



HAL
open science

Théorie de Bass-Serre profinie

Ndeye Coumba Sarr

► **To cite this version:**

Ndeye Coumba Sarr. Théorie de Bass-Serre profinie. Théorie des groupes [math.GR]. Normandie Université, 2020. Français. NNT : 2020NORMC216 . tel-03103296

HAL Id: tel-03103296

<https://theses.hal.science/tel-03103296v1>

Submitted on 8 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Théorie de Bass-Serre profinie

**Présentée et soutenue par
Ndeye Coumba SARR**

**Thèse soutenue publiquement le 17/12/2020
devant le jury composé de**

M. PIERRE DEBES	Professeur des universités, Université Lille 1 Sciences Et Technolog	Rapporteur du jury
M. CYRIL DEMARCHE	Maître de conférences HDR, Sorbonne Université	Rapporteur du jury
Mme RAMLA ABDELLATIF	Maître de conférences, Université Amiens Picardie Jules Verne	Membre du jury
M. NIELS BORNE	Maître de conférences, Université Lille 1 Sciences Et Technolog	Membre du jury
M. JÉRÔME POINEAU	Professeur des universités, Université Caen Normandie	Directeur de thèse
M. BRUNO DESCHAMPS	Professeur des universités, Université Le Mans	Co-directeur de thèse

Thèse dirigée par JÉRÔME POINEAU et BRUNO DESCHAMPS, Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen)



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE



Théorie de Bass-Serre Profinie

par
Ndèye Coumba SARR

Remerciements

J'aimerais adresser mes sincères remerciements à ceux qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse.

À pareilles circonstances, il est de mise d'arrondir les angles et les formes, pour faire preuve de bonne convenance, je me réjouis d'avance de ne pas avoir à en faire usage dans les lignes à venir, tant j'ai côtoyé que des personnes formidables tout au long cette aventure.

Je tiens tout particulièrement à remercier mes deux directeurs de thèse Bruno Deschamps et Jérôme Poineau.

Je remercie Bruno pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ma thèse, pour ses conseils avisés, pour les nombreuses heures qu'il m'a consacré. Dès le début de mon doctorat, à travers des séances et groupe de travail, Bruno m'a permis d'appivoiser mon sujet et a accompagné mes débuts dans recherche mathématique dans des conditions de travail agréable. Je suis reconnaissante envers lui pour toutes les connaissances mathématiques précieuses que j'ai apprises auprès de lui. Son énergie débordante, sa bonne humeur légendaire et surtout son humour m'ont porté tout au long de ces trois dernières années. Je le remercie particulièrement de m'avoir appris à être moins scolaire et à mûrir scientifiquement tout au long de ces trois dernières années.

Je ne remercierai jamais assez Jérôme Poineau, pour son intérêt, sa grande disponibilité et ses innombrables conseils tout au long de ce travail doctoral. J'ai pris un grand plaisir à l'avoir comme directeur de thèse. Jérôme a pris le temps, à chaque fois, de relire méticuleusement avec moi chaque bout de texte que je lui ai soumis, avec une patience infinie malgré ses nombreuses responsabilités. Il m'a appris à matérialiser mes idées sur le papier grâce à de précieux conseils de rédaction toujours assortis d'une rigueur hors pair.

J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa réactivité par rapport à la relecture de documents que je lui ai adressés, parfois, avec des délais assez courts. Chaque discussion avec Jérôme était une source immense de motivation et d'assurance dans les moments d'incertitudes que j'ai traversés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à sa gentillesse, son infinie patience, ses qualités humaines d'écoute et l'intérêt qu'il a systématiquement montré à chacune de mes nombreuses questions.

Ma gratitude va également vers Pierre Debès et Cyril Demarche de m'avoir fait l'honneur de participer au jury et d'avoir accepté la tâche chronophage d'être les rapporteurs de cette thèse. La version finale de cette thèse a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je remercie Cyril Demarche de m'avoir donné envie de faire une thèse au travers de ses enseignements à Paris VI mais aussi comme encadrant de mon mémoire de master.

Je suis très reconnaissante envers Ramla Abdellatif et Niels Borne d'avoir accepté de prendre part à mon jury. Je dois remercier une seconde fois Niels Borne qui, avec Christian Ballot ont constitué mon comité de suivi de thèse, ils se sont chargés de cette tâche avec bienveillance. Ils m'ont encouragée, conseillée et soutenue.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à l'ensemble des membres du Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme de Caen. Je remercie particulièrement Francesco Amoroso -avec qui j'ai eu la joie d'enseigner-, Christian Ballot, Vincent et Mohamed D.B. pour leur sympathie.

Je remercie la souriante Marie de l'école doctorale qui fait un travail formidable ainsi que Gilbert Levitt qui répond toujours à nos questions concernant l'ED en tant que directeur adjoint. Je remercie Anita pour sa gentillesse et toutes les fois qu'elle m'a ouvert la porte de mon bureau quand j'ai oublié mes clés.

Je ne saurais terminer sans remercier les doctorants du LMNO : Arnaud et Ruben qui m'ont mise à l'aise dans leur bureau à mon arrivée, César, Sarah, Vlerë, Léonard et Pablo, Georges et Frank qui m'ont accueillie au sein du labo. Je me suis tout de suite intégrée à cette équipe grâce à Georges avec qui j'ai partagé des fous rires et d'excellents moments. Le côté obscur de la force n'a jamais attiré Frank bien qu'il veuille nous faire croire le contraire, merci pour tout !

Je remercie les doctorants arrivés en même temps que moi : Étienne notre " secrétaire administratif ", merci aussi pour les délicieux desserts cuisinés avec beaucoup d'amour,

Julien la gentillesse en personne et Guillaume avec qui j'ai souvent eu des discussions très intéressantes. Je remercie Dalal pour les bons moments passés ensemble et nos bavardages interminables ainsi que Nacer pour son enthousiasme et sa bonne humeur.

Je suis reconnaissante envers : Gilberto, Velibor, Stavroula, Hung, Tin, Thiem Njaka, Étienne E. et Emmanuel pour les pauses cafés et les bons moments en votre compagnie. J'aurais aimé passer plus de temps avec eux.

Pendant plus d'une année j'ai partagé mon bureau avec une personne gentille et altruiste qui m'a toujours aidé dans la tournure grammaticale de mes phrases et a toujours répondu à mes questions non mathématiques parfois bêtes : merci Tiphaine !

Ma gratitude va vers Dorian, mon demi-frère de thèse qui m'a appris le temps d'un trajet en tramway des choses intéressantes sur les espaces de Berkovich. J'ai toujours pris plaisir à discuter avec toi pendant les pauses thé ! Je n'oublie pas de remercier ton "coiffeur" du confinement pour le fou rire qu'il m'a procuré.

On garde le meilleur pour la fin, mon cher ami et adorable (parfois chiant) petit frère de thèse, Angelot qui ne se lasse jamais de m'écouter me lamenter. J'ai été impressionnée par sa maturité scientifique, sa culture mathématique et son intelligence rare. Je te remercie pour toutes nos discussions quotidiennes, j'en ressors toujours moins bête qu'avant. Nous avons partagé des moments d'amitiés au labo et en dehors, qui je l'espère vont perdurer.

Wolof Njaay neena : " peccum liir bu neexee nday jaa jàpp ca mbagg ya". Ginnaaw sunu Borom, mënuma baña sant ñi ma jàppale ba ma aksi fii : tàmbelee ko ci samay wayjur, samay mbok, samay xarit Bintu, Buso (jàpp na ci firi angale mi) ak Xady (borom copyright kb rbt). Di sant bu baax jànt yiy leeral samay bes sama dom Maryaama-Busu ak sama borom kër, sama xarit, sa lepp Ceerno, jàppale nama, yërëm nama, muñal nama samak doiyati jugee ci sama melokaan, wala sax sam ñàkk jot jugee ci ligeey bi ma dëgmaloon.

Di sant Axmadu Si, sama papa, sama xarit, yàgg nama wax gëmal sa bopp lépp dina baax ak ñépp ñima jàppale bama ak ci fi Baay Mbaay Joop, Xaadim Amar, Jiily Caam, Maxa... Ku lim juum...

Mbind mi di ko jagleel Sira Senjoor di ñaan sunu Borom teeru ko ca aljana firdaws ya.

Table des Matières

Introduction générale	10
1 Action de groupe sur un arbre	18
1.1 Arbres	18
1.2 Action libre sur un arbre	23
1.3 Amalgames	24
1.3.1 Structure des sommes amalgamées	26
1.4 Action sur un arbre à domaine fondamental un arbre	27
1.4.1 Amalgames à deux facteurs	27
1.4.2 Amalgames avec un nombre fini de facteurs	28
1.5 Structure de groupes agissant sur un arbre	34
1.5.1 Groupe fondamental d'un graphe de groupes	34
1.5.2 Revêtement universel relatif à un graphe de groupes	35
1.5.3 Le théorème de structure	37
2 Groupes profinis et prographes	40
2.1 Prographes sylvestres et actions profinies	41
2.1.1 Prographes	41
2.1.2 Action profinie	43
2.2 La presque liberté	47
2.2.1 Groupes profinis presque libres	47
2.2.2 Théorème de Deschamps Suarez	48
2.3 Exemple et interprétation galoisienne	49

3	Groupes profinis presque amalgamés	54
3.1	Résultats préliminaires	54
3.2	Action à domaine fondamental arbre fini	59
3.3	Une illustration galoisienne	64
4	Le cas général du groupe fondamental	70
4.1	Groupes profinis presque groupes fondamentaux	70
	Références	77

La théorie de Serre-Bass (exposée dans [Ser77]) est une partie fondamentale de la théorie géométrique des groupes moderne. Introduite en 1970 par Jean-Pierre Serre, elle vise à donner une interprétation combinatoire de plusieurs résultats jugés "mystérieux" dans les années 60, tels que le théorème d'Ihara suivant lequel tout sous-groupe discret et sans torsion de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ est libre. La preuve initiale de ce théorème est de nature combinatoire et utilise le fait que ce groupe se décompose en somme amalgamée de deux copies de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$. Serre explique que, par analogie à la topologie, il existe une manière plus naturelle de prouver la liberté d'un groupe : en le faisant opérer librement sur un arbre. C'est d'ailleurs l'un des premiers résultats de cette théorie, il montre ainsi qu'un groupe (abstrait) est libre si et seulement s'il agit librement sur un arbre. Ce qui fournit alors une des preuves les plus élémentaires du théorème de Nielsen-Schreier qui affirme que *tout sous-groupe d'un groupe libre est libre* et aussi de celui d'Ihara.

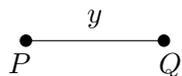
Dans leur article [DSA11], Deschamps et Suarez se sont intéressés à un analogue pour les groupes profinis de ce résultat sur la liberté des groupes. Les groupes prolibres ne jouissent pas de l'ensemble des propriétés des groupes libres. Par exemple, un sous-groupe fermé d'un groupe prolibre n'est pas nécessairement prolibre (pour un analogue du théorème de Nielsen-Schreier pour les groupes profinis on se restreint au cas des sous-groupes ouverts). Les auteurs ont donc été amenés à considérer une propriété plus faible : la presque liberté. Un groupe profini est dit presque libre s'il est la complétion profinie d'un groupe libre pour une famille de sous-groupes d'intersection triviale. Ceci équivaut à dire que, du point de vue topologique, le groupe profini possède un sous-groupe discret libre dense. Deschamps et Suarez développent alors dans leur article des outils analogues à la situation discrète : prographes, proarbres, proactions etc. qui leur permettent d'énoncer le résultat suivant : *un groupe profini est presque libre si et seulement s'il agit prolibrement sur un proarbre*.

Ces outils sont moralement des passages à la limite projective des notions combinatoires

de graphes, d'arbres et d'actions. Par exemple les proarbres sont des systèmes inductifs extraits par sections de systèmes projectifs de graphes (prographes) qui, par passage à la limite directe, donnent des arbres.

De manière générale, dans [Ser77], Serre s'intéresse à l'étude de la structure d'un groupe G agissant sur un arbre X , lorsque l'on connaît le graphe quotient $G \backslash X$ ainsi que les stabilisateurs G_P des sommets, $P \in \mathcal{S}(X)$ et G_y des arêtes, $y \in \mathcal{A}(X)$. Si l'action de G sur X est libre auquel cas les stabilisateurs G_P et G_y sont triviaux alors G est libre.

Un autre cas particulier très important est celui où le graphe quotient $G \backslash X$ est un segment;



Dans ce cas G s'identifie à l'amalgame $G_P *_{G_y} G_Q$. Réciproquement, G est amalgame de deux groupes sur un troisième s'il agit sur un arbre avec comme domaine fondamental un segment. Un exemple d'application consiste à faire agir $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré, ce qui permet de retrouver le fait bien connu que $SL_2(\mathbb{Z})$ est le produit amalgamé de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il existe beaucoup d'autres illustrations de ce résultat entre autres ce joli résultat d'Ihara qui affirme que $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ peut être vu comme produit amalgamé de deux copies de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ ou bien encore un théorème de Nagao donnant la structure de $GL_2(k[t])$ comme amalgame de $GL_2(k)$ et du groupe de Borel $B(k[t])$.

Avec la collaboration de H. Bass, Serre donne la caractérisation du groupe G dans le cas général où le graphe $G \backslash X$ n'est pas forcément un arbre. Ainsi apparaît la notion de "groupe fondamental d'un graphe de groupes" qui généralise celle de groupe libre et celle d'amalgame. Le résultat principal dit que l'on peut reconstituer G à partir de $G \backslash X$ et des stabilisateurs G_P et G_y des sommets et des arêtes : c'est le groupe fondamental d'un graphe de groupes porté par $G \backslash X$. De plus tout graphe de groupes s'obtient ainsi de façon unique. Par exemple si $G \backslash X$ est un lacet, on obtient les groupes de "type HNN" .

L'objet de cette thèse est de donner un analogue du théorème principal de [DSA11] pour le cas des amalgames mais aussi une généralisation de ce résultat au cas du groupe fondamental. Cela nous amène à considérer dans un premier temps une autre catégorie de groupes profinis : les groupes profinis presque amalgamés (i.e. possédant un sous-groupe discret amalgamé dense) et la notion de groupe profini presque groupe fondamental d'un graphe de groupes qui généralise la précédente, dans un second temps.

Les résultats précédents peuvent être utilisés pour étudier la structure de certains groupes de Galois. Par exemple, si l'on considère la tour d'extensions galoisiennes suivante

$$\begin{array}{c}
\text{Puis}_p(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}})) \\
\downarrow \\
\mathbb{C}((t)) \\
\downarrow \\
\mathbb{R}((t))
\end{array}$$

Les groupes de Galois des extensions $\text{Puis}_p(\mathbb{C})/\mathbb{C}((t))$ et $\text{Puis}_p(\mathbb{C})/\mathbb{R}((t))$ sont respectivement presque libre et presque amalgamé. Ce deux résultats sont triviaux car ces groupes sont respectivement isomorphes à \mathbb{Z}_p et $\widehat{D_{p^\infty}} = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cependant, cela montre que les résultats cités plus haut peuvent s'illustrer en théorie de Galois.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à des rappels sur la théorie de Bass-Serre. Dans le chapitre 2 nous rappelons la théorie des prographes sylvestres de Deschamps-Suarez et le lien avec la presque liberté en suivant [DSA11]. Le chapitre 3 traite de l'analogie au théorème de Deschamps-Suarez pour les groupes profinis presque amalgamés, cette partie fait l'objet de l'article [Sar20]. Nous proposons une généralisation de ces deux résultats dans le chapitre 4 de ce manuscrit.

Chapitre 1 : Théorie de Bass-Serre

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous exposons les bases de la théorie de Bass-Serre.

Il s'agit essentiellement du premier chapitre de [Ser77]. Nous commençons par les définitions des notions de graphes, d'arbres et d'actions de groupes sur un graphe entre autres. Nous nous intéressons ensuite à une classe d'exemples de graphes que constituent les graphes de Cayley d'un groupe relativement à une partie de ce dernier. En particulier, nous définissons les notions de chemins, circuits, lacets qui vont intervenir naturellement dans la suite.

Dans la section suivante, nous expliquons comment étudier un groupe au moyen du graphe qui lui est associé. Nous précisons le lien entre groupes libres et actions libres sur un arbre. On passe de là aux amalgames (section 1.3), plus précisément nous donnons la définition et la structure des éléments de cette notion centrale dans notre thèse. Ce théorème de structure sera l'occasion pour nous de parler d'un autre objet dans la lignée des amalgames : les extensions HNN. Puis nous montrons que les amalgames sont exactement les groupes qui agissent sur un arbre avec comme domaine fondamental un arbre. Dans ce manuscrit, nous nous restreignons au cas d'une action à domaine fondamental un arbre fini pour ainsi dire aux amalgames avec un nombre fini de facteurs. Ce résultat est important pour la suite, nous en fournissons un analogue profini.

Considérons un groupe G qui agit sur un arbre Γ et H un sous-groupe distingué de G . Nous donnons une série de propriétés relatives à l'action du groupe quotient G/H sur le graphe quotient $H \backslash \Gamma$. Nous décrivons ensuite explicitement l'arbre associé au groupe diédral infini $D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est un cas particulier de groupes amalgamé, ainsi que l'action de ce dernier sur l'arbre. Cet exemple nous sert aussi d'illustration aux différents résultats énoncés en amont.

Nous terminons ce chapitre en traitant le cas général d'un groupe G agissant sans inversion sur un arbre X ainsi que le théorème de structure selon lequel un tel groupe s'identifie au groupe fondamental d'un graphe de groupes porté par le graphe quotient $G \backslash X$. Un analogue profini de ce résultat fera l'objet du chapitre 3. L'un des ingrédients principaux du théorème de structure est l'existence d'un revêtement universel du graphe de groupe associé au quotient $G \backslash X$.

Nous nous contentons d'énoncer la plupart des résultats de ce chapitre et de donner des références pour les preuves. Nous fournissons bien sûr des preuves pour les nouveaux résultats qui interviennent.

Chapitre 2 : Prographes sylvestres et groupes profinis

Ce chapitre est dédié à un rappel sur la théorie des prographes de Deschamps et Suarez ([DSA11]). Nous commençons par rappeler les définitions des notions de base indispensables à cette thèse telles que celles de prographe, proarbre et de section graphiquement cohérente. Nous introduisons donc un peu de terminologie avant de présenter le résultat principal de ce chapitre.

Définition. un **prographe** est un système projectif de graphes $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ indexé sur un ensemble pré-ordonné d'indices (I, \leq) filtrant à droite, tel que pour tout $i \leq j$ le morphisme de graphes θ_{ji} soit surjectif.

Il est légitime de se poser la question de savoir comment on passe de cette notion de prographe à celle de proarbre. C'est là où interviennent les sections graphiquement cohérentes que nous définissons au début de ce chapitre. En effet, un proarbre est un système inductif extrait par section du prographe qui, par passage à la limite directe, donne un arbre. Nous donnons la définition d'un prographe associé au graphe de Cayley d'un groupe. Nous montrons ensuite pour un groupe dénombrable l'existence d'une section graphiquement cohérente permettant de reconstruire le groupe. Ce résultat est crucial pour la preuve du théorème principal de ce chapitre.

Dans la partie suivante nous voyons comment un groupe profini agit sur un prographe. Pour cela, on considère un système projectif de groupes finis et on extrait de ce dernier un système inductif par une section. Ensuite, nous définissons la notion d'action profinie (resp prolibre), il s'agit en fait de faire agir (resp. librement) chaque étage de notre système projectif de groupes finis définissant un groupe profini donné sur les étages d'un prographe,

ces actions étant soumises à des conditions arithmético-combinatoires. Dans la deuxième section de ce chapitre nous parlons des groupes profinis presque libres. En voici la définition:

Définition. Un groupe profini sera dit presque libre s'il est égal à la complétion profini d'un groupe libre relativement à une base de filtre de sous-groupes distingués d'indice fini \mathcal{B} , vérifiant $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{e\}$.

De manière équivalente un groupe profini est presque libre s'il possède un sous-groupe abstrait libre dense. Nous pouvons enfin énoncer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème. *Soit Ω un groupe profini de rang dénombrable. Alors Ω est presque libre si et seulement si Ω agit prolibrement sur un proarbre.*

Dans la dernière partie de ce chapitre nous donnons un exemple de référence pour illustrer les différentes notions introduites. Il s'agit du prographe associé au groupe profini \mathbb{Z}_p donné dans [DSA11]. Ce qui nous permet de montrer que ce dernier est presque libre. Ce résultat est trivial. Mais l'intérêt de cet exemple est que nous l'utilisons pour donner une illustration galoisienne du théorème de Deschamps-Suarez.

En fait, nous (re)montrons que le groupe profini $\text{Gal}(\text{Puis}_p(\mathbb{C})/\mathbb{C}((t)))$ est presque libre en le faisant agir prolibrement sur un proarbre. Pour cela, on considère le système projectif $(G_n, \text{res}_{mn})_{n \in \mathbb{N}^*}$ où res_{mn} désigne l'application de restriction et $G_n = \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{1/p^n}))/\mathbb{C}((t)))$. Le corps $\text{Puis}_p(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}((t^{1/p^n}))$ est la p -partie du corps des séries de Puiseux sur \mathbb{C} et c'est une extension galoisienne sur $\mathbb{C}((t))$ de groupe de Galois $\varprojlim_n G_n \simeq \mathbb{Z}_p$. En particulier ce groupe est presque libre. Nous proposons une preuve de la presque liberté de ce groupe en utilisant l'arithmétique de ce corps. En effet, nous construisons un prographe "arithmétique" sur lequel le groupe $\text{Gal}(\mathbb{C}((t^{1/p^n}))/\mathbb{C}((t))) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ agit librement et transitivement. Le prographe $(\Gamma_n)_n$ associé à l'extension $\text{Puis}_p(\mathbb{C})/\mathbb{R}((t))$ s'obtient en considérant comme ensemble de sommet $\mathcal{S}(\Gamma_n)$ à chaque étage n , la famille $\{\xi_{p^n}^k, k = 0, 1, \dots, p^n - 1\}$ d'éléments de $\mathbb{C}((t^{1/p^n}))$ où ξ_n est une racine n -ième de l'unité.

Chapitre 3 : Groupes profinis presque amalgamés

Les objets et méthodes utilisés par Deschamps et Suarez dans leur article se placent dans un cadre tout à fait général. Nous les étendons dans ce chapitre à la situation des amalgames. Nous commençons par adapter, en ajoutant la donnée de domaines fondamentaux finis, les résultats de DS montrant pour un groupe dénombrable l'existence d'une section permettant de reconstruire le groupe. La preuve est essentiellement la même pour le lemme 3.1.1, nous prenons le soin de vérifier la préservation du domaine fondamental à chaque étage du prographe ainsi que par passage à la limite inductive via la section. Cependant dans le théorème 3.1.2, nous demandons que les stabilisateurs des sommets du domaine fondamental soient finis. Cette hypothèse signifie que dans la suite nous allons devoir nous restreindre à des amalgames de groupes finis.

Ensuite nous introduisons la notion d'action à domaine fondamental arbre fini d'un groupe profini sur un prographe. Cela consiste à faire agir les groupes du système projectif de groupes finis associés au groupe profini sur chaque étage d'un système projectif de graphes (prographes), de sorte que l'action à chaque étage possède un domaine fondamental qui est un arbre fini, avec en plus une condition de compatibilité entre la section graphiquement cohérente du prographe et la section du groupe profini.

Puis nous donnons la définition de l'analogue des groupes profinis presque libres : les groupes profinis presque amalgamés. Ce sont des complétions profinies de groupes finis amalgamés relativement à une base de filtre de sous-groupes. De même ici encore être presque amalgamé équivaut à posséder un sous groupe dense qui est un amalgame.

Nous donnons ainsi l'analogue du théorème de Deschamps-Suarez sur les groupes profinis presque libres au cas des groupes profinis presque amalgamés. Ce qui nous amène aux deux théorèmes suivants :

Théorème. *Soit Ω un groupe profini de rang dénombrable qui agit à domaine fondamental arbre fini sur un proarbre \mathcal{P} . Alors Ω est presque amalgamé.*

Théorème. *Soit Ω un groupe profini de rang dénombrable, finiment presque amalgamé. Alors Ω agit à domaine fondamental arbre fini sur un proarbre.*

Comme pour le chapitre précédent, nous terminons ce chapitre par un exemple, ici, celui du groupe profini $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on montre qu'il est presque amalgamé. Il s'agit en fait du groupe \widehat{D}_{p^∞} , complétion profinie du groupe diédral infini $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ relativement à une certaine base de filtre de sous-groupes distingués. Ensuite, nous utilisons cet exemple pour obtenir une illustration galoisienne, ce qui nous permet de conclure que le groupe de Galois $\text{Gal}(\text{Puis}_p(\mathbb{C})/\mathbb{R}((t))) \simeq \widehat{D}_{p^\infty}$ est presque amalgamé. Encore une fois ce résultat est trivial mais nous incite à considérer d'autres situations arithmétiques pour lesquelles on ne connaît pas le groupe de Galois mais pour lesquelles on pourrait obtenir la propriété d'être presque amalgamé.

Chapitre 4 : Généralisation

Dans le chapitre 4 nous introduisons la notion de groupe profini presque groupe fondamental de type Y , pour Y un graphe fixé, qui généralise celles de groupe profini presque libre et presque amalgamé. De même la notion d'action convenable qui généralise celle d'action à domaine fondamental arbre fini. Tout comme dans le chapitre précédent, nous commençons par adapter les résultats du chapitre deux à notre situation. La difficulté ici était de trouver un sous-graphe qui puisse jouer le même rôle que le domaine dans le cas des groupes profinis presque amalgamés. Nous avons réussi à la contourner grâce un résultat de Serre : le lemme 4 de la page 51 de [Ser77].

Définition. Soit Y un graphe connexe non vide. Soit G un groupe qui agit sans inversion sur un arbre X . On dit que G est un **groupe fondamental de type Y** si le graphe

quotient $G \backslash X$ est égal à Y et si G s'identifie au $\pi_1(G, Y, T)$, où (G, Y, T) est le graphe de groupe associé à l'action de G sur X en T , un arbre maximal.

Un groupe profini est dit presque groupe fondamental de type Y s'il possède un sous-groupe abstrait dense qui est un groupe fondamental de type Y .

Nous démontrons ensuite les deux théorèmes suivants :

Théorème. *Soit Y un graphe connexe non vide et $\Omega = \varprojlim_i G_i$ un groupe profini de rang dénombrable qui agit convenablement sur un proarbre $\mathcal{P} = (\Gamma_i)_i$. Alors Ω est presque un groupe fondamental de type $Y = \varinjlim_r G_i \backslash \varinjlim_s \Gamma_i$.*

Théorème. *Soit Y un graphe fini connexe non vide et $\Omega = \varprojlim_n G_n$ un groupe profini de rang dénombrable, presque groupe fondamental de type Y , finiment engendré. Alors Ω agit convenablement sur un proarbre $\mathcal{P} = (\Gamma_n, \theta_{mn})_i$ tel que pour tout n , le quotient $G_n \backslash \Gamma_n$ est isomorphe à Y .*

Nous travaillons sur une illustration de ce résultat aux groupes de Baumslag-Solitar.

Ce premier chapitre est consacré à des rappels sur la théorie de Bass-Serre; pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [Ser77] [Gil93] et [RS02]. Nous débutons ce chapitre par une première section dédiée aux arbres. Nous donnons les définitions des notions de graphe, d'arbre, d'action de groupe sur un graphe, de graphe de Cayley d'un groupe, etc. Ensuite dans la section suivante nous parlons d'action libre sur un arbre. Nous énonçons le théorème de structure des groupes agissant librement sur un arbre et le théorème de Nielsen-Schreier qui en découle. La notion d'amalgames est abordée dans la section 1.3. Nous donnons un théorème de structure des éléments d'un groupe amalgamé à deux facteurs grâce à la notion de mots réduits. Dans la section d'après nous traitons le cas des actions de groupe sur un arbre avec un domaine fondamental qui est un arbre, ce qui nous donne la structure des groupes amalgamés. Nous démontrons quelques propriétés relatives aux amalgames et aux actions de groupes sur un arbre avant de donner dans la dernière section une généralisation des résultats sur les groupes libres et les amalgames. Pour cela, nous parlons de la notion de groupes fondamental d'un graphe de groupe, de revêtement universel relatif à un graphe de groupes avant d'énoncer le théorème de structure des groupes agissant sans inversion sur un arbre.

1.1 Arbres

Définition 1.1.1. Un **graphe** abstrait Γ est la donnée :

- d'un ensemble de **sommets** X ;
- d'un ensemble d'**arêtes** Y ;

- d'une application $Y \rightarrow X \times X$, qui envoie une arête y de Γ sur le couple $(o(y), t(y))$ de son origine $o(y)$ et de son sommet terminal $t(y)$;
- et d'une application de Y dans lui même qui envoie une arête y sur son arête opposée \bar{y} .

Et ces deux applications satisfont à la condition suivante : pour tout $y \in Y$, $\bar{\bar{y}} = y$, $\bar{y} \neq y$ (i.e. l'application est d'ordre 2 et sans point fixe) et $o(y) = t(\bar{y})$.

On note $X = \mathcal{S}(\Gamma)$ et $Y = \mathcal{A}(\Gamma)$ respectivement, l'ensemble des sommets et des arêtes de Γ . Un graphe est généralement représenté par un diagramme dans lequel un point correspond à un sommet et un segment d'extrémités une origine et un sommet terminal correspond à une arête.

Cette représentation de Γ ne nous précise pas l'origine et le sommet terminal des arêtes. En effet, un segment représente une paire d'arêtes (y et \bar{y}). La notion suivante d'orientation d'un graphe permet de distinguer ces deux arêtes.

Il est clair que l'ensemble des arêtes Y d'un graphe peut s'écrire comme la réunion disjointe de deux ensembles, $Y = Y_+ \sqcup \bar{Y}_+$. Une **orientation d'un graphe** est le choix d'une partie Y_+ . Il en existe toujours. Un **graphe orienté** est défini, à isomorphisme près, par la donnée de deux ensembles X et Y_+ et d'une application $Y_+ \rightarrow X \times X$.

Définition 1.1.2. Soient deux graphes Γ et Γ' . On appelle **morphisme de graphes** de Γ dans Γ' toute application $f : \mathcal{S}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}(\Gamma')$ qui envoie les sommets de Γ sur ceux de Γ' telle que : Pour toute arête $y = (P, Q) \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $(f(P), f(Q)) \in \mathcal{A}(\Gamma')$, avec P et Q respectivement l'origine et le sommet terminal de y et pour toute arête $y \in \mathcal{A}(\Gamma)$ $f(o(y))=o(f(y))$, $f(t(y))=t(f(y))$ et $f(\bar{y}) = \overline{f(y)}$.

Les graphes munis des morphismes de graphes forment un catégorie au sens de la théorie des catégories. Nous pouvons maintenant parler de la notion d'**action d'un groupe sur un graphe**.

Définition 1.1.3. Soient G un groupe et Γ un graphe. On dit que G agit sur Γ si G agit sur l'ensemble des sommets $\mathcal{S}(\Gamma)$ et sur l'ensemble des arêtes $\mathcal{A}(\Gamma)$ et l'action est compatible avec les applications o , t et l'inversion.

De manière équivalente, un groupe G agit sur un graphe Γ s'il est muni d'un morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$.

Exemple 1.1.4. 1. Le graphe Ch_n ayant pour ensemble de sommets $\mathcal{S}(\Gamma) = \{0, 1, \dots, n\}$ et pour ensemble d'arêtes $\mathcal{A}_+(\Gamma) = \{[i, i + 1]\}$ pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ est représenté par le dessin suivant :

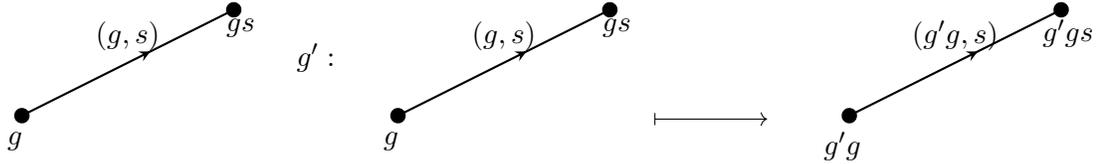


2. **Le graphe de Cayley** $\Gamma(G, S)$ d'un groupe.

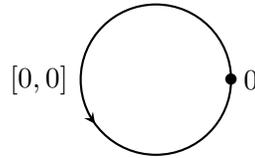
Soit G un groupe et soit S une partie de G . Le graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ de G relativement à S est le graphe défini par :

- l'ensemble des sommets $\mathcal{S}(\Gamma) = G$;
- l'orientation $\mathcal{A}(\Gamma)_+ = G \times S$
- $o(g, s) = g$ et $t(g, s) = gs$, pour toute arête $(g, s) \in G \times S$.

La multiplication à gauche par les éléments de G définit une opération de G sur Γ qui préserve l'orientation. De plus G opère librement sur les sommets et les arêtes de Γ .

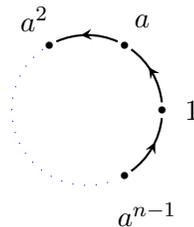


3. Si on prend $G = \{1\}$ et $S = \{1\}$. Alors $\Gamma(G, S)$ est un **lacet** :



Malgré la notation, l'arête $[0, 0]$ est différente de son arête opposée $\overline{[0, 0]}$.

4. Cette fois, G est cyclique d'ordre n engendré par a , $G = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ avec $n \in \{1, 2, \dots, \}$ et $S = \{a\}$. Alors $\Gamma(G, S)$ est ce que l'on appelle un **circuit** de longueur n noté Cir_n .



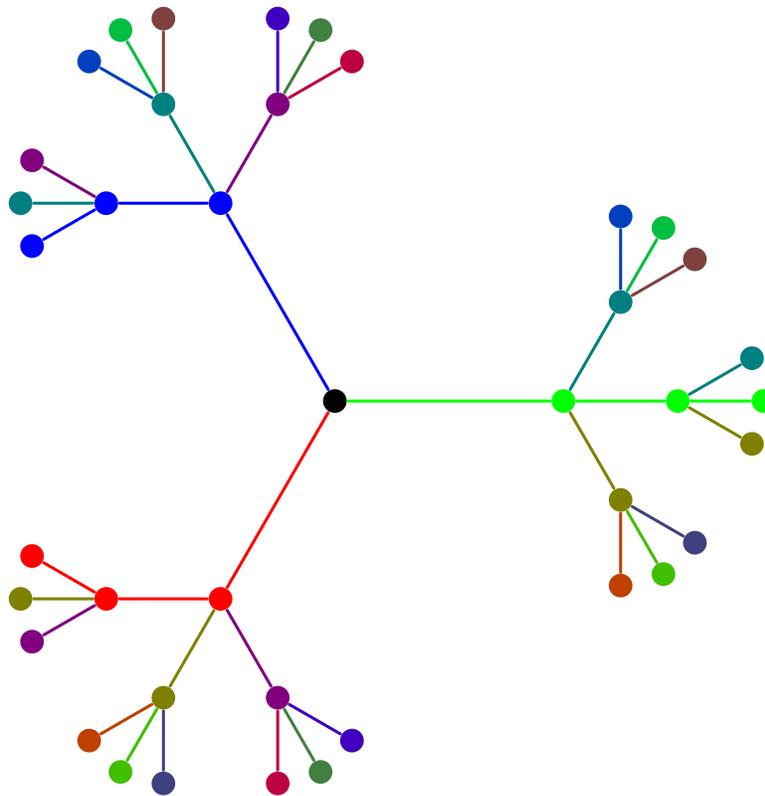
On reprend les notation du 1. de l'exemple précédent, soit Γ un graphe. Un morphisme $c : \text{Ch}_n \rightarrow \Gamma$ est aussi appelé **chemin** de longueur n dans le graphe Γ .

De même, on appelle **circuit** de longueur n dans un graphe tout sous-graphe isomorphe à Cir_n . Un lacet est un circuit de longueur 1.

Définition 1.1.5. Un graphe est dit **connexe** si deux sommets quelconques sont les extrémités d'au moins un chemin. Les sous-graphes connexes maximaux (pour la relation d'inclusion) s'appellent les composantes connexes du graphe.

Définition 1.1.6. Un **arbre** est un graphe connexe, non vide, sans circuit.

Exemple 1.1.7. Voici quelques exemple d'arbres.



Un chemin sans aller-retour i.e. $y_{i+1} \neq \bar{y}_i$ dans un arbre s'appelle une **géodésique**.

Sous-arbres engendrés par un ensemble de sommets

Soit Γ un arbre et X' une partie de $X = \mathcal{S}(\Gamma)$. Tout sous-arbre Γ' de Γ contenant X' contient les géodésiques d'extrémités dans X' . Inversement les sommets et les arêtes de ces géodésiques constitue un sous-arbre Γ' de Γ contenant X' ; c'est le sous-arbre engendré par X'

Sommets terminaux

Soit Γ un graphe, $P \in X$, on définit le graphe $\Gamma - P$ comme étant le graphe obtenu en supprimant P de l'ensemble des sommets X et en supprimant de Y toutes les arêtes qui ont P pour origine ou sommet terminal. Si on note Y_P l'ensemble des arêtes y tel que $t(y) = P$ alors $\Gamma - P = [(X \setminus P), Y \setminus \{Y_P \cup \bar{Y}_P\}]$.

Définition 1.1.8. Le cardinal de Y_P s'appelle l'**indice** de P . Si $n = 0$, on dit que P est **isolé**, (si Γ est connexe ce n'est possible que si $X = \{P\}$, $Y = \{\emptyset\}$). Si $n \leq 1$ on dit que P est un **sommet terminal**.

Proposition 1.1.9. *Soit P un sommet terminal non isolé d'un graphe Γ (i.e. sommet terminal d'une unique arête).*

1. Γ est connexe si et seulement si $\Gamma - P$ est connexe.
2. Tout circuit de Γ est contenu dans $\Gamma - P$.
3. Γ est un arbre si et seulement si $\Gamma - P$ est un arbre.

Démonstration. 1. Comme une unique arête y a pour sommet terminal P , alors l'ensemble des arêtes de Γ_P est $Y \setminus \{y, \bar{y}\}$. D'où 1.

2. Un sommet d'un circuit est d'indice supérieur ou égal à 2 donc est différent de P , donc tout circuit de Γ est dans $\Gamma - P$.

3. Résulte de 1. et 2. □

Soit Γ un graphe non vide. L'ensemble des sous graphes de Γ qui sont des arbres, ordonné par l'inclusion, est évidemment inductif. Il possède donc un élément maximal ; un tel élément s'appelle arbre maximal de Γ .

Corollaire 1.1.10. *Soit Λ un arbre maximal d'un graphe Γ connexe non vide. Alors Λ contient tous les sommets de Γ .*

Démonstration. On suppose que non. On peut alors trouver un sommet P de Γ qui n'est pas dans Λ et une arête y reliant P à Q dans Λ . Mais le graphe Δ obtenu par adjonction du sommet P et des arêtes y, \bar{y} serait un arbre par le 3. de la proposition 1.1.9, ce qui contredit la maximalité de Γ d'où le résultat. □

1.2 Action libre sur un arbre

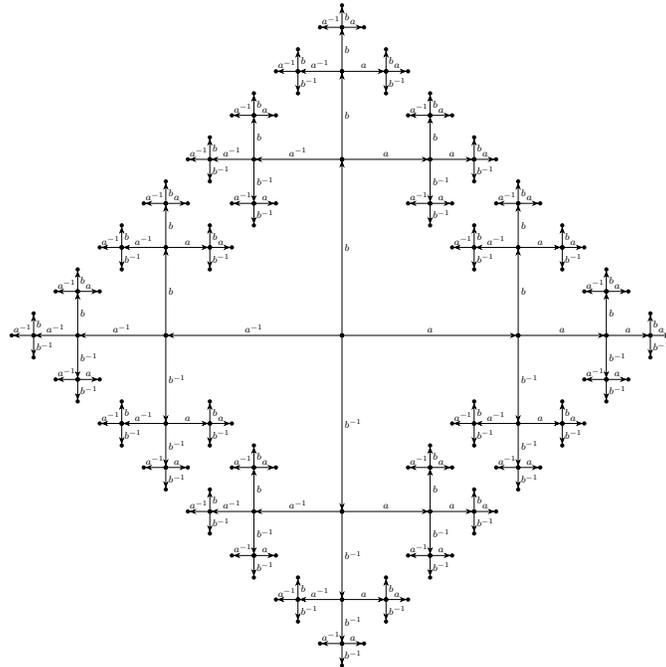
Définition 1.2.1. Soient G un groupe agissant sur un graphe Γ . On dit que G agit sans inversion sur Γ si pour toute arête $y \in \mathcal{A}(\Gamma)$ et tout $g \in G$, on a $gy \neq \bar{y}$. Il est équivalent de dire que G préserve une orientation de Γ .

Définition 1.2.2. Soit G un groupe et Γ un graphe, on dit que G agit librement sur Γ s'il agit sans inversion et si un élément $g \neq 1$ de G ne laisse invariant aucun sommet ni aucune arête de Γ .

Par exemple si S est une partie de G , le groupe G agit librement (par multiplication à gauche) sur le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$. Nous allons donner une caractérisation des groupes libres en terme d'action libre sur leur graphe de Cayley.

Proposition 1.2.3. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ le graphe défini par un groupe G et une partie S de G . Alors Γ est un arbre si et seulement si G est un groupe libre de famille basique S .

Exemple 1.2.4. On prend $G = F(S)$ où $S = \{a, b\}$. L'arbre $\Gamma(G, S)$ est donné par le dessin suivant :



Définition 1.2.5. Si un groupe G agit sans inversion sur un graphe Γ , on peut définir de manière naturelle le graphe quotient $G \backslash \Gamma$. L'ensemble des sommets (resp. des arêtes) de $G \backslash \Gamma$ est le quotient de $\mathcal{S}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{A}(\Gamma)$) par l'action de G .

Il est très important que le groupe G agisse sans inversion, pour que le graphe quotient soit un graphe au sens usuel (à savoir, une arête est toujours différente de son arête opposée).

Lemme 1.2.6. *Soit G un groupe qui agit sans inversion sur un graphe Γ . Tout sous-arbre T' de $G \backslash \Gamma$ se relève en un sous-arbre de Γ . Un relèvement d'arbre maximal de $G \backslash \Gamma$ s'appelle un arbre de représentants de $\Gamma \bmod G$.*

Du lemme précédent découle le théorème suivant :

Théorème 1.2.7. *Un groupe est libre si et seulement si il agit librement sur un arbre. Plus précisément, on se donne G un groupe agissant librement sur un arbre Γ . Alors,*

1. *Il existe un sous-arbre T de Γ qui se projette injectivement dans un arbre maximal de $G \backslash \Gamma$;*
2. *Pour un choix de T comme dans (1) et d'une orientation $Y_+ \subset \mathcal{A}(\Gamma)$ conservée par G on a :*
 - (a) *G est libre de famille basique S composé des élément $g \neq 1$ de G pour lesquels il existe une arête $y \in Y_+$ d'origine dans T et de sommet terminal dans gT .*
 - (b) *Si $\Gamma^* = G/\Gamma$ n'a qu'un nombre fini s de sommets, et si $|\mathcal{A}(\Gamma^*)| = 2a$, on a $|S| - 1 = a - s$.*

En appliquant ce dernier théorème on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.2.8 (Schreier). *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Démonstration. Soit G un groupe libre. On peut faire opérer G librement sur un arbre Γ (cf. prop 1.2.3). Si H est un sous-groupe de G , il est clair que H agit librement sur Γ ; c'est donc un groupe libre d'après le théorème 1.2.7. \square

1.3 Amalgames

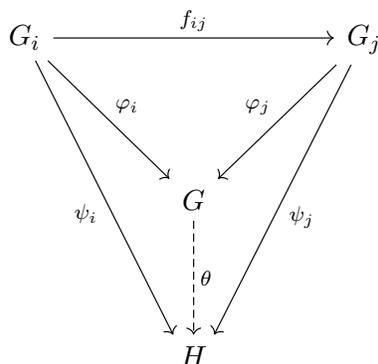
La notion de somme amalgamée de deux groupes est un cas particulier d'une notion plus générale de limite inductive dans la catégorie des groupes.

Définition 1.3.1. Soit une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes, indexée par un ensemble I . Pour tout $i, j \in I$, soit F_{ij} un ensemble d'homomorphismes de G_i dans G_j , i.e. $F_{ij} \subset \text{Hom}(G_i, G_j)$. La **limite inductive** $G = \varinjlim G_i$ de ce système est un groupe G muni d'une famille

d'homomorphismes $\varphi_i \in \text{Hom}(G_i, G)$ telle que $\varphi_j \circ f_{ij} = \varphi_i$ pour tout $f_{ij} \in F_{ij}$, ce groupe et cette famille étant universelle dans le sens suivant :

Pour tout groupe H et tous morphismes $\psi_i \in \text{Hom}(G_i, H)$ tels que $\psi_j \circ f_{ij} = \psi_i$ pour tout $f_{ij} \in F_{ij}$, il existe un unique homomorphisme $\theta \in \text{Hom}(G, H)$ tel que $\psi_i = \theta \circ \varphi_i$.

Le diagramme commutatif suivant résume cette définition :



Proposition 1.3.2. *Le couple formé de G et de la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ existe et est unique à isomorphisme unique près.*

Démonstration. L'unicité se démontre comme d'habitude à partir de la propriété universelle. Nous allons montrer l'existence. Définissons G par générateurs et relations. On prend comme famille génératrice $\mathcal{S} = \bigsqcup G_i$, la réunion disjointe des G_i . Soit $F(\mathcal{S})$ le groupe libre engendré par \mathcal{S} . Soit \mathcal{N} le sous groupe distingué de $F(\mathcal{S})$ engendré par les relations :

$$R_1 = \{xyz^{-1} : x, y, z \in G_i \text{ pour un certain } i \text{ et } z = xy \text{ dans } G_i\}$$

$$R_2 = \{xy^{-1} : x \in G_i, y \in G_j, f_{ij}(x) = y \text{ pour au moins un } f_{ij} \in F_{ij}\}.$$

On prend $G = F(\mathcal{S})/\mathcal{N}$. L'homomorphisme $\varphi_i : G_i \rightarrow G$ est l'homomorphisme canonique, grâce à la relation R_1 . La propriété universelle des groupes libres assure que G est en effet un candidat pour la limite inductive des G_i . \square

Nous pouvons maintenant définir la notion de somme amalgamée de groupes.

Définition 1.3.3. Soient A un groupe et $(G_i)_{i \in I}$ pour famille de groupes et, pour tout $i \in I$, $A \rightarrow G_i$ un homomorphisme injectif. On note $G = *_A G_i$ la limite inductive de la famille (A, G_i) relativement à ces homomorphismes. On l'appelle **la somme amalgamée** des G_i suivant A .

Ici, comme dans toute la suite, nous adoptons le point de vue selon lequel A est identifié à son image dans chacun de G_i , donc est vu comme un sous-groupe de chacun des G_i .

Exemple 1.3.4. 1. Le cas particulier où $A = \{1\}$ nous donne le produit libre usuel et on le note $*G_i$.

2. Le produit libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par lui-même est isomorphe au groupe diédral infini D_∞ :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq D_\infty := \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{a, b \mid a^2 = 1, ab = b^{-1}a\}.$$

3. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq PSL_2(\mathbb{Z})$

4. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq SL_2(\mathbb{Z})$

1.3.1 Structure des sommes amalgamées

On se place dans le cadre de la définition précédente. Pour rappel, on dispose d'une famille de groupes $(G_i)_{i \in I}$, d'un groupe A et, pour tout $i \in I$, d'un homomorphisme injectif de A dans G_i . La limite inductive de la famille (A, G_i) est notée $G = *_A G_i$. Nous allons donner la structure de ces groupes amalgamés.

Mais avant introduisons la notion de mot réduit qui nous sera utile pour cela.

Pour tout $i \in I$, soit S_i une transversale à gauche de A dans G_i , i.e. un ensemble de représentants S_i des classes à gauche de G_i suivant A . Et on suppose que $1 \in S_i$. On a donc une bijection $(a, s) \mapsto as$ de $A \times S_i$ dans G_i . L'image de l'ensemble $A \times S_i - \{1\}$ par cette bijection est l'ensemble $G_i - A$.

Soit $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ une suite d'éléments dans I (avec $n \geq 0$) vérifiant la condition suivante (C) : $i_k \neq i_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Définition 1.3.5. On appelle **mot réduit** de type α toute famille $m = (s_1, \dots, s_n, a)$ où $a \in A$, $s_k \in S_{i_k} - \{1\}$ pour $1 \leq k \leq n$.

On note φ (resp. φ_i) l'homomorphisme canonique de A (resp. G_i) dans G .

Le théorème suivant nous permet de décrire la structure des éléments de la somme amalgamée G .

Théorème 1.3.6 ([Ser77]). *Soit $g \in G = G_1 *_A G_2$, alors il existe un unique mot réduit $m = (s_1, \dots, s_n, a)$ de type α tel que :*

$$g = \varphi_{i_1}(s_1) \cdots \varphi_{i_n}(s_n) \varphi(a).$$

Démonstration. Il s'agit de [Ser77], I, 1.2, théorème 1 □

Corollaire 1.3.7. *Avec les notations précédentes, tous les homomorphismes f_i et f sont injectifs. Ainsi on peut identifier A et les G_i à leurs images dans G et on peut affirmer que pour tout $g \in G$ il existe un unique a et une unique suite d'éléments $s_k \in S_{i_k} - \{1\}$ avec $i_k \neq i_{k+1}$ tel que $g = s_1 \cdots s_n a$.*

Les sommes amalgamées interviennent dans la construction de plusieurs objets mathématiques. Elles sont souvent utilisées pour montrer la non trivialités de groupes définis par générateurs et relations. Nous donnons ici l'exemple des extensions HNN dont nous servirons pour illustrer d'autres résultats dans la suite. Pour plus de détail sur la construction des extensions HNN voir [Ser77], [HNN49]

Proposition-Définition 1.3.1. . [Higman, B.H. Neumann, H. Neumann] Soit G un groupe. Soient A un sous-groupe de G et $\theta : A \rightarrow G$ un homomorphisme injectif de A dans G . Il existe alors un groupe \mathcal{G} contenant G et un élément $s \in \mathcal{G}$ tels que $\theta(a) = sas^{-1}$.

On dit que \mathcal{G} se déduit de (A, G, θ) par construction HNN.

Démonstration. Il s'agit de [Ser77], I, 1.4 proposition 5. □

Exemple 1.3.8. Les groupes de Baumslag-Solitar définis pour toute paire m, n d'entiers relatifs, par la présentation $BS(m, n) = \langle a, b | a^{-1}b^m a = b^n \rangle$ sont des exemples d'extensions HNN. Pour plus détail sur ces groupes voir [BS62].

1.4 Action sur un arbre à domaine fondamental un arbre

1.4.1 Amalgames à deux facteurs

Dans cette section, on caractérise les amalgames de la forme $G_1 *_A G_2$ comme étant les groupes agissant sur un arbre avec comme domaine fondamental un segment. On définit un segment comme étant un graphe isomorphe à :

$$0 \bullet \text{---} \bullet 1$$

Définition 1.4.1. Soit G un groupe opérant sur un graphe Γ . On appelle **domaine fondamental** de $\Gamma \bmod G$ tout sous graphe T de Γ tel que $T \rightarrow G \backslash \Gamma$ est un isomorphisme.

On peut remarquer qu'il n'existe pas toujours un domaine fondamental pour une action donnée sur un graphe. Par exemple, le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit sur le circuit Cir_6 par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et le graphe quotient est Cir_2 . Comme Cir_6 n'a pas de sous-graphe isomorphe à Cir_2 , cette action n'admet pas de domaine fondamental. Cependant la proposition suivante nous assure l'existence d'un domaine fondamental pour une grande classe d'actions qui nous intéressent.

Proposition 1.4.2 ([Ser77], § 4, proposition 17). *Soit G un groupe agissant sur un arbre Γ . Il existe un domaine fondamental de $\Gamma \bmod G$ si et seulement si $G \backslash \Gamma$ est un arbre.*

Remarque 1.4.3. Un domaine fondamental s'il existe n'est pas unique. En effet, si T en est un alors $g \cdot T$ aussi, pour tout $g \in G$

Nous pouvons maintenant énoncer les deux théorèmes principaux de cette section qui caractérisent les groupes amalgamés de la forme $G_1 *_A G_2$.

Théorème 1.4.4. *Soit G un groupe agissant sur un graphe Γ , et soit T un segment de Γ . Supposons que T est un domaine fondamental de $\Gamma \bmod G$. Soit P et Q les sommets de T , et soit $e = \{y, \bar{y}\}$ l'arête géométrique de T . Soient G_P , G_Q et $G_y = G_{\bar{y}}$ les stabilisateurs de P , Q et y respectivement. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes.*

1. Γ est un arbre
2. l'homomorphisme canonique $G_P *__{G_y} G_Q \rightarrow G$ induit par les inclusions $G_P \rightarrow G$ et $G_Q \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Démonstration. Il s'agit de [Ser77], § 4, théorème 6. □

Théorème 1.4.5. *Soit $G = G_1 *_A G_2$ un amalgame de deux groupes. Il existe un arbre (et un seul, à isomorphisme unique près) sur lequel G opère avec pour domaine fondamental un segment T tel que si $\{P, Q\}$ sont les sommets de ce segment et $\{y, \bar{y}\}$ les arêtes, alors $G_1 = G_P$, $G_2 = G_Q$ et $A = G_y$.*

Démonstration. Il s'agit de [Ser77], §4, théorème 7. □

La stratégie de la preuve du théorème 1.4.4 consiste à montrer d'une part que pour que Γ soit connexe, il faut et il suffit que G soit engendré par $G_P \cap G_Q$ et d'autre part que X contient un circuit si et seulement si $G_P *__{G_y} G_Q \rightarrow G$ soit injectif. Dans la première affirmation, le sens direct de l'implication peut être généralisée de la manière suivante :

Lemme 1.4.6. *Soit G un groupe agissant sans inversion sur un graphe connexe non vide Γ . Soient T un arbre de représentant de $\Gamma \bmod G$ et W un sous-graphe de Γ contenant T , dont chacune des arêtes a une extrémité dans T , et tel que $G.W = \Gamma$. Pour tout arête y de W d'origine dans T , soit $g_y \in G$ tel que $g_y t(y) \in \mathcal{S}(T)$. Alors G est engendré par les éléments g_y et les stabilisateurs G_P des sommets P de T .*

Démonstration. C'est le lemme 4 de [Ser77] §4. □

1.4.2 Amalgames avec un nombre fini de facteurs

Dans cette partie nous généralisons les résultats de la section précédente. Nous donnerons une caractérisation des groupes amalgamés avec un nombre fini de facteurs qui agissent sur un arbre avec comme domaine fondamental un arbre fini. Ces résultats sont tout à fait valables pour un amalgame quelconque mais nous n'aurons à considérer que le cas fini qui nous intéresse pour la suite.

Définition 1.4.7. de groupe] Un graphe de groupe (G, T) est la donnée :

- d'un graphe T
- d'un groupe G_P , pour tout $P \in \mathcal{S}(T)$
- d'un groupe G_y muni d'un monomorphisme $G_y \rightarrow G_{t(y)}$ (noté $a \mapsto a^y$), pour tout $y \in \text{ar}(T)$ et tel que $G_{\bar{y}} = G_y$.

Si T est un arbre (G, T) , nous dirons est un arbre de groupes.

La limite inductive de l'arbre de groupe (G, T) que nous notons

$$G_T = \varinjlim(G, T)$$

sera appelée l'amalgame de G_P suivant les G_y .

Dans la notation (G, T) , G n'est pas un groupe mais il faut voir G comme une sorte de foncteur qui associe un groupe aux sommets et aux arêtes d'un graphe.

Exemple 1.4.8. 1. On prend pour T un segment $\overset{0}{\bullet} \text{---} \overset{1}{\bullet}$. On a alors trois groupes G_P, G_Q et $G_y = G_{\bar{y}}$, ainsi que deux monomorphismes $\bar{y} : G_y \rightarrow G_P$ et $y : G_y \rightarrow G_Q$. Le groupe G_T est égal à l'amalgame $G_P *_{G_y} G_Q$.

2. Soient A un groupe et $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes et, pour tout $i \in I$, $A \rightarrow G_i$ un homomorphisme injectif. Soit 0 un élément n'appartenant pas à I . Formons l'arbre T dont les sommets sont les éléments de I et 0 , et dont les arêtes sont les couples $(0, i)$ et $(i, 0)$, avec $i \in I$. On définit un arbre de groupes (G, T) , en posant $G_0 = A$, $G_y = A$ pour tout $y \in \mathcal{A}(T)$, et définissant les monomorphismes $A \rightarrow A$ et $A \rightarrow G$ de façon évidente. Il est clair que $G_T = \varinjlim(G, T)$ est l'amalgame $*_A G_i$ défini plus haut.

Nous reviendrons plus amplement sur cette notion de graphe de groupe dans la section 1.6. Nous donnerons des exemples plus concrets de graphes de groupes.

Si (G, T) est un arbre de groupes, de limite G_T nous conviendrons d'identifier les groupes G_P et G_y à leurs images dans G_T . Nous pouvons maintenant énoncer le premier théorème principal de cette section

Théorème 1.4.9 ([Ser77], § 4, théorème 9). *Soit (G, T) un arbre de groupes finis (i.e T est un arbre fini). Il existe un graphe Γ contenant T et une action de $G_T = \varinjlim(G, T)$ sur Γ qui sont caractérisés (à isomorphisme unique près) par :*

- T est un domaine fondamental pour $\Gamma \text{ mod } G_T$;
- $\text{Stab}_{G_T}(P) = G_P$ pour tout $P \in \mathcal{S}(T) \subset \mathcal{S}(\Gamma)$;
- $\text{Stab}_{G_T}(y) = G_y$ pour tout $y \in \mathcal{A}(T) \subset \mathcal{A}(\Gamma)$.

De plus Γ est un arbre, on l'appelle graphe associé à l'arbre de groupe.

Démonstration. Les sommets et arêtes de Γ sont donnés par :

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \sqcup G_T \cdot P = \sqcup G_T \setminus G_P \text{ pour } P \text{ dans } \mathcal{S}(T)$$

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \sqcup G_T \cdot y = \sqcup G_T \setminus G_y \text{ pour } y \text{ dans } \mathcal{A}(T)$$

Les extrémités se définissent au moyen des inclusions $G_y \rightarrow G_{o(y)}$ et $G_y \rightarrow G_{t(y)}$ \square

Inversement, soit G un groupe agissant sur un graphe Γ avec comme domaine fondamental un arbre fini T . Soit (G, T) l'arbre de groupes dont les G_P et G_y sont les stabilisateurs dans G des sommets de T et des arêtes y . Soit $G_T = \varinjlim (G, T)$. Les inclusions $G_P \rightarrow G$ se prolongent en un homomorphisme $G_T \rightarrow G$, cet homomorphisme est surjectif si Γ est connexe.

Soit $\tilde{\Gamma}$ est l'arbre associé au graphe de groupe (G, T) , l'application identique $T \rightarrow T$ se prolonge de manière unique en un morphisme $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ équivariant par rapport à $G_T \rightarrow G$.

Théorème 1.4.10. *Les hypothèses et notations étant comme ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Γ est un arbre.
2. $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ est un isomorphisme.
3. $G_T \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Démonstration. Il s'agit du théorème 10 du § 4 de [Ser77]. \square

Pour simplifier en évitant d'utiliser la notion de graphe de groupe (que nous réservons pour plus tard) dans la suite nous reformulons les deux précédents théorèmes comme suit :

Théorème 1.4.11. *Soit G un amalgame d'un nombre fini de groupes. Alors il existe un arbre Γ sur lequel G agit avec comme domaine fondamental un arbre fini T . Et inversement, soit G un groupe agissant sur un arbre avec comme domaine fondamental un arbre fini, alors G est un groupe amalgamé avec un nombre fini de facteurs.*

Nous venons de voir que tout amalgame de deux groupes $G = G_1 *_A G_2$ agit sur un arbre avec comme domaine fondamental un segment. Et la description de cet arbre, notons le Γ , est donnée par :

$$\mathcal{S}(\Gamma) = (G/G_1) \sqcup (G/G_2)$$

$$\mathcal{A}(\Gamma) = G/A.$$

Le théorème de structure des sommes amalgamées permet de trouver des représentants simples et pratiques des classes des éléments de ces deux ensembles.

Soit $g \in G$, notons \bar{g} sa classe dans G/G_1 . D'après le théorème $g = s_1 \cdots s_n a$.

- Si $s_n \in S_2$ alors $g \sim s_1 \cdots s_n$ où $s_n \in S_2$ car $a \in G_1$;
- et si $s_n \in S_1$ alors $g \sim s_1 \cdots s_{n-1}$ où $s_{n-1} \in S_2$ car $s_n a \in G_1$.

Ce qui donne la proposition suivante.

Proposition 1.4.12. *Pour tout $g \in G$ sa classe \bar{g} dans G/G_1 admet un représentant de la forme $s_1 \cdots s_n$ avec $s_n \in S_2 - \{1\}$. Ainsi $G/G_1 = \{s_1 \cdots s_n \text{ avec } s_n \in S_2 - \{1\}\}$, de même $G/G_2 = \{s_1 \cdots s_n \text{ avec } s_n \in S_1 - \{1\}\}$ et $G/A = \{s_1 \cdots s_n\}$.*

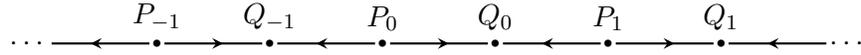
On peut ainsi facilement construire l'arbre Γ sur lequel notre amalgame agit avec comme domaine fondamentale un segment. Soit P un sommet de Γ . On se pose la question de savoir combien d'arêtes ont pour origine P .

On a $P \in G/G_1$, $P = s_1 \cdots s_n$ avec $s_n \in S_2 - \{1\}$. Pour répondre à cette question on peut calculer le nombre d'antécédents de l'application $G/A \rightarrow G/G_1$ qui envoie une arête γ sur son origine P . Ce sont donc toutes les arêtes de la forme $\gamma = s_1 \cdots s_n u$ avec $u \in S_1$. Donc il y a autant d'arêtes d'origine P qu'il y a d'éléments dans S_1 , i.e. $\#S_1 = \#G_1/A$.

De même un sommet $Q \in G/G_2$ de Γ est sommet terminal de $\#S_2 = \#G_2/A$.

Donc en partant du domaine fondamentale on peut reconstruire intégralement l'arbre Γ .

Exemple 1.4.13. Le groupe diédral infini $\mathcal{D}_\infty = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une somme amalgamée de deux copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur le sous-groupe trivial : $\mathcal{D}_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} *_{\{1\}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il agit donc sur un arbre Γ avec comme domaine fondamentale un segment. Si P est une origine dans Γ , il y a $\#\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 2$ arêtes d'origine P de même pour un sommet terminal Q il y a 2 arêtes de sommet terminal Q . Ainsi Γ est représenté par l'arbre ci-dessous :



Proposition 1.4.14. *Soient $G = G_1 *_A G_2$ et $H = H_1 *_B H_2$ deux groupes amalgamés avec $\#G_1/A \leq \#G_2/A$ et $\#H_1/B \leq \#H_2/B$. On note Γ_G (resp. Γ_H) l'arbre sur lequel G (resp. H) agit. Il y a équivalence entre :*

1. Γ_G et Γ_H sont des arbres isomorphes ;
2. $\#G_1/A = \#H_1/B$ et $\#G_2/A = \#H_2/B$;

Démonstration. . 1. \Rightarrow 2. C'est clair. 2. \Rightarrow 1. Il nous faut construire un isomorphisme de graphe entre Γ_G et Γ_H i.e une bijection entre les sommets qui préserve les arêtes. Notons S_i (resp. R_i) une transversale à gauche de A (resp. B) dans G_i (resp. H_i) pour $i \in \{1, 2\}$. Comme $\#G_1/A = \#H_1/B = \#S_1 = \#R_1$ et $\#G_2/A = \#H_2/B = \#S_2 = \#R_2$, on a les bijections suivantes :

$$u_1 : S_1 \rightarrow R_1 \text{ et } u_2 : S_2 \rightarrow R_2 \\ s_i \mapsto r_i \qquad s_j \mapsto r_j$$

On en déduit les deux bijections suivantes :

$$f : G/G_1 \rightarrow H/H_1 \qquad \text{et } g : G/G_2 \rightarrow H/H_2 \\ s_1 \cdots s_n \mapsto r_1 \cdots r_n \qquad s_1 \cdots s_m \mapsto r_1 \cdots r_m \\ s_n \in S_2 - \{1\} \qquad r_n \in R_2 - \{1\} \qquad s_m \in S_1 - \{1\} \qquad r_m \in R_1 - \{1\}$$

On vérifie maintenant que f et g sont bien des morphismes de graphes c'est à dire s'ils commutent respectivement avec les applications origine o et sommet terminal t . En effet : Soit $a = s_1 \cdots s_n$ une arêtes de Γ_G ,

$$f(o(a)) = f(s_1 \cdots s_m) = r_1 \cdots r_m \\ o(f(a)) = o(r_1 \cdots r_n) = r_1 \cdots r_m$$

où $m = n$ si $s_n \in S_2$ et $m = n - 1$ si $s_n \in S_1$. On a bien que $f(o(a)) = o(f(a))$ et de même $g(t(a)) = t(g(a))$. \square

Propriété 1.4.15. Soient Γ un graphe et G agissant sur Γ . Pour tout $H \triangleleft G$,

1. G/H agit sur $H \backslash \Gamma$
2. $(G/H) \backslash (H \backslash \Gamma)$ est isomorphe à $G \backslash \Gamma$
3. Si de plus G agit sur Γ avec comme domaine fondamental un segment T , alors G/H agit sur $H \backslash \Gamma$ avec comme domaine fondamental $\theta(T)$ où $\theta : \Gamma \rightarrow H \backslash \Gamma$ est l'épimorphisme canonique.

Démonstration. S'il n'y a pas d'ambiguïté on notera toutes les classes par des barres.

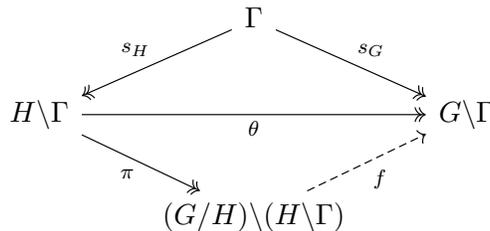
1. Soient $g \in G$, $x \in \Gamma$, on pose $\bar{x}^g := \overline{x^g}$.

montrons que ceci ne dépend pas de la classe de g et x choisie ; Soient g', x' tels que

$$\bar{g} = \bar{g}' \Leftrightarrow g' = hg \\ \bar{x} = \bar{x}' \Leftrightarrow x' = x^{h'}$$

$$x'^{g'} = (x^{h'})^{hg} = x^{h'hg} = (x^g)^{h_0} \Rightarrow \overline{x'^{g'}} = \overline{x^g}$$

2. Considérons le diagramme suivant :



avec $\theta \circ s_H = s_G$.

Pour $x \in \Gamma$, on pose $f(\pi \circ s_H(x)) = s_G(x)$.

f est bien définie, en effet soient $x, y \in \Gamma$ tels que $\pi \circ s_H(x) = \pi \circ s_H(y)$.

Ce qui signifie qu'il $g \in G, s_H(y) = s_H(x)^g = s_H(x^g)$, donc $f(\pi \circ s_H(y)) = s_G(y) = \theta \circ s_H(y) = \theta \circ s_H(x^g) = s_G(x^g) = s_G(x) = f(\pi \circ s_H(x))$.

f est clairement surjective.

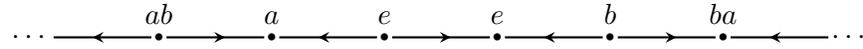
Soit $x, y \in \Gamma, f(\pi \circ s_H(x)) = f(\pi \circ s_H(y)) \Rightarrow s_G(x) = s_G(y) \Rightarrow \exists g \in G, y = x^g. \pi \circ s_H(y) = \pi \circ s_H(x^g) = \pi(s_H(x)^g) = \pi(s_H(x))$.

Donc f est injective. □

On reprend l'exemple du groupe diédral infini vu cette fois, en tant que produit libre. Nous allons construire en détail l'arbre Γ et en même temps voir la propriété précédente sur un cas concret.

Exemple 1.4.16. On considère $D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times_1 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G_1 \times_1 G_2$ et une présentation de ce groupe est donnée par $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle = \{e, ababab \dots, bababab \dots\}$ avec $G_1 = \langle a \rangle$ et $G_2 = \langle b \rangle$.

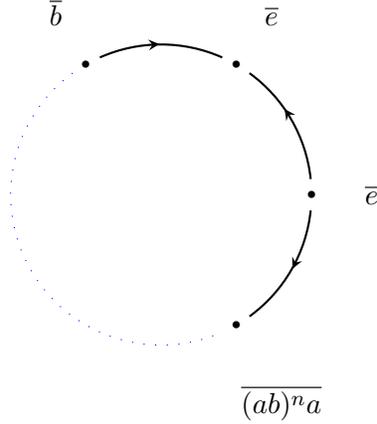
On a ainsi $\mathcal{S}(\Gamma) = G/G_1 \sqcup G/G_2$ avec $G/G_1 = \{e, ababa \dots b, babab \dots b\}$ et $G/G_2 = \{e, ababa \dots a, babab \dots a\}$. On a $\mathcal{A}(\Gamma) = G$. Si l'on se donne une origine $P = \dots b$ dans G/G_1 , il y a deux arêtes qui partent de P : $a_1 = \dots b.e = \dots b$ et $a_2 = \dots ba$, de même pour un sommet terminal Q . Γ est donc donnée par le graphe suivant :



L'action de $D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} *_1 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} D_\infty \times \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ (g, \bar{a}) &\mapsto g\bar{a} \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, le sous groupe distingué $H_p^n = \langle c^{p^n} \rangle \triangleleft D_\infty$ où $c = ab$ agit sur Γ et son graphe quotient $H_p^n \backslash \Gamma$ s'identifie au graphe Γ_n :



1.5 Structure de groupes agissant sur un arbre

Dans cette section, le résultat principal nous donne la structure d'un groupe sans inversion sur un arbre. Deux cas particuliers sont déjà bien connus : celui d'une action libre où le groupe est un groupe libre et celui d'une action avec un arbre fini comme domaine fondamental auquel cas le groupe est un amalgame.

1.5.1 Groupe fondamental d'un graphe de groupes

On rappelle la définition 1.4.7 d'un graphe de groupe (G, T) . C'est la donnée d'un graphe T , pour tout $P \in \mathcal{S}(T)$ d'un groupe G_P , et pour tout $y \in \mathcal{A}(T)$, d'un groupe G_y muni d'un monomorphisme $G_y \rightarrow G_{t(y)}$, (noté $a \mapsto a^y$) ; on exige en outre que $G_{\bar{y}} = G_y$.

Définition 1.5.1 (Groupe fondamental). Soit Y un graphe connexe et non vide et soit (G, Y) un graphe de groupes. On considère le groupe $F(G, Y)$ engendré par les groupes G_P et les éléments $y \in \mathcal{A}(Y)$, soumis aux relations

$$\bar{y} = y^{-1} \quad \text{et} \quad ya^y y^{-1} = a^{\bar{y}} \quad \text{si} \quad y \in \mathcal{A}(Y) \quad \text{et} \quad a \in G_y.$$

Soit T un arbre maximal de Y . Alors le **groupe fondamental** $\pi_1(G, Y, T)$ du graphe de groupe (G, Y) , le quotient de $F(G, Y)$ par le sous-groupe distingué engendré par les éléments y de $\mathcal{A}(T)$.

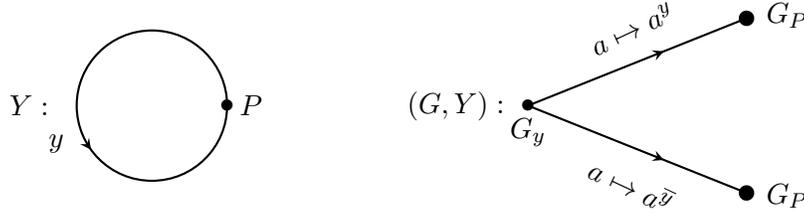
De manière équivalente si g_y désigne l'image de y dans $\pi_1(G, Y, T)$, le groupe $\pi_1(G, Y, T)$ est engendré par les groupes G_P (P parcourant les sommets de Y), les g_y (y parcourant les arêtes de Y), soumis aux relations

$$g_y a^y g_y^{-1} = a^{\bar{y}}, \quad g_{\bar{y}} = g_y^{-1} \quad \text{si} \quad y \in \mathcal{A}(Y), \quad a \in G_y$$

$$G_y = 1 \quad \text{si} \quad y \in \mathcal{A}(T)$$

Exemple 1.5.2. Trois cas à insérer ici : groupes libres, amalgames, HNN

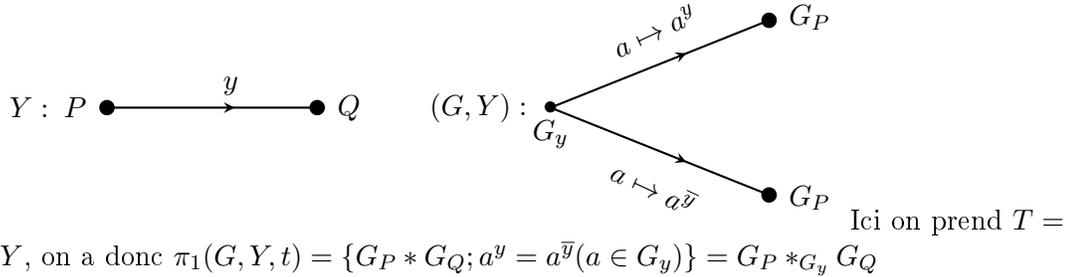
1. Groupe fondamental d'un lacet de groupes



Posons $A = G_y$. Le groupe $F(G, Y) = \pi_1(G, Y, P)$ est engendré par G_P et par un élément $g = g_y$, avec les relations de définition : $ga^y g^{-1} = a^{\bar{y}}$, pour tout $a \in A$.

Si l'on identifie A à un sous-groupe de $G = G_P$ par $a \mapsto a^y$, et si l'on désigne par θ l'homomorphisme $a \mapsto a^{\bar{y}}$ de A dans G , on voit que le groupe $\pi_1(G, Y, P)$ n'est autre que le groupe déduit de (A, G, θ) par construction HNN (cf définition 1.3.1).

2. Groupe fondamental d'un segment de groupe



1.5.2 Revêtement universel relatif à un graphe de groupes

Le résultat principal de cette section nous donne la structure d'un groupe agissant sur un arbre. Nous verrons en fait qu'un tel groupe est le groupe fondamental d'un certain graphe de groupe. Ainsi l'un des ingrédients crucial dans la construction de ce graphe de groupe est l'existence d'un revêtement universel de ce graphe de groupes sur lequel notre groupe agira.

On considère un graphe de groupes (G, Y) , avec Y un graphe connexe non vide. Soit T un arbre maximal de Y et soit A une orientation de Y . Pour tout arêtes $y \in \mathcal{A}(Y)$, on note $|y|$ celle des deux arêtes y, \bar{y} qui appartient à A .

L'image de G_y dans $G_{t(y)}$ sera noté G_y^y .

Nous voulons construire :

- un graphe $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$;

- une action de $\pi = \pi_1(G, Y, T)$ sur \tilde{X} ;
- un morphisme $p : \tilde{X} \rightarrow Y$ qui induise un isomorphisme $\pi \backslash \tilde{X} \simeq Y$;
- des sections $\mathcal{S}(Y) \rightarrow \mathcal{S}(\tilde{X})$ et $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(\tilde{X})$ de p et nous les notons respectivement $P \rightarrow \tilde{P}$ et $y \rightarrow \tilde{Y}$

Ainsi le graphe \tilde{X} est défini comme suit :

$$\mathcal{S}(\tilde{X}) = \bigsqcup_{P \in \mathcal{S}(Y)} \pi \backslash \pi_{\tilde{P}} \quad \text{où} \quad \pi_{\tilde{P}} = G_P;$$

$$\mathcal{A}(\tilde{X}) = \bigsqcup_{y \in \mathcal{A}(Y)} \pi \backslash \pi_{\tilde{y}} \quad \text{où} \quad \pi_{\tilde{y}} = G_w^w (w = \overline{|y|}).$$

On note \tilde{P} (resp. \tilde{y}) l'image de 1 dans $\pi \backslash \pi_{\tilde{P}}$ (resp. $\pi \backslash \pi_{\tilde{y}}$). Nous avons les sections $\mathcal{S}(Y) \rightarrow \mathcal{S}(\tilde{X})$; $P \mapsto \tilde{P}$ et $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(\tilde{X})$; $y \mapsto \tilde{y}$.

Les sommets et les arêtes de \tilde{X} sont respectivement les $g\tilde{P}$ et les $g\tilde{Y}$ avec $g \in \pi$, $P \in \mathcal{S}(Y)$ et $y \in ar(Y)$. Maintenant, il nous reste à définir pour chaque arête son arête opposée, son origine et son sommet terminal. C'est à dire pour une arête $g\tilde{Y}$, on doit définir $\overline{g\tilde{y}}$, $o(g\tilde{y})$ et $t(g\tilde{y})$, pour $Y \in \mathcal{A}(Y)$ et $g \in \pi$.

Soit $y \in \mathcal{A}(Y)$, on note e la fonction indicatrice de A (orientation de Y), i.e. $e(y) = 1$ ou $e(y) = 0$ selon que y appartienne à A ou non. Nous prenons ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{g\tilde{y}} &= g\tilde{y} \\ o(g\tilde{y}) &= gg_y^{e(y)-1} \overline{o(y)} \\ t(g\tilde{y}) &= gg_y^{e(y)} \overline{t(y)} \end{aligned}$$

Dans ces trois définitions, le terme de gauche dépend uniquement de la classe à gauche de g dans G_w^w où $w = \overline{|y|}$. Nous devons vérifier que c'est la même chose pour le terme de droite. Le lemme suivant nous assure ce résultat.

Lemme 1.5.3 ([Ser77], §5.3). *Les trois expressions précédentes sont bien définies.*

Le revêtement universel que nous venons de construire est en fait un arbre. C'est l'objet de notre prochain théorème dont la preuve est due à H.Bass.

Théorème 1.5.4 (Serre). *On considère Y un graphe connexe non vide. Soit (G, Y) un graphe de groupe, soit T un arbre maximal de Y et soit A une orientation de Y . Alors le graphe $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$, revêtement universel de Y construit ci-dessus est un arbre.*

Démonstration. Il s'agit du théorème 12, § 5 de [Ser77].

□

1.5.3 Le théorème de structure

Finalement nous en arrivons au théorème de structure pour un groupe G agissant sans inversion sur un arbre X . L'idée est de faire du graphe quotient $Y = G \backslash X$ un graphe de groupe de telle sorte que G soit isomorphe au groupe fondamental de Y .

Soit G un groupe agissant sans inversion sur un graphe connexe non vide X . Nous noterons par Y le graphe quotient $G \backslash X$.

Nous allons construire un graphe de groupe (G, Y) à partir du graphe quotient Y . Soit T un arbre maximal de Y et soit $j : T \rightarrow X$ un relèvement de T i.e. un arbre de représentants de $X \text{ mod } G$. Soit A une orientation de Y et notons e la fonction indicatrice de A comme précédemment, $e(y) = 1$ ou $e(y) = 0$ selon que y appartienne à A ou non, pour $y \in Y$.

Définissons maintenant une application $j : \mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$, qui prolonge j et notée encore j , telle que $j\bar{y} = \overline{jy}$. Il suffit de définir $j(y)$ pour toute arête $y \in A$ qui n'est pas dans T . Pour une telle arête nous définissons son origine comme étant un sommet de $j(T)$, c'est-à-dire $o(j(y)) = j(o(y))$. Puisque $t(j(y))$ et $j(t(y))$ ont la même projection $t(y)$ dans Y , on choisit $\gamma_y \in G$ tel que $t(j(y)) = \gamma_y j(t(y))$.

Nous avons défini $j(y)$, γ_y pour toute arête $y \in A$ qui n'est pas dans T . On prolonge $y \mapsto \gamma_y$ grâce aux formules

$$\gamma_{\bar{y}} = \gamma_y^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_e = 1 \quad \text{pour} \quad y \in T.$$

On obtient alors pour toute arête $y \in Y$:

$$o(j(y)) = \gamma_y^{e(y)-1} j(o(y))$$

$$t(j(y)) = \gamma_y^{e(y)} j(t(y)).$$

Les stabilisateurs des sommets et des arêtes de X par la G -action sont notés G_Q et G_z , pour $Q \in \mathcal{S}(X)$ et $z \in \mathcal{A}(X)$. Le groupe (G, Y) est alors défini par :

$$G_P = G_{j(P)} \quad \text{pour} \quad P \in \mathcal{S}(Y)$$

$$G_y = G_{j(y)} \quad \text{pour} \quad y \in \mathcal{A}(Y),$$

l'homomorphisme $a \mapsto a^y$ de $G_y \rightarrow G_{t(y)}$ est donné par $a^y = \gamma_y^{-e(y)} a \gamma_y^{e(y)}$.

Le groupe fondamental associé au graphe de groupe (G, Y) et au sous arbre maximal T est noté $\pi_1(G, Y, T)$. Comme ce dernier est engendré par les G_P et les g_y avec $y \in Y$, on a l'homomorphisme de groupe $\varphi : \pi_1(G, Y, T) \rightarrow G$ défini par les inclusions $G_P \rightarrow G$ et $g_y \rightarrow \gamma_y$.

On considère le revêtement universel de (G, Y) noté $\tilde{X}(G, Y, T)$, soit $\psi : \tilde{X}(G, Y, T) \rightarrow X$ l'application définie par $g\tilde{P} \mapsto \varphi(g)j(P)$ et $g\tilde{y} = \varphi(g)j(y)$. On vérifie facilement que ψ est un morphisme de graphe et que ψ est φ -équivariant.

Soit W le plus petit sous-graphe de X contenant tous les $j(y)$ avec y parcourant toutes les arêtes de Y . Alors, toute arête de W a une extrémité dans $j(T)$ et on a $G \cdot W = X$. De plus W est contenu dans $\psi(\tilde{X})$ et φ induit un isomorphisme entre les stabilisateurs des sommets et des arêtes correspondants à \tilde{X} et X . En appliquant le lemme 1.4.6 on voit que φ et ψ sont surjectifs et ψ est localement injectif (i.e injectif sur l'ensemble des arêtes d'origine donnée).

Théorème 1.5.5 (Serre). *Les hypothèses et les notations étant comme ci-dessus, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) X est un arbre*
- ii) $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ est un isomorphisme de graphes*
- iii) $\varphi : \pi_1(G, Y, T) \rightarrow G$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. C'est le théorème 13, § 5 de [Ser77].

□

CHAPITRE 2

Groupes profinis et prographes

Dans ce chapitre nous exposons les bases de la théorie des prographes sylvestres et des groupes profinis presque libres de Deschamps et Suarez. Nous nous référons à [DSA11] et nous contenons d'énoncer la plupart des résultats sans preuve. Il existe déjà dans la littérature une théorie des graphes profinis (développé par exemple dans [Rib17]) définis comme étant des limites projectives de graphes finis. Dans la théorie de Deschamps, il ne s'agit pas de passer à la limite projective d'un prographe (système projectif de graphes). Cependant un proarbre est la donnée d'un prographe muni d'une famille inductive de sections ensemblistes qui par passage à la limite directe donne un arbre. L'avantage étant que l'on pourra utiliser des résultats de la théorie des graphes de Bass-Serre pour étudier plusieurs classes de groupes profinis ici par exemple, les groupes profinis presque libres.

Dans la première partie de ce chapitre nous définissons les notions de prographes, proarbres, section graphiquement cohérente etc. Ensuite énonçons un théorème crucial dans la preuve du résultat principal de ce chapitre. Il stipule que pour le prographe associé au graphe de Cayley d'un groupe dénombrable, il existe une section de la famille projective associée au prographe qui permet de reconstruire le groupe. Nous voyons ensuite comment est défini l'action d'un groupe profini sur un prographe. Nous passons de là dans la deuxième section aux groupes profinis presque libres. Nous fournissons une définition et démontrons une définition équivalente. Puis nous énonçons le théorème principal qui caractérise les groupes presque libres comme les groupes agissant librement sur les proarbres. Nous concluons par un exemple dans lequel nous illustrons les notions et résultats mentionnés jusqu'alors.

Dans ce texte, étant donné un graphe orienté Γ , on notera $\mathcal{S}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{A}(\Gamma)$) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes orientées) de Γ . Pour toute arête orientée $a \in \mathcal{A}(\Gamma)$, on

notera $o(a)$ (resp. $t(a)$) l'origine (resp. le sommet terminal) de a . Quand on fera agir un groupe sur un graphe, il s'agira d'une action à gauche et cette action sera toujours une action de graphes orientés et sans inversion. Un morphisme de graphes $\theta : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ sera vu comme une unique application de l'ensemble $\mathcal{S}(\Gamma_1) \cup \mathcal{A}(\Gamma_1)$ vers l'ensemble $\mathcal{S}(\Gamma_2) \cup \mathcal{A}(\Gamma_2)$.

Par commodité, on notera indifféremment dans ce texte \bar{x} la classe d'équivalence d'un objet x , qu'il s'agisse de la classe d'une arête ou d'un sommet dans un graphe quotient, de la classe d'un élément dans un groupe quotient ou encore même de la classe d'un élément dans une limite inductive d'ensembles.

2.1 Prographes sylvestres et actions profinies

2.1.1 Prographes

Définition 2.1.1. Un prographe est un système projectif de graphes $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ indexé sur un ensemble pré-ordonné d'indices (I, \leq) filtrant à droite, tel que pour tout $i \leq j$ le morphisme de graphes θ_{ji} soit surjectif.

Définition 2.1.2. Soient G un groupe, \mathcal{N} une base de filtre de sous-groupes de G et $S \subset G$ une partie non vide. On considère $\Gamma = \Gamma(G, S)$, le graphe du groupe G relativement à la partie S . Le groupe G agit à gauche de manière naturelle sur Γ et pour tout $N \in \mathcal{N}$, on note $\Gamma_N = N \backslash \Gamma$. Si l'on considère l'inclusion sur \mathcal{N} , cela fait de cet ensemble un ensemble ordonné filtrant à droite et si $M \subset N$ on dispose alors d'un épimorphisme naturel de graphes $\theta_{MN} : \Gamma_M \rightarrow \Gamma_N$. Le système $(\Gamma_N, \theta_{MN})_{N \in \mathcal{N}}$ est alors un prographe. On l'appellera dans la suite **prographe de G relativement à la partie S et à la base de filtre \mathcal{N}**

Définition 2.1.3. Une section graphiquement cohérente d'un prographe est une famille inductive de sections ensemblistes $(s_{ij})_{i \leq j}$ de $(\theta_{ji})_{i \leq j}$ vérifiant que :

(C₁) pour tout $i \in I$ et tout $a \in \mathcal{A}(\Gamma_i)$ il existe $i_0 \geq i$ tel que pour tout $k \geq i_0$

$$\begin{aligned} o(s_{ik}(a)) &= s_{i_0k}(o(s_{ii_0}(a))) \\ t(s_{ik}(a)) &= s_{i_0k}(t(s_{ii_0}(a))) \end{aligned}$$

Une section graphiquement cohérente d'un prographe fournit deux systèmes inductifs d'ensembles, un premier, à partir des sommets et un second pour les arêtes. Ce qui permet de construire un graphe **limite inductive du prographe** de départ.

Proposition 2.1.4 (Deschamps-Suarez, proposition-définition 5, [DSA11]). *Soit $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ un prographe muni d'une section graphiquement cohérente $s = (s_{ij})_{i \leq j}$. Les deux ensembles $\varinjlim_s \mathcal{S}(\Gamma_i)$ et $\varinjlim_s \mathcal{A}(\Gamma_i)$ permettent de définir canoniquement les sommets et les arêtes d'un graphe. Ce graphe est appelé **limite inductive du prographe** $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ relativement à la section graphiquement cohérente $s = (s_{ij})_{i \leq j}$ et est noté $\varinjlim_s \Gamma_i$.*

Lemme 2.1.5 (Deschamps-Suarez, lemme 6, [DSA11]). *Considérons un prographe $(\Gamma_n, \theta_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ indicé par \mathbb{N} (muni de l'ordre naturel) et un graphe Γ muni pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme de graphes $\theta_n : \Gamma \rightarrow \Gamma_n$ vérifiant que pour tout $m \geq n$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\theta_m} & \Gamma_m \\ & \searrow \theta_n & \downarrow \theta_{mn} \\ & & \Gamma_n \end{array}$$

Supposons qu'il existe une suite croissante $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties de Γ telle que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k = \Gamma$ et qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Δ_{k+1} s'injecte (par $\theta_{n_{k+1}}$) dans $\Gamma_{n_{k+1}}$ et se surjecte (par θ_{n_k}) dans Γ_{n_k} :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{k+1} & \xrightarrow{\theta_{n_{k+1}}} & \Gamma_{n_{k+1}} \\ \uparrow & \searrow \theta_{n_k} & \downarrow \theta_{n_{k+1} n_k} \\ \Delta_k & \xrightarrow{\theta_{n_k}} & \Gamma_{n_k} \end{array}$$

Il existe alors une section graphiquement cohérente s telle que $\varinjlim_s \Gamma_n$ soit canoniquement isomorphe à Γ .

Théorème 2.1.6 (Deschamps-Suarez, théorème 7, [DSA11]). *On considère un groupe G dénombrable, $S \subset G$ une partie non vide et une suite décroissante $H_0 \supset H_1 \supset \dots$ de sous-groupes distingués d'indices finis de G telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$. On note $(\Gamma_n, \theta_{mn})_n$*

le prographe de G relativement à la partie S et à la base de filtre $\{H_0, H_1, \dots\}$. Si $\Gamma' \subset \Gamma(G, S)$ est un sous-graphe vérifiant que, pour tout $n \geq 0$, la restriction à Γ' du morphisme $\Gamma(G, S) \rightarrow \Gamma_n$ reste surjective, alors il existe une section graphiquement cohérente, s , telle que $\varinjlim_s \Gamma_n$ soit canoniquement isomorphe à Γ' .

Remarque 2.1.7. Le théorème 7 affirme que pour un sous-graphe de $\Gamma(G, S)$ se surjectant sur tous les graphes du prographe associé, on sait relever par une certaine section la limite $\varinjlim_s \Gamma_n$ sur ce sous-graphe. Cela montre que quand on fait varier s , on peut avoir une grande diversité $\varinjlim_s \Gamma_n$.

Remarquons aussi qu'il n'y a aucune raison pour que $\varinjlim_s \Gamma_n$ s'injecte de manière canonique dans Γ , c'est à dire qu'il existe pas une réciproque pertinente à ce théorème. Pour des exemple et/ou contre exemples voir la remarque à la page 9 de [DSA11].

Définition 2.1.8. Une section graphiquement cohérente s d'un prographe $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ sera dite arborescente si $\varinjlim_s \Gamma_i$ est un arbre. Un prographe sera dit sylvestre s'il possède une section arborescente.

Un **proarbre** est la donnée d'un prographe sylvestre muni d'une section arborescente.

Le théorème précédent nous dit que l'on sait relever canoniquement $(\Gamma_n, \theta_{mn})_n$ à Γ' par une certaine section. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.1.9 (Deschamps-Suarez, proposition 9, [DSA11]). *Le prographe d'un groupe libre de rang dénombrable relativement à une de ses bases et à une base de filtre constitué d'une suite décroissante de sous-groupes d'indices finis d'intersection réduite au neutre, est un prographe sylvestre.*

Démonstration. Les hypothèses du théorème 2.1.6 sont vérifiées. Il existe donc une section graphiquement cohérente au prographe dont la limite inductive est isomorphe au graphe du groupe libre relativement à sa base. Mais un tel graphe est un arbre d'après la proposition 1.2.3. \square

2.1.2 Action profinie

Nous allons maintenant aborder la notion d'action profinie sur un prographe (cf section 2 de [DSA11]). Mais avant cela nous avons besoin de quelques définitions et résultats préliminaires.

Définition 2.1.10. On considère un système projectif $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ d'ensembles indexé par un ensemble d'indices I filtrant à droite. On considère pour tout $i \in I$, un sous-ensemble $E_i \subset G_i$ et pour tout $i \leq j$ une section ensembliste r_{ij} de φ_{ji} . Si le système $(E_i, r_{ij})_i$ est inductif, on dira que c'est un système inductif extrait du système projectif $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$.

Proposition 2.1.11 (Deschamps-Suarez, proposition 10, [DSA11]). *Soit $(E_i, r_{ij})_i$ un système inductif extrait d'un système projectif $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$. L'ensemble $\varinjlim_{\mathcal{F}} E_i$ s'injecte canoniquement dans l'ensemble $\varprojlim_{\varphi} G_i$.*

Nous donnons la preuve de Deschamps et Suarez à cette proposition car nous nous en servons pour la suite.

Démonstration. Commençons par définir pour tout $k \in I$, une application $\theta_k : \varinjlim_{\mathcal{F}} E_i \longrightarrow G_k$: soit $x \in \varinjlim_{\mathcal{F}} E_i$ et $x_i \in E_i$ tel que $x = \overline{x_i}$; il existe $l \geq i, k$ et l'on pose alors

$$\theta_k(x) = \varphi_{lk} \circ r_{il}(x_i)$$

Cette définition ne dépend que de x et de k . En effet, pour commencer, elle est indépendante de l : soit $l' \geq i, k$, considérons $p \geq l, l'$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{lk} \circ r_{il}(x_i) &= \varphi_{lk} \circ \varphi_{pl} \circ r_{lp} \circ r_{il}(x_i) = \varphi_{pk} \circ r_{ip}(x_i) \\ &= \varphi_{l'k} \circ \varphi_{pl'} \circ r_{l'p} \circ r_{il'}(x_i) = \varphi_{l'k} \circ r_{il'}(x_i) \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'elle est indépendante de i : soit $i' \in I$ et $x_{i'} \in E_{i'}$ tel que $x = \overline{x_{i'}}$. Il existe donc $j \geq i, i'$ tel que $r_{ij}(x_i) = r_{i'j}(x_{i'})$. Pour $l \geq k, j$ on a

$$\varphi_{lk} \circ r_{il}(x_i) = \varphi_{lk} \circ r_{jl} \circ r_{ij}(x_i) = \varphi_{lk} \circ r_{jl} \circ r_{i'j}(x_{i'}) = \varphi_{lk} \circ r_{i'l}(x_{i'})$$

Donc les applications θ_k sont bien définies.

- Pour tout $j \geq i$ on a $\varphi_{ji} \circ \theta_j = \theta_i$. En effet, soit $x = \overline{x_k} \in \varinjlim E_i$, $x_k \in E_k$ et $l \geq j, k$. On a $\theta_j(x) = \varphi_{lj} \circ s_{kl}(x_k)$ et donc

$$\varphi_{ji} \circ \theta_j(x) = \varphi_{ji} \circ \varphi_{lj} \circ s_{kl}(x_k) = \varphi_{li} \circ s_{kl}(x_k) = \theta_i(x)$$

(car $l \geq i, k$).

- La propriété universelle de la limite projective assure alors qu'il existe une unique application $\theta : \varinjlim E_i \rightarrow \varprojlim G_i$ telle que pour tout $i \in I$ on ait $\varphi_i \circ \theta = \theta_i$ (où $\varphi_i : \varprojlim G_i \rightarrow G_i$ désigne l'application canonique).

Montrons maintenant que θ est injective : soit $x, y \in \varinjlim E_i$ tels que $\theta(x) = \theta(y)$. Il existe un indice $k \in I$ et $x_k, y_k \in E_k$ tels que $x = \overline{x_k}$ et $y = \overline{y_k}$. On a

$$x_k = \theta_k(x) = \varphi_k \circ \theta(x) = \varphi_k \circ \theta(y) = \theta_k(y) = y_k$$

et donc $x = y$. On a donc bien le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim G_i & \xrightarrow{\varphi_n} & G_i \\ \uparrow \theta & \nearrow \theta_i & \\ \varinjlim E_i & & \end{array}$$

□

On s'intéresse maintenant à un système projectif de groupes $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$. Comme pour le cas des prographes, nous définissons une notion de section pour le système projectif de groupes associés à un groupe profini. La limite inductive relativement à cette section sera un sous-groupe dense du groupe profini.

Définition 2.1.12. Si $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ désigne un système projectif de groupes, on appellera section de ce système tout système inductif extrait $(G_i, r_{ij})_i$ tel que l'image de $\varinjlim G_i$ dans $\varprojlim G_i$ soit un sous-groupe.

Proposition 2.1.13 ([DSA11], proposition 13). *Soient $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ un système projectif de groupes finis et $G = \varprojlim G_i$. Si r désigne une section de $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ alors l'image H de $\varinjlim G_i$ dans G est un sous-groupe dense de G . En particulier, G s'identifie à la complétion profinie de H relativement à la base de filtre de sous-groupes distingués d'indices finis $\{H \cap \ker(G \rightarrow G_i)\}_{i \in I}$.*

Réciproquement, soient H un groupe dénombrable et $H_0 \supset H_1 \supset \dots$ une suite décroissante de sous-groupes distingués d'indices finis et d'intersection réduite au neutre. Posons, pour tout entier n , $G_n = H/H_n$ et considérons $G = \varprojlim G_n$. Il existe alors une section r du système projectif $(G_n, \varphi_{mn})_n$ telle que $H \simeq \varinjlim_r G_n$. Plus précisément, si l'on considère les injections canoniques

$$\begin{array}{ccccc} H & \xleftarrow{\pi} & G & \xleftarrow{\theta} & \varinjlim_r G_n \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \omega & & \end{array}$$

alors il existe une bijection $\omega : H \longrightarrow \varinjlim_r G_n$ telle que $\pi = \theta \circ \omega$ (en d'autres termes, on peut reconstruire par une certaine section, une copie de H dans sa complétion profinie)

Nous choisissons d'inclure la démonstration de Deschamps et Suarez de cette proposition car nous allons l'utiliser dans la suite.

Démonstration. On garde les notations de la preuve de la proposition 2.1.11. Il est clair que les applications θ_k sont surjectives et comme $\theta_k = \varphi_k \circ \theta$ on en déduit que $\varphi_k(\theta(H)) = G_k$ pour tout k , ce qui montre que $\theta(H)$ est un sous-groupe dense de G . Si maintenant, pour $i \in I$ fixé, on note $H_i = H \cap \ker(\varphi_i)$, on a alors $G_i = H/H_i$ et donc $G = \varprojlim H/H_i$ est bien la complétion profinie du groupe H relativement à la base de filtre $\{H_i\}_i$.

Réciproquement, si l'on suppose que H est dénombrable, on peut donc énumérer H en une suite h_1, h_2, \dots . Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $\Delta_k = \{h_1, \dots, h_k\}$. On prend les notations suivantes

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim_r G_n & & & & \\ \downarrow \theta & \searrow \theta_n & & & \\ G & \xrightarrow{\phi_n} & G_n & & \\ \uparrow \pi & \nearrow \pi_n & & & \\ H & & & & \end{array}$$

Exactement comme dans la preuve du lemme 3.1.1 et du théorème 2.1.6 (cas des sommets), on construit à partir de la suite de parties $(\Delta_k)_k$ un système inductif extrait $r = (r_{nm})_{n \leq m}$, en particulier, on dispose de deux suites $(i_k)_k$ et $(n_k)_k$ strictement croissantes telles que,

par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_{i_{k+1}} & \xleftarrow{\pi_{n_{k+1}}} & G_{n_{k+1}} \\
 \uparrow r & \searrow \rho_{n_k} & \downarrow r_{n_k n_{k+1}} \\
 \Delta_{i_k} & \xleftarrow{\pi_{n_k}} & G_{n_k}
 \end{array}$$

la partie Δ_{i_k} se relève identiquement par $r_{n_k n_{k+1}}$ dans $\Delta_{i_{k+1}}$. Définissons l'application $\omega : H \rightarrow \varinjlim_r G_n$ de la manière suivante : si $h \in H$ il existe un indice i_k tel que $h \in \Delta_{i_k}$ et on pose

$$\omega(h) = \overline{\pi_{n_k}(h)}$$

La manière dont on a construit r assure que la définition de $\omega(h)$ ne dépend pas du choix de l'indice i_k et donc que ω est bien définie. L'application ω est surjective : soit $x = \overline{x_l} \in \varinjlim_r G_n$, et un indice k tel que $n_k \geq l$. L'ensemble $\Delta_{i_{k+1}}$ se surjecte sur G_l , on a alors $x = \overline{r_{ln_{k+1}}(x_l)}$ et comme G_l se relève injectivement par $r_{ln_{k+1}}$ dans $\pi_{n_{k+1}}(\Delta_{i_{k+1}})$, il existe (un unique) $h \in \Delta_{i_{k+1}}$ tel que $\pi_{n_{k+1}}(h) = r_{ln_{k+1}}(x_l)$. On a donc $\omega(h) = x$.

Montrons maintenant que $\theta \circ \omega = \pi$. Remarquons pour commencer que si $x \in \varinjlim_r G_n$ et que $x = \overline{x_n}$ pour un certain entier n , alors on a

$$\theta(x) = (\varphi_{n,1}(x_n), \dots, \varphi_{n,n-1}(x_n), x_n, r_{n,n+1}(x_n), \dots) \in \varprojlim G_n \subset \prod G_n$$

Prenons maintenant $h \in H$ et considérons un indice i_k tel que $h \in \Delta_{i_k}$, on a alors

$$\begin{aligned}
 \theta \circ \omega(h) &= \theta(\overline{\pi_{n_k}(h)}) \\
 &= (\varphi_{n_k,1}(\pi_{n_k}(h)), \dots, \varphi_{n_k,n_k-1}(\pi_{n_k}(h)), \pi_{n_k}(h), r_{n_k,n_k+1}(\pi_{n_k}(h)), \dots) \\
 &= (\pi_1(h), \dots, \pi_{n_k-1}(h), \pi_{n_k}(h), r_{n_k,n_k+1}(\pi_{n_k}(h)), \dots)
 \end{aligned}$$

Maintenant, par construction, pour tout $x \in \Delta_{i_k}$ et tout $l \geq n_k$ on a $r_{n_k,l}(\pi_{n_k}(x)) = \pi_l(x)$ et donc

$$\theta \circ \omega(h) = (\pi_1(h), \dots, \pi_{n_k-1}(h), \pi_{n_k}(h), \pi_{n_k+1}(h), \dots) = \pi(h)$$

L'application π étant injective, ω l'est aussi ce qui prouve finalement qu'elle est bien bijective. \square

Maintenant que nous avons les outils précédents à notre disposition nous pouvons donner la définition de l'action d'un groupe profini sur un prographe.

Définition 2.1.14 (Deschamps-Suarez, définition 15, [DSA11]). Soit $\mathcal{P} = (\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ un prographe et G un groupe profini. On dit que G agit sur \mathcal{P} si :

- Il existe une base de filtre, $(U_i)_{i \in I}$, de sous-groupes ouverts distingués de G , indexée par (I, \leq) ($U_j \subset U_i \iff i \leq j$) tel que $\bigcap_i U_i = \{e\}$.
- Pour tout $i \in I$, le groupe quotient $G_i = G/U_i$ agit sur le graphe Γ_i .
- Les actions des groupes G_i sur les graphes Γ_i sont compatibles pour l'ordre : pour tout $i \leq j$, $g \in G_j$ et $x \in \Gamma_j$, on a $\theta_{ji}(g \cdot x) = \varphi_{ji}(g) \cdot \theta_{ji}(x)$ où $\varphi_{ji} : G_j \rightarrow G_i$ est la surjection canonique induite par l'inclusion $U_j \subset U_i$.

Définition 2.1.15 (Deschamps-Suarez, définition 15, [DSA11]). Les hypothèse et notion étant comme ci-dessus. Si l'on dispose d'une section graphiquement cohérente s de $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ et d'une section r du système projectif $(G/U_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ on dira que l'action de G sur \mathcal{P} est complètement compatible à s et r si l'on a, en outre, la propriété suivante :

$$(C_3) \forall i \in I, \forall (g_i, a_i) \in G_i \times \Gamma_i, \exists i_0 \geq i, \forall k \geq i_0, s_{i_0 k}(r_{i i_0}(g_i) \cdot s_{i i_0}(a_i)) = r_{i k}(g_i) \cdot s_{i k}(a_i)$$

On reprend les notations des définitions précédentes et l'on suppose que l'action de G sur \mathcal{P} est complètement compatible à s et r . Considérons un indice $i \in I$ et $(a_i, g_i) \in \Gamma_i \times G_i$. Soit i_0 un indice satisfaisant à la condition (C_3) . On pose :

$$g \cdot a = \overline{r_{i i_0}(g_i) \cdot s_{i i_0}(a_i)}$$

Ceci ne dépend que de a et g .

Dans la proposition 16 de [DSA11], Deschamps et Suarez montrent que **l'application $(a, g) \mapsto g \cdot a$ définie précédemment est une action du groupe $\varinjlim_r G_i$ sur le graphe $\varinjlim_s \Gamma_i$.**

2.2 La presque liberté

2.2.1 Groupes profinis presque libres

Les groupes prolibres jouent un rôle important en théorie de Galois. Ils sont obtenus en prenant la complétion profinie des groupes abstraits libres relativement à certaines bases de filtres de sous-groupes distingués (nous renvoyons le lecteur à [FJ06],[RZ00] et [Wil98]). Cependant la réciproque de cette propriété est fautive. Ici on s'intéresse à la complétion profinie par rapport à une base de filtre de sous-groupes distingués bien particulière : leur intersection est réduite au neutre. Ce qui amène à une propriété plus faible : la presque liberté.

Définition 2.2.1. Un groupe profinie sera dit presque libre s'il est égal à la complétion profinie d'un groupe libre relativement à une base de filtre de sous-groupes distingués d'indice fini \mathcal{B} , vérifiant $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{e\}$.

L'hypothèse de séparation $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{e\}$, présente dans la définition, est là pour s'assurer que le groupe libre s'injecte de manière dense dans sa complétion. De manière plus précise, on a :

Lemme 2.2.2. *Un groupe profini est presque libre si et seulement s'il possède un sous-groupe (abstrait) libre dense.*

Démonstration. Le sens direct est donc assuré par l'hypothèse $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{e\}$.

Pour la réciproque, de manière générale si Γ est profini et si G est un sous-groupe dense de Γ , alors pour tout sous-groupe ouvert distingué U de Γ , la restriction à G de l'épimorphisme canonique $\varphi_U : \Gamma \rightarrow \Gamma/U$ reste surjective. On en déduit donc que Γ/U s'identifie à $G/(G \cap \ker(\varphi_U))$ et, par compatibilité des applications, que Γ est isomorphe à la complétion profinie de G relativement à la base de filtre $\{G \cap \ker(\varphi_U)\}_U$ où U parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de Γ . \square

2.2.2 Théorème de Deschamps Suarez

Nous allons maintenant définir la notion d'action prolibre et énoncer l'analogue démontré par DS pour les groupes profinis du théorème de Serre caractérisant la liberté d'un groupe par son action libre sur un arbre.

Définition 2.2.3 (Action prolibre). On dira qu'un groupe profini G agit profinement sur un prographe \mathcal{P} si G agit sur \mathcal{P} de manière complètement compatible à deux sections s et r . On dira que G agit **prolibrement** sur \mathcal{P} si de plus pour tout $i \in I$ l'action de G_i sur Γ_i est libre.

Si G agit prolibrement sur \mathcal{P} (pour deux sections s et r), alors le groupe $\varinjlim_r G_i$ agit librement sur le graphe $\varinjlim_s \Gamma_i$. En effet, soient $(a, g) \in \varinjlim_s \Gamma_i \times \varinjlim_r G_i$ tel que $a^g = a$, un indice $i \in I$ tel qu'il existe $(a_i, g_i) \in \Gamma_i \times G_i$ vérifiant $g = \overline{g_i}$ et $a = \overline{a_i}$, et un indice i_0 satisfaisant la propriété (C_3) pour le couple (g_i, a_i) . On a donc $a^g = \overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{i_0}(g_i)}} = \overline{a_i} = \overline{s_{ii_0}(a_i)}$, et par suite, il existe $i_1 \geq i_0$ tel que

$$s_{ii_1}(a_i)^{r_{i_1}(g_i)} = s_{i_0 i_1}(s_{ii_0}(a_i)^{r_{i_0}(g_i)}) = s_{i_0 i_1}(s_{ii_0}(a_i)) = s_{ii_1}(a_i)$$

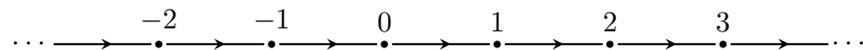
Ainsi, pour tout $k \geq i_1$, on a $s_{ik}(a_i)^{r_{ik}(g_i)} = s_{ik}(a_i)$, ce qui implique, puisque G_k agit librement sur Γ_k par hypothèse, que $r_{ik}(g_i) = e_k$ pour tout $k \geq i_1$ et donc que $\overline{g_i} = e$.

Théorème 2.2.4 (Deschamps-Suarez, théorème principal, [DSA11]). *Soit Ω un groupe profini de rang dénombrable. Les propriétés suivantes*

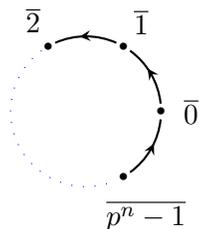
1. Ω est presque libre,
 2. Ω agit prolibrement sur un proarbre,
- sont équivalentes.

2.3 Exemple et interprétation galoisienne

Prographe associé à \mathbb{Z}_p Soit p un nombre premier, $G = \mathbb{Z}$, $\mathcal{N} = \{p^n\mathbb{Z}\}_{n \geq 0}$ et $S = \{1\}$. Le graphe du groupe $\Gamma = \Gamma(G, S)$ s'identifie à l'arbre droit infini :



et pour $N = p^n\mathbb{Z}$, le graphe quotient $\Gamma_n = p^n\mathbb{Z} \backslash \gamma$ s'identifie au graphe circulaire



Puisque S est réduit à un seul élément, les arêtes de Γ_n sont définies de manière non équivoque par leurs origines et leurs sommets. On notera alors pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $a(\bar{x}, 1) = [x \bmod(p^n), x + 1 \bmod(p^n)]$. Pour $m \geq n$, l'épimorphisme θ_{mn} est alors défini par

$$\begin{aligned} \theta_{mn}(x \bmod(p^n)) &= x \bmod(p^m) \\ \theta_{mn}([x \bmod(p^n), x + 1 \bmod(p^n)]) &= [x \bmod(p^m), x + 1 \bmod(p^m)] \end{aligned}$$

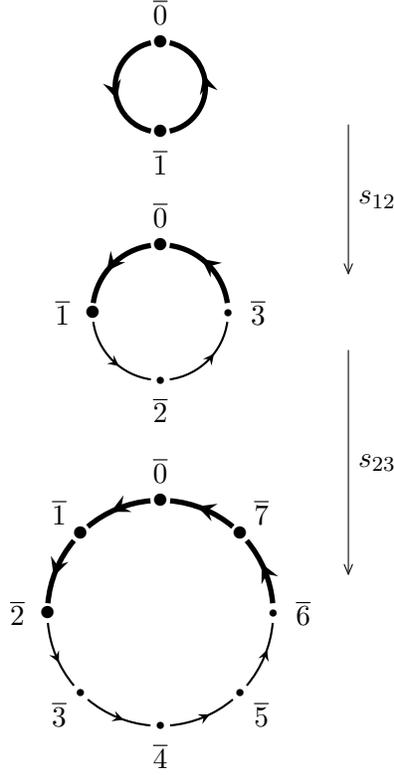
Définissons une section au prographe $(\gamma_n, \theta_{mn})_n$ de la manière suivante : pour $m > n$, on pose, pour $x \in \{0, \dots, [p^n/2]\}$,

$$\begin{aligned} s_{nm}(x \bmod(p^n)) &= x \bmod(p^m) \\ s_{nm}(p^n - x \bmod(p^n)) &= p^m - x \bmod(p^m) \\ s_{nm}([x \bmod(p^n), x + 1 \bmod(p^n)]) &= [x \bmod(p^m), x + 1 \bmod(p^m)] \end{aligned}$$

et, pour $x \in \{1, \dots, [p^n/2]\}$,

$$s_{nm}([p^n - x \bmod(p^n), p^n - x + 1 \bmod(p^n)]) = [p^m - x \bmod(p^m), p^m - x + 1 \bmod(p^m)]$$

Ces formules sont valables pour $p \geq 3$, pour $p = 2$ on peut considérer les sections suivantes:



Considérons un indice $i \in \mathbb{N}$ et une arête $a \in \mathcal{A}(\gamma_i)$. Si

$$a \neq [p^i - [p^i/2] \bmod(p^i), p^i - [p^i/2] + 1 \bmod(p^i)]$$

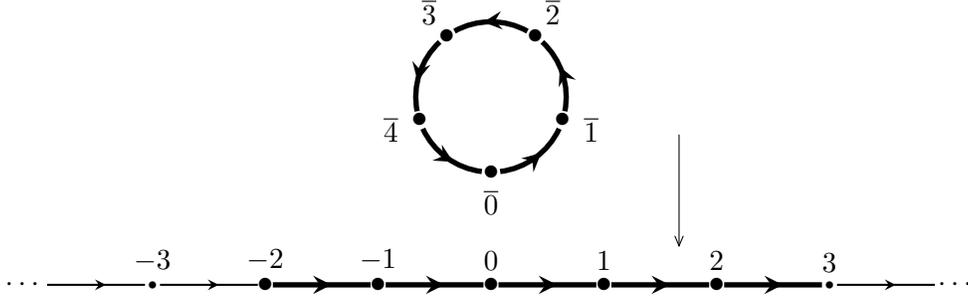
alors l'indice $i_0 = i$ convient pour a dans la propriété (C_1) . Si maintenant

$$a = [p^i - [p^i/2] \bmod(p^i), p^i - [p^i/2] + 1 \bmod(p^i)]$$

alors l'indice $i_0 = i + 1$ convient pour a dans la propriété (C_1) . La section s définie ici est donc graphiquement cohérente.

La section s du prographe associé à \mathbb{Z}_p ci-dessus, est arborescente, i.e $\varinjlim_s \Gamma_n \sim \Gamma$ est un arbre.

Illustration du plongement naturel de $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$ induit par s pour $p = 5$ et $n = 1$:



On considère le système projectif $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ associé au groupe \mathbb{Z}_p . Pour $m > n$, on considère la section r_{nm} de φ_{mn} définie, pour $x \in \{0, \dots, [p^n/2]\}$, par

$$\begin{aligned} r_{nm}(x \bmod(p^n)) &= x \bmod(p^m) \\ r_{nm}(p^n - x \bmod(p^n)) &= p^m - x \bmod(p^m) \end{aligned}$$

Le système $r = (r_{nm})_n$ est alors une section au sens de la définition 2.1.12. Plus précisément, $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ s'identifie au sous-groupe discret de \mathbb{Z}_p engendré par 1 (qui est donc dense et isomorphe à \mathbb{Z}). Ce fait, est un cas particulier de la proposition 2.1.13

Le groupe profini \mathbb{Z}_p agit sur le prographe $(\Gamma_n, \theta_{mn})_n$ de la manière suivante : si $g \bmod(p^n) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $x \bmod(p^n) \in \mathcal{S}(\Gamma_n)$, alors

$$\begin{aligned} (x \bmod(p^n))^g \bmod(p^n) &= x + g \bmod(p^n) \\ [x \bmod(p^n), x + 1 \bmod(p^n)]^g \bmod(p^n) &= [x + g \bmod(p^n), x + g + 1 \bmod(p^n)] \end{aligned}$$

On constate que cette action est complètement compatible aux sections r et s .

Aspect Galoisien des prographes

Nous allons appliquer le théorème 2.2.4 de Deschamps-Suarez qui affirme qu'un groupe profini de rang dénombrable est presque libre si et seulement il agit prolibrement sur un proarbre pour montrer que le groupe profini \mathbb{Z}_p est presque libre. On sait évidemment déjà que \mathbb{Z}_p est presque libre car c'est la complétion profinie de \mathbb{Z} relativement à la base de filtre des $p^n\mathbb{Z}$. Cependant cette application nous permet de voir comment la théorie des prographes s'applique en théorie de Galois.

Considérons l'extension $\mathbb{C}((t^{1/p^n}))/\mathbb{C}((t))$ du corps des séries de Laurent à coefficient de \mathbb{C} . Elle est visiblement galoisienne, son groupe de Galois est alors isomorphe au groupe cyclique d'ordre p^n , $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Soit ξ_n racine primitive n -ième de l'unité, l'application $\sigma : \mathbb{C}((t^{1/p^n})) \rightarrow \mathbb{C}((t^{1/p^n}))$ définie par $\sigma(t^{1/p^n}) = \xi_{p^n} t^{1/p^n}$ est un élément de $G_n = \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{1/p^n}))/\mathbb{C}((t)))$ d'ordre p^n , mais comme le degré de cette extension est p^n , cela implique que σ est un générateur de ce groupe qui est donc cyclique de degré p^n . Donc on a $G_n = \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{1/p^n}))/\mathbb{C}((t))) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

On considère le système projectif $(G_n, \text{res}_{mn})_{n \in \mathbb{N}^*}$ où res_{mn} désigne l'application de restriction et $G_n = \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{1/p^n}))/\mathbb{C}((t)))$. Le corps $\text{Puis}_p(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}((t^{1/p^n}))$ est la p -partie du corps des séries de Puiseux sur \mathbb{C} et c'est une extension galoisienne sur $\mathbb{C}((t))$ de groupe de Galois $\varprojlim_n G_n = \mathbb{Z}_p$. En particulier ce groupe est presque libre. Nous allons le prouver autrement, en utilisant l'arithmétique de ce corps.

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, le graphe Γ_n défini par :

$$\mathcal{S}(\Gamma_n) = \{\xi_{p^n}^k, k = 0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}$$

$$\mathcal{A}(\Gamma_n) = \{[\xi_{p^n}^k, \xi_{p^{n+1}}^k] k = 0, 1, \dots, p^n\}.$$

Pour $n > 1$, on peut définir l'épimorphisme θ_n donné par :

$$\begin{array}{ccc} \theta_n : & \Gamma_n & \rightarrow & \Gamma_{n-1} \\ & \xi_{p^n}^k & \mapsto & (\xi_{p^n}^k)^p \\ & [\xi_{p^n}^k; \xi_{p^{n+1}}^k] & \mapsto & [(\xi_{p^n}^k)^p; (\xi_{p^{n+1}}^k)^p] \end{array}$$

Le couple (Γ_n, θ_n) forme un prographe. Et le groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{1/p^n}))/\mathbb{C}((t)))$ agit sur Γ_n librement et transitivement. L'action est donnée par l'image dans $\mathbb{C}((t^{1/p^n}))$ par l'automorphisme σ de G_n . Cette action est la même que celle que nous avons décrite plus haut. Nous venons de montrer que le groupe profini $\text{Gal}(\text{Puis}_p(\mathbb{C})/\mathbb{C}((t)))$ agit prolibrement sur un proarbre alors il est presque libre.

Le but de ce chapitre est de donner un analogue du théorème 2.2.4 pour les groupes profinis possédant un sous-groupe amalgamé dense.

3.1 Résultats préliminaires

Le lemme 2.1.5 de Deschamps-Suarez montre qu'une section graphiquement cohérente d'un prographe permet de reconstruire l'arbre sur lequel un groupe qui est amalgame de groupes finis agit. Nous l'adaptions ici en ajoutant la donnée de sous-arbres finis.

Lemme 3.1.1. *Considérons un prographe $(\Gamma_n, \theta_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ indexé par \mathbb{N} (muni de l'ordre naturel) et pour tout $n \in \mathbb{N}$ arbre fini $T_n \subset \Gamma_n$. Soient Γ un graphe, T sous-arbre fini de Γ , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n : \Gamma \rightarrow \Gamma_n$ épimorphisme de graphes vérifiant que pour tout n , $\theta_n(T) = T_n$ et que pour tout $m \geq n$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\theta_m} & \Gamma_m \\ & \searrow \theta_n & \downarrow \theta_{mn} \\ & & \Gamma_n \end{array}$$

Supposons qu'il existe une suite croissante $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties de Γ telle que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k = \Gamma$,

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T \subset \Delta_k$, et qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Δ_{k+1} s'injecte (par $\theta_{n_{k+1}}$) dans $\Gamma_{n_{k+1}}$ et se surjecte (par θ_{n_k})

sur Γ_{n_k} :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_{k+1} & \xrightarrow{\theta_{n_{k+1}}} & \Gamma_{n_{k+1}} \\
 \uparrow & \searrow \theta_{n_k} & \downarrow \theta_{n_{k+1}n_k} \\
 \Delta_k & \xrightarrow{\theta_{n_k}} & \Gamma_{n_k}
 \end{array}$$

Il existe alors une section graphiquement cohérente $s = (s_{nm})_{n < m}$ telle que:

1. pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $s_{nm}(T_n) = T_m$ et la restriction $s_{nm}|_{T_n}$ est un morphisme de graphe ;
2. le morphisme canonique $\sigma : \varinjlim_s \Gamma_n \rightarrow \Gamma$ est un isomorphisme ;
3. la famille $(T_n)_n$ définit arbre fini \bar{T} de $\varinjlim_s \Gamma_n$ et $\sigma(T_n) = T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Commençons par définir, pour $k \geq 0$, une section σ_{n_k} de l'application $\theta_{n_k}|_{\Delta_{k+1}} : \Delta_{k+1} \rightarrow \Gamma_{n_k}$

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_{k+1} & \xrightarrow{\theta_{n_{k+1}}} & \Gamma_{n_{k+1}} \\
 \uparrow & \searrow \theta_{n_k} & \downarrow \theta_{n_{k+1}n_k} \\
 \Delta_k & \xrightarrow{\theta_{n_k}} & \Gamma_{n_k}
 \end{array}$$

σ_{n_k} (dashed arrow from Δ_{k+1} to Γ_{n_k})

- si $x \in \theta_{n_k}(\Delta_k)$, on pose $\sigma_{n_k}(x) = (\theta_{n_k}|_{\Delta_k})^{-1}(x)$,
- si $x \notin \theta_{n_k}(\Delta_k)$, alors on prend pour $\sigma_{n_k}(x)$ un relevé quelconque de x qui soit dans Δ_{k+1} .

On définit alors une section $s_{n_k n_{k+1}}$

$$\Gamma_{n_{k+1}} \xrightarrow{\theta_{n_{k+1}n_k}} \Gamma_{n_k}$$

$s_{n_k n_{k+1}}$ (curved arrow from Γ_{n_k} to $\Gamma_{n_{k+1}}$)

de l'application $\theta_{n_{k+1}n_k}$ en posant $s_{n_k n_{k+1}} = \theta_{n_{k+1}} \circ \sigma_{n_k}$.

Comme $T \subset \Delta_k$, on a :

$$\sigma_{n_k}(T_{n_k}) = T.$$

Et on a bien

$$s_{n_k n_{k+1}}(T_{n_k}) = T_{n_{k+1}}.$$

En effet, d'une part, soient $\alpha \in T_{n_k}$ et $\beta \in T$ tels que $\alpha = \theta_{n_k}^{-1}(\beta)$, ce qui donne $s_{n_k n_{k+1}}(\alpha) = \theta_{n_{k+1}}(\beta) \in T_{n_{k+1}}$. D'où l'inclusion dans un sens.

D'autre part, soient $\gamma \in T_{n_{k+1}}$ et $\delta \in T$ tels que $\gamma = \theta_{n_{k+1}}(\delta)$, on a $\delta = \sigma_{n_k} \circ \theta_{n_k}(\delta)$ car la restriction $\theta_{n_k}|_T$ à valeur dans T_{n_k} est isomorphisme de graphes. Par conséquent, $\gamma = \theta_{n_{k+1}} \circ \sigma_{n_k} \circ \theta_{n_k}(\delta)$. Ce qui prouve l'inclusion dans l'autre sens.

Soit $a \in T_{n_k}$, on a $s_{n_k n_{k+1}}(a) = \theta_{n_{k+1}}(b)$ où $b \in T$, encore une fois, car la restriction $\theta_{n_k}|_T$ à valeur dans T_{n_k} est isomorphisme de graphes. Ainsi $s_{n_k n_{k+1}}|_{T_{n_k}}$ est un bien morphisme de graphes.

Pour $h \geq 2$, on pose $s_{n_k n_{k+h}} = s_{n_{k+h-1} n_{k+h}} \circ \dots \circ s_{n_k n_{k+1}} = \theta_{n_{k+h}} \circ \sigma_{n_k}$.

La section $(s_{n_k n_{k+h}})_{k,h}$ du sous-prographe (Γ_{n_k}) est alors graphiquement cohérente. En effet, si $a \in \mathcal{A}(\Gamma_{n_k})$, alors il existe $h \geq k$ tel que $\sigma_{n_k}(a), o(\sigma_{n_k}(a)), t(\sigma_{n_k}(a)) \in \Delta_h$. Or Δ_h s'injecte dans Γ_{n_h} , donc, en vertu de l'égalité $s_{n_k n_{h+m}} = \theta_{n_{h+m}} \circ \sigma_{n_k}$, on en déduit que, pour $m \geq 0$, on a

$$o(s_{n_k n_{h+m}}(a)) = s_{n_h n_{h+m}}(o(s_{n_k n_h}(a)))$$

Définissons maintenant, pour un entier n quelconque, une section $s_{n,n+1}$. Pour cela fixons un indice n_k , posons $l = n_k$ et considérons les entiers i tel que $n_k \leq l+i \leq n_{k+1}$. Définissons d'abord les sections $s_{l+i, n_{k+1}}$ et $s_{l+i, l+i+1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xleftarrow{s_{l+i, n_{k+1}}} & & & \\ \Gamma_{n_{k+1}} & \xrightarrow{\quad} & \dots & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{l+i+1} & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{l+i} & \xrightarrow{\quad} & \dots & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{n_k} \\ & & & & & \xleftarrow{s_{l+i, l+i+1}} & & & & & \end{array}$$

par récurrence sur i : pour $i = 0$, $s_{l, n_{k+1}}$ est déjà définie et on pose $s_{l, l+1} = \theta_{n_{k+1}, l+1} \circ s_{l, n_{k+1}}$. Et

$$s_{l, l+1}(T_l) = \theta_{n_{k+1}, l+1} \circ s_{l, n_{k+1}}(T_l) = (\theta_{n_{k+1}, l+1}(T_{n_{k+1}})) = T_{l+1}$$

Si pour $i - 1 \geq 0$, les sections $s_{l+i-1, n_{k+1}}$ et $s_{l+i-1, l+i}$ sont définies, et de sorte que $s_{l+i-1, n_{k+1}}(T_{l+i-1}) = T_{n_{k+1}}$ et $s_{l+i-1, l+i}(T_{l+i-1}) = T_{l+i}$, on définit $s_{l+i, n_{k+1}}$ de la manière suivante :

- si $x \in s_{l+i-1, l+i}(\Gamma_{l+i-1})$, on pose $s_{l+i, n_{k+1}}(x) = s_{l+i-1, n_{k+1}}(\theta_{l+i, l+i-1}(x))$,
 - si $x \notin s_{l+i-1, l+i}(\Gamma_{l+i-1})$, on prend pour $s_{l+i, n_{k+1}}(x)$ n'importe quel relevé de x dans $\Gamma_{n_{k+1}}$.
- Ainsi

$$s_{l+i, n_{k+1}}(T_{l+i}) = T_{n_{k+1}}$$

Une fois $s_{l+i, n_{k+1}}$ ainsi définie, on définit comme il se doit $s_{l+i, l+i+1} = \theta_{n_{k+1}, l+i+1} \circ s_{l+i, n_{k+1}}$. On a donc

$$s_{l+i, l+i+1}(T_{l+i}) = \theta_{n_{k+1}, l+i+1} \circ s_{l+i, n_{k+1}}(T_{l+i}) = \theta_{n_{k+1}, l+i+1}(T_{n_{k+1}}) = T_{l+i+1}.$$

Il est alors clair que l'on a $s_{l+i, n_{k+1}} = s_{n_{k+1}-1, n_{k+1}} \circ \cdots \circ s_{l+i, l+i+1}$.

Si $n \leq m$, on pose $s_{nm} = s_{m-1, m} \circ \cdots \circ s_{n, n+1}$ et le système $(\Gamma_n, s_{nm})_n$ est alors inductif. La section $s = (s_{nm})_{n \leq m}$ est une section inductive qui possède une sous-section $(s_{n_k n_l})_{k \leq l}$ graphiquement cohérente. Elle est donc elle-même graphiquement cohérente. On a bien que la restriction $s_{nm}|_{T_n}$ est un morphisme de graphes et $s_{nm}(T_n) = T_m$.

Pour $n_k < l < n_{k+1}$, on définit une application $\sigma_l : \Gamma_l \rightarrow \Delta_{k+2}$ en posant $\sigma_l = \sigma_{n_{k+1}} \circ s_{l, n_{k+1}}$. Les applications σ_l commutent visiblement au diagramme inductif et, par propriété universelle, on en déduit l'existence d'une application

$$\sigma : \varinjlim_s \Gamma_n \rightarrow \Gamma$$

Si $x \in \Gamma$, il existe $k \geq 0$ tel que $x \in \Delta_k$ et alors la classe $\overline{\theta_{n_k}(x)}$ ne dépend pas du choix de k . En effet si $k_1 < k_2$ sont tels que $x \in \Delta_{k_1} \subset \Delta_{k_2}$, alors par construction on a $s_{n_{k_1} n_{k_2}} \circ \theta_{n_{k_1}}(x) = \theta_{n_{k_2}}(x)$ et donc $\overline{\theta_{n_{k_1}}(x)} = \overline{\theta_{n_{k_2}}(x)}$. Ceci permet de définir une application

$$\psi : \Gamma \rightarrow \varinjlim_s \Gamma_n$$

en posant $\psi(x) = \overline{\theta_{n_k}(x)}$, où k est tel que $x \in \Delta_k$.

Et donc

$$\psi(T) = \overline{\theta_{n_k}(T)} = \overline{T_{n_k}}$$

L'application ψ est un morphisme de graphe. En effet, si $a \in \Gamma$ est une arête et k est un entier tel que $a, o(a), t(a) \in \Delta_k$, alors on a alors pour tout $m \geq n_k$, $o(s_{n_k m}(\theta_{n_k}(a))) = s_{n_k m}(o(\theta_{n_k}(a)))$ et donc $o(\psi(a)) = \overline{o(\theta_{n_k}(a))} = \psi(o(a))$. On a de même $t(\psi(a)) = \psi(t(a))$ et ψ est donc bien un morphisme. Il est certainement bijectif puisque $\psi \circ \sigma = \text{Id}$ et $\sigma \circ \psi = \text{Id}$.

Ainsi, σ est un isomorphisme canonique (i.e. provenant de la propriété universelle des objets inductifs) entre $\varinjlim_s \Gamma_n$ et Γ . Cet isomorphisme dépend toutefois du choix de la suite $(\Delta_k)_k$. \square

Par application du précédent lemme au cas d'un groupe agissant sur arbre, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. *Soit G un groupe dénombrable agissant sur un arbre Γ avec comme domaine fondamental un arbre fini T . On suppose que les stabilisateurs des sommets de T sont finis. On considère une suite décroissante $H_0 \supset H_1 \supset \cdots$ de sous-groupes distingués d'indice fini de G telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$ et le prographe $(\Gamma_n, \theta_{mn})_n$ donné par $\Gamma_n = H_n \backslash \Gamma$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note θ_n l'épimorphisme canonique de Γ dans Γ_n et on définit l'arbre $T_n := \theta_n(T)$. Alors il existe une section graphiquement cohérente, s , de θ_{mn} , telle que $\varinjlim_s \Gamma_n = \Gamma$ et $s_{nm}(T_n) = T_m$.

Démonstration. On veut vérifier les hypothèses du lemme précédent et l'appliquer. On note, pour $m \geq n$, $\theta_{mn} : \Gamma_m \rightarrow \Gamma_n$ l'épimorphisme canonique induit par l'inclusion $H_m \subset H_n$. On obtient ainsi, pour tout $n \leq m$, le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\theta_m} & \Gamma_m \\ & \searrow \theta_n & \downarrow \theta_{mn} \\ & & \Gamma_n \end{array}$$

Nous allons construire la suite $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ du lemme. Pour cela on considère une partie $\Delta \subset \Gamma$ contenant T et composée d'un nombre fini de sommets et de toutes les arêtes ayant pour origine un de ces sommets. Il existe alors un indice $n \geq 0$ tel que Δ s'injecte par θ_n dans Γ_n . En effet, soient x_1, \dots, x_k les sommets distincts de Δ . Pour tout $1 \leq i < j \leq k$, il existe $n_{ij} \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \neq x_j \text{ mod } H_{n_{ij}}$. En effet supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_i = x_j \text{ mod } H_n$.

Comme $\mathcal{S}(\Gamma) = G \cdot \mathcal{S}(T) = \{g_i \cdot P_i \mid g_i \in G, P_i \in \mathcal{S}(T)\}$, on peut écrire tout sommet $x_i \in \mathcal{S}(\Gamma)$ sous la forme $x_i = g_i \cdot P_i$, pour un certain $g_i \in G$ et $P_i \in \mathcal{S}(T)$.

Ainsi, soient g_i et g_j deux éléments de G et P_i et P_j deux sommets de Γ tels que $x_i = g_i \cdot P_i$ et $x_j = g_j \cdot P_j$. Alors $x_i = x_j \text{ mod } H_n$ implique que $P_i = P_j =: P$, $x_i = g_i \cdot P_i = h_n \cdot x_j = h_n g_j \cdot P_j$, avec $h_n \in H_n$.

On en déduit que $P = g_i^{-1} h_n g_j \cdot P$ et donc que $g_i^{-1} h_n g_j \in \text{Stab}_G(P)$.

Puisque $\text{Stab}_G(P)$ est fini, il existe $a \in \text{Stab}_G(P)$ et une infinité d'indices n_k tels que $g_i^{-1} h_{n_k} g_j = a$, d'où $h_{n_k} = g_i a g_j^{-1}$. On a $g_i a g_j^{-1} \neq e$ car $x_i \neq x_j$ ce qui contredit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$.

Notons $n = \max_{i,j} n_{ij}$. Alors pour tous $i < j$, $x_i \neq x_j \text{ mod } H_n$.

Les sommets de Δ s'envoient injectivement par θ_n dans Γ_n . En utilisant le même argument que pour les sommets, arêtes de Δ s'envoient aussi injectivement par θ_n dans Γ_n car puisque le domaine fondamental est fini il y a un nombre fini d'arêtes qui partent de chaque sommet.

Comme G est dénombrable et T aussi alors Γ l'est aussi car $\Gamma = G \cdot T$, on peut énumérer $\mathcal{S}(\Gamma)$ en une suite $(g_n)_n$. Pour $n \geq 0$, on considère la partie $\Delta_n \subset \Gamma$ constituée des sommets g_0, \dots, g_n et de toutes les arêtes de Γ qui ont pour origine un des g_i avec $i \leq n$. La suite $(\Delta_n)_n$ est donc une suite de parties de Γ , croissante pour l'inclusion et de réunion valant Γ tout entier.

Posons $i_0 = 0$. D'après ce qui précède, il existe un indice n_0 tel que Δ_{i_0} s'injecte par θ_{n_0} dans Γ_{n_0} . Comme Γ_{n_0} ne compte qu'un nombre fini de sommets, si l'on relève ces sommets dans Γ' il existe alors un indice $i_1 > i_0$ tel que Δ_{i_1} contienne tous ces relevés. La partie Δ_{i_1} se surjecte alors par θ_{n_0} sur le graphe Γ_{n_0} . Il existe alors un indice $n_1 > n_0$ tel

que Δ_{i_1} s'injecte par θ_{n_1} dans Γ_{n_1} . On construit ainsi, par récurrence, deux suites d'indice $i_0 < i_1 < \dots$ et $n_0 < n_1 < \dots$ telles que, pour tout $k \geq 0$, $\Delta_{i_{k+1}}$ s'injecte (par $\theta_{n_{k+1}}$) dans $\Gamma_{n_{k+1}}$ et se surjecte (par θ_{n_k}) dans Γ_{n_k} .

On peut alors appliquer le lemme précédent pour conclure : il existe une section graphiquement cohérente s telle que $s_{nm}(T_n) = T_m$ et un isomorphisme canonique de graphes $\sigma : \varinjlim_s \Gamma_n \longrightarrow \Gamma$ \square

Corollaire 3.1.3. *Le prographe d'un amalgame de groupes finis relativement à une base de filtre de sous-groupes distingués d'indices finis d'intersection réduite au neutre, est un prographe sylvestre.*

Démonstration. D'après le théorème 1.4.11 (théorème 7 de [Ser77]), notre groupe amalgamé agit sur un arbre avec comme domaine fondamental un arbre fini. On lui applique alors le théorème précédent pour obtenir le résultat voulu. \square

3.2 Action à domaine fondamental arbre fini

Définition 3.2.1. On dira qu'un groupe profini agit profinement sur un prographe \mathcal{P} si G agit de manière complètement compatible à deux sections s et r . Si de plus, pour tout $i \in I$, G_i agit sur Γ_i avec comme domaine fondamental un arbre fini T_i , avec $s_{ij}(T_i) = T_j$ et la restriction $s_{ij}|_{T_i}$ est un morphisme de graphe, et enfin la condition :

$$(C_4) \forall i \in I, \forall \alpha_i \in T_i, \forall g_i \in G_i, \exists i_0 \geq i, \forall k \geq i_0, s_{ik}(g_i \cdot \alpha_i) = r_{ik}(g_i) \cdot \alpha_k$$

est vérifiée, on dira que G agit à **domaine fondamental arbre fini** (dfaf) sur le prographe \mathcal{P} .

Lemme 3.2.2. *Soit G un groupe profini agissant à domaine fondamental arbre fini sur un proarbre \mathcal{P} , alors $\varinjlim_r G_i$ agit sur $\varinjlim_s \Gamma_i$ avec comme domaine fondamental un arbre fini $T := \overline{T_i}$, pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Soit $a \in \varinjlim_s \Gamma_i$, $a = \overline{a_i}$ où $a_i \in \Gamma_i$. Comme G agit à domaine fondamental arbre fini sur \mathcal{P} il existe donc $g_i \in G_i$ et il existe $\alpha_i \in T_i$, tels que $a_i = g_i \cdot \alpha_i$. On cherche $g \in \varinjlim_r G_i$ et $\alpha \in T$ tel que $a = g \cdot \alpha$. Les éléments $g := \overline{g_i}$ et $\alpha = \overline{\alpha_i}$ conviennent. En effet :

$$\begin{aligned} \overline{g_i} \cdot \overline{\alpha_i} &= \overline{r_{ii_0}(g_i) \cdot s_{ii_0}(\alpha_i)} \\ &= \overline{r_{ii_0}(g_i) \cdot \alpha_{i_0}} \\ &= \overline{s_{ii_0}(g_i \cdot \alpha_i)} \\ &= \overline{s_{ii_0}(a_i)} \\ &= \overline{a_i} \\ &= a \end{aligned}$$

T est bien un domaine fondamental pour l'action de $\varprojlim_r G_i$ sur $\varinjlim_s \Gamma_i$ et c'est aussi un arbre fini. \square

Dans la suite on s'intéressera qu'aux groupes amalgamés avec un nombre fini de facteurs. Nous introduisons ainsi la convention/définition suivante :

Définition 3.2.3.

1. Un groupe G est dit amalgamé s'il est amalgame d'un nombre fini de facteurs.
2. Un groupe profini sera dit presque-amalgamé s'il est égal à la complétion profinie d'un groupe amalgamé relativement à une base de filtre de sous-groupes distingués d'indice fini \mathcal{B} , vérifiant $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{e\}$.

L'hypothèse de séparation $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{e\}$ nous assure que le groupe amalgamé s'injecte dans sa complétion.

Comme pour le cas de la presque liberté (cf lemme 2.2.2), on a de manière plus précise le lemme suivant :

Lemme 3.2.4. *Un groupe profini est presque-amalgamé si et seulement s'il possède un sous-groupe (abstrait) amalgamé dense.*

Définition 3.2.5. Un groupe profini est dit **finiment** presque-amalgamé s'il possède un sous groupe dense, amalgame de groupes finis.

Nous obtenons un analogue du théorème 2.2.4 de Deschamps-Suarez donné par les deux prochains théorèmes.

Théorème 3.2.6. *Soit Ω un groupe profini de rang dénombrable qui agit à domaine fondamental arbre fini sur un proarbre \mathcal{P} . Alors Ω est presque-amalgamé.*

Démonstration. Par hypothèse $\Omega = \varprojlim_i G_i$ agit à domaine fondamental arbre fini sur un proarbre $\mathcal{P} = (\Gamma_i, \theta_{ji})_i$ relativement à deux sections s et r . Le sous-groupe $\varprojlim_r G_i$ dense agit d'après le lemme 3.2.2 sur l'arbre $\varinjlim_s \Gamma_i$ avec comme domaine fondamental un arbre fini T . Il est donc amalgamé d'après le théorème 1.4.11. Ainsi Ω possède un sous groupe abstrait dense qui est amalgamé, il est donc presque-amalgamé. \square

Nous allons maintenant démontrer une réciproque partielle du théorème précédent. Nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme 3.2.7. *Soit H un groupe dénombrable agissant sur un arbre Γ avec comme domaine fondamental un arbre fini T . On suppose que les stabilisateurs des sommets de T sont finis. On considère une suite décroissante $H_0 \supset H_1 \supset \dots$ de sous-groupes distingués d'indice fini de H telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$ et le prographe $(\Gamma_n, \theta_{mn})_n$ donné par $\Gamma_n = H_n \setminus \Gamma$. Posons pour tout entier n $G_n = H/H_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note π_n l'épimorphisme canonique de H dans G_n et on suppose que G_n agit Γ_n avec comme domaine fondamental l'arbre fini $T_i := \bar{T}$. Considérons enfin $\Lambda \subset H$ une partie finie de H . Il existe alors deux indices :*

- $n \geq 0$ tel que Λ s'injecte par π_n dans G_n ;
- $m \geq 0$ tel que si $\lambda \in \Lambda$ et $\alpha \in T$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\bar{\alpha})$, où $\bar{\alpha} = \alpha_m \in T_m$.

Démonstration. Nous allons montrer qu'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$, tel que si $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in T$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\bar{\alpha})$, où $\bar{\alpha} = \alpha_m$.

Soit $\lambda \in \Lambda$ avec $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$, on suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\bar{\lambda} \in \text{Stab}(\alpha_m)$. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \cdot \alpha_m &= \alpha_m \\ \bar{\lambda} \cdot \bar{\alpha} &= \bar{\alpha} \\ \bar{\lambda} \cdot \alpha &= \alpha \end{aligned}$$

Ce qui implique l'existence d'un $h_m \in H_m$ tel que $\lambda \cdot \alpha = h_m \cdot \alpha$, on a donc que $h_m^{-1} \lambda \in \text{Stab}(\alpha)$ ce qui veut dire qu'il existe un élément $a_m \in \text{Stab}(\alpha)$ tel que $h_m^{-1} \lambda = a_m$. Comme $\text{Stab}(\alpha)$ est fini, il existe une infinité d'indices m_k telle que $a_{m_k} = a \in \text{Stab}(\alpha)$. On a donc $h_{m_k}^{-1} \lambda = a \neq e$ d'après l'hypothèse $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$. Et le fait que $h_{m_k} \neq e$ contredit l'hypothèse $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$.

Pour la première affirmation, on raisonne de la même manière. □

Théorème 3.2.8. *Soit Ω un groupe profini de rang dénombrable, finiment presque amalgamé. Alors Ω agit à domaine fondamental arbre fini sur un proarbre.*

Démonstration. Comme Ω est de rang dénombrable, il existe une filtration $U_0 \supset U_1 \supset \dots$ de sous-groupes ouverts distingués de Ω . Si l'on considère les groupes quotients $G_n = \Omega/U_n$, alors $\Omega = \varprojlim_n G_n$. Soit F un sous-groupe amalgamé et dense de Ω . D'après le théorème 1.4.11, F agit sur un arbre Γ avec comme domaine fondamental un arbre fini T . On considère le prographe $\mathcal{P} = (\Gamma_n)_n$ de F (relativement à la base de filtre $\{F \cap U_n\}_n$), donné par $\Gamma_n = F \cap U_n \setminus \Gamma$.

Puisque F agit sur Γ avec comme domaine fondamental un arbre fini, on en déduit que pour tout entier n , $G_n = F/F \cap U_n$ agit sur Γ_n avec comme domaine fondamental un arbre fini T_n .

Le groupe F est dénombrable et $\{F \cap U_n\}_n$ est une base de filtre de sous-groupes distingués d'indices fini et d'intersection réduite au neutre. Nous allons construire une section r du

r est bien une section du système projectif $(G_n, \phi_{mn})_n$, plus précisément, d'après la proposition 2.1.13 si l'on considère les injections canoniques

$$\begin{array}{ccccc} F & \xleftarrow{\pi} & G & \xleftarrow{\theta} & \varinjlim G_n \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & & & & \omega \end{array}$$

alors il existe une bijection $\omega : H \longrightarrow \varinjlim G_n$ telle que $\pi = \theta \circ \omega$.

Construisons une section graphiquement cohérente s du prographe \mathcal{P} . Posons $\Delta_k = \Lambda_k \cdot T$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a aussi $\Gamma_{n_k} = G_{n_k} \cdot T_{n_k}$. On obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{k+1} & \xleftarrow{\theta_{n_{k+1}}} & \Gamma_{n_{k+1}} \\ \uparrow & \swarrow \theta_{n_k} & \downarrow \\ \Delta_k & \xleftarrow{\theta_{n_k}} & \Gamma_{n_k} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow s_{n_k n_{k+1}} \\ \searrow \sigma_{n_k} \end{array}$$

où $\sigma_{n_k}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) = \rho_{n_k}(g_{n_k}) \cdot \alpha$ et $\theta_{n_k}(h_k \cdot \alpha) = \pi_{n_k}(h_k) \cdot \alpha_{n_k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ces deux applications sont bien définies grâce à la condition *iii*).

Posons :

$$\begin{aligned} s_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) &= \theta_{n_{k+1}} \circ \sigma_{n_k}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) \\ &= \theta_{n_{k+1}}(\rho_{n_k}(g_{n_k}) \cdot \alpha) \\ &= \pi_{n_{k+1}}(\rho_{n_k}(g_{n_k})) \cdot \alpha_{n_{k+1}} \\ &= r_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k}) \cdot \alpha_{n_{k+1}} \end{aligned}$$

et s aussi est bien définie. D'après la preuve du lemme 3.1.1 s est une section graphiquement cohérente du prographe \mathcal{P} , on a que $\varinjlim_s \Gamma_n \simeq \Gamma$ et $s_{nm}(\alpha) = \alpha_m$, avec $\alpha_i \in T_i$, la restriction de s_{nm} à T_n est un morphisme de graphe. L'égalité $s_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) = r_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k}) \cdot \alpha_{n_{k+1}}$ correspond à la condition (C_4) .

Nous allons donc montrer que la condition (C_3) de la définition 2.1.15 est vérifiée. Dire que r est une section équivaut à la condition (C_2) suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall g_n, g'_n, \exists n_0 \geq n, \forall m \geq n_0,$

$$r_{n_0 m}(r_{nn_0}(g_n) \cdot r_{nn_0}(g'_n)) = r_{nm}(g_n) r_{nm}(g'_n)$$

On agit sur α_m des deux côtés de l'égalité et d'après l'égalité $s_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) = r_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k}) \cdot \alpha_{n_{k+1}}$, on obtient :

$$s_{n_0 m}(r_{nn_0}(g_n) r_{nn_0}(g'_n) \cdot \alpha_n) = r_{nm}(g_n) \cdot s_{n_0 m}(g'_n \cdot \alpha_n)$$

On a bien la condition (C_3) :

$$s_{n_0 m}(r_{nn_0}(g_n) \cdot s_{nn_0}(g'_n \cdot \alpha_n)) = r_{nm}(g_n) \cdot s_{n_0 m}(g'_n \cdot \alpha_n)$$

□

3.3 Une illustration galoisienne

On considère le groupe diédral infini $\mathcal{D}_\infty = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les éléments $c = (0, 1)$ et $\sigma = (1, 0)$ qui engendrent le groupe. Par interprétation géométrique, on peut dire que $\sigma = (1, 0)$ est une rotation et $c = (0, 1)$ une symétrie axiale. On voit que les éléments c et $\sigma c = (1, 1)$ engendrent librement \mathcal{D}_∞ . Si bien que \mathcal{D}_∞ peut-être vu comme le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi \mathcal{D}_∞ est un amalgame de deux copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur le sous-groupe trivial.

On se donne p un nombre premier et on considère la base de filtre $((p^n \mathbb{Z}, 0))_{n \geq 0}$ de sous-groupes distingués dans \mathcal{D}_∞ vu comme un produit semi-direct et on note $U_n = (p^n \mathbb{Z}, 0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le quotient \mathcal{D}_∞/U_n est égal au groupe diédral D_{p^n} . La famille des groupes $(D_{p^n})_n$ forment un système projectif dont la limite projective est le groupe $\widehat{D}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par conséquent \widehat{D}_{p^∞} est la complétion profinie de \mathcal{D}_∞ relativement à la base de filtre $(U_n)_n$. Puisque \mathcal{D}_∞ est dense dans \widehat{D}_{p^∞} , ce dernier est donc un groupe profini presque-amalgamé.

Dans cette partie nous allons explicitement retrouver ce résultat en appliquant le théorème 3.2.6 de la section précédente.

Pour tout entier naturel n non nul, considérons le groupe diédral $D_{p^n} = \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et le système projectif $(D_{p^n}, \varphi_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$, dont la limite projective est le groupe profini $\widehat{D}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour $m \geq n$, le morphisme $\varphi_{mn} : D_{p^m} \rightarrow D_{p^n}$ est défini par :

$$\varphi_{mn}(x \bmod (p^m), a) = (x \bmod (p^n), a).$$

Nous allons maintenant construire un proarbre sur lequel notre groupe profini \widehat{D}_{p^∞} agira.

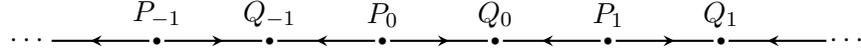
Nous partons de $\mathcal{D}_\infty = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on considère les éléments $g_1 = (0, 1)$ et $g_2 = (1, 1)$. On pose $G_1 = \langle g_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G_2 = \langle g_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On obtient les classes suivant les sous-groupes G_1 et G_2 : $\mathcal{D}_\infty/G_1 = \{(n, 0), (n, 1)\}/n \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{D}_\infty/G_2 = \{(n, 0), (n+1, 1)\}/n \in \mathbb{Z}$.

Soit Γ l'arbre dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{S}(\Gamma) = \mathcal{D}_\infty/G_1 \sqcup \mathcal{D}_\infty/G_2$ et l'ensemble des arêtes est $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{D}_\infty$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $P_n = \{(n, 0), (n, 1)\}$ et $Q_n = \{(n, 0), (n+1, 1)\}$, ce sont les sommets de Γ .

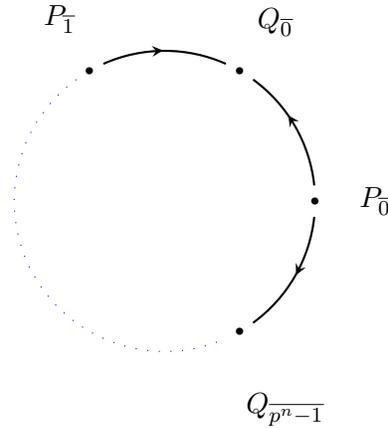
Soit maintenant $(n, g) \in A(\Gamma) = D_\infty$. On a $(o(n, g)) = (n, g) \bmod (G_1) = \{(n, 0), (n, 1)\} = P_n$ et

$$t(n, g) = \begin{cases} \{(n, 0), (n+1, 1)\} = Q_n & \text{si } g = 0 \\ \{(n-1, 0), (n, 1)\} = Q_{n-1} & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

On en déduit que l'arbre Γ est :



Pour $n \geq 1$ variable, les graphes quotient $\Gamma_n = \Gamma/U_n$ ci-après



définissent un prographe $\mathcal{P} = (\Gamma_n, \theta_{mn})_{n \geq 1}$. Pour $m \geq n$, l'épimorphisme θ_{mn} est défini, pour $x \in \mathbb{Z}$, par :

$$\begin{array}{lcl} \theta_{mn} : & \Gamma_m & \rightarrow \Gamma_n \\ & P_x \bmod p^m & \mapsto P_x \bmod p^n \\ & Q_x \bmod p^m & \mapsto Q_x \bmod p^n \\ & [P_x \bmod p^m, Q_x \bmod p^m] & \mapsto [P_x \bmod p^n, Q_x \bmod p^n] \\ & [P_{x+1} \bmod p^m, Q_x \bmod p^m] & \mapsto [P_{x+1} \bmod p^n, Q_x \bmod p^n] \end{array}$$

θ_{mn} est clairement surjectif.

Pour tout $n \geq 1$, $D_{p^n} = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur le graphe Γ_n , le segment $[P_{\bar{0}}, Q_{\bar{0}}]$ est un domaine fondamental pour cette action. Soit $a \in \mathbb{Z}$, on note \bar{a} sa classe modulo $p^n\mathbb{Z}$. Les éléments D_{p^n} s'écrivent sous la forme (\bar{a}, b) , où $b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'action de D_{p^n} sur Γ_n est donnée par :

$$(\bar{a}, 0) \cdot [P_{\bar{n}} - Q_{\bar{n}}] = \begin{cases} [P_{\overline{n+k}} - Q_{\overline{n+k}}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k} \\ [P_{\overline{n+k+1}} - Q_{\overline{n+k}}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{a}, 1) \cdot [P_{\bar{n}} - Q_{\bar{n}}] &= \begin{cases} [P_{\bar{n}-k} - Q_{\bar{n}-k}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k} \\ [P_{\bar{n}-k} - Q_{\bar{n}-k-1}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k+1} \end{cases} \\
(\bar{a}, 0) \cdot [P_{\bar{n}+1} - Q_{\bar{n}}] &= \begin{cases} [P_{\bar{n}+k+1} - Q_{\bar{n}+k}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k} \\ [P_{\bar{n}+k+1} - Q_{\bar{n}+k+1}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k+1} \end{cases} \\
(\bar{a}, 1) \cdot [P_{\bar{n}+1} - Q_{\bar{n}}] &= \begin{cases} [P_{\bar{n}-k+1} - Q_{\bar{n}-k}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k} \\ [P_{\bar{n}-k+1} - Q_{\bar{n}-k+1}] & \text{si } \bar{a} = \overline{2k+1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le prographe $\mathcal{P} = (\Gamma_n, \theta_{mn})_n$ est en fait un proarbre. En effet on a $\varinjlim_s \Gamma_n \sim \Gamma$ où s est la section graphiquement cohérente arborescente définie ci-dessous .

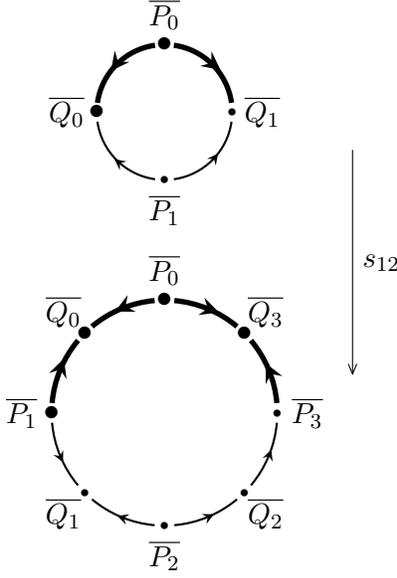
Pour $m > n$, on pose, pour $x \in \{0, \dots, [p^n/2]\}$,

$$\begin{array}{lcl}
s_{nm} : & \Gamma_n & \rightarrow \Gamma_m \\
& P_x \bmod p^n & \mapsto P_x \bmod p^m \\
& Q_x \bmod p^n & \mapsto Q_x \bmod p^m \\
& P_{p^n-x} \bmod p^n & \mapsto P_{p^n-x} \bmod p^m \\
& Q_{p^n-x} \bmod p^n & \mapsto Q_{p^n-x} \bmod p^m \\
& [P_x \bmod p^n - Q_x \bmod p^n] & \mapsto [P_x \bmod p^m - Q_x \bmod p^m] \\
& [P_x \bmod p^n - Q_{x-1} \bmod p^n] & \mapsto [P_x \bmod p^m - Q_{x-1} \bmod p^m]
\end{array}$$

et, pour $x \in \{1, \dots, [p^n/2]\}$,

$$\begin{array}{lcl}
s_{nm} : & \Gamma_n & \rightarrow \Gamma_m \\
& [P_{p^n-x} \bmod p^n - Q_{p^n-x} \bmod p^n] & \mapsto [P_{p^m-x} \bmod p^m - Q_{p^m-x} \bmod p^m] \\
& [P_{p^n-x} \bmod p^n - Q_{p^n-x-1} \bmod p^n] & \mapsto [P_{p^m-x} \bmod p^m - Q_{p^m-x-1} \bmod p^m]
\end{array}$$

Ces formules sont valables pour $p \geq 3$, pour $p = 2$ on peut considérer les sections suivantes : On envoie Γ_n sur la partie du dessus de Γ_m , pour $m \geq n$.



Considérons un indice $i \in \mathbb{N}$ et une arête $a \in A(\Gamma_i)$. Si

$$a \neq \begin{cases} [P_{\lfloor p^i/2 \rfloor - 1}, Q_{\lfloor p^i/2 \rfloor}] & \text{si } p = 2 \\ [Q_{\lfloor p^i/2 \rfloor}, P_{\lfloor p^i/2 \rfloor + 1}] & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

alors l'indice $i_0 = i$ convient pour a . Si maintenant

$$a = \begin{cases} [P_{\lfloor p^i/2 \rfloor - 1}, Q_{\lfloor p^i/2 \rfloor}] & \text{si } p = 2 \\ [Q_{\lfloor p^i/2 \rfloor}, P_{\lfloor p^i/2 \rfloor + 1}] & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

alors l'indice $i_0 = i + 1$ convient pour a . La section s est donc graphiquement cohérente.

Pour $m > n$, on considère la section r_{nm} de φ_{mn} , pour $x \in \{0, \dots, \lfloor p^n/2 \rfloor\}$, définie par :

$$\begin{aligned} r_{nm}(x \bmod (p^n), a) &= (x \bmod (p^m), a) \\ r_{nm}(p^n - x \bmod (p^n), a) &= (p^m - x \bmod (p^m), a). \end{aligned}$$

Le système $(r_{nm})_n$ est alors une section dans le sens où $\varinjlim_n D_{p^n}$ (isomorphe à $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) est un sous groupe de \widehat{D}_{p^∞} .

Le groupe \widehat{D}_{p^∞} agit à domaine fondamental segment sur un proarbre. On en déduit, d'après le théorème 3.2.6 qu'il est presque amalgamé.

Illustrons maintenant sur une situation galoisienne ce que nous venons de faire.

Considérons un système cohérent de racines primitives p^n -ièmes de l'unité $(\xi_{p^n})_n$, c'est à dire pour tout ξ_{p^n} une racine primitive p^n -ième de l'unité telle que si $p^m = kp^n$ alors $\xi_{p^n} = \xi_{p^m}^k$. Par exemple on considère $\xi_{p^n} = \exp(\frac{2i\pi}{p^n})$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère l'extension galoisienne $\mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}}))/\mathbb{R}((t))$ du corps de séries de Laurent à coefficients dans \mathbb{R} . Son groupe de Galois : $G_n = \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}}))/\mathbb{R}((t)))$ est isomorphe à D_{p^n} . Plus précisément si l'on note c la conjugaison complexe et soit l'automorphisme $\sigma : \mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}})) \rightarrow \mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}}))$ défini par : $\sigma(t^{\frac{1}{p^n}}) = \xi_{p^n} t^{\frac{1}{p^n}}$, le groupe $G_n := \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}}))/\mathbb{R}((t)))$ est engendré par c et σ .

Soit le système projectif $(G_n, \text{res}_{mn})_{n \in \mathbb{N}^*}$ où res_{mn} désigne l'application de restriction. La p -partie du corps des série de Puiseux sur \mathbb{C} correspond au corps $\text{Puis}_p(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}}))$. Il s'agit d'une extension galoisienne sur $\mathbb{R}((t))$ de groupe de Galois $\varprojlim_n G_n \simeq \widehat{D}_{p^\infty}$. En particulier ce groupe est presque amalgamé.

On peut voir cette dernière propriété directement grâce à l'arithmétique de ce corps : pour tout $n \geq 1$, on considère le graphe Γ_n donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma_n) &= \{\xi_{2p^n}^{2k} t^{\frac{1}{p^n}}, \xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}} \mid k = 0, \dots, p^n - 1\} \\ \mathcal{A}(\Gamma_n) &= \{[\xi_{2p^n}^{2k} t^{\frac{1}{p^n}}; \xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}}], [\xi_{2p^n}^{2k+2} t^{\frac{1}{p^n}}; \xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}}], k = 0, \dots, p^n - 1\}. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$ donné, on peut définir un épimorphisme de graphe donné par :

$$\begin{array}{lcl} \theta_n : & \Gamma_n & \rightarrow \Gamma_{n-1} \\ & \xi_{2p^n}^{2k} t^{\frac{1}{p^n}} & \mapsto (\xi_{2p^n}^{2k} t^{\frac{1}{p^n}})^p \\ & \xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}} & \mapsto (\xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}})^p \\ & [\xi_{2p^n}^{2k} t^{\frac{1}{p^n}}; \xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}}] & \mapsto [(\xi_{2p^n}^{2k} t^{\frac{1}{p^n}})^p; (\xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}})^p] \\ & [\xi_{2p^n}^{2k+2} t^{\frac{1}{p^n}}; \xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}}] & \mapsto [(\xi_{2p^n}^{2k+2} t^{\frac{1}{p^n}})^p; (\xi_{2p^n}^{2k+1} t^{\frac{1}{p^n}})^p] \end{array}$$

Il est clair que $(\Gamma_n, \theta_n)_n$ forme un prographe et pour tout $n \geq 1$, le groupe G_n agit naturellement sur Γ_n . L'action est celle donnée par l'image dans le corps $\mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}}))$ par les automorphismes c et σ de $G_n = \text{Gal}(\mathbb{C}((t^{\frac{1}{p^n}}))/\mathbb{R}((t)))$.

On voit que cette action est exactement celle que nous avons décrite dans la première partie de cet exemple. On en déduit que $\text{Gal}(\text{Puis}_p(\mathbb{C})/\mathbb{R}((t)))$ agit à domaine fondamental segment sur un proarbre et donc que ce groupe est presque amalgamé.

Cet exemple incite à considérer d'autres situations arithmétiques explicites pour lesquelles on ne sait pas déterminer le groupe de Galois mais pour lesquelles on pourrait obtenir la propriété d'être presque amalgamé.

4.1 Groupes profinis presque groupes fondamentaux

Nous allons commencer cette section par une remarque. On reprend le lemme 3.1.1, remarquons que nous pouvons remplacer le sous arbre fini T par un sous-graphe W de Γ , la preuve restera tout aussi valable. On obtient le lemme suivant

Lemme 4.1.1. *Considérons un prographe $(\Gamma_n, \theta_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ indexé par \mathbb{N} (muni de l'ordre naturel) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un graphe $W_n \in \Gamma_n$. Soient Γ un graphe, W un sous-graphe de Γ , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n : \Gamma \rightarrow \Gamma_n$ un épimorphisme de graphes vérifiant que pour tout n , $\theta_n(W) = W_n$ et que pour tout $m \geq n$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\theta_m} & \Gamma_m \\ & \searrow \theta_n & \downarrow \theta_{mn} \\ & & \Gamma_n \end{array}$$

Supposons qu'il existe une suite croissante $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties de Γ telle que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k = \Gamma$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $W \subset \Delta_k$, et qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Δ_{k+1} s'injecte (par $\theta_{n_{k+1}}$) dans $\Gamma_{n_{k+1}}$ et se surjecte (par θ_{n_k})

sur Γ_{n_k} :

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_{k+1} & \xrightarrow{\theta_{n_{k+1}}} & \Gamma_{n_{k+1}} \\
\uparrow & \searrow \theta_{n_k} & \downarrow \theta_{n_{k+1}^{n_k}} \\
\Delta_k & \xrightarrow{\theta_{n_k}} & \Gamma_{n_k}
\end{array}$$

Il existe alors une section graphiquement cohérente $s = (s_{nm})_{n \leq m}$ telle que:

1. pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $s_{nm}(W_n) = W_m$ et la restriction $s_{nm}|_{W_n}$ est un morphisme de graphe ;
2. le morphisme canonique $\sigma : \varinjlim_s \Gamma_n \rightarrow \Gamma$ est un isomorphisme ;
3. la famille $(W_n)_n$ définit un graphe \overline{W} de $\varinjlim_s \Gamma_n$ et $\sigma(W_n) = W$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{P} = (\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ un prographe et G un groupe profini. On rappelle que G agit sur \mathcal{P} si :

- Il existe une base de filtre, $(U_i)_{i \in I}$, de sous-groupes ouverts distingués de G , indexée par (I, \leq) ($U_j \subset U_i \iff i \leq j$) tel que $\bigcap_i U_i = \{e\}$.
- Pour tout $i \in I$, le groupe quotient $G_i = G/U_i$ agit sur le graphe Γ_i .
- Les actions des groupes G_i sur les graphes Γ_i sont compatibles pour l'ordre : pour tout $i \leq j$, $g \in G_j$ et $x \in \Gamma_j$, on a $\theta_{ji}(g \cdot x) = \varphi_{ji}(g) \cdot \theta_{ji}(x)$ où $\varphi_{ji} : G_j \rightarrow G_i$ est la surjection canonique induite par l'inclusion $U_j \subset U_i$.

Si l'on dispose d'une section graphiquement cohérente s de $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ et d'une section r du système projectif $(G/U_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ on dira que l'action de G sur \mathcal{P} est complètement compatible à s et r si l'on a, en outre, la propriété suivante :

$$(C_3) \forall i \in I, \forall (g_i, a_i) \in G_i \times \Gamma_i, \exists i_0 \geq i, \forall k \geq i_0, s_{i_0 k}(r_{i i_0}(g_i) \cdot s_{i i_0}(a_i)) = r_{i k}(g_i) \cdot s_{i k}(a_i)$$

Définition 4.1.2. On dira qu'un groupe profini G agit **profinement** sur un prographe \mathcal{P} si G agit de manière complètement compatible à deux sections s et r .

Définition 4.1.3. Soit G un groupe qui agit profinement sur un prographe $\mathcal{P} = (\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ relativement à deux sections s et r . On dira que G agit **"convenablement"** sur le prographe \mathcal{P} s'il existe pour tout $i \in I$, W_i un sous-graphe de Γ_i tel que pour tout $j \geq i$, $s_{ij}(W_i) = W_j$ et la restriction $s_{ij}|_{W_i}$ est un morphisme de graphe, et enfin si la condition :

$$(C_4) \forall i \in I, \forall \alpha_i \in W_i, \forall g_i \in G_i, \exists i_0 \geq i, \forall k \geq i_0, s_{i k}(g_i \cdot \alpha_i) = r_{i k}(g_i) \cdot \alpha_k$$

est vérifiée.

Remarque 4.1.4. Le cas d'une action à domaine fondamental arbre fini (cf. définition 2.3.4) est un cas particulier de la définition précédente. En effet, il suffit de prendre $W_i = T_i$ pour tout i .

On renvoie à la section 1.5 pour des rappels sur la notion de groupe fondamental d'un graphe de groupe.

Soit G un groupe agissant sans inversion sur un arbre X . Le théorème 1.5.7 nous dit alors, que G s'identifie au groupe fondamental d'un certain graphe de groupe (G, Y) où $Y = G \backslash X$ est le graphe quotient de X par G . Pour être plus précis, la structure de G est donnée par le théorème 1.5.7, $G \simeq \pi_1(G, Y, T)$ où T est un arbre maximal de Y .

Définition 4.1.5. Soit Y un graphe connexe non vide. Soit G un groupe qui agit sans inversion sur un arbre X . On dit que G est un **groupe fondamental de type Y** si le graphe quotient $G \backslash X = Y$ et si G s'identifie au $\pi_1(G, Y, T)$, où (G, Y, T) est le graphe de groupe associé à l'action de G sur X en T , un arbre maximal.

Définition 4.1.6. Soit Y un graphe connexe non vide. Soit G un groupe profini, on dit que G est presque groupe fondamental de type Y s'il est la complétion profinie d'un un groupe (abstrait) fondamental de type Y relativement à une base de filtre de sous-groupes distingués d'indice fini \mathcal{B} , vérifiant $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{e\}$.

On a de manière plus précise le lemme suivant :

Lemme 4.1.7. *Soit Y un graphe connexe non vide. Un groupe profini est presque groupe fondamental de type Y si et seulement s'il possède un sous-groupe (abstrait) dense qui est un groupe fondamental de type Y .*

Démonstration. Il s'agit de la même preuve que pour le lemme 2.2.2. □

Définition 4.1.8. Soit Y un graphe connexe non vide et Ω un groupe profini presque groupe fondamental de type Y , i.e il possède un sous-groupe dense H qui agit sur un arbre Γ tel que le graphe quotient $H \backslash \Gamma = Y$. Soit T un arbre maximal de Y et soit $j : T \rightarrow X$ un relèvement de T . Soit W le plus petit sous-graphe de X contenant $j(Y)$ dont chacune des arêtes a une extrémité dans $j(T)$, on a donc $H.W = X$. On dira que le groupe profini Ω est **presque un groupe fondamental de type Y , finiment engendré** si les stabilisateurs des sommets de W sont finis.

Théorème 4.1.9. *Soit $\Omega = \varprojlim_i G_i$ un groupe profini de rang dénombrable qui agit convenablement sur un proarbre $\mathcal{P} = (\Gamma_i)_i$. Alors Ω est presque un groupe fondamental de type $Y = \varinjlim_r G_i \backslash \varinjlim_s \Gamma_i$.*

Démonstration. Par hypothèse $\Omega = \varprojlim_i G_i$ agit convenablement sur un proarbre $\mathcal{P} = (\Gamma_i, \theta_{ji})_i$ relativement à deux sections s et r . Le sous-groupe $\varprojlim_r G_i$ dense agit sans inversion sur l'arbre $\varinjlim_s \Gamma_i$. Il s'identifie donc au groupe fondamental d'un certain graphe de groupe (G, Y) où $Y = \varprojlim_r G_i \setminus \varinjlim_s \Gamma_i$ d'après le théorème 1.5.5. Ainsi Ω possède un sous groupe abstrait dense qui est un groupe fondamental de type Y . D'où le résultat. \square

Lemme 4.1.10. *Soit H un groupe dénombrable agissant sur graphe connexe X . On pose $Y = H \setminus X$ graphe le quotient et on suppose que Y est fini. Soit T un arbre maximal de Y et soit $j : T \rightarrow X$ un relèvement de T . Soit W le plus petit sous-graphe de X contenant $j(Y)$ dont chacune des arêtes a une extrémité dans $j(T)$, on a donc $H.W = X$. On suppose que les stabilisateurs des sommets de W sont finis.*

On considère une suite décroissante $H_0 \supset H_1 \supset \dots$ de sous-groupes distingués d'indice fini de H telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$ et le prographe $(X_n, \theta_{mn})_n$ donné par $X_n = H_n \setminus X$. Posons pour tout entier n , $G_n = H/H_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note π_n l'épimorphisme canonique de H dans G_n . On a que G_n agit X_n et $G_n \cdot W_n = X_n$ où $W_n = \overline{W}$

Considérons enfin $\Lambda \subset H$ une partie finie de H . Il existe alors deux indices :

- $n \geq 0$ tel que Λ s'injecte par π_n dans G_n ;
- $m \geq 0$ tel que si $\lambda \in \Lambda$ et $\alpha \in W$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\bar{\alpha})$, où $\bar{\alpha} = \alpha_m \in W_m$.

Démonstration. Nous allons montrer qu'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$, tel que si $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in W$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\bar{\alpha})$, où $\bar{\alpha} = \alpha_m$.

Soit $\lambda \in \Lambda$ avec $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$, on suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\bar{\lambda} \in \text{Stab}(\alpha_m)$. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \cdot \alpha_m &= \alpha_m \\ \bar{\lambda} \cdot \bar{\alpha} &= \bar{\alpha} \\ \bar{\lambda} \cdot \alpha &= \alpha \end{aligned}$$

Ce qui implique l'existence d'un $h_m \in H_m$ tel que $\lambda \cdot \alpha = h_m \cdot \alpha$, on a donc que $h_m^{-1} \lambda \in \text{Stab}(\alpha)$ ce qui veut dire qu'il existe un élément $a_m \in \text{Stab}(\alpha)$ tel que $h_m^{-1} \lambda = a_m$. Comme $\text{Stab}(\alpha)$ est fini, il existe une infinité d'indices m_k telle que $a_{m_k} = a \in \text{Stab}(\alpha)$. On a donc $h_{m_k}^{-1} \lambda = \lambda^{-1} a \neq e$ d'après l'hypothèse $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$. Et le fait que $h_{m_k} \neq e$ contredit l'hypothèse $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$.

Pour la première affirmation, on raisonne de la même manière. \square

Théorème 4.1.11. *Soit Y un graphe fini connexe non vide et $\Omega = \varprojlim_n G_n$ un groupe profini de rang dénombrable, presque groupe fondamental de type Y , finiment engendré. Alors Ω agit convenablement sur un proarbre $\mathcal{P} = (\Gamma_n, \theta_{mn})_i$ tel que pour tout n , le quotient $G_n \setminus \Gamma_n$ est isomorphe à Y .*

Démonstration. Comme Ω est de rang dénombrable, il existe une filtration $U_0 \supset U_1 \supset \dots$ de sous-groupes ouverts distingués de Ω . Si l'on considère les groupes quotients $G_n = \Omega/U_n$, alors $\Omega = \varprojlim_n G_n$. Soit F un sous-groupe dense de Ω tel que $F = \pi_1(G, Y, T)$. D'après le théorème 1.5.4, il existe un arbre $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$ et une opération de F sur \tilde{X} tels que $F \backslash \tilde{X} = Y$. Soit T un arbre maximal de Y et soit $j : T \rightarrow X$ un relèvement de T . Soit W le plus petit sous-graphe de \tilde{X} contenant $j(Y)$ dont chacune des arêtes a une extrémité dans $j(T)$, on a donc $F.W = X$. On considère le prographe $\mathcal{P} = (X_n)_n$ de F (relativement à la base de filtre $\{F \cap U_n\}_n$), donné par $X_n = F \cap U_n \backslash \Gamma$.

Puisque F agit sur Γ , on en déduit que pour tout entier n , $G_n = F/F \cap U_n$ agit sans inversion sur le graphe connexe X_n et $G_n \cdot X_n = W_n$.

Le groupe F est dénombrable et $\{F \cap U_n\}_n$ est une base de filtre de sous-groupes distingués d'indices fini et d'intersection réduite au neutre. Nous allons construire une section r du système projectif $(G_n, \phi_{mn})_n$, tel que $F \simeq \varprojlim_n G_n$. Soit $\Lambda \subset F$ une partie finie de F . Il existe, d'après le lemme précédent deux indices :

- $n \geq 0$ tel que Λ s'injecte par π_n dans G_n ;
- $n' \geq 0$ tel que si $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in W$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\bar{\alpha})$, où $\bar{\alpha} = \alpha_{n'}$.

Puisque F est dénombrable, pour $n \geq 0$, on considère $\Lambda_n = \{f_1, \dots, f_n\}$, où $f_i \in F$ pour $i = 1, \dots, n$. La suite $(\Lambda_n)_n$ est une suite croissante de parties de F dont la réunion vaut F , $\cup_n \Lambda_n = F$.

Posons $i_0 = 0$, $\Lambda_{i_0} = \{e\}$. Par ce qui précède il existe un indice n_0 tel que si $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in W$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\bar{\alpha})$ et on a que Λ_{i_0} s'injecte par π_{n_0} dans G_{n_0} . Comme G_{n_0} est fini, si l'on relève ses éléments dans F , il existe un indice $i_1 > i_0$ tel que Λ_{i_1} contienne tous ces relevés ; la partie Λ_{i_1} se surjecte par π_{n_0} dans G_{n_0} . Ensuite il existe deux indices :

- $n'_1 > n_0$ tel que Λ_{i_1} s'injecte par $\pi_{n'_1}$ dans $G_{n'_1}$;
- $n''_1 \geq 0$ tel que si $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in T$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\alpha_{n''_1})$.

On prend $n_1 = \max(n'_1, n''_1)$. Alors les deux conditions précédentes sont vérifiées pour l'indice n_1 . On construit ainsi par récurrence deux suites d'indices $i_0 < i_1 < \dots$ et $n_0 < n_1 < \dots$ telles que :

- i) Λ_{i_k} s'injecte par π_{n_k} dans G_{n_k} ;
- ii) Λ_{i_k} se surjecte par $\pi_{n_{k-1}}$ dans $G_{n_{k-1}}$;
- iii) Si $\lambda \in \Lambda_{i_k}$, $\alpha \in W$ et $\lambda \notin \text{Stab}(\alpha)$ alors $\bar{\lambda} \notin \text{Stab}(\alpha_{n_k})$.

Comme dans la preuve du lemme 3.1.1 on construit un système inductif $r = (r_{nm})_{n \leq m}$. En particulier on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_{k+1} & \xleftarrow{\pi_{n_{k+1}}} & G_{n_{k+1}} \\
 \uparrow & \swarrow \rho_{n_k} & \downarrow \downarrow \\
 \Lambda_k & \xleftarrow{\pi_{n_k}} & G_{n_k}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow \pi_{n_k} \\
 \downarrow \downarrow \\
 \nearrow r_{n_k n_{k+1}}
 \end{array}$$

r est bien une section du système projectif $(G_n, \phi_{mn})_n$, plus précisément, d'après la proposition 2.1.13 si l'on considère les injections canoniques

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \xleftarrow{\pi} & G & \xleftarrow{\theta} & \varinjlim G_n \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & \omega
 \end{array}$$

alors il existe une bijection $\omega : F \rightarrow \varinjlim G_n$ telle que $\pi = \theta \circ \omega$.

Construisons une section graphiquement cohérente s du prographe \mathcal{P} . Posons $\Delta_k = \Lambda_k \cdot W$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a aussi $X_{n_k} = G_{n_k} \cdot W_{n_k}$. On obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_{k+1} & \xleftarrow{\theta_{n_{k+1}}} & X_{n_{k+1}} \\
 \uparrow & \swarrow \sigma_{n_k} & \downarrow \downarrow \\
 \Delta_k & \xleftarrow{\theta_{n_k}} & X_{n_k}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow \theta_{n_k} \\
 \downarrow \downarrow \\
 \nearrow s_{n_k n_{k+1}}
 \end{array}$$

où $\sigma_{n_k}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) = \rho_{n_k}(g_{n_k}) \cdot \alpha$ et $\theta_{n_k}(h_k \cdot \alpha) = \pi_{n_k}(h_k) \cdot \alpha_{n_k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ces deux applications sont bien définies grâce à la condition *iii*).

Posons :

$$\begin{aligned}
 s_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) &= \theta_{n_{k+1}} \circ \sigma_{n_k}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) \\
 &= \theta_{n_{k+1}}(\rho_{n_k}(g_{n_k}) \cdot \alpha) \\
 &= \pi_{n_{k+1}}(\rho_{n_k}(g_{n_k})) \cdot \alpha_{n_{k+1}} \\
 &= r_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k}) \cdot \alpha_{n_{k+1}}
 \end{aligned}$$

et s aussi est bien définie. D'après la preuve du lemme 3.1.1 s est une section graphiquement cohérente du prographe \mathcal{P} , on a que $\varinjlim_s X_n \simeq X$ et $s_{nm}(\alpha) = \alpha_m$, avec $\alpha_i \in W_i$,

la restriction de s_{nm} à W_n est un morphisme de graphe. L'égalité $s_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) = r_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k}) \cdot \alpha_{n_{k+1}}$ correspond à la condition (C_4) .

Nous allons donc montrer que la condition (C_3) de la définition 2.1.15 est vérifiée. Dire que r est une section équivaut à la condition (C_2) suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall g_n, g'_n, \exists n_0 \geq n, \forall m \geq n_0,$

$$r_{n_0 m}(r_{nn_0}(g_n) \cdot r_{nn_0}(g'_n)) = r_{nm}(g_n)r_{nm}(g'_n)$$

On agit sur α_m des deux côtés de l'égalité et d'après l'égalité $s_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k} \cdot \alpha_{n_k}) = r_{n_k n_{k+1}}(g_{n_k}) \cdot \alpha_{n_{k+1}}$, on obtient :

$$s_{n_0 m}(r_{nn_0}(g_n)r_{nn_0}(g'_n) \cdot \alpha_n) = r_{nm}(g_n) \cdot s_{n_0 m}(g'_n \cdot \alpha_n)$$

On a bien la condition (C_3) :

$$s_{n_0 m}(r_{nn_0}(g_n) \cdot s_{nn_0}(g'_n \cdot \alpha_n)) = r_{nm}(g_n) \cdot s_{n_0 m}(g'_n \cdot \alpha_n)$$

□

- [BS62] Gilbert Baumslag and Donald Solitar. Some two-generator one-relator non-hopfian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68(3):199–201, 05 1962.
- [DD89] Warren Dicks and Martin John Dunwoody. *Groups acting on graphs*, volume 17. Cambridge University Press, 1989.
- [Des03] Deschamps, Bruno. Groupes profinis et théorie de Galois. <http://perso.univ-lemans.fr/~bdesch/profinis.pdf>, 2003.
- [Dic06] Warren Dicks. *Groups, trees and projective modules*, volume 790. Springer, 2006.
- [DSA11] Bruno Deschamps and Ivan Suarez Atias. Prographes sylvestres et groupes profinis presque libres. *Math. Ann.*, 350(2):475–495, 2011.
- [FJ06] Michael D Fried and Moshe Jarden. *Field arithmetic*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2006.
- [Gil93] Baumslag Gilbert. *Topics in Combinatorial Group Theory*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 1993.
- [HNN49] Graham Higman, B. H. Neumann, and Hanna Neuman. Embedding theorems for groups. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-24(4):247–254, 1949.
- [Rib17] Luis Ribes. *Profinite graphs and groups*, volume 66. Springer, 2017.
- [RS02] A Raghuram and B Sury. Groups acting on trees. *Indian Institute of Technology*, 2002.
- [RZ00] Luis Ribes and Pavel Zalesskii. Profinite groups. In *Profinite Groups*, pages 19–77. Springer, 2000.

- [Sar20] Ndeye Coumba Sarr. Groupes profinis presque amalgamés. <https://arxiv.org/abs/2010.07802>, 2020.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* . Astérisque. Société mathématique de France, 1977.
- [SW79] Peter Scott and Terry Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36, pages 137–203, 1979.
- [Wil98] John S Wilson. Profinite groups. *Oxford*, 87:90, 1998.

Résumé : La théorie de Bass-Serre a été développée en 1970 par Jean-Pierre Serre, dans [Ser77]. Elle a pour motivation principale d'étudier la structure des sous-groupes discrets et sans torsion de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, plus précisément le théorème d'Ihara suivant lequel ces sous-groupes sont libres. S'inspirant de la topologie notamment de la théorie des revêtements, il devient alors plus naturel, explique J-P Serre de montrer la liberté d'un groupe en le faisant agir librement sur un arbre. Il en déduit ainsi une preuve simple et élégante de ce théorème jugé mystérieux et permet de généraliser plusieurs résultats de théorie combinatoire des groupes : les théorèmes de Nielsen-Schreier, de Kurosh et de Nagao entre autres. Cette théorie montre plus généralement qu'un groupe agit sur un arbre sans inversion si et seulement il est isomorphe à un amalgame non trivial ou à une extension HNN.

En 2011 B. Deschamps et I. Suarez ont introduit dans [DSA11] une théorie combinatoire pour les groupes profinis et ont démontré un analogue pour les groupes profinis du théorème de Serre sur liberté d'un groupe : *un groupe profini possède un sous-groupe libre dense si et seulement il agit prolibrement sur un poarbre*. La notion d'action prolibre se résume moralement à faire agir librement les groupes du système projectif de groupes finis associés à un groupe profini sur chaque étage d'un système projectif de graphes avec certaines conditions arithmétiques.

L'objet de cette thèse est de donner une contribution à cette théorie des prographes. Les outils et techniques développés par Deschamps et Suarez étant placé dans un cadre assez général nous permettent alors de montrer un analogue du théorème de DS pour les groupes profinis possédant un sous-groupe amalgamé dense ainsi qu'une généralisation de ce résultat. Enfin nous illustrons ces résultats sur des situations galoisiennes bien connues.

Abstract : Bass-Serre theory was initiated in 1970 by Jean-Pierre Serre, in [Ser77]. The theory's main motivation was to study the structure of discrete and torsion-free subgroups of $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, more precisely Ihara's theorem stating that all torsion-free subgroups of $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ are free. Inspired by covering space theory in algebraic topology, J-P Serre explains that showing the freedom of a group by making it act freely on a tree is more natural. So, he deduces a simple and elegant proof of this theorem and allows to generalize several theorems of combinatorial group theory: Nielsen-Schreier, Kurosh and of Nagao theorems and so on. This theory shows more generally that a group acts on a tree without inversion if and only it is isomorphic to a non-trivial amalgam or to an HNN extension.

In 2011 B. Deschamps and I. Suarez introduced in [DSA11] a combinatorial theory for profinite groups. They proved an analogue for profinite groups of Serre's theorem on freedom of a group : a profinite group has a dense free subgroup if and only this group acts profreely on a protree. The notion of profree action can be summarized to making the groups of the inverse system of finite groups associated with a profine group act freely on each floor of an inverse system of graphs with certain arithmetic conditions.

The purpose of this thesis is to give a contribution of Deschamps-Suarez theory of prographs. Tools and techniques developed by Deschamps and Suarez, placed in a general context, allow to show an analog of the Deschamps-Suarez theorem for profinite groups with a dense amalgamated subgroup and a generalization of this result. Finally, these results are illustrated on well-known Galois situations.

Mots clés : Théorie de Bass-Serre, combinatoire des graphes et des groupes, théorie des groupes, groupes profinis, théorie de Galois arithmétique des corps et des groupes profinis