and only if  $a_{\sigma_0^+}$  and  $a_{\sigma_0^-}$  have both modulus less than 1. Since, among the possible limit states, the equality  $\widehat{\mu}(\mathfrak{X}^{0, \frac{n}{2}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  characterizes  $h_{\{0\} \times \mathbb{Z}_n, 0, (1)_{i=0}^{n-1}}$ , we get the fourth case.

Assume now that the previous limit is not the null matrix. The case  $u = n - 2$  and  $v = \frac{n}{2}$  will determine the limit, since

$$\widehat{h_{\Gamma, l}}(\mathfrak{X}^{n-2, \frac{n}{2}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{whereas} \quad \widehat{h_{\Gamma, l, \tau}}(\mathfrak{X}^{n-2, \frac{n}{2}}) = \widehat{h_{\Gamma, l, \tau}}(\mathfrak{X}^{0, \frac{n}{2}}).$$

We have

$$\widehat{\mathcal{F}(a)^{\star k}}(\mathfrak{X}^{n-2, \frac{n}{2}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{\sigma_2^+}^k + a_{\sigma_2^-}^k & a_{\sigma_2^+}^k - a_{\sigma_2^-}^k \\ a_{\sigma_2^+}^k - a_{\sigma_2^-}^k & a_{\sigma_2^+}^k + a_{\sigma_2^-}^k \end{pmatrix}$$

whose limit is null, if and only if  $|a_{\sigma_2^+}| < 1$  and  $|a_{\sigma_2^-}| < 1$ . This concludes the proof of the theorem.  $\square$

**Remark 7.4.23.** If we look at the characterizations (7.8) and (7.9), we have also the following equivalences:

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{Z}_n, a_{\rho_l^+} = 1 \text{ and } |a_\alpha| < d_\alpha \text{ for all the others } \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \\ \iff \mu = h_{\{0\} \times \mathbb{Z}_n, 1, (1)_{i=0}^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{\rho_0^+} = 1, a_{\sigma_0^+} = 1 \text{ and } |a_\alpha| < d_\alpha \text{ for all the others } \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \\ \iff \mu = h_{\mathbb{Z}_n \times 2\mathbb{Z}_n, 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{\rho_0^+} = 1, a_{\sigma_0^-} = 1 \text{ and } |a_\alpha| < d_\alpha \text{ for all the others } \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \\ \iff \mu = h_{\mathbb{Z}_n \times 2\mathbb{Z}_n, 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}, a_{\rho_{2i}^+} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}, a_{\sigma_{2i}^+} = 1 \text{ or } \forall i \in \mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}, a_{\sigma_{2i}^-} = 1 \text{ but } a_{\sigma_0^+} \neq a_{\sigma_0^-}, \\ \text{and } |a_\alpha| < d_\alpha \text{ for all the others } \alpha \in I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n) \\ \iff \mu = h_{\frac{n}{2}\mathbb{Z}_n \times 2\mathbb{Z}_n, l, \tau} \end{aligned}$$

**Remark 7.4.24.** Thanks to Remark 7.4.4 we get that the random walk diverges if and only if there exists  $\alpha$  in  $I(\mathbb{K}\mathbb{P}_n)$  such that  $|a_\alpha| = d_\alpha$  but  $a_\alpha \neq d_\alpha$ . In this case, the random walk can be cyclic or not.

**Example 7.4.25.** Let us look again at the state  $\phi_p$  defined in Example 7.4.2. By Theorem 7.4.3, the random walk diverges. Moreover, we have

$$\phi_p^{*k} = \sum_{l=0}^{q-1} \eta^{klp} \mathcal{F}(\rho_{lp}^+) ,$$

for  $q > 1$  such that  $pq = n$ . Thus the random walk is cyclic, with period  $q$ .

Let us note that  $\rho_0^+ - \rho_0^- = 2 \sum_{m=1}^n E_{m,m}$  clearly satisfies the conditions of [17, Lemma 6.4]. The associated random walk is also cyclic, with period 2, for all  $n \geq 2$  (even for odd  $n$ ). The state is  $h_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n} = 2 \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \mathcal{F}(e_{(i,j)})$  when  $k$  is even and  $2 \sum_{m=1}^n \mathcal{F}(E_{m,m})$  for  $k$  odd.

Thus, we can define the random walk

$$\psi_p = \mathcal{F} \left( (\rho_0^+ - \rho_0^-) \sum_{l=0}^{q-1} \eta^{lp} \rho_{lp}^+ \right) = \sum_{l=0}^{q-1} (\eta^{lp} \mathcal{F}(\rho_{lp}^+) - \eta^{lp} \mathcal{F}(\rho_{lp}^-))$$

which is also cyclic, with period  $\text{lcm}(2, q)$ . In particular, it has period  $2q$  when  $n$  is odd.

**Example 7.4.26.** Let us note that  $\rho_0^+ - \rho_0^- + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} (\rho_l^+ - \rho_l^-)$  defines a state. One can check that the associated random walk is not cyclic and admits no limit.

## 7.5 The dual family

We can define a dual quantum group for a finite quantum group  $\mathbb{G} = (\mathcal{A}, \Delta)$ . This dual, denoted  $\hat{\mathbb{G}} = (C(\hat{\mathbb{G}}), \hat{\Delta})$ , is again a finite quantum group. The algebra  $\mathcal{A}' = C(\hat{\mathbb{G}})$  is the set of all linear forms defined on  $\mathcal{A}$ . It is also isomorphic to the direct sum of the non-equivalent unitary irreducible corepresentations of  $\mathcal{A}$ , thanks to the Fourier transform. All the structures are defined by duality.

In particular, for the case of the Sekine family, let us denote by  $e^{(i,j)}$  and  $E^{i,j}$  the elements of the dual basis. Then, we have the coproduct on  $\mathcal{A}'_n$ , dual of the multiplication on  $\mathcal{A}_n$ , given by

$$\hat{\Delta}(e^{(i,j)}) = e^{(i,j)} \otimes e^{(i,j)} \quad \text{and} \quad \hat{\Delta}(E^{i,j}) = \sum_{k=1}^n E^{i,k} \otimes E^{k,j}$$

and the Haar state, dual of the counit on  $\mathcal{A}_n$ ,

$$\int_{\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}} \left( \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} x_{(i,j)} e^{(i,j)} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{i,j} E^{i,j} \right) = x_{(0,0)} .$$

Thus we can do the same study in these finite quantum groups. First let us determine their representation theory.

### 7.5.1 Representation theory

We clearly obtain that the unitary irreducible representations of  $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n$  are the  $n^2$   $e^{(i,j)}$ 's and the  $n$ -dimensional representation  $\hat{\mathfrak{X}}$ , given by its matrix-elements  $\hat{\mathfrak{X}}_{i,j} = E^{i,j}$ . Let us note that  $\hat{\mathfrak{X}}$  is a fundamental representation of  $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n$ . Moreover, these representations are non-equivalent, so there is no other non-equivalent unitary irreducible representation. We can also determine the fusion rules, using the multiplication in  $\mathcal{A}'_n$  (see Appendix B).

The characters,  $e^{(i,j)}$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}_n$ , and  $\chi(\hat{\mathfrak{X}}) = \sum_{i=1}^n E^{i,i}$ , generate a commutative algebra, for the product in  $C(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n)$ . This central algebra is the linear span of these characters and may not contain all the traces of powers of  $\hat{\mathfrak{X}}$ , given for all positive integer  $k$  by

$$\chi(\hat{\mathfrak{X}}^k) = \begin{cases} \sum_{\substack{s,t \in \mathbb{Z}_n \\ kt \equiv 0 \pmod n}} E^{s,s+t} & \text{if } k \text{ is odd} \\ \sum_{\substack{s,t \in \mathbb{Z}_n \\ kt \equiv 0 \pmod n}} \eta^{-st} e^{(s,t\frac{k}{2})} & \text{if } k \text{ is even} \end{cases} .$$

Note that  $\chi(\hat{\mathfrak{X}}^k)$  equals  $\chi(\hat{\mathfrak{X}})$  when  $k$  is odd and  $\gcd(k, n) = 1$ . If  $\gcd(k, n)$  is greater than 1 for some odd  $k$ , then  $\chi(\hat{\mathfrak{X}}^k)$  is not in the character space.

### 7.5.2 Traces of powers of the generating representation

We want to determine the  $*$ -distribution of the  $\chi(\hat{\mathfrak{X}}^k)$ 's. These traces are all self-adjoint, thus their  $*$ -distributions correspond to probability distributions of classical real random variables. Using the corepresentations basis, we can get that, for all positive integers  $k_1, k_2, \dots, k_r$

$$\int_{\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n} \chi(\hat{\mathfrak{X}}^{k_1}) \dots \chi(\hat{\mathfrak{X}}^{k_r}) = n^{r-2} \frac{1 + (-1)^{\sum_{i=1}^r k_i}}{2} \#\{t \in \mathbb{Z}_n, \forall 1 \leq i \leq r, n \mid k_i t\} .$$

In particular, by the moments method, the normalized character  $\frac{1}{n}\chi(\hat{\mathfrak{X}})$  admits the  $*$ -distribution  $\frac{1}{2n^2}(\delta_{-1} + \delta_1) + (1 - \frac{1}{n^2})\delta_0$ . Moreover, let us note that

$$\#\{t \in \mathbb{Z}_n, \forall 1 \leq i \leq r, n \mid k_i t\} = \gcd(n, k_1, \dots, k_r) .$$

Thus, for all positive integer  $k$ , the normalized trace  $\frac{1}{n}\chi(\hat{\mathfrak{X}}^k)$  admits the  $*$ -distribution  $\frac{\gcd(k,n)}{2n^2}(\delta_{-1} + \delta_1) + (1 - \frac{\gcd(k,n)}{n^2})\delta_0$  if  $k$  is odd, and  $\frac{\gcd(k,n)}{n^2}\delta_1 + (1 - \frac{\gcd(k,n)}{n^2})\delta_0$  if  $k$  is even.

### 7.5.3 Random walks

We are also able to define a Fourier transform, and to look at random walks.

The Fourier transform, also denoted  $\mathcal{F}$ , on  $C(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n)$  allows us to go back in the Sekine finite quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ , identifying  $\mathcal{F}(e^{(i,j)})$  with  $e_{(-i,-j)}$  and  $\mathcal{F}(E^{i,j})$  with  $\frac{1}{n}E_{ij}$ .

The Fourier transform of an element  $a$  of the form  $\sum_{\alpha \in I(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n)} a_\alpha \chi_\alpha$  defines a state on  $C(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n)$  if and only if  $a_\alpha$  is nonnegative for any  $\alpha \in I(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n)$  and  $a_{(0,0)} = a_{e(0,0)} = 1$ .

The same type of computation as the above gives us the following result:

CHAPTER 7. SEKINE FAMILY OF FINITE QUANTUM GROUPS

**Proposition 7.5.1.** *The random walk associated with such an element  $a$  of  $C(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}_n})$  converges to the Haar state  $\int_{\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}}$  if and only if*

$$\forall \alpha \in I(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}_n}) \setminus \{e^{(0,0)}\}, \quad a_\alpha < d_\alpha .$$

*If this condition is not satisfied, but  $a_\alpha \leq d_\alpha$  for any irreducible representation  $\alpha$ , then the random walk converges to some central idempotent state, i.e. an element of  $\mathcal{A}_n$  of the form  $\sum_{i,j \in \mathbb{Z}_n} \varepsilon_{(i,j)} e_{(i,j)} + \varepsilon_{\hat{x}} \sum_{i=1}^n E_{ii}$ , with  $\varepsilon_\alpha = 0$  or 1, for every  $\alpha$  in  $I(\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}_n})$ . Moreover, any idempotent element in the center of  $\mathcal{A}_n$  can be obtained this way.*

*Otherwise, there exists  $\alpha$  such that  $a_\alpha > d_\alpha$  and the random walk diverges.*

## Part III

### Study of dual groups





# Chapter 8

## Asymptotic aspects of the unitary dual group

In [7], Cébron and Ulrich study the Haar states according to the five notions of convolution (free, tensor, boolean, monotone and anti-monotone) of the unitary dual group  $U\langle n \rangle$ . They prove in particular that there is no Haar state for each of the five notions of convolution, and even no Haar trace for the boolean, monotone or anti-monotone convolution, for  $n \geq 2$ . They also define a faithful Haar trace on  $U\langle n \rangle$  for the free convolution, denoted  $h$ , which is in fact equal to the state given by McClanahan in [25].

We want to extend the study of Diaconis, Shahshahani and Evans to the framework of the unitary dual group and its free Haar trace. To do this, following the method of [3], let us first compute the mixed  $*$ -moments of these variables, and then determine their asymptotic  $*$ -distribution.

### 8.1 Mixed $*$ -moments

Let  $n \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r$  and  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_r) \in \{\emptyset, *\}^r$ . Let us define  $p = \sum_{i=1}^r p_i$  and  $\underline{e} = (e_1, e_1, \dots, e_1, e_2, \dots, e_2, \dots, e_r) \in \{\emptyset, *\}^p$  where each  $e_i$  is repeated  $p_i$  times. We want to compute the mixed  $*$ -moments of the  $\chi(u^p)$ 's with respect to  $h$ , i.e. the  $h(\chi(u^{p_1})^{e_1} \dots \chi(u^{p_r})^{e_r})$ 's.

Let us note that

$$\chi(u^p) = \sum_{i=1}^p (u^p)_{ii} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} u_{i_1 i_2} u_{i_2 i_3} \dots u_{i_p i_1}$$

and similarly  $\chi(u^p)^* = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} u_{i_1 i_p}^* u_{i_2 i_1}^* \dots u_{i_p i_{p-1}}^*$ . This leads to the following definition:

**Definition 8.1.1** ([3]). The trace permutation associated to  $\underline{p}$  and  $\underline{e}$  is the permutation, denoted  $\gamma_{\underline{p}, \underline{e}} \in \mathfrak{S}_p$ , having as cycles

$$(1, 2, \dots, p_1)^{e_1}, (p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2)^{e_2}, \dots, \text{ and } (p - p_r + 1, \dots, p)^{e_r}$$

where we use the notation  $(a_1, a_2, \dots, a_s)^* = (a_s, a_{s-1}, \dots, a_1)$ .

Thus, we obtain

$$\chi(u^{p_1})^{e_1} \dots \chi(u^{p_r})^{e_r} = \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_p \leq n} u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1} \dots u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p}.$$

**Lemma 8.1.2.** *For every  $n \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r$ ,  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_r) \in \{\emptyset, *\}^r$ ,  $p = \sum_{i=1}^r p_i$  and  $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r) \in \{\emptyset, *\}^p$  as above,*

$$h(\chi(u^{p_1})^{e_1} \dots \chi(u^{p_r})^{e_r}) = \#\{\pi \in \text{NC}_2(p), \underline{\epsilon}\text{-adapted}, \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi\} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

*Proof.*

**Step 1:** Moment-cumulant formula Since  $h$  is a state, it is linear, hence

$$h(\chi(u^{p_1})^{e_1} \dots \chi(u^{p_r})^{e_r}) = \sum_{\underline{k} \in [n]^p} h\left(u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1} \dots u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p}\right).$$

By the moment-cumulant formula (5.1), we can write

$$h(\chi(u^{p_1})^{e_1} \dots \chi(u^{p_r})^{e_r}) = \sum_{\underline{k} \in [n]^p} \sum_{\pi \in \text{NC}(p)} \prod_{V \in \pi} \kappa_V \left[ u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1}, \dots, u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p} \right].$$

**Step 2:**  $\underline{\epsilon}$ -adaptation of  $\pi$

By Proposition 4.2.1,  $\kappa_V \left[ u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1}, \dots, u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p} \right]$  is zero when the cardinal of  $V$ , denoted  $\#V$ , is odd or when  $\underline{\epsilon}|_V = (\epsilon_{v_1}, \dots, \epsilon_{v_{\#V}})$  is not alternating.

We will say that  $\pi \in \text{NC}(p)$  is  $\underline{\epsilon}$ -adapted when the following conditions are true for each block  $V = \{v_1 < \dots < v_l\}$  of the noncrossing partition  $\pi$ :

- $\#V := l \in 2\mathbb{N}$ ,
- $\forall 1 \leq i \leq l-1, \epsilon_{v_i} \neq \epsilon_{v_{i+1}}$ .

Hence, we get

$$h(\chi(u^{p_1})^{e_1} \dots \chi(u^{p_r})^{e_r}) = \sum_{\substack{\pi \in \text{NC}(p) \\ \underline{\epsilon}\text{-adapted}}} \sum_{\underline{k} \in [n]^p} \prod_{V \in \pi} \kappa_V \left[ u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1}, \dots, u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p} \right].$$

**Step 3:**  $(\underline{p}, \underline{e}, \pi)$ -cyclicity of  $\underline{k}$

Let us fix an  $\underline{\epsilon}$ -adapted noncrossing partition  $\pi$ . Let  $V = \{v_1 < \dots < v_l\}$  be one of its blocks. Note that, if  $\epsilon_{v_1} = \emptyset$ , then  $\epsilon_{v_l} = *$  and

$$\kappa_V \left[ u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1}, \dots, u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p} \right] = \kappa_l \left( (u)_{k_{v_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_1)}}}, \dots, (u^*)_{k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_l)} k_{v_l}} \right)$$

and similarly, if  $\epsilon_{v_l} = *$ ,

$$\kappa_V \left[ u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1}, \dots, u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p} \right] = \kappa_l \left( (u^*)_{k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_1)} k_{v_1}}, \dots, (u)_{k_{v_l k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_l)}}} \right).$$

By Proposition 4.2.1, for each  $\underline{k} \in [n]^p$ ,  $\kappa_V \left[ u_{k_1 k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(1)}}^{\epsilon_1}, \dots, u_{k_p k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(p)}}^{\epsilon_p} \right]$  is not zero if the indices, in the corresponding right-hand side term above, are cyclic.

We will say that  $\underline{k} \in [n]^p$  is  $(\underline{p}, \underline{e}, \pi)$ -cyclic when the following condition:

$$\forall 1 \leq i \leq \frac{l}{2}, \begin{cases} k_{v_{2i}} = k_{v_{2i+1}}, k_{v_l} = k_{v_1}, k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{2i})} = k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{2i-1})} & \text{if } \epsilon_{v_1} = \emptyset \\ k_{v_{2i}} = k_{v_{2i-1}}, k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_l)} = k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_1)}, k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{2i})} = k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{2i+1})} & \text{if } \epsilon_{v_1} = * \end{cases}$$

is true for each block  $V = \{v_1 < \dots < v_l\}$  of the noncrossing partition  $\pi$ .

By replacing the value of the cumulant given in Proposition 4.2.1 in this case, we obtain, with  $|\pi|$  the number of blocks in  $\pi$ ,

$$h(\chi(u^{p_1})^{\epsilon_1} \dots \chi(u^{p_r})^{\epsilon_r}) = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{n^p} \sum_{\substack{\pi \in \text{NC}(p) \\ \underline{e}\text{-adapted}}} (-n)^{|\pi|} \#\{\underline{k} \in [n]^p, (\underline{p}, \underline{e}, \pi)\text{-cyclic}\} \prod_{V \in \pi} C_{\frac{\#V}{2}-1}.$$

**Step 4:** Leading terms with respect to  $n$

Since we are interested in the asymptotic properties of the mixed moments, when  $n$  goes to infinity, we only need to take care of the leading terms with respect to  $n$  in the sum. The order, with respect to  $n$ , of each summand depends on the number of blocks in  $\pi$  and the power of  $n$  in  $\#\{\underline{k} \in [n]^p, (\underline{p}, \underline{e}, \pi)\text{-cyclic}\}$ .

For each triple  $(\underline{p}, \underline{e}, \pi)$ , where  $\pi \in \text{NC}(p)$  is  $\underline{e}$ -adapted, let us define the associated partition  $\tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}$  of  $\{1, 2, \dots, p\}$ , given by:

$$\forall i, j \in [p], \exists V \in \tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}, \{i, j\} \subset V \iff \forall \underline{k} \in \mathbb{N}^p (\underline{p}, \underline{e}, \pi)\text{-cyclic}, k_i = k_j.$$

Thus  $\#\{\underline{k} \in [n]^p, (\underline{p}, \underline{e}, \pi)\text{-cyclic}\} = n^{|\tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}|}$ .

By  $\underline{e}$ -adaptation and  $(\underline{p}, \underline{e}, \pi)$ -cyclicity, we have  $1 \leq |\pi| \leq \frac{p}{2}$  and  $1 \leq |\tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}| \leq \frac{p}{2}$ . Hence, the mixed \*-moments are of the form  $c + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Note that  $|\pi| + |\tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}| = p$  is equivalent to  $|\pi| = |\tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}| = \frac{p}{2}$ . Moreover,  $\pi \in \text{NC}(p)$  is  $\underline{e}$ -adapted and has  $\frac{p}{2}$  blocks if and only if  $\pi$  is an  $\underline{e}$ -adapted noncrossing pairing.

For such a  $\pi$ , note that  $\prod_{V \in \pi} C_{\frac{\#V}{2}-1} = 1$ . Let us put  $\pi = \{V_1, \dots, V_{\frac{p}{2}}\}$  with, for each  $1 \leq i \leq \frac{p}{2}$ ,  $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}\}$ . Then the definition of  $(\underline{p}, \underline{e}, \pi)$ -cyclicity is written as follows:

$$\forall 1 \leq i \leq \frac{p}{2}, k_{v_{i,1}} = k_{v_{i,2}} \text{ and } k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{i,1})} = k_{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{i,2})}.$$

Considering only the first equality, we already obtain  $\frac{p}{2}$  disjoint blocks in  $\tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}$ . Therefore,  $|\tau_{(\underline{p}, \underline{e}, \pi)}| = \frac{p}{2}$  is equivalent to

$$\forall 1 \leq i \leq \frac{p}{2}, \exists 1 \leq j \leq \frac{p}{2}, \{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{i,1}), \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(v_{i,2})\} = \{v_{j,1}, v_{j,2}\}$$

which means that  $\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi$ .

Thus,  $c = \#\{\pi \in \text{NC}_2(p), \underline{e}\text{-adapted}, \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi\}$ . □

## 8.2 Asymptotic distributions

**Theorem 8.2.1.** *The family of variables  $(\chi(u^p))_{p \geq 1}$  is asymptotically, when the size of  $u$  goes to infinity, a family of  $*$ -free circular variables of mean 0 and covariance 1.*

*Proof.* For all  $n \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r$ ,  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_r) \in \{\emptyset, *\}^r$ ,  $p = \sum_{i=1}^r p_i$ , and  $\underline{e} = (e_1, e_1, \dots, e_1, e_2, \dots, e_r) \in \{\emptyset, *\}^p$  as above, let us compute the joint cumulants, by the moment-cumulant formula (5.2):

$$\begin{aligned} \kappa_r(\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_r})^{e_r}) &= \sum_{\sigma \in \text{NC}(r)} \mu_{nc}(\sigma, 1_r) h_\sigma[\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_r})^{e_r}] \\ &= \sum_{\sigma \in \text{NC}(r)} \mu_{nc}(\sigma, 1_r) \prod_{V \in \sigma} h_V[\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_r})^{e_r}] \\ &= \sum_{\sigma \in \text{NC}(r)} \mu_{nc}(\sigma, 1_r) \prod_{V \in \sigma} \#\{\pi \in \text{NC}_2(V^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}), \underline{e}|_V\text{-adapted}, \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}|_V(\pi) = \pi\} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

by Lemma 8.1.2.

Let us denote by  $\sigma^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}$  the partition in  $\text{NC}(p)$  obtained by replacing  $j \in [r]$  by the  $j$ th cycle of  $\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}$ ,  $\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_i + 1, \dots, \sum_{i=1}^j p_i\right)$ . Note that,  $\pi$  is a noncrossing pairing of  $\{1, \dots, p\}$  such that  $\pi|_{V^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}}$  is  $\underline{e}|_V$ -adapted and  $\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}|_V(\pi|_{V^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}}) = \pi|_{V^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}}$ , for each block  $V$  of  $\sigma \in \text{NC}(r)$ , if and only if  $\pi$  is an  $\underline{e}$ -adapted noncrossing pairing such that  $\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi$  and  $\pi \leq \sigma^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}$ . Then

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa_r(\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_r})^{e_r}) &= \sum_{\sigma \in \text{NC}(r)} \mu_{nc}(\sigma, 1_r) \#\{\pi \in \text{NC}_2(p), \underline{e}\text{-adapted}, \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi, \pi \leq \sigma^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}\} \\ &= \sum_{\sigma \in \text{NC}(r)} \mu_{nc}(\sigma, 1_r) \sum_{\substack{\pi \in \text{NC}_2(p) \text{ } \underline{e}\text{-adapted}, \\ \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi, \pi \leq \sigma^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{\rho \in \text{NC}(p) \\ \rho \geq \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}} \mu_{nc}(\rho, 1_p) \sum_{\substack{\pi \in \text{NC}_2(p) \text{ } \underline{e}\text{-adapted}, \\ \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi, \pi \leq \rho}} 1 \end{aligned}$$

since we have  $\{\sigma^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}, \sigma \in \text{NC}(r)\} = \{\rho \in \text{NC}(p), \rho \geq \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}\}$ , where  $\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}$  is seen as the partition obtained from its cycles, and  $\mu_{nc}(\sigma, 1_r) = \mu_{nc}(\sigma^{\gamma_{\underline{p}, \underline{e}}}, 1_p)$ . Thus

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa_r(\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_r})^{e_r}) &= \sum_{\substack{\pi \in \text{NC}_2(p) \\ \underline{e}\text{-adapted}, \\ \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi}} \sum_{\substack{\rho \in \text{NC}(p) \\ \rho \geq \gamma_{\underline{p}, \underline{e}} \vee \pi}} \mu_{nc}(\rho, 1_p) \\ &= \#\left\{\pi \in \text{NC}_2(p) \text{ } \underline{e}\text{-adapted}, \gamma_{\underline{p}, \underline{e}}(\pi) = \pi, \gamma_{\underline{p}, \underline{e}} \vee \pi = 1_p\right\} \end{aligned}$$

by Proposition 5.3.2.

Let  $\pi \in \text{NC}_2(p)$  be  $\underline{\varepsilon}$ -adapted such that  $\gamma_{p,\underline{\varepsilon}}(\pi) = \pi$  and  $\gamma_{p,\underline{\varepsilon}} \vee \pi = 1_p$ . Let  $C$  and  $C'$  be two cycles of  $\gamma_{p,\underline{\varepsilon}}$ . Since  $\gamma_{p,\underline{\varepsilon}} \vee \pi = 1_p$ , we can find  $\alpha$  in  $C$  and  $\beta$  in  $C'$  such that  $\{\alpha, \beta\}$  is a block of  $\pi$ . Then  $\gamma_{p,\underline{\varepsilon}}(\pi) = \pi$  implies that  $\#C = \#C'$  and these cycles cannot be connected to another cycle of  $\gamma_{p,\underline{\varepsilon}}$ . By  $\underline{\varepsilon}$ -adaptation, we get that the only suitable  $\pi$  is  $\left\{ \{1, p\}, \{2, p-1\}, \dots, \left\{ \frac{p}{2}, \frac{p}{2} + 1 \right\} \right\}$  and

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa_r(\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_r})^{e_r}) = \begin{cases} 1 & \text{if } r = 2, p_1 = p_2, e_1 \neq e_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

which are the cumulants of  $*$ -free circular variables. □

**Remark 8.2.2.** Note that it is possible to have an exact formula for the cumulants above (see Appendix C).



# Chapter 9

## The orthogonal dual group

In [39], Voiculescu also defines a generalization of the orthogonal group, called the orthogonal dual group. To present it, we need real  $*$ -algebras, and real free products of these algebras. Let us first introduce some basic facts about real  $C^*$ -algebra.

### 9.1 Real $C^*$ -algebra

The following properties are equivalent [32]:

- i)  $\mathcal{A}$  is a real  $C^*$ -algebra,
- ii)  $\mathcal{A}$  is a Banach  $*$ -algebra over  $\mathbb{R}$  isometrically  $*$ -isomorphic to a norm-closed  $*$ -algebra of bounded operator on a real Hilbert space,
- iii)  $\mathcal{A}$  is a real Banach  $*$ -algebra satisfying the  $C^*$ -identity  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  for every  $a \in \mathcal{A}$  and also having the property that for each  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a^*a$  has spectrum contained in  $[0, \infty)$ ,
- iv)  $\mathcal{A}$  is a real Banach  $*$ -algebra satisfying the  $C^*$ -identity  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  for every  $a \in \mathcal{A}$  and also having the property that for each  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $\|a^*a\| \leq \|a^*a + b^*b\|$ .

**Remark 9.1.1.** In particular, any  $C^*$ -algebra is a real  $C^*$ -algebra, since every complex algebra is also a real algebra.

Let  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_2$  be real unital  $*$ -algebras. We will say that  $f: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  is a real  $*$ -homomorphism, if for any  $a, b \in \mathcal{A}_1$  and any  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f(a + \lambda b) = f(a) + \lambda f(b) , f(ab) = f(a)f(b) \text{ and } f(a^*) = f(a)^* .$$

Voiculescu [39] defines a state on  $\mathcal{A}$  as a state on its complexification  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \mathcal{A} + i\mathcal{A}$  which is real, i.e. a stat on  $\mathcal{A}$  is a positive linear functional  $\varphi$  on  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  such that  $\varphi(1_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}) = 1$  and  $\varphi|_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$ . In particular,  $\varphi(a^*) = \varphi(a)$  for every  $a \in \mathcal{A}$ . Note that the involution of  $\mathcal{A}$  is extended to  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  with, for all  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $(a + ib)^* = a^* - ib^*$ .

**Example 9.1.2.** Consider the real noncommutative  $C^*$ -algebra  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , where the involution is the transposition of the matrices. Then its complexification is  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , and the involution becomes the conjugate transposition. The normalized trace  $\text{tr}_n$  is a state on this



complex algebra, which is real on  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Thus  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}_n)$  is a real noncommutative probability space.

Note that the unitary elements in the  $*$ -algebra  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}_n)$  are the real orthogonal matrices.

## 9.2 Free products of real unital $*$ -algebras

Let  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_2$  be real unital  $*$ -algebras. The free product of  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_2$  is defined by a universal property: it is the unique real unital  $*$ -algebra  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  with real  $*$ -homomorphisms  $i_k: \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ ,  $k = 1, 2$ , such that, for all real  $*$ -homomorphisms  $f_k: \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_3$ , there exists a unique real  $*$ -homomorphism  $f_1 \sqcup f_2: \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_3$  satisfying  $f_k = (f_1 \sqcup f_2) \circ i_k$ ,  $k = 1, 2$ .

**Theorem 9.2.1.** *Let  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_2$  be real unital  $*$ -algebras. Then*

$$(\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}} \simeq (\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$$

where  $\sqcup_{\mathbb{C}}$  denotes the free product of (complex) unital  $*$ -algebras.

*Proof.* Note that  $(\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$  and  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  are characterized by a universal property: for any real (respectively complex)  $*$ -algebra  $\mathcal{C}$ , and for all real (resp. complex)  $*$ -homomorphisms  $f_i: \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{C}$  (resp.  $f_i: (\mathcal{A}_i)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ ), there exists a unique real (resp. complex)  $*$ -homomorphism  $f_1 \sqcup f_2: \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{C}$  (resp.  $f_1 \sqcup_{\mathbb{C}} f_2: (\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ ) such that the following diagrams commute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 & \longleftarrow & \mathcal{A}_2 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{C} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & (\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}} & \longleftarrow & (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{C} & & \end{array}$$

On the one hand, we have,  $\mathcal{A}_j \subset (\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$  for  $j = 1$  and  $2$ , where  $(\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$  is seen as a real  $*$ -algebra. Then, by the universal property above, there exists a unique real  $*$ -homomorphism  $T: \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \rightarrow (\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$ , such that  $T(a^{(j)}) = (a + i0_{\mathcal{A}_j})^{(j)\mathbb{C}}$  for all  $a \in \mathcal{A}_j$ . We can extend  $T$  to a complex  $*$ -homomorphism from  $(\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$  to  $(\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$  by putting  $T(ix) = iT(x)$  for all  $x \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ . In particular, note that  $T(a^{(j)} + ib^{(j)}) = (a + ib)^{(j)\mathbb{C}}$  for every  $a, b \in \mathcal{A}_j$ .

On the second hand, we can easily embed  $(\mathcal{A}_j)_{\mathbb{C}}$  into  $(\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$ , by sending  $a + ib$  to  $a^{(j)} + ib^{(j)}$ . By the universal property, there exists a unique complex  $*$ -homomorphism  $S: (\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}$ , satisfying  $S((a + ib)^{(j)\mathbb{C}}) = a^{(j)} + ib^{(j)}$ .

Hence, we obtain  $TS = \text{id}_{(\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}} \sqcup_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}}$  and  $ST = \text{id}_{(\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)_{\mathbb{C}}}$ .  $\square$

**Lemma 9.2.2.** *Let  $(\mathcal{A}_1, \phi_1)$  and  $(\mathcal{A}_2, \phi_2)$  be two real noncommutative probability spaces, with  $\mathcal{A}_i = \mathbb{R}1_{\mathcal{A}_i} \oplus \mathcal{B}_i$ . Then  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  can be equipped with five different product states, called respectively free, tensor, boolean, monotone and anti-monotone products of states.*

*Proof.* The decompositions  $\mathcal{A}_i = \mathbb{R}1_{\mathcal{A}_i} \oplus \mathcal{B}_i$  lead to the corresponding decomposition of the complexifications:  $(\mathcal{A}_i)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}_i} \oplus (\mathcal{B}_i)_{\mathbb{C}}$ .

Let  $\bullet$  be one of the five products, i.e.  $\bullet \in \{*, \otimes, \diamond, \triangleright, \triangleleft\}$ . The products are states on the complexification. Let us prove that, for all  $a_1, \dots, a_n$  in  $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$  such that  $a_i \in \mathcal{A}_{\epsilon_i}$  and  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \dots \neq \epsilon_n$ ,  $\phi_1 \bullet \phi_2(a_1 \dots a_n)$  is real.

First of all, note that the decomposition of  $a_i$  in  $(\mathcal{A}_{\epsilon_i})_{\mathbb{C}}$  is its decomposition in  $\mathcal{A}$ , denoted by  $\mu_i 1_{\mathcal{A}_{\epsilon_i}} + b_i$ .

By definition,  $\phi_1 \bullet \phi_2(a_i) = \phi_{\epsilon_i}(a_i)$ , thus it is real if  $n = 1$ .

Moreover, since  $b_i$  is in  $\mathcal{A}_{\epsilon_i}$ , we can deduce from the definition of the five products that  $\phi_1 \bullet \phi_2(b_1 \dots b_n)$  is a real number. But, we also have

$$\phi_1 \bullet \phi_2 \left( (a_1 - \mu_i 1_{\mathcal{A}_{\epsilon_i}}) \dots (a_n - \mu_i 1_{\mathcal{A}_{\epsilon_i}}) \right) = \sum_{\substack{U, V \in \{1, \dots, n\} \\ U \cup V = \{1, \dots, n\} \\ V = \{v_1 < \dots < v_s\}}} (-1)^{\#U} \prod_{i \in U} \mu_i \phi_1 \bullet \phi_2(a_{v_1} \dots a_{v_s}) .$$

and the result follows by induction on  $n$ . □

### 9.3 Orthogonal dual group

We are now ready to define the orthogonal dual group, introduced by Voiculescu [39]. Let  $n \geq 1$  and  $O_n^{\text{nc}}$  be the universal (noncommutative) real unital  $*$ -algebra generated by  $n^2$  elements  $(u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  satisfying  $u^*u = I_k = uu^*$ , i.e.

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \sum_{k=1}^n u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij} 1_{O_n^{\text{nc}}} \text{ and } \sum_{k=1}^n u_{ik} u_{jk}^* = \delta_{ij} 1_{O_n^{\text{nc}}} .$$

Let us define the real  $*$ -homomorphisms

- $\Delta: O_n^{\text{nc}} \rightarrow O_n^{\text{nc}} \sqcup O_n^{\text{nc}}$  given on the generators by  $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik}^{(1)} u_{kj}^{(2)}$ ,
- $\Sigma: O_n^{\text{nc}} \rightarrow O_n^{\text{nc}}$  satisfying  $\Sigma(u_{ij}) = u_{ji}^*$ ,
- $\delta: O_n^{\text{nc}} \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\delta(u_{ij}) = \delta_{ij}$ .

**Theorem 9.3.1.**  $O\langle n \rangle = (O_n^{\text{nc}}, \Delta, \Sigma, \delta)$  is a dual group in the sense of Voiculescu. We will call it the orthogonal dual group.

*Proof.* Note that we only need to check the relations on the generators: it clearly extends to  $O_n^{\text{nc}}$  because these maps are  $*$ -homomorphisms. Direct calculations show that, for all  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$(\text{id} \sqcup \Delta)\Delta(u_{ij}) = (\Delta \sqcup \text{id})\Delta(u_{ij}) , (\text{id} \sqcup \delta)\Delta(u_{ij}) = u_{ij} = (\delta \sqcup \text{id})\Delta(u_{ij})$$

$$\text{and } (\text{id} \sqcup \Sigma)\Delta(u_{ij}) = \delta(u_{ij}) 1_{O_n^{\text{nc}}} = (\Sigma \sqcup \text{id})\Delta(u_{ij}) .$$

□

**Remark 9.3.2.** The definitions of unitary and orthogonal dual groups are very similar. We will follow the reasoning of [7] to study Haar states on  $O\langle n \rangle$ .

A quantum variable on  $O\langle n \rangle$  over the real noncommutative probability space  $(\mathcal{A}, \phi)$  is a real  $*$ -homomorphism  $j$  from  $O_n^{\text{nc}}$  to  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 9.3.3.** *Let  $j: O_n^{\text{nc}} \rightarrow \mathcal{A}$  be a quantum random variable, over a real non-commutative probability space. Then, the matrix  $(j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$  is unitary in  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ . Conversely, for any unitary matrix  $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  in  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ , there exists a unique real  $*$ -homomorphism  $j: O_n^{\text{nc}} \rightarrow \mathcal{A}$  such that  $j(u_{ij}) = A_{ij}$ .*

*Proof.* By the properties of the generators  $u_{ij}$ , we have

$$\begin{aligned} [(j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}^* (j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [(j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}^*]_{ik} [(j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n j(u_{ki})^* j(u_{kj}) \\ &= j\left(\sum_{k=1}^n u_{ki}^* u_{kj}\right) \\ &= j(\delta_{ij} 1_{O_n^{\text{nc}}}) = \delta_{ij} 1_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

therefore  $(j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}^* (j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} = 1_{\mathcal{M}_n(\mathcal{A})}$ . By similar computations we obtain also  $(j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} (j(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}^* = 1_{\mathcal{M}_n(\mathcal{A})}$ , and the converse statement is clear.  $\square$

**Lemma 9.3.4.** *Let us consider  $\phi$  and  $\psi$  two states on  $O_n^{\text{nc}}$ . We can define five different states on  $O_n^{\text{nc}}$ , called respectively free, tensor, boolean, monotone and anti-monotone convolution, given respectively by*

$$\begin{aligned} \phi \star_F \psi &= (\phi * \psi) \circ \Delta, \phi \star_T \psi = (\phi \otimes \psi) \circ \Delta, \phi \star_B \psi = (\phi \diamond \psi) \circ \Delta, \\ \phi \star_M \psi &= (\phi \triangleright \psi) \circ \Delta, \phi \star_{AM} \psi = (\phi \triangleleft \psi) \circ \Delta. \end{aligned}$$

*Proof.* The decomposition  $O_n^{\text{nc}} = \mathbb{R} \oplus \ker \delta$  leads to  $(O_n^{\text{nc}})_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \oplus \ker \delta$ , where  $\delta$  is extended to  $(O_n^{\text{nc}})_{\mathbb{C}}$  by  $\delta(a + ib) = \delta(a) + i\delta(b)$ . Thus, we only need to check that  $\phi \star \psi(u_{ij})$  is real, for any  $i, j$  and any convolution  $\star$ . But, if  $\bullet$  denotes the corresponding product of states,

$$\phi \star \psi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n \phi \bullet \psi(u_{ik}^{(1)} u_{kj}^{(2)})$$

and each term in the sum is real by Lemma 9.2.2.  $\square$

Let us denote by  $E_{ij}$  the usual matrix units in  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , and by  $E_{11}(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))E_{11}$  the  $*$ -subalgebra  $\{E_{11}X E_{11}, X \in \mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$  of  $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Note that we have the real  $*$ -isomorphism

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\simeq (E_{11}(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))E_{11}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} E_{1i} X E_{j1} \otimes E_{ij} \\ \sum_{1 \leq i, j \leq n} E_{i1} A_{ij} E_{1j} &\leftarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} \otimes E_{ij}. \end{aligned}$$

**Theorem 9.3.5.** *The real  $*$ -algebra  $E_{11}(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))E_{11}$  can be endowed with the state  $n(\phi * \text{tr}_n)$ .*

## 9.4. THE HAAR STATE IN THE ONE-DIMENSIONAL CASE

*Proof.* By definition,  $n(\phi * \text{tr}_n)$  is a state on  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Thanks to Theorem 9.2.1, it means that it is a state on the complexification of  $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , and by Lemma 9.2.2 it is real.  $\square$

**Proposition 9.3.6.** *For any unitary  $U$  in the real noncommutative probability space  $(\mathcal{A}, \phi)$ , there exists a unique quantum random variable  $j_U: O_n^{\text{nc}} \rightarrow E_{11}(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))E_{11}$ , determined by  $j_U(u_{ij}) = E_{1i}UE_{j1}$ , which induces a state  $n(\phi * \text{tr}_n) \circ j_U$  on  $O\langle n \rangle$ .*

*Proof.* Note that

$$\sum_{k=1}^n (E_{1k}UE_{i1})^*(E_{1k}UE_{j1}) = \sum_{k=1}^n E_{1i}U^*E_{k1}E_{1k}UE_{j1} = \delta_{ij}E_{11}$$

and  $\sum_{k=1}^n (E_{1i}UE_{k1})(E_{1j}UE_{k1})^* = \delta_{ij}E_{11}$ , which means that the matrix  $(E_{1i}UE_{j1})_{1 \leq i, j \leq n}$  is unitary in  $\mathcal{M}_n(E_{11}(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))E_{11})$ . The result follows from this property.  $\square$

As in the case of  $U_n^{\text{nc}}$ , if  $U, V \in \mathcal{A}$  are two unitary variables of the real noncommutative probability space  $(\mathcal{A}, \phi)$ , we can prove that if  $U$  and  $V$  are  $*$ -free in  $(\mathcal{A}, \phi)$ , then the image  $*$ -algebras of  $j_U$  and  $j_V$  are  $*$ -free in the real noncommutative probability space  $(E_{11}(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))E_{11}, n(\phi * \text{tr}_n))$ .

## 9.4 The Haar state in the one-dimensional case

**Proposition 9.4.1.** *The Haar measure on the unit circle defines a Haar state on  $O_1^{\text{nc}}$ , for the five notions of convolution. Moreover, it is also a Haar trace.*

*Proof.* Let us recall that the algebra  $O_1^{\text{nc}}$  is the universal real  $C^*$ -algebra generated by an element  $u$  satisfying  $uu^* = u^*u = 1$ . Similarly,  $U_1^{\text{nc}}$  is the universal (complex)  $C^*$ -algebra generated by an element  $v$  satisfying the same property. Hence, the complexification of  $O\langle 1 \rangle$  is  $U\langle 1 \rangle$ .

Therefore states on  $O\langle 1 \rangle$  are states on  $U\langle 1 \rangle$  which are real, i.e. such that  $\mu(x) = \mu(x^*)$  for all  $x \in O_1^{\text{nc}}$ . Since we identify states on  $U\langle 1 \rangle$  with probability measures on the complex unit circle  $\mathbb{T}$ , each state on  $O\langle 1 \rangle$  is considered as a probability measure  $\mu$  on the unit circle  $\mathbb{T}$  satisfying  $\int_{\mathbb{T}} z^k d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \bar{z}^k d\mu(z)$ , i.e. is a symmetric probability measure on  $\mathbb{T}$ .

Thus, it is clear that the state associated to the uniform measure on  $\mathbb{T}$ , given by  $\int_{\mathbb{T}} z^k d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \bar{z}^k d\mu(z) = \delta_{k0}$ , is the Haar state on  $O\langle 1 \rangle$ . It is indeed absorbing, for the five convolutions with all states on  $U\langle 1 \rangle$  [7].

Moreover, note that every state is a trace since  $O_1^{\text{nc}}$  is a commutative algebra.  $\square$

## 9.5 The non-existence of the Haar state in the free and tensor cases, $n \geq 2$

**Proposition 9.5.1.** *There is no free or tensor Haar state on  $O_n^{\text{nc}}$  for  $n \geq 2$ .*

*Proof.* Let us fix  $n \geq 2$  and assume that  $h$  is a free Haar state.

CHAPTER 9. THE ORTHOGONAL DUAL GROUP

For each  $1 \leq k \leq n - 1$ , let us define

$$M_k = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|c} I_{2k-2} & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \hline & & 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & & 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ \hline & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & I_{2(n-k-1)} \end{array} \right)$$

and  $j_k: O_n^{\text{nc}} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  the quantum random variable such that  $j_k(u_{ij})$  is the  $(i, j)$ -th block of size  $2 \times 2$  of  $M_k$ . Note that  $j_k$  is well defined since  $M_k$  is an orthogonal matrix, i.e. a unitary element of  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  with respect to the transposition. In particular,

$$j_k(u_{ik}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } i = k \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } i = k + 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{cases}$$

The functionals  $\phi_k = \langle e_2, j_k(\cdot)e_2 \rangle$  are states on  $O_n^{\text{nc}}$ , since they are clearly states on the complexification  $(O_n^{\text{nc}})_{\mathbb{C}}$  which are real-valued on  $O_n^{\text{nc}}$ . Moreover they satisfy, for every  $1 \leq i, j \leq n$ :

$$\phi_k(u_{ik}u_{jk}^*) = \langle e_2, j_k(u_{ik})j_k(u_{kj})^t e_2 \rangle = \langle e_2, \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_2 \rangle = 0 .$$

If  $h$  is the free Haar state, for each  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} h(u_{ik}u_{ik}^*) &= (h \star_F \phi_k)(u_{ik}u_{ik}^*) = \sum_{1 \leq p, q \leq n} (h \star \phi_k)(u_{ip}^{(1)}u_{pk}^{(2)}u_{qk}^{(2)*}u_{iq}^{(1)*}) \\ &= \sum_{1 \leq p, q \leq n} h(u_{ip}u_{iq}^*)\phi_k(u_{pk}u_{qk}^*) = 0 . \end{aligned}$$

We can do the same reasoning for  $k = n$  by considering the matrix in which the last to columns of blocks of  $M_n$  are exchanged. Thus we obtain a state  $\phi_n$  on  $O_n^{\text{nc}}$  satisfying  $\phi_n(u_{in}u_{jn}^*) = 0$  for every  $1 \leq i, j \leq n$ . This leads to  $h(u_{in}u_{in}^*) = 0$  for each  $1 \leq i \leq n$ .

Therefore, if  $h$  is the free Haar state, for all  $1 \leq i \leq n$ , we should have

$$1 = h(1_{O_n^{\text{nc}}}) = h\left(\sum_{k=1}^n u_{ik}u_{ik}^*\right) = \sum_{k=1}^n h(u_{ik}u_{ik}^*) = 0$$

which is impossible.

The same computations give the result for the tensor case since, by definition

$$(h \otimes \phi_k)(u_{ip}^{(1)}u_{pk}^{(2)}u_{qk}^{(2)*}u_{iq}^{(1)*}) = h(u_{ip}u_{iq}^*)\phi_k(u_{pk}u_{qk}^*) .$$

□

## 9.6 The non-existence of the Haar state and the Haar trace in the boolean case, $n \geq 2$

**Proposition 9.6.1.** *There is no boolean Haar state and no boolean Haar trace on  $O_n^{\text{nc}}$  for  $n \geq 2$ .*

*Proof.* First, let us note that

$$(\phi \diamond \psi)(a^{(2)}b^{(1)}c^{(2)}) = \psi(a) (\phi(b) - \delta(b)) \psi(c) + \delta(b)\psi(ac) .$$

Assume that  $h$  is the boolean Haar state on  $O_n^{\text{nc}}$ . Then, for every state  $\psi$  on  $O_n^{\text{nc}}$  and all  $1 \leq i, j, k, l \leq n$

$$\begin{aligned} h(u_{ij}^* u_{kl}) &= (h \star_B \psi)(u_{ij}^* u_{kl}) = \sum_{1 \leq p, q \leq n} (h \diamond \psi)(u_{pj}^{(2)*} u_{ip}^{(1)*} u_{kq}^{(1)} u_{ql}^{(2)}) \\ &= \sum_{1 \leq p, q \leq n} \psi(u_{pj}^*) \left( h(u_{ip}^* u_{kq}) - \delta(u_{ip}^* u_{kq}) \right) \psi(u_{ql}) + \delta(u_{ip}^* u_{kq}) \psi(u_{pj}^* u_{ql}) \\ &= \sum_{1 \leq p, q \leq n} \psi(u_{pj}) h(u_{ip}^* u_{kq}) \psi(u_{ql}) - \psi(u_{ij}) \psi(u_{kl}) + \psi(u_{ij}^* u_{kl}) \end{aligned}$$

which can be written  $M_h = (M_h - I_{n^2})(N_\psi \otimes N_\psi) + M_\psi$ , where

$$N_\psi = (\psi(u_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} , \text{ and } M_\psi = \left( \psi(u_{ij}^* u_{kl}) \right)_{(i,k), (j,l)} .$$

Note that we can see every probability measure  $\mu$  on the classical orthogonal group  $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), U^*U = I_n = UU^*\}$  as a state on  $O_n^{\text{nc}}$  via the integration map:

$$\mu(u_{i_1 j_1}^{\epsilon_1} \dots u_{i_r j_r}^{\epsilon_r}) = \int_{O(n)} M_{i_1 j_1} \dots M_{i_r j_r} d\mu(M) .$$

Let us set  $\psi_1 = \frac{1}{2}(\delta_{I_n} + \delta_{-I_n})$  and  $\psi_2 = \delta_A$  where  $A$  is the diagonal matrix such that  $A_{11} = -1$  and  $A_{ii} = 1$  for  $2 \leq i \leq n$ . Then we have  $N_{\psi_1} = 0_n$ ,  $M_{\psi_1} = I_{n^2}$  and  $M_{\psi_2} \neq I_{n^2}$  since  $\psi_2(u_{11}^* u_{22}) = -1$ .

Then the relation above between  $M_h$  and  $N_\psi$ ,  $M_\psi$  gives  $M_h = M_{\psi_1} = I_{n^2}$ . If we replace  $M_h$  by  $I_{n^2}$  in the relation with  $M_{\psi_2}$  we obtain a contradiction.

Therefore, there is no boolean Haar state on  $O_n^{\text{nc}}$ . Moreover, the states  $\psi_1$  and  $\psi_2$  are two traces, so we can also conclude that there is no boolean Haar trace on  $O_n^{\text{nc}}$ .  $\square$

## 9.7 The non-existence of the Haar state and the Haar trace in the monotone and antimonotone cases, $n \geq 2$

**Proposition 9.7.1.** *There is no Haar state and no Haar trace on  $O_n^{\text{nc}}$  for the monotone and antimonotone convolutions, for all  $n \geq 2$ .*

*Proof.* Note that the formula for the boolean product is also valid for the monotone case:

$$(\phi \triangleright \psi)(a^{(2)}b^{(1)}c^{(2)}) = \psi(a) (\phi(b) - \delta(b)) \psi(c) + \delta(b)\psi(ac) .$$

Thus, the same proof leads to the conclusion that there is no monotone Haar state and no monotone Haar trace.

For the antimotone product, we obtain similar things if we exchange  $u_{ij}^*$  and  $u_{kl}$ , since

$$(\phi \triangleleft \psi)(a^{(1)}b^{(2)}c^{(1)}) = \phi(a)(\psi(b) - \delta(b))\phi(c) + \delta(b)\phi(ac) .$$

Thus, a similar proof leads to the conclusion that there is no antimotone Haar state and no antimotone Haar trace.  $\square$

## 9.8 Existence of the Haar trace for the free and the tensor convolution, $n \geq 2$

**Theorem 9.8.1.** *The complexification of  $O_n^{\text{nc}}$  is  $*$ -isomorphic to the algebra  $U_n^{\text{nc}}$ , and the structure of dual group is preserved, i.e.  $(O\langle n \rangle)_{\mathbb{C}} \simeq U\langle n \rangle$ .*

*Proof.* Let us recall that  $U_n^{\text{nc}}$  is the universal (complex)  $*$ -algebra generated by  $n^2$  elements  $\{v_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$  such that, for all  $1 \leq i, j \leq n$

$$\sum_{k=1}^n v_{ik}v_{jk}^* = \delta_{ij}1_{U_n^{\text{nc}}} = \sum_{k=1}^n v_{ki}^*v_{kj} .$$

On the first hand, note that  $(O_n^{\text{nc}})_{\mathbb{C}}$  is a complex  $*$ -algebra generated by the  $n^2$  elements  $u_{ij} + \imath 0_{O_n^{\text{nc}}}$  satisfying the same relations. Hence, there exists a complex  $*$ -homomorphism  $T: U_n^{\text{nc}} \rightarrow (O_n^{\text{nc}})_{\mathbb{C}}$  given by  $T(v_{ij}) = u_{ij} + \imath 0_{O_n^{\text{nc}}}$ .

On the other hand,  $U_n^{\text{nc}}$  can be considered as a real  $*$ -algebra generated by  $2n^2$  elements  $\{v_{kl}\}_{1 \leq k, l \leq n} \cup \{w_{kl} = v_{kl}\}_{1 \leq k, l \leq n}$  satisfying

$$\sum_{k=1}^n v_{pk}v_{qk}^* = \delta_{pq}1_{U_n^{\text{nc}}} = \sum_{k=1}^n v_{kp}^*v_{kq} , \quad \sum_{k=1}^n w_{pk}w_{qk}^* = \delta_{pq}1_{U_n^{\text{nc}}} = \sum_{k=1}^n w_{kp}^*w_{kq} .$$

Then, there exists a real  $*$ -homomorphism  $S: O_n^{\text{nc}} \rightarrow U_n^{\text{nc}}$  such that  $S(u_{ij}) = v_{ij}$ .

Moreover  $S$  extends to a complex  $*$ -homomorphism  $S: (O_n^{\text{nc}})_{\mathbb{C}} \rightarrow U_n^{\text{nc}}$  with the formula  $S(\imath x) = \imath S(x)$  for every  $x \in O_n^{\text{nc}}$ , where  $U_n^{\text{nc}}$  is now considered as a complex algebra. Hence we obtain  $ST = \text{id}_{U_n^{\text{nc}}}$  and  $TS = \text{id}_{(O_n^{\text{nc}})_{\mathbb{C}}}$ , and it is clear that the extensions of the  $*$ -homomorphisms defining  $O\langle n \rangle$  are the  $*$ -homomorphisms of the dual group  $U\langle n \rangle$ .  $\square$

**Remark 9.8.2.** The previous non-existence results are not direct consequence of the equivalent non-existence results in [7]. Indeed, we are interested in an even weaker property, we are looking for a (tracial) state on  $U_n^{\text{nc}}$  which absorb (tracial) states satisfying  $\phi(a^*) = \phi(a)$  for all  $a \in O_n^{\text{nc}}$ . Actually the non-existence is almost a consequence of the proofs given in [7] because they use real states to obtain contradictions, except  $\psi_2$  in the boolean case.

Let us consider a real noncommutative probability space  $(\mathcal{A}, \phi)$ , and  $U \in \mathcal{A}$  a Haar unitary random variable. Then, we can construct from there the state  $h = [n(\phi * \text{tr}_n)] \circ j_U$  on  $O_n^{\text{nc}}$ .

Thanks to the previous theorem,  $h$  is a state on  $U_n^{\text{nc}}$ . By [7], it is the free Haar trace on  $U_n^{\text{nc}}$ . Hence, it is the free Haar trace on  $O_n^{\text{nc}}$ . In particular,  $O_n^{\text{nc}}$  admits a free Haar trace, and we can prove as in the unitary dual group that:

**Theorem 9.8.3.** *The family of variables  $(\chi(u^p))_{p \geq 1}$  is asymptotically a family of  $*$ -free circular variables of mean 0 and covariance 1.*

Cébron and Ulrich [7] also prove that there exists a tensor Haar trace. Its description [7, Lemmas 2.13 and 2.14] show that the restriction to  $O_n^{\text{nc}}$  is real-valued. Hence  $O_n^{\text{nc}}$  admits a tensor Haar trace.

Moreover this trace is not faithful on  $U_n^{\text{nc}}$  for  $n \geq 2$  [7, Proposition 2.16]. The same argument gives that it not faithful on  $O_n^{\text{nc}}$  for  $n \geq 2$ .

## 9.9 Construction of the free Haar trace, $n \geq 2$

McClanahan [25] defines a state on  $U_n^{\text{nc}}$ , which turns out to be the free Haar trace. Let  $C(\mathbb{T})$  be the algebra of continuous functions on the unit complex circle  $\mathbb{T}$ . Let  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})'$  denotes the relative commutant of  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  in  $C(\mathbb{T}) \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . By direct calculations we can verify that there exists a unique (complex)  $*$ -homomorphism  $\varphi: U_n^{\text{nc}} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})'$  satisfying

$$\varphi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n E_{ki} \text{Id}_{\mathbb{T}} E_{jk} .$$

This allows us to define the free Haar trace  $(\lambda * \text{tr}_n)|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})'} \circ \varphi$  on  $U_n^{\text{nc}}$ , where  $\lambda$  is the Haar measure on the unit circle  $\mathbb{T}$ . Thus the free Haar trace on  $O_n^{\text{nc}}$  is the restriction of this state to  $O_n^{\text{nc}}$ , but we can also find a expression which does not refer to  $U_n^{\text{nc}}$ .

**Theorem 9.9.1.** *Let  $C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}}$  be the real algebra of continuous functions  $f$  on the complex unit circle  $\mathbb{T}$  such that  $f(\cdot) = \overline{f(\cdot)}$ . Let  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})'$  denotes the relative commutant of  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  in  $C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Then  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})')_{\mathbb{C}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})'$ .*

*Proof.* Let  $a, b$  be elements of  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})' \subset C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Note that  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})')_{\mathbb{C}}$  is a subset of  $(C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))_{\mathbb{C}} \simeq C(\mathbb{T}) \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  by Theorem 9.2.1.

For every  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  there exists  $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  such that  $M = X + iY$ . Then it is straightforward to prove that  $M(a + ib) = (a + ib)M$ . Thus  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})')_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})'$ .

Conversely, let  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})'$ . Then  $X \in (C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))_{\mathbb{C}}$  by Theorem 9.2.1 and there exists  $x, y \in C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  such that  $X = x + iy$ . For all  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , by hypothesis  $MX = XM$ , i.e.  $Mx + iMy = xM + iyM$ . By unicity of the decomposition in  $(C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))_{\mathbb{C}}$ , we get  $Mx = xM$  and  $My = yM$ . Thus  $x$  and  $y$  commute with  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  in  $C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}} \sqcup \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  and  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})' \subset (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})')_{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**Theorem 9.9.2.** *Let  $\varphi$  be the unique real  $*$ -homomorphism  $\varphi: O_n^{\text{nc}} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})'$  satisfying*

$$\varphi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n E_{ki} \text{Id}_{\mathbb{T}} E_{jk} .$$

*Then  $h = (\lambda * \text{tr}_n)|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})'} \circ \varphi$  is the free Haar trace on  $O_n^{\text{nc}}$ , where  $\lambda$  is the Haar measure on the unit circle  $\mathbb{T}$ . Moreover, it is a faithful state.*

*Proof.* Note that  $\lambda$  defines a state on  $C(\mathbb{T})_{\mathbb{R}}$ , hence  $(\lambda * \text{tr}_n)|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}'$  is a state on  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})'$  by Lemma 9.2.2.

Since  $\varphi$  is a real  $*$ -homomorphism, it preserves positivity, and it is easy to check that  $\varphi$  is unital. Thus  $h = (\lambda * \text{tr}_n)|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}' \circ \varphi$  is a state on  $O_n^{\text{nc}}$ .



## CHAPTER 9. THE ORTHOGONAL DUAL GROUP

Moreover its extension to the complexification  $U_n^{\text{nc}}$  is the free Haar trace defined by McClanahan. Let us also note that the free Haar trace is faithful on  $U_n^{\text{nc}}$  for all  $n \geq 1$ . Therefore  $h$  is faithful on  $O_n^{\text{nc}}$  for every  $n \geq 1$ .  $\square$

# Appendix



# Appendix A

## Trace of the square of the fundamental representation of $O_n^+$

Let us denote by  $O_n^+ = (A_o(n), \Delta)$  the free orthogonal quantum group. The fundamental representation is denoted  $u$ . Let us recall that the coproduct is given on the generator  $u_{ij}$  by the following formula:

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj} .$$

The antipode satisfies, for  $x^\alpha$  and  $x^\beta$  two irreducible representations of  $O_n^+$ ,

$$S(x_{ij}^\alpha x_{kl}^\beta) = (x_{lk}^\beta)^* (x_{ji}^\alpha)^* .$$

Let us show that  $\chi(u^2)$  is not in the central algebra, i.e. the  $*$ -subalgebra generated by irreducible characters. To do this, let us first define the map  $P: A_o(n) \rightarrow A_o(n)$  by

$$P(a) = a_{(2)} \int_{O_n^+} a_{(1)} S(a_{(3)}) .$$

This is the projection from  $A_o(n)$  onto the central algebra [8]. Hence we should prove that  $P(\chi(u^2))$  is not  $\chi(u^2)$  in  $A_o(n)$ .

Let us note that  $\chi(u^2) = \sum_{i,j=1}^n u_{ij} u_{ji}$  and

$$P(\chi(u^2)) = \sum_{i,j,l_1,l_2,k_1,k_2=1}^n u_{l_1 l_2} u_{k_1 k_2} \int_{O_n^+} u_{i l_1} u_{i k_1} u_{j k_2} u_{j l_2} .$$

Thanks to Banica and Collins [2], we have:

$$\int_{O_n^+} u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \dots u_{i_{2k} j_{2k}} = \sum_{p,q \in D(k)} \delta_{p i} \delta_{q j} W_{kn}(p, q)$$

where  $D(k) = NC_2(2k)$  is the set of all noncrossing pairings,  $W_{kn} = G_{kn}^{-1}$  is the inverse of the Gram matrix  $G_{kn}$  satisfying  $G_{kn}(p, q) = n^{|p \vee q|}$  and

$$\delta_{p i} = \begin{cases} 1 & \text{if each block of } p \text{ joins a pair of equal indices} \\ 0 & \text{if not} \end{cases} .$$

APPENDIX A.  $\chi(U^2)$  IN  $O_N^+$

Let us recall that  $p \vee q$  is the smallest partition which is coarser than  $p$  and  $q$ , and that  $|p \vee q|$  is its number of blocks. Let us note that  $p \vee q$  is also the number of loops in the diagram  $\begin{bmatrix} b \\ q \end{bmatrix}$ , where  $b$  is the horizontal flip of the partition  $p$ .

Moreover, Banica and Collins determine the coefficients of the matrix  $W_{kn}$ . To do this, they use paths in the lattice of noncrossing pairings  $NC_2(2k)$ . For a path  $\mathcal{P} = p_0 p_1 \dots p_l$  in  $NC_2(2k)$ , i.e. a finite sequence of noncrossing pair partitions where  $p_i$  and  $p_{i+1}$  are different, let us put:

$$l(\mathcal{P}) = l \text{ and } d(\mathcal{P}) = l(\mathcal{P})k - (|p_0 \vee p_1| + |p_1 \vee p_2| + \dots + |p_{l-1} \vee p_l|) .$$

Note that if  $\mathcal{P} = p$  is reduced to a point,  $l(\mathcal{P}) = d(\mathcal{P}) = 0$ . Thus the following gives the coefficients of the Weingarten matrix  $W_{kn}$ :

$$W_{kn}(p, q) = \frac{1}{n^k} \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{l(\mathcal{P})} n^{-d(\mathcal{P})}$$

where the sum is taken over all the possible paths  $\mathcal{P}$  in  $D(k)$  from  $p$  to  $q$ .

This leads us to the following formula:

$$P(\chi(u^2)) = \sum_{i,j,l_1,l_2,k_1,k_2=1}^n u_{l_1 l_2} u_{k_1 k_2} \sum_{p,q \in D(2)} \delta_{p(iijj)} \delta_{q(l_1 k_1 k_2 l_2)} \frac{1}{n^2} \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{l(\mathcal{P})} n^{-d(\mathcal{P})} .$$

On the first hand, if  $i \neq j$  then the only partition  $p$  in  $NC_2(4)$  with nonzero contribution is  $\sqcup \sqcup$ , since  $NC_2(4) = \{ \sqcup \sqcup, \sqcup \sqcup \}$ . We have to distinguish between four possibilities for  $(l_1 k_1 k_2 l_2)$ :  $l_1 = k_1 \neq l_2 = k_2$ ,  $l_1 = l_2 \neq k_1 = k_2$ ,  $l_1 = l_2 = k_1 = k_2$  or any other case.

In the last case,  $\delta_{q(l_1 k_1 k_2 l_2)} = 0$  for all  $q \in NC_2(4)$ . In the other cases we have

$$\begin{aligned} & \sum_{q \in D(2)} \delta_{q(l_1 k_1 k_2 l_2)} W_{kn}(\sqcup \sqcup, q) \\ &= \begin{cases} W_{kn}(\sqcup \sqcup, \sqcup \sqcup) & \text{if } l_1 = k_1 \neq l_2 = k_2 \\ W_{kn}(\sqcup \sqcup, \sqcup \sqcup) & \text{if } l_1 = l_2 \neq k_1 = k_2 \\ W_{kn}(\sqcup \sqcup, \sqcup \sqcup) + W_{kn}(\sqcup \sqcup, \sqcup \sqcup) & \text{if } l_1 = l_2 = k_1 = k_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{2l}} = \frac{1}{n^2-1} & \text{if } l_1 = k_1 \neq l_2 = k_2 \\ \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{-1}{n^{2l+1}} = -\frac{1}{n(n^2-1)} & \text{if } l_1 = l_2 \neq k_1 = k_2 \\ \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{n^l} = \frac{1}{n(n+1)} & \text{if } l_1 = l_2 = k_1 = k_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

On the other hand, if  $i = j$ ,  $\delta_{p(iiii)} = 1$  for all partition  $p$  in  $D(2)$ . Similar calculation gives

$$\sum_{p,q \in D(2)} \delta_{q(l_1 k_1 k_2 l_2)} W_{kn}(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)} & \text{if } l_1 = k_1 \neq l_2 = k_2 \\ \frac{1}{n(n+1)} & \text{if } l_1 = l_2 \neq k_1 = k_2 \\ \frac{2}{n(n+1)} & \text{if } l_1 = l_2 = k_1 = k_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

Finally, we obtain

$$\begin{aligned}
P(\chi(u^2)) &= \sum_{i,j,l_1,l_2,k_1,k_2=1}^n u_{l_1 l_2} u_{k_1 k_2} \sum_{p,q \in D(2)} \delta_p(iijj) \delta_q(l_1 k_1 k_2 l_2) W_{kn}(p, q) \\
&= \sum_{1 \leq s \neq t \leq n} \left( \frac{n}{n(n+1)} + \frac{n(n-1)}{n^2-1} \right) u_{st} u_{st} + \left( \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n(n-1)}{n(n^2-1)} \right) u_{ss} u_{tt} \\
&\quad + \sum_{r=1}^n \left( \frac{2n}{n(n+1)} + \frac{n(n-1)}{n(n+1)} \right) u_{rr} u_{rr} \\
&= \sum_{1 \leq s, t \leq n} u_{st} u_{st} = \chi(uu^t) = n1_{O_n^+}.
\end{aligned}$$

Hence,  $\chi(u^2) \neq P(\chi(u^2))$  in general, which means that  $\chi(u^2)$  is not in the algebra of characters.

For instance, a representation of  $A_o(2)$  in  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  is given by the block matrix

$$\pi(u) = \begin{pmatrix} \pi(u_{11}) & \pi(u_{12}) \\ \pi(u_{21}) & \pi(u_{22}) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

which satisfies  $\chi(\pi(u)^2) = 2\pi(u_{12}) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , this is different from  $2I_2 = P(\chi(\pi(u)^2))$ .

APPENDIX A.  $\chi(U^2)$  IN  $O_N^+$

# Appendix B

## Multiplication and fusion rules in the finite quantum group $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n$

Since  $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n = (\mathcal{A}'_n, \hat{\Delta})$  is the dual of the Sekine finite quantum group  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n = (\mathcal{A}_n, \Delta)$ , the multiplication in  $\mathcal{A}'_n$  is defined by duality:

$$\forall(a, b) \in \mathcal{A}'_n \times \mathcal{A}'_n, \forall g \in \mathcal{A}_n, (ab)(g) = (a \otimes b) \circ \Delta(g) .$$

Thus, for any  $i, j, k$  and  $l$  in  $\mathbb{Z}_n$ , we have

$$\begin{aligned} e^{(i,j)} e^{(k,l)} &= e^{(i+k,j+l)} \\ e^{(i,j)} E^{k,l} &= \eta^{-i(k-l)} E^{k-j,l-j} \\ E^{i,j} e^{(k,l)} &= \eta^{k(j-i)} E^{i+l,j+l} \\ E^{i,j} E^{k,l} &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{s,t \in \mathbb{Z}_n \\ t=k-i=l-j}} \eta^{s(i-j)} e^{(s,t)} \end{aligned}$$

where the sums are taken in  $\mathbb{Z}_n$ . In particular,  $E^{i,j} E^{k,l}$  is zero when  $i - j \neq k - l$  in  $\mathbb{Z}_n$ .

Then we can check that  $\hat{\mathfrak{X}}$  is a fundamental representation of  $\widehat{\mathbb{K}\mathbb{P}}_n$ . We only need to show that we can find the  $e^{(i,j)}$ 's and the  $E^{i,j}$ 's in the algebra generated by its matrix coefficients. Let us recall that they are the  $E^{i,j}$ 's. Moreover, we have, for any  $s, t \in \mathbb{Z}_n$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{sj} E^{0,j} E^{t,j+t} = \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{sj} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \eta^{-kj} e^{(k,t)} = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \eta^{-kj} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \eta^{j(s-k)} \right) e^{(k,t)} = e^{(s,t)} .$$

Finally, let us determine the fusion rules. The first ones are given by the multiplication of one-dimensional representations:  $e^{(i,j)} \oplus e^{(k,l)} \simeq e^{(i+k,j+l)}$  for any integers  $i, j, k$  and  $l$  in  $\mathbb{Z}_n$ . A straightforward calculation gives  $\hat{\mathfrak{X}} \oplus e^{(k,l)} \simeq \hat{\mathfrak{X}} \simeq e^{(i,j)} \oplus \hat{\mathfrak{X}}$  for any one-dimensional representations  $e^{(i,j)}$  and  $e^{(k,l)}$ .

The representation  $\hat{\mathfrak{X}} \oplus \hat{\mathfrak{X}}$  can be seen as a matrix in  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathcal{A}'_n)$ , given by its blocks of size  $n$  of the form  $E^{i,j} \hat{\mathfrak{X}}$ . In particular, the character of  $\hat{\mathfrak{X}} \oplus \hat{\mathfrak{X}}$  is the square of  $\chi(\hat{\mathfrak{X}})$ . The definition of multiplication above leads to

$$\chi(\hat{\mathfrak{X}} \oplus \hat{\mathfrak{X}}) = \chi(\hat{\mathfrak{X}})^2 = \sum_{i,j=1}^n E^{i,i} E^{j,j} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \sum_{s \in \mathbb{Z}_n} e^{(s,j-i)} = \sum_{s,t \in \mathbb{Z}_n} e^{(s,t)} .$$

Thus  $\hat{\mathfrak{X}} \oplus \hat{\mathfrak{X}} \simeq \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}_n} e^{(i,j)}$ .





# Appendix C

## Cumulant of R-cyclic matrices and unitary dual group

Note that we can obtain an exact formula for the cumulants of the  $\chi(u^p)$ 's in the unitary dual group. To do this, we need to use the R-cyclicity of  $u$  and  $u^*$ .

**Definition C.0.1.** For an algebra  $\mathcal{A}$ , a family of matrices  $\{A_l = (a_{ij}^{(l)})_{1 \leq i, j \leq n}\}_{1 \leq l \leq s}$  in  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$  is called R-cyclic if  $\kappa_r(a_{i_1 j_1}^{(l_1)}, \dots, a_{i_r j_r}^{(l_r)}) = 0$  whenever it is not true that  $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{r-1} = i_r$  and  $j_r = i_1$ .

Thus [7, Corollary 2.8] ensures that  $\{u, u^*\}$  is a R-cyclic family. By [29, Theorem 4.3] this is also the case of any finite subset from the family  $\{u^k\}_{k \geq 1} \cup \{(u^*)^k\}_{k \geq 1}$ .

Note that  $\chi(u^k)^e = \chi((u^e)^k)$  for any  $k \geq 1$  and  $e \in \{\emptyset, *\}$ . Indeed, the identity is clear for  $e = \emptyset$ , and if  $e = *$ , we have:

$$\begin{aligned}
 \chi(u^k)^* &= \left( \sum_{i=1}^n (u^k)_{ii} \right)^* \\
 &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n u_{i_1 i_2} u_{i_2 i_3} \cdots u_{i_k i_1} \right)^* \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (u_{i_k i_1})^* \cdots (u_{i_2 i_3})^* (u_{i_1 i_2})^* \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (u_{j_1 j_k})^* \cdots (u_{j_{k-1} j_{k-2}})^* (u_{j_k j_{k-1}})^* \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (u^*)_{j_k j_1} \cdots (u^*)_{j_{k-2} j_{k-1}} (u^*)_{j_{k-1} j_k} \\
 &= \sum_{l_1, \dots, l_k=1}^n (u^*)_{l_1 l_2} \cdots (u^*)_{l_{k-1} l_k} (u^*)_{l_k l_1} \\
 &= \sum_{i=1}^n ((u^*)^k)_{ii} = \chi((u^*)^k).
 \end{aligned}$$

It means that we can see the calculation of  $\kappa_s(\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_s})^{e_s})$  in a more general framework and compute  $\kappa_s(\chi(A_{l_1}^{p_1}), \dots, \chi(A_{l_s}^{p_s}))$  for  $\{A_l\}_{l \in I}$  a R-cyclic family of matrices. Note that this is a calculation similar to the one in the last section of [26], and we will

## APPENDIX C. R-CYCLICITY AND $U\langle N \rangle$

use similar arguments. Since  $\{A_{l_1}^{p_1}, \dots, A_{l_s}^{p_s}\}$  is also a R-cyclic family, if  $p$  is the sum of all the  $p_i$ 's and  $a_{ij}^{(l)}$  denotes the coefficient  $(i, j)$  of the matrix  $A_l$ ,

$$\begin{aligned} \kappa_s(\chi(A_{l_1}^{p_1}), \dots, \chi(A_{l_s}^{p_s})) &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \kappa_s \left( a_{i_1 i_2}^{(l_1)} \cdots a_{i_{p_1} i_1}^{(l_1)}, \dots, a_{i_{p-p_s+1} i_{p-p_s+2}}^{(l_s)} \cdots a_{i_p i_{p-s+1}}^{(l_s)} \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ i_1 = i_{p_1+1} = \dots = i_{p-p_s+1}}} \kappa_s \left( a_{i_1 i_2}^{(l_1)} \cdots a_{i_{p_1} i_{p_1+1}}^{(l_1)}, \dots, a_{i_{p-p_s+1} i_{p-p_s+2}}^{(l_s)} \cdots a_{i_p i_1}^{(l_s)} \right). \end{aligned}$$

By the property of the free cumulant [30, equation (11.11)], when  $\gamma_{\underline{p}}$  denotes the partition of  $\{1, \dots, p\}$  defined by  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_s)$ , i.e.  $\gamma_{\underline{p}} = \{\{1, 2, \dots, p_1\}, \dots, \{p-p_s+1, \dots, p\}\}$ , we obtain

$$\kappa_s(\chi(A_{l_1}^{p_1}), \dots, \chi(A_{l_s}^{p_s})) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ i_1 = i_{p_1+1} = \dots = i_{p-p_s+1}}} \sum_{\substack{\pi \in NC(p) \\ \pi \vee \gamma_{\underline{p}} = 1_p}} \kappa_{\pi} \left[ a_{i_1 i_2}^{(l_1)}, \dots, a_{i_{p_1} i_{p_1+1}}^{(l_1)}, \dots, a_{i_p i_1}^{(l_s)} \right].$$

By definition of  $\kappa_{\pi}$ , we can restrict ourselves to the study of a block  $V = \{v_1 < \dots < v_r\}$  of  $\pi$ , and look at  $\kappa_r(a_{i_{v_1} i_{v_1+1}}^{(\lambda_{v_1})}, \dots, a_{i_{v_r} i_{v_r+1}}^{(\lambda_{v_r})})$  where  $\underline{\lambda} = (l_1, \dots, l_1, l_2, \dots, l_s) \in I^p$ . In order to have a nonzero contribution, the indices have to be cyclic, i.e. to satisfy

$$\forall 1 \leq j \leq r-1, i_{v_j+1} = i_{v_{j+1}} \text{ and } i_{v_r+1} = i_{v_1}.$$

Let us denote by  $\sigma_{\pi}$  the permutation associated to the partition  $\pi$ , by considering the elements of a block of  $\pi$  in increasing order as a cycle of  $\sigma_{\pi}$ . Hence the conditions above write  $i_{\gamma(v_i)} = i_{\sigma_{\pi}(v_i)}$  where  $\gamma = (1, 2, \dots, p)$ . Since this should be true for each block of  $\pi$ , it means that  $i_j = i_{\gamma \circ \sigma_{\pi}^{-1}(j)}$  for all  $1 \leq j \leq p$ . Thus, we get

$$\kappa_s(\chi(A_{l_1}^{p_1}), \dots, \chi(A_{l_s}^{p_s})) = \sum_{\substack{\pi \in NC(p) \\ \pi \vee \gamma_{\underline{p}} = 1_p}} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ i_1 = i_{p_1+1} = \dots = i_{p-p_s+1} \\ i_j = i_{\gamma \circ \sigma_{\pi}^{-1}(j)}}} \kappa_{\pi} \left[ a_{i_1 i_2}^{(l_1)}, \dots, a_{i_{p_1} i_{p_1+1}}^{(l_1)}, \dots, a_{i_p i_1}^{(l_s)} \right].$$

Then, if  $\kappa_{\pi} \left[ a_{i_1 i_2}^{(l_1)}, \dots, a_{i_p i_1}^{(l_s)} \right]$  depends only on the cyclicity of the indices, we denote it  $\kappa_{\pi} \left[ a^{(l_1)}, \dots, a^{(l_1)}, \dots, a^{(l_s)} \right]$  and find

$$\kappa_s(\chi(A_{l_1}^{p_1}), \dots, \chi(A_{l_s}^{p_s})) = \sum_{\substack{\pi \in NC(p) \\ \pi \vee \gamma_{\underline{p}} = 1_p}} \kappa_{\pi} \left[ a^{(l_1)}, \dots, a^{(l_1)}, \dots, a^{(l_s)} \right] c_{\pi}$$

where  $c_{\pi}$  denotes the quantity

$$\# \left\{ i \in \{1, \dots, n\}^p, i_1 = i_{p_1+1} = \dots = i_{p-p_s+1}, \forall 1 \leq j \leq p, i_j = i_{\gamma \circ \sigma_{\pi}^{-1}(j)} \right\}.$$

Thanks to [27, Lemma 14],  $\pi \vee \gamma_{\underline{p}} = 1_p$  if and only if  $\sigma_{\pi}^{-1} \circ \gamma$  separates  $p_1, p_1 + p_2, \dots$  and  $p$ , which is equivalent to the fact that  $1, p_1 + 1, \dots$  and  $p - p_s + 1$  are all in different blocks of  $\gamma \circ \sigma_{\pi}^{-1}$ . Thus,  $c_{\pi} = n^{\#(\gamma \circ \sigma_{\pi}^{-1}) - s + 1}$ , where  $\#\sigma$  denotes the number of cycles in

the cycle decomposition of permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ . Notes that  $\gamma \circ \sigma_\pi^{-1}$  corresponds to the Kreweras complement [30] of  $\pi$ , denoted  $K(\pi)$ , conjugated by  $\gamma$ . Hence

$$\#(\gamma \circ \sigma_\pi^{-1}) = |K(\pi)| = p + 1 - |\pi|$$

where  $|\pi|$  is the number of blocks of  $\pi$ , and then  $c_\pi = n^{p+2-s-|\pi|}$ .

In particular, in the dual unitary group endowed with the free Haar trace, we have  $I = \{\emptyset, *\}$  and, if  $\pi$  is adapted to  $\underline{\lambda} = (l_1, \dots, l_1, l_2, \dots, l_s)$ ,

$$\kappa_\pi \left[ a^{(\lambda_1)}, \dots, a^{(\lambda_p)} \right] = n^{|\pi|-p} (-1)^{\frac{p}{2}-|\pi|} \prod_{V \in \pi} C_{\frac{\#V}{2}-1}$$

the cumulant vanishes in all the other cases.

We get, with  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_1, e_2, \dots, e_s)$ ,

$$\kappa_s (\chi(u^{p_1})^{e_1}, \dots, \chi(u^{p_s})^{e_s}) = n^{2-s} (-1)^{\frac{p}{2}} \sum_{\substack{\pi \in NC(p) \\ \pi \vee \gamma_p = 1_p \\ \underline{e}\text{-adapted}}} (-1)^{|\pi|} \prod_{V \in \pi} C_{\frac{\#V}{2}-1} .$$

Finally, if  $s > 2$ , we obtain that the cumulants vanish asymptotically. If  $s = 2$ , the cumulant is nonzero if and only if  $p_1 = p_2$  and  $e_1 \neq e_2$ , in this case the cumulant equals 1. Moreover, if  $s = 1$ , there is no partition adapted to  $(e)$ , and the cumulant is zero.

**Remark C.0.2.** Unfortunately we cannot apply this method to study the asymptotic  $*$ -distribution of the traces of power of the generating matrix with respect to the tensor Haar trace  $h_T$ , since  $\{u, u^*\}$  is not a R-cyclic family with respect to  $h_T$ . For example,  $\kappa_6(u_{12}^*, u_{11}^*, u_{11}, u_{11}^*, u_{11}, u_{21}) = -\frac{2}{n^2}$  and the indices are not cyclic.



# Index

- $I(\mathbb{G})$ , 17
- $\mathfrak{X}_{a,\lambda}$ , 38
- $\mathfrak{X}^{u,v}$ , 47
- $\chi(\mathcal{M})$ , 11
- $\rho_l^\pm$ , 47
- $\sigma_l^\pm$ , 48
- $u \overline{\otimes} v$ , 39
- Algèbre, 9
  - \*-algèbre, 10
  - $C^*$ -algèbre, 10
  - co-commutative, 13
  - de Hopf, 13
  - de Kac de dimension finie, 13
  - de von Neumann, 10
  - sous-algèbre, 9
  - unifère, 9
- Algèbre de Brown  $U_n^{\text{nc}}$ , 24
- Antipode
  - bigèbre, 13
  - groupe dual, 23
- Bigèbre, 13
- Coproduit
  - bigèbre, 13
  - groupe dual, 23
  - groupe quantique, 15
- Coreprésentation, 17
  - équivalente, 17
  - dimension  $d_\alpha$ , 17
  - irréductible, 17
- Counité
  - bigèbre, 13
  - groupe dual, 23
- Cumulant libre, 32
- \*-Distribution, 28
  - jointe, 28
- Distribution arcsinus complexe  $\mu_{\mathbb{C}-\text{arc}(\alpha)}$ , 53
- Espace de probabilité non commutatif, 10
- État, 10
  - fidèle, 10
  - idempotent, 46
  - idempotent central, 64
  - Trace, 10
- État de Haar
  - groupe dual, 24
  - groupe quantique, 16
  - traces de Haar, 24
- États produits
  - espace de probabilité non commutatif, 12
  - groupe dual, 23
- Fonction de Möbius  $\mu_{\text{nc}}$ , 32
- Groupe dual, 23
  - orthogonal  $O\langle n \rangle$ , 81
  - produits de convolution, 23
  - unitaire  $U\langle n \rangle$ , 24
- Groupe quantique compact, 15
  - matriciel, 20
  - produit de convolution  $a \star b$ , 18
  - représentation, 17
- Groupe quantique de Kac-Paljutkin  $\mathbb{K}\mathbb{P}$ , 20
- Groupes quantiques finis de Sekine  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ , 21
- Homomorphisme
  - d'algèbres, 9
  - unifère, 9
- Indépendance
  - \*-libre, 29
  - tensorielle, 29
- \*-Moment, 27

## INDEX

- joint, [28](#)
- Notation de Sweedler, [15](#)
- Partition non croisée,  $NC(s)$ , [31](#)
  - borne supérieure  $\pi \vee \sigma$ , [32](#)
  - par paires,  $NC_2(s)$ , [32](#)
- Produit libre
  - $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ , [12](#)
  - $f \sqcup g$ , [12](#)
  - $f \sqcup g$ , [12](#)
- Produit tensoriel
  - algèbre, [11](#)
  - application, [11](#)
  - espace vectoriel, [11](#)
- Transformée de Fourier, [18](#)
- Variable aléatoire
  - non commutative, [10](#)
  - quantique, [24](#)

# Bibliographie

- [1] Teodor Banica. Le groupe quantique compact libre  $U(n)$ . *Comm. Math. Phys.*, 190(1) :143–172, 1997.
- [2] Teodor Banica and Benoît Collins. Integration over compact quantum groups. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 43(2) :277–302, 2007.
- [3] Teodor Banica, Stephen Curran, and Roland Speicher. Stochastic aspects of easy quantum groups. *Probab. Theory Related Fields*, 149(3-4) :435–462, 2011.
- [4] Teodor Banica, Stephen Curran, and Roland Speicher. De Finetti theorems for easy quantum groups. *Ann. Probab.*, 40(1) :401–435, 2012.
- [5] Isabelle Baraquin. Random walk on finite quantum groups. *arXiv e-prints*, page arXiv :1812.06862, Dec 2018. Submitted.
- [6] Isabelle Baraquin. Trace of powers of representations of finite quantum groups. *arXiv e-prints*, page arXiv :1811.00795, Nov 2018. Submitted.
- [7] Guillaume Cébron and Michaël Ulrich. Haar states and Lévy processes on the unitary dual group. *J. Funct. Anal.*, 270(7) :2769–2811, 2016.
- [8] Fabio Cipriani, Uwe Franz, and Anna Kula. Symmetries of Lévy processes on compact quantum groups, their Markov semigroups and potential theory. *Journal of Functional Analysis*, 266(5) :2789 – 2844, 2014.
- [9] Benoît Collins. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability. *Int. Math. Res. Not.*, (17) :953–982, 2003.
- [10] Persi Diaconis. *Group representations in probability and statistics*, volume 11 of *Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series*. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988.
- [11] Persi Diaconis. The cutoff phenomenon in finite Markov chains. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 93(4) :1659–1664, 1996.
- [12] Persi Diaconis and Steven N. Evans. Linear functionals of eigenvalues of random matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(7) :2615–2633, 2001.
- [13] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. Generating a random permutation with random transpositions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 57(2) :159–179, 1981.



## BIBLIOGRAPHIE

- [14] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. On the eigenvalues of random matrices. *J. Appl. Probab.*, 31A :49–62, 1994. Studies in applied probability.
- [15] Michel Enock and Jean-Marie Schwartz. *Kac algebras and duality of locally compact groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. With a preface by Alain Connes, With a postface by Adrian Ocneanu.
- [16] Uwe Franz and Rolf Gohm. Random walks on finite quantum groups. In *Quantum independent increment processes. II*, volume 1866 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–32. Springer, Berlin, 2006.
- [17] Uwe Franz and Adam Skalski. On idempotent states on quantum groups. *J. Algebra*, 322(5) :1774–1802, 2009.
- [18] Amaury Freslon. Cut-off phenomenon for random walks on free orthogonal quantum groups. *Probability Theory and Related Fields*, Jul 2018.
- [19] Amaury Freslon. Quantum reflections, random walks and cut-off. *Internat. J. Math.*, 29(14) :1850101, 2018.
- [20] Masaki Izumi and Hideki Kosaki. Kac algebras arising from composition of subfactors : general theory and classification. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 158(750) :198, 2002.
- [21] G. I. Kac and V. G. Paljutkin. Finite ring groups. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 15 :224–261, 1966. Translated in *Trans. Moscow Math. Soc.* (1967), 251–284.
- [22] Ann Maes and Alfons Van Daele. Notes on compact quantum groups. *Nieuw Arch. Wisk. (4)*, 16(1-2) :73–112, 1998.
- [23] J. P. McCarthy. Random Walks on Finite Quantum Groups : Diaconis-Shahshahani Theory for Quantum Groups. *ArXiv e-prints*, September 2017.
- [24] J. P. McCarthy. Diaconis-Shahshahani Upper Bound Lemma for Finite Quantum Groups. *ArXiv e-prints*, October 2018.
- [25] Kevin McClanahan.  $C^*$ -algebras generated by elements of a unitary matrix. *J. Funct. Anal.*, 107(2) :439–457, 1992.
- [26] James A. Mingo and Roland Speicher. Schwinger-Dyson equations : classical and quantum. *Probab. Math. Statist.*, 33(2) :275–285, 2013.
- [27] James A. Mingo, Roland Speicher, and Edward Tan. Second order cumulants of products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(9) :4751–4781, 2009.
- [28] Sergey Neshveyev and Lars Tuset. *Compact quantum groups and their representation categories*, volume 20 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2013.
- [29] Alexandru Nica, Dimitri Shlyakhtenko, and Roland Speicher.  $R$ -cyclic families of matrices in free probability. *J. Funct. Anal.*, 188(1) :227–271, 2002.

- [30] Alexandru Nica and Roland Speicher. *Lectures on the combinatorics of free probability*, volume 335 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [31] Arupkumar Pal. A counterexample on idempotent states on a compact quantum group. *Lett. Math. Phys.*, 37(1) :75–77, 1996.
- [32] Jonathan Rosenberg. Structure and applications of real  $C^*$ -algebras. In *Operator algebras and their applications*, volume 671 of *Contemp. Math.*, pages 235–258. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.
- [33] Sandrine Roussel. Phénomène de cutoff pour certaines marches aléatoires sur le groupe symétrique. *Colloq. Math.*, 86(1) :111–135, 2000.
- [34] Laurent Saloff-Coste. *Random Walks on Finite Groups*, pages 263–346. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [35] Yoshihiro Sekine. An example of finite-dimensional Kac algebras of Kac-Paljutkin type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(4) :1139–1147, 1996.
- [36] Roland Speicher. Free Probability Theory. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 119(1) :3–30, 2017.
- [37] Thomas Timmermann. *An invitation to quantum groups and duality. From Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond*. Zürich : European Mathematical Society, 2008.
- [38] Alfons Van Daele and Shuzhou Wang. Universal quantum groups. *Internat. J. Math.*, 7(2) :255–263, 1996.
- [39] Dan Voiculescu. Dual algebraic structures on operator algebras related to free products. *J. Operator Theory*, 17(1) :85–98, 1987.
- [40] Shuzhou Wang. Free products of compact quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 167(3) :671–692, 1995.
- [41] S. L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Comm. Math. Phys.*, 111(4) :613–665, 1987.
- [42] S. L. Woronowicz. Twisted  $SU(2)$  group. An example of a noncommutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 23(1) :117–181, 1987.
- [43] S. L. Woronowicz. Tannaka-Kreĭn duality for compact matrix pseudogroups. Twisted  $SU(N)$  groups. *Invent. Math.*, 93(1) :35–76, 1988.
- [44] Haonan Zhang. Idempotent states on Sekine quantum groups. *arXiv 1809.02798*, September 2018.

**Résumé :** Dans une première partie, nous introduisons les outils des mathématiques non commutatives que nous utiliserons dans notre étude des groupes quantiques finis et des groupes duaux. En particulier, nous présentons ces « groupes » et certaines de leurs propriétés.

La seconde partie est dédiée à l'étude de certains groupes quantiques finis : celui de Kac-Paljutkin  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  et la famille de Sekine  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ ,  $n \geq 2$ . Pour chacun, nous étudions les propriétés (asymptotiques) de l' $*$ -distribution des caractères irréductibles et la convergence de marches aléatoires définies à partir de combinaisons linéaires de caractères irréductibles. Nous commençons par examiner la théorie des représentations et de leurs puissances pour déterminer les caractères irréductibles. Ensuite, nous étudions l' $*$ -distribution des traces de ces puissances, par rapport à l'état de Haar, en regardant les  $*$ -moments joints. Dans le cas de la famille de Sekine, nous déterminons la distribution asymptotique (lorsque la dimension de l'algèbre tend vers l'infini), en considérant la convergence des moments. L'étude des marches aléatoires débute en bornant la distance à l'état de Haar. Nous déterminons ensuite le comportement asymptotique et l'état limite s'il existe. Remarquons que les limites possibles sont les états idempotents centraux. Nous étudions aussi le phénomène de seuil dans le cadre des groupes quantiques de Sekine.

Dans la troisième partie, nous étudions les groupes duaux au sens de Voiculescu. En particulier, nous nous intéressons aux propriétés asymptotiques de l' $*$ -distribution des traces de certaines matrices, par rapport à la trace de Haar libre sur le groupe dual unitaire. Les matrices considérées sont les puissances de la matrice unitaire engendrant l'algèbre de Brown. Nous procédons en deux étapes : premièrement, nous calculons les  $*$ -moments joints, puis nous caractérisons la distribution grâce aux cumulants libres. Nous obtenons que ces traces sont asymptotiquement des variables aléatoires circulaires  $*$ -libres. Nous explorons aussi le groupe dual orthogonal, qui a un comportement similaire.

**Mots-clés :** groupe quantique fini, représentation irréductible, état de Haar, marche aléatoire sur un groupe quantique fini, groupe dual, probabilités libres,  $*$ -distribution

**Abstract:** In the first part, we introduce the tools of noncommutative mathematics that we will use in our study of finite quantum groups and dual groups. In particular, we present these “groups” and some of their properties.

The second part is dedicated to the study of some finite quantum groups: the Kac-Paljutkin one  $\mathbb{K}\mathbb{P}$  and the family of Sekine  $\mathbb{K}\mathbb{P}_n$ ,  $n \geq 2$ . For each of these examples, we study (asymptotic) properties of the  $*$ -distribution of irreducible characters and convergence of random walks arising from linear combinations of irreducible characters. We first examine the representation theory to determine irreducible representations and their powers. Then we study the  $*$ -distribution of their trace with respect to the Haar state, by looking at the mixed  $*$ -moments. For the Sekine family we determine the asymptotic distribution (as the dimension of the algebra goes to infinity), by considering convergence of moments. For study of random walks, we bound the distance to the Haar state and determine the asymptotic behavior, i.e. the limit state if it exists. We note that the possible limits are any central idempotent state. We also look at cut-off phenomenon in the Sekine finite quantum groups.

In the third part, we study dual groups in the sense of Voiculescu. In particular, we are interested in asymptotic properties of the  $*$ -distribution of traces of some matrices, with respect to the free Haar trace on the unitary dual group. The considered matrices are powers of the unitary matrix generating the Brown algebra. We proceed in two steps, first computing the mixed  $*$ -moments, then characterizing the distribution thanks to the free cumulants. We obtain that these traces are asymptotically  $*$ -free circular variables. We also explore the orthogonal dual group, which has a similar behavior.

**Keywords :** finite quantum group, irreducible representation, Haar state, random walk on a finite quantum group, dual group, free probability,  $*$ -distribution

**2000 Mathematics subject classification:** 20G42, 81R50, 60B15, 46L54