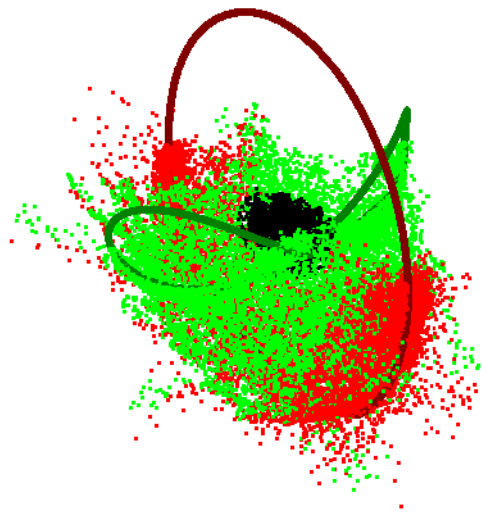


Résumé substantiel du manuscrit de thèse intitulé

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA DYNAMIQUE DES INSTRUMENTS
À ANCHE : ÉTUDE DES COMPORTEMENTS NON LINÉAIRES DE
PRODUCTION DU SON DANS LES INSTRUMENTS DE TYPE
SAXOPHONE

Numerical simulation of woodwind dynamics : investigating nonlinear sound production behavior in saxophone-like instruments

Tom COLINOT



Jury

Jose ANTUNES
Joël GILBERT
Brigitte D'ANDREA NOVEL
Sébastien OLLIVIER
Philippe GUILLEMAIN
Jean-Baptiste DOC
Christophe VERGEZ
Michaël JOUSSERAND

Professeur
Directeur de Recherche CNRS
Directeur de Recherche CNRS
Maître de Conférence
Directeur de Recherche CNRS
Maître de Conférence
Directeur de Recherche CNRS
Ingénieur

ADL, Sacavém, Portugal
LAUM, Le Mans, France
Ircam, Paris, France
LMFA, Ecully, France
LMA, Marseille, France
LMSSC, Paris, France
LMA, Marseille, France
Buffet-Crampon, Mantes-la-
Ville, France

Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Examinateur
Directeur de thèse
Co-encadrant
Encadrant
Invité

Table des matières

1	Modèle d'instrument à anche	1
1.1	Structure du modèle physique	1
1.2	Modèle d'anche	2
1.2.1	Le canal d'anche	3
1.2.2	Le résonateur	3
1.3	Simulation numérique	3
1.4	Outil expérimental : le bec de saxophone instrumenté	4
2	Optimisation de la géométrie d'un résonateur bicylindre à partir des caractéristiques acoustiques d'un saxophone	6
2.1	Motivation et résumé	6
3	Régimes d'oscillation et diagrammes de bifurcation	9
3.1	Avant-propos	9
3.2	Mouvement à deux états standard et inversé	9
3.3	Continuation de bifurcation <i>fold</i>	10
3.3.1	Régime à deux états double	11
3.4	Ordre d'apparition des différents régimes	12
3.5	Effet de la simplification de l'anche fantôme	14
4	Cartographie de régimes	16
4.1	Avant-propos	16
4.2	Cartographies par synthèse temporelle	16
4.2.1	Effet de la clé de registre	16
4.3	Continuation de bifurcation de Hopf	18
5	Multistabilité	19
5.1	Avant-propos	19
5.2	Scénarios de contrôle : hystéresis et vitesse d'attaque	20
5.2.1	Hystéresis par rampe de pression	20
5.2.2	Sélection de régimes par la vitesse d'attaque	21
5.3	Allure des bassins d'attraction	21
5.4	Effet de l'inharmonicité sur la production de régimes	22

Introduction

Cette thèse lie la production de son par les instruments à anches aux actions du musicien, à travers des simulations numériques appliquées à un modèle physique et soutenues par des expériences. On se concentre sur la dynamique non linéaire du modèle, comme l'un des chaînons manquants entre les caractéristiques acoustiques de l'instrument et sa jouabilité. Les résultats doivent faciliter de futurs projets de développement d'instrument qui utiliseraient un modèle physique en tant que prototype virtuel.

Deux méthodes de simulation fondamentalement différentes sont utilisées conjointement pour améliorer notre compréhension des mécanismes régissant la production du son dans les instruments à anches. D'un côté, la synthèse temporelle permet des études à grande échelle des phénomènes transitoires et des régimes établis, avec l'avantage d'être interprétable directement en termes d'actions du musicien. D'un autre côté, la Méthode d'Équilibrage Harmonique associée avec la continuation (Méthode Asymptotique Numérique) permet d'explorer l'espace des paramètres de contrôle en suivant les branches de solutions périodiques stables et instables. Cette méthode met en évidence des bifurcations qui marquent l'apparition ou la disparition de régimes oscillants : Neimark-Sacker, doublement de période, Hopf et fold. Ces deux dernières sont suivies par continuation, en codimension 2.

Les résultats expérimentaux constituent à la fois un préalable et une validation finale des simulations numériques. Des mesures d'impédance d'entrée permettent de fonder les simulations sur les paramètres acoustiques de vrais saxophones. Ceci justifie les comparaisons ultérieures entre la dynamique simulée et les phénomènes observés en situation de jeu effectuées à l'aide d'un bec instrumenté.

Des formes archétypales de régimes d'oscillations sont étudiés et liés aux paramètres de contrôle du musicien que sont la pression d'alimentation et l'appui de la lèvre sur l'anche. Les régimes à deux états dits standard, inversé, et double, sont exhibés et analysés expérimentalement et numériquement. L'influence des paramètres géométriques et modaux du résonateur sur la dynamique de l'instrument est détaillée. Le système dynamique est caractérisé de manière globale, en cartographiant les seuils d'oscillations et les régions de production de régimes. Des cartes représentant les types de régimes oscillants permettent de comparer en détail deux instruments ou deux doigtés d'un même instrument. Ainsi, on compare deux saxophones altos, on illustre l'effet de la clé de registre, et on évalue un prototype virtuel de résonateur bicylindre. La géométrie de ce prototype virtuel est optimisée à partir de l'impédance d'entrée d'un saxophone, à l'aide d'une fonction de coût dérivable adaptée aux méthodes d'optimisations basée sur le gradient.

Une étude plus fondamentale de la dynamique des instruments à anches traite du phénomène de multistabilité (plusieurs régimes stables pour une seule valeur des paramètres de contrôle). Sur les saxophones, ce phénomène s'avère très important. Les conditions initiales menant à chaque régime sont regroupées en bassins d'attraction. La multistabilité est aussi caractérisée d'une manière plus proche du jeu musical, via un transitoire variable de pression d'alimentation qui affecte le régime final obtenu. Ces considérations sont appliquées à l'amélioration des cartographies de régimes afin d'éviter les biais qui peuvent apparaître si la multistabilité est négligée. Ces cartographies améliorées démontrent que le rapport entre les deux premières fréquences de résonance du saxophone qui mène à la production la plus importante de premier registre ne vaut pas exactement 2 mais une valeur légèrement plus élevée.

Les résultats de cette thèse et les outils d'analyse afférents permettent d'avancer dans la compréhension d'une dynamique complexe, celle du saxophone, et ouvrent la porte à des études quantitatives et à des applications directes de prototype virtuel.

1 Modèle d'instrument à anche

1.1 Structure du modèle physique

Les modèles physiques d'instruments à anche sont traditionnellement constitués de trois éléments principaux, qui forment une boucle de rétroaction : l'anche, le canal d'anche et le résonateur (voir la figure 1). Le musicien appuie sur l'anche à l'aide de sa lèvre inférieure et souffle dans le canal d'anche. Quand une oscillation est déclenchée, l'anche vibre : elle se déplace de haut en bas et modifie de ce fait la hauteur du canal d'anche. Lorsque la hauteur du canal d'anche varie, le débit qui y circule est modulé. Ce débit modulé excite l'entrée du résonateur, c'est à dire de la colonne d'air contenue dans le tube de l'instrument. Cette colonne d'air, de par sa géométrie, possède certaines propriétés de résonance : elle répond plus fortement à certaines fréquences d'excitation. La réponse du résonateur se traduit par une pression à son entrée, qui agit sur le mouvement de l'anche. Dans le cas où le débit modulé par le canal d'anche excite le résonateur à une résonance, c'est à dire une fréquence à laquelle il répond fortement, cela renforce le mouvement de l'anche à cette fréquence particulière, ce qui se traduit par une amplification du débit à travers le canal d'anche. Ce processus mène à des oscillations auto-entretenuës à la fréquence en question : une note est produite.

Les variables physiques principales de ce modèle sont le déplacement de l'anche x autour de son équilibre, le débit acoustique u entrant dans le bec, et la pression acoustique p dans le bec. Tout au long du présent

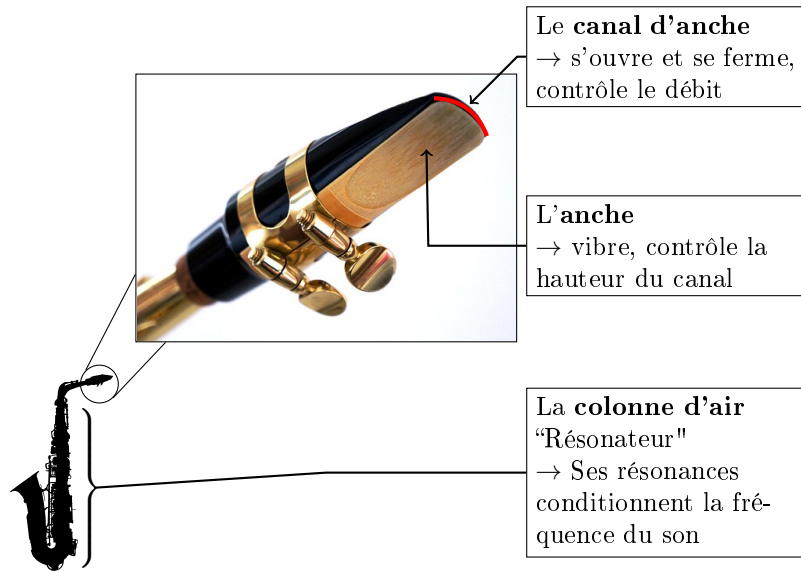


FIGURE 1 – Schéma et représentation graphique des différents éléments d'un modèle de saxophone.

document, on utilise des variables adimensionnées définies par

$$x = \frac{\hat{x}}{H} \quad ; \quad p = \frac{\hat{p}}{p_M} \quad ; \quad u = Z_c \frac{\hat{u}}{p_M} \quad (1)$$

où la notation chapeau indique la variables dimensionnée, H est la distance entre l'anche au repos et la table du bec, p_M est la pression statique nécessaire à amener l'anche jusqu'à la table du bec et Z_c est l'impédance caractéristique à l'entrée du résonateur. Pour un cylindre, $Z_c = \frac{\rho c}{S}$, où S est la section droite à l'entrée du résonateur, ρ est la masse volumique de l'air et c la vitesse du son.

Les paramètres de contrôle adimensionnés γ et ζ sont utilisés dans ce travail pour représenter les actions du musicien, par l'intermédiaire de la pression de souffle (γ) et la force appliquée grâce à sa lèvre pour contrôler l'ouverture du canal d'anche au repos (ζ). Les paramètres sont définis comme

$$\zeta = w H Z_c \sqrt{\frac{2}{\rho p_M}}, \quad \gamma = \frac{\hat{\gamma}}{p_M}, \quad (2)$$

où w est la largeur effective du canal d'anche et $\hat{\gamma}$ est la valeur physique de la pression d'alimentation dans la bouche du musicien. Une valeur nulle du paramètre de souffle $\gamma = 0$ correspond à un musicien qui ne souffle pas, et $\zeta = 0$ correspond à un canal d'anche entièrement fermé au repos. Ces deux situations empêchent toute oscillation.

Bien entendu, représenter l'action du musicien en utilisant seulement deux paramètres est une simplification grossière. Dans certains guides de technique instrumentale, comme [Teal, 1963], le terme *embouchure* ou *masque* englobe les actions combinées de tous les muscles agissant sur la mâchoire, les lèvres, les joues et la langue.

1.2 Modèle d'anche

Le mouvement de l'anche est souvent régi par l'équation d'un oscillateur à un degré de liberté. Ce choix traduit seulement le premier mode de vibration de l'anche. L'équation de mouvement est

$$\frac{1}{\omega_r^2} \ddot{x} + \frac{q_r}{\omega_r} \dot{x} + x = p - \gamma + F_c(x), \quad (3)$$

avec ω_r la pulsation modale et q_r l'amortissement modal de l'anche, et $F_c(x)$ une force qui représente le contact entre l'anche et la table (voir la figure 2). Cette force repose sur une raideur polynomiale qui dépend de la pénétration de l'anche dans la table [Chatziioannou and van Walstijn, 2012], à laquelle un terme d'amortissement non linéaire peut être ajouté [Bilbao et al., 2015], tel que

$$F_c(x) = K_c([x + 1]^-)^\alpha - \beta K_c([x + 1]^-)^\alpha \dot{x}, \quad (4)$$

où K_c est la raideur non linéaire de la table du bec, α est un exposant lié à la raideur et β est un coefficient sans dimension qui contrôle le terme d'amortissement non linéaire, et la notation $[\cdot]^- = (\cdot - |\cdot|)/2$ désigne la partie négative d'une variable.

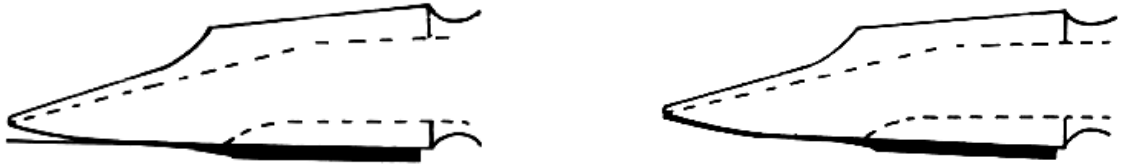


FIGURE 2 – Schéma latéral d'un canal d'anche ouvert (gauche) et d'un canal d'anche fermé, où l'anche est plaquée contre les rails du bec (droite). Adapté de [Teal, 1963].

Les paramètres modaux sont fixés, sauf mention contraire, à $\omega_r = 4224$ rad/s (672.3 Hz), and $q_r = 1$. Ces valeurs sont déterminées empiriquement dans [Muñoz Arancón et al., 2016], en ajustant des signaux synthétisés à l'aide d'un modèle linéaire à des données expérimentales. De même, sauf mention contraire, les paramètres de la force de contact valent $K_c = 100$ et $\alpha = 2$.

1.2.1 Le canal d'anche

La caractéristique non linéaire décrite dans [Wilson and Beavers, 1974] donne le débit à travers le canal formé entre l'anche et la table du bec, en fonction de la position de l'anche et de la pression aux deux extrémités de ce canal : dans la bouche du musicien et à l'intérieur du bec. La caractéristique est déduite de la loi de Bernoulli et le débit sans dimension vaut

$$u_b = F(p, x) = \zeta[x + 1]^+ \text{sign}(\gamma - p) \sqrt{|\gamma - p|}. \quad (5)$$

Cet élément est fortement non linéaire, et il permet les auto-oscillations du modèle.

1.2.2 Le résonateur

Le résonateur de l'instrument est la colonne d'air contenue dans sa perce principale. Les résonances de la colonne d'air conditionnent la hauteur des sons produits, et sa réponse globale à une excitation acoustique sculpte le spectre du son. Cette réponse est caractérisée par la quantité appelée *impédance d'entrée*, définie par

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{U(\omega)}, \quad (6)$$

où P et U sont les représentations fréquentielles de la pression et du débit adimensionnés – l'impédance définie ici est donc sans dimension. Les simulations effectuées pour produire les résultats de ce document sont entièrement basées sur des impédances mesurées sur des résonateurs de saxophone à l'aide du capteur d'impédance du Centre de Transfert de Technologie du Mans (CTTM) [Dalmont and Le Roux, 2008].

Pour simplifier la représentation de l'impédance d'entrée, elle est décomposée en une somme de modes

$$Z(\omega) = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{C_k}{j\omega - s_k} + \frac{C_k^*}{j\omega - s_k^*}, \quad (7)$$

où $*$ dénote le complexe conjugué et N_m est le nombre de modes. Une procédure numérique d'ajustement modal [Coyle et al., 2015] est utilisée pour déterminer les résidus modaux C_k et les pôles s_k .

1.3 Simulation numérique

Au long de ce travail, deux méthodes de simulation sont utilisées de manière complémentaire pour étudier le comportement du modèle de saxophone.

La première méthode est la synthèse dans le domaine temporel, qui consiste en une résolution pas à pas des équations du modèle. La discrétisation des équations du modèle n'est pas détaillée dans le présent résumé. Le lecteur est renvoyé à la description complète proposée dans le manuscrit, ou à la présentation plus rapide de [Coyle et al., 2015]. Grâce à cette méthode, l'opérateur du code agit de manière très semblable au musicien, en imposant certaines valeurs de paramètres de contrôle puis en observant les signaux produits par le modèle.

La seconde méthode est la méthode d'équilibrage harmonique HBM¹, associée à la continuation par la méthode asymptotique numérique ANM², qui repose sur l'hypothèse que la solution est périodique. Dans le cadre de l'HBM, les équations sont simplifiées en recherchant les amplitudes des harmoniques de la solution,

1. HBM pour *Harmonic Balance Method*.

2. ANM pour *Asymptotic Numerical Method*.

plutôt que la solution complète. Une fois qu’une solution périodique est connue, la continuation par ANM permet de connaître son évolution lorsqu’un paramètre de contrôle (le *paramètre de continuation*) est modifié. De plus cette méthode permet de connaître la stabilité de la solution. Pour une explication complète, le lecteur est renvoyé à [Cochelin and Vergez, 2009, Guillot et al., 2020]. L’implémentation logicielle est effectuée à l’aide de MANLAB <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>.

Le résultat de l’HBM associée à l’ANM est présenté sous la forme d’un *diagramme de bifurcation*, c’est à dire un graphique présentant l’évolution d’une caractéristique de la solution, typiquement son amplitude, en fonction du paramètre de continuation. Ce diagramme permet d’indiquer les *bifurcations*, c’est à dire les points où le comportement du système change radicalement, par changement de stabilité, apparition ou disparition d’une ou plusieurs solutions [Seydel, 2010]. Par exemple, dans les instruments à anche, une bifurcation est associée avec la valeur minimale du paramètre de pression d’alimentation γ nécessaire à la production d’un son. Cette valeur particulière est considéré comme un premier indicateur de la jouabilité de l’instrument : si elle est trop élevée, le musicien doit souffler extrêmement fort pour obtenir un son. Suivant cet ordre d’idée, les bifurcations sont étudiées ici comme une manière élégante et pratique de décrire le comportement d’un modèle dans sa globalité.

Afin d’introduire les deux principaux types de bifurcation qui font l’objet de discussion dans la suite de ce travail, on présente un exemple de diagramme de bifurcation en figure 3. Ce diagramme de bifurcation est obtenu par continuation de solution périodique (HBM et ANM) sur le modèle de saxophone présenté précédemment, en utilisant l’impédance d’entrée mesurée sur le doigté de do médian (C) écrit d’un saxophone alto – qui produit la note Eb4 en ut, à 311.13 Hz dans le tempérament égal.

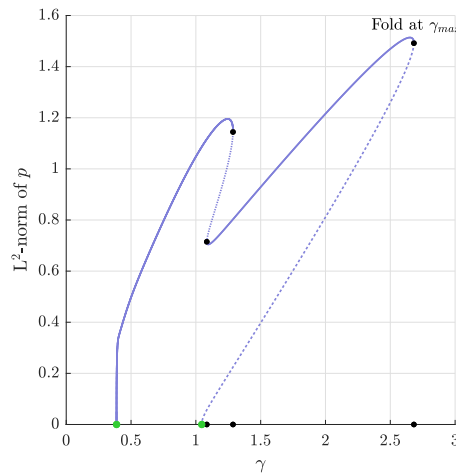


FIGURE 3 – Norme L^2 de la solution périodique du modèle de saxophone en fonction du paramètre γ en bleu. Les traits pleins indiquent une solution stable et les pointillés une solution instable. Les bifurcations de Hopf sont indiquées par des points verts et les *fold* par des points noirs.

La figure 3 indique les bifurcations de Hopf par des points verts. Pour un instrument de musique, les bifurcations de Hopf correspondent souvent aux seuils d’apparition (ou de disparition) de notes : elles correspondent à l’émergence d’une oscillation périodique à partir d’un état d’équilibre. Pour des valeurs du paramètre de continuation au-delà de la bifurcation de Hopf, l’équilibre est instable. Une bifurcation de Hopf peut être directe (comme celle de gauche $\gamma \simeq 0.4$) auquel cas la solution oscillante émergente est stable, ou inverse (comme la bifurcation de droite $\gamma \simeq 1$) auquel cas la solution émergente est instable. Cette distinction est importante dans le cas des modèles de saxophones, car elle influence l’accès aux nuances les plus faibles de l’instrument. En effet, près d’une bifurcation de Hopf directe, des régimes d’amplitude arbitrairement faible (correspondant à la nuance *pianissimo*) sont stables, alors que près d’une bifurcation de Hopf inverse ils sont instables.

L’autre type de bifurcation, les bifurcations *fold* (pli) sont indiquées par des points noirs sur la figure 3. La bifurcation *fold* est définie par une solution stable et une solution instable qui coalescent et disparaissent. Sur le diagramme de bifurcation, elles sont représentées par un point limite où la branche change de stabilité. Sur les modèles de saxophones, deux *folds* successives sont associées à des régions de paramètres de contrôle où plusieurs régimes sont stables. Ce phénomène apparait sur la figure 3 entre les deux premières *folds* à $\gamma = 1.1$ et $\gamma = 1.3$.

1.4 Outil expérimental : le bec de saxophone instrumenté

Afin d’observer expérimentalement, en situation de jeu, les signaux internes du saxophone et de les comparer avec les prédictions du modèle, on utilise un bec instrumenté inspiré de [Guillemain et al., 2010, Muñoz Arancón et al., 2016]. Celui-ci consiste en un bec de saxophone Buffet-Crampon, modifié par P. Sanchez, qui incorpore plusieurs

capteurs. Deux sondes de pression, qui sont des capillaires de 0.55 mm de diamètre associés à des capteurs différentiels Honeywell TSCDRRN005PDUCV, servent à mesurer la pression dans la bouche du musicien et à l'intérieur du bec et un capteur de déplacement optique Everlight ITR8307 mesure l'ouverture du canal d'anche. Un schéma légendé est proposé en figure 4. Les signaux sont conditionnés grâce à une carte électronique conçue et réalisée au LMA, et ils sont numérisés grâce à une carte National Instruments USB-9234 avec une fréquence d'échantillonnage de 51.2 kHz. Des anches de saxophone alto Rico force 2 sont utilisées.

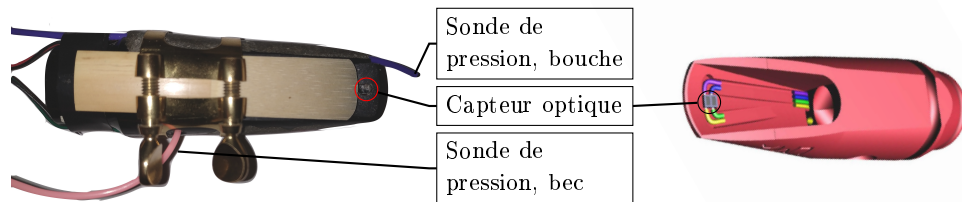


FIGURE 4 – Bec instrumenté. Sur la gauche, l'anche est décalée de manière à ce que le capteur optique soit visible. La représentation de droite est un rendu 3D sans sondes de pression, qui montre le capteur optique et le chemin de ses câbles à travers le bec (crédit : P. Sanchez)

2 Optimisation de la géométrie d'un résonateur bicylindre à partir des caractéristiques acoustiques d'un saxophone

Cette section résume le travail publié dans l'article :

Colinot, Tom et al. (2019). "Numerical optimization of a bicylindrical resonator impedance : differences and common features between a saxophone resonator and a bicylindrical resonator". In : *Acta Acustica united with Acustica* 105(6), pp. 1217-1227.

2.1 Motivation et résumé

Cette section traite le processus d'optimisation de la géométrie d'un résonateur en vue d'obtenir certaines caractéristiques acoustiques. Plusieurs questions se posent lors de la conception d'un instrument grâce à l'optimisation numérique, notamment l'existence et l'unicité de l'optimum, et la certitude d'y converger. Loin d'apporter une réponse complète à ces questions, ce chapitre constitue plutôt un témoignage de l'attention qui leur est portée. L'exemple étudié est simple, avec peu de paramètres géométriques et un objectif relativement naïf : la correspondance de l'impédance de l'instrument optimisée à une impédance de saxophone. Ces restrictions réduisent l'impact potentiel du travail du point de vue de la facture instrumentale, mais elles sont cruciales pour étudier efficacement le processus d'optimisation lui-même. En effet, elles permettent des représentations visuelles pertinentes, et l'introduction d'une fonction de coût suffisamment régulière pour assurer la convergence de l'algorithme.

Ce travail est une exploration de l'analogie entre un résonateur de saxophone et un résonateur bicylindre, parfois appelé saxophone traversier ou saxophone cylindrique (voir figure 5).

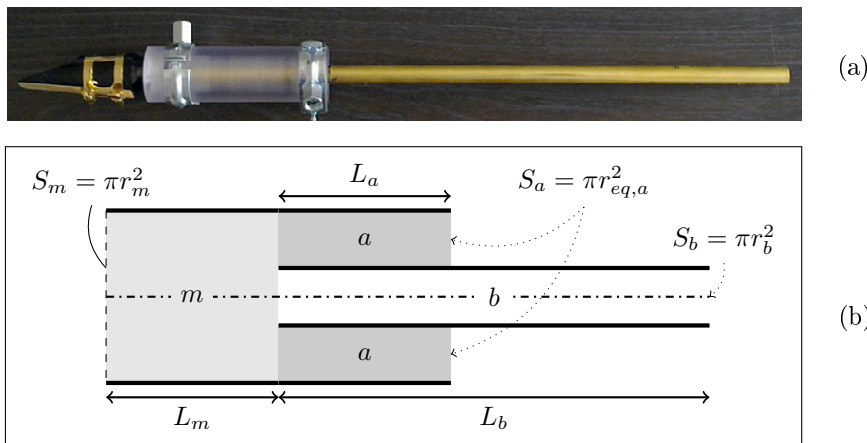


FIGURE 5 – Vue de profil du saxophone coaxial (a) et représentation schématique (b). Légendes : m (*mouthpiece*) chambre du bec, a cylindre court, b cylindre long.

Un résonateur bicylindre, comme défini dans [Doc et al., 2016], est constitué d'un bec à chambre cylindrique suivi de l'association en parallèle de deux cylindres. Les dimensions d'un tel résonateur sont optimisées numériquement pour que son impédance d'entrée corresponde à celle d'un saxophone. La fonction de coût est la norme p de la différence des modules des impédances, soit

$$J_p^{full}(X) = \sum_{n=1}^{16} \sum_{\omega=\omega_{min}}^{\omega_{max}} \left| |Z_{des,n}(\omega, X)| - |Z_{tar,n}(\omega)| \right|^p, \quad (8)$$

où p est un entier, $Z_{tar,n}$ et $Z_{des,n}$ sont respectivement l'impédance du saxophone cible (*target*) et du bicylindre conçu (*designed*) pour le $n^{\text{ème}}$ doigté, et ω_{min} et ω_{max} sont les pulsations minimales et maximales dans le calcul de la fonction de coût. La notation X représente ici le vecteur des paramètres à optimiser. La procédure d'optimisation permet de trouver une géométrie dite *optimale* par minimisation de cette fonction de coût. L'impédance correspondant à cette géométrie optimale est représentée en figure 6, avec l'impédance cible.

La région de convexité de la fonction de coût autour de l'optimum, c'est à dire la région à partir de laquelle il est facile de trouver l'optimum, est estimée par projection de l'espace des paramètres géométriques et par vérification de la convergence de l'algorithme avec des conditions initiales générées aléatoirement. En guise d'illustration, la projection de la fonction de coût sur les paramètres de rayons des deux cylindres a et b est affichée en figure 7. Ici, la fonction de coût apparaît majoritairement convexe, malgré une inversion de pente pour de très petites valeurs du rayon du cylindre b .

Toutes les conditions initiales aléatoires testées en figure 7 convergent vers le même optimum, ce qui signifie qu'elles sont contenues dans la zone de convexité. La taille de la zone de convexité paraît satisfaisante, dans

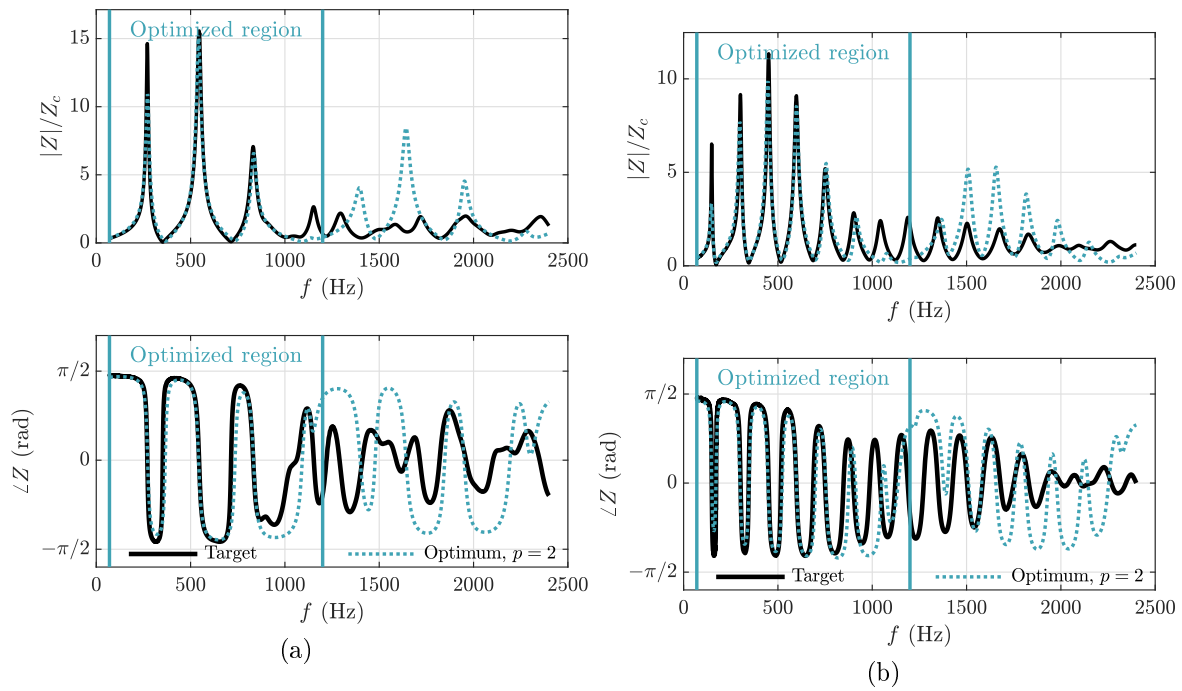


FIGURE 6 – Comparaison entre l’impédance cible (traits pleins) et l’impédance du résonateur bicylindre optimisé (pointillés) pour les doigtés écrits de (a) La (A) et (b) Si (B) grave.

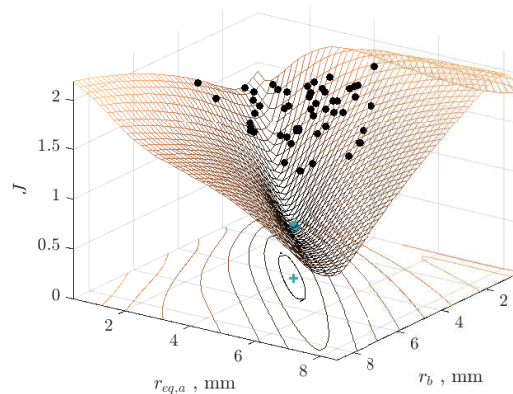


FIGURE 7 – Variation de la fonction de coût de l’équation (8) avec $p = 2$ (maillage) en fonction des rayons des rayons des deux cylindres r_b et $r_{eq,a}$ autour de l’optimum (point bleu). Points noirs : conditions initiales dans le test de robustesse.

la mesure où elle contient des conditions initiales naïves, facilement déductibles de considérations acoustiques élémentaires.

Les différences entre le saxophone cible et l’optimum bicylindre sont examinées et mises en regard avec les différences entre la cible et un autre saxophone alto de marque différente (Yamaha YAS-280). Globalement, les fréquences de résonances du résonateur bicylindre sont en bon accord avec celles de la cible (voir table 1). En revanche, des descripteurs séparent le résonateur bicylindre optimal des résonateurs de saxophone, tels que l’harmonicité

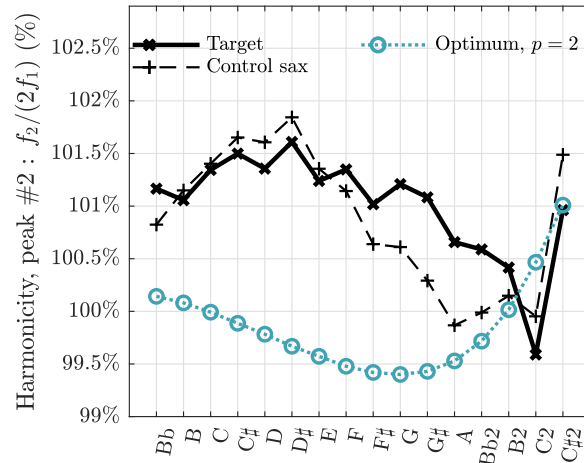
$$\text{Harmonicité} = 100 \times \frac{f_2}{2f_1}, \quad (9)$$

exprimée en pourcentage, où f_1 et f_2 sont les deux premières fréquences de résonance. Figure 8 compare l’harmonicité des trois résonateurs. La tendance le long du registre sépare clairement le bicylindre des deux saxophones. On peut noter que le résonateur bicylindrique a une harmonicité plus proche de 100%, un point qui sera discuté plus avant en section 5.

Par conséquent, on en déduit que même si un instrument bicylindrique peut produire les mêmes notes qu’un

Instrument	Optimum à $p = 2$ et saxophone cible	Saxophone témoin et saxophone cible
Pic 1	+12.5	-5.61
Pic 2	-7.47	-7.96
Pic 3	+5.77	+6.18
Pic 4	+16.5	+12.1

TABLE 1 – Écart moyen entre les fréquences de résonances des résonateurs étudiés, en cents.

FIGURE 8 – Harmonicité entre la seconde et la première résonance pour la cible (croix, traits pleins), le saxophone témoin (plus, tirets) et l'optimum pour la fonction de coût de l'équation (8) avec $p = 2$ (cercle, pointillés).

saxophone, il devrait être considéré comme un instrument à part entière plutôt qu'une simple imitation du saxophone.

3 Régimes d'oscillation et diagrammes de bifurcation

Cette section regroupe des figures et des résultats extraits de :

- le résumé étendu accepté par la 2020 European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC), repoussée en 2021 : Tom Colinot, Philippe Guillemain, Christophe Vergez and Jean-Baptiste Doc. (2020) "Continuous transition between standard and inverted two-step motion in the saxophone". In : *Proceedings of the 10th European Nonlinear Dynamics Conference*.
- l'article publié sous la référence : Colinot, Tom, Philippe Guillemain, Christophe Vergez, Jean-Baptiste Doc, and Patrick Sanchez (2020). "Multiple two-step oscillation regimes produced by the alto saxophone". In : *The Journal of the Acoustical Society of America*, 147(4), pp. 2406-2413.
- l'article court publié sous la référence : Colinot, Tom, Louis Guillot, Christophe Vergez, Philippe Guillemain, Jean-Baptiste Doc and Bruno Cochelin (2019). "Influence of the "ghost reed" simplification on the bifurcation diagram fo a saxophone model". In : *Acta Acustica united with Acustica*, 105(6), pp. 1291-1294.

3.1 Avant-propos

Plusieurs questions se posent encore quant à la simple description des oscillations du saxophone, qu'elles soient observées expérimentalement ou produites grâce à un modèle. En guise de premier pas vers une évaluation de l'instrument de par sa dynamique, cette section entreprend de classer les régimes oscillants du saxophone par types, ainsi que de documenter les paramètres de contrôle qui y mènent. Quelques catégories de régimes peuvent être distinguées. Premièrement, on peut établir des groupes selon la fréquence fondamentale, et classer ainsi les régimes en registres (premier, deuxième et troisième registre). Une classification plus fine peut émerger des caractères qualitatifs du mécanisme d'oscillation, en lien avec le timbre de l'instrument. Dans le cas du saxophone, ces caractères qualitatifs concernent l'état ouvert ou fermé du canal d'anche. Savoir quels types de régimes oscillants sont à même d'être produits pour un doigté donné est ici envisagé comme un descripteur global et qualitatif du comportement dynamique du saxophone.

3.2 Mouvement à deux états standard et inversé

Les principaux régimes d'oscillation du saxophone sont à *anche battante*, c'est à dire que le canal d'anche se ferme complètement pendant une portion de chaque période. Ils peuvent être vus comme des mouvements à deux états (*two-step motions*) [Ollivier et al., 2004] et séparés en mouvement standard ou inversé, en fonction de la durée relative des épisodes où le canal est ouvert ou fermé. Il est à noter que différents régimes peuvent être obtenus pour le même doigté, en variant simplement les paramètres de contrôle. La figure 9 montre des exemples de ces mouvements à deux états, mesurés au bec instrumenté sur un doigté de Si (B) grave écrit. Le régime standard est caractérisé par un épisode ouvert long et un épisode court de fermeture du canal. Comme on peut le voir en figure 9 (a), le canal d'anche est ouvert pendant approximativement 6 ms. Sa fermeture correspond au creux principal dans la forme d'onde, et elle dure à peu près 1 ms par période. Pour le mouvement inversé de la figure 9 (b), le rapport des durées est inversé : le canal d'anche est fermé pendant environ 6 ms et s'ouvre brièvement pour 1 ms. On profite de cette occasion pour faire remarquer que le régime standard est obtenu pour une pression d'alimentation plus faible que le régime inversé.

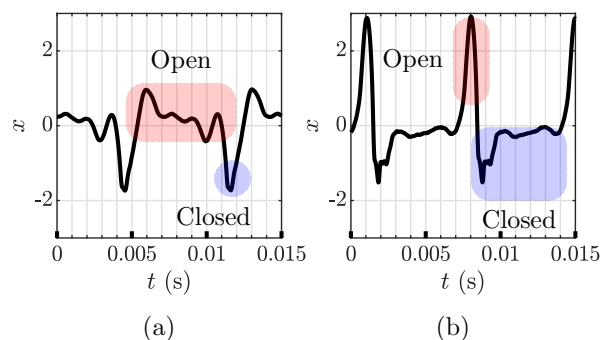


FIGURE 9 – Position de l'anche mesurée pour deux mouvements à deux états simples : standard (a) et inversé (b). Le canal d'anche est fermé lorsque la variable x est basse. Ces formes d'onde correspondent à des pressions d'alimentation différentes (voir les indicateurs circulaires sur la figure 15).

La figure 10 présente la norme L^2 de la pression acoustique p dans le bec en fonction du paramètre de pression d'alimentation γ , pour deux valeurs différentes du paramètre d'action sur l'anche : $\zeta = 0.4$ et $\zeta = 0.7$. Ces résultats sont issus de simulations (ANM et HBM) appliquées au doigté de Do (C) médian. Pour la valeur

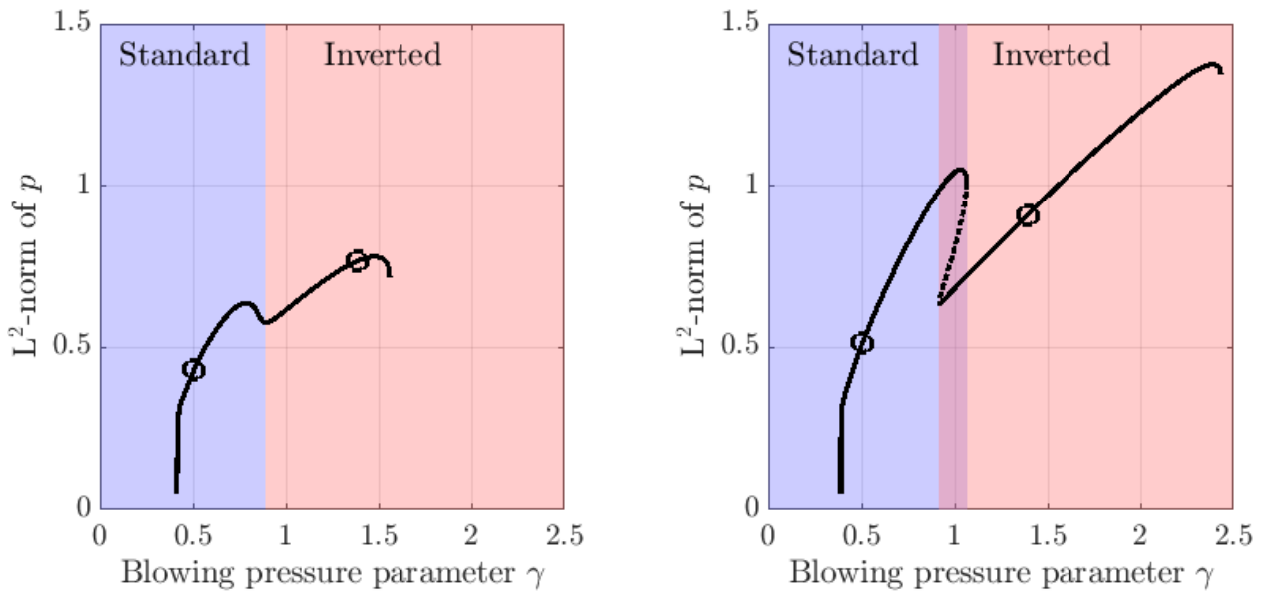


FIGURE 10 – Diagramme de bifurcation en norme L^2 de la pression acoustique p en fonction du paramètre de pression d'alimentation γ pour des valeurs du paramètre d'action sur l'anche $\zeta = 0.4$ (à gauche) et $\zeta = 0.7$ (à droite). Les traits pleins signalent des régimes stables, les pointillés des régimes instables. Les cercles correspondent à des exemples de signaux présents dans la version complète du manuscrit. La teinte violette sur la figure de droite indique une région où les deux régimes sont stables.

basse de ζ , on peut voir que les mouvements standards et inversés sont connectés continûment par une branche de régimes stables, indiqués par des traits pleins. Cependant, pour une valeur de ζ plus élevée, une portion instable de la branche de solution sépare le mouvement standard du mouvement inversé. Cette portion instable apparaît entre deux bifurcations *fold*. Une bifurcation *cusp* de solutions périodiques est attendue là où ces deux *folds* apparaissent, au seuil entre les comportements de transition continue et discontinue. Dans le cas de la transition discontinue (pour ζ élevé), les mouvements standards et inversés coexistent : pour certains couples de valeurs (γ, ζ) , ils sont stables tous les deux.

3.3 Continuation de bifurcation *fold*

Les deux types de comportements mis en évidence par la figure 10 peuvent être caractérisés par la présence ou l'absence des deux bifurcations *folds*. Trouver la valeur limite du paramètre d'action sur l'anche ζ au-delà de laquelle les régimes standards et inversés coexistent revient à trouver le point où les deux bifurcations *fold* disparaissent. Ce point est appelé une bifurcation *cusp* (caustique) [Kuznetsov, 1995]. Trouver ce point en calculant des diagrammes de bifurcations pour de multiples valeurs de ζ est potentiellement long et assez imprécis. On se propose ici d'utiliser une manière plus élégante de localiser la *cusp*, en décrivant directement le lieu des bifurcations *folds*. Pour ce faire, on utilise MANLAB (HBM et ANM) pour implémenter une procédure de continuation de *fold*.

Sans rentrer dans le détail de la procédure de continuation de bifurcation, on en présente ici le résultat. À partir d'une première *fold* trouvée par continuation standard (selon le paramètre de pression d'alimentation γ), on trace le lieu de cette *fold* dans le plan (γ, ζ) . Ce lieu est tracé sur la figure 11 en rouge. Afin de vérifier visuellement le lieu des *folds*, plusieurs diagrammes de bifurcations standards sont également affichés. Sur ce diagramme, la courbe formée par les bifurcations *folds* fait apparaître la bifurcation *cusp* à $\zeta = 0.48$ et $\gamma = 1.05$, au bout d'une courbe de type caustique habituelle pour ce type de bifurcation. On voit clairement sur ce diagramme comment l'augmentation de ζ provoque l'éloignement des deux bifurcations *fold* et l'élargissement de la zone de coexistence entre mouvement à deux états standard et inversé.

Folds extérieures : les limites d'existence des oscillations L'exemple suivant concerne le même doigté, mais la continuation de *folds* part de la bifurcation associée à la valeur de γ la plus élevée. Cette *fold* est trouvée grâce à une procédure de continuation et elle est indiquée sur la figure 3. C'est une bifurcation importante car au-delà, seul l'équilibre est stable, alors qu'avant la possibilité d'une oscillation existe encore. La figure 12 montre le résultat de cette continuation de *fold*, superposée avec un des diagrammes de bifurcations standards en γ et ζ .

La figure 12 peut être lue à partir des valeurs les plus élevées de γ . La continuation de *fold* (branche rouge

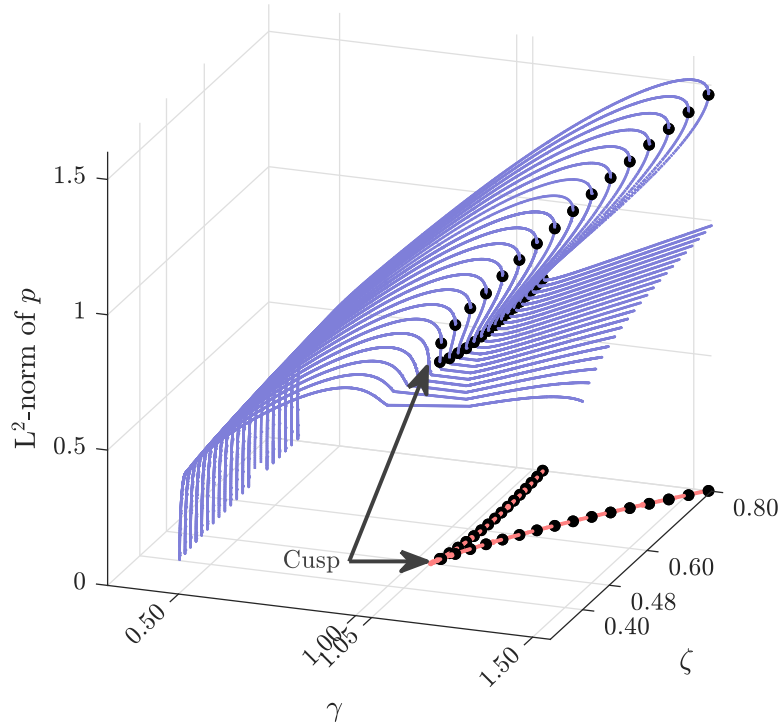


FIGURE 11 – Norme L^2 de la pression acoustique p en fonction des paramètres γ et ζ en bleu (continuation standard). Le lieu des bifurcations *folds* et sa projection sur le plan des paramètres (γ, ζ) est en points noirs, à comparer avec le lieu obtenu par continuation de *fold* en rouge.

dans le plan (γ, ζ) suit le lieu des *folds* jusqu'à $\gamma \simeq 1$ et $\zeta = 0.12$. À cet endroit, la *fold* coalesce avec une bifurcation de Hopf et disparaît, formant ainsi une bifurcation de Bautin affichée en vue rapprochée en figure 12 (d). Cette bifurcation de Bautin est le point auquel la bifurcation de Hopf inverse devient directe. À ce moment, la procédure de continuation de *fold* suit le lieu des bifurcations de Hopf. Ce comportement, dû à la similarité entre les bifurcations de Hopf et les *fold* de solutions périodiques, n'est pas indésirable. Le lieu des bifurcations de Hopf est alors suivi jusqu'à une seconde bifurcation de Bautin à $\gamma = 0.38$. Cette bifurcation de Bautin délimite, au premier seuil d'oscillation, une bifurcation de Hopf directe d'une bifurcation inverse – sujet qui a fait couler une certaine quantité d'encre [Grand et al., 1997, Dalmont et al., 2000, Ricaud et al., 2009]. Après la seconde bifurcation de Bautin, la procédure de continuation de *fold* suit la bifurcation *fold* adjacente à la Hopf inverse. Cette *fold* correspond à la valeur la plus basse du paramètre γ pour laquelle des oscillations existent. Cet exemple d'application montre l'intérêt de la continuation de bifurcation comme outil de description global du comportement. Comme le montre la vue de dessus en figure 12 (b), toutes les solutions oscillantes sont contenues dans la zone du plan (γ, ζ) délimitée par la continuation de *fold*. C'est en cela que le comportement de la procédure, qui passe à travers les bifurcations de Bautin pour continuer à suivre le lieu des bifurcation de Hopf en l'absence de *fold*, n'est pas indésirable : la région finalement obtenue a une signification claire. Il est fort possible qu'une telle zone ait des implications directes dans la description de la facilité de production des oscillations sur l'instrument.

3.3.1 Régime à deux états double

L'analogie souvent réalisée entre les saxophones et les instruments à cordes frottées [Ollivier et al., 2004] suggère l'apparition possible d'autres régimes à deux états pour le saxophone. Par exemple, sous certaines conditions d'excitations, les cordes frottées sont sujettes au phénomène d'adhérence-glisement double (*double stick-slip*) [Woodhouse, 2014], un régime d'oscillation où la corde glisse sous l'archet deux fois par période (plutôt qu'une seule dans le cas du mouvement de l'adhérence-glisement standard). Transposé aux instruments coniques à anche, ce phénomène correspond à deux fermetures du canal d'anche par période. Ces régimes sont observés expérimentalement sur les doigtés les plus graves du saxophone, et ils peuvent être standard ou inversé. La figure 13 montre des exemples de ces régimes mesurés au bec instrumenté. On leur attribue l'appellation "régime à deux états double". Il est important de réaliser que le régime à deux états double est distinct des régimes de second registre; en effet, c'est bien un régime de premier registre, qui produit la même note que le régime à deux états standard. Pour la version standard du mouvement à deux états double, les épisodes de

fermeture sont d'environ 1 ms, durée presque identique à celle observée pour le mouvement à deux états simple standard (figure 9 (a)). De même, pour le mouvement à deux états double inversé, les ouvertures courtes du canal d'anche durent 1 ms environ.

Dans un but d'illustration, le son entendu à l'extérieur de l'instrument, enregistré à l'aide d'un microphone de prise de son, est présenté sous forme de courts extraits dans les fichiers liés 14. On notera ici que le son audible qui correspond aux régimes doubles ((c) et (d)) est clairement différents de celui des régimes simples ((a) et (b)). En revanche, la différence dans le son entendu est moins claire entre la version standard d'un régime et sa version inversée.

3.4 Ordre d'apparition des différents régimes

Afin d'estimer la position relative des régions de production de chaque type de régime dans l'espace des paramètres de contrôle, on effectue une rampe de pression d'alimentation à l'aide du bec instrumenté en utilisant le doigté de Si (B) grave d'un saxophone alto. Le résultat est représenté en figure 15. La rampe est obtenue en une seule expiration, après plusieurs essais, avec un contrôle visuel de la pression d'alimentation en temps réel. Pour des raisons de clarté, le signal de pression est filtré par moyennage glissant pour ne garder que la composante qui varie lentement. Les régimes sont classifiés automatiquement en fonction du rapport de durées des épisodes ouverts et fermés, à l'aide de seuils arbitraires. La rampe de pression prise dans son intégralité met en évidence un ordre possible d'apparition des régimes pour une pression d'alimentation croissante : régimes

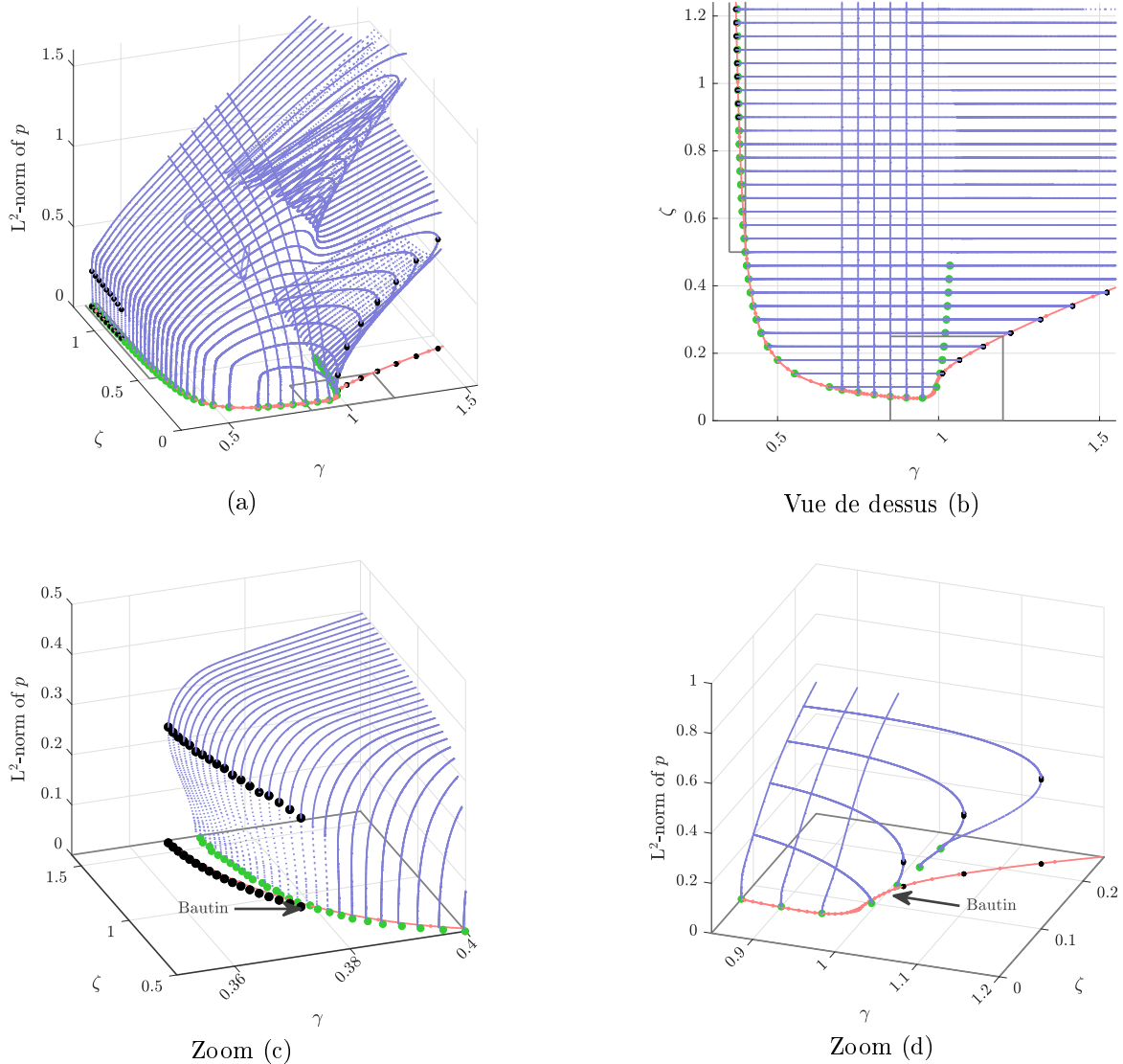


FIGURE 12 – Diagrammes de bifurcation. Continuation standard en γ ou ζ en bleu, avec les *folds* et leur projection en points noirs, et les bifurcations de Hopf en points verts. La continuation de *fold* est en rouge. Les rectangles gris dans (a) and (b) correspondent aux zooms (c) and (d).

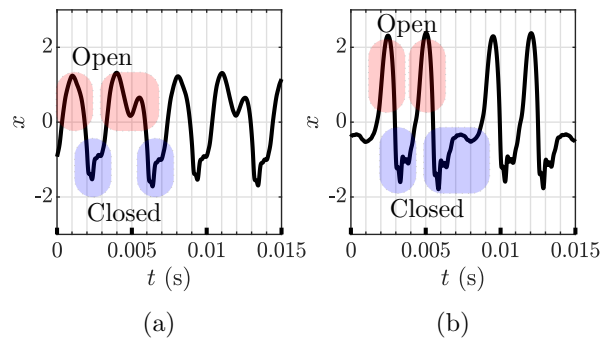


FIGURE 13 – Position de l’anche mesurée pour deux mouvements à deux états doubles : standard (a) et inversé (b). Le canal d’anche est fermé lorsque la variable x est basse. Ces formes d’onde correspondent à des pressions d’alimentation différentes (voir les indicateurs circulaires sur la figure 15).

- (a) `MM1.wav` : Simple
- (b) `MM2.wav` : Inversé
- (c) `MM3.wav` : Double
- (d) `MM4.wav` : Double inversé

FIGURE 14 – Fichiers multimédia : Sons enregistrés à l’extérieur du résonateur pour le régime à deux états, qui correspondent respectivement aux déplacements mesurés des figures 9 (a), 9 (b), 13 (a) et 13 (b).

à deux états standard, puis double, deuxième registre, régime double inversé et régime simple inversé. Il est à considérer que dans cette rampe, l’épisode entre 1 s et 2 s, où le rapport de fermeture est légèrement supérieur à 0.25, est en fait une solution quasi-périodique – le régime à deux états double périodique proprement dit commence à environ 2.3 s.

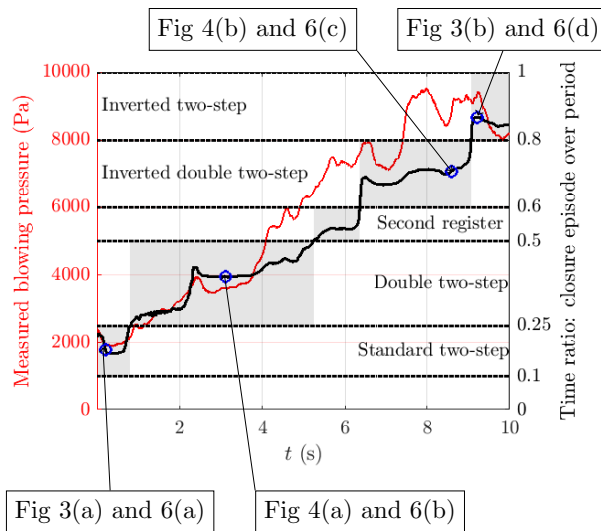


FIGURE 15 – Résultat d’une augmentation de pression d’alimentation (doigté de Si (B) grave, saxophone alto) enregistré avec le bec instrumenté. Axe y gauche, en rouge : pression d’alimentation mesurée lissée, en Pa. Axe y droit : rapport entre la durée de fermeture et d’ouverture du canal d’anche (traits pleins) et seuils de séparation entre régimes (pointillés). Les zones grisées mettent en évidence la durée de chaque type de régime. Les cercles correspondent aux signaux de déplacement d’anche en figures 9 et 13.

En complément de la figure 15, on propose un diagramme de bifurcation issu de la simulation numérique (HBM et ANM) en figure 17. Ici, la grandeur représentée en abscisse n’est pas la norme L^2 du signal, mais l’amplitude du premier cosinus de la première pression modale p_1 (soit la partie réelle du premier coefficient de Fourier, accessible directement dans le cadre de l’HBM). Ce paramètre est choisi en raison de la séparation visuelle claire des différentes branches de solution qu’il permet. Son signe est ici choisi arbitrairement, toujours pour séparer au mieux les branches. Chaque branche de solution est associée à une légende indiquant le type

MM5.mp4

FIGURE 16 – Multimedia file: Animation : evolution of the acoustic pressure waveform and spectrum following the stable branches of the bifurcation diagram in figure 17.

de régime auquel elle correspond. L'animation liée en figure 16 montre l'évolution des solutions le long des branches et le son associé. On peut y voir le mouvement à deux états standard se transformer progressivement en mouvement inversé, phénomène qui reste à observer expérimentalement sur un doigté grave.

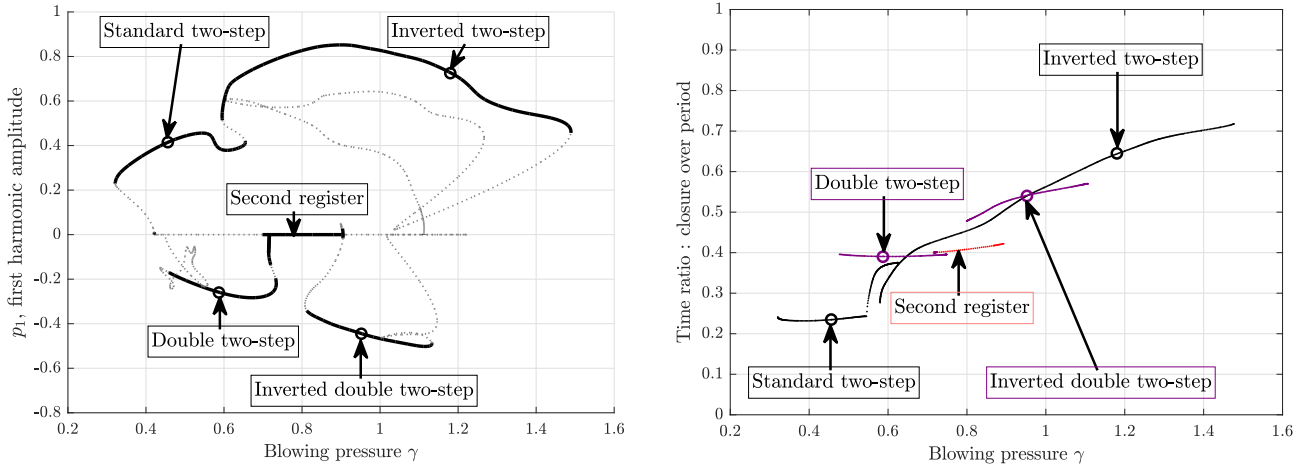


FIGURE 17 – Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre de pression d'alimentation γ pour le doigté de Si (B) grave (a) amplitude du premier cosinus de la première pression modale p_1 et (b) rapport entre la durée de l'épisode de fermeture et la période d'oscillation. En (a), des traits pleins dénotent une solution stable, des pointillés gris une solution instable. Les cercles correspondent aux formes d'ondes des figures 9 et 13. $\zeta = 0.6$.

La figure 17 est qualitativement cohérente avec les données expérimentales de la figure 15, en termes d'ordre d'apparition des régimes stables en fonction de la pression d'alimentation. En parcourant le diagramme à partir d'une pression d'alimentation γ faible, le premier régime stable est le régime à deux états standard. Lorsque la pression d'alimentation augmente, la branche stable est suivie jusqu'à son extrémité, puis le système saute vers une autre branche stable. Là, à la fin de la branche de mouvement à deux états standard vers $\gamma = 0.69$, deux branches stables coexistent : le mouvement inversé et le mouvement double. Dans ce cas, il est possible que le système soit attiré par l'une de ces deux branches stables, en fonction de leur bassin d'attraction – une région de l'espace des phases difficile à décrire, voir la section 5 pour plus de détails. Le scénario où le système sauterait sur la branche de mouvement à deux états inversé n'a pas été observé expérimentalement. Par contre, on observe expérimentalement un ordre des régimes correspondant à l'autre scénario suggéré par le diagramme de bifurcation : après le mouvement standard, le système suit la branche de mouvement double, puis de second registre, de mouvement double inversé, et enfin de mouvement simple inversé pour $\gamma > 1.5$. Le même ordre de régimes est suggéré par des diagrammes de bifurcations tracés pour différentes valeurs de ζ pour le même doigté. La figure 17 montre que la branche de mouvement double est liée à la branche de second registre : un continuum de solutions existe entre le second registre et le mouvement double – bien que certaines de ces solutions soient instables. La jonction entre ces branches est un doublement de période du second registre. Les régimes inversés apparaissent pour une pression d'alimentation élevée, ce qui est cohérent avec le comportement statique de l'anche, qui tend à se fermer de plus en plus lorsque la pression d'alimentation augmente. Lors de l'oscillation, l'anche se ferme pour une portion de plus en plus longue de la période, établissant ainsi la transition entre un mouvement standard et inversé. Une pression d'alimentation très élevée mène à l'extinction des oscillations : le canal d'anche reste fermé. La figure 17 (b) trace le même descripteur que la figure 15, le rapport de durée entre l'épisode de fermeture et la période. On peut noter que les seuils entre les différents régimes sont différents de ceux fixés empiriquement. De plus, le modèle prédit que le mouvement inversé peut apparaître avec un rapport de fermeture relativement faible, mais ce phénomène n'a jamais été observé expérimentalement. Ceci peut être dû au fait que le second registre et le mouvement double inversé sont très stables dans la même régime, ce qui rend difficile l'obtention d'autres solutions.

3.5 Effet de la simplification de l'anche fantôme

La simplification dite de l'*anche fantôme* revient à négliger la force due au contact entre l'anche et le bec (le terme $F_c(x)$ dans l'équation 3). Avec cette simplification, bien entendu non physique, l'anche "fantôme" peut

traverser librement le bec, seulement contrôlée par sa raideur, sa masse et son amortissement propre. L'anche fantôme conserve son effet sur le débit à travers le canal d'anche, et l'équation 5 est inchangée. Cette approximation est très utilisée dans les travaux analytiques et en synthèse sonore [Grand et al., 1997, Kergomard et al., 2016]. On compare ici les signaux et la dynamique globale du modèle en prenant en compte ou en négligeant le contact anche-table, afin de mieux estimer le domaine de validité des études effectuées avec l'hypothèse d'anche fantôme.

Comme premier niveau de comparaison, on se propose d'examiner les formes d'ondes et les spectres des signaux de déplacement de l'anche x et de pression et débit acoustique p et u . Des exemples sont représentés en figure 18, pour une pression d'alimentation $\gamma = 0.5$. Ces régimes à deux états standard correspondent au premier registre de l'instrument. Comme attendu, les signaux de déplacement de l'anche x sont très différents : la force de contact limite le déplacement de l'anche en dessous de $x = -1$, alors que la simplification de l'anche fantôme la laisse se déplacer librement. C'est la différence principale entre les deux modèles. En revanche, les signaux de pression acoustique p sont quasiment superposés, à l'exception de quelques composantes haute fréquence. Ceci est confirmé par une bonne correspondance des amplitudes des harmoniques, en particulier les neuf premières. Des commentaires similaires peuvent être formulés à propos du débit u . Pour cette valeur de la pression d'alimentation, l'impact anche-table n'a pas d'influence majeure sur les formes d'onde de pression et de débit.

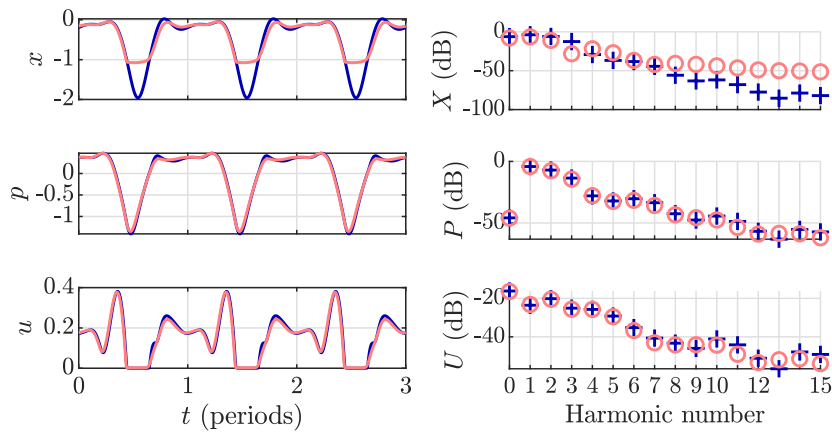


FIGURE 18 – Régime périodique établi pour le déplacement d'anche x , la pression acoustique p et le débit acoustique u . Formes d'onde temporelles (à gauche) et amplitude des harmoniques (à droite). Le modèle prenant en compte l'impact est en rouge clair et la simplification de l'anche fantôme est en bleu foncé. $\gamma = 0.5$.

Ensuite, on s'intéresse à la dynamique globale de système. On en trace alors le diagramme de bifurcation, avec et sans anche fantôme, en figure 19. Plusieurs qualités communes apparaissent entre les structures des diagrammes superposés. En termes de seuils d'oscillation, les deux cas possèdent deux bifurcation de Hopf sur la branche d'équilibre, notées H. La première est une bifurcation de Hopf inverse autour de $\gamma = 0.4$ dans les deux cas, et elle marque l'émergence du premier registre. La seconde, une bifurcation de Hopf directe vers $\gamma = 0.43$, encore pour les deux modèles, correspond au second registre. Les branches de solutions des deux modèles ont une allure similaire, bien qu'elles ne soient pas superposées. Par exemple, l'intervalle de γ pour lequel des solutions périodiques stables existent est réduit lorsque la force de contact est prise en compte. La bifurcation de Neimark-Sacker (NS sur le diagramme) la plus à droite, qui marque la déstabilisation de la solution périodique en une solution quasi-périodique, semble très sensible à la prise en compte de la force de contact. Dans le cas fantôme, elle se trouve à environ $\gamma = 1.25$, en dessous de la bifurcation *fold* (F sur le diagramme). Avec la force de contact, elle se déplace jusqu'à $\gamma = 1.8$, au-delà de la bifurcation *fold*. Les valeurs les plus élevées de pression d'alimentation mettent en évidence les différences les plus importantes entre les deux modèles. Ceci est expliqué par le fait que la durée du contact entre l'anche et la table augmente pour des pressions d'alimentation plus élevées, ce qui rend plus important l'effet de la force de contact.

Cette étude sur l'effet de la simplification dite de l'anche fantôme montre que son effet est limité, notamment pour des pressions d'alimentation faibles. Il semble malgré tout qu'elle soit contre-indiquée pour des études mettant l'accent sur le timbre du fait de son effet prépondérant sur les harmoniques supérieures des solutions périodiques. Il paraît raisonnable de l'utiliser, si nécessaire, pour des études plus fondamentales qui se concentrent par exemple sur les seuils d'oscillations, mais aussi sur la description qualitative de la dynamique d'un modèle.

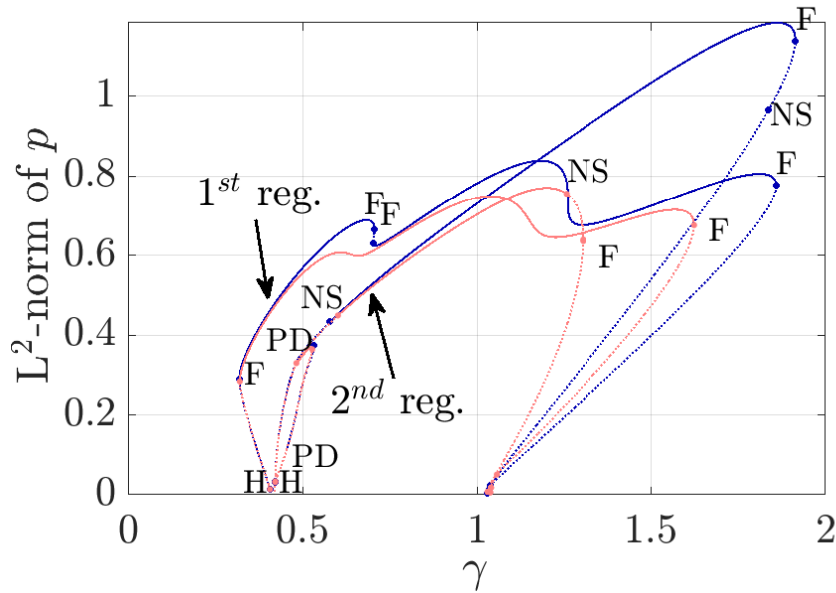


FIGURE 19 – Diagramme de bifurcation : norme L^2 norm de la pression acoustique p en fonction de la pression d'alimentation γ . Les solutions stables sont en traits pleins et les solutions instables en pointillés. Bleu foncé : simplification de l'anche fantôme. Rouge clair : avec force d'impact. Les légendes des bifurcations sont H : Hopf; PD : *period doubling*; F : *fold*; NS : Neimark-Sacker.

4 Cartographie de régimes

4.1 Avant-propos

Cette section étudie le comportement d'un modèle de saxophone dans un espace de paramètres de contrôle à deux dimensions (γ, ζ) . Deux approches complémentaires sont présentées : l'obtention de cartographies par synthèse temporelle, représentant un descripteur (comme la fréquence fondamentale) extrait de signaux produits selon une grille de valeurs des paramètres de contrôles, et la continuation numérique de bifurcations de Hopf, qui donne la forme des seuils d'instabilité de la solution d'équilibre dans le plan (γ, ζ) .

4.2 Cartographies par synthèse temporelle

4.2.1 Effet de la clé de registre

L'appellation "cartographies de régimes" désigne ici une représentation en deux dimensions d'un descripteur extrait de signaux oscillants. Chaque pixel de la cartographie correspond ainsi à un signal synthétisé, dont la position indique les paramètres de contrôles utilisés, et la couleur dénote une caractéristique du signal. Ici, on se concentre sur les cartographies de registre, où la couleur du pixel indique si le signal est classé comme non-oscillant (pixel blanc), premier registre (vert), second registre (rouge), ou quasi-périodique (bleu). Afin de comparer deux cartographies, on les superpose en ajoutant une cartographie en contours au premier plan. Ainsi, les régions de l'espace de paramètre menant à différents registres peuvent être mises en relation.

L'exemple d'application des cartographies de régimes que l'on propose ici présente l'effet de l'ouverture du trou de registre. Cet exemple est choisi afin de donner un point de référence, en explicitant l'effet sur une cartographie d'une action musicale bien connue, comme actionner la clé de registre. La figure 20 présente l'impédance de trois doigtés de premier registre, et les trois doigtés de second registres correspondants (où le trou de registre est ouvert). Pour ces trois doigtés, le premier pic d'impédance est affecté par l'ouverture du trou de registre, qui réduit sa hauteur et le pousse vers les hautes fréquences. Les autres résonances ne sont que légèrement affectées. L'effet observé sur l'impédance devrait correspondre à une réduction sévère de la production du premier registre, au profit des seconds et troisième registres. Le rôle de la clé de registre est de favoriser la production de second registre.

La figure 21 superpose les cartographies de régime d'un doigté avec trou de registre bouché et du même doigté avec le trou de registre ouvert. Cette cartographie correspond à une grille de couples de paramètres de contrôle (γ, ζ) , avec 50 valeurs distinctes de γ entre 0.2 et 1, et 50 valeurs distinctes de ζ entre 0 et 1. Ceci revient à un total de 2500 couples de paramètres, chacun étant utilisé en synthèse sonore pour produire un signal de 3 secondes, lequel est analysé automatiquement pour déterminer son registre. Ici, on fait remarquer que le transitoire de pression d'alimentation est un simple échelon, la pression passant de 0 à sa valeur finale en une

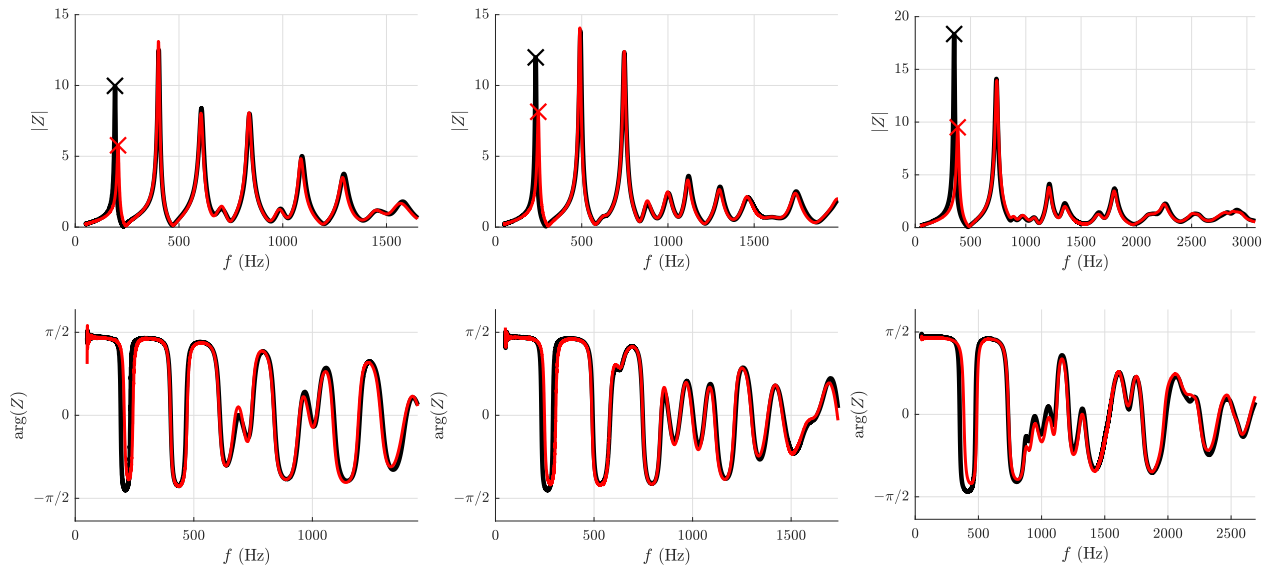


FIGURE 20 – Module et phase de l’impédance d’entrée pour les doigtés de Ré \sharp , Fa \sharp and Do médian. **Noir** : trou de registre bouché (premier registre), **rouge** trou de registre ouvert (second registre).

seule période d’échantillonnage. Ce transitoire non physique présente un biais en faveur des régimes oscillants et quasi-périodiques (pour plus de détails sur les transitoires de paramètres de contrôle, voir la section 5). C’est à cause de ce type de biais que toutes les cartographies de cette section sont présentées en paires superposées, de manière à les utiliser de manière strictement comparative.

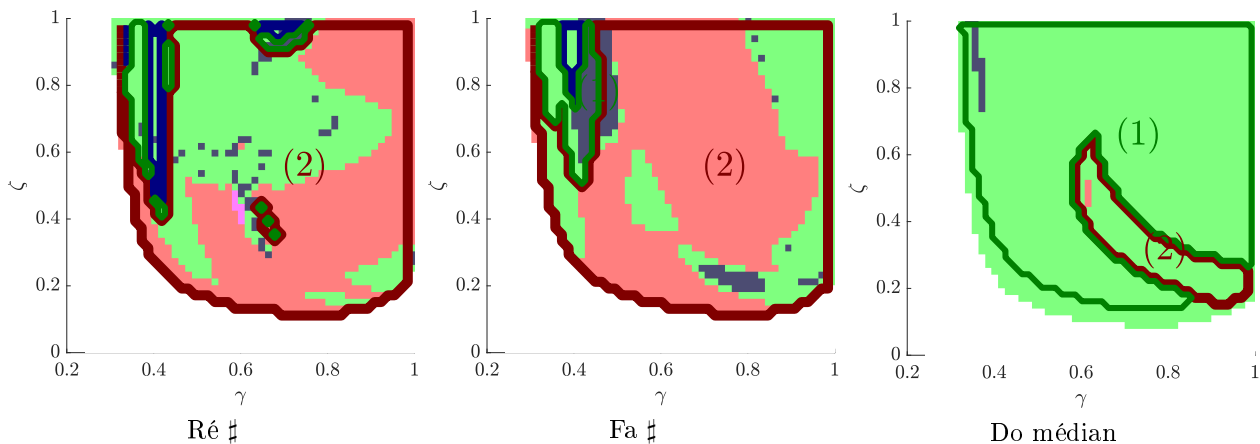


FIGURE 21 – Registre produit par la synthèse temporelle. Arrière-plan, clair : trou de registre bouché. Contour, sombre : trou de registre ouvert. 1^{er} registre : vert ; 2nd registre : rouge ; quasi-périodique : bleu.

En se concentrant sur l’arrière plan de la figure 21, qui correspond à un trou de registre bouché, il est important de repérer que le second registre reste très présent dans une large portion de l’espace des paramètres de contrôle. Cela est particulièrement vrai pour les doigtés les plus graves, Ré \sharp et Fa \sharp . Le premier registre apparaît majoritairement pour les valeurs de ζ les plus élevées (le canal d’anche le plus ouvert au repos) et une pression d’alimentation γ faible. Le doigté le plus aigu (Do médian) affiché ici ne montre du second registre que pour quelques couples de paramètres lorsque le trou de registre est bouché. Ce phénomène est imposé par le premier pic d’impédance, qui est sensiblement plus grand que le second (voir la figure 20).

Les contours au premier plan de la figure 21 délimitent la région de production des différents régimes, pour un trou de registre ouvert. Les doigtés de Ré \sharp et de Fa \sharp produisent du second registre presque partout lorsque le trou de registre est ouvert. Toutefois, le premier apparaît encore sur ces deux doigtés, pour les ζ les plus élevés et les γ les plus faibles. Pour le doigté le plus haut (Do médian), l’ouverture du trou de registre provoque l’apparition de plus de second registre, mais celui-ci ne remplit pas l’espace aussi bien que pour les doigtés graves. Cette observation est cohérente avec le ressenti du musicien, pour lequel la production de second registre devient de plus en plus difficile pour les doigtés aigus, même en ouvrant le trou de registre. Sur cette dernière cartographie, le seuil d’instabilité au premier plan (la ligne à partir de laquelle des régimes oscillants apparaissent) est rétrécie par rapport à l’arrière plan. Ceci est lié avec la diminution d’amplitude du premier pic d’impédance.

Cet exemple apporte de la nuance sur le lien potentiel entre cartographies de régimes et la ‘facilité d’émission’

d'un certain régime. En particulier, la signification de petites régions isolées de paramètres de contrôle menant à un autre régime (comme les quelques points de premier registre apparaissant autour $\zeta = 0.4$ et $\gamma = 0.6$ pour le doigté de Ré♯) devraient être considérés avec précaution. L'interprétation des cartographies de régimes doit, pour l'instant, se cantonner à des études comparatives basées sur des tendances et des comportements globaux, plutôt que sur des détails.

4.3 Continuation de bifurcation de Hopf

La continuation de bifurcation de Hopf est implémentée grâce à un système étendu, comme la continuation de *fold* (section 3.3), avec la différence considérable que les bifurcations de Hopf apparaissent sur les régimes d'équilibre, donc sans application de l'équilibrage harmonique. Ceci a pour conséquence de limiter fortement le coût de calcul lié à la procédure, le rendant très raisonnable (quelques secondes par courbe).

On applique la continuation de bifurcations de Hopf à quatre saxophones : deux altos, un soprano et un ténor. Un ajustement de la pulsation propre de l'anche est nécessaire. De manière à conserver la proportion avec la première fréquence de résonance de chaque saxophone, la pulsation propre de l'anche ω_r est multipliée par $3/4$ pour le ténor et par $3/2$ pour le soprano. Cet ajustement naïf sert à compenser la transposition des différents instruments, tout en gardant une relation claire et simple entre eux et en évitant tout risque d'ajustement manuel des paramètres pour rapprocher artificiellement les résultats.

La figure 22 montre le résultat de la continuation des bifurcations de Hopf associées aux régimes des trois premiers registres, pour les quatre instruments. Chaque tranche horizontale de ces graphes représente le lieu d'une bifurcation de Hopf pour un doigté différent. Cette figure fait apparaître des similitudes notables entre les formes générales des seuils d'instabilité, au sein de chaque registre. Le seuil du premier registre est toujours plus restreint pour les doigtés les plus bas, avec une croissance irrégulière avant une stabilisation entre le doigté de Do (C) grave et le doigté de Fa (F). Au-delà, ce seuil reste le plus large jusqu'aux doigtés les plus aigus. Ceci est signalé sur la figure 22 par des lignes pleines, qui signalent le seuil le plus large. Le seuil d'instabilité du second registre suit une tendance très claire, identique pour les quatre instruments. Il commence comme la courbe la plus étendue pour les doigtés les plus graves, et rétrécit progressivement jusqu'à disparaître quasiment au doigté le plus aigu. Le seuil du troisième registre n'existe que pour les doigtés les plus graves, en dessous de Ré (D), et bien que sa taille initiale soit comparable à celle des autres, il rétrécit et disparaît rapidement.

Les seuils d'instabilité de la famille du saxophone correspondent remarquablement les uns aux autres, malgré un ajustement très grossier des paramètres d'anche. Cet effet n'est pas évident à prédire par une simple observation des paramètres modaux de l'impédance (voir la version complète du manuscrit). Les seuils d'instabilité constituent ainsi un exemple de descripteur sans doute plus proche de la 'jouabilité' de l'instrument que l'impédance seule, tout en évitant le coût de calcul élevé lié à une cartographie de régime complète. Ce type d'analyse paraît posséder un fort potentiel en tant que critère d'optimisation, plus pertinent que les métriques déduites directement de l'impédance tout en restant calculable en temps raisonnable.

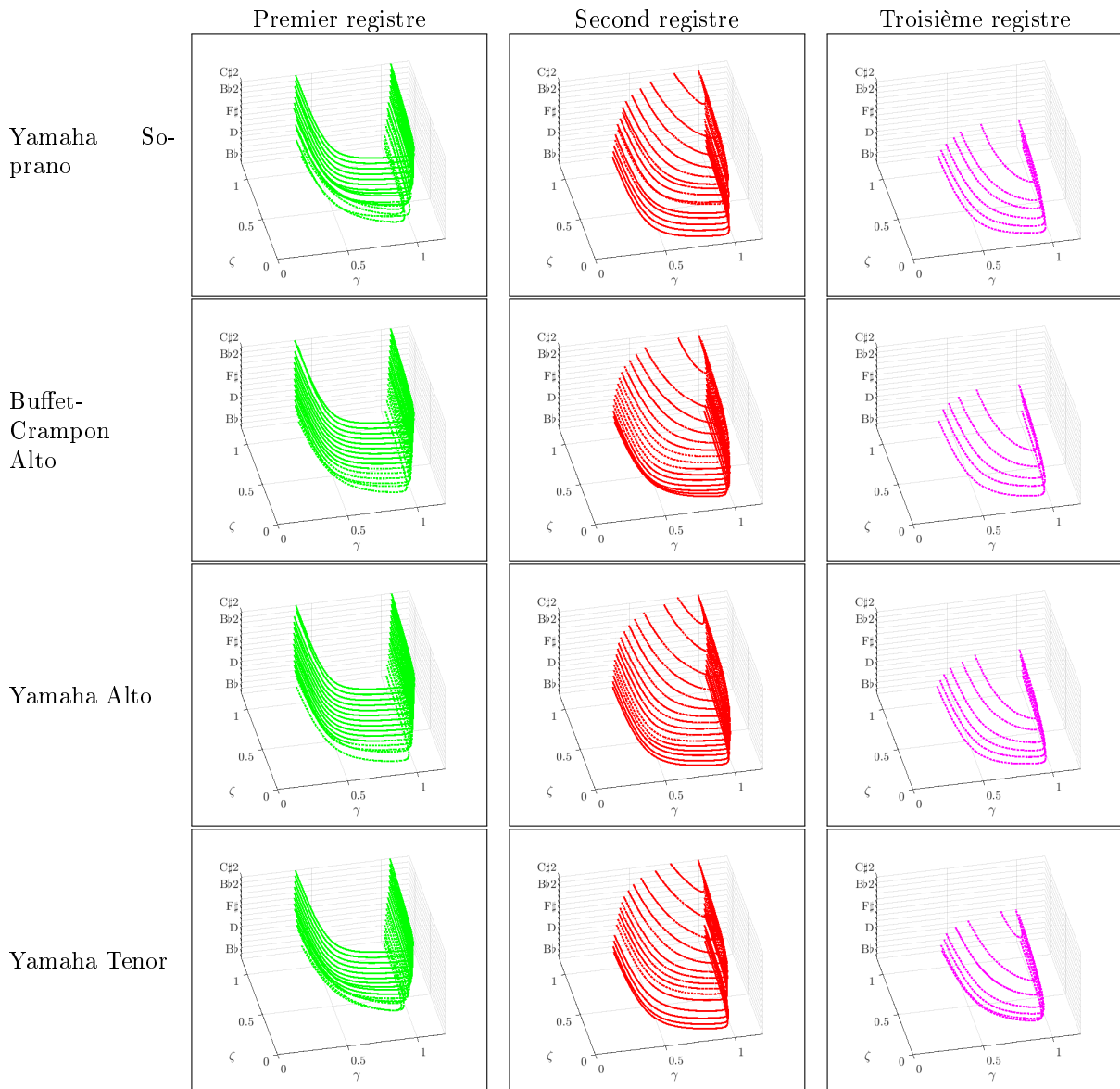


FIGURE 22 – Continuation des bifurcations de Hopf associées aux trois premiers registres pour quatre saxophones différents. La pulsation propre de l'anche ω_r , utilisée pour les deux altos est multipliée par $3/4$ pour le ténor et par $3/2$ pour le soprano.

5 Multistabilité

Cette section reproduit des résultats et des figures extraits du travail soumis à *Acta Acustica* sous l'appellation :

Colinot, Tom et al. (submitted in 2020). "Multi-stability in a saxophone model : how it manifests when exploring sound production to explain instrument makers' acoustical choices". In : *Acta Acustica*.

5.1 Avant-propos

Jusqu'ici, on a présenté divers régimes oscillants du saxophone et étudié leurs conditions de production en termes de paramètres de contrôle. En fonction du contexte, l'idée de "conditions menant à la production d'un régime donné" a été explorée selon deux axes. Le premier moyen d'affirmer qu'un régime peut être produit avec un contrôle donné utilise l'HBM pour déterminer la stabilité de ce régime. La seconde méthode repose sur la synthèse dans le domaine temporel, lancée avec des paramètres de contrôle constants jusqu'à ce qu'un régime soit établi – il est alors clair que le régime obtenu peut être produit en utilisant ces valeurs de paramètres de contrôle. Ces deux caractérisations de la production de régimes sont utilisées de manière presque interchangeable dans les sections précédentes, mais elles sont en réalité fondamentalement différentes. En particulier, rien n'empêche deux solutions différentes d'être stables pour la même valeur des paramètres de contrôle, mais un seul signal de synthèse temporelle converge vers un unique régime établi. Cette dichotomie mérite une certaine

attention, puisqu'elle met en évidence le fait que le concept binaire de stabilité ou instabilité d'un régime nécessite d'être nuancé. Quels facteurs interviennent dans l'apparition en synthèse temporelle d'un régime stable plutôt qu'un autre? La problématique est d'autant plus pertinente que, comme cela a été montré en section 3, les doigtés graves du saxophone produisent une grande variété de régimes différents, dont les zones de stabilité s'interpénètrent.

5.2 Scénarios de contrôle : hystéresis et vitesse d'attaque

Le premier objet de ce chapitre est l'évaluation de l'importance du phénomène de multistabilité dans un modèle de saxophone, en terme d'intervalle de paramètres de contrôle. À cette fin, on utilise la continuation pour produire le diagramme de bifurcation du modèle de saxophone, sur lequel on relève les zones dans lesquelles au moins deux régimes sont stables. Sur l'exemple étudié, la multistabilité est présente sur la quasi-totalité de l'étendue de variation du paramètre de continuation choisi. On explore ensuite les bassins d'attractions de chaque régime stable dans les zones de multistabilité, à l'aide de la synthèse temporelle. La dimension élevée de l'espace des phases du modèle interdit toute cartographie exhaustive des bassins d'attraction. Par conséquent, on met au point des scénarios de variations de paramètre de contrôle, qui permettent une estimation des bassins d'attraction musicalement pertinente, bien que très partielle.

5.2.1 Hystéresis par rampe de pression

Le premier scénario est une rampe, une augmentation lente linéaire de la pression d'alimentation, suivie d'une diminution du même type, qui permet une exploration rapide des régimes. Ce scénario fait apparaître les zones de multistabilité par un phénomène d'hystéresis. Superposé à un diagramme de bifurcation, le résultat de cette rampe permet également de vérifier la correspondance entre synthèse temporelle et HBM.

Le diagramme en norme L^2 de la figure 23 est tracé pour le doigté de Ré \sharp du saxophone alto. Sur les branches dues à l'HBM (vert et rouge, à l'arrière plan) on distingue déjà plusieurs zones de multistabilité, c'est à dire des intervalles où plusieurs régimes sont stables. Ces zones sont mises en valeur par des aplats gris et jaunes clairs. Ces zones de coexistence entre régimes stables couvrent la plupart de l'intervalle de γ où des solutions oscillantes existent. On voit ici que la multistabilité n'est pas un phénomène isolé, mais correspond en fait au cas général – en tout cas pour ce doigté.

Au diagramme de bifurcation dû à l'HBM, la figure 23 superpose, en bleu, la norme L^2 d'un signal de pression obtenu par synthèse temporelle, en augmentant puis en diminuant lentement la pression d'alimentation γ . Cette méthode d'identification de l'hystéresis a été mise en oeuvre dans [Takahashi et al., 2009] sur des modèles simplifiés. Le chemin décrit par le signal temporel dans le diagramme de bifurcation est très fortement hystérétique. En effet, les suites de régimes obtenus pour une pression d'alimentation γ croissante ou décroissante sont très différentes. En fait, les résultats de la rampe croissante et décroissante ne coïncident que dans trois régions : les extrêmes (γ les plus élevés et les plus faible) où seul l'équilibre est stable, et une toute petite région autour de $\gamma = 0.5$ dans laquelle seul le premier registre est stable.

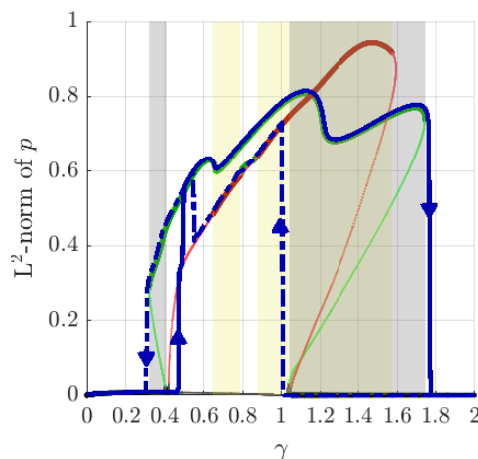


FIGURE 23 – Norme L^2 du signal de synthèse temporelle (ligne bleu foncé), pour une pression d'alimentation γ augmentant (trait plein) lentement de 0 à 2 puis retournant (pointillés) à 0, superposé au diagramme de bifurcation dû à l'HBM, signalant les solutions stables en trait pleins épais et les solutions instables en pointillés fins. Le vert indique une branche de premier registre et le rouge un second registre. Les aplats marquent les zones de multistabilité, gris entre l'équilibre et un régime oscillant, jaune entre deux régimes oscillants.

Le phénomène d’hystérésis observé ici grâce à la synthèse temporelle peut être interprété comme un premier pas dans la description des bassins d’attraction : une fois qu’un régime stable est atteint, la branche de ce régime est suivie jusqu’à son extinction ou sa perte de stabilité, même lorsque d’autres régimes sont stables. Ceci confirme qu’un régime stable périodique fait partie de son propre bassin d’attraction. Toutefois, l’une des limites de cette caractérisation est qu’une longue rampe de pression est un signal d’excitation très artificiel, probablement impossible à produire pour un musicien. Par conséquent, les autres résultats présentés ici sont tournés vers des interprétations ayant trait à la sélection d’un régime par le musicien, avec un scénario de contrôle plus plausible.

5.2.2 Sélection de régimes par la vitesse d’attaque

Le second scénario correspond à une augmentation suivie d’une stabilisation de la pression d’alimentation. Ce second scénario est paramétré par un temps caractéristique d’augmentation, qui permet de varier entre des attaques lentes et rapides. Ce scénario représente une stratégie simple de sélection entre des régimes stables à la valeur finale de la pression d’alimentation. On montre alors comment la variation du temps caractéristique d’attaque contrôle le régime établi dans les diverses zones de multistabilité.

On se concentre ainsi sur une augmentation monotone de la pression d’alimentation γ lors d’une attaque : sans utiliser la langue, l’instrumentiste commence à souffler progressivement dans l’instrument. La pression d’alimentation part de 0 et augmente jusqu’à se stabiliser à une valeur finale γ_f , en un certain temps déterminé par un paramètre τ_γ . La variation temporelle de γ est donnée ici par

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_f}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{t - 5\tau_\gamma}{\tau_\gamma} \right) \right). \quad (10)$$

La figure 24 représente les régimes obtenus dans la troisième région de multistabilité, au delà de $\gamma = 1$. Cette figure montre que pour une même valeur finale γ_f de la pression d’alimentation, le temps d’attaque τ_γ influence le régime obtenu. On fait également remarquer que l’équilibre (points noirs), lorsqu’il est stable, a tendance à être favorisé par un temps d’attaque lent.

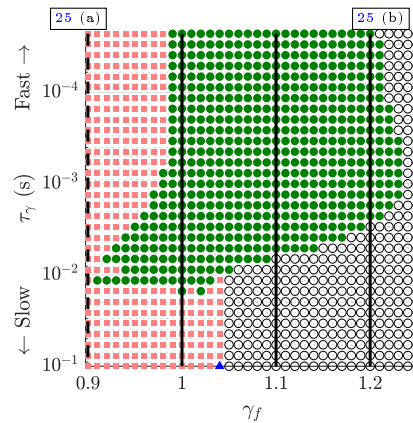


FIGURE 24 – Classification des régimes produits en synthèse temporelle en fonction des paramètres du transitoire de pression d’alimentation : valeur finale γ_f et temps d’attaque τ_γ . Les lignes verticales signalent les valeurs de γ_f pour lesquelles on a tracé les diagrammes de phase en figure 25.

5.3 Allure des bassins d’attraction

Pour améliorer la vision des bassins d’attraction procurée par les scénarios de contrôle, une approche plus classique est adoptée, qui consiste à utiliser la synthèse temporelle avec plusieurs conditions initiales réparties dans l’espace de phase. De cette manière, il est possible d’esquisser une projection tridimensionnelle des bassins d’attraction puis de l’analyser en rapport avec l’apparition de chaque régime dans le scénario précédent. La figure 25 représente les cycles limites, soit la trajectoire des variables correspondant aux solutions périodiques, ainsi que des points appartenant aux bassins d’attraction associés, soit des points par lesquels la synthèse passe en convergeant vers ces cycles limites. On utilise une projection tridimensionnelle de l’espace des phases (p_1, p_2, \dot{p}_2) , aux valeurs particulières de γ indiquées sur la figure 24.

Le graphe 25 (a) à $\gamma = 0.9$ illustre et explique l’apparition exclusive du second registre dans la cartographie de régime 24. Dans ce cas, le bassin d’attraction du premier registre est juste trop petit, puisqu’il ne contient que quelques points en figure 25 (a). Le graphe 25 (b) à $\gamma = 1.25$ correspond à une région de la cartographie 24 où seul l’équilibre apparaît. On voit ici que son bassin d’attraction, bien que plus petit que les autres

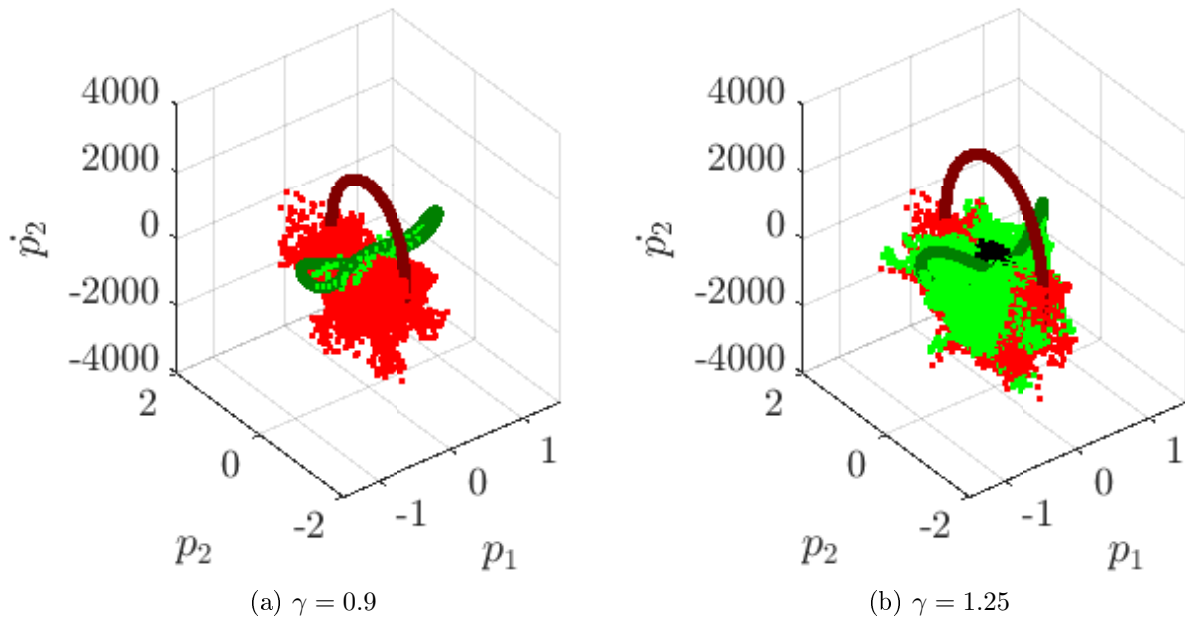


FIGURE 25 – Bassins d’attraction (points) et cycles limites (lignes) dans une projection 3D de l’espace de phase, pour différentes pressions d’alimentation γ . Noir : équilibre, vert : premier registre, rouge : second registre.

[Suppl.mp4](#)

FIGURE 26 – Multimedia file: Animation : séquence d’évolution complète des bassins d’attraction le long du diagramme de bifurcation de la figure 23.

dans cette projection de l’espace de phase, entoure entièrement l’origine. Cette caractéristique est extrêmement déterminante quant à l’apparition des régimes avec le scénario de contrôle utilisé pour tracer la figure 24 : le régime dont le bassin d’attraction entoure l’origine masque les autres régimes et apparaît beaucoup plus souvent qu’eux.

Pour compléter ce résultat, on trouvera la séquence d’évolution complète des bassins d’attraction sous forme d’animation dans le fichier lié 26. Pour profiter au mieux de cette représentation, on suggère d’arrêter fréquemment l’animation pour observer précisément le développement des bassins d’attraction le long des zones de multistabilité.

5.4 Effet de l’inharmonicité sur la production de régimes

Les précédentes considérations portant sur la coexistence des régimes stables et leur sélection peuvent paraître assez abstraites. On les complète donc par un exercice d’application, pour étudier l’effet de l’inharmonicité sur la production de son. En particulier, on se concentre sur la production de son pour les doigtés les plus graves. En utilisant le second scénario de contrôle avec différents temps d’attaque et paramètres de contrôles finaux, on comptabilise les occurrences de chaque régime avec plusieurs valeurs de l’inharmonicité. On obtient ainsi une étude plus fine qu’avec un seul temps d’attaque – qui peut conduire à des résultats fortement biaisés.

Poursuivant l’idée de la figure 24, on étudie les régimes produits dans l’espace bidimensionnel des paramètres (γ_f, ζ) , en conservant un temps d’attaque variable τ_γ . La figure 27 montre la classification des régimes obtenus.

Pour des raisons de lisibilité, la résolution de la cartographie présentée ici est grossière, avec seulement huit valeurs de γ_f et de ζ et trois temps caractéristiques τ_γ , pour un total de 192 signaux synthétisés. Les deux cartes de la figure 27 (a) et (b) montrent deux valeurs différentes d’inharmonicité, pour observer les différences de comportement. Ici, on choisit deux valeurs marquantes : une inharmonicité nulle, où la deuxième fréquence de résonance est exactement le double de la première, et l’inharmonicité mesurée sur le saxophone, qui est légèrement plus élevée avec $f_2/f_1 = 2.065$. On constate sur ces deux cartographies de grandes zones de coexistence de régimes, où différents temps d’attaque mènent à des régimes différents pour un même couple (γ_f, ζ) . Une observation globale de ces deux cartographies montre que la carte (a) ($f_2/f_1 = 2$) contient plus de second registre que la carte (b) $f_2/f_1 = 2.065$. Toutefois, on pourrait s’attendre au résultat inverse, en vertu du second principe énoncé dans [Benade and Gans, 1968] :

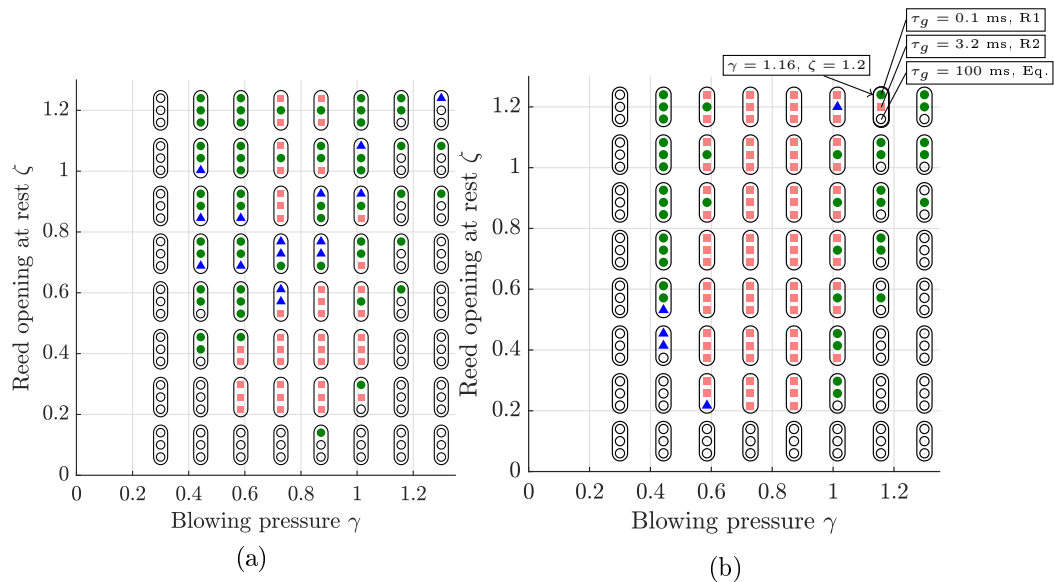


FIGURE 27 – Classification des régimes produits (cercle vide : équilibre, vert : premier registre, rouge : deuxième registre, bleu : quasi-périodique) en fonction des paramètres de contrôle γ_f et ζ . Chaque cartouche correspond à un couple (γ_f, ζ) et les points à l’intérieur indiquent le régime correspondant à chaque temps caractéristique (en bas 0.1 ms, au milieu 3 ms et en haut 100 ms). Les deux cartes correspondent à deux valeurs d’inharmonicité pour le doigté de Ré \sharp écrit : (a) $f_2 = 2.065f_1$, près de la valeur mesurée et (b) $f_2 = 2f_1$.

Oscillation is favored at a frequency for which the air column input impedance is large (as in linear systems), and oscillation is also favored if the impedance is large at some or all of the harmonics of this frequency.

L’oscillation est favorisée à une fréquence à laquelle l’impédance d’entrée de la colonne d’air est grande (comme pour les systèmes linéaires), et l’oscillation est également favorisée si l’impédance est grande à la totalité ou une partie des harmoniques de cette fréquence.

Or ici, on voit qu’une deuxième résonance exactement multiple de la première ne mène pas à une production plus importante de premier registre. Puisqu’un rapport entier entre les fréquences n’est pas la solution, on recherche une autre valeur d’inharmonicité qui favoriserait la production de premier registre.

Par conséquent, on élargit l’étude aux 7 doigtés les plus graves du saxophone. Les doigtés plus aigus n’ajoutent aucune information, puisque leurs taux de production de premier registres sont très proches de 100% pour toutes les inharmonicités étudiées. On relève pour chaque doigté l’inharmonicité dite *optimale*, celle qui mène au taux maximum de production du premier registre, ainsi que l’inharmonicité qui mène au taux minimum de second registre. La figure 28 résume les taux de production pour tous ces doigtés. Le premier commentaire qui peut être fait sur cette figure est que l’inharmonicité optimale varie selon le doigté. Elle est toujours supérieure à 2 : une inharmonicité parfaite ne favorise pas la production de premier registre sur les doigtés graves du saxophone. Les valeurs d’inharmonicité optimales relevées ici sont proches de l’inharmonicité mesurées. De plus l’évolution est respectée, avec des inharmonicités optimales et mesurées croissantes dans les doigtés les plus aigus.

La proximité de l’inharmonicité optimale estimée ici avec l’inharmonicité mesurée met en lumière le choix empirique de facture ayant déterminé les propriétés acoustiques du saxophone, à l’aide de caractéristiques objectives de production de son sur un modèle physique. Explorer et expliquer les raisons physiques sous-jacentes à la conception des instruments actuels est un premier pas vers une utilité directe de la modélisation physique pour le développement de nouveaux instruments.

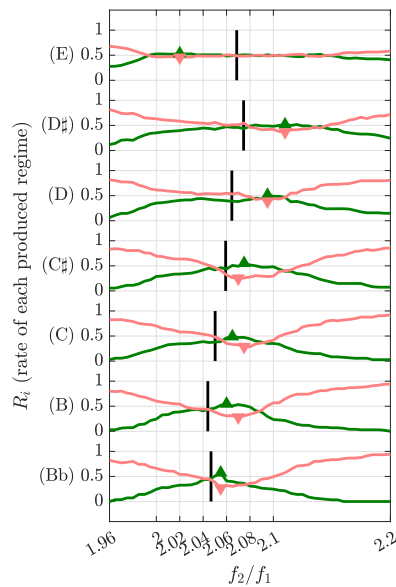


FIGURE 28 – Taux de production de chaque régime pour les doigtés les plus graves du saxophone alto (notation écrite, en Mib). Vert : premier registre, rouge : second registre. Un triangle vers le haut marque le taux maximal de premier registre, un triangle vers le bas indique le taux minimal de second registre. Les lignes verticales indiquent les valeurs d’inharmonicité mesurées.

Conclusion

Ce travail constitue une exploration de la dynamique non linéaire d’un modèle physique de saxophone, en vue d’appliquer les résultats développés à la conception de nouveaux instruments. Il semble essentiel de bien comprendre les subtilités du comportement du modèle avant d’espérer en tirer des critères objectifs pertinents pour la facture instrumentale. C’est pourquoi l’optimisation numérique est abordée rapidement, comme une preuve de concept, laissant ensuite la place à une majorité des résultats plus fondamentaux. Par exemple, faire la preuve que les signaux synthétisés correspondent à des signaux mesurés en situation de jeu est une étape indispensable pour accorder de la confiance aux modèles. Documenter la variété des régimes de saxophone est un préalable à la mise en place de représentations globales du comportement de modèle. L’étude des bifurcations est développée ici pour une raison similaire : isoler les points importants de la dynamique, pour s’en servir comme descripteurs efficaces du comportement global du modèle. La discussion développée autour du concept de multistabilité apporte une nuance essentielle à la description de la dynamique. Pour consolider les résultats, on envisage une comparaison plus quantitative de la dynamique du modèle avec des expériences, à la bouche artificielle par exemple. Par ailleurs, l’évaluation de la dynamique bénéficierait grandement d’études psycho-acoustiques, qui détermineraient quels régimes et quelles caractéristiques dynamiques sont indésirables pour les musiciens.

Références

- [Benade and Gans, 1968] Benade, A. H. and Gans, D. (1968). Sound production in wind instruments. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 155(1) :247–263.
- [Bilbao et al., 2015] Bilbao, S., Torin, A., and Chatziioannou, V. (2015). Numerical modeling of collisions in musical instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 101(1) :155–173.
- [Chatziioannou and van Walstijn, 2012] Chatziioannou, V. and van Walstijn, M. (2012). Estimation of clarinet reed parameters by inverse modelling. *Acta Acustica united with Acustica*, 98(4) :629–639.
- [Cochelin and Vergez, 2009] Cochelin, B. and Vergez, C. (2009). A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of sound and vibration*, 324(1-2) :243–262.
- [Coyle et al., 2015] Coyle, W. L., Guillemain, P., Kergomard, J., and Dalmont, J.-P. (2015). Predicting playing frequencies for clarinets : A comparison between numerical simulations and simplified analytical formulas. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(5) :2770–2781.
- [Dalmont et al., 2000] Dalmont, J.-P., Gilbert, J., and Kergomard, J. (2000). Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the helmholtz motion analogy. *Acta Acustica united with Acustica*, 86(4) :671–684.

- [Dalmont and Le Roux, 2008] Dalmont, J.-P. and Le Roux, J. C. (2008). A new impedance sensor for wind instruments. *The journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3014–3014.
- [Doc et al., 2016] Doc, J.-B., Vergez, C., Guillemain, P., and Kergomard, J. (2016). Sound production on a “coaxial saxophone”. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 140(5) :3917–3924.
- [Grand et al., 1997] Grand, N., Gilbert, J., and Laloë, F. (1997). Oscillation threshold of woodwind instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 83(1) :137–151.
- [Guillemain et al., 2010] Guillemain, P., Vergez, C., Ferrand, D., and Farcy, A. (2010). An instrumented saxophone mouthpiece and its use to understand how an experienced musician plays. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(4) :622–634.
- [Guillot et al., 2020] Guillot, L., Lazarus, A., Thomas, O., Vergez, C., and Cochelin, B. (2020). A purely frequency based floquet-hill formulation for the efficient stability computation of periodic solutions of ordinary differential systems. *Journal of Computational Physics*, page 109477.
- [Kergomard et al., 2016] Kergomard, J., Guillemain, P., Silva, F., and Karkar, S. (2016). Idealized digital models for conical reed instruments, with focus on the internal pressure waveform. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(2) :927–937.
- [Kuznetsov, 1995] Kuznetsov, Y. A. (1995). Elements of applied bifurcation theory. 1998. *Spring-Verlag, New York*.
- [Muñoz Arancón et al., 2016] Muñoz Arancón, A., Gazengel, B., Dalmont, J.-P., and Conan, E. (2016). Estimation of saxophone reed parameters during playing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(5) :2754–2765.
- [Ollivier et al., 2004] Ollivier, S., Dalmont, J.-P., and Kergomard, J. (2004). Idealized models of reed woodwinds. part i : Analogy with the bowed string. *Acta acustica united with acustica*, 90(6) :1192–1203.
- [Ricaud et al., 2009] Ricaud, B., Guillemain, P., Kergomard, J., Silva, F., and Vergez, C. (2009). Behavior of reed woodwind instruments around the oscillation threshold. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(4) :733–743.
- [Seydel, 2010] Seydel, R. (2010). Practical bifurcation and stability analysis.
- [Takahashi et al., 2009] Takahashi, K., Kodama, H., Nakajima, A., and Tachibana, T. (2009). Numerical study on multi-stable oscillations of woodwind single-reed instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(6) :1123–1139.
- [Teal, 1963] Teal, L. (1963). *The art of saxophone playing*. Alfred Music.
- [Wilson and Beavers, 1974] Wilson, T. A. and Beavers, G. S. (1974). Operating modes of the clarinet. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 56(2) :653–658.
- [Woodhouse, 2014] Woodhouse, J. (2014). The acoustics of the violin : a review. *Reports on Progress in Physics*, 77(11) :115901.