



Résultats sur les extensions singulières des groupes d'Artin et de tresses virtuelles

Guillaume Gandolfi

► To cite this version:

Guillaume Gandolfi. Résultats sur les extensions singulières des groupes d'Artin et de tresses virtuelles. Théorie des groupes [math.GR]. Normandie Université, 2020. Français. NNT : 2020NORMC215 . tel-03103318

HAL Id: tel-03103318

<https://theses.hal.science/tel-03103318>

Submitted on 8 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Résultats sur les extensions singulières des groupes d'Artin et de tresses virtuelles

**Présentée et soutenue par
Guillaume GANDOLFI**

**Thèse soutenue publiquement le 17/12/2020
devant le jury composé de**

Mme CARMEN CAPRAU	Professeur des universités, California State University	Rapporteur du jury
M. VLADIMIR VERSHININ	Professeur des universités, Université Montpellier 2 Sciences et Tec	Rapporteur du jury
Mme RUTH CORRAN	Professeur, American University of Paris	Membre du jury
M. EDDY GODELLE	Professeur des universités, Université Caen Normandie	Président du jury
M. LUIS PARIS	Professeur des universités, Université de Bourgogne	Membre du jury
M. PAOLO BELLINGERI	Maître de conférences HDR, Université Caen Normandie	Directeur de thèse
M. BENJAMIN AUDOUX	Maître de conférences HDR, Aix-Marseille Université	Co-directeur de thèse

Thèse dirigée par PAOLO BELLINGERI et BENJAMIN AUDOUX, Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen)



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE



Résultats sur les extensions singulières des groupes d'Artin et de tresses virtuelles

Gandolfi Guillaume

Table des matières

Notations	5
Introduction	7
Chapitre 1. Tresses classiques et singulières	17
1. Les tresses classiques	17
2. Les tresses singulières	20
3. Le morphisme multiplicatif et la conjecture de Birman	23
4. Invariants de Vassiliev pour les tresses	23
Chapitre 2. Groupes d'Artin et monoïdes singuliers d'Artin	31
1. Les groupes d'Artin	31
2. Monoïde singulier associé à un groupe d'Artin	34
3. Critère d'extension des morphismes entre groupes d'Artin aux monoïdes singuliers	39
4. Sur les sous-monoïdes paraboliques standards de SA_Γ	43
5. Sur la conjecture de Birman pour les groupes d'Artin	45
6. Sur les invariants de Vassiliev	51
Chapitre 3. Monoïdes de tresses virtuelles singulières	53
1. Le groupe de tresses virtuelles	53
2. Le monoïde de tresses virtuelles singulières	54
3. Lien entre les différentes constructions de tresses	55
4. Combinatoire et topologie des tresses virtuelles singulières	57
5. Conjecture de Birman et invariants de Vassiliev pour les tresses virtuelles	68
Chapitre 4. Lien entre $\mathcal{SVB}_n$ et les monoïdes d'Artin singuliers	71
1. Le groupe KB_n	71
2. Le monoïde SKB_n	72
3. Réductions de problèmes à SKB_n	78
4. Perspectives	80
Annexe A. Combinatoire des monoïdes	83
1. Monoïdes quotients	83
2. Présentations de monoïdes	83

Annexe B. Groupes enveloppants	85
1. Définition et existence	85
2. Systèmes inductifs de monoïdes	88
3. Produit semi-direct de monoïdes	97
Bibliographie	103

Notations

- $\llbracket n; m \rrbracket$: L'ensemble des entiers compris entre n et m ($n < m$, $n, m \in \mathbb{N}$).
- $E - F$: L'ensemble E privé de l'ensemble F .
- Id_E : La fonction identité de l'ensemble E .
- e_M : L'élément neutre du monoïde M .
- $\mathfrak{S}_n$: Le groupe symétrique à n éléments ($n \in \mathbb{N}$).
- $\mathcal{B}_n$: Le groupe de tresses à n brins ($n \in \mathbb{N}$).
- $\mathcal{SB}_n$: Le monoïde de tresses singulières à n brins ($n \in \mathbb{N}$).
- $\mathcal{VB}_n$: Le groupe de tresses virtuelles à n brins ($n \in \mathbb{N}$).
- $S\mathcal{VB}_n$: Le monoïde de tresses virtuelles singulières à n brins ($n \in \mathbb{N}$).
- A_Γ : Le groupe d'Artin associé au graphe de Coxeter Γ .
- A_Γ^+ : Le monoïde d'Artin associé au graphe de Coxeter Γ .
- SA_Γ : Le monoïde d'Artin singulier associé au groupe d'Artin A_Γ .
- Σ_S : L'ensemble $\{\sigma_s; s \in S\}$ des générateurs de A_Γ avec S l'ensemble des sommets de Γ .
- A_X : Le sous-groupe de A_Γ engendré par les générateurs $\{\sigma_x; x \in X\}$ lorsque $X \subseteq S$.
- T_S : L'ensemble $\{\tau_s; s \in S\}$ des générateurs singuliers de SA_Γ , en bijection avec l'ensemble Σ_S .
- SA_X : Le sous-monoïde de SA_Γ engendré par les générateurs $\{\sigma_x, \sigma_x^{-1}, \tau_x; x \in X\}$ lorsque $X \subseteq S$.
- Γ_X : Le sous-graphe complet de Γ engendré par X lorsque $X \subseteq S$.

Introduction

Cette thèse se propose d'étudier deux objets liés aux monoïdes de tresses singulières, à savoir le morphisme de désingularisation et la famille des invariants de Vassiliev, transposés dans les cadres respectifs des monoïdes d'Artin singuliers et des monoïdes de tresses virtuelles singulières.

Les monoïdes de tresses singulières ont été définis par Birman au début des années 90 et sont des extensions des groupes de tresses définis par Artin dans la première moitié du XX^{ème} siècle. Un entier strictement positif n étant fixé, une tresse singulière à n brins est définie de la même manière qu'une tresse classique à l'exception qu'on autorise un nombre fini d'intersections entre deux brins distincts, qu'on appelle singularités. Comme dans le cas classique on considère ces objets à isotopie près, et comme dans le cas classique l'ensemble $\mathcal{SB}_n$ des classes d'isotopie de tresses singulières à n brins peut être muni d'une opération induite par la concaténation de tresses. Muni de cette opération, $\mathcal{SB}_n$ est alors un monoïde dont Birman a fourni la présentation suivante (Proposition 1.8).

- Générateurs : $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}; \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$.
- Relations :
 - $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$;
 - $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$ si $|i - j| = 1$;
 - $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i - j| > 1$;
 - $\sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$;
 - $\tau_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \tau_j$ si $|i - j| = 1$;
 - $\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i$ si $|i - j| > 1$;
 - $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ si $|i - j| > 1$.

En utilisant la notion de croisement rappelée au chapitre 1, les générateurs $\sigma^{\pm 1}$ peuvent être vus comme des croisements classiques et les τ_i comme des croisement singuliers. On peut vérifier à l'aide de cette présentation que le nombre de générateurs τ_i apparaissant dans l'écriture d'un élément $\beta \in \mathcal{SB}_n$ ne dépend pas du choix de l'écriture en question. Il est donc possible de définir, à un entier naturel d fixé, le sous-ensemble $\mathcal{SB}_n^{(d)}$ de $\mathcal{SB}_n$ constitué par les éléments ayant exactement d singularités. On peut montrer que le sous-ensemble $\mathcal{SB}_n^{(0)}$ est alors canoniquement isomorphe au groupe $\mathcal{B}_n$ ce qui permet de considérer $\mathcal{SB}_n$ comme une extension de $\mathcal{B}_n$. La nature de la relation entre $\mathcal{SB}_n$ et $\mathcal{B}_n$ a été plus tard précisée par Paris (Proposition 1.10) qui a démontré que $\mathcal{SB}_n$ pouvait être décomposé en un produit semi-direct de monoïdes dont l'un des facteurs est $\mathcal{B}_n$ et l'autre fait partie de la

famille des monoïdes d'Artin angle droit (dont on rappelle la définition dans la sous-section 2.2 du chapitre 2).

Dans [10], où Birman donne la définition de $\mathcal{SB}_n$ ainsi que sa présentation, elle y introduit également le morphisme multiplicatif suivant

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{SB}_n &\rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n] \\ \sigma^{\pm 1} &\mapsto \sigma^{\pm 1} \\ \tau_i &\mapsto \sigma_i - \sigma_i^{-1} \end{aligned}$$

appelé morphisme de désingularisation. Elle conjecture également que celui-ci est injectif. Un premier résultat allant dans le sens de cette conjecture, connue sous le nom de "conjecture de Birman", a d'abord été démontré par Fenn, Rolfsen et Zhu dans [21] où ils démontrent que le noyau de δ est réduit au neutre (ce qui, au contraire d'un homomorphisme de groupes, ne revient pas à montrer l'injectivité d'un homomorphisme de monoïdes). C'est ensuite Paris qui démontre dans [39], dix ans après la formulation de la conjecture de Birman, la véracité de celle-ci (Théorème 1.13).

Le morphisme δ peut être utilisé pour étendre tout invariant de tresses classiques V , c'est-à-dire tout homomorphisme de $\mathbb{Z}$ -modules entre $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]$ et un groupe abélien H , en un invariant de tresses singulières V_δ en posant pour tout $\beta \in \mathcal{SB}_n$:

$$V_\delta(\beta) = V(\delta(\beta)).$$

C'est via ce procédé que Birman adapte aux tresses la nouvelle définition d'invariant de Vassiliev qu'elle avait préalablement établie dans [12] pour les nœuds. Sous cette reformulation un invariant de Vassiliev¹ d'ordre d est alors un invariant V tel que son extension V_δ vérifie $V_\delta(\mathcal{SB}_n^{(d)}) \neq 0$ mais $V_\delta(\mathcal{SB}_n^{(k)}) = 0$ pour tout $k > d$. Une question est alors de savoir si les invariants de Vassiliev séparent les tresses i.e. si pour toute paire de tresses distinctes β et β' , il existe un invariant de Vassiliev V tel que $V(\beta) \neq V(\beta')$. Cette question est tranchée par Papadima dans [36] où il y donne une réponse affirmative² (Théorème 1.20).

Pour finir, mentionnons qu'il est possible de pousser la question un peu plus loin en demandant si les invariants de Vassiliev séparent les tresses singulières i.e. si pour toute paire de tresses singulières distinctes β et β' , il existe un invariant de Vassiliev V tel que $V_\delta(\beta) \neq V_\delta(\beta')$. Cette question possède encore une fois une réponse affirmative (proposition 1.24) qui provient de la combinaison d'un résultat de Zhu (Théorème 1.21) et du résultat de Paris sur l'injectivité de δ .

Le **premier chapitre** de cette thèse expose plus en détail ces différentes notions. La section 1 revient sur la définition des tresses classiques et la section 2, sur celles des tresses singulières. Les sections 3 et 4 sont respectivement consacrées aux définitions du morphisme

1. Dans la thèse nous ne travaillons qu'avec des coefficients entiers mais notons tout de même que si A est un anneau quelconque, il est également possible de définir une autre notion d'invariant (et donc d'invariant de Vassiliev) dit "à coefficients dans A " en considérant les homomorphismes de A -modules de $A[\mathcal{B}_n]$ dans un A -module.

2. Le résultat de Papadima concerne les invariants de Vassiliev à coefficient entiers mais Bar-Natan avait déjà montré un résultat similaire en considérant des invariants de Vassiliev à coefficients dans un certain anneau de séries formelles ([6]).

de désingularisation et des invariants de Vassiliev pour les tresses, ainsi qu'aux divers résultats connus sur ces objets.

Le but de cette thèse est donc d'étudier le morphisme de désingularisation et les invariants de Vassiliev dans de nouveaux contextes dont le premier est celui des monoïdes d'Artin singuliers. Ceux-ci sont, tout comme le monoïde de tresses singulières, des extensions des groupes d'Artin et font l'objet du **chapitre 2**.

Les groupes d'Artin forment une famille de groupes aux propriétés combinatoire et géométriques particulières dont les plus célèbres exemples sont les groupes de tresses $\mathcal{B}_n$. Tout groupe d'Artin est donné par une présentation standard qui peut être encodée au moyen d'un graphe appelé graphe de Coxeter. À tout groupe d'Artin correspond un graphe de Coxeter et inversement. Si Γ est un graphe de Coxeter, on notera A_Γ le groupe d'Artin associé et on dira que A_Γ est de type Γ . Si S désigne l'ensemble des sommets de Γ , le groupe d'Artin est alors engendré par un ensemble en bijection avec S noté par convention $\Sigma_S = \{\sigma_s; s \in S\}$. Pour tout $X \subset S$, le sous-graphe complet Γ_X engendré par X dans Γ est lui-même un graphe de Coxeter donnant lieu à un nouveau groupe d'Artin A_{Γ_X} . Grâce aux résultats de Van der Lek dans [44], on sait que A_{Γ_X} est alors un sous-groupe du groupe d'Artin originel A_Γ (Théorème 2.6). On rappelle en section 1 la définition des groupes d'Artin (Définition 2.1) ainsi que celles de certaines de ses principales sous-familles (Définition 2.7), à savoir :

- celle des groupes d'Artin dits de type sphérique dont fait partie le groupe de tresses à n brins $\mathcal{B}_n$ pour tout n (son graphe de Coxeter est le graphe A_n donné en figure 1 du chapitre 2), cette famille contient également les groupes d'Artin de type B_n ($n \geq 2$) (ces graphes sont également détaillés en figure 1) qui reviendront dans les sections 5 et 6 du chapitre ;
- celle des groupes d'Artin dits de type affine dont font partie les groupes de type $\tilde{A}_n$ ($n \geq 2$) (voir figure 2 du chapitre 2) qui reviendront également dans les sections 5 et 6 ;
- celle des groupes d'Artin dits de type FC qui contient celle des groupes de type sphérique.

La section 2 est consacrée aux monoïdes singuliers d'Artin à proprement parler. Ceux-ci ont été définis par Corran dans [18] par analogie avec les monoïdes de tresses virtuelles singulières. Comme déjà dit, tout groupe d'Artin A_Γ (associé au graphe de Coxeter Γ d'ensemble de sommets S) est défini par une présentation standard, il est alors possible de construire à partir de celle-ci une nouvelle présentation, de monoïdes cette fois-ci, et le monoïde défini par cette présentation, appelé monoïde singulier d'Artin associé à A_Γ , est noté SA_Γ (Définition 2.10). Celui-ci est alors engendré par les générateurs standards σ_s de A_Γ (appelés générateurs classiques), leurs inverses, ainsi qu'un nouveau jeu de générateurs non inversibles, dits singuliers, en correspondance bijective avec l'ensemble des générateurs classiques (et donc avec S). On note ce nouvel ensemble de générateurs $T_S = \{\tau_s; s \in S\}$. Comme pour les monoïdes de tresses singulières, le nombre de générateurs singuliers qui apparaissent dans l'écriture d'un élément de SA_Γ ne dépend pas de l'écriture en question,

ce qui permet de définir les sous-ensembles $SA_\Gamma^{(d)}$ par analogie avec les ensembles $\mathcal{SB}_n^{(d)}$. De plus, comme pour les monoïdes $\mathcal{SB}_n$, il est possible de décomposer le monoïde SA_Γ en un produit semi-direct dont l'un des facteurs est le groupe d'Artin A_Γ et le second est un monoïde d'Artin angle droit (Proposition 2.12). Dans la mesure où nombre de résultats de ce chapitre s'appuient sur cette décomposition faisant intervenir un membre de la famille des monoïdes d'Artin angle droit, la section 2 est également l'occasion de rappeler plusieurs propriétés de ces monoïdes et d'établir des preuves formelles de certaines d'entre elles dans le cas où les monoïdes sont infiniment engendrés, ce cas étant jusqu'ici absent de la littérature (bien que communément admis parmi les spécialistes).

On introduit dans la section 3 la propriété FRZ (Définition 2.24) qui est une propriété possédée par certains groupes d'Artin (dont les groupes de type FC). Dans les grandes lignes un groupe A_Γ (associé au graphe de Coxeter Γ d'ensemble de sommets S) possède la propriété FRZ si pour tous sommets s, s' de S et $\alpha \in SA_\Gamma$, on a l'égalité $\alpha\sigma_s = \sigma_{s'}\alpha$ si et seulement si on a l'égalité $\alpha\tau_s = \tau_{s'}\alpha$. On s'appuie ensuite sur les résultats de la section 2 pour démontrer le théorème suivant qu'on nomme critère d'extension.

Théorème 2.28 Soient Γ et Γ' deux graphes de Coxeter dont on note l'ensemble des sommets respectivement S et S' . Soient A_Γ et $A_{\Gamma'}$ les groupes d'Artin associés dont on note l'ensemble générateurs respectivement $\Sigma_S = \{\sigma_s; s \in S\}$ et $\Sigma_{S'} = \{\sigma_{s'}; s' \in S'\}$. On suppose de plus que $A_{\Gamma'}$ possède la propriété FRZ.

Soit φ un morphisme de groupes de A_Γ dans $A_{\Gamma'}$. On suppose que pour tout $s \in S$, il existe $g_s \in A_{\Gamma'}$, $k_s \in \mathbb{N}^*$ et $i(s) \in S'$ tel que $\varphi(\sigma_s) = g_s \beta_{i(s)}^{k_s} g_s^{-1}$.

Alors pour toute famille d'entiers non-nuls $L = (l_s)_{s \in S}$ le morphisme φ peut être étendu en un morphisme de monoïdes $\Phi[(l_s)_{s \in S}]$ entre SA_Γ et $SA_{\Gamma'}$ en posant pour tout $s \in S$:

$$\Phi[(l_s)_{s \in S}](\tau_s) = g_s \tau_{i(s)}^{l_s} g_s^{-1}.$$

De plus $\Phi[(l_s)_{s \in S}]$ est injectif si et seulement si φ est injectif et A_Γ a aussi la propriété FRZ.

Ce théorème constitue un résultat clé et servira à la démonstration des autres principaux théorèmes du chapitre.

La section 4 sert à mettre en lumière le fait qu'avec une légère modification de la démonstration du critère d'extension de la section précédente, il est possible d'obtenir les résultats suivants, qui sont des analogues des résultats de Van der Lek pour certains monoïdes singuliers.

Théorème 2.31 Soit A_Γ un groupe d'Artin de type FC.

- Si $X \subseteq S$, alors $SA_X \simeq SA_{\Gamma_X}$ et
- si $Y \subseteq S$ aussi, alors $SA_X \cap SA_Y = SA_{X \cap Y}$.

Théorème 2.32 Soit A_Γ un groupe d'Artin de type affine. Si $X \subseteq S$ alors

$$SA_X \simeq SA_{\Gamma_X}.$$

La section 5 se focalise sur la conjecture de Birman pour les monoïdes singuliers d'Artin. En effet si A_Γ est un groupe d'Artin (associé à un graphe de Coxeter Γ d'ensemble de sommets S), il est possible de définir comme pour les monoïdes de tresses singulières un morphisme de désingularisation $\delta_\Gamma : SA_\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}[A_\Gamma]$ qui envoie chaque générateur classique σ_s sur lui-même et chaque générateur singulier τ_s sur $\sigma_s - \sigma_s^{-1}$. On conjecture que δ_Γ est injectif pour tout graphe de Coxeter Γ . Le premier résultat de cette section est un résultat partiel allant dans le sens de cette conjecture. Celui-ci prolonge le résultat de Fenn, Rolfsen et Zhu en énonçant que le morphisme δ_Γ possède un noyau trivial pour tout graphe de Coxeter Γ (Proposition 2.33). On s'appuie ensuite sur le critère d'extension de la section 3 et sur des résultats de Kent et Peifer issus de [32] qui donnent des plongements respectifs entre les groupes d'Artin $A_{\tilde{A}_{n-1}}$ et A_{B_n} et les groupes A_{B_n} et $A_{A_n} = \mathcal{B}_{n+1}$, afin de réaliser les monoïdes $SA_{\tilde{A}_{n-1}}$ et SA_{B_n} comme des sous-monoïdes de $SA_{A_n} = \mathcal{SB}_{n+1}$. Dans le cas de $SA_{\tilde{A}_{n-1}}$, il est alors possible de voir le morphisme de désingularisation $\delta_{\tilde{A}_{n-1}}$ comme la restriction du morphisme δ_{A_n} qui est injectif par le résultat de Paris, menant au résultat suivant.

Théorème 2.38 Les groupes d'Artin de type $\tilde{A}_n$ vérifient la conjecture de Birman.

Pour finir, la section 6 du chapitre s'intéresse aux invariants de Vassiliev pour les groupes d'Artin. En effet, pour un groupe d'Artin A_Γ fixé, l'existence d'un morphisme de désingularisation et des sous-ensembles $SA_\Gamma^{(d)}$ permet de définir similairement au cas des tresses une notion d'invariant de Vassiliev pour le groupe A_Γ . La question est alors de déterminer si ces invariants séparent les éléments de celui-ci. On montre alors que s'il existe un homomorphisme d'un groupe d'Artin A_Γ dans un autre groupe d'Artin $A_{\Gamma'}$ qui vérifie les conditions énoncées dans le critère d'extension de la section 3, alors ce morphisme induit pour tout invariant de Vassiliev de $A_{\Gamma'}$ un invariant de Vassiliev de A_Γ (Proposition 2.47). En se fondant sur ce résultats et sur ceux de Kent et Peifer, on démontre alors le résultat suivant qui conclut le chapitre.

Théorème 2.48 Les invariants de Vassiliev d'un groupe d'Artin de type B_n ou $\tilde{A}_n$ séparent les éléments de ce groupe.

Après avoir traité les monoïdes singuliers associés aux groupes d'Artin dans le chapitre 2, **le chapitre 3** est consacré à l'étude des monoïdes singuliers associés aux groupes de tresses virtuelles. Ce chapitre est une version remaniée d'un article co-écrit avec Bruno Cisneros et paru dans *Journal of Knot Theory and its Ramifications*.

L'ensemble des tresses virtuelles à n brins $\mathcal{VB}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) est une autre extension de l'ensemble des tresses à n brins $\mathcal{B}_n$. Elle a été originellement introduite par Kauffman et Vershinin en termes de diagrammes de tresses dans lesquels apparaissent, en plus des croisements classiques, un nouveau type de croisement appelé croisement virtuel. Les diagrammes sont alors définis à des mouvements de Reidemeister classiques et virtuels près. L'ensemble

des diagrammes possède toujours une structure de groupe dont une présentation a été donné par Vershinin (Proposition 3.1). Il a été ensuite démontré par Kamada dans [30] que le groupe de tresses classiques $\mathcal{B}_n$ est bien un sous-groupe du groupe de tresses virtuelles $\mathcal{VB}_n$ (Théorème 3.3). Tout ceci est détaillé dans la section 1.

Le groupe de tresses $\mathcal{B}_n$ possède donc jusqu'ici deux extensions, à savoir le monoïde de tresses singulières $\mathcal{SB}_n$ et le groupe de tresses virtuelles $\mathcal{VB}_n$. En s'appuyant sur ces deux extensions, Caprau, De la Pena et MacGahan introduisent dans [13] le monoïde de tresses virtuelles singulières $\mathcal{SVB}_n$ dont ils donnent une définition en termes de diagrammes de tresses et de mouvements de Reidemeister ainsi qu'une présentation (Proposition 3.2) qui sont toutes deux détaillées dans la section 2.

La proposition 3.5 énonce alors le fait que le groupe $\mathcal{B}_n$ et le monoïde $\mathcal{SB}_n$ sont bien tous deux des sous-monoïdes de $\mathcal{SVB}_n$. Celui-ci est établi en s'appuyant sur une décomposition de $\mathcal{SVB}_n$ en produit semi-direct (Proposition 3.4) similaire à celle détaillé pour les monoïdes $\mathcal{SB}_n$ dans le chapitre 1 et les monoïdes d'Artin singuliers dans le chapitre 2. Ces deux propositions font l'objet de la section 3.

Nous nous attelons ensuite dans la section 4 à l'extension au niveau singulier de deux interprétations déjà connues des tresses virtuelles. La première de ces interprétations est de nature combinatoire et consiste à faire correspondre à tout diagramme de tresses virtuelles à n brins ce qu'on appelle un diagramme de Gauss horizontal à n brins. Un tel diagramme consiste en une réunion de n intervalles parallèles du plan, connectés entre eux par des flèches munies d'un signe. À un diagramme de tresses virtuelles à n brins donné on peut associer un diagramme de Gauss horizontal à n brins, dans lequel chacun des n intervalles représente un brin du diagramme de tresses et chaque flèche représente un croisement où les deux brins impliqués correspondent aux intervalles connectés par la flèche et où le signe du croisement donne le signe de la flèche. Il est à noter que dans ce processus de traduction de diagramme de tresses virtuelles en diagramme de Gauss horizontal, les croisements virtuels sont tous simplement ignorés. En quotientant l'ensemble des diagrammes de Gauss horizontaux par des mouvements Ω qui sont la traduction chez les diagrammes de Gauss des mouvements de Reidemeister, on obtient alors un ensemble dont on peut montrer qu'il est en bijection avec $\mathcal{VB}_n$. Dans la première partie de la section 4, nous autorisons le fait d'avoir des flèches non signées dans les diagrammes de Gauss horizontaux et obtenons alors une classe d'objets plus généraux que les diagrammes de Gauss classiques, que nous nommons diagrammes de Gauss singuliers horizontaux. Nous démontrons ensuite qu'il est possible d'étendre le processus de traduction ci-dessus aux tresses virtuelles singulières en faisant correspondre les flèches non signées aux croisements singuliers. Enfin nous montrons qu'en quotientant l'ensemble des diagrammes de Gauss singuliers horizontaux par les mouvements Ω classiques ainsi qu'un nouveau jeu de mouvements qui traduisent cette fois les mouvements de Reidemeister singuliers, on obtient comme dans le cas classique une bijection entre l'ensemble quotient obtenu et l'ensemble $\mathcal{SVB}_n$ (Proposition 3.10).

La deuxième interprétation traitée est celle en termes de classes stables de tresses abstraites. Conformément au processus décrit dans [15], il est possible de construire à partir d'un diagramme de tresse virtuelle un diagramme de tresse tracé sur une surface orientable à deux composantes de bord. Le couple tresse/surface ainsi obtenu est appelé diagramme

de tresse abstraite à n brins. Si l'on considère ensuite les classes stables de tresses abstraites à n brins i.e. l'ensemble des diagrammes de tresse abstraites identifiées au travers des mouvements de Reidemeister, isotopies, difféomorphismes, stabilisations et déstabilisations³, on obtient au final un ensemble dont on peut montrer qu'il est lui aussi en bijection avec $\mathcal{VB}_n$. Ceci permet d'obtenir une réalisation topologique des tresses virtuelles. La seconde moitié de la section 4 consiste donc à montrer que le processus de construction d'une tresse abstraite à partir d'une tresse virtuelle singulière reste valable, permettant ainsi de définir une notion de diagramme de tresse singulière abstraite, puis à montrer que l'ensemble des classes stables de tresses singulières abstraites à n brins est bien en correspondance bijective avec l'ensemble $\mathcal{SVB}_n$ (Proposition 3.15). On obtient ainsi une réalisation topologique des tresses virtuelles singulières.

Motivé par cette interprétation topologique, nous définissons dans la dernière section du chapitre le morphisme de désingularisation

$$\delta_v : \mathcal{SVB}_n \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$$

pour les tresses virtuelles singulières, qui coïncide avec le morphisme de désingularisation δ d'origine sur $\mathcal{SB}_n$ et laisse invariants les croisements virtuels, ainsi que la notion d'invariants de Vassiliev qui lui est naturellement associée.

Le **quatrième chapitre** propose une connexion entre les monoïdes singuliers d'Artin du chapitre 2 et les monoïdes de tresses virtuelles singulières du chapitre 3. La connexion en question se fait via la famille de groupes $(KB_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini en section 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le groupe KB_n est un sous-groupe du groupe $\mathcal{VB}_n$ qui s'avère être un groupe d'Artin (Théorème 4.1). Ce même théorème décrit également comment $\mathcal{VB}_n$ peut être décomposé en un produit semi-direct entre KB_n et le groupe symétrique à n éléments $\mathfrak{S}_n$.

Puisque KB_n est un sous-groupe de $\mathcal{VB}_n$ et que ces deux groupes possèdent un monoïde singulier associé, il est naturel de se demander s'il n'existerait pas une relation d'inclusion similaire entre SKB_n et $\mathcal{SVB}_n$. La section 2 du chapitre répond par l'affirmative à cette question et montre même que la décomposition en produit semi-direct reste présente au niveau singulier i.e. que le monoïde $\mathcal{SVB}_n$ est produit semi-direct de SKB_n et de $\mathfrak{S}_n$ (Proposition 4.5).

Dans la section 3, on exploite la décomposition $\mathcal{SVB}_n = SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ afin de démontrer que les diverses conjectures développées jusqu'à présent dans cette thèse (conjecture de Birman et séparabilité par les invariants de Vassiliev) pour les monoïdes $\mathcal{SVB}_n$ et SKB_n sont liées par les résultats suivants.

Théorème 4.9 La conjecture de Birman est vraie pour $\mathcal{VB}_n$ si, et seulement si, elle est vraie pour KB_n .

Théorème 4.11 Les invariants de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ séparent les éléments de $\mathcal{VB}_n$ si et seulement si les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de KB_n .

3. Par stabilisation et déstabilisation, il faut comprendre respectivement ajout et suppression d'une poignée sur la surface.

Théorème 4.13 Les invariants de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ séparent les éléments de $\mathcal{SVB}_n$ si et seulement si les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de SKB_n .

À cela on ajoute le théorème 4.10 qui fait un premier pas dans la direction de la démonstration de la conjecture de Birman pour les groupes SKB_n (et donc $\mathcal{SVB}_n$) en montrant que certains de leurs sous-groupes vérifient eux-même la conjecture de Birman.

La thèse se termine avec deux annexes. **L'annexe A** est une courte annexe servant à rappeler les éléments de base de la combinatoire des monoïdes.

L'annexe B est au contraire nettement plus conséquente, incorpore des résultats nouveaux et aurait donc pu faire l'objet d'un chapitre à part entière. Cependant, dans la mesure où elle se focalise sur des problématiques distinctes de celles traitées dans le reste de la thèse, l'auteur a préféré en faire une annexe. Notons toutefois celle-ci est connectée au chapitre précédents par le biais de la proposition 2.25 et du théorème 4.5. L'annexe en question est consacrée à l'étude de la problématique du plongement de monoïde ainsi qu'à un objet fondamental associé à cette problématique : le groupe enveloppant. Le problème du plongement de monoïde consiste, un monoïde M étant donné, à déterminer s'il est possible de plonger M dans un quelconque groupe. Le groupe enveloppant de M est alors un groupe privilégié dans lequel M ne se plonge que s'il est possible de le plonger dans un groupe. Ceci permet de ramener le problème de la plongeabilité de M dans un groupe à celle de sa plongeabilité dans son groupe enveloppant.

On définit plus précisément la notion de groupe enveloppant dans la première section de l'annexe (Définition B.1) avant démontrer que tout monoïde en admet un (Théorème B.2). On y introduit ensuite l'appellation de *plongeable* qui désigne tout monoïde se plongeant dans son groupe enveloppant. La section se termine ensuite avec la démonstration d'un certain jeu de propriétés concernant le groupe enveloppant qu'on appelle propriétés fonctorielles⁴ (Proposition B.4, Corollaires B.5 et B.6).

La section 2 décrit la manière dont les groupes enveloppants se comporte vis-à-vis des limites inductives de monoïdes. Après avoir rappelé la définition des systèmes inductifs ainsi que la notion de limite inductive qui y est associée (Définitions B.8 et B.10), on démontre via une construction simple l'existence d'une limite inductive pour tout système inductif de monoïdes (Proposition B.12). On y montre également que la limite inductive vérifie des propriétés de nature similaires à celles déjà vues en section 1 pour le groupe enveloppant, qu'on appelle également propriétés fonctorielles (Propositions B.19 et B.17). En utilisant les propriétés fonctorielles du groupe enveloppant et des limites inductives, on démontre alors que le groupe enveloppant d'une limite inductive de monoïdes est égale à la limite inductive des groupes enveloppants (Théorème B.20), ce qui nous permet d'en déduire le corollaire B.21 qui énonce que si un système inductifs n'est constitué que de monoïdes plongeables

4. L'appellation "fonctorielle" n'est pas anodine : en effet ces propriétés peuvent être résumées au fait que le groupe enveloppant définit un foncteur de la catégorie des monoïdes dans la catégorie des groupes, cependant l'auteur a préféré ne pas faire appel à la théorie des catégories puisque l'un des buts premiers de l'annexe est de présenter les choses de la manière la plus accessible possible.

alors la limite inductive de ce système est également plongeable. On termine la section par une application de ce résultat à la plongeabilité des groupes d'Artin infiniment engendrés, ce qui était déjà connu pour le cas finiment engendré.

Théorème B.26 Tout monoïde d'Artin, même avec une infinité de générateurs, se plonge dans le groupe d'Artin de même présentation.

Pour finir, la section 3 s'intéresse au comportement du groupe enveloppant vis-à-vis du produit semi-direct de monoïdes. On y donne des conditions suffisantes pour qu'un produit semi-direct de monoïdes plongeables soit plongeable (Théorème B.31), ce qui nous permet d'en conclure que les différents monoïdes singuliers définis dans la thèse, à savoir les monoïdes $\mathcal{SB}_n$, $\mathcal{SVB}_n$ et SA_Γ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout graphe de Coxeter Γ), se plongent bien dans leurs groupes enveloppants respectifs (Corollaire B.32).

Tresses classiques et singulières

Le but de ce chapitre est de présenter le cadre dans lequel étaient initialement considérées les problématiques étudiées dans cette thèse. On y définit le groupe de tresses, le monoïde de tresses singulières (qui constitue une extension de ce groupe), le morphisme de désingularisation défini sur ce monoïde ainsi que la conjecture initialement formulé par Birman sur l'injectivité de ce morphisme avant de finir avec les invariants de Vassiliev. On y expose également les premiers résultats connus sur la conjecture de Birman et sur les invariants de Vassiliev pour les tresses.

1. Les tresses classiques

Depuis leur introduction par Artin en 1925 dans [2], les tresses ont été redéfinies de nombreuses fois à l'aide de diverses approches. On se contentera ici de ne donner qu'une seule de ces définitions, qui se rapproche de la première définition historique donnée par Artin. Pour les autres définitions on pourra se référer aux divers articles destinés à donner une vue d'ensemble de la théorie des tresses et qui sont parus au cours du temps, comme par exemple [11] ou encore [40].

Définition 1.1. Soit n un entier strictement positif. Une *tresse géométrique à n brins* est un n -uplet $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)$ d'applications $\mathcal{C}^\infty$ de $[0; 1]$ dans $\mathbb{C}$ tel que :

- $\hat{\beta}_k(0) = k$ et il existe $s_{\hat{\beta}} \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\hat{\beta}_k(1) = s_{\hat{\beta}}(k)$, pour tout k ,
- si $k, l \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $k \neq l$ alors pour tout $t \in [0; 1]$, $\hat{\beta}_k(t) \neq \hat{\beta}_l(t)$.

Les applications $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n$ sont appelés brins de la tresse géométrique $\hat{\beta}$. Afin de mettre en avant leur nature tridimensionnelle, et en remarquant que les deux applications se déduisent chacune de l'autre, pour toute tresse géométrique $\hat{\beta}$ on définit également $\tilde{\beta}$ l'application de $[0; 1]$ dans $\mathbb{C} \times [0; 1]$, définie pour tout $t \in [0; 1]$ par $\tilde{\beta}(t) = (\hat{\beta}(t), t)$.

Définition 1.2. Une *isotopie ambiante* est une application lisse I de $(\mathbb{C} \times [0; 1]) \times [0; 1]$ telle que, pour tout $s \in [0; 1]$, l'application $I_s : \mathbb{C} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0; 1]$ qui envoie (z, t) sur $I(z, t, s)$ est un difféomorphisme, et que $I_0 = \text{Id}_{\mathbb{C} \times [0; 1]}$. Deux tresses géométriques $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont *isotopes* s'il existe une isotopie ambiante I telle que $I_1 \circ \tilde{\beta} = \tilde{\beta}'$. La relation d'isotopie ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des tresses géométriques à n brins. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des classes d'isotopie des tresses géométriques à n brins et on appelle simplement *tresse à n brins* tout élément de $\mathcal{B}_n$ i.e. toute classe d'isotopie de tresses géométriques à n brins.

On définit la concaténation de deux tresses géométriques à n brins $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)$ et $\hat{\beta}' = (\hat{\beta}'_1, \dots, \hat{\beta}'_n)$ par

$$\hat{\beta}\hat{\beta}' = (\hat{\beta}_1 \cdot \hat{\beta}'_{s_{\beta}(1)}, \dots, \hat{\beta}_n \cdot \hat{\beta}'_{s_{\beta}(n)})$$

où $\cdot$ désigne l'opération usuelle de concaténation des chemins dans un espace topologique.

L'opération de concaténation est une opération compatible avec la relation d'isotopie de tresses i.e. si $\hat{\beta}_1$ est isotope à $\hat{\beta}'_1$ et $\hat{\beta}_2$ est isotope à $\hat{\beta}'_2$ alors $\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2$ est isotope à $\hat{\beta}'_1\hat{\beta}'_2$, on peut donc définir l'opération de concaténation sur les tresses. Cette opération est naturellement associative. De plus si $\hat{\beta}^{(e)} = (\hat{\beta}_1^{(e)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(e)})$ est la tresse triviale définie par

$$\hat{\beta}_k^{(e)}(t) = k, \text{ pour tout } t \in [0; 1]$$

alors pour toute tresse $\hat{\beta}$, les tresses $\hat{\beta} \cdot \hat{\beta}^{(e)}$ et $\hat{\beta}^{(e)} \cdot \hat{\beta}$ sont toutes deux isotopes à $\hat{\beta}$, ce qui fait de la classe de $\hat{\beta}^{(e)}$ dans $\mathcal{B}_n$ un élément neutre pour l'opération de concaténation. Pour finir, pour toute tresse $\hat{\beta}$, si $\hat{\beta}^{-1}$ désigne l'application allant de $[0; 1]$ vers $\mathbb{C}$ définie pour tout $t \in [0; 1]$ par $\hat{\beta}^{-1}(t) = \hat{\beta}(1 - t)$, alors $\hat{\beta} \cdot \hat{\beta}^{-1}$ et $\hat{\beta}^{-1} \cdot \hat{\beta}$ sont toutes deux isotopes à $\hat{\beta}^{(e)}$, ce qui fait que toute classe de $\mathcal{B}_n$ possède un inverse.

Tout ceci justifie le résultat suivant.

Théorème 1.3 (Artin [3]). L'ensemble $\mathcal{B}_n$, muni de l'opération de concaténation forme un groupe.

Pour faciliter leur étude, on représente généralement les tresses par des dessins en 2 dimensions construit comme suit.

On considère la projection

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C} \times [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R} \times [0; 1] \\ (z, t) &\mapsto (\operatorname{Re}(z), t). \end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathcal{B}_n$ et $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)$ une tresse géométrique à n brins représentant β alors, quitte à modifier $\hat{\beta}$, on peut toujours supposer que les applications $\pi \circ \tilde{\beta}_1, \dots, \pi \circ \tilde{\beta}_n$ vérifient les propriétés suivantes :

— pour tout $t \in [0; 1]$, il existe au plus 2 éléments $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que

$$(\pi \circ \tilde{\beta}_i)(t) = (\pi \circ \tilde{\beta}_j)(t),$$

— dans ce cas où $(\pi \circ \tilde{\beta}_i)(t) = (\pi \circ \tilde{\beta}_j)(t)$ alors $\pi \circ \tilde{\beta}_i$ et $\pi \circ \tilde{\beta}_j$ sont transverses en t i.e. les vecteurs tangents à $\pi \circ \tilde{\beta}_i$ et $\pi \circ \tilde{\beta}_j$ en t sont non-colinéaires.

Avec ces conditions vérifiées on peut alors représenter l'union des images des $\pi \circ \tilde{\beta}_i$ dans $\mathbb{R} \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$ et pour chaque point double $(\pi \circ \tilde{\beta}_i)(t) = (\pi \circ \tilde{\beta}_j)(t)$ (avec $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $t \in [0; 1]$) modifier un voisinage de ce point en effaçant localement autour du point double le brin qui passait en-dessous à l'instant t avant la projection, comme illustré dans la figure 1. Ici dire que le brin $\hat{\beta}_i$ est au-dessus du brin $\hat{\beta}_j$ à l'instant t signifie que $\operatorname{Im}(\hat{\beta}_i(t)) < \operatorname{Im}(\hat{\beta}_j(t))$.

La représentation 2-dimensionnelle ainsi obtenue est alors appelée *diagramme de tresse* et les points doubles modifiés sont appelés *croisements*.

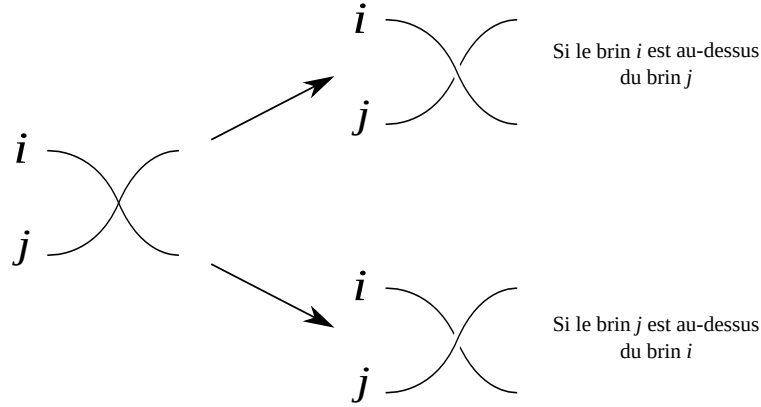


FIGURE 1. Construction des croisements classiques à partir des points doubles de la projection

Soient $\beta, \beta' \in \mathcal{B}_n$ et $\hat{\beta}, \hat{\beta}'$ des tresses géométriques représentant β et β' respectivement et permettant de construire des diagrammes de tresse respectifs $D(\hat{\beta})$ et $D(\hat{\beta}')$. Alors $\beta = \beta'$ (ou de manière équivalente $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont isotopes) si et seulement si les diagrammes $D(\hat{\beta})$ et $D(\hat{\beta}')$ sont reliés par une suite finie d'isotopies planaires (c'est-à-dire de difféomorphismes du plan préservant l'orientation) et de modifications locales des diagrammes (au sens où seule une partie des diagrammes est modifiée et le reste du diagramme est laissé intact) appelées mouvements de Reidemeister et qui sont décrits dans la figure 2.

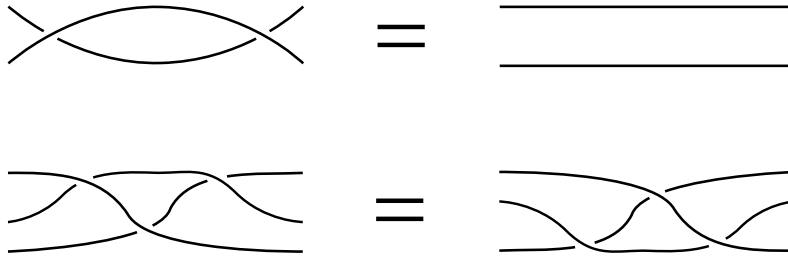


FIGURE 2. Mouvements de Reidemeister

Pour finir, on dispose d'une présentation de $\mathcal{B}_n$ qui a été donnée pour la première fois par Artin dans [2] et qui est détaillée dans la proposition suivante.

Proposition 1.4 (Artin [2, 3]). Le groupe de tresses à n brins a la présentation suivante.

- Générateurs : $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$.
- Relations :
 - $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$ si $|i - j| = 1$;

$$— \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1.$$

Dans cette présentation le générateur σ_i , où $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, représente le diagramme de tresse décrit en figure 3 où est également représenté son inverse σ_i^{-1} .



FIGURE 3. Les éléments σ_i et σ_i^{-1}

Précisons que les relations d'inversibilité des σ_i (sous-entendues dans la présentation) et la première famille de relations correspondent respectivement aux premier et deuxième mouvements de Reidemeister montré dans la figure 2 tandis que la deuxième famille de relations correspond à des isotopies planaires.

2. Les tresses singulières

Nous allons maintenant introduire la notion de tresses singulières, pour lesquels les brins seront autorisés à s'intersecter en un nombre fini de points. Nous les interpréterons plus tard comme des états critiques, intermédiaires entre plusieurs tresses classiques.

Définition 1.5. Soit n un entier strictement positif. Une *tresse singulière géométrique à n brins* est un n -uplet $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)$ d'applications $\mathcal{C}^\infty$ de $[0; 1]$ (toujours appelées brins) dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les mêmes propriétés qu'une tresse géométrique à ceci près qu'on autorise pour un nombre fini de $t \in [0; 1]$ à ce que $\hat{\beta}_k(t) = \hat{\beta}_l(t)$ pour une certaine paire $\{k, l\}$ avec $k \neq l$, auquel cas on impose que le point $s = \hat{\beta}_k(t) = \hat{\beta}_l(t)$ soit un point double (i.e. si $j \neq k, l$ alors $\hat{\beta}_j(t) \neq s$) et transverse (i.e. que les vecteurs tangents aux images des brins $\hat{\beta}_k$ et $\hat{\beta}_l$ au point s ne soient pas colinéaires). Le point double est alors appelé singularité. Comme pour les tresses géométriques classiques, pour toute tresse singulière géométrique $\hat{\beta}$, on notera $\tilde{\beta}$ l'application de $[0; 1]$ dans $\mathbb{C} \times [0; 1]$, définie pour tout $t \in [0; 1]$ par $\tilde{\beta}(t) = (\hat{\beta}(t), t)$.

Définition 1.6. Deux tresses singulières $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont *isotopes* s'il existe une isotopie ambiante I telle que $I_1 \circ \tilde{\beta} = \tilde{\beta}'$. La relation d'isotopie ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des tresses singulières géométriques à n brins. On note alors $\mathcal{SB}_n$ l'ensemble quotient ainsi formé et on appelle *tresse singulière à n brins* toute classe d'isotopie de tresses singulières géométriques à n brins.

On désignera parfois les tresses définies en section 1 par l'appellation *tresse classique* par opposition aux tresses singulières définies dans cette section.

On définit similairement aux tresses classiques l'opération de concaténation pour les tresses singulières géométriques. Cette opération de concaténation est encore une fois compatible avec la relation d'isotopie de tresses et on a alors le résultat suivant.

Théorème 1.7 (Birman [10]). L'ensemble $\mathcal{SB}_n$, muni de l'opération de concaténation, forme un monoïde.

De même que dans le cas des tresses classiques, une tresse singulière β peut être représentée en 2 dimension par un *diagramme de tresse singulière* construit à partir d'un représentant de β bien choisi. Dans un diagramme de tresse singulière, l'image d'une singularité n'est pas retouchée et est nommée *croisement singulier*. Pareillement aux cas des tresses, les croisements définis en section 1 sont parfois appelés croisements *classiques* par opposition aux croisements singuliers.

Pour finir, tout comme dans le cas classique la notion d'isotopie sur les tresses géométriques singulières peut se traduire par une notion de mouvements locaux sur les diagrammes associés. En effet, si $\beta, \beta' \in \mathcal{B}_n$ et $\hat{\beta}, \hat{\beta}'$ des tresses géométriques représentant β et β' respectivement et permettant de construire des diagrammes de tresse respectifs $D(\hat{\beta})$ et $D(\hat{\beta}')$ alors $\beta = \beta'$ (i.e. $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont isotopes) si et seulement si les diagrammes $D(\hat{\beta})$ et $D(\hat{\beta}')$ sont reliés par une suite finie d'isotopie planaires, de mouvements de Reidemeister comme précédemment décrits (dits mouvements de Reidemeister *classiques*) et de nouveaux mouvements de Reidemeister dits *singuliers* qui sont décrits dans la figure 4.

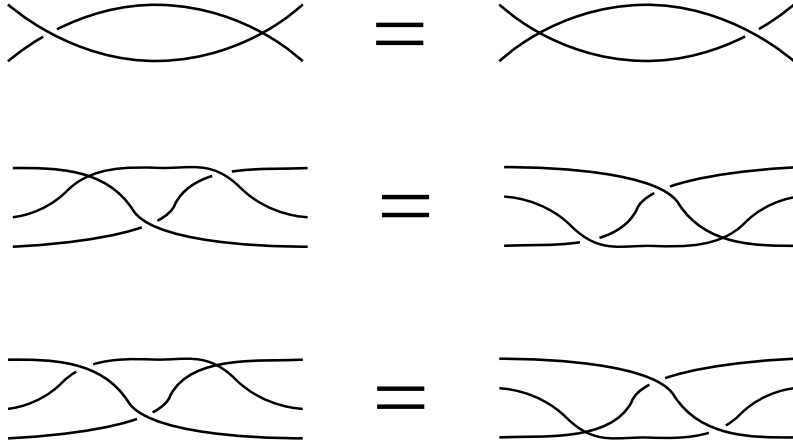


FIGURE 4. Mouvements de Reidemeister singuliers

Une présentation (au sens des monoïdes) a été donnée par Birman dans [10] et est détaillée dans la proposition suivante.

Proposition 1.8 (Birman [10, Lemme 3]). Le monoïde de tresses singulières à n brins a la présentation suivante.

- Générateurs : $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}; \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$.

- Relations :
 - $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$;
 - $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$ si $|i-j| = 1$;
 - $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| > 1$;
 - $\sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$;
 - $\tau_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \tau_j$ si $|i-j| = 1$;
 - $\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i$ si $|i-j| > 1$;
 - $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ si $|i-j| > 1$.

Diagrammatiquement, les générateurs τ_i correspondent aux singularités suivantes.

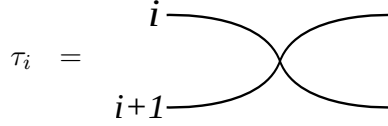


FIGURE 5. Le générateur τ_i

Les diverses relations reflètent, encore une fois, les isotopies planaires ainsi que les mouvements de Reidemeister, classiques et singuliers.

Remarque 1.9. Les générateurs τ_i représentent les singularités d'une tresse et sont appelés *générateurs singuliers*, les générateurs σ_i sont appelés *générateurs classiques*. On peut remarquer en analysant la présentation de $\mathcal{SB}_n$ qu'aucune relation ne modifie le nombre de générateurs singuliers. Cela permet de définir sans ambiguïté le nombre de singularités d'un élément $\beta \in \mathcal{SB}_n$, et de noter, pour tout $d \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble $\mathcal{SB}_n^{(d)}$ de $\mathcal{SB}_n$ constitué des éléments ayant exactement d singularités. Si on considère le morphisme naturel $\iota : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{SB}_n$ et la projection $pr : \mathcal{SB}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ qui envoie les générateurs singuliers sur l'élément neutre et les générateurs classiques sur les générateurs correspondants de $\mathcal{B}_n$, on a $pr \circ \iota = Id_{\mathcal{B}_n}$. Ceci implique alors que l'application naturelle envoyant les générateurs de $\mathcal{B}_n$ dans ceux de $\mathcal{SB}_n$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{SB}_n^{(0)}$, montrant ainsi que $\mathcal{B}_n$ est isomorphe à un sous-monoïde de $\mathcal{SB}_n$.

Mais plus qu'un simple sous-monoïde, la proposition suivante, cas particulier de [41, **proposition 2.1**], elle même inspirée par [39, **lemme 2.3**], montre que $\mathcal{B}_n$ apparaît même comme facteur semi-direct de $\mathcal{SB}_n$.

Proposition 1.10 (Paris [39, 41]). Soit $\mathcal{M}$ le monoïde de présentation suivante.

- Générateurs : $\Upsilon = \{\beta \tau_i \beta^{-1} ; 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \beta \in \mathcal{B}_n\}$.
- Relations : $uv = vu$, si $u, v \in \Upsilon$ et $uv = vu$ dans $\mathcal{SB}_n$.

Alors

$$\mathcal{SB}_n = \mathcal{M} \rtimes \mathcal{B}_n$$

où $\mathcal{B}_n$ agit sur $\mathcal{M}$ par conjugaison.

3. Le morphisme multiplicatif et la conjecture de Birman

Dans la suite, nous interpréterons toute tresse singulière comme un état intermédiaire entre les tresses classiques qui lui sont infinitésimalement proches. Afin de commencer à formaliser cela, nous introduisons maintenant de manière algébrique un morphisme de désingularisation.

En utilisant les relations définissant $\mathcal{SB}_n$ et $\mathcal{B}_n$, on constate en effet qu'on peut définir un morphisme multiplicatif

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{SB}_n &\rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n] \\ \sigma^{\pm 1} &\mapsto \sigma^{\pm 1} \\ \tau_i &\mapsto \sigma_i - \sigma_i^{-1}. \end{aligned}$$

Définition 1.11. Le morphisme δ défini ci-dessus est appelé *morphisme de désingularisation*.

Ce morphisme de désingularisation a été défini par Birman dans [10]. Dans ce même article, Birman conjecture qu'il est injectif.

Définition 1.12. La conjecture statuant l'injectivité du morphisme de désingularisation δ est connue sous le nom de "conjecture de Birman". Dans la suite de ce manuscrit, nous allons considérer plusieurs généralisations des tresses classiques et des tresses singulières. Nous garderons le terme de *conjecture de Birman* pour parler des questions similaires d'injectivité des morphismes de désingularisation dans ces différents contextes.

Théorème 1.13 (Paris [39]). La conjecture de Birman est vraie pour les tresses classiques.

Notons que, contrairement aux morphismes de groupes, l'injectivité d'un morphisme de monoïdes ne se réduit pas à la trivialité de son noyau. De fait, Fenn, Rolsen et Zhu avaient déjà montré dans [21] que $\ker(\delta) = \{1\}$, mais ce résultat est bien plus simple à démontrer que celui montré dix ans après par Paris dans [39].

4. Invariants de Vassiliev pour les tresses

4.1. Invariants de type fini pour les nœuds, façon Vassiliev. La théorie des nœuds s'attache à étudier l'espace des plongements lisses du cercle dans l'espace $\mathbb{R}^3$ à isotopie ambiante près. À l'instar de l'algèbre des tresses classiques, laquelle peut être interprétée comme une déformation perturbative de l'algèbre des permutations, les invariants de type fini, appelés également invariants de Vassiliev, s'appliquent à étudier les nœuds en introduisant un élément singulier perçu comme une perturbation de la différence de deux nœuds localement infinitésimalement proches [5]. La première définition de ces invariants, par Victor Vassiliev à la fin des années 80 dans son article [45], est toutefois de nature plus homologique. En effet, l'ensemble des nœuds y est vu comme l'ensemble $\mathcal{K}$ des composantes connexes de l'espace $\mathcal{M} \setminus \Sigma$, où $\mathcal{M}$ est l'ensemble de toutes les applications $\mathcal{C}^\infty$ du cercle unité S^1 dans $\mathbb{R}^3$, et Σ , appelé discriminant de l'espace des nœuds, le sous-ensemble constitué des éléments qui ne sont pas des plongements. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{K}$ est vu comme une base de $H_0(\mathcal{M} \setminus \Sigma)$.

L'ensemble des invariants de nœuds à coefficients dans $\mathbb{Z}$ correspond alors à $H^0(\mathcal{M} \setminus \Sigma)$. Par un principe de dualité de type Alexander, chaque tel invariant ν est alors déterminé, à constante près, par la donnée d'un cycle c_ν de dimension maximale dans Σ , la différence $\nu(K_1) - \nu(K_2)$, pour tous nœuds $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, étant alors égale à l'intersection algébrique de c_ν avec γ , un chemin reliant dans $\mathcal{M}$ les composantes K_1 et K_2 . L'idée de Vassiliev est alors de définir une notion de complexité sur ces cycles, et incidemment sur les invariants. Pour cela, il commence par stratifier Σ en fonction du degré de singularité des fonctions, la strate supérieure correspondant par exemple aux applications possédant un unique point double transverse. Leurs codimensions allant croissant, cela permet de procéder à un éclatement¹ successif de ces strates dans Σ , afin d'obtenir un espace $\widehat{\Sigma}$ où toutes ces strates sont désormais de codimension nulle. Un relevé de c_ν dans $\widehat{\Sigma}$ n'est alors plus nécessairement un cycle, mais il peut éventuellement être clos en lui rajoutant des cellules vivant dans ces strates éclatées. On dit que c_ν (ainsi que ν) est de degré au plus $n \in \mathbb{N}^*$ si ces cellules ne vivent que dans l'éclatement de strates de codimension au plus n . En un sens, puisque les invariants de degré au plus n ne les perçoivent plus, cela correspond à abattre les cloisons correspondant aux strates de codimensions plus grandes que n , et de simplifier par ce biais l'espace des nœuds. Concrètement, les invariants de degré au plus n forment alors un espace vectoriel de dimension fini, dont les éléments sont caractérisables et calculables par un jeu fini de données.

Plus proche des thématiques abordées dans ce manuscrit, une approche alternative pour définir les invariants de Vassiliev a été donnée pour les nœuds par Birman et Lin dans [12], avant que Birman n'établisse son équivalent pour les tresses dans [10]. Devenue par la suite l'approche la plus répandue dans les articles traitant du sujet, celle-ci se base sur l'extension des invariants de nœuds aux nœuds singuliers, c'est-à-dire aux nœuds possédant un nombre fini de points doubles transverses, appelé également croisements singuliers :



Dans les grandes lignes, cette nouvelle approche consiste tout d'abord à interpréter un tel croisement singulier comme la différence formelle d'un croisement classique positif et d'un croisement classique négatif :



et, en conséquence, de voir un nœud (ou une tresse) singulier (singulière) comme une combinaison formelle de nœuds (ou de tresses) classiques obtenue en désingularisant ainsi chaque singularité l'une après l'autre. Tout invariant de nœuds à coefficients dans $\mathbb{Z}$ peut alors être étendu aux nœuds singuliers par linéarité. En particulier, la valeur $\nu(K)$ d'un invariant sur un nœud possédant un unique point double correspondra à la différence $\nu(K_1) - \nu(K_2)$ des valeurs prises par cet invariant sur les deux nœuds obtenus en désingularisant, positivement et négativement, ce croisement singulier. Or, dans $\mathcal{M}$, il existe un chemin reliant K_1 à K_2 n'intersectant Σ qu'en un unique point correspondant à K . Au vu de ce qui a

1. C'est-à-dire que chaque strate est multiplié par un simplexe de dimension égale à la codimension de la strate dans Σ .

été dit plus haut, cela signifie que $\nu(K)$ n'est autre que le coefficient dans c_ν de la cellule contenant K . En généralisant ce raisonnement aux cas de nœuds possédant $n \in \mathbb{N}^*$ points doubles, on montre que tout invariant de degré au plus n s'annule sur les nœuds possédant au moins $n + 1$ points doubles. Birman et Lin ont montré que, plus généralement, cette propriété caractérise les invariants de degré au plus n , et permet donc de les définir de manière diagrammatique, en terme de changement de croisement, vu comme un processus de désingularisation.

Ce processus de désingularisation des nœuds singuliers (et des tresses singulières) est parfois comparé avec la dérivation. Dans le cadre de cette analogie, les invariants de Vassiliev correspondent alors aux invariants possédant un comportement polynomiale vis-à-vis de cette dérivation, dans le sens où les invariants de degré au plus n sont les invariants dont la dérivée $(n + 1)^{\text{ième}}$ s'annule. On pourra en effet noter que, à l'instar des polynômes, chaque invariant de degré au plus n est déterminé par son évaluation sur un nombre fini d'éléments.

4.2. Invariants de type fini pour les tresses, façon Birman–Lin. Dans le cas des tresses, nous allons maintenant détailler l'approche diagrammatique de Birman et Lin. Rappelons que si G est un groupe alors $\mathbb{Z}[G]$ est la $\mathbb{Z}$ -algèbre qui en tant que module est le module libre sur les éléments de G et dont la multiplication est obtenue en étendant bilinéairement la multiplication de G . Rappelons également qu'on peut identifier $\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}.e_G$ où e_G désigne le neutre de G .

Définition 1.14. Un invariant algébrique de tresses (classiques) est une application de $\mathcal{B}_n$ dans un groupe abélien H ou, de manière équivalente, un morphisme de $\mathbb{Z}$ -module de $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]$ dans H .

Définition 1.15. Soit $\mathcal{V}$ une famille d'invariants algébriques de tresses. On dit que $\mathcal{V}$ sépare les tresses (classiques) si pour toutes tresses (classiques) distinctes β et β' , il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V(\beta) \neq V(\beta')$.

Le morphisme de désingularisation δ permet d'étendre tout invariant de tresses classiques aux tresses singulières par le procédé suivant.

Si $V : \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n] \rightarrow H$ est un invariant de tresses classiques on pose pour toute tresse singulière β :

$$V(\beta) = V(\delta(\beta)).$$

Si $V : \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n] \rightarrow H$ est un invariant de tresses classiques on définit $V_\delta : \mathbb{Z}[\mathcal{SB}_n] \rightarrow H$ en pose pour toute tresse singulière $\beta \in \mathcal{SB}_n$:

$$V_\delta(\beta) = V(\delta(\beta)).$$

Si $\mathcal{V}$ est une famille d'invariants algébriques de tresses, on dénotera avec $\mathcal{V}_\delta$ la famille d'extensions à $\mathbb{Z}[\mathcal{SB}_n]$ obtenue par ce procédé.

Définition 1.16. Soit $\mathcal{V}$ une famille d'invariants algébriques de tresses. On dit que son extension $\mathcal{V}_\delta$ sépare les tresses singulières si pour toutes tresses singulières distinctes β et β' , il existe $V_\delta \in \mathcal{V}_\delta$ tel que $V_\delta(\beta) \neq V_\delta(\beta')$.

On peut alors définir la notion d'invariants de Vassiliev.

Définition 1.17 (Invariants de Vassiliev). Un invariant algébrique $V : \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n] \rightarrow H$ est appelé *invariant de Vassiliev* (ou *invariant de type fini*) d'ordre d si $V_\delta(\mathcal{SB}_n^{(d)}) \neq 0$ et $V_\delta(\mathcal{SB}_n^{(k)}) = 0$ pour tout $k > d$.

Nous avons fait le choix de définir les invariants de Vassiliev ainsi afin de faire le lien avec les tresses singulières mais il est également possible de les définir autrement. Tout d'abord, on rappelle que si $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère d'un anneau A et $d \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{I}^d$ est l'idéal bilatère engendré par les produits de d éléments de $\mathcal{I}$.

Définition 1.18. Dans la suite on dénotera $\mathcal{J}$ l'idéal bilatère de $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]$ engendré par les éléments $\sigma_1 - \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1} - \sigma_{n-1}^{-1}$.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le sous- $\mathbb{Z}$ -module engendré par $\delta\left(\bigcup_{k>d} \mathcal{SB}_n^{(k)}\right)$ coïncide avec $\mathcal{J}^d$. Cela permet de donner la définition alternative suivante des invariants de Vassiliev.

Proposition 1.19. Soit $d \in \mathbb{N}$. Soit H un groupe abélien. Un invariant algébrique $V : \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n] \rightarrow H$ est un invariant de Vassiliev d'ordre d si et seulement si $V(\mathcal{J}^d) \neq 0$ et $V(\mathcal{J}^{d+1}) = 0$.

C'est Ted Stanford qui, en 1996 dans [43], montre la pertinence de l'étude des invariants de Vassiliev pour les tresses dans la compréhension de ces mêmes invariants pour les entrelacs, et qui pose aussi la question de savoir si pour toute paire de tresse il existe un invariant de Vassiliev qui les distingue. Et justement c'est en exploitant la proposition 1.19, il a été démontré respectivement dans [36] et [47] les résultats suivants.²

Théorème 1.20 (Papadima [36]). Pour tout $\beta, \beta' \in \mathcal{B}_n$ avec $\beta \neq \beta'$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et un invariant de Vassiliev de degré d à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tel que $V(\beta) \neq V(\beta')$, en particulier les invariants de Vassiliev séparent les tresses classiques.

Théorème 1.21 (Zhu [47, Théorème 1]). La conjecture de Birman est vraie si et seulement si les invariants de Vassiliev séparent les tresses singulières.

Ces deux théorèmes sont basés sur deux autres résultats dont le premier est démontré séparément dans les deux articles et le second, qui est tiré de [34], est cité dans les deux articles et redémontré dans le premier. Ces deux résultats sont les suivants.

Proposition 1.22 (Zhu, Papadima). L'intersection des $\mathcal{J}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ est triviale i.e.

$$\bigcap_{d=1}^{+\infty} \mathcal{J}^d = 0.$$

Proposition 1.23 (Lin, Papadima). Pour tout $d \in \mathbb{N}$ le quotient $\mathcal{J}^d / \mathcal{J}^{d+1}$ est un $\mathbb{Z}$ -module libre.

2. Pour être précis, le premier théorème n'est pas explicitement formulé dans [36], cependant l'auteur réunit en une seule proposition (le corollaire 1.4) les deux résultats dont le théorème est une conséquence directe.

On donne dans les paragraphes qui suivent une esquisse de la preuve de la proposition 1.22 (inspirée par l'approche proposée dans [43]) ainsi que celle des théorèmes 1.20 et 1.21.

Soit π l'homomorphisme (surjectif) $\pi : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ qui associe à toute tresse dans $\mathcal{B}_n$ la permutation associée. Le noyau est appelé sous-groupe des tresses pures à n brins, qu'on notera $\mathcal{P}_n$. On choisit une section ensembliste s de π et on note pour tout $\beta \in \mathcal{B}_n$:

- $\sigma_\beta = \pi(\beta)$;
- $p_\beta = \beta s(\sigma_\beta)^{-1}$.

Alors tout $\beta \in \mathcal{B}_n$, peut être réécrit sous la forme $\beta = p_\beta s(\sigma_\beta)$ avec $p_\beta \in \mathcal{P}_n$. On rappelle également que si G est un groupe alors l'idéal d'augmentation de G est l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par les éléments de la forme $g - 1$ avec $g \in G$.

À l'aide du paragraphe précédent, on peut établir la correspondance suivante entre la base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]$ et la base $(p \otimes \sigma)_{(p, \sigma) \in \mathcal{P}_n \times \mathfrak{S}_n}$ de $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$:

$$\beta = p_\beta s(\sigma_\beta) \longleftrightarrow p_\beta \otimes \sigma_\beta.$$

Cette correspondance permet d'établir un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ -module entre $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]$ et $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ qui envoie pour tout $d \in \mathbb{N}$ l'idéal $\mathcal{J}^d$ sur $\mathcal{I}^d \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ où $\mathcal{I}^d$ est la d -ième puissance de $\mathcal{I}$, l'idéal d'augmentation de $\mathcal{P}_n$. Ainsi la démonstration de la proposition 1.22 est réduite à la démonstration de la trivialité de l'intersection des $\mathcal{I}^d \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ ou, de manière équivalente, des $\mathcal{I}^d$ pour $d > 1$. Ceci est équivalent (voir par exemple [42]) à dire que le groupe $\mathcal{P}_n$ est résiduellement nilpotent, ce qui s'avère être un résultat bien connu³.

On passe à une esquisse de preuve du théorème 1.20. Soient $\beta, \beta' \in \mathcal{B}_n$ avec $\beta \neq \beta'$. Alors $\beta - \beta' \notin \bigcap_{d=1}^{+\infty} \mathcal{J}^d = 0$, autrement dit il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta - \beta' \notin \mathcal{J}^d$ et alors la projection canonique

$$P_d : \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]/\mathcal{J}^d$$

est un invariant de Vassiliev de degré $d - 1$ tel que $P_d(\beta - \beta') \neq 0$ i.e. $P_d(\beta) \neq P_d(\beta')$.

De plus on peut montrer⁴ que

$$\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]/\mathcal{J}^d \simeq (\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]/\mathcal{J}) \oplus (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \oplus \dots \oplus (\mathcal{J}^{d-1}/\mathcal{J}^d).$$

Par la proposition 1.23, le quotient $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]/\mathcal{J}^d$ est donc un $\mathbb{Z}$ -module libre et par conséquent il n'est pas difficile de trouver un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ -modules φ de $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]/\mathcal{J}^d$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $\varphi(P_d(\beta)) \neq \varphi(P_d(\beta'))$. L'homomorphisme $V = \varphi \circ P_d$ est alors l'invariant de Vassiliev⁵ recherché.

3. Puisque nous ne reviendrons dans la suite sur ces objets nous nous limitons à donner [35] comme référence pour la notion de propriété résiduelle et [20] comme preuve de la nilpotence résiduelle (sans torsion) de $\mathcal{P}_n$.

4. Cela nécessite quelques résultats d'algèbre que l'on ne détaillera pas ici afin de ne pas alourdir plus que ça la démonstration.

5. Notons que V peut très bien être de degré strictement inférieur à $d - 1$.

On termine avec le cas du théorème 1.21. Une implication est évidente, car si le morphisme de désingularisation δ n'était pas injectif, alors les invariants de Vassiliev ne pourraient pas séparer les tresses singulières.

Réciproquement, si δ est injectif alors pour $\beta, \beta' \in \mathcal{SB}_n$ avec $\beta \neq \beta'$, on a $\delta(\beta) \neq \delta(\beta')$ i.e. $\delta(\beta) - \delta(\beta') \notin \bigcap_{d=1}^{+\infty} \mathcal{J}^d = 0$ et à partir de là on peut réitérer la première partie du raisonnement du cas classique.

Ainsi, le résultat de Paris sur l'injectivité du morphisme de désingularisation induit comme conséquence directe la proposition suivante, que nous mentionnons car à notre connaissance non signalée dans la littérature.

Proposition 1.24. Les invariants de Vassiliev séparent les tresses singulières.

4.3. Une première généralisation : Un mot à propos des tresses sur les surfaces. Dans le reste de la thèse, nous allons nous pencher sur l'analogue du morphisme de désingularisation et des invariants de Vassiliev pour dans d'autres cadres, à savoir les groupes d'Artin et les groupes de tresses virtuelles considérés respectivement avec leur monoïdes singuliers associés. Cependant ces objets ont déjà été étudiés dans un autre cadre distinct mais relié à la théorie des tresses classiques : les tresses sur les surfaces. Cette sous-section offre un survol de résultats connus dans ce cadre.

On commencera par rappeler la définition des tresses sur une surface. Soit Σ une surface et $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ n points de Σ tous distincts.

La notion de tresse géométrique sur la surface Σ d'origine $\mathcal{P}$ est défini similairement au cas classique, en remplaçant dans la définition 1.1 toutes les occurrences de $\mathbb{C}$ par Σ et les k par P_k , où $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. En effectuant la même opération dans la définition 1.2, on obtient la notion d'isotopie entre tresses géométriques sur Σ d'origine $\mathcal{P}$. La concaténation des tresses induit une structure de groupe sur les classes d'isotopie des tresses géométriques sur Σ d'origine $\mathcal{P}$. Puisque le groupe ne dépend pas du choix des points on pourra noter ce groupe $\mathcal{B}_n(\Sigma)$.

On définit de la même manière l'ensemble des tresses singulières sur Σ à l'aide des définitions 1.5 et 1.6. Celui-ci est encore un monoïde pour l'opération de concaténation et est noté $\mathcal{SB}_n(\Sigma)$.

Pour finir, on dispose toujours d'un morphisme de désingularisation de $\mathcal{SB}_n(\Sigma)$ dans $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n(\Sigma)]$ et on peut définir la notion d'invariant de Vassiliev comme on l'avait fait précédemment.

On peut trouver dans [7] et [22] des présentations de $\mathcal{B}_n(\Sigma)$ pour le cas où ⁶ Σ est une surface fermée orientable de genre $g \geq 1$ ou fermée non-orientable de genre $g \geq 2$. On dispose également de présentations de monoïde pour $\mathcal{SB}_n(\Sigma)$ pour le même type de surfaces dans [23].

6. Le cas où les surfaces sont privées d'un nombre fini de points est également traité dans [7].

En s'appuyant sur ces présentations Paris et González-Meneses ont pu démontrer dans [24] l'analogue des propositions 1.22 et 1.23 et par conséquent l'analogue du théorème 1.20 pour les tresses sur une surface fermée orientable de genre strictement positif.

De plus, dans [38], Paris a adapté sa démonstration de sa preuve originelle de [39] afin de prouver que la conjecture de Birman restait vraie pour les groupes $\mathcal{B}_n(\Sigma)$ quand Σ était là encore une surface fermée orientable de genre strictement positif.

Le cas des autres surfaces ne semble pas avoir beaucoup été traité dans la littérature. On peut cependant mentionner [28] où le cas de la sphère est traité et en particulier le corollaire 4.2 qui montre que, même s'il est bien possible de séparer les tresses de la sphère à l'aide des invariants de Vassiliev, il est cependant impossible de le faire juste avec ceux à valeurs entières. Ce résultat est relié au fait que les groupes de tresses sur la sphère ont des éléments de torsion, tandis les autres groupes de tresses sur des surfaces fermées de genre strictement positif n'en ont pas.

Groupes d'Artin et monoïdes singuliers d'Artin

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'extension des notions établies dans le chapitre précédent au cadre des groupes d'Artin, dont le groupe de tresses est un cas particulier. On y donne les définitions de groupes d'Artin et y présente certaines familles de groupes d'Artin qui joueront un rôle important dans le reste de la thèse. On y introduit ensuite les notions de singularité, de morphisme de désingularisation, d'invariant de Vassiliev pour les groupes d'Artin avant de conclure avec des résultats sur les problématiques qui sont liées à ces notions.

1. Les groupes d'Artin

Les groupes de tresses sont connus comme étant des cas particulier de groupe d'Artin. Ceux-ci sont généralement définis à partir d'une matrice de Coxeter ou d'un graphe de Coxeter dont on donne les définitions dans le paragraphe suivant.

Soit S un ensemble. Une *matrice de Coxeter* sur S est une matrice $M = (m_{st})_{s,t \in S}$ dont les coefficients sont indexés par S , et telle que $m_{ss} = 1$ pour tout $s \in S$ et $m_{st} = m_{ts} \in \{2, 3, 4, \dots, +\infty\}$ pour tous $s, t \in S$ avec $s \neq t$. Une matrice de Coxeter est généralement représentée par un *graphe de Coxeter* Γ défini comme suit :

- ses sommets sont les éléments de S ,
- $s, t \in S$ sont joints par une arête si $m_{st} \geq 3$ et cette arête est étiquetée par m_{st} lorsque celui-ci est plus grand que 4.

Si m est un entier plus grand que 2 et a, b sont deux lettres d'un alphabet quelconque, alors on note

$$w(m; a, b) = \underbrace{abab \dots}_{m \text{ lettres}}$$

Définition 2.1. Soit $\Sigma_S = \{\sigma_s; s \in S\}$ un ensemble en bijection avec S . Le *groupe d'Artin* (resp. le *monoïde d'Artin*) associé à Γ est le groupe A_Γ (resp. le monoïde A_Γ^+) de présentation suivante.

- Générateurs : $\sigma_s, s \in S$.
- Relations : $w(m_{st}; \sigma_s, \sigma_t) = w(m_{st}; \sigma_t, \sigma_s)$, $s, t \in S$ avec $s \neq t$ et $m_{st} < +\infty$.

Au graphe de Coxeter Γ est également associé un autre groupe appelé groupe de Coxeter.

Définition 2.2. Le *groupe de Coxeter* W_Γ associé à Γ (ou au groupe d'Artin A_Γ) est le groupe de présentation suivante.

- Générateurs : S .

- Relations :
 - $s^2 = 1, s \in S$;
 - $w(m_{st}; s, t) = w(m_{st}; t, s), s, t \in S$ avec $s \neq t$ et $m_{st} < +\infty$.

Historiquement, les groupes de Coxeter ont été étudiés avant les groupes d'Artin, ce qui explique la convention consistant à utiliser les sommets du graphe de Coxeter comme générateurs du groupe de Coxeter associé et non du groupe d'Artin, pour lequel on utilise un ensemble en bijection avec l'ensemble des sommets du graphe.

Définition 2.3. En accord avec la terminologie usuelle un sous-groupe H de A_Γ (resp. W_Γ) est appelé *sous-groupe parabolique standard* s'il existe une partie X de S tel que H soit engendré par $\Sigma_X = \{\sigma_x; x \in X\}$ (resp. par X). On note alors A_X (resp. W_X) ce sous-groupe.

Remarque 2.4. Un sous-graphe Γ' d'un graphe de Coxeter est lui-même un graphe de Coxeter et peut donc servir à définir un groupe de Coxeter $W_{\Gamma'}$ ou d'Artin $A_{\Gamma'}$ associé.

Si X est une partie de S alors on dénote par Γ_X le sous-graphe complet de Γ engendré par l'ensemble X .

Remarque 2.5. On a choisi dans les définitions ci-dessus de prendre S quelconque mais habituellement l'étude des groupes et monoïdes d'Artin ainsi que des groupes de Coxeter se fait en supposant S fini et c'est ce que nous allons dorénavant faire.

À partir de maintenant on suppose, sauf mention explicite du contraire, que tous les graphes de Coxeter qui apparaissent par la suite n'ont qu'un nombre fini de sommets.

Sous cette condition on peut, à partir des résultats de Van der Lek dans [44], déduire le théorème suivant :

Théorème 2.6 (Van der Lek [44]). Soit Γ un graphe de Coxeter et A_Γ (respectivement A_Γ^+) le groupe (resp. le monoïde) d'Artin associé. Soit S l'ensemble des sommets de Γ .

- Si $X \subseteq S$, alors $A_X \simeq A_{\Gamma_X}$ et $A_X^+ \simeq A_{\Gamma_X}^+$;
- si $Y \subseteq S$ aussi, alors $A_X \cap A_Y = A_{X \cap Y}$ et $A_X^+ \cap A_Y^+ = A_{X \cap Y}^+$.

Définition 2.7. Toujours en accord avec la terminologie usuelle, on dit que A_Γ est :

- *de type sphérique* ou encore *de type fini* si son groupe de Coxeter associé W_Γ est fini ;
- *libre d'infini* si pour tous $s, t \in S$, $m_{st} < +\infty$;
- *de type FC* si tout sous-groupe parabolique standard libre d'infini de A_Γ est de type sphérique.

La raison d'être de ces définitions tient aux faits suivants :

- tout d'abord les groupes d'Artin de type sphérique présente un certain nombre de propriétés qui les différencient des autres groupes d'Artin, en particulier ce sont les seuls groupes d'Artin qui sont des groupes de Garside ;

- ensuite être libre d'infini pour un groupe d'Artin A_Γ est équivalent à dire que ce groupe d'Artin n'est pas produit amalgamé de deux de ses sous-groupes paraboliques standards au-dessus d'un troisième, en effet si jamais $m_{st} = +\infty$ pour une certaine paire $s, t \in S$ alors A_Γ est alors amalgame de $A_{S-\{s\}}$ et de $A_{S-\{t\}}$ au-dessus de $A_{S-\{s,t\}}$, et réciproquement si A_Γ est un amalgame de deux de ses sous-groupes paraboliques standards A_X et A_Y au-dessus d'un troisième A_Z alors pour tous $s \in X - Z$ et $t \in Y - Z$ alors $m_{st} = +\infty$;
- pour finir il résulte de la remarque précédente que la classe des groupes d'Artin de type FC correspond à la plus petite classe des groupes d'Artin contenant les groupes d'Artin de type sphérique et qui est stable par amalgamation au-dessus des sous-groupes paraboliques standards.

On rappelle également le résultat bien connu suivant.

Proposition 2.8. Soit Γ et Γ' deux graphes de Coxeter et A_Γ , $A_{\Gamma'}$ les deux groupes d'Artin associés, alors $A_\Gamma \times A_{\Gamma'}$ est également un groupe d'Artin, dont le graphe de Coxeter correspond à la réunion disjointe des graphes Γ et Γ' .

Ceci mène à la définition suivante.

Définition 2.9. Soit Γ un graphe de Coxeter et A_Γ le groupe d'Artin associé, on dit que A_Γ est irréductible si Γ est connexe i.e. ne peut être écrit comme réunion disjointe de deux de ses sous-graphes, ce qui revient à dire que A_Γ ne pas s'écrire comme produit direct non trivial de deux de ses sous-groupes paraboliques.

On dispose de la liste complète des graphes de Coxeter donnant lieu à des groupes d'Artin irréductibles de type sphérique. Ceux-ci sont affichés dans la figure 1 accompagnés de leur dénomination standard qui, exception faite du graphe I_n , est composée d'une lettre et d'un indice égal au nombre de sommets du graphe en question. Dans la liste n désigne un entier naturel non-nul :

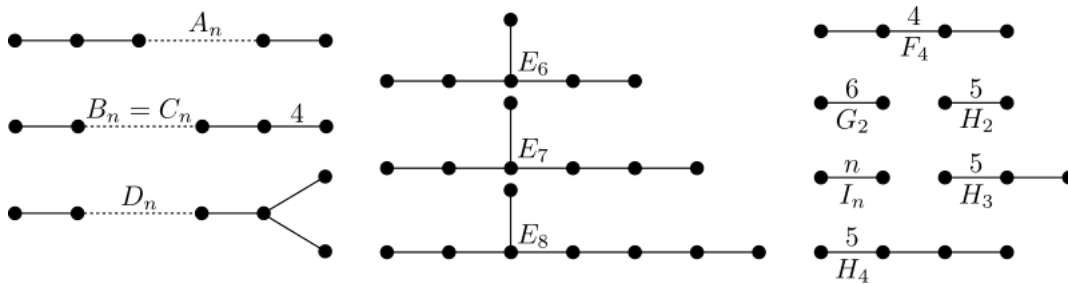


FIGURE 1. Graphes de Coxeter irréductibles de type sphérique

En utilisant la présentation donnée en section 1.1, on peut remarquer que le groupe de tresses à n brins $\mathcal{B}_n$ est le groupe d'Artin associé au graphe de Coxeter A_{n-1} et est donc un groupe d'Artin de type sphérique, en effet le groupe de Coxeter associé au graphe A_{n-1} est le groupe symétrique à n éléments $\mathfrak{S}_n$.

Il existe une autre famille de groupes d'Artin bien connue en théorie des groupes d'Artin : les groupes d'Artin de type affine, dont la liste est donnée en figure 2. Chaque graphe de Coxeter d'un groupe d'Artin de type affine est obtenu à partir de celui d'un groupe d'Artin de type sphérique en ajoutant un sommet et une arête (à l'exception de $\tilde{I}_1$), la convention est alors d'ajouter un tilde au graphe de Coxeter d'origine pour obtenir la dénomination du nouveau graphe. En particulier, les graphes dans la figure 2 ont un sommet de plus que l'indice dans leur nom (par exemple le graphe $\tilde{A}_n$ possède $n + 1$ sommets).

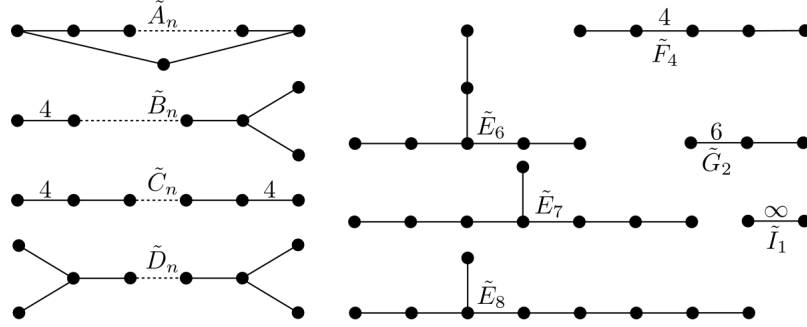


FIGURE 2. Graphes de Coxeter irréductibles de type affine

2. Monoïde singulier associé à un groupe d'Artin

2.1. Définition des monoïdes singuliers d'Artin et premières propriétés. Dans [18], Corran a associé à chaque groupe d'Artin un monoïde dit "singulier", défini de manière purement algébrique par générateurs et relations. Elle étend ainsi le concept de monoïde de tresses singulières aux groupes d'Artin autres que $\mathcal{B}_n$.

Définition 2.10. Soit A_Γ un groupe d'Artin associé à un graphe de Coxeter Γ d'ensemble de sommets S et dont les générateurs sont notés comme d'habitude σ_s , pour tout $s \in S$ et soit $T_S = \{\tau_s; s \in S\}$ un ensemble en bijection avec S et Σ_S . On définit le monoïde singulier d'Artin SA_Γ associé à A_Γ comme étant le monoïde de présentation suivante.

- Générateurs : $\sigma_s, \sigma_s^{-1}, \tau_s$, pour tout $s \in S$.
 - Relations :
 - $\sigma_s \sigma_s^{-1} = \sigma_s^{-1} \sigma_s = 1$, pour tout $s \in S$;
 - $w(m_{st}; \sigma_s, \sigma_t) = w(m_{st}; \sigma_t, \sigma_s)$, $s, t \in S$ avec $s \neq t$ et $m_{st} < +\infty$;
 - $\sigma_s \tau_s = \tau_s \sigma_s$, pour tout $s \in S$;
 - $\tau_s \tau_t = \tau_t \tau_s$ pour tous s, t avec $m_{s,t} = 2$;
 - $\tau_s w(m_{st} - 1; \sigma_t, \sigma_s) = w(m_{st} - 1; \sigma_t, \sigma_s) \tau_{s*t}$, $s, t \in S$ avec $s \neq t$ et $m_{st} < +\infty$
- où $s * t = s$ si $m_{s,t}$ est pair et $s * t = t$ si $m_{s,t}$ est impair.

Remarque 2.11. Les générateurs τ_s sont encore une fois appelés *générateurs singuliers* et les générateurs σ_s sont appelés *générateurs classiques*. Comme dans le cas des monoïdes $\mathcal{SB}_n$ on peut, en utilisant la présentation de SA_Γ , remarquer que le nombre de générateurs singuliers utilisé dans l'écriture d'un élément de SA_Γ est indépendant de cette écriture et

qu'on peut définir sans ambiguïté le nombre de singularités d'un élément $m \in SA_\Gamma$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$ on notera $SA_\Gamma^{(d)}$ le sous ensemble de SA_Γ constitué par les éléments ayant exactement d singularités. L'argument utilisé dans la remarque 1.9 pour montrer que $\mathcal{B}_n$ s'identifie à $\mathcal{SB}_n^{(0)}$ s'étend naturellement au cas général : A_Γ coïncide donc avec $SA_\Gamma^{(0)}$, et A_Γ est bien un sous-monoïde de SA_Γ .

On retrouve dans le cadre général la décomposition en produit semi-direct déjà établie pour les monoïdes de tresses singulières :

Proposition 2.12 (Paris, Godelle, Proposition 2.1 [41]). Soit A_Γ un groupe d'Artin associé à un graphe de Coxeter Γ d'ensemble de sommets S . Soit $\mathcal{M}_\Gamma$ le monoïde de présentation suivante.

- Générateurs : $\Upsilon_\Gamma = \{\beta\tau_s\beta^{-1}, s \in S \text{ et } \beta \in A_\Gamma\}$.
- Relations : $uv = vu$, si $u, v \in \Upsilon_\Gamma$ et $uv = vu \in SA_\Gamma$.

Alors

$$SA_\Gamma = \mathcal{M}_\Gamma \rtimes A_\Gamma$$

où A_Γ agit sur $\mathcal{M}_\Gamma$ par conjugaison.

Proposition 2.13. Soit Γ et Γ' deux graphes de Coxeter et $A_\Gamma, A_{\Gamma'}$ les deux groupes d'Artin associés, alors

$$S(A_\Gamma \times A_{\Gamma'}) \simeq SA_\Gamma \times SA_{\Gamma'}.$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que si M est un monoïde de présentation $\langle G_M | R_M \rangle^+$ et N est un monoïde de présentation $\langle G_N | R_N \rangle^+$ alors une présentation de $M \times N$ est donnée par $\langle G_M; G_N | R_M; R_N; mn = nm, m \in G_M, n \in G_N \rangle^+$.

Le résultat découle alors du fait que les présentations définissant $S(A_\Gamma \times A_{\Gamma'})$ et $SA_\Gamma \times SA_{\Gamma'}$ coïncident. $\square$

2.2. Monoïdes et groupes d'Artin angle droit. Nous présentons dans cette sous-section une famille de monoïdes et de groupes d'Artin dont nous allons faire beaucoup usage par la suite : les monoïdes et groupes d'Artin angle droit.

Définition 2.14 (Monoïde et groupe d'Artin angle droit). Soit Γ un graphe de Coxeter dont on considère que l'ensemble des sommets peut être infini. Soient A_Γ^+, A_Γ respectivement le monoïde et le groupe d'Artin associés. On dit que A_Γ^+ (respectivement A_Γ) est un monoïde (resp. un groupe) d'Artin angle droit si pour tous sommets s, t de Γ , soit $m_{st} = +\infty$, soit $m_{st} = 2$ i.e. les seules relations apparaissant dans la présentation de A_Γ^+ et A_Γ sont des relations de commutations.

Les monoïdes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_\Gamma$ présenté dans les théorèmes 1.10 et 2.12 sont des exemples de monoïde d'Artin angle droit.

Les monoïdes et les groupes d'Artin angle droit possèdent un certain nombre de propriétés intéressantes. Il est notamment possible de démontrer que le théorème 2.6 reste vrai pour les monoïdes et groupes d'Artin angle droit même quand ils possèdent une infinité

de générateurs. Dans la suite, pour tout ensemble S et $X \subseteq S$, similairement au cas des groupes (Définition 2.3), A_X^+ sera le sous monoïde engendré par Σ_X .

Proposition 2.15. Soit A_Γ^+ et A_Γ respectivement le monoïde d'Artin angle droit et le groupe d'Artin angle droit associé à un graphe de Coxeter Γ . Soit S l'ensemble des sommets de Γ , possiblement infini.

- Si $X \subseteq S$, alors $A_X^+ \simeq A_{\Gamma_X}^+$ et $A_X \simeq A_{\Gamma_X}$;
- si $Y \subseteq S$ aussi, alors $A_X^+ \cap A_Y^+ = A_{X \cap Y}^+$ et $A_X^+ \cap A_Y = A_{X \cap Y}$.

DÉMONSTRATION. On démontre le résultat dans le cas des monoïdes, le cas des groupes suivant exactement la même preuve.

Commençons par démontrer le premier point. Soit $X \subseteq S$ et soit ι_X l'homomorphisme canonique de $A_{\Gamma_X}^+$ dans A_Γ^+ . On peut vérifier que l'homomorphisme r_X de A_Γ^+ dans $A_{\Gamma_X}^+$ défini pour tout $s \in S$ par

$$r_X(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \in X \\ 1 & \text{si } s \notin X \end{cases}$$

est bien défini et est une rétraction de ι_X i.e. $r_X \circ \iota_X = \text{Id}_{A_{\Gamma_X}^+}$. L'homomorphisme ι_X est donc injectif ; puisque son image est A_X^+ , le premier point suit.

Pour démontrer le deuxième point on procède par double inclusion. Soient $X, Y \subseteq S$. Le fait que $A_{X \cap Y}^+ \subseteq A_X^+ \cap A_Y^+$ est évident et il reste donc à démontrer l'inclusion inverse. Soit alors $g \in A_X^+ \cap A_Y^+$, comme l'écriture de g dans A_X^+ et A_Y^+ ne fait intervenir qu'un nombre fini de générateurs, alors il existe deux ensembles finis X_f et Y_f avec $X_f \subseteq X$, $Y_f \subseteq Y$ tels que $g \in A_{X_f}^+$ et $g \in A_{Y_f}^+$. Donc $g \in A_{X_f}^+ \cap A_{Y_f}^+$ et comme par le théorème 2.6 $A_{X_f}^+ \cap A_{Y_f}^+ = A_{X_f \cap Y_f}^+$, on a donc $g \in A_{X_f \cap Y_f}^+ \subseteq A_{X \cap Y}^+$. D'où le deuxième point. □

Dans le reste de cette sous-section A_Γ^+ (resp. A_Γ) désigne un monoïde (resp. un groupe) d'Artin angle droit associé à un graphe de Coxeter Γ d'ensemble de sommets S , qui peut être infini.

Une autre propriété des groupes et des monoïdes d'Artin angle droit est qu'ils jouissent de l'existence de formes normales comme l'atteste la définition ainsi que la proposition suivantes :

Définition 2.16. On note comme d'habitude $\Sigma_S = \{\sigma_s; s \in S\}$ l'ensemble des générateurs de A_Γ^+ (resp. A_Γ). Soit alors $m \in A_\Gamma^+$ (resp. A_Γ).

- (1) Une expression de m est un n -uplet $W = (\sigma_{s_1}^{k_1}, \dots, \sigma_{s_n}^{k_n})$ où les s_i sont des sommets de Γ et les k_i des entiers naturels (resp. relatifs) non-nuls tels que $w = \sigma_{s_1}^{k_1} \dots \sigma_{s_n}^{k_n}$ dans A_Γ^+ (resp. A_Γ).
- (2) On définit la longueur de l'expression W comme étant l'entier n et son support comme étant le n -uplet $(s_1, \dots, s_n)$.

- (3) L'expression W est dite réduite si elle est de longueur minimale parmi les expressions de m i.e. si $(\sigma_{s'_1}^{l_1}, \dots, \sigma_{s'_p}^{l_p})$ est une autre expression de m alors $p \geq n$.

Soit $\leq$ un ordre total sur les sommets de Γ .

- (4) Une forme normale de m relativement à $\leq$ est une expression réduite $(\sigma_{s_1}^{k_1}, \dots, \sigma_{s_n}^{k_n})$ de m telle que $(s_1, \dots, s_n)$ soit minimal pour l'ordre lexicographique induit par $\leq$.

Proposition 2.17. Soit $\leq$ un ordre total sur les sommets de Γ . Alors :

1. tout élément de A_Γ^+ (resp. A_Γ) possède une unique forme normale relativement à $\leq$;
2. si $(\sigma_{s_1}^{k_1}, \dots, \sigma_{s_n}^{k_n})$ est une forme normale relativement à $\leq$ alors toute expression de même support est aussi une forme normale i.e. pour tous $l_1, \dots, l_n$ non-nuls, $(\sigma_{s_1}^{l_1}, \dots, \sigma_{s_n}^{l_n})$ est également une forme normale relativement à $\leq$.

La définition et la proposition ci-dessus sont adaptées de [26] où ces résultats sont démontrés pour les produits graphés de monoïdes et de groupes le long de graphes finis, qui sont des objets formant un cadre plus général que les monoïdes et groupes d'Artin angle droit de type fini mais n'encapsulant pas le cas où ceux-ci possèdent une infinité de générateurs. Nous allons donc devoir étendre la proposition 2.17 aux monoïdes et groupes d'Artin angle droit infiniment engendré en nous appuyant sur le cas fini. Pour cela, il nous faut détailler quelques éléments de théorie adaptés de [26] en plus.

Définition 2.18. Soit $m \in A_\Gamma^+$ (resp. A_Γ) et $W = (\sigma_{s_1}^{k_1}, \dots, \sigma_{s_n}^{k_n})$ une expression de m .

- (I) Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que $s_i = s_{i+1}$ et posons :

$$W' = \begin{cases} (\dots, \sigma_{s_{i-1}}^{k_{i-1}}, \sigma_{s_{i+1}}^{k_{i+1}}, \dots) & \text{si } k_{i+1} = -k_i, \\ (\dots, \sigma_{s_{i-1}}^{k_{i-1}}, \sigma_{s_i}^{k_i+k_{i+1}}, \sigma_{s_{i+1}}^{k_{i+1}}, \dots) & \text{si } k_{i+1} \neq -k_i. \end{cases}$$

On dit que w' est obtenu à partir de W par une M -opération élémentaire de type I. Cette opération décroît strictement la longueur d'une expression.

- (II) Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que σ_{s_i} commute avec $\sigma_{s_{i+1}}$ et posons :

$$W' = (\dots, \sigma_{s_{i-1}}^{k_{i-1}}, \sigma_{s_{i+1}}^{k_{i+1}}, \sigma_{s_i}^{k_i}, \sigma_{s_{i+2}}^{k_{i+2}}, \dots).$$

On dit que w' est obtenu à partir de W par une M -opération élémentaire de type II. Cette opération ne change pas la longueur d'une expression.

Définition 2.19. On dit d'une expression qu'elle est M -réduite s'il est impossible de réduire sa longueur à l'aide de M -opérations élémentaires.

Proposition 2.20 (Green [26]). On suppose que A_Γ^+ (resp. A_Γ) est finiment engendré.

- (1) Soit $m \in A_\Gamma^+$ (resp. A_Γ) et W_1, W_2 deux expressions M -réduites de m . Alors W_1 et W_2 sont reliés par une suite de M -opérations de type II.
- (2) Soit $m \in A_\Gamma^+$ (resp. A_Γ) et W une expression de m . Alors W est réduite si et seulement si elle est M -réduite.

On peut tirer plusieurs constats de la proposition 2.20. Tout d'abord la proposition 2.17 est une conséquence directe de la proposition 2.20 dans le cas où A_Γ^+ (resp. A_Γ) est finiment engendré. Ensuite on peut déduire le résultat suivant.

Lemme 2.21. On suppose que A_Γ^+ (resp. A_Γ) est finiment engendré et on se fixe $\leq$ un ordre total sur S . Soit $X \subseteq S$, soit $m \in A_X^+$ et soit W la forme normale de m dans A_Γ^+ (resp. A_Γ) relativement à $\leq$ et W_X la forme normale de m dans A_X^+ (resp. A_X) relativement à $\leq|_X$. Alors $W = W_X$ i.e. les formes normales d'un élément dans les différents sous-monoïdes (resp. sous-groupes) paraboliques auquel il appartient coïncident.

DÉMONSTRATION. Comme d'habitude on traite le cas de A_Γ^+ , le cas de A_Γ se traitant de manière similaire. Notons tout d'abord que comme W est une expression réduite de m et W_X est une expression de m dans A_Γ^+ alors la longueur de W est nécessairement inférieure à celle de W_X . De plus W peut être obtenu à partir de W_X par une suite de M -opérations élémentaires et comme les M -opérations élémentaires ne peuvent que faire diminuer le nombre de générateurs d'une expression alors nécessairement l'ensemble des générateurs présents dans l'écriture de W vient de l'écriture de W_X et donc est un sous-ensemble de X . En conséquence W et W_X ont même longueur car dans le cas contraire W serait une expression de m dans A_X^+ moins longue que sa forme normale W_X dans A_X^+ , ce qui serait contradictoire. En particulier W et W_X sont réduites dans A_X , donc M -réduites et donc reliées par une suite de M -opérations élémentaires de type II. Comme W et W_X sont des minimums pour l'ordre lexicographique engendré par $\leq$ qui est total alors nécessairement $W = W_X$. $\square$

On peut désormais démontrer la proposition 2.17 dans le cas général.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.17. Dans le cas où A_Γ^+ (resp. A_Γ) est finiment engendré, le résultat vient de [26]. Dans le cas infiniment engendré, si $m \in A_\Gamma^+$ (resp. A_Γ) alors comme m ne peut s'écrire qu'avec un nombre fini de générateurs alors il existe $X \subseteq S$ avec X fini tel que $m \in A_X^+$ (resp. A_X) et il suffit de considérer la forme normale de m dans A_X^+ (resp. A_X) qui, par le lemme 2.21 ne dépend pas du choix de X . $\square$

On présente maintenant une proposition sur les endomorphismes de monoïdes (resp. groupes) d'Artin angle droit qui servira dans la section suivante à démontrer un résultat permettant d'étendre certains morphismes entre groupes d'Artin aux monoïdes singuliers d'Artin correspondants.

Proposition 2.22. On se place toujours sous les mêmes conditions que la définition 2.16. Soit alors V un sous-ensemble de sommets de Γ et $K = (k_v)_{v \in V}$ une famille d'entiers naturels non nuls indexés par V . On désigne par $\Psi_{V,K}^+$ (resp. $\Psi_{V,K}$) l'endomorphisme de monoïdes (resp. de groupes) de A_Γ^+ (resp. A_Γ) défini par

$$\Psi_{V,K}^+(\sigma_s) = \Psi_{V,K}(\sigma_s) \begin{cases} \sigma_s^{k_s} & \text{si } s \in V, \\ \sigma_s & \text{si } s \notin V. \end{cases}$$

Les morphismes $\Psi_{V,K}^+$ et $\Psi_{V,K}$ sont injectifs.

DÉMONSTRATION. Si $\leq$ est un ordre total défini sur l'ensemble des sommets de Γ alors il est possible de définir des formes normales relativement à cet ordre, conformément à la définition 2.16 et la proposition 2.17. Il s'ensuit du second point de la proposition 2.17

que, de par leur définition, les morphismes $\Psi_{v,k}^+$ et $\Psi_{v,k}$ préservent les formes normales relativement à $\leq$ et sont donc injectifs. $\square$

3. Critère d'extension des morphismes entre groupes d'Artin aux monoïdes singuliers

Le but de cette section est d'établir un résultat donnant des conditions suffisantes pour pouvoir étendre un homomorphisme entre deux groupes d'Artin en un homomorphisme entre leurs monoïdes singuliers associés. Le résultat en question s'appuie sur une propriété introduite par Paris et Godelle : la propriété FRZ, qui est détaillée dans la sous-section 3.2. Le critère d'extension ainsi obtenu nous servira par la suite à montrer un certain nombre de résultats sur les monoïdes singuliers d'Artin.

3.1. Notations et conventions. Dans le reste de cette section et du chapitre, lorsque A_Γ désignera un groupe d'Artin associé à un graphe de Coxeter Γ , l'ensemble des sommets sera noté S . Le groupe A_Γ sera donné, sauf mention explicite du contraire, par une présentation canonique qu'on note :

$$\langle \Sigma_S | R \rangle$$

où $\Sigma_S = \{\sigma_s; s \in S\}$ est un ensemble en bijection avec S . On désignera par SA_Γ le monoïde d'Artin singulier associé à A_Γ qui est donné par la présentation :

$$\langle \Sigma_S \cup \Sigma_S^{-1} \cup T_S | R \cup R^T \rangle^+$$

où Σ_S^{-1} désigne l'ensemble $\{\sigma_s^{-1}; s \in S\}$, $T_S = \{\tau_s, s \in S\}$ désigne l'ensemble des singularités et R^T l'ensemble des relations les faisant intervenir.

Pour tout $X \subseteq S$, R_X désignera le sous-ensemble des relations de R ne faisant intervenir que les éléments de Σ_X , T_X le sous-ensemble de singularité de T_S correspondant à X i.e. $T_X = \{\tau_s; s \in X\}$ et R_X^T le sous-ensemble des relations de R^T ne faisant intervenir que les éléments de $X \cup T_X$.

Pour tout $X \subseteq S$, on notera :

- $A_X \simeq A_{\Gamma_X}$ le sous-groupe parabolique standard de A engendré par X ;
- SA_X le sous-monoïde de SA_Γ engendré par $X \cup X^{-1} \cup T_X$;
- SA_{Γ_X} le monoïde singulier d'Artin associé à A_{Γ_X} , autrement dit le monoïde de présentation $\langle X \cup X^{-1} \cup T_X | R_X \cup R_X^T \rangle$.

À partir de la partie 5.2, lorsqu'on utilisera l'expression "groupe d'Artin de type Γ ", il faudra comprendre "groupe d'Artin donc le graphe de Coxeter associé est le graphe de Coxeter Γ ". Pour finir l'expression "sous-groupe parabolique standard" sera abrégée en "sous-groupe parabolique".

3.2. La propriété FRZ.

Proposition 2.23 (Paris, Godelle [41, Prop. 4.1]). Soit A_Γ un groupe d'Artin de type FC. Soient $a \in SA_\Gamma$ et $s, s' \in S$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $a\tau_s = \tau_{s'}a$,
- (2) il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $a\tau_s^k = \tau_{s'}^k a$,
- (3) $a\sigma_s = \sigma_{s'}a$,
- (4) il existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $a\sigma_s^k = \sigma_{s'}^k a$.

Définition 2.24. On dit d'un groupe d'Artin A_Γ qu'il a la propriété FRZ si pour tous $a \in SA_\Gamma$ et tous $s, s' \in S$ les quatre propriétés énoncées dans la proposition 2.23 sont équivalentes. Le sigle FRZ est l'acronyme de Fenn, Rolfsen et Zhu, qui dans [21] ont justement démontré ce résultat dans le cas de $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{SB}_n$.

La proposition 2.23 peut donc être reformulé en disant que les groupes d'Artin de type FC ont la propriété FRZ.

On dispose de plus d'un résultat sur la compatibilité de la propriété FRZ et du produit cartésien que l'on détaille dans la proposition suivante.

Proposition 2.25. Soient A_Γ et $A_{\Gamma'}$ deux groupes d'Artin. On suppose que A_Γ et $A_{\Gamma'}$ ont tous deux la propriété FRZ. Alors $A_\Gamma \times A_{\Gamma'}$ a également la propriété FRZ.

DÉMONSTRATION. Notons S' l'ensemble des sommets de Γ' , $\Sigma_{S'} = \{\sigma_{s'}, s' \in S'\}$ l'ensemble des générateurs de $A_{\Gamma'}$ et $T_{S'} = \{\tau_{s'}, s' \in S'\}$ les singularités correspondantes. Soit $m = m_\Gamma m_{\Gamma'} \in SA_\Gamma \times SA_{\Gamma'} = S(A_\Gamma \times A_{\Gamma'})$ où $m_\Gamma \in SA_\Gamma$, $m_{\Gamma'} \in SA_{\Gamma'}$, et $i, j \in S \cup S'$ tels que

$$m\tau_i = \tau_j m.$$

On suppose ici que $\tau_j \in SA_{\Gamma'}$, on a alors la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} m\tau_i &= \tau_j m \\ \Leftrightarrow m_\Gamma m_{\Gamma'} \tau_i &= \tau_j m_\Gamma m_{\Gamma'} \\ \Leftrightarrow m_\Gamma m_{\Gamma'} \tau_i &= m_\Gamma \tau_j m_{\Gamma'} \\ \Leftrightarrow m_{\Gamma'} \tau_i &= \tau_j m_{\Gamma'}. \end{aligned}$$

La dernière équivalence vient du fait que $S(A_\Gamma \times A_{\Gamma'})$ est simplifiable par la remarque B.35 (ou encore par la proposition B.36) de l'annexe B. Les résultats de l'annexe B permettent également de montrer que $\tau_i \in SA_{\Gamma'}$. En effet par le corollaire B.32, $SA_{\Gamma'}$ se plonge dans son groupe enveloppant $GSA_{\Gamma'}$, on a donc dans $GSA_{\Gamma'}$:

$$\tau_i = m_{\Gamma'}^{-1} \tau_j m_{\Gamma'} \in GSA_{\Gamma'}.$$

Comme $SA_{\Gamma'}$ possède FRZ on a donc la série d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow m_{\Gamma'} \sigma_i &= \sigma_j m_{\Gamma'} \\ \Leftrightarrow m_\Gamma m_{\Gamma'} \sigma_i &= m_\Gamma \sigma_j m_{\Gamma'} \\ \Leftrightarrow m_\Gamma m_{\Gamma'} \sigma_i &= \sigma_j m_\Gamma m_{\Gamma'} \\ \Leftrightarrow m \sigma_i &= \sigma_j m. \end{aligned}$$

Le cas $\tau_j \in SA_\Gamma$ se démontre pareillement mais en faisant passer $m_{\Gamma'}$ à gauche et en simplifiant par celui-ci.

La démonstration des autres équivalences peuvent se faire en utilisant un raisonnement similaire. $\square$

La démonstration du théorème 2.28 qui est le théorème central de cette section nécessite tout d'abord d'établir un certain nombre de lemmes en lien avec la propriété FRZ, lemmes qui constituent le reste de cette sous-section.

Lemme 2.26. Pour tous $\alpha, \alpha' \in A_\Gamma$ et pour tous $s, s' \in S$:

- 1) si $\alpha\tau_s\alpha^{-1} = \alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1}$, alors $\alpha\sigma_s\alpha^{-1} = \alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}$,
- 2) si $(\alpha\tau_s\alpha^{-1})(\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1}) = (\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1})(\alpha\tau_s\alpha^{-1})$,
alors $(\alpha\sigma_s\alpha^{-1})(\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}) = (\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1})(\alpha\sigma_s\alpha^{-1})$.

Si on suppose que A_Γ possède la propriété FRZ alors les implications ci-dessus sont des équivalences et on dispose en plus de l'équivalence suivante :

- a) il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha\sigma_s^l\alpha^{-1} = \alpha'\sigma_{s'}^l\alpha'^{-1}$,
- b) $\alpha\sigma_s\alpha^{-1} = \alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}$.

DÉMONSTRATION. On vérifie en utilisant les présentations de A_Γ et SA_Γ que le morphisme de monoïdes $r : SA_\Gamma \rightarrow A_\Gamma$ défini par $r(\sigma_s) = \sigma_s$ et $r(\tau_s) = \sigma_s$ pour tout sommet s de Γ est bien défini. Les implications 1 et 2 peuvent alors tout simplement être reformulées en :

- 1) si $\alpha\tau_s\alpha^{-1} = \alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1}$, alors $r(\alpha\tau_s\alpha^{-1}) = r(\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1})$,
- 2) si $(\alpha\tau_s\alpha^{-1})(\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1}) = (\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1})(\alpha\tau_s\alpha^{-1})$,
alors $r\left((\alpha\tau_s\alpha^{-1})(\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1})\right) = r\left((\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1})(\alpha\tau_s\alpha^{-1})\right)$.

Dans le cas où A_Γ a la propriété FRZ, on a les séries d'équivalences suivantes :

(1)

$$\begin{aligned} & \alpha\sigma_s\alpha^{-1} = \alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1} \\ \Leftrightarrow & \sigma_s(\alpha^{-1}\alpha') = (\alpha^{-1}\alpha')\sigma_{s'} \\ \Leftrightarrow & \tau_s(\alpha^{-1}\alpha') = (\alpha^{-1}\alpha')\tau_{s'} \\ \Leftrightarrow & \alpha\tau_s\alpha^{-1} = \alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (\alpha\sigma_s\alpha^{-1})(\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}) = (\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1})(\alpha\sigma_s\alpha^{-1}) \\ \Leftrightarrow & \sigma_s(\alpha^{-1}\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}\alpha) = (\alpha^{-1}\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}\alpha)\sigma_s \\ \Leftrightarrow & \tau_s(\alpha^{-1}\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}\alpha) = (\alpha^{-1}\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}\alpha)\tau_s \\ \Leftrightarrow & (\alpha\tau_s\alpha^{-1})(\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1}) = (\alpha'\sigma_{s'}\alpha'^{-1})(\alpha\tau_s\alpha^{-1}) \\ \Leftrightarrow & (\alpha'^{-1}\alpha\tau_s\alpha^{-1}\alpha')\sigma_{s'} = \sigma_{s'}(\alpha'^{-1}\alpha\tau_s\alpha^{-1}\alpha') \\ \Leftrightarrow & (\alpha'^{-1}\alpha\tau_s\alpha^{-1}\alpha')\tau_{s'} = \tau_{s'}(\alpha'^{-1}\alpha\tau_s\alpha^{-1}\alpha') \\ \Leftrightarrow & (\alpha\tau_s\alpha^{-1})(\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1}) = (\alpha'\tau_{s'}\alpha'^{-1})(\alpha\tau_s\alpha^{-1}). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
& \alpha \sigma_s^l \alpha^{-1} = \alpha' \sigma_{s'}^l \alpha'^{-1} \\
\Leftrightarrow & \sigma_s^l (\alpha^{-1} \alpha') = (\alpha^{-1} \alpha') \sigma_{s'}^l \\
\Leftrightarrow & \sigma_s (\alpha^{-1} \alpha') = (\alpha^{-1} \alpha') \sigma_{s'} \\
\Leftrightarrow & \alpha \sigma_s \alpha^{-1} = \alpha' \sigma_{s'} \alpha'^{-1},
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.27. Soit $\mathcal{M}_\Gamma$ le monoïde d'Artin angle droit associé à SA_Γ tel que défini dans la proposition 2.12. On note $\hat{\mathcal{M}}_\Gamma$ le monoïde de présentation suivante.

- Générateurs : $\hat{\Upsilon}_\Gamma = \{\beta \sigma_s \beta^{-1}, s \in S \text{ et } \beta \in A_\Gamma\}$,
- Relations : Pour tous $u, v \in \hat{\Upsilon}_\Gamma$, $uv = vu$ si $uv = vu$ dans A_Γ .

Alors le morphisme de monoïdes Φ de $\mathcal{M}_\Gamma$ dans $\hat{\mathcal{M}}_\Gamma$ définie par :

$$\Pi_\Gamma(\alpha \tau_s \alpha^{-1}) = \alpha \sigma_s \alpha^{-1}$$

est bien défini. De plus si A_Γ possède la propriété FRZ, alors c'est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. L'implication 1 du lemme précédent revient à dire que Π_Γ est bien défini sur l'ensemble Υ_Γ et donc sur le monoïde libre engendré par cet ensemble. L'implication 2, quant à elle, revient à dire que Φ préserve les relations définissant $\mathcal{M}_\Gamma$ et est donc bien défini.

Enfin si A_Γ possède la propriété FRZ, les implications du lemme 2.26 étant des équivalences on peut définir similairement une application réciproque de $\hat{\mathcal{M}}_\Gamma$ dans $\mathcal{M}_\Gamma$. □

3.3. Le critère d'extension. Les monoïdes singuliers d'Artin pouvant être vu comme des extensions des groupes d'Artin, on peut naturellement se demander si, à un homomorphisme entre groupes d'Artin donné, il est possible d'étendre cet homomorphisme aux monoïdes singuliers qui leur sont associés. Il n'existe pour l'instant aucune manière de trancher la question dans le cadre général mais le théorème 2.28 qui suit constitue une première tentative de répondre à cette question. Il est important de souligner dès à présent que les démonstrations de nombreux résultats qui suivront dans cette section s'appuieront de manière conséquente sur le théorème 2.28. Celui-ci constitue donc un résultat majeur de cette thèse.

Théorème 2.28. Soient Γ et Γ' deux graphes de Coxeter dont on note l'ensemble des sommets respectivement S et S' . Soient A_Γ et $A_{\Gamma'}$ les groupe d'Artin associés dont on note l'ensemble générateurs respectivement $\Sigma_S = \{\sigma_s; s \in S\}$ et $\Sigma_{S'} = \{\sigma_{s'}; s' \in S'\}$. On suppose de plus que $A_{\Gamma'}$ possède la propriété FRZ.

Soit φ un morphisme de groupes de A_Γ dans $A_{\Gamma'}$. On suppose que pour tout $s \in S$, il existe $g_s \in A_{\Gamma'}$, $k_s \in \mathbb{N}^*$ et $i(s) \in S'$ tel que $\varphi(\sigma_s) = g_s \sigma_{i(s)}^{k_s} g_s^{-1}$.

Alors pour toute famille d'entiers non-nuls $L = (l_s)_{s \in S}$ le morphisme φ peut être étendu en un morphisme de monoïdes $\Phi[(l_s)_{s \in S}]$ entre SA_Γ et $SA_{\Gamma'}$ en posant pour tout $s \in S$:

$$\Phi[(l_s)_{s \in S}](\tau_s) = g_s \tau_{i(s)}^{l_s} g_s^{-1}.$$

De plus $\Phi[(l_s)_{s \in S}]$ est injectif si et seulement si φ est injectif et A_Γ a aussi la propriété FRZ.

DÉMONSTRATION. On commence par traiter le cas où pour tout $s \in S$, $l_s = 1$ et on notera pour des raisons de simplicité Φ au lieu de $\Phi[(1)_{s \in S}]$.

Remarquons que φ induit naturellement un morphisme de monoïdes $\Pi_{\Gamma, \Gamma'}$ entre $\hat{\mathcal{M}}_\Gamma$ et $\hat{\mathcal{M}}_{\Gamma'}$ défini par $\Pi_{\Gamma, \Gamma'}(g\sigma_s g^{-1}) = \varphi(g\sigma_s g^{-1})$, et si Π_Γ et $\Pi_{\Gamma'}$ sont les morphismes tels que définis dans le lemme 2.27, alors en utilisant les décompositions en produit semi-direct $SA_\Gamma = \mathcal{M}_\Gamma \rtimes A_\Gamma$ et $SA_{\Gamma'} = \mathcal{M}_{\Gamma'} \rtimes A_{\Gamma'}$ on peut poser

$$\Phi = (\phi, \varphi)$$

où

$$\phi = \Pi_\Gamma \circ \Pi_{\Gamma, \Gamma'} \circ \Pi_{\Gamma'}^{-1}$$

avec $\Pi_{\Gamma'}$ inversible car $A_{\Gamma'}$ a la propriété FRZ.

Si φ est injectif alors il est aisé de vérifier que $\Pi_{\Gamma, \Gamma'}$ est également injectif, et si A possède la propriété FRZ alors Π_Γ est un isomorphisme d'où $\phi = \Pi_\Gamma \circ \Pi_{\Gamma, \Gamma'} \circ \Pi_{\Gamma'}^{-1}$ est injectif comme composée de morphisme injectifs.

Réciproquement si Φ est injectif alors φ est injectif car c'est la restriction de Φ à A_Γ . Il reste donc à montrer que A_Γ possède FRZ. Soient donc $m \in SA_\Gamma$ et $s, t \in S$. Comme Φ est injectif et $A_{\Gamma'}$ a la propriété FRZ, on a la série d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & \tau_s m &= & m \tau_t \\ \Leftrightarrow & \Phi(\tau_s m) &= & \Phi(m \tau_t) \\ \Leftrightarrow & \Phi(\tau_s) \Phi(m) &= & \Phi(m) \Phi(\tau_t) \\ \Leftrightarrow & g_s \tau_{i(s)} g_s^{-1} \Phi(m) &= & \Phi(m) g_t \tau_{i(t)} g_t^{-1} \\ \Leftrightarrow & \tau_{i(s)} g_s^{-1} \Phi(m) g_t &= & g_s^{-1} \Phi(m) g_t \tau_{i(t)} \\ \Leftrightarrow & \sigma_{i(s)} g_s^{-1} \Phi(m) g_t &= & g_s^{-1} \Phi(m) g_t \sigma_{i(t)} \\ \Leftrightarrow & \sigma_{i(s)}^{k_s} g_s^{-1} \Phi(m) g_t &= & g_s^{-1} \Phi(m) g_t \sigma_{i(t)}^{k_t} \\ \Leftrightarrow & g_s \sigma_{i(s)}^{k_s} g_s^{-1} \Phi(m) &= & \Phi(m) g_t \sigma_{i(t)}^{k_t} g_t^{-1} \\ \Leftrightarrow & \Phi(\sigma_s) \Phi(m) &= & \Phi(m) \Phi(\sigma_t) \\ \Leftrightarrow & \Phi(\sigma_s m) &= & \Phi(m \sigma_t) \\ \Leftrightarrow & \sigma_s m &= & m \sigma_t. \end{aligned}$$

On montre par le même procédé que les autres équivalences définissant la propriété FRZ sont valables dans A_Γ et que donc A_Γ possède la propriété FRZ. D'où l'équivalence.

Pour finir, dans le cas général il suffit de remarquer que

$$\Phi[(l_s)_{s \in S}] = (\phi \circ \Psi_{\Upsilon_\Gamma, L}, \varphi)$$

où l'application $\Psi_{\Upsilon_\Gamma, L}$ est l'endomorphisme de la proposition 2.22 dans le cas où Υ_Γ est l'ensemble des générateurs de $\mathcal{M}_\Gamma$ défini à la proposition 2.12, et que le morphisme $\Psi_{\Upsilon_\Gamma, L}$ est injectif par la proposition 2.22. $\square$

4. Sur les sous-monoïdes paraboliques standards de SA_Γ

Remarque 2.29. Dans la démonstration de la proposition 2.28, on suppose que le groupe d'Artin d'arrivé du morphisme possède la propriété FRZ. Ceci est nécessaire à la bonne définition du morphisme dans le cas général mais dans le cas où le groupe de départ est

un sous-groupe parabolique A_X du groupe d'arrivée A_Γ et le morphisme considéré est le morphisme d'inclusion ι de A_X dans A_Γ , l'extension $I[(1)_{s \in X}]$ est toujours bien défini du fait que les relations définissant le monoïde de départ sont incluses dans celles définissant le monoïde d'arrivée. On a alors juste besoin que A_X ait la propriété FRZ pour avoir $SA_{\Gamma_X} \subseteq SA_\Gamma$. Ceci a pour conséquence le théorème suivant ainsi que ceux d'après, qui en découlent :

Théorème 2.30. Soit A_Γ un groupe d'Artin et $X \subseteq S$. Si A_{Γ_X} a la propriété FRZ alors $SA_{\Gamma_X} \simeq SA_X$.

Ceci permet de généraliser partiellement le théorème 2.6 aux monoïdes singuliers d'Artin :

Théorème 2.31. Soit A_Γ un groupe d'Artin de type FC .

- Si $X \subseteq S$, alors $SA_X \simeq SA_{\Gamma_X}$ et
- si $Y \subseteq S$ aussi, alors $SA_X \cap SA_Y = SA_{X \cap Y}$.

DÉMONSTRATION. Le premier résultat est un corollaire immédiat du théorème précédent puisque tout sous-groupe d'un groupe de type FC est de type FC et que les groupes de type FC possèdent la propriété FRZ. Il reste à montrer le second. D'abord il est clair que $SA_{X \cap Y} \subseteq SA_X \cap SA_Y$ par définition des monoïdes et le premier point. Soit alors $h \in SA_X \cap SA_Y$, comme $SA_X \simeq SA_{\Gamma_X} = \mathcal{M}_{\Gamma_X} \rtimes A_{\Gamma_X}$ et $SA_Y \simeq SA_{\Gamma_Y} = \mathcal{M}_{\Gamma_Y} \rtimes A_{\Gamma_Y}$, on peut décomposer h sous les formes $h = m_X a_X$ où $m_X \in \mathcal{M}_{\Gamma_X}$, $a_X \in A_{\Gamma_X}$ et $h = m_Y a_Y$ où $m_Y \in \mathcal{M}_{\Gamma_Y}$, $a_Y \in A_{\Gamma_Y}$ et si $h = m_\Gamma a_\Gamma$ est la décomposition de h dans $SA_\Gamma = \mathcal{M}_\Gamma \rtimes A_\Gamma$ alors par unicité de ces décompositions il vient :

$$\begin{cases} m_{\Gamma_X} = m_{\Gamma_Y} = m_\Gamma; \\ a_{\Gamma_X} = a_{\Gamma_Y} = a_\Gamma. \end{cases}$$

Donc $m_\Gamma \in \mathcal{M}_X \cap \mathcal{M}_Y$ et $a_\Gamma \in A_X \cap A_Y$, or par le théorème 2.6, $A_X \cap A_Y = A_{X \cap Y}$ et par la proposition 2.15, $\mathcal{M}_X \cap \mathcal{M}_Y = \mathcal{M}_{X \cap Y}$ d'où

$$h = m_\Gamma a_\Gamma \in \mathcal{M}_{X \cap Y} \rtimes A_{X \cap Y} = SA_{\Gamma_{X \cap Y}} \simeq SA_{X \cap Y}$$

et donc $SA_X \cap SA_Y \subseteq SA_{X \cap Y}$. □

Le théorème 2.31 avait déjà été démontré dans [1] mais on peut dorénavant ajouter à ce résultat un autre.

Théorème 2.32. Soit A_Γ un groupe d'Artin de type affine. Si $X \subseteq S$ alors

$$SA_X \simeq SA_{\Gamma_X}.$$

DÉMONSTRATION. Il y a deux cas possibles : soit $X = S$ auquel cas l'assertion $SA_{\Gamma_X} \simeq SA_\Gamma$ est triviale, soit $X \subsetneq S$ auquel cas A_{Γ_X} est un groupe d'Artin de type sphérique et rentre donc dans le cadre d'application du théorème 2.30. □

5. Sur la conjecture de Birman pour les groupes d'Artin

5.1. Sur le noyau des morphismes de désingularisation. On peut, comme dans le cas des monoïdes de tresses singulières, définir un morphisme de désingularisation de SA_Γ dans $\mathbb{Z}[A_\Gamma]$, qu'on note δ_Γ et qui est défini par

$$\delta_\Gamma(\sigma_s^{\pm 1}) = \sigma_s^{\pm 1} \text{ et } \delta_\Gamma(\tau_s) = \sigma_s - \sigma_s^{-1}.$$

On rappelle que pour un morphisme de monoïdes, contrairement aux morphismes de groupes, avoir un noyau réduit au neutre est une condition nécessaire mais non suffisante pour être injectif. Par conséquent, la proposition qui suit ne fournit qu'une réponse partielle à la question de l'injectivité de δ_Γ . Elle s'inspire fortement du cas de $\mathcal{B}_n$ traité dans [21].

Proposition 2.33. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et soit e le neutre de SA_Γ et A_Γ , alors :

$$\delta_\Gamma^{-1}(k.e) = \begin{cases} e & \text{si } k = 1, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Afin de prouver ce résultat, on définit d'abord une notion de degré sur les éléments de SA_Γ .

Définition 2.34. Soit $\deg$ le morphisme de monoïdes de SA_Γ dans $(\mathbb{Z}, +)$ qui envoie chaque $\sigma_s^{\pm 1}$ sur ± 1 et τ_s sur 0. L'image d'un élément de SA_Γ par $\deg$ est appelé *degré* de cet élément.

Rappelons que le nombre de générateurs singuliers utilisés pour écrire un élément de SA_Γ ne dépend pas de l'écriture choisie et que l'on peut définir sans ambiguïté le sous-ensemble $SA_\Gamma^{(d)}$ de SA_Γ constitué des éléments ayant d singularités.

Lemme 2.35. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $m \in SA_\Gamma^{(d)}$. On note $s = \deg(m)$, alors :

- 1) $\delta(m) = \sum_{i=1}^{2^d} a_i \alpha_i$ où $a_i \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_i \in A_\Gamma$,
- 2) il existe des uniques k, l tels que $\deg(\alpha_k) = s - d$ and $\deg(\alpha_l) = s + d$,
- 3) pour tout $i \neq k, l$, on a $s - d < \deg(\alpha_i) < s + d$.

DÉMONSTRATION. Dans la suite on suppose que Γ a n sommets et donc que SA_Γ a n générateurs classiques $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ et n générateurs singuliers $\tau_1, \dots, \tau_n$.

On démontre la proposition par récurrence sur d . Si $m \in SA_\Gamma^{(0)} = A_\Gamma$ alors $\delta_\Gamma(m) = m$ et le résultat est trivial.

On suppose le résultat vrai pour tout élément $m \in SA_\Gamma^{(d)}$. Soit alors $m \in SA_\Gamma^{(d+1)}$. Soit $m = x_1 \dots x_p$ pour quelque $p \in \mathbb{N}$ où les x_i sont des générateurs de SA_Γ et soit j tel que $x_j = \tau_i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x_k \notin \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ for $k > j$. Alors $m' = x_1 \dots x_{j-1}$ possède exactement d singularités et par hypothèse de récurrence $\delta_\Gamma(m')$ peut s'écrire $a'_1 \alpha'_1 + \dots + a'_{2^d} \alpha'_{2^d}$ où les éléments α'_{min} , α'_{max} de degré minimum et maximum ont respectivement comme degré $s' - d$ and $s' + d$ avec $s' = \deg(m) - \deg(x_j \dots x_p)$ et tous les autres éléments de la somme ont un degré strictement compris entre $s' - d$ et $s' + d$. Il s'en

suit que

$$\delta_\Gamma(m'x_j) = \delta_\Gamma(m'\tau_i) = \sum_{i=1}^{2^d} a'_i \alpha'_i \sigma_i - \sum_{i=1}^{2^d} a'_i \alpha'_i \sigma_i^{-1},$$

et que $\delta_\Gamma(m'x_j)$ est une somme de 2^{d+1} termes, dont chacun d'entre eux est de degré strictement compris entre $s' - d - 1$ et $s' + d + 1$ exception faite de $\alpha'_{min} \sigma_i^{-1}$, $\alpha'_{max} \sigma_i$ qui ont respectivement comme degré $s' - d - 1$ et $s' + d + 1$. Finalement, il en résulte que $\delta_\Gamma(m) = \delta_\Gamma(m'x_j)x_{j+1} \dots x_p$ est une somme de 2^{d+1} éléments dont chacun d'entre eux est de degré strictement compris entre

$$s' - (d + 1) + \deg(x_{j+1} \dots x_p) = s - (d + 1)$$

et

$$s' + (d + 1) + \deg(x_{j+1} \dots x_p) = s + (d + 1)$$

exception faite de $\alpha'_{min} \sigma_i^{-1} x_{j+1} \dots x_m$, $\alpha'_{max} \sigma_i x_{j+1} \dots x_p$ qui ont respectivement comme degré $s - (d + 1)$ et $s + (d + 1)$. $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.33. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et soit $m \in SA_\Gamma$ tel que $\delta_\Gamma(m) = k.e$. Si s et d sont respectivement le nombre de singularités et le degré de m , alors par le lemme 2.35 on a nécessairement $s + d = s - d = 0$, ce qui implique que $d = 0$, c'est-à-dire que m n'a pas de singularité et par conséquent que $m = \delta_\Gamma(m) = k.e$. Puisque $A_\Gamma \cap \mathbb{Z} = \{1.e\}$, si $k \neq 1$ il en résulte une contradiction et si $k = 1$ alors $\beta = e$. D'où le résultat. $\square$

5.2. Conjecture de Birman et cas déjà prouvés. Rappelons que les groupes d'Artin de type A correspondent aux groupes de tresses classiques. L'exactitude de la conjecture de Birman est donc vérifiée pour ces groupes-ci, comme il en a déjà été fait mention au chapitre 1. On dispose en plus de ce résultat de plusieurs résultats sur cette problématique pour d'autres groupes d'Artin comme l'attestent les résultats suivants.

Théorème 2.36 (Paris, Godelle [41]). Les groupes d'Artin angle droit vérifient la conjecture de Birman.

Théorème 2.37 (East [19]). Les groupes d'Artin de type I_n vérifient la conjecture de Birman.

Aux trois résultats déjà connus, nous allons ajouter un quatrième sur les groupes d'Artin de type $\tilde{A}$.

On rappelle que, à un entier $n \geq 2$ fixé, le groupe d'Artin de type $\tilde{A}_n$ est le groupe d'Artin de présentation suivante, où les indices sont considérés modulo $n + 1$.

- Générateurs : $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_n$,
- Relations :
 - $\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_j \tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_j \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_j$, pour tous $i, j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ avec $|i - j| = 1$;
 - $\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_j = \tilde{\alpha}_j \tilde{\alpha}_i$, pour tous $i, j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ avec $|i - j| \geq 2$.

Théorème 2.38. Les groupes d'Artin de type $\tilde{A}$ vérifient la conjecture de Birman.

La démonstration de ce dernier résultat nécessite préalablement deux résultats connus sur les groupes d'Artin de type B . On rappelle que le groupe d'Artin A_{B_n} est donné par la présentation suivante.

- Générateurs : $\beta_1, \dots, \beta_n$,
- Relations :
 - $\beta_i \beta_j \beta_i = \beta_j \beta_i \beta_j$, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ avec $|i-j| = 1$;
 - $\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ avec $|i-j| \geq 2$;
 - $\beta_{n-1} \beta_n \beta_{n-1} \beta_n = \beta_n \beta_{n-1} \beta_n \beta_{n-1}$.

Théorème 2.39 (Kent, Peifer [32]). On se place dans le groupe d'Artin A_{B_n} .

On pose :

- $\tau = \beta_n \dots \beta_1$,
- $\hat{\alpha}_i = \beta_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$,
- $\hat{\alpha}_0 = \tau \beta_1 \tau^{-1}$.

Alors :

- pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\tau \hat{\alpha}_i \tau^{-1} = \hat{\alpha}_{i-1}$ où les indices sont définis modulo n ,
- $A_{B_n} = \langle \hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_{n-1} \rangle \rtimes \langle \tau \rangle$,
- $\langle \hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_{n-1} \rangle \simeq A_{\tilde{A}_{n-1}}$

et l'isomorphisme est réalisé par l'homomorphisme qui envoie $\hat{\alpha}_i$ sur $\tilde{\alpha}_i$.

Théorème 2.40 (Kent, Peifer [32]). Notons respectivement $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ les générateurs de A_{A_n} et A_{B_n} conformément aux diagrammes présentés en figure 1.

Il existe un morphisme de groupes $\phi : A_{B_n} \rightarrow A_{A_n}$ défini par :

$$\Phi(\beta_i) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{si } 1 \leq i \leq n-1, \\ \alpha_n^2 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

De plus ce morphisme est injectif.

Le premier des deux théorèmes montre que le groupe d'Artin de type $\tilde{A}_{n-1}$ peut être vu comme un sous-groupe (non parabolique) du groupe d'Artin de type B_n et le deuxième que le groupe d'Artin de type B_n peut être vu comme un sous-groupe (non parabolique) du groupe d'Artin de type A_n . Il en résulte qu'on peut réaliser le groupe d'Artin de type $\tilde{A}_{n-1}$ comme un sous-groupe (non parabolique) du groupe d'Artin de type A_n . Dans la suite nous allons étendre ce résultat dans le cadre singulier mais nous allons avoir besoin de quelques résultats préalables.

On rappelle que la présentation du monoïde singulier SA_{B_n} est obtenue à partir de celle de A_{B_n} en ajoutant les générateurs singuliers $b_1, \dots, b_n$ ainsi que les relations suivantes :

- $b_i \beta_{i+1} \beta_i = \beta_{i+1} \beta_i b_{i+1}$ pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$;
- $b_{i+1} \beta_i \beta_{i+1} = \beta_i \beta_{i+1} b_i$ pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$;
- $b_{n-1} \beta_n \beta_{n-1} \beta_n = \beta_n \beta_{n-1} \beta_n b_{n-1}$;
- $b_n \beta_{n-1} \beta_n \beta_{n-1} = \beta_{n-1} \beta_n \beta_{n-1} b_n$;
- $\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$ si $|i-j| > 1$;
- $b_i \beta_j = \beta_j b_i$ si $|i-j| > 1$;
- $b_i \beta_i = \beta_i b_i$ si $|i-j| > 1$;

— $b_i b_j = b_j b_i$ si $|i - j| > 1$.

Lemme 2.41. Soit M le sous-monoïde de SA_{B_n} engendré par $\beta_1, \dots, \beta_n, b_1, \dots, b_{n-1}$ et soit N le monoïde dont la présentation est obtenue à partir de celle de SA_{B_n} en ôtant le générateur b_n et les relations le faisant intervenir. Alors les deux monoïdes M et N sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. On considère le morphisme naturel de N dans SA_{B_n} . Celui-ci a par définition pour image le sous-monoïde M , donc est surjectif dans M , et possède une rétraction $r : SA_{B_n} \rightarrow N$ donnée par

$$\begin{aligned} r(\beta_i) &= \beta_i \text{ pour } i = 1, \dots, n; \\ r(b_i) &= b_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1; \\ r(b_n) &= 1 \end{aligned}$$

et donc est également injectif. D'où le résultat. $\square$

On rappelle que la présentation du monoïde singulier $SA_{\tilde{A}_{n-1}}$ est obtenue à partir de celle de $A_{\tilde{A}_{n-1}}$ en ajoutant les générateurs singuliers $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{n-1}$ ainsi que les relations suivantes, où les indices sont toujours considérés modulo n :

- $\tilde{a}_i \tilde{a}_j \tilde{a}_i = \tilde{a}_j \tilde{a}_i \tilde{a}_j$, pour tous $i, j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ avec $|i - j| = 1$;
- $\tilde{a}_i \tilde{a}_j = \tilde{a}_j \tilde{a}_i$, pour tous $i, j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ avec $|i - j| \geq 2$;
- $\tilde{a}_i \tilde{a}_j = \tilde{a}_j \tilde{a}_i$, pour tous $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

On énonce maintenant une extension singulière du théorème 2.39.

Lemme 2.42. Soit M le sous-monoïde de SA_{B_n} engendré par $\beta_1, \dots, \beta_n, b_1, \dots, b_{n-1}$. On pose :

- $\hat{a}_i = b_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$,
- $\hat{a}_0 = \tau b_1 \tau^{-1}$.

Alors :

- pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\tau \hat{a}_i \tau^{-1} = \hat{a}_{i-1}$ où les indices sont définis modulo n ,
- $M = \langle \hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1} \rangle^+ \rtimes \langle \tau \rangle$,
- $\langle \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1} \rangle^+ \simeq SA_{\tilde{A}_{n-1}}$ où l'isomorphisme est donné par le morphisme qui envoie $\hat{\alpha}_i$ sur $\tilde{\alpha}_i$ et $\hat{a}_i$ sur $\tilde{a}_i$.

DÉMONSTRATION. Soit N le monoïde défini dans le lemme 2.41. Le premier point découle du fait que A_{B_n} a la propriété FRZ. Les deux autres points découlent du fait que le morphisme $\varphi_1 : N \rightarrow SA_{\tilde{A}_{n-1}} \rtimes \langle \tau \rangle$ défini par

$$\begin{aligned} \varphi_1(\beta_i) &= \tilde{\alpha}_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_1(b_i) &= \tilde{a}_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_1(\beta_n) &= \tau \beta_1^{-1} \dots \beta_{n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

et le morphisme $\varphi_2 : SA_{\tilde{A}_{n-1}} \rtimes \langle \tau \rangle \rightarrow N$ défini par

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\tilde{\alpha}_i) &= \beta_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\
\varphi_2(\tilde{a}_i) &= b_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\
\varphi_2(\tau) &= \beta_n \dots \beta_1, \\
\varphi_2(\tilde{\alpha}_0) &= \tau \beta_1 \tau^{-1}, \\
\varphi_2(\tilde{a}_0) &= \tau b_1 \tau^{-1}.
\end{aligned}$$

sont bien définis et réciproques l'un de l'autre. $\square$

On peut donc réaliser $SA_{\tilde{A}_{n-1}}$ comme sous-monoïde de SA_{B_n} et en le combinant avec le résultat qui suit, qui est une conséquence de la proposition 2.28, on peut démontrer le théorème 2.38.

Proposition 2.43. Le morphisme de groupes $\phi : A_{B_n} \rightarrow A_{A_n}$ défini dans le théorème 2.40 peut être étendu en un morphisme injectifs de monoïdes $\Phi : SA_{B_n} \rightarrow SA_{A_n}$ en posant

$$\Phi(b_i) = \begin{cases} a_i, & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ a_n^2 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

En identifiant le monoïde $SA_{\tilde{A}_{n-1}}$ avec le sous-monoïde de SA_{B_n} qui est engendré par $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_{n-1}, \tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{n-1}$, on peut voir la restriction de Φ à ce sous-monoïde comme un morphisme injectif de monoïdes entre $SA_{\tilde{A}_{n-1}}$ et SA_{A_n} .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.38. Le théorème est une conséquence directe du fait que $\delta_{\tilde{A}_{n-1}} = \delta_{A_n} \circ \Phi|_{SA_{\tilde{A}_{n-1}}}$ donc est injectif comme composé de morphismes injectifs. $\square$

De plus, on vérifie que :

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{\alpha}_i) &= \alpha_i \text{ pour tout } i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \\
\Phi(\tilde{\alpha}_0) &= \Phi(\tau) \alpha_1 \Phi(\tau)^{-1}, \\
\Phi(\tilde{a}_i) &= a_i \text{ pour tout } i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \\
\Phi(\tilde{a}_0) &= \Phi(\tau) a_1 \Phi(\tau)^{-1},
\end{aligned}$$

ce qui permet en prime d'appliquer le théorème 2.28 afin d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 2.44. Pour tout $n \geq 2$ le groupe d'Artin de type $\tilde{A}_n$ a la propriété FRZ.

Pour finir, on dispose du résultat suivant sur la comportement de la conjecture de Birman vis-à-vis du produit direct de groupes d'Artin dont la démonstration est basée sur une idée de Paris.

Proposition 2.45. Soient Γ, Γ' deux graphes de Coxeter d'ensemble de sommets respectifs S et S' . Soient $A_\Gamma, A_{\Gamma'}$ les groupes d'Artin respectivement associés à Γ, Γ' et $\Sigma_S = \{\sigma_s; s \in S\}, \Sigma_{S'} = \{\sigma_{s'}; s' \in S'\}$ leurs ensembles de générateurs respectifs.

On suppose que A_Γ et $A_{\Gamma'}$ vérifient tous deux la conjecture de Birman. Alors $A_\Gamma \times A_{\Gamma'}$ vérifie également la conjecture de Birman.

Lemme 2.46. Soient U, V deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et u, u' deux vecteurs non nuls de U et v, v' deux vecteurs non nuls de V tels que $u \otimes v = u' \otimes v'$, alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$ tel que $u = \mu u'$ et $v = \mu^{-1} v'$.

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{B}_U$ et $\mathcal{B}_V$ des bases respectives de U et V alors $\mathcal{B}_U \otimes \mathcal{B}_V$ est une base de $U \otimes V$. Soient

$$u = \sum_{x \in \mathcal{B}_U} \lambda_x x, \quad u' = \sum_{x \in \mathcal{B}_U} \lambda'_x x, \quad v = \sum_{y \in \mathcal{B}_V} \mu_y y, \quad v' = \sum_{y \in \mathcal{B}_V} \mu'_y y$$

les décompositions de u, u', v, v' dans les bases $\mathcal{B}_U$ et $\mathcal{B}_V$. On a :

$$\begin{aligned} u \otimes v = v \otimes u &\iff \sum_{x,y} \lambda_x \mu_y x \otimes y = \sum_{x,y} \lambda'_x \mu'_y x \otimes y \\ &\iff \lambda_x \mu_y = \lambda'_x \mu'_y, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{B}_U \times \mathcal{B}_V. \end{aligned}$$

Comme $u, v \neq 0$ alors il existe x_0, y_0 tel que $\lambda_{x_0} \mu_{y_0} \neq 0$ et donc $\lambda'_{x_0} \mu'_{y_0} \neq 0$ et

$$\lambda_{x_0} = \underbrace{\frac{\mu'_{y_0}}{\mu_{y_0}}}_{\mu} \lambda'_{x_0}.$$

De plus pour tout x , $\lambda_x \mu_{y_0} = \lambda'_x \mu'_{y_0}$ donc $\lambda_x = \mu \lambda'_x$ d'où $u = \mu u'$.

De plus $u \otimes v = \mu u' \otimes v = u' \otimes \mu v'$ d'où :

$$u \otimes v - u' \otimes v' = u' \otimes \mu v - u' \otimes v' = u' \otimes (\mu v - v') = 0$$

or $\alpha \otimes \beta = 0 \iff \alpha = 0$ ou $\beta = 0$ et comme $u' \neq 0$ alors nécessairement $\mu v - v' = 0$ i.e. $v' = \mu^{-1} v'$. $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.45. On vérifie aisément que $\mathbb{Z}[A_\Gamma \times A_{\Gamma'}] \simeq \mathbb{Z}[A_\Gamma] \otimes \mathbb{Z}[A_{\Gamma'}]$ (resp. $\mathbb{Q}[A_\Gamma \times A_{\Gamma'}] \simeq \mathbb{Q}[A_\Gamma] \otimes \mathbb{Q}[A_{\Gamma'}]$). Donc si $a_\Gamma, b_\Gamma \in A_X$ et $a_{\Gamma'}, b_{\Gamma'} \in A_{\Gamma'}$ vérifient $\delta_{\Gamma \sqcup \Gamma'}(a_\Gamma a_{\Gamma'}) = \delta_{\Gamma \sqcup \Gamma'}(b_\Gamma b_{\Gamma'})$ i.e.

$$\delta_\Gamma(a_\Gamma) \otimes \delta_{\Gamma'}(a_{\Gamma'}) = \delta_\Gamma(b_\Gamma) \otimes \delta_{\Gamma'}(b_{\Gamma'}) \in \mathbb{Z}[A_\Gamma] \otimes \mathbb{Z}[A_{\Gamma'}] \subset \mathbb{Q}[A_\Gamma] \otimes \mathbb{Q}[A_{\Gamma'}]$$

alors il existe $\mu \in \mathbb{Q}$ tel que $\delta_\Gamma(a_\Gamma) = \mu \delta_\Gamma(b_\Gamma)$ et $\delta_{\Gamma'}(a_{\Gamma'}) = \mu^{-1} \delta_{\Gamma'}(b_{\Gamma'})$, or nécessairement μ vaut 1 par définition de δ_Γ (il suffit de regarder les coefficient de plus haut degré dans les sommes $\delta_\Gamma(a_\Gamma)$ et $\delta_\Gamma(b_\Gamma)$) et donc

$$\begin{cases} \delta_\Gamma(a_\Gamma) = \delta_\Gamma(b_\Gamma) \\ \delta_{\Gamma'}(a_{\Gamma'}) = \delta_{\Gamma'}(b_{\Gamma'}). \end{cases}$$

Enfin $A_\Gamma, A_{\Gamma'}$ vérifiant la conjecture de Birman, nécessairement $a_\Gamma = b_\Gamma$ et $a_{\Gamma'} = b_{\Gamma'}$ et au final $a_\Gamma a_{\Gamma'} = b_\Gamma b_{\Gamma'}$. $\square$

6. Sur les invariants de Vassiliev

On définit similairement au cas des tresses un invariant algébrique de A_Γ comme une application de A_Γ dans un groupe abélien H ou, de manière équivalente, un morphisme de $\mathbb{Z}$ -modules de $\mathbb{Z}[A_\Gamma]$ dans H . Tout invariant algébrique V de A_Γ peut être étendu à SA_Γ en posant pour tout $a \in SA_\Gamma$, $V(a) = V(\delta_\Gamma(a))$ et V est alors appelé invariant de Vassiliev de degré d de A_Γ si $V(SA_\Gamma^{(d)}) \neq 0$ mais $V(SA_\Gamma^{(k)}) = 0$ pour tout $k > d$. Enfin comme pour le cas des tresses on peut remarquer que, si on note $\mathcal{J}_\Gamma$ l'idéal bilatère de $\mathbb{Z}[A_\Gamma]$ engendré par les $\sigma_s - \sigma_s^{-1}$ alors un invariant $V : \mathbb{Z}[A_\Gamma] \rightarrow H$ est un invariant de Vassiliev de degré d si et seulement si $V(\mathcal{J}_\Gamma^d) \neq 0$ mais $V(\mathcal{J}_\Gamma^{d+1}) = 0$.

Soit Γ' un second graphe de Coxeter dont on note l'ensemble des sommets S' et $A_{\Gamma'}$ le groupe d'Artin associé dont on note l'ensemble générateurs $\Sigma_{S'} = \{\sigma_{s'}; s' \in S'\}$. On note $\mathcal{V}\mathcal{I}_\Gamma^{(d)}$ (resp. $\mathcal{V}\mathcal{I}_{\Gamma'}^{(d)}$) les invariants de Vassiliev de degré au plus d de A_Γ (resp. de $A_{\Gamma'}$) i.e. les morphismes de $\mathbb{Z}[A_\Gamma]$ dans un groupe abélien qui sont identiquement nuls sur $\mathcal{J}_\Gamma^{d+1}$ (resp. sur $\mathcal{J}_{\Gamma'}^{d+1}$).

On dispose du résultat suivant.

Proposition 2.47. Soit A_Γ et $A_{\Gamma'}$ deux groupes d'Artin. Soit φ un morphisme de groupes de A_Γ dans $A_{\Gamma'}$. On suppose que pour tout $s \in S$, il existe $g_s \in A_{\Gamma'}$, $k_s \in \mathbb{N}^*$ et $i(s) \in S'$ tel que $\varphi(\sigma_s) = g_s \sigma_{i(s)}^{k_s} g_s^{-1}$ (autrement dit on se place sous les même hypothèses qu'au théorème 2.28) et on note $\Phi : \mathbb{Z}[A_\Gamma] \rightarrow \mathbb{Z}[A_{\Gamma'}]$ le linéarisé de φ . Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{V} & : \mathcal{V}\mathcal{I}_{\Gamma'}^{(d)} \rightarrow \mathcal{V}\mathcal{I}_\Gamma^{(d)} \\ V & \mapsto V \circ \Phi \end{aligned}$$

est bien définie pour tout d . Par conséquent si φ est injectif et les invariants de Vassiliev de $A_{\Gamma'}$ séparent les éléments de $A_{\Gamma'}$ alors les invariants de Vassiliev de A_Γ séparent également les éléments de A_Γ .

DÉMONSTRATION. Si $s \in S$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_s - \sigma_s^{-1}) &= \Phi(\sigma_s) - \Phi(\sigma_s)^{-1} \\ &= g_s \sigma_{i(s)}^{k_s} g_s^{-1} - g_s \sigma_{i(s)}^{-k_s} g_s^{-1} \\ &= g_s (\sigma_{i(s)}^{k_s} - \sigma_{i(s)}^{-k_s}) g_s^{-1} \\ &= g_s \left(\sigma_{i(s)} - \sigma_{i(s)}^{-1} \right) \left(\sigma_{i(s)}^{k_i-1} + \sigma_{i(s)}^{k_i-3} + \dots + \sigma_{i(s)}^{-(k_i-1)} \right) g_s^{-1}. \end{aligned}$$

Donc pour tout s , $\Phi(\sigma_s - \sigma_s^{-1}) \in \mathcal{J}_{\Gamma'}$ d'où

$$\Phi(\mathcal{J}_\Gamma) \subset \mathcal{J}_{\Gamma'}$$

et

$$\Phi(\mathcal{J}_\Gamma^{d+1}) \subset \mathcal{J}_{\Gamma'}^{d+1}$$

pour tout d . Donc si V est un invariant de $A_{\Gamma'}$ s'annulant sur $\mathcal{J}_{\Gamma'}^{d+1}$ alors $V \circ \Phi$ est un invariant de A_Γ s'annulant sur $\mathcal{J}_\Gamma^{d+1}$. D'où $\mathcal{V}$ est bien défini. On suppose maintenant que

φ est injectif et les invariants de Vassiliev séparent les éléments de $A_{\Gamma'}$. Soient α et β deux éléments distincts de A_{Γ} . Comme φ est injectif alors $\Phi(\alpha) = \varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta) = \Phi(\beta)$ et comme les invariants de Vassiliev séparent les éléments de $A_{\Gamma'}$ alors il existe un invariant de Vassiliev V de $A_{\Gamma'}$ tel que $V(\Phi(\alpha)) \neq V(\Phi(\beta))$ et $V \circ \Phi$ est un invariant de Vassiliev de A_{Γ} séparant α et β . □

Théorème 2.48. Les invariants de Vassiliev d'un groupe d'Artin de type B_n ou $\tilde{A}_n$ séparent les éléments de ce groupe d'Artin.

DÉMONSTRATION. Par les théorèmes 2.39 et 2.40 le groupe d'Artin de type $\tilde{A}_n$ se plonge dans le groupe d'Artin de type B_{n+1} qui se plonge dans le groupe d'Artin de type A_{n+1} via des morphismes qui respectent les conditions de la proposition 2.47, d'où le théorème. □

Monoïdes de tresses virtuelles singulières

Ce chapitre est une version légèrement étoffée de l'article [16] co-rédigé par l'auteur. Il est consacré aux monoïdes de tresses virtuelles qui sont à la fois une généralisation des monoïdes des tresses singulières et des groupes de tresses virtuelles. On y donne la définition de tresse virtuelle, de tresse virtuelle singulière ainsi que les diverses interprétations possibles de ces objets en termes combinatoires ou topologiques. On finit en étendant, comme au chapitre précédant, les notions de morphisme de désingularisation et d'invariant de Vassiliev pour les monoïdes de tresses virtuelles singulières.

On se fixe pour cette section un entier $n \in \mathbb{N}^$.*

1. Le groupe de tresses virtuelles

Il est possible d'encoder tout diagramme de nœud de manière compacte à l'aide d'un objet combinatoire appelé code de Gauss. Celui est construit en effectuant la liste des croisements rencontrés lorsqu'on parcourt le diagramme du nœud en question, chaque entrée de la liste étant constitué d'un nombre entier identifiant le croisement rencontré et d'un signe indiquant si l'on a passé ce croisement en étant sur le brin du dessous ou du dessus. Mais la réciproque n'est pas vraie, certains code de Gauss ne permettant pas de reconstituer un diagramme de nœud sans créer de nouveau croisement. C'est dans une volonté de résoudre ce problème que Kauffman a introduit, dans [31], la notion de *nœud virtuel*. Diagrammiquement, cela correspond à autoriser un nouveau type de croisement, dit *virtuel*, et à quotienter l'ensemble des diagrammes par les mouvements de Reidemeister classiques ainsi que par de nouveaux mouvements de Reidemeister, dits *virtuels*.

Cette approche peut être adaptée au cas des tresses à n brins comme suit. On considère l'ensemble des diagrammes de tresse où les croisements peuvent être de deux types : du type classique déjà rencontré et représenté comme alors, ou bien d'un nouveau type appelé virtuel et noté comme un croisement singulier mais entouré d'un cercle (voir figure 2). On quotiente alors cet ensemble par la relation d'équivalence engendrée par les isotopies planaires, les mouvements de Reidemeister classiques et un nouveau jeu de mouvements de Reidemeister dits *virtuels* qui sont décrits dans les figures 1.

Muni du produit de concaténation (en 2 dimensions), cela définit le groupe $\mathcal{VB}_n$ des *tresses virtuelles à n brins*. Dans [46], Vershinin introduit ce même groupe en lui donnant directement une présentation, inspirée de la présentation usuelle des tresses classiques, à laquelle il rajoute un générateur ρ_i pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, correspondant au diagramme de tresse donné en figure 2.

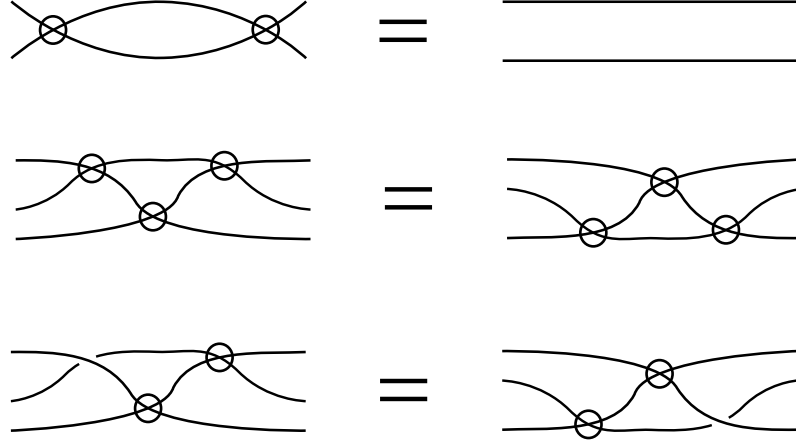
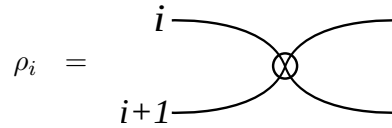


FIGURE 1. Mouvements de Reidemeister virtuels

Proposition 3.1 ([46]). Le groupe de tresses virtuelles $\mathcal{VB}_n$ a la présentation suivante.

- Générateurs : $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$.
- Relations :
 - $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$ si $|i - j| = 1$;
 - $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i - j| > 1$;
 - $\rho_i^2 = 1, i = 1, \dots, n - 1$;
 - $\rho_i \rho_j \rho_i = \rho_j \rho_i \rho_j$ si $|i - j| = 1$;
 - $\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i$ si $|i - j| > 1$;
 - $\sigma_i \rho_j \rho_i = \rho_j \rho_i \sigma_j$ si $|i - j| = 1$;
 - $\rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i$ si $|i - j| > 1$.

FIGURE 2. Le générateur ρ_i

2. Le monoïde de tresses virtuelles singulières

A l'instar du cas classique, on définit maintenant le monoïde de tresses singulières $\mathcal{SVB}_n$, introduit dans [13] ainsi que dans [14], comme le quotient de l'ensemble des diagrammes de tresse où chaque croisement peut maintenant être décoré de façon classique, singulière ou virtuelle, par la relation d'équivalence engendrée par les isotopies planaires, les mouvements de Reidemeister classiques, les mouvements de Reidemeister singuliers, les mouvements de Reidemeister virtuels et un dernier mouvement de Reidemeister *singulier-virtuel* donné en

figure 3 ; la multiplication dans $\mathcal{SVB}_n$ correspond toujours au produit de concaténation (en 2 dimensions).

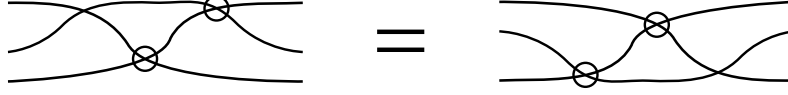


FIGURE 3. Mouvement de Reidemeister singulier virtuel

Là encore, on peut donner une présentation de monoïde de $\mathcal{SVB}_n$, où les générateurs correspondent aux différents types de croisements, et les relations aux différents mouvements de Reidemeister.

Proposition 3.2 ([13]). Le monoïde de tresses virtuelles singulières $\mathcal{SVB}_n$ a la présentation suivante.

- Générateurs : $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}; \rho_1, \dots, \rho_{n-1}; \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$.
- Relations :

— $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1, i = 1, \dots, n-1;$	— $\rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i$ si $ i-j > 1;$
— $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$ si $ i-j = 1;$	— $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ si $ i-j > 1;$
— $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $ i-j > 1;$	— $\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i$ si $ i-j > 1;$
— $\rho_i^2 = 1, i = 1, \dots, n-1;$	— $\tau_i \sigma_i = \sigma_i \tau_i, i = 1, \dots, n-1;$
— $\rho_i \rho_j \rho_i = \rho_j \rho_i \rho_j$ si $ i-j = 1;$	— $\tau_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \tau_j$ si $ i-j = 1;$
— $\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i$ si $ i-j > 1;$	— $\rho_i \tau_j = \tau_j \rho_i$ si $ i-j \geq 2;$
— $\sigma_i \rho_j \rho_i = \rho_j \rho_i \sigma_j$ si $ i-j = 1;$	— $\tau_i \rho_j \rho_i = \rho_j \rho_i \tau_j$ si $ i-j = 1.$

3. Lien entre les différentes constructions de tresses

Comme dans le cas classique, non seulement les tresses virtuelles sont isomorphes à un sous-monoïde des tresses virtuelles singulières, mais ce sous-monoïde apparaît également comme facteur semi-direct du monoïde entier. On a en effet les deux propriétés suivantes.

Théorème 3.3 (Kamada [30]). Le sous-groupe de $\mathcal{VB}_n$ engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{B}_n$.

Proposition 3.4. Soit $\mathcal{M}_v$ le monoïde de présentation suivante.

- Générateurs : $\Upsilon_v = \{\beta \tau_i \beta^{-1}, i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \text{ et } \beta \in \mathcal{VB}_n\}$.
- Relations : $uv = vu$, si $u, v \in \Upsilon$ et $uv = vu \in \mathcal{SVB}_n$.

Alors on a la décomposition en produit semi-direct suivante :

$$\mathcal{SVB}_n = \mathcal{M}_v \rtimes \mathcal{VB}_n.$$

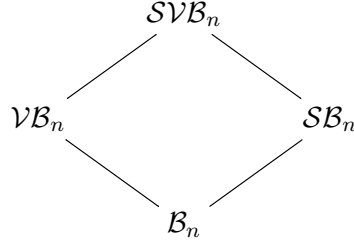
DÉMONSTRATION. On définit sur le monoïde libre engendré par $\sigma_i^{\pm 1}, \rho_i, \tau_i$, avec $1 \leq i \leq n-1$ le morphisme de monoïdes à valeurs dans $\mathcal{M}_v \rtimes \mathcal{VB}_n$ qui envoie chaque σ_i, ρ_i sur $(1, \sigma_i), (1, \rho_i)$ respectivement et chaque τ_i sur $(\tau_i, 1)$. On vérifie aisément que les images des générateurs satisfont les relations définissant $\mathcal{SVB}_n$ et que cela induit donc un morphisme Φ défini sur $\mathcal{SVB}_n$.

D'un autre côté, on définit l'application de $\mathcal{M}_v \rtimes \mathcal{VB}_n$ dans $\mathcal{SVB}_n$ qui envoie (ω, β) sur $\omega\beta$. Cette application est clairement un homomorphisme de monoïdes que l'on note Ψ .

Pour finir, remarquons qu'on a $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{SVB}_n}$ et $\Phi \circ \Psi = Id_{\mathcal{M}_v \rtimes \mathcal{VB}_n}$. D'où la décomposition recherchée. $\square$

De fait, comme l'illustre la proposition suivante, virtualisation et singularisation apparaissent comme deux généralisations indépendantes, mais cohérentes entre elles, du groupe de tresses.

Proposition 3.5. On dispose du treillis de sous-monoïdes suivant :



DÉMONSTRATION. Le fait que $\mathcal{B}_n$ soit un sous-monoïde de $\mathcal{VB}_n$ correspond au résultat de Kamada.

Le fait que $\mathcal{B}_n$ se plonge dans $\mathcal{SB}_n$ et $\mathcal{VB}_n$ dans $\mathcal{SVB}_n$ sont des conséquences des décompositions en produit semi-direct $\mathcal{SB}_n = \mathcal{M}_v \rtimes \mathcal{B}_n$ et $\mathcal{SVB}_n = \mathcal{M} \rtimes \mathcal{VB}_n$.

Il reste à montrer que $\mathcal{SB}_n$ se plonge dans $\mathcal{SVB}_n$. Ceci peut se faire en utilisant les décompositions des deux monoïdes en produit semi-direct $\mathcal{SVB}_n = \mathcal{M}_v \rtimes \mathcal{VB}_n$ et $\mathcal{SB}_n = \mathcal{M} \rtimes \mathcal{B}_n$. La preuve de l'injection de $\mathcal{SB}_n$ dans $\mathcal{SVB}_n$ est alors réduite au problème de l'injectivité des morphismes naturels $\mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{VB}_n$ et $\kappa : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_v$. L'injectivité de la première application a déjà été mentionnée, il suffit donc de prouver l'injectivité de κ .

Cela revient à prouver que, pour tous $\beta_0, \beta_1 \in \mathcal{B}_n$ et $1 \leq i, j \leq n-1$ les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(1) (\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1})(\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1}) = (\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1})(\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1}) \text{ est vraie dans } \mathcal{SVB}_n,$$

$$(2) (\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1})(\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1}) = (\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1})(\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1}) \text{ est vraie dans } \mathcal{SB}_n.$$

Soit $\pi_v : \mathcal{SVB}_n \rightarrow \mathcal{VB}_n$ l'unique morphisme de monoïdes tel que $\pi_v(\sigma_i) = \sigma_i$, $\pi_v(\rho_i) = \rho_i$ et $\pi_v(\tau_i) = \sigma_i$. Supposons maintenant que (1) soit vraie alors $\pi_v((\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1})(\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1})) = \pi_v((\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1})(\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1}))$ i.e. :

$$(\beta_0 \sigma_i \beta_0^{-1})(\beta_1 \sigma_j \beta_1^{-1}) = (\beta_1 \sigma_j \beta_1^{-1})(\beta_0 \sigma_i \beta_0^{-1}) \text{ in } \mathcal{VB}_n.$$

Puisque $\mathcal{B}_n$ se plonge dans $\mathcal{VB}_n$, l'égalité est également vraie dans $\mathcal{B}_n$ et donc dans $\mathcal{SB}_n$. Par le lemme 2.26 appliqué au monoïde $\mathcal{SB}_n$:

$$\begin{aligned}
 & (\beta_0 \sigma_i \beta_0^{-1})(\beta_1 \sigma_j \beta_1^{-1}) = (\beta_1 \sigma_j \beta_1^{-1})(\beta_0 \sigma_i \beta_0^{-1}) \\
 \Leftrightarrow & (\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1})(\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1}) = (\beta_1 \tau_j \beta_1^{-1})(\beta_0 \tau_i \beta_0^{-1}).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

4. Combinatoire et topologie des tresses virtuelles singulières

4.1. Description combinatoire des tresses virtuelles singulières. Comme évoqué au début de ce chapitre, les nœuds virtuels ont été initialement introduits dans un souci de complétion combinatoire des codes de Gauss. Néanmoins, dans [33], Kuperberg en a donné une interprétation topologique en terme de nœuds dans une surface épaissie à stabilisation près. Des approches en ce sens ont également été données dans le cas des tresses dans [15] et [29]. Intégrées dans ce cadre, et à l'aune des travaux de Vassiliev et leur réinterprétation par Birman et Lin, les tresses virtuelles singulières apparaissent alors comme un élément naturel permettant le développement d'une théorie d'invariants de type fini pour l'étude des tresses virtuelles.

Dans cette partie et la suivante, nous donnons une telle interprétation topologique aux tresses virtuelles singulières. Mais cela nécessite, dans un premier temps, de les interpréter combinatoirement, en terme de diagrammes de Gauss horizontaux, lesquels sont une reformulation diagrammatique des codes de Gauss.

Définition 3.6. Un *diagramme de Gauss singulier horizontal à n brins* G est un quadruplet (I, F, N, π) où :

- I est une collection de n intervalles orientés disjoints plongés dans le plan, de sorte qu'ils soient tous horizontaux et ordonnés du haut vers le bas, ces intervalles sont appelés *intervalles sous-jacents*;
- F est un ensemble fini de flèches signées (par une flèche, il faut entendre un intervalle fermé orienté plongé dans le plan) ;
- N est un ensemble fini de flèches non signées (simplement appelées *flèches*) ;
- $\pi \in \mathfrak{S}_n$;

et tels que :

- (1) chaque flèche (signée ou non) a ses extrémités situées dans l'intérieur de deux intervalles sous-jacents distincts,
- (2) les flèches (signées ou non) sont disjointes deux à deux,
- (3) l'extrémité du i -ème intervalle sous-jacent est étiquetée avec $\pi(i)$.

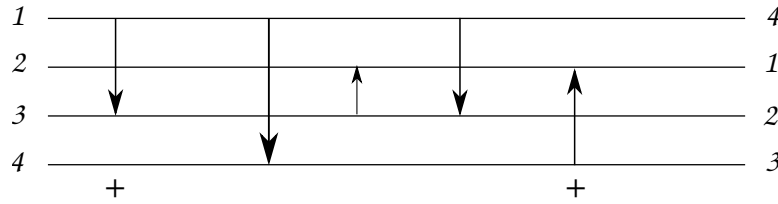


FIGURE 4. Exemple de diagramme de Gauss singulier horizontal à 4 brins

Remarque 3.7. On prendra note que la condition (2) de la définition 3.6 implique, à isotopie planaire près, que l'on peut tracer les flèches perpendiculairement aux intervalles sous-jacents. Quand les intervalles sous-jacents sont tracés verticalement les flèches sont

alors horizontales, d'où l'appellation originelle de diagramme de Gauss horizontaux dans [4]. Ici, les intervalles seront tracés horizontalement.

Définition 3.8. Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de Gauss singuliers horizontaux. On dit que D_1 et D_2 sont reliés par un *mouvement* Ω si D_1 contient un sous-diagramme semblable à un l'un des diagrammes montrés à la droite (respectivement gauche) des images (A), (B), (C) et (D) de la figure 5, et que remplacer ce sous-diagramme par celui montré à la gauche (respectivement droite) de l'image donne le diagramme D_2 . Il faut noter que dans les images (A), (B), (C) et (D), i, j, k peuvent ne pas être consécutifs, ou ne pas être en ordre croissant. Chaque mouvement est étiqueté selon le sous-diagramme changé, il existe donc 4 mouvements¹ Ω : les mouvements $\Omega 2$, $\Omega 3$, $S\Omega 2$ et $S\Omega 3$.

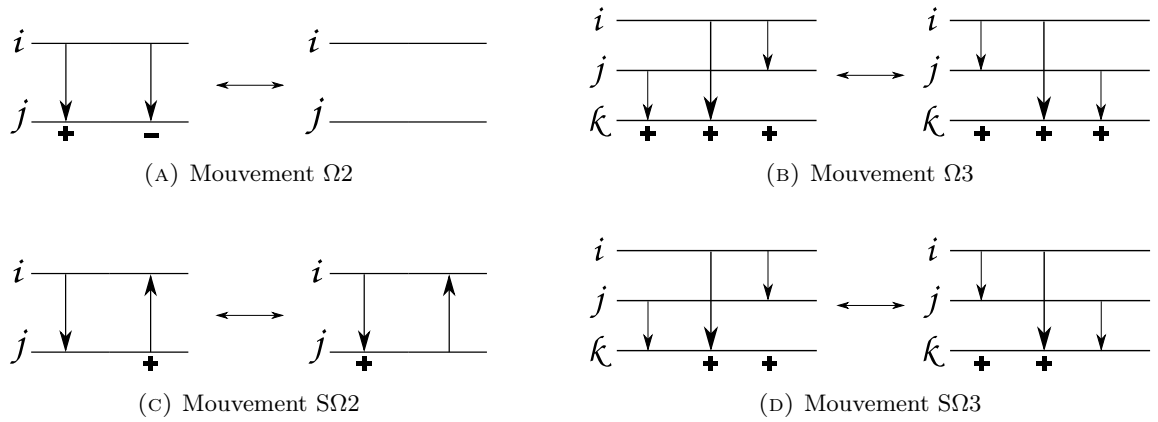


FIGURE 5. Mouvements Ω

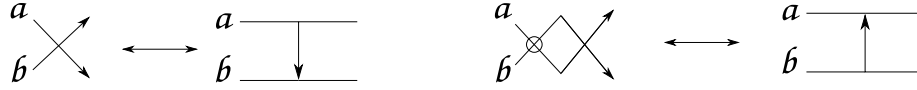
Sur les diagrammes de Gauss singuliers horizontaux, on considère la relation d'équivalence engendrée par les mouvements Ω et les isotopies ambiantes qui fixent globalement chaque intervalle sous-jacent I_i , $i = 1, \dots, n$. On note G_n l'ensemble des classes d'équivalence de diagrammes de Gauss singuliers horizontaux à n brins.

Définition 3.9. Soit β un diagramme de tresse virtuelle singulière à n brins. Le diagramme de Gauss singulier horizontal $G(\beta)$ de β est un diagramme de Gauss singulier horizontal à n brins construit ainsi :

- pour tout $i = 1, \dots, n$, le i -ième intervalle sous-jacent de $G(\beta)$ est identifié à la pré-image du i -ième brin de β ;
- il existe une flèche signée pour chaque croisement classique, dont les extrémités correspondent aux pré-images du croisement avec la règle suivante :
 - chaque flèche part du brin qui passe au-dessus et arrive sur le brin qui passe en-dessous

¹. Remarquons que l'on peut avoir un mouvement de type $\Omega 3$ avec des signes différents sur les flèches en composant plusieurs mouvements Ω .

- le signe de la flèche est celui du croisement ;
- il existe une flèche simple pour chaque croisement singulier, dont les extrémités correspondent aux pré-images du croisement avec la règle suivante : conformément à l'orientation standard du plan et à celles des brins, la flèche part du brin qui joue le rôle de l'axe des abscisses et arrive sur le brin qui joue le rôle de l'axe des ordonnées ;



- la permutation de $G(\beta)$ correspond à la permutation associée à β .

On pourra remarquer que les croisements virtuels ne sont pas représentés dans les diagrammes de Gauss singuliers horizontaux. En figure 6 est représenté un exemple de traduction d'un diagramme de tresse virtuelle en un diagramme de Gauss singulier horizontal.

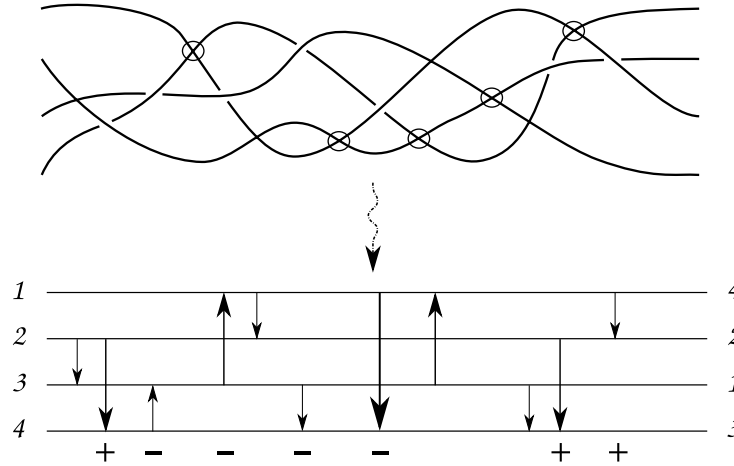


FIGURE 6. La construction de $G(\beta)$

On peut vérifier que les deux membres d'un même mouvement de Reidemeister virtuel et virtuel singulier donnent systématiquement le même diagramme de Gauss (voir par exemple figure 7). De plus on peut vérifier (voir par exemple la figure 8) que les mouvements de Reidemeister classiques et singuliers sont traduits en mouvements Ω et que les isotopies sont traduites en isotopies ambiantes fixant globalement chacun des intervalles sous-jacents. Par conséquent, il existe une fonction bien définie de l'ensemble des tresses virtuelles singulières dans l'ensemble des classes d'équivalences de diagrammes de Gauss singuliers horizontaux, ce qui mène à la proposition suivante.

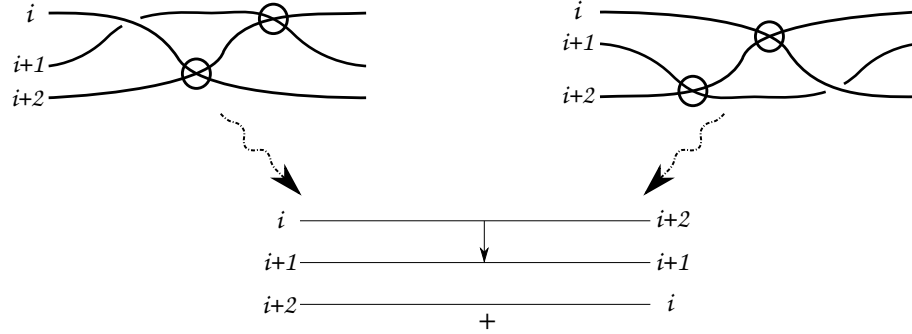


FIGURE 7. Diagramme de Gauss issu des membres d'un mouvement de Reidemeister virtuel

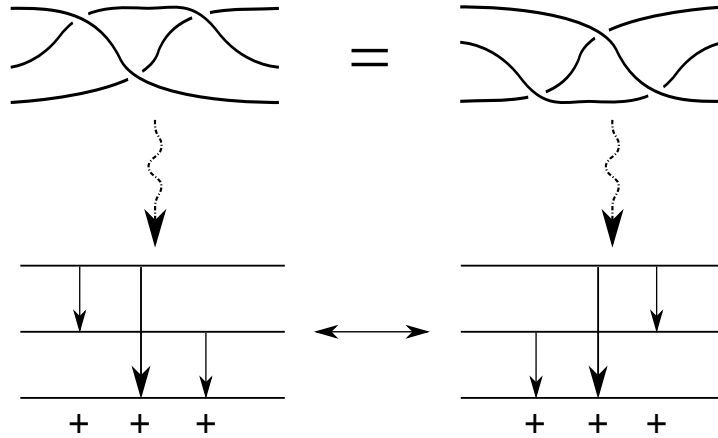


FIGURE 8. Traduction d'un mouvement de Reidemeister en mouvement Ω

Proposition 3.10. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des tresses virtuelles singulières $\mathcal{SVB}_n$ et l'ensemble des classes d'équivalences de diagrammes de Gauss singuliers horizontaux G_n .

DÉMONSTRATION. On a déjà défini une fonction $G : \mathcal{SVB}_n \rightarrow G_n$. Il suffit donc de construire une fonction $B : G_n \rightarrow \mathcal{SVB}_n$ qui serait l'inverse de G .

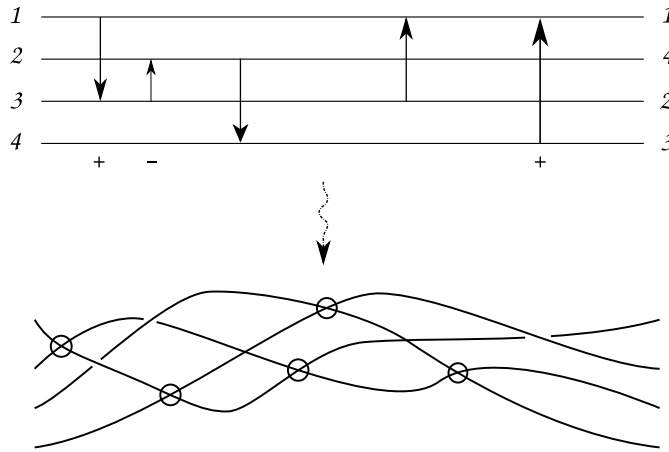
Étant donné un diagramme de Gauss singulier horizontal g , on peut construire un diagramme de tresse virtuelle singulière $B(g)$ comme suit. Considérons un carré de côté 1 dans le plan avec n points marqués sur son côté gauche, numérotés par $1, \dots, n$, et n points marqués sur son côté droit, numérotés par la permutation de g . Ensuite pour chaque flèche signée de g en suivant leur ordre d'apparition selon l'axe des abscisses, on dessine un croisement classique avec le signe correspondant à la flèche, ainsi que pour chaque flèche simple, un croisement singulier, ceci en veillant à ce que la projection sur l'axe des abscisses

de ces croisements ne s'intersectent pas. En remarquant que chacun des intervalles sous-jacents représente un des brins de la tresse virtuelle que l'on cherche à construire et que le diagramme de Gauss g indique les croisements auxquels le brin participe, la configuration locale de ces croisements (selon la présence ou l'absence de signe sur la flèche correspondante ainsi que la nature de ce signe, s'il y en a un) et enfin, ses extrémités vis-à-vis des points marqués sur le carré, on peut voir le diagramme de Gauss singulier horizontal comme un ensemble d'instructions afin de dessiner des arcs qui connectent les croisements et les points marqués. On fera attention au fait que, durant la construction de ces arcs, de nouveaux croisements peuvent apparaître. Ces croisements seront alors virtuels. Au bout de cette procédure, nous avons construit un diagramme de tresse virtuelle.

Comme il a déjà été dit, les deux membres d'un même mouvement de Reidemeister virtuel et virtuel singulier correspondent au même diagramme de Gauss (figure 7) donc $B(g)$ est bien défini à mouvement de Reidemeister virtuel (singulier) près, et si g est considéré à isotopie près, alors $B(g)$ est bien défini à isotopie ambiante et mouvement de Reidemeister virtuel (singulier) près. De plus on peut vérifier que, réciproquement à ce qui se passe pour la fonction G , tout mouvement Ω se traduit par un mouvement de Reidemeister classique ou singulier. Il en résulte au final une fonction bien définie de l'ensemble des classes d'équivalence de diagrammes de Gauss singuliers horizontaux G_n dans l'ensemble SVB_n .

Par construction, G et B vérifient $G(B(g)) = g$ pour tout diagramme de Gauss g à isotopie près, et $B(G(\beta)) = \beta$ pour tout diagramme de tresse virtuelle singulière β à isotopie et mouvement de Reidemeister virtuel (singulier) près. Comme G traduit les mouvements de Reidemeister classiques et singuliers en mouvement Ω et B opère la traduction inverse, il en résulte bien que $G \circ B = Id_{G_n}$ et $B \circ G = Id_{SVB_n}$.

□

FIGURE 9. La construction de $B(g)$

4.2. Description topologique des tresses virtuelles singulières. Cette section est consacrée à la mise en œuvre d’une réalisation topologique des tresses virtuelles singulières qui généralise les tresses abstraites introduites dans [15] et [29].

Définition 3.11. Un *diagramme de tresse singulière abstraite* à n brins $\hat{\beta} = (S, \beta, \epsilon)$ est un triplet tel que :

- (1) S est une surface connexe, compacte et orientée avec $\partial S = C_0 \sqcup C_1$ et C_0, C_1 tous deux homéomorphes au cercle S^1 ;
- (2) chaque composante de bord de S a n points marqués, disons $\{a_1, \dots, a_n\} \subset C_0$ et $\{b_1, \dots, b_n\} \subset C_1$, où $a_j = e^{2\pi j/n}$ et $b_j = e^{-2\pi j/n}$ avec l’orientation de C_i ;
- (3) β est un n -uplet d’arcs $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ tel que :
 - pour $k \in \{1, \dots, n\}$, β_k est un arc de $[0; 1]$ dans S ,
 - il existe $\pi \in \mathfrak{S}_n$ tel que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_k(0) = a_k$ et $\beta_k(1) = b_{\pi(k)}$,
 - l’ensemble des n -uplets de courbes β est en position général, i.e. les seuls points singuliers sont des points doubles transverses (appelés *croisements*) dans l’image de β dans S ,
 - le graphe orienté formé par β n’a pas de cycles orientés ;
- (4) chaque croisement est un croisement soit positif, soit négatif, soit singulier dont la nature est indiqué par une fonction

$$\epsilon : \{\text{Croisements}\} \rightarrow \{+1, -1, s\}.$$

Définition 3.12. On dit que deux diagrammes de tresse singulière abstraite à n brins (S, β, ϵ) et (S, β', ϵ') sont *Reidemeister-équivalentes* si elles sont reliés par un nombre fini d’opérations parmi les suivantes.

- *Isotopie ambiante.* Il existe une fonction continue

$$H : (S, \partial S) \times [0; 1] \rightarrow (S, \partial S)$$

avec $H_t = H(\cdot, t) \in \text{Diff}(S, \partial S)$ et $(S, H_t(\beta), \epsilon_t)$ qui est un diagramme de tresse singulière abstraite à n brins tel que $(S, H_0(\beta), \epsilon_0) = (S, \beta, \epsilon)$ et $(S, H_1(\beta), \epsilon_1) = (S, \beta', \epsilon')$, où ϵ_t est la fonction de croisements transportée de β par H_t .

- *Mouvement de Reidemeister.* On dit que (S, β, ϵ) et (S, β', ϵ') sont reliés par des mouvements de Reidemeister s’ils sont identiques en-dehors d’un disque de S , à l’intérieur duquel ils diffèrent par un mouvement de Reidemeister tel que décrit dans la Figure 2 du chapitre 1.
- *Mouvement de Reidemeister singulier.* On dit que (S, β, ϵ) et (S, β', ϵ') sont reliés par un mouvement de Reidemeister singulier s’ils sont identiques en-dehors d’un disque de S , à l’intérieur duquel ils diffèrent par un mouvement de Reidemeister singulier tel que décrit dans la Figure 4 du chapitre 1.

On note SAB_n l’ensemble des classes de Reidemeister-équivalence sur les diagrammes de tresse singulière abstraite, et on appelle *tresses abstraites singulières* ses éléments.

Définition 3.13. On dit que deux diagrammes de tresse singulière abstraite à n brins (S, β, ϵ) et (S', β', ϵ') sont *stablement équivalentes* s'ils sont reliés par un nombre fini d'opérations parmi les suivantes.

- (1) *Difféomorphisme.* On dit que (S', β', ϵ') est obtenu de (S, β, ϵ) par un difféomorphisme s'il existe $f \in \text{Diff}^+(S, S')$ tel que $(S', \beta', \epsilon') = (f(S), f(\beta), \epsilon \circ f^{-1})$.
- (2) *Stabilisation.* On dit que (S', β', ϵ') est obtenue de (S, β, ϵ) par une stabilisation si $\beta' = \beta$, $\epsilon' = \epsilon$ et S' est obtenue à partir de S en ajoutant une poignée disjointe de l'image de β i.e. il existe un plongement $h : S^0 \times D^2 \rightarrow S$ tel que S' est la surface

$$S' = S \setminus \overbrace{h(S^0 \times D^2)}^{\circ} \cup_{S^0 \times S^1} D^1 \times S^1.$$

- (3) *Déstabilisation.* Une déstabilisation est l'opération inverse d'une stabilisation, et consiste à couper S le long d'une courbe essentielle γ disjointe de l'image de β et à attacher deux copies de D^2 le long des deux nouvelles composantes de bord. Si jamais la nouvelle surface est non connexe, alors on ne conserve que la composante contenant β .

On va désormais prouver qu'il existe une correspondance entre les tresses virtuelles singulières et les tresses singulières abstraites à équivalence stable près en établissant une bijection entre celles-ci et les classes d'équivalence de diagrammes de Gauss horizontaux.

Proposition 3.14. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des classes stables de tresses singulières abstraites et l'ensemble des classes d'équivalence des diagrammes de Gauss horizontaux.

DÉMONSTRATION. Commençons par fixer un certain nombre de notations. Si $\hat{\beta}$ est un diagramme de tresse abstraite alors on notera :

- $[\hat{\beta}]_d$ sa classe modulo difféomorphisme ;
- $[\hat{\beta}]_{d,s,r}$ sa classe modulo difféomorphisme, stabilisation/déstabilisation et mouvements de Reidemeister.

On notera également $\overline{SAB}_n$ l'espace quotient des tresses abstraites stablement équivalentes.

Ensuite remarquons que si (S, β, ϵ) est un diagramme de tresse abstraite, il est tout à fait possible de définir un diagramme de Gauss à partir du couple (β, ϵ) en utilisant le même procédé que pour les diagrammes de tresse virtuelle. Ceci permet de définir un analogue à la définition 3.9 pour les diagrammes de tresse abstraite, i.e. étant donné un diagramme de tresse abstraite (S, β, ϵ) , on peut lui associer un diagramme de Gauss singulier horizontal $G(S, \beta, \epsilon)$.

Cette association est bien définie à équivalence stable près, puisque les difféomorphismes, stabilisations et déstabilisations laissent invariant le couple (β, ϵ) . De plus, si l'on effectue localement un mouvement de Reidemeister classique ou singulier, ceci revient à effectuer un mouvement Ω sur le diagramme de Gauss singulier horizontal. De ce fait, on dispose d'une fonction bien définie

$$\begin{aligned} \overline{G} : \overline{SAB}_n &\rightarrow G_n \\ [\hat{\beta}]_{d,s,r} &\mapsto G(\hat{\beta}). \end{aligned}$$

Notre objectif est de montrer que l'application $\overline{G}$ est bijective. Pour cela nous allons exhiber son inverse.

Soit g un diagramme de Gauss horizontal et $B(g)$ un diagramme de tresse virtuelle singulière associé tel qu'on l'a défini à la sous-section précédente.

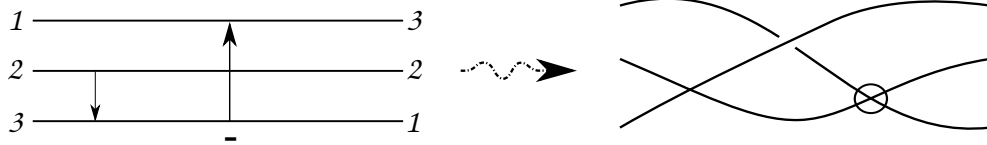


FIGURE 10. D'une tresse virtuelle singulière à un diagramme de Gauss.

À partir de $B(g)$ on peut construire un diagramme de tresse singulière abstraite comme il est fait dans [15] pour les tresses ou dans [29] pour les noeuds comme décrit ci-dessous.

- (1) De chaque côté du diagramme de tresse, on ajoute un cercle de sorte que les extrémités du diagramme situés de ce côté se retrouvent sur celui-ci, on appellera ces cercles, les *composantes distinguées* (voir Figure 11).

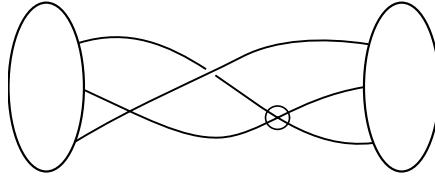


FIGURE 11. Ajout des cercles au diagramme de tresse virtuelle

- (2) On construit alors un voisinage régulier, dans $\mathbb{R}^2$, du diagramme obtenue. On obtient une première surface $S_0(B(g))$ avec un certain nombre de composantes de bord, parmi lesquels les composante distinguées (voir Figure 12).

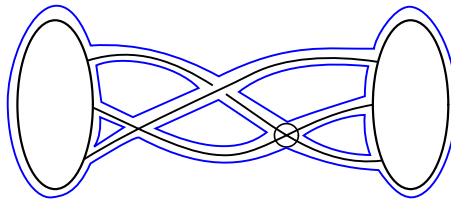


FIGURE 12. La surface associée au diagramme de tresse virtuelle singulière.

- (3) On considère le plongement naturel de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, celui-ci induit un plongement de la surface $S_0(B(g))$. On perturbe alors, dans $\mathbb{R}^3$, le voisinage régulier de chaque croisement virtuel de sorte à obtenir deux bandes disjointes. On obtient ainsi une nouvelle surface $S_1(B(g))$, qui possèdent les même composantes distinguées que la précédente (voir Figure 13).

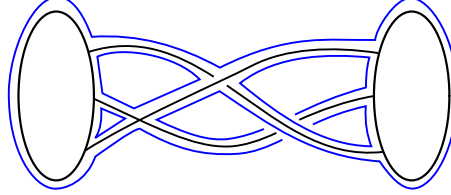


FIGURE 13. La surface obtenue après les perturbations.

- (4) On considère $S_1(B(g))$ comme une surface abstraite et on rebouche toutes les composantes de bord à l'exception des composantes distinguées à l'aide de disques. Comme la surface précédente était orientée, on obtient ainsi une surface orientée, qui ne possède que deux composantes de bord et qui satisfait la définition d'un diagramme de tresses singulières abstraites. On appelle celle-ci $A(B(g))$ (voir Figure 14).

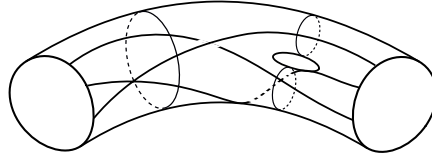


FIGURE 14. Le diagramme de tresse singulière abstraite construit à partir de β .

Remarquons que pour chaque croisement virtuel, on peut perturber la surface Σ de deux manières différentes à l'étape (3), résultant en deux surfaces difféomorphes, ainsi la surface obtenue est bien définie à difféomorphisme près. De plus, deux diagrammes de tresse différant par un mouvement de Reidemeister virtuel donneront, lorsque l'on perturbera les voisinages réguliers des croisements, des surfaces difféomorphes. Par conséquent, si g est un diagramme de Gauss singulier horizontal et $B(g)$ une tresse virtuelle associée alors $[A(B(g))]_d$ ne dépend pas du choix de $B(g)$. Dans la suite, on fera donc l'abus de notation $[A(g)]_d$ au lieu $[A(B(g))]_d$ et $[A(g)]_{d,s,r}$ au lieu $[A(B(g))]_{d,s,r}$.

On définit l'application $\overline{A}$ de l'ensemble des diagrammes de Gauss dans $\overline{SAB}_n$ définie par

$$\overline{A}(g) = [A(g)]_{d,s,r}.$$

Alors par construction, pour tout $g \in G_n$,

$$\overline{G}(\overline{A}(g)) = g.$$

Nous allons montrer que $\bar{A}$ est compatible avec les mouvements Ω . Soient g et g' deux diagrammes de Gauss singuliers horizontaux différant par un mouvement Ω . On choisit $B(g)$ et $B(g')$ de telle sorte que les deux diagrammes de tresse virtuelle singulière ne diffèrent que par le mouvement de Reidemeister correspondant au mouvement Ω . On considère ensuite les surfaces $S_0(B(g))$ et $S_0(B(g'))$ et on construit à partir de celles-ci les surfaces $S_1(B(g))$ et $S_1(B(g'))$ en veillant à effectuer les mêmes perturbations sur les croisements virtuelles pour les deux surfaces. Les surfaces $S_1(B(g))$ et $S_1(B(g'))$ ne diffèrent alors que par un "mouvement de Reidemeister" dont on a représenté en figure 15 des exemples correspondant aux mouvements classiques.

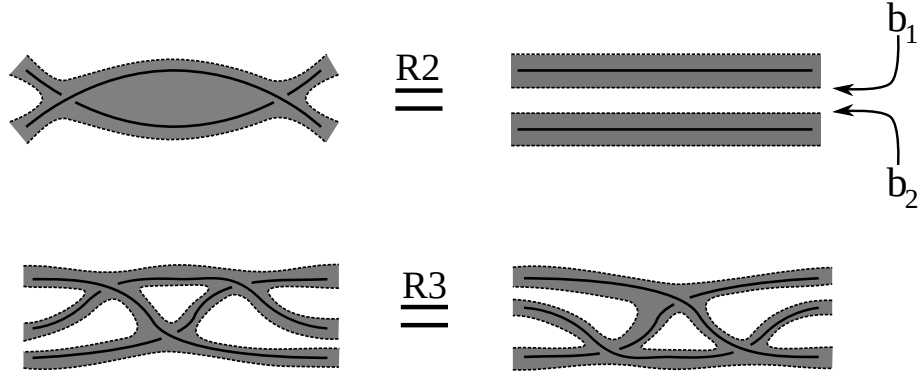


FIGURE 15. Exemples de mouvements de Reidemeister sur $S_1(B(g))$.

Dans le cas où le mouvement Ω différenciant g de g' est un mouvement $\Omega 3$, alors $S_1(B(g))$ et $S_1(B(g'))$ diffèrent par le mouvement R3 et on peut vérifier que lorsqu'on rebouche les composantes de bords non-distinguées de $S_1(B(g))$ et $S_1(B(g'))$, on obtient $A(B(g)) = (\Sigma, \beta, \epsilon)$ et $A(B(g')) = (\Sigma, \beta', \epsilon')$ où (β, ϵ) et (β', ϵ') ne diffèrent que par un mouvement de Reidemeister à 3 brins. Le cas des mouvements $S\Omega 2$ ou $S\Omega 3$ se traitent de manière identique.

Le cas $\Omega 2$ est cependant un peu plus technique. On a en effet deux cas possibles.

- Soit les morceaux de bord b_1 et b_2 définis en figure 15 appartiennent à la même composante de bord et alors on peut vérifier que, similairement au cas $\Omega 3$, $A(B(g)) = (\Sigma, \beta, \epsilon)$ et $A(B(g')) = (\Sigma, \beta', \epsilon')$ où (β, ϵ) et (β', ϵ') ne diffèrent que par un mouvement de Reidemeister à 2 brins.
- Soit b_1 et b_2 appartiennent à des composantes de bords différentes. On suppose ici que $S_1(B(g))$ contient le membre gauche de R2 et $S_1(B(g'))$ contient le membre droit. On définit S_b la surface obtenue en recollant b_1 et b_2 (voir figure 16) et on note $(\Sigma_b, \beta_b, \epsilon_b)$ le diagramme de tresse abstraite obtenu en rebouchant ses composantes de bord. On note également $A(B(g)) = (\Sigma, \beta, \epsilon)$ et $A(B(g')) = (\Sigma', \beta', \epsilon')$. Alors :
 - $\Sigma_b = \Sigma$ et (β_b, ϵ_b) , (β, ϵ) ne diffèrent que par un mouvement de Reidemeister à deux brins

— $(\beta', \epsilon') = (\beta_b, \epsilon_b)$ et Σ_b s'obtient à partir de Σ' par une stabilisation.

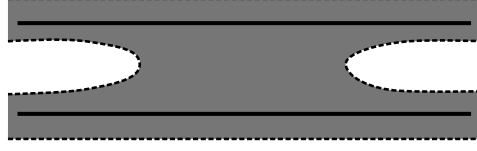


FIGURE 16. La surface S_b .

Dans tous les cas on a bien au final $\overline{A}(g) = \overline{A}(g')$. $\overline{A}$ est donc bien défini sur G_n . De plus, $\overline{G} \circ \overline{A} = Id_{G_n}$ par construction de $\overline{A}$.

Il nous reste alors à montrer que $\overline{A} \circ \overline{G} = Id_{\overline{SAB}_n}$. Soit $\hat{\beta} = (S, \beta, \epsilon)$ un diagramme de tresse abstraite, $B(G(\hat{\beta}))$ un diagramme de tresse virtuelle singulière associée à $G(\hat{\beta})$ et soit $(\Sigma, \beta', \epsilon') = A(B(G(\hat{\beta})))$. Alors

$$G(A(B(G(\hat{\beta})))) = G(\hat{\beta})$$

i.e. $\hat{\beta}$ et $A(B(G(\hat{\beta})))$ ont même diagramme de Gauss associé. Comme ceux-ci ne dépendent que de la tresse et non de la surface, cela revient à dire que $(\beta, \epsilon) = (\beta', \epsilon')$. Comme $S_1(B(G(\hat{\beta})))$ ne dépend, à difféomorphisme près, que du diagramme de Gauss $G(\hat{\beta})$, cette surface peut être vue simultanément comme une sous-surface de S et Σ . On peut alors écrire

$$\Sigma = S_1(B(G(\hat{\beta}))) \cup \tilde{\Sigma}$$

où $\tilde{\Sigma}$ est une réunion disjointe de disques, et similairement

$$S = S_1(B(G(\hat{\beta}))) \cup \tilde{S}$$

où $\tilde{S}$ est une réunion disjointe de surfaces orientables. Il est alors possible de déstabiliser chacune de ces surfaces afin d'obtenir un disque. Cette succession de déstabilisation permet ainsi de transformer S en Σ .

Au final, on a bien

$$[\hat{\beta}]_{d,s,r} = [A(B(G(\hat{\beta})))]_{d,s,r} = \overline{A}(G(\hat{\beta})) = \overline{A}(\overline{G}([\hat{\beta}]_{d,s,r})).$$

D'où $\overline{A} \circ \overline{G} = Id_{\overline{SAB}_n}$.

□

Comme conséquence immédiate, on a alors la proposition suivante, qui explicite une réalisation topologique des tresses virtuelles singulières.

Proposition 3.15. Il existe une bijection entre l'ensemble des tresses virtuelles singulières et l'ensemble des classes d'équivalence stable de tresses singulières abstraites.

5. Conjecture de Birman et invariants de Vassiliev pour les tresses virtuelles

On étend ici les notions de morphisme de désingularisation et d'invariants de Vassiliev aux tresses virtuelles singulières. Cette section est uniquement dédiée à leur définitions, les résultats sur ces objets étant reportés au chapitre 4.

On peut, comme dans le cas des monoïdes de tresses singulières, définir un morphisme de désingularisation de $\mathcal{SVB}_n$ dans $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$, qu'on note $\delta_{\mathcal{VB}_n}$ et qui est défini par

$$\delta_{\mathcal{VB}_n}(\sigma_i^{\pm 1}) = \sigma_i^{\pm 1}, \delta_{\mathcal{VB}_n}(\rho_i) = \rho_i \text{ et } \delta_{\mathcal{VB}_n}(\tau_i) = \sigma_i - \sigma_i^{-1}.$$

On peut également définir similairement au cas des tresses classiques un invariant algébrique de $\mathcal{VB}_n$ comme une application de $\mathcal{VB}_n$ dans un groupe abélien H ou, de manière équivalente, un morphisme de $\mathbb{Z}$ -modules de $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$ dans H . Tout invariant algébrique V de $\mathcal{VB}_n$ peut, encore une fois, être étendu à $\mathcal{SVB}_n$ en posant pour tout $\beta \in \mathcal{SVB}_n$ $V(\beta) = V(\delta_{\mathcal{VB}_n}(\beta))$. On émet la conjecture que ce morphisme est, comme nombre de ses analogues étudiés jusqu'à présent, injectif. Conformément à ce qui avait dit en définition 1.12, on continue d'appeler conjecture de Birman cette hypothèse.

Comme dans les cadres précédents, on peut vérifier en utilisant la présentation de $\mathcal{SVB}_n$ que le nombre de générateurs singuliers utilisés dans l'écriture d'une tresse virtuelle singulière est indépendant de cette écriture et qu'on peut définir sans ambiguïté le nombre de singularités d'un élément $\beta \in \mathcal{SVB}_n$ ainsi que, à $d \in \mathbb{N}$ fixé, définir le sous-ensemble $\mathcal{SVB}_n^{(d)}$ de $\mathcal{SVB}_n$ constitué par les éléments ayant exactement d singularités. Ceci permet donc de définir les invariants de Vassiliev pour les tresses virtuelles singulières : V est un invariant de Vassiliev de degré d de $\mathcal{VB}_n$ si $V(\mathcal{SVB}_n^{(d)}) \neq 0$ mais $V(\mathcal{SVB}_n^{(k)}) = 0$ pour tout $k > d$.

On peut également, comme dans le chapitre 1, définir les invariants de Vassiliev à l'aide de l'idéal engendré par les $\sigma_i - \sigma_i^{-1}$, cette fois-ci noté $\mathcal{J}_v$. Comme au chapitre 1, pour tout $d \in \mathbb{N}$ un invariant de Vassiliev d'ordre d est un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ -modules qui est non-nul sur $\mathcal{J}_v^d$ mais s'annule sur $\mathcal{J}_v^{d+1}$.

Il est à noter que dans le cadre virtuel, la notion d'invariant de Vassiliev qu'on a défini ici n'est pas la seule ; en effet dans [25] les auteurs introduisent une notion différente d'invariants de Vassiliev pour les nœuds virtuels qui se transpose naturellement dans le cadre des tresses virtuelles. Celle-ci est alors définie comme suit. On note $\mathcal{J}_{GPV}$ l'idéal bilatère de $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$ engendré par les $\sigma_i - \rho_i$ et les $\sigma_i^{-1} - \rho_i$. Un invariant de Vassiliev de degré d (avec $d \in \mathbb{N}$) au sens de Goussarov, Polyak et Viro est alors un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ -modules défini sur $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$ qui est non-nul sur $\mathcal{J}_{GPV}^d$ mais s'annule sur $\mathcal{J}_{GPV}^{d+1}$.

Remarquons que comme pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\sigma_i - \sigma_i^{-1} = \sigma_i - \rho_i - (\sigma_i^{-1} - \rho_i)$$

alors $\mathcal{J}_v \subseteq \mathcal{J}_{GPV}$ et $\mathcal{J}_v^d \subseteq \mathcal{J}_{GPV}^d$ pour tout entier d , de sorte que tout invariant de Vassiliev au sens de Goussarov, Polyak et Viro est également un invariant de Vassiliev en notre sens. A fortiori, tout invariant de Vassiliev au sens de Goussarov, Polyak et Viro, une fois restreint à $\mathbb{Z}[\mathcal{B}_n]$ redonne bien un invariant de Vassiliev classique et dans leur article les auteurs conjecturent que la réciproque est également vraie.

Ajoutons que, au contraire des $\sigma_i - \sigma_i^{-1}$ qui correspondaient au sein de l'algèbre de tresses (classiques ou virtuelles) aux singularités τ_i du monoïde de tresses (classiques ou virtuelles) singulières, aucune notion de singularité correspondant aux éléments $\sigma_i - \rho_i$ et $\sigma_i^{-1} - \rho_i$ n'a jusqu'ici été développée dans la littérature. Plus généralement, malgré son utilité combinatoire détaillée dans [25], on ne dispose pas d'interprétation topologique des éléments $\sigma_i - \rho_i$ et $\sigma_i^{-1} - \rho_i$ en théorie des tresses virtuelles. Mentionnons cependant le fait que ceci n'est plus le cas lorsque qu'on considère ces éléments dans le cadre des tresses *welded*, qui sont des quotients des groupes de tresses virtuelles admettant des interprétations topologiques en dimension 4. Dans ce cadre, il est possible de donner topologiquement du sens à un changement de croisement entre un croisement classique et un croisement virtuel, ce changement de croisement peut alors être représenté par un $\sigma_i - \rho_i$ ou un $\sigma_i^{-1} - \rho_i$, tout comme les $\sigma_i - \sigma_i^{-1}$ représentaient des changements de croisements entre un croisement et son inverse en théorie des tresses classiques.

Chapitre 4

Lien entre $\mathcal{SVB}_n$ et les monoïdes d'Artin singuliers

Le but de ce chapitre est d'établir une connexion entre la théorie des monoïdes singuliers d'Artin introduits au chapitre 2 et la théorie des monoïdes de tresses virtuelles singulières introduits au chapitre 3.

1. Le groupe KB_n

Notons KB_n le noyau de l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{VB}_n &\rightarrow \mathfrak{S}_n \\ \sigma_i &\mapsto 1 \\ \rho_i &\mapsto \rho_i. \end{aligned}$$

Une présentation de groupe pour KB_n a été trouvée par Rabenda dans son mémoire de master à l'Université de Bourgogne en 2003. Ce texte n'est plus disponible mais cette présentation a été démontrée ensuite dans [8].

Théorème 4.1 (Bardakov, Bellingeri [8, Proposition 17]). KB_n admet la présentation suivante.

- Générateurs : $\kappa_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$.
- Relations :
 - $\kappa_{i,j}\kappa_{j,k}\kappa_{i,j} = \kappa_{j,k}\kappa_{i,j}\kappa_{j,k}$;
 - $\kappa_{i,j}\kappa_{k,l} = \kappa_{k,l}\kappa_{i,j}$

où des lettres différentes désignent des indices différents.

De plus on dispose de la décomposition en produit semi-direct suivante :

$$\mathcal{VB}_n = KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit par permutation des indices sur les $\kappa_{i,j}$.

On donnera plus tard l'interprétations des générateurs $\kappa_{i,j}$ en termes des générateurs de $\mathcal{VB}_n$ pour l'instant nous regardons KB_n comme un groupe avec présentation, et particulier nous remarquons qu'il suit du théorème 4.1 que KB_n est un groupe d'Artin.

Notons pour tout $m \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $\mathcal{Z}_m = \{\kappa_{1,2}, \dots, \kappa_{m-1,m}\}$ et $\tilde{\mathcal{Z}}_m = \{\kappa_{1,2}, \dots, \kappa_{m-1,m}, \kappa_{m,1}\}$, conformément aux notations de [9]. Remarquons que les sous-groupes paraboliques de KB_n engendrés par $\mathcal{Z}_m$ et $\tilde{\mathcal{Z}}_m$ sont respectivement isomorphes à $A_{A_{m-1}}$ et à $A_{\tilde{A}_{m-1}}$, les isomorphismes étant donnés dans le premier cas par $\alpha_i \mapsto \kappa_{i,i+1}$ et dans le deuxième par $\tilde{\alpha}_i \mapsto \kappa_{i,i+1}$ pour $i = 1, \dots, m-1$ et $\tilde{\alpha}_0 \mapsto \kappa_{m,1}$.

Remarquons que l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur les générateurs de KB_n induit une action sur l'ensemble des parties de $\mathcal{K} = \{\kappa_{i,j}; 1 \leq i \neq j \leq n\}$. Pour tous $g \in \mathfrak{S}_n$ et $X \subseteq \mathcal{K}$, on note $g.X$ l'image de X sous l'action de g .

On dispose du résultat suivant qui est tiré de [9].

Proposition 4.2 (Bellingeri, De la Cruz, Paris [9, Lemme 3.3]). Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble $\{\kappa_{i,j}; 1 \leq i \neq j \leq n\}$ des générateurs de KB_n . Soit $X \subseteq \mathcal{K}$ tel que A_X , le sous-groupe engendré par X , soit un sous-groupe parabolique irréductible et libre d'infini de KB_n . Alors :

- soit il existe $g \in \mathfrak{S}_n$ et $m \in \llbracket 2; n \rrbracket$ tel que $X = g.Z_m$ et alors A_X est isomorphe à $A_{A_{m-1}}$,
- soit il existe $g \in \mathfrak{S}_n$ et $m \in \llbracket 2; n \rrbracket$ tel que $X = g.\tilde{Z}_m$ et alors A_X est isomorphe à $A_{\tilde{A}_{m-1}}$.

Remarque 4.3. Le groupe d'Artin KB_n n'est pas de type FC puisqu'il contient des sous-groupes paraboliques de type $\tilde{A}$, on ne peut donc pas lui appliquer le théorème 2.31 mais on peut utiliser le théorème 2.30 afin d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.4. Soit A_X un sous-groupe parabolique irréductible et libre d'infini de KB_n . Alors soit A_X est isomorphe à A_{A_m} avec $1 \leq m \leq n-1$, soit A_X est isomorphe à $A_{\tilde{A}_m}$ avec $2 \leq m \leq n-1$. Dans tous les cas, A_{Γ_X} possède la propriété FRZ et

$$SA_X \simeq SA_{\Gamma_X}.$$

2. Le monoïde SKB_n

Le but de cette section est d'étendre la proposition 4.1 au monoïde $\mathcal{SVB}_n$. Tout d'abord, en suivant la définition 2.10 nous pouvons associer au groupe d'Artin KB_n son extension singulière, le monoïde SKB_n .

On rappelle que le monoïde singulier SKB_n est défini comme étant le monoïde de présentation suivante.

- Générateurs : $\kappa_{i,j}, \kappa_{i,j}^{-1}, k_{i,j} \ 1 \leq i \neq j \leq n$.
- Relations :
 - $\kappa_{i,j}\kappa_{i,j}^{-1} = \kappa_{i,j}^{-1}\kappa_{i,j} = 1$;
 - $\kappa_{i,j}\kappa_{j,k}\kappa_{i,j} = \kappa_{j,k}\kappa_{i,j}\kappa_{j,k}$;
 - $\kappa_{i,j}\kappa_{k,l} = \kappa_{k,l}\kappa_{i,j}$
 - $\kappa_{i,j}k_{i,j} = k_{i,j}\kappa_{i,j}$;
 - $k_{i,j}k_{k,l} = k_{k,l}k_{i,j}$
 - $k_{i,j}\kappa_{j,k}\kappa_{i,j} = \kappa_{j,k}\kappa_{i,j}k_{j,k}$
 où des lettres différentes désignent des indices différents.

On peut donc énoncer le résultat suivant.

Proposition 4.5. Le monoïde $\mathcal{SVB}_n$ admet la décomposition en produit semi-direct

$$\mathcal{SVB}_n = SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit par permutation des indices sur les $\kappa_{i,j}$ et $k_{i,j}$.

Les démonstrations de cette section font appel à la notion de groupe enveloppant ainsi qu'à certains résultats s'y rapportant. La définition de groupe enveloppant d'un monoïde ainsi que les résultats en questions sont détaillés dans l'annexe B. On note $GSVB_n$ le groupe enveloppant de SVB_n et $GSKB_n$ le groupe enveloppant du monoïde d'Artin singulier SKB_n .

La démonstration de la proposition 4.5 se fait en trois étapes.

- Montrer qu'il existe un sous-groupe K de $GSVB_n$ tel que le groupe $GSVB_n$ se décompose sous la forme $GSVB_n = K \rtimes \mathfrak{S}_n$;
- déterminer une présentation de K qui coïncide avec celle de $GSKB_n$;
- vérifier que le sous-monoïde $SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ de $GSVB_n = GSKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ coïncide bien avec SVB_n .

On note φ l'homomorphisme de monoïdes de $GSVB_n$ dans $\mathfrak{S}_n$ défini par $\varphi(\sigma_i) = \varphi(\tau_i) = 1$ et $\varphi(\rho_i) = (i \ i+1)$, où $(a \ b)$ désigne la transposition de a et b pour tous $a, b \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et on note K le noyau de ce morphisme. On a alors le résultat suivant.

Lemme 4.6. Le groupe $GSVB_n$ possède la décomposition en produit semi-direct suivante :

$$GSVB_n = K \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

DÉMONSTRATION. Le morphisme φ possède une section $s : \mathfrak{S}_n \rightarrow GSVB_n$ défini par $s((i \ i+1)) = \rho_i$ ce qui implique que la suite exacte courte suivante

$$1 \rightarrow K \rightarrow GSVB_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1$$

est scindée, ce qui est équivalent à une décomposition en produit semi-direct sous la forme

$$GSVB_n = K \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

□

De plus, la section s permet d'identifier $\mathfrak{S}_n$ avec le sous groupe de $GSVB_n$ engendré par $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$.

Pour montrer que K possède bien la présentation souhaitée, on utilise la méthode de Reidemeister-Schreier, qui est une méthode servant à déterminer à partir d'une présentation de groupe donné, une présentation d'un de ses sous-groupes. La méthode en question est détaillé dans les paragraphes qui suivent. Concernant la preuve de son bon fonctionnement, celle-ci peut être trouvée par exemple dans [35], ou encore dans [27].

Soit G un groupe donné par une présentation. On note $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ les générateurs de cette présentation et on suppose que les relations sont données sous la forme $r_1 = 1, \dots, r_q = 1$ où $r_1, \dots, r_q$ sont des mots réduits sur l'alphabet $X^\pm = \{x_1^\pm, \dots, x_p^\pm\}$. On note $F(X)$ le groupe libre engendré par X .

Soit H un sous-groupe de G . Une transversale à droite de H dans G est un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $H \backslash G$. Une transversale à droite de Schreier

T de H dans G est un ensemble de mots réduits sur l'alphabet $X^\pm$, dont l'image dans le groupe G donne une transversale de H dans G , et tel que pour tout $t \in T$, tout préfixe de t est également un élément de T . On peut démontrer que tout sous-groupe de G possède une transversale de Schreier (voir [35, 27]).

On se fixe une transversale de Schreier de H qu'on note T . On note $-$ l'application qui va du groupe libre $F(X)$ dans T qui envoie un élément w sur son représentant $\bar{w}$ dans T . Pour tout $t \in T$ et pour tout w mot réduit sur $X^\pm$, on note $s_{t,w} = (tw)(\bar{t}\bar{w})^{-1}$. Le sous-groupe H est alors donné par une présentation dont l'ensemble de générateurs est constitué des s_{t,x_i} avec $t \in T$, $1 \leq i \leq p$ et $s_{t,x_i} \neq 1$. Pour déterminer l'ensemble des relations on définit le processus de réécriture suivant. Considérons donc un mot réduit sur $X^\pm$:

$$w = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_\nu^{\varepsilon_\nu}$$

où $\varepsilon_l = \pm 1$, et $a_l \in X$. On définit le mot

$$\mathcal{R}(w) = s_{t_1, a_1}^{\varepsilon_1} s_{t_2, a_2}^{\varepsilon_2} \dots s_{t_\nu, a_\nu}^{\varepsilon_\nu}$$

écrit avec les générateurs de H où t_j est un représentant du $(j-1)$ -ième segment initial du mot w si $\varepsilon_j = 1$ et t_j est un représentant du j -ième segment initial du mot w si $\varepsilon_j = -1$. Les relations définissant le groupe H sont alors les relations $\mathcal{R}(tr_j t^{-1}) = 1$ avec $1 \leq j \leq q$ et $t \in T$.

Il faut préciser que la méthode de Reidemeister-Schreier construit en général des présentations de grande taille qu'il est parfois nécessaire de simplifier en utilisant les relations du groupe G . On applique désormais la méthode de Reidemeister-Schreier au groupe K ce qui va mener au résultat suivant.

Lemme 4.7. Le sous-groupe K de $GSVB_n$ admet la présentation suivante.

— Générateurs : $\kappa_{i,j}, k_{i,j}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$.

— Relations :

- $\kappa_{i,j} \kappa_{j,k} \kappa_{i,j} = \kappa_{j,k} \kappa_{i,j} \kappa_{j,k}$;
- $\kappa_{i,j} \kappa_{k,l} = \kappa_{k,l} \kappa_{i,j}$;
- $k_{i,j} \kappa_{j,k} \kappa_{i,j} = \kappa_{j,k} \kappa_{i,j} k_{j,k}$;
- $k_{i,j} \kappa_{k,l} = \kappa_{k,l} k_{i,j}$;
- $k_{i,j} \kappa_{i,j} = \kappa_{i,j} k_{i,j}$;
- $k_{i,j} k_{k,l} = k_{k,l} k_{i,j}$

où des lettres distinctes représentent des indices distincts.

Afin de rendre la preuve plus lisible, on commence par définir les générateurs en question :

- $\kappa_{i,i+1} = \sigma_i$ et $\kappa_{i,j} = \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1}$ pour $1 \leq i < j-1 \leq n-1$;
- $\kappa_{i+1,i} = \rho_i \sigma_i \rho_i$ et $\kappa_{j,i} = \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \rho_i \sigma_i \rho_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1}$ pour $1 \leq i < j-1 \leq n-1$;
- $k_{i,i+1} = \tau_i$ et $k_{i,j} = \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \tau_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1}$ pour $1 \leq i < j-1 \leq n-1$;
- $k_{i+1,i} = \rho_i \tau_i \rho_i$ et $k_{j,i} = \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \rho_i \tau_i \rho_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1}$ pour $1 \leq i < j-1 \leq n-1$.

On dispose d'une action de $\mathfrak{S}_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ sur l'ensemble $\{\kappa_{i,j}, k_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ par permutation des indices, i.e. $\kappa_{i,j}^\rho = \kappa_{\rho(i),\rho(j)}$ et $k_{i,j}^\rho = k_{\rho(i),\rho(j)}$, pour tout $\rho \in \mathfrak{S}_n$ ainsi que du lemme suivant.

Lemme 4.8. Soit $\rho \in \mathfrak{S}_n$.

- L'élément $\rho \kappa_{i,j} \rho^{-1}$ est égal à $\kappa_{\rho(i),\rho(j)}$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n-1$.
- L'élément $\rho k_{i,j} \rho^{-1}$ est égal à $k_{\rho(i),\rho(j)}$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n-1$.

DÉMONSTRATION. La première assertion suit du lemme 16 de [8] dans le cas de $\mathcal{VB}_n$. On traite le cas des générateurs singuliers en s'inspirant de la preuve dans les cas des générateurs classiques, donnée dans [8].

Il est suffisant de prouver le résultat pour les générateurs ρ_k , for $1 \leq k \leq n-1$. Si $\rho_k \neq \rho_i, \rho_{i+1}, \rho_{i-1}$ alors ρ_k et τ_i commutent et $\rho_k \tau_i \rho_k = \tau_i = k_{i,i+1} = k_{\rho(i),\rho(i+1)}$.

Sinon $\rho_{i+1} \tau_i \rho_{i+1} = k_{i,i+2}$, $\rho_i \tau_i \rho_i = k_{i+1,i}$ ou $\rho_{i-1} \tau_i \rho_{i-1} = \rho_i \tau_{i-1} \rho_i = k_{i-1,i}$.

Soit alors $k_{i,j} = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1}$ avec $1 \leq i < j-1 \leq n-1$.

- i) Si $k > j$ ou $k < i-1$ alors ρ_k commute avec $k_{i,j}$ et le résultat est vrai.
- ii) Si $k = j$ alors $\rho_j k_{i,j} \rho_j = k_{i,j+1}$ par définition et comme $\rho_j(i) = i, \rho_j(j) = j+1$ le résultat est vrai.
- iii) Si $k = j-1$ on vérifie que $\rho_{j-1} k_{i,j} \rho_{j-1} = k_{i,j-1} = k_{\rho_{j-1}(i),\rho_{j-1}(j)}$.
- iv) Si $i < k < j-1$ alors en remarquant que $\rho_k \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \rho_{k+1}$ et que $\rho_{k+1} \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} = \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \rho_k$, il vient $\rho_k k_{i,j} \rho_k^{-1} = k_{i,j} = k_{\rho_k(i),\rho_k(j)}$.
- v) Si $k = i$, alors

$$\rho_i \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \tau_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \rho_i = \rho_{j-1} \cdots \rho_i \rho_{i+1} \tau_i \rho_{i+1} \rho_i \cdots \rho_{j-1}.$$

Comme on dispose de l'égalité $\rho_i \rho_{i+1} \tau_i \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_{i+1}$ alors on a $\rho_i k_{i,j} \rho_i = k_{i+1,j} = k_{\rho(i),\rho(j)}$.

- vi) Si $k = i-1$ alors

$$\rho_{i-1} \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \tau_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \rho_{i-1} = \rho_{j-1} \cdots \rho_i \rho_{i-1} \tau_i \rho_{i-1} \rho_i \cdots \rho_{j-1}$$

et comme $\rho_{i-1} \sigma_i \rho_{i-1} = \rho_i \sigma_{i-1} \rho_i$ alors $\rho_{i-1} k_{i,j} \rho_{i-1} = k_{i-1,j} = k_{\rho(i),\rho(j)}$.

Les cas des $k_{i+1,i}$ et $k_{j,i}$ avec $1 \leq i < j-1 \leq n-1$ peuvent être démontrés de manière similaires. $\square$

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.7. On applique maintenant la méthode de Reidemeister-Schreier au sous-groupe K . L'ensemble quotient $K \backslash GSVB_n$ est par définition de K le groupe $\mathfrak{S}_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ dont un exemple connue (voir par exemple [8]) de transversale de Schreier est

$$\Lambda_n = \{(\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_1-q_1})(\rho_{i_2} \cdots \rho_{i_2-q_2}) \cdots (\rho_{i_p} \cdots \rho_{i_p-q_p}); 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n-1, 0 \leq q_j < i_j\}.$$

On reprend les notations utilisées dans la description de la méthode de Reidemeister-Schreier. Le sous-groupe K est alors généré par les $s_{\rho,\beta} = (\rho\beta)(\overline{\rho\beta})^{-1}$ avec $\rho \in \Lambda_n$ et β générateur de $GSVB_n$.

On a alors pour tout $\rho \in \mathfrak{S}_n$ et pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$:

- $s_{\rho,\rho_i} = 1$,
- $s_{\rho,\sigma_i} = (\rho\sigma_i)(\overline{\rho\sigma_i})^{-1} = (\rho\sigma_i)(\overline{\rho})^{-1} = \rho\sigma_i\rho^{-1} = \kappa_{\rho(i),\rho(i+1)}$,

$$— s_{\rho, \tau_i} = (\rho \tau_i)(\overline{\rho \tau_i})^{-1} = (\rho \tau_i)(\bar{\rho})^{-1} = \rho \tau_i \rho^{-1} = k_{\rho(i), \rho(i+1)}.$$

Chaque générateur de K est donc un élément de la forme $\kappa_{i,j}$ ou $k_{i,j}$ et réciproquement chaque $\kappa_{i,j}, k_{i,j}$ est un générateur de K car $\mathfrak{S}_n$ agit 2-transitivement sur $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

Il reste à déterminer les relations de K . On note r_p , $1 \leq p \leq 13$, les mots suivants (dont on ignore la dépendance en les indices i, j afin de simplifier la rédaction) :

$$\begin{aligned} — r_1 &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}, \\ — r_2 &= \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}, \quad |i-j| \geq 2, \\ — r_3 &= \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i, \\ — r_4 &= \sigma_i \rho_j \sigma_i^{-1} \rho_j^{-1}, \quad |i-j| \geq 2, \\ — r_5 &= \rho_i^2, \\ — r_6 &= \rho_i \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1} \rho_{i+1}^{-1}, \\ — r_7 &= \rho_i \rho_j \rho_i^{-1} \rho_j^{-1}, \quad |i-j| \geq 2, \\ — r_8 &= \tau_i \tau_j \tau_i^{-1} \tau_j^{-1}, \quad |i-j| \geq 2, \\ — r_9 &= \tau_i \sigma_j \tau_i^{-1} \sigma_j^{-1}, \quad |i-j| \geq 2, \\ — r_{10} &= \tau_i \sigma_i \tau_i^{-1} \sigma_i^{-1}, \\ — r_{11} &= \sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \tau_{i+1}^{-1}, \\ — r_{12} &= \tau_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \tau_i^{-1} \rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1}, \\ — r_{13} &= \tau_i \rho_j \tau_i^{-1} \rho_j^{-1}, \quad |i-j| \geq 2. \end{aligned}$$

Les relations définissant K sont alors les relations

$$\underbrace{\mathcal{R}(\rho r_p \rho^{-1})}_{r_{p,\rho}} = 1, \quad \rho \in \Lambda_n \text{ et } 1 \leq i \leq 13.$$

Il a déjà été démontré dans [8] que les $r_{1,\rho}$ donnent les mots $\kappa_{i,j} \kappa_{j,k} \kappa_{i,j}^{-1} \kappa_{j,k}^{-1} \kappa_{i,j}^{-1} \kappa_{j,k}^{-1}$, que $r_{2,\rho}$ donnent $\kappa_{i,j} \kappa_{k,l} \kappa_{i,j}^{-1} \kappa_{k,l}^{-1}$ et que les $r_{p,\rho}$ pour $p = 3, 4, 5, 6, 7$ donnent tous le mot vide.

Il reste à déterminer $r_{p,\rho}$ pour $8 \leq p \leq 13$. Comme il a déjà été noté ci-dessus $s_{\rho, \sigma_i} = \rho s_{1, \sigma_i} \rho^{-1} = \kappa_{\rho(i), \rho(i+1)}$ et $s_{\rho, \tau_i} = \rho s_{1, \tau_i} \rho^{-1} = \rho \tau_i \rho^{-1} = k_{\rho(i), \rho(i+1)}$, par conséquent pour tout p , $r_{p,\rho} = \rho r_{p,1} \rho^{-1}$ et il suffit dans un premier temps de calculer les $r_{p,1}$.

Dans le cas $p = 8$, on obtient :

$$r_{8,1} = \mathcal{R}(r_8) = s_{e, \tau_i} s_{\tau_i, \tau_j} s_{\tau_i \tau_j \tau_i^{-1}, \tau_i}^{-1} s_{\tau_8, \tau_j}^{-1} = k_{i, i+1} k_{j, j+1} k_{i, i+1}^{-1} k_{j, j+1}^{-1}$$

et

$$r_{8,\rho} = \rho k_{i, i+1} \kappa_{j, j+1} k_{i, i+1}^{-1} \kappa_{j, j+1}^{-1} \rho^{-1} = k_{\rho(i), \rho(i+1)} \kappa_{\rho(j), \rho(j+1)} k_{\rho(i), \rho(i+1)}^{-1} \kappa_{\rho(j), \rho(j+1)}^{-1}$$

ce qui au final donne les mots $k_{i,j} \kappa_{k,l} k_{i,j}^{-1} \kappa_{k,l}^{-1}$ où des lettres distinctes renvoient à des indices distincts.

Dans le cas $p = 9$, on obtient :

$$r_{9,1} = \mathcal{R}(r_9) = s_{e,\tau_i} s_{\overline{\tau_i},\sigma_j} s_{\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}},\tau_i}^{-1} s_{\overline{\tau_9},\sigma_j}^{-1} = k_{i,i+1} \kappa_{j,j+1} k_{i,i+1}^{-1} \kappa_{j,j+1}^{-1}$$

et

$$r_{8,\rho} = \rho k_{i,i+1} \kappa_{j,j+1} k_{i,i+1}^{-1} \kappa_{j,j+1}^{-1} \rho^{-1} = k_{\rho(i),\rho(i+1)} \kappa_{\rho(j),\rho(j+1)} k_{\rho(i),\rho(i+1)}^{-1} \kappa_{\rho(j),\rho(j+1)}^{-1}$$

ce qui qui au final donne les mots $k_{i,j}^{-1} \kappa_{k,l}^{-1} k_{i,j} \kappa_{k,l}$ où des lettres distinctes renvoient à des indices distincts.

Dans le cas $p = 10$, on obtient :

$$r_{10,1} = \mathcal{R}(r_{10}) = s_{e,\tau_i} s_{\overline{\tau_i},\sigma_i} s_{\overline{\tau_i\sigma_i\tau_i^{-1}},\tau_i}^{-1} s_{\overline{\tau_{10}},\sigma_i}^{-1} = k_{i,i+1} \kappa_{i,i+1} k_{i,i+1}^{-1} \kappa_{i,i+1}^{-1}$$

et

$$r_{10,\rho} = \rho k_{i,i+1} \kappa_{i,i+1} k_{i,i+1}^{-1} \kappa_{i,i+1}^{-1} \rho^{-1} = k_{\rho(i),\rho(i+1)} \kappa_{\rho(i),\rho(i+1)} k_{\rho(i),\rho(i+1)}^{-1} \kappa_{\rho(i),\rho(i+1)}^{-1}$$

ce qui qui au final donne les mots $k_{i,j}^{-1} \kappa_{i,j}^{-1} k_{i,j} \kappa_{i,j}$ où des lettres distinctes renvoient à des indices distincts.

Dans le cas $p = 11$, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{11,1} = \mathcal{R}(r_{11}) &= s_{\overline{\sigma_i},\sigma_{i+1}} s_{\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}},\tau_i} s_{\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\tau_i\sigma_{i+1}^{-1}},\sigma_{i+1}}^{-1} s_{\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\tau_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}},\sigma_i}^{-1} s_{\overline{\tau_{11}},\tau_{i+1}}^{-1} \\ &= \kappa_{i,i+1} \kappa_{i+1,i+2} k_{i,i+1} \kappa_{i+1,i+2}^{-1} \kappa_{i,i+1}^{-1} k_{i+1,i+2}^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_{11,\rho} &= \rho \kappa_{i,i+1} \kappa_{i+1,i+2} k_{i,i+1} \kappa_{i+1,i+2}^{-1} \kappa_{i,i+1}^{-1} k_{i+1,i+2}^{-1} \rho^{-1} \\ &= \kappa_{\rho i,\rho i+1} \kappa_{\rho i+1,\rho i+2} k_{\rho i,\rho i+1} \kappa_{\rho(i+1),\rho(i+2)}^{-1} \kappa_{\rho(i),\rho(i+1)}^{-1} k_{\rho(i+1),\rho(i+2)}^{-1} \end{aligned}$$

ce qui qui au final donne les mots $\kappa_{i,j} \kappa_{j,k} k_{i,j} \kappa_{j,k}^{-1} \kappa_{i,j}^{-1} k_{j,k}^{-1}$ où des lettres distinctes renvoient à des indices distincts.

Dans le cas $p = 12$, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{12,1} = \mathcal{R}(r_{12}) &= s_{e,\tau_{i+1}} s_{\overline{\tau_{i+1}},\rho_i} s_{\overline{\tau_{i+1}\rho_i},\rho_{i+1}} s_{\overline{\tau_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\tau_i^{-1}},\tau_i}^{-1} s_{\overline{\tau_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\tau_i^{-1}\rho_{i+1}^{-1}},\rho_{i+1}}^{-1} s_{\overline{\tau_{12}},\rho_i}^{-1} \\ &= k_{i+1,i+2} \cdot e \cdot e \cdot k_{i+1,i+2}^{-1} \cdot e \cdot e \\ &= e. \end{aligned}$$

D'où les $r_{12,\rho}$ sont égaux aux mot vide et n'engendrent aucune relation.

Enfin dans le cas $p = 13$, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{13,1} = \mathcal{R}(r_{13}) &= s_{e,\tau_i} s_{\overline{\tau_i},\rho_j} s_{\overline{\tau_i\rho_j\tau_i^{-1}},\tau_i}^{-1} s_{\overline{\tau_{13}},\rho_j}^{-1} \\ &= k_{i,i+1} \cdot e \cdot k_{i,i+1}^{-1} \cdot e \\ &= e. \end{aligned}$$

D'où les $r_{13,\rho}$ sont égaux aux mot vide et n'engendrent aucune relation.

On obtient bien finalement la présentation recherchée. $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.5. En combinant le lemme 4.6 et le lemme 4.7, il vient

$$G\mathcal{SVB}_n \simeq GSKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

Soit $I : GSKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n \rightarrow G\mathcal{SVB}_n$ l'isomorphisme correspondant et ι sa restriction au sous-monoïde $SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$. Comme I est injectif alors ι aussi et par conséquent ι est un isomorphisme de $SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ sur son image.

D'un autre côté, par définition de ι , pour tous $1 \leq i < j \leq n-1$:

- $\iota(\kappa_{i,j}) = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \in \mathcal{SVB}_n$;
- $\iota(\kappa_{j,i}) = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \rho_i \sigma_i \rho_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \in \mathcal{SVB}_n$;
- $\iota(k_{i,j}) = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \tau_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \in \mathcal{SVB}_n$;
- $\iota(k_{j,i}) = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \rho_i \tau_i \rho_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \in \mathcal{SVB}_n$;

et pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\iota(\rho_i) = \rho_i \in \mathcal{SVB}_n$. D'où $Im(\iota) \subseteq \mathcal{SVB}_n$. Réciproquement $\sigma_i = \iota(\kappa_{i,i+1})$, $\tau_i = \iota(k_{i,i+1})$, $\rho_i = \iota(\rho_i) \in Im(\iota)$ d'où $\mathcal{SVB}_n \subseteq Im(\iota)$ et au final $Im(\iota) = \mathcal{SVB}_n$.

On en conclut que ι est bien un isomorphisme entre $\mathcal{SVB}_n$ et $SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$. $\square$

3. Réductions de problèmes à SKB_n

3.1. Conjecture de Birman. On rappelle qu'on peut définir un morphisme de désingularisation de $\mathcal{VB}_n$ dans $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$, qu'on note $\delta_{\mathcal{VB}_n}$ et qui est défini par

$$\delta_{\mathcal{VB}_n}(\sigma_i^{\pm 1}) = \sigma_i^{\pm 1}, \delta_{\mathcal{VB}_n}(\rho_i) = \rho_i \text{ et } \delta_{\mathcal{VB}_n}(\tau_i) = \sigma_i - \sigma_i^{-1}.$$

. De même, soit $\delta_{KB_n} : SKB_n \rightarrow \mathbb{Z}[KB_n]$ le morphisme de désingularisation pour les monoïdes d'Artin défini dans le chapitre 2. Rappelons aussi que la conjecture de Birman pour $\mathcal{VB}_n$ (resp. pour KB_n) n'est autre que à l'hypothèse de l'injectivité de $\delta_{\mathcal{VB}_n}$ (resp. δ_{KB_n}).

Proposition 4.9. La conjecture de Birman est vraie pour $\mathcal{VB}_n$ si, et seulement si, elle est vraie pour KB_n .

DÉMONSTRATION. On identifie $\mathcal{SVB}_n$ avec $SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

Commençons par remarquer que pour tout $k \in SKB_n$ et $g \in \mathfrak{S}_n$

$$\delta_{\mathcal{VB}_n}(kg) = \delta_{KB_n}(k)g.$$

De ce fait δ_{KB_n} coïncide avec la restriction de $\delta_{\mathcal{VB}_n}$ à KB_n ce qui donne le premier sens de l'implication.

On suppose alors δ_{KB_n} est injectif. Grâce à la décomposition $\mathcal{SVB}_n \simeq SKB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$, on peut également identifier, comme dans la démonstration de la proposition 2.45, le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$ avec le produit tensoriel $\mathbb{Z}[KB_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$.

Soit alors $k, k' \in SKB_n$ et $g, g' \in \mathfrak{S}_n$ tels que

$$\delta_{\mathcal{VB}_n}(kg) = \delta_{\mathcal{VB}_n}(k'g')$$

i.e.

$$\delta_{KB_n}(k) \otimes g = \delta_{KB_n}(k') \otimes g'.$$

Par le lemme 2.46, il existe $\mu \in \mathbb{Q}$ tel que $\delta_{KB_n}(k) = \mu^{-1}\delta_{KB_n}(k')$ et $g = \mu g'$. On a nécessairement $\mu = 1$ du fait que $g = \mu g'$ et donc $\delta_{KB_n}(k) = \delta_{KB_n}(k')$, comme δ_{KB_n} est injectif on en déduit que $k = k'$ et au final $kg = k'g'$. On a donc montré que $\delta_{\mathcal{VB}_n}$ est injectif. $\square$

Théorème 4.10. Les sous-groupes paraboliques irréductibles libres d'infini de KB_n vérifient la conjecture de Birman.

DÉMONSTRATION. Tous les sous-groupes paraboliques irréductibles libres d'infini de KB_n sont des groupes d'Artin de type A ou des groupes d'Artin de type $\tilde{A}$ (proposition 4.4) et ces groupes vérifient la conjecture de Birman. $\square$

De ce fait la conjecture de Birman pour les tresses virtuelles est ramené à un cas particulier de la conjecture de Birman pour une certaine famille de groupes d'Artin.

3.2. Invariants de Vassiliev. On dispose également de connexions entre les invariants de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ et ceux de KB_n définis dans les deux chapitres précédents.

Proposition 4.11. Les invariants de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ séparent les éléments de $\mathcal{VB}_n$ si et seulement si les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de KB_n .

DÉMONSTRATION. Un invariant de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ donne par restriction à $\mathbb{Z}[KB_n]$ un invariant de Vassiliev de KB_n donc le sens direct de l'équivalence est triviale.

Avant d'établir la réciproque rappelons que puisque $\mathcal{VB}_n = KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ toute tresse $\beta \in \mathcal{VB}_n$ peut s'écrire de manière unique sous la forme d'un produit $k_\beta \theta_\beta$ où $k_\beta \in KB_n$ et $\theta_\beta \in \mathfrak{S}_n$, et que l'isomorphisme entre $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$ et $\mathbb{Z}[KB_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ est donné par la correspondance

$$\beta \longleftrightarrow k_\beta \otimes \theta_\beta$$

entre les bases de $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$ et $\mathbb{Z}[KB_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ des deux $\mathbb{Z}$ -modules. On note p_{KB_n} l'application linéaire de $\mathbb{Z}[KB_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ dans $\mathbb{Z}[KB_n]$ qui envoie $k \otimes \theta$ sur k .

Supposons alors que les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de KB_n , et soient $\beta = k\theta$, $\beta' = k'\theta'$ deux éléments distincts où $k, k' \in KB_n$ et $\theta, \theta' \in \mathfrak{S}_n$. Alors si $\theta \neq \theta'$, le linéarisé $\Phi : \mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ de $\varphi : \mathcal{VB}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ (théorème 4.1) est un invariant de Vassiliev de degré 0 qui distingue β et β' . Sinon, on a nécessairement $k \neq k'$ et donc il existe un invariant de Vassiliev V tel que $V(k) \neq V(k')$ et en identifiant $\mathbb{Z}[\mathcal{VB}_n]$ à $\mathbb{Z}[KB_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$, l'application $V \circ p_{KB_n}$ est un invariant de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ qui distingue β et β' . $\square$

Avant d'énoncer une deuxième connexion entre les invariants de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ et ceux de KB_n rappelons qu'on dit que les invariants de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ (resp. KB_n) séparent les éléments de $\mathcal{SVB}_n$ (resp. SKB_n) si pour toute paire β, β' d'éléments distincts dans $\mathcal{SVB}_n$ (resp. SKB_n) il existe un invariant de Vassiliev V tel que $V \circ \delta_{\mathcal{VB}_n}(\beta) \neq V \circ \delta_{\mathcal{VB}_n}(\beta')$ (resp. $V \circ \delta_{KB_n}(\beta) \neq V \circ \delta_{KB_n}(\beta')$). Nous avons besoin aussi du lemme préparatoire suivant.

Lemme 4.12. On se place sous l'hypothèse que les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de SKB_n . Pour tout $k \in SKB_n$, il existe un invariant de Vassiliev V tel que $V(k) \neq 0$.

DÉMONSTRATION. On note e le neutre de KB_n , on choisit $k' \in KB_n$ avec $k' \neq e$ et on note $m_{k'}$ l'application $\mathbb{Z}$ -linéaire de $\mathbb{Z}[KB_n]$ dans $\mathbb{Z}[KB_n]$ définie pour tout $v \in \mathbb{Z}[KB_n]$ par

$$m_{k'}(v) = k'v.$$

Comme $k' \neq e$ alors $k'k \neq k$ et comme les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de SKB_n , alors il existe un invariant de Vassiliev V tel que $V(k) \neq V(k'k)$.

Alors

- soit $V(k) \neq 0$ et alors V est l'invariant recherché,
- soit $V(k) = 0$ et dans ce cas $(V \circ m_{k'})(k) = V(k'k) \neq V(k) = 0$ et $V \circ m_{k'}$, qui est encore un invariant de Vassiliev, est l'invariant recherché.

□

Proposition 4.13. Les invariants de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ séparent les éléments de $\mathcal{SVB}_n$ si et seulement si les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de SKB_n .

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que si les invariants de Vassiliev d'un groupe G , où G est un groupe d'Artin ou un groupe de tresses virtuelles, séparent les éléments du monoïde singulier associé SG alors nécessairement le morphisme de désingularisation $\delta_G : SG \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ est injectif et comme l'injectivité de $\delta_{\mathcal{VB}_n}$ et de δ_{KB_n} est équivalente, on peut supposer dans les deux implications que ces deux morphismes sont injectifs. De plus si V est un invariant de Vassiliev de KB_n , alors $V \otimes Id_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]} : k \otimes \theta \mapsto V(k) \otimes \theta$ est un invariant de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$.

Comme déjà dit, un invariant de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ donne par restriction à $\mathbb{Z}[KB_n]$ un invariant de Vassiliev de KB_n , le sens direct de l'équivalence est donc encore triviale.

Supposons alors que les invariants de Vassiliev de KB_n séparent les éléments de SKB_n , et soient $\beta = k\theta$, $\beta' = k'\theta'$ deux éléments distincts où $k, k' \in SKB_n$ et $\theta, \theta' \in \mathfrak{S}_n$. Alors si $k \neq k'$ comme $\delta_{\mathcal{VB}_n}$ et δ_{KB_n} sont injectifs et que $\delta_{\mathcal{VB}_n}(\beta) = \delta_{\mathcal{VB}_n}(k_\beta\theta_\beta) = \delta_{KB_n}(k_\beta)\theta_\beta$ et $\delta_{\mathcal{VB}_n}(\beta') = \delta_{KB_n}(k_{\beta'})\theta_{\beta'}$, il s'en suit que si V est un invariant de Vassiliev qui sépare k et k' alors $V \circ p_{KB_n}$ est un invariant de Vassiliev de $\mathcal{VB}_n$ qui distingue β et β' .

Si $k = k'$ on a nécessairement $\theta \neq \theta'$ et si V est un invariant de Vassiliev de KB_n tel que $V(k) \neq 0$ (qui existe d'après le lemme 4.12) alors $V \otimes Id_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]}$ est un invariant de Vassiliev qui sépare β et β' . □

4. Perspectives

On repose donc pour le groupe de tresses virtuelles à n brins $\mathcal{VB}_n$, les deux questions qui ont constitué le fil rouge de cette thèse :

- la conjecture de Birman est-elle vraie pour le groupe $\mathcal{VB}_n$?
- les invariants de Vassiliev des tresses virtuelles séparent-ils les éléments de $\mathcal{VB}_n$?

On a vu dans la section précédente que pour répondre à ces questions, il suffirait d'y répondre pour le groupe d'Artin KB_n . Or par la proposition 4.2 les sous-groupes paraboliques irréductibles et libres d'infini de KB_n sont soit des groupes de tresses, soit des

groupes d'Artin de type $\tilde{A}$, et on sait qu'on peut répondre par l'affirmative à ces deux questions pour ces deux famille de groupes (voir les théorèmes 1.13, 1.20, 2.38 et 2.48). Cela incite à penser que les réponses à ces questions sont encore positives pour le groupe KB_n . De plus, le fait que KB_n peut être reconstruit par une succession de produits cartésiens et de produits amalgamés à partir de groupes de tresses et groupes d'Artin de type $\tilde{A}$ offre une piste pour le démontrer ; en effet s'il est possible de prouver que, pour un groupe d'Artin, le fait de vérifier la conjecture de Birman ou d'avoir ses éléments séparés par des invariants de Vassiliev sont des propriétés stables par produit cartésien ou par produit amalgamé alors cela suffirait pour conclure le cas KB_n . Cette approche a déjà été amorcée avec la proposition 2.45.

À ces problématiques on peut ajouter celle de l'étude des invariants de Vassiliev au sens de Goussarov, Polyak et Viro détaillés à la fin du chapitre 3. Comme il a déjà été mentionné, tout invariant de Vassiliev au sens de Goussarov, Polyak et Viro est un invariant de Vassiliev en notre sens et montrer la séparabilité des tresses virtuelles par leurs invariants impliquerait la séparabilité des tresses virtuelles par les nôtres. De plus, on peut se poser la question de l'existence de singularités qui joueraient un rôle similaire au τ_i dans cette théorie et de l'injectivité du morphisme de désingularisation qui en résulterait.

Combinatoire des monoïdes

1. Monoïdes quotients

Cette annexe décrit les notions fondamentales de la combinatoire des monoïdes, qui est utilisée tout au long de la thèse ainsi que dans l'annexe B.

Définition A.1. Soit M un monoïde. Une congruence $\equiv$ sur M est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication de M i.e. une relation d'équivalence telle que pour tous $a, b, c, d \in M$:

$$(a \equiv c \text{ et } b \equiv d) \Rightarrow ab \equiv cd.$$

Proposition A.2. On se fixe un monoïde M , $\equiv$ une congruence sur M et on note pour tout $m \in M$, $\overline{m}$ la classe de m dans l'ensemble quotient $M/\equiv$.

Le quotient $M/\equiv$ peut être muni d'une multiplication définie pour tous $\overline{m}, \overline{n} \in M/\equiv$ par

$$\overline{m}.\overline{n} = \overline{mn}.$$

La projection canonique $\pi : M \rightarrow M/\equiv$ est alors un homomorphisme surjectif de monoïdes.

2. Présentations de monoïdes

Définition A.3. Soit E un ensemble. Le monoïde libre sur E , qu'on note $F^+(E)$, est le monoïde dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des mots sur l'alphabet E (en incluant le mot vide) et dont l'opération est le produit de concaténation. Le neutre de ce monoïde est alors le mot vide.

Définition A.4. Soit E un ensemble quelconque, et $\sim, \sim'$ deux relations d'équivalences sur E . On dit que la relation $\sim$ est plus fine que $\sim'$ si pour tous $x, y \in E$:

$$(x \sim y) \Rightarrow (x \sim' y).$$

Proposition A.5. Soit E un ensemble, et $(r_i)_{i \in I}, (r'_i)_{i \in I}$ deux familles de mots sur l'alphabet E , indexées par un même ensemble I . Il existe une unique congruence $\equiv$ sur $F^+(E)$ telle que :

- (1) pour tout $i \in I$ $r_i \equiv r'_i$,
- (2) $\equiv$ est la plus fine congruence qui vérifie (1).

Cette congruence est définie comme suit.

Si $w, w' \in F^+(E)$, on note $w \equiv_0 w'$ si w contient un r_i comme sous-mot et w' est obtenu à partir de w en substituant le sous-mot r_i par r'_i , ou inversement.

Pour tout $w, w' \in F^+(E)$, on a $w \equiv w'$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $w_0, w_1, \dots, w_n$ des éléments de $F^+(E)$ tel que

- $w_0 = w$,
- $w_n = w'$,
- pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ $w_i \equiv_0 w_{i+1}$.

Définition A.6. On reprend les notations de A.5. Le monoïde quotient $F^+(E)/\equiv$ est alors noté

$$\langle E \mid r_i = r'_i, i \in I \rangle^+.$$

Dans ce contexte :

- les éléments de E sont appelés *générateurs* du monoïde $\langle E \mid r_i = r'_i, i \in I \rangle^+$;
- les équations $r_i = r'_i$ sont appelées *relations* du monoïde $\langle E \mid r_i = r'_i, i \in I \rangle^+$;
- la congruence $\equiv$ est dite engendrée par les relations $r_i = r'_i$.

Soit M un monoïde. Si M est isomorphe à $\langle E \mid w_i = w'_i, i \in I \rangle^+$ alors on dit que $\langle E \mid w_i = w'_i, i \in I \rangle^+$ est une présentation de monoïde de M .

Groupes enveloppants

Dans cette annexe on définit la notion de groupe enveloppant, laquelle est utilisée dans les chapitres 2 et 4. On y démontre un certain nombre de résultats qui s'y rapportent, notamment en relation avec d'autres notions de la théorie des monoïdes, telles que les limites inductives de monoïdes ou les produits semi-directs de monoïdes. Ces notions ne sont pas nouvelles¹ et il en va de même pour certains des résultats qui sont présentés ici. Toutefois, pour autant que l'auteur le sache, il n'existe pas de référence simple et complète sur le sujet dans la littérature, les ouvrages classiques n'en donnant en général qu'une vision fractionnaire, ou bien l'incluant au contraire dans un cadre beaucoup plus général et technique.

À cela, on peut ajouter que certains résultats sont généralement énoncés sans démonstration. L'auteur souhaite donc profiter de ce manuscrit pour donner une présentation personnelle des définitions et des résultats de base en lien avec ces notions. Une attention particulière sera donnée sur le passage à la limite inductive et au produit semi-direct des propriétés de plongeabilité d'un monoïde dans un groupe. Cela permettra d'en déduire un certain nombre de résultats nouveaux sur le caractère plongeable des monoïdes d'Artin (théorème B.26) et de certains monoïdes singuliers (corollaire B.32).

1. Définition et existence

Définition B.1. Soit M un monoïde. Un groupe enveloppant de M est un groupe G qui satisfait la propriété universelle suivante.

Il existe un homomorphisme de monoïdes $\iota : M \rightarrow G$ tel que, pour tout groupe H et tout homomorphisme de monoïdes $\varphi : M \rightarrow H$, il existe un unique homomorphisme de groupes $\Phi : G \rightarrow H$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & H \\ \iota \uparrow & \nearrow \varphi & \\ M & & \end{array} .$$

Théorème B.2. Tout monoïde M admet un groupe enveloppant unique à isomorphisme près.

DÉMONSTRATION. Soit M un monoïde, on définit le groupe G de présentation suivante.

1. Voir par exemple [17] dans le cas du groupe enveloppant.

— Générateurs : M .

— Relations : $xyz^{-1} = 1$ avec $x, y, z \in M$ et $xy = z$ dans M .

On définit ensuite l'application $\iota : M \rightarrow G$ qui envoie $m \in M$ sur la classe de son élément correspondant dans G . L'application ι est évidemment un homomorphisme de monoïdes à cause des relations choisies pour G .

Maintenant si H est un groupe et φ est un homomorphisme de M dans H , alors soit $\tilde{\phi}$ l'homomorphisme de groupes défini du groupe libre sur M par $\tilde{\phi}(m) = \varphi(m)$ pour tout $m \in M$. Alors $\tilde{\phi}$ peut être factorisé sur G car le fait que φ est un homomorphisme de monoïdes implique qu'il respecte les relations définissant G . On note $\phi : G \rightarrow H$ le morphisme de groupe ainsi obtenu. Alors par définition ϕ satisfait l'égalité $\phi \circ \iota = \varphi$ et si ϕ' est un autre homomorphisme de G dans H tel que $\phi' \circ \iota = \varphi = \phi \circ \iota$ alors ϕ et ϕ' coïncident sur $\iota(M)$ qui est un système générateur de G , donc nécessairement $\phi' = \phi$. D'où l'unicité de ϕ . D'où G est un groupe enveloppant pour M .

Montrons maintenant la deuxième partie de l'assertion en prouvant que tout groupe enveloppant de M est isomorphe au groupe G construit ci-dessus. Soit G' un autre groupe enveloppant de M et ι' le morphisme associé de M dans G' . Commençons par remarquer que l'unique endomorphisme Ψ de G tel que $\Psi \circ \iota' = \iota'$ est nécessairement l'identité de G' qu'on note $Id_{G'}$.

Ensuite par définition d'un groupe enveloppant, il existe un unique morphisme I de G' dans G tel que $I \circ \iota' = \iota$. De même, il existe un unique morphisme I' de G dans G' tel que $I' \circ \iota = \iota'$. On a alors

$$(I' \circ I) \circ \iota' = I' \circ (I \circ \iota') = I' \circ \iota = \iota'$$

et par la remarque du paragraphe précédent on a nécessairement $I' \circ I = Id_{G'}$.

On montre pareillement que $I \circ I' = Id_G$, d'où I et I' sont réciproques l'un de l'autre et G et G' sont isomorphes. $\square$

À partir de maintenant, quand on dira *le* groupe enveloppant du monoïde M , on parlera du groupe construit dans la preuve du théorème B.2 et on le notera $G(M)$. On supposera également que le morphisme de M dans $G(M)$ est celui du théorème B.2 et on le notera ι_M .

Comme l'atteste le résultat suivant, la notion de groupe enveloppant apparaît naturellement dans la problématique du *plongement de monoïdes* qui consiste à déterminer si un monoïde donné peut être plongé dans un groupe.

Proposition B.3. Soit M un monoïde pour lequel il existe un groupe enveloppant G , alors M se plonge dans un groupe si et seulement s'il se plonge dans G .

DÉMONSTRATION. On démontre le sens direct de la proposition, l'autre sens étant immédiat. Soit ι l'homomorphisme associé de M dans G . On suppose que φ est un plongement de M dans un groupe H . Soit $\phi : G \rightarrow H$ l'unique homomorphisme de groupes tel que $\phi \circ \iota = \varphi$. Le fait que $\phi \circ \iota = \varphi$ est injectif implique nécessairement que ι l'est également. $\square$

On dira qu'un monoïde est *plongeable* s'il se plonge dans un groupe ou, de manière équivalente, dans son groupe enveloppant.

Proposition B.4. Soit M, M' deux monoïdes et ι, ι' les homomorphismes de M dans $G(M)$ et de M' dans $G(M')$. Pour chaque monoïde d'homomorphismes $\varphi : M \rightarrow M'$, il existe un unique homomorphisme de groupes $\Phi : G(M) \rightarrow G(M')$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G(M) & \xrightarrow{\Phi} & G(M') \\ \iota \uparrow & & \uparrow \iota' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M'. \end{array}$$

DÉMONSTRATION. L'homomorphisme Φ en question n'est rien d'autre que l'unique extension de l'homomorphisme $\iota' \circ \varphi$. $\square$

À partir de maintenant, si $\varphi : M \rightarrow N$ est un morphisme de monoïdes, on note $G(\varphi)$ le morphisme de groupes entre $G(M)$ et $G(N)$ provenant de la proposition B.4.

Corollaire B.5. Soient M, N, L trois monoïdes, $\varphi : M \rightarrow N$ et $\psi : N \rightarrow L$ des morphismes de monoïdes. Alors :

$$G(\psi \circ \varphi) = G(\psi) \circ G(\varphi).$$

DÉMONSTRATION. Le diagramme suivant est commutatif du fait que les deux carrés qui le constituent sont eux-même commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} G(M) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(N) & \xrightarrow{G(\psi)} & G(L) \\ \iota_M \uparrow & & \uparrow \iota_N & & \uparrow \iota_L \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N & \xrightarrow{\psi} & L. \end{array}$$

Par conséquent le diagramme suivant est également commutatif

$$\begin{array}{ccc} G(M) & \xrightarrow{G(\psi) \circ G(\varphi)} & G(L) \\ \iota_L \uparrow & & \uparrow \iota_L \\ M & \xrightarrow{\psi \circ \varphi} & L, \end{array}$$

et donc, par unicité, $G(\psi \circ \varphi) = G(\psi) \circ G(\varphi)$. $\square$

Corollaire B.6. Soient M, N deux monoïdes et $\varphi : M \rightarrow N$ un morphisme de monoïdes. Si φ est un isomorphisme de monoïdes alors $G(\varphi)$ est un isomorphisme de groupes.

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que, par unicité, $G(Id_M) = Id_{G(M)}$ et $G(Id_N) = Id_{G(N)}$.

On a alors les égalités suivantes :

$$G(\varphi) \circ G(\varphi^{-1}) = G(\varphi \circ \varphi^{-1}) = G(Id_M) = Id_{G(M)}$$

et

$$G(\varphi^{-1}) \circ G(\varphi) = G(\varphi^{-1} \circ \varphi) = G(Id_N) = Id_{G(N)}.$$

D'où le résultat. □

Les propriétés énoncées dans la proposition B.4 et les corollaires B.5 et B.6 sont appelées propriétés fonctorielles de $G(M)$.

2. Systèmes inductifs de monoïdes

On s'intéresse ici à la compatibilité du groupe enveloppant vis-à-vis des limites inductives de monoïdes. Plus précisément on cherche à démontrer que le groupe enveloppant d'une limite inductive de monoïdes est la limite inductive des groupes enveloppants. On commence par rappeler les notions de systèmes inductifs et limites inductives.

2.1. Définitions.

Définition B.7. Soit $(I, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $(I, \leq)$ est un ensemble filtrant à droite si toute paire d'éléments de I admet un majorant commun.

Définition B.8. Un *système inductif de monoïdes* est une famille de la forme

$$\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$$

où :

- $(I, \leq)$ est un ensemble filtrant à droite ;
- pour chaque $i \in I$, M_i est un monoïde ;
- pour chaque $i, j \in I$ avec $i \leq j$, $\varphi_{i,j}$ est un homomorphisme de monoïdes de M_i dans M_j , qui doit être le morphisme identité si $i = j$;
- pour chaque $i, j, k \in I$ avec $i \leq j \leq k$, on a $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$.

Définition B.9. Soit $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ un système inductif de monoïdes, N un monoïde et, pour chaque $i \in I$, $\psi_i : M_i \rightarrow N$ un homomorphisme.

On dit que la famille $(\psi_i)_{i \in I}$ est *compatible avec le système inductif* $\mathcal{M}$ si pour tous $i, j \in I$ avec $i \leq j$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xrightarrow{\psi_j} & N \\ \varphi_{i,j} \uparrow & \nearrow \psi_i & \\ M_i & & \end{array} .$$

Définition B.10. Soit $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ un système inductif de monoïdes. Une *limite inductive* de $\mathcal{M}$ est un monoïde M pour lequel il existe une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ compatible avec $\mathcal{M}$, de codomaine M , et telle que la propriété universelle suivante soit vérifiée.

Pour tout monoïde N et toute famille $(\psi_i)_{i \in I}$ compatible avec $\mathcal{M}$ de codomaine N , il existe un unique homomorphisme de monoïde $\Psi : M \rightarrow N$ qui rend, pour chaque $i \in I$, le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi} & N \\ \varphi_i \uparrow & \nearrow \psi_i & \\ M_i & & \end{array} .$$

Remarque B.11. Les notions de système inductif et de limite inductive peuvent être définies de la même manière pour d'autres types d'objets algébriques, par exemples les ensembles, les groupes, les espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ fixé, les espaces topologiques, etc. Les homomorphismes de monoïdes sont alors remplacés par des applications ensemblistes, des homomorphismes de groupes, des applications $\mathbb{K}$ -linéaires, des applications continues, etc.

Jusqu'à la fin de la section, $(I, \leq)$ sera un ensemble filtrant à droite fixé et tout système inductif (de monoïdes ou d'un autre type d'objet) indexé par $(I, \leq)$ sera appelé I -système inductif.

Proposition B.12. Soit $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ un I -système inductif de monoïdes. Alors $\mathcal{M}$ possède une limite inductive M unique à isomorphisme près.

DÉMONSTRATION. On pose

$$\tilde{M} = F^+ \left(\bigsqcup_{i \in I} M_i \right) \text{ et } M = \tilde{M} / \equiv$$

où $\equiv$ est la congruence engendrée par les relations suivantes :

- (1) $m_i m'_i \equiv m''_i$ pour tous $i \in I$ et $m_i, m'_i, m''_i \in M_i$ vérifiant $m_i m'_i = m''_i$ dans M_i ;
- (2) $m_i \equiv \varphi_{i,j}(m_i)$ pour tous $i, j \in I$ avec $i \leq j$ et $m_i \in M_i$.

En notant, pour tout $m \in \tilde{M}$, $\overline{m}$ la classe de m dans le quotient M , on définit pour tout $i \in I$

$$\begin{aligned} \varphi_i &: M_i \rightarrow M \\ m &\mapsto \overline{m}. \end{aligned}$$

Par les relations (1), les φ_i sont des homomorphismes de monoïdes et, par les relations (2), pour tous $i, j \in I$ avec $i \leq j$ et pour tout $m_i \in M_i$

$$(\varphi_j \circ \varphi_{i,j})(m_i) = \varphi_j(\varphi_{i,j}(m_i)) = \overline{\varphi_{i,j}(m_i)} = \overline{m_i} = \varphi_i(m_i).$$

La famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ est donc compatible avec $\mathcal{M}$.

Soit alors $(\psi_i)_{i \in I}$ une autre famille d'homomorphismes compatibles avec $\mathcal{M}$, de codomaine N . Puisque $\tilde{M}$ est librement engendré par la réunion disjointe des M_i , il est possible de définir un homomorphisme $\tilde{\psi}$ de $\tilde{M}$ dans N en posant

$$\tilde{\psi}(m) = \psi_i(m)$$

où i est l'unique élément de I tel que $m \in M_i$. Le fait que $(\psi_i)_{i \in I}$ soit une famille d'homomorphismes compatible avec $\mathcal{M}$ revient à dire que $\tilde{\psi}$ respecte les relations définissant M . On peut par conséquent définir

$$\begin{aligned} \psi &: M \rightarrow N \\ \overline{m} &\mapsto \tilde{\psi}(m). \end{aligned}$$

Pour finir, pour tout $i \in I$ et tout $m \in M_i$, on a

$$(\psi \circ \varphi_i)(m_i) = \psi(\varphi_i(m_i)) = \psi(\overline{m_i}) = \tilde{\psi}(m_i) = \psi_i(m_i)$$

d'où $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$ pour tout $i \in I$, et c'est nécessairement le seul morphisme pouvant vérifier ces égalités puisque, par construction de la limite inductive, les $\varphi_i(m_i)$ engendrent M .

L'unicité de la limite inductive à isomorphisme près se fait avec la même stratégie de démonstration que pour le groupe enveloppant. $\square$

À partir de maintenant, quand on parlera de la limite inductive du système inductif $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_j)_{i \leq j})_{i \in I}$, on parlera du monoïde construit dans la preuve du théorème B.12 et elle sera notée

$$L(\mathcal{M}).$$

On supposera également que les homomorphismes des M_i dans $L(\mathcal{M})$ sont ceux de B.12. Traditionnellement, la limite inductive de $\mathcal{M}$ est plus souvent notée

$$\lim_{i \in I} M_i.$$

Dans un souci de clarté des énoncés, nous utiliserons par la suite tantôt l'une, tantôt l'autre de ces notations.

Comme mentionné en remarque B.11, on peut définir une notion de système inductif et de limite inductive pour les ensembles et les applications ensemblistes. Si $(E_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ est un système inductif d'ensembles indexés par I , on peut alors construire une limite inductive de ce système en prenant la réunion disjointe des E_i

$$\tilde{E} = \bigsqcup_{i \in I} E_i$$

et en la quotientant par la relation d'équivalence $\sim$ suivante :

pour tous $(e_i, e_j) \in E_i \times E_j$, $e_i \sim e_j$ s'il existe $k \geq i, j$ tel que $\varphi_{i,k}(e_i) = \varphi_{j,k}(e_j)$.

En notant E le quotient ainsi obtenu, les applications $\varphi_i : E_i \rightarrow E$ sont alors définies pour tout $i \in I$ par $\varphi_i = \pi \circ \iota_i$ où ι_i est l'injection canonique de E_i dans $\tilde{E}$ et π est la projection canonique de $\tilde{E}$ dans E .

Tout comme pour le cas des monoïdes, toute limite inductive d'un système inductif d'ensembles est isomorphe à la construction ci-dessus.

Dans le cadre des systèmes inductifs d'ensembles et des limites inductives ensemblistes, on peut démontrer sans trop de difficultés le résultat suivant.

Proposition B.13. Soit $\mathcal{E} = (E_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ est un système inductif d'ensembles indexés par I et E une limite inductive de $\mathcal{E}$. Alors les assertions suivantes sont vraies.

(1) Pour tout $e \in E$, il existe $k \in I$ tel que $e \in \varphi_k(E_k)$ i.e.

$$\bigcup_{i \in I} \varphi_i(E_i) = E.$$

- (2) Soit $(e_i, e'_j) \in E_i \times E_j$, alors il existe $k \geq i, j$ et $e_k, e'_k \in E_k$ tel que $\varphi_i(e_i) = \varphi_k(e_k)$ et $\varphi_j(e'_j) = \varphi_k(e'_k)$.
- (3) Soient $(e_i, e_j) \in E_i \times E_j$, alors $\varphi_i(e_i) = \varphi_j(e_j)$ si et seulement s'il existe $k \geq i, j$ tel que $\varphi_{i,k}(e_i) = \varphi_{j,k}(e_j)$.

DÉMONSTRATION. Dans le cas de la limite inductive donnée par la construction faite plus haut, les assertions (1) et (3) sont immédiates et pour l'assertion (2), il suffit de remarquer que si $(e_i, e_j) \in E_i \times E_j$ alors on peut choisir n'importe quel $k \geq i, j$ et en posant $e_k = \varphi_{i,k}(e_i)$, $e'_k = \varphi_{j,k}(e'_j)$, on a alors

$$\varphi_i(e_i) = (\varphi_k \circ \varphi_{i,k})(e_i) = \varphi_k(\varphi_{i,k}(e_i)) = \varphi_k(e_k)$$

et il en va de même pour e'_j .

Le cas général vient alors du fait que pour toute autre limite inductive $\tilde{E}$ muni d'applications $\tilde{\varphi}_i : E_i \rightarrow \tilde{E}$, il existe une bijection $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$ tel que $\phi \circ \varphi_i = \tilde{\varphi}_i$ pour tout $i \in I$. $\square$

Afin de démontrer les résultats qui suivent, nous avons besoin des résultats de la proposition B.13 dans le cadre des systèmes inductifs de monoïdes et de leurs limites inductives. La démonstration directe d'un tel résultat s'avère être particulièrement fastidieuse. En effet elle revient à reconstruire la limite inductive d'un système inductif de monoïde en prenant sa limite inductive ensembliste et en la munissant d'une structure de monoïde. Or montrer que l'on dispose d'une multiplication qui soit bien définie et qui satisfasse les axiomes d'un monoïde implique la vérification de nombreux égalités qui peuvent s'avérer longues et pénibles à rédiger. Nous préférons donc court-circuiter le problème en nous servant de la proposition suivante qui est en réalité un résultat issu de la théorie des catégories reformulé en un langage non catégorique.

Proposition B.14. Soit $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ un I -système inductif de monoïdes. Alors la limite inductive $L(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ en tant que système inductif de monoïdes est également une limite inductive de $\mathcal{M}$ en tant que système inductif d'ensembles.

Ce qui suffit à justifier le résultat suivant.

Corollaire B.15. Si $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ est un système inductif de monoïdes alors $L(\mathcal{M})$ vérifie les propriétés de la proposition B.13.

Définition B.16. Soient $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ et $\mathcal{N} = (N_i, (\tilde{\varphi}_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ deux I -systèmes inductifs. Un *homomorphisme de I -systèmes inductifs* $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ est une famille d'homomorphismes $(\psi_i)_{i \in I}$ tel que pour chaque $i \in I$, ψ_i va de M_i dans N_i et tel que, pour chaque $i, j \in I$ avec $i \leq j$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xrightarrow{\psi_j} & N_j \\ \uparrow \varphi_{i,j} & & \uparrow \tilde{\varphi}_{i,j} \\ M_i & \xrightarrow{\psi_i} & N_i \end{array}$$

Proposition B.17. Soient $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ et $\mathcal{N} = (N_i, (\tilde{\varphi}_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ deux I -systèmes inductifs et $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un homomorphisme de I -systèmes inductifs.

Alors il existe un unique homomorphisme de monoïdes $L(\psi) : L(\mathcal{M}) \rightarrow L(\mathcal{N})$ tel que, pour chaque $i \in I$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L(\mathcal{M}) & \xrightarrow{L(\psi)} & L(\mathcal{N}) \\ \varphi_i \uparrow & & \uparrow \tilde{\varphi}_i \\ M_i & \xrightarrow{\psi_i} & N_i \end{array}$$

où $(\varphi_i)_{i \in I}$ et $(\tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ sont les familles canoniques respectives d'homomorphismes des M_i dans $L(\mathcal{M})$, et des N_i dans $L(\mathcal{N})$.

DÉMONSTRATION. Du fait des propriétés des ψ_i , des $\tilde{\varphi}_i$ et des $\tilde{\varphi}_{i,j}$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M_j & \xrightarrow{\psi_j} & N_j & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_j} & L(\mathcal{N}) \\ \varphi_{i,j} \uparrow & & \tilde{\varphi}_{i,j} \uparrow & \nearrow \tilde{\varphi}_i & \\ M_i & \xrightarrow{\psi_i} & N_i & & \end{array}$$

et en particulier la famille $(\tilde{\psi}_i)_{i \in I}$ définie par $\tilde{\psi}_i = \tilde{\varphi}_i \circ \psi_i$ est compatible avec $\mathcal{M}$, donc induit un unique homomorphisme $L(\psi)$ de $L(\mathcal{M})$ dans $L(\mathcal{N})$ tel que $L(\psi) \circ \varphi_i = \tilde{\psi}_i = \tilde{\varphi}_i \circ \psi_i$. $\square$

Théorème B.18. Soient $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ et $\mathcal{N} = (N_i, (\tilde{\varphi}_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ deux I -systèmes inductifs et $\psi = (\psi_i)_{i \in I}$ un homomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

Si ψ_i est injectif pour tout $i \in I$, alors $L(\psi)$ est également injectif.

DÉMONSTRATION. Soient $m, m' \in L(\mathcal{M})$ tels que $L(\psi)(m) = L(\psi)(m')$ et soient m_i, m'_i des pré-images respectives de m, m' par un certain φ_i , ce qui est possible par les points (1) et (2) de la proposition B.13. Alors

$$L(\psi)(\varphi_i(m_i)) = L(\psi)(m) = L(\psi)(m') = L(\psi)(\varphi_i(m'_i))$$

ce qui, par les propriétés définissant $L(\psi)$, est équivalent à

$$\tilde{\varphi}_i(\psi_i(m_i)) = \tilde{\varphi}_i(\psi_i(m'_i)).$$

Par le point (3) de la proposition B.13, cela signifie qu'il existe $j \geq i$ tel que

$$\tilde{\varphi}_{i,j}(\psi_i(m_i)) = \tilde{\varphi}_{i,j}(\psi_i(m'_i))$$

et puisque ψ est un homomorphisme de I -systèmes inductif, ceci est équivalent à

$$\psi_j(\varphi_{i,j}(m_i)) = \psi_j(\varphi_{i,j}(m'_i)).$$

L'homomorphisme ψ_j étant injectif on a donc

$$\varphi_{i,j}(m_i) = \varphi_{i,j}(m'_i),$$

ce qui implique, toujours par le point (3) de la proposition B.13, que

$$\varphi_i(m_i) = \varphi_i(m'_i),$$

i.e.

$$m = m'.$$

□

Proposition B.19. Soient

$$\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}, \mathcal{N} = (N_i, (\tilde{\varphi}_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I} \text{ et } \mathcal{O} = (O_i, (\hat{\varphi}_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$$

trois I -systèmes inductifs et $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $\tilde{\psi} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}$ deux homomorphismes de I -systèmes inductifs.

$$\text{Alors } L(\tilde{\psi} \circ \psi) = L(\tilde{\psi}) \circ L(\psi).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est similaire au cas du groupe enveloppant : le morphisme $L(\tilde{\psi}) \circ L(\psi)$ vérifie la propriété définissant $L(\tilde{\psi} \circ \psi)$ donc, par unicité, les deux homomorphismes coïncident. □

Les propriétés énoncées dans les propositions B.19 et B.17 sont appelées propriété fonctorielle des I -limites inductives.

2.2. Limites inductives et groupes enveloppants.

Théorème B.20. Soit $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ un I -système inductif de monoïdes. En utilisant la notion de groupe enveloppant, on peut construire un I -système inductif de groupes $\mathcal{G} = (G(M_i), (G(\varphi_{i,j}))_{i \leq j})_{i \in I}$. On a alors

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} G(M_i) \simeq G(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} M_i).$$

DÉMONSTRATION. On note :

- pour tout $i \in I$, φ_i et Φ_i les morphismes canoniques respectifs de M_i dans $L(\mathcal{M})$ et $G(M_i)$ dans $L(\mathcal{G})$;
- pour tout $i \in I$, ι_i le morphisme canonique de M_i dans $G(M_i)$.

Par la proposition B.4, $(\iota_i)_{i \in I}$ est un homomorphisme de I -systèmes inductifs et, par conséquent, engendre un homomorphisme $I : L(\mathcal{M}) \rightarrow L(\mathcal{G})$ tel que, pour tout i ,

$$I \circ \varphi_i = \iota_i \circ \Phi_i.$$

On va maintenant démontrer que le groupe $L(\mathcal{G})$ muni du morphisme I vérifie la propriété universelle qui définit le groupe enveloppant de $L(\mathcal{M})$.

Soient donc H un groupe et $\psi : L(\mathcal{M}) \rightarrow H$ un homomorphisme de monoïdes. Prouvons que ψ peut être factorisé au-travers d'un morphisme Ψ de $L(\mathcal{G})$ dans H . Pour construire Ψ , on commence par poser pour tout $i \in I$:

$$\psi_i = \psi \circ \varphi_i.$$

La famille $(\psi_i)_{i \in I}$ est compatible avec $\mathcal{M}$ et son extension à $L(\mathcal{M})$ est nécessairement ψ . De même, la famille $G(\psi_i)_{i \in i}$ qu'elle engendre est compatible avec le I -système inductif $\mathcal{G}$; en effet pour $i \leq j$:

$$\begin{aligned} (G(\psi_j) \circ G(\varphi_{i,j})) \circ \iota_i &= G(\psi_j) \circ (G(\varphi_{i,j}) \circ \iota_i) \\ &= G(\psi_j) \circ (\iota_j \circ \varphi_{i,j}) \\ &= (G(\psi_j) \circ \iota_j) \circ \varphi_{i,j} \\ &= \psi_j \circ \varphi_{i,j} \\ &= \psi_i \end{aligned}$$

et donc par unicité de $G(\psi_i) : G(\psi_j) \circ G(\varphi_{i,j}) = G(\psi_i)$.

Puisque $(G(\psi_i))_{i \in i}$ est compatible avec $\mathcal{G}$, il engendre un homomorphisme de groupes Ψ qui va de G dans H .

Montrons maintenant que $\Psi \circ I = \psi$. En combinant, pour tout $i \in I$, le caractère commutatif des diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} L(\mathcal{M}) & \xrightarrow{I} & L(\mathcal{G}) \\ \varphi_i \uparrow & & \uparrow \Phi_i \\ M_i & \xrightarrow{\iota_i} & G(M_i) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\Psi} & H \\ \Phi_i \uparrow & \nearrow \Psi_i & \\ G(M_i) & & \end{array},$$

on obtient la commutativité des diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} L(\mathcal{M}) & \xrightarrow{I} & L(\mathcal{G}) \xrightarrow{\Psi} H \\ \varphi_i \uparrow & & \nearrow \psi_i \\ M_i & & \end{array}.$$

Donc, par unicité de l'extension de $(\psi_i)_{i \in I}$, $\Psi \circ I = \psi$.

Il reste à démontrer l'unicité de Ψ . Celle-ci découle du fait que $I(L(\mathcal{M}))$ engendre $L(\mathcal{G})$. En effet :

- par construction de la limite inductive de monoïdes, $L(\mathcal{G})$ est engendré par les $\Phi_i(G_i)$;
 - par construction du groupe enveloppant, G_i est engendré par $\iota_i(M_i)$ pour tout $i \in I$.
- Par conséquent $L(\mathcal{G})$ est engendré par les $(\Phi_i \circ \iota_i)(M_i)$ i.e. par les $(I \circ \varphi_i)(M_i)$, puisque $\Phi_i \circ \iota_i = I \circ \varphi_i$ pour tout $i \in I$. Comme les $\varphi_i(M_i)$ engendrent $L(\mathcal{M})$, il en résulte bien que $I(L(\mathcal{M}))$ engendre $L(\mathcal{G})$.

Au final, on a bien montré que $L(\mathcal{G})$ vérifie la propriété universelle du groupe enveloppant de $L(\mathcal{M})$, et comme celui-ci est unique à isomorphisme près, on obtient le résultat voulu. $\square$

Corollaire B.21. Soit $\mathcal{M} = (M_i, (\varphi_{i,j})_{i \leq j})_{i \in I}$ un I -système inductif de monoïdes. Si M_i est plongeable pour tout $i \in I$, alors $L(\mathcal{M})$ est plongeable également.

DÉMONSTRATION. Supposons M_i plongeable pour chaque $i \in I$. En reprenant les notations de la démonstration du théorème B.20, $(\iota_i)_{i \in I}$ est un homomorphisme de I -systèmes inductifs de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{G}$ dont les homomorphismes qui le composent sont injectifs. Donc, par le théorème B.18, l'homomorphisme I l'est également et $L(\mathcal{M})$ s'injecte dans le groupe $L(\mathcal{G})$. $\square$

2.3. Applications aux monoïdes définis par une présentation. Avec des techniques similaires à celles de la démonstration du théorème B.2, on démontre le résultat suivant.

Théorème B.22. Soit M un monoïde défini par une présentation $\langle S|R \rangle^+$. On note G le groupe de présentation $\langle S|R \rangle$. Alors $G(M)$ est isomorphe à G , i.e. le groupe enveloppant d'un monoïde défini par une présentation est le groupe de même présentation.

Nous donnons maintenant une proposition permettant d'exprimer tout monoïde comme une limite inductive de monoïdes de type fini.

Notation B.23. Un monoïde M de présentation $\langle S|R \rangle^+$ étant donné, on note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_f$ respectivement l'ensemble des parties de S et l'ensemble des parties finies de S . De plus, pour chaque $X \in \mathcal{P}$, on définit R_X comme le sous-ensemble des relations de R dans lesquelles seules les lettres de X apparaissent, et M_X comme le monoïde de présentation $\langle X|R_X \rangle^+$. Enfin, si m est un mot sur l'alphabet X , on note $\bar{m}^X$ son image dans $\langle X|R_X \rangle^+$.

Théorème B.24. Soit M un monoïde de présentation $\langle S|R \rangle^+$. Pour tous $X, X' \in \mathcal{P}$ tels que $X \subseteq X'$, il existe un homomorphisme canonique $\varphi_{X,X'}$ de M_X dans $M_{X'}$ qui envoie $\bar{m}^X$ sur $\bar{m}^{X'}$, pour tout $x \in X$. Alors :

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ X \in \mathcal{P}_f}} M_X = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ X \in \mathcal{P}}} M_X = M,$$

où les deux limites inductives sont respectivement prises selon les deux systèmes inductifs de monoïdes $\left(M_X, (\varphi_{X,X'})_{X' \supseteq X}\right)_{X \in \mathcal{P}}$ et $\left(M_X, (\varphi_{X,X'})_{X' \supseteq X}\right)_{X \in \mathcal{P}_f}$.

DÉMONSTRATION. On démontre l'égalité dans le cas de $\mathcal{P}_f$, le cas de $\mathcal{P}$ se démontrant de manière similaire. Pour établir ce résultat, on va démontrer que M satisfait la propriété universelle qui définit la limite inductive de $\mathcal{M} = \left(M_X, (\varphi_{X,X'})_{X' \supseteq X}\right)_{X \in \mathcal{P}_f}$. Afin d'alléger les notations, si $X \in \mathcal{P}_f$ se réduit à un singleton $\{x\}$, on choisit de noter x à la place de X dans les indices et les exposants (par exemple, on note M_x au lieu $M_{\{x\}}$). De plus, pour chaque $X \in \mathcal{P}_f$, on note φ_X à la place de $\varphi_{X,S}$.

Soit N un monoïde et $(\psi_X)_{X \in \mathcal{P}_f}$ une famille d'homomorphismes compatibles avec $\mathcal{M}$, ayant pour codomaine N .

Ensuite on pose :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\psi} & : & F^+(S) \longrightarrow N \\ & & x \mapsto \psi_x(\bar{x}^x) \end{array}$$

où $F^+(S)$ est le monoïde libre sur S . Maintenant si $\underbrace{x_1 \dots x_n}_w = \underbrace{y_1 \dots y_m}_{w'}$ est une relation de R , soit X l'ensemble $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m\}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(w) &= \psi_{x_1}(\overline{x_1}^{x_1}) \dots \psi_{x_n}(\overline{x_n}^{x_n}) \\
&= \psi_X(\varphi_{x_1, X}(\overline{x_1}^{x_1})) \dots \psi_X(\varphi_{x_n, X}(\overline{x_n}^{x_n})) \\
&= \psi_X(\varphi_{x_1, X}(\overline{x_1}^{x_1}) \dots \varphi_{x_n, X}(\overline{x_n}^{x_n})) \\
&= \psi_X(\overline{x_1}^X \dots \overline{x_n}^X) \\
&= \psi_X(\overline{x_1 \dots x_n}^X) \\
&= \psi_X(\overline{y_1 \dots y_m}^X) \\
&= \psi_X(\overline{y_1}^X \dots \overline{y_m}^X) \\
&= \dots \\
&= \tilde{\psi}(w').
\end{aligned}$$

Par conséquent $\tilde{\psi}$ peut être factorisé en un homomorphisme $\psi : M \rightarrow N$. Et on a, pour tous $X \in \mathcal{P}_f$ et $x \in X$:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi_X)(\overline{x}^X) &= \psi(\varphi_X(\overline{x}^X)) \\
&= \psi(\overline{x}^S) \\
&= \psi_x(\overline{x}^x) \\
&= (\psi_X \circ \varphi_{x, X})(\overline{x}^x) \\
&= \psi_X(\psi_{x, X}(\overline{x}^x)) \\
&= \psi_X(\overline{x}^X).
\end{aligned}$$

Encore une fois, l'unicité de ψ est une conséquence naturelle du fait que M est engendré par les $\varphi_X(M_X)$, $X \in \mathcal{P}_f$. $\square$

Comme corollaire du théorème B.24 et du corollaire B.21, la proposition suivante vient immédiatement.

Corollaire B.25. Avec les notations B.23, si M_X est plongeable pour tout $X \in \mathcal{P}_f$ alors M est plongeable également.

Théorème B.26. Tout monoïde d'Artin, même avec une infinité de générateurs, se plonge dans le groupe d'Artin de même présentation.

DÉMONSTRATION. Toujours avec les notations B.23, si $M = \langle S | R \rangle^+$ est un monoïde d'Artin, alors M_X est un monoïde d'Artin avec un nombre fini de générateurs pour tout $X \in \mathcal{P}_f$. Or il est démontré dans [37] que tout monoïde d'Artin avec un nombre fini de générateurs est plongeable. En appliquant le corollaire B.25, il vient que M est plongeable, notamment dans son groupe enveloppant qui, par le théorème B.22, est le groupe d'Artin de même présentation. $\square$

Remarque B.27. Cela permet entre autres de redémontrer que les monoïdes d'Artin angle droit à une infinité de générateurs, comme ceux déjà croisés dans les décompositions en produit semi-direct des monoïdes singuliers de tresses et d'Artin, se plongent dans le groupe d'Artin angle droit de même présentation. Ce résultat était déjà connu et peut également, par exemple, se montrer en utilisant les formes normales définies dans la section 2.2 du chapitre 2.

3. Produit semi-direct de monoïdes

Dans une courte remarque de [39], Paris précise que le monoïde de tresses singulières à n brins $\mathcal{SB}_n$ est plongeable du fait qu'il se décompose en produit semi-direct de monoïdes plongeable, à savoir le monoïde d'Artin angle droit $\mathcal{M}$ déjà mentionné et le groupe de tresses classiques $\mathcal{B}_n$. Le résultat principal de cette section énonce des conditions pour que le produit semi-direct de monoïdes plongeables soit plongeable et donne un support formel à l'énoncé de Paris.

Définition B.28. Soient M, N deux monoïdes et $\varphi : N \rightarrow \text{End}(M)$ un homomorphisme de monoïdes. Le produit semi-direct $M \rtimes_{\varphi} N$ (ou $M \rtimes N$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur φ) est le monoïde défini comme le produit cartésien $M \times N$ équipé de l'opération binaire définie par :

$$(m, n).(m', n') = (m\varphi_n(m'), nn')$$

où φ_n désigne l'élément $\varphi(n) \in \text{End}(M)$.

Définition B.29. Soient M, N deux monoïdes et $\varphi : N \rightarrow \text{End}(M)$ un homomorphisme de monoïdes. On dit que le produit semi-direct $M \rtimes_{\varphi} N$ est *fort* si l'image de φ est incluse dans $\text{Aut}(M)$, et on dit que le produit semi-direct est *faible* dans le cas contraire.

Proposition B.30. Soient M, N, K, L des monoïdes et $\varphi : N \rightarrow \text{End}(M)$, $\psi : K \rightarrow \text{End}(L)$, $\beta : N \rightarrow K$, $\alpha : M \rightarrow L$ des homomorphismes de monoïdes tels que, pour tout $n \in N$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi_n} & M \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ L & \xrightarrow{\psi_{\beta(n)}} & L \end{array} .$$

Alors :

(1) l'application

$$\begin{aligned} u : M \rtimes_{\varphi} N &\rightarrow L \rtimes_{\psi} K \\ (m, n) &\mapsto (\alpha(m), \beta(n)) \end{aligned}$$

est un homomorphisme de monoïdes,

(2) u est injectif si et seulement si α and β sont injectifs.

DÉMONSTRATION.

- (1) Par définition, l'application u envoie le neutre de $M \rtimes_{\varphi} N$ sur $L \rtimes_{\varphi} K$. De plus, pour tous (m, n) et (m', n') dans $M \rtimes_{\varphi} N$, on a :

$$\begin{aligned}
 u((m, n).(m', n')) &= u((m\varphi_n(m'), nn')) \\
 &= (\alpha(m\varphi_n(m')), \beta(nn')) \\
 &= (\alpha(m)\alpha(\varphi_n(m')), \beta(n)\beta(n')) \\
 &= (\alpha(m)\psi_{\beta(n)}(\alpha(m')), \beta(n)\beta(n')) \\
 &= (\alpha(m), \beta(n)).(\alpha(m'), \beta(n')) \\
 &= u((m, n)).u((m', n')).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- (2) Soient $(m, n), (m', n')$ in $M \rtimes_{\varphi} N$, alors

$$\begin{aligned}
 u((m, n)) &= u((m', n')) \\
 \Leftrightarrow (\alpha(m), \beta(n)) &= (\alpha(m'), \beta(n')) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(m) = \alpha(m') \\ \beta(n) = \beta(n'). \end{cases}
 \end{aligned}$$

D'où le point (2). □

Théorème B.31. Soient M, N deux monoïdes et

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi & : & N \rightarrow \text{End}(M) \\
 n & \mapsto & \varphi_n
 \end{array}$$

un homomorphisme de monoïdes. Si :

- M et N sont plongeables,
- le produit semi-direct $M \rtimes_{\varphi} N$ est fort,

alors $M \rtimes_{\varphi} N$ est plongeable.

DÉMONSTRATION. On rappelle que ι_N et ι_M sont les plongements respectifs N dans $G(N)$ et de M dans $G(M)$.

Pour tout $n \in N$, l'endomorphisme φ_n , qui est un automorphisme puisque le produit semi-direct est fort, engendre un endomorphisme de $G(M)$ à savoir $G(\varphi_n)$. Alors, par le caractère fonctoriel de G :

- $G(\varphi_n)$ est un automorphisme pour tout $n \in N$,
- l'application

$$\begin{array}{ccc}
 N & \rightarrow & \text{Aut}(M) \\
 n & \mapsto & G(\varphi_n)
 \end{array}$$

est un homomorphisme de monoïdes.

Puisque $\text{Aut}(G(M))$ est un groupe, par la propriété universelle du groupe enveloppant, il existe un unique morphisme $\Phi : G(N) \rightarrow \text{Aut}(G(M))$ tel que $\Phi \circ \iota_N = G(\varphi)$.

Maintenant on pose $G = G(M) \rtimes_{\Phi} G(N)$ et I l'application qui envoie $(n, m) \in M \rtimes_{\varphi} N$ sur $(\iota_N(n), \iota_M(m)) \in G$. Comme, pour chaque $n \in N$, l'équation suivante est satisfaite :

$$\Phi(\iota_N(n)) \circ \iota_M = G(\varphi_n) \circ \iota_M = \iota_M \circ \varphi_n,$$

alors l'application I est un homomorphisme de monoïdes injectif par la proposition précédente. $\square$

Corollaire B.32. Soit M le groupe de tresses classiques à n brins $\mathcal{B}_n$, le groupe de tresses virtuelles à n brins $\mathcal{VB}_n$ ou un groupe d'Artin A_Γ associé à un graphe de Coxeter Γ . Alors le monoïde singulier SM se plonge dans son groupe enveloppant et celui-ci est le groupe de même présentation que M .

DÉMONSTRATION. On note

$$\varepsilon = \begin{cases} \emptyset & \text{si } M = \mathcal{B}_n, \\ v & \text{si } M = \mathcal{VB}_n, \\ \Gamma & \text{si } M = A_\Gamma. \end{cases}$$

Alors, en reprenant les notations des théorèmes 1.10, 2.12 et 3.4, SM admet la décomposition en produit semi-direct fort $SM \simeq \mathcal{M}_\varepsilon \rtimes M$. Or M et $\mathcal{M}_\varepsilon$ sont plongeables, donc SM l'est également. De plus par le théorème B.22, le groupe enveloppant de SM est celui de même présentation. $\square$

Remarque B.33. Le fait que le produit semi-direct soit fort dans le théorème B.31 est une condition suffisante non-nécessaire comme l'atteste le contre-exemple suivant.

On considère le monoïde $\mathbb{Z}$ muni de l'addition ainsi que le monoïde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ muni de la multiplication. Le monoïde $\mathbb{Z}^*$ agit sur $\mathbb{Z}$ par multiplication :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}^* &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}) \\ n &\mapsto (m \mapsto nm) \end{aligned},$$

ce qui permet de former le produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}^*$.

De même on forme le produit semi-direct $\mathbb{Q} \rtimes_\phi \mathbb{Q}^*$, où

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q}^* &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Q}) \\ n &\mapsto (m \mapsto nm). \end{aligned}$$

Le produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}^*$ est faible et se plonge dans le groupe $\mathbb{Q} \rtimes_\phi \mathbb{Q}^*$.

Remarquons que dans la construction du produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}^*$, le morphisme $\varphi(n)$ est injectif pour tout n . Comme on va le voir dans les résultats qui suivent, ceci est une condition nécessaire pour que le produit semi-direct soit plongeable. On donne d'abord quelques définitions.

Définition B.34. Un monoïde M est dit *simplifiable à droite* (resp. *à gauche*) si, pour tous $a, n, m \in M$, l'implication suivante est vraie :

$$\begin{aligned} an = am &\Rightarrow n = m \\ (\text{resp. } na = ma &\Rightarrow n = m). \end{aligned}$$

Un monoïde M est dit *simplifiable* s'il est simplifiable à gauche et à droite.

Remarque B.35. Comme tout sous-monoïde d'un monoïde simplifiable est simplifiable, et que tout groupe est simplifiable, il s'ensuit que tout monoïde plongeable est simplifiable.

Proposition B.36. Soient M, N deux monoïdes et $\varphi : N \rightarrow \text{End}(M)$ un homomorphisme de monoïdes.

- 1) Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) M, N sont simplifiables à droite,
 - (ii) $M \rtimes_{\varphi} N$ est simplifiable à droite.
- 2) Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) M, N sont simplifiables à gauche (resp. simplifiables) et, pour chaque $n \in N$, φ_n est injectif,
 - (ii) $M \rtimes_{\varphi} N$ est simplifiable à gauche (resp. simplifiable).

DÉMONSTRATION. 1) Supposons M, N simplifiables à droite. Soient alors $(m, n), (m', n'), (m'', n'') \in M \rtimes_{\varphi} N$ tels que $(m', n').(m, n) = (m'', n'').(m, n)$, i.e. tels que $(m' \varphi_{n'}(m), n' n) = (m'' \varphi_{n''}(m), n'' n)$, i.e. tels que

$$\begin{cases} m' \varphi_{n'}(m) = m'' \varphi_{n''}(m) \\ n' n = n'' n. \end{cases}$$

Puisque N est simplifiable à droite, on a $n' = n''$ et, par conséquent :

$$m' \varphi_{n'}(m) = m'' \varphi_{n''}(m) = m'' \varphi_{n'}(m).$$

Et puisque M est simplifiable, il en résulte que $m' = m''$. Au final $(m', n') = (m'', n'')$.

Au contraire, si M ou N ne se trouvent pas être simplifiables à droite, puisqu'ils se plongent dans $M \rtimes_{\varphi} N$, $M \rtimes_{\varphi} N$ ne peut pas être lui-même simplifiable à droite.

2) Supposons M, N simplifiables à gauche et que, pour tout $n \in N$, φ_n est injectif. Soient alors $(m, n), (m', n'), (m'', n'') \in M \rtimes_{\varphi} N$ tels que $(m, n).(m', n') = (m, n).(m'', n'')$, i.e. tels que $(m \varphi_n(m'), n n') = (m \varphi_n(m''), n n'')$, i.e. tels que

$$\begin{cases} m \varphi_n(m') = m \varphi_n(m'') \\ n n' = n n''. \end{cases}$$

Puisque M, N sont simplifiables à gauche, on a :

$$\begin{cases} \varphi_n(m') = \varphi_n(m'') \\ n' = n'', \end{cases}$$

et puisque φ_n est injectif, il s'ensuit que $m' = m''$. Au final, il vient $(m', n') = (m'', n'')$.

Au contraire si M ou N ne se trouvent pas être simplifiables à gauche, puisqu'ils se plongent dans $M \rtimes_{\varphi} N$, $M \rtimes_{\varphi} N$ ne peut pas être lui-même simplifiable à gauche. Et s'il existe $n \in N$ tel que φ_n n'est pas injectif, alors il existe $m \neq m'$ tels que $\varphi_n(m) = \varphi_n(m')$, et alors on a $(e_M, n).(m, e_N) = (\varphi_n(m), n) = (\varphi_n(m'), n) = (e_M, n).(m', e_N)$.

Le cas simplifiable correspond à la réunion des cas simplifiables à droites et à gauche. □

Au final, par le théorème B.36 et la remarque B.35, pour qu'un produit semi-direct de monoïdes $M \rtimes_{\varphi} N$ soit plongeable, il est nécessaire que M, N soient simplifiables et que pour tout $n \in N$, $\varphi(n)$ soit injectif. La question de savoir si ces conditions sont également suffisantes reste pour l'instant ouverte.

Bibliographie

- [1] Noelle Antony. On parabolic submonoids of a class of singular artin monoids. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 82 :29–37, 2007.
- [2] Emil Artin. Theorie der zöpfe. *Abhandlungen Hamburg*, 4 :47–72, 1925.
- [3] Emil Artin. Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 48 :102–126, 1947.
- [4] Benjamin Audoux, Paolo Bellingeri, Jean-Baptiste Meilhan, and Emmanuel Wagner. Homotopy classification of ribbon tubes and welded string links. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienza*, 17 :713–761, 2016.
- [5] John Carlos Baez. Link invariants of finite type and perturbation theory. *Letters in Mathematical Physics*, 26 :43–52, 1992.
- [6] Dror Bar-Natan. Vassiliev homotopy string link invariants. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 04(01) :13–32, 1995.
- [7] Paolo Bellingeri. On presentations of surface braid groups. *Journal of Algebra*, 274 :543–563, 2004.
- [8] Paolo Bellingeri and Valerij Bardakov. Combinatorial properties of virtual braids. *Topology and its Applications*, 156 :1071–1082, 2009.
- [9] Paolo Bellingeri, Bruno De la Cruz, and Luis Paris. A simple solution to the word problem for virtual braid groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 283 :271–287, 2016.
- [10] Joan Sylvia Birman. New points of view in knot theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 28 :253–287, 1993.
- [11] Joan Sylvia Birman and Tara Elise Brendle. Chapter 2 - braids : A survey. In *Handbook of Knot Theory*, pages 19 – 103. Elsevier Science, 2005.
- [12] Joan Sylvia Birman and Xiao-Song Lin. Knot polynomials and vassiliev’s invariants. *Inventiones Mathematicae*, 111 :225–270, 1993.
- [13] Carmen Caprau, Andrew De La Pena, and Sarah McGahan. Virtual singular braids and links. *Manuscripta Mathematica*, 151(1-2) :147–175, 2016.
- [14] Carmen Caprau and Sarah Zepeda. On the virtual singular braid monoid. *Preprint*, 2017.
- [15] Bruno Cisneros De La Cruz. Virtual braids from a topological point of view. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 24(6), 2015.
- [16] Bruno Aarón Cisneros de la Cruz and Guillaume Gandolfi. Algebraic, combinatorial and topological properties of singular virtual braid monoids. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 28(10), 2019.
- [17] Alfred Hobbeltzelle Clifford and Gordon Bamford Preston. *The algebraic theory of semigroups Vol. II*. American Mathematical Society, 1967.
- [18] Ruth Corran. A normal form for a class of monoids containing the singular braid monoids. *J. Algebra*, 223 :256–282, 2000.
- [19] James East. Birman’s conjecture is true for $I_2(p)$. *Journal of Knot theory and its ramifications*, 15 :167–177, 2006.

- [20] Michael Falk and Richard Randell. The lower central series of a fiber-type arrangement. *Inventiones mathematicae*, 82 :77–88, 1985.
- [21] Roger Fenn, Dale Rolfsen, and Jun Zhu. Centralizers in the braid group and singular braid monoid. *L'Enseignement Mathématique*, 42 :75–96, 1996.
- [22] Juan González-Meneses. New presentations of surface braid groups. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, vol.10 :431–441, 2001.
- [23] Juan González-Meneses. Presentations for the monoids of singular braids on closed surfaces. *Communications in Algebra*, vol.30 :2829–2836, 2002.
- [24] Juan González-Meneses and Luis Paris. Vassiliev invariants for braids on surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 356 :219–243, 2004.
- [25] Mikhail Goussarov, Michael Polyak, and Oleg Viro. Finite-type invariants of classical and virtual knots. *Topology*, vol.39 :1045–1068, 2000.
- [26] Elisabeth Ruth Green. Graph products of groups. *Ph.D. Thesis*, The University of Leeds, 1990.
- [27] David Lawrence Johnson. *Presentations of groups*. Cambridge University Press, 1997.
- [28] Nizar Kaabi and Vladimir Vershinin. On Vassiliev invariants of braid groups of the sphere. *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia*, 58 :213–232, 2011.
- [29] Naoko Kamada and Seiichi Kamada. Abstract link diagrams and virtual knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, vol.9(1) :93–106, 2000.
- [30] Seiichi Kamada. Invariants of virtual braids and a remark on left stabilisations and virtual exchange moves. *Kobe Journal of mathematics*, 21 :33–49, 2004.
- [31] Louis Kauffman. Virtual knot theory. *European Journal of Combinatorics*, vol. 20 :663–690, 1999.
- [32] Richard Kent and David Peifer. A geometric and algebraic description of annular braid groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 12 :85–97, 2002.
- [33] Greg Kuperberg. What is a virtual link? *Algebraic and Geometric Topology*, 2 :587–591, 2003.
- [34] Xiao-Song Lin. Braid algebras, trace modules and Vassiliev invariants. *Preprint*, 1994.
- [35] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar. *Combinatorial group theory*. Interscience Publishers, 1996.
- [36] Stefan Papadima. The universal finite-type invariant for braids, with integer coefficients. *Topology and its Applications*, 118 :169–185, 2002.
- [37] Luis Paris. Artin monoids inject in their groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol.77 :p.609–637, 2002.
- [38] Luis Paris. Birman’s conjecture for singular braids on closed surfaces. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 13 :895–915, 2004.
- [39] Luis Paris. The proof of Birman’s conjecture on singular braid monoids. *Geometry and Topology*, 8 :1281–1300, 2004.
- [40] Luis Paris. Braid groups and Artin groups. In *Handbook of Theicmüller Theory*, pages 389 – 451. European Mathematical Society, 2009.
- [41] Luis Paris and Eddy Godelle. On singular Artin monoids. *Contemporary Mathematics*, 372 :43–58, 2005.
- [42] Daniel Gray Quillen. On the associated graded ring of a group ring. *Journal of Algebra*, 10 :411–418, 1968.
- [43] Ted Stanford. Braid commutators and vassiliev invariants. *Pacific Journal of Mathematics*, 174(01) :269–276, 1996.
- [44] Harm Van der Lek. The homotopy type of complex hyperplane complements. *PhD Thesis*, 1983.

- [45] Victor Vassiliev. Cohomology of knot spaces. *Theory of Singularities and Its Applications, Advances in Soviet Mathematics*, 1 :23–69, 1990.
- [46] Vladimir Vershinin. On homology of virtual braids and Burau representation. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 10 :795–812, 2001.
- [47] Jun Zhu. On singular braids. *Journal of Knot theory and its ramifications*, 6 :427–440, 1997.