



HAL
open science

**Etude des conditions de viabilité d'une approche basée
sur l'algorithmique et la programmation pour
l'apprentissage de la division euclidienne à l'école
primaire**

Rosamaria Crisci

► **To cite this version:**

Rosamaria Crisci. Etude des conditions de viabilité d'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour l'apprentissage de la division euclidienne à l'école primaire. Mathématiques générales [math.GM]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2020. Français. NNT : 2020GRALM046 . tel-03116813

HAL Id: tel-03116813

<https://theses.hal.science/tel-03116813>

Submitted on 20 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques Appliquées – Didactique des mathématiques

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Rosamaria CRISCI

Thèse dirigée par **Hamid CHAACHOUA**
et codirigée par **Pierre TCHOUNIKINE**, Université Grenoble-Alpes

préparée au sein du **Laboratoire d'Informatique de Grenoble**
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et technologies de l'Information, Informatique**

**Étude des conditions de viabilité d'une
approche basée sur l'algorithmique et la
programmation pour l'apprentissage de la
division euclidienne à l'école primaire**

**Study on the viability conditions of an
algorithmic- and programming-based
approach to the learning of Euclidean
division in primary school**

Thèse soutenue publiquement le **19 octobre 2020**,
devant le jury composé de :

Mme Teresa ASSUDE

Professeure des Universités, Aix-Marseille Université, Rapportrice

M. Hamid CHAACHOUA

Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

Mme Ghislaine GUEUDET

Professeure des Universités, Université de Bretagne Occidentale,
Présidente

M. Simon MODESTE

Maître de conférences, Université de Montpellier, Examineur

M. Pierre TCHOUNIKINE

Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes, Co-directeur de thèse

Mme Jana TRGALOVA

Maîtresse de conférences, Université Lyon 1, Examinatrice



Table des matières

Table des matières	i
Remerciements	1
I Cadre de la recherche	3
Introduction et plan de la thèse	5
1 L’algorithmique et la programmation au service de l’apprentissage des mathématiques	9
1.1 Algorithmique et programmation : de quoi s’agit-il?	9
1.2 L’algorithmique et la programmation informatique dans la scolarité française	12
1.3 Le projet EXPIRE : l’algorithmique et la programmation informatique au service de l’apprentissage des mathématiques	15
1.4 Retour sur notre problématique	17
2 Etude épistémologique et didactique du sens de la division euclidienne	19
2.1 La division euclidienne dans le <i>savoir savant</i>	19
2.2 Caractéristiques didactiques de la division euclidienne	21
2.3 La division euclidienne dans le <i>savoir à enseigner</i>	25
2.4 Activités didactiques pour favoriser l’apprentissage du sens de la division euclidienne	28
2.5 Retour sur notre problématique	30
3 Revue de littérature	31
3.1 Sur la conception d’un modèle didactique des savoirs mathématiques avec une dimension algorithmique	31
3.2 Sur la viabilité d’une approche algorithmique pour l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques	35
3.3 Sur les conditions et contraintes qui impactent l’enseignement de notions mathématiques via une approche algorithmique	40
4 Cadre théorique	49
4.1 Motivations du choix du cadre théorique	49
4.2 La théorie anthropologique du didactique	50
4.3 Le cadre T4TEL	57
4.4 Conclusion	58

5	Problématique, questions de recherche et méthodologie générale	59
5.1	Problématique	59
5.2	Questions de recherche	65
5.3	Méthodologie générale	66
II	Modèle de l'OMM apprêtée	69
6	Organisation mathématique de référence	71
6.1	Les types de tâches de l'OM de référence	71
6.2	Etude de l'OMP($T_{décomposer}$)	72
6.3	Etude de l'OMP($T_{quotient}$)	80
6.4	Etude de l'OMP(T_{reste})	82
6.5	$T_{représenter}$	83
6.6	Les variables $V_{contexte}$ et $V_{dispositif}$	84
7	Caractérisation de l'OMM apprêtée	87
7.1	Modèle de l'OMM apprêtée	91
7.2	<i>Structure</i> d'un programme et registres d'ostensifs associés à l'OMM	93
7.3	Conclusions	97
III	Viabilité de l'OMM dans le curriculum	99
8	Etude de la viabilité de l'OMM apprêtée du point de vue de l'apprentissage de la division euclidienne	101
8.1	Présentation du dispositif expérimental	101
8.2	Une étude exploratoire : l'analyse en composantes principales	108
8.3	Régression logistique évaluant la réussite/échec	116
8.4	Discussion	125
IV	Etude de la transposition didactique interne	127
9	Méthodologie de recherche	129
9.1	Population impliquée dans l'étude	129
9.2	Le type de données recueillies	131
9.3	Méthode d'analyse des données recueillies	132
9.4	Supports d'analyse	139
10	Résultats	141
10.1	Analyse de l'OD réalisée par Yara	141
10.2	Analyse de l'OD réalisée par Patrick	148
10.3	Analyse de l'OD réalisée par Asie	158
10.4	Analyse de l'OD réalisée par Nicole	171
10.5	Analyse de l'OD réalisée par Marine	180
11	Discussion des résultats	191
11.1	Le profil de Yara et Marine	191
11.2	Le profil de Patrick	193
11.3	Le profil de Asie	195
11.4	Le profil de Nicole	197

11.5 Synthèse sur les différents profils d'enseignants identifiés	198
V Conclusions générales	201
12 Conclusions générales	203
12.1 Les résultats et les limites de la recherche	203
12.2 Perspectives	206
Liste des figures	209
Liste des tableaux	213
Bibliographie	216
A Fiches pédagogiques relatives aux séquences EXPIRE sur la division euclidienne	I
B Tests d'apprentissage	XXI
C Analyses en composantes principales	XXIX
D Liste des types de tâches	XXXIX

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes directeurs de thèse, Hamid Chaachoua et Pierre Tchounikine, pour avoir encadré mon travail de thèse pendant ces trois années. Merci de m'avoir aidé à me poser des bonnes questions et à m'orienter sur des pistes riches et intéressantes pour pouvoir y répondre; je n'oublierai pas la disponibilité, le soutien et la confiance que vous m'avez accordés à chaque moment de ce parcours.

Merci à Teresa Assude et Ghislaine Gueudet, qui ont accepté le rôle de rapporteur de cette thèse. Merci pour vos remarques constructives qui m'ont fait prendre du recul par rapport à mon travail et avancer dans mes réflexions.

Merci à Jana Trgalova et Simon Modeste d'avoir pris part à ce jury de thèse en tant qu'examineurs. Merci pour l'intérêt que vous avez manifesté pour mon travail et pour les échanges que nous avons eus l'occasion d'avoir.

Je remercie toute l'équipe du projet EXPIRE. Merci à Pascal Bressoux de m'avoir initiée au monde des statistiques en sciences sociales; merci pour ton aide et ta disponibilité. Merci à Manon. Nous étions deux doctorantes au sein du même projet; ce fut une vraie chance de pouvoir partager nos différentes perspectives scientifiques et de travailler de façon collaborative et complémentaire. Merci à Cécile, Vanille et Estelle pour votre investissement dans le projet, pour les questions soulevées et les remarques apportées.

Je remercie tous les 109 enseignants qui ont participé au projet et, plus particulièrement, je remercie les cinq enseignants qui m'ont permis d'observer de plus près leurs pratiques.

Merci également aux partenaires financières du projet EXPIRE, qui ont rendu les expérimentations possibles.

Merci aux chercheuses et chercheurs de l'équipe Metah rencontrés pendant mon séjour grenoblois. En particulier, je tiens à remercier Nicolas, Annie, Claire, Isabelle, Patricia, Cyrille, Nadine, Viviane, Anne, Christian, François et Cédric : merci pour votre accueil chaleureux, votre soutien et votre bienveillance.

Merci à Hang, Dany et Véronique, avec qui je n'ai pas seulement partagé un bureau, mais aussi des rêves et des inquiétudes. Merci à Catherine, Sébastien et Maelle pour votre amitié, pour m'avoir toujours encouragée surtout pendant les moments les plus délicats. Merci aussi pour les relectures de mon français que je vous ai demandées à plusieurs reprises durant ces trois années.

Merci à Gilles Aldon pour m'avoir bien guidée lors de la préparation de mon mémoire de master. Sans ton initiation à la didactique des mathématiques je ne serais pas là.

Merci à chaque jeune chercheuse et chercheur de l'ARDM avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger au sein des fructueux contextes des Wejch et des séminaires nationaux.

Merci à Maria. La dernière période consacrée à la rédaction de nos thèses a été vraiment épuisante, mais partager ce moment avec toi, même si à distance, m'a donné l'énergie et la motivation nécessaire pour arriver jusqu'au bout.

Merci à mes amis, Maria Grazia, Bruno, Luca, Micky, Tina, Rosa et Mary. Merci pour votre soutien qui n'a jamais manqué. Merci de m'avoir supporté quand moi-même je ne

me supportais pas.

Merci à Francesca et Federica, mes camarades mathématiques brillantes, qui n'ont jamais cessé de croire en moi et qui sont toujours là pour m'accompagner dans mes choix.

Merci à mon amie Marina. Ensemble nous avons vécu mille aventures et ce doctorat n'est qu'une toute petite partie de celles qui nous attendent encore. Merci d'avoir cru en moi, mais surtout merci de me pousser sans cesse à regarder à l'intérieur de moi-même en me faisant découvrir de plus en plus mon potentiel et mon caractère.

Merci à mes grands-parents, à mes oncles, à mes cousins. Je remercie de façon particulière ma tante et marraine Antonella. C'est de toi que j'ai hérité l'amour pour les études et la passion pour l'enseignement.

Merci à ma belle famille pour le soutien reçu dans ces années.

Merci maman, papa, Giuseppe et Francesco. Merci parce que dans notre famille il y a toujours été affection et soutien réciproque, sur la base de principes solides et inaliénables. Merci de m'avoir stimulée à découvrir mes talents et à les faire fructifier.

Finalement, je remercie mon mari Emiliano. Même dans les difficultés et dans les moments les plus tristes tu m'as toujours accordé un geste doux, un sourire complice, un mot encourageant. Merci pour ton regard fier quand tu parles de moi aux autres. Merci d'avoir cru à notre amour au point de neutraliser la distance qui nous séparait ces années. Merci de partager ta vie avec moi.

Première partie
Cadre de la recherche

Introduction et plan de la thèse

Contexte de la recherche et premier questionnement

Au sein d'un entretien à Seymour Papert, il dit :

Un de mes exemples préférés est ce qu'un enfant peut penser à propos du saut. Imaginons faire une compétition. On veut faire courir un petit personnage et puis le faire sauter. Or, qu'est-ce qu'un saut? Si on saute personnellement, on n'a pas besoin de penser à ce qu'est un saut. Mais si on veut que ce soit à l'ordinateur de le faire, il peut être nécessaire de penser : « Eh bien, qu'est-ce qu'un saut? On monte, on passe, et on descend comme ça. Cela ne ressemble pas à un bon saut. Qu'est-ce qu'un bon saut? Est-ce plutôt comme ça? Que signifie exactement cette forme? » De cette façon, l'enfant entre dans les mathématiques pour comprendre la forme d'un saut, d'un chemin, de ce qu'un mathématicien appellerait une trajectoire. Et puis, de là, il entre dans la physique pour comprendre comment fonctionne le saut en relation à la gravité. Cet enfant entre donc dans ce qui semble être une connaissance très avancée des mathématiques, de la physique, et de beaucoup d'autres choses, dans la programmation. Le fait que l'enfant essaie de faire fonctionner ce jeu offre une situation différente pour l'apprentissage, une motivation différente¹.

Les compétences informatiques sont de plus en plus présentes et nécessaires pour la vie de l'Homme du XXI^e siècle. Dans ce contexte, l'école semble, au cours de ces dernières années, vouloir adapter les contenus du curriculum scolaire, afin de fournir aux élèves ces compétences, à partir de l'âge le plus tendre.

L'adaptation des curriculums que nous observons actuellement relève, entre autres, de pressions, du monde académique aux politiques locales, concernant l'introduction d'un enseignement de l'informatique à l'école. En France, par exemple, des universitaires, des associatifs et des chefs d'entreprises ont signé en 2014 une « Lettre ouverte à Monsieur François Hollande, Président de la République, concernant l'enseignement de l'informatique »². Dans cette lettre, ils demandaient notamment de « *faire entrer l'informatique en tant que discipline à part entière dans le système éducatif français, avec des initiations à l'école primaire et une entrée dès le collège* ».

Cette requête a été enfin satisfaite avec les programmes ministériels de l'école française présentés dans le *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*, en vigueur depuis septembre 2016, proposant, entre autres, d'introduire une *initiation à la program-*

1. Entretien à Seymour Papert du 7 mars 1997 pour le programme télévisé italien *MediaMente* (<https://web.archive.org/web/20170825015310/http://www.mediamente.rai.it/home/bibliote/intervis/p/papert.htm>).

2. <https://www.epi.asso.fr/revue/docu/dl402b.htm>

mation dans le curriculum du cycle 3³. Cependant, cette introduction a eu lieu sans le rajout d'heures d'enseignement ou de formation pour les enseignants, et sans que l'informatique soit devenue une discipline à part entière, comme c'est le cas pour le lycée. Cela demande donc d'identifier une ou plusieurs disciplines déjà existantes à l'école primaire, dans lesquelles il serait possible de réaliser cette initiation à la programmation.

Plusieurs projets de recherche sont nés dans la perspective de faire face à cette problématique, en proposant des approches d'enseignement de diverses disciplines scolaires basées sur la programmation. Toutefois, compte tenu des caractéristiques de la programmation et de son lien étroit avec l'algorithmique, il semble particulièrement intéressant la possibilité d'inscrire une initiation à la programmation dans l'enseignement des mathématiques. Voici, à ce propos, un extrait du rapport Villani-Torossian du 2018 sur l'enseignement des mathématiques en France :

La discipline informatique permet, de plus, de développer une démarche complète de modélisation : on part d'un problème, on le modélise, on propose un algorithme, on le programme, on l'exécute et on analyse les résultats; on part du concret, on passe par l'abstraction et on retourne au concret.

Du point de vue des mathématiques, l'apprentissage de l'informatique développe des qualités indispensables autour d'activités concrètes, variées voire ludiques, où interviennent le raisonnement logique (écrire la séquence des instructions dans un certain ordre, disjonction des cas, utilisation des opérateurs logiques, etc.), la rigueur (toutes les instructions doivent être parfaitement explicitées) et la précision. [Villani et Torossian, 2018]

Le débat scientifique sur la caractérisation et les effets d'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire est ouvert.

Le projet EXPIRE⁴, avec la production de ressources pour l'enseignement des mathématiques intégrant une dimension algorithmique, s'inscrit dans l'idée d'évaluer une telle approche.

Au sein de ce projet, une équipe de chercheurs en didactique des mathématiques, en sciences de l'éducation et en informatique, ont conçu des séquences didactiques portant sur des objets mathématiques très importants au cycle 3 à partir des indications ministérielles. Les tâches prescrites dans ces séquences demandent de concevoir des algorithmes/programmes⁵ dans l'environnement de programmation visuelle Scratch.

Avec cette thèse, nous souhaitons donc apporter des éléments de réponse concernant l'étude des conditions de viabilité d'une telle approche dans le curriculum actuel, caractérisé par des conditions et contraintes spécifiques. En particulier, nous analysons les caractéristiques de l'approche proposée par les chercheurs du projet EXPIRE concernant la construction du sens de la division euclidienne.

Notre questionnement initial relève de trois aspects différents :

1. conception d'un modèle adéquat des savoirs en jeu dans la séquence EXPIRE portant sur la division euclidienne, en tenant compte des savoirs relatifs à la programmation;

3. Dans le système scolaire français, le cycle 3 est constitué de trois niveaux : CM1 (élèves de 9-10 ans), CM2 (élèves de 10-11 ans), 6ème (élèves de 11-12 ans).

4. <https://expire.univ-grenoble-alpes.fr/>

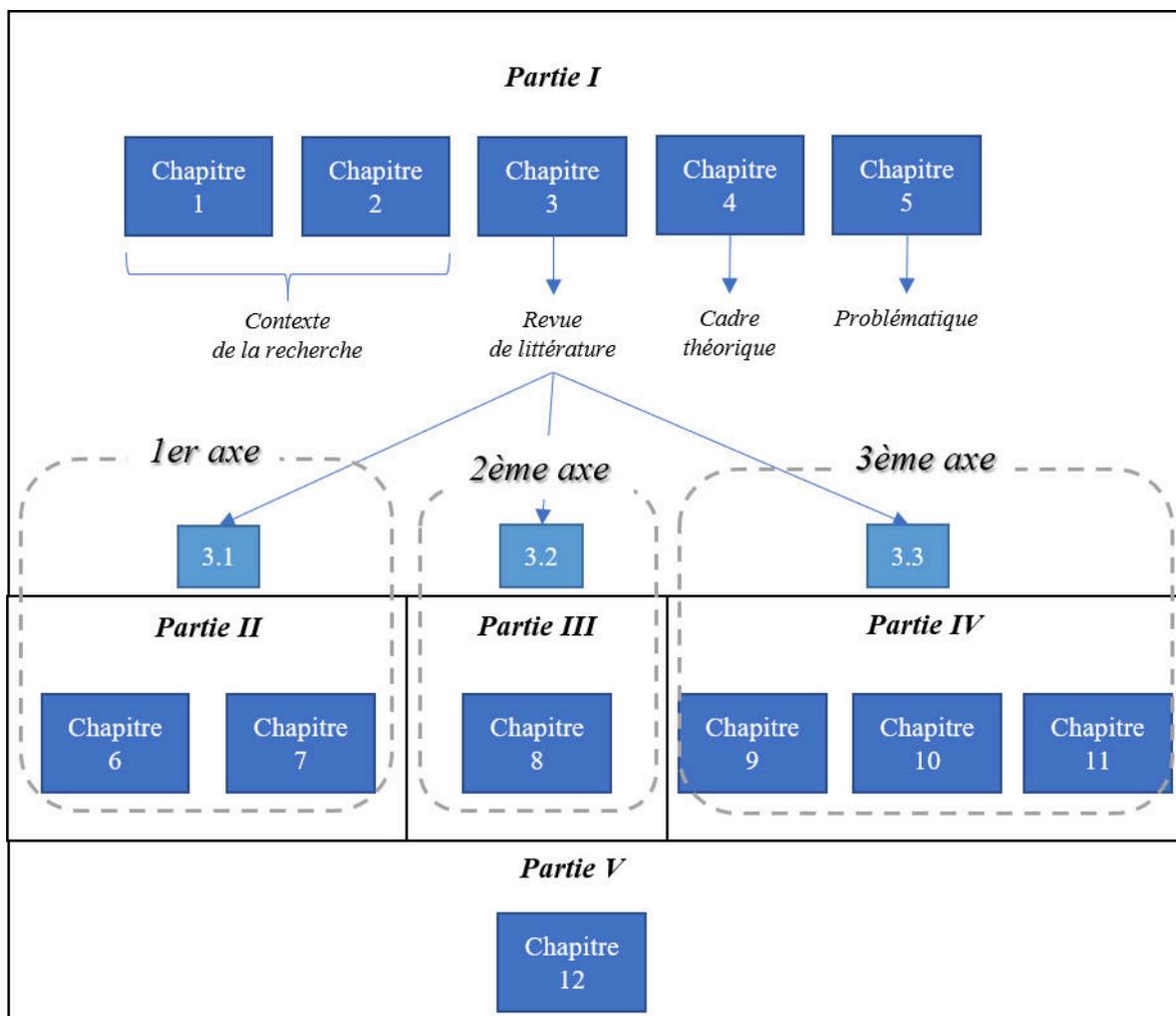
5. Nous précisons plus loin les raisons pour lesquelles, dans le contexte du projet EXPIRE, nous pouvons parler de façon indistincte d'algorithme ou de programme.

2. évaluation de la viabilité de l'approche didactique proposée par le projet EXPIRE dans le curriculum de l'école primaire en termes de qualité de l'apprentissage de la division euclidienne;
3. étude des pratiques enseignantes qui favorisent ou limitent une exploitation des caractéristiques didactiques de l'algorithmique et de la programmation, conforme à celle attendue par les chercheurs du projet.

Ces aspects donnent lieu à trois axes de recherche que nous explorons de manière séparée dans notre travail.

Plan de la thèse

Notre thèse se structure en cinq parties.



Dans la partie I, nous précisons le contexte de notre recherche et présentons les éléments théoriques ainsi que les questions de recherche conduisant notre recherche.

En particulier, le chapitre 1 vise à préciser les concepts et les définitions fondamentales relatives à l'algorithmique et la programmation, ainsi que la place que ces objets ont dans le système scolaire français. Ensuite, nous présentons quelques éléments du projet EXPIRE dans lequel notre thèse s'inscrit. Notamment, nous explicitons les caractéristiques principales des tâches prescrites aux élèves au sein des séquences à analyser pour

comprendre comment ce projet vise à répondre à la demande des programmes ministériels.

Le chapitre 2 contient une étude épistémologique et didactique sur la division euclidienne, en focalisant sur la question du sens. Cela permet de construire un cadre de référence sur les caractéristiques didactiques de la séquence.

Dans le chapitre 3, nous présentons une revue de littérature des différents travaux existant pour chacun des trois axes de recherche : ceux qui ont essayé de modéliser les savoirs issus de tâches intégrant mathématiques et algorithmique ; ceux qui ont évalué les connaissances des élèves acquises grâce à ces tâches ; ceux qui portent sur les pratiques enseignantes en relation avec l'exploitation des caractéristiques du dispositif utilisé.

Le chapitre 4 présente les éléments du cadre théorique que nous avons considéré adaptés à cette recherche.

A l'issue de cette première partie, nous formalisons la problématique, ainsi que les questions de recherche relatives à cette étude dans le chapitre 5.

Chacun des trois axes de recherche sera abordé, respectivement, dans les parties II, III, et IV.

En particulier, la partie II, est constituée du chapitre 6, présentant la modélisation des savoirs de référence relatifs à la division euclidienne, et du chapitre 7, dans lequel nous proposons un modèle des savoirs algorithmiques et mathématiques sous-jacents à la séquence EXPIRE que nous étudions.

La partie III est constituée d'un seul chapitre, le chapitre 8. Ici, nous réalisons une synthèse des expérimentations et des analyses menées pour aborder le deuxième axe de recherche.

Dans la partie IV, composée des chapitres 9, 10 et 11, nous développons la méthodologie, les analyses et les résultats concernant notre troisième axe de recherche.

Finalement, nous présentons les conclusions générales de notre travail, ainsi que quelques perspectives qu'il ouvre, dans la partie V, constitué du chapitre 12.

Chapitre 1

L’algorithmique et la programmation au service de l’apprentissage des mathématiques

Dans notre travail l’analyse et la mise à l’épreuve de ressources didactiques issues du projet EXPIRE occupent une place fondamentale. Il nous semble donc nécessaire de comprendre le contexte qui a motivé la conception et le développement de ces ressources, à savoir une demande institutionnelle d’introduire une initiation à la programmation informatique au cycle 3. Pour cela, suite à une prise de position sur le vocabulaire utilisé à ce sujet, nous présenterons dans ce chapitre la place de l’algorithmique et de la programmation dans la scolarité française. Ensuite nous caractériserons l’activité des élèves au sein du projet EXPIRE.

1.1 Algorithmique et programmation : de quoi s’agit-il ?

Avant de présenter le contexte dans lequel le projet EXPIRE s’inscrit, il est nécessaire de se positionner relativement à différents termes et expressions relatifs à l’algorithmique et la programmation.

Tout d’abord, compte tenu des concepts en jeu, il est essentiel de clarifier brièvement le lien entre mathématiques et informatique. Parfois l’informatique est considérée à tort comme une branche des mathématiques. Nous retenons que l’informatique doit avoir le statut de discipline en soi, bien qu’il soit indéniable que des proximités entre ces deux disciplines existent du point de vue épistémologique et que l’une se sert des outils et des résultats de l’autre.

A partir de la littérature scientifique existante à ce sujet, nous allons illustrer quelques points de vue sur les concepts impliqués et expliciter les définitions retenues pour cette étude.

1.1.1 Autour de la notion d’*algorithme*

L’origine du terme « *algorithme* » est traditionnellement associé au nom d’un mathématicien perse du IXe siècle, Al-Khwârizmî, couplé avec le mot grec *arithmos*, nombre.

Cet objet constitue actuellement un des points d’intersection entre les mathématiques et l’informatique et dans le cadre de ces deux disciplines il est désormais possible retrouver de nombreuses définitions pour le définir. Dans ce travail nous ne rendons pas compte de toutes les définitions données au fil du temps. Nous ne proposons que celles qui nous

semblent les plus cohérentes avec une approche qui consiste à utiliser la programmation comme vecteur d'apprentissage de notions mathématiques à l'école primaire.

Une définition de base d'algorithme est la suivante :

« Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données, pour arriver en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat, et cela indépendamment des données. »¹

Les recherches menées par l'informaticien Donald Knuth l'ont porté à analyser en profondeur cet objet, en mettant en lumière cinq propriétés que chaque algorithme doit présenter. Nous les présentons ci-dessous :

1. propriété de *finitude* (**finiteness**) : un algorithme doit toujours se terminer après un nombre fini d'étapes ;
2. propriété de *non-ambiguïté* (**definiteness**) : chaque étape de l'algorithme est définie avec précision, et les opérations impliquées sont effectuées sans aucune ambiguïté ;
3. un algorithme peut avoir zéro *entrée* (**input**), une entrée ou plusieurs entrées. On entend par « entrée », les quantités, les valeurs qui lui sont données initialement avant que ne débute l'algorithme. Ces entrées vont être prises dans des ensembles d'objets spécifiés ;
4. un algorithme est constitué d'une ou plusieurs *sorties* (**output**). Ces sorties sont constituées des quantités ayant une relation spécifiée avec les entrées ;
5. propriété d'*efficacité* (**effectiveness**) : toutes les opérations à effectuer dans l'algorithme doivent être suffisamment basiques pour pouvoir en principe être exécutées exactement et dans une durée finie par un homme utilisant du papier et un crayon. [Knuth, 1973]

Modeste synthétise cette définition et d'autres en proposant :

Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. [Modeste, 2012]

Cette définition demande d'abord de préciser ce que sont les « instances » et la « réponse » d'un problème. Selon Modeste un problème est en effet constitué d'un ensemble d'*instances* (pouvant être décrites par plusieurs paramètres) et d'une *question* portant sur ces instances. Une « instance » d'un problème est obtenue en spécifiant des valeurs précises (entrées de l'algorithme) pour tous les paramètres. La *réponse* obtenue à l'issue de l'exécution est la sortie de l'algorithme.

Selon P. Collard et P. Flajolet (dans l'*Encyclopædia Universalis*), l'*algorithmique* a pour objet « *la conception, l'évaluation et l'optimisation des méthodes de calcul en mathématiques et en informatique* ». Il s'agit actuellement d'une véritable science dans laquelle des nombreux techniques et outils de conception et étude des algorithmes ont été développés et testés. Nous citons entre autres les notions de complexité pour la comparaison et l'optimisation des algorithmes [Chabert *et al.*, 1995].

Par ailleurs, Nguyen [2005] précise que *l'algorithmique cherche à étudier l'algorithme indépendamment de sa mise en œuvre dans une machine*. En effet, c'est cet aspect qui permet de différencier la notion d'algorithme de celle de programme que nous présentons dans la prochaine section.

1. donnée par J. Hebenstreit dans l'*Encyclopaedia Universalis*

1.1.2 Autour de la notion de *programme*

Nous introduisons la différence qui existe entre *algorithme* et *programme* avec les mots de Dowek :

Un algorithme est une recette qui permet de résoudre un certain problème de manière systématique. Un exemple paradigmatique est la recette de la tarte aux pommes, qui permet de résoudre un problème : faire une tarte aux pommes. Toutefois, dans cet exemple, il est important de distinguer la recette en tant que texte de la recette en tant que pratique. Une recette peut être exécutée et même être transmise de génération en génération, sans être écrite, ni même verbalisée. C'est cette seconde notion qui correspond à la notion d'algorithme. Dès que la recette est écrite ou verbalisée, elle doit être comparée, non à la notion d'algorithme, mais à celle de programme [Dowek, 2011].

Généralement, un *programme informatique* peut être défini comme « *un algorithme écrit dans un langage de programmation* ». Un programme informatique peut donc être directement exécuté sur une machine.

Le *langage de programmation* occupe une place centrale dans la conception d'un programme informatique puisque c'est ce qui permet la communication entre l'homme et la machine. Si les premiers langages de programmation étaient très proches du langage de la machine, le progrès a permis de réduire de plus en plus la distance entre les langages de programmation modernes et la langue naturelle. En effet, à l'heure actuelle nous disposons de langages de programmation vraiment intuitifs, comme les *langages de programmation visuelle* qui permettent aux utilisateurs de concevoir des programmes à travers la manipulation de blocs d'instructions. Nous présenterons certaines des caractéristiques de ce type de langage en montrant l'exemple de Scratch (Section 1.3.1).

Nous observons que, contrairement à la notion d'« algorithme » qui a sa place dans les deux disciplines, mathématiques et informatique, celle de « programme informatique » s'inscrit vraiment dans l'informatique, et, plus précisément, dans le cadre de la *programmation informatique*. La définition de *programmation informatique* proposée par le dictionnaire Larousse est « ensemble des activités liées à la définition, l'écriture, la mise au point et l'exécution de programmes informatiques ; séquence des ordres auxquels doit obéir un dispositif ».

Une première étape pour la définition d'un programme informatique est la définition d'un algorithme. En conséquent, la programmation informatique se sert des outils techniques et théoriques de l'algorithmique.

Par ailleurs, l'écriture d'un programme informatique relève généralement de la traduction d'un algorithme dans un langage de programmation, et sa mise au point concerne, parmi d'autres tâches, la correction des erreurs dues à cette traduction (*debugging*).

Observons qu'en mathématiques nous pouvons retrouver aussi l'expression « *programme de calcul* », bien distincte de celle de programme informatique. Il s'agit d'une notion née dans le cadre de la didactique des mathématiques. Pour en donner une définition, nous citons les mots de Chevillard lors de son séminaire adressé aux PLC2 de l'année 2003-2004 :

Il est de même usuel de parler d'expression algébrique, sans que l'on sache ce que cette « expression » exprime ! Pour qu'il en aille autrement, il convient de partir de ce dont nous parle l'algèbre : $3x^2$, par exemple, est l'expression algébrique (ou littérale) d'un certain programme de calcul, à savoir le programme de calcul qui, étant donné un nombre x , « renvoie » le nombre $3x^2$,

et qui, donc, pour $x = 1$, renvoie 3, pour $x = 4$ renvoie 48, etc. L'algèbre élémentaire est ainsi la science des programmes de calcul (sur les nombres), et en particulier la science du calcul sur les programmes de calcul. La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de « faire un calcul », c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme.

Plusieurs recherches se sont intéressées aux potentialités des programmes de calcul en didactique des mathématiques (voir par exemple [Broin, 2002], [Munzón, 2010], [Assude et al., 2012] ou [Alves et al., 2013]). Notamment, il a été constaté que le programme de calcul contribue à relier l'aspect procédural avec l'aspect structural d'expressions algébriques. Par ailleurs, selon Coppé et Grugeon [2009] les programmes de calcul peuvent être vus comme un registre de représentation sémiotique à pouvoir coordonner avec d'autres registres afin de « donner du sens aux lettres, aux expressions littérales, d'associer à plusieurs expressions une seule dénotation via les procédés de calcul et leurs représentations, d'illustrer un système de règles de formation et de transformation d'expressions littérales ».

Dans les dernières années, en raison de la présence de plus en plus importante de la programmation dans les curriculum, les programmes de calcul sont parfois associés à des programmes informatiques dans des langages de programmation intuitifs au sein d'activités didactiques proposées par chercheurs et manuels (voir par exemple [Alayrangues et al., 2018]).

1.1.3 Pensée informatique : quel lien avec l'algorithmique et la programmation ?

L'expression « pensée informatique » vient de l'anglais « computational thinking » et désigne un ensemble de plusieurs compétences autour de tâches liées à la résolution de problèmes. Tchounikine [2016], en reprenant la définition originale donnée par Wing [2006], synthétise cette notion comme l'ensemble de trois compétences :

- savoir décomposer un problème en sous-problèmes plus simples ;
- savoir réfléchir aux tâches à accomplir pour résoudre un problème en termes d'étapes et d'actions (algorithmie) ;
- savoir décrire les problèmes et les solutions à différents niveaux d'abstraction, ce qui permet d'identifier des similitudes entre problèmes et, par suite, de pouvoir réutiliser des éléments de solutions.

Ces compétences peuvent être développées dans le cadre de plusieurs disciplines et peuvent être réinvesties dans plusieurs contextes scolaires et extra-scolaires. La programmation informatique constitue un des moyens pour développer ces compétences. Elle est de plus en plus présente dans les programmes scolaires français et internationaux de tous niveaux. Nous présenterons le contexte français dans la prochaine section.

1.2 L'algorithmique et la programmation informatique dans la scolarité française

L'enseignement de l'informatique est présent dans la scolarité française depuis les années 80, notamment au lycée. En reprenant l'état des lieux proposé par Archambault au

lycée se sont installés progressivement :

- un enseignement de spécialité optionnel « Informatique et sciences du numérique » (ISN) en Terminale S (rentrée 2012) ;
- un enseignement d'informatique pour tous les élèves des CPGE scientifiques (rentrée 2013) ;
- un enseignement d'exploration « Informatique et création numérique » (ICN) en classe de seconde (rentrée 2015) ;
- un enseignement facultatif « Informatique et création numérique » (ICN) en Premières ES, L et S (rentrée 2016) ;
- un enseignement optionnel en Terminales ES et L (rentrée 2017).

[Archambault, 2017]

Au lycée l'informatique se fait donc de plus en plus une place de plus en plus en tant que discipline indépendante. L'enseignement de la programmation informatique à ce niveau scolaire est déployé en tant qu'« objet » à étudier et en tant qu'« outil » de résolution de problèmes en d'autres disciplines. En particulier, plusieurs thèses au cours des dernières années ont étudié les apports d'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour l'enseignement des mathématiques au lycée. Entre autres nous citons les travaux de Modeste [2012], qui a étudié les apports de l'algorithmique pour l'apprentissage de la preuve, Laval [2018], qui a analysé le passage de l'algorithme vu comme outil à l'algorithme en tant qu'objet d'apprentissage au secondaire et Briant [2013], qui cherche à comprendre les effets d'une approche algorithmique pour l'enseignement de l'algèbre au secondaire.

Aussi, à la rentrée 2016, les programmes ministériels du cycle 4 demandaient qu'un enseignement d'informatique soit dispensé dans le cadre des disciplines mathématiques et technologie : les objets d'apprentissage sont l'algorithmique, la programmation, les machines et les réseaux. Cela a constitué clairement un point problématique pour les enseignants et les formateurs et a donné lieu à divers projet de recherche visant à comprendre la place des objets de l'informatique dans le curriculum.

Un exemple est le projet « 1,2,3... codez! »², qui a conçu une série d'outils pédagogiques pour enseigner l'informatique en tant qu'objet à partir du cycle 2 jusqu'au cycle 4.

1.2.1 L'algorithmique et la programmation au cycle 3

En ce qui concerne le cycle 3, dans les programmes scolaires français en vigueur à la rentrée 2016 (Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015) nous pouvons repérer l'extrait suivant, tiré du « *Domaine 2 (méthodes et outils pour apprendre)* »

La maîtrise des techniques et la connaissance des règles des outils numériques se construisent notamment à travers l'enseignement des sciences et de la technologie où les élèves apprennent à connaître l'organisation d'un environnement numérique et à utiliser différents périphériques ainsi que des logiciels de traitement de données numériques (images, textes, sons...). En mathématiques, ils apprennent à utiliser des logiciels de calculs et d'initiation à la programmation.

Les indications ministérielles insistent aussi sur ces aspects dans cet autre extrait tiré de la partie consacrée à l'enseignement des mathématiques :

2. <https://www.fondation-lamap.org/fr/123codez>

Ainsi, l'usage de logiciels de calcul et de numération permet d'approfondir les connaissances des propriétés des nombres et des opérations comme d'accroître la maîtrise de certaines techniques de calculs. De même, des activités géométriques peuvent être l'occasion d'amener les élèves à utiliser différents supports de travail : papier et crayon, mais aussi logiciels de géométrie dynamique, d'initiation à la programmation ou logiciels de visualisation de cartes, de plans.

Et encore, dans le domaine « Espace et géométrie » nous pouvons lire :

Les activités spatiales et géométriques sont à mettre en lien avec les deux autres thèmes : résoudre dans un autre cadre des problèmes relevant de la proportionnalité; utiliser en situation les grandeurs (géométriques) et leur mesure. Par ailleurs, elles constituent des moments privilégiés pour une première initiation à la programmation notamment à travers la programmation de déplacements ou de construction de figures.

Nous voyons donc comme la programmation informatique est proposée en tant que support pour l'apprentissage des mathématiques et notamment dans le cadre de la géométrie, où il est également proposé une façon de prendre en compte l'initiation à la programmation via la programmation de déplacements ou de construction de figures.

En général, l'apprentissage des concepts de base de la programmation informatique peut également se faire de manière « *débranchée* ». Il s'agit d'un ensemble de pratiques visant à introduire des concepts de l'informatique sans aucune manipulation sur ordinateur. Des nombreuses activités ont été construites dans ce sens par des chercheurs en informatique et en didactique. Entre autres, une référence proposant de nombreuses activités destinées à faire faire de l'informatique débranchée à l'école primaire est constitué par le manuel libre de droit de Bell, Witten et Fellows³. Cependant, il nous semble que ce qui est demandé institutionnellement pour le cycle 3 ne peut pas se réduire uniquement à cette approche.

En effet, dans les attendu de fin de cycle, il apparait les connaissances relatives au « *stockage des données, notions d'algorithmes, les objets programmables* » et dans les exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève associés nous pouvons lire :

Les élèves apprennent à connaître l'organisation d'un environnement numérique. Ils décrivent un système technique par ses composants et leurs relations. Les élèves découvrent l'algorithme en utilisant des logiciels d'applications visuelles et ludiques. Ils exploitent les moyens informatiques en pratiquant le travail collaboratif. Les élèves maîtrisent le fonctionnement de logiciels usuels et s'approprient leur fonctionnement. [MEN, 2015]

Outre que la demande institutionnelle de faire découvrir l'algorithmique au moyen d'une initiation à des logiciels/langages de programmation visuels et ludiques, nous pouvons retrouver les items suivants, relevant de l'algorithmique :

- (se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations;
- se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte;
- accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers;
- programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran;

3. https://interstices.info/upload/csunplugged/CSUnplugged_fr.pdf

- situations donnant lieu à des repérages dans l'espace ou à la description, au codage ou au décodage de déplacements.

Les interrogations didactiques qui émergent relèvent à la fois des effets de maturation conceptuelle des élèves en algorithmique/programmation et des phénomènes liés au passage du cycle 3 au cycle 4. Plusieurs chercheurs pensent que les élèves, ainsi que les adultes, comprennent le plus tôt possible que les actions humaines sont à l'origine de toute application informatique [Rogalski et Lagrange, 2016]. Un volet ultérieur est lié à la conception et l'évaluation de ressources didactiques visant à introduire une dimension programmation dans l'enseignement de notions mathématiques. C'est dans ce cadre que le projet EXPIRE, que nous présentons dans la prochaine section, s'inscrit.

1.3 Le projet EXPIRE : l'algorithmique et la programmation informatique au service de l'apprentissage des mathématiques

Dans cette section nous présenterons les caractéristiques et quelques éléments du déploiement du projet EXPIRE⁴ (EXpérimenter la Pensée Informatique pour la Réussite des Elèves), au sein duquel nous menons nos actions de recherche. Il s'agit d'une opération soutenue par l'État dans le cadre du volet e-FRAN (Espace de formation, de recherche et d'animation numérique) du Programme d'Investissement d'Avenir, opéré par la Caisse des Dépôts. Il implique l'Université de Grenoble Alpes, la ville de Grenoble, le CCSTI, La Casemate, l'Espé et le Rectorat de l'Académie de Grenoble. En particulier, deux laboratoires de l'Université Grenoble Alpes sont concernés, le LIG et le LaRAC, avec des chercheurs en didactique des mathématiques, en sciences de l'éducation et en informatique. Ce projet se propose de contribuer au développement d'un ensemble de ressources pour introduire une initiation à la programmation informatique au cycle 3. Il a pour objectifs, notamment, de comprendre :

- s'il est possible de produire des ressources pour l'enseignement des mathématiques intégrant une dimension algorithmique ;
- si des ressources de ce type permettent l'apprentissage des notions mathématiques visées ;
- comment les enseignants doivent être formés pour exploiter la dimension algorithmique présente dans ces ressources ;
- les conditions et contraintes influant sur les pratiques enseignantes face à ces ressources.

Parmi les ressources conçues, il y a celles qui couplent l'algorithmique et la programmation informatique à l'enseignement des mathématiques. Pour cela, des séquences d'enseignement ont été mises au point sur des notions mathématiques très importantes au cycle 3 : la division euclidienne, la décomposition additive, la résolution de problèmes et les fractions. Les tâches de ces séquences se développent dans l'environnement de programmation Scratch.

Nous allons maintenant décrire l'environnement de programmation Scratch afin de présenter les caractéristiques générales de l'activité prescrite aux élèves lors des séquences issues du projet EXPIRE. Ces descriptions d'ordre général seront reformulées d'un point de vue didactique et à la lumière d'un cadre théorique dans le chapitre 7.

4. <https://expire.univ-grenoble-alpes.fr/>

1.3.1 L'environnement de programmation Scratch

Scratch⁵ est un langage de programmation visuel inscrit dans un logiciel libre qui porte le même nom. Il a été développé par le groupe de recherche Lifelong Kindergarten auprès du laboratoire Média du MIT. L'utilisateur de Scratch a la possibilité de concevoir et lancer des programmes par la simple manipulation de blocs d'instructions. La Figure 1.1 représente l'interface initiale du logiciel (version 2.0). Elle contient :

- une *espace de programmation* dans lequel il est possible manipuler les *blocs d'instruction* (disponibles dans l'espace central) pour la construction de programmes ;
- une *espace d'exécution* qui affiche, après l'exécution du programme, son résultat, qui est souvent représenté par des déplacements ou des actions d'un personnage (parfois appelé *lutin*).

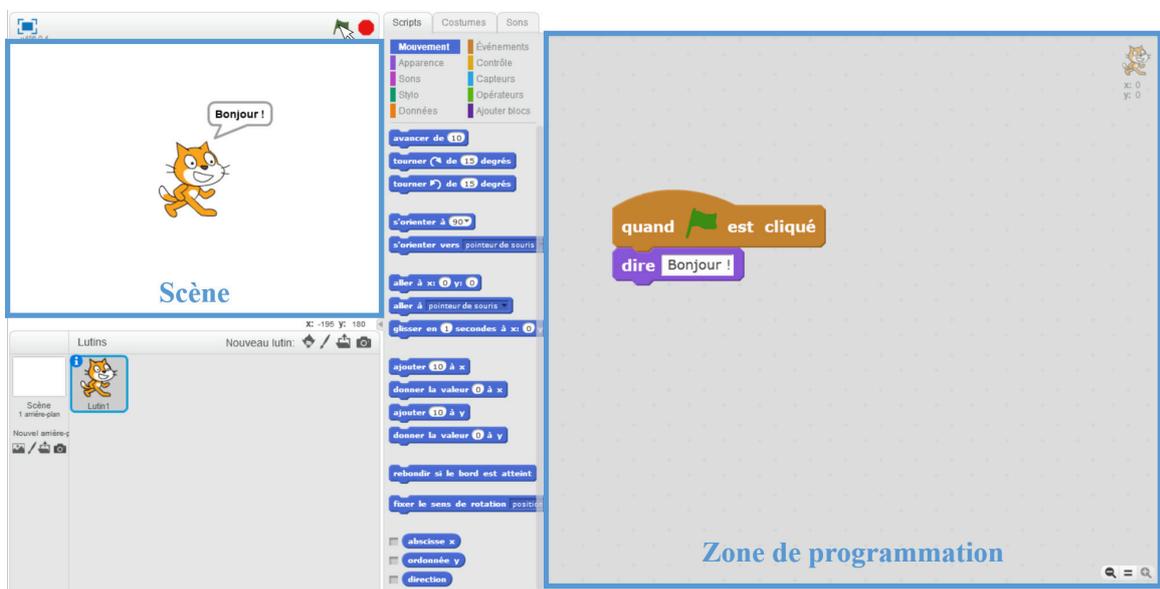


FIGURE 1.1 – Interface Scratch

L'aspect de la scène dans lequel le lutin agit peut être géré à travers un changement de l'arrière-plan. Par ailleurs, il est possible définir des fonctions grâce à l'option « Ajouter blocs », ce qui donne lieu à des blocs d'instructions personnalisés. Lorsque l'utilisateur enchaîne une ou plusieurs blocs d'instructions à la suite du bloc « quand le drapeau vert est cliqué », il peut visualiser l'effet du programme ainsi construit en cliquant sur le drapeau vert au dessus de la scène.

1.3.2 L'activité prescrite aux élèves dans les séquences EXPIRE

Nous concluons ce chapitre en caractérisant ce qui est prescrit aux élèves impliqués dans cette étude au niveau des tâches liées à l'algorithmique et à la programmation. Une modélisation plus complète des séquences EXPIRE sera proposée dans le chapitre 7.

Chacune des séquences EXPIRE se compose d'un ou plusieurs problèmes ayant toujours une consigne du type « Créer un programme Scratch qui résout un problème X ». Face à ce type de consigne, les élèves se trouvent devant à une situation de résolution de problèmes dans laquelle il leur est aussi demandé d'explicitier leur procédure de résolution en créant un programme Scratch. L'explicitation de la procédure est guidée par le

5. <http://https://scratch.mit.edu/>

biais de blocs d'instructions imposés aux élèves et définis par les auteurs des séquences⁶. En d'autres mots, les élèves sont censés faire de l'*algorithmique*, puisqu'ils sont amenés à proposer des *procédures de résolution de problème produisant, en un nombre fini d'étapes la réponse au problème*, c'est-à-dire des algorithmes. D'ailleurs, l'explicitation de ces algorithmes dans le logiciel Scratch donne lieu à un programme directement exécutable. C'est dans cette perspective que la tâche prescrite à l'élève peut être également qualifiée comme relevant de la programmation informatique. Cependant, il faut préciser que puisque les élèves ne se confrontent pas à une activité de traduction d'un algorithme dans un langage de programmation, il n'y a pas la possibilité que les élèves fassent du *debugging* (au sens de corriger des erreurs de traduction). Ils pourraient, en revanche, commettre des erreurs au niveau de l'algorithme de résolution du problème (par exemple s'ils ont choisi un mauvais nombre d'itérations dans la boucle « répéter ») et être amenés à corriger leur algorithme/programme.

Suite à ces observations, nous pouvons dire que les tâches prescrites à l'élève au sein des activités proposées par le projet EXPIRE relèvent à la fois de la résolution de problèmes, de l'algorithmique, et, un peu, de la programmation informatique.

Dans le contexte présenté, et sur la base des remarques précédentes, nous confondons les mots « algorithme » et « programme informatique », bien que nous insistons sur le fait qu'il s'agit de notions différentes. Aussi, dans ce travail, nous utiliserons parfois l'adjectif « algorithmique » pour faire référence aux activités ou objets relevant de la programmation informatique sur Scratch.

1.4 Retour sur notre problématique

Notre thèse apportera des éléments d'évaluation didactique des ressources proposées par le projet EXPIRE. Notamment, nous voulons observer si et comment des séquences didactiques en mathématiques intégrant une initiation à la programmation avec Scratch peuvent être installées dans le système écologique de l'institution visée. Une étude de la viabilité des séquences en classe visera à comprendre les effets de l'introduction de ce type de séquences au niveau de l'apprentissage des notions mathématiques visées du côté des élèves. Ensuite, nous allons étudier les changements des pratiques enseignantes nécessaires pour l'atteinte des objectifs didactiques propres aux séquences EXPIRE.

Pour cela, nous focalisons notre attention sur une des séquences issues du projet EXPIRE : celle sur la division euclidienne.

6. Pour chaque séquence EXPIRE, les élèves disposent d'un certain nombre de blocs qui leur permettra de créer des structures algorithmiques visées. Au delà des blocs conçus par les auteurs des séquences ils disposent du bloc « quand le drapeau vert est cliqué » et du bloc « répéter », prédéfinis dans l'environnement Scratch.

Chapitre 2

Etude épistémologique et didactique du sens de la division euclidienne

Cette thèse analysera les conditions de viabilité d'une séquence didactique sur le sens de la division euclidienne intégrant une approche algorithmique au cycle 3 de la scolarité française. Afin de nous procurer les outils nécessaires pour mener nos analyses, nous focalisons maintenant notre attention sur l'objet *division euclidienne* en explorant le savoir savant et les résultats issus de la recherche en didactique des mathématiques relatifs à cet objet.

Dans ce chapitre, nous répondrons aux questions suivantes concernant l'objet *division euclidienne* :

1. Quel est le savoir savant autour de la division euclidienne?
2. Quelles sont les caractéristiques didactiques du sens de la division euclidienne?
3. Quelle est la place du sens de la division euclidienne dans les programmes scolaires?
4. Quelle est la place du sens de la division euclidienne dans les manuels scolaires?
5. Quelles activités didactiques favorisent l'apprentissage du sens de la division euclidienne?

2.1 La division euclidienne dans le *savoir savant*

La division euclidienne est un objet d'étude qui s'inscrit dans le champ de l'arithmétique. Elle peut être définie, dans les cours de terminale scientifique, ou dans les cours universitaires en mathématiques, de différentes manières et avec différents pré-requis. Une façon de faire est de commencer par les notions suivantes :

- définitions des ensembles de nombres \mathbb{N} et \mathbb{Z} ;
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau intègre : commutatif, unitaire et qui ne possède aucun diviseur de zéro ;
- relations élémentaires entre l'ordre sur \mathbb{Z} et la multiplication et l'addition ($a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$ et $a \leq b, c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$) ;
- toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément (principe du bon ordre).

Grâce à ces éléments il est possible d'énoncer et prouver le théorème suivant :

Théorème. (*Division euclidienne dans \mathbb{Z}*) Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$a = bq + r, 0 \leq r < |b|.$$

Démonstration. (Existence) Définissons l'ensemble $S = \{a - nb \mid n \in \mathbb{Z}, a - nb \geq 0\}$. Observons que $S \neq \emptyset$: si $n = a$ nous avons $a - nb = a(1 - b)$ et si $n = -a$ nous avons $a - nb = a(1 + b)$, et puisque $b \neq 0$ un des deux est nécessairement un élément de S .

Donc S est une partie non vide de \mathbb{N} et, pour le principe de bon ordre, admet un plus petit élément. Soit $r = \min\{S\}$. Alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $r = a - qb \geq 0$.

Puisque r est le plus petit élément de S , nous avons $r < |b|$. En effet, si ce n'était pas le cas, c'est-à-dire si $r \geq |b|$, alors nous pourrions définir $r' = r - |b| \geq 0$. Mais $r' = a - qb - |b| = a - (q + \frac{|b|}{b})b \geq 0$, et puisque $q + \frac{|b|}{b} \in \mathbb{Z}$, $r' \in S$ avec $r' < r$, ce qui est absurde.

(Unicité) Supposons que :

$$a = bq + r, 0 \leq r < |b|$$

$$a = bq' + r', 0 \leq r' < |b|$$

Nous avons que $bq + r = bq' + r'$, donc $r' - r = b(q - q')$. Or $-|b| < r' - r < |b|$, et $-|b| < b(q - q') < |b|$. Il en résulte que $0 \leq |b||q - q'| < |b|$ et donc $0 \leq |q - q'| < 1$. Finalement, $|q - q'| = 0$ d'où $q = q'$ et $r = r'$. \square

Si $a = bq + r$, avec $0 \leq r < |b|$, les entiers a , b , q et r sont appelés, respectivement, le *dividende*, le *diviseur*, le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne de a par b .

Comme nous l'avons précisé, ce n'est qu'une façon de prouver l'existence et l'unicité du quotient et du reste.

Ce théorème constitue un résultat fondamental dans plusieurs champs mathématiques : il est à la base, par exemple, des réflexions autour des nombres premiers ainsi que de l'arithmétique modulaire.

L'adjectif "*euclidienne*" dans le terme *division euclidienne* fait penser que ce théorème est dû à Euclide (3^{ème} siècle av. J.-C.). En réalité, par la lecture de ses œuvres, on peut constater qu'il n'a pas abordé ce théorème. Toutefois, dans le septième livre des *Éléments*, nous pouvons trouver des définitions et des propriétés mathématiques autour des nombres multiples et diviseurs, des nombres premiers. Ceci lui permettant non seulement de définir le plus grand diviseur commun de deux entiers, mais aussi de donner un algorithme pour le calculer. Le concept de division n'est abordé qu'à travers des soustractions consécutives, mais il semble que les mathématiciens qui ont formulé pour la première fois le théorème sur la division euclidienne ont voulu rendre hommage à Euclide avec ce nom¹.

2.1.1 L'algorithme d'Euclide

Une des applications la plus immédiate du théorème cité est en effet l'algorithme pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers, connu (encore une fois) sous le nom d'*algorithme d'Euclide*. La célébrité et l'importance de cet algorithme vont bien au-delà du champ de l'arithmétique, puisqu'ils sont également liées à des aspects historiques au sein de l'algorithmique.

En effet, Knuth [1997] affirme :

We might call Euclid's method the granddaddy of all algorithms, because it is the oldest nontrivial algorithm that survived to present day.

1. D'ailleurs, l'adjectif "euclidien" a été donné à tous les anneaux A qui sont intègres, tels qu'il existe $\vartheta : A^* \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $\forall a, b \in A$, avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$ et $\vartheta(r) < \vartheta(b)$, ou bien $r = 0$. ϑ prend le nom de *stathme euclidien*. L'anneau \mathbb{Z} est un anneau euclidien avec $\vartheta(z) = |z| \forall z \in \mathbb{Z}$

En raison de cette importance, nous allons présenter et discuter cet algorithme, sans toutefois trop le détailler. Une analyse fine de cet algorithme pourra être trouvée dans [Knuth, 1997].

Voici alors la deuxième proposition du septième livre des *Elements* d'Euclide, avec la version originale de l'algorithme d'Euclide (dit des soustractions successives) :

Proposition. *Etant donnés deux nombres naturels qui ne sont pas premiers entre eux, trouver leur PGCD.*

Soit a et b deux nombres naturels. Tant que $a \neq b$:

- si $a > b$ alors $a := a - b$;
- sinon $b := b - a$;

Le PGCD de a et b sera a .

Un autre algorithme pour trouver le PGCD de deux entiers se base sur les divisions successives et prend la forme suivante :

Soit a et b deux nombres naturels. Tant que $b \neq 0$:

- $t := b$;
- $b := a(\text{mod}_b)$ (reste de la division euclidienne de a et b) ;
- $a := t$;

Le PGCD de a et b sera a .

A travers les éléments donnés, nous constatons une certaine connexion épistémologique et historique entre l'objet *division euclidienne* et l'objet *algorithme*. A la lumière de cette connexion, des activités didactiques intégrant ces deux objets semblent encore plus intéressantes.

2.2 Caractéristiques didactiques de la division euclidienne

Compte tenu de la grande taille du champ des savoirs liés à la division euclidienne et afin de cibler les objets qui sont enjeu d'apprentissage au sein de la séquence que nous étudions, nous proposons ici un résumé des études didactiques qui existent autour de cette notion.

Tout d'abord, nous observons que souvent, dans le contexte de l'école primaire, la division euclidienne est appelée *division avec reste*. Cette façon de la présenter naît de la volonté de distinguer la division euclidienne de l'opération de division définie dans l'ensemble des nombres rationnels. Cependant, en mathématiques ces deux concepts sont complètement différents : la division euclidienne n'est même pas une opération, puisque elle donne lieu à deux nombres entiers. Mathématiquement, en effet, il faut dire qu'il existe deux opérations associées à la division euclidienne :

$$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow q \in \mathbb{N}$$

et

$$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow r \in \mathbb{N}$$

avec $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$. Ces deux opérations ne font pas l'objet d'un symbolisme en usage.

En revanche, la division entre rationnels, dont le symbole est « : », est une vraie opération au sens mathématique :

$$(a, b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^{+*} \longrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$$

et le rationnel $\frac{a}{b}$ est dit *quotient* de la division de a par b .

La proximité du vocabulaire lié à ces deux « divisions », ainsi que la tendance à étendre le bagage de connaissances de la division entre nombres naturels à la division entre nombres rationnels, amènent, comme nous le verrons après, une suite de *misconceptions* [Confrey, 1986] chez les élèves ainsi que chez les enseignants.

Plus généralement, le seul fait que la division euclidienne soit habituellement présentée à l'école comme opération (précisément comme l'opération inverse de la multiplication) bien qu'elle ait deux résultats au lieu d'un seul, peut générer des difficultés de natures différentes chez l'élève.

2.2.1 Séparation de sens et algorithme de calcul

Une des contributions les plus importantes est constituée par les travaux de Guy Brousseau. Dans les années 60 il a commencé à s'intéresser à la question du sens des connaissances mathématiques en didactique.

Des études successives [Brousseau, 1972a], [Brousseau, 1972b] font le point sur les difficultés liées à l'apprentissage des algorithmes de calcul, en proposant des causes possibles et présentent une approche qui favoriserait son apprentissage. Cette approche, issue de sa Théorie des Situations Didactiques, se base sur l'idée que l'élève, sans qu'aucune technique ne lui soit communiquée, puisse arriver tout seul à concevoir un algorithme de calcul. A ce point, la question du sens est reprise et abordée comme un élément du savoir « à enseigner à part ». Quelques années plus tard, en effet, Brousseau [1987] prouve que l'apprentissage du sens de la division euclidienne est séparé de celui de l'algorithme de calcul. Cela signifie notamment qu'un élève qui comprend et sait appliquer parfaitement l'algorithme de calcul de division euclidienne ne sait pas forcément reconnaître les problèmes dans lesquels cet algorithme doit être appliqué, et inversement. L'algorithme de calcul de division euclidienne constitue certainement un point critique donnant lieu à plusieurs difficultés chez les élèves. Cette problématique a été explorée lors de plusieurs travaux de recherche. Un des plus connus est celui issu de la thèse de Guet [1994] intitulée « La division : une longue souffrance ». Cette recherche a mis en lumière une série d'obstacles épistémologiques qui contrarient l'introduction de la notion de division euclidienne notamment à l'école primaire. Compte tenu de l'ampleur du sujet et puisque nous voulons nous focaliser sur le sens de la division euclidienne, nous ne développons pas ultérieurement les aspects didactiques liés à la technique opératoire de division.

Or, l'expression « sens d'une notion mathématique » mérite d'être précisée dans cette thèse. En effet, il s'agit d'un sujet central, pour lequel des nombreux travaux de recherche ont essayé de fournir un regard général tenant compte des diverses théories en didactique des mathématiques. Nous mentionnons en particulier le point de vue de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Chevallard. Lemoyne [1993], synthétise les points suivants développés dans la TAD :

- le sens d'un objet mathématique est défini comme « *construit des sens des productions de différents registres sémiotiques* »;
- l'objet mathématique est vu comme « *émergent d'un système de pratiques qui se découpent dans différents registres sémiotiques* »;

- la relativité des objets du savoir à une certaine institution permet de définir un savoir scolaire à partir du savoir savant avec des pratiques propres à ce savoir;
- il existent de nombreux et variés objets sémiotiques en mathématiques qui s'inscrivent dans ces pratiques.

Selon [Chevallard \[1991b\]](#), la construction du sens d'une notion mathématique chez un élève se fait à travers la modification de son rapport à cette notion, rapport qui se constitue de ses rapports aux différents objets sémiotiques utilisés dans ses pratiques.

Notamment, Lemoyne précise que la plupart des pratiques didactiques visent à la construction du sens et sont guidées par le sens. En conséquent, elle montre qu'il n'est pas possible dissocier les manifestations et les gestions de sens des contenus des tâches.

Brousseau a analysé la question du processus d'enseignement du sens de notions mathématiques et il présente la vision suivante :

Le sens d'une connaissance reconnue comme telle par l'élève (institutionnalisée) est formé :

- du « tissu » *des raisonnements et des preuves* dans lesquels elle est impliquée avec évidemment des traces des situations de preuves qui ont motivé ces raisonnements;
- du « tissu » *des reformulations et des formalisations* à l'aide desquels l'élève peut la manipuler, accompagné d'une certaine idée des contraintes de communication qui les accompagnent;
- des *modèles implicites* qui lui sont associés – soit qu'elle les produise soit qu'elle en résulte- et des traces des situations d'action qui les fonctionnalisent ou qui simplement les contextualisent;
- et des rapports plus ou moins assumés entre ces différentes composantes, rapports essentiellement dialectiques.

[...] Le sens d'une connaissance inclut les questions auxquelles elle aide à répondre et celles qu'elle permet de poser. [[Brousseau, 1987](#)]

Cette citation, par ailleurs, nous donne l'occasion de nous questionner sur l'*institutionnalisation* du sens d'une notion mathématique. Vue la nature des objets en jeu, nous déduisons la présence de nombreuses difficultés de la part des enseignants face à ce type d'institutionnalisation. Nous allons reprendre cette problématique dans le chapitre 3, où nous identifierons des éléments d'analyse des pratiques enseignantes.

2.2.2 Le sens de la division euclidienne

En revenant à l'étude des caractéristiques didactiques du sens de la division euclidienne, à la lumière des définitions identifiées pour le sens de notions mathématiques, il est nécessaire de repérer les *modèles implicites* qui peuvent être associés à la division euclidienne.

Nous précisons qu'avec *modèles implicites* nous indiquons tous les modèles qui répondent entièrement aux sollicitations intuitives et que donc ont un fort niveau d'acceptation. Nous évoquons à ce propos les travaux de [Fishbein \[1987\]](#), qui montrent que certains modèles implicites ont la propriété de suggérer directement une solution et que dans ce type de modèles il y a un lien direct entre la situation proposée et le concept mathématique sous-jacent. Cela veut dire que si le modèle est réellement bon et si il a été bien compris, les sensations d'évidence et certitude sont imposées par le modèle-même comme un fait global saisi dans une seule compréhension synthétisant. Cependant, ce

modèle peut ne pas correspondre au concept en jeu, auquel cas des misconceptions sont créés. Une des plus fréquentes concernant la division est lié à l'acceptation du modèle « la division diminue toujours », vrai dans l'ensemble de nombre naturels, mais qui ne peut pas être étendu à l'ensemble des rationnels. Telle misconception a été beaucoup explorée en littérature (voir, par exemple, le travail de [Tirosh et Graeber \[1989\]](#)). Une autre misconception assez fréquente est basée sur la croyance que dans la division $a : b$, le nombre b doit être inférieur au nombre a . Selon [Fischbein et al. \[1985\]](#), en effet, la division est surtout conçue comme l'action de diviser une collection d'objets dans un nombre de sous-collections, ce qui impose des contraintes : le diviseur doit être un nombre entier plus petit du dividende et aussi le quotient doit être plus petit du dividende. En plus, [Fischbein et al. \[1985\]](#) identifient pour la division deux modèles primitifs avec leurs contraintes spécifiques : la *division-partition* et la *division-quotition*. Dans la division-partition le quotient représente la valeur unitaire de chaque part et le diviseur représente le nombre de parts. Cela implique que le diviseur doit être un nombre entier et le dividende doit être supérieur au diviseur. Inversement, dans la division-quotition le quotient est le nombre de parts, alors que le diviseur est la valeur d'une part. Dans ce cas, le dividende doit simplement être supérieur au diviseur et il n'est plus nécessaire qu'il soit entier.

Diverses expérimentations conduites dans le cadre de l'école primaire voient émerger, en particulier, des difficultés liées à l'apprentissage et à l'enseignement de la division-quotition, étant la division-partition plus familière aux élèves et aux enseignants [[Arrigo et Sbaragli, 2008](#)], [[Levain et Vergnaud, 1995](#)], [[Lutovac, 2008](#)], [[Squire et Bryant, 2002](#)].

Un autre apport important vient des études de [Vergnaud \[1994\]](#) concernant la classification des problèmes du champ multiplicatif au sein de la Théorie des Champs Conceptuels. Selon ses études, multiplication et division sont fortement intercorrélées et il est impossible de les étudier de façon séparée. L'apprentissage du sens de la division euclidienne peut donner lieu à divers types d'erreurs chez les élèves dont ceux relevant :

- d'une mauvaise reconnaissance de la situation (confusion entre champ multiplicatif et champ additif) ;
- d'une mauvaise schématisation au sein du champ multiplicatif.

D'autres études didactiques pointent aussi des difficultés liées au vocabulaire utilisé au sein de la division euclidienne. Notamment [Zazkis \[1998\]](#) relève des ambiguïtés dans l'usage des termes *diviseur* et *quotient* et montre comment elles affectent fortement les pratiques scolaire et l'apprentissage.

Encore, la thèse de [Banwitiya \[1993\]](#) questionne les façons de se manifester du « sens de la division » et le rôle qui joue dans la compréhension des élèves. Il synthétise, à partir des travaux de Brousseau, les diverses façons de concevoir la division, organisées en quatre classes : partages (déjà évoqué), recherche du terme inconnu d'un produit, division-fraction et application linéaire. Les expérimentations conduites par Banwitiya montrent, entre autres, que face à un problème, le choix par les élèves d'une certaine procédure de résolution semblerait être en lien avec la *structure mathématique*² du problème et qu'une variable ayant un impact très fort pour l'identification du modèle mathématique est la nature des unités de grandeurs. Par ailleurs, il identifie d'autres variables qui jouent sur le choix du modèle mathématique : le caractère explicite ou implicite des données, l'ordre dans lequel les données apparaissent et l'*habillage du problème* (ce que nous allons appeler *contexte*).

Finalement, nous citons une dernière thèse qui a contribué à l'étude didactique de

2. Selon G. Vergnaud, chaque problème est caractérisé par une *structure mathématique* correspondant à la relation qui existe entre la question du problème et les données.

la division euclidienne : celle de Fluckiger [2000]. L'auteure met en place une macro ingénierie didactique en lien étroit avec l'enseignant sur la notion de division. Les séances conçues au sein de cette ingénierie, inscrite dans la Théorie des Situations Didactiques et analysée à l'aide de la Théorie des Champs Conceptuels, ont pour objectif de donner du sens à l'algorithme de calcul de division à l'école primaire. L'analyse des procédures des élèves montre : la quasi absence de la soustraction interprétée en termes de difficulté de la gestion des processus de répétition ; le recours à l'addition répétée ou à la multiplication comme procédures à l'œuvre ou comme procédures de vérification.

Nous considérerons certaines des variables identifiées par Banwitiya [1993] ainsi que les procédures émergées en manque d'un algorithme connu pour la division, suggérées par Fluckiger [2000] lors de la conception de notre modèle didactique des savoirs, dans le chapitre 6.

2.3 La division euclidienne dans le *savoir à enseigner*

Autour de la division euclidienne, notamment en ce qui concerne l'apprentissage de son sens de la part d'élèves de cycle 3, nous trouvons divers éléments du savoir : les notions de *multiple/diviseur* d'un nombre, les tables de multiplication, les critères de divisibilité. Afin d'avoir des repères pour caractériser le savoir à enseigner au sein de l'institution considérée, nous allons proposer et commenter les extraits des derniers programmes scolaires [MEN, 2015] des cycles 2 (Tableau 2.1) et 3 (Tableau 2.2) concernant ces éléments.

Dans ces extraits, nous pouvons observer que le travail qui consiste à donner du sens à la division euclidienne est commencé au cycle 2 pour être ensuite consolidé au cycle 3, dans lequel une technique opératoire de la division euclidienne est également abordée.

Les *tables de multiplications*, essentielles pour donner du sens et résoudre des problèmes de recherche du terme manquant d'expressions du type $a = b \times ?$, sont apprises au cycle 2, et peuvent être réinvesties au cycle 3 pour l'apprentissage des notions de *multiples* et *diviseurs*. Cela permettra, au cycle 3 également, d'aborder les critères de divisibilité par 2, par 3, par 4, par 5, par 9 et par 10 et de maîtriser des techniques de calcul mental et de calcul en ligne plus avancées avant d'arriver à l'apprentissage de la technique de calcul posé. Au niveau des compétences relatives à la modélisation mathématique attendues à la fin de chaque cycle, nous constatons que si au cycle 2 l'élève doit « réaliser » qu'il existent des problèmes relevant de diverses situations (additives, multiplicatives, de partage ou de groupement), au cycle 3 il doit arriver à « reconnaître et distinguer » des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives et de proportionnalité. Une demande particulière est faite concernant l'enrichissement du répertoire des problèmes de division au cycle 3. Ces problèmes à partir du cycle 2 doivent, par ailleurs, être modélisés à l'aide d'écritures mathématiques, et il est nécessaire de donner du sens au symbole « : » de la division.

Rubriques	Cycle 2
Objectifs généraux	Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) sont étudiées à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures. La pratique quotidienne du calcul mental conforte la maîtrise des nombres et des opérations.
Compétences travaillées - Modéliser	Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.
Nombres et calcul	Des résolutions de problèmes contextualisés : dénombrer des collections, mesurer des grandeurs, repérer un rang dans une liste, prévoir des résultats d'actions portant sur des collections ou des grandeurs (les comparer, les réunir, les augmenter, les diminuer, les partager en parts égales ou inégales, chercher combien de fois l'une est comprise dans l'autre, etc.). Ces actions portent sur des objets tout d'abord matériels puis évoqués à l'oral ou à l'écrit; le travail de recherche et de modélisation sur ces problèmes permet d'introduire progressivement les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division).
Attendus de fin de cycle	<p>Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul : Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée..., conduisant à utiliser les quatre opérations.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Sens des opérations. — Problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction). — Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division). Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques. — Sens des symboles +, -, ×, : <p>Étudier les liens, entre :</p> <ul style="list-style-type: none"> — addition et soustraction — multiplication et division. <p>Distinguer les problèmes relevant des structures additives des problèmes relevant de structures multiplicatives.</p>
	<p>Calculer avec des nombres entiers : Mémoriser des faits numériques et des procédures.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Tables de l'addition et de la multiplication. — Décompositions additives et multiplicatives de 10 et de 100, compléments à la dizaine supérieure, à la centaine supérieure, multiplication par une puissance de 10, doubles et moitiés de nombres d'usage courant, etc. <p>Répondre aux questions : $7 \times 4 = ?$; $28 = 7 \times ?$; $28 = 4 \times ?$, etc.</p>
Repères de progressivité	<p>Au CP, les élèves commencent à résoudre des problèmes additifs et soustractifs auxquels s'ajoutent des problèmes multiplicatifs dans la suite du cycle. L'étude de la division, travaillée au cycle 3, est initiée au cours du cycle 2 dans des situations simples de partage ou de groupement. Elle est ensuite préparée par la résolution de deux types de problèmes : ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur et ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs. Au CE2, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes plus complexes, éventuellement à deux étapes, nécessitant par exemple l'exploration d'un tableau ou d'un graphique, ou l'élaboration d'une stratégie de résolution originale.</p> <p>Le réinvestissement dans de nombreux problèmes arithmétiques élémentaires permet ensuite aux élèves d'accéder à différentes compréhensions de chaque opération.</p>

TABLEAU 2.1 – Extraits des programmes de cycle 2

Rubriques	Cycle 3
Objectifs généraux	Le cycle 3 vise à approfondir des notions mathématiques abordées au cycle 2, à étendre le domaine d'étude, à consolider l'automatisation des techniques écrites de calcul introduites précédemment (addition, soustraction et multiplication) ainsi que les résultats et procédures de calcul mental du cycle 2, mais aussi à construire de nouvelles techniques de calcul écrites (division) et mentales, enfin à introduire des notions nouvelles comme les nombres décimaux, la proportionnalité ou l'étude de nouvelles grandeurs (aire, volume, angle notamment).
Compétences travaillées - Modéliser	Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne. Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.
Attendus de fin de cycle	<p>Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux : Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul. Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit. Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Addition, soustraction, multiplication, division. — Propriétés des opérations : $2 + 9 = 9 + 2$ $3 \times 5 \times 2 = 3 \times 10$ $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$ — Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs. — Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant. — Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10). <p><i>Calcul mental</i> : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur. <i>Calcul en ligne</i> : utiliser des parenthèses dans des situations très simples.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Règles d'usage des parenthèses. <p><i>Calcul posé</i> : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Techniques opératoires de calcul (dans le cas de la division, on se limite à diviser par un entier). <p><i>Calcul instrumenté</i> : utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Fonctions de base d'une calculatrice. <p>Exemples de faits et procédures numériques :</p> <ul style="list-style-type: none"> — multiplier ou diviser par 10, par 100, par 1000 un nombre décimal, — rechercher le complément à l'unité, à la dizaine, à la centaine supérieure, — encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs, — trouver un quotient, un reste, — multiplier par 5, par 25, par 50, par 100, par 0, 1, par 0, 5 ... <p>Utiliser différentes présentations pour communiquer les calculs (formulations orales, calcul posé, en ligne, en colonne, etc.). En lien avec la calculatrice, introduire et travailler la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction ainsi que l'usage des parenthèses.</p>
	<p>Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul : Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Sens des opérations. — Problèmes relevant : des structures additives; des structures multiplicatives. <p>Enrichir le répertoire des problèmes additifs et multiplicatifs, notamment les problèmes relevant de la division.</p>

TABLEAU 2.2 – Extraits des programmes de cycle 3

A propos de ce dernier point, les programmes ne précisent pas quelles écritures il est nécessaire de mobiliser, ni quel « sens » il faut donner au symbole de division « : ». Nous

proposons alors de regarder les conseils du groupe de l'IREM de Rennes qui, en 2008, a publié une brochure avec le titre « Les divisions. Liaison cycle 3 - 6ème » à la destination des enseignants. Le groupe donne les indications suivantes concernant le vocabulaire recommandé :

Il faut éviter :

- « quotient exact » pour « quotient euclidien » : en mathématiques les résultats sont exacts ou approchés.
- « division exacte » pour « la division euclidienne avec un reste nul » ou parfois « la division » : que signifierait une division inexacte ?
- « quotient entier » : le quotient euclidien est en effet toujours entier, mais cela peut aussi être le cas du quotient de la division.

[Gautier *et al.*, 2008]

Par ailleurs, les auteurs font le point sur le symbolisme de la division euclidienne généralement adopté et se positionnent là-dessus :

Certains manuels utilisent abusivement le symbolisme « : » comme symbole de la division euclidienne. Il est fort peu recommandé³ d'écrire : $22 : 5 = 4$ (reste 2) ou $22 : 5 = 4r2$. L'ouvrage « *J'apprends les maths* » Editions Retz, utilise $22 : 5? q = 4r = 2$. C'est discutable car la notation « : » a alors un double usage. D'autres ouvrages utilisent le symbole « ÷ » symbolisme utilisé par la plupart des calculettes. Ce symbole opératoire donne le quotient décimal approché à 10^{-i} près (i dépendant de la capacité d'affichage de la calculette) et n'a donc pas lieu d'être utilisé pour la division euclidienne. Il ne fournit ni le quotient euclidien ni le quotient de la division dans l'ensemble des rationnels. [...] La notation de la "potence" ou "béquille" était utilisée dans « *Objectif-calcul* » Editions Hatier, mais les mêmes auteurs l'ont abandonnée dans « *Euro Maths* ».

$22 \vdash 5 \ q = 4$ et $r = 2$. [Gautier *et al.*, 2008]

Les programmes recommandent également de varier la nature des problèmes contribuant à donner du sens aux quatre opérations. Ils précisent qu'il est nécessaire à partir du cycle 2, en ce qui concerne la division, de problèmes de partage ou de groupement pour préparer l'étude de deux types de problèmes au cycle 3 : « ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur » (division-quotition) et « ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs » (division-partition).

Dans la prochaine section nous allons proposer un point sur les activités et les problèmes existants censés donner du sens à la division euclidienne selon la communauté de chercheurs en didactique des mathématiques.

2.4 Activités didactiques pour favoriser l'apprentissage du sens de la division euclidienne

Comme nous l'avons montré dans la section 2.2.2, divers chercheurs en didactique des mathématiques épousent une vision constructiviste de l'apprentissage du sens de concepts mathématiques, selon laquelle la compréhension du sens de tout concept mathématique se fait à travers des activités. Généralement, dans le cadre de l'enseignement

3. L'objectif est d'éviter l'erreur courante en sixième : $22 : 5 = 4,2$ (au lieu de $22 : 5 = 4,4$) l'égalité $22 = (4 \times 5) + 2$ est licite (2 est alors le reste de la division euclidienne de 22 par 5). Elle s'explique par l'utilisation abusive de la notation « : » pour la division euclidienne, le « r » se transformant alors en virgule.

des mathématiques, une idée largement répandue est que notamment les activités de « résolution de problèmes » favorisent la construction des concepts. D'autre parts, cette idée est défendue explicitement par la même institution scolaire dans les programmes [MEN, 2015], qui disent : « *La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens* ». Par ailleurs, les programmes, tout comme diverses recherches en didactique, mettent en lumière la nécessité de faire intervenir une même notion mathématique dans différents contextes et dans une multiplicité de problèmes différents, pour donner du sens à la notion visée.

Au cours des années, les didacticiens et les auteurs des manuels scolaires ont développé une multitude de problèmes pour permettre aux élèves de se confronter à la division euclidienne. Pour un résumé des problèmes issus de certains manuels scolaires édités avant 2008, mais encore d'actualité, nous renvoyons à l'étude menée dans [Gautier et al., 2008] : dans leur travail ils catégorisent les activités inhérentes à la division euclidienne et à d'autres divisions selon l'objectif, la situation retenue pour la construction, le sens (selon la typologie de Vergnaud), les données numériques et les procédures envisagées (voir Figure 2.1).

B. LES AUTEURS DE MANUELS ANALYSE D'UNE COLLECTION EN USAGE

1. Cycle 3

1.1 CE2

Collection CAP MATHS CE2

Période (par quinzaine)	Titre intitulé	Nombre de séances	Objectif	Situation retenue pour la construction	Sens (typologie de Vergnaud ¹)	Données numériques	Procédures envisagées
Période 2 Q6 (séance 5)	Combien de boîtes de bonbons ? « Menthe et Fraise »	1 40 min	Chercher des stratégies pour résoudre des problèmes de division	CONSTRUCTION 1 situation : par groupes P1 : 180 ou 140 combien de paquets de dix ? P2 : 72 ou 90 combien de paquets de six ?	Division quotient Contexte cardinal	Dividende 180 ou 140 Diviseur 10 ou 72, 90, 84, 42 et 6. (Dividendes multiples du diviseur) Recherche du quotient euclidien, le reste est nul.	P1 : comptage de 10 en 10, ou addition itérée de 10 ; multiplication par 10 ; nombre de dizaines dans le nombre donné. P2 : comptage de 6 en 6 ou addition itérée de 6 ; addition itérée de multiples de 6 ; appui sur 10 boîtes 60 bonbons.
Période 3 Q8 (séance 3)	Combien de paquets de feuilles ?	1 40 min	Chercher à comprendre le principe de la multiplication par un nombre à un chiffre Chercher des procédures pour résoudre un problème de « nombre de parts »	CONSTRUCTION 1 situation Par groupes P1 : 265 combien de paquets de 53 ? P2 : 2760 combien de paquets de 276 ? P3 : 3440 par paquets de 430.	Division quotient Contexte cardinal	Dividendes multiples du diviseur. Recherche du quotient euclidien, le reste est nul.	P1 : suggestion d'essais de produits 53 x n P2 : utilisation de la règle des zéros P3 : essais de produits repérés comme plus économique.

¹ Pour des précisions sur la typologie de Vergnaud, le lecteur pourra s'appuyer sur le chapitre II.B : aspects didactiques, la question du sens.

FIGURE 2.1 – Caractérisation des activités portant sur les divisions proposée par l'IREM de Rennes dans [Gautier et al., 2008]

Un des problèmes les plus célèbres, mentionné dans toute recherche en didactique portant sur la division euclidienne est certainement constitué par le jeu de la « course à 20 » conçu par Guy Brousseau en 1972 [Brousseau, 1972a]. Le jeu implique deux joueurs qui choisissent alternativement des nombres en ajoutant 1 ou 2 au nombre précédemment dit par son adversaire. Le premier dit 1 ou 2. L'objectif est de réussir à dire 20 le premier.

La résolution de ce problème demande une focalisation sur la question du reste. En particulier, la stratégie gagnante consiste à partir en premier en disant 2 (le reste de la division euclidienne de 20 par 3) et de dire la suite des nombres 5, 8, 11, 14, 17 et 20 (en

ajoutant 1 si l'adversaire ajoute 2 au nombre précédent et en ajoutant 2 si l'adversaire ajoute 1). A ce problème l'auteur avait initialement attribué l'objectif d'amener l'élève à élaborer progressivement « un algorithme de la division euclidienne grâce à une série de réflexions et de découvertes, suivant le processus de mathématisation ». Dans les travaux successifs de Brousseau, la « course à n » a ensuite été classifiée comme étant une *situation fondamentale*⁴ pour la division euclidienne.

2.5 Retour sur notre problématique

Les études présentées dans ce chapitre nous permettront de prendre du recul sur le sujet de notre recherche. Par ailleurs l'identification des points critiques relatifs au concept de division euclidienne, nous fournissent des éléments importants pour la caractérisation et l'analyse des séquences EXPIRE. Les difficultés et les erreurs potentielles des élèves repérées seront notamment repris dans le chapitre 8 pour nous donner des outils méthodologiques pour l'étude de la viabilité de la séquence EXPIRE dans la scolarité française. Finalement, nous reprendrons le discours sur les difficultés liées à l'enseignement, et notamment de l'institutionnalisation, du sens de la division euclidienne dans la revue de la littérature (chapitre 3), ce qui mettra en lumière des spécificités des pratiques enseignantes que nous observerons et analyserons dans la dernière partie de la thèse.

4. Selon G. Brousseau, depuis le « Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques », publié en 1998 et disponible au lien http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf, une situation fondamentale est « un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner ».

Chapitre 3

Revue de littérature

Rappelons que notre questionnement initial consiste à :

- identifier un modèle didactique des savoirs pour caractériser une séquence d'enseignement de mathématiques intégrant une dimension algorithmique ;
- comprendre si une approche intégrant une dimension algorithmique est viable dans l'enseignement de notions mathématiques à l'école primaire ;
- caractériser les conditions et les contraintes qui impactent l'enseignement de notions mathématiques via une approche algorithmique.

Dans ce chapitre, nous recueillons et examinons les travaux de recherche existants autour de ces trois axes. Cela nous permettra de cibler le choix de notre cadre théorique et méthodologique, de mieux encadrer notre problématique et de définir nos questions de recherche.

3.1 Sur la conception d'un modèle didactique des savoirs mathématiques avec une dimension algorithmique

Un des engagements de cette thèse consiste à identifier des outils théoriques et méthodologiques permettant de modéliser des séquences d'enseignement/apprentissage de notions mathématiques tenant compte des caractéristiques issues d'une dimension algorithmique. En particulier, nous souhaitons construire un modèle qui rend compte des savoirs mathématiques et des savoirs de l'algorithmique et qui montre également le fait que les savoirs algorithmiques sont au service de l'apprentissage des mathématiques. La construction de ce modèle permettrait d'interroger et de mieux comprendre les dynamiques qui peuvent favoriser ou défavoriser l'apprentissage des notions visées.

Afin de nous outiller pour la conception d'un tel modèle, nous analysons dans cette section les travaux de recherche en didactique des mathématiques qui ont exploré des questions autour de ce type de modélisation des savoirs.

Tout d'abord, notre questionnement revient, d'un point de vue plus générale, à découvrir comment il est possible de modéliser des activités didactiques dans lesquelles certains savoirs sont vecteurs d'apprentissage pour d'autres savoirs. Régine Douady [Douady, 1984] propose un regard sur tout objet du savoir mathématique qui peut être à la fois compris comme *objet* et à la fois comme *outil*. Elle précise que « *par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement* » et que « *un concept est un outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème* ». Ses travaux

montrent l'existence d'une *dialectique outil/objet*, dans le sens où chaque élément du savoir peut intervenir à la fois comme outil et à la fois comme objet. Cette dialectique peut s'installer à échelles différentes : par exemple au sein de l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, mais aussi dans le cadre des organisations didactiques. Plusieurs travaux de recherche ont mis à l'épreuve la dialectique outil/objet en tant que modèle « *descriptif et explicatif de la relation enseignement/apprentissage d'une certaine notion ou d'un réseau de notions* » [Douady, 2003]. La spécificité principale de ce modèle est le fait de prendre en compte les changements de statut des connaissances, ce qui permet d'enquêter qui prend en charge ces changements et sur qui en a le contrôle.

Selon Modeste :

Cette dualité outil-objet est particulièrement importante concernant le concept d'algorithme. C'est seulement l'aspect objet de l'algorithme qui le différencie d'autres processus de résolution de problème. Le concept d'algorithme n'a de sens que si l'on prend du recul sur la résolution générique d'un problème par un algorithme, via sa validation, son analyse, son questionnement. [Modeste, 2012]

Nous allons, donc, nous intéresser aux travaux de recherche qui proposent une modélisation de savoirs algorithmiques et mathématiques dans lesquels l'algorithmique a officiellement le statut d'outil, mais qui caractérisent aussi l'algorithmique en tant qu'objet. Dans la littérature nous n'avons pas trouvé beaucoup d'œuvres qui traitent ce sujet. Notamment, les travaux retenus dans cet état de l'art se situent tous dans le cadre du lycée.

Un essai de modéliser et caractériser ce type de savoirs est présent dans la thèse de Briant [2013]. Elle s'est intéressée aux potentialités de la pensée algorithmique au service de l'algèbre élémentaire. En particulier, elle a modélisé des situations d'apprentissage de savoirs mathématiques nécessitant la construction d'algorithmes implémentables dans une machine. Pour cela, elle fait appel aux notions de *transposition didactique* [Chevalard, 1985] et de *transposition informatique* [Balacheff, 1993] pour modéliser le passage de la résolution mathématique au programme informatique.

En particulier, cette double transposition a lieu puisque le savoir enseigné avec un certain environnement numérique est sujet aux contraintes de cet environnement. Ces contraintes concernent d'un côté la *modélisation computable*, c'est à dire celles relevant de la représentation et le traitement interne des savoirs dans la machine et, d'un autre côté, les contraintes logicielles et matérielles des supports informatiques qui portent sur la représentation et le traitement au niveau de l'interface, autrement dit ce qui est « visible » pour le sujet [Briant, 2013]. Le concept de transposition informatique de Balacheff est alors adapté aux spécificités de l'algorithmique : lorsque les élèves sont confrontés à des situations qui tournent autour d'activité comme « élaborer des algorithmes permettant de résoudre certaines catégories d'équations du second degré », par exemple, il émerge des objets du savoir issus des mathématiques, de l'informatique, mais aussi des deux conjointement. Selon Briant et Bronner [2015], une modélisation possible de la démarche algorithmique de l'élève est celle schématisée en Figure 3.1.

Les auteurs précisent que la première transposition « implique la disparition d'étapes intermédiaires de la résolution en environnement papier-crayon » et oblige à penser de manière algorithmique, alors que la seconde transposition nécessite non seulement la compréhension d'un nouveau langage, mais également une adaptation de l'algorithme aux contraintes du logiciel utilisé. La thèse de Briant montre d'ailleurs que « l'élève, devant la tâche de concevoir un algorithme et un programme dans un environnement informatique, se voit dans une situation de décomposer chacune de ses actions en actions

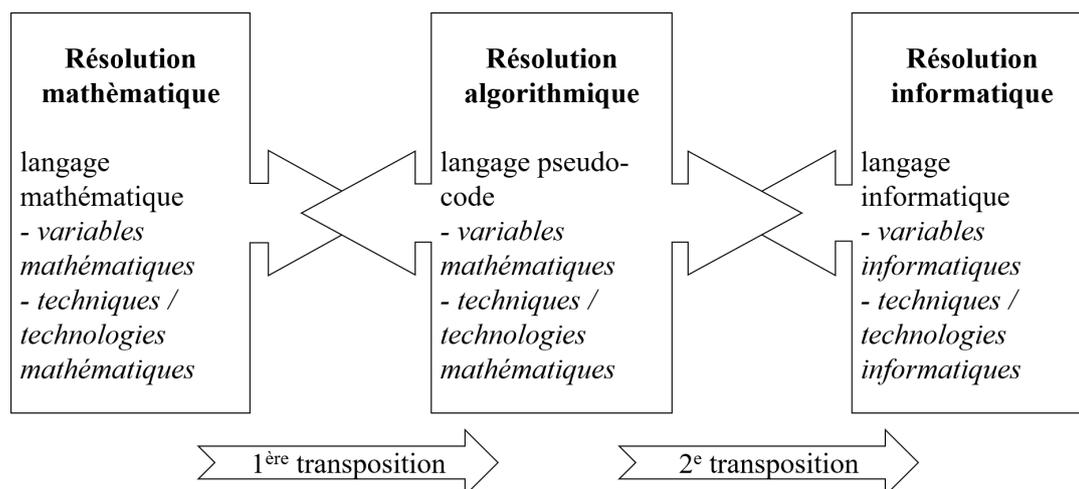


FIGURE 3.1 – Double transposition de la résolution d’un problème mathématique en vue de sa programmation [Briant et Bronner, 2015]

élémentaires. Cette décomposition passe par une réflexion nécessaire sur les objets mathématiques en jeu dans la tâche à effectuer et oblige les élèves à revenir sur leurs conceptions de ces objets ».

Dans le cadre de notre travail de conceptualisation de l’activité face aux séquences EXPIRE, la deuxième transposition n’est pas prise en charge par l’élève, puisque la résolution algorithmique et celle informatique se superposent, comme nous l’avons déjà expliqué dans le chapitre 1.

Une autre thèse qui a traité cette thématique est celle de Dominique Laval [Laval, 2018]. En se basant sur le cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM) [Kuzniak et Richard, 2014], il définit des Espaces de Travail Algorithmique (ETA) dont il analyse les plans épistémologique et cognitif. Ensuite il étudie, entre autres, les interactions et les articulations qui existent entre ETM et ETA grâce à des ingénieries didactiques qui lui ont permis d’expérimenter et valider son modèle. Entre autres, ses analyses ont montré que « *les travaux mathématiques et algorithmiques peuvent, dans le cadre du lycée, être décrits grâce à trois niveaux d’ETM/ETA : le domaine mathématique spécifique et l’utilisation de l’algorithmique visés par l’institution doit être décrite dans l’ETM de référence* » [Laval, 2018].

Pour revenir à notre travail, bien que nous voudrions obtenir un modèle qui montre les articulations entre le savoir issu des mathématiques et celui algorithmique, notre questionnement se situe hors la sphère cognitive. Donc, nous n’adopterons pas le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématiques.

Ces questions ont été abordées, en revanche, d’un point de vue anthropologique par Couderette [2016] et par Strock et Artaud [2019]. Ces deux articles s’appuient sur la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), en considérant ses outils théoriques comme pertinent pour caractériser les savoirs en jeu. Nous analysons ces deux travaux plus en détails, en renvoyant le lecteur au chapitre 4 pour les définitions de *praxéologie*, *type de tâches*, *technique*, *technologie* et *théorie*, relevant de la TAD.

Quant à la recherche de Michèle Couderette, elle s’intéresse de l’introduction d’un enseignement de l’algorithmique au sein du cours de mathématique qui a eu lieu au lycée en 2009. En particulier, elle veut comprendre les difficultés auxquelles les enseignants se confrontent lors de cet enseignement, pour lequel, dans la plupart des cas, ne sont pas formés. A l’issue de l’observation des pratiques d’une enseignante, elle pointe une difficulté de fond qui est liée à l’hybridité de l’algorithme à cheval entre mathématiques

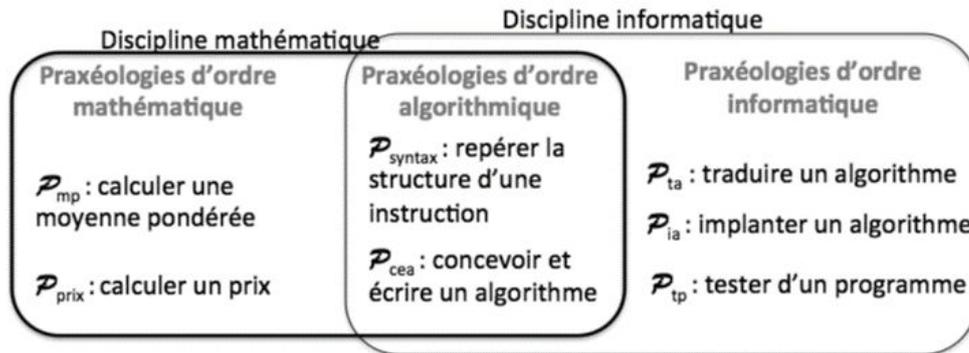


FIGURE 3.2 – Exemple de praxéologies d'ordres mathématique, algorithmique et informatique identifiées par Couderette [2016]

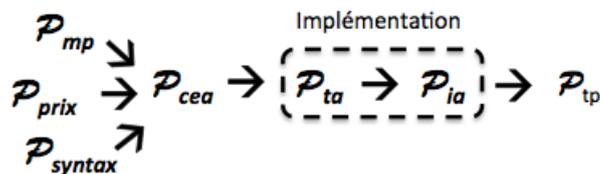


FIGURE 3.3 – Dépendance entre praxéologies de différents ordres [Couderette, 2016]

et informatique, ce qui ne permet pas son étude en tant qu'objet.

Afin de caractériser le savoir mis à l'étude, elle décrit la séance en termes de *praxéologies*. Les praxéologies qu'elle relève sont de différents ordres : mathématique, algorithmique et informatique. Elle observe que ces praxéologies sont imbriquées les unes dans les autres. Par exemple, en faisant référence aux praxéologies énoncées dans la Figure 3.2, la praxéologie \mathcal{P}_{cea} convoque des praxéologies « auxiliaires » \mathcal{P}_{mp} et \mathcal{P}_{prix} , alors que l'implémentation de l'algorithme évoquera la réalisation des praxéologies \mathcal{P}_{ta} et \mathcal{P}_{ia} . Dans le schéma en Figure 3.3, l'auteure montre un résumé des dépendances entre ces praxéologies.

L'étude des dépendances entre praxéologies de différents ordre nous intéresse et pourrait être pertinente pour le modèle des savoirs que nous souhaitons construire pour notre thèse. En effet, nous pensons que un modèle explicitant les articulation entre les types de tâches d'une organisation mathématique intégrant une dimension algorithmique puisse être opérationnel pour caractériser les conditions de son introduction dans le curriculum.

Revenons maintenant sur l'article de Strock et Artaud [2019] : il s'agit d'une étude qui met en lumière une forte difficulté à faire émerger des éléments technologiques et théorique propres de l'algorithmique et essaie d'en identifier les causes. Notamment, selon les auteurs cette difficulté pourrait être due à l'asservissement de l'algorithmique aux mathématiques. Pour mener leur enquête, les auteurs délimitent les praxéologies à enseigner concernant l'algorithmique à partir d'un document ministériel intitulé « Ressources pour la classe de seconde - Algorithmique » qui précise les attentes institutionnelles présentées seulement brièvement dans les programmes du lycée du 2009 à l'égard de l'algorithmique. Ils identifient trois types de tâches en lien avec l'évaluation :

- « **analyser** le fonctionnement ou le but d'un algorithme existant » ;
- « **modifier** un algorithme existant pour obtenir un résultat précis » ;
- « **créer** un algorithme en réponse à un problème donné ».

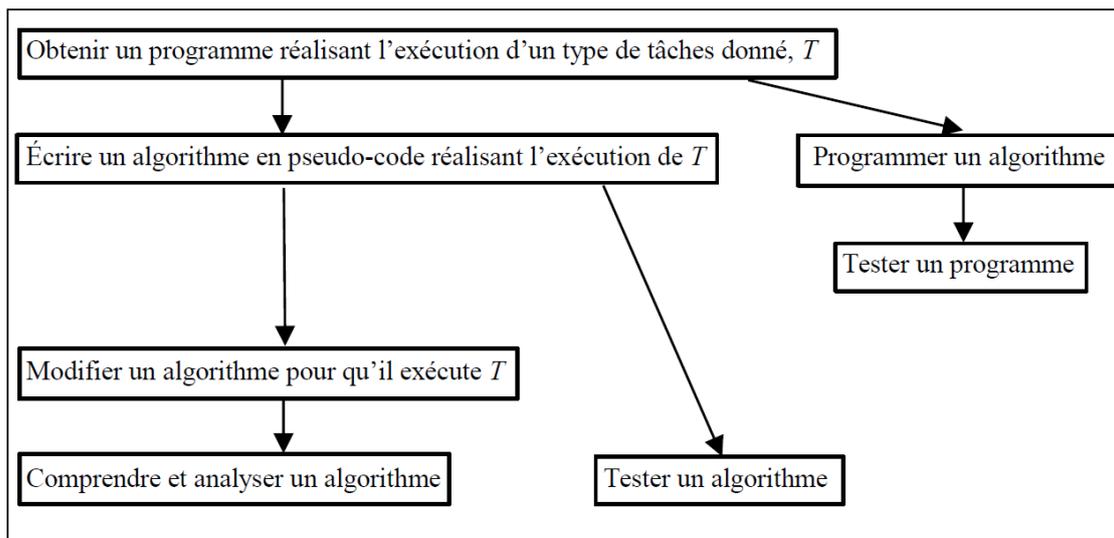


FIGURE 3.4 – Réseau de types de tâches liés à l'algorithmique [Strock et Artaud, 2019]

Par ailleurs, ils trouvent sept types de tâches susceptibles d'être identifiés et travaillés, et qui, selon les auteurs, sont en lien les uns les autres donnant lieu au réseau de types de tâches présenté dans la Figure 3.4¹.

Il commentent cette modélisation ainsi :

Obtenir un programme réalisant l'exécution d'un type de tâches donné T peut demander l'écriture d'un algorithme réalisant T , le test de l'algorithme obtenu, la programmation de cet algorithme et le test du programme obtenu. Pour écrire un algorithme réalisant T , on peut se procurer un algorithme réalisant un type de tâches T' (qui peut être égal à T) et éventuellement le modifier pour qu'il exécute T , ce qui suppose de comprendre et d'analyser un algorithme, puis le tester. [Strock et Artaud, 2019]

Les modélisations proposées par Couderette et Strock et Artaud nous semblent pouvoir être fonctionnelles pour la description et l'analyse de savoirs relevant des mathématiques et de l'algorithmique apparaît fonctionnelle. Nous souhaitons donc nous inspirer de ce travail pour construire un modèle des savoirs pertinent pour caractériser les séquences EXPIRE.

3.2 Sur la viabilité d'une approche algorithmique pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Dans cette section, nous cherchons à recenser les travaux de recherche qui ont questionné la viabilité d'une approche algorithmique pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Considéré que peu de travaux existent à ce sujet dans le cadre de l'école primaire, nous étendons notre intérêt également aux recherches menées dans le cadre du collège. Précisons aussi que la plupart des travaux que nous présentons dans cette section visent à questionner des *transferts* implicites pouvant avoir

1. Observons que Strock et Artaud indiquent la relation « flèche » présent dans la Figure 3.4 comme la relation « être sous-type de tâches de ». Puisque nous adopterons des définitions issues de T4TEL, nous identifierons plutôt cette relation comme « être ingrédient de la technique de ». Nous présenterons également les définitions de *sous-type de tâches* et d' *ingrédient d'une technique* dans le chapitre 4.

lieu lors du passage d'une activité de programmation informatique vers une activité de mathématiques. Bien que les ressources issues du projet EXPIRE ne relèvent pas de transferts « mystérieux », mais d'une certaine *ingénierie*² didactique, nous voulons quand-même nous inspirer de ces travaux surtout en ce qui concerne la méthode adoptée pour évaluer les connaissances acquises suite au travail des élèves dans l'environnement Scratch. Cela nous donnera une indication pour comprendre si les séquences EXPIRE peuvent être intégrées dans le curriculum de l'école primaire sans perte de connaissances relativement aux notions mathématiques en jeu. Cette revue de la littérature nous permettra donc d'identifier une méthodologie pertinente pour répondre à nos questions de recherche (que nous présenterons dans le chapitre 5).

Les premières expérimentations concernant l'intégration de la programmation à l'école primaire en France ont été menées suite à l'apparition de la mention « manipulation d'objets programmables » dans les programmes scolaires de 1985, au sein du plan IPT³. Cette mention disparaît des programmes en 1995, mais plusieurs enseignants et chercheurs ont continué à s'intéresser des potentialités didactiques de la programmation. La plupart des expériences pour les classes d'école primaire et de collège ont été faites à l'aide de langages de programmation simples, comme BASIC⁴ ou Logo, et, récemment, Scratch. En général, les résultats sont divergents et ne confirment pas entièrement une mise au service de la programmation aux autres disciplines. Cela a donné lieu à la recherche des conditions dans lesquelles une telle approche peut se considérer opérationnelle et viable dans l'enseignement.

Une première étude que nous considérons est celle de Bideault [1985]. L'auteure vise à analyser les stratégies d'élèves de CE2 (de 8 à 10 ans) vis-à-vis d'une tâche de construction de parcours. Les hypothèses explorées sont les suivantes :

1. les élèves, à travers la pratique du Logo, arrivent à élaborer des stratégies, pouvant être réinvesties dans d'autres situations ;
2. la pratique du Logo permet aux élèves d'accéder à un codage du parcours plus précis par rapport à des élèves n'ayant pas pratiqué avec Logo.

Afin de tester cette hypothèse, elle a mis en place un dispositif méthodologique consistant dans l'observation de deux groupes équivalents constitués à l'intérieur d'une classe de CE2. Le premier groupe seulement a été intéressé par la passation d'activités Logo, une fois par semaine, tout au long de l'année. En fin d'année, tous les élèves ont passé un test, en format papier, sur la construction et l'optimisation de parcours. Les résultats montrent que la première hypothèse n'a pas été validée (il n'y a pas une différence significative au niveau des stratégies employées), alors que la deuxième a été effectivement vérifiée (le groupe expérimental est plus précis, en employant la notion de mesure). Par ailleurs, l'auteure a constaté une mise en place de stratégies de vérification du codage énoncé dans le groupe expérimental, absent dans le groupe contrôle, ainsi qu'une meilleure capacité d'expliquer comment ils ont procédé pour construire le chemin. L'enseignement que nous pouvons tirer de ce travail est que les apports d'un tel dispositif ne se manifestent pas en termes de réussite ou d'échec, mais par l'émergence chez les élèves d'attitudes comme la nécessité de vérification, explicitation et preuve de leurs résultats.

Dans le contexte international, nous pouvons trouver l'étude de Noss [1986], qui vise à mesurer l'influence de l'apprentissage de Logo sur la facilitation de la conceptualisation

2. Nous n'adoptons pas ici le terme « ingénierie didactique » au sens de Artigue.

3. *Informatique Pour Tous*, programme du gouvernement français visant à initier les élèves à la programmation

4. langage de programmation de haut niveau, conçu par J. G. Kemeny et T. E. Kurtz en 1964 caractérisé par sa facilité d'utilisation.

de la variable algébrique par les élèves et sur leur habilité à formaliser hors d'un contexte computationnel.

Dans ce cas, étant la nature de la problématique essentiellement exploratoire, il n'y a pas eu une comparaison entre les habilités d'enfants « Logo » avec celles d'enfants « non-Logo ». L'expérience consistait à mener des entretiens avec des élèves face à de problèmes en format « papier », choisi pour leur caractéristique de pouvoir permettre à des enfants, n'ayant jamais rencontré l'algèbre formelle, de construire leur propre formalisation et notation lors de la résolution. L'échantillon observé dans cette recherche se composait de huit enfants entre 10 et 11 ans, n'ayant jamais étudié de l'algèbre formelle à l'école, auxquels un enseignement du Logo pendant dix-huit mois a été dispensé.

Les analyses des résultats montrent que effectivement les enfants, sous certaines conditions, investissent des éléments de l'algèbre, appris grâce à l'environnement Logo, dans d'autres contextes non computationnels. La caractérisation de ces conditions, ne se limitant pas à celles expérimentales, est encore à questionner. Notamment, l'auteur propose de construire des environnements d'apprentissage, basés sur Logo en vue de permettre d'accéder à des conceptions plus élevées concernant l'algèbre.

Dans la même perspective d'identifier les potentialités qu'un apprentissage de Logo peut avoir sur la conceptualisation et la formalisation d'éléments algébriques, s'inscrit le travail de Sutherland [1989]. Cet article présente une étude longitudinale menée sur quatre binômes d'élèves (de 11 à 14 ans) programmant en Logo lors de leur cours de mathématique à l'école. Les conclusions générales de cette recherche rejoignent celles de Noss : l'expérience de Logo semble améliorer la compréhension des enfants des idées algébriques, mais sous certaines conditions.

L'étude des conditions de viabilité de la programmation en Logo à l'école primaire à été poursuivie, dans le contexte français, par Isabelle Bertrand qui en 1990 publie un article du titre « L'informatique a-t-elle un avenir à l'école primaire ? » [Bertrand, 1990]. Cet article présente un état des lieux sur la place de l'informatique, et notamment de l'environnement informatique Logo, à l'école primaire, soit du point de vue des apprentissage que de l'enseignement.

L'auteure, à l'aide d'une étude de cas menée en deux écoles primaires françaises lors de séances d'informatique pendant un an, montre que :

- l'exercice de la programmation semble rebuter les enseignants qui, généralement, laissent le soin à un « spécialiste » (c'est à dire une personne ayant suivi un stage de quelques heures ou d'une année en informatique) d'effectuer cet exercice ;
- l'usage de Logo ne correspond pas à celui préconisé par S. Papert ;
- Logo ne semble pas avoir développé chez les élèves des capacités particulières. [Bertrand, 1990]

La problématique relevant des difficultés de la prise en main d'un environnement de programmation par les enseignants est très importante et sera explorée plus tard au sein de cette section et de la suivante.

En revenant aux recherches visant à découvrir un développement de compétences chez les élèves d'école primaire grâce à des activités de programmation Logo, Gobert [1992], dans le cadre de son travail de thèse, essaie de relever des apports sur une activité de résolution de problèmes en géométrie. Pour cela, il a conduit une expérimentation en trois classes de CM2 lors de l'année scolaire 1989/1990. Les classes impliquées avaient un niveau scolaire comparable et présentaient les mêmes caractéristiques socio-culturelles. Seulement dans une des trois classes il y a été la passation d'activités Logo, et les deux autres classes n'ont réalisé aucun type de travail avec cet environnement, en

constituant donc des classes contrôle. Cependant, ces classes contrôle ont réalisé un travail sur les mêmes notions géométriques censées être apprises après l'expérimentation dans les classes « Logo ». Gobert précise, en effet :

La démarche adoptée a visé l'organisation de l'activité autour d'un thème mathématique contenant une ou plusieurs notions. L'idée principale est d'aborder ce même thème suffisamment riche en propriétés mathématiques, à la fois lors d'activités en LOGO et en géométrie, mais en plaçant à chaque fois l'élève dans une situation de résolution de problème.

[...]

L'activité LOGO intervient comme une manière différente et complémentaire d'aborder une notion, un thème de géométrie. Il s'agit de la même notion, des mêmes structures géométriques ou de structures dont les caractéristiques sont très proches, mais pour les deux pratiques (mathématiques, LOGO) nous sommes placés dans des environnements différents :

- l'environnement habituel de la géométrie (papier, crayon, instruments de construction, données géométriques...),
- l'environnement LOGO (les primitives, l'écran graphique, et la tortue-LOGO pour tracer des figures...).

Cette pratique guidée qui s'oppose à une démarche libre orientée autour du projet de l'élève, n'exclut en aucune façon des phases de recherche libre très fructueuses. [Gobert, 1992]

Les résultats mettent en lumière une différence importante (au niveau de réussite/échec) entre les élèves du groupe expérimental et ceux du groupe contrôle en faveur du groupe expérimental.

Une quinzaine d'années plus tard, nous trouvons la contribution de [Temperman et al. \[2014\]](#). Les auteurs se proposent d'étudier les effets d'un usage de l'environnement de programmation Scratch sur le développement de compétences à l'école primaire. Ils s'appuient sur l'hypothèse de travail, issue d'autres travaux de recherche explorant les effets de Logo (par exemple [Gurtner, 1991](#)), selon laquelle il ne suffit pas de laisser l'élève tout seul dans ce type d'environnement, mais que le rôle de l'enseignant est fondamental pour pouvoir observer des effets sur le développement de ces compétences.

L'expérimentation présentée dans cet article concerne douze « séquences d'apprentissage basées sur des situations problèmes guidées et pouvant être résolues à l'aide de la programmation de scripts dans Scratch ». Chaque séquence était consacrée à une notion relevant d'un domaine mathématique entre : *nombres et opérations, grandeurs, solides et figures et situations problèmes*.

L'expérience a été menée dans une classe de 6^{ème} primaire en Belgique (élèves de 11 à 12 ans) et la progression des élèves a été mesurée à l'aide d'un dispositif de pré-test/posttest. Les résultats montrent des gains d'apprentissage élevés dans le domaine des grandeurs, des nombres et de la structuration spatiale, et des gains d'apprentissage plus réduits concernant les compétences de résolution de problèmes.

Un autre résultat issu de l'étude de [Temperman et al. \[2014\]](#) concerne l'apport de ce type d'approche en termes d'équité dans un contexte d'hétérogénéité, résultat convergent vers les propositions de [Béziat \[2012\]](#).

Une limite importante de la méthodologie appliquée, reconnue par les auteurs, est l'absence d'un groupe de contrôle. En effet, ce manque ne permet pas d'affirmer que les performances eu en posttest sont uniquement dues à l'effet de l'environnement Scratch. Par ailleurs, nous n'avons pas d'informations sur la nature des tâches prescrites aux élèves

lors des séquences d'apprentissage, ce qui ne nous permet pas de comprendre le lien entre les compétences visées et celles testées.

Plus récemment, au sein du projet ScratchMaths⁵, [Benton et al. \[2018\]](#) ont mis à l'épreuve l'hypothèse selon laquelle sous certaines conditions relevant du curriculum et d'outils pédagogiques et numériques, les élèves d'école primaire de 9 à 11 ans sont capables de conceptualiser des phénomènes mathématiques en faisant de la programmation avec Scratch. L'article explore notamment les effets d'une approche algorithmique sur l'apprentissage du concept mathématique de valeur positionnelle des chiffres à travers une étude de cas impliquant deux classes d'une école au cours de deux années. Les chercheurs ont observé une séance lors de la première année et une séance lors de la deuxième année et ont exploité les données recueillies en terme de réussite des élèves en évaluant le « transfert » de compétences.

Les résultats montrent que la plupart des élèves ont été capables de s'engager et de réaliser des programmes dont l'exécution donnait lieu à la communication de plusieurs lutins entre eux, et que nombre de ces élèves ont pu s'appuyer sur ce concept et l'utiliser pour explorer dans un contexte mathématique, donnant une expression synthétique à ce qui est généralement un processus procédural implicite.

A l'issue de cet état de l'art nous observons des résultats discordants concernant les potentiels « apports » d'une dimension algorithmique sur les apprentissages des mathématiques. Nous rappelons que notre intérêt n'est pas de nous insérer dans ce débat : notre problématique de départ, en effet, nous questionne sur la viabilité d'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour l'apprentissage de notions mathématiques dans le système de l'école primaire française. Pour faire cela, nous avons tout d'abord besoin d'expérimenter cette approche à l'intérieur du système scolaire : nous ne conduirons pas, donc, des expérimentations de type « laboratoire » comme celle menée par [Noss \[1986\]](#) ou [Sutherland \[1989\]](#). Au contraire, nous sommes intéressés à introduire la séquence didactique EXPIRE à l'intérieur du curriculum de CM1/CM2. Afin d'accompagner les enseignants dans l'exercice de la programmation, qui peut résulter problématique, comme mis en évidence par [Bertrand \[1990\]](#), les chercheurs du projet EXPIRE ont la responsabilité de dispenser aux enseignants impliqués dans l'étude des formations⁶.

Par ailleurs, nous ne sommes pas à la recherche de bénéfices de l'environnement de programmation au niveau de compétences mystérieuses (pas définies). Au contraire, nous nous plaçons dans l'optique d'évaluer des connaissances mathématiques précises, celles relatives à la notion visée, censée être apprises grâce à une séquence didactique reposant sur une approche de type « algorithmique/programmation ». Pour cela, nous retenons pertinent le dispositif de prétest/posttest, mais à condition qu'il soit présent un groupe « contrôle » (manqué dans l'étude de [Temperman et al. \[2014\]](#)) : cela est fondamentale pour répondre à notre questionnement pour pouvoir comprendre si une telle approche permet effectivement aux élèves d'apprendre les notions mathématiques de manière similaire à une approche plus « traditionnelle ».

A la lumière du travail de [Bideault \[1985\]](#), d'ailleurs, nous voulons aussi conduire une étude exploratoire pour comprendre si des effets de l'environnement Scratch sont présents sur les stratégies de résolutions mises en place par les élèves. Pour cela, nous nous appuyons sur l'idée qu'une étude basée uniquement sur l'observation des échecs/réussites (comme celle faite par [Gobert \[1991\]](#)) peut ne pas être suffisante pour caractériser les potentialités d'un apprentissage des mathématiques via l'algorithmique et la program-

5. ScratchMaths est un programme conçu et testé par un groupe de chercheurs du UCL Knowledge Lab à Londres, actuellement utilisé dans plus de 50 écoles en Angleterre.

6. Dans le cadre de leur formation continue

mation.

En conclusion, nous avons analysé les travaux pris en compte dans cette section à l'aide d'une grille considérant les items suivants : prise en compte des caractéristiques didactiques des activités expérimentées ; utilisation du dispositif de pré-test/post-test pour l'évaluation des performances des élèves ; prise en compte d'un groupe contrôle ; expérimentation dans un contexte écologique ou non ; taille de l'échantillon ; hypothèses de recherche ; résultats.

En particulier, parmi les travaux considérés nous trouvons une caractérisation des activités expérimentées dans [Bideault, 1985] et [Benton *et al.*, 2018]. Le dispositif de pré-test/post-test a été utilisé seulement dans [Temperman *et al.*, 2014]. Sutherland [1989] et Benton *et al.* [2018] précisent de se placer dans un contexte écologique. Un groupe contrôle était présent dans les expérimentations de Bideault [1985] et Gobert [1991]. La taille de l'échantillon dans tout les cas ne dépassait pas trois classes d'école. Au niveau des hypothèses et des résultats obtenus nous trouvons une grande diversité, comme mis précédemment en lumière.

Nous reviendrons sur les détails de la méthodologie mise en place pour faire face au deuxième axe de recherche dans le chapitre 8.

3.3 Sur les conditions et contraintes qui impactent l'enseignement de notions mathématiques via une approche algorithmique

Nous proposons maintenant un état de l'art portant sur les études en didactique des mathématiques sur des questions relevant des conditions et contraintes qui pèsent sur les pratiques enseignantes lors de l'enseignement de concepts mathématiques via une approche algorithmique. Notamment, nous explorerons trois volets :

- pratiques relevant de l'institutionnalisation du sens d'un concept mathématique ;
- exploitation d'une approche algorithmique/programmation dans les pratiques ;
- conditions et contraintes qui pèsent sur les pratiques enseignantes.

3.3.1 Institutionnalisation du sens d'un concept mathématique

Nous commençons cette section en nous positionnant par rapport à la définition d'institutionnalisation en didactique des mathématiques. Nous le faisons en évoquant ce thème dans deux des grandes théories de la didactique des mathématiques françaises : la Théorie des Situations Didactiques et la Théorie Anthropologique du Didactique. Etant donné qu'il s'agit d'un thème très vaste, nous ne mentionnons dans ce texte uniquement les aspects liés à l'institutionnalisation que nous considérons être utiles en vue de nos analyses.

Au sein de la TAD, Chevallard [1999] identifie les six *moments de l'étude* ou *moments didactiques* suivants⁷ :

1. la première rencontre ;
2. exploration du type de tâches ;
3. constitution de l'environnement technologico-théorique ;

7. Pour les définitions de *type de tâches technique* et *environnement technologico-théorique*, nous renvoyons au chapitre 4.

4. travail de la technique;
5. institutionnalisation;
6. évaluation

Observons que l'ordre dans lequel ces moments ont été présentés ne correspond pas forcément à l'ordre chronologique dans lequel il est possible les voir apparaître au sien d'une organisation didactique. En effet, selon le moment didactique de départ, diverses postures d'enseignement pourraient être définies : si, par exemple, l'enseignant part de la constitution de l'environnement technologico-théorique, il fait en sorte que l'élève soit mené uniquement à appliquer des techniques apprises à des tâches d'un certain type; si, en revanche, il part de la première rencontre et de l'exploration du type de tâches, il met l'élève en condition de produire lui-même des techniques et éventuellement des éléments technologiques associés, qui ensuite pourront être institutionnalisés ou non. En ce qui concerne le moment d'institutionnalisation, Chevallard précise qu'elle « a pour objet de préciser ce qu'est « exactement » l'organisation mathématique élaborée, en distinguant notamment, d'une part les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans l'organisation mathématique visée – distinction que cherchent à préciser les élèves lorsqu'ils demandent au professeur, à propos de tel résultat ou de tel procédé, s'il faut ou non « le savoir » » [Chevallard, 1999].

Dans la TSD, l'institutionnalisation est connue comme l'une des quatre phases qui caractérisent une situation didactique, les trois autres étant les phases d'*action*, de *formulation* et de *validation*. Ces quatre phases apparaissent, selon Brousseau [1998] de façon imbriquée les unes les autres. Si l'*action*, la *formulation* et la *validation* correspondent à trois types de manifestations de la pensée mathématique, l'institutionnalisation relève d'un processus liés à la dialectique *savoir/connaissances*. En effet, lors d'une situation didactique, l'enseignant réalise d'abord le passage de *savoir* vers *connaissances* quand il « *dévoque* » la situation à l'élève; ensuite il réalise le passage inverse d'institutionnalisation pour transformer les *connaissances* des élèves en *savoir*, décontextualisé et réutilisable dans d'autres situations.

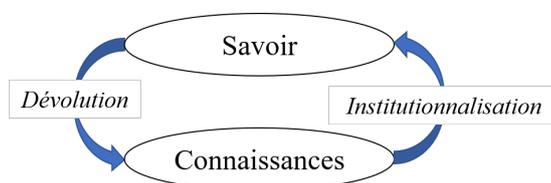


FIGURE 3.5 – Processus de dévolution et d'institutionnalisation

En particulier, Brousseau, lors de la troisième école d'été de didactique des mathématiques en 1984, constate que « la didactique marche à l'envers de la science », en représentant cette observation grâce au schéma en Figure 3.6. Nous voyons apparaître les termes *décontextualisation* et *dépersonnalisation* dans deux processus : celui de production des savoirs organisés de la part de la communauté scientifique et celui qui transforme le « on connaît mais on ne sait pas » en savoir de référence, pris en charge par l'enseignant.

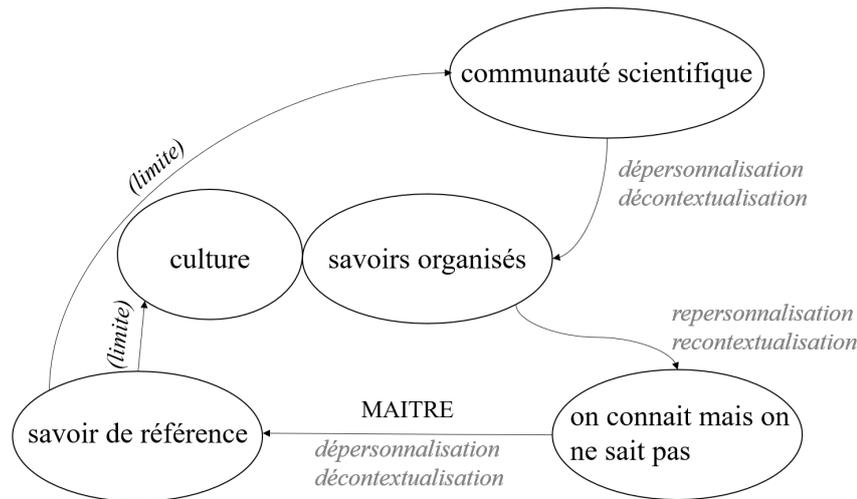


FIGURE 3.6 – La didactique marche à l’envers de la science [Brousseau, 1984]

La décontextualisation et la dépersonnalisation constituent en effet des facettes fondamentales au sein de l’institutionnalisation. A propos de la décontextualisation, Allard [2015] parle d’un processus de *contextualisation - décontextualisation - re-contextualisation*, en précisant que l’enseignant « propose une situation pour laquelle les connaissances sont utilisées en contexte, puis décontextualise (afin de favoriser l’émergence du savoir) puis re-contextualise (pour la mobilisation des connaissances afin de résoudre une nouvelle situation) en évoquant la situation et non les connaissances en jeu ».

En ce qui concerne la dépersonnalisation, il s’agit pour l’enseignant de faire en sorte que le savoir institutionnalisé ne soit pas rattaché à sa personne. Chevallard [1985] parle de la dépersonnalisation comme d’une contrainte :

Il en est ainsi, en particulier, de la contrainte de dépersonnalisation, à laquelle on n’a sans doute pas accordé toute l’attention qu’elle mérite. Tout savoir pris in statu nascendi est attaché à son producteur, et fait pour ainsi dire corps avec lui. Son partage, à l’intérieur même de la communauté savante suppose un certain degré de dépersonnalisation, qui seul permet la publicité de savoir.

Dans sa thèse, Allard regarde la dépersonnalisation du savoir pas seulement au niveau de l’enseignant, mais aussi des élèves ainsi que de l’école (s’il y a présence d’un recueil de textes de référence). En effet, du point de vue de l’élève il y a une dépersonnalisation puisqu’ils « doivent comprendre que les nouvelles connaissances sont communes et partagées par tous les élèves de leur âge » [Allard, 2015].

Brousseau souligne encore une fois la place centrale de l’institutionnalisation dans [Brousseau, 1988] :

La prise en compte « officielle » par l’élève de l’objet de la connaissance et par le maître, de l’apprentissage de l’élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l’objet de l’institutionnalisation.

Le rôle du maître c’est aussi d’institutionnaliser ! L’institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d’action – on reconnaît la valeur d’une procédure qui va devenir un moyen de référence – que sur la formulation. Il y a des formulations qu’on va conserver (« ça se dit comme ça », « celles là valent la peine d’être retenues »). Et pour les preuves de la même façon, il faut identifier ce qu’on retient des propriétés des objets qu’on a rencontrés. Il est clair qu’on peut tout réduire à de l’institutionnalisation. Les situations classiques sont

des situations d'institutionnalisation sans prise en charge par le maître de la création du sens : on dit ce que l'on veut que l'enfant sache, on lui explique et on vérifie qu'il l'a appris.

La problématique de la *création du sens* donne lieu, toujours dans [Brousseau, 1988], à une réflexion sur l'institutionnalisation du « sens » en mathématiques. En effet, comme dans le cadre de la TSD, l'enseignant désigne une situation pour que l'élève *construit un sens* à propos d'une certaine connaissance, le questionnement concernant la conformité du sens construit avec celui qui était visé se pose. L'institutionnalisation du sens d'un concept mathématique, selon Brousseau, est la tâche la plus difficile pour un enseignant, puisque, à la différence des autres objets d'enseignement, il n'y a pas une définition canonique du sens. A cet effet, Brousseau écrit :

On sait bien que c'est le maître qui a choisi les situations parce qu'il visait une certaine connaissance, mais pouvait-elle coïncider avec le « sens commun » ? On pouvait procéder à une institutionnalisation des connaissances, mais pas à celle du sens. Le sens mis dans une situation n'est pas récupérable par les élèves : si on change de maître, l'autre ne sait plus ce qui a été fait. Si on veut revenir sur ce qui a été fait, il faut bien qu'on ait des concepts pour cela, que ces concepts soient universels, qu'ils puissent être mobilisés avec d'autres.

Au sein de cette réflexion, nous voyons émerger un élément qui sera exploité dans les recherches successives de Brousseau comme central pour l'étude de l'institutionnalisation du sens en mathématique : le rôle de la *mémoire didactique* de la classe. L'expression « mémoire didactique » indique une évocation explicite de l'enseignant d'une certaine situation avec l'intention de mobiliser des connaissances anciennes des élèves [Brousseau et Centeno, 1991]. Le rôle de la mémoire didactique a été notamment étudié par Brousseau et Centeno [1991] et dans la thèse de Matheron [2000]. Notamment, les travaux de Brousseau et Centeno [1991] ont expérimenté deux types d'enseignements : un enseignement mené sur plusieurs séances par un seul enseignant et un enseignement dans lequel plusieurs enseignants se sont succédés. Les résultats de cette étude ont mis en lumière qu'en absence de mémoire didactique les apprentissages, au sein d'une approche constructiviste, semblent être problématiques. En particulier, nous lisons :

Le savoir culturel de l'élève est communicable directement et donc immédiatement contrôlable. Les connaissances sont contrôlables elles aussi, mais beaucoup moins facilement. La mémoire des faits et des situations (non convertie en connaissances) est presque inaccessible au contrôle décontextualisé. La mémoire du système didactique a pour rôle de suppléer à cette insuffisance, elle permet d'élargir les possibilités d'action de l'élève au-delà des savoirs et des connaissances qu'il peut mobiliser tout seul. [Brousseau et Centeno, 1991]

Pour les auteurs, l'institutionnalisation est une phase qui sépare une *mémoire officielle* et une *mémoire provisoire*. La première concerne ce qui a été institutionnalisé et la seconde est mobilisée par les élèves avant l'institutionnalisation.

De son côté, Yves Matheron, en s'appuyant sur l'étude de Brousseau et Centeno [1991] mais adoptant un point de vue anthropologique, identifie trois types de mémoires :

- la *mémoire d'un savoir* (extérieure à la personne), toujours accessible, puisqu'elle « conserve la trace des rapports institutionnels qui ont marqué l'histoire de son cheminement jusqu'à l'institution en laquelle il est mobilisé » [Araya-Chacón et Matheron, 2014] ;

- la *mémoire pratique* (d'ordre personnelle) qui permet la réalisation d'une technique mathématique ;
- la *mémoire ostensive* « qui est délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres par une institution ou un individu » [Matheron, 2000].

Il précise que, dans les systèmes ordinaires, l'enseignant peut activer, chez les élèves, une mémoire pratique conforme à son projet d'enseignement afin de produire une mémoire officielle publique. En d'autres mots, selon Matheron et Salin [2002], un des objectifs de l'institutionnalisation est la mise en conformité de la mémoire pratique des élèves avec la mémoire ostensive de l'institution.

Fluckiger [2000], dans sa thèse, a également pris en compte le rôle didactique de la mémoire des élèves. Notamment, elle montre qu'une des fonctions de la mémoire didactique des élèves consiste à favoriser le passage d'une phase de verbalisation des procédures à une phase de de formulation (au sens de Brousseau).

Compte tenu du lien fort entre institutionnalisation et gestion de la mémoire didactique, émergé dans ces travaux, nous prendrons en compte ces résultats dans notre travail afin d'analyser les pratiques enseignantes (chapitre 11).

En revenant au processus d'institutionnalisation, Perrin en définit plusieurs étapes :

- institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens où R. Douady (1984) utilise cette expression dans la description de la dialectique outil-objet ;
- réinvestissement d'un contexte dans un autre : institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes ;
- cours construit par le professeur, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées par l'exposé des raisons du savoir. [Perrin-Glorian, 1994]

Dans les observations que nous analysons dans le chapitre 10, nous considérons l'apparition de ces trois étapes et nous analyserons leurs articulations au sein de l'organisation didactique des enseignants.

Nous nous appuyons d'ailleurs sur certains résultats de la thèse de Cécile Allard. Avec son travail elle a contribué à caractériser les divers moments du processus d'institutionnalisation et elle a étudié certaines implications de ces moments dans les pratiques enseignantes. En particulier, elle a montré que le processus d'institutionnalisation est traversé par deux dimensions : une dimension sociale (plutôt relative à l'institution) et cognitive (plutôt orientée vers le domaine personnel). Les résultats de la thèse mettent en lumière que ces deux dimensions sont en tension et que les enseignants tentent de conserver un équilibre entre ces deux dimensions, entre privé et public : « de manière assez schématique la dimension sociale (domaine public) amène à exposer des connaissances (favorise la dépersonnalisation) et la dimension cognitive à les faire construire ensemble mais aussi pour un sujet ».

Une des hypothèses qui est explorée au sein de la thèse de Allard est relative à la différenciation d'institutionnalisations réalisées à l'oral et à l'écrit :

Nous émettons l'hypothèse que les institutionnalisations réalisées à l'oral, éventuellement lors de phases de rappel [Perrin-Glorian, 1994], lors des situations de formulation n'ont pas les mêmes effets ni les mêmes fonctions qu'un texte écrit.

A partir de cette réflexion, nous sommes mené à regarder de plus près les fonctions de l'*articulation de plusieurs registres*⁸ à l'intérieur du processus d'institutionnalisation.

A ce propos, **Coulange** [2012] dit :

L'absence de formulation des connaissances et l'effacement de l'institutionnalisation des savoirs, dès lors observés dans ce type de situations d'enseignement, ont des conséquences potentielles sur les apprentissages de certains élèves, le « transfert » des connaissances vers d'autres situations étant rendu particulièrement difficile.

Plus spécifiquement, en retenant l'hypothèse de travail selon laquelle l'apprentissage doit passer par une pluralité de registres, nous avons constaté grâce à la lecture de la littérature à ce sujet que pour les élèves il est difficile reconnaître une même tâche dans des registres différents (voir par exemple [Briant, 2013], [Coulange, 2014]). Nous nous demandons alors si et comment la prise en charge d'une explicitation du lien entre divers registres pour une même tâche pourrait être prise en charge par l'enseignant au sein de l'institutionnalisation.

Nous explorons ce volet dans le contexte de l'exploitation d'une dimension algorithmique.

3.3.2 Exploitation d'une dimension algorithmique dans les pratiques enseignantes

Dans cette section, nous analysons la littérature autour de l'exploitation d'une dimension algorithmique à l'intérieur d'un enseignement des mathématiques de la part des enseignants.

Selon **Ali Tatar et Artaud** [2010], la présence d'*organisations mathématiques mixtes*⁹ dans une institution amène les sujets de telle institution à changer leurs rapports à l'institutionnalisation des objets mathématiques sous-jacents. En effet, à la présence d'éléments *extramathématiques* à l'intérieur d'une activité didactique portant sur les mathématiques, il est légitime de se poser des questions comme : *Comment faire émerger les savoirs ou les savoir-faire mathématiques visés ?* ou *Faut-il institutionnaliser des éléments des savoirs et des savoir-faire extramathématiques impliqués ?*

En particulier, nous observons que la présence de cette double dimension implique une double entrée au niveau des praxéologies. Cela pourrait amener à prendre des postures différentes (concernant l'ordre d'apparition des divers moments didactiques) selon la dimension considérée. Par exemple, un enseignant pourrait entre autres choisir de :

- problématiser les deux dimensions en démarrant la séance d'enseignement plaçant l'élève dans un moment de première rencontre soit avec les tâches mathématiques, soit avec celles extramathématiques ;
- problématiser uniquement la dimension mathématique, en donnant à l'élève tous les outils dont il a besoin pour gérer la dimension extramathématique.

Nous retenons que le type de posture choisie par l'enseignant respectivement aux deux dimensions impliquées nous donne des indications concernant son rapport aux mathématiques et à l'algorithmique, mais est aussi déterminant pour l'émergence et l'institutionnalisation de certains savoirs.

8. La notion de registre rejoint celle de registre d'ostensifs présentée dans le chapitre 4. Nous précisons que nous faisons références à des registres oraux, écrits, symboliques, algorithmiques, ...

9. Nous donnerons cette définition dans le chapitre 4.

Nous verrons dans la suite de cette thèse que la dimension extramathématique considérée dans ce travail, à savoir la dimension algorithmique, donne lieu à un registre de représentation des notions mathématiques en jeu. Le travail de Briant [2013], en reprenant le travail de Duval, étudie la notion de *congruence* de deux environnements : l'environnement algébrique et celui algorithmique. Parmi les programmes informatiques il distingue ceux de type *congruent*, s'ils conservent des traces des étapes de la résolution algébrique effectuée en environnement papier-crayon, et ceux de type *non congruent* où la démarche algébrique ne se retrouve pas ou très peu (exemple de non-congruence en Figure 3.7).

Résolution de l'équation littérale $x^2 = a$	Algorithme de résolution des équations du type $x^2 = a$
<ul style="list-style-type: none"> • pour $a > 0$: $x^2 - a = 0$ $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$ $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ • pour $a = 0$, $x = 0$ • pour $a < 0$, un carré est toujours positif donc pas de solution 	<ul style="list-style-type: none"> • Donnée du paramètre a • Test sur le signe de a : <ul style="list-style-type: none"> - Si $a > 0$, sortie des deux valeurs \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$ - Si $a = 0$, sortie de 0 - Si $a < 0$, en sortie : « pas de solution »

FIGURE 3.7 – Comparaison de la résolution de l'équation $x^2 = a$ en environnement papier-crayon et algorithmique [Briant, 2013]

Nous observons, par rapport à l'exemple montré en Figure 3.7, que les procédures montrées dans les deux colonnes sont, d'ailleurs, justifiées de deux discours mathématiques différents : la première relève d'un discours sur la résolution d'équation alors que la deuxième vient directement de la définition de racine carrée. Donc, la non-congruence existant au niveau des procédures correspond, dans ce cas, à une non-congruence des discours qui les justifient.

En revenant au travail de Briant [2013], il montre que la non-congruence des environnements peut déclencher, chez certains enseignants, la peur de la *perte du sens* pour leurs élèves. Dans le cadre de notre travail, nous montrerons que les programmes censés apparaître lors de la résolution des tâches de la séquence EXPIRE objet de notre étude sont de type *congruent* (nous reviendrons sur ce sujet lors du chapitre 7). Nous faisons l'hypothèse que l'introduction de ce nouveau registre « algorithmique », dans le cas des séquences EXPIRE, non-seulement ne pose pas des problèmes concernant la fonction de conversion d'un registre à l'autre, mais que sa présence pourrait être exploitée par les enseignants pour aider à construire le sens des concepts mathématiques en jeu.

3.3.3 Conditions et contraintes pour la transposition didactique

Nous concluons cette revue de littérature avec un recueil des travaux de didactique des mathématiques portant sur les conditions et contraintes qui pèsent sur le processus de transposition didactique.

Les notions de conditions et contraintes est centrale en didactique des mathématiques, tant que Chevallard définit la didactique comme « la science des conditions et contraintes de la diffusion sociale - auprès des personnes et des institutions - des praxéologies, quelles qu'elles soient » [Chevallard, 2010].

Au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique, Chevallard propose un outil pour l'étude de ces conditions et contraintes : *l'échelle des niveaux de codétermination*

didactique (représenté en Figure 3.8).

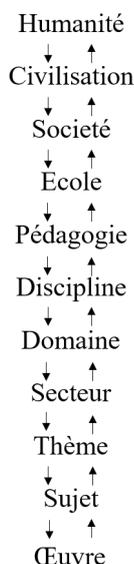


FIGURE 3.8 – Echelle des niveaux de codétermination didactique

Les flèches montrées dans le schéma indiquent que les conditions et contraintes de chaque niveau ont un poids sur l'ensemble des autres niveaux. Cela veut dire que dans une étude écologique et économique du didactique il est nécessaire de prendre en compte les conditions et contraintes de tous les niveaux.

Nous essayons de caractériser les conditions et les contraintes auxquelles les enseignants impliqués dans notre étude sont assujettis, à partir de la littérature existante. Nous précisons qu'il s'agit d'enseignants expérimentés de classes de niveau CM1/CM2, qu'ils ont reçu des formations au sein de leur formation continue concernant la prise en main de l'environnement de programmation Scratch, du contenu des séquences ainsi que du déroulement des expérimentations au sein du projet EXPIRE.

Une contribution à laquelle nous faisons référence en ce qui concerne l'étude des conditions et contraintes pesant sur les pratiques enseignantes est celle de la thèse de [Bernad \[2017\]](#). En particulier elle s'intéresse aux pratiques de deux enseignants lors de l'appropriation et de la réalisation d'un PER (*Parcours d'Étude et de Recherche*) monodisciplinaire. Elle identifie, entre autres, des conditions mathématiques et didactiques attendues, grâce à l'analyse du document fourni aux enseignants présentant le projet. Dans le cas du projet EXPIRE, et, plus spécifiquement, de la séquence dont nous analyserons la transposition didactique, nous déterminerons aussi les conditions *mathématiques*, *algorithmiques* et *didactiques* à partir des attentes des chercheurs qui l'ont conçue; nous les présenterons sous forme de praxéologies dans les chapitres 6, 7 et 9.

Parmi les conditions ordinaires qui ont forcément un poids sur les choix didactiques de l'enseignant, et donc sur la transposition didactique qu'il réalise, nous trouvons le *temps*. Le temps est à la fois une condition et une contrainte [[Chevallard et Mercier, 1987](#)], [[Assude, 2005](#)] qui permet ou limite le déroulement de certaines pratiques. Nous prendrons soin de prendre en compte les effets de cette condition/contrainte dans nos analyses.

Finalement, une des spécificités de notre travail consiste d'ailleurs à nous placer dans le cadre de l'usage des technologies en classe. A propos des conditions qui favorisent des usages professionnels d'outils numériques, [Assude \[2007\]](#) identifie des conditions :

- *matérielles*, liées à l'accessibilité et à la disponibilité de l'outil numérique;
- *économiques*, liées à la valeur d'usage attribuée de l'enseignant à l'outil numérique;
- *didactiques*.

Dans notre étude, il nous semble que tous les enseignants qui ont participé au projet EXPIRE ont été mis dans des conditions favorables : tous les classes étaient fournies d'un nombre suffisant d'ordinateurs; lors des formations dispensées par les chercheurs ils ont pris connaissance de la valeur d'usage, correspondant à une potentielle réponse à la demande institutionnelle d'introduire la programmation à l'école primaire; les formations ainsi que les documents présentant le projet de la séquence mettaient en lumière les conditions didactiques retenues *a priori*.

Chapitre 4

Cadre théorique

Dans ce chapitre, à la lumière de la revue de littérature présentée précédemment, nous montrons comment la théorie anthropologique du didactique (TAD) et T4TEL permettent de traiter nos axes de recherche au moyen d'une approche écologique. Après avoir justifié le choix du cadre théorique, nous présenterons les principaux éléments utilisés pour mener notre recherche.

4.1 Motivations du choix du cadre théorique

Notre questionnement s'inscrit totalement dans une problématique écologique [Rajson, 1988]. Relativement à l'introduction d'une « initiation à la programmation » dans le curriculum de l'institution de l'école primaire française, il est légitime de s'interroger sur les conditions de cette institution qui permettent la *vie* de ce nouvel objet ou sur les contraintes qui, au contraire, en limiteraient l'existence. Nous rappelons à ce propos l'observation suivante de Artaud :

Un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour de [lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où l'on trouve [cet objet] et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les *habitats*. Puis, regarder en chacun de [ses] habitats, la *niche écologique* qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. [Artaud, 1998]

A la question « *Quels habitats est-il possible d'identifier pour une initiation à la programmation dans l'institution de l'école primaire française?* » les chercheurs du projet EXPIRE ont répondu en proposant des séquences d'enseignement de la discipline des mathématiques. En particulier, les habitats suggérés pour la vie de la programmation à l'école primaire sont les domaines « Nombres et calcul » (séquences sur la division euclidienne et les fractions) et « Grandeurs et mesures » (séquence sur aire et pavage). Grâce à une étude épistémologique, nous avons déjà montré en quoi le choix de l'habitat « sens de la division euclidienne » est pertinent et nous avons également identifié la niche écologique que la programmation a dans cet habitat (Chapitre 2).

Après avoir justifié *a priori* l'existence d'une séquence portant sur la division euclidienne et intégrant une dimension algorithmique, pour explorer nos axes de recherche il est nécessaire de tester la viabilité de cette séquence. Pour cela, nous ne souhaitons pas modifier le système de conditions et de contraintes de l'institution considérée. Au contraire nous voulons étudier ce système pour tenter d'évaluer son impact sur l'exploitation de la séquence, du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage.

C'est dans ce but que nous avons choisi de nous situer dans une des théories principales de la didactique des mathématiques en France : la théorie anthropologique du didactique (TAD). Cette théorie, introduite par Yves Chevallard, met notamment en évidence la relativité institutionnelle des objets et de leur étude.

Elle présente un grand nombre d'outils théoriques et méthodologiques permettant d'analyser des phénomènes relevant des activités d'enseignement/apprentissage des mathématiques en tenant compte des conditions et des contraintes qui caractérisent l'institution. En plus, notamment pour développer le premier axe de recherche, nous allons utiliser une extension de la TAD, le cadre T4TEL, qui nous permettra de concevoir un modèle des savoirs mettant en lumière les deux dimensions mathématique et algorithmique.

Dans la section suivante, nous présenterons les éléments de cette théorie que nous avons retenus pour notre recherche.

4.2 La théorie anthropologique du didactique

Avant d'explicitier les divers éléments théoriques dont nous nous sommes servi pour notre recherche, il est nécessaire de préciser les notions qui sont à la base de cette théorie : il s'agit des notions d'*objet*, de *personne*, d'*institution*, de *rapport personnel* et de *rapport institutionnel*. Comme résumé dans [Chevallard, 1991a] :

Un objet O existe pour une personne X si il existe un rapport personnel, $R(X, O)$, de la personne X à l'objet O . Semblablement, l'objet O existe pour l'institution I si il existe un rapport institutionnel, $R_I(O)$, de I à O . Dualelement, on dira que X (ou I) connaît O s'il existe un rapport $R(X, O)$ de X à O (respectivement, un rapport $R_I(O)$ de I à O).

Dans le large éventail des outils proposés par la TAD, nous nous servirons notamment des concepts de *praxéologie*, d'*organisation mathématique de référence*, de *transposition didactique*, d'*objets ostensifs et non-ostensifs*.

4.2.1 Les *praxéologies*

Chevallard [1999] formule le postulat de base de la TAD comme suit : « Toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot *praxéologie* ». Ce mot vient de l'union des mots grecs *praxis* (pratique) et *logos* (discours).

Selon Chevallard, une *praxéologie* peut être modélisée par un quadruplet $[T; \tau; \theta; \Theta]$, dans lequel il T représente un *type de tâches*, τ une *technique*, θ une *technologie* et Θ une *théorie*. Pour les définitions de ces quatre éléments nous reportons des extraits du texte de Chevallard [1999] :

À la racine de la notion de *praxéologie* se trouve les notions solidaires de *tâche*, t , et de *type de tâches*, T . Quand une tâche t relève d'un type de tâches T , on écrira quelquefois $t \in T$. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches *parent*) s'exprime par un verbe. [...]

Ensuite, la notion de tâche, ou plutôt de type de tâches, suppose un objet relativement précis. [...] *Calculer la valeur d'une fonction en un point* est un type de tâches; mais *calculer*, tout court, est ce qu'on appellera un *genre* de tâches, qui appelle un déterminatif. [...]

Soit donc T un type de tâches donné. Une praxéologie relative à T précise (en principe) une manière d'accomplir T , de réaliser les tâches $t \in T$: à une telle *manière de faire*, τ , on donne ici le nom de *technique*. [...]

On entend par *technologie*, et on note généralement θ , un discours rationnel - le *logos* - sur la technique - la *tekhnê* - τ , discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique τ , en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T , c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. [...]

À son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la *théorie*, Θ , laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique.

Nous pouvons distinguer deux blocs : un bloc $[T, \tau]$, dit *pratico-technique* et le bloc $[\theta, \Theta]$, dit *technologico-théorique*.

Une autre notion importante est celle de *portée d'une technique*, que nous allons expliquer à travers un exemple. Soit T_{somme} le type de tâches « Calculer la somme de deux nombres naturels a et b ». Une technique possible accomplissant T est $\tau_{\text{surcomptage}}$, qui consiste à partir de l'un des deux nombres, par exemple a , et de compter de un en un b fois. Cette technique fonctionne théoriquement pour n'importe quelles valeurs de a et de b , mais dans la pratique le coût d'exécution de cette technique augmente au fur et à mesure que le nombre b augmente. Pour indiquer ce phénomène, nous dirons que la *portée théorique* de $\tau_{\text{surcomptage}}$ est infinie, alors que sa *portée pragmatique* est limitée. Plus précisément, [Chevallard \[1999\]](#) définit ce concept ainsi : « une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique ». Les concepts de *portée théorique* et de *portée pragmatique* constituent une précision de ce concept, introduits par Chaachoua dans le cadre T4TEL [[Chaachoua, 2018](#)].

Dans notre thèse, nous utiliserons les praxéologies pour décrire trois types d'activités humaines : l'activité mathématique, l'activité de concevoir des algorithmes et l'activité didactique. Pour cela, nous allons employer les expressions de *praxéologies mathématiques*, de *praxéologies algorithmiques* et de *praxéologies didactiques*. Généralement, ces praxéologies sont organisées suivant certains critères. Nous pourrions ainsi parler d'*organisation mathématique* (OM) pour faire référence à un ensemble de praxéologies mathématiques qui peuvent s'articuler, par exemple, autour d'un certain type de tâches, technique, technologie ou théorie. De la même manière nous pouvons introduire l'expression d'*organisation didactique* (OD).

Par ailleurs, le travail que nous devons mener au sein du premier axe de recherche est lié à la modélisation d'une séquence portant d'un côté sur des activités mathématiques et d'un autre côté sur des activités algorithmiques. Pour cette raison, nous allons reprendre la notion de *praxéologie mathématique mixte*, présentée par Chevallard dans [[Chevallard, 2001](#)]. Afin de bien clarifier ce concept, nous devons préciser la différence qui existe entre *mathématiques pures* et *mathématiques mixtes*. En accord avec Francis Bacon [[Bacon, 1991](#)], « appartiennent aux *mathématiques pures* les sciences qui traitent de la quantité définie, absolument séparée de tout axiome de philosophie naturelle ». Cette expression désigne donc, tout domaine traditionnellement attaché uniquement à la discipline des mathématiques, comme l'arithmétique, l'algèbre, la trigonométrie ou la géométrie. Bacon continue en disant que « les *mathématiques mixtes* ont pour objet quelques axiomes ou parties de la philosophie naturelle, et elles s'occupent de la quantité déterminée en

tant que celle-ci leur est annexe et secondaire ». Parmi les sciences et les arts relevant des mathématiques, nous retrouvons, par exemple, la musique, l'astronomie, la géographie, l'architecture, la science des machines, et quelques autres.

D'après l'extrait suivant, tiré de [Chevallard, 2001] :

Penser en termes de mathématiques mixtes, c'était surtout aller au contact du monde, ne pas craindre de se mêler à lui, de rechercher le métissage. [...] Ce que j'appellerai une *organisation mathématique mixte* (OMM) est le fruit d'une telle hybridation.

En termes simples, une *organisation mathématique mixte* est un ensemble de praxéologies qui mêlent les mathématiques à d'autres disciplines.

Ici, nous ne détaillerons pas trop les aspects épistémologiques de cette définition qui ont été déjà abordés dans le chapitre 3.

4.2.2 La transposition didactique et l'organisation mathématique de référence

Un autre concept qui est au cœur de la TAD est la *transposition didactique* [Chevallard, 1985]. Au sein du système didactique, composé par l'*enseignant*, l'*apprenant* et le *savoir*, souvent modélisé à l'aide du très connu *triangle didactique* (Figure 4.1), il est nécessaire de préciser quel est le niveau du savoir impliqué dans les divers processus. En effet, les organisations mathématiques constituant le savoir sont objets de plusieurs transformations.

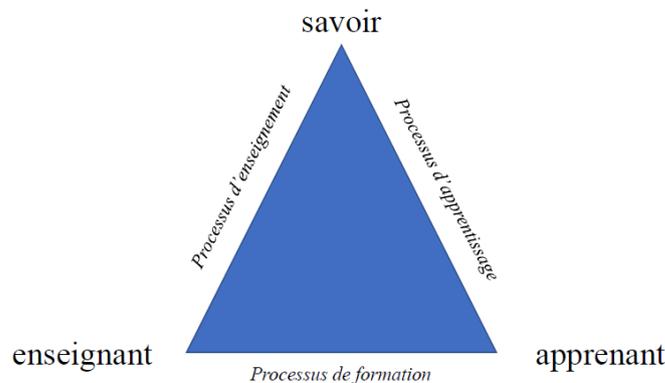


FIGURE 4.1 – Le triangle didactique

Notamment, l'expression *OM savante* indiquera ce qui est produit par les experts du domaine et repérable, par exemple, dans les textes universitaires. Une deuxième étape de la transformation du savoir se caractérise par la construction des *OM à enseigner* : cette expression indique le savoir que l'enseignant, dans le cadre d'une institution fixée, est censé faire apprendre à l'apprenant. Les OM à enseigner sont produites, à partir des *OM savantes* par la *noosphère* et mises à la disposition des enseignants à travers diverses ressources, comme les programmes ou les manuels scolaires. Ensuite, l'*OM enseignée* correspond à ce qui a effectivement été réalisé par l'enseignant dans son cours. En fin de processus, l'*OM enseignée* se différencie de l'*OM apprise* par l'apprenant. Le processus de transformation du savoir, de l'*OM savante* à l'*OM enseignée*, constitue la *transposition didactique*. Plus précisément, nous pouvons parler de *transposition didactique externe* pour désigner le processus de transformation de l'*OM savante* à l'*OM à enseigner*, et de

transposition didactique interne pour le processus de transformation de l'*OM à enseigner* à l'*OM enseignée* (Figure 4.2).

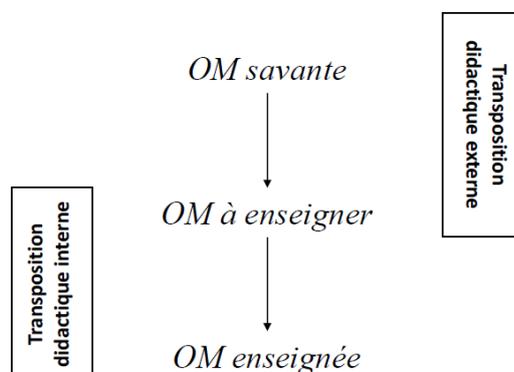


FIGURE 4.2 – Le processus de *transposition didactique*

Notre travail explorera notamment le processus de *transposition didactique interne*.

Par ailleurs, nous mobilisons une notion supplémentaire relative au savoir qui constitue une étape intermédiaire entre l'*OM à enseigner* et l'*OM enseignée*. Il s'agit de la notion d'*OM apprêtée*, introduite par Laetitia Ravel dans sa thèse [Ravel, 2003]. Avec cette expression elle dénote le « projet de cours » que l'enseignant se propose de réaliser dans sa classe à partir des contraintes et des libertés qui lui sont données par la noosphère. En général cette étape de la transposition didactique interne (Figure 4.3) est à la charge de l'enseignant. Cependant, dans le cadre du projet EXPIRE, ce sont les chercheurs qui ont pris en charge la construction de l'*OM apprêtée* à partir de l'*OM à enseigner*.

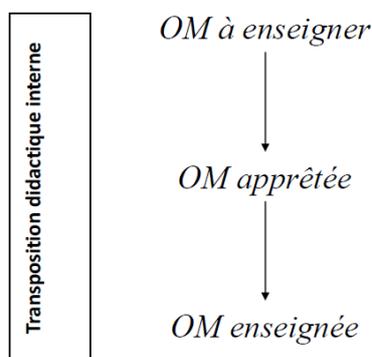


FIGURE 4.3 – Focus sur la *transposition didactique interne*

Dans cette thèse, nous allons construire les modélisations praxéologiques de l'*OM à enseigner* et de l'*OM apprêtée* (Chapitre 7), en mettant en lumière la relation d'inclusion entre les deux obtenue grâce au cadre T4TEL. Ensuite, nous pouvons reformuler respectivement le deuxième et le troisième axe de recherche ainsi :

- étude de la « distance » entre l'*OM apprêtée* et l'*OM apprise* ;
- étude de la « distance » entre l'*OM apprêtée* et l'*OM enseignée*.

Pour nous doter d'outils théoriques et méthodologiques permettant de caractériser l'*OM à enseigner* et l'*OM apprêtée* de façon fonctionnelle pour la suite du travail, nous aurons recours à la notion d'*organisation mathématique de référence*, introduite dans [Bosch

et Gascón, 2005]. Il s'agit de l'OM identifiable par le chercheur de didactique des mathématiques d'un point de vue épistémologique autour d'un certain objet du savoir. Bosch et Gascon soulignent l'importance de disposer d'une OM de référence afin de caractériser l'influence que l'OM à enseigner exerce sur tout le processus de transposition didactique. Notamment, les auteurs disent :

Elle [l'OM de référence] ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule en des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniement.

Ce sera donc dans l'optique de définir les praxéologies mathématiques intervenant dans le processus de transposition didactique que nous allons construire dans le chapitre 6 une OM de référence autour du concept de division euclidienne entre deux nombres naturels.

4.2.3 Les objets ostensifs/non ostensifs et la notion de dispositif

Le dernier concept de la TAD que nous mobilisons dans notre travail est celui des *objets ostensifs* et des *objets non ostensifs*. Il s'agit de l'outil qui dans la TAD sert à formaliser et interroger les problèmes liés à la sphère sémiotique de l'activité mathématique, considéré d'une importance fondamentale dans toute approche théorique des recherches en didactique des mathématiques.

Nous reportons un extrait tiré de [Chevallard, 1996] portant sur ce concept :

D'un côté, il y a ainsi des objets que je nomme *ostensifs*, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être *réellement présents* et que l'on peut *effectivement manipuler* dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets *non ostensifs*, que je nomme aussi *émergents*, et que l'on peut seulement évoquer à l'aide d'objets ostensifs. Lorsqu'un mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule. Bien entendu objets ostensifs et non ostensifs viennent à l'existence et vivent *ensemble* au sein d'une pratique mathématique qui les réunit : ils se déterminent réciproquement.

Au sein des *praxéologies* mathématiques les types de tâches et les techniques ne peuvent donc exister que dans le cadre d'une *manipulation* adéquate de certains objets ostensifs et non ostensifs. Le terme *manipulation* est employé au sens large pour indiquer les usages possibles des objets ostensifs par le sujet humain ([Bosch et Chevallard, 1999]).

Le nombre 5, par exemple, est un objet non ostensif. Il peut être évoqué par divers ostensifs comme ceux présentés dans la Figure 4.4.

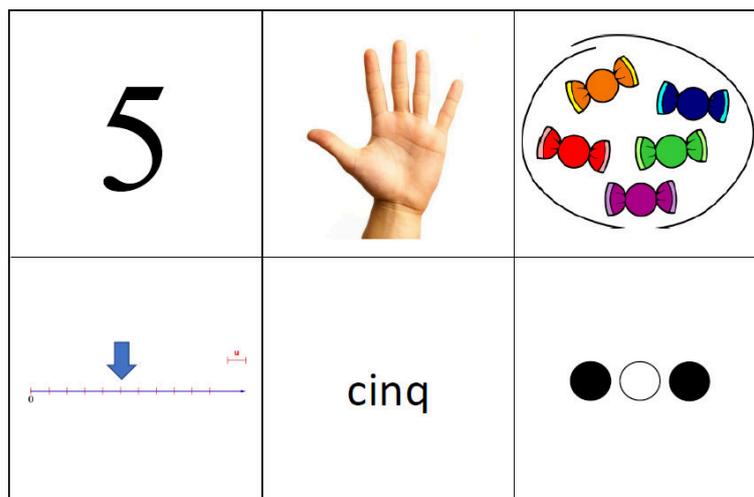


FIGURE 4.4 – Certains ostensifs évoquant le nombre 5

Les ostensifs peuvent avoir une valence instrumentale, lorsqu'ils sont manipulés dans une technique afin d'accomplir une tâche, ou une valence sémiotique lorsqu'ils sont utilisés uniquement avec la finalité de représenter un non ostensif.

La dialectique entre les objets ostensifs et non ostensifs, qui est centrale dans toute activité mathématique, se révèle un aspect crucial également dans le cadre de notre recherche, où nous verrons apparaître des ostensifs relatifs à la programmation pour évoquer des objets non ostensifs propres aux mathématiques.

Par ailleurs, [Bosch et Chevallard \[1999\]](#) précisent que « *ostensifs et non ostensifs sont toujours des objets institutionnels dont l'existence ne dépend que très rarement de l'activité d'une seule personne* » et que « *dans l'analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel non ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu'induite ou supposée à partir des manipulations d'ostensifs institutionnellement associés* ». Dans notre travail, cette perspective nous pousse bien évidemment à identifier les ostensifs présents dans l'OMM apprêtée liés à la présence de praxéologies algorithmiques. D'autre part, l'observation de [Bosch et Chevallard \[1999\]](#) nous fait également demander si l'association d'objets ostensifs/non ostensifs dans l'OMM apprêtée, construite institutionnellement, correspond effectivement à celle que les enseignants (et les élèves) font de façon spontanée.

Les objets ostensifs, afin d'être manipulés, doivent vivre dans un certain *dispositif*. En effet, [Chevallard \[1998\]](#) définit un *dispositif* comme « *la composante matérielle d'une technique, par opposition à sa composante gestuelle* ». Chaachoua, dans des travaux en cours, tente de formaliser cette notion. A partir de réflexions que nous avons eu avec lui à propos de ce sujet, dans le cadre de notre travail, nous considérons la définition suivante :

Définition. *Un dispositif didactique est un ensemble d'objets identifiables ayant une matérialité (tangibile ou virtuelle). Il possède des propriétés intrinsèques de nature physique ou technologique.*

Des exemples de dispositifs didactiques peuvent être le système constitué par papier et crayon, la calculette, un certain système d'objets tangibles, etc.

Finalement, il nous reste à présenter un concept lié aux objets ostensifs et non ostensifs : celui de *registre ostensif*. En effet, selon [Bosch et Chevallard \[1999\]](#) il est possible de caractériser « *les différents objets ostensifs par le registre (oral, écrit, graphique, gestuel,*

matériel) auquel ils appartiennent, distinction motivée par le fait que la fonction attribuée spontanément aux objets ostensifs dépend de la « matière » dont ils se composent ».

En conclusion, nous pouvons observer que, d'une part, divers ostensifs peuvent faire appel à un même registre ostensif et que, d'autre part, les ostensifs d'un même registre peuvent exister dans différents dispositifs.

Apports des recherches sur les registres de représentation sémiotique de Duval

Au delà de la TAD, divers cadres théoriques ont questionné la dualité entre les « objets » directement manipulables dans l'activité mathématique et les « concepts » impliqués. Dans ce domaine de recherche, une contribution très importants est due à Raymond Duval, qui l'a explorée surtout du point de vue de la psychologie cognitive mais qui est aussi largement partagée par la communauté de chercheurs en didactique des mathématiques. Nous ne rentrerons pas dans les détails de sa théorie des registres de représentation sémiotique [Duval, 1995] mais nous nous limitons à considérer les affinités entre les deux concepts de registres ostensifs et registres de représentation sémiotique, comme cela a déjà été fait dans les travaux de Assude [2017],

Commençons par donner la définition première de *registre de représentation sémiotique*, tirée de [Duval, 1993] : « Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentations qui a ses contraintes propres de signifiante et de fonctionnement, l'ensemble de ces signes est appelé le registre de représentation sémiotique ». Ensuite, Duval souligne, que « Pour qu'un système puisse être un registre de représentation, il doit permettre les trois activités cognitives liées à la sémosis :

- la formation d'une représentation identifiable[...];
- le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée [...];
- la conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre, en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. »

Il y a cinq principaux registres de représentation sémiotique dans l'enseignement secondaire : le registre algébrique, le registre formel, le registre graphique, le registre numérique et le registre « tableau ».

Les trois activités cognitives de formation, traitement et conversion d'une représentation sont reportées dans le schéma en Figure 4.5.

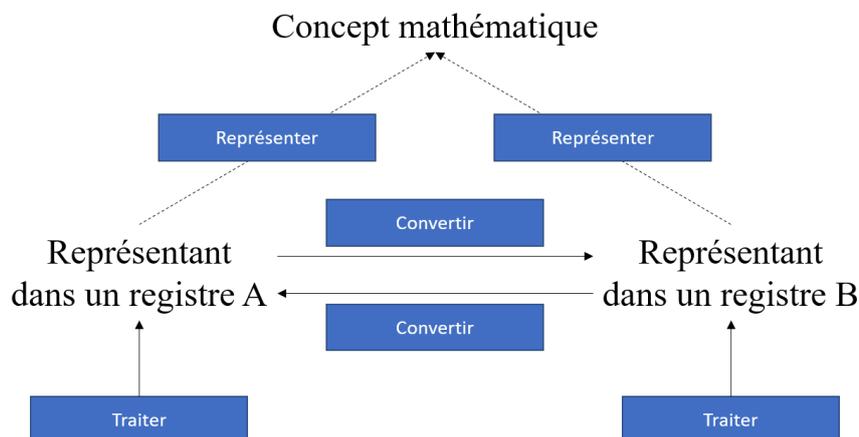


FIGURE 4.5 – Activités cognitives liées à la sémosis

Les recherches de Duval soutiennent l'idée qu'il est nécessaire pour l'apprenant d'arriver à maîtriser l'ensemble de ces trois activités pour la formation du concept.

Puisque nous n'essayons pas de rentrer dans la dimension cognitive du sujet apprenant, nous ne sommes pas intéressés à démontrer que les registres ostensifs auquel nous ferons référence dans cette thèse sont aussi des registres de représentation au sens de Duval. En revanche, nous souhaitons mettre en relation le concept de registre de représentation sémiotique avec celui de registre ostensif pour que nous puissions nous appuyer sur l'hypothèse de travail suivante :

Un sujet, afin de rendre son rapport personnel à un certain objet non-ostensif conforme au rapport institutionnel, doit réaliser les activités suivantes :

- représentation du non-ostensif à l'aide de divers ostensifs ;
- traitement d'ostensifs au sein d'un même registre ostensif ;
- conversion d'un registre ostensif vers un autre.

Nous accordons donc un rôle central aux tâches de *représentation*, *traitement* et *conversion*, que nous formaliserons à l'aide du modèle praxéologique dans le Chapitre 6.

4.3 Le cadre T4TEL

Pour notre thèse, nous utiliserons non seulement les outils théoriques déjà présentés, fournis par la TAD, mais également le cadre T4TEL. Dans l'abréviation *T4TEL*, *T4* représente le quadruplet praxéologique $[T, \tau, \theta, \Theta]$ et *TEL* est l'acronyme de *Technology Enhanced Learning*. Il s'agit d'un ensemble d'éléments qui formalisent et prolongent le notion de modèle praxéologique issue de la TAD. Ce cadre a été introduit par Chaachoua au sein de l'équipe MeTAH, notamment dans la perspective de construire un modèle praxéologique présentant les caractères de *généricité* (qui est relatif à un domaine d'étude non-instancié) et de *calculabilité* (qui peut être représenté dans un EIAH et fournir des services EIAH) [Chaachoua, 2018]. Des exemples d'implémentation et de mise à l'épreuve de T4TEL peuvent être retrouvés dans les thèses de Bonnat [2017], Jolivet [2018], Brassat [2017], Brun [2020] ou Kaspary [2020]. Dans notre thèse nous ne nous concentrerons pas sur les aspects liés à la *calculabilité* de T4TEL, mais nous prenons surtout en compte son caractère de *généricité* en le mettant à l'épreuve face à la description efficace et fonctionnelle d'une organisation mathématique mixte intégrant des praxéologies algorithmiques.

Le texte qui constitue le point de départ des réflexions au sujet de la modélisation avec T4TEL est le mémoire d'HDR de Chaachoua [Chaachoua, 2010]. Cependant, la plupart des réflexions autour de ce cadre, issues d'une dizaine d'années de recherche, ont été formalisées et détaillées dans l'article de Chaachoua [2018]. Nous allons faire référence à cet article pour les définitions de *type de tâches*, de *sous-type de tâches* et de *générateur de types de tâches*, reportées dans la suite de ce texte.

Définition. Un *type de tâches* T est un ensemble de tâches tel que :

- toute tâche est décrite par un verbe d'action donné et des compléments fixés, pris dans les objets d'une discipline ;
- il existe au moins une technique τ qui accomplit au moins une tâche de T tel que soit la portée de la technique $P(\tau)$ est un sous-ensemble de T , soit T est un sous-ensemble de $P(\tau)$.

Définition. On dit que T' est un *sous-type de tâches* du type de tâches T si

- T' est un sous-ensemble de T ;
- T' est un type de tâches.

Définition. Nous définissons un générateur de types de tâches par :

$$GT = [\text{Verbe d'action, Complément fixe, Système de variables}]$$

où

- le couple (Verbe d'action, Complément fixe) est un type de tâches ;
- le système de variables est composé d'une liste de variables et de valeurs qu'elles peuvent prendre.

Par ailleurs, une *technique* dans T4TEL, en cohérence avec la définition donnée en TAD, peut être décrite comme un ensemble de types de tâches, appelés *ingrédients de la technique*. Dans notre travail, cette façon de décrire les techniques sera particulièrement intéressante car elle nous permettra de distinguer deux niveaux de granularité dans l'OMM à enseigner : un premier niveau caractérisé par des *praxéologies algorithmiques* et un deuxième niveau caractérisé par des *praxéologies mathématiques* (voir Chapitre 6).

Suite à la présentation des définitions fondamentales de T4TEL, nous focalisons maintenant notre attention sur un des apports principaux de ce cadre au modèle praxéologique, c'est-à-dire la prise en compte de la notion de variable pour la formalisation et la structuration des types de tâches. Dans [Chaachoua et Bessot, 2019], les auteurs, outre positionner cette notion par rapport à celle de *variable didactique* présente dans la théorie des situations didactiques, analysent les potentialités et les caractéristiques de la prise en compte des variables dans l'approche praxéologique. A partir des études menées jusqu'à présent, en définissant de manière adéquate les variables des types de tâches impliqués dans l'étude et en structurant proprement leurs valeurs, le chercheur peut s'aider à caractériser :

- les conditions et les contraintes d'une institution ;
- les choix possibles de types de tâches par l'enseignant pour diriger l'étude (variables didactiques) ;
- des praxéologies personnelles qui relèvent de valeurs non nécessairement institutionnelles. [Chaachoua et Bessot, 2019]

Dans notre cas, lors de la présentation de l'OMM *apprêtée* (Chapitre 7), nous verrons comment les variables déterminées permettent notamment d'identifier les conditions et les contraintes auxquelles les chercheurs du projet EXPIRE ont été soumis lors de la conception de l'OMM.

4.4 Conclusion

Les éléments théoriques présentés dans ce chapitre nous permettront, à partir de notre problématique de recherche, de formuler des questions de recherche appropriées. Ils nous fournissent aussi des outils d'ordre méthodologiques qui nous serviront à répondre aux questions de recherche.

Le prochain chapitre portera sur un rappel de notre problématique de recherche, revue à la lumière du cadre théorique ainsi que sur la présentation de nos questions de recherche et de la méthodologie générale adoptée dans cette thèse.

Chapitre 5

Problématique, questions de recherche et méthodologie générale

Ce chapitre vise à préciser notre problématique de recherche à partir des considérations émergées des travaux de recherche évoqués dans les chapitres 1, 2 et 3. Cela nous permettra de formuler, ensuite, les questions de recherche ainsi que la méthodologie générale conduisant notre travail de thèse.

5.1 Problématique

Nous avons constaté, dans le chapitre 1, qu'une « initiation à la programmation » est demandé dans les programmes scolaires de 2016 au cycle 3 de la scolarité française [MEN, 2015].

Cette demande institutionnelle fait émerger diverses questions : quels sont les savoirs relatifs à la programmation qui peuvent être intégrés dans le curriculum? Comment le système de conditions et de contraintes relatif à l'institution de l'école primaire française permet-il l'introduction d'une initiation à la programmation? Quels sont les besoins praxéologiques des enseignants face à cette introduction? Quelle formation permettrait de répondre à ces besoins? Quelles *ressources didactiques* peuvent être créés afin de répondre aux attentes institutionnelles?

5.1.1 Une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour l'enseignement de la division euclidienne

Ces questions ont été soulevées par un certain nombre de chercheurs en didactique des mathématiques (par exemple, par Gueudet *et al.* [2017]) et les chercheurs du projet EXPIRE ont essayé d'apporter des éléments de réponse. L'approche retenue dans ce projet pour « initier les élèves à la programmation » consiste à concevoir des séquences d'enseignement de notions mathématiques retenues fondamentales au cycle 3. Ce choix a été fait dans une perspective écologique [Assude, 1996] de pouvoir introduire cette approche dans la programmation annuelle à côté d'une approche de type plus « traditionnelle ». En effet, chacune des notions considérées (division euclidienne, décomposition additive et fractions) est d'habitude travaillée au sein de plusieurs séances lors des années scolaires de CM1/CM2. Les éléments technologico-théoriques issus de la programmation présents dans ces séquences sont très limités : les tâches prescrites aux élèves relèvent plutôt de la sphère algorithmique, avec la spécificité que les algorithmes réalisés, étant exprimés dans l'environnement Scratch, résultent directement exécutables. Les élèves doivent, en

effet, à travers la manipulation adéquate de blocs d'instructions mis à leur disposition, construire des algorithmes/programmes sur Scratch qui résolvent un problème donné. Dans le chapitre 3 nous avons eu l'occasion de repérer, dans le contexte national et international, certains travaux de recherche à propos des approches existantes pour introduire l'algorithmique et la programmation au cycle 3, notamment en exploitant le lien avec les mathématiques. Il nous semble, à la lumière des approches identifiées, que l'approche proposée par le projet EXPIRE présente des caractéristiques qui peuvent la rendre viable dans l'écosystème didactique existant en France. En effet, les séquences didactiques issues du projet EXPIRE ont été inspirées par des activités existantes et éprouvées dans le cadre de l'enseignement français des mathématiques. Même si une dimension algorithmique a été introduite, cela a été fait de manière à éviter un coût d'appropriation trop élevé pour les élèves et les enseignants, comme nous le verrons dans le chapitre 7. Diverses ressources ont été produites et mises à la disposition des classes impliquées dans le projet :

- un ensemble de fichiers numériques Scratch ;
- des fiches pédagogiques destinées aux enseignants explicitant les objectifs didactiques et des suggestions pour le déroulement de la séquence ;
- des fiches de travail destinées aux élèves, présentant les consignes.

Outre à la conception de ces ressources, les chercheurs en didactique des mathématiques impliqués dans le projet ont pris en charge la question de l'appropriation par les enseignants de ces séquences, et, plus en général, des notions de base relevant de l'algorithmique et de la programmation. Ils ont, en effet, sur la base d'études *a priori*, conçu et mis en place des formations pour douer les enseignants de l'équipement praxéologique nécessaire.

C'est dans ce contexte que nous inscrivons nos recherches. Notamment, notre objectif est celui d'évaluer d'un point de vue didactique :

- les caractéristiques de cette approche ;
- la viabilité de cette approche dans le curriculum de l'école primaire française ;
- les conditions et les contraintes qui favorisent ou défavorisent la réalisation en classe de cette approche.

Pour cela, nous avons fait le choix de mener une étude de cas en ciblant une notion mathématique précise : le sens de la division euclidienne. Ce choix a été fait pour plusieurs raisons : premièrement, nous avons constaté l'existence d'une corrélation intrinsèque de nature épistémologique entre la division euclidienne et l'algorithmique ; deuxièmement, nous retenons que, par rapport à d'autres notions mathématiques, peu de littérature existe en didactique des mathématiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la division euclidienne, et compte tenu de l'importance de cette notion et des difficultés qu'elle peut générer, visibles même dans les adultes, nous souhaitons donner notre contribution là-dessus.

Dans le chapitre 2, au sein d'une étude épistémologique et didactique du sens de la division euclidienne, nous avons mis en lumière des caractéristiques didactiques et des difficultés liées à son enseignement et à son apprentissage. Plus précisément, nous retenons les aspects suivants :

- la construction du sens d'un concept mathématique pour un sujet se fait à travers la modification de son rapport personnel à ce concept, donc à l'aide d'un travail sur certaines praxéologies à lui associées ;

- la construction du sens d'un concept mathématique se fait aussi à travers l'usage et l'articulation de divers registres d'ostensifs évoquant ce même concept;
- la construction du sens de la division euclidienne permet le recours au modèle implicite de division en situation de partition et de quotition, mais une difficulté majeure a été relevée particulièrement en ce qui concerne le recours au modèle de division lors de problèmes de quotition;
- la construction du sens de la division euclidienne est difficile à cause de la présence d'un « double » résultat (quotient et reste), donc donner du sens à la division euclidienne revient à donner du sens au quotient et au reste;
- des difficultés ultérieures concernent les ostensifs habituellement utilisés pour indiquer la division euclidienne entre deux nombres naturels; l'ostensif $20 : 3 = 6r2$ pour représenter la division euclidienne de 20 par 3, donnant quotient 6 et reste 2 devrait être abandonné en faveur de l'ostensif $20 = 6 \times 3 + 2$;
- au niveau de l'enseignement, l'institutionnalisation du sens d'une notion est particulièrement difficile.

5.1.2 Recherche d'une modélisation des savoirs en jeu

La séquence didactique sur le sens de la division euclidienne, tout comme les autres séquences EXPIRE, a été librement inspirée de certaines activités existantes et éprouvées dans la communauté de professeurs d'écoles français et des didacticiens de mathématiques. L'activité de base, pouvant vivre dans le dispositif « papier/crayon » ou dans un dispositif « tangible », peut être modélisée par le type de tâches

$T_{\text{Déplacer}}$ « Déplacer un objet situé sur la case 0 d'une bande numérique pour qu'il se rapproche au maximum d'une case cible a avec des sauts constants de longueur b »

Ce type de tâches relève de la division-quotition; pour l'accomplir il faut déterminer le quotient de la division euclidienne de a par b . L'énoncé peut, de plus, demander également l'explicitation du reste. Nous avons pu repérer ce type de tâches dans les manuels *Euro Maths* [Peltier *et al.*, 2009] (Fig. 5.1) et dans *Cap Maths* [Charnay *et al.*, 2018] (Fig. 5.2).

Travailler des praxéologies autour de ce type de tâches, selon les résultats de l'analyse didactique indiqués ci-dessus, semble, *a priori*, contribuer à la construction du sens de la division euclidienne.

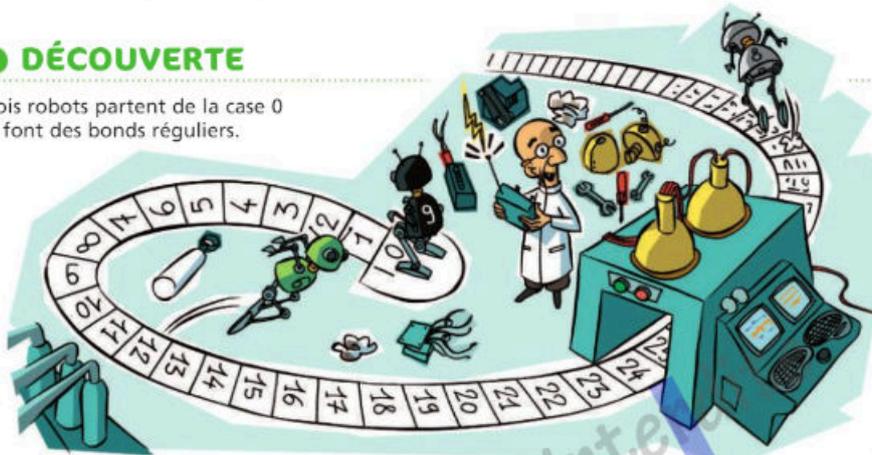
L'adaptation de ce type de tâches à l'intérieur du dispositif Scratch a donné lieu à des nouveaux types de tâches et à un environnement créé *ad hoc* avec une certaine scène et des blocs d'instructions indiquant les actions que les élèves sont censés expliciter lors de leur résolution algorithmique.

A ce point, nous voyons émerger un niveau praxéologique nouveau, relevant de la dimension algorithmique présente dans la séquence EXPIRE. Cela donne lieu à notre premier axe de recherche : nous voulons être capables de caractériser les savoirs algorithmiques en jeu, outre que les savoirs mathématiques relatifs à la division euclidienne. De plus, nous voulons comprendre comment ces deux savoirs s'articulent au sein de la séquence EXPIRE. Pour cela, nous cherchons à construire une modélisation des savoirs pertinente qui mette en lumière les caractéristiques dues à cette articulation. Dans cette perspective, nous avons présenté dans la première section du chapitre 3 un état de l'art

Objectifs : mémoriser le répertoire multiplicatif. Aborder la notion de multiple.

➔ DÉCOUVERTE

Trois robots partent de la case 0 et font des bonds réguliers.



➊ Le robot vert part de la case 0, il fait toujours des sauts de 6 cases. Il passe sur la case 6, puis sur la case 12.

Écris les numéros des cases où il passe sans dépasser 100.

➤ Les nombres que tu as écrits sont des multiples consécutifs de 6, c'est-à-dire des multiples de 6 qui se suivent.

➋ Le robot gris part de la case 0. Il fait des sauts de 8. Il passe sur la case 8, puis sur la 16.

Écris les numéros des cases où il passe sans dépasser 100.

Les nombres que tu as écrits sont aussi des multiples consécutifs : de quel nombre ?

➌ Le robot noir part de la case 0. Il fait des sauts de 9. Il passe sur la case 9, puis sur la 18.

Écris les numéros des cases où il passe sans dépasser 100.

De quels multiples s'agit-il ?

➍ Après 5 sauts, sur quelle case arrive chacun des trois robots ?

➎ Cherche une case sur laquelle passent les trois robots. Peux-tu en trouver d'autres ? Explique comment tu fais pour les trouver.

FIGURE 5.1 – Activité proposée par le manuel Euro Maths CM1

MULTIPLE D'UN NOMBRE

LE JEU DE LA PUCE

La puce part de 0 et fait des sauts réguliers.
Un joueur choisit une de ces cartes.

11	15	18	23	24	36	45	47
48	60	75	100	120	150	240	430

La carte choisie indique la case sur laquelle la puce doit arriver.
Chaque joueur répond à trois questions :

- La puce peut-elle atteindre cette case ?
- Si oui, quelle doit être la longueur d'un saut ?
- Et en combien de sauts la case peut-elle être atteinte ?

Il faut trouver le plus possible de solutions.

A Y a-t-il d'autres façons d'atteindre la case 24 ?

MA RECHERCHE AIDE 48

FIGURE 5.2 – Activité proposée par le cahier de recherche pour CM1 de la collection Cap Maths

concernant les manières de modéliser des savoirs « mixtes » en didactique des mathématiques. A partir de cet état de l'art, nous avons retenu, en particulier les travaux de **Couderette [2016]** et de **Strock et Artaud [2019]**, qui nous ont adressé vers le choix de notre cadre théorique, présenté dans le chapitre 4.

5.1.3 Viabilité du point de vue des apprentissages mathématiques

L'objectif de la séquence didactique que nous voulons analyser est l'apprentissage du sens de la division euclidienne. Pour qu'une telle séquence soit considérée viable dans le curriculum de l'école primaire française, nous voulons évaluer les connaissances des élèves relativement à la division euclidienne apprises grâce à cette séquence. Afin de concevoir un dispositif d'évaluation adéquat des connaissances visées, qui tient compte de la nature de l'approche didactique utilisé, nous avons passé en revue les travaux de recherche qui ont fait quelque chose de similaire, en questionnant les hypothèses, les méthodes et les résultats issus de ces travaux pour nous positionner contre eux (section 3.2).

Au niveau des hypothèses de recherche explorées, nous avons relevé beaucoup de travaux de nature exploratoire visant à montrer la présence de « transferts » de l'activité de programmation vers l'activité mathématique [**Bideault, 1985**], [**Noss, 1986**], [**Sutherland, 1989**], [**Benton et al., 2018**], la caractérisation des activités de programmation et des compétences à évaluer n'étant parfois même pas présentée [**Temperman et al., 2014**]. En particulier, certains travaux font l'hypothèse que l'usage d'environnements de programmation induit une précision majeure dans l'explicitation des procédures de résolution [**Bideault, 1985**], [**Noss, 1986**], [**Sutherland, 1989**].

Au niveau des méthodes utilisées, nous constatons la présence d'approches très variées, à partir d'observations ponctuelles en classe jusqu'à l'évaluation des connaissances grâce à des dispositifs en format papier, à la présence ou en absence d'un prétest et avec

ou sans un groupe contrôle. Dans tous les cas, l'effectif évalué, allant d'un minimum de quelque binôme d'élève jusqu'à trois classes, était toujours limité.

Au niveau des résultats, ils sont assez hétérogènes. Certains travaux semblent montrer la présence de bénéfices d'une approche basée sur la programmation par rapport à une approche sans programmation, en mettant en lumière un profit, en termes de gains d'apprentissage [Gobert, 1991], [Temperman *et al.*, 2014]. D'autres travaux semblent plus prudents relativement à l'attribution de ces bénéfices à l'approche utilisée, précisant que des apports sont possibles sous certaines conditions qui restent à explorer [Bideault, 1985], [Noss, 1986], [Sutherland, 1989].

Les réflexions issues de cette synthèse nous permettrons de formuler une question de recherche précise relativement à l'évaluation des connaissances des élèves ayant réalisé les tâches de la séquence EXPIRE.

Parmi les conditions à explorer, il est très important de considérer celles liées à la transposition didactique réalisée par l'enseignant [Bertrand, 1990], [Gurtner, 1991], [Temperman *et al.*, 2014]. Cela nous fait arriver au troisième axe de recherche.

5.1.4 Etude des conditions de viabilité lors de la transposition didactique interne

Le contexte de notre recherche nous a amené à interroger les conditions et les contraintes qui pèsent sur la transposition didactique interne d'une organisation mathématique mixte, et, plus précisément, sur le processus de transposition de l'OMM apprêtée à l'OMM enseignée. Nous avons donc étudié la littérature à cet égard (section 3.3). Cela nous a fourni un cadre d'analyse qui nous servira pour observer l'exploitation de l'OMM apprêtée de la part de l'enseignant. En particulier, nous avons exploré la place de l'institutionnalisation dans la création du sens d'un concept mathématique chez les élèves. Elle correspond à l'ensemble des pratiques enseignantes visant à préciser ce qu'est exactement l'organisation mathématique élaborée. Au sein des séquences EXPIRE, dans lesquelles nous identifions une organisation mathématique mixte, l'enseignant pourrait mener une institutionnalisation uniquement pour les praxéologies mathématiques, ou pour les praxéologies mathématiques et celles algorithmiques.

Nous avons observé qu'au sein de l'institutionnalisation la gestion de la mémoire didactique des élèves de la part de l'enseignant constitue un élément fondamental [Brousseau, 1988], et nous avons donc exploré quelque travail portant sur la mémoire didactique afin de pouvoir intégrer cet élément dans nos analyses [Brousseau et Centeno, 1991], [Mathéron et Salin, 2002].

Un dernier élément constituant notre cadre d'analyse se constitue de la prise en compte de l'articulation des divers registres lors de praxéologies didactiques visant à faire émerger ou institutionnaliser des praxéologies mathématiques. Notamment, en nous inspirant du travail de Briant [2013], nous considérons les ostensifs relevant de l'environnement Scratch comme constituant un registre d'ostensifs (nous reviendrons là-dessus dans le chapitre 7) et nous voulons ainsi comprendre comment les enseignants exploitent ce nouveau registre dans leurs pratiques.

Finalement, nous essayerons de caractériser les conditions et les contraintes auxquelles les enseignants sont assujettis dans un contexte écologique de la classe, dans l'objectif d'établir des corrélations entre celles-ci et les pratiques observées.

5.2 Questions de recherche

Dans cette section, nous présentons les questions de recherche auxquelles nous voulons répondre grâce à notre étude. Ces questions s'articulent autour de trois axes : la modélisation des savoirs, la viabilité des ressources EXPIRE dans le curriculum et les pratiques enseignantes face à ces ressources.

La problématique écologique dans laquelle nous nous inscrivons nous conduit, tout d'abord, à la question de l'identification des praxéologies en jeu, pour comprendre comment les nouveaux objets du savoir s'inscrivent au sein d'une institution dans laquelle d'autres objets ont déjà leur propre identité. Cela nous fait formuler une première question de recherche :

QR_{modèle} : Comment modéliser les savoirs relatifs à une organisation mathématique mixte dans laquelle des praxéologies propres à l'informatique permettent de mobiliser des praxéologies mathématiques ?

Pour cette question de recherche nous formulons l'hypothèse de recherche suivante, que nous mettrons à l'épreuve dans cette thèse :

H_{p_{modèle}} : Un modèle praxéologique de référence sur la notion mathématique visée, ainsi que la structuration des praxéologies sur plusieurs niveaux de granularité, issue du cadre T4TEL, permettra de concevoir une modélisation des savoirs d'une organisation mathématique mixte dans laquelle les praxéologies propres à l'informatique permettent d'évoquer des praxéologies mathématiques.

Une modélisation de ce type nous permettra, par ailleurs, de :

- concevoir un dispositif d'évaluation des praxéologies mathématiques acquises grâce au travail de l'OMM apprêtée ;
- concevoir une grille d'analyse pour observer, décrire et analyser les praxéologies didactiques mises en œuvres par les enseignants.

En ce qui concerne le deuxième axe de recherche, nous formulons la question qui suit :

QR_{apprentissage} : Des organisations mathématiques mixtes présentant une dimension algorithmique permettent-elles aux élèves, sous certaines conditions, de changer leurs rapports aux praxéologies mathématiques visées par le curriculum ?

Nous précisons que l'approche proposée par le projet EXPIRE n'a pas le but d'améliorer l'apprentissage des mathématiques, mais elle a été conçue dans l'optique d'être insérée dans le curriculum scolaire français. Notre objectif est donc de comprendre si telle approche est viable sans une perte significative au niveau des apprentissages en mathématiques. A la lumière des résultats contradictoires émergés lors de notre revue de littérature nous ne formulons pas une hypothèse de recherche, et nous conduisons plutôt une analyse exploratoire en essayant de pallier les manques méthodologiques relevés dans les travaux de recherche cités.

Finalement, dans la revue de littérature concernant notre troisième axe de recherche, nous avons montré qu'en mathématiques les pratiques enseignantes peuvent être perturbées par l'introduction d'une approche basée sur d'autres disciplines, notamment à la présence d'un certain système de conditions et contraintes. Cela nous amène à formuler la question de recherche suivante :

QR_{pratiques} : Quelles sont les pratiques enseignantes favorisant la transposition didactique interne des praxéologies mathématiques issues de l'OMM apprêtée de la séquence EXPIRE sur la division euclidienne ?

Relativement à cette question de recherche, nous voulons mener une étude exploratoire en observant les organisations didactiques qui peuvent être réalisées dans les classes, dans un contexte écologique.

5.3 Méthodologie générale

Nous présentons maintenant des éléments de la méthodologie générale que nous avons adopté pour chacun de nos axes de recherche.

En ce qui concerne le premier axe, nous considérons que le cadre théorique de la TAD, avec la formalisation du modèle praxéologique de T4TEL, nous donne des outils puissants pour la modélisation des savoirs en jeu dans une organisation mathématique mixte. En effet, les savoirs issus de la division euclidienne sont « stables » au sein de l'institution de l'école primaire française, avec une place précise au sein des savoirs de référence et des savoirs à enseigner. Nous pourrions ainsi considérer, pour les praxéologies mathématiques en jeu, une organisation mathématique de référence [Bosch et Gascón, 2005] visant à la construction du sens de la division euclidienne, à partir de l'étude épistémologique menée dans le chapitre 2, ainsi que de l'étude des manuels scolaires à ce sujet. Nous présenterons cette organisation mathématique de référence dans le chapitre 6. Ensuite, nous pourrions analyser la séquence sur la division euclidienne issue du projet EXPIRE à la lumière de cette OM de référence. Grâce au cadre T4TEL, nous pourrions concevoir un modèle des praxéologies algorithmiques en jeu et voir comment elles s'articulent avec les praxéologies de l'OM de référence.

Pour le deuxième axe de recherche, il s'agit d'évaluer la séquence Scratch sur la division euclidienne, issue du projet EXPIRE afin de comprendre si l'OMM apprêtée est viable du point de vue de l'apprentissage. En d'autres mots nous nous demandons si l'approche EXPIRE peut substituer, dans la limite de quelques séances, une approche « traditionnelle ». Nous avons la chance de nous inscrire dans un projet d'importance nationale, qui a pu lancer un dispositif expérimental dans 109 classes de 46 écoles du département Rhône Alpes lors du premier semestre de l'année scolaire 2017/2018. La taille de l'échantillon dont nous disposons, consistant d'environ 2500 élèves, résulte bien plus grande par rapport à celles qui sont émergées dans les travaux analysés en section 3.2. Par ailleurs, nous sommes rentrés dans le projet en septembre 2017, avant la mise en place du dispositif de recueil de données. Cela nous a permis de contribuer à la conception du dispositif expérimental. Notamment, nous avons réalisé des tests d'apprentissage en format papier portant sur la division euclidienne (ainsi que sur les autres notions impliquées) et nous avons choisi de mener une expérimentation avec un pré-test et un post-test, pour relativiser les performances de chaque élève à son niveau initial. Par ailleurs, au sein du projet, il était déjà prévu un groupe contrôle, c'est-à-dire que en complément des séquences didactiques dans leur version « Scratch » d'autres séquences, portant sur les mêmes notions mathématiques et objectifs didactiques étaient conçues dans l'environnement « papier » avec le but d'être dispensées en parallèle dans une moitié des classes impliquées, ne travaillant pas avec Scratch. Nous pouvons donc bénéficier d'un contrôle pour nous assurer que les effets trouvés dépendent vraiment de l'approche adoptée. Lors du recueil des données, toujours en vue de mener une étude exploratoire, nous avons choisi de ne pas nous contenter de registrer les performances des élèves en termes de réussite/échec,

mais de regarder au type d'erreur fait ainsi que de registrer la technique utilisée par les élèves. Faute des nombreuses contraintes expérimentales, les modalités de passation des séquences ne s'inscrivaient pas dans des conditions écologiques. Les détails de la méthode appliqué pour mener l'expérimentation, recueillir et analyser les données sera présentée dans le chapitre 8.

Afin d'aborder le troisième axe de notre recherche, nous avons mené des observations dans les classes de cinq enseignants qui se sont portés volontaires lors de l'année scolaire 2018/2019. Cette fois-ci, les enseignants ont pu réaliser l'OMM apprêté dans des conditions écologiques, nous n'ayant pas interféré avec la programmation annuelle prévue des enseignants. Nous avons conçu une grille d'analyse des organisations didactiques menées, à partir de la modélisation des savoirs issus de l'OMM apprêté, des attentes des chercheurs concepteurs de l'OMM (identifié lors des formations dispensées et dans les ressources pédagogiques mises à la disposition des enseignants) et de l'état de l'art présenté en section 3.3. Grâce à cette grille d'analyse nous avons pu repérer, à l'intérieur des organisations mathématiques réalisées par chaque enseignant, des indicateurs concernant la conformité de leur organisation didactique aux attentes des chercheurs du projet. D'ailleurs, nous avons recueilli les conditions et les contraintes auxquels chaque enseignant était assujetti à travers des entretiens informels, et nous avons essayé de comprendre quelles conditions favorisent l'émergence de pratiques conformes. Nous caractériserons mieux notre méthodologie relativement à cet axe de recherche dans le chapitre 9.

Deuxième partie

Modèle de l'OMM apprêtée

Chapitre 6

Organisation mathématique de référence

En nous appuyant sur l'analyse didactique et épistémologique du sens de la division euclidienne, menée dans le chapitre 2, nous présentons l'organisation mathématique de référence [Bosch et Gascón, 2005] que nous avons construite. L'OM de référence constituera un outil important pour comprendre et caractériser l'OMM apprêtée.

Dans notre cas, l'OM de référence s'articule autour d'organisations mathématiques ponctuelles (OMP), définies dans la TAD de la manière suivante :

Autour d'un type de tâches T , on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d'une technique (au moins), τ , d'une technologie de τ , θ , et d'une théorie de θ , Θ . Le tout, noté $[T, \tau, \theta, \Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, ce dernier qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T . [Chevallard, 1999]

Afin de caractériser les diverses organisations mathématiques ponctuelles, nous allons, donc, déterminer toutes les techniques qui peuvent émerger, au sein de l'institution considérée, pour accomplir chacun des types de tâches considérées dans cette étude.

Les diverses OMP que nous allons présenter nous permettrons de mettre en lumière les *ingrédients de techniques* nécessaires pour que l'environnement technologique relatif au sens de la division euclidienne entre deux naturels soit mobilisé. Lors de notre modélisation, nous ne serons pas exhaustifs sur le volet technologico-théorique des praxéologies en jeu, volet qui a déjà été exploré dans le chapitre 2.

6.1 Les types de tâches de l'OM de référence

Notre OM de référence s'articule autour des OMP relatives aux types de tâches suivants :

- $T_{décomposer}$ « Décomposer un nombre naturel a sous forme de produit de deux nombres naturels »;
- $T_{quotient}$ « Déterminer le quotient de la division euclidienne de deux nombres naturels a et b »;
- T_{reste} « Déterminer le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels a et b »;

Par ailleurs, nous incluons dans l'OM de référence le type de tâches

$T_{représenter}$ « Représenter la division euclidienne de deux nombres naturels a et b »

qui fait partie d'une classe de types de tâches indispensables à l'activité mathématique relevant de la représentation d'un non-ostensif à l'aide d'un ou plusieurs ostensifs. Relativement à ce type de tâches, dans la section 6.5, nous recenserons les divers ostensifs et registres d'ostensifs possibles lors de son accomplissement.

6.1.1 Lien entre les types de tâches de l'OM

Dans notre étude nous considérons $T_{décomposer}$ comme un *pré-requis* pour $T_{quotient}$ et T_{reste} , dans le sens où :

- la technique visée pour accomplir $T_{décomposer}$ contient l'*ingrédient* $T_{dét,q}$ qui est un sous-type de tâches de $T_{quotient}$ ¹ ;
- les technologies de l'OMP($T_{décomposer}$) sont nécessaires pour donner du sens à $T_{quotient}$ et T_{reste} .

Par ailleurs, le type de tâches $T_{représenter}$ ne peut être réalisé que quand tous les termes de l'égalité $a = b \times q + r$ sont connus, c'est-à-dire après l'accomplissement de $T_{quotient}$ et T_{reste} . Nous pouvons observer que les types de tâches $T_{décomposer}$, $T_{quotient}$ et T_{reste} sont des sous-types de tâches de

T_{DE} « Déterminer un ou deux termes inconnus de l'expression $a = b \times q + r$, étant le terme a connu et avec $0 \leq r < b$ ».

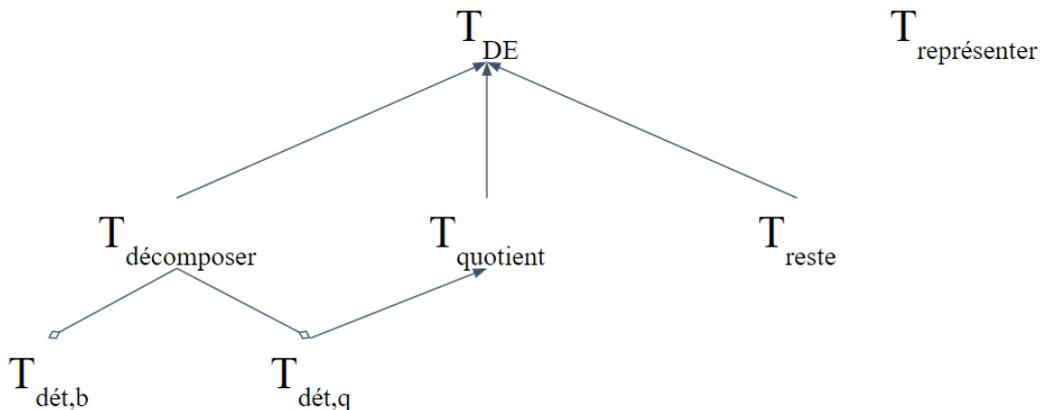


FIGURE 6.1 – OM de référence

Dans la Figure 6.1 nous montrons le lien qui existe entre les types de tâches de l'OM de référence présentés dans cette section. A partir de maintenant et tout au long de la thèse, les notations « $T' \longrightarrow T$ » et « $\hat{T} \longleftarrow T^*$ » seront adoptées pour indiquer respectivement que T' est un sous-type de tâches de T et que \hat{T} est ingrédient d'au moins une technique de T^* .

Les prochaines sections seront consacrées à l'étude des OMP relatives aux types de tâches $T_{décomposer}$, $T_{quotient}$ et T_{reste} .

6.2 Etude de l'OMP($T_{décomposer}$)

Le type de tâches $T_{décomposer}$ « Décomposer un nombre naturel a sous forme de produit de deux nombres naturels » a un rôle très important dans l'OM. Il fait travailler les

1. Nous allons définir le type de tâches $T_{dét,q}$ au cours de ce chapitre.

concepts de *multiples* et *diviseurs* d'un nombre naturel, nécessaires pour la compréhension du sens de la division euclidienne.

Selon la modélisation de Vergnaud [1990], $T_{décomposer}$ appartient à la catégorie de problèmes à structure multiplicative (Tableau 6.1), avec la valeur $a = f(x)$ donnée et deux valeurs à déterminer, à savoir $f(1)$ (*multiplie*) et x (*multiplie*) tels que $f(x) = f(1) \times x$. En général, plusieurs combinaisons de ces deux valeurs sont possibles pour une même valeur a .

M_1	M_2
1	$f(1)$
x	$f(x)$

TABLEAU 6.1 – Problèmes à structure multiplicative

Afin de caractériser l'OMP($T_{décomposer}$), nous définissons l'ensemble $D_a = \{(f(1), x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ tels que } a = f(1) \times x\}$ de toutes les décompositions de a en produit de deux nombres entiers. Cet ensemble présente les propriétés suivantes :

1. $\forall a \in \mathbb{N}$ si $(f(1), x) \in D_a$ alors $(x, f(x)) \in D_a$;
2. si $a = 0$, $D_a = \{(0, k), (k, 0), \forall k \in \mathbb{N}\}$;
3. si $a = 1$, $D_a = \{(1, 1)\}$;
4. si $a > 1$ et a est un nombre premier, $D_a = \{(a, 1), (1, a)\}$;
5. si $a > 1$ et a n'est pas un nombre premier, $|D_a| > 2$.

Nous constatons que l'accomplissement du type de tâches $T_{décomposer}$ revient à déterminer un ou plusieurs couples (b, q) de D_a .

Pour chaque nombre naturel a il est possible d'identifier de façon exhaustive D_a , en utilisant la décomposition de a en facteurs premiers. Par exemple, la décomposition en facteurs premiers de $a = 24$, à savoir $24 = 2^3 \times 3$, permet de déterminer l'ensemble $D_a = \{(1, 24), (24, 1), (2, 12), (12, 2), (3, 8), (8, 3), (4, 6), (6, 4)\}$. Cette technique, que nous notons $\tau_{factoriser}$, n'est pas disponible au sein de l'institution considérée dans notre étude.

En revanche, d'autres techniques reposant sur l'utilisation des tables de multiplication sont possibles. Au cycle 2 les élèves doivent apprendre par cœur les tables de multiplication de 2 à 10. Par conséquent, les sujets du cycle 3 disposent de la technique τ_{tables} qui consiste à mobiliser le répertoire des tables de multiplication, par cœur ou à l'aide d'un support écrit comme la table de Pythagore. La portée de τ_{tables} se limite aux sous-types de tâches de $T_{décomposer}$ pour lesquels $1 \leq a \leq 100$.

Une première variable de $T_{déterminer}$ qui émerge naturellement grâce à ces premières observations est :

- V_a , taille du nombre a à décomposer.

Pour définir l'OMP($T_{décomposer}$) nous allons considérer une technique plus générale que τ_{tables} mais toujours accessible aux sujets considérés, utilisant les deux *ingrédients* suivants :

- $T_{dét,b}$ « Déterminer un diviseur b de a »;
- $T_{dét,q}$ « Déterminer le naturel q tel que $a = b \times q$, étant les termes a et b connus et étant b diviseur de a ».

Les prochaines sous-sections vont présenter l'étude des OMP de $T_{dét,b}$ et de $T_{dét,q}$.

6.2.1 Techniques de $T_{dét,b}$

Le type de tâches $T_{dét,b}$ consiste à rechercher un diviseur de a dans l'ensemble des nombres naturels inférieurs ou égaux à a . Nous allons définir des variables imposant des contraintes sur cet ensemble, à partir d'une étude *a priori* menée à l'aide d'activités proposées dans des manuels.

La première contrainte consiste à introduire un naturel $n \leq a$ tel que la recherche de b est *autorisée* dans l'ensemble des naturels inférieurs ou égaux à n . Alors, nous pouvons considérer la variable :

- V_n , valeur du nombre n .

Nous observons que, si $n < a$, le nombre a est exclu de l'ensemble des nombres *autorisés*.

L'ensemble des nombres *autorisés* lors de la résolution de $T_{dét,b}$ peut être ultérieurement réduit grâce à l'introduction de la variable :

- V_H , relevant de l'exclusion de tous les nombres divisant au moins un des éléments de $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$, avec $h_i \in \mathbb{N}$ et $h_i < a, \forall i = 1, 2, \dots, k$.

Dans le cadre de notre recherche, nous définissons les valeurs des variables V_a, V_n et V_H comme présenté dans le Tableau 6.2.

V_a	V_n	V_H
petite $a \leq 100$	petite $n \leq 10$	$H = \emptyset$
		$H \neq \emptyset$
	grande $n > 10$	$H = \emptyset$
		$H \neq \emptyset$
grande $a > 100$	petite $n \leq 10$	$H = \emptyset$
		$H \neq \emptyset$
	grande $n > 10$	$H = \emptyset$
		$H \neq \emptyset$

TABLEAU 6.2 – Valeurs des variables V_a, V_n et V_H

Bien que en générale elle ne soit pas efficace, nous identifions dans notre OM la technique de $T_{dét,b}$ basée sur le hasard avec $\tau_{b,hasard}$, qui a comme seul *ingrédient* :

- $T_{b,hasard}$ « Choisir un nombre naturel b au hasard ».

Nous mentionnons cette technique puisque nous considérons qu'il est possible de la voir émerger au sein des praxéologies des sujets considérés, mais nous ne focaliserons pas notre attention dessus.

D'autres techniques qui doivent être considérées sont $\tau_{b,1}$ et $\tau_{b,a}$, décrites respectivement par les *ingrédients* suivants :

- $T_{a,1}$ « Choisir $b = 1$ » ;
- $T_{a,a}$ « Choisir $b = a$ ».

Ces techniques sont justifiées respectivement par θ_1 « 1 est diviseur de $a, \forall a \in \mathbb{N}$ » et θ_a « a est diviseur de $a, \forall a \in \mathbb{N}^*$ ». La première est valable pour toute valeur de V_a et de V_n mais seulement quand V_H prend la valeur « $H = \emptyset$ ». La deuxième est valable uniquement si $n = a$ et si $h_i \nmid a, \forall i = 1, \dots, k$.

Nous présentons dans le Tableau 6.3 les autres techniques de $T_{dét,b}$, étant h_1, h_2, \dots, h_k les éventuels éléments de H .

Technique	Ingrédients de la technique
$\tau_{a,évaluer}$	$T_{a,obs}$ « Observer le dernier chiffre de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	$T_{a,2}$ « Choisir $b = 2$ si a est un nombre pair et h_1, h_2, \dots, h_k sont impairs »
	$T_{a,3}$ « Choisir $b = 3$ si la somme des chiffres composant a est un multiple de 3 et la somme des chiffres de h_i n'est pas un multiple de 3 »
	$T_{a,5}$ « Choisir $b = 5$ si le dernier chiffre de a est 5 ou 0 et si aucun h_i se termine par 5 ou par 0 »
	$T_{a,10}$ « Choisir $b = 10$ si le dernier chiffre de a est 0 et si aucun h_i se termine par 0 »
$\tau_{b,balayage}$	$T_{test,2}$ « Etablir si 2 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	$T_{test,3}$ « Etablir si 3 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	$T_{test,4}$ « Etablir si 4 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	...
	$T_{test,n}$ « Etablir si n est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	$T_{b,choix}$ « Choisir b parmi les nombres qui résultent être diviseurs de a mais qui ne divisent pas h_1, h_2, \dots, h_k »
$\tau_{b,tester}$	$T_{test,2}$ « Etablir si 2 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	$T_{test,3}$ « Etablir si 3 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	$T_{test,4}$ « Etablir si 4 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	...
	$T_{test,n}$ « Etablir si n est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
	$T_{b,choix}$ « Choisir b parmi les nombres qui résultent être diviseurs de a mais qui ne divisent pas h_1, h_2, \dots, h_k »

 TABLEAU 6.3 – Techniques de $T_{dét,b}$

Concernant les technologies qui justifient les techniques dont les ingrédients sont présentés dans le Tableau 6.3, nous soulignons que $T_{a,2}$, $T_{a,3}$, $T_{a,5}$ et $T_{a,10}$ sont justifiées respectivement par les critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 10.

Nous observons, par ailleurs, que les ingrédients de $\tau_{b,balayage}$ et de $\tau_{b,tester}$ sont les mêmes. Ce qui rend ces deux techniques différentes est la manière de recourir à ces ingrédients. Si $\tau_{b,balayage}$ consiste à tester tous les nombres de 2 à n de façon ordonnée, dans $\tau_{b,tester}$ les nombres ne sont pas testés de façon ordonnée, mais de façon aléatoire.

La réalisation de $\tau_{b,balayage}$ est valable pour toute valeur de V_a et de V_n , mais elle devient de plus en plus coûteuse au fur et à mesure que le nombre n augmente. En plus, à l'école primaire, le type de tâches $T_{test,b}$ « Etablir si b est un diviseur de a » (ou « Etablir si b est un diviseur de a, h_1, h_2, \dots, h_k ») ne peut pas être considéré comme élémentaire². Nous décrivons ses techniques dans le Tableau 6.4.

2. Dans T4TEL, « un type de tâches est *élémentaire* si l'institution ou le chercheur du domaine considère qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier la ou les techniques pour ce type de tâches » [Chaachoua, 2018].

Technique	Ingrédients de la technique
$\tau_{\text{vérif},part}$	$T_{parts,b}$ « Matérialiser b conteneurs »
	$T_{partager,b}$ « Positionner un élément dans chacun des b conteneurs, puis répéter, jusqu'à finir les éléments de a »
	$T_{\text{vérif},parts}$ « Vérifier que toutes les conteneurs contiennent le même nombre d'éléments »
$\tau_{\text{vérif},group}$	$T_{grouper,b}$ « Faire des paquets de taille b dans une collection de taille a »
	$T_{\text{vérif},group}$ « Vérifier qu'aucun élément de la collection ne reste en dehors des paquets »
$\tau_{\text{vérif},mult}$	$T_{multiples,b}$ « Déterminer tous les multiples de b , compris entre 0 et a »
	$T_{\text{vérif},mult}$ « Repérer a parmi les multiples de b »
$\tau_{b,critère}$	$T_{critère,b}$ « Appliquer à a le critère de divisibilité par b »
$\tau_{b,table}$	$T_{table,b}$ « Parcourir la table de multiplication de b »
	$T_{b,repérer}$ « Repérer le nombre b tel que $q \times b = a$ »
$\tau_{\text{vérif},soust}$	$T_{soust,b}$ « Soustraire plusieurs fois le nombre b au nombre a , jusqu'à arriver à 0 »
	$T_{\text{vérif},soust}$ « Vérifier d'avoir obtenu 0 »
$\tau_{\text{vérif},add}$	$T_{add,b}$ « Additionner le nombre b à lui-même, jusqu'à arriver à a »
	$T_{\text{vérif},add}$ « Vérifier d'avoir obtenu a »
$\tau_{\text{vérif},div}$	T_{div} « Poser la division de a par b »
	$T_{\text{vérif},div}$ « Vérifier que le reste de la division est nul »

TABLEAU 6.4 – Techniques de $T_{test,b}$

Le type de tâches $T_{test,b}$ présente deux nouvelles variables, liées au fait que le nombre b à tester est fixé à chaque fois *a priori*. Elles seront dénotées avec V_a et $V_{a,b}$. Nous reprendrons l'étude de ces deux variables dans le paragraphe concernant $T_{dét,q}$.

Dans la figure 6.2, nous avons résumé les types de tâches identifiés dans cette section. Il s'agit d'un graphe « partiel » car les techniques du type de tâches $T_{décomposer}$ ont deux ingrédients, et dans cette section nous en avons développé un seul. Nous avons omis les ingrédients des techniques de $T_{test,b}$ relevant du genre de tâche « Vérifier ».

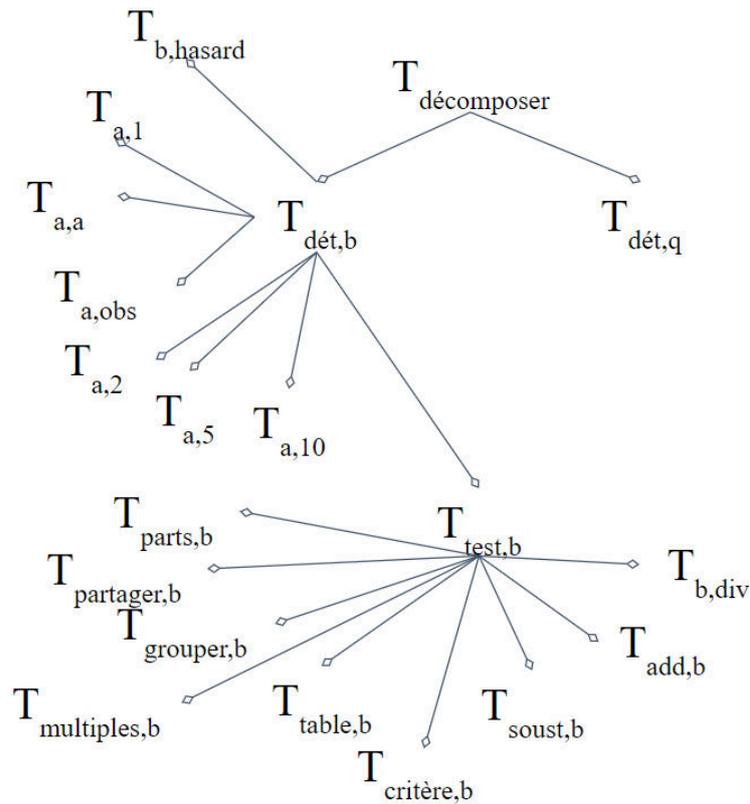


FIGURE 6.2 – Premier graphe partiel des types de tâches autour de $T_{décomposer}$

6.2.2 Techniques de $T_{dét,q}$

Pour accomplir le type de tâches $T_{décomposer}$, il faudra résoudre $T_{dét,b}$ avant de passer à $T_{dét,q}$ « Déterminer le naturel q tel que $a = b \times q$ ». Cela implique que les naturels a et b sont donnés et que b est un diviseur de a . Alors, puisque la variable V_n concerne le choix de b , elle n'aura aucun impacte sur $T_{dét,q}$. Par contre, ce type de tâches présentera deux nouvelles variables :

- V_b taille de b ;
- $V_{a,b}$ relation entre a et b .

Nous explicitons les valeurs des variables V_a , V_b et $V_{a,b}$ dans le Tableau 6.5, en conservant uniquement les combinaisons possibles en tenant compte de la contrainte « a est un multiple de b ».

Plusieurs techniques sont possibles. Comme nous l'avons fait pour $T_{dét,b}$, nous passons en revue les techniques de $T_{dét,q}$ en commençant par celle relevant du hasard, qui n'est pas justifiée par une technologie mathématique. Nous l'appellerons $\tau_{q,hasard}$ et elle aura comme seul ingrédient :

- $T_{q,hasard}$ « Choisir un nombre q au hasard ».

Concernant les techniques mathématiques, nous relevons, toujours au sein de l'institution donnée, les techniques explicitées dans le Tableau 6.6.

Nous observons que certaines de ces techniques peuvent être mélangées. En d'autres termes, l'association d'ingrédients de deux ou plusieurs techniques peut donner lieu à d'autres techniques. Par exemple, si $b \leq 10$ et $a \geq b \times 10$, nous pouvons prévoir la technique $\tau^* = \{T_{table,b}, T_{q,repérer}, T_{add,b}, T_{q,add}\}$, obtenue de l'union de $\tau_{q,table}$ et de $\tau_{q,add}$.

V_a	V_b	$V_{a,b}$
$a < 100,$ $a \neq 10 \times h, \forall h \in \mathbb{N}$	$b = 2$	
	$2 < b < 10,$	$a = 2 \times b$
		$a < 10 \times b,$ $a \neq 2 \times b$
		$a > 10 \times b$
	$10 < b \leq 12$	
$b > 12$		
$a \leq 100,$ $\exists h \in \mathbb{N} \text{ t. q. } a = 10 \times h$	$b = 2$	
	$2 < b < 10$	$a = 10 \times b$
		$a = 10 \times k \times b$
	$b = 10$	
	$10 < b \leq 12$	
$b > 12$		
$a > 100,$ $a \neq l \times 10 \times h, \forall l, h \in \mathbb{N}$	$b = 2$	
	$2 < b < 10$	
	$10 < b \leq 12$	
	$b > 12$	
$a > 100,$ $\exists N, h \in \mathbb{N} \text{ t. q. } a = 10^N \times h$	$b = 2$	
	$2 < b < 10$	$h = b, \text{ i.e. } a = 10^N \times b$
		$h = b \times z, z \neq 1, \text{ i. e. } a = 10^N \times b \times z$
	$10 < b \leq 12$	
	$b > 12,$ $b = 10^k, k \leq N$	
	$b > 12,$ $b \neq 10^k, \forall k \leq N$	$h = b, \text{ i.e. } a = 10^N \times b$
$h = b \times z, z \neq 1, \text{ i. e. } a = 10^N \times b \times z$		

TABEAU 6.5 – Valeurs des variables V_a, V_b et $V_{a,b}$

Technique	Ingrédients de la technique
$\tau_{q,partager}$	$T_{parts,b}$ « Matérialiser b conteneurs »
	$T_{partager,b}$ « Positionner un élément dans chacun des b conteneurs, puis répéter, jusqu'à insuffisance des éléments de a »
	$T_{q,valeur}$ « Compter le nombre q des éléments dans chaque conteneur »
$\tau_{q,paquets}$	$T_{grouper,b}$ « Faire des paquets de taille b dans une collection de taille a »
	$T_{q,paquets}$ « Compter le nombre q des paquets obtenus »
$\tau_{q,multiples}$	$T_{multiples,b}$ « Déterminer tous les multiples de b , compris entre b et a »
	$T_{q,multiples}$ « Compter le nombre q des multiples trouvés »
$\tau_{q,encadrer}$	$T_{q,int}$ « Déterminer un intervalle de nombres naturels $]m; n[$ tel que $q \in]m; n[$ »
	$T_{]m;n[,tester}$ « Calculer $l \times b$, avec $l \in]m; n[$ »
	$T_{q,ajuster}$ « Choisir $q = l$, si $l \times b = a$; sinon ajuster l'intervalle »
$\tau_{q,table}$	$T_{table,b}$ « Parcourir la table de multiplication de b »
	$T_{q,repérer}$ « Repérer le nombre q tel que $q \times b = a$ »
$\tau_{q,soust}$	$T_{soust,b}$ « Soustraire plusieurs fois le nombre b au nombre a , jusqu'à arriver à 0 »
	$T_{q,soust}$ « Compter combien de fois le nombre b a été soustrait au nombre a »
$\tau_{q,add}$	$T_{add,b}$ « Additionner le nombre b à lui-même jusqu'à arriver à a »
	$T_{q,add}$ « Compter combien de fois le nombre b a été additionné à lui-même »
$\tau_{q,div}$	T_{div} « Poser la division de a par b »

TABLEAU 6.6 – Techniques de $T_{dét,q}$

Bien que la technique $T_{q,div}$ puisse ultérieurement être décrite dans l'institution considérée, nous nous intéressons uniquement aux types de tâches impliqués dans la construction du sens de la division euclidienne. En particulier, les études didactiques sur la division euclidienne, résumées dans le chapitre 2, défendent l'idée que les aspects liés à la construction du sens et à l'apprentissage de l'algorithme de calcul peuvent être complètement dissociés. Par conséquent, nous ne détaillerons pas dans ce texte les ingrédients des techniques de $T_{q,div}$.

Dans la figure 6.3 nous montrons le graphe des types de tâches autour de $T_{décomposer}$, obtenu en explicitant les ingrédients des techniques de de $T_{dét,q}$.

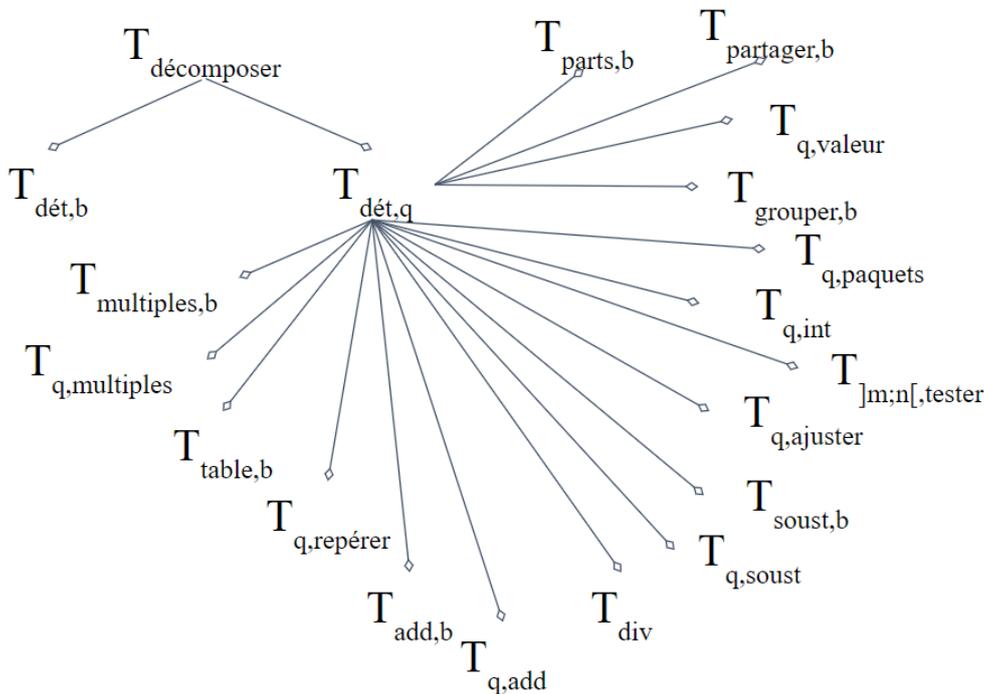


FIGURE 6.3 – Deuxième graphe partiel des types de tâches autour de $T_{décomposer}$

6.3 Etude de l'OMP($T_{quotient}$)

Pour commencer l'étude du type de tâches $T_{quotient}$ « Déterminer le quotient de la division euclidienne de deux nombres naturels a et b », nous identifions les variables impliquées :

- V_{reste} , reste (nul/non nul) de la division euclidienne entre a et b ;
- V_a , taille du dividende;
- V_b , taille du diviseur;
- $V_{a,b}$, relation entre le diviseur et le dividende;
- $V_{situation}$, situation sous-jacente à la division euclidienne (quotition/partition).

Dans un premier temps, nous pouvons observer que les variables V_{reste} et $V_{a,b}$ dépendent étroitement des valeurs prises par les variables V_a et V_b , alors que la variable $V_{situation}$ n'a aucun lien avec les autres et dépend uniquement de la valeur donnée en entrée et de celle à rechercher dans le schéma 6.1. L'ordre dans lequel nous avons présenté

les variables correspond à celui que nous utiliserons par la suite dans le texte. Nous analysons d'abord les effets de la variable V_{reste} , en relevant les techniques pour les combinaisons possibles de V_{reste} , V_a , V_b et $V_{a,b}$. Ensuite, nous essayerons de comprendre comment la variable $V_{situation}$ influence le choix d'une certaine technique plutôt qu'une autre.

6.3.1 Techniques de $T_{quotient}$

Si le reste de la division des naturels a et b est nul, il est possible de reconduire le classement des techniques de $T_{quotient}$ au classement des techniques de $T_{dét,q}$, avec un contrôle préalable qui peut être modélisé avec le type de tâches $T_{test,b}$.

Grâce à cette observation, nous pouvons constater que le type de tâches $T_{quotient}$ est plus générique que type de tâches $T_{dét,q}$. Les techniques $\tau_{q,partager}$, $\tau_{q,paquets}$ et $\tau_{q,multiples}$ accomplissant $T_{dét,q}$ permettent également d'accomplir $T_{quotient}$. Les autres techniques, présentées dans le Tableau 6.6, peuvent aussi le réaliser, à condition de modifier les ingrédients de techniques relevant de la valeur « nul » de la variable V_{reste} . Nous présentons dans le Tableau 6.7 la généralisation des techniques $\tau_{q,encadrer}$, $\tau_{q,table}$, $\tau_{q,soust}$ et $\tau_{q,add}$ pour qu'elles accomplissent $T_{quotient}$.

Technique	Ingrédients de la technique
$\tau'_{q,encadrer}$	$T_{q,int}$ « Déterminer un intervalle de nombres naturels $]m; n[$ tel que $q \in]m; n[$ »
	$T_{]m;n[,tester}$ « Calculer $l \times b$, avec $l \in]m; n[$ »
	$T'_{q,ajuster}$ « Choisir $q = l$, si $a - l \times b < b$; le cas échéant ajuster l'intervalle »
$\tau'_{q,table}$	$T_{table,b}$ « Parcourir la table de multiplication de b »
	$T'_{q,repérer}$ « Repérer le nombre q tel que $a - q \times b < b$ »
$\tau_{q,soust}$	$T'_{soust,b}$ « Soustraire plusieurs fois le nombre b au nombre a jusqu'à arriver à $r < b$ »
	$T_{q,soust}$ « Compter combien de fois le nombre b a été soustrait au nombre a »
$\tau'_{q,add}$	$T'_{add,b}$ « Additionner le nombre b à lui-même, jusqu'à approcher au maximum a »
	$T_{q,add}$ « Compter combien de fois le nombre b a été additionné à lui-même »
$\tau'_{q,div}$	T_{div} « Poser la division de a par b »
	T_q « Choisir q comme le quotient de la division »

TABLEAU 6.7 – Techniques de $T_{quotient}$

Le Tableau 6.5 qui montre les instanciations des variables V_a , V_b et $V_{a,b}$ pour le type de tâches $T_{dét,q}$ est pertinent pour montrer l'instanciation de ces mêmes variables de $T_{quotient}$, si V_{reste} prend la valeur « $r = 0$ ».

Pour la valeur « $r \neq 0$ » de V_{reste} , nous aurons un tableau similaire avec des modifications concernant le reste.

La variable $V_{situation}$ peut prendre les valeurs « quotient » ou « partition » pour tous les cas possibles de combinaisons des autres variables. Cette variable aura un impact sur le choix de la technique. Au niveau des techniques, le recours à la technique $\tau_{q,partager}$ est peu probable pour la division-quotient alors que la technique $\tau_{q,paquets}$ est peu probable pour la division-partition.

Toutes les techniques présentées peuvent être combinées de plusieurs manières tout comme les techniques de $T_{dét_q}$. Nous présentons dans la figure 6.4 les types de tâches qui sont les ingrédients d'au moins une des techniques de $T_{quotient}$.

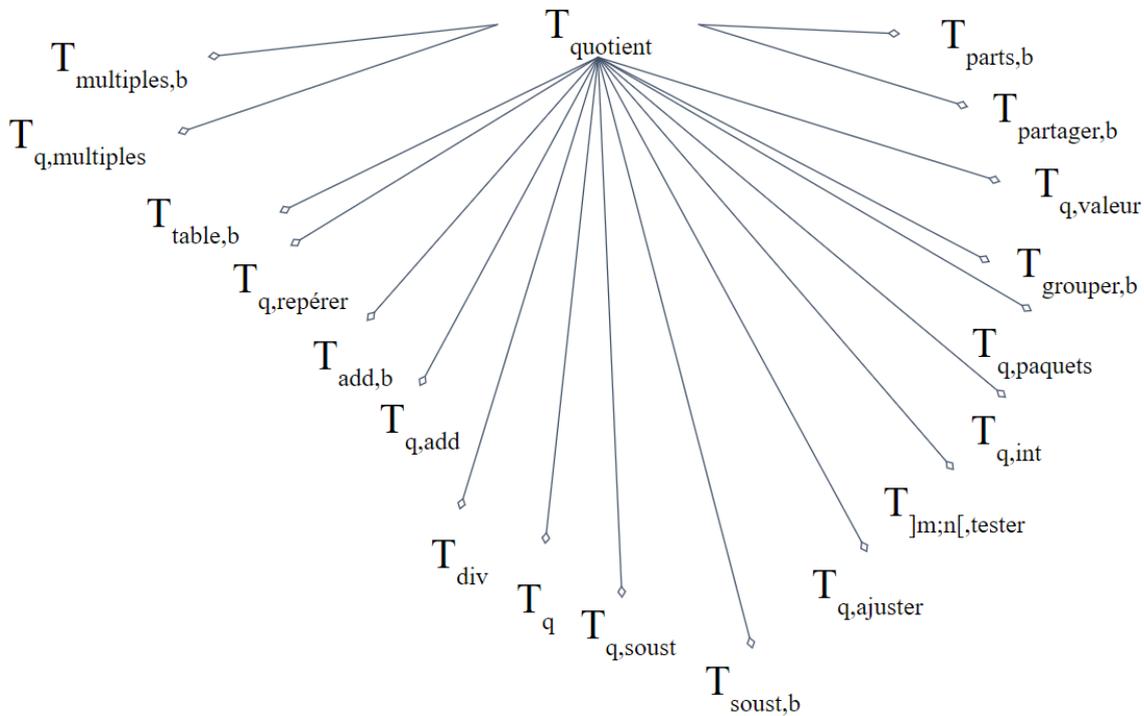


FIGURE 6.4 – Graphe des types de tâches autour de $T_{quotient}$

6.4 Etude de l'OMP(T_{reste})

Les techniques qui accomplissent T_{reste} peuvent être liées ou pas à la résolution de $T_{quotient}$. En effet, si $T_{quotient}$ a été réalisé, les nombres a , b et q sont donnés et le problème se réduit à « Déterminer le nombre $r = a - b \times q$ », pour lequel la technique est $\tau_{soustraire}$ composée par le seul type de tâches $T_{r,soustraire}$ « Soustraire $b \times q$ au nombre a ». Ce dernier type de tâches ne peut pas être considéré comme élémentaire à l'école primaire, mais nous ne détaillerons pas dans cette thèse ses techniques possibles. Concernant cet aspect, nous renvoyons à des études issues de la didactique des mathématique déjà menés (Rinaldi [2016]).

Cependant, le reste de la division des deux nombres naturels a et b peut être également trouvé sans connaître le quotient en appliquant une des techniques présentées dans le Tableau 6.8.

Pour l'exécution de la technique $\tau_{r,add}$, les deux types de tâches qui la composent peuvent être accomplis dans l'ordre inverse. Cela implique le fait de démarrer le comptage de b en b sans commencer par 0 mais par un autre nombre inférieur à b testant éventuellement plusieurs possibilités³.

Dans la figure 6.5 nous présentons le graphe des types de tâches lié à T_{reste} .

3. C'est le cas de la technique utilisée dans le contexte extra-mathématique de la course à vingt.

Technique	Ingrédients de la technique
$\tau_{r,partager}$	$T_{parts,b}$ « Matérialiser b conteneurs »
	$T_{partager,b}$ « Positionner un élément dans chacun des b conteneurs, puis répéter jusqu'à insuffisance des éléments de a »
	$T_{r,compter}$ « Choisir r comme le nombre des éléments qui n'ont pas été positionnés »
$\tau_{r,paquets}$	$T_{grouper,b}$ « Faire des paquets de taille b dans une collection de taille a »
	$T_{r,paquets}$ « Compter le nombre r des éléments qui sont restés en dehors des paquets »
$\tau_{r,soustr}$	$T_{soustr,b}$ « Soustraire plusieurs fois le nombre b au nombre a jusqu'à arriver à $r < b$ »
$\tau_{r,add}$	$T_{add,b}$ « Additionner le nombre b à lui-même, jusqu'à approcher au maximum a »
	$T_{r,add}$ « Compter combien il reste pour arriver à a »
$\tau_{r,div}$	T_{div} « Poser la division de a par b »
	T_r « Choisir r comme reste de la division »

TABLEAU 6.8 – Techniques de T_{reste}

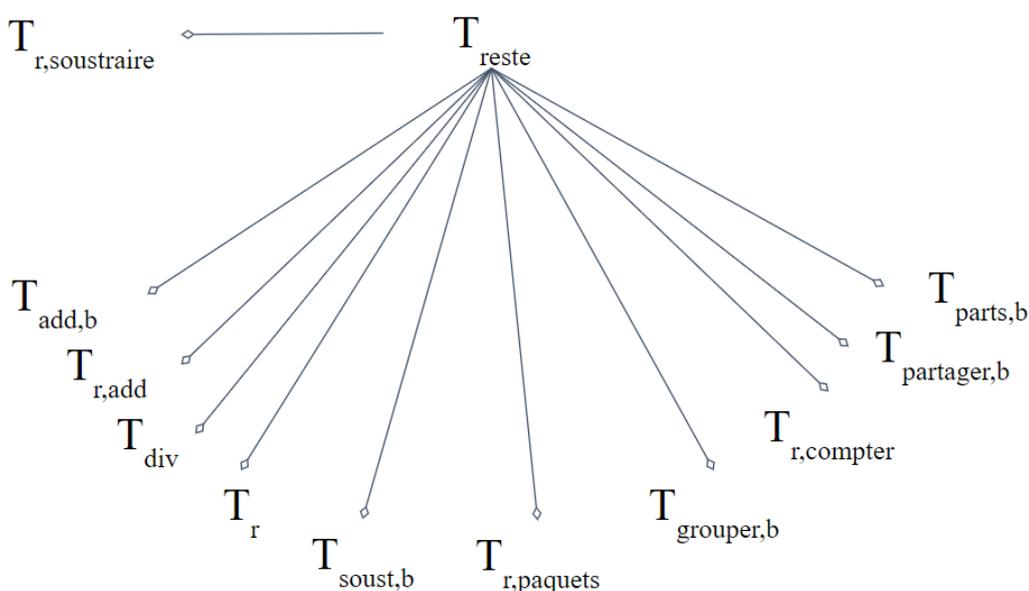


FIGURE 6.5 – Graphe des types de tâches autour de T_{reste}

6.5 $T_{représenter}$

Le type de tâches $T_{représenter}$ fait référence à la représentation de l'expression mathématique liée à la division euclidienne de a par b : $a = b \times q + r$. Il peut être accompli avec des ostensifs différents et, par conséquent, peut donner lieu à des productions différentes. A ce niveau de description dans lequel nous analysons l'organisation mathématique de référence, la seule production attendue est relative à l'ostensif *écriture arithmétique*. Si, par exemple, nous considérons la division entre 19 et 5, l'écriture arithmétique associée sera $19 = 5 \times 3 + 4$. D'autres écritures arithmétiques peuvent coïncider avec les ostensifs « $19 : 5 = 3r4$ » ou « $19 : 5 = 3, \text{reste } 4$ ». Cependant, ces deux ostensifs sont fortement dé-

conseillés car le symbole r du premier ostensif peut être remplacé par une virgule générant le nombre décimal 3,4, et dans le deuxième cas, l'ostensif produit une égalité fautive ($19 : 5 \neq 3$).

Concernant l'écriture algébrique $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$ nous pouvons observer que, si la condition $r < q$ est satisfaite, elle représente soit la division euclidienne entre a et b soit la division euclidienne entre a et q . Par conséquent, même si la multiplication est commutative, d'un point de vue didactique il est peu pertinent d'invertir les écritures $19 = 3 \times 5 + 4$ et $19 = 3 \times 5 + 4$. En effet, puisque $4 < 5$, mais $4 > 3$, cette dernière égalité représente uniquement la division entre 19 et 5.

Un autre registre utilisé pour représenter la division euclidienne est, par exemple, montré dans le Tableau 6.9, où les lettres a , b , q et r peuvent également être remplacées par les mots *dividende*, *diviseur*, *quotient* et *reste* respectivement.

a	b	q	r
19	5	3	4
19	3	6	1

TABLEAU 6.9 – Registre graphique pour la représentation de la division euclidienne entre 19 et 5

Dans le chapitre 7 nous allons présenter d'autres registres d'ostensifs et d'autres ostensifs qui peuvent être utilisés lorsque la tâche est considérée dans un contexte extramathématique.

6.6 Les variables $V_{contexte}$ et $V_{dispositif}$

6.6.1 $V_{contexte}$

Les types de tâches $T_{décomposer}$, $T_{quotient}$ et T_{reste} présentent une variable ultérieure. Nous indiquerons cette variable avec $V_{contexte}$. Elle peut prendre les valeurs « oui » ou « non ». Cela implique que les tâches obtenues à partir de ces types de tâches à travers l'instanciation de cette variable peuvent être inscrites ou pas dans un contexte⁴. Un exemple de tâche décontextualisée, relevant de $T_{décomposer}$ est t « Décomposer le nombre 24 sous forme de produit de deux nombres entiers ». Si la valeur de $V_{contexte}$ est « oui », nous pouvons définir une sous-variable $V_{type,cont}$ qui désignera le type de contexte. Nous définissons deux valeurs possibles pour cette dernière : « contexte intramathématique » ou « contexte extramathématique ». Un exemple de tâche relevant de $T_{décomposer}$ avec un contexte intramathématique est t' « Déterminer toutes les valeurs entières possibles des dimensions d'un rectangle d'aire 24 cm^2 ». La tâche t'' « Jérémie a 24 billes et il souhaite les répartir en paquets. Tous les paquets doivent contenir le même nombre de billes rouges et le même nombre de billes noires. Déterminer toutes les possibilités différentes pour le nombre de paquets ». Lorsqu'il y a un contexte extramathématique, il est nécessaire de procéder à une mathématisation de la tâche, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de modéliser l'activité avec des outils mathématiques.

4. Cette variable de contexte et ses valeurs ont été étudiées dans la thèse de Kaspary [2020] et désignée par « nature du contexte » avec les valeurs « intramathématique » et « extramathématique ». Il est possible de s'intéresser à d'autres critères pour le contexte comme la familiarité du contexte pour le sujet.

6.6.2 $V_{dispositif}$

Chaque type de tâches doit « exister » dans au moins un dispositif. Nous définissons, pour les quatre types de tâches $T_{décomposer}$, $T_{quotient}$, T_{reste} et $T_{représenter}$, une variable liée au dispositif dans lequel la tâche peut « vivre ». Nous appelons cette variable $V_{dispositif}$ et nous définissons dans le cadre de notre travail trois valeurs possibles : *papier/crayon*, *Scratch*, *tangible*. Le dispositif « papier/crayon » est constitué par la mise à disposition d'une feuille de papier et d'un crayon. Le dispositif « Scratch » est constitué par le logiciel Scratch, et le dispositif « tangible » se réfère à toute forme de manipulation d'objets réel. Nous verrons que les variables $V_{dispositif}$ et $V_{contexte}$ ont un impact l'une sur l'autre. Notamment, la variable $V_{dispositif}$ détermine fortement les contextes possibles d'une tâche. De plus, un certain dispositif peut donner lieu à des variables qui ne sont pas liées à la nature mathématique du type de tâches considéré, mais à la nature du dispositif et, éventuellement, à d'autres disciplines.

C'est le cas pour les tâches de l'OMM apprêtée du projet EXPIRE. La modélisation de cette OMM, que nous présenterons dans le prochain chapitre, évoquera, à un certain niveau de granularité, les praxéologies de notre OM de référence. Le modèle mettra en lumière, entre autres, les variables issues du dispositif « Scratch » à l'intérieur de l'OMM.

Chapitre 7

Caractérisation de l'OMM apprêtée

Grâce à l'organisation mathématique de référence construite dans le chapitre précédent, nous sommes en mesure d'analyser la séquence didactique sur le sens de la division euclidienne conçue dans le dispositif Scratch par les chercheurs de l'équipe Metah dans le cadre du projet EXPIRE.

Dans ce chapitre, nous construisons un modèle praxéologique sur deux niveaux de granularité afin de décrire l'organisation mathématique mixte apprêtée et d'apporter une réponse à la question de recherche $QR_{modèle}$ « *Comment modéliser les savoirs relatifs à une organisation mathématique mixte dans laquelle des praxéologies propres à l'informatique permettent de mobiliser des praxéologies mathématiques?* ». Notamment, en Figure 7.1, nous montrons que l'OMM apprêtée est donnée par l'OM de référence et des praxéologies algorithmiques que nous identifierons au cours de ce chapitre, issues de la séquence d'enseignement analysée.

$$\text{OMM apprêtée} = \begin{array}{c} \text{OM de référence} \\ + \\ \text{Praxéologies algorithmiques} \end{array}$$

FIGURE 7.1 – Lien entre OMM apprêtée et OM de référence

En effet, faute d'insuffisance de renseignements dans les documents ministériels, nous ne disposons pas d'un modèle praxéologique dominant relatif à l'algorithmique et à la programmation au cycle 3. Nous ne sommes donc pas en mesure de construire un modèle de référence des praxéologies algorithmiques à enseigner.

7.0.1 Caractéristiques générales de l'OMM apprêtée

Les documents que l'équipe EXPIRE a mis à la disposition des enseignants présentant l'OMM apprêtée sur la division euclidienne consistent en :

- une fiche pédagogique (disponible en annexe A);
- des fichiers numériques Scratch ¹;
- des fiches pour les élèves, présentant les consignes (disponibles en annexe A).

1. Les fichiers sont maintenant téléchargeables au lien http://expire.univ-grenoble-alpes.fr/?page_id=425/#division

En ce qui concerne les fichiers numériques Scratch, les auteurs de l'OMM ont créé des arrière-plans spécifiques pour chaque tâche ou pour un ensemble de tâches. Par ailleurs, ils ont défini des blocs d'instruction spécifiques en les disposant sur la zone de programmation pour qu'ils soient facilement accessibles aux élèves à l'ouverture de chaque fichier.

L'interface présente les caractéristiques suivantes (voir Figure 7.2) :

- Pour chaque exercice, dans l'arrière-plan de la *scène*, il est représenté une bande numérique à forme de spirale de 1 à 85 ou de 1 à 150 et une brève phrase qui évoque la consigne. La case cible est indiquée tout comme les éventuelles cases bombe ;
- le *lutin* est un cercle qui au début de l'activité se trouve en position de départ sur un zéro qui n'est pas représenté ;
- dans la *zone de programmation* il y a, outre au bloc « répéter », des blocs d'instruction, définis par les concepteurs du fichier, qui permettent de faire avancer le lutin d'un certain nombre de pas compris, dans certains cas, entre 1 et 9 et, dans d'autres cas, entre 1 et 12.

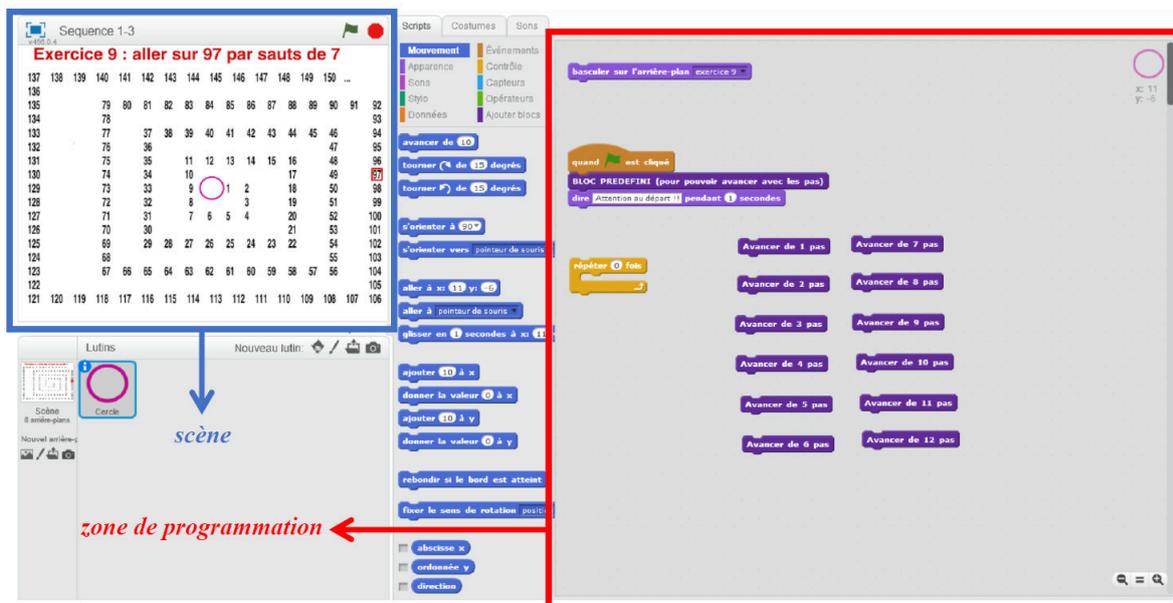


FIGURE 7.2 – Interface de l'environnement préparé sur Scratch

Les consignes données aux élèves sont explicitées dans les fiches de support à l'activité. Elles prennent la forme qui suit.

A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin de se rendre exactement sur le nombre encadré. Vous n'avez le droit d'utiliser qu'un seul type de saut à choisir entre 1 et 9. Vous pouvez l'utiliser autant de fois que vous le souhaitez. Attention : dans certains exercices, il faut éviter des bombes !

Les ingrédients de technique relevant de l'algorithmique et de la programmation nécessaires pour la réalisation des tâches proposées dans l'OMM consistent à :

- associer des blocs d'instructions simples ;
- utiliser la boucle « répéter » ;
- lancer le programme.

Pour permettre aux élèves de s'approprier de ces éléments praxiques, l'équipe du projet EXPIRE a fourni une séquence d'initiation à faire travailler aux élèves avant la réalisation des séquences en mathématiques. De cette façon, lors de la passation de l'OMM apprêtée, la dimension algorithmique devrait ne pas constituer un obstacle pour les élèves.

La construction des tâches de chaque séquence respecte les principes suivants :

1. l'algorithme/programme que l'élève doit écrire définit le comportement d'un objet ou d'un personnage (par exemple, son déplacement) à l'écran;
2. la tâche de l'élève consiste à construire un algorithme qui permet d'obtenir un comportement cible, qui est stipulé par l'énoncé de l'exercice;
3. l'algorithme attendu est une explicitation de la procédure de calcul attendue;
4. l'exécution de l'algorithme permet de visualiser la procédure proposée par l'élève. (Chaachoua *et al.* [2018])

L'activité des élèves dans ce type de dispositif change par rapport à celle de départ, pas seulement à cause de la *nature des objets* (*tangibles* ou *virtuels*) qui sont manipulés dans les deux différents dispositifs, mais surtout pour la *nature de la manipulation* qui est *directe* dans le dispositif de départ et *indirecte* dans le dispositif Scratch. En effet dans le dispositif Scratch l'élève n'a pas l'accès direct aux objets qu'il doit déplacer pour atteindre le « comportement cible » mais il doit accéder indirectement à ces objets à travers des instructions.

Nous observons que, bien que la dimension algorithmique présente dans la séquence soit assez limitée en raison du bas niveau de scolarité des élèves auxquels la séquence s'adresse, ses potentialités didactiques ne sont pas négligeables. En effet, nous avons raison de penser que des séquences basées sur ces principes font travailler chez les élèves les capacités d'abstraction, de conceptualisation et de généralisation, précieuses pour l'imminent passage à l'algèbre prévu au collège. D'autre part, si le programme Scratch résulte une explicitation de la procédure de calcul attendue, cela veut dire qu'il peut être considéré comme une ultérieure représentation de l'expression mathématique attendue. Dans ce cadre nous rappelons les recherches de Lagrange et Rogalski qui mettent en lumière que « *algorithmique et programmation mettent en jeu des registres symboliques spécifiques. Comme ceux-ci s'articulent (plus ou moins aisément pour les élèves) avec les registres mathématiques, les travaux sur la dimension sémiotique dans l'activité mathématique pourraient donc fournir des appuis, avec en particulier la notion de registres de représentation (Duval, 1995), pour un meilleur contrôle didactique des situations proposées en classe.* » (Lagrange et Rogalski [2017])

Pour la conception des séquences Scratch, les chercheurs du projet EXPIRE se sont librement inspirés d'activités existantes et éprouvées issues de la recherche en didactique des mathématiques et des pratiques d'enseignement des mathématiques en France. Des exemples d'activités qui ont inspiré les chercheurs pour la séquence sur la division euclidienne sont montrés dans les Figures 5.1 (p. 62) et 5.2 (p. 63).

L'activité des élèves dans le dispositif Scratch change par rapport à celles-ci, pas seulement à cause de la *nature des objets* (*tangibles* ou *virtuels*) qui sont manipulés dans les deux différents dispositifs, mais surtout pour la *nature de la manipulation* qui est *directe* dans les activités de départ et *indirecte* dans le dispositif Scratch. En effet dans le dispositif Scratch l'élève n'a pas l'accès direct aux objets qu'il doit déplacer pour atteindre le « comportement cible » mais il doit accéder indirectement à ces objets à travers des instructions.

L'*indirection* introduite dans le dispositif Scratch (Figure 7.3) se révèle aussi grâce au passage d'un type de tâches de manipulation directe vers un type de tâches de programmation.

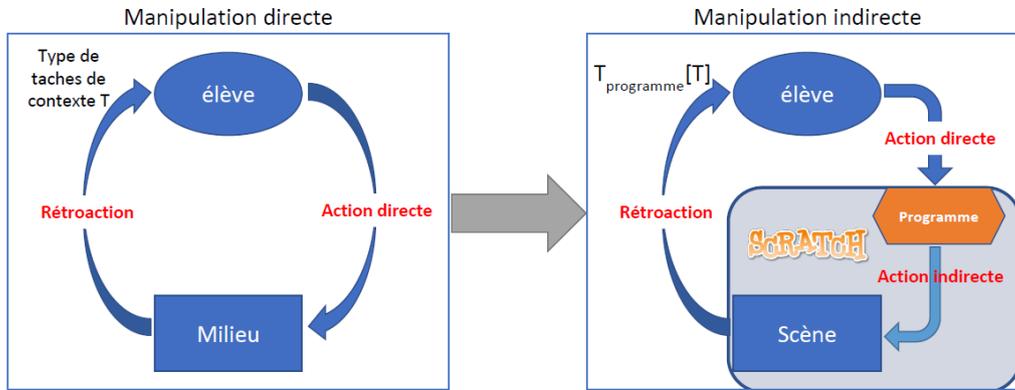


FIGURE 7.3 – Types de manipulation dans T et $T_{prog}[T]$

En particulier, le type de tâches issu des activités montrées dans les manuels *Euro-maths* et *CapMaths* relève du type de tâches T_{DE} , présenté dans le chapitre 6.

En revanche, le type de tâches que les élèves doivent accomplir dans l'OMM apprêtée, vivant dans le dispositif Scratch, est le suivant :

$T_{prog}[T_{DE}]$ « Créer un programme dans Scratch qui réalise T_{DE} »

Plus en général, il est possible de modéliser l'activité liée à n'importe quelle séquence EXPIRE, se déroulant sur le dispositif Scratch, avec le type de tâches

$T_{prog}[T]$ « Créer un programme dans Scratch qui réalise T ».

T étant un type de tâches à instancier parmi :

- $T_{décompositionadditive}$ « Atteindre la valeur V en ajoutant (au moins deux) des valeurs autorisées »;
- $T_{fractions}$ « Mesurer la longueur d'un bloc à l'aide d'une bande unité et de ses fractions »;
- T_{aire} « Mesurer l'aire d'une figure à l'aide du carré unité ».

Variables introduites dans le dispositif Scratch

En instanciant les variables V_a , V_H , V_b , $V_{a,b}$ et V_{reste} que nous avons identifiées au sein de l'organisation mathématique de référence pour le type de tâches T_{DE} , il est possible de reconduire les exercices proposés dans la séquence à des tâches générées par $T_{prog}[T_{DE}]$. Notamment, la variable V_H dans le dispositif Scratch fait référence à la présence (ou l'absence) de cases *bombes* sur lesquelles le lutin n'a pas le droit de se poser lors des sauts. Ces variables ont une fonction à la fois didactique et mathématique, comme expliqué dans le chapitre 6.

En revanche, deux nouvelles variables avec une fonction purement didactique et relevant du dispositif Scratch ont été introduites pour le type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$:

- $V_{masquage}$ concernant le possible masquage de plusieurs cases sur la spirale numérique en arrière-plan;
- V_{traces} concernant les traces que le lutin peut laisser ou pas à chaque saut.

La fonction de $V_{masquage}$ consiste à limiter le recours à des techniques basées sur le hasard et le comptage des cases. L'objectif est de faire émerger chez les élèves des techniques faisant travailler le sens de la division euclidienne.

La fonction de V_{traces} est d'apporter un étayage pour les premières tâches qui successivement pourra être enlevé.

Nous observons qu'il est possible de trouver des sous-types de tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ à partir des sous-types de tâches de T_{DE} . La liste des sous-type de tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ ne sera pas exhaustive puisqu'il n'y aura pas la prise en compte des variables issues du dispositif Scratch.

7.1 Modèle de l'OMM apprêtée

Dans cette section nous utiliserons l'organisation mathématique de référence ainsi que les observations présentées jusqu'ici pour caractériser les tâches de l'OMM apprêtée, à partir de l'analyse des documents en format « papier » et numériques relatifs à la séquence.

7.1.1 Les tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ impliquées dans l'OMM

L'OMM apprêtée se constitue de 18 tâches. Nous avons pu les caractériser comme relevant de 13 divers sous-types de tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ à partir des variables identifiées. Le 7.1 met en relation les tâches constituant la séquence générées par le type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$ avec les relatives instantiations des variables. Dans la troisième colonne de ce tableau nous avons également indiqué le sous-type de tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ considéré *optimum*² pour chacun des 18 tâches.

Type de tâches	tâche(s)	Sous-type	V_a	V_H	V_b	V_{reste}	V_{traces}	$V_{masquage}$
$T_{décomposer}$	t_1	$T_{1,1}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	oui	non
	t_2, t_{3a}	$T_{1,2}$	$a \leq 100$	$H \neq \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	oui	non
	t_{3b}	$T_{1,3}$	$a > 100$	$H \neq \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	oui	non
$T_{quotient}$	t_4, t_5	$T_{2,1}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	oui	non
	t_{6a}, t_{6b}, t_{6c}	$T_{2,2}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	oui	non
	t_{6d}	$T_{2,3}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$10 \leq b \leq 12$	$r \neq 0$	oui	non
	t_7	$T_{2,4}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	oui
	t_{8a}	$T_{2,5}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	non
	t_{8b}	$T_{2,6}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	non
$T_{quotient} + T_{reste}$	t_9	$T_{3,1}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$10 \leq b \leq 12$	$r \neq 0$	non	non
	t_{10}	$T_{3,2}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	non	non
	t_{11a}	$T_{3,3}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$10 \leq b \leq 12$	$r \neq 0$	non	non
	t_{11b}, t_{11c}	$T_{3,4}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	non

TABLEAU 7.1 – Tâches de la séquence générées par $T_{prog}[T_{DE}]$

2. Définition issue de la thèse de Jolivet [2018] : « Soit t une tâche liée à un générateur de types de tâches GT_1 . Soit $\{T_j\}$ l'ensemble des types de tâches générés par GT_1 . On appelle *type de tâches optimum* de t , et on note $T_{opt}(t)$, tout élément de $\{T_j\}$ tel que :

- $t \in T_{opt}(t)$;
- pour tout $T \in \{T_j\}$ tel que $t \in T$ alors $T_{opt}(t) \subset SST$ par rapport aux variables instanciées. »

7.1.2 Les techniques de $T_{prog}[T_{DE}]$

Observons que le type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$ présente dans son complément un renvoi explicite au type de tâches T_{DE} . Cette propriété des types de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$ et T_{DE} peut être aussi retrouvée au niveau de leurs techniques.

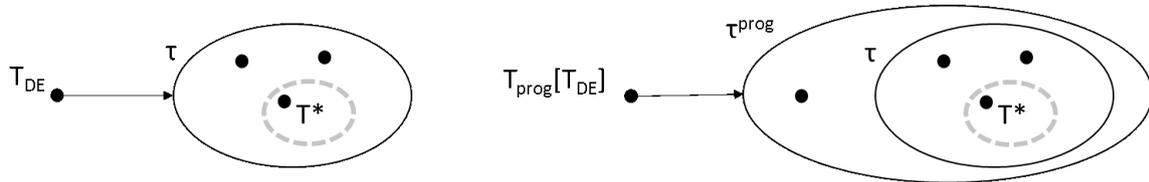


FIGURE 7.4 – Rapport entre les techniques de $T_{prog}[T_{DE}]$ et celles de T_{DE}

Dans la Figure 7.4, en effet, nous pouvons voir que si T^* est un ingrédient d'une technique τ de T_{DE} , il peut intervenir également dans une technique τ^{prog} de $T_{prog}[T_{DE}]$ ³. Par contre, lors du recours à l'ingrédient T^* , dans le cas de $T_{prog}[T_{DE}]$ il est nécessaire de passer par d'autres ingrédients appartenant à $\tau^{prog} \setminus \tau$.

Au niveau praxéologique relevant de la programmation nous pouvons retrouver les ingrédients de techniques suivants :

- $T_{choix,b}$ « Choisir le type de saut *avancer de b* »
- $T_{répéter}$ « Utiliser le bloc répéter dans le programme Scratch »
- $T_{choix,q}$ « Choisir le nombre de sauts q »
- $T_{dupliquer}$ « Dupliquer un bloc d'instruction »
- $T_{associer}$ « Associer deux blocs d'instruction entre eux »
- $T_{tap,rép}$ « Taper le nombre q dans le bloc *répéter* »
- $T_{choix,r}$ « Choisir le type de saut *avancer de r* »
- T_{lancer} « Lancer le programme crée sur Scratch »
- $T_{valider}$ « Valider le programme crée sur Scratch »

La combinaison de ces ingrédients donne lieu à des techniques différentes et à des programmes Scratch différents. Nous considérons les ingrédients $T_{rép}$, $T_{associer}$, $T_{tap,rép}$ et T_{lancer} comme des types de tâches élémentaires. Nous ne détaillerons pas, donc, leurs techniques. Les types de tâches $T_{choix,b}$, $T_{choix,q}$ et $T_{choix,r}$ peuvent renvoyer dans leurs techniques respectivement aux ingrédients $T_{dét,b}$, $T_{dét,q}$ ou $T_{quotient}$ et T_{reste} .

Les types de tâches T_{lancer} et $T_{valider}$ ont un statut différent par rapport aux autres car ils dépassent la consigne relative à la création d'un programme Scratch .

Dans le dispositif Scratch l'accomplissement de T_{lancer} se fait avec un clic sur le drapeau vert qui est au dessus de la scène, ou avec un double clic sur le programme. On considère que, pour les sujets de l'institution que nous considérons, ce type de tâches est élémentaire.

L'accomplissement du type de tâches $T_{valider}$ consiste à vérifier, après l'exécution du programme prise en charge par le dispositif, que toutes les contraintes déterminées par le type de tâches de contexte que le programme doit réaliser soient respectées. Ce type de tâches relève du *topos* de l'élève et est complètement à sa charge.

3. Rappelons que la technique d'un type de tâches peut être décrite par un ensemble de types de tâches, chacun avec ses propres techniques.

7.1.3 Graphe des types de tâches autour de $T_{prog}[T_{DE}]$

Nous montrons dans la Figure 7.5 le graphe des types de tâches ingrédients de techniques de $T_{prog}[T_{DE}]$. Les ingrédients $T_{dét,b}$, $T_{dét,q}$, $T_{quotient}$ et T_{reste} peuvent être ultérieurement décrits grâce aux graphes montrés dans le chapitre 6.

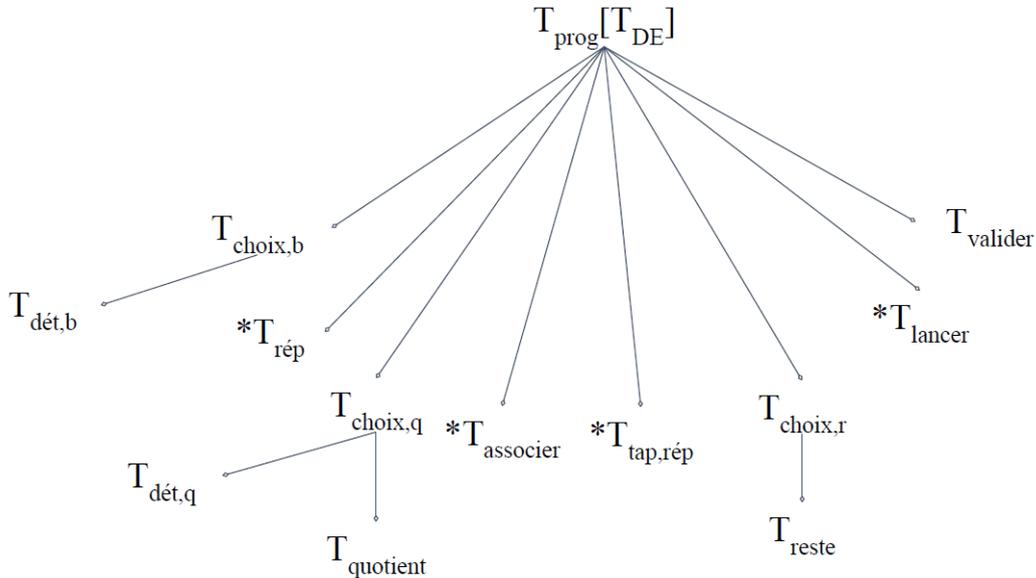


FIGURE 7.5 – Graphe des types de tâches autour de $T_{prog}[T_{DE}]$

A titre de résumé (non exhaustif) des possibles ingrédients qui interviennent lors de la résolution d'un tâche relevant d'un des sous-types de tâches de T_{DE} , nous montrons le graphe en Figure 7.6 (p. 94). Dans le graphe, outre aux relations « a pour sous-type de tâches » (flèches en bleu) et « est ingrédient d'une technique de » (flèches en noir), nous avons indiqué les conditions d'existence d'un tel ingrédient de technique pour un tel sous-type de tâches, représentées par des flèches en orange. Par exemple, nous pouvons observer que l'ingrédient $T_{choix,r}$ existe uniquement pour le sous-type de tâches T_3 : il n'a pas de sens de considérer cet ingrédient de technique pour T_1 et T_2 .

7.2 Structure d'un programme et registres d'ostensifs associés à l'OMM

Nous définissons, avec le mot *structure*, une caractéristique de chaque programme, qui correspond à une construction abstraite composée d'instructions générales (non-instanciées).

Dans l'environnement construit dans Scratch pour T_{DE} , les blocs d'instruction sont du type « avancer de x », avec $x \in \{1, 2, \dots, 12\}$. Le bloc « avancer de s » peut être simplement noté avec « s ». L'enchaînement ordonné des blocs « avancer de s_1 », « avancer de s_2 », ... « avancer de s_k » peut être noté avec « (s_1, s_2, \dots, s_k) ». Nous notons le bloc « répéter j fois », dans lequel il se trouve le bloc « avancer de s », avec la notation $R[j; s]$. De la même manière, nous notons le bloc « répéter j fois », dans lequel il se trouve l'enchaînement ordonné des blocs « avancer de s_1 », « avancer de s_2 », ... « avancer de s_k », avec la notation $R[j; (s_1, s_2, \dots, s_k)]$.

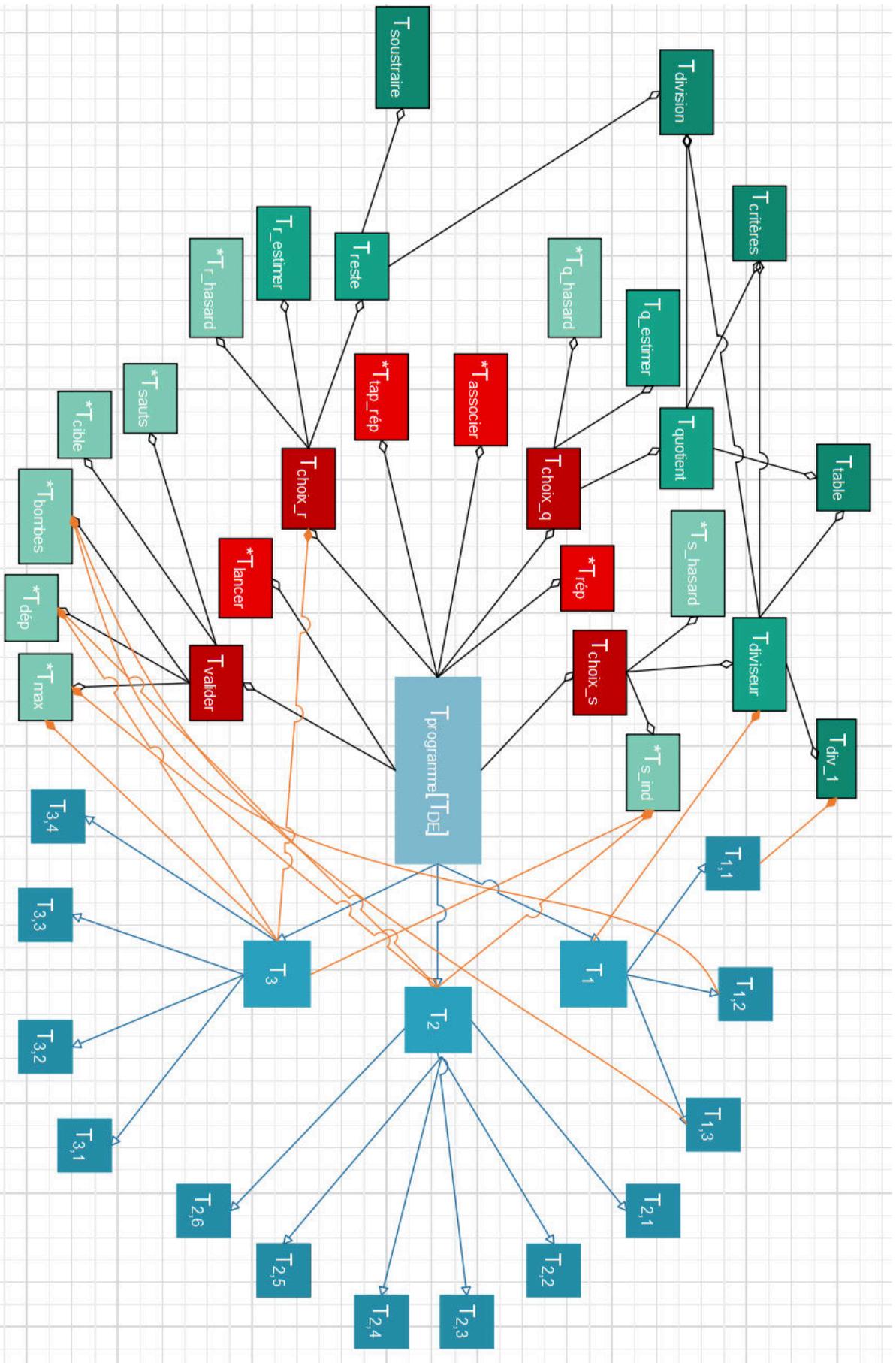


FIGURE 7.6 – Graphe (à titre de résumé) des ingrédients autour des sous-types de tâches de $T_{prog}[DE]$



FIGURE 7.7 – Exemple

De cette façon nous arrivons à décrire, par exemple, le programme qui apparaît dans la Figure 7.7 avec le code $(1, R[11; (3, 2, 3)], 5, 9, R[3; 9], 5)$.

A partir de ce moment, nous noterons avec C le nombre cible, avec s le type de saut utilisé pour l'atteindre, avec q le nombre de sauts et avec r l'éventuel type de saut « joker » utilisé (avec $0 < r < s$). Pour réaliser le type de tâches T_{DE} , il faut alors que ces paramètres fassent vérifier l'égalité $C = q \cdot s + r$ avec $0 \leq r < s$.

Dans l'ensemble Ω de tous les programmes qui peuvent être créés afin de réaliser T_{DE} , en supposant que le reste r de la division euclidienne entre C et s ne soit pas nul, nous pouvons définir le sous-ensemble :

$$\begin{aligned} \Sigma = \{ & (x_1, x_2, \dots, x_{q+1}) \mid \exists! i \in \{1, 2, \dots, q+1\} \text{ t.q. } x_i = r \text{ et} \\ & \forall j \in \{1, 2, \dots, q+1\}, j \neq i, x_j = s \text{ avec} \\ & s \in \{1, 2, \dots, 12\}, q \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < r < s \} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Parallèlement, supposant que le reste de la division euclidienne entre C et s est nul, nous pouvons définir le sous-ensemble de Ω suivant :

$$\Sigma_0 = \{ \underbrace{(s, s, \dots, s)}_q \mid s \in \{1, 2, \dots, 12\} \text{ et } q \in \mathbb{N} \} \quad (7.2)$$

Nous disons que les programmes de ces deux sous-ensembles, Σ et Σ_0 , ont une *structure additive*.

De la même manière, dans le cas où la division euclidienne entre C et s donne un reste non nul, nous pouvons définir le sous-ensemble :

$$\Pi = \{ (x, y) \mid x, y \in \{r, R[q; s]\} \text{ avec } s \in \{1, 2, \dots, 12\}, q \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < r < s \} \quad (7.3)$$

Et pour le cas où le reste est nul, nous aurons :

$$\Pi_0 = \{ R[q; s] \mid \text{avec } s \in \{1, 2, \dots, 12\} \text{ et } q \in \mathbb{N} \} \quad (7.4)$$

Nous définissons les programmes des ensembles Π et Π_0 comme ayant une *structure multiplicative*.

Tout programme appartenant à

$$M = \Omega \setminus (\Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Pi \cup \Pi_0) \quad (7.5)$$

aura alors une *structure mixte*.

Exemple Selon les définitions données, les programmes montrés en Figure 7.8 ont tous la même structure (additive); les programmes montrés en Figure 7.9 ont tous la même structure (multiplicative); les programmes montrés en Figure 7.10 ont tous une structure mixte.



FIGURE 7.8 – Programmes qui ont une structure additive



FIGURE 7.9 – Programmes qui ont une structure multiplicative



FIGURE 7.10 – Programmes qui ont une structure mixte

Dans la séquence de la division euclidienne il y a une formule cible ($C = q \cdot s + r$, $0 \leq r < s$) qui correspond à une structure cible (la structure multiplicative).

C'est dans les termes de cette correspondance entre écriture mathématique visée et structure cible que nous reprenons le concept de *programme de type congruent* défini par Briant [2013] dans sa thèse.

Par ailleurs, cette correspondance fait que chaque solution d'une des tâches issues de $T_{prog}[T_{DE}]$ puisse être représentée, outre que par le programme-même qui accomplit la tâche, par l'écriture mathématique qui lui correspond. En effet, le positionnement du type de tâches T_{DE} à l'intérieur du dispositif Scratch, si comme cela est le cas pour n'importe quel type de dispositif numérique [Chaachoua et al., 2012], donne lieu à un registre d'ostensifs spécifique, et les ostensifs de tel registre peuvent être convertis, grâce à un ensemble de règles implicites, vers un registre plus commun, qui peut être le registre de l'écriture mathématique.

Nous pouvons, alors, définir les registres suivants, tous censés apparaître lors de la réalisation de l'OMM apprêtée en jeu et, en particulier, lors de la représentation des solutions des tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$.

- $RO_{Scratch}$, le registre qui contient tous les ostensifs issus de la programmation avec Scratch (programme, effets du programme dans la scène lors de son exécution);

- RO_{em} , le registre qui contient tous les ostensifs issus de l'écriture mathématique associée au programme Scratch et à son exécution);
- RO_{graph} , le registre qui contient les ostensifs visant à représenter les solutions de tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ sous une forme schématique, comme un dessin ou un tableau;
- $RO_{oral(m)}$, le registre de l'oralité associé à un vocabulaire relevant des mathématiques;
- $RO_{oral(p)}$, le registre de l'oralité associé à un vocabulaire lié au dispositif Scratch.

Nous montrons des exemples d'ostensifs de la solution $(R[5;6], 3)$ de la tâche t_7 pour chacun de ces cinq registres dans la Figure 7.11.

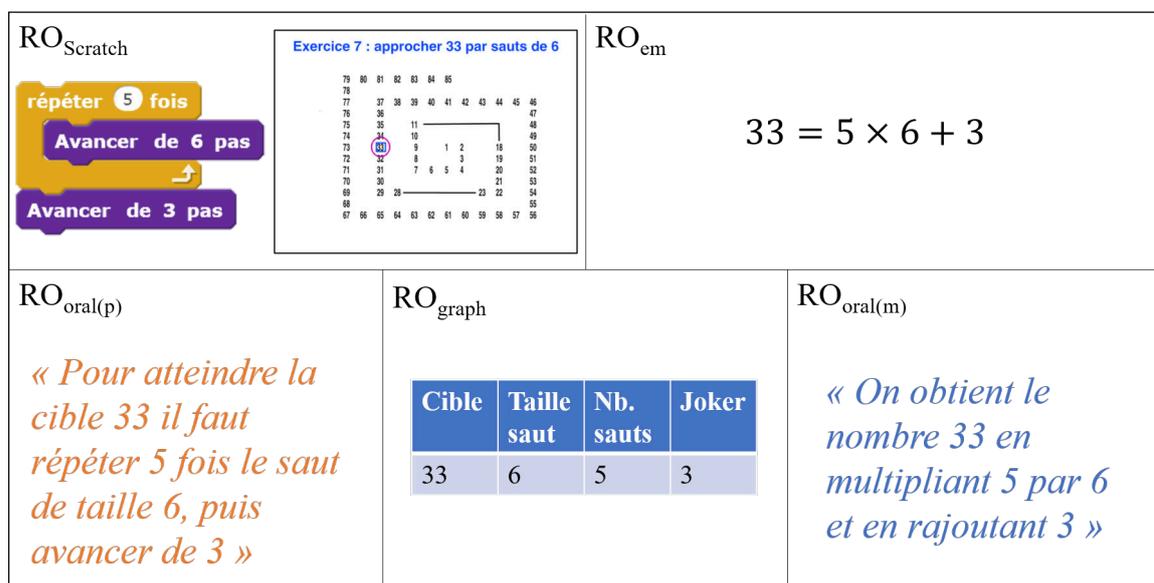


FIGURE 7.11 – Ostensifs représentant une même solution de la tâche t_7 dans les divers registres disponibles

7.3 Conclusions

Notre premier axe de recherche nous a mené à un questionnement concernant une manière pertinente pour modéliser les savoirs issus d'une organisation mathématique mixte. Après avoir considéré l'état des travaux existants à ce sujet (section 3.1), nous avons choisi d'adopter le point de vue praxéologique, issu de la théorie anthropologique du didactique [Chevallard, 1999]; notamment, nous nous sommes placé dans le cadre de T4TEL [Chaachoua, 2018], qui permet de formaliser et de structurer le modèle praxéologique en prenant en compte les variables ainsi que de définir des relations parmi les types de tâches en jeu.

Dans la perspective de concevoir et mettre à l'épreuve un tel modèle des savoirs pour l'OMM apprêtée du projet EXPIRE portant sur le sens de la division euclidienne, nous avons tout d'abord construit une OM de référence [Bosch et Gascón, 2005] basée sur un ensemble d'organisations mathématiques ponctuelles relevant du type de tâches T_{DE} « Déterminer un ou deux termes inconnus de l'expression $a = b \times q + r$, étant le terme a connu et avec $0 \leq r < b$ ». Pour représenter le bloc *praxis* de cette organisation, nous nous sommes servi surtout de la notion d'*ingrédient* d'une technique et nous avons décrit les

ingrédients de techniques pour les types de tâches étudiés, jusqu'à un certain niveau de granularité.

Nous nous sommes servi de cette OM de référence pour comprendre si et comment l'OMM apprêtée pouvait y être reconduite. Avec ce but, à partir des réflexions issues des travaux de Couderette [2016] et de Strock et Artaud [2019], nous avons défini le type de tâches $T_{prog}[T]$ « Créer un programme dans Scratch qui réalise T », étant T un type de tâches. En posant T comme T_{DE} et en définissant des variables pour le type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$ issues du dispositif conçu pour l'OMM dans Scratch, nous avons pu, d'une part, modéliser les 18 tâches de l'OMM apprêtée et, d'autre part, retrouver l'organisation mathématique de référence construite pour T_{DE} au niveau des techniques de $T_{prog}[T_{DE}]$. En particulier, dans notre modèle, les ingrédients des techniques de T_{DE} se présentent à un deuxième niveau de granularité, le premier étant constitué par des ingrédients *algorithmiques*. L'ensemble de ces constructions nous a amené à représenter le bloc *praxis* de l'OMM apprêtée à l'aide d'un graphe mettant en lumière diverses relations entre les types de tâches pouvant émerger lors de la réalisation de l'OMM.

Finalement, le fait que chaque solution des tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ peut être mise en correspondance avec une certaine écriture mathématique ayant une même *structure* nous a conduit à considérer cinq divers registres d'ostensifs liés à l'OMM apprêtée.

Le modèle ainsi conçu sera testé dans les prochains chapitres comme support d'analyse de l'apprentissage des élèves relatif à l'OMM appris (partie III) et de la transposition didactique interne des enseignants (partie IV).

Troisième partie

Viabilité de l'OMM dans le curriculum

Chapitre 8

Etude de la viabilité de l'OMM apprêtée du point de vue de l'apprentissage de la division euclidienne

Dans ce chapitre, nous présentons les analyses de nature exploratoire menées pour étudier la viabilité de l'OMM apprêtée du point de vue de l'apprentissage de la division euclidienne. Grâce à ces analyses, nous serons en mesure, à la fin du chapitre, d'apporter des éléments de réponse à la question $QR_{\text{apprentissage}}$ « *Les organisations mathématiques mixtes présentant une dimension algorithmique proposées dans le projet EXPIRE permettent-elles aux élèves de changer leurs rapports aux praxéologies mathématiques visées?* ».

8.1 Présentation du dispositif expérimental

Lors du premier semestre de l'année scolaire 2017/2018, l'OMM apprêtée, caractérisée dans les chapitres 6 et 7, a été expérimentée dans des classes de CM1/CM2 du département de Grenoble.

Le protocole expérimentale a d'ailleurs concerné d'autres séquences didactiques avec les mêmes caractéristiques de l'OMM étudiée dans cette thèse, mais portant sur la résolution des problèmes, sur la décomposition additive des nombres entiers et (uniquement pour les CM2) sur les fractions.

Pour chaque objet d'enseignement, l'équipe du projet EXPIRE a développé également une séquence didactique « contrôle », concernant mêmes savoirs mathématiques de référence et ayant certaines caractéristiques :

- les tâches des séquences contrôle ne vivent pas dans le dispositif Scratch ;
- les dispositifs et les contextes relatifs aux tâches des séquences contrôle sont « familières » aux enseignants, dans le sens où il s'agit de dispositifs et de contextes qui peuvent être facilement trouvés dans les manuels scolaires et qui ont une certaine stabilité du point de vue didactique pour les enseignants de l'école primaire française.

La séquence contrôle associée à l'OMM apprêtée du projet EXPIRE sur la division euclidienne peut être trouvée dans l'annexe A. Les tâches de cette séquence reposent sur deux dispositifs différents et sur deux contextes différents : le premier dispositif, de manipulation directe, consiste en un ruban et des ciseaux ; le deuxième se constitue de papier/crayon. Le premier contexte concerne une activité classique de découpage d'un ru-

ban en morceaux égaux de taille donnée et les élèves sont censés trouver le nombre de morceaux et le reste éventuel (situation de *division-quotition*); le deuxième contexte est proche du contexte du « jeu de la cible » de l'OMM apprêtée : un personnage se déplace sur une bande numérique avec des sauts de taille constante pour atteindre un nombre cible fixé.

Ainsi, en vue de l'expérimentation du premier semestre de l'année 2017/2018, les 46 écoles participants au projet EXPIRE ont été réparties de façon aléatoire en deux groupes : un groupe *expérimental* constitué de 28 écoles qui auraient déployé la version Scratch des séquences et un groupe *contrôle* de 18 écoles dans lesquelles les enseignants auraient soumis les séquences contrôle.

Avant et après le déroulement de chacune des séquences sur la division euclidienne, sur la décomposition additive et sur les fractions, les enseignants ont fait passer dans leurs classes un pré-test et un post-test portant sur la notion mathématique enjeu d'apprentissage dans la séquence.

Tous les tests ont été conçus par les chercheurs en didactique des mathématiques du projet EXPIRE et se sont déroulés dans le dispositif. Nous allons les caractériser dans la section B.

Par ailleurs, les enseignants ont fait passer :

- un test en début de semestre visant à situer le niveau général des élèves en mathématiques. Les tâches de ce test étaient inspirées des tests d'évaluation diagnostique pour l'entrée en CE2 et en CM2 du Ministère de l'Education National des années 2003, 2006 et 2013;
- un questionnaire en début et en fin de semestre mesurant des aspects de motivation et de confiance des élèves;
- un test en fin de semestre mesurant les compétences des élèves en résolution de problèmes.

Tous les tests ont été anonymisés et un code a été attribué à chaque élève afin de pouvoir reconnaître ses productions.

Nous représentons le déroulement chronologique du protocole expérimental du projet EXPIRE dans la Figure 8.1.

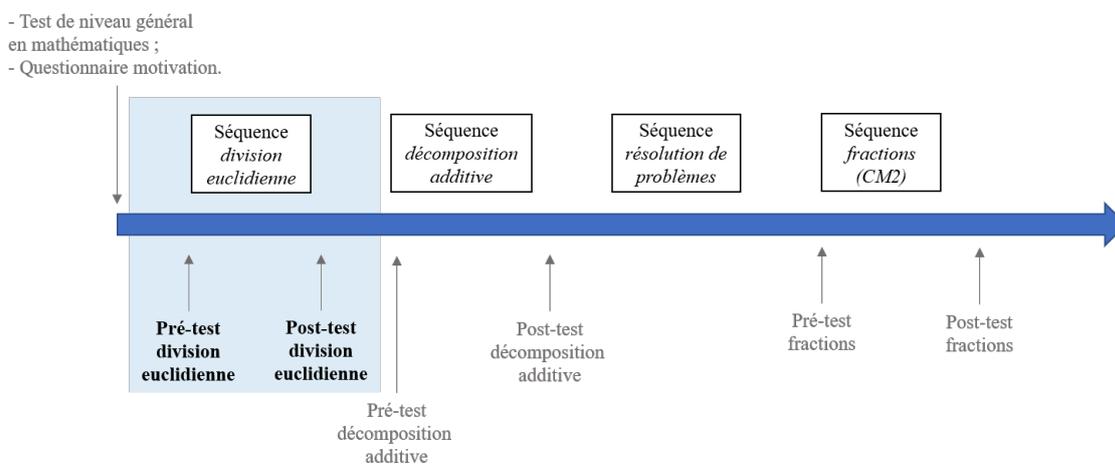


FIGURE 8.1 – Déroulement du protocole expérimentale du projet EXPIRE (premier semestre de l'année 2017/2018)

La partie du protocole dans laquelle nous nous inscrivons est celle relative à la séquence sur la division euclidienne. Nous ne considérons donc, dans cette thèse, que les

données issues du pré-test et du post-test concernant cette séquence.

8.1.1 Population impliquée dans l'étude

Dans cette section, nous présentons des informations concernant les caractéristiques de la population impliquée dans notre étude.

Nous avons déjà évoqué que 46 est le nombre d'écoles totales qui ont participé au projet. Un ou plusieurs enseignants de CM1/CM2 pour chaque école se sont portés volontaires. Le nombre total d'enseignants (et de classes) impliqué(e)s est de 109. Cinq des 46 écoles totales font partie du réseau d'enseignement prioritaire (REP), et sept font partie du réseau d'enseignement prioritaire renforcé (REP+). Les 12 écoles REP/REP+ ont été réparties équitablement entre le groupe expérimentale et le groupe contrôle afin de pouvoir prendre en compte cette variable dans les modèles statistiques. Deux enseignants ont abandonné le projet en cours de route : le premier juste après la formation, en se disant intéressé mais pas assez confiant, et l'autre en février à cause d'un congé maladie. Par ailleurs, nous signalons que chez d'autres enseignants le déploiement des dernières séquences et des derniers pré-tests/post-tests n'a pas été réalisé.

Le nombre total d'élèves impliqués dans le projet EXPIRE est 2598. Nous n'avons pas obtenu l'autorisation parentale pour le traitement des données pour 68 élèves (2,6%), qui ont été enlevés de notre base de données. Nous avons d'ailleurs enlevé de notre base de données celles relatives aux 425 élèves (16,35%) n'ayant pas réalisé au moins un entre le pré-test et le post-test sur la division euclidienne ou qui n'ont pas pu être identifiés (manque du prénom sur les copies). L'effectif dont nous disposons pour nos analyses se constitue donc de 2105 élèves, dont 1275 dans le groupe expérimentale (60,6%) et 830 dans le groupe contrôle (39,4%). Nous décrivons les caractéristiques de notre effectif concernant REP, niveau scolaire et sexe, repartie entre le groupe expérimental et le groupe contrôle dans les Tableaux 8.1, 8.2 et 8.3.

REP	Gp. expérimental	Gp. contrôle	Total
non	938	557	1495
REP	173	80	253
REP+	164	193	357
Total	1275	830	2105

TABLEAU 8.1 – Répartition des élèves en REP/REP+ entre les groupes

Niveau	Gp. expérimental	Gp. contrôle	Total
CM1	584	423	1007
CM2	689	407	1096
Total	1273	830	2103

TABLEAU 8.2 – Répartition des élèves entre les groupes selon le niveau scolaire

Sexe	Gp. expérimental	Gp. contrôle	Total
garçon	614	406	1020
filles	661	424	1085
Total	1273	830	2105

TABLEAU 8.3 – Répartition des élèves entre les groupes selon le sexe

Nous allons tenir compte de ces caractéristiques dans le modèle statistique retenu pour analyser les données issues des tests d'apprentissage.

Avant de décrire la nature des données et des variables de notre modèle statistique, nous proposons de faire un point sur l'appropriation de l'OMM de la part des enseignants.

8.1.2 Appropriation de l'OMM apprêtée par les enseignants

Au cours de l'année scolaire 2017/2018, les enseignants participants ont reçu une formation portant sur les séquences qu'ils devaient installer dans leur classe. En particulier, tous les enseignants ont reçu une formation de 12 heures, s'inscrivant dans leurs plans de formation continue. Pour les enseignants du groupe expérimental des séquences les heures de formations étaient distribuées de la manière suivante :

- Septembre 2017 : 3 heures de formation à Scratch suivies par 6 heures de formation sur les séquences (dont 3 heures sur la dimension didactique et 3 heures sur la dimension informatique).
- Février 2018 : 3 heures d'échanges sur les pratiques enseignantes (sous forme d'ateliers) et présentation de la séquence Scratch sur l'aire.

En ce qui concerne les enseignants du groupe contrôle, les 12 heures de formation étaient réparties comme suit :

- Septembre 2017 : 3 heures de formation sur les séquences de mathématiques du premier semestre (dimension didactique).
- Février 2018 : 3 heures de formation à Scratch suivies par 3 heures de formation sur les séquences de mathématiques du deuxième semestre.
- Juillet 2018 : 3 heures d'échanges sur les pratiques (sous forme d'ateliers).

Lors des formations sur les séquences Scratch des avis et des propositions d'amélioration des enseignants ont été recueillis et pris en compte afin de finaliser les ressources pédagogiques relatives à ces séquences.

Les chercheurs du projet ont mis à la disposition des enseignants un accompagnement et un support constant, hors classe, du point de vue technique et didactique. Cependant, les enseignants ont été plutôt autonomes en ce qui concerne le déroulement des séquences. Seulement dans une quinzaine de séance au total, les enseignants ont demandé un support technique.

Les enseignants du groupe expérimental ont répondu à un questionnaire qui nous a donné des indications sur leur formation universitaire initiale, sur leurs rapports aux mathématiques, à l'informatique et à l'usage de l'informatique pour l'enseignement. Après avoir reçu la formation EXPIRE ils ont répondu à un autre questionnaire, grâce auquel nous avons recueilli leurs impressions concernant la maîtrise qu'ils avaient du logiciel Scratch et des séquences Scratch issues du projet. Finalement, suite à la passation des séquences dans leurs classes, nous avons soumis un dernier questionnaire aux enseignants relatif à leur perception sur les fonctionnalités de l'algorithmique et de la programmation comme vecteur d'apprentissage des mathématiques.

En particulier, nous avons observé que, en début d'année :

- le 80% des enseignants déclare ne savoir pas programmer ;
- le 71% des enseignants déclare ne pas faire un usage habituel de l'informatique pour enseigner les mathématiques.

Après les formations, la plupart des enseignants déclare se sentir suffisamment à l'aise avec les séquences Scratch issues du projet. Notamment, le 72% des enseignants déclarent d'avoir l'impression de maîtriser la séquence Scratch sur la division euclidienne.

En ce qui concerne le dernier questionnaire, nous soulignons que pour l'item intitulé « Les séances de maths avec algorithmique/programmation permettent de travailler le sens des notions mathématiques » seulement le 7% a déclaré de ne pas être d'accord.

Nous retenons donc, comme hypothèse de travail, que les enseignants du groupe expérimental se sont globalement appropriés de l'OMM apprêtée grâce aux formations réalisées. Nous pouvons donc émettre l'hypothèse que, de manière globale, l'OMM enseignée est conforme à l'OMM apprêtée.

Nous pouvons, maintenant, focaliser notre attention sur l'OMM apprise et mesurer sa conformité avec l'OMM apprêtée. Comme nous l'avons déjà indiqué précédemment, nous avons choisi une méthode de recueil de données basée sur un dispositif de pré-test/post-test, que nous allons caractériser ci-dessous.

8.1.3 Caractérisation des tests d'apprentissage

Les tests d'apprentissage relatifs à la division euclidienne se constituent chacun de 5 tâches (il est possible de consulter les tests dans l'annexe B). Les tâches relèvent toutes de T_{DE} « Déterminer un ou deux termes inconnus de l'expression $a = b \times q + r$, étant le terme a connu et avec $0 \leq r < b$ », avec différentes valeurs de variables.

Pour caractériser les tâches en relation au type de tâches T_{DE} , nous pouvons faire référence aux variables déjà identifiées lors de notre OM de référence (chapitre 6). En effet, en analysant les 5 tâches du pré-test et les 5 tâches du post-test, nous retrouvons une variabilité au niveau des valeurs prises par les variables V_{reste} , V_a , V_b , $V_{a,b}$ et $V_{situation}$. Nous rappelons que ces variables interviennent au niveau de deux ingrédients de la technique de T_{DE} : $T_{quotient}$ et T_{reste} . En remontant au niveau de T_{DE} nous pouvons définir également la variable $V_{réponse}$, relevant de la réponse attendue. Les valeurs qui peuvent être prises par cette variable sont « quotient », « reste », « quotient et reste » ou « autre ». Par exemple, considérons l'énoncé de la deuxième tâche du pré-test :

$t_2^{pré}$ « Une voiture peut transporter au maximum 6 caisses à la fois. Il faut transporter 33 caisses. Calcule combien de fois la voiture devra être chargée.
»

Cette tâche repose sur la division euclidienne entre 33 et 6. La réponse attendue à la question posée dans l'énoncé n'est constituée ni du quotient ni du reste de cette division, mais relève d'une élaboration de ces informations. Donc, pour cette tâche la valeur instanciée de $V_{réponse}$ sera « autre ».

En plus, nous pouvons trouver la variable $V_{étapes}$ relative au nombre d'étapes de la tâche il s'agit d'une variable censée exister à un niveau plus haut par rapport à T_{DE} : il est possible la définir pour n'importe quel type de tâches relevant du champ additifs et multiplicatifs [Vergnaud, 1990]. Dans notre modélisation, cette variable peut prendre la valeur « une » ou « plusieurs », à selon de l'absence ou de la présence de questions intermédiaires dans l'énoncé.

Dans le Tableau 8.4 nous présentons les caractéristiques des 5 tâches du pré-test et respectivement, dans le Tableau 8.5 nous présentons celles des 5 tâches du post-test. Dans la deuxième colonne de ces tableaux nous définissons également, pour chaque tâche le sous-type de tâches optimum de T_{DE} relativement à cette tâche.

tâche	Sous-type	V_a	V_b	V_{reste}	$V_{situation}$	$V_{réponse}$	$V_{étapes}$
$t_1^{pré}$	T _{DE,1}	$a \leq 100$	$b < 10$	$r = 0$	partage	quotient	une
$t_2^{pré}$	T _{DE,2}	$a \leq 100$	$b < 10$	$r \neq 0$	quotition	autre	une
$t_3^{pré}$	T _{DE,3}	$a > 100$	$b > 12$	$r \neq 0$	partage	reste	une
$t_4^{pré}$	T _{DE,4}	$a > 100$	$b > 12$	$r = 0$	quotition	quotient	une
$t_5^{pré}$	T _{DE,5}	$a \leq 100$	$b < 10$	$r = 0$	quotition	autre	plusieurs

TABLEAU 8.4 – Tâches du pré-test générées par T_{DE}

tâche	Sous-type	V_a	V_b	V_{reste}	$V_{situation}$	$V_{réponse}$	$V_{étapes}$
t_1^{post}	T _{DE,6}	$a \leq 100$	$b < 10$	$r = 0$	quotition	quotient	une
t_2^{post}	T _{DE,2}	$a \leq 100$	$b < 10$	$r \neq 0$	quotition	autre	une
t_3^{post}	T _{DE,7}	$a > 100$	$b > 12$	$r \neq 0$	quotition	reste	une
t_4^{post}	T _{DE,4}	$a > 100$	$b > 12$	$r = 0$	quotition	quotient	une
t_5^{post}	T _{DE,9}	$a > 100$	$b < 10$	$r = 0$	quotition	autre	plusieurs

TABLEAU 8.5 – Tâches du post-test générées par T_{DE}

Nous pouvons observer que la variable $V_{situation}$ pour les tâches du post-test prend toujours la valeur « quotition », alors que dans le pré-test pour les tâches $t_1^{pré}$ et $t_3^{pré}$ elle prend la valeur « partage ». D'ailleurs les seuls types de tâches que nous retrouvons soit dans le pré-test soit dans le post-test sont T_{DE,2} et T_{de,4}. Le choix d'insérer des tâches relevant toutes de la division-quotition s'appuie sur la volonté d'évaluer, dans le post-test, les compétences développées autour de la division euclidienne grâce à l'OMM apprêtée, travaillant la division quotition. En d'autres mots :

- le pré-test a été conçu dans l'optique d'évaluer les connaissances initiales des élèves par rapport à la division euclidienne dans sa globalité ;
- le post-test vise plus spécifiquement à l'évaluation du rapport personnel de l'élève vis-à-vis des praxéologies mathématiques concernées par l'OMM apprêtée.

A partir de ces observations, nous avons pu déterminer les observables relatives aux productions des élèves et nous avons ensuite choisi une méthode de recueil et analyse des données que nous présentons dans la suite.

8.1.4 Méthode de recueil et analyse des données

Nous rappelons que notre travail, concernant la question de recherche $Q_{apprentissage}$, est de nature exploratoire. Afin de nous orienter pour le choix d'observables appropriés, nous nous sommes appuyé sur la nature des données brutes à notre disposition et sur les considérations émergées lors de la revue de littérature présentée en section 3.2.

En ce qui concerne les données brutes dont nous disposons, sont les copies de pré-test et post-test réalisées par les élèves sur les feuilles préparées au sein du projet EXPIRE à cet effet (annexe B). Sur ces feuilles, pour chaque tâche les élèves ont à leur disposition un « espace de travail » et un « espace de réponse ». Lors de la passation des tests dans leurs classes, les enseignants ont précisé les consignes relatives à l'usage correct de ces deux espaces. Ils ont précisé également que les élèves n'avaient pas le droit d'utiliser d'autres feuilles en dehors des feuilles des tests.

Nous montrons dans la Figure 8.2 l'exemple d'une production d'élève pour la tâche t_2^{post} .

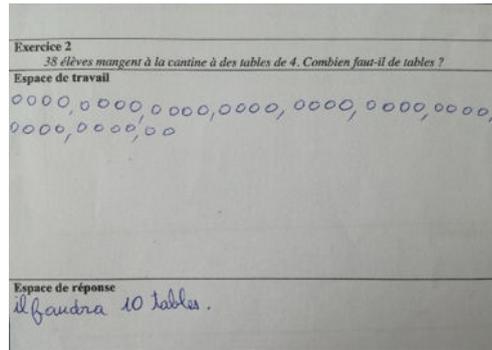


FIGURE 8.2 – Exemple de données brutes issues d'une production d'un élève sur la tâche t_2^{post}

En revenant au choix des observables, dans notre revue de littérature nous avons observé une diversité d'approches, de questions et surtout de résultats. Nous avons mis en lumière que divers travaux, en phase d'évaluation de l'approche considérée, ont relevé dans les productions des élèves les données uniquement en termes de « réussite/échec ». Nous remettons en cause ce choix et nous nous proposons de considérer, dans nos analyses, pas seulement ce type de données, mais d'essayer de comprendre s'il se produisent des modifications au niveau, par exemple, de l'erreur fait par l'élève avant et après la passation de l'OMM.

En particulier, nous avons fait le choix de classer les réponses des élèves dans des catégories de réponse possibles à la présence d'une tâche de T_{DE} (identifiées *a priori* sur la base des observations présentées dans les chapitres 2 et 6) :

- catégorie de réponse *A* : réponse juste ;
- catégorie de réponse *B* : erreur de calcul ;
- catégorie de réponse *C* : réponse obtenue grâce à la division du dividende par un nombre différent du diviseur ;
- catégorie de réponse *D* : erreur due à une mauvaise gestion du reste ¹ ;
- catégorie de réponse *E* : erreur due à la réalisation d'une multiplication au lieu d'une division ;
- catégorie de réponse *F* : erreur due à la réalisation d'une soustraction au lieu d'une division ;
- catégorie de réponse *G* : erreur due à la réalisation d'une addition au lieu d'une division ;
- catégorie de réponse *H* : autre réponse.

Par ailleurs, le modèle praxéologique que nous avons conçu relativement à l'OMM apprêtée (chapitre 7) nous a permis d'identifier de façon précise les ingrédients de techniques mathématiques censés apparaître lors de l'OMM. Cela nous fournit une grille d'analyse que nous permet également de récupérer, à partir des productions des élèves, quelques éléments techniques apparus en phase d'accomplissement des tâches.

Nous avons donc identifié des observables qui nous donnent des lignes directrices pour explorer le champ de recherche autour de notre question $QR_{apprentissage}$. Nous voulons, en effet, observer les ingrédients de techniques émergés pour chaque tâche de chaque production d'élève ainsi que le type de réponse donnée par l'élève à chaque tâche. Nous précisons que les techniques mises en place pour réaliser $t_5^{pré}$ et t_5^{post} ne seront pas

1. Cette catégorie ne concerne pas les tâches de T_{DE} présentant reste nul.

observées. En effet, puisque elles présentent plusieurs étapes, la procédure de résolution résulte très guidée de l'énoncé.

Afin de récupérer, à partir des données brutes, les données relatives à ces observables, nous avons conçu un fichier EXCEL dans lequel nous avons recueilli toutes les données sous forme numérique.

A cause du nombre élevé de copies à numériser, nous n'avons pas pu prendre en charge la totalité du codage. Nous avons alors conçu une grille de codage et délégué ce travail à des vacataires. Lors de la conception de cette grille, nous nous sommes rendu compte de la complexité de coder les techniques mises en place par les élèves à l'aide de notre modèle praxéologique, à cause du nombre important d'ingrédients identifiés *a priori* et des spécificités de chaque ingrédient, pas forcément faciles à reconnaître à partir des productions des élèves en absence de connaissances de base en didactique des mathématiques de la part du codeur.

Pour cette raison, nous avons adapté la grille d'analyse relativement aux techniques apparues, en choisissant de ne coder que l'apparition de certaines techniques :

- ensemble des techniques basées sur le recours à un dessin ou à un schéma (inclut les ingrédients $T_{partager,b}$, $T_{grouper,b}$);
- techniques basées sur l'ingrédient T_{div} ;
- techniques basées sur l'ingrédient $T_{q,multiples}$.

Toutes les personnes impliquées ont reçu une brève formation et ont reçu un document expliquant les règles de codage auxquelles faire référence. Lors des séances consacrées au codage des données, nous étions toujours à la disposition des codeurs pour répondre à leurs questions ou pour gérer le codage de cas atypiques.

Dans la prochaine section nous précisons la nature de notre modèle statistique ainsi que les variables statistiques prises en compte.

8.2 Une étude exploratoire : l'analyse en composantes principales

Grâce aux précisions explicitées précédemment nous pouvons maintenant présenter les variables statistiques et déterminer leur nature en vue d'analyser les données recueillies.

8.2.1 Les variables statistiques considérées

Pour chacune des premières quatre tâches constituant le pré-test et le post-test, à partir de la variable qualitative concernant la technique observée, nous avons défini 4 variables dichotomiques relatives à la technique réalisée, que nous indiquons avec les codes présentées dans le Tableau 8.6.

Code	Technique
D	T_{div}
M	$T_{q,multiples}$
S	techniques basées sur un dessin, schéma,...
A	autre technique

TABLEAU 8.6 – Codes relatifs aux techniques pour la définition de variables

Exemple Pour indiquer la variable relative à l'usage de la technique de division posée pour la deuxième tâche du pré-test, nous utilisons la notation `PRE_EX2_P_D`², alors que nous indiquons la variable concernant le recours aux techniques basées sur des dessins ou schémas pour la deuxième tâche du post-test avec la notation `POST_EX2_P_S`.

Observons que si la production d'un certain élève relative à une certaine tâche est constituée de plusieurs techniques, avec le système de variables dichotomiques défini, nous sommes en mesure de retenir cette information. Au contraire, si l'élève laisse l'espace de travail relatif à une certaine tâche vide, les 4 variables dichotomiques relatives à cette tâche prendront la valeur 0.

Cela donne lieu à une totalité de 32 variables dichotomiques (16 pour le pré-test et 16 pour le post-test).

Avec le même principe, pour chaque tâche ($t_5^{pré}$ et t_5^{post} incluses) nous avons aussi défini, à partir de la variable qualitative relative au type de réponse, un système de 8 variables dichotomiques pour les 8 catégories de réponse identifiées.

Les codes de ces variables relèvent des mêmes lettres avec lesquelles nous avons noté les catégories à page 107.

Exemple Pour indiquer la variable relative à une réponse avec erreur de calcul dans la tâche $t_1^{pré}$, nous utilisons la notation `PRE_EX1_B`; en revanche, pour indiquer la variable concernant une erreur due à la confusion entre division et multiplication dans la tâche t_3^{post} , nous utilisons la notation `POST_EX3_E`.

Nous observons que le système de ces 8 variables est, cette fois-ci, exclusif, c'est-à-dire que, pour chaque tâche, il ne peut qu'y avoir une seule fois le code 1.

En considérant la nature des diverses tâches, nous avons exclu de notre analyse les variables `PRE_EX1_D`, `POST_EX1_D`, `PRE_EX2_B`, `POST_EX2_B`, `PRE_EX2_C`, `POST_EX2_C`, `PRE_EX3_C`, `POST_EX3_C`, `PRE_EX4_D`, `POST_EX4_D`, `PRE_EX5_C`, `POST_EX5_C`, `PRE_EX5_D` et `POST_EX5_D`, qui n'ont pas de sens.

Nous avons donc obtenu, concernant le type de réponses, d'autres 66 variables dichotomiques (33 pour le pré-test et 33 pour le post-test).

Finalement, en considérant également les données relatives aux techniques, les variables (dichotomiques) considérées sont 98 au total.

En tenant compte du nombre important de variables en jeu et de la même nature exploratoire qui caractérise notre étude, nous avons choisi de mener une analyse en composantes principales (ACP) pour résumer les données saisies sans perte d'information. En effet, lorsque le nombre de variable considérées est $n > 2$, il n'est pas possible de représenter les données dans un plan. L'objectif de l'ACP est alors d'effectuer des transformations sur l'espace à n dimensions, en se basant sur les corrélations des variables, afin de pouvoir représenter les données dans un espace de dimensions plus réduites. Cette analyse permet, en d'autres mots, d'explorer les liaisons qui existent entre variables en tenant compte des ressemblances entre les individus.

Pour mener cette analyse, nous avons utilisé le logiciel SPSS (IBM Corp., version 20.0). Nous présentons maintenant les résultats obtenus.

8.2.2 Tests statistiques pour l'ACP

L'idée de l'ACP est de comprimer les informations données par un grand nombre de variables en un nombre réduit de variables. Il est possible de le faire uniquement si les

2. Le code P indique que la variable relève de la procédure réalisée par l'élève.

données présentent une certaine redondance. L'ACP restitue des axes (ou composantes principales) qui se présentent comme combinaisons linéaires des variables de départ. Cela veut dire que plus les variables sont dépendantes les unes les autres, plus le nombre d'axes qui suffisent à comprimer les informations sera réduit. Par exemple, si toutes les variables sont parfaitement corrélées un seul axe suffira pour donner le 100% des informations disponibles. Au contraire, si les variables sont indépendantes les unes les autres, le nombre adéquat d'axes sera égal au nombre de variables. Dans ce dernier cas, la matrice de corrélation est égal à la matrice identité.

Le test de sphéricité de Barlett permet d'estimer dans quelle mesure de la matrice de corrélation diverge de manière significative de la matrice identité. En particulier, si le test donne $p < 0.05$, cela veut dire que la matrice de corrélation est significativement différente de la matrice identité.

Nous observons qu'il faut avoir de la prudence avec ce test, puisque, au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente, il a la tendance à considérer que toute configuration est significative.

Un autre indice utilisé pour comprendre si l'ACP peut donner une synthèse intéressante des données est l'indice KMO (Kaiser-Meyer-Olkin). Cet indice compare la corrélation totale et la corrélation partielle entre deux variables. Si la corrélation partielle est nettement plus faible, en valeur absolue, de celle totale, le lien entre les deux variables est déterminé par les autres variables; cela confirme l'existence d'une redondance des variables. Cet indice varie entre 0 et 1. Pour des valeurs de cet indice inférieures à 0.5 le résumé de l'information avec l'ACP est considéré mauvais, alors que plus l'indice est proche de 1 plus le résumé sera meilleur.

Dans le cadre de l'ACP, nous rappelons que les « composantes » sont définies comme combinaisons linéaires des variables initiales, obtenues à partir de leur ressemblance. Mathématiquement, donc, il s'agit d'un simple changement de base. Pour p variables initiales, un produit intermédiaire d'une ACP est constitué de p combinaisons linéaires de ces p variables, obtenues de façon telle de conserver toute l'information (la totalité de ces p variables expliquent le 100% de la variance initiale). Ces p combinaisons peuvent être rendues indépendantes à travers des rotations orthogonales. Pour nos analyses, nous avons choisi comme méthode de rotation, la rotation appelée *Varimax avec normalisation de Kaiser*.

De manière générale, la première composante extraite explique le plus de variance et est donc la meilleure combinaison possible de variables. Les autres composantes ont moins de variance résiduelle à expliquer et sont donc des combinaisons linéaires de moins en moins optimales. A ce point, dans une perspective exploratoire, il est important d'établir des critères pour choisir le nombre des « composantes principales » donnant la meilleure synthèse des variables de départ. Puisqu'il s'agit de chercher les combinaisons linéaires qui expliquent le plus de variance, un des critères les plus utilisés consiste à parcourir la variance cumulative des composantes et s'arrêter lorsque la variance totale expliquée est au moins le 50% de la variance initiale. D'autres critères fréquemment adoptés pour le choix du nombre de composantes principales sont :

- le critère de Kaiser, selon lequel il faut considérer toutes les composantes dont la valeur propre est supérieur à 1 ;
- le critère de Cattell, basé sur l'observation d'une représentation graphique des valeurs propres (*scree plot*), qui normalement montre des grosses pentes entre les premiers valeurs propres, suivies par un assouplissement de la pente ; le critère consiste à considérer uniquement les composantes relatives aux valeurs propres qui précèdent cet assouplissement.

Dans nos analyses, nous tiendrons compte de l'ensemble de ces trois critères.

8.2.3 Résultats de l'analyse en composantes principales

Nous avons effectué des analyses en composantes principales sur quatre groupes de variables :

1. les 33 variables concernant les types de réponse en pré-test;
2. les 33 variables concernant les types de réponse en post-test;
3. les 16 variables concernant les techniques en pré-test;
4. les 16 variables concernant les techniques en post-test.

Nous avons donné au logiciel SPSS les instructions de : afficher les caractéristiques univariées; afficher la structure initiale; afficher les coefficients de la matrice de corrélation; afficher l'indice KMO et le résultat du test de sphéricité de Barlett; afficher la structure factorielle sans rotation; afficher le diagramme des valeurs propres (*scree plot*); extraire les composantes selon le critère de la valeur propre > 1 ; effectuer une rotation Varimax; supprimer les coefficients faibles (< 0.1); le nombre maximum des itérations pour converger est 25.

A titre d'exemple, nous commentons les analyses et les résultats concernant le premier groupe de variables; ensuite, nous présentons les résultats issus des autres groupes de variables de manière plus synthétique. L'ensemble des analyses réalisées sont disponibles dans l'annexe C.

ACP sur les 33 variables concernant les types de réponse en pré-test

Dans le tableau en Figure 8.3, SPSS a affiché les caractéristiques univariées associées à chaque variable. En particulier, la première colonne montre la moyenne des observations, la deuxième colonne l'écart-type et la troisième l'effectif des données disponibles pour chaque variable.

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	Analysis N
PRE_EX1_A	,57	,495	2105
PRE_EX1_B	,06	,236	2105
PRE_EX1_C	,02	,133	2105
PRE_EX1_E	,01	,102	2105
PRE_EX1_F	,02	,130	2105
PRE_EX1_G	,01	,075	2105
PRE_EX1_H	,20	,400	2105
PRE_EX2_A	,45	,497	2105
PRE_EX2_D	,12	,330	2105
PRE_EX2_E	,05	,225	2105
PRE_EX2_F	,03	,173	2105
PRE_EX2_G	,04	,201	2105
PRE_EX2_H	,18	,387	2105
PRE_EX3_A	,14	,350	2105
PRE_EX3_B	,01	,115	2105
PRE_EX3_D	,05	,221	2105
PRE_EX3_E	,00	,031	2105
PRE_EX3_F	,05	,225	2105
PRE_EX3_G	,01	,095	2105
PRE_EX3_H	,34	,472	2105
PRE_EX4_A	,21	,410	2105
PRE_EX4_B	,03	,172	2105
PRE_EX4_C	,00	,053	2105
PRE_EX4_E	,01	,113	2105
PRE_EX4_F	,06	,243	2105
PRE_EX4_G	,05	,209	2105
PRE_EX4_H	,19	,391	2105
PRE_EX5_A	,27	,444	2105
PRE_EX5_B	,04	,203	2105
PRE_EX5_E	,00	,062	2105
PRE_EX5_F	,00	,044	2105
PRE_EX5_G	,01	,081	2105
PRE_EX5_H	,19	,390	2105

FIGURE 8.3 – Caractéristiques univariées des 33 variables concernant les techniques en pré-test

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		,338
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	10226,611
	df	528
	Sig.	,000

FIGURE 8.4 – Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 33 variables concernant les types de réponse en pré-test

La Figure 8.4 montre l'indice KMO et le résultat du test de sphéricité de Barlett.

Nous constatons que, pour les variables considérées, l'indice KMO est de 0.338. Cela veut dire que la synthèse de l'information donnée par l'ACP est à considérer mauvaise. Le test de sphéricité donne une valeur $p = 0.000 < 0.05$, donc la condition pour effectuer l'ACP résulte vérifiée. De toute façon, nous regarderons les résultats de cette analyse avec prudence, d'un coté pour la valeur de l'indice KMO, et, d'un autre coté, pour l'observation faite sur la fiabilité du test de sphéricité à la présence d'un grand effectif.

Le tableau en Figure 8.5 montre la pourcentage de variance expliquée par chacune des 33 composantes identifiées par SPSS à partir des 33 variables considérées. Nous observons que avec le critère de Kaiser, nous devons prendre 15 composantes pour un total d'environ le 62% de variance expliquée, alors qu'en considérant le critère de la variance cumulative $\geq 50\%$, il serait possible de s'arrêter à la 12ème composante. En tout cas, nous observons que la variance est assez dispersée parmi les diverses composantes, la première expliquant seulement environ le 9%.

Nous observons également le scree plot, illustré dans la Figure 8.6. Il présente un seul pic très évident en correspondance de la première composante, ensuite la pente dessinée par les valeurs propres est plus douce jusqu'à la 29ème. En vue de comprendre le poids de chacune des variables initiales dans les composantes, nous regardons aussi la matrice des composantes (après rotation). Pour en faciliter la lecture nous avons demandé à SPSS de supprimer les coefficients inférieur à 0.1 en valeur absolue. Cette matrice peut être lue par lignes, en trouvant le poids de chaque variable de départ dans chaque composante, et par colonnes, en lisant les coefficients des combinaisons linéaires des variables de départ dans chaque composante.

Nous observons, par exemple, que la composante dans laquelle la variable `PRE_EX1_A` a plus de poids est la troisième. Nous voyons que, dans la même composante, cette variable s'oppose à la variable `PRE_EX1_H` (les coefficients de ces deux variables ont un poids élevé en valeur absolue et ont signe opposé). Cette opposition est tout à fait triviale considérant la nature de ces variables.

En continuant ce type d'analyse nous trouvons d'autres résultats triviales qui mettent en relation deux variables relatives à la même tâche.

Parmi les résultats non triviales, mais pas forcément intéressants, nous avons que :

- les « bonnes réponses » (code A) se distribuent toutes sur le premier axe, mais avec des poids différents : celles pour les tâches $t_1^{pré}$ et $t_2^{pré}$ ont un poids inférieur par rapport à celles relatives aux tâches $t_3^{pré}$, $t_4^{pré}$ et $t_5^{pré}$;
- les réponses de catégorie G (addition au lieu de la division) relatives aux 4 premières tâches se concentrent dans le deuxième axe ;
- concernant la tâche $t_5^{pré}$, la variable `PRE_EX5_G` donne le plus de contribution dans la 11ème composante, avec `PRE_EX2_F` (multiplication au lieu de la division dans la tâche $t_2^{pré}$).

En général, les variables de départ résultent trop dispersées parmi les diverses composantes et cela ne nous permet pas de tirer des conclusions intéressantes.

*CHAPITRE 8. ETUDE DE LA VIABILITÉ DE L'OMM APPRÊTÉE DU POINT DE VUE DE
L'APPRENTISSAGE DE LA DIVISION EUCLIDIENNE*

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	3,115	9,439	9,439	3,115	9,439	9,439	1,962	5,947	5,947
2	1,545	4,683	14,122	1,545	4,683	14,122	1,642	4,976	10,922
3	1,479	4,483	18,605	1,479	4,483	18,605	1,634	4,952	15,874
4	1,402	4,248	22,853	1,402	4,248	22,853	1,493	4,524	20,398
5	1,359	4,118	26,971	1,359	4,118	26,971	1,378	4,176	24,574
6	1,317	3,991	30,962	1,317	3,991	30,962	1,366	4,139	28,713
7	1,251	3,791	34,753	1,251	3,791	34,753	1,341	4,064	32,777
8	1,202	3,641	38,395	1,202	3,641	38,395	1,328	4,025	36,802
9	1,166	3,533	41,928	1,166	3,533	41,928	1,315	3,986	40,788
10	1,143	3,462	45,390	1,143	3,462	45,390	1,178	3,571	44,359
11	1,131	3,428	48,818	1,131	3,428	48,818	1,174	3,559	47,918
12	1,086	3,292	52,111	1,086	3,292	52,111	1,141	3,458	51,376
13	1,079	3,270	55,381	1,079	3,270	55,381	1,139	3,453	54,829
14	1,032	3,129	58,509	1,032	3,129	58,509	1,127	3,416	58,245
15	1,028	3,114	61,624	1,028	3,114	61,624	1,115	3,379	61,624
16	,997	3,021	64,645						
17	,985	2,984	67,629						
18	,962	2,916	70,545						
19	,957	2,900	73,445						
20	,938	2,843	76,288						
21	,922	2,795	79,083						
22	,879	2,664	81,747						
23	,853	2,584	84,331						
24	,827	2,507	86,838						
25	,790	2,395	89,233						
26	,757	2,295	91,528						
27	,708	2,145	93,672						
28	,618	1,871	95,544						
29	,544	1,650	97,194						
30	,358	1,084	98,277						
31	,246	,746	99,023						
32	,198	,601	99,624						
33	,124	,376	100,000						

Extraction Method: Principal Component Analysis.

FIGURE 8.5 – Variance expliquée par les composantes obtenues de l'ACP à partir des 33 variables concernant les types de réponse en pré-test

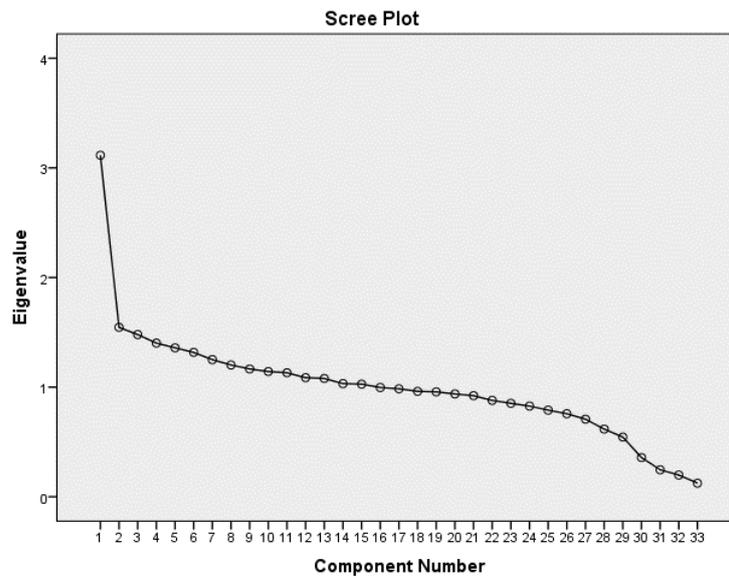


FIGURE 8.6 – Scree plot de l'ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en pré-test

Rotated Component Matrix^a

	Component														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
PRE_EX1_A	,254	-,183	-,752	-,116					-,114	-,276					-,158
PRE_EX1_B	-,142				-,165				,128	,763					,160
PRE_EX1_C	,106		,140		,175			,190			,105		,329		,560
PRE_EX1_E					,150		,782							,124	
PRE_EX1_F		,136		,629											
PRE_EX1_G		,528	-,170	-,139	,222	,105					,295	-,205	,280		
PRE_EX1_H			,894												
PRE_EX2_A	,281	-,199	-,213	-,118	-,138			,654	-,413						
PRE_EX2_D	,100	-,117						-,861	-,111						
PRE_EX2_E					,719	,110	,116		-,102						
PRE_EX2_F	-,171			,217	-,150	-,137				-,147	,566	,225	-,242		
PRE_EX2_G	-,118	,461	,217	,287		,128				-,342	-,224		,149		-,112
PRE_EX2_H								,913							
PRE_EX3_A	,810					-,143						,109			
PRE_EX3_B	-,124			-,141	-,104	-,275		,126		-,129	-,107	,130		-,227	-,346
PRE_EX3_D	-,115			-,101		-,267		-,110		-,118	-,106	-,109		,622	
PRE_EX3_E							,788								
PRE_EX3_F				,370	,462	-,169			,155		,178	,198			
PRE_EX3_G		,620				-,117									
PRE_EX3_H	-,171				-,154	,792						-,103			,118
PRE_EX4_A	,774		-,143		-,123										-,118
PRE_EX4_B					-,107			-,121					-,102		,657
PRE_EX4_C									,118			-,626	-,174		
PRE_EX4_E	-,121				,478	-,215				-,197	-,172		-,150		
PRE_EX4_F	-,106	-,127		,749								,115	-,112		
PRE_EX4_G		,749													
PRE_EX4_H	-,139	-,131	,134	-,273	,192	,533			,100		,158	,172	,239		-,164
PRE_EX5_A	,576	-,102	-,142	-,157	-,121			,120				-,358			,166
PRE_EX5_B												,128	,715		
PRE_EX5_E					,159				-,148	,598					-,192
PRE_EX5_F							,123								
PRE_EX5_G												,686	-,103		
PRE_EX5_H			,204	,198	,312				,176		-,250	,527	-,413		

Extraction Method: Principal Component Analysis.
 Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.
 a. Rotation converged in 11 iterations.

FIGURE 8.7 – Matrice (après rotation) des 15 premières composantes de l'ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en pré-test

Les autres ACP réalisées

De la même manière des analyses précédemment montrées, en ce qui concerne les ACP réalisées pour le groupes des 33 variables du post-test, nous n'avons pas repéré des régularités intéressantes.

Au niveau des techniques en jeu les choses semblent aller dans une direction meilleure, puisque à partir des 16 variables relatives aux quatre premières tâches de chaque test, il est possible de constituer 4 composantes principales, une représentative de chaque technique considérée. Cela permet donc de réduire le nombre de variables sans perte d'informations, par exemple en définissant des nouvelles variables à partir des moyennes arithmétiques des valeurs des anciennes variables.

Les résultats semblent aller contre notre hypothèse de départ, concernant l'insuffisance d'une approche évaluative basée sur réussite/échec. Il semble, en effet, qu'à la présence des variables statistiques considérées et des données recueillies, il est plus intéressant de séparer les réponses données par les élèves en deux catégories : la « bonne réponse » (réussite) et « autre réponse » (échec).

Maintenant, afin de comprendre s'il existent des relations entre le fait d'être ou non dans le groupe expérimental et le delta entre pré-test et post-test, nous avons choisi de faire recours à des régression logistiques, que nous présentons ci-dessous.

8.3 Régression logistique évaluant la réussite/échec

Pour la conception de nos modèles statistiques, nous considérons les variables explicatives présentées dans le Tableau 8.7.

GROUPE	1 = groupe expérimental ; 0 = groupe contrôle
SEXE	1 = fille ; 0 = garçon
NIVEAU	1 = CM1 ; 0 = CM2
REP	1 = REP/REP+ ; 0 = non REP
PRE_P_D	procédures de division posée adoptées lors du pré-test
PRE_P_M	procédures basées sur $T_{q,multiples}$ adoptées lors du pré-test
PRE_P_S	procédures basées sur dessins/schémas adoptées lors du pré-test
PRE_P_A	autre type de procédures adoptées lors du pré-test
POST_P_D	procédures de division posée adoptées lors du post-test
POST_P_M	procédures basées sur $T_{q,multiples}$ adoptées lors du post-test
POST_P_S	procédures basées sur dessins/schémas adoptées lors du post-test
POST_P_A	autre type de procédures adoptées lors du post-test
PRE_EX1_A	réussite pour la tâche $t_1^{pré}$
PRE_EX2_A	réussite pour la tâche $t_2^{pré}$
PRE_EX3_A	réussite pour la tâche $t_3^{pré}$
PRE_EX4_A	réussite pour la tâche $t_4^{pré}$
PRE_EX5_A	réussite pour la tâche $t_5^{pré}$

TABLEAU 8.7 – Variables explicatives des régression logistiques

Toutes ces variables sont dichotomiques, à l'exception de PRE_P_D, PRE_P_M, PRE_P_S et PRE_P_A, qui sont données par la moyenne arithmétique des variables relativement aux 4 tâches considérées.

En revanche, les variables que nous cherchons à expliquer sont présentées dans le Tableau 8.8.

POST_EX1_A	réussite pour la tâche t_1^{post}
POST_EX2_A	réussite pour la tâche t_2^{post}
POST_EX3_A	réussite pour la tâche t_3^{post}
POST_EX4_A	réussite pour la tâche t_4^{post}
POST_EX5_A	réussite pour la tâche t_5^{post}

TABLEAU 8.8 – Variables à expliquer

Ces variables sont toutes dichotomiques. Nous pouvons alors concevoir une régression logistique pour chacune de ces cinq variables. Par ailleurs, nous introduisons dans chacun de ces modèles, les variables relatives aux autres tâches du post-test comme variables explicatives (par exemple, dans le modèle de POST_EX1_A, les variables POST_EX2_A, POST_EX3_A, POST_EX4_A et POST_EX5_A seront considérées des variables explicatives).

Un modèle de régression logistique permet de prédire la probabilité qu'un événement arrive à partir de l'optimisation des coefficients de régression. Nous allons essayer de prédire la réussite aux tâches t_1^{post} , t_2^{post} , t_3^{post} , t_4^{post} et t_5^{post} en fonction des variables explicatives.

A titre d'exemple, nous montrons la procédure utilisée pour concevoir le modèle statistique expliquant la variable POST_EX1_A en fonction des variables indiquées dans le Tableau 8.7. Nous indiquerons, ensuite, les résultats obtenus grâce aux autres modèles.

Construction du modèle de régression logistique pour POST_EX1_A

Pour construire le modèle de régression logistique expliquant la variable POST_EX1_A, nous effectuons plusieurs étapes, en rajoutant au fur et à mesure toutes les variables explicatives dans le modèle, pour comprendre l'apport de chaque variable. Nous avons vérifié à chaque fois la valeur du *pseudo*-coefficient de détermination R_{McF}^2 (qui permet de dire si le modèle est intéressant ou non). Nous insérons tout d'abord les variables relatives au pré-test et nous terminerons en introduisant la variable cible (GROUPE).

Comme première étape, donc, nous avons calculé (toujours à l'aide du logiciel SPSS) le modèle de régression logistique en introduisant comme variables explicatives uniquement celles concernant le pré-test. Nous pouvons voir les coefficients de ce modèle dans la deuxième colonne du tableau en Figure 8.8.

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
PRE_P_D	,344	,235	2,140	1	,143	1,410
PRE_P_M	,350	,269	1,686	1	,194	1,419
PRE_P_S	-,519	,229	5,145	1	,023	,595
PRE_P_A	-,853	,182	21,850	1	,000	,426
PRE_EX1_A	,704	,113	38,579	1	,000	2,022
PRE_EX2_A	,637	,121	27,739	1	,000	1,891
PRE_EX3_A	,282	,231	1,495	1	,221	1,326
PRE_EX4_A	,676	,209	10,449	1	,001	1,966
PRE_EX5_A	,524	,155	11,418	1	,001	1,689
Constant	,309	,142	4,742	1	,029	1,362

a. Variable(s) entered on step 1: PRE_P_D, PRE_P_M, PRE_P_S, PRE_P_A, PRE_EX1_A, PRE_EX2_A, PRE_EX3_A, PRE_EX4_A, PRE_EX5_A.

FIGURE 8.8 – Etape 1 : ajoute des variables relatives au pré-test

Grâce à l'avant-dernière colonne, nous pouvons dire que les variables significatives dans ce modèle sont PRE_P_S, PRE_P_A, PRE_EX1_A, PRE_EX2_A, PRE_EX4_A et PRE_EX5_A. La valeur indiquée dans la dernière colonne (Exp(B)) sert à quantifier les chances que la variable POST_EX1_A prend la valeur 1 lorsque la variable correspondant prend la valeur 1. Par exemple, nous pouvons dire que les chances de réussir la tâche t_1^{post} sont 0.595 fois moins élevées (signe négatif du coefficient B) pour les élèves ayant mobilisé, en phase de pré-test une technique basée sur un dessin ou un schéma (PRE_P_S = 1) par rapport à ceux qui ne l'ont pas fait, les autres variables étant fixées.

Dans l'étape 2 du modèle de régression logistique (voir Figure 8.9) nous introduisons les variables concernant le post-test, c'est-à-dire POST_P_D, POST_P_M, POST_P_S et POST_P_A, ainsi que les variables POST_EX2_A, POST_EX3_A, POST_EX4_A et POST_EX5_A. L'ensemble de ces variables résultent significatives dans le nouveau modèle, à l'exception de POST_EX5_A et les variables déjà présentes qui étaient significatives continuent à l'être, sauf PRE_P_S, PRE_EX4_A et PRE_EX5_A.

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
PRE_P_D	-,097	,126	,587	1	,444	,908
PRE_P_M	,116	,294	,157	1	,692	1,123
PRE_P_S	-,460	,242	3,604	1	,058	,632
PRE_P_A	-,453	,199	5,162	1	,023	,636
PRE_EX1_A	,499	,122	16,814	1	,000	1,648
PRE_EX2_A	,384	,132	8,504	1	,004	1,468
PRE_EX3_A	-,109	,248	,191	1	,662	,897
PRE_EX4_A	,360	,221	2,641	1	,104	1,433
PRE_EX5_A	,181	,169	1,147	1	,284	1,199
POST_P_D	1,159	,229	25,708	1	,000	3,186
POST_P_M	,440	,210	4,384	1	,036	1,552
POST_P_S	1,066	,252	17,914	1	,000	2,902
POST_P_A	-,622	,198	9,880	1	,002	,537
POST_EX2_A	,866	,122	50,705	1	,000	2,377
POST_EX3_A	,342	,153	5,001	1	,025	1,408
POST_EX4_A	,834	,167	24,871	1	,000	2,302
POST_EX5_A	,357	,189	3,592	1	,058	1,430
Constant	-,509	,186	7,526	1	,006	,601

a. Variable(s) entered on step 1: POST_P_D, POST_P_M, POST_P_S, POST_P_A, POST_EX2_A, POST_EX3_A, POST_EX4_A, POST_EX5_A.

FIGURE 8.9 – Etape 2 : ajoute des variables relatives au post-test

Nous introduisons maintenant, dans le modèle, les variables SEXE et NIVEAU, en obtenant les coefficients montrés en Figure 8.10. Nous observons que ces nouvelles variables résultent ne pas être significatives. D'ailleurs leurs introduction dans le modèle n'a pas modifié la significativité des variables précédemment présentes.

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
PRE_P_D	-,105	,127	,690	1	,406	,900
PRE_P_M	,101	,294	,117	1	,733	1,106
PRE_P_S	-,481	,245	3,841	1	,050	,618
PRE_P_A	-,464	,200	5,372	1	,020	,629
PRE_EX1_A	,496	,122	16,562	1	,000	1,642
PRE_EX2_A	,394	,132	8,902	1	,003	1,482
PRE_EX3_A	-,115	,248	,216	1	,642	,891
PRE_EX4_A	,360	,222	2,635	1	,105	1,433
PRE_EX5_A	,191	,170	1,254	1	,263	1,210
POST_P_D	1,109	,239	21,553	1	,000	3,033
POST_P_M	,419	,210	3,965	1	,046	1,521
POST_P_S	1,027	,253	16,532	1	,000	2,793
POST_P_A	-,633	,198	10,258	1	,001	,531
POST_EX2_A	,867	,122	50,745	1	,000	2,381
POST_EX3_A	,342	,153	4,968	1	,026	1,407
POST_EX4_A	,826	,168	24,235	1	,000	2,285
POST_EX5_A	,376	,190	3,929	1	,047	1,457
SEXE	,119	,114	1,097	1	,295	1,126
NIVEAU	-,062	,126	,242	1	,623	,940
Constant	-,620	,256	5,887	1	,015	,538

a. Variable(s) entered on step 1: SEXE, NIVEAU.

FIGURE 8.10 – Etape 3 : ajout des variables SEXE et NIVEAU

Nous incluons, dans l'étape 4 (voir Figure 8.11), la variable REP. Cette variable résulte pas significative. Son introduction dans le modèle, par contre, a fait que, dans le nouveau modèle, la variable POST_P_M (déjà peu significative) devient non significative.

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
PRE_P_D	-,102	,127	,651	1	,420	,903
PRE_P_M	,103	,294	,122	1	,726	1,109
PRE_P_S	-,462	,246	3,520	1	,061	,630
PRE_P_A	-,463	,200	5,347	1	,021	,630
PRE_EX1_A	,497	,122	16,613	1	,000	1,643
PRE_EX2_A	,388	,132	8,613	1	,003	1,474
PRE_EX3_A	-,116	,249	,218	1	,640	,890
PRE_EX4_A	,361	,222	2,646	1	,104	1,434
PRE_EX5_A	,179	,171	1,096	1	,295	1,196
POST_P_D	1,094	,240	20,858	1	,000	2,988
POST_P_M	,407	,211	3,723	1	,054	1,502
POST_P_S	1,017	,253	16,147	1	,000	2,765
POST_P_A	-,647	,198	10,636	1	,001	,524
POST_EX2_A	,863	,122	50,102	1	,000	2,370
POST_EX3_A	,337	,153	4,831	1	,028	1,401
POST_EX4_A	,825	,168	24,122	1	,000	2,281
POST_EX5_A	,373	,190	3,843	1	,050	1,452
SEXE	,119	,114	1,105	1	,293	1,127
NIVEAU	-,063	,126	,252	1	,616	,939
REP	-,089	,121	,545	1	,461	,915
Constant	-,576	,262	4,828	1	,028	,562

a. Variable(s) entered on step 1: REP.

FIGURE 8.11 – Etape 4 : ajout de la variable REP

En dernier, nous rajoutons dans le modèle notre variable cible, *GROUPE*. Nous obtenons le modèle présenté en Figure 8.12. Nous observons que cette variable est non significative ($p = 0.586$) et que les conditions de significativité des autres variables ne sont pas modifiées.

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
PRE_P_D	-,099	,127	,610	1	,435	,906
PRE_P_M	,114	,295	,150	1	,699	1,121
PRE_P_S	-,459	,246	3,470	1	,062	,632
PRE_P_A	-,461	,200	5,291	1	,021	,631
PRE_EX1_A	,496	,122	16,550	1	,000	1,642
PRE_EX2_A	,389	,132	8,668	1	,003	1,476
PRE_EX3_A	-,113	,249	,205	1	,650	,893
PRE_EX4_A	,369	,222	2,751	1	,097	1,446
PRE_EX5_A	,182	,171	1,136	1	,286	1,200
POST_P_D	1,081	,241	20,158	1	,000	2,948
POST_P_M	,393	,212	3,427	1	,064	1,482
POST_P_S	1,017	,253	16,154	1	,000	2,766
POST_P_A	-,649	,198	10,705	1	,001	,522
POST_EX2_A	,865	,122	50,271	1	,000	2,374
POST_EX3_A	,333	,154	4,707	1	,030	1,396
POST_EX4_A	,822	,168	23,967	1	,000	2,276
POST_EX5_A	,368	,190	3,752	1	,053	1,445
SEXE	,119	,114	1,106	1	,293	1,127
NIVEAU	-,068	,126	,286	1	,593	,935
REP	-,096	,121	,628	1	,428	,908
GROUPE	-,064	,118	,296	1	,586	,938
Constant	-,530	,276	3,689	1	,055	,589

a. Variable(s) entered on step 1: GROUPE.

FIGURE 8.12 – Modèle complet de régression logistique pour POST_EX1_A

Régressions logistiques pour POST_EX2_A, POST_EX3_A et POST_EX4_A

Les autres modèles de régression logistique concernant les variables POST_EX2_A, POST_EX3_A et POST_EX4_A suivent les mêmes critères de construction par étapes. Ici, nous montrerons uniquement les tableaux présentant les caractéristiques des modèles complets.

POST_EX2_A Pour le modèle expliquant POST_EX2_A (Figure 8.13), les variables significatives sont PRE_EX1_A, PRE_EX2_A, PRE_EX5_A, POST_P_D, POST_P_S, POST_EX1_A, POST_EX3_A, POST_EX4_A, POST_EX5_A et REP (peu significative). Encore une fois la variable GROUPE n'est pas significative ($p = 0.072$).

POST_EX3_A Le modèle relatif à la variable POST_EX3_A (8.14) révèle comme variables significatives PRE_EX1_A, PRE_EX3_A, PRE_EX5_A, POST_P_D, POST_P_M, POST_EX1_A, POST_EX2_A, POST_EX4_A, REP et GROUPE. En particulier, a parité des autres variables, les élèves du groupe expérimentale réussissent la tâche t_3^{post} 0,75 fois moins bien par rapport aux élèves du groupe contrôle.

POST_EX4_A Comme nous pouvons le voir dans la Figure 8.15, les variables résultant significatives dans le modèle complet relatif à la variable POST_EX4_A sont : PRE_–

EX2_A, PRE_EX4_A, PRE_EX5_A, POST_P_D, POST_P_M, POST_EX1_A, POST_EX2_A, POST_EX3_A, POST_EX5_A et NIVEAU. La variable GROUPE n'est pas significative. En ce qui concerne la variable NIVEAU, nous pouvons lire par le tableau que, en fixant les autres variables, les élèves de niveau CM2 réussissent la tâche t_4^{post} 0.657 fois mieux que les élèves de CM1.

POST_EX5_A Finalement, dans le tableau en Figure 8.16, nous lisons les informations relatives au modèle de régression logistique expliquant la variable POST_EX5_A. Les variables significatives sont, dans ce cas : PRE_EX1_A, PRE_EX2_A, PRE_EX4_A, PRE_EX5_A, POST_P_M, POST_EX1_A, POST_EX2_A, POST_EX4_A.

Variables in the Equation							
		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a	PRE_P_D	,221	,171	1,673	1	,196	1,247
	PRE_P_M	,152	,228	,444	1	,505	1,164
	PRE_P_S	,026	,228	,013	1	,909	1,026
	PRE_P_A	,253	,190	1,776	1	,183	1,288
	PRE_EX1_A	,248	,112	4,938	1	,026	1,282
	PRE_EX2_A	,543	,110	24,188	1	,000	1,721
	PRE_EX3_A	-,092	,167	,303	1	,582	,912
	PRE_EX4_A	,256	,155	2,746	1	,097	1,292
	PRE_EX5_A	,319	,130	6,025	1	,014	1,376
	POST_P_D	-,673	,205	10,817	1	,001	,510
	POST_P_M	-,003	,184	,000	1	,987	,997
	POST_P_S	1,268	,234	29,440	1	,000	3,553
	POST_P_A	-,335	,190	3,104	1	,078	,715
	POST_EX1_A	,880	,122	52,395	1	,000	2,411
	POST_EX3_A	,415	,122	11,589	1	,001	1,514
	POST_EX4_A	,355	,130	7,440	1	,006	1,426
	POST_EX5_A	,675	,134	25,501	1	,000	1,964
	SEXE	-,028	,100	,075	1	,784	,973
	NIVEAU	,078	,116	,449	1	,503	1,081
	REP	-,248	,113	4,771	1	,029	,781
	GROUPE	,187	,104	3,241	1	,072	1,205
	Constant	-1,823	,266	47,122	1	,000	,162

a. Variable(s) entered on step 1: GROUPE.

FIGURE 8.13 – Modèle complet de régression logistique pour POST_EX2_A

**CHAPITRE 8. ETUDE DE LA VIABILITÉ DE L'OMM APPRÊTÉE DU POINT DE VUE DE
L'APPRENTISSAGE DE LA DIVISION EUCLIDIENNE**

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
PRE_P_D	,140	,123	1,310	1	,252	1,151
PRE_P_M	,236	,242	,956	1	,328	1,267
PRE_P_S	-,112	,258	,188	1	,664	,894
PRE_P_A	-,027	,209	,017	1	,896	,973
PRE_EX1_A	,297	,129	5,304	1	,021	1,346
PRE_EX2_A	,123	,126	,952	1	,329	1,131
PRE_EX3_A	,401	,173	5,348	1	,021	1,493
PRE_EX4_A	,240	,160	2,266	1	,132	1,272
PRE_EX5_A	,313	,138	5,099	1	,024	1,367
POST_P_D	,965	,208	21,606	1	,000	2,624
POST_P_M	1,495	,194	59,519	1	,000	4,461
POST_P_S	,250	,270	,857	1	,355	1,284
POST_P_A	,006	,039	,025	1	,874	1,006
POST_EX1_A	,337	,150	5,048	1	,025	1,401
POST_EX2_A	,406	,121	11,204	1	,001	1,501
POST_EX4_A	1,086	,128	72,300	1	,000	2,963
POST_EX5_A	,193	,139	1,932	1	,165	1,213
SEXE	-,074	,115	,416	1	,519	,928
NIVEAU	-,088	,135	,424	1	,515	,916
REP	-,341	,135	6,359	1	,012	,711
GROUPE	-,288	,118	5,945	1	,015	,750
Constant	-2,566	,298	74,037	1	,000	,077

a. Variable(s) entered on step 1: GROUPE.

FIGURE 8.14 – Modèle complet de régression logistique pour POST_EX3_A

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
PRE_P_D	,079	,157	,252	1	,616	1,082
PRE_P_M	-,177	,262	,455	1	,500	,838
PRE_P_S	-,154	,276	,309	1	,578	,858
PRE_P_A	-,270	,225	1,447	1	,229	,763
PRE_EX1_A	,179	,137	1,707	1	,191	1,196
PRE_EX2_A	,291	,135	4,647	1	,031	1,338
PRE_EX3_A	,095	,191	,247	1	,619	1,100
PRE_EX4_A	,365	,171	4,552	1	,033	1,440
PRE_EX5_A	,302	,147	4,192	1	,041	1,352
POST_P_D	1,535	,220	48,518	1	,000	4,642
POST_P_M	1,457	,208	48,950	1	,000	4,293
POST_P_S	-,374	,297	1,582	1	,208	,688
POST_P_A	,016	,038	,174	1	,676	1,016
POST_EX1_A	,880	,165	28,542	1	,000	2,412
POST_EX2_A	,361	,130	7,743	1	,005	1,435
POST_EX3_A	1,098	,127	74,553	1	,000	2,999
POST_EX5_A	,740	,144	26,388	1	,000	2,096
SEXE	-,145	,124	1,369	1	,242	,865
NIVEAU	-,419	,142	8,771	1	,003	,657
REP	-,186	,145	1,646	1	,200	,831
GROUPE	-,117	,128	,844	1	,358	,889
Constant	-2,837	,325	76,321	1	,000	,059

a. Variable(s) entered on step 1: GROUPE.

FIGURE 8.15 – Modèle complet de régression logistique pour POST_EX4_A

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a	PRE_P_D	,153	,133	1,319	1	,251	1,165
	PRE_P_M	-,099	,252	,154	1	,694	,906
	PRE_P_S	-,398	,295	1,819	1	,177	,671
	PRE_P_A	-,193	,240	,649	1	,421	,825
	PRE_EX1_A	,445	,149	8,948	1	,003	1,561
	PRE_EX2_A	,594	,137	18,864	1	,000	1,812
	PRE_EX3_A	,331	,171	3,776	1	,052	1,393
	PRE_EX4_A	,554	,159	12,169	1	,000	1,739
	PRE_EX5_A	,669	,140	22,972	1	,000	1,952
	POST_P_D	,174	,224	,603	1	,437	1,190
	POST_P_M	,677	,211	10,334	1	,001	1,968
	POST_P_S	-,549	,328	2,805	1	,094	,577
	POST_P_A	,014	,047	,091	1	,762	1,014
	POST_EX1_A	,502	,186	7,301	1	,007	1,653
	POST_EX2_A	,655	,133	24,149	1	,000	1,925
	POST_EX3_A	,227	,138	2,686	1	,101	1,255
	POST_EX4_A	,794	,144	30,409	1	,000	2,211
	SEXE	,013	,127	,010	1	,920	1,013
	NIVEAU	-,178	,151	1,382	1	,240	,837
	REP	-,221	,157	1,967	1	,161	,802
GROUPE	-,198	,131	2,271	1	,132	,820	
Constant		-3,333	,349	91,167	1	,000	,036

a. Variable(s) entered on step 1: GROUPE.

FIGURE 8.16 – Modèle complet de régression logistique pour POST_EX5_A

8.4 Discussion

Les régressions logistiques réalisées dans ce travail mettent en lumière que le fait d'être dans le groupe expérimental ou dans le groupe contrôle ne joue pas sur les performances des élèves (en termes de réussite/échec) pour quatre des cinq tâches analysées. Pour la tâche t_3^{post} , en revanche, la variable GROUPE a un certain poids sur la prédiction de la réussite : les élèves du groupe expérimental ont moins de chance de réussir cette tâche par rapport aux élèves du groupe contrôle. En regardant de plus près les caractéristiques de cette tâche, nous observons qu'elle relève de $T_{DE,7}$ et qu'elle présente un dividende et un diviseur de « grand taille », le reste non nul et que la réponse attendue est le reste (Tableau 8.5, p. 106).

Nous considérons que la différence la plus évidente entre cette tâche et les autres tâches du post-test est le fait qu'il est demandé dans l'énoncé de déterminer le reste d'une division euclidienne. Il est possible, donc, qu'il existe une corrélation entre la variable $V_{réponse}$ et la variable GROUPE, que nous ne sommes pas en mesure d'estimer avec les données à notre disposition.

D'autres variables statistiques ont un impact sur la réussite : nous mentionnons, entre autres, la variable NIVEAU qui a un poids significatif pour la prédiction de la réussite de la tâche t_4^{post} .

Par ailleurs, la variable REP a un poids significatif pour la prédiction de la réussite pour les tâches t_2^{post} et t_3^{post} : il semble que la résolution de ces tâches résulte plus difficile pour les élèves des écoles REP/REP+ par rapport aux autres élèves, indépendamment de l'appartenance au groupe expérimental ou au groupe contrôle.

Nous rappelons que nos analyses sont de nature exploratoire et visent à donner des éléments de réponse à la question $QR_{apprentissage}$ « Les organisations mathématiques mixtes présentant une dimension algorithmique proposées dans le projet EXPIRE permettent-

elles aux élèves de changer leurs rapports aux praxéologies mathématiques visées? ». Notamment, nous avons exploré les données relatives à la séquence d'enseignement sur la division euclidienne. Dans nos analyses, d'ailleurs, nous avons adopté un point de vue à la fois fin, en ce qui concerne la caractérisation des praxéologies mathématiques visées, et à la fois global, qui ne tient pas compte de certaines possibles variables explicatives, comme celles liées à l'expérience de l'enseignant, au temps de verbalisation accordé par l'enseignant aux praxéologies mathématiques lors de la transposition didactique interne, etc.

Des analyses statistiques multi-niveaux sur les données issues du projet EXPIRE font un des objets du travail de thèse (en cours) de Chevalier-Laurent. Elle réalise des modèles statistiques plus détaillée pour l'ensemble des séquences EXPIRE en tenant compte de la diversité des classes impliquées dans le projet et d'autres variables liées aux professeurs. Également, elle s'occupe d'interroger les aspects liés à la sphère émotionnelle et motivationnelle des élèves face à l'utilisation de Scratch pour faire des mathématiques.

Il nous semble, à partir de l'ensemble des analyses présentées dans ce chapitre, qu'une OMM basée sur l'algorithmique et la programmation, comme celle présentée dans le chapitre 7, peut effectivement être viable au niveau de l'apprentissage de la division euclidienne, mais sous certaines conditions didactiques.

Nous voulons explorer certaines des conditions didactiques qui favorisent ou défavorisent la viabilité d'une telle approche. Le premier pas pour faire cela est d'analyser le processus de transposition didactique interne. Dans cette perspective, nous avons mené des observations des pratiques de cinq enseignants lors de la transposition de l'OMM apprêtée. Nous proposons les analyses issues de ces observations dans la partie IV.

Quatrième partie

Etude de la transposition didactique interne

Chapitre 9

Méthodologie de recherche

La problématique qui a motivé notre recherche concernait l'étude des conditions et des contraintes liées à l'introduction de la programmation dans l'enseignement des mathématiques. Nous nous demandons ainsi : *Quel est le système des conditions et contraintes qui influent sur la transposition didactique interne d'une organisation mathématique mixte portant sur le sens de la division euclidienne ?*

Nous rappelons que pour répondre à cette question de recherche, nous l'avons déclinée en ces différentes sous-questions :

- Q₁ Le professeur fait-il émerger la composante mathématique de l'OMM, en veillant que la composante algorithmique ne prenne pas le dessus ?
- Q₂ Comment est-ce que le professeur exploite et articule les divers registres d'ostensifs dont il dispose (y compris ceux liés à la dimension algorithmique) pour transposer les savoirs en jeu ?
- Q₃ Quels savoirs sont institutionnalisés par le professeur lors de la transposition didactique interne de l'OMM ?

Sur le plan général, la méthodologie que nous adoptons pour répondre à ces questions consiste à observer et évaluer des pratiques enseignantes lors du processus de transposition didactique interne de l'OMM apprêtée. Dans ce chapitre, nous présentons les détails de cette méthodologie.

9.1 Population impliquée dans l'étude

Dans notre étude, afin de déterminer les conditions et les contraintes influant sur le processus de transposition didactique interne d'une organisation mathématique mixte nous avons observé cinq professeurs des écoles (PE) qui se sont portés volontaires pendant la réalisation dans leurs classes de la séquence EXPIRE durant l'année 2018/2019. Avant de lancer l'appel à volontaires, nous avons établi deux critères que les PE devaient satisfaire pour participer à l'expérimentation :

1. les professeurs devaient avoir participé au projet EXPIRE durant l'année 2017/2018 ; il n'était pas nécessaire qu'ils aient testé les séquence Scratch pendant la phase expérimentale ;
2. les professeurs devaient avoir au moins dix ans d'expérience dans l'enseignement à l'école primaire et au moins cinq ans d'expérience dans les classes CM1/CM2.

Nous avons établi le premier critère pour réduire d'éventuels effets secondaires dus à une première prise en main du dispositif Scratch et à son utilisation pour faire faire

des mathématiques en classe (Tchounikine [2016]). En effet, tous les PE du projet EXPIRE avaient mis en place au moins la séquence Scratch ayant pour objet *Aire et pavage*, proposée au deuxième semestre de l'année 2017/2018.

Le deuxième critère de choix repose sur une hypothèse de travail : le rapport personnel des professeurs aux objets mathématiques à enseigner et à la façon de les enseigner pourrait devenir de plus en plus conforme au rapport institutionnel à ces objets au fil des années (Therriault et Morel [2016]). Cela veut dire que réduire notre étude aux pratiques enseignantes des PE expérimentés, *a priori*, permettrait de limiter les effets dus à un rapport à l'enseignement de la division euclidienne non conforme aux attentes institutionnelles.

Nous avons reçu une réponse positive de la part de cinq PE répondant aux critères ci-dessus. Nous avons pris des contacts avec eux pour expliciter les temps et les modalités de passation de l'observation dans leurs classes durant le mois d'octobre 2018. Nous avons donc demandé leur accord concernant notre présence au fond de la classe, l'installation d'une caméra fixe au fond de la classe, l'installation d'un enregistreur vocal sur l'enseignant. Nous avons précisé que les enregistrements effectués ne seraient utilisés que dans le cadre de notre thèse. Par ailleurs, dans l'optique d'une démarche écologique de recherche visant à interférer le moins possible dans la programmation annuelle des activités de classe, nous avons laissé choisir librement aux professeurs les dates de passation de la séquence Scratch sur la division euclidienne.

Tous les enseignants participant au projet EXPIRE au cours de l'année 2018/2019 avaient à leur disposition la fiche pédagogique (dans l'annexe A) présentant l'OMM. Au début de l'année ils ont suivi une formation sur le projet, dispensée par les chercheurs. Lors de ces formations les chercheurs ont communiqué aux enseignants que, pour la nouvelle mise en œuvre de la séquence, ils n'avaient pas de contraintes expérimentales à respecter. Toujours dans la perspective d'une approche écologique, les chercheurs ont également précisé que chaque professeur pouvait adapter la durée et le contenu de la séquence à leurs besoins spécifiques et aux contraintes institutionnelles.

Chacun a pu choisir les dates de passation les plus adaptées. Nous n'avons pas eu besoin de modifier les créneaux horaires proposés dans le premier tour par les différents enseignants, étant donné qu'il n'y a pas eu de superpositions parmi ceux-ci.

Dans la suite, nous appellerons les cinq professeurs constituant notre échantillon avec les prénoms fictifs suivants : Yara, Patrick, Asia, Nicole et Marine. Dans le tableau 9.1, nous décrivons des informations concernant la passation des observations des classes impliquées dans notre étude : classe en réseau d'éducation prioritaire (REP), niveau scolaire de la classe, type de séquences testées dans la phase expérimentale du projet en 2017/2018, permission accordée pour l'enregistrement audio, permission accordée pour la vidéo, nombre de séances réalisées et les dates de l'observation.

A titre d'exemple, nous pouvons tirer les informations suivantes concernant l'observation des séances réalisées par Yara. Elle a mis en œuvre la séquence en trois séances dans sa classe de niveau CM2 non REP dans les dates du 11, 13 et 18 décembre 2018. Dans l'année précédente elle avait participé au projet EXPIRE en testant la séquence Scratch. Pour l'observation elle nous a accordé la permission d'enregistrer l'audio et la vidéo des séances.

PE	REP	Niveau classe	Séquences 2017/2018	Enr. audio	Enr. vidéo	Séances	Dates
Yara	Non	CM2	Scratch	Oui	Oui	3	11-13-18 décembre 2018
Patrick	Non	CM2	Scratch	Oui	Oui	2	10-14 janvier 2019
Asia	Non	CM2	Scratch	Oui	Oui	4	18-22-24-29 janvier 2019
Nicole	Oui	CM1/CM2	Tangible	Oui	Non	1	31 janvier 2019
Marine	Non	CM1/CM2	Scratch	Oui	Non	3	1-7-8 février 2019

TABLEAU 9.1 – Informations concernant la passation de la séquence pour les cinq PE observés

9.2 Le type de données recueillies

Pour répondre à nos questions de recherche, nous avons recueillis plusieurs types de données : les enregistrements audio du discours du professeurs, les enregistrements vidéos de l'activité de classe, les notes prises durant les séances observées. En outre, nous avons recueilli des informations issues des entretiens informels avec les professeurs avant et après la passation de la séquence en classe.

En particulier, les enregistrements vidéo et audio nous ont permis de documenter les actions mises en œuvre par l'enseignant pour atteindre une intention didactique précise liée à l'OMM réalisée. En absence de l'autorisation pour filmer, nous avons basé nos analyses exclusivement sur l'enregistrement audio et sur la prise de notes des séances observées. Nous supposons que ces choix méthodologiques ne comportent pas une perte consistante d'informations relativement aux résultats de la recherche.

Dans un premier moment, Nicole ne nous avait pas accordé l'autorisation pour l'enregistrement. Ensuite, nous nous sommes rendus compte que la seule prise de notes n'était pas suffisante pour la documentation du déroulement effectif de la séance. Pour cela, nous avons donc demandé à Nicole de pouvoir au moins enregistrer sa voix pendant la séance à observer et elle a accepté.

Marine avait une classe mixte de CM1/CM2 et, en ayant testé la séquence Scratch sur la division euclidienne l'année précédente, les élèves de CM2 l'avaient déjà rencontrée. Dans les échanges par mail avec Marine avant la réalisation de la séquence, elle a déclaré que cette séquence lui demandait « une gymnastique et une réflexion pour sa mise en œuvre ». Ensuite elle nous a communiqué sa décision de mener la séquence sur des créneaux séparés pour les deux niveaux scolaires. Finalement, elle n'a pu effectuer que la première séance de la séquence avec les niveaux séparés pour des raisons d'organisation.

Comme nous l'avons présenté au début de cette section nous avons interrogé les enseignants avant et après la passation de la réalisation de la séquence en classe. Avant la réalisation de la séquence, nous leur avons posé des questions concernant la perception du PE relative :

1. au niveau global de ses élèves;
2. au rapport de ses élèves au dispositif Scratch;
3. au rapport de ses élèves à la division euclidienne.

Après la réalisation de la séquence de la part de chaque PE, nous avons organisé un

entretien informel avec chaque PE pour recueillir des informations relatives à sa vision des objectifs du projet EXPIRE.

9.3 Méthode d'analyse des données recueillies

9.3.1 Un premier traitement des données recueillies

Nous avons effectué un premier traitement des données recueillies en transcrivant sur un fichier Excel :

- le discours du professeur ;
- les échanges entre le professeur et les élèves ;
- les informations affichées au tableau ou projetées concernant l'OMM ;
- les actions mises en œuvre par le professeur pour : écrire ou dessiner au tableau, indiquer des éléments du tableau etc.

Nous avons créé pour chaque professeur un fichier Excel¹, dans lequel nous avons transcrit différentes informations concernant les séances réalisées. Cependant, dans le cas de Marine, nous avons créé deux fichiers Excel, correspondant aux déroulements complet de la séquence pour le niveau de CM1 et pour le niveau de CM2.

éanc	Temps	Durée	Episode	GT	T	ex. (t)	sol.	prog	math	T_d	o(m)	o(p)	graph	Scratch	em	action	discours
1	04:43	00:58	1							consigne							P: Premier exercice c'est ça : vous avez une cible à atteindre
1	05:41	00:05		GT1	T11	1											P: et pour ça vous avez l'instruction que vous connaissez, l'
1	05:46	00:05		GT1	T11	1				rép							
1	05:51	00:06		GT1	T11	1				dupliquer							
1	05:57	00:21		GT1	T11	1											P: et donc il faut que votre petit curseur ici, votre petit luti
1	06:18	00:28	2														P: et on peut essayer plusieurs solutions
1	06:46	00:14	3	GT1	T11	1				circuler							il prend la fiche enseignent et lit quelque chose, puis il circule dans la classe
1	07:00	00:36	4							binômes							près d'un binôme d'élèves
1	07:36	00:08	5	GT1	T11	1				circuler							P: Vous avez fini ? Bon, essayez de faire la solution qui fait
1	07:44	00:53	6							binômes							il circule dans la classe
1	08:37	00:25	7							circuler							E: Maître, est-ce qu'on peut faire que de bonds de un ? //
1	09:02	00:05	8	GT1	T11	1				gestion							il va au tableau et écrit av
1	09:07	00:02		GT1	T11	1	12x2										P: Donc là je vais mettre répéter, et là je vais mettre les sa
1	09:09	00:09		GT1	T11	1	12x2			R_représenter	1						il regarde la classe
1	09:12	00:09	9	GT1	T11	1	12x2					1	1	1			P: Alors qui me donne une solution ? Adeine
1	09:21	00:04	10	GT1	T11	1				R_convertir							il regarde le vidéo-project
1	09:25	00:07		GT1	T11	1	2x9+1x6			R_représenter	1						E: douze fois de ux ?
1	09:32	00:02		GT1	T11	1											il écrit sous "Répéter" 12

FIGURE 9.1 – Aperçu du tableau Excel

Dans la figure 9.1 nous montrons à quoi ressemble le fichier Excel. Il est composé de 18 colonnes : *numéro de la séance*, *temps*, *durée*, *épisode*, *générateur de types de tâches (OM)*, *type de tâches (OM)*, *tâche (OM)*, *solution*, τ_{prog} , τ_{math} , *type de tâches (OD)*, $RO_{oral(m)}$, $RO_{oral(p)}$, $RO_{schéma}$, $RO_{Scratch}$, RO_{em} , *actions* et *discours*. A partir des enregistrements audio nous avons renseigné les colonnes *numéro de la séance*, *temps* et *discours*. Notamment dans la colonne *discours*, nous avons indiqué le discours du professeur avec la lettre « P » et le discours de l'élève avec la lettre « E ». Nous avons dénoté avec « EE » les interventions de plusieurs élèves simultanément.

Dans un deuxième temps, grâce à l'enregistrement vidéo, nous avons renseigné la colonne *actions* du fichier Excel. Si nous n'avions pas accès à la vidéo cette colonne a été remplie uniquement à partir de l'enregistrement audio et de la prise de notes.

Nous avons retranscrit uniquement les actions qui relèvent d'une intention en lien avec le contenu de l'OMM. Les actions du professeur renseignées concernent respectivement :

1. les déplacements du professeur dans la salle de classe (ex. se lever pour aller devant le tableau) ;

1. Les fichiers sont téléchargeables au lien <https://bit.ly/3fzDlFH>

2. les actions avec une finalité didactique mises en œuvre par le professeur pendant l'activité de classe (ex. pointer un programme Scratch sur l'écran vidéo-projecté, dessiner au tableau une droite numérique, etc.);

Au sein du fichier Excel, nous passons à la ligne suivante du tableau lorsqu'une de ces conditions se vérifie :

- changement de l'acteur qui prend la parole (enseignant, élève);
- changement de l'action de la part du professeur;
- clôture d'un sujet de la part du professeur : la ligne suivante sera donc constituée par une nouvelle phrase du professeur sur un sujet différent, ou elle sera vide si le silence est prolongé.

Par ailleurs, nous avons inséré dans notre tableau Excel une colonne *durée*, dans laquelle nous avons calculé de façon automatique la durée de l'action ou du discours renseigné dans chaque ligne du tableau.

La création de ce tableau Excel nous a permis de transformer les données brutes recueillies tout au long des séquences en données exploitables pour l'analyse didactique que nous mènerons pour répondre aux questions de recherche de cette étude. Cette sélection de données nous a orienté vers la construction de nouvelles colonnes : *tâche (OM)*, *solution*, τ_{prog} , τ_{math} , $RO_{o(m)}$, $RO_{o(p)}$, $RO_{schéma}$, $RO_{Scratch}$ et RO_{em} .

9.3.2 Analyse des éléments de l'OM

La colonne *tâche (OM)* fait référence aux 18 tâches de l'OMM proposées dans les ressources mises à la disposition du professeur (auxquelles il est possible de faire référence dans l'annexe A). Pour rentrer les données de cette colonne, nous avons construit un menu déroulant. Ensuite, nous avons élaboré des règles dans Excel qui ont permis le remplissage automatique des colonnes *Type de tâches (OM)* et *Générateur (OM)*. Le niveau du type de tâches présent dans la colonne *type de tâches (OM)* correspond au *type de tâches optimum* de la description que nous avons proposé dans le chapitre 7. Si le professeur propose à sa classe des tâches différentes des 18 que nous avons proposées, mais relevant d'un des types de tâches ou des générateurs de notre modèle, nous avons pris en compte cette donnée en remplissant manuellement la colonne concernée..

Dans les colonnes τ_{prog} et τ_{math} , nous avons rentré manuellement les ingrédients des techniques qui apparaissaient dans les discours du professeur et des élèves, à partir des ingrédients que nous avons identifiés *a priori* dans les chapitres 6 et 7.

Dans la colonne *solution*, nous avons indiqué la solution qui fait l'objet de la discussion. Nous l'avons représentée sous la forme « *quotient* × *diviseur* + *reste* ».

A chaque fois qu'une solution possible fait l'objet de discussion, nous avons également identifié un ou plusieurs registres d'ostensifs à travers lesquels ces solutions sont convoquées. Nous avons donc rempli les colonnes $RO_{o(m)}$ (registre oral mathématique), $RO_{o(p)}$ (registre oral programmation), $RO_{schéma}$ (registre schématique), $RO_{Scratch}$ (registre Scratch) et RO_{em} (registre de l'écriture arithmétique), en indiquant « 1 » en cas de présence du registre d'ostensifs en jeu, et « case vide » pour en indiquer l'absence.

Après avoir complété toutes les informations concernant les éléments praxéologiques de l'OM réalisée par le professeur, nous nous intéressons au repérage des praxéologies didactiques mises en place.

9.3.3 Analyse des éléments de l'organisation didactique

A partir de la prise de notes lors de la formation des enseignants et grâce à la fiche pédagogique relative à la séquence sur la division euclidienne, nous avons défini, afin de répondre aux questions Q₁, Q₂ et Q₃, des types de tâches liés aux pratiques enseignantes.

Nous avons défini ainsi 19 types de tâches que nous avons répartis en cinq classes :

1. la classe *Gestion*, constituée du seul type de tâches $T_{gestion}$, décrit dans le tableau 9.2;
2. la classe *Consigne*, constituée du seul type de tâches $T_{consigne}$, décrit dans le tableau 9.3;
3. la classe *Travail en binômes*, constituée des types de tâches $T_{circuler}$ et $T_{binômes}$, décrits dans le tableau 9.4;
4. la classe *Mise en commun*, constituée des types de tâches $T_{représenter}$, $T_{traiter}$ et $T_{convertir}$, décrits dans le tableau 9.5;
5. la classe *Institutionnalisation*, constituée des types de tâches T^{τ} , T^{τ}_{math} , T^{θ}_{comm} , $T^{\theta}_{m/d}$, $T^{\nu}_{m/d}$, T^{θ}_{struct} , T^{θ}_{opt} , T^{θ}_{div} , T^{ν}_{cont} , $T^{\theta}_{em,cont}$, T^{ν}_{dec} et $T^{\theta}_{em,dec}$, décrits dans le tableau 9.6.

$T_{gestion}$ « Gérer les contraintes liées au temps, à l'espace, au dispositif, etc. »	Par exemple le sujet annonce le passage à une autre tâche, il demande le silence, il efface le tableau, il allume l'ordinateur et fait allumer les ordinateurs, il distribue les fiches, etc.
---	---

TABLEAU 9.2 – La classe de $T_{gestion}$

$T_{consigne}$ « Passer la consigne d'une ou plusieurs tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} vis-à-vis de toute la classe »	Le sujet, lors de la passation des consignes, peut par exemple mettre en place des actions d'étayage en évoquant des ingrédients de techniques à pouvoir utiliser pour la résolution de la tâche en jeu.
---	--

TABLEAU 9.3 – La classe de $T_{consigne}$

$T_{circuler}$ « Vérifier que les élèves sont engagés dans une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} »	Ce type d'épisode concerne le temps dans lequel le sujet laisse les élèves travailler en binômes. Ses actions visent à vérifier que tous les binômes d'élèves sont engagés dans la résolution de la bonne tâche. Les éventuelles interventions auprès d'un binôme d'élèves sont limitées à la résolution de problèmes liés au fonctionnement du dispositif Scratch ou à la validation silencieuse d'une solution proposée par un binôme.
$T_{binômes}$ « Apporter des éléments d'étayage à un binôme d'élèves »	Le sujet laisse les élèves travailler en binôme. Les interventions auprès d'un binôme d'élèves concernent l'étayage apporté par le sujet soit en cours de réalisation de la tâche soit relativement à une réponse incorrecte.

TABLEAU 9.4 – La classe de $T_{circuler}$ et $T_{binômes}$

Notamment, lors des analyses des organisations didactiques réalisées par les enseignants, nous garderons la séparation des deux types de tâches de la classe *Travail en binômes*. De cette façon, nous serons capables, grâce à l'étude d'un aérogramme, d'évaluer quantitativement le degré d'autonomie que chaque enseignant accorde aux élèves au sein de la passation de la séquence.

$T_{représenter}$ « Représenter une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} à l'aide d'un ou plusieurs registres d'ostensifs, vis-à-vis de la totalité de la classe. »
$T_{traiter}$ « Traiter une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} en passant d'un ostensif à un autre à l'intérieur d'un même registre, vis-à-vis de la totalité de la classe. »
$T_{convertir}$ « Convertir une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} en passant d'un registre à un autre, vis-à-vis de toute la classe. »

TABLEAU 9.5 – Types de tâches liés à la mise en commun d'une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$

Afin de mieux illustrer les types de tâches définie dans le Tableau 9.5, nous reportons ici des extraits de transcription des discours tirés des séances observées. Nous montrerons ainsi comment nous avons tiré, à partir de ces données les informations renseignées dans le fichier Excel.

Voici alors la transcription de l'épisode *step67* réalisé par Patrick, caractérisé par le type de tâches $T_{représenter}$:

- 1 (il regarde la classe) P : Alors qui me donne une solution ? Adeine ?
- 2 (il regarde le vidéo-projecteur) E : Douze fois deux ?
- 3 (il écrit sous 'Répéter' '12' et sous 'Avancer de' '2') P : Donc, tu as répété douze fois le saut de deux

La tâche de l'OMM concernée par cet épisode est t_1 , et la solution discutée est R[12;2]. Puisque cette solution apparaît pour la première fois lors de la séance, les actions réalisées autour de cette solution visent à la représenter. C'est pour cette raison que, à cet épisode, nous avons attribué le type de tâches $T_{représenter}$. Les registres d'ostensifs à travers lesquels la solution est évoquée sont $RO_{oral(m)}$ dans la ligne 2 et $RO_{o(p)}$ et $RO_{schéma}$ dans la ligne 3.

Toute de suite après, Patrick a réalisé l'épisode *step9*, que nous avons identifié comme de type $T_{convertir}$:

- 1 (il écrit '12x2=24' au tableau) P : et je note une chose, là tu me dis douze fois deux, ah tu fais des maths. Hop.

Ici, la solution discutée est encore R[12;2], mais cette fois la solution a été déjà représentée à l'aide d'un registre écrit (le registre $RO_{schéma}$). Dans cet épisode, le professeur convertit donc la solution d'un registre à un autre. Les registres identifiés pour cet épisode sont $RO_{o(m)}$ et RO_{em} .

Nous proposons comme exemple d'épisode de type $T_{traiter}$ l'épisode *step38* réalisé par Asie :

- 1 (elle regarde la classe) P : Merci... Et puis alors il y en a qui ont été malains, ils ont remarqué quoi une fois qu'ils avaient remarqué ça ? Pauline ?
- 2 E : Bah, que... si tu fais un... une fois vingt-quatre eh bien ça arriverait sur vingt-quatre
- 3 (elle indique la représentation du programme au tableau) P : Sauf que le problème, est-ce qu'on avait la bande 'avancer de vingt-quatre ?
- 4 E : Non, mais par contre ça marcherait

- 5 P : Non, ça marche quand-meme... mais on n'a pas les bandes pour programmer, là pour le coup...
- 6 P : ça veut dire qu'avec l'écriture mathématique on peut aller plus loin qu'avec la programmation

Cet épisode concerne la tâche t_1 de l'OMM. Le traitement concerne ici le passage de la solution R[24; 1] à la solution R[1; 24] à l'intérieur des registres $RO_{o(p)}$ et $RO_{Scratch}$.

T^T « Faire émerger un ou plusieurs ingrédients de techniques d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$, sans les institutionnaliser, avec la totalité de la classe »
T^T_{math} « Institutionnaliser un ou plusieurs ingrédients de techniques d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ avec la totalité de la classe »
T^{θ}_{comm} « Institutionnaliser des éléments technologiques sur la propriété commutative de la multiplication avec la totalité de la classe »
$T^{\theta}_{m/d}$ « Institutionnaliser des éléments technologiques sur les notions de <i>multiple</i> et <i>diviseur</i> d'un nombre naturel avec la totalité de la classe »
$T^v_{m/d}$ « Institutionnaliser des éléments du vocabulaire sur les notions de <i>multiple</i> et <i>diviseur</i> d'un nombre naturel avec la totalité de la classe »
T^{θ}_{struct} « Institutionnaliser l'équivalence entre plusieurs expressions arithmétiques à partir de l'équivalence entre deux ou plusieurs solutions ayant structures différentes d'une même tâche avec la totalité de la classe » (par exemple l'équivalence des solutions R[4; 6], (6, 6, 6, 6) et (R[3; 6], 6))
T^{θ}_{opt} « Institutionnaliser l'optimalité de la structure multiplicative d'un programme par rapport aux structures additives ou mixtes avec la totalité de la classe »
T^{θ}_{div} « Institutionnaliser des éléments technologiques sur les notions de <i>quotient</i> et de <i>reste</i> de la division euclidienne entre deux nombres naturels avec la totalité de la classe »
T^v_{cont} « Institutionnaliser des éléments du vocabulaire sur les notions de <i>quotient</i> et de <i>reste</i> de la division euclidienne entre deux nombres naturels avec la totalité de la classe »
$T^{\theta}_{em,cont}$ « Institutionnaliser l'égalité algébrique relative à la division euclidienne de deux nombres naturels en utilisant le vocabulaire lié au contexte du jeu de la cible avec la totalité de la classe » (par exemple <i>Cible = Nombre des sauts × longueur d'un saut + joker</i>)
T^v_{dec} « Institutionnaliser des éléments du vocabulaire sur les notions de <i>dividende</i> et <i>diviseur</i> avec la totalité de la classe »
$T^{\theta}_{em,dec}$ « Institutionnaliser l'égalité algébrique relative à la division euclidienne de deux nombres naturels en utilisant le vocabulaire mathématique avec la totalité de la classe » (<i>Dividende = Quotient × Diviseur + Reste</i>)

TABLEAU 9.6 – Types de tâches liés à l'émergence ou à l'institutionnalisation d'un élément technique ou technologique dans le cadre de l'organisation mathématique réalisée

Nous illustrons avec des exemples la différence entre le type de tâches T^T et T^T_{math} . D'abord, nous proposons l'analyse de l'épisode *s1ep67* réalisé par Patrick, dont le discours est retranscrit ci-dessous :

- 1 P : Donc, en tatonnant, en faisant des essais, qu'est-ce que vous avez fait pour arriver au résultat, tient ? Comment vous avez fait ? Expliquez-moi. Gaetan ?
- 2 E : J'ai mis... J'ai coincé dans des chiffres en random, donc, par exemple quinze...

- 3 P : Oui ?
- 4 E : Eh bah, comme ce n'a pas marché, il fallait un petit peu plus et j'ai essayé 20, et comme ça n'a marché j'ai compté les cases...
- 5 P : Ok, donc, on fait des essais et on arrive au résultat.
- 6 P : Oui ? Neimene ?
- 7 E : Bah, moi, en fait, j'ai essayé, j'ai mis trente, et après j'ai vu qu'à chaque fois j'avancais de trois et par exemple trente-trois, trente-six, et ensuite du coup...
- 8 P : T'as compté ?
- 9 E : Oui

Dans ces lignes nous pouvons repérer deux ingrédients relevant de notre modèle praxéologique : $T_{q,hasard}$ et $T_{q,int}$. Dans ce cas Patrick demande aux élèves d'explicitier la technique qu'ils ont utilisé pour résoudre la tâche t_{6a} . Les explications restent uniquement partagées à l'oral et l'enseignant ne souligne pas dans son discours que la technique proposée par l'élève doit être retenue par les autres membres de la classe. Dans cet épisode nous ne voyons pas de trace d'institutionnalisation des ingrédients de techniques émergés. Nous attribuons alors le type de tâches T^T à cet épisode.

Analysons, toujours à titre d'exemple, l'épisode *s4ep74* de l'OD de Asie :

- 1 P : Donc, toujours le même système, il faut déjà que je vois à peu près... je vois que je suis plus loin de la table de sept, par ce que la table de sept, ça s'arrête à soixante-dix... Donc, il faut que je vois si je suis vraiment beaucoup trop loin ou pas trop beaucoup plus loin... Bon...
- 2 (elle indique l'écriture $7 \times 10 = 70$ écrit au tableau) P : Donc, ça c'est sept fois dix... l'étape qu'il nous a été donnée toute à l'heure avec les bouquets, si je calcule sept fois vingt... c'est-à-dire... deux fois plus loin de la table de sept... je vais tomber sur quel nombre ? Là, dans ma table de sept ça va à soixante-dix... si je fais encore soixante-dix je tombes sur quoi ?
- 3 (elle écrit ' $7 \times 20 = 140$ ' plus en bas) E : Cent-quarante
- 4 (elle indique ' $7 \times 20 = 140$ ') P : Je vais tomber sur cent-quarante, bon, moi je veux aller à quatre-vingt-dix-sept... donc, je suis moins loin que ça ... je suis entre soixante dix et cent-quarante...
- 5 (elle indique l'espace vide entre les deux écritures) P : Donc... je suis quelque part par là... beh, je peux écrire mes multiples... je peux réfléchir avant... bon, je vais essayer donc, entre dix et vingt... c'est pas la peine que j'aïlle essayer vingt-cinq, eh ? Ça marchera pas... c'est pas la peine que je vais essayer plus petit que dix, ça marchera pas non plus, donc, je vais essayer entre dix et vingt, alors, peut-etre qu'il y en a qui ont essayé quinze, quatorze, je sais pas... finalement, bon, le bon nombre c'était treize...
- 6 (elle écrit, sous ' $7 \times 10 = 77$ ', ' $7 \times 11 = 77$ ') P : Bon, mais je peux aussi écrire mes multiples... sept fois onze... ça c'est... onze fois sept...
- 7 (elle écrit ' $7 \times 12 =$ ') P : Quel est le multiple suivant, c'est à dire... douze fois sept ?
- 8 (elle regarde la classe) P : Beh, j'ajoute sept à chaque coup, donc si je fais soixante-dix-sept et sept, combien je trouves ? C'est là que le calcul mental est extrêmement précieux... Pauline ?
- 9 (elle complète ' 84 ') E : Quatre-vingt-quatre
- 10 (elle écrit ' $7 \times 13 =$ ') P : Merci... Bon, je suis loin de quatre-vingt-dix-sept, je peux encore essayer d'avancer... treize fois sept... j'avance encore de sept, combien ça fait ? Jasmine ?

- 11 E : Quatre-vingt-onze
- 12 (elle écrit '98') P : Quatre-vingt-onze... J'avance encore de sept, pour faire quatorze fois, multiple de sept c'est quatorze fois sept, Chloé ?
- 13 (elle regarde la classe) E : Quatre-vingt-dix-huit
- 14 P : Et là, je me dis oulala, qu'est-ce que je me dis là ? Qu'est-ce que je me dis ?
- 15 E : Que je vais aller trop loin
- 16 (elle dessine un rectangle autour de $7 \times 13 = 91$) P : Eh, beh, je vais aller trop loin... Donc, ça ça marche pas... Donc je vais programmer mon répéter treize fois... avancer de sept... j'en vois encore qui programment avec avancer de douze, mais vous êtes où les demoiselles, on vous demande des sauts de sept, vous avez... quinze jours, trois semaines de retard, là...
- 17 (elle écrit dans 'nb. sauts' '13') P : Alors, le problème c'est que je suis à quatre-vingt-onze... du coup je vais utiliser mon joker...
- 18 P : Donc, mon nombre de sauts c'est treize... quel va être mon joker... avec treize sauts de sept, je tombe sur quatre-vingt-onze... mais on me demande d'aller me poser sur quatre-vingt-dix-sept... Donc, de combien il va être mon joker, Nicra ?
- 19 E : six
- 20 P : Eh, bah, je vais mettre six, par ce que quatre-vingt-onze plus six, ça fait quatre-vingt-dix-sept, si je sais pas, beh, je compte sur la bande...

Dans cet épisode, dans lequel Asie exécute au tableau une technique pour résoudre la tâche t_9 , technique qui avait été précédemment explicitée lors de la séance, nous avons pu repérer les ingrédients $T_{multiples,q}$ et T_{reste} . Ici, nous pouvons identifier un ensemble de gestes relevant de l'intention didactique d'Asie d'institutionnaliser la technique en question vis-à-vis de toute la classe. Un de ces gestes est la mise en commun d'une trace écrite pour la technique, mais également nous avons remarqué que Asie a consacré beaucoup de temps sur l'explicitation et la justification des différentes étapes de la technique. C'est pour ces raisons que nous ne considérons pas cet épisode du type T^T mais du type T^T_{math} .

9.3.4 Découpage des séances réalisées en épisodes

La présence ou l'absence des types de tâches de l'OD déterminés *a priori* dans la section précédente, ainsi que les techniques didactiques mises en place seront retenues comme indicateurs de la cohérence des pratiques de chaque professeur par rapport à ce que les chercheurs ont prévu lors de la conception de la séquence. L'analyse des pratiques enseignantes, à la lumière des types de tâches présentées dans les tableaux 9.2, 9.3, 9.4, 9.5 et 9.6, nous permettra de répondre aux questions Q_1 , Q_2 et Q_3 formulées en début de ce chapitre.

Nous revenons maintenant au tableau Excel que nous avons produit pour chaque enseignant. Les types de tâches identifiés *a priori* nous ont permis de regrouper des lignes consécutives du fichier Excel relevant d'un même type de tâches. Nous avons ainsi inséré dans le tableau Excel une colonne appelée *Type de tâches (OD)*. Pour remplir cette colonne nous avons créé un menu déroulant avec les 19 types de tâches et une condition supplémentaire appelée « *non classé* » quand l'élément de la pratique n'est pas identifiable avec un de ces 19 types de tâches.

L'identification de « groupes de lignes consécutives » dans le fichier Excel donne lieu à un découpage de la séquence en épisodes. Par construction, chaque épisode sera caractérisé par une tâche mathématique et par un type de tâches didactique précis.

En résumant, pour chaque professeur, nous sommes en mesure non seulement de nous prononcer sur :

- les types de tâches mathématiques et didactiques qui ont été réalisés;
- le nombre d'épisodes relatifs à un certain type de tâches;
- la durée de la totalité des épisodes consacrés à un type de tâches spécifique.

9.4 Supports d'analyse

Pour chacune des questions Q_1 , Q_2 et Q_3 nous avons identifié des sous-questions qui nous ont permis d'avancer sur la construction de notre méthode d'analyse.

9.4.1 Supports d'analyse pour la question Q_1

Nous avons décliné la question Q_1 en deux sous questions :

- $Q_{1,1}$ Le professeur, dans son organisation didactique, renvoie-t-il à des ingrédients de techniques présents au premier niveau de granularité dans le graphe des types de tâches lié à l'OMM (niveau algorithmique) ?
- $Q_{1,2}$ Le professeur, dans son organisation didactique, renvoie-t-il à des ingrédients de techniques présents au deuxième niveau de granularité dans le graphe des types de tâches lié à l'OMM (niveau algorithmique) ?

Nous avons également décliné les sous-questions $Q_{1,1}$ et $Q_{1,2}$ dans les questions suivantes :

- $Q_{1,1,1}$ Quel(s) ingrédient(s) des techniques identifiés dans le graphe des types de tâches lié à l'OMM (niveau algorithmique) apparaissent dans l'OD du professeur ?
- $Q_{1,1,2}$ Dans quel(s) type(s) d'épisode(s) renvoie-t-il à chaque ingrédient de technique (niveau algorithmique) apparu ?
- $Q_{1,1,3}$ Une fois que cet ingrédient de technique (niveau algorithmique) apparaît, est-ce qu'il se représente dans l'OD avec une fonction différente ?
- $Q_{1,2,1}$ Quel(s) ingrédient(s) des techniques identifiés dans le graphe des types de tâches lié à l'OMM (niveau mathématique) apparaissent dans l'OD du professeur ?
- $Q_{1,2,2}$ Dans quel(s) type(s) d'épisode(s) renvoie-t-il à chaque ingrédient de technique (niveau mathématique) apparu ?
- $Q_{1,2,3}$ Une fois que cet ingrédient (niveau mathématique) apparaît, est-ce qu'il se représente dans l'OD avec une fonction différente ?

Pour répondre aux questions $Q_{1,1,1}$, $Q_{1,1,2}$ et $Q_{1,1,3}$, nous avons parcouru les données de la colonne τ_{prog} . Dès qu'un ingrédient de technique apparaissait nous l'avons reporté dans la première colonne d'un nouveau tableau. Dans la deuxième colonne de ce tableau nous avons renseigné les coordonnées de l'épisode dans lequel l'ingrédient est apparu (numéro de séance et numéro d'épisode). Finalement dans la dernière colonne nous avons indiqué le type de tâches didactique concerné.

Pour répondre aux questions $Q_{1,2,1}$, $Q_{1,2,2}$ et $Q_{1,2,3}$, nous avons appliqué la même procédure de création d'un nouveau tableau, mais en parcourant, cette fois-ci, les données de la colonne τ_{math} du tableau principal.

9.4.2 Supports d'analyse pour la question Q₂

La question Q₂ peut se décliner en deux sous-questions :

- Q_{2,1} Le professeur utilise-t-il dans son organisation didactique plusieurs registres d'ostensifs pour mettre en commun une même solution?
- Q_{2,2} Le professeur fait-t-il un lien explicite, à travers le registre de l'oralité entre le registre graphique, le registre de l'écriture mathématique et le registre Scratch?

Nous avons décliné la question Q_{2,1}, à son tour, dans les huit points suivants :

- Q_{2,1,1} Quels registres d'ostensifs sont utilisés en phase de mise en commun d'une solution?
- Q_{2,1,2} Y-a-t-il un registre d'ostensifs privilégié par rapport aux autres en phase de mise en commun? Lequel?
- Q_{2,1,3} Dans quel partie de la séquence il n'utilise pas le registre privilégié?
- Q_{2,1,4} Y-a-t-il un registre d'ostensifs moins utilisé par rapport aux autres en phase de mise en commun? Lequel?
- Q_{2,1,5} Dans quelle partie de la séquence le professeur adopte-t-il le registre moins utilisé?
- Q_{2,1,6} Quels registres d'ostensifs sont utilisés pour représenter une solution?
- Q_{2,1,7} Quels registres d'ostensifs sont utilisés pour traiter une solution?
- Q_{2,1,8} Vers quels registres d'ostensifs le professeur mène la conversion d'une solution?

Pour donner une réponse aux questions de Q_{2,1,1} à Q_{2,1,5}, nous avons produit, à partir des données du tableau principal, un histogramme empilé à 100% concernant uniquement les épisodes relatifs à la mise en commun d'une solution. Cet histogramme montrera pour chacun de ces épisodes l'apport des différents registres d'ostensifs adoptés. Pour les questions de Q_{2,1,6} à Q_{2,1,8}, nous avons produit trois histogrammes du même type de celui précédemment décrit, un pour chaque type de tâches $T_{Représenter}$, $T_{Traiter}$ et $T_{Convertir}$.

Pour répondre à la question Q_{2,2}, nous analyserons en détail les épisodes caractérisés par le type de tâches didactique $T_{Convertir}$.

9.4.3 Supports d'analyse pour la question Q₃

Pour répondre à la question issue de la question Q₃ « *Quels savoirs sont institutionnalisés par le professeur lors de la transposition didactique de l'OMM?* », nous nous basons pour nos analyses sur la présence des types de tâches didactiques du groupe *Institutionnalisation*. Cela, en effet, correspond à l'identification des éléments du savoir, techniques et technologiques, susceptibles d'être institutionnalisés à partir de l'OMM mise en place.

Concernant la question « *Comment?* », nous allons décrire les techniques didactiques mises en place pour les types de tâches du groupe *Institutionnalisation* pour rechercher des régularités de pratiques. Notamment, nous rechercherons dans notre analyse des pratiques liées à la mixité de dispositifs qui est au cœur de notre problématique.

Ensuite, concernant le « *Pourquoi?* », nous pourrions formuler des hypothèses, sur la base des échanges informels que nous avons eu avec les enseignants avant et après la réalisation de la séquence. Notamment, nous essayerons de mettre en lumière les diverses conditions et contraintes qui ont eu un poids sur l'organisation didactique réalisée par chaque enseignant.

Chapitre 10

Résultats

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats issus de l'analyse des organisations didactiques réalisées par les cinq PE observés. La discussion de ces résultats, qui fera l'objet du prochain chapitre, nous permettra d'identifier des profils d'enseignants, de les comparer et d'identifier des pratiques pour la transposition didactique interne de l'OMM apprise conformes aux attentes des chercheurs du projet EXPIRE. Cela nous permet d'exploiter notre troisième axe de recherche.

Tout au long de ce chapitre, nous faisons référence aux types de tâches mathématiques et algorithmiques identifiés dans les chapitres 6 et 7, ainsi qu'aux types de tâches didactiques définis lors du chapitre 9. Il est possible de retrouver l'ensemble de ces types de tâches dans l'annexe D.

10.1 Analyse de l'OD réalisée par Yara

Yara a mis en œuvre l'OMM apprise dans sa classe de niveau CM2 en trois séances d'environ 50 minutes chacune. Dans sa classe nous avons eu l'autorisation de recueillir soit l'enregistrement audio soit l'enregistrement vidéo.

Entre la réalisation de la première et de la deuxième séance il y a eu un intervalle de 2 jours, alors qu'entre la deuxième et la troisième la distance était de 5 jours.

Lors de l'année précédente à l'observation, Yara avait pris part au projet EXPIRE en réalisant la version Scratch des séquences.

La salle de classe de Yara était équipée d'un vidéo-projecteur et d'un tableau noir (Figure 10.1). L'ordinateur qui était branché au vidéo-projecteur était positionné au fond de la classe.



FIGURE 10.1 – Equipement de la salle de classe de Yara

La classe de Yara se compose de 28 élèves; elle a formé, lors de la première séance, des binômes qui ont été puis reproduits lors des séances suivantes.

10.1.1 Adaptation de l'OM dans la classe de Yara

Yara, après avoir expliqué les consignes pour chaque type de tâches, en précisant les contraintes qui devaient être respectées, a fait travailler les élèves presque en autonomie : de manière générale, l'enseignante a permis aux élèves de passer à la tâche suivante au sein d'un même type de tâches. Une des conditions qu'elle a imposée aux élèves consistait à prendre note sur les solutions trouvées pour chaque tâche, en demandant explicitement que la solution soit représentée à chaque fois sous forme d'écriture mathématique. De plus les élèves avaient le droit de travailler sur une feuille de papier pour poser des opérations, réaliser des schémas, etc.

La mise en commun des solutions n'a pas eu lieu pour toutes les tâches, mais uniquement pour t_1 , t_{3a} , t_4 , t_5 , t_{6a} , t_7 , t_{8a} , et t_{11a} . Ce choix a été fait par Yara dans l'objectif de consacrer plus de temps à l'émergence et l'institutionnalisation des connaissances mathématiques visées, mais de mettre quand-même en commun les solutions d'au moins une tâche de chaque type.

10.1.2 Les éléments de l'OD apparus

Nous présentons, dans le tableau 10.1, le comptage des épisodes par séance réalisés pour chaque classe des types de tâches didactiques identifiés dans le chapitre 9.

Par ailleurs, nous montrons dans la Figure 10.2 la répartition du temps total de la séquence consacré par Yara à chaque classe de types de tâches (nous distinguons dans la classe *Travail en binômes* les types de tâches $T_{circuler}$, en bleu clair, et $T_{binômes}$, en bleu foncé).

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (tot)
<i>Gestion</i>	7	4	6	16
<i>Consigne</i>	4	4	4	12
<i>Travail en binômes</i>	23	5	10	38
<i>Mise en commun</i>	14	7	6	27
<i>Institutionnalisation</i>	11	6	9	26
non classé	0	1	1	2
total	59	26	36	121

TABLEAU 10.1 – Nombre d’épisodes consacrés par Yara à chaque classe de types de tâches

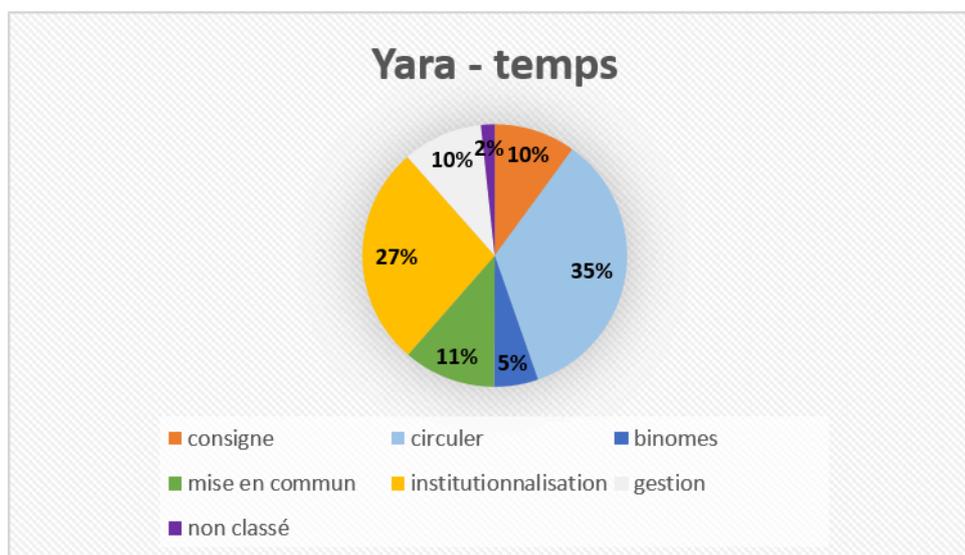


FIGURE 10.2 – Répartition du temps consacré par Yara à chaque classe d’éléments de l’OD

En lisant ce graphique, nous pouvons constater que :

1. le temps dédié au travail en binômes est le 40% du temps total (dont seulement 5% d’intervention de l’enseignante) ;
2. le temps dédié à la mise en commun des solutions correspond à l’11% du temps total ;
3. le temps consacré à l’émergence et l’institutionnalisation des praxéologies mathématiques visées correspond au 27% du temps total.

10.1.3 Les ingrédients des techniques émergés dans l’OD de Yara

Dans l’OD réalisée par Yara, nous voyons émerger les ingrédients de techniques présentés en Figure 10.3 (niveau *algorithmique*) et en Figure 10.4 (niveau *mathématique*).

prog.	ep	type ep
rép	s1ep20	R_représente

FIGURE 10.3 – Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l’OD de Yara

En particulier, un seul ingrédient de technique du niveau *algorithmique* apparaît ($T_{répéter}$). Il apparaît dans l’épisode *s1ep20* de type $T_{représente}$, que nous transcrivons ci-dessous :

- 1 E : Déjà on va... avancer de huit, et puis de huit et huit...
parce que... trois fois huit c'est égal à vingt-quatre, du coup...
on arrive jusqu'à vingt-quatre... ehm parce que huit...
- 2 M : Très bien, donc si il y a quelque chose, donc vous le dites...
Oui, Thibaud ?
- 3 E : On peut mettre à huit, donc répéter... et vous mettez répéter
trois fois et vous mettez huit dans...
- 4 M : Ah, oui, vous avez le droit, c'est huit plus huit plus huit,
donc...

Dans cet extrait, nous voyons que l'ingrédient $T_{répéter}$ est émergé spontanément grâce à l'observation d'un élève, pendant la mise en commun d'une solution de la tâche t_1 .

math	ep	type ep
tables	s1ep24	τ
q,hasard	s1ep46	binomes
q,hasard	s2ep16	τ
q,multiples	s2ep16	τ
q,int	s2ep17	τ_{math}
q,multiples	s3ep10	τ
q,int	s3ep10	τ
q,encadrer	s3ep16	τ
q,encadrer	s3ep33	τ
q,add	s3ep34	τ
q,tables	s3ep35	τ
q,div	s3ep36	τ_{math}

FIGURE 10.4 – Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Yara

En ce qui concerne les ingrédients de techniques au niveau *mathématique*, nous pouvons observer l'émergence de plusieurs techniques de $T_{dét,q}$, tout au long de la séquence, mais principalement lors de la troisième séance. En particulier, nous observons l'apparition de l'ingrédient $T_{q,div}$ qu'elle a aussi institutionnalisé lors du dernier épisode de la séquence (s3ep36) : au sein de cet épisode Yara fait émerger avec ses élèves la division euclidienne comme une technique qui donne d'un seul coup le nombre de sauts (le quotient) et le joker (le reste) pour chaque tâche donnée; de plus elle donne un exemple en faisant poser à un élève au tableau la division euclidienne de 135 par 12 afin de résoudre la tâche t_{11a} .

10.1.4 Les registres d'ostensifs utilisés par Yara lors de la mise en commun

Dans le Tableau 10.2 nous présentons le nombre d'épisodes consacrés à chaque type de tâches de la classe *Mise en commun*.

Les épisodes de cette classe se répartissent de façon presque équitable entre les deux types de tâches $T_{représenter}$ et T_{conver_tir} . En revanche, nous observons l'absence d'épisodes de type $T_{traiter}$.

Parmi les registres d'ostensifs évoqués dans l'OD réalisée par Yara, nous ne retrouvons pas le registre RO_{graph} , mais nous retrouvons tous les autres. Dans la pratique de Yara, nous reconnaissons une façon systématique de convoquer le registre Scratch pour chaque solution mise en commun. A chaque fois, elle invitait un binôme à partager une

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (tot)
$T_{représenter}$	8	4	3	15
$T_{traiter}$	0	0	0	0
$T_{convertir}$	6	3	3	12
total	14	6	9	26

TABLEAU 10.2 – Nombre des types de tâches de la classe *Mise en commun* par séance réalisés par Yara

solution avec la classe en demandant qu'un élève la présentait oralement et que l'autre se rendait près de l'ordinateur branché au vidéo-projecteur pour créer le relatif programme Scratch et l'exécuter. Ensuite, elle demandait à l'élève qui était au tableau de convertir le programme en écriture mathématique.

Les ostensifs de RO_{em} produits résultent congruents aux ostensifs de $RO_{Scratch}$ apparus, dans le sens précisé dans le chapitre 7. Par exemple le programme (8, 8, 8), dont l'exécution permet au lutin d'arriver sur le nombre 24, est convertit dans l'ostensif $8+8+8 = 24$, alors que le programme $R[3;8]$ donne lieu à l'ostensif $3 \times 8 = 24$. De la même manière, pour les tâches de T_2 , dans lesquelles la consigne consiste à faire rapprocher au maximum le lutin de la cible, les conversions sont faites en gardant la congruence entre le programme, son exécution et l'égalité mathématique produite. Dans ce cas, Yara fait rajouter à l'élève un commentaire écrit au tableau pour expliciter combien de cases manquent au lutin pour atteindre la cible en obtenant une écriture du type « $5 \times 2 = 10$ et il manque 1 pour arriver à 11 ». De plus Yara est attentive à ne pas mélanger l'ordre des facteurs dans les diverses solutions présentées : elle fait toujours poser le nombre de sauts comme premier facteur et la valeur du saut comme deuxième facteur.

Dans la Figure 10.5, nous pouvons observer l'articulation des différents registres au cours des épisodes de la classe *Mise en commun* présentes dans l'ordre chronologique.

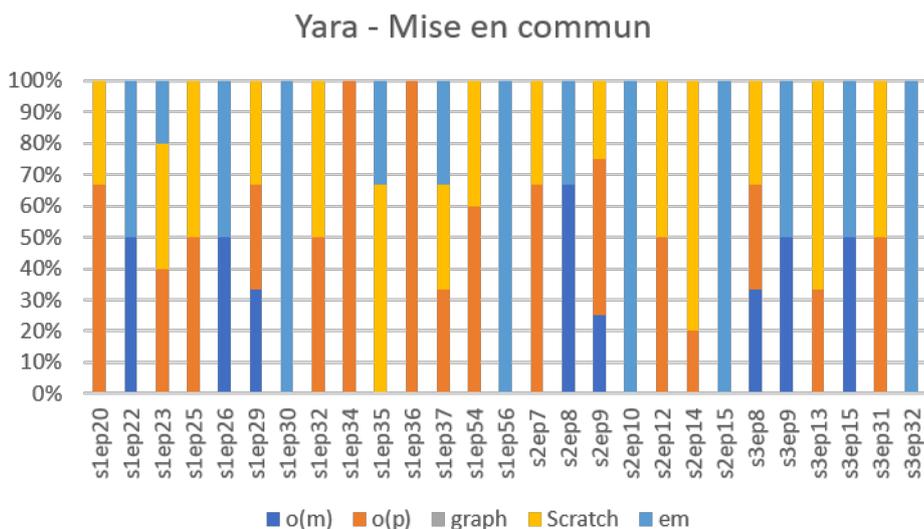


FIGURE 10.5 – Registres adoptés par Yara dans la mise en commun des solutions

Nous observons un recours systématique aux registres d'ostensifs $RO_{oral(m)}$, $RO_{oral(p)}$, $RO_{Scratch}$ et RO_{em} , sans la prévalence d'aucun registre sur les autres. En regardant plus en détails le même diagramme en séparant les épisodes de type $T_{représenter}$ (Figure 10.6) des épisodes de type $T_{convertir}$ (Figure 10.7), nous observons que généralement Yara repré-

sente les diverses solutions dans le registre $RO_{Scratch}$ en les verbalisant grâce au registre $RO_{oral(p)}$ et que, ensuite, elle les convertit dans le registre RO_{em} à l'aide du registre oral $RO_{oral(p)}$, conformément aux attentes des concepteurs de l'OMM appêtée.

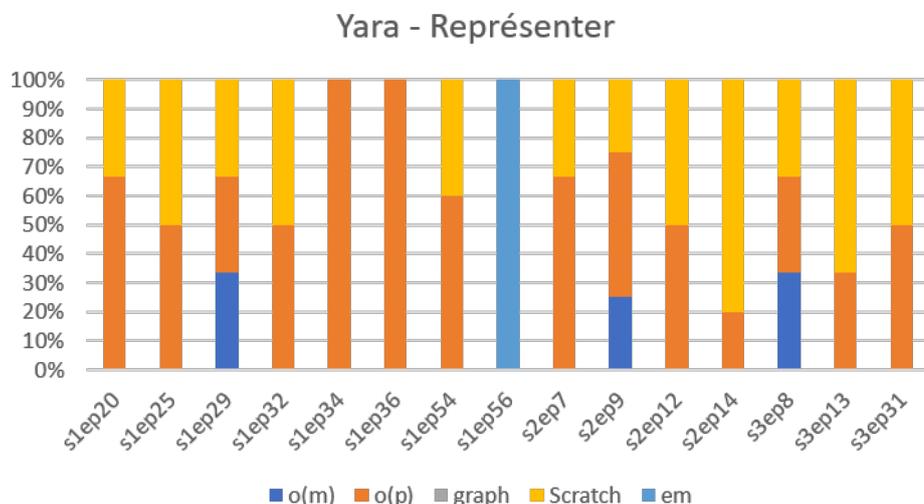


FIGURE 10.6 – Registres adoptés par Yara pour représenter les solutions lors de la mise en commun

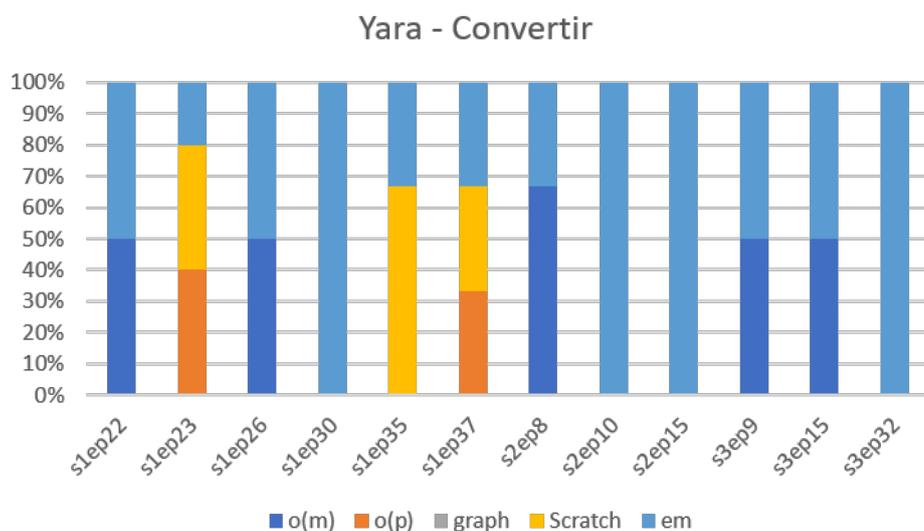


FIGURE 10.7 – Registres vers lesquels Yara convertit des solutions lors de la mise en commun

10.1.5 L'institutionnalisation d'éléments technique-technologiques

Le temps consacré par Yara à l'émergence et l'institutionnalisation des connaissances mathématiques visées prend le 27% de la durée totale de la séquence. Il s'agit d'une pourcentage relativement importante qui mérite d'être explorée plus en détails. Nous explicitons alors le nombre des épisodes relatifs à chaque type de tâches didactique de la classe *Institutionnalisation*, réalisés par Yara, dans le Tableau 10.3.

Nous observons que le seul type de tâches absent dans l'OD de Yara est T_{struct}^{θ} . Celui qui est accompli plusieurs fois est T^{\top} , principalement lors de la troisième séance et nous trouvons seulement deux épisodes caractérisés par le type de tâches T_{math}^{\top} , dans lesquels

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (tot)
T^τ	2	2	6	10
T_{math}^τ	0	1	1	2
T_{comm}^θ	4	0	0	4
$T_{m/d}^\theta$	1	0	0	1
$T_{m/d}^v$	1	0	0	1
T_{struct}^θ	0	0	0	0
T_{opt}^θ	1	0	0	1
T_{div}^θ	0	1	1	2
T_{cont}^v	1	0	1	2
$T_{em,cont}^\theta$	0	1	0	1
T_{dec}^v	1	0	0	1
$T_{em,dec}^\theta$	0	1	0	1
total	11	6	9	26

TABLEAU 10.3 – Nombre des types de tâches de la classe *Institutionnalisation* par séance réalisés par Yara

des techniques mathématiques sont institutionnalisées. Du point de vue qualitatif, en regardant de plus près les types de tâches relevant du vocabulaire, nous pouvons observer que Yara insiste plusieurs fois à que les expressions « cible », « lutin », « taille du saut », « nombre de sauts » soient utilisées lors de l'explicitation des solutions de la part des élèves.

Elle se servira de ces expressions pour ensuite faire émerger le vocabulaire relatif à la division euclidienne (dividende, diviseur, quotient). Nous observons, d'ailleurs, la présence des types de tâches $T_{em,cont}$ et $T_{em,dec}$; les deux apparaissent lors de la deuxième séance (*s2ep20* et *s2ep22*). Il s'agit d'épisodes de durée relativement longue dans lesquels Yara généralise la résolution mathématique des tâches travaillées et verbalise, d'abord avec un vocabulaire contextualisé au jeu de la cible, puis en reprenant le vocabulaire relatif à la division euclidienne, l'écriture « *dividende = diviseur \times quotient + reste* ». Elle le fait à partir des ostensifs écrits au tableau relevant de RO_{em} de type « $5 \times 2 = 10$ et il manque 1 pour arriver à 11 ».

10.1.6 Les épisodes *non classés* réalisés par Yara

Au cours de son OD, Yara réalise un seul épisode *non classé* qui est le *s2ep19*. Nous le transcrivons ci-dessous :

- 1 P : Oui, mais déjà avec celui-là qu'est-ce que vous avez fait avec votre calculatrice ?
- 2 E : Beh, on a fait trois fois vingt-cinq...
- 3 P : Avec ta calculatrice tu as pris et tu as fait des essais... pour aller plus vite...
- 4 E : Ehm, en fait... on a fait des essais... par exemple... on a fait vingt-cinq, on a on avait mis vingt au début... répéter vingt fois, c'était pas ça... on avait mis vingt-cinq c'était ça, en fait on faisait
- 5 P : Et donc tu as essayé avec ta calculatrice, tu mettais vingt-cinq fois trois
- 6 E : Eh, oui, on a fait ça

Dans cet épisode, en effet, Yara s'intéresse de l'usage de la calculatrice de la part de certains élèves. Nous n'avions pas prévu, dans notre modèle de référence, le recours à la calculette comme technique de résolution des tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$. Ici, nous observons l'intention didactique de Yara de faire expliciter les tâtonnements des élèves et les raisons pour lesquelles ils ont fait recours à la calculette (ligne 3).

10.1.7 Réponses de Yara aux entretiens informels

Grâce aux entretiens informels eu avec Yara, nous avons pu repérer des informations concernant sa perception concernant :

- le niveau de ses élèves : elle nous indique que sa classe est une classe normale, mais qu'il y a quelques élèves ayant un niveau plus bas et des grosses difficultés, notamment en mathématiques ;
- le rapport de ses élèves au dispositif Scratch : avant la passation de l'OMM observée, elle a mis en place une activité, toujours conçue au sein du projet EXPIRE, mais livrée au deuxième semestre de l'année scolaire 2017/2018, ayant pour objet le repérage de points sur le plan. Yara nous dit qu'à son avis ces séances ont permis aux élèves de suffisamment se familiariser au logiciel Scratch pour pouvoir manipuler l'environnement conçu pour la séquence sur la division euclidienne ;
- le rapport de ses élèves à la division euclidienne : quelques semaines avant la passation de la séquence sur la division euclidienne elle a institutionnalisé dans sa classe les notions de multiples et diviseurs. Par ailleurs, en s'agissant d'une classe de CM2, les élèves avaient déjà travaillé préalablement des compétences liées à la division euclidienne et l'algorithme de division euclidienne entre deux nombres naturels est connu.

Nous indiquons que l'entretien avec Yara a fait émerger un fort intérêt vers la recherche en didactique des mathématiques. Elle a participé déjà à des nombreux projets de recherche avant le projet EXPIRE, qui l'ont amenée au fil des années à prendre du recul sur ses propres pratiques enseignantes ainsi que sur l'usage du numérique pour faire des mathématiques en classe. Toutefois il s'agit de la première occasion pour elle de tester un environnement de programmation. Concernant l'introduction de la programmation dans les programmes scolaires elle pense que cela peut être utile pour améliorer la capacité des élèves de verbaliser leurs procédures.

10.2 Analyse de l'OD réalisée par Patrick

Patrick a réalisé la séquence en deux séances d'environ une heure chacune. Il s'agit d'une classe de CM2, composée de 21 élèves, non-REP. Lors de la phase expérimentale en 2017, Patrick avait réalisé les séquences dans le dispositif Scratch.

10.2.1 Adaptation de l'OM dans la classe de Patrick

Dans sa salle de classe Patrick dispose d'un tableau blanc et d'un ordinateur branché à un vidéo-projecteur. Pendant toute la séquence Patrick fait référence de temps en temps à la fiche pédagogique donnée par les chercheurs du projet EXPIRE aux enseignants en début d'année.

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (tot)
<i>Gestion</i>	10	10	20
<i>Consigne</i>	10	6	16
<i>Travail en binômes</i>	23	39	62
<i>Mise en commun</i>	23	18	41
<i>Institutionnalisation</i>	7	3	10
non classé	0	2	2
total	73	78	151

TABLEAU 10.4 – Nombre d'épisodes consacrés par Patrick à chaque classe de types de tâches

Au niveau des modalités de travail le choix de Patrick est de grouper les élèves en 9 binômes et un trinôme, auxquels il distribue, lors de la première séance, les fiches avec les consignes.

Dans le cas de Patrick l'organisation mathématique prévue par les chercheurs a été enrichie par l'introduction d'une tâche supplémentaire, relevant du type de tâches $T_{2,4}$ au début de la deuxième séance avec le but de réactiver les connaissances travaillées lors de la première séance. Les tâches t_{6b} , t_{6c} et t_{6d} ne sont pas évoquées lors de la mise en commun.

Toutes les tâches de l'OM sont travaillées par les binômes uniquement dans le dispositif Scratch.

10.2.2 Les éléments de l'OD apparus

Dans la classe de Patrick nous avons pu recueillir les données audio et vidéo que nous avons ensuite reporté dans un tableau Excel selon les règles de transcription explicitées dans le chapitre 9.

Dans le tableau 10.4 nous avons recueilli les données relatives au nombre d'épisodes qui relèvent de chaque classe de types de tâches identifiée *a priori* pour chaque séance réalisée par Patrick. Au total il a réalisé 151 épisodes dont seulement 2 non classés.

Nous avons résumé les informations concernant le temps dédié à chaque classe d'éléments d'OD dans le graphique en secteurs montré en Figure 10.8.

Notamment, nous pouvons voir que :

1. le temps total dédié au travail en binômes correspond au 39% de la durée totale de la séquence (28% + 11%);
2. le temps relatif à la mise en commun des solutions correspond au 23%;
3. le temps consacré à l'institutionnalisation des objets mathématiques liés à l'OMM représente le 12% de la durée totale.

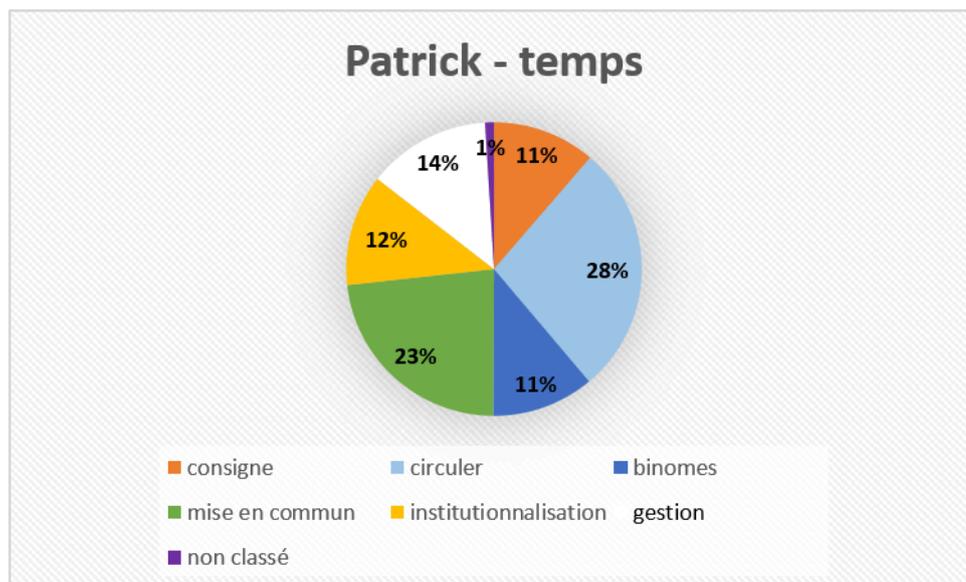


FIGURE 10.8 – Répartition du temps consacré par Patrick à chaque classe d'éléments de l'OD

10.2.3 Les ingrédients des techniques émergés dans l'OD de Patrick

Comme nous pouvons le voir dans le tableau présenté en Figure 10.9, Patrick dans son OD inclut un renvoi à l'ingrédient $T_{répéter}$ « Utiliser le bloc répéter dans le programme Scratch ». Notamment, les épisodes concernés sont *s1ep1*, *s2ep2* et *s2ep36*, dans lesquels il présente les consignes respectivement des types de tâches $T_{1,1}$, $T_{2,2}$ et $T_{3,1}$. Par ailleurs, dans l'épisode *s1ep1*, encore de type $T_{consigne}$, il évoque aussi l'ingrédient $T_{dupliquer}$ « Dupliquer un bloc d'instruction ».

prog.	ep	type ep
rép	s1ep1	consigne
dupliquer	s1ep1	consigne
rép	s2ep2	consigne
rép	s2ep36	consigne

FIGURE 10.9 – Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD de Patrick

Le choix d'évoquer $T_{répéter}$ dans ce type d'épisodes s'éloigne des recommandations qui avaient été données par les chercheurs lors des formations et présentes dans la fiche pédagogique. En effet, l'évocation de cet ingrédient de technique de la part de l'enseignant était prévu par les chercheurs uniquement dans les cas où, après un certain temps de recherche en binômes sur les tâches, les élèves produisent des programmes ayant une structure additive ou mixte.

Le choix effectué par Patrick a donc empêché l'apparition de programmes avec structure additive ou mixte. Par conséquent, les types de tâches didactiques T_{struct}^{θ} et T_{opt}^{θ} ne sont pas apparues.

Nous justifions ce choix de l'enseignant en nous appuyant sur la perception de Patrick relative au rapport de ses élèves avec le dispositif Scratch, déclarée lors de l'entretien avant la réalisation de la séquence. En effet, il nous précise spontanément que ses élèves ont appris à bien maîtriser l'utilisation du bloc répéter dans la séquence sur la décomposition additive, précédemment réalisée. Pour cette raison, l'enseignant estime, probable-

ment, ne pas devoir problématiser la signification et l'usage de ces blocs pour la réalisation d'un programme Scratch.

De la même manière, les *ingrédients mathématiques* des techniques apparus dans l'OD de Patrick sont reportés dans le tableau présenté en Figure 10.10.

math	ep	type ep
a,1	s1ep5	binomes
q,hasard	s1ep67	τ
q,int	s1ep67	τ
q,div	s2ep3	θ_{div}

FIGURE 10.10 – *Ingrédients mathématiques* de l'OD de Patrick

Nous constatons que l'OD réalisée par Patrick a fait émerger uniquement les *ingrédients* $T_{a,1}$, $T_{q,hasard}$, $T_{q,int}$ et $T_{q,div}$. L'*ingrédient* $T_{a,1}$ émerge lors d'une aide apportée à un binôme et il n'est plus évoqué lors de la mise en commun. En revanche, les autres *ingrédients* sont mis en commun pour la totalité de la classe.

Afin d'analyser la technique de Patrick pour réaliser T^τ , nous retranscrivons les dialogues de l'épisode *s1ep67* :

- 1 P : Donc, en tâtonnant, en faisant des essais, qu'est-ce que vous avez fait pour arriver au résultat, tient ? Comment vous avez fait ? Expliquez-moi. Gaetan ?
- 2 E : J'ai mis... J'ai coincé dans des chiffres en random, donc, par exemple quinze...
- 3 P : Oui ?
- 4 E : Eh bah, comme ce n'a pas marché, il fallait un petit peu plus et j'ai essayé 20, et comme ça n'a marché j'ai compté les cases...
- 5 P : Ok, donc, on fait des essais et on arrive au résultat.
- 6 P : Oui ? Neimene ?
- 7 E : Bah, moi, en fait, j'ai essayé, j'ai mis trente, et après j'ai vu qu'à chaque fois j'avais de trois et par exemple trente-trois, trente-six, et ensuite du coup...
- 8 P : T'as compté ?
- 9 E : Oui
- 10 P : Est-ce que avec cette méthode-là, tu aurais pu être plus efficace avec quelque chose d'aussi simple ? Fin, avec ton méthode ? Tu es partie de trente. De combien tu aurais pu partir ?
- 11 P : Bah, de soixante. Tu vois ? Et après, en partant de soixante tu refaisais ton méthode de compter. Ça t'aurait gagné tout l'espace de trente et soixante. D'accord ?
- 12 P : Oui ?
- 13 E : Bah, moi j'ai commencé par trois fois vingt, soixante et j'ai rajouté du coup...
- 14 P : D'accord. Ok.

Dans cet épisode nous observons que Patrick répond à la proposition d'un élève, en précisant que l'intervalle pris au départ pour l'*ingrédient* $T_{q,int}$ peut être amélioré (lignes 10-11). Toutefois, il n'apporte aucune explication ni cherche à faire apparaître d'autres techniques possibles. Cet épisode est suivi d'une suite d'épisodes du type $T_{convertir}$, jusqu'à la fin de la séance.

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (tot)
$T_{représenter}$	15	9	24
$T_{traiter}$	0	0	0
$T_{convertir}$	8	9	17
total	23	18	41

TABLEAU 10.5 – Nombre des types de tâches de la classe *Mise en commun* par séance réalisés par Patrick

D'un point de vue qualitatif et quantitatif les ingrédients apparus peuvent être jugés insuffisants pour atteindre l'objectif didactique de faire travailler le sens de la division euclidienne. Aucune allusion aux ingrédients T_{add} , T_{table} , $T_{critère}$ et $T_{multiples}$, considérés nécessaires à la lumière de notre analyse *a priori*, est faite dans l'OD. Patrick n'a institutionnalisé aucun des ingrédients émergés, se limitant à les nommer comme des stratégies possibles. L'ingrédient $T_{q,div}$ n'est émergé que dans le cadre de l'institutionnalisation d'éléments technologiques concernant la notion de quotient de la division euclidienne.

10.2.4 Les registres d'ostensifs utilisés par Patrick lors de la mise en commun

Nous avons résumé dans le Tableau 10.5 les nombres d'épisodes que Patrick a dédié à chacun des types de tâches $T_{représenter}$, $T_{traiter}$ et $T_{convertir}$ lors de son OD.

Nous retrouvons dans l'OD mis en œuvre par Patrick, tous les registres identifiés *a priori*. Notamment, nous avons pu observer les ostensifs de $RO_{Scratch}$ grâce à l'utilisation du vidéo-projecteur branché à l'ordinateur de Patrick, qui montrait l'environnement Scratch lors de toute la durée de la séquence. Patrick s'est servi de ce dispositif pour afficher à tout moment la tâche de l'OM en cours de discussion (Fig. 10.11).

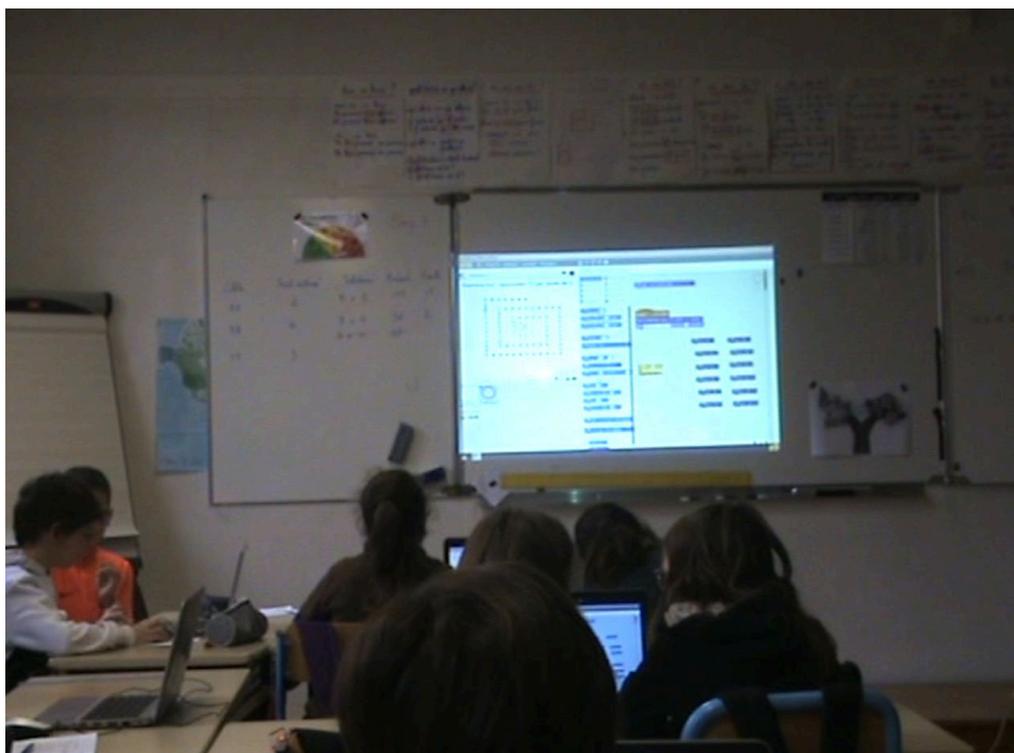


FIGURE 10.11 – Usage du vidéo-projecteur dans la classe de Patrick

Concernant les deux registres de l'oralité, $RO_{oral(m)}$ et $RO_{oral(p)}$, il accepte que les élèves fassent références aux solutions des tâches à travers des ostensifs de $RO_{oral(m)}$ sans distinguer le nombre de sauts et la valeur d'un saut (ex. épisodes de *step12* à *step19*). Par exemple, s'ils proposent oralement la solution « douze fois deux », Patrick interprète le premier facteur (12) en tant que nombre de sauts et le deuxième (2) comme la valeur d'un saut, sans jamais apporter ses éléments technologiques à son explication. Les ostensifs de RO_{em} mis en commun par Patrick sont visibles au tableau blanc (Fig. 10.12). Il s'agit principalement d'ostensifs relatifs à l'égalité entre les termes impliqués dans la division euclidienne. Notamment, en ce qui concerne le type de tâches T_1 (relatif à $T_{décomposer}$), Patrick recourt à des ostensifs comme $12 \times 2 = 24$. Au sein de la mise en commun des solutions du type de tâches T_2 , contrairement à ce qui était prévu par les chercheurs, Patrick demande d'explicitier le reste. Dans cette mise en commun, il représente les solutions uniquement à travers la représentation dans les registres $RO_{oral(m)}$, RO_{em} et RO_{graph} . Pour la représentation du reste dans les solutions des tâches de T_2 et T_3 , il introduit des ostensifs comme, par exemple, $11 : 5 = 2r1$. Vers la fin de la séquence il traite ce type d'ostensif de RO_{em} pour obtenir l'ostensif arithmétique visé ($11 = 5 \times 2 + 1$).

Cible	Saut autorisé	Solution	Arrivée	Reste	Division
11	2	5×2	10	1	$11 : 2 = 5 r 1$
38	4	9×4	36	2	$38 : 4 = 9 r 2$
77	3				

FIGURE 10.12 – Ostensifs de RO_{graph} et de RO_{em} mis en commun par Patrick

Le graphique montré dans la Figure 10.13 présente les différents registres d'ostensifs que Patrick a adopté tout au long de la séquence dans tous les épisodes de la classe *Mise en commun*. Chaque colonne représente un des 41 épisodes de cette classe présentés selon l'ordre chronologique. Sur chaque colonne les diverses couleurs montrent la présence d'un ou plusieurs registres d'ostensifs dans cet épisode.

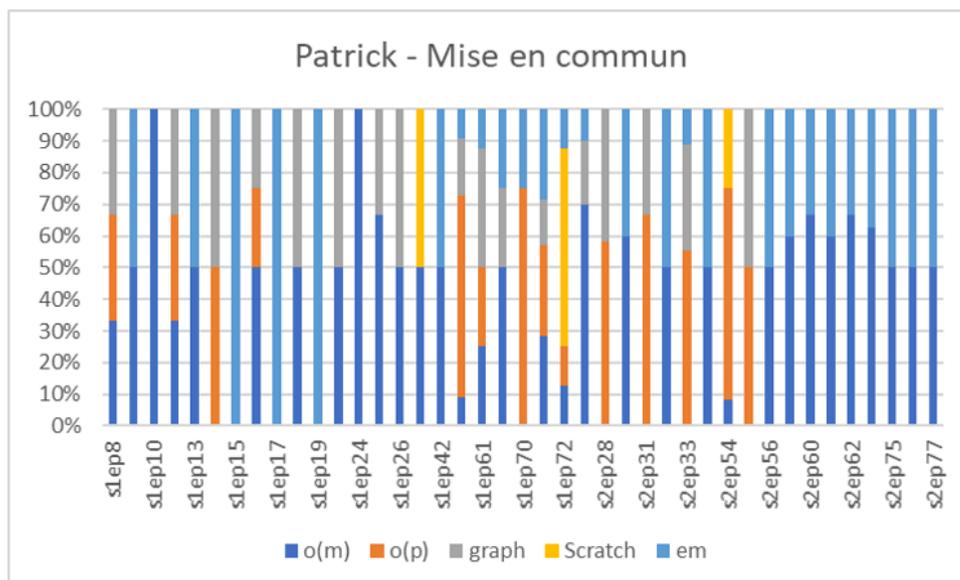


FIGURE 10.13 – Registres adoptés par Patrick dans la mise en commun des solutions

A partir de cet histogramme nous pouvons relever trois régularités :

- les registres les plus utilisés ont été $RO_{oral(m)}$ et RO_{em} ;
- Patrick recourt assez régulièrement au registre $RO_{oral(p)}$ entre les épisodes $s1ep60$ et $s2ep55$;
- dans les neuf derniers épisodes recourt uniquement aux registres $RO_{oral(m)}$ et RO_{em} .

Le registre le moins utilisé par Patrick est $RO_{Scratch}$. Il recourt à ce registre uniquement dans trois épisodes de type $T_{représenter}$: $s1ep27$, $s1ep72$ et $s2ep54$. Dans le premier épisode ($s1ep27$), il s'agissait de répondre à un désaccord parmi les élèves concernant la validité de la solution 12×2 pour la tâche t_2 . Les deux autres épisodes dans lesquels il a mis en commun une solution avec le registre $RO_{Scratch}$ concernent la représentation pour la première fois de solutions de tâches avec reste de la division non nul. En effet, dans $s1ep72$ il s'agit de mettre en commun le programme créé par une élève qui avait spontanément « matérialisé le reste » en ajoutant un bloc *avancer de r*. L'épisode $s2ep54$ se situe juste après le travail en binômes fait sur la tâche t_9 , qui est la première avec le changement de consigne relative à l'utilisation du joker.

Grâce à l'histogramme en Figure 10.14, nous voyons que, pour Patrick, la représentation de solutions semble être assez variée entre les épisodes $s1ep8$ et $s1ep16$, avec les registres $RO_{oral(m)}$, $RO_{oral(p)}$ et RO_{graph} ; elle devient à nouveau diversifiée entre les épisodes $s1ep42$ et $s2ep64$, en intégrant les registres $RO_{Scratch}$ et RO_{em} . Finalement, elle se limite aux registres $RO_{oral(m)}$ et RO_{graph} entre les épisodes $s1ep18$ et $s1ep26$ et aux registres $RO_{oral(m)}$ et RO_{em} dans les quatre derniers épisodes de ce type.

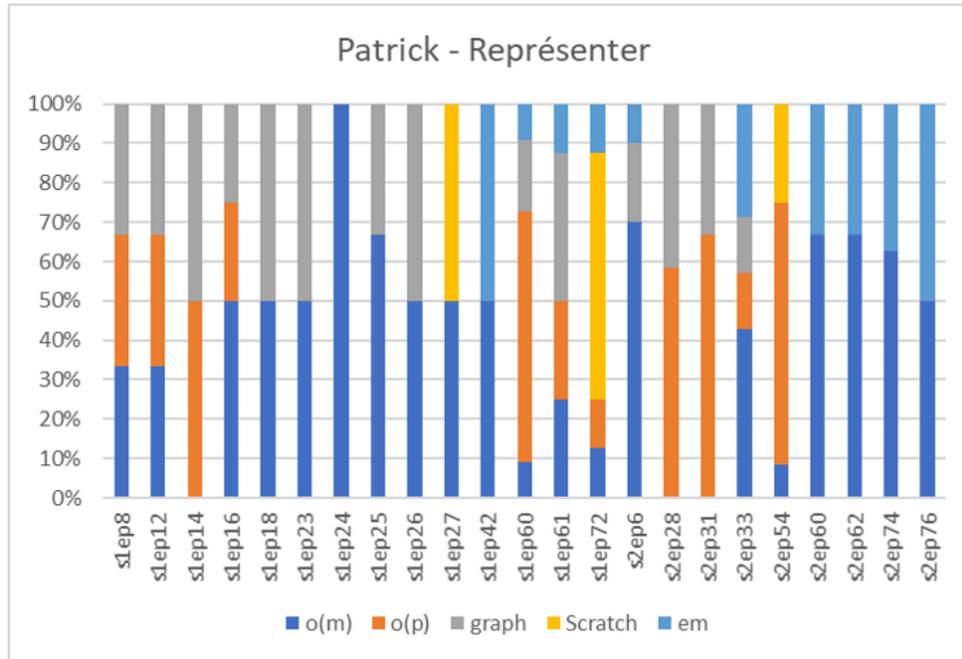


FIGURE 10.14 – Registres adoptés par Patrick pour représenter les solutions lors de la mise en commun

Dans aucun épisode Patrick vis-à-vis de la classe traite des ostensifs d'un même registre.

De manière cohérente avec les attentes des auteurs de la séquence, Patrick a effectué la plus part des conversion vers les registres $RO_{oral(m)}$ et RO_{em} (Fig. 10.15). En plus à partir de l'épisode $s2ep60$, il représente les solutions uniquement avec ces deux registres. Cependant, dans trois cas il apparait également le registre RO_{graph} (épisodes $s1ep69$, $s1ep71$ et $s2ep55$) et le registre $RO_{oral(p)}$ (épisodes $s1ep70$, $s1ep71$ et $s2ep55$)

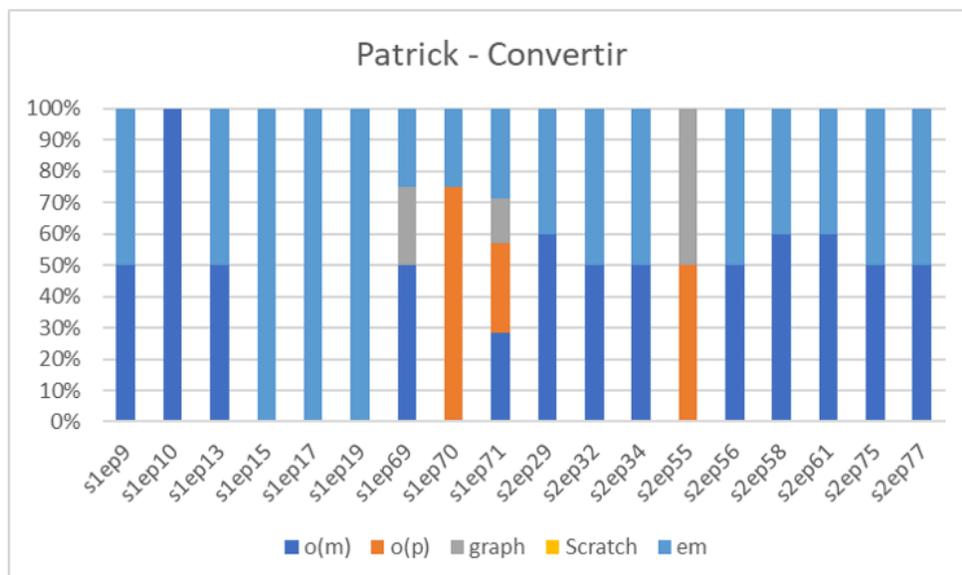


FIGURE 10.15 – Registres vers lesquels Patrick convertit des solutions lors de la mise en commun

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (tot)
T^τ	2	0	2
T_{math}^τ	0	0	0
T_{comm}^θ	0	0	0
$T_{m/d}^\theta$	0	0	0
$T_{m/d}^v$	3	0	3
T_{struct}^θ	0	0	0
T_{opt}^θ	0	0	0
T_{div}^θ	1	2	3
T_{cont}^v	1	0	1
$T_{em,cont}^\theta$	0	0	0
T_{dec}^v	0	1	1
$T_{em,dec}^\theta$	0	0	0
total	7	3	10

TABLEAU 10.6 – Nombre des types de tâches de la classe *Institutionnalisation* par séance réalisés par Patrick

10.2.5 L'institutionnalisation d'éléments technique-technologique

Comme nous l'avons vu dans la sous-section 10.2.2, l'OD de Patrick est caractérisée par une émergence très limitée d'ingrédients praxéologiques mathématiques ainsi que par l'absence de leur institutionnalisation. Cela a des conséquences également sur les types de tâches didactiques relatifs à la classe *Institutionnalisation* apparus. Le temps dédié à la totalité des types de tâches de cette classe prend le 12% du temps total de la séquence. Les détails du nombre d'épisodes dédiés à chaque type de tâches de la classe *Institutionnalisation* sont affichés dans le Tableau 10.6. Outre que de T_{math}^θ , nous pouvons observer l'absence totale des types de tâches T_{comm}^θ , $T_{m/d}^\theta$, T_{struct}^θ , T_{opt}^θ , $T_{em,cont}^\theta$ et $T_{em,dec}^\theta$. L'absence de T_{struct}^θ et T_{opt}^θ a déjà été justifiée précédemment grâce à la présence de l'ingrédient praxéologique $T_{répéter}$ dans des épisodes consacrés à l'explication de la consigne.

En revanche, les types de tâches visant à institutionnaliser des éléments du vocabulaire ($T_{m/d}^v$, T_{cont}^v et T_{dec}^v) sont tous présents dans l'OD de Patrick.

Bien que T_{comm}^θ est absent, nous que Patrick a eu l'occasion de le réaliser lors des épisodes de *step12* à *step19* dont les dialogues sont retranscrits ci-dessous.

- 1 E : trois fois huit
- 2 P : Oui, donc, répéter trois fois avancer de huit, c'est ça ?
- 3 P : Donc, trois fois huit égal vingt-quatre, quoi d'autre ?
- 4 E : Répéter six fois avancer de quatre
- 5
- 6 P : Et du coup o peut écrire...
- 7 P : Est-ce qu'il y en a un qui a d'autres solutions ? Oui ?
- 8 E : Une fois vingt-quatre ?
- 9 P : Voilà, alors, vingt-quatre fois un plutôt , je préfère, on va dire, hein ?
- 10 P : Répéter vingt-quatre fois avancer de un
- 11
- 12 P : D'autres solutions ?

13 P : Pour moi il manque deux solutions à la fois on les a écrites et à la fois on ne les a pas écrites...

14 E : Ehm... huit fois trois et quatre fois six ?

15 P : Voilà, en fait on les a écrites par ce que trois fois huit et huit fois trois c'est exactement la même chose, six fois quatre et quatre fois six c'est la même chose, par contre on n'a pas écrit répéter huit fois avancer de trois, d'accord ?

16 P : Donc je le mets comme ça, mais on est bien d'accord qu'en maths on ne fait pas vraiment de différence

Par ailleurs, nous voyons une autre occasion dans laquelle il aurait pu émerger T_{comm}^{θ} dans l'épisode *s1ep24* :

1 P : Vous avez entendu ce qu'il a dit ? Il a dit 'que trois fois huit, pas l'autre'...

2 P : Parce que huit fois trois, qu'est-ce qu'il se passe ?

3 E : ça passe sur les bombes

4 P : voilà, ça passe sur quelles bombes ?

5 E : le neuf

6 P : le neuf, ça ne passe que sur le neuf

7 P : Donc, là on voit quand-même qu'entre trois fois huit et huit fois trois il y a quand-même une différence, même si on arrive au même résultat, dans les bonds que ça fait ce n'est pas la même chose

10.2.6 Les épisodes *non classés* réalisés par Patrick

Patrick a réalisé deux épisodes qui n'ont pas pu être classés grâce à l'analyse faite *a priori*. Il s'agit des épisodes *s2ep57* et *s2ep59*.

Ces deux épisodes, arrivés presque à la fin de la séquence, font référence à l'introduction du symbole ' \equiv ' utilisé par Patrick pour mettre en relation les deux ostensifs du registre de l'écriture arithmétique $97 : 7 = 13r6$ et $97 = 7 \times 13 + 6$.

10.2.7 Réponses de Patrick aux entretiens informels

Avant la réalisation de la séquence dans sa classe, nous avons mené des entretiens informels et nous avons recueilli les éléments suivants concernant la perception de Patrick relativement :

- au niveau de ses élèves : il définit sa classe comme une « classe normale, sans difficultés particulières »;
- au rapport de ses élèves au dispositif Scratch : il a précisé d'avoir précédemment travaillé dans sa classe la séquence EXPIRE d'initiation au logiciel Scratch ainsi que celle sur la décomposition additive. Par ailleurs, Patrick nous a indiqué que « les élèves ont appris rapidement à construire un programme Scratch en enchainant les blocs et à utiliser le bloc répéter ». Puisque certains élèves étaient dans sa classe en double niveau (CM1/CM2) lors de l'année précédente ils avaient rencontré également les autres séquences EXPIRE, compris celle sur la division euclidienne;
- au rapport de ses élèves à la division euclidienne : il a indiqué que les élèves avaient tous déjà rencontré la division euclidienne lors de l'année précédente et qu'avant la réalisation de la séquence il a retravaillé les pré-requis de multiples et diviseurs grâce à ses séquences habituelles.

Concernant l'avis de Patrick sur les objectifs du projet EXPIRE il s'est exprimé de la façon suivante : « les compétences liées à l'informatique prennent de plus en plus de place dans les programmes et sont très important à développer à tout niveau scolaire. Le projet EXPIRE m'a fourni les ressources pour le faire ».

10.3 Analyse de l'OD réalisée par Asie

Asie a mené la séquence en quatre séances d'environ une heure chacune. Sa classe, non-REP, se compose de 27 élèves. Un élève avec un trouble d'apprentissage n'a pas pu réaliser la séquence et Asie lui a assigné une activité alternative qu'il pouvait gérer presque en autonomie. Lors de l'expérimentation du 2017, Asie avait réalisé la version Scratch des séquences.

10.3.1 Adaptation de l'OM dans la classe d'Asie

Les données brutes dont nous avons pu disposer dans la classe d'Asie relèvent de l'audio et la vidéo.

Lors de notre première rencontre avec Asie, elle nous a manifesté sa volonté d'introduire dans la séquence que nous aurions observé des moments de résolution de problèmes hors le dispositif Scratch. Elle nous a précisé d'avoir au cours des années précédentes testé dans ses classes des activités d'enseignement basées sur des outils numériques et qu'elle juge « le seul outil numérique insuffisant pour que les élèves apprennent les connaissances visées ». A cause des contraintes expérimentales que les enseignants du projet EXPIRE avaient, Asie ne s'était pas senti libre de cordonner plusieurs dispositifs comme elle voulait lors de l'année 2017/2018. Les séances que nous avons observées constituent donc la première occasion pour Asie de situer l'OMM proposée par les chercheurs dans le cadre de ses pratiques habituelles.

Dans sa salle de classe, Asie dispose d'un tableau noir mais pas d'un vidéo-projecteur. Outre que les ordinateurs, elle distribue aux binômes d'élèves les fiches de consigne de la séquence lors du travail sur le dispositif Scratch et d'autres fiches préparées par elle-même pour les moments de travail « hors Scratch ». Pour le travail « hors Scratch » les élèves travaillent individuellement sur des ardoises d'utilisation habituelle.

Par ailleurs, Asie dit aux élèves qu'elle peut fournir à ceux qui le souhaitent une feuille avec une représentation de la bande numérique pour qu'ils s'en servent lors de la résolution de problèmes « hors Scratch ».

Nous résumons les éléments de l'OMM réalisés par Asie dans le tableau 10.7.

10.3.2 Les éléments de l'OD apparus

Le tableau 10.8 présente le comptage d'épisodes relatifs à chaque classe de types de tâches didactiques réalisés par Asie. En Figure 10.16, nous représentons graphiquement le temps qu'elle consacre à chacune de ces classes (en séparant le type de tâches $T_{circuler}$ et $T_{binômes}$) rapporté à la durée totale de la séquence. Nous pouvons observer que :

1. le temps total dédié au travail en binômes correspond au 40% de la durée totale de la séquence (29% + 11%);
2. le temps relatif à la mise en commun des solutions correspond au 14% de la durée totale;
3. le temps consacré à l'institutionnalisation constitue le 16% de la durée totale.

Ep.	Element de l'OMM	Dispositif
s1ep1 à s1ep111	$T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}$	Scratch
s1ep112	non classé	ardoise
s2ep20 à s2ep50	$T_{2,1}$	ardoise
s2ep54 à s2ep124	$T_{2,1}, T_{2,2}, T_{2,3}$	Scratch
s2ep126 à s2ep132	$T_{2,1}$	ardoise
s3ep1 à s3ep67	$T_{3,1}$	ardoise
s3ep69 à s3ep96	$T_{2,4}, T_{2,5}, T_{2,6}$	Scratch
s4ep1 à s4ep63	$T_{3,1}, T_{3,2}$	ardoise
s4ep65 à s4ep77	$T_{3,1}, T_{3,2}, T_{3,3}, T_{3,4}$	Scratch

TABLEAU 10.7 – OMM réalisée par Asie dans deux dispositifs

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (s4)	n. ép (tot)
<i>Gestion</i>	14	18	12	3	47
<i>Consigne</i>	5	9	11	2	27
<i>Travail en binômes</i>	47	46	29	53	175
<i>Mise en commun</i>	27	39	32	3	101
<i>Institutionnalisation</i>	18	21	10	7	56
non classé	1	0	3	1	5
total	112	133	97	69	411

TABLEAU 10.8 – Nombre des types de tâches par séance réalisés par Asie

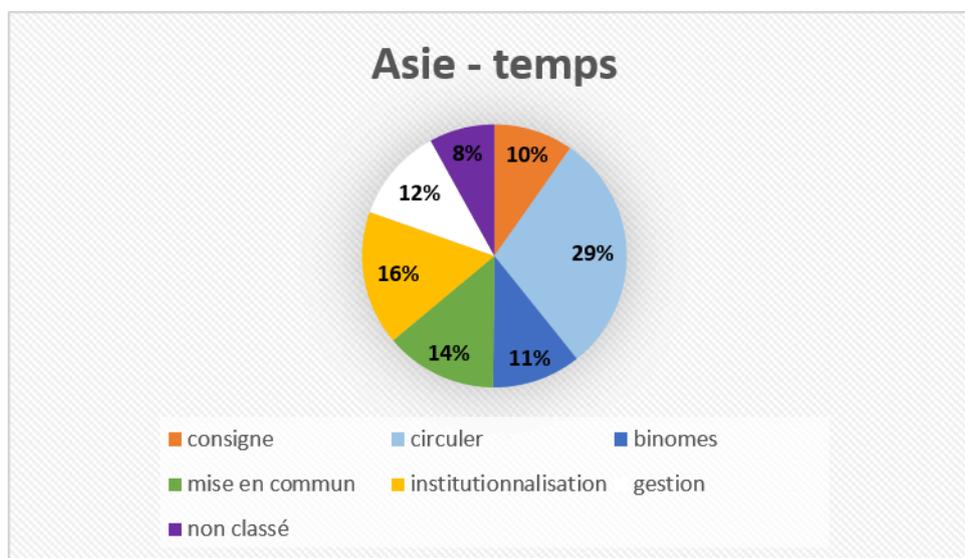


FIGURE 10.16 – Répartition du temps dédié par Asie à chaque classe d'éléments de l'OD

10.3.3 Les ingrédients des techniques émergés dans l'OD d'Asie

En Figure 10.17 nous avons indexé les épisodes dans lesquels Asie a évoqué des *ingrédients algorithmiques* de l'OMM. Seulement l'*ingrédient* $T_{répéter}$ est apparu et uniquement dans les deux épisodes *s1ep2* et *s4ep77*. La première apparition de $T_{répéter}$ est dans le cadre de l'explication de la consigne lors de la première rencontre des élèves avec le type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$. Comme Patrick, Asie veut que seulement les praxéologies mathématiques de l'OMM soient problématisées. Elle a ainsi empêché l'apparition de

programme à structure additive ou mixte chez ses élèves.

A la fin de la séquence, dans le cadre d'un épisode caractérisé par l'explicitation des techniques des élèves cet ingrédient de technique revient car l'enseignante veut mettre en avant l'erreur qui consiste à créer le programme $R[q; (s, r)]$ à la place de $(R[q; s], r)$.

prog.	ep	type ep
rép	s1ep2	consigne
rép	s4ep77	τ

FIGURE 10.17 – Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD d'Asie

La liste des *ingrédients mathématiques* apparus dans l'OD d'Asie est montrée dans la Figure 10.18.

math	ep	type ep
b,hasard	s1ep87	τ_{math}
syst	s1ep87	τ_{math}
test,b	s1ep88	τ_{math}
test,b	s1ep90	τ_{math}
test,b	s1ep95	τ_{math}
table,b	s1ep108	τ_{math}
multiples,b	s1ep108	τ_{math}
table,b	s1ep109	τ_{math}
table,b	s2ep30	τ_{math}
table,b	s2ep31	τ_{math}
table,q	s2ep39	consigne
table,q	s2ep48	τ_{math}
table,q	s2ep88	τ_{math}
q,hasard	s2ep88	τ_{math}
q,int	s2ep88	τ_{math}
q,int	s2ep90	τ_{math}
q,ajuster	s2ep90	τ_{math}
table,q	s2ep118	τ_{math}
multiples,q	s2ep118	τ_{math}
estimer,q	s2ep122	τ_{math}
multiples,q	s3ep53	τ_{math}
q,int	s3ep89	τ_{math}
q,ajuster	s3ep89	τ_{math}
q,hasard	s3ep89	τ_{math}
q,int	s3ep91	τ_{math}
multiples,q	s3ep91	τ_{math}
q,ajuster	s3ep91	τ_{math}
multiples,q	s3ep96	τ_{math}
a,decouper	s3ep96	τ_{math}
grouper,q	s4ep52	τ_{math}
q,paquets	s4ep52	τ_{math}
q,int	s4ep53	τ_{math}
multiples,q	s4ep53	τ_{math}
a,decouper	s4ep53	τ_{math}
multiples,q	s4ep54	τ_{math}
q,hasard	s4ep54	τ_{math}
multiples,q	s4ep74	τ_{math}
reste	s4ep74	τ_{math}

FIGURE 10.18 – Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Asie

Nous pouvons observer que Asie a fait émerger beaucoup d'*ingrédients* considérés nécessaires pour l'atteinte des objectifs d'apprentissage, comme T_{table} , $T_{\text{multiples}}$, $T_{\text{critère}}$ et T_{reste} . Dans la plupart des cas l'émergence de ces ingrédients est liée à l'institutionnalisation des techniques proposées par les élèves. Uniquement l'épisode *s2ep39* relève de la volonté de l'enseignante d'étayer les techniques basées sur l'utilisation des tables de multiplication lors de la passation d'une consigne.

Par rapport à cet aspect, l'OD réalisée par Asie est cohérente avec les attentes des chercheurs.

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (s4)	n. ép (tot)
$T_{représenter}$	18	27	22	1	68
$T_{traiter}$	5	2	10	1	18
$T_{convertir}$	4	10	0	1	15
total	27	39	32	3	101

TABLEAU 10.9 – Nombre des types de tâches de la classe *Mise en commun* par séance réalisés par Asie

10.3.4 Les registres d'ostensifs utilisés par Asie lors de la mise en commun

Nous montrons dans le Tableau 10.9 les nombres d'épisodes que Asie dédie aux types de tâches $T_{représenter}$, $T_{traiter}$ et $T_{convertir}$ dans son OD.

Asie a évoqué tous les registres d'ostensifs identifiés *a priori*. Même en absence du vidéo-projecteur, en effet, Asie a fait appel aux ostensifs du registre Scratch en représentant sur le tableau noir un prototype de programme et parfois une droite numérique (Fig. 10.19).

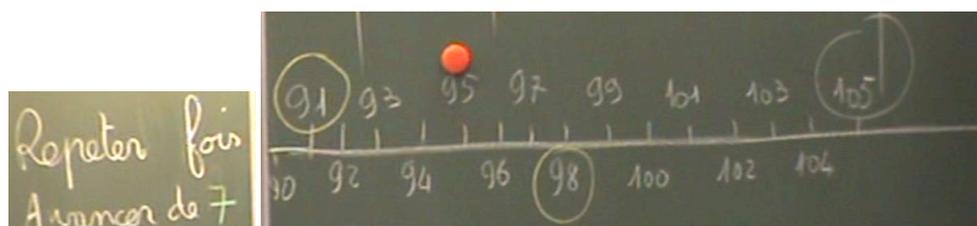


FIGURE 10.19 – Ostensifs de $RO_{Scratch}$ évoqués par Asie

Concernant le registre $RO_{oral(p)}$ dans la plupart des cas, elle rends la mise en commun des solutions très guidée, en demandant explicitement aux élèves de lui indiquer le *type de saut* choisi et le nombre de fois qu'ils l'avaient répété. Un exemple est montré dans le tout premier épisode de type $T_{représenter}$ (*s1ep29*) retranscrit ci-dessous (lignes 4 à 6) :

- 1 P : Bien. Alors... Il y a des gens qui ont pas réussi à faire le passage de 'répéter' à l'écriture mathématique, mais la plus part des groupes l'ont fait, donc on va expliquer pour ces gens-là
- 2 P : Alors, par exemple, si je prends la bande 'avancer de un'.
- 3 P : J'écris ce que certains ont mis en programmation
- 4 P : Avancer de un... Combien de fois il va falloir que je répète ça ? Jasmine ?
- 5 E : Vingt-quatre
- 6 P : Vingt-quatre, donc, ici je vais mettre... le nombre de fois que je répète c'est vingt-quatre
- 7 P : Et effectivement je tombe sur le nombre vingt-quatre.

Nous pouvons retrouver ce choix tout au long de la partie de la séquence qui utilise le dispositif Scratch. Dans ce contexte, peu de liberté est laissé aux élèves concernant la verbalisation des solutions.

Uniquement en ce qui concerne les solutions de t_2 , puisqu'il s'agissait de discuter de la validité des programmes déjà mis en commun pour t_1 , Asie laisse que les élèves proposent les solutions en faisant référence à celles écrites sur le tableau à l'aide du registre $RO_{oral(m)}$.

Lors des épisodes caractérisés par $T_{convertir}$ et du recours à $RO_{oral(m)}$, Asia montre de ne donner pas d'importance à l'ordre d'apparition de *multiplicande* et *multiplicateur*. Nous montrons à titre d'exemple un extrait tiré des épisodes de *s2ep29* à *s2ep32*, dans lesquels Asia demande à ses élèves de convertir les ostensifs de RO_{graph} vers RO_{em} :

- 1 P : Qu'est-ce que tu nous donne comme écriture mathématique ?
- 2 [elle écrit ' $5 \times 6 = 30$ ', puis elle indique la troisième ligne] E : Cinq fois six... égal trente
- 3 [elle écrit ' $3 \times 9 = 27$ ', puis elle indique la dernière ligne] E : Ehm... trois fois neuf... égal vingt-sept
- 4 [elle regarde le tableau] E : cinq fois neuf... égal quarante-cinq
- 5 [elle écrit ' $9 \times cinq$ '] P : Alors, ce serait plus logique que tu prennes neuf fois cinq.
- 6 P : Bon, je ne vais pas trop me prendre la tête sur l'ordre des... deux nombres... ehm... dans la mesure où ça sa correspond à l'opération répéter c'est vrai que ça serait plus logique de mettre celui-là en premier.

Nous constatons qu'à la ligne 6, en effet, elle déclare que dans le registre RO_{em} , elle ne juge pas important l'ordre dans lequel le nombre de sauts et la taille du saut apparaissent.

Elle demande aux élèves dès le début de la séquence d'accomplir également $T_{convertir}$ en partant du registre $RO_{Scratch}$ vers RO_{em} pour chaque solution trouvée, comme nous pouvons le voir dans la transcription de l'épisode *s1ep2* ci-dessous (ligne 25) :

- 1 P : Alors... Vous regardez déjà sur la scène... Sur la scène qu'est-ce qu'il va falloir faire ? Qui est-ce qui comprend, qui est-ce qui se rappelle ce qu'il faut faire ? Swan ?
- 2 E : Alors, ehm, il faut aller sur le nombre qui est encadré.
- 3 P : Sur le nombre qui est encadré, c'est marqué aussi en haut, pour ce premier exercice il faut aller sur quel nombre ? Leila ?
- 4 E : Vingt-quatre.
- 5 P : Il faut aller sur vingt-quatre, ça, on va appeler ça la cible.
- 6 P : Donc, ici il faut aller sur le nombre vingt-quatre. Ça c'est la mission à remplir...
- 7 P : Ensuite, on va pouvoir dans la programmation se servir de quelles étiquettes ? Qui est-ce qu'il peut nous dire... on va commencer par les étiquettes violettes... Eline ?
- 8 E : Avancer de un, avan...
- 9 P : Vas-y.
- 10 E : Avancer de deux, avancer de trois, avancer de quatre, avancer de six, avancer de sept, avancer de huit, avancer de neuf.
- 11 P : Donc on a plein de possibilités différentes.
- 12 P : Et on a toujours notre fameuse étiquette 'répéter tant de fois'...
- 13 P : Donc, ici on a un pas, par exemple de un, ou de deux, ou de trois, ou de quatre ou de cinq, ici ensuite on va répéter, c'est-à-dire qu'on va programmer de manière à faire avancer sur notre bande numérique, là... et il faut que l'on tombe sur vingt-quatre.
- 14 P : Il y a plusieurs possibilités...
- 15 P : Et ceci ça va être à la fin converti en une écriture mathématique...

- 16 P : Toujours je manipule sur la machine, et ensuite je comprends ce qu'il s'est passé.
- 17 P : Pourquoi, en prenant avancer, par exemple, de deux, ça marche ? Pourquoi en prenant, je sais pas, avancer de cinq, par exemple, peut-être ça marche pas...
- 18 P : Donc, je vais écrire en mathématique ce qu'il s'est passé.
- 19 P : Donc, pour l'instant on va rester sur l'exercice un.
- 20
- 21 P : Vous allez essayer de trouver plusieurs solutions à cet exercice, c'est à dire : tombez sur le nombre vingt-quatre, en utilisant plusieurs bandes différentes 'avancer'.
- 22 P : Par contre, vous faites avec une seule bande... Vous prenez par exemple 'avancer de trois pas'. Vous pouvez pas mélanger 'avancer de trois', 'avancer de cinq', 'avancer de six', et-cétera. Vous pouvez pas.
- 23 P : Choisissez 'avancer de' tant de cases... Avec ça vous devez tomber sur vingt-quatre, et puis ensuite vous allez choisir une autre bande violette.
- 24 P : Vous pouvez pas mélanger. Un coup c'est trois, un coup c'est quatre, un coup c'est cinq... D'accord ?
- 25 P : Sur votre ardoise, vous essayez d'écrire à la fin l'écriture mathématique qui fait que ça a marché.
- 26 P : C'est parti. On y va. On essaie.

Au sein du même épisode (lignes 15 à 18), elle propose aux élèves de justifier la validité des programmes produits grâce aux mathématiques. Le lien qu'elle fait entre les registres $RO_{Scratch}$ et RO_{em} est explicitement biunivoque, dans le sens où d'une part les ostensifs de RO_{em} sont des *traductions* des ostensifs de $RO_{Scratch}$ et, d'autre part, les ostensifs de $RO_{Scratch}$ évoquent des non-ostensifs mathématiques.

Au sein du même épisode nous pouvons mettre en lumière les mots que Asie utilise pour se référer aux objets relatifs à la programmation. Pour se référer aux blocs d'instruction elle utilise le mot *étiquettes* ou *bandes*. Elle nomme d'ailleurs la *cible*, en identifiant le *nombre à décomposer*.

Lors du travail de résolution de problèmes hors du dispositif Scratch, elle évoque également les registres appartenant à ce dispositif en faisant des liens parmi les différents éléments du vocabulaires (liés aux contextes différents). Nous montrons, par exemple, la transcription de l'épisode *s3ep55* :

- 1 P : Qui est-ce qu'il nous explique le lien avec scratch ?
- 2 P : C'est le même que toute à l'heure, sauf que les nombres ont changés...
- 3 P : Zeli on t'a déjà entendu, donc on sait que tu as bien compris... qui est-ce que peut nous expliquer le lien entre la situation du basket et Scratch ?
- 4 P : Bon, déjà vous êtes aidés, eh ? Pauline on t'écoute
- 5 E : C'est que... c'est... on aura... pareil un nombre d'élèves... du coup ça sera notre cible...
- 6 P : Ça, le nombre d'élèves c'est la cible, donc, c'est trente... d'accord...
- 7 P : Ici ?
- 8 E : Il y aura... avancer de cinq...
- 9 P : Et oui, par ce que cette fois je fais des équipes de cinq, donc je vais faire des sauts de cinq...

Après avoir précisé la nature des registres utilisés par Asie lors de son OD, nous analyserons des aspects quantitatifs relatifs à l'évocation de ces registres. Pour commencer, les graphiques montrés dans les Figures 10.20 et 10.21 montrent le poids que chaque registre a eu dans chacun des épisodes consacrés à la mise en commun des solutions (nous avons coupé l'histogramme pour le rendre plus lisible).

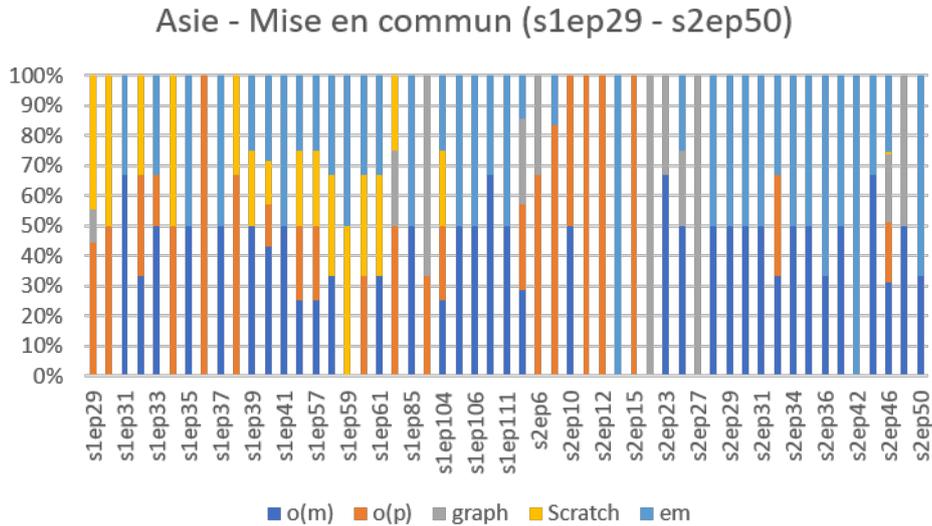


FIGURE 10.20 – Registres adoptés par Asie dans la mise en commun des solutions (épisodes de *s1ep29* à *s2ep50*)

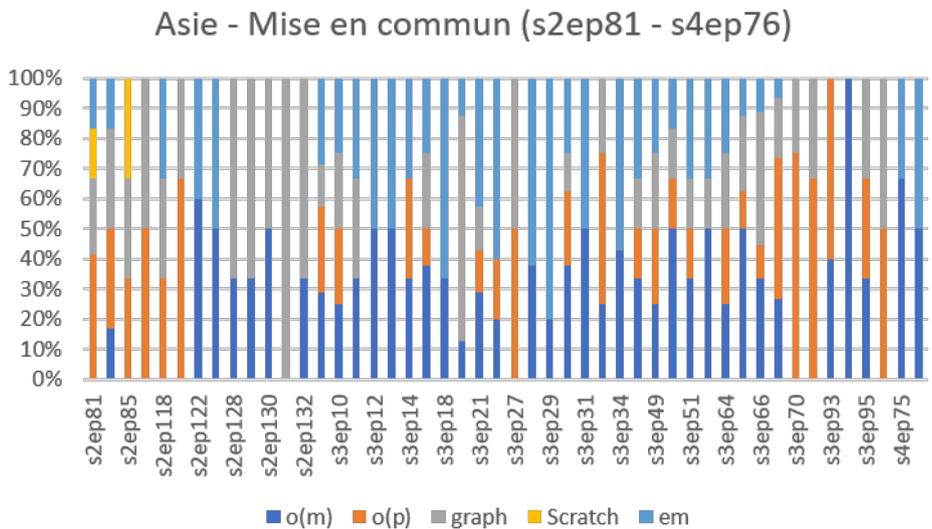


FIGURE 10.21 – Registres adoptés par Asie dans la mise en commun des solutions (épisodes de *s2ep81* à *s4ep76*)

La lecture de cet histogramme nous fait constater que :

- les registres les plus évoqués sont $RO_{oral(m)}$ (73 épisodes sur 101) et RO_{em} (68 épisodes sur 101) ;
- le registre le moins utilisé est $RO_{Scratch}$ (17 épisodes sur 101) ;

- le recours aux registres $RO_{Scratch}$ et $RO_{oral(p)}$ se fait régulièrement dans les premiers 14 épisodes et revient après de façon moins systématique dans les intervalles $s2ep5$ à $s2ep15$ et $s2ep81$ à $s2ep120$;
- Le registre RO_{graph} est utilisé surtout à partir de l'épisode $s2ep22$;
- le registre $RO_{oral(p)}$ est évoqué jusqu'à la fin de la séquence.

Le registre $RO_{Scratch}$, qui est très présent lors des premiers 14 épisodes, réapparaît après uniquement lors des épisodes $s2ep81$ et $s2ep85$. Il s'agit des premiers épisodes de la deuxième séance caractérisés par $T_{représenter}$ qui ont suivi le travail avec le dispositif Scratch. Notamment, dans l'épisode $s2ep81$ Asie invite les élèves à représenter les solutions à l'aide d'ostensifs de RO_{em} ou de $RO_{Scratch}$.

Dans les Figures 10.22, 10.23 et 10.24, nous présentons les histogrammes concernant les épisodes de la classe *Mise en commun* en séparant $T_{représenter}$, $T_{traiter}$ et $T_{convertir}$.

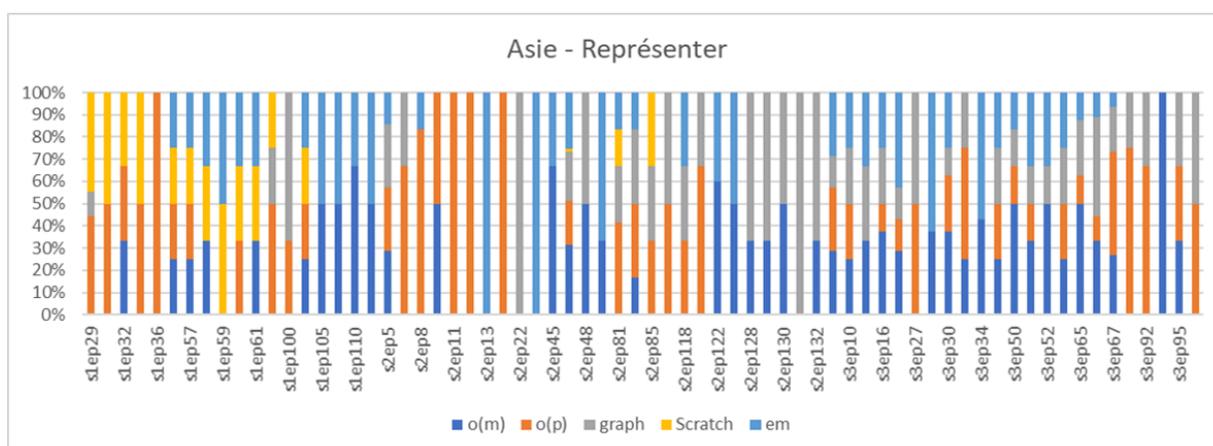


FIGURE 10.22 – Registres adoptés par Asie pour représenter les solutions lors de la mise en commun

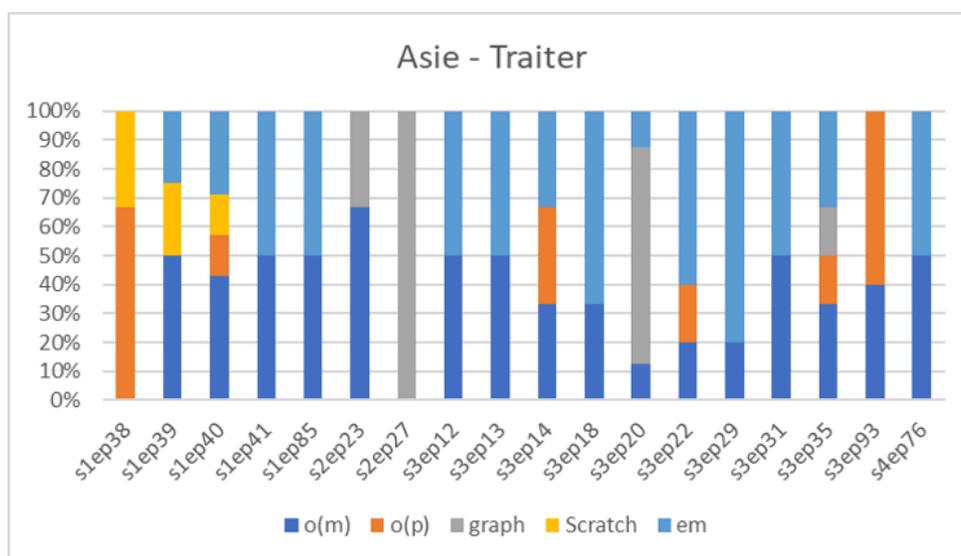


FIGURE 10.23 – Registres traités par Asie pour obtenir des solutions lors de la mise en commun

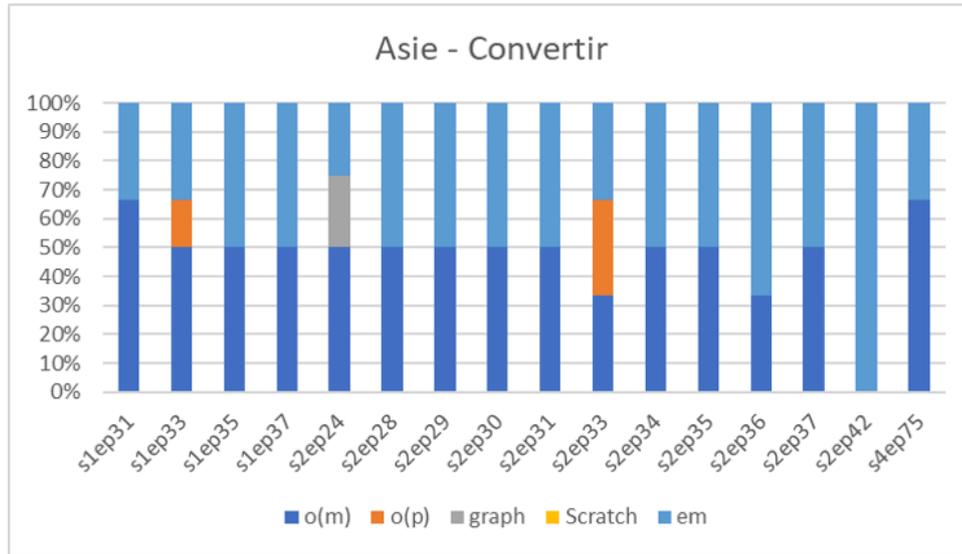


FIGURE 10.24 – Registres vers lesquels Asie convertit des solutions lors de la mise en commun

Nous observons que les registres varient surtout lors de $T_{représentation}$. En ce qui concerne les 18 épisodes autour de $T_{traiter}$, nous retrouvons encore une fois tous les registres. Finalement la conversion se fait principalement vers le registre RO_{em} à l'aide de $RO_{oral(m)}$, conformément aux attentes des chercheurs ayant conçu l'OMM.

10.3.5 L'institutionnalisation d'éléments technique-technologique

Le Tableau 10.10, nous avons indiqué le nombre d'épisodes que Asie a consacré à chacun des types de tâches de la classe *Institutionnalisation*.

Type de tâches (OD)	n. ép (s1)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (s4)	n. ép (tot)
T^τ	0	1	0	1	2
T_{math}^τ	7	9	4	4	24
T_{comm}^θ	0	2	0	0	2
$T_{m/d}^\theta$	9	2	2	1	14
$T_{m/d}^\nu$	2	1	0	0	3
T_{struct}^θ	0	0	0	0	0
T_{opt}^θ	0	0	0	0	0
T_{div}^θ	0	1	0	0	1
T_{cont}^ν	0	5	0	1	6
$T_{em,cont}^\theta$	0	0	3	0	3
T_{dec}^ν	0	0	1	0	1
$T_{em,dec}^\theta$	0	0	0	0	0
total	18	21	10	7	56

TABLEAU 10.10 – Nombre des types de tâches de la classe *Institutionnalisation* par séance réalisés par Asie

La plupart des épisodes de la classe *Institutionnalisation* se concentre autour des éléments techniques (26 épisodes sur 56 rentrent dans T^τ et T_{math}^τ). Une autre part importante de cette classe est composée des 14 épisodes du type $T_{m/d}^\theta$. Par contre, peu de place est donnée aux types de tâches relatifs à l'institutionnalisation du vocabulaire.

Nous pouvons observer l'absence de T_{struct}^{θ} , T_{opt}^{θ} et $T_{em,dec}^{\theta}$. Le manque des deux premiers n'est pas surprenant puisque Asie, lors de la consigne donnée au début de la séquence, a guidé les élèves vers le recours à la seule structure multiplicative pour la résolution des tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$. L'absence de $T_{em,dec}^{\theta}$, en revanche, est justifiée par Asie par le manque de temps. Elle nous a dit à la fin de la quatrième séance qu'elle aurait repris l'OMM le jour suivant pour mettre en commun la formule de la division euclidienne en évoquant les termes de *dividende*, *diviseur*, *quotient* et *reste*, mais que cela aurait pris seulement quelques minutes.

Afin de trouver des régularités dans la façon de Asie d'institutionnaliser des éléments praxéologiques relatifs à la division euclidienne, nous allons analyser qualitativement quelque épisode.

Nous commençons par le tout premier épisode relatif à la classe *Institutionnalisation*, c'est-à-dire l'épisode *s1ep62* du type $T_{m/d}^{\theta}$ que nous retranscrivons ci-dessous :

- 1 P : Alors... On a repris tous nos cas... Il y a des cas avec la contrainte de la cible et des deux bombes... sur sept et quatorze... qui marchent et qui ne marchent pas... Qui est-ce qui peut expliquer pourquoi par exemple celui-là il va pas marcher ? Qu'est ce qu'il se passe avec le petit lutin qui se déplace ? Chloé ?
- 2 E : Ehm...
- 3 P : On va peut être demander à quelqu'un de t'aider... Alice ?
- 4 E : Ehm... beh...
- 5 P : Pourquoi alors je te réécris la programmation... c'est huit fois avancer de trois... Pourquoi est-ce que ça ne va pas marcher ?
- 6 E : En fait... Ehm... ça marche
- 7 P : Ah, en fait ça marche, donc ils m'ont donné une fausse information toute à l'heure... Bon, non, ça marche pas... Alors...
- 8 E : Ah, ça marche pas... ça marche pas par ce que neuf et quatorze ben c'est des multiples... trois fois trois ça fait...
- 9 P : Ouh, attendez, attendez.. Mais je crois que je me suis trompé dans ma cible, c'est pas sept, c'est neuf, non ? C'est neuf la... bombe ?
- 10 E : Oui
- 11 P : Ah, d'accord... C'est moi qui me suis trompée. Alors... ça aillait, Chloé me demande une explication intéressante là, tu me dis... donc je vais mettre ... on va y arriver... Alors pourquoi ça ne marchait pas ? Quand j'ai programmé répéter huit fois avancer de trois ça veut dire que je vais tomber sur une cible, je vais tomber sur quelle cible ?
- 12 E : Par ce que... (bruit)
- 13 P : Eh oui, par ce que là je vais me déplacer mon petit lutin va faire quoi dans ce cas là ? Qui est-ce que peut me dire les nombres qui vont... être entourés au passage du lutin ? Alors, j'ai trois... Chloé continue...
- 14 E : Ehm... six ?
- 15 P : Ça va passer sur six... après sur ?
- 16 E : Neuf
- 17 P : Neuf... bingo ! Je suis sur la bombe... terminé

Dans cet épisode, nous pouvons constater que Asie se sert de l'observation d'une élève pour lui faire réciter la table de multiplication de trois et justifier le fait que avec le saut de longueur 3 le lutin se posait sur une bombe avec le fait que neuf est un multiple de trois. Dans l'épisode immédiatement après, caractérisé par $T_{m/d}^v$, en effet, elle met en évidence le mot *multiple*, utilisé par Chloé, en l'écrivant au tableau, pour que ensuite les élèves puissent s'en servir dans la justification de la validité des solutions proposées.

Nous retrouvons cette même manière de conceptualiser les multiples dans l'épisode *s1ep86* :

- 1 P : Et effectivement... qu'est-ce qui peut expliquer pourquoi ici? Vous l'avez vu, vous avez lancé vos drapeaux verts... maintenant on essaie de comprendre... Pourquoi ça ne passe pas sur trente-six ? Louise ?
- 2 E : Par ce que... ehm... trente-six n'est pas un multiple de sept
- 3 P : Dis-moi les multiples de sept... Les multiples de sept dans la table de sept...
- 4 E : Sept...
- 5 P : Vas-y je t'écoute, sept...
- 6 E : Sept, quatorze, vingt-un, ehm... vingt-huit, ehm...
- 7 P : vingt-huit et sept ? Qu'est-ce qu'il y a Louise ?
- 8 E : Alors, trente-cinq
- 9 P : Trente-cinq... continue, le suivant ? Par ce que là on est près de trente-six...
- 10 E : Quarante-deux
- 11 P : Quarante-deux, donc, je vois ici, je tombe pas sur trente-six

Dans d'autres épisodes du type $T_{m/d}^\theta$ elle recourt également à des justifications basées sur les critères de divisibilité par 2, 5 et 10, mais elle applique toujours la même technique de demander des justifications aux élèves et de s'appuyer là-dessus pour qu'ils explicitent ce qui est visé.

Nous retrouvons ce *modus operandi* dans d'autres épisodes, caractérisés par T_{comm}^θ et $T_{em,cont}^\theta$.

10.3.6 Les épisodes *non classés* réalisés par Asie

Nous rappelons que Asie a réalisé au total seulement 5 épisodes (1,2% du nombre total d'épisodes) que nous n'avons pas pu classer. Bien que cela puisse sembler sans importance, nous constatons qu'au niveau du temps employé cette catégorie occupe le 8% de la durée totale de la séquence.

Cela est justifié par le fait que le premier de ces cinq épisodes (*s1ep112*) dure environ 12 minutes et concerne la résolution d'une série de tâches hors le dispositif Scratch portant sur la division euclidienne, mais qui ne présentaient pas les mêmes valeurs de variables identifiées dans notre OM de référence. Lors de cet épisode Asie a distribué des fiches avec les consignes et a laissé les élèves travailler individuellement sur l'ardoise. Elle intervenait auprès des élèves soit en cas de difficulté, soit pour demander d'explicitier leurs procédures de résolution. Il n'y a pas eu un moment de bilan tout de suite après cette phase de travail individuel.

Les autres épisodes non classés sont *s3ep38*, *s3ep55*, *s3ep73* et *s4ep55*. Notamment, les épisodes *s3ep38*, *s3ep55* et *s4ep55* ont en commun le fait que Asie demande explicitement

aux élèves de faire le lien entre les activités proposées hors Scratch avec $T_{prog}[T_{DE}$. Ce qui émerge dans ces épisodes est une explicitation du lien entre différents contextes et différents ostensifs.

Nous illustrons cela avec la transcription de l'épisode *s3ep38*, dans laquelle Asie demande de faire le lien entre la tâche demandant de déterminer le nombre d'équipes de handball, chacune constituée par 7 joueurs, qui peuvent être constituées par un certain nombre total d'élèves :

- 1 P : Qui est-ce qu'il voit le rapport avec Scratch, par ce que nous, ma chère Karime on fait pas Scartch pour faire Scratch... On fait Scratch, ici, dans ce cas là pour pouvoir résoudre des problèmes... quel est le rapport avec Scratch ? Qui est-ce qu'il peut l'expliquer... c'est-à-dire avec ce qu'on fait sur la machine... Zeli?
- 2 E : c'est... avec vingt-huit, on va chercher le nombre... de fois que sept est contenu dans vingt-huit...
- 3 P : D'accord, mais là tu me parles de la division... c'est bien, mais moi je te parle de Scratch... Quel est le rapport entre ça et ce qu'on manipule sur l'ordinateur... Alice ?
- 4 E : Bah, c'est que c'est là meme chose...
- 5 P : Bah, oui, mais explique-nous en quoi c'est pareil justement...
- 6 E : Bah, par ce que... le nombre d'élèves c'est un peu comme...
- 7 P : C'est un peu comme quoi ? Ça rassemble à quoi ?
- 8 E : ça ressamble à la... cible
- 9 P : La cible, c'est là où je dois arriver... c'est ma cible... égal cible... et mon sept, ça va etre quoi mon sept ?
- 10 E : avancer de...
- 11 P : Eh, bah, ça va etre... avancer de... ici je vais choisir avancer de combien ?
- 12 E : de sept
- 13 P : Eh, bien de sept... Et du coup je vais chercher... le rapport avec Scratch... combien de fois...
- 13 E : le nombre de sauts ?
- 14 P : Le nombre de sauts, c'est-à-dire combien de fois on répète... le nombre de sauts...

A partir de cet épisode, nous pouvons observer que ce que Asie veut est mettre en relation les mots relatives aux deux contextes des équipes de handball et celui du « jeu de la cible ». En plus elle veut établir une relation explicite entre le vocabulaire lié à divers contextes avec le registre $RO_{Scratch}$.

Finalement, l'épisode *s3ep73* concerne quelque chose d'un peu différent : lors de la tâche t_7 , caractérisée par le fait que la variable $V_{masquage}$ prend la valeur « oui », les élèves se questionnent sur la présence de ces traits qui cachent les nombres. Elle décide alors de justifier auprès des élèves les raisons de ces traits, en leur faisant comprendre que les auteurs de la séquence les ont insérés pour limiter les procédures basées sur le comptage des cases.

10.3.7 Réponses d'Asie aux entretiens informels

Avant la réalisation de la séquence, l'entretien informel eu avec Asie a révélé la perception de Asie relativement :

- au niveau de ses élèves : elle considère sa classe une bonne classe;

- au rapport de ses élèves au dispositif Scratch : préalablement à la passation de l'OMM relatif à la division euclidienne, Asie a réalisé dans sa classe les séquences EXPIRE sur la décomposition additive, celle sur les fractions et celle sur la résolution de problèmes. L'année précédente elle avait les mêmes élèves en CM1, et elle avait réalisé également l'OMM sur la division euclidienne;
- au rapport de ses élèves à la division euclidienne : elle nous a indiqué d'avoir précédemment rappelé aux élèves les tables de multiplication, les critères de divisibilité par 2, par 5 et par 10 ainsi que les notions de multiple et diviseur.

Concernant l'avis de Asie sur le projet EXPIRE, elle précise d'avoir participé à de nombreux projets de recherche visant à introduire les nouvelles technologies dans les classes, mais que avec le projet EXPIRE pour la première fois elle a eu l'occasion de tester la programmation. Lors de l'entretien que nous avons eu avec elle, Asie nous a expliqué qu'elle considère l'algorithmique comme une compétence très importante pour développer la pensée logique chez les élèves. Par ailleurs, elle souligne l'importance de pouvoir faire travailler l'algorithmique de façon non-débranchée et lors de séances de mathématiques.

10.4 Analyse de l'OD réalisée par Nicole

L'OMM à enseigner a été mise en place par Nicole dans sa classe en une seule séance d'une heure et demi. La classe concernée est une classe REP de double niveau CM1/CM2. Pour Nicole la séance observée constituait la première exploitation du logiciel Scratch pour l'entière séquence EXPIRE sur la division euclidienne puisque l'année précédente elle avait testé dans sa classe la version *papier/crayon*. Néanmoins, lors du deuxième semestre de l'année 2017/2018, elle avait également proposé quelques exercices de cette séquence sur le dispositif Scratch de façon non structurée.

Le jour de la passation de la séquence, outre nous, Nicole a accueilli dans sa classe deux enseignants stagiaires qui préparaient leur concours. Dans les phases de passation de consigne et de mise en commun, les deux ES étaient assis au fond de la classe, alors que dans les phases de travail en binômes ils se déplaçaient parmi les binômes pour observer ce que les élèves réalisaient et/ou les interroger sur leurs procédures.

10.4.1 Adaptation de l'OM dans la classe de Nicole

La salle de classe de Nicole présentait un tableau noir et n'était pas équipée de vidéo-projecteur.

L'adaptation que Nicole fait de l'OMM à enseigner dans sa classe est assez importante. En effet, elle démarre la séance en proposant aux élèves un problème à résoudre individuellement sur leurs ardoises. Le problème a l'énoncé suivant :

On veut partager 52 gâteaux dans 5 parts égales. Combien de gâteaux aura chaque part ?

Il s'agit d'un problème de division-partition dont Nicole se sert pour réactiver les connaissances des élèves relatives à la division euclidienne avant de les faire travailler sur le dispositif Scratch. En effet, suite à la résolution de ce problème de la part de ses élèves, Nicole propose l'écriture $(10 \times 5) + 2 = 52$ en l'écrivant au tableau, puis elle fait émerger les mots *dividende*, *diviseur*, *quotient* et *reste*. Ensuite, elle propose aux élèves le problème ayant l'énoncé suivant :

Géomette arrive sur la case soixante-dix-sept en se déplaçant de huit en huit. Combien de bonds a-t-elle fait ?

Même si le contexte de cette tâche n'est pas bien spécifié (dans l'énoncé il manque des informations), il est clair que le type de tâches qui lui donne lieu est T_{DE} et qu'avec cet énoncé Nicole veut progressivement introduire ses élèves au type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$.

Après cette première phase de travail sur l'ardoise, durée au total environ 5 minutes, Nicole constitue les binômes en associant chaque élève de CM1 à un élève de CM2 et leur distribue les ordinateurs. Notamment, les élèves de CM2 étaient avec Nicole l'année précédente et avaient donc déjà eu une première rencontre avec quelque tâche de l'OMM.

Elle ne donne aux élèves aucun support écrit (fiche de consignes ou autre).

Lors de la passation de la consigne Nicole semble ne prendre pas du tout en compte la dimension de programmation des tâches. Elle demande aux élèves de trouver le nombre de sauts qu'*il faut faire pour arriver à la cible*, en se servant des tables de multiplication. Elle ne mentionne jamais le fait qu'ils doivent construire un programme pour pouvoir interagir avec la scène dans Scratch.

Plus en général, nous avons pu observer que tout au long de la séance Nicole n'a jamais prononcé aucun des mots *programme(s)*, *programmation*, *algorithme(s)*, *bloc(s)*, *instruction(s)*. Seulement à la fin, lors de l'épisode 136 elle utilise l'expression *langage informatique* pour désigner le langage de programmation sur Scratch.

L'OMM réalisée par Nicole dans sa classe a subi certaines modifications par rapport à l'OMM telle qui était conçue par les chercheurs du projet EXPIRE. Notamment :

- elle rajoute une contrainte au type de tâches T_1 : *il faut être le plus efficace possible*;
- elle adapte la consigne des tâches de T_2 selon les élèves : certains élèves doivent se rendre exactement sur la cible et d'autres doivent s'en rapprocher au maximum sans la dépasser.

La contrainte « *il faut être le plus efficaces possible* » prends du sens pour nous lors de l'épisode 41, dans lequel Nicole explique à un binôme d'élèves qu'en utilisant le saut de 4 ils auraient atteint la cible 24 deux fois plus rapidement qu'avec le saut de 2. Dans le discours de Nicole, nous ne retrouvons jamais une référence à que le type de tâches T_1 puisse présenter plusieurs solutions. Nous en déduisons donc que la contrainte rajouté est due à la volonté de Nicole de rendre la réponse de chaque tâche de T_1 univoque.

Par rapport au choix d'apporter la deuxième modification, nous l'attribuons au fait que Nicole voit certains élèves qui explicitent le reste lors du travail sur le type de tâches T_2 et pour ces élèves elle ne voit pas d'intérêt à ce qu'ils respectent la progression des types de tâches proposée.

Dans les 10 dernières minutes de la séance, Nicole propose encore une fois aux élèves de basculer sur le dispositif ardoise et de résoudre individuellement un problème. Le problème a l'énoncé suivant :

Marc a rangé quarante-six œufs dans des boîtes de six. Il a rempli sept boîtes.
Combien d'œufs a-t-il rangé? Combien d'œufs ne seront pas rangés?

Cet énoncé ne relève pas de l'OMM à enseigner. En effet, il n'est pas demandé de trouver le quotient d'une division euclidienne, mais de calculer un produit et de poser une soustraction.

10.4.2 Les éléments de l'OD apparus

Le Tableau 10.11 présente les nombres d'épisodes que Nicole consacre à chacune des classes de types de tâches didactiques lors de la séance observée.

Type de tâches (OD)	n. ép (tot)
<i>Gestion</i>	10
<i>Consigne</i>	17
<i>Travail en binômes</i>	73
<i>Mise en commun</i>	16
<i>Institutionnalisation</i>	12
non classé	9
total	137

TABLEAU 10.11 – Nombre des types de tâches par séance réalisés par Nicole

Ce tableau montre un avantage indéniable de la classe *Travail en binômes* par rapport à toutes les autres. Nous pouvons retrouver ce même avantage au niveau temporel, visible dans le graphique en Figure 10.25 (le 54% de la durée totale de la séance est dédié au travail en binômes).

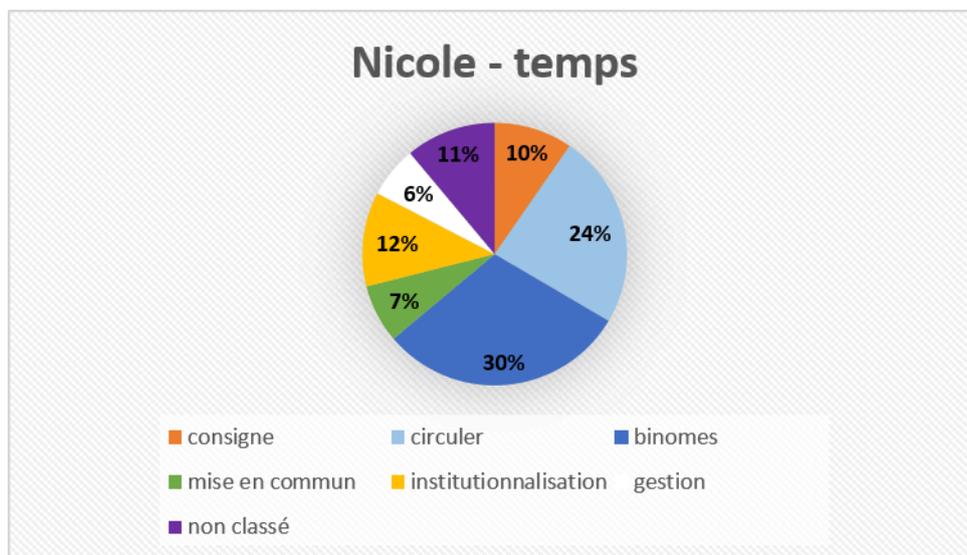


FIGURE 10.25 – Répartition du temps dédié par Nicole à chaque classe d'éléments de l'OD

Par ailleurs, nous observons que :

- le temps consacré par Nicole à la mise en commun des solutions couvre le 7% de la durée totale de la séance ;
- le temps dédié à l'institutionnalisation d'éléments technique-technologique correspond au 12% de la durée totale de la séance ;
- le 11% de la durée totale de la séance n'a pas pu être classé grâce à notre analyse *a priori*.

10.4.3 Les ingrédients des techniques émergés dans l'OD de Nicole

Dans les tableaux en Figures 10.26 et 10.27 nous montrons respectivement les *ingrédients* du niveau *algorithmique* et *mathématique* de l'OMM émergés lors de l'OD de Nicole.

prog.	ep	type ep
rép	16	consigne

FIGURE 10.26 – Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD de Nicole

math	ep	type ep
q,int	9	τ
tables	16	consigne
test,2	22	consigne
det,b	40	consigne
test,6	44	binomes
test,6	49	binomes
test,8	49	binomes
test,9	49	binomes
critères	53	binomes
q,encadrer	53	binomes
critères	54	τ
critères	56	τ
q,encadrer	63	binomes
critères	67	τ
q,encadrer	90	binomes
q,tables	92	binomes
q,hasard	115	binomes
div	132	τ

FIGURE 10.27 – Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Nicole

Nous observons qu'un seul *ingrédient* du niveau *algorithmique* apparaît et qu'une seule fois. Il s'agit de l'*ingrédient* $T_{répéter}$ qui émerge lors de l'épisode 16, caractérisé par $T_{consigne}$. Comme nous l'avons précisé précédemment, Nicole n'a jamais fait référence à la programmation avec les termes usuelles. Afin de comprendre comment elle se réfère à l'utilisation du bloc répéter lors de cet épisode, nous le retranscrivons ci-dessous :

- 1 P : Vous avez la possibilité de répéter... répéter quoi ? Regardez...
- 2 E : Ah, dans le trou orange
- 3 P : Dans le trou orange... Vous avez la possibilité de répéter un certain nombre de fois... d'accord ?
- 4 P : ça revient à utiliser... qu'est ce que vous utilisez comme outil pour...
- 5 E : Les tables de multiplication !
- 6 P : Les tables de multiplication... D'accord ? A vous de voir quelle est la quantité la plus appropriée pour arriver le plus rapidement possible à vingt-quatre... Oui alors vous regardez quel résultat vous obtenez si vous tâtonnez... regardez... testez...

Nous voyons que, de manière cohérente avec la façon de Nicole de présenter les consignes des tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$, elle utilise avec les élèves l'expression « *vous avez la possibilité de répéter* ». Quand les élèves appellent le bloc *répéter* « *le trou orange* » elle accepte cette appellation et la partage oralement avec la classe.

Au sein du même épisode nous pouvons trouver l'*ingrédient mathématique* T_{tables} (lignes de 4 à 6). Cet *ingrédient* semble être mis en relation avec $T_{répéter}$, puisque à la ligne 4 Nicole recourt à l'expression « *ça revient à utiliser* ».

Concernant les autres éléments praxiques apparus, nous observons entre autres la présence d'ingrédients de technique de type $T_{test,b}$, $T_{q,encadrer}$ et $T_{critères}$. Ces ingrédients sont ressortis lors du travail en binômes, et seulement $T_{critères}$ a été mis en commun sans qu'il soit institutionnalisé (épisodes 54, 56 et 67). Finalement, l'ingrédient T_{div} émerge aussi dans la totalité de la classe lors d'un des derniers épisodes de la séance et il reste non institutionnalisé.

10.4.4 Les registres d'ostensifs utilisés par Nicole lors de la mise en commun

Pour Nicole, nous comptons au total 16 épisodes appartenant à la classe *Mise en commun*. Plus en détails, nous avons observé 14 épisodes de type $T_{représenter}$ et 2 de type $T_{convertir}$ (Tableau 10.12). Dans aucun épisode Nicole traite des ostensifs d'un même registre vis-à-vis de toute la classe.

Type de tâches (OD)	n. ép (tot)
$T_{représenter}$	14
$T_{traiter}$	0
$T_{convertir}$	2
total	16

TABLEAU 10.12 – Nombre des types de tâches de la classe *Mise en commun* réalisés par Nicole

Par rapport aux registres d'ostensifs évoqués par Nicole, comme nous pouvons l'observer dans la Figure 10.28, nous avons retrouvé $RO_{oar1(m)}$, $RO_{oral(p)}$ et RO_{em} . Une seule fois à la fin de la séance elle fait appel à $RO_{scratch}$ et elle n'utilise jamais RO_{graph} . Au niveau qualitatif, les ostensifs de $RO_{oral(m)}$ et RO_{em} apparus sont toujours relatifs à la seule expression issue du programme Scratch. En d'autres mots l'égalité relative à la décomposition d'un nombre entier (T_1) ou à la division euclidienne entre deux nombres entiers (T_3) n'est presque jamais évoquée ni à l'oral ni à l'écrit. Dans uniquement trois occasions Nicole propose aux élèves la représentation de cette égalité. Il s'agit des épisodes 3, 68 et 121. Notamment, les épisodes 3 et 121 sont classés avec $T_{représenter}$ alors que l'épisode 68 est non-classé. Lors de l'épisode 3 elle met en commun l'ostensif $(10 \times 5) + 2 = 52$ après avoir fait résoudre le premier problème de division-partition aux élèves. Dans l'épisode 121 la tâche dont la solution est représentée est t_{11a} , $(12 \times 11) + 3 = 135$. C'est lors de la passation de la consigne de t_{11a} (épisode 118) que l'enseignante écrit au tableau $(12 \times \dots) + \dots = 135$ et dans le moment de mise en commun elle remplit les trous à l'aide des propositions des élèves. En ce qui concerne l'épisode 68, il n'a pas été classé puisque Nicole dit aux élèves que lors de la résolution de la tâche t_{3b} ils peuvent utiliser le saut de longueur 9, car il s'agit d'un saut qui ne fait pas passer par la bombe. Par contre le saut de longueur 9 ne permet pas de se rendre exactement sur la cible 105, alors elle produit l'ostensif $(9 \times 11) + 6 = 105$.

Par ailleurs, nous observons que l'ordre de *diviseur* et *quotient* ne semble avoir aucune importance pour Nicole dans aucun des registres considérés. Cela arrive, par exemple, lors de l'épisode 86 ($T_{binômes}$), retranscrit ci-dessous :

1 P : Est-ce que vous vous êtes rapproché de trente-huit... Ap-procher ça veut dire être à côté...

2 E : Ah... oui

3 P : C'est là que tu testes avec dix... dix fois quatre... quarante, par contre, ce qui me dérange c'est qu'on t'a dit de faire des sauts de quatre... et si tu me mets répéter quatre fois neuf, ça veut dire quoi ?

4 E : Que... ça fait pas...

5 P : Que si on fait quatre fois neuf... ou neuf fois quatre... c'est... la même chose... d'accord ?

Dans cet épisode les élèves proposent à Nicole le programme *répéter 4 fois avancer de 9* comme solution de la tâche t_5 dans laquelle le saut autorisé était 4. Nicole montre d'accepter ce type de solutions car pour elle *répéter 4 fois avancer de 9* et *répéter 9 fois avancer de 4* renvoient aux mêmes non-ostensifs.

Une dernière observation de type qualitatif concerne la présence d'un ostensif qui n'était pas prévu, apparu lors de l'épisode 4 (non classé). Il s'agit de la représentation utilisée pour réaliser le calcul posé de la division euclidienne entre 52 et 10. Au moment de la représentation de cet ostensif cette représentation elle dit « Mais je pourrais écrire aussi... cinquante-deux... divisé par... cinq... vous vous souvenez de la puissance? ». Elle recourt donc à un ostensif qui normalement utilisé dans sa valence instrumentale pour exploiter sa valence sémiotique

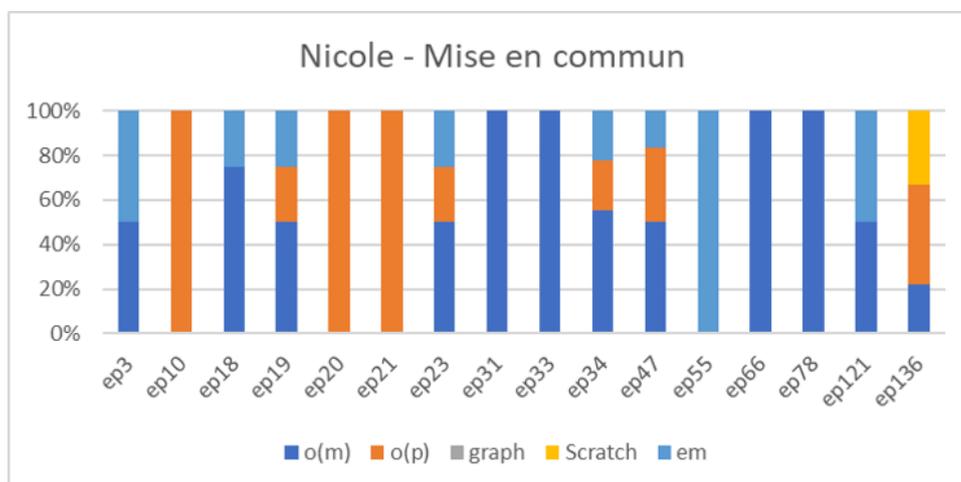


FIGURE 10.28 – Registres adoptés par Nicole dans la mise en commun des solutions

Pour analyser le recours aux différents registres d'ostensifs, nous montrons dans les Figures 10.29 et 10.30 les histogrammes relatifs aux épisodes de type $T_{représenter}$ et $T_{convertir}$ respectivement. Les données présentées concernant les registres utilisés pour représenter une solution ne montrent pas des régularités intéressantes. Nousregistrons, par contre, que le registre $RO_{Scratch}$ n'apparaît qu'à la fin de la séance (épisode 136), quand Nicole veut mettre en relation un problème résolu hors du dispositif Scratch avec les tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$. Pour cela, comme elle ne dispose pas de vidéo-projecteur dans sa classe, elle dessine au tableau une représentation du programme Scratch considéré.

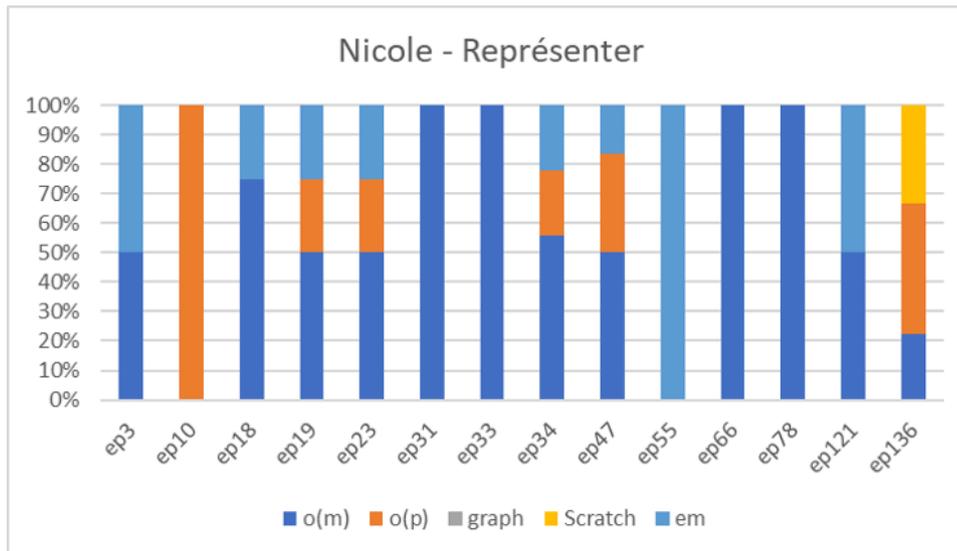


FIGURE 10.29 – Registres adoptés par Nicole pour représenter les solutions lors de la mise en commun

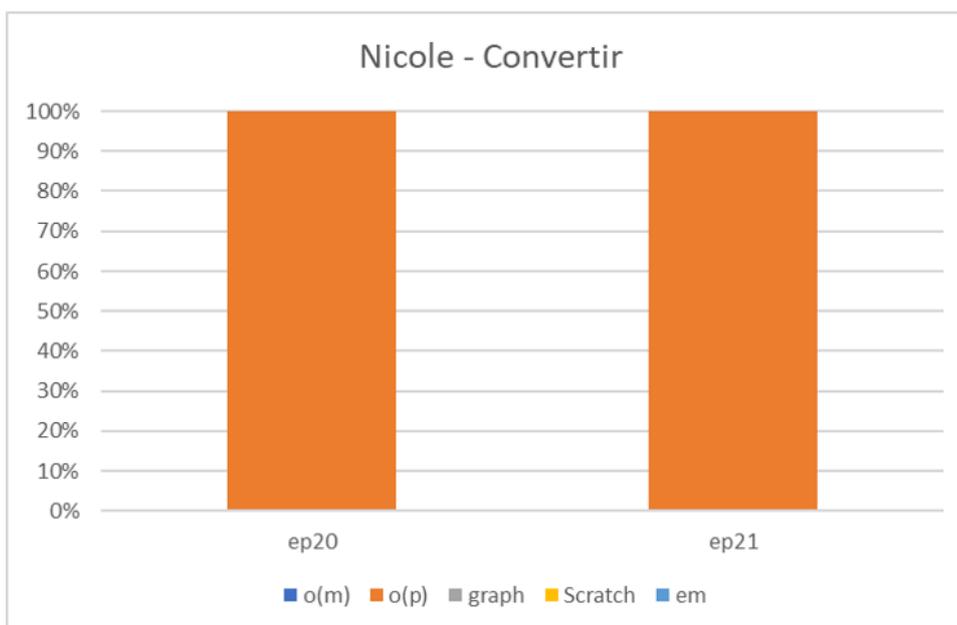


FIGURE 10.30 – Registres vers lesquels Nicole convertit des solutions lors de la mise en commun

En ce qui concerne la conversion de solutions d'un registre vers un autre, nous n'avons repéré que deux exemples d'épisodes concernés (20 et 21). La conversion se fait du registre RO_{em} au registre $RO_{oral(p)}$. Ce choix ne va pas dans la même direction des principes sur lesquels la construction de l'OMM a été fait.

10.4.5 L'institutionnalisation d'éléments technique-technologique

Dans le Tableau 10.13, nous indiquons la nature des 12 épisodes de la classe *Institutionnalisation*.

Type de tâches (OD)	n. ép (tot)
T^{τ}	5
T_{math}^{τ}	0
T_{comm}^{θ}	0
$T_{m/d}^{\theta}$	1
$T_{m/d}^{\nu}$	2
T_{struct}^{θ}	0
T_{opt}^{θ}	0
T_{div}^{θ}	0
T_{cont}^{ν}	1
$T_{em,cont}^{\theta}$	0
T_{dec}^{ν}	3
$T_{em,dec}^{\theta}$	0
total	12

TABLEAU 10.13 – Nombre des types de tâches de la classe *Institutionnalisation* réalisés par Nicole

Nous constatons que les types de tâches T_{math}^{τ} , T_{comm}^{θ} , T_{struct}^{θ} , T_{opt}^{θ} , T_{div}^{θ} , $T_{em,cont}^{\theta}$ et $T_{em,dec}^{\theta}$ n'ont pas été réalisés. Au contraire, les types de tâches relatifs à la verbalisation du vocabulaire ont été toutes mises en place.

Nous signalons que lors de divers épisodes, Nicole confond les termes de *multiple* et *diviseur* (épisodes 24, 46 et 67).

Parmi les épisodes de la classe *Institutionnalisation*, nous considérons comme relevant l'épisode 132, retranscrit ci-dessous :

- 1 P : Si on fait le point... Les CM1 vous nous aviez dit que vous ne saviez pas diviser... Donc... là vous avez tous été capable de résoudre des situations de partage... est-ce que vous en avez conscience ?
- 2 E : Ehm... oui
- 3 E : Mais on a multiplié...
- 4 P : En fait, tu dis on a multiplié... ça veut dire que pour pouvoir trouver les bons résultats vous avez... utilisé quoi comme connaissance ?
- 5 E : Ah, les tables de multiplication...
- 6 P : Les tables de multiplication...
- 7 P : Là je vous montre la manière dont on écrit... le résultat d'une division... et c'est pour vérifier si je l'ai fait juste ou pas... là on avait une quantité, un tout, que l'on a partagé, et on avait le diviseur qui était douze...
- 8 P : Donc, vous avez trouvé la solution, le quotient, en utilisant la multiplication et en complétant avec... le reste
- 9 P : Les CM1, vous ne savez pas encore... faire la division avec la potence, mais en tout cas vous avez compris le sens...

Nous observons que Nicole fait référence, dans son discours, à la résolution de situations de partage (lignes 1 et 7). Par ailleurs, nous voyons (ligne 7-8) qu'elle d'institutionnaliser l'écriture de la division euclidienne en s'appuyant sur la multiplication, mais sans créer des liens entre les mots « quotient » et « reste » et le contexte travaillé.

10.4.6 Les épisodes *non classés* réalisés par Nicole

Les épisodes non classés réalisés par Nicole sont le 1, le 4, le 15, le 25, le 35, le 68, le 71, le 133 et le 135.

Ces épisodes concernent plusieurs gestes de Nicole qui n'ont pas pu être classés grâce aux types de tâches didactiques identifiés *a priori*. Certains de ces épisodes ont déjà été explicités dans ce texte. Nous résumons leur contenu ci-dessous :

- conversion de l'ostensif $(10 \times 5) + 2 = 52$ vers l'ostensif lié à la méthode de la potence;
- modification de contraintes pour certaines tâches;
- introduction du terme « *quotient entier* »;
- validation de solutions non valides;
- introduction de problèmes à résoudre sur ardoise ne portant pas sur les types de tâches de l'OMM à enseigner.

10.4.7 Réponses de Nicole aux entretiens informels

Nous avons pu recueillir lors de l'entretien informel eu avec Nicole avant la passation de la séquence sa perception par rapport :

- au niveau de ses élèves : elle nous explique qu'il s'agit d'une classe dans laquelle beaucoup d'élèves ont des difficultés en mathématiques. Elle explicite également que, en s'agissant d'une classe mixte CM1/CM2, les élèves ont un niveau assez hétérogène;
- au rapport de ses élèves au dispositif Scratch : Nicole, dans sa classe, avant la réalisation de l'OMM, a réalisé la séquence d'initiation au logiciel Scratch. Par ailleurs, les élèves de niveau CM2 avaient déjà rencontré la séquence Scratch sur la division euclidienne puisqu'elle s'en était servie lors de l'année 2017/2018, hors de la phase expérimentale du projet dans laquelle elle avait fait passer la version « papier » des séquences (sans dimension algorithmique);
- au rapport de ses élèves à la division euclidienne : quand, après la passation de l'OMM, nous avons demandé à Nicole quel rapport ses élèves avaient aux égards de la division euclidienne, elle n'a fait jamais des références à l'apprentissage du sens de la division euclidienne, mais uniquement à sa technique opératoire. Notamment, les élèves du niveau CM2 de sa classe avaient suffisante maîtrise de la technique de division euclidienne, alors que les élèves de CM1 ne l'avaient pas encore abordée.

Par ailleurs, Nicole nous a spontanément parlé de son rapport avec les mathématiques. Elle a indiqué, en effet, qu'elle ne se sent pas à l'aise avec les objets de cette discipline et leur enseignement. Par ailleurs elle déclare que le projet EXPIRE a constitué pour elle une occasion de faire des mathématiques de manière plus ludique. Pendant notre discussion elle n'a jamais fait des références à la présence de la dimension algorithmique dans le dispositif utilisé, mais uniquement à l'utilisation d'environnements numériques. Notamment, elle a montré d'être favorable à adopter une approche basée sur l'utilisation du numérique pour l'apprentissage des mathématiques puisque cela motive d'une part les élèves et d'autre part les enseignants.

10.5 Analyse de l'OD réalisée par Marine

Marine a réalisé l'OMM dans sa classe de double niveau de CM1/CM2. Elle nous avait dit au départ de vouloir mettre en œuvre la séquence par demi classe, c'est-à-dire, réalisant de façon séparée trois séances pour les élèves de CM1 et trois séances pour les élèves de CM2. Malheureusement des contraintes temporelles et d'organisation l'ont obligée à mener uniquement la première séance avec les niveaux séparés et les deux autres en classe entière. Donc nous avons observé au total quatre séances d'environ une heure chacune réalisées par Marine. Plus précisément, la toute première séance en demi-classe s'est déroulée en matinée avec les élèves de CM2, et l'après-midi du même jour la même séance a été dispensée aux élèves de CM1. Lors de la phase expérimentale du projet de l'année précédente, Marine avait réalisé la même version des séquences.

Concernant les données brutes récupérées lors de l'observation des séances mises en place par Marine, nous disposons de l'enregistrement audio et de notes écrites.

Avant notre première rencontre Marine nous a spontanément envoyé un document écrit contenant les informations suivantes :

Pour les CM2 les pré-requis (partage-multiples-diviseurs-tables de multiplication) ont été travaillés. Ils seront révisés la semaine précédant la séquence. La notion de diviseurs sera approfondie.

Pour les CM1, les pré-requis cités seront travaillés la semaine précédant la séquence.

Les séances 1 et 2 seront organisées en demi-classe (CM1=14 élèves, CM2=15 élèves).

Les CM2 de cette année avaient déjà fait cette séquence lorsqu'ils étaient en CM1 puisque je participais déjà au projet EXPIRE en 2017-2018. Ils la referont cette année, ce qui permettra de voir s'il y a une évolution.

Comme préconisé dans la plan de séquence, pour les séances 1 et 2 les élèves seront en binôme face un ordinateur et pourront reporter leur démarche et résultat sur une fiche élève. La séance 3 axée sur la résolution de problèmes se fera en classe entière sur papier.

Nous pouvons déjà observer, à partir de l'envoi de ce document de la part de Marine, son intérêt vers le projet et la tendance à réfléchir sur ses pratiques enseignantes. Comme preuve supplémentaire d'une posture particulièrement réflexive de la part de Marine, nous avons ensuite appris de son intention de devenir formatrice d'enseignants et elle nous a dit qu'elle se tenait toujours informée des avancées de la recherche en didactique des mathématiques.

La salle de classe de Marine était équipée d'un tableau blanc et d'un vidéo-projecteur branché à un ordinateur géré par elle-même. Au début de la première séance elle a distribué les fiches des consignes aux élèves ainsi que des feuilles sur lesquelles les élèves étaient invités à marquer leurs procédures.

10.5.1 Adaptation de l'OM dans la classe de Marine

Au niveau de l'OM réalisée par Marine dans sa classe, les élèves ont travaillé toutes les tâches prévues dans l'OMMapprêtée et toutes les solutions ont été mises en commun systématiquement lors de bilans intermédiaires, si comme prévu dans la fiche pédagogique livrée par les chercheurs EXPIRE, à laquelle elle se référait toujours. Elle nous a précisé, d'ailleurs, qu'elle aurait, après les séances observées, conduit dans sa classe une séance de réinvestissement hors l'environnement Scratch, comme prévu dans la fiche.

10.5.2 Les éléments de l'OD apparus

D'abord, en comptant les épisodes que Marine consacre à chacune des classes identifiées *a priori*, nous trouvons la répartition montrée dans le Tableau 10.14.

Dans ce tableau, la seule différence qui émerge entre les niveaux de CM1 et de CM2 concerne les épisodes de la classe *Institutionnalisation* : le nombre d'épisodes consacrés à cette classe en CM1 est le double de ceux observés en CM2. Nous nous réservons le droit de vérifier si cette différence se manifeste également au niveau qualitatif dans la section 10.5.5. L'organisation didactique de Marine peut se représenter, d'ailleurs, avec le graphe en Figure 10.31 pour le niveau de CM1 et celui en Figure 10.32 pour le niveau CM2.

Type de tâches (OD)	n. ép (s1, CM1)	n. ép (s1, CM2)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (tot, CM1)	n. ép (tot, CM2)
<i>Gestion</i>	5	4	9	8	22	21
<i>Consigne</i>	7	?	7	6	19	20
<i>Travail en binômes</i>	21	13	8	11	40	32
<i>Mise en commun</i>	17	20	14	14	45	48
<i>Institutionnalisation</i>	25	12	16	19	60	47
non classé	3	1	1	1	5	3
total	100	74	68	75	243	217

TABLEAU 10.14 – Nombre des types de tâches par séance réalisés par Marine

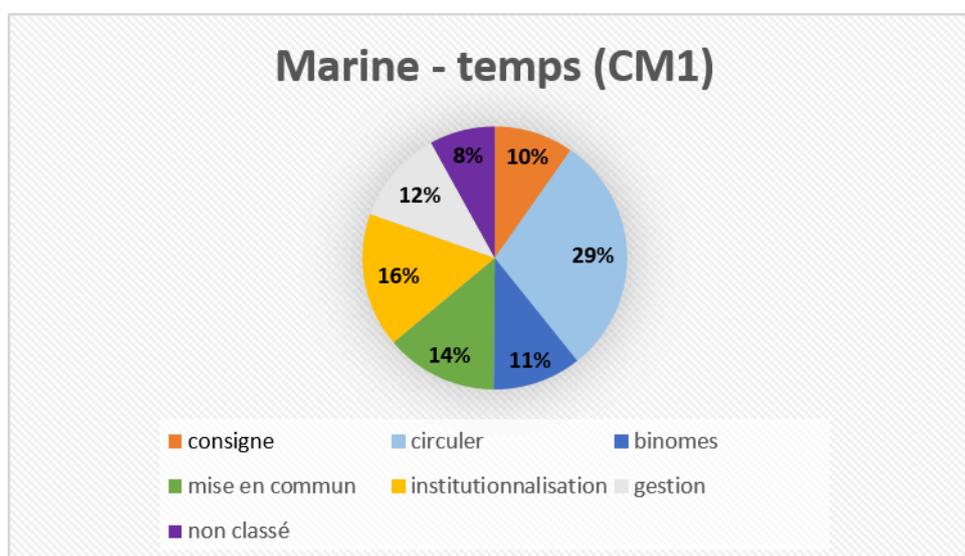


FIGURE 10.31 – Répartition du temps consacré par Marine à chaque classe d'éléments de l'OD pour le niveau de CM1

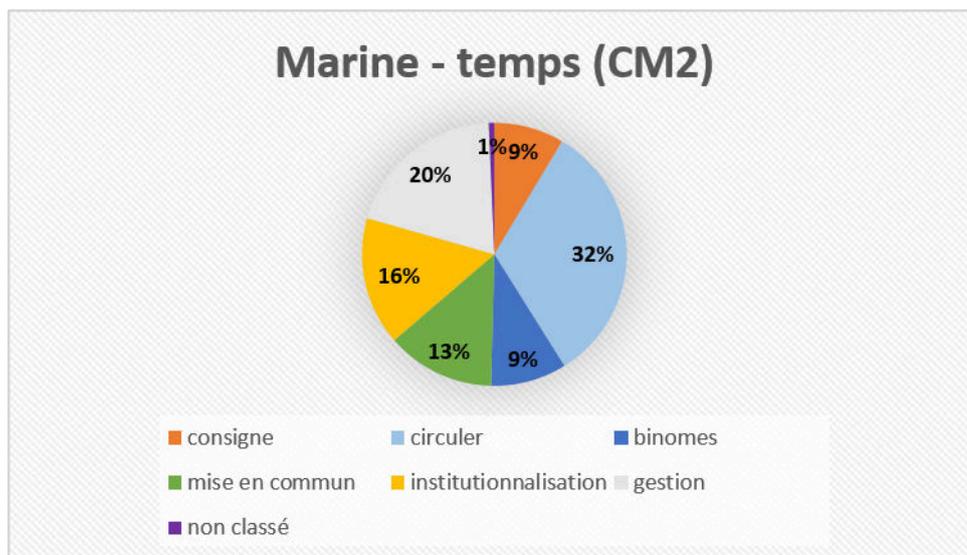


FIGURE 10.32 – Répartition du temps consacré par Marine à chaque classe d'éléments de l'OD pour le niveau de CM2

Il n'y a pas une grande différence entre les deux niveaux scolaires du point de vue de l'organisation temporelle. Dans les deux cas nous observons que :

- le temps dédié au travail en binômes correspond à environ 40% de la durée totale;
- le temps consacré à la mise en commun de solutions constitue environ le 14% de l'OD;
- le temps que Marine dédie à l'émergence et l'institutionnalisation des connaissances mathématiques constitue le 16% de la durée totale.

10.5.3 Les ingrédients des techniques émergés dans l'OD de Marine

En regardant les ingrédients des techniques apparus, nous observons que pour le niveau de CM2, il n'y a pas d'ingrédients algorithmiques. En revanche, les ingrédients algorithmiques apparus pour le niveau de CM1 ont été recueillis dans le tableau en Figure 10.33.

prog.	ep	type ep
rep	s1ep12	binomes
dupliquer	s1ep20	binomes
rep	s1ep20	binomes
rep	s1ep22	consigne

FIGURE 10.33 – Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD de Marine pour le niveau de CM1

Nous pouvons observer que l'ingrédient Tr épéter émerge deux fois lors de l'intervention de Marine dans deux binômes avant d'être évoqué lors d'un épisode d'explication des consignes. Nous en déduisons que l'aspect algorithmique était, en début de séance, problématisé, comme il était le cas pour les élèves de CM2 également. Les procédures émergées lors de la phase de travail en binômes en CM2 n'ont pas, par contre, nécessité l'intervention de l'enseignante au niveau praxéologique et Marine n'a donc pas ressenti

la nécessité de faire référence aux ingrédients algorithmiques en phase d'explication des consignes pour les CM2.

Au niveau des praxéologies mathématiques, nous recueillons les ingrédients de technique apparus en CM1 dans le tableau en Figure 10.34 et ceux apparus en CM2 dans le tableau en Figure 10.35. Nous précisons qu'à partir de la dix-huitième ligne du premier tableau et de la sixième ligne du deuxième, les deux tableaux se rejoignent.

math	ep	type ep
q,add	s1ep14	binomes
critères	s1ep45	binomes
a,1	s1ep47	binomes
multiples	s1ep47	binomes
tables	s1ep67	binomes
tables	s1ep69	binomes
critères	s1ep71	binomes
multiples	s1ep75	binomes
tables	s1ep77	binomes
multiples	s1ep81	binomes
critères	s1ep83	binomes
critères	s1ep84	binomes
tables	s1ep91	τ_{math}
q,add	s1ep91	τ_{math}
a,1	s1ep97	τ_{math}
test,2	s1ep98	τ_{math}
multiples	s1ep100	τ
tables	s2ep2	τ_{math}
critères	s2ep2	τ_{math}
critères	s2ep3	τ_{math}
critères	s2ep4	τ_{math}
critères	s2ep5	τ_{math}
critères	s2ep6	τ
test,q	s2ep41	binomes
test,q	s2ep43	binomes
q,encadrer	s2ep65	τ
q,encadrer	s3ep24	τ
add,b	s3ep24	τ
multiples	s3ep25	τ_{math}
add,b	s3ep25	τ_{math}
multiples	s3ep26	τ_{math}
multiples	s3ep27	τ_{math}
q,int	s3ep28	τ_{math}
q,int	s3ep36	τ
reste	s3ep36	τ
multiples	s3ep60	τ_{math}
reste	s3ep60	τ_{math}
q,int	s3ep69	τ
critères	s3ep74	τ_{math}

FIGURE 10.34 – Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Marine pour le niveau de CM1

math	ep	type ep
tables	s1ep22	τ_{math}
tables	s1ep39	binomes
test,b	s1ep62	binomes
critères	s1ep68	binomes
multiples	s1ep68	binomes
tables	s2ep2	τ_{math}
critères	s2ep2	τ_{math}
critères	s2ep3	τ_{math}
critères	s2ep4	τ_{math}
critères	s2ep5	τ_{math}
critères	s2ep6	τ
test,q	s2ep41	binomes
test,q	s2ep43	binomes
q,encadrer	s2ep65	τ
q,encadrer	s3ep24	τ
add,b	s3ep24	τ
multiples	s3ep25	τ_{math}
add,b	s3ep25	τ_{math}
multiples	s3ep26	τ_{math}
multiples	s3ep27	τ_{math}
q,int	s3ep28	τ_{math}
q,int	s3ep36	τ
reste	s3ep36	τ
multiples	s3ep60	τ_{math}
reste	s3ep60	τ_{math}
q,int	s3ep69	τ
critères	s3ep74	τ_{math}

FIGURE 10.35 – Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l’OD de Marine pour le niveau de CM2

Nous pouvons observer que lors de la première séance Marine a institutionnalisé avec la classe presque tous les ingrédients de techniques apparus, et qu’elle a observé, en phase de travail en binômes, soit avec les élèves de CM1, soit avec les élèves de CM2. Les ingrédients apparus relèvent, entre autres, du recours aux critères de divisibilité, aux tables de multiplications et au calcul de multiples. Ces ingrédients sont repris tout au long de la séquence, et, en plus, lors de la deuxième et troisième séance, nous voyons apparaître également des techniques basées sur l’identification et l’ajustement d’intervalles contenant le quotient. L’ingrédient T_{reste} résulte également institutionnalisé lors de l’épisode *s3ep74*.

10.5.4 Les registres d’ostensifs utilisés par Marine lors de la mise en commun

En regardant dans les détails les épisodes de la classe *Mise en commun*, nous pouvons retrouver des épisodes caractérisés du type de tâches $T_{\text{représenter}}$ et d’autres relevant du type de tâches $T_{\text{convertir}}$, et nous trouvons un seul épisode relevant de T_{traiter} , comme cela est montré dans le Tableau 10.15.

Type de tâches (OD)	n. ép (s1, CM1)	n. ép (s1, CM2)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (tot, CM1)	n. ép (tot, CM2)
$T_{représenter}$	17	20	8	7	32	35
$T_{traiter}$	0	0	0	1	1	1
$T_{convertir}$	0	0	6	6	12	12
total	17	20	14	14	45	48

TABLEAU 10.15 – Nombre des types de tâches de la classe *Mise en commun* réalisés par Marine

En particulier, Marine représente uniquement les solutions impliquées lors de la première séance et elle a effectué des conversions lors des séances 2 et 3. Parmi les registres d’ostensifs utilisés par Marine lors de la mise en commun des solutions, nous ne voyons jamais apparaître le registre RO_{graph} . Les histogrammes montrés dans les Figures 10.36 et 10.37 représentent tous les registres évoqués dans les divers épisodes de la classe *Mise en commun* pour le niveau CM1 et pour le niveau CM2. Ces deux histogrammes se rejoignent à partir de l’épisode *s2ep18*.

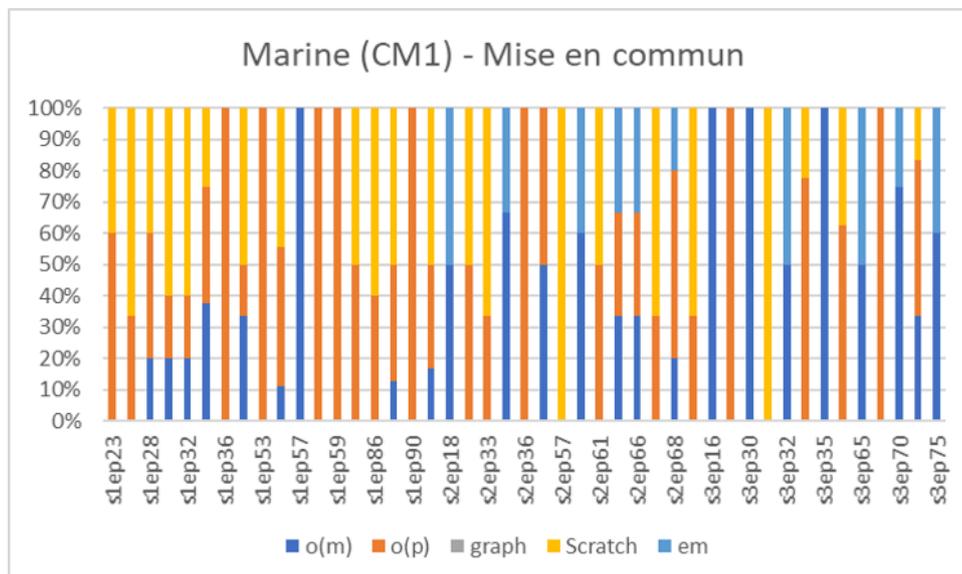


FIGURE 10.36 – Registres adoptés par Marine dans la mise en commun des solutions pour le niveau de CM1

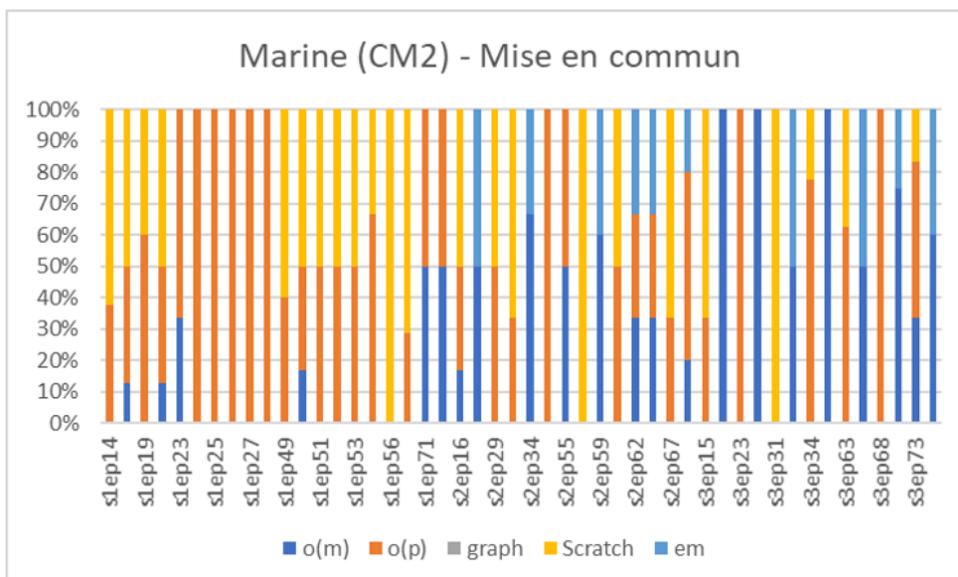


FIGURE 10.37 – Registres adoptés par Marine dans la mise en commun des solutions pour le niveau de CM2

Nous observons que lors de la première séance il y a une prédominance des couleurs jaune et orange, qui représentent les registres liés à l’algorithmique, alors que dans la deuxième et troisième séance nous observons une alternance entre des épisodes caractérisés par des registres algorithmiques et des épisodes caractérisés par des registres mathématiques. Par ailleurs, en séparant les épisodes de type $T_{représenter}$ des autres (Figures 10.38 et 10.39), nous observons que les représentations de solutions ont été principalement faites dans les registres algorithmiques.

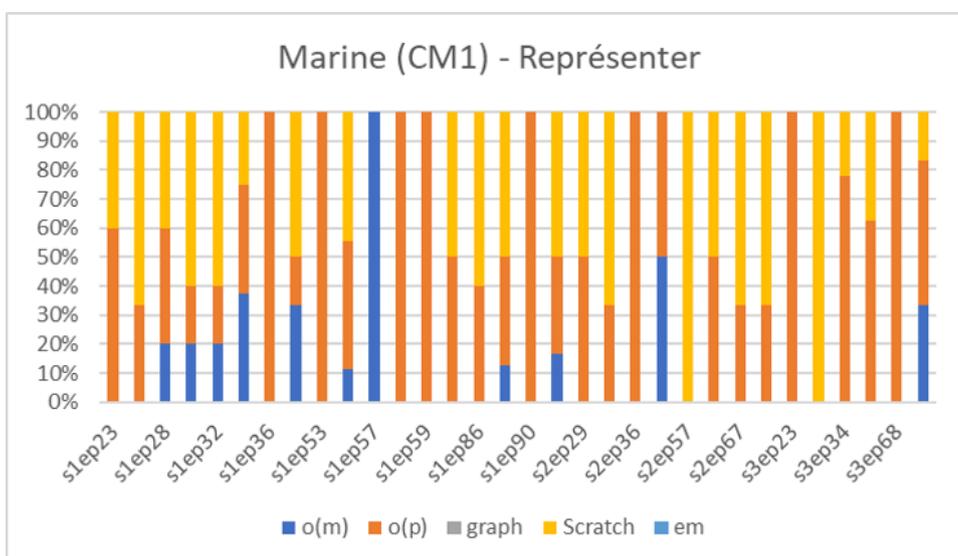


FIGURE 10.38 – Registres adoptés par Marine pour représenter les solutions lors de la mise en commun pour le niveau de CM1

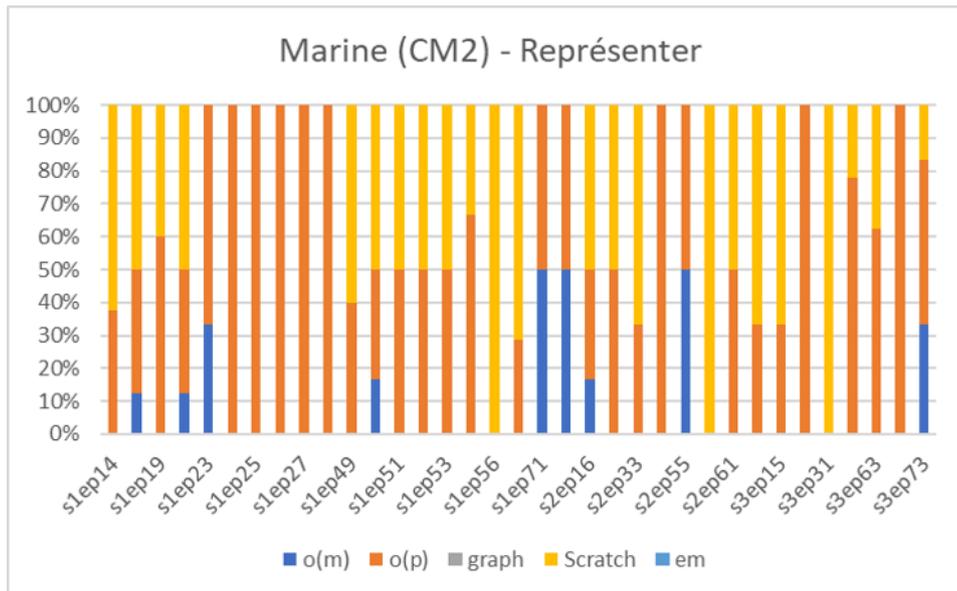


FIGURE 10.39 – Registres adoptés par Marine pour représenter les solutions lors de la mise en commun pour le niveau de CM2

Le seul épisode relevant du traitement d'une solution est l'épisode *s3ep30*, qui se déroule au 100% dans le registre $RO_{oral(m)}$ (Figure 10.40). Nous le reportons ci-dessous :

- 1 M : Donc, Philias, du coup il dit beh, c'est en fait, ça va être comment je fais pour arriver donc au plus proche ? Vas-y
- 2 E : Huit fois dix plus huit fois quatre
- 3 M : oui ?
- 4 E : Donc huit fois quatorze



FIGURE 10.40 – Registres traités par Marine pour obtenir des solutions lors de la mise en commun

Finalement, en ce qui concerne la conversion, nous pouvons déduire qu'elle vient alterné à la représentation des solutions respectives. Elle a lieu principalement vers les registres mathématiques (Figure 10.41), si comme préconisé dans le plan de l'OMM approuvée.

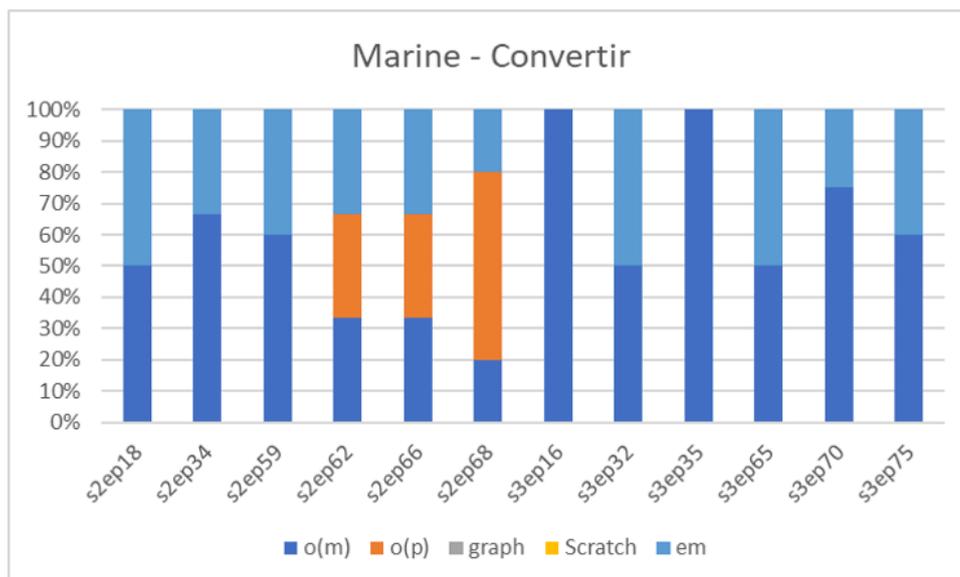


FIGURE 10.41 – Registres vers lesquels Marine convertit des solutions lors de la mise en commun

10.5.5 L’institutionnalisation d’éléments technique-technologiques

Dans le Tableau 10.16 nous détaillons le nombre d’épisodes relatif à chaque type de tâches de la classe *Institutionnalisation*. Nous observons l’absence des types de tâches T_{struct}^{θ} , T_{opt}^{θ} et de $T_{em,dec}^{\theta}$.

Type de tâches (OD)	n. ép (s1, CM1)	n. ép (s1, CM2)	n. ép (s2)	n. ép (s3)	n. ép (tot, CM1)	n. ép (tot, CM2)
T^{τ}	1	0	4	5	10	9
T_{math}^{τ}	3	2	4	8	15	14
T_{comm}^{θ}	0	1	0	0	0	1
$T_{m/d}^{\theta}$	19	7	2	0	21	9
$T_{m/d}^v$	2	2	0	0	2	2
T_{struct}^{θ}	0	0	0	0	0	0
T_{opt}^{θ}	0	0	0	0	0	0
T_{div}^{θ}	0	0	1	2	3	3
T_{cont}^v	0	0	1	0	1	1
$T_{em,cont}^{\theta}$	0	0	2	2	4	4
T_{dec}^v	0	0	2	2	4	4
$T_{em,dec}^{\theta}$	0	0	0	0	0	0
total	25	12	16	19	60	47

TABEAU 10.16 – Nombre des types de tâches de la classe *Institutionnalisation* réalisés par Marine

Concernant l’évaluation des différences entre l’OD réalisée pour les CM1 et les CM2, nous pouvons observer une différence nette au niveau du nombre d’épisodes caractérisés par $T_{m/d}^{\theta}$ (19 épisodes pour les CM1 et 7 épisodes pour les CM2) ainsi que au niveau de l’apparition de T_{comm}^{θ} (présent uniquement pour les CM2). Nous transcrivons ci-dessous l’épisode *s1ep18* (CM2) caractérisé par le type de tâches T_{comm}^{θ} :

- 1 M : Beh, oui... Vous avez compris, c'est ce que tu as dit Solène tout à l'heure... Si j'ai répéter douze fois des sauts de deux, je peux aussi répéter deux fois des sauts de douze...
- 2 M : Sauf que la différence va être... Dans la manière dont on va avancer... D'accord ? Sauf que là on avait pas le douze, puisqu'on pouvait prendre que des chiffres de un à neuf...
- 3 M : Mathématiquement, douze fois deux ou deux multiplié par douze, c'est la même chose... Mathématiquement au niveau du résultat... On n'a pas le même sens par contre... si on décortique l'opération... Baptiste ?

Nous voyons que, dans la ligne 1, Marine fait référence à l'observation précédente d'une élève et la partage avec toute la classe. En regardant le déroulement de la première séance en CM1, nous constatons, en revanche, qu'il n'y a pas eu une occasion similaire.

10.5.6 Les épisodes *non classés* réalisés par Marine

Marine a réalisé 3 épisodes non classés lors de la première séance avec les élèves de CM1 (*s1ep27*, *s1ep41*, *s1ep99*), un épisode non classé lors de la première séance pour les CM2 (*s1ep46*), un épisode non classé lors de la deuxième séance (*s2ep31*) et un épisode non classé lors de la troisième séance (*s3ep72*).

Parmi ces épisodes nous n'en retenons qu'un seul qui nous considérons remarquable aux fins de nos analyses : l'épisode *s1ep99* (CM1), que nous retranscrivons ci-dessous.

- 1 E : Ehm... non par ce que... ça va pas tomber sur le résultat
- 2 P : Comment ?
- 3 E : ça va pas arriver sur le résultat
- 4 P : ça va pas tomber sur le résultat ?
- 5 E : Ehm...
- 6 P : Quel est le problème avec trois ?
- 7 E : Non, ça va... c'est qu'il va pas arriver sur... cent-cinq... il va tomber sur cent-six...
- 8 P : C'est pas le problème...

Marine, dans cet épisode, discutait avec un élève de la justification de la non validité du saut de longueur 3 pour résoudre la tâche t_{3a} (cible fixée à 105, bombes à 25 et à 48), durant un moment de bilan collectif.

Quand elle a posé cette question, Marine attendait de l'élève la réponse « le saut de longueur 3 fait tomber sur la bombe 48, puisque 48 est un multiple de 3 », qu'elle arrive à obtenir quelque épisode plus tard. L'élève propose, en revanche, l'assertion « le saut de 3 ne fait pas tomber sur 105 » (lignes 1, 3 et 7) qui est fausse. Nous voyons que Marine n'intervient pas sur la correction de cette phrase, en disant « ce n'est pas le problème » (ligne 8). Cela arrive probablement pour une manque de la réponse attendue.

En parcourant la phase de bilan portant sur la même tâche pour les CM2 (qui chronologiquement a eu lieu avant celle des CM1), nous avons reperé cet extrait de l'épisode *s1ep72*, caractérisé par le type de tâches $T_{m/d}^0$:

- 1 M : Vous avez vu la solution de Romain et Gaetan la solution de un, pourquoi elle est embetante ? Par ce que si on veut éviter des bombes, eh beh, par le un on va passer par les bombes... et en plus c'est long...
- 2 M : Pourquoi trois ne fonctionne pas ? Arnoud ?
- 3 E : Puisque cent-cinq... eh, non puisque trois n'est pas un diviseur de cent-cinq ?

- 4 M : Alors, trois n'est pas un diviseur de cent-cinq et en plus de ça est-ce que...
- 5 E : Et c'est un... c'est en plus un multiple de sept
- 6 M : Ah, non... Non, non... Non par ce que quarante-huit c'est pas... trois fois sept, trois fois huit, trois fois neuf, trois fois dix... trois fois douze trente-six, trois fois quinze, quarante-cinq... trois fois seize ?
- 7 E : Quarante-huit
- 8 M : Et oui, quarante-huit... Donc quarante-huit c'est un multiple de trois... donc on peut pas...

Ici, également, la réponse donnée de l'élève ne correspond pas à celle attendue, et Marine donne valeur à la réponse fausse de l'élève en la complétant.

10.5.7 Réponses de Marine aux entretiens informels

Nous avons mené un entretien informel avec Marine, avant la passation de la séquence dans sa classe. A partir de son discours nous avons pu relever des informations concernant sa perception relativement :

- au niveau de ses élèves : elle ne nous a pas parlé de difficultés particulières, elle considère que sa classe a un bon niveau;
- au rapport de ses élèves au dispositif Scratch : Marine a réalisé dans sa classe, avant passation de l'OMM relatif à la division euclidienne, la séquence d'initiation au logiciel Scratch proposée par les chercheurs du projet EXPIRE. Par ailleurs, elle précise que les élèves de niveau CM2 avaient participé, au cours de l'année scolaire précédente au projet EXPIRE, et ils ont donc travaillé, entre autres, la même séquence Scratch sur la division euclidienne;
- au rapport de ses élèves à la division euclidienne : dans sa classe, lors des semaines précédentes aux séances observées, Marine a proposé des activités pour rappeler les notions de multiple/diviseur. Par ailleurs, elle nous a indiqué que les élèves de sa classe connaissent, outre aux tables de multiplication, les critères de divisibilité par 2 et par 5. Les élèves de niveau CM2 connaissent également le critère de divisibilité par 3.

Pour Marine le projet EXPIRE constitue la première occasion pour intégrer l'algorithmique et la programmation dans ses pratiques d'enseignement. Par rapport à l'algorithmique et la programmation, elle pense qu'il y a des potentialités à exploiter du point de vue des apprentissages. Elle mentionne par exemple la capacité d'anticiper les résultats d'une action. Elle retient, par contre, que ce type de compétence soit très difficile à évaluer, surtout pour ce niveau scolaire. Elle justifie son intérêt vers le projet EXPIRE en disant que les activités proposées permettent de faire développer des compétences informatiques à l'école primaire qui seront reprises au cours du collège et cela, sans trop d'impact sur la programmation scolaire annuelle.

Chapitre 11

Discussion des résultats

A partir des résultats obtenus dans le chapitre 10 et en vue de présenter des éléments de réponse à notre question de recherche $QR_{pratiques}$ « *Comment le système de conditions et de contraintes auquel chaque enseignant est confronté joue dans la transposition didactique interne d'une organisation mathématique mixte intégrant une dimension algorithmique?* », nous allons définir des profils d'enseignants qui peuvent se manifester lors de la réalisation d'une organisation mathématique mixte comme celle présentée dans cette thèse en tenant compte des diverses organisations didactiques et des conditions et contraintes observées. Les profils d'enseignants seront caractérisés relativement à trois paramètres identifiés lors de la revue de littérature présentée en section 3.3 :

- l'ordre de réalisation des différents moments de l'étude pour les niveaux mathématique et algorithmique de l'OMM enseignée; cela peut, en particulier, donner lieu à une approche problématisée ou non de chacun des niveaux praxéologiques;
- la façon d'articuler les registres d'ostensifs disponibles issus de l'OMM apprêtée;
- l'approche utilisée pour l'institutionnalisation du sens de la division euclidienne.

11.1 Le profil de Yara et Marine

L'analyse des organisations didactiques réalisées par Yara et Marine donne lieu à un même profil d'enseignant, selon les paramètres que nous considérons. Les caractéristiques émergées, que nous discuterons dans cette section, sont les suivantes :

1. les deux niveaux mathématique et algorithmique sont problématisés;
2. le registre $RO_{Scratch}$ a un rôle central dans l'OD et est articulé avec le registre RO_{em} de manière systématique;
3. institutionnalisation de tout élément technique et technologique émergé relativement aux praxéologies mathématiques.

Il s'agit globalement d'OD très riches et totalement conformes aux attentes des créateurs de l'OMM apprêtée.

Par ailleurs, les entretiens informels eu avec les deux enseignantes ont montré qu'elles ont un rapport personnel aux mathématiques et à la didactique de cette discipline très proche, ainsi qu'un point de vue similaire par rapport à l'usage de l'algorithmique et de la programmation pour l'enseignement.

11.1.1 Problématisation du type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$

Les résultats relatifs aux ingrédients des techniques apparus lors des séances conduites par Yara et Marine montrent qu'elles ont problématisé le type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$ aussi bien au niveau *mathématique* que *algorithmique*. Pour les deux niveaux praxéologiques en effet, au début de l'activité, il y a eu dans l'ordre le moment de la première rencontre, puis de l'exploration du type de tâches, puis de la constitution de l'environnement technologico-théorique (celui-ci uniquement pour les praxéologies mathématiques). Les praxéologies algorithmiques ont été évoquées dans la mesure où les élèves se trouvaient en difficulté, durant le travail en binômes. Les élèves des classes de Yara et Marine ont été mis dans une situation de résolution de problèmes, que doit provoquer chez les élèves le recours à certains ingrédients de techniques mathématiques et algorithmiques déjà connus. Notamment, nous avons observé une grande variété d'ingrédients mathématiques émergés : dans la classe de Yara, outre au recours aux tables de multiplication et à des techniques basées sur l'encadrement du quotient dans des intervalles, il apparaît la division posée comme technique qui donne d'un seul coup le quotient et le reste. Marine, en revanche, insiste plutôt sur une réflexion concernant le recours aux critères de divisibilité pour le choix du quotient. Lors de la passation des consignes, les deux enseignantes ont expliqué que les élèves étaient censé construire des programmes sur Scratch pour résoudre les problèmes. La dimension algorithmique présente dans l'OMM apprêtée est alors bien mise en évidence dans l'OMM enseignée, mais elle ne prévaut pas sur la dimension mathématique.

11.1.2 La conversion entre registres comme passage fondamental pour donner du sens aux objets mathématiques

Dans les deux OD réalisées par Yara et Marine, nous avons repéré tous les registres prévu *a priori*, sauf le registre RO_{graph} . En particulier, Yara et Marine avaient, dans leur salle de classe un vidéo-projecteur, grâce auquel elles ont, de manière systématique, mis en commun les solutions des diverses tâches à l'aide du registre $RO_{Scratch}$. Les deux ont demandé, aux élèves de noter les solutions trouvées, en phase de travail en binômes, sur leurs feuille. Yara demandait à ses élèves de noter les solutions, dès le début, sous forme d'égalité mathématique, alors que Marine, lors de la première séance demandait de représenter avec une phrase le programme trouvé et dans les deux autres séances, outre à la représentation du programme elle voulait que les élèves représentaient sur leurs feuilles les égalités mathématiques associées aux programmes. Pour les deux enseignantes le support « papier » était un outil didactique fondamental, puisqu'il permettait de construire chez les élèves une « mémoire » des actions réalisées à laquelle elles pourront faire référence dans les phases de bilan collectif. Lors de ces phases, après avoir représenté les solutions avec le registre $RO_{Scratch}$, une action didactique de conversion avait lieu vers le registre RO_{em} à l'aide des registres de l'oralité.

11.1.3 Institutionnaliser des techniques et des technologies mathématiques

Les OD réalisées par Yara et Marine contiennent presque tous les types de tâches prévus *a priori* de la classe *Institutionnalisation*. Les éléments des praxéologies institutionnalisées correspondent dans les deux cas aux ingrédients des techniques réalisées par les élèves. En particulier, Yara invite ses élèves à expliciter les techniques mathématiques

qu'ils ont mis en place en les partageant directement avec la classe, alors que Marine interroge les élèves pendant les phases de travail en binômes pour faire émerger les techniques qui seront successivement reprises par l'enseignante lors des moments de bilan collectif.

Yara et Marine demandent aux élèves d'être précis avec l'utilisation du vocabulaire, dans un premier moment lié au contexte de la cible, puis lié aux mathématiques. Elles-mêmes s'expriment de façon carrée lorsqu'elles indiquent les éléments centraux, comme la « cible », la « taille du saut », etc. Pour Yara, cela a été fondamental pour ensuite pouvoir *décontextualiser* l'égalité relative à la division euclidienne ($T_{em,dec}^0$). Marine, pour une manque de temps, n'a pas réalisé cette décontextualisation explicitement, mais elle a mis en relation le vocabulaire relatif au contexte avec le vocabulaire mathématique visé.

11.2 Le profil de Patrick

A partir de l'OD réalisée par Patrick, nous pouvons définir son profil grâce aux caractéristiques suivantes :

1. les praxéologies de l'OMM problématisées sont uniquement celles *mathématiques* et la mise en commun des *ingrédients* de techniques visés est très faible ;
2. l'exploitation du registre $RO_{Scratch}$ est très faible et des ostensifs qui ne sont pas en lien direct avec l'activité apparaissent lors de la mise en commun des solutions ;
3. l'institutionnalisation d'éléments technologiques liés à la division euclidienne est remplacée par la simple nominalisation d'objets mathématiques.

Nous allons présenter ces différents aspects dans les sous-sections suivantes.

11.2.1 Problématisation uniquement des *ingrédients mathématiques* et manque de leur institutionnalisation

Lors de la présentation de la consigne en vue de la première rencontre de ses élèves avec le type de tâches $T_{prog}[T_{DE}]$, Patrick indique de manière différente les praxéologies *algorithmiques* et celles *mathématiques*. En effet, il évoque en différents moments consacrés à l'explicitation des consignes les *ingrédients algorithmiques* $T_{répéter}$ et $T_{dupliquer}$ à utiliser pour la construction du programme Scratch. Notamment, il s'appuie sur la mémoire de sa classe ayant précédemment travaillé le bloc praxique de ces praxéologies grâce à deux autres séquences du projet EXPIRE : celle d'initiation au logiciel Scratch et celle sur la décomposition additive. Par ailleurs, le professeur souligne explicitement que le rapport de la classe à ces ingrédients de technique était conforme avec le rapport institutionnel avant la passation de la séquence. En d'autres mots, il présente les praxéologies *algorithmiques* de manière non problématisée.

Au contraire, les *ingrédients mathématiques* ne sont pas présentés lors des moments dédiés à la passation des consignes. Cela indique que c'est cette partie des tâches de l'OMM que Patrick veut problématiser. Ce choix est cohérent avec les principes du projet EXPIRE : le foyer est sur les mathématiques et la programmation n'est qu'un moyen de faire des mathématiques.

Cependant, les pratiques de cet enseignant ne suffisent pas, lors du bilan sur les techniques réalisées, à faire expliciter aux élèves les ingrédients de technique souhaités. Ce que Patrick réalise pour enquêter sur les techniques mises en place par les élèves consiste à questionner les élèves grâce à questions du type « *Qu'est-ce que vous avez fait pour arriver au résultat ? Comment vous avez fait ?* ». Dès que des *ingrédients* marginaux tels que

$T_{q,hasard}$ et $T_{q,int}$ apparaissent il ne se prolonge pas sur leur institutionnalisation et il passe à effectuer le type de tâches $T_{convertir}$. Il invite constamment les élèves à tester, mais il ne les renvoie en aucun moment à l'utilisation des tables de multiplication ni aux critères de divisibilité.

Nous constatons alors qu'il existe une distance entre ce que le professeur énonce dans la consigne et ce qu'il décide de mettre en commun dans la classe. Nous n'avons pas suffisamment d'éléments pour établir les raisons qui pourraient justifier cette distance. Cependant nous pouvons formuler des hypothèses pour le manque de l'explicitation et de l'institutionnalisation des *ingrédients mathématiques* attendus :

1. le rapport personnel du professeur à la division euclidienne n'est pas conforme au rapport institutionnel;
2. le professeur a choisi de ne mettre en commun que ce qui apparaissait spontanément chez les élèves.

Puisque Patrick choisit de ne pas problématiser la partie *algorithmique* de l'OMM lors de l'explicitation de la consigne et que, par ailleurs, il ne fasse jamais référence aux praxéologies relatives tout au long de la séquence, nous fait écarter l'hypothèse que la distance identifiée soit imputable à la présence de ces dernières dans l'OMM.

11.2.2 Ostensifs loin de ceux induits par le dispositif

En ce qui concerne les registres utilisés pour évoquer les solutions lors de la mise en commun, Patrick articule les ostensifs de RO_{graph} et RO_{em} , en évoquant à l'oral à la fois l'environnement de programmation ($RO_{oral(p)}$) et à la fois le vocabulaire mathématique ($RO_{oral(m)}$). En général, cette articulation de registres respecte les consignes données par les auteurs de la séquence. Une particularité s'est produite lors du recours aux ostensifs de RO_{em} . Les écritures de type $a = b \times q$ ont été correctement produites et mises en commun pour les solutions que les élèves proposaient pour les tâches de $T_{décomposer}$. Au contraire celles du type $a = b \times q + r$ liées aux tâches $T_{quotient}$ et T_{reste} n'ont pas apparues de façon naturelle dans l'OD de Patrick. L'écriture mathématique qui a été mise en avant par Patrick lors de la représentation des solutions de $T_{quotient}$ et T_{reste} est du type $11 : 5 = 2r1$.

La phrase de Patrick « Donc je vais écrire une autre égalité que vous avez... que pas mal entre vous ont écrit... qui correspond exactement à mon programme... », formulée lors du passage à l'ostensif du type $11 = 5 \times 2 + 1$ (épisode *s2ep57*), ne nous fait pas attribuer la cause de l'apparition du premier ostensif ni à la nature du dispositif Scratch ni aux ostensifs produits par les élèves. En revanche, ce choix de l'enseignant peut dériver d'une tentative de mettre en avant la division vue comme l'opération qui permet de résoudre les tâches proposées.

Nous voyons donc que pour Patrick, afin de faire travailler le sens de la division euclidienne, il est nécessaire d'évoquer l'*ingrédient* $T_{q,div}$. Il est également important pour lui représenter non seulement l'expression visée $5 \times 2 + 1$ qui permet d'atteindre la cible 11, mais également la technique qui permet d'obtenir le quotient et le reste à partir de dividende et diviseur.

La vision de Patrick relativement à la division euclidienne correspond à une conception plutôt commune dictée par la confusion entre la division définie dans l'ensemble des naturels et celle dans l'ensemble des rationnels.

Nous soulignons, finalement, le choix de Patrick de faire recours très peu au registre d'ostensifs $RO_{Scratch}$, bien qu'il soit équipé d'un vidéo-projecteur dans sa classe. Les occasions dans lesquelles il fait appel à ce registre vis-à-vis de la totalité de la classe se limitent à deux situations :

- vérification collective de la validité d'un programme proposé lors d'un désaccord parmi les élèves;
- l'enseignant veut montrer comment « matérialiser » le reste de la division euclidienne dans ce registre lors de la première rencontre avec les tâches de T_3 .

11.2.3 La nominalisation des objets mathématiques au détriment de leur conceptualisation

L'analyse des types de tâches de la classe *Institutionnalisation* apparus dans l'OD de Patrick a révélé la présence de la nominalisation des objets concernant la division euclidienne. Pour cette nominalisation le professeur se limite à utiliser le vocabulaire mathématique pour désigner les *multiples* et les *diviseurs* ainsi que le *dividende*, le *quotient*, le *diviseur* et le *reste* de la division euclidienne entre deux naturels. Il ne se focalise jamais sur les termes *cible*, *type de saut*, *nombre de sauts* ou *joker*, qui désignent les mêmes objets mathématiques contextualisés dans l'activité proposée. Par ailleurs, en accord avec la faible apparition de techniques mathématiques, Patrick ne fait aucun renvoi aux éléments technologiques liés à ces objets.

Nous supposons que l'OD de Patrick, les connaissances relatives à la division euclidienne étant déjà acquises lors de l'année précédente, vise à réactiver ces connaissances à travers le OMM mise en place. Dans cette optique, il laisse la conceptualisation des objets mathématiques à la charge des élèves dans leur travail avec $T_{prog}[T_{DE}]$.

11.3 Le profil de Asie

Si d'une part la participation à projets de recherche visant à introduire des outils numériques à l'école n'était pas une nouveauté pour Asie, elle a montré de croire de façon particulière qu'une initiation à la programmation puisse avoir des apports bénéfiques pour les apprentissages. Cependant, elle affirme que grâce à l'expérience acquise elle a appris que les seuls outils numérique, y compris Scratch, ne suffisent pas à faire développer aux élèves les compétences visées.

Les caractéristiques que nous avons identifiées grâce à l'analyse de l'OD réalisée par Asie sont cohérentes avec cette façon de concevoir les potentialités du projets. Nous les listons ci-dessous :

1. exploitation de la programmation comme vecteur de praxéologies mathématiques;
2. évocation des ostensifs liés à un dispositif lors des phases de travail dans d'autres dispositifs;
3. présence d'éléments technologiques relatifs au sens de la division euclidienne contextualisés.

Nous allons présenter chacun des points annoncés plus en détails dans les sous-sections qui suivent.

11.3.1 Exploitation de la programmation comme vecteur de praxéologies mathématiques

Dans l'OD mise en place par Asie nous avons observé une manque de problématisation du niveau praxéologique de l'OMM relatif à la programmation, puisque elle a fourni aux élèves le prototype du programme qu'ils auraient du créer sur Scratch pour accomplir

$T_{prog}[T_{DE}$. Malgré cela, elle tient à ce que les élèves prennent conscience des potentialités et des limites du dispositif qu'ils utilisent.

A plusieurs moments, en effet, Asie a trouvé l'occasion de mettre en évidence les caractéristiques relatives au dispositif d'apprentissage outre que les objectifs mêmes. Par exemple, elle explique plusieurs fois aux élèves que après la manipulation dans le dispositif Scratch ils auraient du comprendre « *ce qu'il s'est passé* » (*s1ep2, s3ep36, s4ep77*). Les consignes sont données de façon très précise : ce qui est attendu d'un élève n'est pas seulement le programme Scratch en soi, mais également l'attribution d'un sens à ce programme grâce à des praxéologies mathématiques.

Relativement à ce point, Asie a fait émerger tous les *ingrédients mathématiques* attendus pour que des compétences liées au sens de la division euclidienne soient effectivement travaillées. De plus, les ingrédients de technique apparus tout au long de la séquence ont été placés dans contextes différents et fait l'objet d'institutionnalisation.

Par ailleurs, elle demande tout au long de la séquence à ses élèves d'essayer de mettre de côté les techniques basées sur le hasard, tout en reconnaissant que ce genre de technique puisse être facilement adoptable lors du travail dans un dispositif de programmation.

Nous constatons donc que l'OD réalisée par Asie trouve un bon équilibre entre les deux niveaux praxéologiques de l'OMM à enseigner : en effet, bien que le *niveau algorithmique* ne soit pas problématisé, il occupe une place non négligeable dans l'OD, tout en restant en arrière-plan par rapport au *niveau mathématique*.

11.3.2 Donner du sens grâce à l'harmonisation de différents registres, contextes et dispositifs

L'exploitation que Asie fait de l'OMM à enseigner et des divers registres dont elle dispose est cohérent avec les attentes des chercheurs. Outre que du changement de registres elle se sert de l'alternance de deux dispositifs, Scratch et papier/crayon, en évoquant dans chacun plusieurs contextes pour donner du sens aux notions mathématiques en jeu.

Notamment, après une première phase de manipulation dans le dispositif Scratch, elle propose à ses élèves des tâches mathématiques que les élèves doivent accomplir sur leurs ardoises. Elle met à leurs disposition des supports papier avec une bande numérique pour qu'ils puissent faire le lien entre les problèmes proposés et ce qu'ils ont vu sur Scratch.

De plus, en phase de mise en commun relative au travail dans le dispositif papier/crayon, Asie demande aux élèves d'explicitier les solutions avec les ostensifs de $RO_{oral(p)}$ et $RO_{Scratch}$.

Par contre l'évocation d'autres contextes ou d'autres dispositifs n'est pas faite dans l'autre sens : lorsque la manipulation est faite sur le dispositif Scratch l'enseignante fait référence uniquement au contexte de la cible et aux registres menés par ce dispositif.

L'approche que Asie met en œuvre pour une réalisation à son avis plus efficace de $T_{représenter}$, $T_{traiter}$ et $T_{convertir}$ consiste à jouer outre que sur les différents registres, également sur les variables $V_{contexte}$ et $V_{dispositif}$.

11.3.3 Institutionnalisation centrée sur la conceptualisation

Au niveau de l'institutionnalisation d'éléments techniques et technologiques, Asie réalise tout ce que nous avons prévu *a priori* et considéré nécessaire pour que les objectifs didactiques de la séquence soient atteints.

Pour cela, elle recourt à une approche centrée sur la conceptualisation des objets mathématiques en jeu en attribuant moins d'importance à leurs nominalisation. En d'autres mots, elle veut surtout s'assurer que ses élèves soient capables de mobiliser correctement les connaissances mathématiques visées lors de la résolution de problèmes. Dans un deuxième moment elle institutionnalise ces connaissances à travers un vocabulaire mathématique spécifique.

La technique qu'elles utilisent systématiquement pour institutionnaliser des éléments technologiques lors de l'utilisation du dispositif Scratch consiste à demander aux élèves d'expliquer les raisons de la validité ou de la non-validité d'un programme. Elle insiste à poser ce genre de questions jusqu'à obtenir des justifications mathématiques. Une fois ces justifications obtenues elle reformule les énoncés technologiques obtenus à l'aide d'autres registres.

11.4 Le profil de Nicole

Nicole représente l'exemple d'une enseignante ayant un rapport difficile aux mathématiques et à leur enseignement, comme elle-même nous l'a souligné plusieurs fois avant la passation de la séquence et lors des entretiens informels que nous avons mené avec elle. Par ailleurs, son enseignement a lieu dans des conditions différentes par rapport à celles des autres enseignants observés : sa classe est une classe du réseau d'enseignement prioritaire, et en plus elle décide de mener l'OMM dans une seule séance.

Les éléments qui ont caractérisé son OD sont les suivants :

1. pas de problématisation pour les deux niveaux praxéologiques de l'OMM;
2. articulation très faible entre les divers registres disponibles;
3. institutionnalisation très faible des praxéologies mathématiques visées.

11.4.1 Une approche *monumentale* pour la transposition de l'OMM apprêtée

L'approche utilisée par Nicole mettre en place l'OMM dans sa classe consiste à présenter aux élèves, au tout début de la séance, les ingrédients de techniques, soit du niveau algorithmique soit du niveau mathématique, à réaliser pour accomplir les tâches. En particulier, Nicole invite ses élèves à faire appel aux tables de multiplication pour chercher le nombre de sauts et elle leur explique également qu'il doivent, pour accomplir les tâches, construire un programme avec une structure multiplicative, en utilisant le bloc « répéter ». De cette façon, les tâches issues de $T_{prog}[T_{DE}]$ ne sont pas problématisées : les élèves se confrontent à un ensemble de tâches pour lesquelles ils connaissent une technique de résolution dès le début. Cette approche peut être définie *monumentale*.

Comme conséquence, nous observons un nombre limité d'ingrédients de techniques apparus tout au long de la séquence. D'ailleurs, les ingrédients de techniques émergés lors du travail en binômes relèvent surtout du tâtonnement ou du hasard. Peu d'épisodes sont consacrés à la mise en commun des techniques et aucun épisode est dédié à leurs institutionnalisation. Les seuls ingrédients mathématiques que Nicole partage avec la totalité de la classe reposent sur les critères de divisibilité, bien que lors de ses interventions près des binômes elle ait aussi observé des techniques basées sur l'encadrement du quotient.

En ce qui concerne la dimension algorithmique, elle est complètement absente dans les discours de Nicole, sauf en ce qui concerne l'épisode 16 dans lequel elle évoque l'existence du bloc « répéter » sans jamais expliciter que les élèves sont censés produire un programme Scratch.

11.4.2 Peu d'importance accordée à l'articulation de registres d'ostensifs différents

Au niveau de l'articulation de différents registres d'ostensifs, nous remarquons également une très faible variabilité. Peu d'épisodes (14 au total) ont été consacrés à la représentation des solutions. Principalement, les ostensifs utilisés relevaient des registres RO_{em} et $RO_{oral(m)}$. Nous avons observé une seule fois l'apparition du registre $RO_{Scratch}$ lors du tout dernier épisode de la séance, alors que le registre RO_{graph} est totalement absent. Aucune conversion a donc été proposée à partir du registre $RO_{Scratch}$ vers le registre RO_{em} , contrairement à ce qui était demandé par les auteurs de la séquence.

D'ailleurs, les ostensifs de RO_{em} évoqués par Nicole lors de la représentation des solutions ne correspondent pas à ceux qui étaient attendus.

11.4.3 Institutionnalisation très faible des praxéologies émergées

Nous avons déjà souligné que Nicole n'a réalisé aucune institutionnalisation concernant les techniques émergées de façon spontanée chez les élèves. Par ailleurs, les moments d'institutionnalisation concernant les éléments technologiques censés apparaître *a priori* ont eu peu de place dans l'OD réalisée. Nous avons observé dans les pratiques de Nicole, une mauvaise conception relative à l'enseignement de la division euclidienne, puisqu'il nous semble qu'elle lui associe uniquement la technique opératoire. Le sens du quotient et du reste, ainsi que de l'égalité arithmétique associée à la division euclidienne ne constituent pas objet d'institutionnalisation. Nous avons donc retrouvé dans le profil de Nicole, certaines des difficultés et des misconceptions classiques que les enseignants d'école primaire peuvent rencontrer face à l'enseignement de la division euclidienne, relevées dans le chapitre 2.

11.5 Synthèse sur les différents profils d'enseignants identifiés

Notre recherche nous a permis d'identifier quatre profils distincts pour la transposition didactique interne de l'OMM. Chacun de ces profils présente certaines caractéristiques de l'OD réalisée et des conditions et contraintes. Nous résumons les informations recueillies pour chaque profil dans le Tableau 11.1. En particulier, l'ordre retenu pour la présentation des profils dans ce tableau est relatif à la conformité aux attentes des chercheurs du projet EXPIRE.

Le profil résultant le plus conforme est le profil A (identifié à partir des OD de Yara et Marine), suivi par le profil C (identifié grâce à l'OD réalisée par Asie)

Nous observons des similarités entre ces deux profils en ce qui concerne la problématisation des praxéologies mathématiques, ainsi que la qualité des moments d'institutionnalisation et l'articulation réalisée des divers registres d'ostensifs disponibles. Les conditions dans lesquelles les enseignements se sont déroulés sont également proches avec

des classes constituées par des élèves sans difficultés particulières, ayant travaillé les pré-requis demandés et avec un rapport personnel de l'enseignant à la division euclidienne conforme au rapport institutionnel.

Profil	Caractéristiques de l'OD			Conditions et contraintes	
	Problématisation de l'OMM	Registres	Institutionnalisation	Classe	R(x; o)
A	Niveau mathématique et niveau algorithmique	Registre $RO_{Scratch}$ très présent; conversion systématique vers RO_{em} ; absence de RO_{graph}	Ingrédients des techniques émergées et éléments technologiques prévus <i>a priori</i>	Elèves sans difficultés particulières, ayant travaillé les pré-requis mathématiques et algorithmiques demandés	Conforme au rapport institutionnel
C	Uniquement niveau mathématique	Registre $RO_{Scratch}$ présent; conversion systématique à partir de $RO_{Scratch}$ ou de RO_{graph} vers RO_{em}	Ingrédients des techniques émergées et éléments technologiques prévus <i>a priori</i>	Elèves sans difficultés particulières, ayant travaillé les pré-requis mathématiques et algorithmiques demandés	Conforme au rapport institutionnel
B	Uniquement niveau mathématique	Peu d'articulation entre registres, $RO_{Scratch}$ peu utilisé en phase de mise en commun	Faible, réduite à la nominalisation	Elèves sans difficultés particulières, ayant travaillé les pré-requis mathématiques et algorithmiques demandés	Peu conforme au rapport institutionnel
D	Aucune	Peu d'épisodes sur la mise en commun des solutions; absence des ostensifs de $RO_{Scratch}$ et de RO_{graph}	Absence d'institutionnalisation des techniques émergées; institutionnalisation très faible des éléments technologiques prévus <i>a priori</i>	Classe REP; élèves ayant travaillé les pré-requis demandés	Non conforme au rapport institutionnel

TABLEAU 11.1 – Synthèse des quatre profils d'enseignement identifiés

Ce qui différencie les profils A et C est le manque de problématisation du niveau algorithmique pour le profil C et le manque de recours au registre RO_{graph} pour le profil A. D'ailleurs le profil C a proposé à ses élèves, de façon complémentaire aux tâches de l'OMM apprêtée, des tâches vivant dans le dispositif papier/crayon et portant sur T_{DE} .

Le profil B (identifié à partir de l'observation des pratiques de Patrick) est caractérisé, outre que par une problématisation des seules praxéologies mathématiques, par un faible recours au registre $RO_{Scratch}$ lors de la mise en commun des solutions et par une institu-

tionnalisation faible des ingrédients de techniques et des éléments technologiques apparus lors de l'OD. Cela a été observé dans le contexte d'une classe composée par des élèves sans difficultés particulières, dans le cadre de deux seules séances et en ayant enregistré un rapport personnel de l'enseignant à la division euclidienne peu conforme au rapport institutionnel. L'OD observée dans le cadre de ce profil ne correspond pas parfaitement aux attentes des chercheurs du projet EXPIRE, ni de l'institution.

Finalement, le profil *D* (identifié à partir de l'observation des pratiques de Nicole) a réalisé une organisation didactique très loin de ce qui était attendu par les auteurs de la séquence et par l'institution. Le manque de problématisation des praxéologies mathématiques fait que les élèves ne doivent pas convoquer tout seuls des techniques appropriées pour accomplir les tâches. L'émergence de divers ingrédients de techniques mathématiques, et donc de diverses praxéologies mathématiques, reste très limitée. Par ailleurs, dans l'OD analysé nous avons reperé vraiment peu de variation concernant les registres d'ostenstifs disponibles. Tout cela, selon les recherches présentées dans notre état de l'art, notamment selon Lemoyne [1993] et Chevallard [1991b], ne permet pas aux élèves de conceptualiser les objets mathématiques en jeu. Dans des conditions similaires, l'institutionnalisation du sens de la division euclidienne ne peut pas avoir lieu; il est donc normal que les moments d'institutionnalisation ne soient pas très présents dans une telle OD. Les conditions observées relatives au niveau des élèves, ainsi qu'au rapport personnel de l'enseignante à la division euclidienne et à son choix de mener la séquence dans une seule séance montrent des possibles causes de cet éloignement de l'OD observée par rapport à celle attendue.

En conclusion, les résultats suggèrent qu'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour la transposition didactique de la division euclidienne à l'école primaire peut être viable en des conditions rassembleat à celles observées pour les profils *A* et *C*. Nous avons observé que ces conditions relèvent d'une posture professionnelle vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques particulièrement réflexive. Si les élèves n'ont pas de difficultés particulières, le travail préalable des pré-requis mathématiques et algorithmiques est suffisant pour l'appropriation des tâches de la part des élèves, et permet de changer le rapport des élèves aux objets relevant de la division euclidienne, si au moins le niveau mathématique de l'OMM est problématisé. La verbalisation des solutions, c'est-à-dire le recours aux registres de l'oralité est fondamentale et permet de faire le lien entre plusieurs registres. Une place très importante a aussi la décontextualisation, observée pour les OD des profils *A* et *C*. Des classes du REP, conjointement à un rapport personnel de l'enseignant peu conforme avec le rapport institutionnel aux objets mathématiques visés, rend la transposition didactique de l'OMM apprêtée plus problématique.

Cinquième partie
Conclusions générales

Chapitre 12

Conclusions générales

12.1 Les résultats et les limites de la recherche

Avec notre recherche, nous souhaitons contribuer à l'étude des conditions de viabilité d'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Si une approche est viable, alors elle pourrait constituer une réponse à la demande institutionnelle issue du Ministère de l'Éducation Nationale française d'introduire les élèves du cycle 3 à la programmation informatique [MEN, 2015].

Cette problématique, de nature écologique, est d'actualité dans le contexte national et international. Pour l'aborder, nous avons examiné le cas des séquences didactiques conçues dans le cadre du projet EXPIRE. Il nous semble en effet que ces séquences s'inscrivent dans l'approche ciblée; elles visent l'enseignement/apprentissage de concepts mathématiques à travers des tâches relevant de la programmation dans l'environnement Scratch. Nous avons choisi d'évaluer, en particulier, la séquence portant sur le sens de la division euclidienne. Nous pensons que cet objet constitue potentiellement un habitat adéquat pour l'introduction d'une dimension algorithmique, compte tenu de l'importance de cet objet tout au long du cycle 3, des difficultés qui se produisent lors de son enseignement/apprentissage et des liens épistémologiques existants entre division euclidienne et algorithmique.

Dans une démarche de recherche propre à la didactique des mathématiques, nous avons exploré un premier questionnement relevant de la caractérisation de l'approche considérée et des savoirs mathématiques en jeu. Pour cela, nous avons d'abord étudié ce qui est connu relativement à l'usage de l'algorithmique et de la programmation pour l'enseignement des mathématiques. Nous avons découvert qu'il s'agit d'un sujet de recherche encore peu traité quand on se situe au niveau de l'école primaire française. Ensuite, nous avons passé en revue les travaux en didactique des mathématiques s'intéressant à l'enseignement/apprentissage du sens de la division euclidienne, en mettant en lumière des difficultés didactiques qui interviennent, surtout au niveau de son institutionnalisation. Notamment, nous avons repéré des difficultés relatives à la conceptualisation du quotient et du reste, au recours au modèle de division lorsque le quotient est le nombre de parts et à la compréhension du sens de l'écriture mathématique $a = b \times q + r$, avec $0 \leq r < b$.

Ce premier questionnement nous a permis également de valoriser l'hypothèse qu'une approche algorithmique pour l'enseignement de la division euclidienne peut être viable. D'autre part, il a alimenté nos réflexions en nous conduisant à identifier trois axes de recherche. Nous rappelons ici les résultats principaux que nous pouvons tirer à l'issue des actions de recherche réalisées pour chaque axe.

Le premier concerne la recherche d'une modélisation pertinente des savoirs mathématiques et algorithmiques au sein d'une même tâche qui, d'un côté, mette en lumière l'articulation existante entre les divers savoirs en jeu et qui, d'un autre côté, soit opérationnelle pour l'analyse de la viabilité d'un ensemble de tâches ainsi construites.

A notre connaissance, peu de travaux ont abordé ce questionnement. D'ailleurs, les travaux repérés montrent une mise à l'épreuve des modèles issus de leurs recherches uniquement dans le cadre spécifique de l'enseignement secondaire, où l'algorithmique et la programmation sont de plus en plus présents soit en tant qu'outils pour l'enseignement des mathématiques, soit en tant qu'objets d'enseignement en eux-mêmes. Il est alors particulièrement important et intéressant d'apporter notre contribution aux recherches existantes, en proposant et testant un modèle adapté à l'analyse des savoirs propres de l'école primaire.

Dans ce but, nous avons adopté le modèle praxéologique relevant de la théorie anthropologique du didactique ainsi que sa formalisation issue du cadre T4TEL. En nous inspirant des travaux de Couderette [2016] et de Strock et Artaud [2019], nous avons produit un modèle praxéologique se développant sur deux niveaux, un relevant des praxéologies mathématiques et un concernant celles algorithmiques. Nous avons modélisé et schématisé l'articulation existante entre ces deux niveaux sur le plan praxique, en opérationnalisant la définition d'ingrédient d'une technique. En particulier, dans le cas de la séquence EXPIRE sur la division euclidienne, nous avons modélisé le niveau mathématique à l'aide d'une organisation mathématique de référence concernant le sens de la division euclidienne. Pour le niveau algorithmique, en manque de savoirs de référence bien identifiés, nous avons identifié les techniques possibles à partir des documents conçus dans le cadre du projet EXPIRE. L'ensemble des praxéologies algorithmiques déterminées *a priori* et l'OM de référence relative à la division euclidienne, liés entre eux avec des relations adéquates, donnent lieu à une organisation mathématique mixte, que nous avons schématisé à l'aide d'un graphe de types de tâches.

Il nous semble qu'une modélisation d'une OMM comme celle proposée dans cette thèse a des caractéristiques qui en font une grille d'analyse pertinente pour la compréhension des phénomènes d'enseignement et apprentissage des mathématiques en présence d'une approche algorithmique.

Par ailleurs, en nous inspirant du travail de Briant [2013], nous avons mis en lumière l'existence d'un registre d'ostensifs, spécifique à l'OMM considérée, pour la représentation de la division euclidienne entre deux nombres naturels. Tous les registres d'ostensifs liés à la division euclidienne et identifiés dans cette thèse apparaissent dans le modèle et en constituent une partie importante en vue de son opérationnalisation en tant que grille d'analyse.

Le deuxième axe de notre recherche est relatif à l'étude de la viabilité de l'approche examinée du point de vue de l'apprentissage de la division euclidienne. En effet, nous considérons que si une telle approche induit une perte importante au niveau de l'apprentissage des mathématiques, son introduction dans le curriculum de l'école primaire française en conditions écologiques ne serait pas justifiable.

Pour aborder cet axe, nous avons eu la possibilité de nous inscrire dans le protocole expérimental du projet EXPIRE qui, lors de l'année scolaire 2017/2018, a testé ses séquences à grande échelle dans des classes de niveau CM1/CM2 de 109 écoles du département de Grenoble. Contrairement aux expérimentations menées dans d'autres travaux examinés, nous disposons donc d'un effectif total très grand ($n = 2105$) et de la possibilité de confronter un groupe expérimental, constitué de classes dans lesquelles les enseignants ont fait passer la séquence Scratch, avec un groupe contrôle, formé de classes dans les-

quelles il a été dispensé un enseignement plus « traditionnel », mais équivalent du point de vue des praxéologies mathématiques. En particulier, le dispositif expérimental comportait la passation de pré-test/post-test portant sur la division euclidienne. Dans une perspective de recherche exploratoire, nous avons, dans un premier moment, critiqué le choix de certaines expérimentations ayant évalué les performances des élèves uniquement en termes de réussite/échec et nous avons fait le choix de prendre en compte, dans nos analyses, le type de procédure évoquée par l'élève et à la qualité de sa réponse. En raison du nombre important de variables statistiques obtenues, nous avons réalisé des analyses en composantes principales. Elles ont montré, d'une part, qu'il est possible de réduire le nombre de variables relevant du type de procédure réalisée par l'élève sans perte d'information, mais, d'autre part, que les variables relatives aux diverses réponses possibles pour chaque exercice ne suivent pas un schéma compréhensible, à l'exception des variables relatives à la réussite, qui se concentraient systématiquement sur la première composante. Ce dernier résultat nous a conduit à revenir sur notre choix des variables fait au départ, en passant à une évaluation des performances en termes de réussite/échec. Le reste des analyses statistiques, que nous avons conduit exercice par exercice, en tenant compte, entre autres, de variables statistiques relevant du niveau scolaire et l'appartenance au réseau d'éducation prioritaire, révèlent que d'une manière générale il n'y a pas eu une différence significative entre le groupe expérimental et le groupe contrôle. Sauf pour l'une des tâches, pour laquelle les élèves appartenant au groupe contrôle ont plus de chance de réussite par rapport aux élèves du groupe expérimental. Nous observons que cette différence entre les deux groupes, bien que légère, n'est pas négligeable et mérite d'être questionnée. Notamment, nous avons observé que la tâche en question est caractérisée par la demande, dans l'énoncé, d'identifier le reste (et non le quotient) de la division euclidienne entre deux entiers. Cela pourrait indiquer, par exemple, que dans l'approche expérimentée, le sens du reste de la division euclidienne a été moins présent. Il faut aussi tenir compte du changement de dispositif qui a intéressé les élèves du groupe expérimental en phase d'évaluation; il est possible que la dernière séance de réinvestissement, pensée pour les élèves du groupe expérimental, n'ait pas été suffisante pour un transfert des connaissances apprises avec Scratch vers les tâches du post-test. De ce changement de dispositif les élèves du groupe contrôle n'étaient pas concernés, ayant ainsi un avantage. Finalement, une autre variable que nous n'avons pas pu prendre en compte dans nos analyses, mais que nous considérons fondamental pour que les objectifs didactiques de l'OMM soient atteints, est relative à la transposition didactique interne réalisée par chaque enseignant. En effet, bien que tous les enseignants impliqués dans l'expérimentation aient suivi les mêmes formations et aient donné un avis globalement positif sur la passation des séquences dans leurs classes et sur l'utilisation de l'algorithmique/programmation pour faire des mathématiques, nous pensons qu'une diversité de pratiques enseignantes est possible, et que cette diversité a possiblement impacté de façon importante la réalisation effective de l'OMM par rapport à la réalisation telle qu'elle était attendue par les chercheurs du projet EXPIRE. L'observation des pratiques n'a malheureusement pas été possible lors des expérimentations à grande échelle de la première année. Cela nous amène à l'exploitation de notre troisième et dernier axe de recherche.

Il s'agit, pour ce troisième axe, de comprendre quelles sont les pratiques les plus conformes aux attentes des chercheurs EXPIRE qu'il est possible d'observer dans le cadre de l'écosystème de la classe qui est sujet à des conditions et des contraintes spécifiques. Pour ce volet de notre recherche, nous avons observé lors de l'année scolaire 2018/2019 cinq enseignants expérimentés ayant déjà fait partie du projet EXPIRE l'année précédente. Nous avons utilisé le modèle praxéologique de l'OMM apprêtée comme grille d'analyse

pour l'évaluation de la quantité et de la qualité des ingrédients des techniques qui ont émergé. Nous avons par ailleurs déterminé, à partir des documents fournis aux enseignants par les chercheurs, une grille d'analyse des praxéologies didactiques censées apparaître. Encore une fois nous avons mené une étude exploratoire qui a conduit à l'identification de quatre profils d'enseignants, que nous avons catégorisé l'un par rapport à l'autre. Les profils ont été définis selon trois critères, identifiés grâce à une étude de la littérature portant sur l'institutionnalisation du sens de concepts mathématiques. Notamment, nous avons positionné chaque enseignant relativement à : (1) la présence ou l'absence de problématisation pour chacun des deux niveaux praxéologiques de l'OMM; (2) l'exploitation du registre d'ostensifs issu du dispositif Scratch et la présence ou l'absence de conversion vers le registre de l'écriture mathématique; (3) la qualité et la quantité de praxéologies didactiques visant à institutionnaliser les ingrédients des techniques émergées lors de la mise en œuvre de l'OMM et d'éléments technologiques. Deux des profils ainsi identifiés (A et C) révèlent de pratiques conformes aux attentes des chercheurs du projet. L'analyse de ces deux profils nous a permis de caractériser des « bonnes pratiques » au niveau de la transposition didactique interne de l'OMM. Les trois organisations didactiques associées à ces deux profils montrent une forte propension à la verbalisation et à la décontextualisation. Avec le terme verbalisation nous indiquons l'utilisation de registres de l'oralité visant l'explicitation du lien entre divers registres d'ostensifs; la décontextualisation relève du passage d'un vocabulaire lié à un contexte spécifique extramathématique vers le vocabulaire lié à l'objet mathématique ciblé. D'ailleurs, le profil C met en œuvre une décontextualisation ultérieure entre tâches relevant de dispositifs différents de Scratch.

Les « bonnes pratiques » relevées dans trois des cinq organisations didactiques observées n'ont, par contre, pas été relevées dans les deux organisations mathématiques restantes, qui, selon les critères établis, définissent deux autres profils (B et D). Nous sommes alors revenus sur l'étude des conditions et contraintes caractérisant chaque écosystème afin de comprendre quels éléments déterminent l'apparition ou non de ces pratiques. Les entretiens informels réalisés avec les enseignants ont mis en lumière qu'un des éléments clé est la posture professionnelle vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques.

12.2 Perspectives

Notre thèse ouvre la voie à diverses perspectives de recherche. Nous en présentons quelques-unes sans prétention d'exhaustivité.

La première relève de la mise à l'épreuve du modèle d'une OMM sur deux niveaux de granularité comme celle proposée dans cette thèse pour des tâches intégrant une dimension algorithmique plus importante. Dans cette thèse, en effet, nous avons examiné des tâches prescrites à des élèves d'école primaire. Les praxéologies algorithmiques en jeu sont très limitées, et elles peuvent donc être facilement décrites. Une question qui émerge concerne la pertinence d'un tel modèle pour des savoirs algorithmiques plus avancés et pour lesquelles il existe des savoirs de référence.

L'opérationnalité du modèle conçu dans cette thèse pourrait, par ailleurs, être testé pour l'analyse d'organisations mathématiques mixtes relevant de savoirs divers de l'algorithmique. L'interdisciplinarité à l'école constitue, en effet, de plus en plus une problématique actuelle, notamment en ce qui concerne l'interaction entre les mathématiques et d'autres disciplines scolaires.

Un autre perspective de recherche consiste à exploiter de manière plus détaillée les résultats issus de nos analyses concernant la viabilité du point de vue des apprentissages :

nous avons compris que, sur la base des données à notre disposition, l'évaluation de la réponse de l'élève en termes de réussite/échec est plus intéressante. Ce type d'évaluation nous a permis de relever l'existence d'un phénomène qui rend les performances des élèves légèrement moins bonnes lorsqu'ils travaillent dans le dispositif expérimental. Toutefois, nous pensons que les analyses en termes de réussite/échec restent peu pertinentes pour comprendre exactement la nature de ce phénomène et les raisons pour lesquelles ce phénomène a lieu. Nous pensons qu'il serait intéressant de donner une suite aux recherches relatives à cet axe. Dans la méthodologie adoptée, en effet, nous pouvons repérer plusieurs facteurs qui ont pu impacter les résultats finaux : par exemple, le choix de faire passer, dans les classes contrôle une séquence spécifique pour l'enseignement de la division euclidienne (*est-ce qu'il aurait été mieux, dans une optique écologique, de laisser aux enseignants le choix d'utiliser les séquences utilisées d'habitudes pour travailler les objectifs concernés?*), ou le choix des variables statistiques codées, etc.

Dans ce contexte, nous faisons d'ailleurs référence à un travail de recherche parallèle à cette thèse, qui est actuellement en cours de traitement dans la thèse de Chevalier-Laurent. Son travail vise à définir les effets qu'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation ont sur les performances en mathématiques des élèves relativement à toutes les séquences mathématiques issues du projet EXPIRE, évaluées en termes de réussite/échec. Elle adopte un point de vue propre aux sciences de l'éducation et considère des variables statistiques différentes par rapport à celles prises en compte dans cette thèse, mais en partant de la même base de données brutes. Entre autres, elle prend en compte, par exemple, les variables liées à la motivation et à l'anxiété des élèves.

Une piste de recherche ultérieure relève de la possibilité de mesurer l'impacte que certaines pratiques d'enseignement au sein d'un OMM ont sur l'apprentissage du côté des élèves. Une étude de ce type, qui pourrait s'appuyer sur les résultats de cette thèse relatifs aux profils d'enseignants identifiés, pourrait permettre de déterminer quelques conditions didactiques pour la viabilité d'une approche algorithmique à l'école primaire.

Finalement, nous croyons que l'approche algorithmique que nous avons évaluée du point de vue du développement de compétences en mathématiques, fait certainement acquérir d'autres compétences chez les élèves que nous n'avons pas essayé de caractériser, ni de mesurer. Une autre perspective de recherche concerne, donc, l'évaluation de ces compétences.

Liste des figures

1.1	Interface Scratch	16
2.1	Caractérisation des activités portant sur les divisions proposée par l’IREM de Rennes dans [Gautier <i>et al.</i> , 2008]	29
3.1	Double transposition de la résolution d’un problème mathématique en vue de sa programmation [Briant et Bronner, 2015]	33
3.2	Exemple de praxéologies d’ordres mathématique, algorithmique et informatique identifiées par Couderette [2016]	34
3.3	Dépendance entre praxéologies de différents ordres [Couderette, 2016]	34
3.4	Réseau de types de tâches liés à l’algorithmique [Strock et Artaud, 2019]	35
3.5	Processus de dévolution et d’institutionnalisation	41
3.6	La didactique marche à l’envers de la science [Brousseau, 1984]	42
3.7	Comparaison de la résolution de l’équation $x^2 = a$ en environnement papier-crayon et algorithmique [Briant, 2013]	46
3.8	Echelle des niveaux de codétermination didactique	47
4.1	Le <i>triangle didactique</i>	52
4.2	Le processus de <i>transposition didactique</i>	53
4.3	Focus sur la <i>transposition didactique interne</i>	53
4.4	Certains ostensifs évoquant le nombre 5	55
4.5	Activités cognitives liées à la sémiosis	56
5.1	Activité proposée par le manuel Euro Maths CM1	62
5.2	Activité proposée par le cahier de recherche pour CM1 de la collection Cap Maths	63
6.1	OM de référence	72
6.2	Premier graphe partiel des types de tâches autour de $T_{décomposer}$	77
6.3	Deuxième graphe partiel des types de tâches autour de $T_{décomposer}$	80
6.4	Graphe des types de tâches autour de $T_{quotient}$	82
6.5	Graphe des types de tâches autour de T_{reste}	83
7.1	Lien entre OMM apprêtée et OM de référence	87
7.2	Interface de l’environnement préparé sur Scratch	88
7.3	Types de manipulation dans T et $T_{prog}[T]$	90
7.4	Rapport entre les techniques de $T_{prog}[T_{DE}]$ et celles de T_{DE}	92
7.5	Graphe des types de tâches autour de $T_{prog}[T_{DE}]$	93
7.6	Graphe (à titre de résumé) des ingrédients autour des sous-types de tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$	94
7.7	Exemple	95

7.8 Programmes qui ont une structure additive	96
7.9 Programmes qui ont une structure multiplicative	96
7.10 Programmes qui ont une structure mixte	96
7.11 Ostensifs représentant une même solution de la tâche t_7 dans les divers registres disponibles	97
8.1 Déroulement du protocole expérimentale du projet EXPIRE (premier semestre de l'année 2017/2018)	102
8.2 Exemple de données brutes issues d'une production d'un élève sur la tâche t_2^{post}	107
8.3 Caractéristiques univariées des 33 variables concernant les techniques en pré-test	112
8.4 Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 33 variables concernant les types de réponse en pré-test	112
8.5 Variance expliquée par les composantes obtenues de l'ACP à partir des 33 variables concernant les types de réponse en pré-test	114
8.6 Scree plot de l'ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en pré-test	115
8.7 Matrice (après rotation) des 15 premières composantes de l'ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en pré-test	115
8.8 Etape 1 : ajoute des variables relatives au pré-test	118
8.9 Etape 2 : ajoute des variables relatives au post-test	119
8.10 Etape 3 : ajoute des variables SEXE et NIVEAU	120
8.11 Etape 4 : ajoute de la variable REP	121
8.12 Modèle complet de régression logistique pour POST_EX1_A	122
8.13 Modèle complet de régression logistique pour POST_EX2_A	123
8.14 Modèle complet de régression logistique pour POST_EX3_A	124
8.15 Modèle complet de régression logistique pour POST_EX4_A	124
8.16 Modèle complet de régression logistique pour POST_EX5_A	125
9.1 Aperçu du tableau Excel	132
10.1 Equipement de la salle de classe de Yara	142
10.2 Répartition du temps consacré par Yara à chaque classe d'éléments de l'OD	143
10.3 Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD de Yara	143
10.4 Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Yara	144
10.5 Registres adoptés par Yara dans la mise en commun des solutions	145
10.6 Registres adoptés par Yara pour représenter les solutions lors de la mise en commun	146
10.7 Registres vers lesquels Yara convertit des solutions lors de la mise en commun	146
10.8 Répartition du temps consacré par Patrick à chaque classe d'éléments de l'OD	150
10.9 Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD de Patrick	150
10.10 Ingrédients mathématiques de l'OD de Patrick	151
10.11 Usage du vidéo-projecteur dans la classe de Patrick	152
10.12 Ostensifs de RO_{graph} et de RO_{em} mis en commun par Patrick	153
10.13 Registres adoptés par Patrick dans la mise en commun des solutions	154
10.14 Registres adoptés par Patrick pour représenter les solutions lors de la mise en commun	155
10.15 Registres vers lesquels Patrick convertit des solutions lors de la mise en commun	155

10.16	Répartition du temps dédié par Asie à chaque classe d'éléments de l'OD . . .	159
10.17	Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD d'Asie	160
10.18	Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Asie	161
10.19	Ostensifs de RO _{Scratch} évoqués par Asie	162
10.20	Registres adoptés par Asie dans la mise en commun des solutions (épisodes de <i>s1ep29</i> à <i>s2ep50</i>)	165
10.21	Registres adoptés par Asie dans la mise en commun des solutions (épisodes de <i>s2ep81</i> à <i>s4ep76</i>)	165
10.22	Registres adoptés par Asie pour représenter les solutions lors de la mise en commun	166
10.23	Registres traités par Asie pour obtenir des solutions lors de la mise en commun	166
10.24	Registres vers lesquels Asie convertit des solutions lors de la mise en commun	167
10.25	Répartition du temps dédié par Nicole à chaque classe d'éléments de l'OD .	173
10.26	Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD de Nicole	174
10.27	Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Nicole	174
10.28	Registres adoptés par Nicole dans la mise en commun des solutions	176
10.29	Registres adoptés par Nicole pour représenter les solutions lors de la mise en commun	177
10.30	Registres vers lesquels Nicole convertit des solutions lors de la mise en commun	177
10.31	Répartition du temps consacré par Marine à chaque classe d'éléments de l'OD pour le niveau de CM1	181
10.32	Répartition du temps consacré par Marine à chaque classe d'éléments de l'OD pour le niveau de CM2	182
10.33	Ingrédients de techniques niveau algorithmique dans l'OD de Marine pour le niveau de CM1	182
10.34	Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Marine pour le niveau de CM1	183
10.35	Ingrédients de techniques niveau mathématique dans l'OD de Marine pour le niveau de CM2	184
10.36	Registres adoptés par Marine dans la mise en commun des solutions pour le niveau de CM1	185
10.37	Registres adoptés par Marine dans la mise en commun des solutions pour le niveau de CM2	186
10.38	Registres adoptés par Marine pour représenter les solutions lors de la mise en commun pour le niveau de CM1	186
10.39	Registres adoptés par Marine pour représenter les solutions lors de la mise en commun pour le niveau de CM2	187
10.40	Registres traités par Marine pour obtenir des solutions lors de la mise en commun	187
10.41	Registres vers lesquels Marine convertit des solutions lors de la mise en commun	188
C.1	Caractéristiques univariées des 33 variables concernant les types de réponses en post-test	XXIX
C.2	Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 33 variables concernant les types de réponse en post-test	XXX
C.3	Variance expliquée par les composantes obtenues de l'ACP à partir des 33 variables concernant les types de réponse en post-test	XXX

C.4	Scree plot de l'ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en post-test	XXXI
C.5	Matrice (après rotation) des 16 premières composantes de l'ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en post-test	XXXI
C.6	Caractéristiques univariées des 16 variables concernant les techniques en pré-test	XXXII
C.7	Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 16 variables concernant les techniques en pré-test	XXXII
C.8	Variance expliquée par les composantes obtenues de l'ACP à partir des 16 variables concernant les techniques en pré-test	XXXIII
C.9	Scree plot de l'ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en pré-test	XXXIII
C.10	Matrice (après rotation) des 4 composantes de l'ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en pré-test	XXXIV
C.11	Caractéristiques univariées des 16 variables concernant les techniques en post-test	XXXV
C.12	Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 16 variables concernant les techniques en post-test	XXXV
C.13	Variance expliquée par les composantes obtenues de l'ACP à partir des 16 variables concernant les techniques en post-test	XXXVI
C.14	Scree plot de l'ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en post-test	XXXVI
C.15	Matrice (après rotation) des 4 composantes de l'ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en post-test	XXXVII

Liste des tableaux

2.1	Extraits des programmes de cycle 2	26
2.2	Extraits des programmes de cycle 3	27
6.1	Problèmes à structure multiplicative	73
6.2	Valeurs des variables V_a , V_n et V_H	74
6.3	Techniques de $T_{dét,b}$	75
6.4	Techniques de $T_{rest,b}$	76
6.5	Valeurs des variables V_a , V_b et $V_{a,b}$	78
6.6	Techniques de $T_{dét,q}$	79
6.7	Techniques de $T_{quotient}$	81
6.8	Techniques de T_{reste}	83
6.9	Registre graphique pour la représentation de la division euclidienne entre 19 et 5	84
7.1	Tâches de la séquence générées par $T_{prog}[T_{DE}]$	91
8.1	Répartition des élèves en REP/REP+ entre les groupes	103
8.2	Répartition des élèves entre les groupes selon le niveau scolaire	103
8.3	Répartition des élèves entre les groupes selon le sexe	103
8.4	Tâches du pré-test générées par T_{DE}	106
8.5	Tâches du post-test générées par T_{DE}	106
8.6	Codes relatifs aux techniques pour la définition de variables	108
8.7	Variables explicatives des régression logistiques	116
8.8	Variables à expliquer	117
9.1	Informations concernant la passation de la séquence pour les cinq PE observés	131
9.2	La classe de $T_{gestion}$	134
9.3	La classe de $T_{consigne}$	134
9.4	La classe de $T_{circuler}$ et $T_{binômes}$	134
9.5	Types de tâches liés à la mise en commun d'une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$	135
9.6	Types de tâches liés à l'émergence ou à l'institutionnalisation d'un élément technique ou technologique dans le cadre de l'organisation mathématique réalisée	136
10.1	Nombre d'épisodes consacrés par Yara à chaque classe de types de tâches	143
10.2	Nombre des types de tâches de la classe <i>Mise en commun</i> par séance réalisés par Yara	145
10.3	Nombre des types de tâches de la classe <i>Institutionnalisation</i> par séance réalisés par Yara	147

10.4	Nombre d'épisodes consacrés par Patrick à chaque classe de types de tâches	149
10.5	Nombre des types de tâches de la classe <i>Mise en commun</i> par séance réalisés par Patrick	152
10.6	Nombre des types de tâches de la classe <i>Institutionnalisation</i> par séance réalisés par Patrick	156
10.7	OMM réalisée par Asie dans deux dispositifs	159
10.8	Nombre des types de tâches par séance réalisés par Asie	159
10.9	Nombre des types de tâches de la classe <i>Mise en commun</i> par séance réalisés par Asie	162
10.10	Nombre des types de tâches de la classe <i>Institutionnalisation</i> par séance réalisés par Asie	167
10.11	Nombre des types de tâches par séance réalisés par Nicole	173
10.12	Nombre des types de tâches de la classe <i>Mise en commun</i> réalisés par Nicole	175
10.13	Nombre des types de tâches de la classe <i>Institutionnalisation</i> réalisés par Nicole	178
10.14	Nombre des types de tâches par séance réalisés par Marine	181
10.15	Nombre des types de tâches de la classe <i>Mise en commun</i> réalisés par Marine	185
10.16	Nombre des types de tâches de la classe <i>Institutionnalisation</i> réalisés par Marine	188
11.1	Synthèse des quatre profils d'enseignement identifiés	199

Bibliographie

- ALAYRANGUES, S., BEFFARA, E., DANIEL, S., DECLERCQ, C., HEAM, A., LODDO, J.-V., MARQUET, P., MASSERON, J.-C., MEYER, A., MORE, M., NENY, E., PANTALONI, V., PERRIN, G., PROUTEAU, C., SALIBA, G., SCHWER, S. R., TARISSAN, F., UBERA, C., VINCENT, J.-M. et VOLTE, E. (2018). Une analyse des exercices d'algorithmique et de programmation du brevet 2017. document de travail. [12](#)
- ALI TATAR, M.-L. et ARTAUD, M. (2010). Constituer une organisation mathématique mixte. changer le rapport à l'institutionnalisation. In BRONNER, A., LARGUIER, M., ARTAUD, M., BOSCH, M., CHEVALLARD, Y., CIRADE, G. et LADAGE, C., éditeurs : *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pages 677–696. IUFM de l'Académie de Montpellier. [45](#)
- ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7). [42](#)
- ALVES, C., DUVAL, V., GOISLARD, A., KUHMANN, H., DAMETTO, S. M., LAMORTHE, C. P., ROUBIN, S. et COPPÉ, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères - IREM*, 92:9–30. [12](#)
- ARAYA-CHACÓN, A. et MATHERON, Y. (2014). Un modèle pour l'évocation des connaissances en classe de mathématiques. micro-cadre institutionnel de la mémoire didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(1):37–67. [43](#)
- ARCHAMBAULT, J.-P. (2017). Un enseignement de l'informatique de culture générale pour tous les élèves – pourquoi et comment. *1024 - Bulletin de la société informatique de France*, 11:61–76. [13](#)
- ARRIGO, G. et SBARAGLI, S. (2008). Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di divisione. *La matematica e la sua didattica*. Anno 22, 4:479–520. [24](#)
- ARTAUD, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique. *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, pages 101–139. [49](#)
- ASSUDE, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(1):47–70. [59](#)
- ASSUDE, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study : Integration of cabri in primary school mathematics teaching. *Educational studies in mathematics*, 59(1-3):183–203. [47](#)
- ASSUDE, T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire. *Informations, Savoirs, Décisions et Médiations (ISDM)*, 29. [47](#)
- ASSUDE, T. (2017). Relations entre systèmes sémiotiques, milieux et techniques mathématiques : malentendus, hybridité, inventivité. In *44ème colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles*. [56](#)

- ASSUDE, T., COPPÉ, S. et PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In COULANGE, L., DROUHARD, J.-P., DORIER, J.-L. et ROBERT, A., éditeurs : *Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives*, pages 41–62. Recherches en Didactique des Mathématiques. [12](#)
- BACON, F. (1991). Du progrès et de la promotion des savoirs. *Paris*, 375:130–131. [51](#)
- BALACHEFF, N. (1993). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. In ARTIGUE, M., GRAS, R., LABORDE, C. et TAVIGNOT, P., éditeurs : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, pages 364–370. Recherches en Didactique des Mathématiques. [32](#)
- BANWITIYA, Y. (1993). *L'ingénierie du sens en mathématique : la division dans N , Q et D à l'école primaire*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I. [24](#), [25](#)
- BENTON, L., SAUNDERS, P., KALAS, I., HOYLES, C. et NOSS, R. (2018). Designing for learning mathematics through programming : A case study of pupils engaging with place value. *International journal of child-computer interaction*, 16:68–76. [39](#), [40](#), [63](#)
- BERNAD, K. (2017). *Une contribution à l'étude de conditions et de contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche en mathématiques au collège*. Thèse de doctorat, AMU - Aix Marseille Université. [47](#)
- BERTRAND, I. (1990). L'informatique a-t-elle un avenir à l'école primaire? *Culture technique*. [37](#), [39](#), [64](#)
- BÉZIAT, J. (2012). Les tic à l'école primaire en France : informatique et programmation. *Revue de*. [38](#)
- BIDEAULT, A. (1985). Procédure d'enfants de ce2 dans une tâche de construction de parcours. *Enfance*, 38(2):201–212. [36](#), [39](#), [40](#), [63](#), [64](#)
- BONNAT, C. (2017). *Etayage de l'activité de conception expérimentale par un EIAH pour apprendre la notion de métabolisme cellulaire en terminale scientifique*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. [57](#)
- BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1):77–123. [54](#), [55](#)
- BOSCH, M. et GASCÓN, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *Balises pour la didactique des mathématiques*, pages 107–122. [53](#), [66](#), [71](#), [97](#)
- BRASSET, N. (2017). *Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH. Etude de facteurs de type histoire didactique*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. [57](#)
- BRIANT, N. (2013). *Etude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français*. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2. [13](#), [32](#), [45](#), [46](#), [64](#), [96](#), [204](#), [209](#)
- BRIANT, N. et BRONNER, A. (2015). Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In *Actes du Colloque EMF2015-GT3*, pages 231–246. [32](#), [33](#), [209](#)

- BROIN, D. (2002). *Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. 12
- BROUSSEAU, G. (1972a). La division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen. *Les mathématiques de l'école élémentaire*, pages 267–278. 22, 29
- BROUSSEAU, G. (1972b). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'Ecole Elémentaire*, pages 428–442. 22
- BROUSSEAU, G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. *Actes de la IIIème école d'été de didactique des mathématiques*. 42, 209
- BROUSSEAU, G. (1987). Représentation et didactique du sens de la division. *In Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque du Sèvres, La pensée sauvage, Grenoble*, pages 47–64. 22, 23
- BROUSSEAU, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A. M. Q.*, 23:14–24. 42, 43, 64
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage Grenoble. 41
- BROUSSEAU, G. et CENTENO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 11(2.3):167–210. 43, 64
- BRUN, V. (2020). *Partage de l'étayage entre un enseignant et l'EIAH LabNbook lors d'une séance en Biologie*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. 57
- CHAACHOUA, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. Mémoire pour l'obtention de l'hdr, Université Joseph-Furier - Grenoble I. 57
- CHAACHOUA, H. (2018). T4tel : un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. *In Séminaire national de didactique des mathématiques*, pages <https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/Préactes-ARDM-fevrier2018.pdf>, Paris, France. 51, 57, 75, 97
- CHAACHOUA, H. et BESSOT, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21. 58
- CHAACHOUA, H., CHIAPPINI, G., PEDEMONTE, B., CROSET, M.-C. et ROBOTTI, E. (2012). Introduction de nouvelles représentations dans deux environnements pour l'apprentissage de l'algèbre. *In COULANGE, L., DROUHARD, J.-P., DORIER, J.-L. et ROBERT, A., éditeurs : Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives*, pages 253–281. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 96
- CHAACHOUA, H., TCHOUNIKINE, P. et CRISCI, R. (2018). L'algorithmique et la programmation pour la construction du sens de la division euclidienne. *In EMF2018*, Paris, France. 89
- CHABERT, J. L., GUILLEMOT, M. et BARBIN, E. (1995). *Histoires d'algorithmes : du caillou à la puce*. Belin. 10

- CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P., ANSELMO, B. et MADIER, D. (2018). *CAP Maths CMI Éd.2018 - Mon cahier de recherches*. Hatier. Library Catalog : www.editions-hatier.fr. 61
- CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage,. 32, 42, 52
- CHEVALLARD, Y. (1991a). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, 12(1):160–163. 50
- CHEVALLARD, Y. (1991b). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, pages 1990–1991. 23, 200
- CHEVALLARD, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x*, 42:33–57. 54
- CHEVALLARD, Y. (1998). Organisations didactiques : 2. *Gestes, dispositifs, programmes, 1998b*. Disponible en : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_2_1998_.pdf. 55
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2):221–265. 40, 41, 50, 51, 71, 97
- CHEVALLARD, Y. (2001). Les mathématiques et le monde : dépasser «l'horreur instrumentale». *Quadrature*, 41:25–40. 51, 52
- CHEVALLARD, Y. (2010). La didactique, dites-vous? *Éducation et didactique*, 4(1):139–148. 46
- CHEVALLARD, Y. et MERCIER, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille Cahier n° 8. Marseille, France. 47
- CONFREY, J. (1986). Misconceptions accross subject matters : charting the course from a constructivist perspective. *In Annual meeting of the American Educational Research Association*. 22
- COPPÉ, S. et GRUGEON, B. (2009). Le calcul littéral au collège. quelle articulation entre sens et technique? *In Colloque de la CORFEM*. 12
- COUDERETTE, M. (2016). Enseignement de l'algorithmique en classe de seconde. une introduction curriculaire problématique. *Annales de de didactique et de sciences cognitives*, 21:267–296. 33, 34, 63, 98, 204, 209
- COULANGE, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*. Mémoire pour l'obtention de l'hdr, Université Paris Diderot (Paris 7). 45
- COULANGE, L. (2014). Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation de savoirs mathématiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, 54(1):9–27. 45

- DOUADY, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7. [31](#)
- DOUADY, R. (2003). Enseignement de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres en formation mathématique des professeurs d'école. *Concertum Carnets de Route de la COPIRELEM*. [32](#)
- DOWEK, G. (2011). Les quatre concepts de l'informatique. *In Sciences et technologies de l'information et de la communication en milieu éducatif : Analyse de pratiques et enjeux didactiques. Actes du quatrième colloque international DIDAPRO 4 - Dida&Stic*. [11](#)
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *In Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 5, pages 37–65. Strasbourg. [56](#)
- DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang Berne. [56](#)
- FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. S. et MARINO, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, pages 3–17. [24](#)
- FISHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. Holland : Mathematics educational library D*. Mathematics Education Library. [23](#)
- FLUCKIGER, A. (2000). *Genèse expérimentale d'une notion mathématique : la notion de division comme modèle de connaissances numériques*. Thèse de doctorat, Université de Genève. [25](#), [44](#)
- GAUTIER, F., GOUPIL-LEBOT, M.-T., LE LOUS, A., LE POCHE, G., PROPHÈTE, Y., REICHERT, F. et ROUX, V. (2008). *Les divisions. Liaison cycle 3–6ème*. [28](#), [29](#), [209](#)
- GOBERT, D. (1991). *Incidence des activités de programmation en logo sur les performances en géométrie au cycle moyen et en sixième*. Thèse de doctorat, Université Paris 7. [39](#), [40](#), [64](#)
- GOBERT, D. (1992). Une expérience en logo et géométrie à l'école élémentaire. *In Bulletin de l'EPI*. [37](#), [38](#)
- GUEUDET, G., BUENO-RAVEL, L., MODESTE, S. et TROUCHE, L. (2017). Curriculum in france : A national frame in transition. *International perspectives on mathematics curriculum*, pages 41–70. [59](#)
- GUIET, J.-G. (1994). *La division : une longue souffrance*. Thèse de doctorat, Université Paris 5. [22](#)
- GURTNER, J.-L. (1991). *LOGO et apprentissages*. Delachaux et Niestlé. [38](#), [64](#)
- JOLIVET, S. (2018). *Un modèle de description de ressources, basé sur des critères didactiques et inscrit dans une perspective EIAH*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. [57](#), [91](#)

- KASPARY, D. (2020). *La noosphère, un lieu de tension pour le curriculum. Étude didactique de la mise en place d'un système d'évaluation de manuels scolaires sur l'étude du champ additif à l'école primaire*. Thèse en préparation, Université Grenoble Alpes. 57, 84
- KNUTH, D. E. (1973). *The art of computer programming, volume i, fundamental algorithms* addison. 10
- KNUTH, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming, Volume 2 : Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, Boston, third édition. 20, 21
- KUZNIAK, A. et RICHARD, P. R. (2014). Spaces for mathematical work : Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-D):17–27. 33
- LAGRANGE, J.-B. et ROGALSKI, J. (2017). Savoirs, concepts et situations dans les premiers apprentissages en programmation et en algorithmique. . *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*. 89
- LAVAL, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité. 13, 33
- LEMOYNE, G. (1993). La quête du sens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. In JONNAERT, P. et LENOIR, Y., éditeurs : *Sens des didactiques et Didactique du sens*, pages 263–287. Université de Sherbrooke (Québec) : Edition du CRP. 22, 200
- LEVAIN, J.-P. et VERGNAUD, G. (1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N*, 56:55–67. 24
- LUTOVAC, S. (2008). Prevalence of division model and its implementation in mathematical textbooks. *Metodički obzori : časopis za odgojno-obrazovnu teoriju i praksu*, 3(5):31–47. 24
- MATHERON, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée : quelques exemples*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille 1. 43, 44
- MATHERON, Y. et SALIN, M.-H. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue française de pédagogie*, pages 57–66. 44, 64
- MEN (2015). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). Library Catalog : eduscol.education.fr. 14, 25, 29, 59, 203
- MODESTE, S. (2012). *Enseigner l'algorithmique pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve?* Thèse de doctorat, Université de Grenoble. 10, 13, 32
- MUNZÓN, N. R. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona. 12
- NGUYEN, C. T. (2005). *Etude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I. 10

- NOSS, R. (1986). Constructing a conceptual framework for elementary algebra through logo programming. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4):335–357. [36](#), [39](#), [63](#), [64](#)
- PELTIER, M.-L., BRIAND, J., NGONO, B. et VERGNES, D. (2009). *Euro Maths CM1 éd. 2009 - Manuel de l'élève + Aide mémoire*. Hatier. [61](#)
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1994). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de classes faibles. *Petit x*, 35(1):5–40. [44](#)
- RAJOSON, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II. [49](#)
- RAVEL, L. (2003). *Des programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I. [53](#)
- RINALDI, A.-M. (2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie*. thesis, Université Sorbonne Paris Cité. Publication Title : <http://www.theses.fr>. [82](#)
- ROGALSKI, J. et LAGRANGE, J.-B. (2016). Savoirs, concepts et situations dans les premiers apprentissages en programmation et en algorithmique. p. 155-176. *Séminaire national de didactique des mathématiques*, pages 155–176. [15](#)
- SQUIRE, S. et BRYANT, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of experimental child psychology*, 81(1):1–43. [24](#)
- STROCK, J.-M. et ARTAUD, M. (2019). Du logos des organisations algorithmiques dans l'enseignement secondaire. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21. [33](#), [34](#), [35](#), [63](#), [98](#), [204](#), [209](#)
- SUTHERLAND, R. (1989). Providing a computer based framework for algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 20(3):317–344. [37](#), [39](#), [40](#), [63](#), [64](#)
- TCHOUNIKINE, P. (2016). Initier les élèves à la pensée informatique avec scratch. *Revue EpiNet*, 182. [12](#), [130](#)
- TEMPERMAN, G., ANTHOONS, C., DE LIEVRE, B. et DE STERCKE, J. (2014). Tâches de programmation avec scratch à l'école primaire : Observation et analyse du développement des compétences en mathématique. *Frantice.net*, 9:94–105. [38](#), [39](#), [40](#), [63](#), [64](#)
- THERRIAULT, G. et MOREL, M. (2016). Regards sur le rapport aux savoirs de futurs enseignants dans le cadre des stages. *Education & Formation*, 305:23–38. [130](#)
- TIROSH, D. et GRAEBER, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1):79–96. [24](#)
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23):133–170. [73](#), [105](#)
- VERGNAUD, G. (1994). Multiplicative conceptual field : what and why. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, pages 41–59. [24](#)

VILLANI, C. et TOROSSIAN, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. *Ministère de l'Education Nationale (France)*. 6

WING, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3). 12

ZAZKIS, R. (1998). Divisors and quotients : Acknowledging polysemy. *For the learning of mathematics*, 18(3):27–30. 24

Annexes

Annexe A

Fiches pédagogiques relatives aux séquences EXPIRE sur la division euclidienne

Fiche séquence Scratch destinée aux enseignants

Séquence 1 : Division euclidienne

Classe : CM1/CM2

Objectifs de la séquence : Travailler le sens et l'écriture de la division euclidienne à partir d'une situation de déplacement sur une bande numérique.

- Comprendre la signification du quotient et du reste.
- Comprendre l'écriture de la division euclidienne.

Idée générale : Il s'agit d'utiliser une bande numérique sur laquelle on peut faire déplacer un lutin avec des contraintes.

Considérations didactiques : La notion de division euclidienne est difficile car le résultat de l'opération est composé de deux nombres, quotient et reste, à qui il faut donner du sens.

Prérequis : Partage, Multiples, Tables de multiplication, Diviseurs.

Nombre de séances envisagées : 3 séances.

Propositions :

- Les élèves travaillent en binômes, sauf pour la séance 3 (résolution de problèmes) où les élèves travaillent individuellement.
- Les exercices qui présentent la notation $*#b$, $*#c$, ... (où # est un nombre) sont optionnels. Ils ont été pensés pour les binômes qui avancent plus vite.
- Nous avons indiqué l'exercice à partir duquel on peut faire le bilan.
- Les élèves peuvent travailler sur leur cahier ou tout autre support préparé par vos soins.
- Les tableaux de synthèse fournis sont donnés à titre indicatif. Vous pouvez les enrichir et les adapter.
- Dans les tableaux « déroulement de séance », vous avez une colonne « durée » pour votre organisation personnelle.
- Le découpage du contenu par séance ainsi que la durée de la séance peuvent être adaptés aux spécificités de la classe.

Descriptif de la séquence

<i>Séance</i>	<i>Objectif(s) spécifique(s)</i>	<i>Description</i>
1	Phase 1 : Travailler les prérequis sur les multiples et les diviseurs Phase 2 : Déterminer le quotient Comprendre le sens du reste	Il s'agit de déplacer un lutin sur la bande numérique pour atteindre une case cible (nombre encadré) en utilisant un type de saut choisi par le binôme d'élèves. Une variante consiste à ne pas passer par des cases spécifiques (bombes). Il s'agit de déplacer un lutin sur la bande numérique pour se rapprocher au maximum d'une case cible, sans la dépasser et en utilisant un type de saut donné. Plusieurs procédures sont possibles.
2	Déterminer le quotient et le reste. Travailler l'écriture de la division euclidienne Institutionnalisation	Il s'agit de déplacer un lutin sur une bande numérique pour atteindre une case cible sans la dépasser. Le quotient et le reste doivent être explicités. Division euclidienne
3	Résolution de problème	Cette séance peut servir d'ajustement pour terminer le travail de la séance 2 si besoin.

Séance 1

Cette séance est composée de deux phases.

Séance 1 - Phase 1 : Travailler les prérequis sur les multiples et les diviseurs

1. Description des situations

Le fichier « Séquence 1-1.sb2 » propose 4 exercices.

Ces exercices utilisent la bande numérique avec une case cible et éventuellement des cases « bombes » à éviter (cf. Figure 1). L'objectif est d'écrire un programme permettant au lutin de se rendre à la case cible en évitant les bombes éventuelles et en n'utilisant qu'un seul type de saut.

A la disposition du binôme d'élèves, il y a des sauts de 1 à 9 et l'instruction « Répéter ».

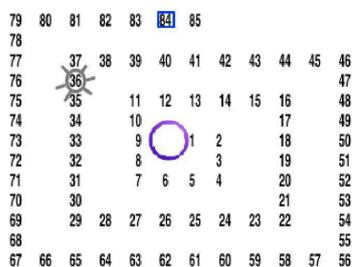


Figure 1

Vocabulaire :

Le lutin peut avancer par des sauts de 1 pas, de 2 pas, de 3 pas...

Saut = un nombre de pas.

Dans Scratch, un type de saut est représenté par l'instruction : « avancer de n » (faire un saut de n pas)

Caractéristiques des exercices :

Consigne pour les élèves (Ex 1 à 3b)

A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin de se rendre exactement sur le nombre encadré.

Vous n'avez le droit d'utiliser qu'un seul type de saut à choisir entre 1 et 9.

Vous pouvez l'utiliser autant de fois que vous le souhaitez.

Attention : dans certains exercices, il faut éviter des bombes !

Synthèse pour l'enseignant (Ex 1 à 3b)

Exercice	Case cible	Bombes	Sauts solutions du problème
Exercice 1	24	Aucune	1, 2, 3, 4, 6, 8
Exercice 2	24	9 et 14	4, 6, 8 (Les sauts 1, 2 et 3 font passer par la bombe)
Exercice 3a	84	36	7 (Les sauts 1, 2, 3, 4 et 6 font passer par la bombe)
*Exercice 3b	105	48 et 25	7 (Les sauts 1, 3 et 5 font passer par la bombe)

2. **Déroulement**

Durée	Étapes	Activités de l'enseignant / propositions
	Présentation générale	Présenter la situation (Tableau, affiche, vidéo projecteur...) - Présenter la consigne : <i>A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin de se rendre sur le nombre encadré, en évitant les bombes éventuelles et en n'utilisant qu'un seul type de saut (autant de fois que vous le souhaitez).</i> Vérifier que les élèves ont compris la consigne - Contraintes : utiliser au choix un seul type de saut (de 1 à 9) éviter la case « bombe » - A la disposition du binôme : Des sauts de 1 à 9 et l'instruction « Répéter ».
	Exercice 1	Chaque binôme avance à son rythme. Circuler et accompagner les élèves en difficultés. Faire le point (si nécessaire) sur l'utilisation du bloc « Répéter ».
	Bilan	La correction se fait parallèlement sur les deux environnements Scratch et le tableau en effectuant la traduction de l'algorithme en écriture symbolique. Récouter les différentes procédures. Synthèse : les écritures : $24 = 12 \cdot 2 / 3 \cdot 8 / 4 \cdot 6 \dots$; vocabulaire : 24 est un multiple de 2 et 2 est un diviseur de 24 ... 24 a plusieurs diviseurs...
	Exercices 2 à 3b	Le ruban « basculer sur l'arrière-plan » permet de passer d'un exercice à un autre. Pour ces 3 exercices, insister sur la contrainte « bombe ». Les élèves avancent à leur rythme.
	Bilan et synthèse	Le bilan peut se faire dès l'exercice 3a. Parmi les sauts possibles, lesquels sont diviseurs des bombes ? Synthèse sur les diviseurs.

Séance 1 - Phase 2 : La division euclidienne

1. **Description des situations**

Le fichier « Séquence 1-2.sb2 » propose 6 exercices.
Ces exercices utilisent la bande numérique avec une case cible.
L'objectif est d'écrire un programme permettant au lutin de se rapprocher au maximum de la cible (nombre encadré), sans le dépasser, en utilisant le saut indiqué.
A la disposition du binôme d'élèves, il y a des sauts de 1 à 12 et l'instruction « Répéter ».
Dans ces exercices, le lutin laisse une trace sur les cases où il passe (Figure 2).

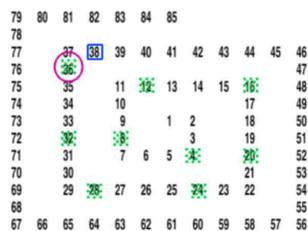


Figure 2

Caractéristiques des exercices :

Consigne pour les élèves (Ex. 4 à 6d)

A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin de se rapprocher au maximum du nombre encadré, sans le dépasser, et en utilisant le saut indiqué dans chaque exercice (autant de fois que vous le souhaitez).

Exercices	Trace des sauts	Cible	Saut
Exercice 4	OUI	11	2
Exercice 5	OUI	38	4
Exercice 6a	OUI	77	3
*Exercice 6b	OUI	95	7
*Exercice 6c	OUI	123	6
*Exercice 6d	OUI	138	11

Procédures attendues :

- Par tâtonnement
- Mobilisation des multiples (par exemple : Ex. 4 et 5)
- Les traces des sauts permettent d'avancer de saut en saut, en comptant le nombre de sauts.
- La division peut être mobilisée mais elle n'est pas attendue.

2. Déroulement

<i>Durée</i>	<i>Étapes</i>	<i>Activités de l'enseignant / propositions</i>
	Exercices 4 à 6d	<p>- Présenter la consigne : <i>A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin de se <u>rapprocher</u> au maximum du nombre encadré, <u>sans le dépasser</u>, et en utilisant <u>le saut indiqué</u> dans chaque exercice (autant de fois que vous le souhaitez).</i></p> <p>Vérifier que les élèves ont compris la consigne.</p> <p>- Contraintes : On a le droit de n'utiliser que le saut indiqué dans le titre de l'exercice.</p> <p>- A disposition : Fiche élève. Les sauts de 1 à 12 et l'instruction « Répéter ».</p> <p>Chaque binôme avance à son rythme. Ciruler et accompagner les élèves en difficulté.</p>
	Bilan et institutionnalisation	<p>Le bilan peut se faire dès l'exercice 6a.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Correction : présentation des algorithmes en les traduisant sous forme d'une égalité numérique. 2) Expliciter leur raisonnement (éventuellement faire émerger la division si elle apparaît). 3) Travailler les expressions « nombre de sauts », « il manque ... » pour l'exprimer à l'aide de : $Cible = (Type\ de\ saut * Nombre\ de\ sauts) + Reste$. 4) Institutionnalisation : Introduction des termes de la division et écriture $D = (d*q) + r$.

Séance 2

Séance 2 - La division euclidienne (suite)

1. Description des situations

Le fichier « Séquence 1-3.sb2 » propose 8 exercices.

Ces exercices prolongent les précédents avec des valeurs différentes :

- Les cibles sont choisies grandes, le saut est petit et donc le quotient est grand.
- Absence de traces des sauts du lutin.
- Certaines cases successives sont cachées et matérialisées par un seul trait, qui ne permet pas de connaître le nombre de cases (Figure 3).

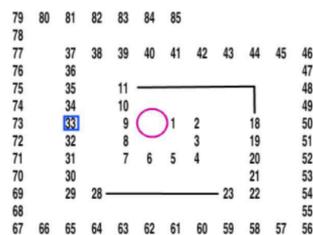


Figure 3

- Le joker : lorsque le saut ne permet pas d'arriver exactement à la cible, le binôme d'élèves a à sa disposition un joker au choix qui lui permet de l'atteindre (Exercices 9 à 11c).

Le choix de ces valeurs a pour objectif de disqualifier certaines procédures afin de privilégier celle qui utilise la division.

Caractéristiques des exercices :

Consigne pour les élèves (Ex 7 à 8b)

A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin de se rapprocher au maximum du nombre encadré, sans le dépasser, et en utilisant le saut indiqué dans chaque exercice (autant de fois que vous le souhaitez).

Consigne pour les élèves (Ex 9 à 11c)

A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin d'arriver exactement sur le nombre encadré. Vous n'avez le droit d'utiliser qu'une seule fois le joker au choix (des sauts de 1 à 6 pour l'exercice 9, des sauts de 1 à 4 pour l'exercice 10, des sauts de 1 à 11 pour l'exercice 11a, des sauts de 1 à 9 pour l'exercice 11b et des sauts de 1 à 8 pour l'exercice 11c).

Synthèse (pour l'enseignant)

Exercices	Trace des sauts	Vides	Cible	Saut
Exercice 7	NON	OUI	33	6
Exercice 8a	NON	NON	118	8
*Exercice 8b	NON	NON	137	11
Exercice 9	NON	NON	97	7
Exercice 10	NON	NON	145	5
Exercice 11a	NON	NON	135	12
*Exercice 11b	NON	NON	144	10
*Exercice 11c	NON	NON	150	9

2. Déroulement

<i>Durée</i>	<i>Etapes</i>	<i>Activités de l'enseignant / propositions</i>
	Exercices 7 à 8b	<p>- Présenter la consigne : <i>A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin de se <u>rapprocher</u> au maximum du nombre encadré, <u>sans le dépasser</u>, et en utilisant le <u>saut indiqué</u> dans chaque exercice (autant de fois que vous le souhaitez).</i></p> <p>- Contraintes :</p> <ul style="list-style-type: none"> * Absence de trace des sauts afin de bloquer la procédure basée sur le dénombrement des traces. * Vides (Ex. 7) afin de bloquer la procédure de compter le nombre de sauts sur la frise. <p>- A la disposition du binôme :</p> <ul style="list-style-type: none"> * les sauts de 1 à 12 * l'instruction « Répéter ». <p>- Préciser qu'il faut s'arrêter à l'exercice 8b pour un bilan.</p> <p>- Circuler et accompagner les élèves en difficulté.</p>
	Bilan	<p>Le bilan peut se faire dès l'<u>exercice 8a</u></p> <p>Synthèse par le professeur sur les différentes procédures et mise en évidence de celle concernant la division.</p>
	Exercices 9 à 11c	<p>- Présenter la consigne : <i>A l'aide des blocs proposés, créez un programme dans Scratch. Il doit permettre au lutin d'arriver <u>exactement</u> sur le nombre encadré. Vous n'avez le droit d'utiliser qu'une seule fois le joker au choix (des sauts de 1 à 6 pour l'exercice 9, des sauts de 1 à 4 pour l'exercice 10, des sauts de 1 à 11 pour l'exercice 11a, des sauts de 1 à 9 pour l'exercice 11b et des sauts de 1 à 8 pour l'exercice 11c).</i></p> <p><i>Pour chaque exercice, utilisez des égalités pour traduire vos programmes Scratch dans l'espace de réponse.</i></p> <p>- Contraintes :</p> <ul style="list-style-type: none"> * Absence de trace des sauts afin de bloquer la procédure basée sur le dénombrement des traces. * Le Joker oblige le binôme d'élèves à déterminer de façon implicite la valeur du reste. Cela lui permet donc de passer de l'écriture Cible = (Type de saut * Nombre de sauts) + Joker vers l'écriture de la division $D = (d * q) + r$. <p>- A la disposition du binôme :</p> <p>Le binôme d'élèves a à sa disposition les sauts de 1 à 12 et l'instruction « Répéter ».</p>
	Bilan et institutionnalisation	<p>Le bilan peut se faire dès l'<u>exercice 11a</u>.</p> <p>Le bilan porte sur l'écriture de la division euclidienne.</p>

Séance 3

Séance 3 - Résolution de problèmes

Cette séance n'utilise pas Scratch. Il s'agit de réinvestir individuellement les connaissances sur la division euclidienne pour la résolution de problème.

Chaque professeur décidera de la gestion de la séance (rappels, retour sur des bilans et synthèses...) en fonction des besoins.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes si le temps ne le permet pas.

Pour cette séance, il n'y a pas de fiche élève spécifique. Les élèves peuvent travailler sur leur cahier, ou sur une fiche préparée par vous-même.

Problème 1

Sandra a 71 œufs.

Elle veut les ranger dans des boîtes. Une boîte pleine contient 6 œufs.

De combien de boîtes a-t-elle besoin ?

Problème 2

On souhaite ranger 78 livres dans des boîtes.

Chaque boîte peut contenir 5 livres.

De combien de boîtes a-t-on besoin ?

Les boîtes seront elles toutes pleines ?

Problème 3

97 élèves participent à une manifestation sportive.

On souhaite constituer 20 équipes identiques avec le plus d'élèves possible. Combien y a-t-il d'élèves par équipe ?

Tous les élèves font-ils partie des équipes constituées ? Justifie ta réponse.

Problème 4

Julien remplit des boîtes de 6 œufs. Il a pu remplir 15 boîtes mais il lui reste trois places vides.

Combien d'œufs a-t-il rangés ?

Fiche séquence Scratch destinée aux élèves

Prénoms :

CM2 - Fiche élève – Séquence 1

Exercices 1 à 3b (Fichier « Séquence 1-1.sb2 »)

Consigne :

Ecrivez un programme dans Scratch permettant au lutin de se rendre exactement à la case cible.

Vous n'avez le droit d'utiliser qu'un seul type de saut à choisir entre 1 et 9.

Vous pouvez l'utiliser autant de fois que vous le souhaitez.

Attention : dans certains exercices il faut éviter des bombes !

Exercice 1 : La cible est 24.

Exercice 2 : La cible est 24.

Exercice 3a : La cible est 84.

***Exercice 3b** : La cible est 105.

Espace de travail

Prénoms :

CM2 - Fiche élève – Séquence 1

Exercices 4 à 6d (Fichier « Séquence 1-2.sb2 »)

Consigne :

Ecrivez un programme dans Scratch permettant au lutin de se rapprocher au maximum du nombre encadré, sans le dépasser, et en utilisant le saut indiqué dans chaque exercice.

Le lutin laisse des traces des sauts.

***Exercice 4** : La cible est 11 et le saut autorisé est 2.*

***Exercice 5** : La cible est 38 et le saut autorisé est 4.*

***Exercice 6a** : La cible est 77 et le saut autorisé est 3.*

****Exercice 6b** : La cible est 95 et le saut autorisé est 7.*

****Exercice 6c** : La cible est 123 et le saut autorisé est 6.*

****Exercice 6d** : La cible est 138 et le saut autorisé est 11.*

Espace de travail

Prénoms :

CM2 - Fiche élève – Séquence 1

Exercices 7 à 8b (Fichier « Séquence 1-3.sb2 »)

Consigne :

Ecrivez un programme dans Scratch permettant au lutin de se rapprocher au maximum du nombre encadré, sans le dépasser, et en utilisant le saut indiqué dans chaque exercice (autant de fois que vous souhaitez).

***Exercice 7 :** La cible est 33 et le saut autorisé est 6.*

***Exercice 8a :** La cible est 118 et le saut autorisé est 8.*

****Exercice 8b :** La cible est 137 et le saut autorisé est 11.*

Espace de travail

Prénoms :

CM2 - Fiche élève – Séquence 1

Exercices 9 à 11c (Séquence 1-3.sb2)

Consigne :

Ecrivez un programme dans Scratch pour permettre au lutin d'arriver exactement sur le nombre encadré.

Exercice 9 : *Vous avez le droit d'utiliser le saut 7 autant de fois que vous souhaitez et une seule fois un saut de votre choix entre 1 et 6.*

Exercice 10 : *Vous avez le droit d'utiliser le saut 5 autant de fois que vous souhaitez et une seule fois un saut de votre choix entre 1 et 4.*

Exercice 11a : *Vous avez le droit d'utiliser le saut 12 autant de fois que vous souhaitez et une seule fois un saut de votre choix entre 1 et 11.*

***Exercice 11b :** *Vous avez le droit d'utiliser le saut 10 autant de fois que vous souhaitez et une seule fois un saut de votre choix entre 1 et 9.*

***Exercice 11c :** *Vous avez le droit d'utiliser le saut 9 autant de fois que vous souhaitez et une seule fois un saut de votre choix entre 1 et 8.*

Traduisez vos programmes à l'aide d'égalités dans l'espace de réponse.

Espace de travail

Espace de réponse :

Exercice 9

Exercice 10

Exercice 11a

***Exercice 11b**

***Exercice 11c**

Fiche séquence contrôle destinée aux enseignants

Séquence 1 : Division euclidienne

Classe : CM1

Objectifs de la séquence : Travailler le sens de la division euclidienne à partir de la recherche de nombre de parts dans une situation de partage équitable.

- Trouver le nombre de parts dans une situation de partage équitable.
- Comprendre la signification du quotient et du reste.
- Comprendre l'écriture de la division euclidienne

Cette séquence est construite à partir de Cap Maths CM1.

Idée générale : Il s'agit de découper un ruban de longueur donnée en un nombre de parts de même longueur.

Considérations didactiques : La notion de division euclidienne est difficile car le résultat de l'opération est composé de deux nombres, quotient et reste, dont il faut donner du sens.

Prérequis : Partage, Multiples, Diviseurs

Nombre de séances envisagées : 3 séances.

Rappels :

- Les élèves travaillent en binômes, sauf pour la séance 3 (résolution de problèmes) où les élèves travaillent individuellement.
- Les exercices qui présentent la notation $*#b$, $*#c$, ... (où # est un nombre) sont optionnels. Ils ont été pensés pour les binômes qui avancent plus vite.
- Nous avons indiqué l'exercice à partir duquel on peut faire le bilan.
- Les élèves peuvent utiliser d'autres feuilles comme espace de travail complémentaire à la fiche élève.
- Les tableaux de synthèse fournis sont donnés à titre indicatif. Vous pouvez les enrichir et les adapter.
- Dans les tableaux « déroulement de séance » vous avez une colonne « durée » pour votre organisation personnelle.
- Le découpage du contenu par séance ainsi que la durée de la séance peuvent être adaptés aux spécificités de la classe. Cependant il faut respecter la durée totale qui est l'équivalent de 3 séances de 50 minutes.

Descriptif de la séquence

Séance	Objectif(s) spécifique(s)	Description
Pré-test		Le pré-test est à faire avant les séances. Il prend environ 20 minutes. Il est dans le fichier « Pre-test_Division euclidienne ».
1	Problème de partage avec reste Institutionnalisation	Résoudre un problème de recherche du nombre de parts dans un partage équitable. Il s'agit de découper un ruban en plusieurs morceaux de même longueur avec des restes. Division euclidienne
2	Déterminer le quotient et le reste. Travailler l'écriture de la division euclidienne	Le quotient et le reste doivent être explicités
3	Résolution de problème	Cette séance peut servir d'ajustement pour terminer le travail de la séance 2 si besoin.
Post-test		Le post-test est à faire après les séances. Il prend environ 20 minutes. Il est dans le fichier « Post-test_Division euclidienne ».

Séance 1

1. Description de la situation

Il faut découper des morceaux de 6 cm. Pour cela, nous disposons de 3 grands rubans de différentes longueurs : la 1^{ère} mesure 75 cm, la 2^{ème} mesure 123 cm et la 3^{ème} mesure 150 cm.

Combien de rubans de 6 cm peux-tu découper dans chaque ruban ?

Quelle longueur de papier reste-t-il à la fin de chaque découpage ?

Matériel

- Situation écrite au tableau avec une représentation schématique d'un morceau de 6 cm et des 3 rubans.
- bandes de 75 cm
- bandes de 123 cm
- bandes de 150 cm

2. Déroulement de la séance 1

<i>Durée</i>	<i>Etapes</i>	<i>Activités de l'enseignant / consignes</i>
	Utilisation de la bande mesurant 75 cm	Cette étape permet l'appropriation de la situation. Distribution de la première page de la fiche élève 1-1. Lecture collective et compréhension de la situation du départ. Recherche par groupes de deux. Le matériel est utilisé comme support de raisonnement et de résolution, mais aussi comme moyen d'invalidation de leur résultat et comme support de raisonnement et de résolution.
	Bilan	- Relever les différents résultats et les différentes procédures. - Valider collectivement par la manipulation au tableau. - Faire le parallèle entre la manipulation et l'écriture mathématique de la procédure. - Verbaliser la réponse : nous obtenons 12 fois le ruban de 6 cm et il nous reste 3 cm. - Introduire l'écriture de la division euclidienne : $(12 \times 6) + 3$ - Introduire le terme « diviser » : partager la bande de 75 cm en rubans de 6 cm c'est diviser 75 par 6. -Vocabulaire : le quotient, le diviseur et le reste. Partager une bande de 75 cm en rubans de 6 cm : c'est diviser 75 par 6 $75 = (12 \times 6) + 3$ 6 : le diviseur 12 : le quotient (résultat) 3 : le reste
	Utilisation des bandes mesurant 123 cm et 150cm	Cette étape est un réinvestissement. Distribution de la deuxième page de la fiche élève 1-1. Lecture collective et compréhension de la situation. Recherche par groupes de deux.
	Bilan	- Relever les différents résultats et les différentes procédures. - Revenir sur le sens du quotient et du reste.

Séance 2

1. Description de la situation

Les binômes font des exercices sur la division euclidienne.

Les exercices de cette séance sont inspirés par Cap maths CM1 (2010).

Exercice 1

- a) Combien de rubans de 50 cm peut-on découper dans une bande de 270 cm ?
- b) Quelle longueur de tissu reste-t-il ?

Consigne (Ex 2 à 6c) :

Réponds aux questions suivantes.

Exercice 2 : Combien de fois 2 dans 11 ?

Exercice 3 : Combien de fois 4 dans 38 ?

Exercice 5 : Combien de fois 6 dans 33 ?

Exercice 4 : Combien de fois 3 dans 77 ?

Exercice 5 : Combien de fois 7 dans 95 ?

Exercice 6a : Combien de fois 8 dans 118 ?

***Exercice 6b :** Combien de fois 6 dans 123 ?

***Exercice 6c :** Combien de fois 11 dans 138 ?

Consigne (Ex 7 à 10b) :

Dans chacun des cas suivants, trouve le quotient et le reste. Vérifie ta réponse en effectuant le calcul avec parenthèses.

Exercice 7 : Combien de fois 7 dans 97 ?

Exercice 8 : Combien de fois 5 dans 145 ?

Exercice 9 : Combien de fois 12 dans 135 ?

Exercice 10a : Combien de fois 10 dans 144 ?

***Exercice 10b :** Combien de fois 9 dans 150 ?

Exercice 11

Géomette avance son pion sur une ligne graduée de 1 en 1. Elle part de 0 et avance de 8 en 8. Elle vient de faire 25 sauts. Sur quel nombre se trouve son pion ?

Exercice 12

Géomette rejoue sur la même ligne graduée. À nouveau, elle part de 0 et avance son pion de 8 en 8. Elle décide de s'arrêter avant 150, mais le plus près possible de 150.

- a) Combien doit-elle faire de sauts avec son pion ?
- b) Sur quel nombre sera alors son pion ?

2. Déroulement de la séance 2

<i>Durée</i>	<i>Étapes</i>	<i>Activités de l'enseignant / consignes</i>
	Exercice 1	Le but de ce premier exercice est de réinvestir les connaissances mobilisées pendant la séance 1. - Distribution de la fiche élève 1-2. - Présenter la consigne.
	Bilan	- Verbaliser la réponse : nous obtenons 5 fois le ruban de 50 cm et il nous reste 20 cm. - Ecrire la réponse sous forme de division euclidienne. - Insister sur le vocabulaire : le quotient, le diviseur et le reste.
	Exercice 2 à 6c	Circuler et accompagner les élèves en difficulté.
	Bilan	Le bilan peut se faire dès l'exercice 6a. Corriger collectivement les exercices au tableau en utilisant l'écriture de la division euclidienne.
	Exercice 7 à 10b	Circuler et accompagner les élèves en difficulté.
	Bilan	Le bilan peut se faire dès l'exercice 10a. Corriger collectivement les exercices au tableau en utilisant l'écriture de la division euclidienne.
	Exercice 11 à 12	Circuler et accompagner les élèves en difficulté.
	Bilan et institutionnalisation	Correction collective en insistant sur le vocabulaire et sur l'écriture. Institutionnalisation de la division euclidienne.

Séance 3

Séance 3 - Résolution de problèmes

Le but de cette séance est de réinvestir individuellement les connaissances sur la division euclidienne pour la résolution de problème.

Chaque professeur décidera de la gestion de la séance (rappels, retour sur des bilans et synthèses...) en fonction des besoins.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes si le temps ne le permet pas.

Pour cette séance il n'y a pas de fiche élève spécifique. Les élèves peuvent travailler sur leur cahier, ou sur une fiche préparée par vous-même.

Problème 1

Sandra a 71 œufs.

Elle veut les ranger dans des boîtes. Une boîte pleine contient 6 œufs.

De combien de boîtes a-t-elle besoin ?

Problème 2

On souhaite ranger 78 livres dans des boîtes.

Chaque boîte peut contenir 5 livres.

De combien de boîtes a-t-on besoin ?

Les boîtes seront elles toutes pleines ?

Problème 3

97 élèves participent à une manifestation sportive.

On souhaite constituer 20 équipes ayant le même nombre de joueurs et le plus d'élèves possible. Combien y a-t-il d'élèves par équipe ?

Tous les élèves font-ils partie des équipes constituées ? Justifie ta réponse.

Problème 4

Julien remplit des boîtes de 6 œufs. Il a pu remplir 15 boîtes mais il lui reste trois places vides.

Combien d'œufs a-t-il rangés ?

Fiche séquence contrôle destinée aux élèves

Prénoms :

CM1 - Fiche élève 1-1

Situation 1

Il faut découper des rubans de 6 cm. Pour cela, nous disposons d'une bande qui mesure 75 cm.
Combien de rubans de 6 cm pouvez-vous découper dans cette bande ?
Quelle longueur de papier reste-t-il à la fin du découpage ?

Recherche 1

Réponse 1

Prénoms :

CM1 - Fiche élève 1-1

Situation 2

Il faut découper des rubans de 6 cm. Pour cela, nous disposons d'une bande qui mesure 123 cm.
Combien de rubans de 6 cm pouvez-vous découper dans cette bande ?
Quelle longueur de papier reste-t-il à la fin du découpage ?

Recherche :

Réponse :

On obtient.....fois le ruban de 6 cm et il restecm de papier.

Situation 3

Il faut découper des rubans de 6 cm. Pour cela, nous disposons d'une bande qui mesure 150 cm.
Combien de rubans de 6 cm pouvez-vous découper dans cette bande ?
Quelle longueur de papier reste-t-il à la fin du découpage ?

Recherche :

Réponse :

On obtient.....fois le ruban de 6 cm et il restecm de papier.

Annexe B

Tests d'apprentissage

Pré-test

Séquence 1 – Pré-test

Code enseignant :

Prénom élève :

Exercice 1 <i>Quatre copains se partagent 56 billets. Combien de billets auront-ils chacun ?</i>
Espace de travail
Espace de réponse

Exercice 2 <i>Une voiture peut transporter au maximum 6 caisses à la fois. Il faut transporter 33 caisses. Calcule combien de fois la voiture devra être chargée.</i>
Espace de travail
Espace de réponse

Exercice 3

*Nicolas a un sac de 214 bonbons. Il veut offrir équitablement le maximum de bonbons à ses 16 copains.
Combien gardera-t-il pour lui ?*

Espace de travail

Espace de réponse

Exercice 4

Marc a collé 448 timbres dans un album. Il y a 32 timbres sur chaque page. Combien de pages ont été remplies ?

Espace de travail

Espace de réponse

Exercice 5

Un transporteur doit livrer 85 tonnes de sable à une entreprise qui fabrique du béton, avec son camion qui permet de transporter 5 tonnes à chaque voyage.

Ce transporteur a commencé sa livraison et il a déjà effectué 9 voyages.

- a) Combien a-t-il déjà livré de sable ?*
- b) Combien lui reste-t-il de sable à livrer ?*
- c) Combien doit-il encore effectuer de voyages ?*

Espace de travail

Espace de réponse

- a).....
- b).....
- c).....

Post-test

Séquence 1 – Post-test

Code enseignant :

Prénom élève :

Exercice 1
<i>Une fleuriste vient de recevoir 42 roses. Elle veut confectionner des bouquets contenant trois roses chacun. Combien de bouquets peut-elle confectionner ?</i>
Espace de travail
Espace de réponse

Exercice 2
<i>38 élèves mangent à la cantine à des tables de 4. Combien faut-il de tables ?</i>
Espace de travail
Espace de réponse

Exercice 3

Un chocolatier dispose de 232 chocolats. Il souhaite les ranger dans des boîtes pouvant contenir 15 chocolats. Les boîtes doivent être complètes. Combien de chocolats va-t-il rester ?

Espace de travail

Espace de réponse

Exercice 4

On organise un voyage scolaire pour 468 élèves d'un collège. Chaque bus a 36 places. Combien de bus faut-il ?

Espace de travail

Espace de réponse

Exercice 5

Le directeur d'une école veut distribuer équitablement 112 dictionnaires dans des classes. Il souhaite précisément fournir 7 dictionnaires par classe.

Les dictionnaires ont déjà été placés dans 7 classes.

- a) Combien de dictionnaires a-t-il déjà placé ?*
- b) Combien reste-t-il de dictionnaires à distribuer ?*
- c) Combien reste-t-il de classes à fournir ?*

Espace de travail

Espace de réponse

- a).....
- b).....
- c).....

Annexe C

Analyses en composantes principales

ACP sur les 33 variables concernant les types de réponse en post-test

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	Analysis N
POST_EX1_A	,70	,459	2105
POST_EX1_B	,05	,226	2105
POST_EX1_C	,00	,058	2105
POST_EX1_E	,04	,191	2105
POST_EX1_F	,01	,102	2105
POST_EX1_G	,01	,106	2105
POST_EX1_H	,13	,339	2105
POST_EX2_A	,48	,500	2105
POST_EX2_D	,23	,422	2105
POST_EX2_E	,03	,168	2105
POST_EX2_F	,01	,084	2105
POST_EX2_G	,02	,133	2105
POST_EX2_H	,16	,369	2105
POST_EX3_A	,35	,478	2105
POST_EX3_B	,03	,166	2105
POST_EX3_D	,10	,306	2105
POST_EX3_E	,01	,090	2105
POST_EX3_F	,02	,141	2105
POST_EX3_G	,01	,087	2105
POST_EX3_H	,23	,420	2105
POST_EX4_A	,36	,481	2105
POST_EX4_B	,05	,224	2105
POST_EX4_C	,00	,031	2105
POST_EX4_E	,00	,065	2105
POST_EX4_F	,02	,143	2105
POST_EX4_G	,02	,138	2105
POST_EX4_H	,18	,384	2105
POST_EX5_A	,25	,433	2105
POST_EX5_B	,03	,183	2105
POST_EX5_E	,00	,031	2105
POST_EX5_F	,00	,038	2105
POST_EX5_G	,00	,053	2105
POST_EX5_H	,22	,417	2105

FIGURE C.1 – Caractéristiques univariées des 33 variables concernant les types de réponses en post-test

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		,295
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	14318,075
	df	528
	Sig.	,000

FIGURE C.2 – Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 33 variables concernant les types de réponse en post-test

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	3,291	9,973	9,973	3,291	9,973	9,973	2,024	6,132	6,132
2	1,765	5,347	15,321	1,765	5,347	15,321	1,804	5,467	11,599
3	1,637	4,962	20,283	1,637	4,962	20,283	1,779	5,391	16,990
4	1,522	4,613	24,896	1,522	4,613	24,896	1,711	5,186	22,176
5	1,438	4,357	29,253	1,438	4,357	29,253	1,558	4,721	26,897
6	1,341	4,064	33,317	1,341	4,064	33,317	1,533	4,645	31,542
7	1,273	3,858	37,174	1,273	3,858	37,174	1,317	3,992	35,534
8	1,241	3,760	40,934	1,241	3,760	40,934	1,301	3,944	39,478
9	1,154	3,497	44,431	1,154	3,497	44,431	1,208	3,661	43,139
10	1,105	3,350	47,781	1,105	3,350	47,781	1,189	3,604	46,743
11	1,091	3,306	51,088	1,091	3,306	51,088	1,161	3,518	50,260
12	1,080	3,273	54,361	1,080	3,273	54,361	1,129	3,420	53,681
13	1,045	3,166	57,527	1,045	3,166	57,527	1,123	3,402	57,082
14	1,023	3,101	60,628	1,023	3,101	60,628	1,089	3,300	60,382
15	1,015	3,075	63,702	1,015	3,075	63,702	1,072	3,248	63,630
16	1,009	3,057	66,759	1,009	3,057	66,759	1,033	3,130	66,759
17	,984	2,982	69,741						
18	,976	2,958	72,699						
19	,969	2,937	75,636						
20	,932	2,825	78,461						
21	,915	2,773	81,234						
22	,877	2,657	83,890						
23	,838	2,540	86,430						
24	,771	2,335	88,766						
25	,765	2,319	91,085						
26	,704	2,134	93,218						
27	,608	1,843	95,061						
28	,504	1,529	96,590						
29	,479	1,451	98,041						
30	,272	,825	98,866						
31	,176	,534	99,400						
32	,134	,405	99,805						
33	,064	,195	100,000						

Extraction Method: Principal Component Analysis.

FIGURE C.3 – Variance expliquée par les composantes obtenues de l'ACP à partir des 33 variables concernant les types de réponse en post-test

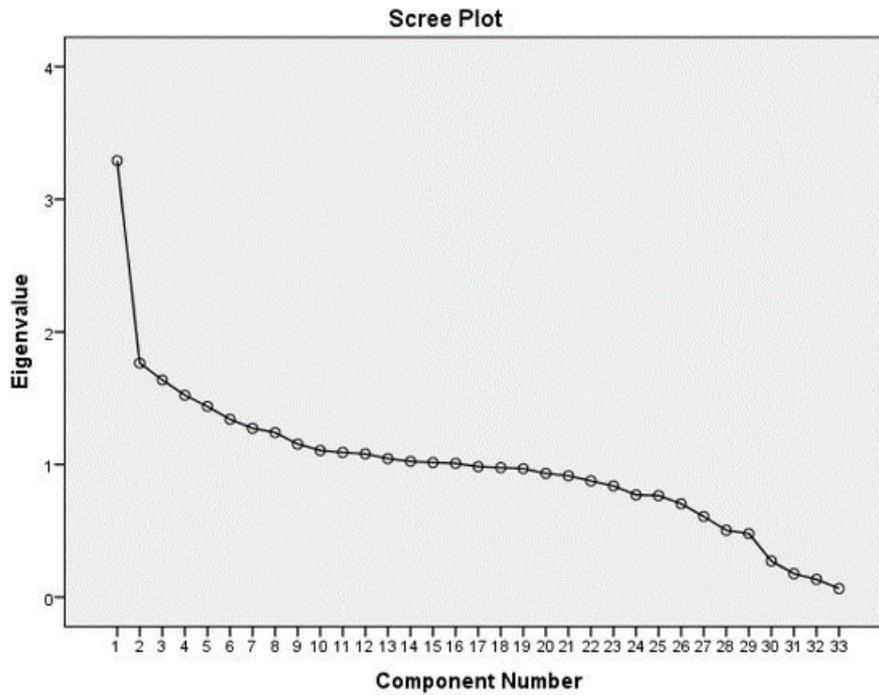


FIGURE C.4 – Scree plot de l’ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en post-test

Rotated Component Matrix^a

	Component															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
POST_EX1_A	.192	-.163	-.252	-.823	-.107		.133					-.114				-.136
POST_EX1_B				.378							.299	.501	-.217			-.383
POST_EX1_C							-.192	-.117				-.144	-.161	.566		-.322
POST_EX1_E			.761				-.132									
POST_EX1_F																.888
POST_EX1_G		.746			.139											
POST_EX1_H				.790	.100				.144		-.107	-.191	.157		-.128	.183
POST_EX2_A	.176	-.129	-.132	-.163		.785	.404									
POST_EX2_D			-.110			-.909	.234									
POST_EX2_E			.744						.183					.122		
POST_EX2_F				.153	.712		.110					-.126				
POST_EX2_G	-.100	.768														.105
POST_EX2_H	-.128			.138			-.871									
POST_EX3_A	.806		-.113		-.103					.178		-.140				
POST_EX3_B											-.139	.785				
POST_EX3_D	-.152									-.851						-.124
POST_EX3_E			.335						.614		-.112		-.195			
POST_EX3_F		.109	.213		.462						.172	.110	.402			.263
POST_EX3_G		.531		.133			-.133			-.178	-.194					-.119
POST_EX3_H	-.621								.519			-.251		-.126	-.118	-.185
POST_EX4_A	.710			-.206			.114							-.102	-.182	-.158
POST_EX4_B	-.181		-.141			.106	.118		.188	-.132	.681	-.104	-.114			
POST_EX4_C													-.117			.739
POST_EX4_E			.484				.165	-.144		-.117		-.192	-.350	-.150		
POST_EX4_F					.811											
POST_EX4_G		.510	.234		-.121					.106	.209		.386			
POST_EX4_H	-.398				-.108	.135		.266	.159		-.556			.104	.125	
POST_EX5_A	.350		-.101	-.189		.149	.112	-.588						-.232		-.113
POST_EX5_B							.203							.732		.158
POST_EX5_E									.792		.134		.108			
POST_EX5_F			.115	-.211	.211		-.275			.161	.206			.188	-.253	
POST_EX5_G												-.124	.668			
POST_EX5_H		.108						.885						-.171		-.107

Extraction Method: Principal Component Analysis.
 Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.
 a. Rotation converged in 18 iterations.

FIGURE C.5 – Matrice (après rotation) des 16 premières composantes de l’ACP réalisée à partir des 33 variables concernant les types de réponse en post-test

ACP sur 16 variables concernant les techniques en pré-test

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	Analysis N
PRE_EX1_P_D	,27	,445	2105
PRE_EX1_P_M	,12	,329	2105
PRE_EX1_P_S	,38	,484	2105
PRE_EX1_P_A	,26	,436	2105
PRE_EX2_P_D	,15	,354	2105
PRE_EX2_P_M	,27	,441	2105
PRE_EX2_P_S	,23	,424	2105
PRE_EX2_P_A	,31	,463	2105
PRE_EX3_P_D	,23	,420	2105
PRE_EX3_P_M	,13	,336	2105
PRE_EX3_P_S	,19	,395	2105
PRE_EX3_P_A	,34	,480	2105
PRE_EX4_P_D	,21	1,320	2105
PRE_EX4_P_M	,17	,379	2105
PRE_EX4_P_S	,06	,239	2105
PRE_EX4_P_A	,32	,466	2105

FIGURE C.6 – Caractéristiques univariées des 16 variables concernant les techniques en pré-test

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		,624
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	9111,753
	df	120
	Sig.	,000

FIGURE C.7 – Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 16 variables concernant les techniques en pré-test

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	3,330	20,814	20,814	3,330	20,814	20,814	2,850	17,813	17,813
2	2,219	13,866	34,680	2,219	13,866	34,680	2,087	13,045	30,858
3	1,978	12,361	47,041	1,978	12,361	47,041	1,945	12,159	43,017
4	1,013	6,332	53,373	1,013	6,332	53,373	1,657	10,355	53,373
5	,945	5,907	59,279						
6	,932	5,825	65,104						
7	,895	5,594	70,698						
8	,862	5,388	76,086						
9	,759	4,745	80,831						
10	,724	4,524	85,354						
11	,584	3,649	89,003						
12	,521	3,254	92,257						
13	,407	2,546	94,803						
14	,378	2,364	97,167						
15	,261	1,631	98,798						
16	,192	1,202	100,000						

Extraction Method: Principal Component Analysis.

FIGURE C.8 – Variance expliquée par les composantes obtenues de l'ACP à partir des 16 variables concernant les techniques en pré-test

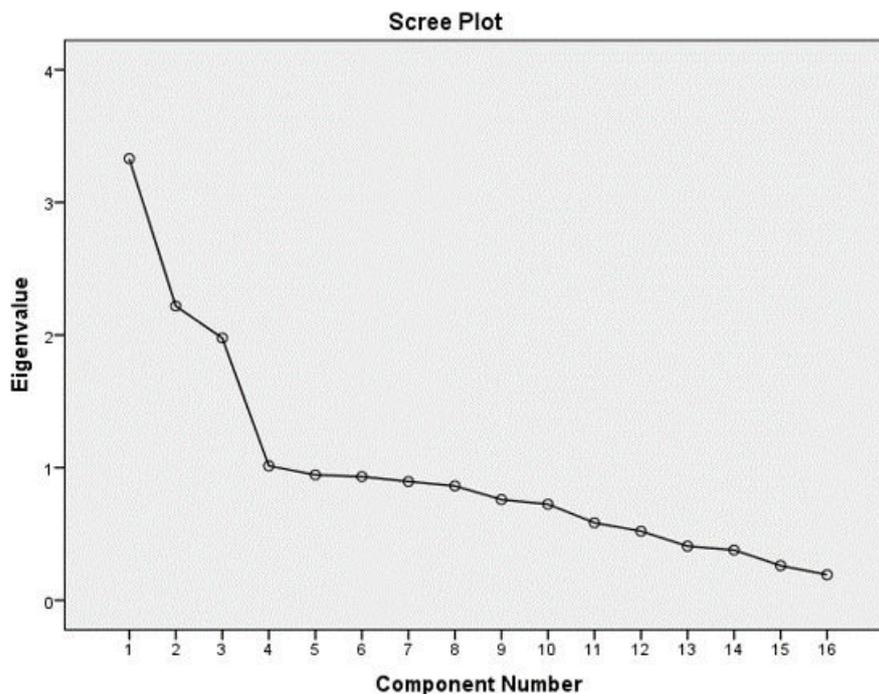


FIGURE C.9 – Scree plot de l'ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en pré-test

Rotated Component Matrix^a

	Component			
	1	2	3	4
PRE_EX1_P_D	,826		-,173	-,144
PRE_EX1_P_M	-,215	,560	-,171	-,257
PRE_EX1_P_S	-,523	-,307	-,391	,343
PRE_EX1_P_A	-,108		,772	
PRE_EX2_P_D	,796		-,102	
PRE_EX2_P_M	-,216	,579	-,234	-,370
PRE_EX2_P_S	-,271	-,217	-,294	,529
PRE_EX2_P_A	-,164	-,199	,657	
PRE_EX3_P_D	,827		-,162	-,122
PRE_EX3_P_M	,123	,749		
PRE_EX3_P_S	-,301	-,112	-,197	,605
PRE_EX3_P_A	-,284		,552	-,242
PRE_EX4_P_D	,289		-,115	
PRE_EX4_P_M	,113	,769		
PRE_EX4_P_S				,705
PRE_EX4_P_A	-,295	-,270	,407	-,289

Extraction Method: Principal Component Analysis.
 Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.

a. Rotation converged in 12 iterations.

FIGURE C.10 – Matrice (après rotation) des 4 composantes de l'ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en pré-test

ACP sur 20 variables concernant les types de réponse en post-test

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	Analysis N
POST_EX1_P_D	,29	,456	2105
POST_EX1_P_M	,36	,482	2105
POST_EX1_P_S	,23	,422	2105
POST_EX1_P_A	,19	,393	2105
POST_EX2_P_D	,27	,446	2105
POST_EX2_P_M	,33	,488	2105
POST_EX2_P_S	,26	,438	2105
POST_EX2_P_A	,21	,549	2105
POST_EX3_P_D	,27	,452	2105
POST_EX3_P_M	,34	,480	2105
POST_EX3_P_S	,12	,321	2105
POST_EX3_P_A	,49	8,724	2105
POST_EX4_P_D	,25	,435	2105
POST_EX4_P_M	,31	,461	2105
POST_EX4_P_S	,07	,248	2105
POST_EX4_P_A	,25	,435	2105

FIGURE C.11 – Caractéristiques univariées des 16 variables concernant les techniques en post-test

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		,764
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	15385,746
	df	120
	Sig.	,000

FIGURE C.12 – Indice KMO et test de sphéricité de Barlett sur les 16 variables concernant les techniques en post-test

ANNEXE C. ANALYSES EN COMPOSANTES PRINCIPALES

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	3,972	24,826	24,826	3,972	24,826	24,826	3,694	23,089	23,089
2	3,143	19,644	44,470	3,143	19,644	44,470	2,786	17,410	40,499
3	1,965	12,282	56,752	1,965	12,282	56,752	2,592	16,201	56,700
4	1,007	6,294	63,046	1,007	6,294	63,046	1,015	6,346	63,046
5	,989	6,181	69,227						
6	,877	5,479	74,706						
7	,729	4,556	79,263						
8	,681	4,254	83,517						
9	,537	3,359	86,876						
10	,481	3,009	89,885						
11	,425	2,659	92,544						
12	,375	2,342	94,886						
13	,279	1,741	96,627						
14	,209	1,307	97,934						
15	,207	1,295	99,229						
16	,123	,771	100,000						

Extraction Method: Principal Component Analysis.

FIGURE C.13 – Variance expliquée par les composantes obtenues de l’ACP à partir des 16 variables concernant les techniques en post-test

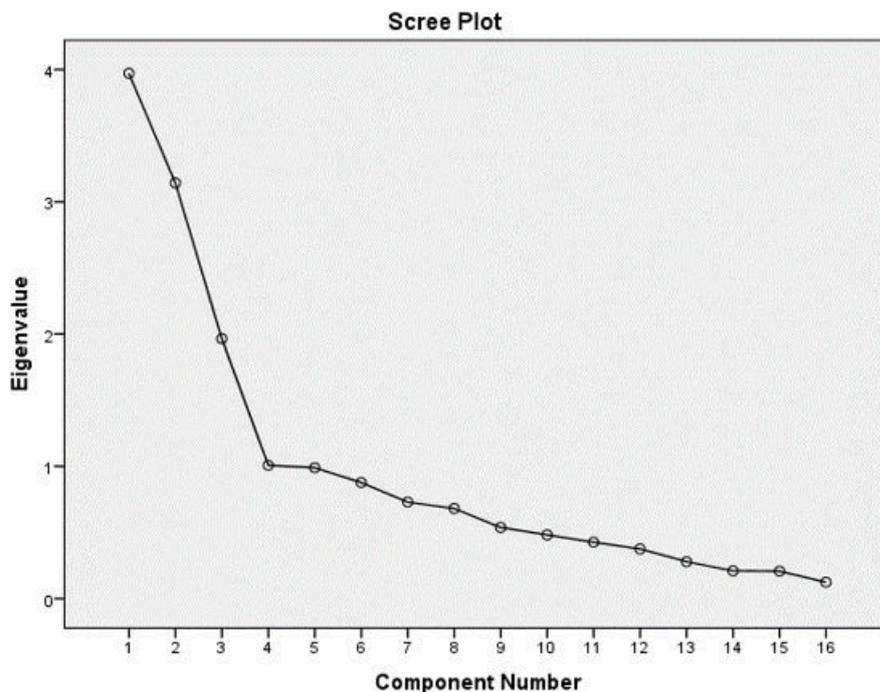


FIGURE C.14 – Scree plot de l’ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en post-test

Rotated Component Matrix^a

	Component			
	1	2	3	4
POST_EX1_P_D	,867	-,172	-,204	
POST_EX1_P_M	-,270	,757	-,192	
POST_EX1_P_S	-,205	-,206	,786	
POST_EX1_P_A	-,446	-,471	-,395	
POST_EX2_P_D	,873	-,158	-,201	
POST_EX2_P_M	-,258	,727	-,216	
POST_EX2_P_S	-,213	-,214	,780	
POST_EX2_P_A	-,392	-,325	-,360	-,154
POST_EX3_P_D	,835	-,123	-,202	
POST_EX3_P_M		,705	-,156	
POST_EX3_P_S	-,133	-,131	,660	
POST_EX3_P_A				,963
POST_EX4_P_D	,843	-,126	-,189	
POST_EX4_P_M		,707	-,145	
POST_EX4_P_S			,547	-,166
POST_EX4_P_A	-,404	-,403	-,241	,152

Extraction Method: Principal Component Analysis.
 Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.

a. Rotation converged in 13 iterations.

FIGURE C.15 – Matrice (après rotation) des 4 composantes de l'ACP réalisée à partir des 16 variables concernant les techniques en post-test

Annexe D

Liste des types de tâches

Types de tâches mathématiques

- $T_{décomposer}$ « Décomposer un nombre naturel a sous forme de produit de deux nombres naturels »;
- $T_{quotient}$ « Déterminer le quotient de la division euclidienne de deux nombres naturels a et b »;
- T_{reste} « Déterminer le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels a et b »;
- $T_{représenter}$ « Représenter la division euclidienne de deux nombres naturels a et b »
- T_{DE} « Déterminer un ou deux termes inconnus de l'expression $a = b \times q + r$, étant le terme a connu et avec $0 \leq r < b$ ».
- $T_{dét,b}$ « Déterminer un diviseur b de a »;
- $T_{dét,q}$ « Déterminer le naturel q tel que $a = b \times q$, étant les termes a et b connus et étant b diviseur de a ».
- $T_{b,hasard}$ « Choisir un nombre naturel b au hasard ».
- $T_{a,1}$ « Choisir $b = 1$ »;
- $T_{a,a}$ « Choisir $b = a$ ».
- $T_{a,obs}$ « Observer le dernier chiffre de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
- $T_{a,2}$ « Choisir $b = 2$ si a est un nombre pair et h_1, h_2, \dots, h_k sont impairs »
- $T_{a,3}$ « Choisir $b = 3$ si la somme des chiffres composant a est un multiple de 3 et la somme des chiffres de h_i n'est pas un multiple de 3 »
- $T_{a,5}$ « Choisir $b = 5$ si le dernier chiffre de a est 5 ou 0 et si aucun h_i se termine par 5 ou par 0 »
- $T_{a,10}$ « Choisir $b = 10$ si le dernier chiffre de a est 0 et si aucun h_i se termine par 0 »
- $T_{test,2}$ « Etablir si 2 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
- $T_{test,3}$ « Etablir si 3 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
- $T_{test,4}$ « Etablir si 4 est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
- $T_{test,n}$ « Etablir si n est un diviseur de a et de h_1, h_2, \dots, h_k »
- $T_{b,choix}$ « Choisir b parmi les nombres qui résultent être diviseurs de a mais qui ne divisent pas h_1, h_2, \dots, h_k »

- $T_{parts,b}$ « Identifier dans l'espace b parts »
- $T_{partager,b}$ « Positionner un élément dans chacune des b parts, puis répéter, jusqu'à finir les éléments de a »
- $T_{vérif,parts}$ « Vérifier que toutes les parts ont le même nombre d'éléments »
- $T_{grouper,b}$ « Faire des paquets de taille b dans une collection de taille a »
- $T_{vérif,group}$ « Vérifier qu'aucun élément de la collection ne reste en dehors des paquets »
- $T_{multiples,b}$ « Déterminer tous les multiples de b , compris entre 0 et a »
- $T_{vérif,mult}$ « Repérer a parmi les multiples de b »
- $T_{critère,b}$ « Appliquer à a le critère de divisibilité de b »
- $T_{table,b}$ « Parcourir la table de multiplication de b »
- $T_{b,repérer}$ « Repérer le nombre b tel que $q \times b = a$ »
- $T_{soust,b}$ « Soustraire le nombre b au nombre a , jusqu'à arriver à 0 »
- $T_{vérif,soust}$ « Vérifier d'avoir obtenu 0 »
- $T_{add,b}$ « Additionner le nombre b à soi-même, jusqu'à arriver à a »
- $T_{vérif,add}$ « Vérifier d'avoir obtenu a »
- T_{div} « Poser la division entre a et b »
- $T_{vérif,div}$ « Vérifier que le reste de la division est nul »

Types de tâches algorithmiques

- $T_{prog}[T]$ « Créer un programme dans Scratch qui réalise T »

Type de tâches	tâche(s)	Sous-type	V_a	V_H	V_b	V_{reste}	V_{traces}	$V_{masquage}$
$T_{décomposer}$	t_1	$T_{1,1}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	oui	non
	t_2, t_{3a}	$T_{1,2}$	$a \leq 100$	$H \neq \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	oui	non
	t_{3b}	$T_{1,3}$	$a > 100$	$H \neq \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	oui	non
$T_{quotient}$	t_4, t_5	$T_{2,1}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	oui	non
	t_{6a}, t_{6b}, t_{6c}	$T_{2,2}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	oui	non
	t_{6d}	$T_{2,3}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$10 \leq b \leq 12$	$r \neq 0$	oui	non
	t_7	$T_{2,4}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	oui
	t_{8a}	$T_{2,5}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	non
	t_{8b}	$T_{2,6}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	non
$T_{quotient} + T_{reste}$	t_9	$T_{3,1}$	$a \leq 100$	$H = \emptyset$	$10 \leq b \leq 12$	$r \neq 0$	non	non
	t_{10}	$T_{3,2}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r = 0$	non	non
	t_{11a}	$T_{3,3}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$10 \leq b \leq 12$	$r \neq 0$	non	non
	t_{11b}, t_{11c}	$T_{3,4}$	$a > 100$	$H = \emptyset$	$b < 10$	$r \neq 0$	non	non

- $T_{choix,b}$ « Choisir le type de saut *avancer de b* »
- $T_{répéter}$ « Utiliser le bloc répéter dans le programme Scratch »
- $T_{choix,q}$ « Choisir le nombre de sauts q »
- $T_{dupliquer}$ « Dupliquer un bloc d'instruction »
- $T_{associer}$ « Associer deux blocs d'instruction entre eux »
- $T_{tap,rép}$ « Taper le nombre q dans le bloc *répéter* »
- $T_{choix,r}$ « Choisir le type de saut *avancer de r* »
- T_{lancer} « Lancer le programme créé sur Scratch »
- $T_{valider}$ « Valider le programme créé sur Scratch »

Types de tâches didactiques

- $T_{gestion}$ « Gérer les contraintes liées au temps, à l'espace, au dispositif, etc. »
- $T_{consigne}$ « Passer la consigne d'une ou plusieurs tâches de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} vis-à-vis de toute la classe »
- $T_{circuler}$ « Vérifier que les élèves sont engagés dans une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} »
- $T_{binômes}$ « Apporter des éléments d'étayage à un binôme d'élèves »
- $T_{représenter}$ « Représenter une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} à l'aide d'un ou plusieurs registres d'ostensifs, vis-à-vis de la totalité de la classe. »
- $T_{traiter}$ « Traiter une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} en passant d'un ostensif à un autre à l'intérieur d'un même registre, vis-à-vis de la totalité de la classe. »
- $T_{convertir}$ « Convertir une solution d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ ou de T_{DE} en passant d'un registre à un autre, vis-à-vis de toute la classe. »
- T^{τ} « Faire émerger un ou plusieurs ingrédients de techniques d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$, sans les institutionnaliser, avec la totalité de la classe »
- T_{math}^{τ} « Institutionnaliser un ou plusieurs ingrédients de techniques d'une tâche de $T_{prog}[T_{DE}]$ avec la totalité de la classe »
- T_{comm}^{θ} « Institutionnaliser des éléments technologiques sur la propriété commutative de la multiplication avec la totalité de la classe »
- $T_{m/d}^{\theta}$ « Institutionnaliser des éléments technologiques sur les notions de *multiple* et *diviseur* d'un nombre naturel avec la totalité de la classe »
- $T_{m/d}^{\nu}$ « Institutionnaliser des éléments du vocabulaire sur les notions de *multiple* et *diviseur* d'un nombre naturel avec la totalité de la classe »
- T_{struct}^{θ} « Institutionnaliser l'équivalence entre plusieurs expressions arithmétiques à partir de l'équivalence entre deux ou plusieurs solutions ayant structures différentes d'une même tâche avec la totalité de la classe »
- T_{opt}^{θ} « Institutionnaliser l'optimalité de la structure multiplicative d'un programme par rapport aux structures additives ou mixtes avec la totalité de la classe »
- T_{div}^{θ} « Institutionnaliser des éléments technologiques sur les notions de *quotient* et de *reste* de la division euclidienne entre deux nombres naturels avec la totalité de la classe »
- T_{cont}^{ν} « Institutionnaliser des éléments du vocabulaire sur les notions de *quotient* et de *reste* de la division euclidienne entre deux nombres naturels avec la totalité de la classe »
- $T_{em,cont}^{\theta}$ « Institutionnaliser l'égalité algébrique relative à la division euclidienne de deux nombres naturels en utilisant le vocabulaire lié au contexte du jeu de la cible avec la totalité de la classe »
- T_{dec}^{ν} « Institutionnaliser des éléments du vocabulaire sur les notions de *dividende* et *diviseur* avec la totalité de la classe »
- $T_{em,dec}^{\theta}$ « Institutionnaliser l'égalité algébrique relative à la division euclidienne de deux nombres naturels en utilisant le vocabulaire mathématique avec la totalité de la classe »