



HAL
open science

Problème de moments avec applications et estimations du spectre discret des opérateurs définis par des matrices infinies non bornées

Ayoub Harrat

► **To cite this version:**

Ayoub Harrat. Problème de moments avec applications et estimations du spectre discret des opérateurs définis par des matrices infinies non bornées. Analyse classique [math.CA]. Université du Littoral Côte d'Opale; Université Mohammed V (Rabat). Faculté des sciences, 2020. Français. NNT : 2020DUNK0563 . tel-03123140

HAL Id: tel-03123140

<https://theses.hal.science/tel-03123140v1>

Submitted on 27 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ MOHAMMED V
UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE**

École doctorale ED Régionale SPI 072
Unité de recherche LMPA Joseph Liouville* et LAMA**

Thèse présentée par **Ayoub HARRAT**

Soutenue le **17 décembre 2020**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université Mohammed V et de l'Université du Littoral Côte d'Opale

Discipline **Mathématiques et leurs interactions**
Spécialité **Analyse**

**Problème de moments avec
applications et estimations du spectre
discret des opérateurs définis par des
matrices infinies non bornées**

**Moment problem with applications and discrete spectrum
estimations of certain operators defined by unbounded Jacobi
matrices**

Thèse dirigée par El Hassan ZEROUALI co-directeur
Lech ZIELINSKI co-directeur

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Ryszard SZWARC	professeur à l'Université de Wrocław	
	Sergey NABOKO	professeur à l'Université de St. Petersburg	
<i>Examineurs</i>	Carole ROSIER	professeure à l'Université du Littoral Côte d'Opale	présidente du jury
	Omar EL-FALLAH	professeur à l'Université Mohammed V	
<i>Invité</i>	Hassane SADOK	professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale	
<i>Directeurs de thèse</i>	El Hassan ZEROUALI	professeur à l'Université Mohammed V	
	Lech ZIELINSKI	professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale	

COLOPHON

Mémoire de thèse intitulé « Problème de moments avec applications et estimations du spectre discret des opérateurs définis par des matrices infinies non bornées », écrit par Ayoub HARRAT, achevé le 15 janvier 2021, composé au moyen du système de préparation de document \LaTeX et de la classe yathesis dédiée aux thèses préparées en France.

UNIVERSITÉ MOHAMMED V
UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

École doctorale ED Régionale SPI 072
Unité de recherche LMPA Joseph Liouville* et LAMA**

Thèse présentée par **Ayoub HARRAT**

Soutenue le 17 décembre 2020

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université Mohammed V et de l'Université du Littoral Côte d'Opale

Discipline **Mathématiques et leurs interactions**
Spécialité **Analyse**

**Problème de moments avec
applications et estimations du spectre
discret des opérateurs définis par des
matrices infinies non bornées**

**Moment problem with applications and discrete spectrum
estimations of certain operators defined by unbounded Jacobi
matrices**

Thèse dirigée par El Hassan ZEROUALI co-directeur
Lech ZIELINSKI co-directeur

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Ryszard SZWARC	professeur à l'Université de Wrocław	
	Sergey NABOKO	professeur à l'Université de St. Petersburg	
<i>Examineurs</i>	Carole ROSIER	professeure à l'Université du Littoral Côte d'Opale	présidente du jury
	Omar EL-FALLAH	professeur à l'Université Mohammed V	
<i>Invité</i>	Hassane SADOK	professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale	
<i>Directeurs de thèse</i>	El Hassan ZEROUALI	professeur à l'Université Mohammed V	
	Lech ZIELINSKI	professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale	

UNIVERSITÉ MOHAMMED V
UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

Doctoral School ED Régionale SPI 072

University Department LMPA Joseph Liouville* et LAMA**

Thesis defended by **Ayoub HARRAT**

Defended on 17th December, 2020

In order to become Doctor from Université Mohammed V and from Université du Littoral Côte d'Opale

Academic Field **Mathematics and their interactions**
Speciality **Analysis**

**Moment problem with applications
and discrete spectrum estimations of
certain operators defined by
unbounded Jacobi matrices**

**Problème de moments avec applications et estimations du spectre
discret des opérateurs définis par des matrices infinies non
bornées**

Thesis supervised by El Hassan ZEROUALI Co-Supervisor
Lech ZIELINSKI Co-Supervisor

Committee members

<i>Referees</i>	Ryszard SZWARC	Professor at Université de Wrocław	
	Sergey NABOKO	Professor at Université de St. Petersburg	
<i>Examiners</i>	Carole ROSIER	Professor at Université du Littoral Côte d'Opale	Committee President
	Omar EL-FALLAH	Professor at Université Mohammed V	
<i>Guest</i>	Hassane SADOK	Professor at Université du Littoral Côte d'Opale	
<i>Supervisors</i>	El Hassan ZEROUALI	Professor at Université Mohammed V	
	Lech ZIELINSKI	Professor at Université du Littoral Côte d'Opale	

L'Université Mohammed V et l'Université du Littoral Côte d'Opale n'entendent donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions devront être considérées comme propres à leurs auteurs.

Mots clés: problème de moments, quintique, idempotents, asymptotiques, matrice de jacobi, spectre discret

Keywords: moment problem, quintic, idempotents, asymptotics, jacobi matrix, discrete spectrum

Cette thèse a été préparée au

LMPA Joseph Liouville* et LAMA**

*Maison de la Recherche Blaise Pascal
50, rue Ferdinand Buisson
CS 80699
62228 Calais Cedex
France

**Faculté des sciences de Rabat
4 Avenue Ibn Batouta
BP 1014 RP, Rabat
Morocco

☎ (33)(0)3 21 46 55 86

☎ (33)(0)3 21 46 55 75

✉ secretariat@lmpa.univ-littoral.fr

Site <http://www-lmpa.univ-littoral.fr/>

À la mémoire du Professeur Sergey Naboko

-"Methods are more important than
results"-

-Sergey NABOKO-

PROBLÈME DE MOMENTS AVEC APPLICATIONS ET ESTIMATIONS DU SPECTRE DISCRET DES OPÉRATEURS DÉFINIS PAR DES MATRICES INFINIES NON BORNÉES

Moment problem with applications and discrete spectrum estimations of certain operators defined by unbounded Jacobi matrices

Résumé

Dans cette thèse on donne d'abord une solution concrète pour presque tous les scénarios qu'on peut avoir dans le problème de moments complexe quintique et en particulier dans le cas d'une mesure à support minimal. On présente aussi de nombreux exemples pour illustrer chaque cas. La seconde partie présente une approche qui permet de passer du problème de moments tronqué au problème complet à l'aide des idempotents. Il s'agit d'une approche très différente de celle utilisée dans la première partie. Plus précisément, au lieu d'appliquer les méthodes de R. Curto et L. Fialkow où l'objet central est la matrice de moments, on utilise l'approche de F. Vasilescu dont l'objet central est la fonctionnelle de Riesz. Cette fonctionnelle fait associer à chaque monôme t^α la valeur γ_α et elle satisfait trois conditions naturelles dans le cas où la suite $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ est donnée par les intégrales de t^α par rapport à une mesure. La troisième partie est consacrée à l'asymptotique du spectre pour une classe de matrices hermitiennes tridiagonales infinies. Le but est d'obtenir le comportement asymptotique précis des valeurs propres y associées à partir du comportement asymptotique de ces coefficients. Le résultat est obtenu par une approche nouvelle qui est une adaptation de la théorie de perturbations de Schrieffer-Wolff utilisé en physique de la matière condensée. Cette méthode marche également pour des matrices 'bandes', mais le cas des matrices tridiagonales est le plus important pour des applications et encore les expressions explicites des premières corrections dans la formule asymptotique sont plus simples pour les matrices tridiagonales.

Mots clés : problème de moments, quintique, idempotents, asymptotiques, matrice de jacobin, spectre discret

MOMENT PROBLEM WITH APPLICATIONS AND DISCRETE SPECTRUM ESTIMATIONS OF CERTAIN OPERATORS DEFINED BY UNBOUNDED JACOBI MATRICES

Problème de moments avec applications et estimations du spectre discret des opérateurs définis par des matrices infinies non bornées

Abstract

In this thesis, we first provide a concrete solution to the, almost all, quintic TCM (that is, when $m = 5$). We also study the cardinality of the minimal representing measure. Based on the bi-variate recurrence sequence properties with some Curto-Fialkow's results. Our method intended to be useful for all odd-degree moment problems. Second, we investigate the full moment problem for discrete measures using Vasilescu's idempotent approach based on Λ -multiplicative elements with respect to the associated square positive Riesz functional. We give a sufficient condition for the existence of a discrete integral representation for the associated Riesz functional, which turns to be necessary in bounded shift space case. A particular attention is given to Λ -multiplicative elements, where a total description, for the cases where they are a single point indicator functions, is given. Lastly, We investigate a class of infinite Jacobi matrices which define unbounded self-adjoint operators with discrete spectrum. Our purpose is to establish the asymptotic expansion of large eigenvalues and to compute two correction terms explicitly. This method works in general for band matrices but Jacobi matrices case still much interesting due to applications and explicit expressions obtained for the first correction terms in the asymptotic formula.

Keywords: moment problem, quintic, idempotents, asymptotics, jacobin matrix, discrete spectrum

LMPA Joseph Liouville* et LAMA**

*Maison de la Recherche Blaise Pascal – 50, rue Ferdinand Buisson – CS 80699 – 62228 Calais Cedex – France – **Faculté des sciences de Rabat – 4 Avenue Ibn Batouta – BP 1014 RP, Rabat – Morocco

Remerciements

Pour commencer, j'aimerais adresser mes remerciements, ma reconnaissance et ma gratitude à mes directeurs de thèse bien-aimés les professeurs *El Hassan Zerouali* et *Lech Zielinski* pour leurs soutien inconditionnel, patience, disponibilité et surtout leurs qualités humaines à cote de celles scientifiques. J'ai eu une grande chance d'être leur étudiant. L'autonomie qu'ils m'ont offert m'a permis d'apprendre beaucoup.

Je suis très reconnaissant aux professeurs *Omar El-fallah*, *Sergey Naboko*, *Housame Mahzouli* and *Ryszard Szwarc* qui ont accepté la tâche de rapporter cette thèse. Leurs présences à la soutenance de cette thèse m'a gracieusement honoré.

Je remercie également la professeure *Carole Rosier* d'avoir accepté d'examiner ce travail et présider le Jury. Je tiens à adresser un mot de remerciement spécial au président de l'ULCO *Hassane Sadok* d'avoir accepté l'invitation à la soutenance de cette thèse et pour le soutien et l'encouragement qu'il m'avait octroyé dès mes premiers jours à Calais.

Je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA, ULCO) et le Laboratoire d'Analyse Mathématique et Applications (LAMA, UM5). Je remercie le CNRST (Maroc) et l'ULCO pour m'avoir attribuée le financement qui m'a permis de travailler dans des bonnes conditions.

Je remercie tout particulièrement *Isabelle Buchard*, *Philippe Marion*, *Romuald Ernst*, *Hamza El-Azhar*, *Antoine Benoit*, *Jean Fromentin*, *Dirar BenKhadra*, *Kaissar Idrissi*.

Un grand merci à mes ami(e)s pour leur soutien, leur gentillesse et avec qui j'ai partagé de bons moments : *Aminatie Aboudou*, *Mikhael Halabi Macary*, *Feriel Bouhadjera*, *Arij Benkhadra*, *Chaimae El Azouzi*, *Youssef Omari*, *Dharmendra PratapSingh*, *Munkhegerel Tsegmid*, *Siham Lmoulid*, *Salma Bouhlla*, *Maryem Ezzitouni*, *Salsabil Zaghdoudi*, *Hafid Bahajji-El Idrissi*, *Asmita Shah*, *Parthiban Palani*, *Ayoub Hassani*, *Rachid Baghrosse*, *Jawad Moustadif*...

Et enfin, last but not least, j'aimerais exprimer une énorme reconnaissance aux (deux) personnes qui m'ont construit, qui m'ont soutenu et supporté en permanence et dès ma naissance mes très chers et bien-aimés parents, et également ma gratitude à mes très chers : soeur, frères, beau-frère, nièce et neveu, je vous aime beaucoup.

À tous ces intervenants, et à tous ceux que j'aurais oublié de citer, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Sommaire

Résumé	xxi
Remerciements	xxiii
Sommaire	xxv
1 Préliminaires	1
Bibliographie	33
2 Le Problème de Moments Complexe Quintique	41
3 Mesure Discrète, Idempotents et Problème de Moments	63
4 L'Étude Asymptotique du Spectre Discret de Matrice de Jacobi Non Bornée	83
Table des matières	115

Chapitre **1**

Préliminaires

1.1 Histoire et Problèmes de Moments Classiques

1.1.1 Histoire

Étant donné une suite réelle $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et K un sous-ensemble de \mathbb{R} , le problème de moments sur K consiste à chercher une mesure positive sur \mathbb{R} à support dans K telle que

$$\gamma_k = \int_K x^k d\mu(x), \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

La notion du problème de moments a été introduite pour la première fois par Thomas Jan Stieltjes dans son fameux papier " Recherches sur les fractions continues " en 1894-95. Dans ce manuscrit [91], T. J. Stieltjes a mis plusieurs nouvelles idées parmi lesquelles nous pouvons citer l'intégrale de Stieltjes. Ce concept est devenu l'outil fondamental de la théorie de probabilité, mais l'idée de l'intégrale de Stieltjes avait été considérée antérieurement dans une série de travaux de P. L. Tchebychev (1821-1894). En effet, P. L. Tchebychev étudiait une intégrale assez particulière de type $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy$ où $f(y) \geq 0$ à partir de 1855 environ et en 1873 il a posé et résolu un problème relatif au problème de moments. Il est revenu à cette recherche plusieurs fois et plus tard une étude exhaustive et rigoureuse sur l'héritage de Tchebychev a été faite par le célèbre A. Markov. Comme application à la théorie des fractions continues, Stieltjes a découvert que une condition nécessaire et suffisante pour que son problème de moments admette une solution, est la positivité des coefficients de la fraction continue associée (voir [1, 89]).

Une fois l'existence garantie, la question de l'unicité prend le relais. Dans le cas de l'existence d'une solution unique nous parlons d'un problème de moments déterministe, tandis que nous appelons un problème de moments indéterministe dans le cas de l'existence d'au moins deux solutions. Notons que l'existence de deux solutions implique l'existence d'une infinité de solutions obtenues par toutes les combinaisons convexes possibles. Au passage il faut indiquer que dans le même manuscrit [91], *Stieltjes* avait dévoilé des liens entre *l'indéterminisme/le déterminisme* du problème de moments et respectivement la convergence/la divergence de la fraction continue associée. Quelques années plus tard, le problème de moments de Stieltjes, c'est-à-dire le problème de moments sur la demi-droite \mathbb{R}^+ , a connu des extensions dans des nombreux travaux des auteurs de l'époque. L'extension la plus pertinente concerne le problème de moments sur la droite réelle. La première résolution du problème sur la droite réelle a été donnée par *Hamburger* [43] et pour cette raison on l'appelle le problème de moments de *Hamburger*. Des recherches par des méthodes différentes et dans d'autres directions, étaient menées simultanément par *P. Nevanlinna*, *M. Riesz*, *E. Hellinger* et *T. Carleman* [76, 84, 83, 48, 14].

1.1.2 Problèmes de moments classiques

Le problème de moments pose la question de la caractérisation d'une suite de nombres réels qui est la suite de moments $\int x^k d\mu(x)$, $k = 0, 1, \dots$ d'une mesure *positive*

μ définie sur la droite réelle (Hamburger), sur seulement une partie de \mathbb{R} (Stieltjes, Hausdorff), ou bien sur le cercle unité (étudié par Verblunsky, Akhiezer et Krein une dizaine d'année après la formulation de Hamburger). Une condition manifestement nécessaire de solvabilité est la positivité d'une certaine forme quadratique construite à partir de la suite en question. Cette construction sera décrite dans la suite et notre premier objectif sera de montrer que la condition en question est suffisante pour que le problème de moments admette une solution. Une fois l'existence est assurée, nous allons aborder la question d'unicité.

Revenons à la positivité qui est un sujet très vaste. Son rôle est indispensable et inévitable. Nous commençons par l'approche de *Marcel Riesz* qui a exploité la convexité par des méthodes d'espaces vectoriels pour pouvoir introduire une procédure qui consiste à étendre des formes positives tout en conservant la propriété fondamentale de la positivité. Cette approche sera détaillée dans la Section 1.2.1.

Des méthodes différentes ont été utilisées par d'autres mathématiciens intéressés par le problème de moments. En particulier *M. G. Krein* a utilisé la géométrie des corps convexes dans ses recherches et plus tard cette approche a donné lieu à la découverte des espaces particuliers appelés les espaces de Tchebychev dans la théorie d'approximation. D'un autre point de vue, la forme quadratique positive en question permet de définir un produit scalaire sur les polynômes et construire des polynômes orthogonaux vérifiant une relation de récurrence à trois termes. Cette idée peut être vue comme une version discrète de l'opérateur de Sturm-Liouville et pour plus de détails, nous faisons référence à l'excellente exposition [1] où le lecteur trouve aussi plus de développements et plus de précision sur tout ce qui précède.

Ce problème (le problème de moments) est transportable dans un domaine complexe par la transformée de Stieltjes. En utilisant les propriétés des applications conformes dans ce contexte et en introduisant des cercles appelés les cercles de Hellinger, on obtient des nouvelles conditions suffisantes et nécessaires aussi pour l'existence que pour l'unicité de la solution des problèmes des moments en question.

1.2 Le problème unidimensionnel et multidimensionnel

1.2.1 Le problème unidimensionnel : Méthode de Riesz

En 1923 Marcel Riesz a proposé une très importante approche qui sera, par la suite, associée à son nom (la méthode de Riesz pour le problème de moments)[85, 82]. Cette approche est basée sur le résultat connu sous le nom du théorème de prolongement de M. Riesz.

Théorème 1. Soient E un espace vectoriel, F un sous espace de E , et K un cône convexe dans E .

Une fonctionnelle linéaire $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ est dite K -positive sur F si :

$$\forall x \in K \cap F; \quad \varphi(x) \geq 0$$

Si on suppose que $E = F + K$, alors on peut prolonger φ en une fonctionnelle positive sur E .

Ce théorème puissant permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence des solutions du problème tronqué sur une partie (a, b) de \mathbb{R} où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour la résolution complète du problème, M. Riesz utilise le théorème de sélection de Helly [49] (E. Helly, Über lineare Funktionaloperationen, Wien.).

Théorème 2 (Helly). Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions à variation uniformément bornée. Alors il existe une sous-suite $(\varphi_{n_k})_k$ qui converge simplement vers une fonction à variation bornée φ , telle que pour toute fonction continue f :

$$\lim_k \int_a^b f(t) d\varphi_{n_k}(t) = \int_a^b f(t) d\varphi(t).$$

Pour bien formuler son résultat Riesz a donné les définitions suivantes.

Définition 3. Soient $p \in [1, \infty]$ et la fonctionnelle dite de Riesz

$$L : \mathbb{R}_p[X] \mapsto \mathbb{R}, \sum_{k=0}^p a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^p a_k \gamma_k,$$

où $\mathbb{R}_p[X]$ est l'ensemble de polynômes de degré inférieur ou égal à p . Alors :

1. Une suite $(\gamma_n)_{n \leq p}$ est dite positive sur un intervalle (a, b) si la fonctionnelle L est positive sur tout polynôme positif sur (a, b) .
2. $(\gamma_n)_{n \leq p}$ est dite K -positive (positive sur K) si la fonctionnelle R est positive sur les polynômes positifs sur K .

Le cas $p = \infty$ correspond à une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le résultat suivant est dû à M. Riesz.

Théorème 4. [85] Soit $p \geq 1$. Alors il existe une fonction φ croissante sur (a, b) vérifiant

$$\gamma_i = \int_a^b t^i d\varphi(t) \quad (i = 0, \dots, p-1) \text{ et } \gamma_p \geq \int_a^b t^p d\varphi(t),$$

si et seulement si la suite $(\gamma_n)_{n \leq p}$ est positive sur (a, b) .

Dans la suite on propose des caractérisations de la positivité de la suite $(\gamma_n)_n$ en langage matriciel et en fonction du support requis. Les résultats suivants peuvent être interprétés comme la solution d'une combinaison des deux théorèmes qui précèdent, grâce au fait que, dans le cas d'une seule variable, tout polynôme positif peut s'écrire comme somme de deux carrés de polynômes réels.

Resultats 1.

\mathbb{R} (Hamburger) : $(\gamma_n)_n$ est positive si et seulement si la matrice $(\gamma_{i+j})_{i,j}$ est définie-positive.

\mathbb{R}^+ (**Stieltjes**) : $(\gamma_n)_n$ est positive si et seulement si les matrices $(\gamma_{i+j})_{i,j}$ et $(\gamma_{i+j+1})_{i,j}$ sont définies positives.

(0;1) (**Hausdorff**) : $(\gamma_n)_n$ est positive si et seulement si $\sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i \gamma_{i+k} \geq 0$ pour tout $k, p \in \mathbb{N}$.

Généralement, le problème de moments sur K ($K \subseteq \mathbb{R}$) admet une solution si et seulement si la suite est K -positive (positive sur K). i. e.

$$\begin{aligned} (\gamma_n) \text{ est une suite de moments sur } K \subset \mathbb{R} &\iff (\gamma_n) \text{ est } K\text{-positive} \\ &\iff R(P) \geq 0 \text{ pour tout } P_{/K} \geq 0. \end{aligned}$$

1.2.2 Le Problème multi-dimensionnel

Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^p \alpha_i$ et $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^p}$ une suite dans \mathbb{R}^p . Considérons les deux problèmes suivants :

— Sous quelle(s) condition(s) existe-t-il une mesure positive μ sur $K \subset \mathbb{R}^p$, vérifiant l'équation :

$$\gamma_\alpha = \int_K x^\alpha d\mu(x), \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^p ? \quad (1.1)$$

On l'appelle Problème de Moments Complet.

— Sous quelle(s) condition(s) existe-t-il une mesure positive μ sur $K \subset \mathbb{R}^p$, vérifiant l'équation :

$$\gamma_\alpha = \int_K x^\alpha d\mu(x), \quad \text{pour } |\alpha| \leq k ? \quad (1.2)$$

On l'appelle Problème de Moments Tronqué d'ordre k .

En 1935, E. K. Haviland a réussi d'étendre la méthode de Riesz au problème de moment réel à deux variables [46], Cela a eu lieu deux années après que T. H. Hildebrand et I. J. Schoenberg ont résolu le problème de moments de Hausdorff dans le cas multi-dimensionnel [51]. Dans son article Haviland a trouvé des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème de Hamburger en deux dimensions soit résoluble, en mettant comme remarque que la démonstration se généralise à plusieurs dimensions. Dans l'année qui suit Haviland a prouvé le théorème suivant [47].

Théorème 5 (Haviland). *Il existe une mesure μ positive sur $K(\subset \mathbb{R}^p)$ solution du problème (1.1) si et seulement si la suite $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^p}$ est positive sur K .*

La question s'est donc réduit en grande partie à une bonne caractérisation des polynômes positifs sur les parties de \mathbb{R}^p . Dans le cas unidimensionnel la difficulté est surpassée, grâce au fait que tout les polynômes positifs peuvent être écrits comme somme de carrés de polynômes. Plus précisément, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est positif alors il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X) = (A(X))^2 + (B(X))^2. \quad (1.3)$$

Malheureusement dans le cas de plusieurs variables cette propriété n'est plus valable.

Definition 6. Un polynôme P de $\mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_p] := \mathbb{R}[\underline{X}_p]$ est dit somme des carrés de polynômes (SOS), s'ils existent des polynômes $f_i \in \mathbb{R}[\underline{X}_p]$ tels que $P = \sum_i f_i^2$.

L'exemple concret d'un polynôme positif qui ne s'écrit pas comme SOS est donné en 1967, par T. Motzkin [72]

$$P(X, Y) = 1 + X^4 Y^2 + X^2 Y^4 - 3X^2 Y^2. \quad (1.4)$$

Une réponse plus générale et plus ancienne que le problème en soi a été attribuée par Hilbert en 1888 [50] quand il a démontré le résultat suivant

Théorème 7 (D. Hilbert). Un polynôme $P \in \mathbb{R}[\underline{X}_p]$ positive sur \mathbb{R}^p , de degré $2n$ est un SOS si et seulement si :

1. $p = 1$, et $n \in \mathbb{N}$.
2. $n = 1$, et $p \in \mathbb{N}$.
3. $p = 2$, et $n = 2$.

Cet handicap a motivé une réflexion plus globale à l'égard de cette question de positivité, ce qui était traduit par l'annonce de son 17ème problème lors du congrès international des mathématiciens à Paris en 1900 où Hilbert a posé la question suivante : **Est-ce que tout polynôme positif à coefficients réels peut être écrit comme somme des carrés de fonctions rationnelles sur \mathbb{R}^p ?**

Sans oublier de dire qu'il a déjà eu, en 1893, une réponse positive à cette question dans le cas de deux variable.

Il fallait attendre 27 ans après l'annonce du 17ème problème d'Hilbert pour qu'une réponse fût donnée dans le cas général, rapporté par E. Artin [2] qui a prouvé le théorème suivant

Théorème 8. Si $f \in \mathbb{R}[\underline{X}_p]$ est positive sur \mathbb{R}^p , alors il existent $q, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}[\underline{X}_p]$, tels que

$$f = \frac{p_1^2 + \dots + p_k^2}{q^2}. \quad (1.5)$$

La preuve d'Artin était loin d'être constructive. D'ailleurs, d'autres travaux de recherche étaient consacrés à l'étude du cas où f est strictement positive, par exemple Habicht a donnée une méthode constructive dans sa preuve basée sur un théorème de Pólya, qui dit que si P est un polynôme homogène strictement positif sur $\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$, alors il existe N tel que $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^N P(x_1, \dots, x_n)$ a des coefficients positifs. D'autres auteurs étaient intéressés plutôt par optimiser le N dans le théorème de Pólya (voir Powers et Reznick [79]). Aussi une version quantitative du 17ème problème d'Hilbert, qui consiste à déterminer le nombre minimal des carrés dont nous avons besoin, avait intéressé les chercheurs à l'époque, voir [78]. Clairement dans le cas unidimensionnel réel ce nombre (des carrés optimal) est 2 alors que dans $\mathbb{R}[x, y]$ Hilbert a montré qu'il est inférieur ou égal à 4. Dans la littérature on peut trouver encore beaucoup d'autres travaux consacrés à ce problème.

Le Théorème d'Artin était le sujet de nombreux développements. Ses développements les plus importants dans le domaine de l'optimisation sont ceux où nous regardons la positivité des polynômes sur des ensembles définis par des inégalités polynomiales au lieu de tout \mathbb{R}^p . Pour une bonne formulation on commence par donner quelques préliminaires indispensables. Notons Σ_p^2 le cône de toutes sommes finies de carrés de polynômes dans $\mathbb{R}[\underline{X}_p]$ et soit $F = \{r_1, \dots, r_k\}$ une famille finie dans $\mathbb{R}[\underline{X}_p]$. Une partie K de \mathbb{R}^p , est dite *semi-algébrique basique fermée*, s'il existe une famille finie F dans $\mathbb{R}[\underline{X}_p]$, vérifiant :

$$K_F = \{x \in \mathbb{R}^p : r_1(x) \geq 0, r_2(x) \geq 0, \dots, r_k(x) \geq 0\}. \quad (1.6)$$

De manière analogue une partie est dite *semi-algébrique fermée* si elle est une réunion finie d'ensembles semi-algébriques basiques fermés. Définissons ainsi le *préordre* associé à F par :

$$T = T_F := \left\{ \sum_{\varepsilon_i \in \{0,1\}} r_1^{\varepsilon_1} \dots r_n^{\varepsilon_n} \sigma_\varepsilon \text{ où } \sigma_\varepsilon \in \Sigma_p^2 \right\}.$$

Trivialement les éléments qui appartiennent à T_F sont tous positifs sur K_F mais la réciproque n'est pas vraie en général. Le théorème suivant décrit tous les polynômes respectivement positifs et strictement positifs sur le semi algébrique K_F en termes de T_F .

Théorème 9 (Positivstellensatz de Krivine-Stengle [90]). *Soit F un ensemble fini de $\mathbb{R}[\underline{X}_p]$, et soit f un polynôme. Alors :*

1. $f \geq 0$ sur K_F si et seulement si ils existent $m \in \mathbb{N}$ et $p, q \in T_F$ tels que $pf = f^{2m} + q$.
2. $f > 0$ sur K_F si et seulement si ils existent $p, q \in T_F$ tels que $pf = 1 + q$.
3. $f = 0$ sur K_F si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $-f^{2m} \in T_F$.
4. $K_F = \emptyset \iff -1 \in T_F$

Dans le cas où K_F est en plus compact, Schmüdgen a prouvé un résultat surprenant qui est souvent cité dans la littérature sous le nom de la Positivstellensatz Archimédienne ou la Positivstellensatz de Schmüdgen.

Théorème 10 (Schmüdgen Positivstellensatz [87]). *Soit F une famille finie de $\mathbb{R}[\underline{X}_p]$ et supposons que K_F est compact. Soit f un polynôme. Alors :*

$$f > 0 \text{ sur } K_F \text{ si et seulement si } f \in T_F.$$

En termes de la fonctionnelle de Riesz une version de ce résultat est donnée par le corollaire suivant

Corollaire 1 (Schmüdgen). *Soit $F = \{r_i\}_{i \leq n} \subset \mathbb{R}[\underline{X}_p]$. Le problème de moments (1.1) admet une solution sur K_F (qui est supposé compact), si et seulement si*

$$\text{pour tout } I \subset \{1, \dots, n\}, f \in \mathbb{R}[\underline{X}_p] \quad R(r_I f^2) \geq 0,$$

où $r_I = \prod_{i \in I} r_i$.

Compte tenu du fait que la positivité sur les SOS_s est une condition nécessaire, des grands chercheurs ont posé la question si cette condition est également suffisante. La réponse à cette question est négative car on a le résultat suivant (voir [6]).

Théorème 11 (Berg-Christensen-Jensen (1979)). *Si $p \geq 2$, alors il existe des suites $(\gamma_\alpha)_\alpha$ positives sur les SOS_s , qui ne sont pas de moments.*

1.3 Le problème de moments tronqué et l'approche de platitude

Depuis *Haviland*, on n'a considéré que le problème complet sans s'intéresser au problème tronqué. En effet, on pensait tout le temps que le problème tronqué ne présente pas d'utilités en-soi et que tout l'intérêt réside dans le problème complet. Or on a toujours su que la résolution du problème tronqué implique une résolution du problème complet, mais seulement en 2001 que le résultat fut publié :

Théorème 12 (Stochel [92]). *Soit $K \subset \mathbb{C}^p$, et soit $\gamma_{(\alpha,\beta)}$ une suite de nombres complexes. Si pour tout $n \geq 0$ il existe une mesure de Borel μ_n positive vérifiant pour $|\alpha| + |\beta| \leq n$,*

$$\gamma_{(\alpha,\beta)} = \int_K z^\alpha \bar{z}^\beta d\mu_n(z), \quad (1.7)$$

alors il existe une mesure de Borel μ positive qui vérifie (1.7) pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^p$.

1.3.1 L'approche de Flatness

Exclusivement pour le problème tronqué R . *Curto* et *L. Fialkow* ont développé une approche basée sur l'extension positive des matrices dites de moments, voir (1.11) pour le cas unidimensionnel et (1.8) pour le cas multidimensionnel (voir la série de papiers [16, 20, 27, 21, 22]). Leur but était d'obtenir une extension positive qui préserve le même rang. Explicitement, pour $m \geq 1$, on dit que $A(m+1)$ (voir (1.8)) préserve le rang de $A(m)$ si $\text{Rang}(A(m+1)) = \text{Rang}(A(m))$.

1.3.2 Le cas unidimensionnel

Dans leur étude du problème de la complétion sous-normale du Shift, *R. Curto* et *L. Fialkow*, ont utilisé une caractérisation des Shifts à poids sous-normaux donnée par *Berger* dans le théorème suivant. D'abord, soient $\alpha := (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R} , \mathcal{H} un espace d'Hilbert dont une base $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est donnée et T_α un Shift à poids défini par la formule :

$$T_\alpha(e_k) = \alpha_k e_{k+1}.$$

Alors

Théorème 13 (Berger [42]). T_α est sous-normal si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ sur $[0, \|T\|^2]$ vérifiant :

$$\gamma_n := \alpha_0^2 \dots \alpha_{n-1}^2 = \int_0^{\|T\|^2} t^n d\mu(t).$$

Pour résoudre ce problème ils ont considéré les matrices suivantes qui sont respectivement la matrice de Hankel d'ordre k et sa décalée d'ordre k :

$$A(k) = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_k \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_k & \gamma_{k+1} & \cdots & \gamma_{2k} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$B(k) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{k+1} \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{k+1} & \gamma_{k+2} & \cdots & \gamma_{2k+1} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

et le vecteur

$$V(p, q) = (\gamma_{p+j})_{0 \leq j \leq q}.$$

Ils ont réussi à trouver une caractérisation en termes de la matrice de Hankel et sa décalée. Les résultats en question sont les suivants [16] :

Théorème 14 (Curto-Fialkow (cas impaire)[16](1991)). Soit $(\gamma_i)_{i \leq 2k+1}$ une suite de nombres réels. Alors (γ_i) est une solution du problème de moments tronqué d'ordre $2k+1$ si et seulement si :

(**Hamburger**) : $A(k) \geq 0$ et $V(k+1, k) \in \text{Im}(A(k))$.

(**Stieltjes**) : $A(k) \geq 0$, $B(k) \geq 0$ et $V(k+1, k) \in \text{Im}(A(k))$.

(**Hausdorff**) : $A(k) \geq 0$, $V(k+1, k) \in \text{Im}(A(k))$, et $A(k) \geq B(k) \geq 0$.

Au passage, On note que (γ_i) est une suite récurrente d'ordre N si et seulement si il existe des coefficients $\rho_0, \dots, \rho_{N-1} \in \mathbb{R}$

$$\gamma_{j+N+1} = \sum_{q=0}^{N-1} \rho_q \gamma_{j+q}.$$

Théorème 15 (Curto-Fialkow (cas paire)[16] (1991)). Soit $(\gamma_i)_{i \leq 2k}$ une suite de nombres réels. Alors (γ_i) est une solution du problème de moments tronqué d'ordre $2k$ si et seulement si :

(**Hamburger**) : $A(k) \geq 0$ et γ_i récurrente d'ordre $\text{Rang}(A(k))$.

(**Stieltjes**) : $A(k) \geq 0$, $B(k-1) \geq 0$ et $V(k+1, k-1) \in \text{Im}(B(k-1))$.

(Hausdorff) : $A(k) \geq 0$, et il existe un nombre γ_{2k+1} réel tel que $V(k+1, k) \in \text{Im}(A(k))$ et $A(k) \geq B(k) \geq 0$.

1.3.3 Le cas multidimensionnel

L'étude du problème tronqué multidimensionnel a été déclenchée par le mémoire de Curto-Fialkow [22]. Les principaux changements par rapport au problème unidimensionnel peuvent être résumés dans les trois points suivants :

- Le remplacement de la matrice de Hankel, dans le cas réel, par une matrice par blocs qui a aussi une structure de matrice de Hankel. Dans le cas complexe, la matrice n'aura pas une structure de Toeplitz mais plutôt des blocs de Toeplitz. Nous allons les appeler respectivement matrice de type Hankel et de type Toeplitz.
- Le remplacement de la notion de récurrence classique par une récurrence issue d'une relation polynomiale qui se traduit sur les colonnes.
- L'apparition de la notion "platitude" (Flatness), comme approche de résolution du problème.

Dans l'intention de résoudre le problème (1.2) dans le cas où $K = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Curto et L. Fialkow ont introduit le problème de moments tronqué complexe : étant donné un entier $m \in \mathbb{N}$ et une suite tronquée de nombres complexes $\gamma^{(m)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}; i+j \leq m}$ tels que $\gamma_{00} > 0$ et $\gamma_{ji} = \bar{\gamma}_{ij}$, le problème de moments tronqué complexe consiste à chercher une mesure positive μ à support dans \mathbb{C} , telle que

$$\gamma_{ij} = \int \bar{z}^i z^j d\mu, \quad \text{pour tout } i, j \in \mathbb{N}, \text{ tels que } i + j \leq m. \quad (1.10)$$

Une condition nécessaire évidente est le fait que

$$\Lambda(p\bar{p}) = \int p\bar{p}d\mu = \sum a_{ij}\bar{a}_{nk}\gamma_{i+k,j+n} \geq 0, \quad \text{pour tout } p \equiv \sum_{i+j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_{ij}\bar{z}^i z^j \in \mathbb{C}[z, \bar{z}].$$

Cette condition correspond à la positivité de la matrice

$$M(n) \equiv M(\gamma^{(2n)}) := (\gamma_{i+k,j+h})_{\substack{0 \leq i+j \leq n, \\ 0 \leq h+k \leq n}}$$

connue dans la littérature sous le nom de la *matrice de moments complexe*.

Les colonnes et les lignes de $M(n)$ sont notées par l'ordre lexicographique suivant : $1, Z, \bar{Z}, Z^2, \bar{Z}Z, \bar{Z}^2, \dots, Z^n, \bar{Z}Z^{n-1}, \dots, \bar{Z}^{n-1}Z, \bar{Z}^n$. En fait $M(n)$ peut être considérée comme une matrice par blocs :

$$M(n) := \begin{pmatrix} M[0,0] & M[0,1] & \dots & M[0,n] \\ M[1,0] & M[1,1] & \dots & M[1,n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M[n,0] & M[n,1] & \dots & M[n,n] \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

où

$$M[i, j] := \begin{pmatrix} \gamma_{i,j} & \gamma_{i+1,j-1} & \cdots & \gamma_{i+j,0} \\ \gamma_{i-1,j+1} & \gamma_{i,j} & \cdots & \gamma_{i+j-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{0,i+j} & \gamma_{1,i+j-1} & \cdots & \gamma_{j,i} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Exemples 1. Exemples des matrices $M(2)$ et $M(3)$:

$$M(2) = \begin{matrix} & 1 & Z & \bar{Z} & Z^2 & \bar{Z}Z & \bar{Z}^2 \\ \begin{matrix} 1 \\ Z \\ \bar{Z} \\ Z^2 \\ \bar{Z}Z \\ \bar{Z}^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{10} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{20} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{20} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} \\ \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{30} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} \\ \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{21} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} \\ \gamma_{02} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (1.13)$$

$$M(3) := \begin{matrix} & 1 & Z & \bar{Z} & Z^2 & Z\bar{Z} & \bar{Z}^2 & Z^3 & Z^2\bar{Z} & Z\bar{Z}^2 & \bar{Z}^3 \\ \begin{matrix} 1 \\ Z \\ \bar{Z} \\ Z^2 \\ Z\bar{Z} \\ \bar{Z}^2 \\ Z^3 \\ Z^2\bar{Z} \\ Z\bar{Z}^2 \\ \bar{Z}^3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{10} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{20} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{20} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} \\ \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{30} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{50} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} \\ \gamma_{02} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{05} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} \\ \gamma_{30} & \gamma_{31} & \gamma_{40} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{50} & \gamma_{33} & \gamma_{42} & \gamma_{51} & \gamma_{60} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{24} & \gamma_{33} & \gamma_{42} & \gamma_{51} \\ \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{15} & \gamma_{24} & \gamma_{33} & \gamma_{42} \\ \gamma_{03} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{05} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{06} & \gamma_{15} & \gamma_{24} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Nombreux auteurs ont tenté de résoudre le problème de moments tronqué à deux variables, mais seulement le cas quadratique ($m = 2$), le cas cubique ($m = 3$) et le cas quartique ($m = 4$) sont complètement résolus. Les cas $m = 5$ et 6 sont partiellement résolus. Plus précisément, la réponse n'est pas encore connue dans certaines situations particulières.

Dans le chapitre 2, en se basant sur une méthode combinant la platitude de Curto-Fialkow et la récursivité développée par *K. Idrissi* et *E. H. Zerouali*, nous donnons une solution du problème de moments tronqué complexe dans le cas quintique ($m = 5$) [40], à l'exception d'un sous cas. En outre cette solution fournit une mesure à support minimal. Certains exemples pratiques sont également donnés pour illustrer les différents cas traités.

Dans l'article [30], R. Curto et S. Yoo ont résolu le cas sixtique ($m = 6$) sous les hypothèses : $M(3) \geq 0$, $M(2) > 0$ et les colonnes de la matrice $M(3)$ vérifient la relation de dépendance linéaire $Z^3 = itZ - u\bar{Z}$ où t et u sont des paramètres réels.

Une généralisation de ce résultat a été donnée par K. Idrissi et E. H. Zerouali [52]. Cependant le problème du moment sixtique reste toujours ouvert. Parmi les résultats les plus pertinents et les plus utiles dans ce sens nous citons le théorème de Curto et Fialkow suivant (voir [22]).

Théorème 16 (Curto-Fialkow (1996)). *Le problème de moments d'ordre $2n$ admet une solution atomique de rang $M(n)$ -atomes si et seulement si $M(n) \geq 0$ et $M(n)$ admet une extension plate $M(n+1)$, c'est-à-dire $M(n)$ peut être prolongée en une matrice positive $M(n+1)$ du même rang.*

En 2005, les mêmes deux auteurs ont obtenu un résultat plus général, [26].

Théorème 17 (Curto-Fialkow (2005)). *Le problème de moments d'ordre $2n$ admet une solution si et seulement si $M(n) \geq 0$ et il existe $k \geq 0$ tel que $M(n)$ admet une extension positive $M(n+k)$ qui admet une extension plate $M(n+k+1)$.*

En général il est difficile de prouver l'existence d'une telle extension, mais dans des cas particuliers une valeur de k peut être donnée concrètement ou peut être estimée suivant les conditions initiales.

Nous commençons par présenter le critère de l'existence et de l'unicité pour le problème de moments quadratique.

Théorème 18 (The quadratic moment problem [22, Théorème 6.1]).

Soient $\gamma^{(2)} := \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 2}$, $M(1)$ la matrice de moments γ associée et $r := \text{rank}(M(1))$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\gamma^{(2)}$ admet une mesure représentante.
- (ii) $\gamma^{(2)}$ admet une mesure représentante r -atomique (atomique de r atomes).
- (iii) $M(1) \geq 0$.

D'ailleurs, si $r = 1$ alors il existe une mesure représentante unique ; si $r = 2$ alors les mesures solutions 2-atomiques sont paramétrées par une droite ; si $r = 3$ alors l'ensemble des mesures solutions 3-atomiques contient une sous-paramétrisation par un cercle.

Une résolution complète du problème cubique a été donnée par Kimsey dans [66]. Elle est basée sur des conditions de commutativité entre certaines matrices déterminées par les données initiales. Une alternative pour les problèmes cubiques non-singuliers a été présentée récemment par R. Curto and S. Yoo dans [28]. Afin de présenter le résultat de Kimsey convenablement, nous avons besoin d'abord de fixer quelques notations. Soit $\gamma^{(3)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 3}$ une suite de données initiales et notons

$$\Phi = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{10} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{20} \\ \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{11} \end{pmatrix}, \Phi_z = \begin{pmatrix} \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{11} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{21} \\ \gamma_{02} & \gamma_{03} & \gamma_{12} \end{pmatrix} \text{ et } \Phi_{\bar{z}} = (\Phi_z)^*.$$

Théorème 19 (The cubic moment problem [66, Theorems 3.2 and 3.4]).

Soient Φ, Φ_z et $\Phi_{\bar{z}}$ comme ci-dessus.

- A)** Supposons $r := \text{rank } \Phi = 1$ ou 2 . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
- (i) $\Phi \geq 0$ et ils existent des matrices Θ_z et $\Theta_{\bar{z}}$ telles que $\Phi\Theta_z = \Phi_z$ et $\Phi\Theta_{\bar{z}} = \Phi_{\bar{z}}$;
 - (ii) $\gamma^{(3)}$ admet une mesure représentante r -atomique;
 - (iii) $\gamma^{(3)}$ admet une mesure représentante atomique;
- B)** Supposons $\Phi > 0$ et posons $\Theta_z = \Phi^{-1}\Phi_z$ et $\Theta_{\bar{z}} = \Phi^{-1}\Phi_{\bar{z}}$. Alors
- (i) $\gamma^{(3)}$ admet une mesure représentante 3-atomique si et seulement si les matrices Θ_z et $\Theta_{\bar{z}}$ commutent.
 - (ii) $\gamma^{(3)}$ admet une mesure représentante 4-atomique si et seulement si les matrices Θ_z et $\Theta_{\bar{z}}$ ne commutent pas.

Une solution concrète du problème de moments quartique dans le cas où $M(2) > 0$ a été donnée dans [29].

Théorème 20 ([29, Theorem 2.1]). Supposons que $M(2)$ est positive et inversible. Alors $M(2)$ admet une mesure solution qui possède exactement 6 atomes; en d'autres termes $M(2)$ admet une extension $M(3)$ plate.

Pour énoncer des résultats dans le cas où la matrice $M(2)$ est dégénérée, on a besoin de définir des notions supplémentaires. On dit que la matrice $M(n)$ est récursivement générée s'il existe une relation entre ses colonnes de la forme $p(Z, \bar{Z}) = 0$ où p est un polynôme. On remarque que $p(Z, \bar{Z}) = 0$ implique $(q \cdot p)(Z, \bar{Z}) = 0$ pour tout polynôme q tel que le degré du produit qp ne dépasse pas n . Notons $\nu \equiv \nu_{\gamma^{(m)}}$ la variété algébrique associée à $\gamma^{(m)}$, c'est à dire que $\nu_{\gamma^{(m)}}$ est l'intersection des ensembles zéros des polynômes $p(z; \bar{z})$ tels que $M(n_m)p = 0$ où $M(n_m)$ est la matrice de moments associée à $\gamma^{(m)}$.

L'énoncé suivant a un intérêt général mais pour le moment on l'a appliqué seulement dans le contexte du problème quartique, car les seuls cas pairs complètement résolus sont le cas quadratique et le cas quartique.

Théorème 21 (Cf. [19, 25, 24, 23, 41]). Soit $p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$. Si $\deg p \leq n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\gamma^{(2n)}$ possède une mesure représentante supportée par la variété définie par $p(z, \bar{z}) = 0$;
- (ii) Les colonnes de $M(n)$ sont linéairement dépendantes par une relation de type $p(Z, \bar{Z}) = 0$ et $M(n)$ admet une extension récursivement générée $M(n+1)$;
- (iii) Les colonnes de $M(n)$ sont linéairement dépendantes par une relation de type $p(Z, \bar{Z}) = 0$, $M(n) \geq 0$, $M(n)$ est récursivement générée et $\text{Rang } M(n) \leq \text{Card } \nu$.

1.3.4 Contributions de recherches menées dans cette thèse

Nous donnons une brève description des contributions de notre travail commun avec H. El-Azhar, K. Idrissi et E.H. Zerouali. En combinant l'approche de platitude de Curto-Fialkow et la récursivité des suites doublement indexées développée par Idrissi et

Zerouali nous avons trouvé une solution concrète pour presque tout les cas de figure du problème de moments quintique ($m = 5$). En fonctions des deux matrices $M(2)$ et B ci-dessous, nous avons proposé une solution minimale (qui possède un support minimal). D'un autre coté, nous avons découvert de nouvelles techniques qui serviront sans doute à raccourcir plusieurs étapes pas seulement dans le cas quintique mais aussi dans le problème de moments tronqué impair en général. En particulier notre méthode fournit d'une façon spectaculaire une solution du problème cubique qui était d'ores et déjà résolu par Kimsey [66].

$$M(2) := \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{10} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{20} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{20} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} \\ \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{30} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} \\ \gamma_{02} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} \\ \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} \\ \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} \\ \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{50} \\ \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} \\ \gamma_{05} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

1.4 L'approche de problème de moments tronqué basée sur les idempotents

L'approche de Curto et Fialkow décrite précédemment est basée sur l'étude de la matrice de moments. Nous allons maintenant décrire les travaux de recherches basés sur l'étude d'une fonctionnelle particulière. Pour cela nous avons besoin d'introduire des notations nouvelles et changer quelques-unes d'autres. Nous reformulons le problème de moments de manière suivante :

Soient $\gamma = (\gamma_\alpha)_{|\alpha| \leq 2m}$ une multi-suite (une suite multi-indixée) avec $\gamma_0 = 1$, et $t = (t_1, \dots, t_d)$ les d variables des fonctions sur \mathbb{R}^d , et $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_d^{\alpha_d}$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, initialement le problème consiste à chercher une mesure μ positive sur \mathbb{R}^d telle que

$$\gamma_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} t^\alpha d\mu(t). \quad (1.15)$$

Comme précédemment vu, la fonctionnelle de Riesz est définie sur l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à $2m$ par l'affectation $t^\alpha \rightarrow \gamma_\alpha$ et on suppose qu'elle prend des valeurs positives sur les SOS_s (voir Définition 6).

Cette étude de la fonctionnelle de Riesz utilise des techniques différentes de celles qui étaient mentionnées auparavant. Le point de départ est l'inégalité de Cauchy-Schwarz permettant d'utiliser les outils des espaces hilbertiens, notamment la théorie spectrale des uplets d'opérateurs auto-adjoints mutuellement commutatifs. Grâce à ces techniques on a réussi à simplifier les preuves de résultats de base de [7,8,14] et obtenir des résultats beaucoup plus généraux (voir [98, 99]). Pour illustrer l'importance de la fonctionnelle de Riesz dans la littérature du problème nous faisons référence à [41, 67, 80, 81].

Dans [98] nous remarquons que la propriété de la platitude de Curto et Fialkow peut être interprétée comme la stabilité de dimension d'espaces de Hilbert construits à l'aide de la fonctionnelle en question. Maintenant nous revenons à la terminologie de base et nous décrivons quelques résultats élémentaires indispensables pour démarrer.

Dans la suite, $d \geq 0$ est un entier fixé et \mathcal{P}^d est l'algèbre des polynômes sur $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, à coefficients complexes. Au lieu de travailler avec \mathcal{P}^d il serait possible de considérer un cadre plus général et travailler avec un ensemble \mathcal{S} de fonctions de Borel à valeurs complexes définies sur \mathbb{R}^d tel que $1 \in \mathcal{S}$ et $f \in \mathcal{S}$ implique $\bar{f} \in \mathcal{S}$. Dans ce cas nous appelons \mathcal{S}' l'ensemble où nous récupérons tout les produits des éléments de \mathcal{S} . Par exemple $(\mathcal{P}_m)'$ est exactement \mathcal{P}_{2m} .

Suivant [98, 97], une forme linéaire $\Lambda : \mathcal{P}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *uspf* (fonctionnelle unitaire positive sur les carrés : *unital square positive functional*) si :

1. $\Lambda(\bar{P}) = \overline{\Lambda(P)}$, pour tout $P \in \mathcal{P}^d$.
2. $\Lambda(|P|^2) \geq 0$, pour tout $P \in \mathcal{P}^d$.
3. $\Lambda(1) = 1$.

Puisque Λ est une forme quadratique positive sur \mathcal{P}^d , elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\Lambda(P\bar{Q})| \leq \sqrt{\Lambda(|P|^2)}\sqrt{\Lambda(|Q|^2)}. \quad (1.16)$$

On construit l'espace d'Hilbert \mathcal{H} par la construction de GNS (Gelfand-Naimark-Segal) en se servant l'ensemble

$$I_\Lambda = \{P : \Lambda(|P|^2) = 0\} = \{P : \Lambda(PQ) = 0 \text{ pour tout } Q \in \mathcal{P}^d\},$$

(où la deuxième égalité résulte de l'inégalité (1.16)). Par conséquent I_Λ est un idéal de \mathcal{P}^d et que \mathcal{P}^d/I_Λ est une algèbre complexe. On munit \mathcal{P}^d/I_Λ du le produit scalaire

$$\langle \hat{P}, \hat{Q} \rangle = \Lambda(P\bar{Q}), \quad \hat{P}, \hat{Q} \in \mathcal{P}^d/I_\Lambda.$$

Notons par \mathcal{H} l'espace d'Hilbert étant la complétion de Cauchy de \mathcal{P}^d/I_Λ . Au cas où \mathcal{S} est de dimension fini, \mathcal{S}/I_Λ est un espace d'Hilbert de dimension fini.

Pour donner une définition convenable de *la stabilité dimensionnelle*, on introduit l'application auxiliaire $J_{\mathcal{T}, \mathcal{S}}$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ et $I_{\Lambda, \mathcal{T}} := I_\Lambda \cap \mathcal{T}$. Alors l'application

$$J_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} : \mathcal{T}/I_{\Lambda, \mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{S}/I_\Lambda \quad J_{\mathcal{T}, \mathcal{S}}(f + I_{\Lambda, \mathcal{T}}) = f + I_\Lambda,$$

est une isométrie et par conséquent elle est injective.

Definition 22. Soit \mathcal{T} un sous espace vectoriel de \mathcal{S} . Nous disons que $\Lambda : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{C}$ est dimensionnellement stable à \mathcal{T} , si

$$J_{\mathcal{T}, \mathcal{S}}(\mathcal{T}/I_{\Lambda, \mathcal{T}}) = \mathcal{S}/I_\Lambda.$$

En d'autres termes, en mettant les lunettes Λ , nous voyons de préférence $\mathcal{T}/I_{\Lambda, \mathcal{T}} = \mathcal{S}/I_{\Lambda}$, i.e. pour tout $f \in \mathcal{S}$ on peut trouver $g \in \mathcal{T}$ telle que $f - g \in I_{\Lambda}$. Ce concept est une version équivalente de la platitude de Curto-Fialkow définie dans [22, Définition 5.1]. Supposons maintenant que μ est la mesure représentante de la fonctionnelle de Riesz sur \mathcal{T} , i. e.

$$\Lambda(f) = \int f d\mu, \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{T}.$$

Dans ce cas, nous disons que Λ admet une représentation intégrale.

Pour $m \geq 1$, soit \mathcal{P}_m^d l'ensemble des polynômes à d variables de degré total inférieur ou égal à m et par conséquent $(\mathcal{P}_m^d)'$ (comme \mathcal{S}') coïncide avec \mathcal{P}_{2m}^d dans la suite on omet le d . On considère la suite tronquée de nombres réels $\gamma^{(m)} = (\gamma_\alpha)_{|\alpha| \leq 2m}$ où $\gamma_0 = 1$, et l'application $\Lambda_{\gamma^{(m)}} : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonctionnelle de Riesz y associée. Nous avons manifestement $\Lambda_{\gamma^{(m)}}(1) = 1$ et $\Lambda_{\gamma^{(m)}}(P) = \overline{\Lambda_{\gamma^{(m)}}(\overline{P})}$ pour tout $P \in \mathcal{P}_{2m}$. De plus, si $\Lambda_{\gamma^{(m)}}(|P|^2) \geq 0$, $P \in \mathcal{P}_m$ alors $\Lambda_{\gamma^{(m)}}$ serait une uspf.

Trouver la mesure représentante de $\Lambda_{\gamma^{(m)}} : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$, pour un certain m , signifie résoudre le problème de moments tronqué. Tandis que résoudre le problème de moments complet pour $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$, vraisemblablement, signifie trouver une mesure représentante (une représentation intégrale) de $\Lambda_\gamma : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$.

1.4.1 La Stabilité dimensionnelle

Soit $\Lambda : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ une uspf et soit $\mathcal{H}_k = \mathcal{P}_k/I_k$ où $I_k = \{P \in \mathcal{P}_k : \Lambda(|P|^2) = 0\}$. Pour $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $I_k \subset I_l$, nous définissons l'isométrie $J_{k,l} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_l$ donnée par $J_{k,l}(p + I_k) = p + I_l$, $p \in \mathcal{P}_k$.

Definition 23. Soit $\Lambda : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ une uspf ($m \geq 1$) et soient $(\mathcal{H}_j)_{0 \leq j \leq m}$ les espaces d'Hilbert définis ci-dessus et $J_j : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_{j+1}$ les isométries y associées pour $j = 0, \dots, m-1$. Si l'égalité

$$J_k(\mathcal{H}_k) = \mathcal{H}_{k+1} \tag{1.17}$$

est satisfaite pour un certain $k \in \{0, \dots, m-1\}$, alors nous disons que Λ est dimensionnellement stable pour la valeur k . De plus, le plus petit k qui vérifie (1.17) s'appelle la dimension de stabilité de la fonctionnelle Λ .

Un des premiers résultats associées à la notion de la stabilité dimensionnelle est le suivant : si $\Lambda : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie la stabilité dimensionnelle pour la valeur $m-1$ alors l'existence et l'unicité du prolongement $\Lambda_\infty : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ est assuré, et Λ_∞ sera forcément, aussi une uspf. La preuve de ce résultat est basée sur la théorie des opérateurs et le calcul fonctionnel combinés avec un calcul élémentaire, voir [98]. En se servant d'un résultat démontré dans le même papier, F. Vasilescu a pu prouver que la stabilité dimensionnelle pour $m-1$ de la uspf précédemment définie, est une condition suffisante pour pouvoir conclure l'existence d'une mesure représentante de la fonctionnelle de Riesz et par conséquent pour obtenir une représentation intégrale. De plus la mesure trouvée est

d -atomique où $d = \text{Dim}(\mathcal{H}_m)$. Cette condition devient nécessaire si nous imposons sur la mesure qu'elle soit d -atomique.

Notons bien que le concept de la platitude de Curto et Fialkow pour une suite multi-indexée finie signifie exactement la même chose que la stabilité dimensionnelle introduite par F. Vasilescu, même si les deux approches sont manifestement distinctes l'une de l'autre.

Sous l'hypothèse de stabilité à $m - 1$ nous pouvons conclure que l'espace \mathcal{H}_m , muni d'une norme équivalente, a une structure de C^* -algèbre. Nous en déduisons que sous cette hypothèse, la fonctionnelle Λ admet une représentation intégrale telle que

$$\Lambda(P) = \int P d\mu, \quad \text{pour tout } P \in \mathcal{P}_{2m}. \quad (1.18)$$

Ce résultat reste valable pour Λ_∞ sous condition qu'elle soit stable quelque part (i.e il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Λ_∞ est stable pour $k-1$). De plus on a l'unicité de cette représentation intégrale. Une conséquence de la discussion précédente pour le problème de moments complet est donnée ci-dessous, (voir [98, Corollaire 2.15] et [18, Proposition 5.9]).

Théorème 24. *Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ une suite définie positive. Alors γ admet une mesure représentante si et seulement s'ils existent deux suites (m_j) des entiers tels que $m_j \geq j$ pour tout j et $\Lambda_j : \mathcal{P}_{2m_j+2} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont stables à m_j telles que $\Lambda_j|_{\mathcal{P}_j}$ est la fonctionnelle de Riesz associée à la suite tronquée $(\gamma_\alpha)_{|\alpha| \leq j}$, pour tout $j \geq 1$.*

1.4.2 La représentation des fonctionnelles unitaires positives sur les carrés

Il est bien connu que les mesures représentantes du problème de moments tronqué peuvent être choisies toujours atomiques. En effet, une fois l'existence assurée il existe nécessairement une solution étant une mesure atomique. Ce résultat est connu dans la littérature sous le nom du *théorème de Tchakaloff* [93, 4].

Dans la suite nous présentons quelques propriétés des fonctionnelles unitaires positives sur les carrés (de polynômes) qui possèdent une représentation intégrale où la mesure est atomique à atomes déterminées, voir [98]. Pour commencer, un résultat important de type Riesz-Haviland pour le problème tronqué est donné par

Théorème 25. *Soit $\Lambda : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ ($m \geq 1$) une uspf. Soit \mathcal{E} un ensemble fini de points distincts dans \mathbb{R}^d . Alors Λ admet une représentation intégrale avec le support de la mesure est contenu dans \mathcal{E} si et seulement si $\Lambda(P) \geq 0$ quand $P|_{\mathcal{E}} \geq 0$ (i. e. les évaluations de P sur \mathcal{E} sont toutes positives).*

Des résultats plus généraux se trouvent dans [93] et [17]. En disant "plus généraux" nous signifions qu'au lieu de l'ensemble \mathcal{E} on travaille sur des compacts. Nous présentons une conséquence du Théorème 25 : la uspf Λ possède une mesure représentante si et seulement s'il existe un polynôme Q qui dépend de l'ensemble \mathcal{E} et vérifiant $Q \in \mathcal{RP}_m$,

$\|Q\|_{\mathcal{E}} = 1$ et $\Lambda(Q) \geq \Lambda(P)$ pour tout $P \in \mathcal{RP}_m$ tel que $\|P\|_{\mathcal{E}} \leq 1$ ($\|f\|_{\mathcal{E}} = \max_{x \in \mathcal{E}} |f(x)|$, $f \in C(\mathcal{E})$), voir [98] pour la preuve.

Dans le même contexte un résultat relatif au problème extrémal est décrit dans le même papier. Rappelons que la variété algébrique associée à la fonctionnelle Λ par $\mathcal{V}_{\Lambda} = \bigcap_{P \in \mathcal{I}_m} \mathcal{Z}(P)$ où $\mathcal{Z}(P)$ est l'ensemble des zéros de P .

Nous terminons cette partie par un corollaire du théorème précédent

Corollaire 2. Soient $\Lambda : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ ($m \geq 1$) une uspf et \mathcal{E} un sous-ensemble fini de \mathcal{V}_{Λ} . supposons qu'ils existent des scalaires complexes α_j tels que $\Lambda(P) = \sum_{j=1}^p \alpha_j P(\xi_j)$, où $\xi_j \in \mathcal{E}$ et $\text{Card}(\mathcal{E}) = p$, pour tout $P \in \mathcal{P}_{2m}$. Si $\dim \mathcal{H} = p$, alors $\alpha_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, p$.

1.4.3 Les idempotents par rapport à une uspf

Soit $\mathcal{E} = \{\xi_1, \dots, \xi_p\} \subset \mathbb{R}^d$ et $C(\mathcal{E})$ la C^* -algèbre constituée de toutes les fonctions définies sur \mathcal{E} et à valeur complexe. Tous les éléments de $C(\mathcal{E})$ sont des restrictions de polynômes à d -uplet $t_1/\mathcal{E}, \dots, t_d/\mathcal{E}$ où $t = (t_1, \dots, t_d)$, via une interpolation polynomiale (de Lagrange ou autre).

On suppose que $m > 0$ tel que l'application

$$P \in \mathcal{P}_m \mapsto P|_{\mathcal{E}} \in C(\mathcal{E}), \quad (1.19)$$

soit surjective (on remarque que l'application définie par (1.19) est une application dont les valeurs sont des vecteurs de \mathbb{C}^d). Soit $\mu = \sum_{j=1}^p \rho_j \delta_{\xi_j}$ une mesure de probabilité atomique, où δ_{ξ_j} est la mesure de Dirac en ξ_j . Posons $\Lambda(P) = \int_{\mathcal{E}} P d\mu$ pour tout $P \in \mathcal{P}_{2m}$. Alors Λ est une uspf pour laquelle μ est une mesure représentante.

Soit $f \in C(\mathcal{E})$ un idempotent (i. e. $f^2 = f$ dans $C(\mathcal{E})$), ce qui signifie que f est une fonction caractéristique d'un sous ensemble de \mathcal{E} . L'hypothèse sur l'application (1.19) assure l'existence d'un P que nous allons supposé réel (à coefficients réels) tel que $P|_{\mathcal{E}} = f$. Par conséquent, nous obtenons

$$\Lambda(P^2) = \int_{\mathcal{E}} P^2 d\mu = \int_{\mathcal{E}} P d\mu = \Lambda(P). \quad (1.20)$$

Ceci montre l'importance des solutions de l'équation $\Lambda(P^2) = \Lambda(P)$ si nous souhaitons construire une mesure solution à partir de la fonctionnelle Λ . Cette simple remarque a donné lieu à la naissance d'une importante approche du problème de moments tronqué.

L'introduction du concept de l'idempotent par rapport à la uspf, est une tentative pour trouver une nouvelle approche à caractère intrinsèque. Pour commencer nous définissons le concept de l'idempotent par rapport à une uspf Λ et nous énonçons quelques propriétés élémentaires mais très utiles dans la suite.

Soit \mathcal{S} un espace fonctionnel de dimension finie dont les éléments agissent sur un espace topologique. Fixons une uspf $\Lambda : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{C}$ et $I_\Lambda = \{f \in \mathcal{S}; \Lambda(|f|^2) = 0\}$. Soit \mathcal{H}_Λ l'espace de Hilbert y associé. Pour tout $f \in \mathcal{S}$ nous posons $\hat{f} := f + I_\Lambda$ et notons par $R(\mathcal{H}_\Lambda)$ les éléments réels de \mathcal{H}_Λ i. e. $R(\mathcal{H}_\Lambda) = \{\hat{f} \in \mathcal{H}_\Lambda; f \in R(\mathcal{S})\}$. Rappelons que $\langle f, g \rangle = \Lambda(fg)$ pour tout $f, g \in \mathcal{S}$.

Definition 26. *Un élément $x \in R(\mathcal{H}_\Lambda) \setminus \{0\}$ est dit un idempotent (ou plus précisément Λ -idempotent) si*

$$\langle x, x \rangle = \langle x, 1 \rangle. \quad (1.21)$$

Désignons par

$$\mathcal{ID}(\Lambda) = \{x \in R(\mathcal{H}_\Lambda); \|x\|^2 = \langle x, 1 \rangle \neq 0\} \quad (1.22)$$

la famille des idempotents. Cette famille n'est pas vide car $\hat{1} \in \mathcal{ID}(\Lambda)$. Citons quelques propriétés des idempotents

Propriétés 1.4.1.

1. Si $\hat{f}, \hat{g}, \hat{f} - \hat{g} \in \mathcal{ID}(\Lambda)$, alors \hat{g} et $\hat{f} - \hat{g}$ sont orthogonaux.
2. Si $\hat{f} \in \mathcal{ID}(\Lambda)$ et $\hat{f} \neq \hat{1}$, alors $\hat{1} - \hat{f} \in \mathcal{ID}(\Lambda)$ et $\hat{f}, \hat{1} - \hat{f}$ sont orthogonaux.
3. Si $\{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p\} \subset \mathcal{ID}(\Lambda)$ sont mutuellement orthogonaux alors $\sum_{j=1}^p \hat{f}_j \in \mathcal{ID}(\Lambda)$.
4. Soit $\mathcal{L} := \{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p\}$ une famille des idempotents mutuellement orthogonaux. Alors \mathcal{L} est une famille maximale par rapport l'inclusion dans $\mathcal{ID}(\Lambda)$ si et seulement si $\hat{f}_1 + \dots + \hat{f}_p = \hat{1}$.
5. Tout élément de $\mathcal{ID}(\Lambda)$ est soit une somme des idempotents soit minimal ($\hat{f} \in \mathcal{ID}(\Lambda)$ est dit minimal si \hat{f} n'est pas décomposable i. e. ne peut pas être écrit comme somme d'idempotents).

Pour une démonstration des propriétés précédentes nous faisons références à [97] où le lecteur peut trouver d'autres propositions qu'on omet ici.

Pour donner une idée plus claire sur les idempotents dans $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, prenons $\hat{u} \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ tel que $\|\hat{u}\| = 1$ et $\langle \hat{u}, \hat{1} \rangle \neq 0$. Alors $\langle \hat{u}, \hat{1} \rangle \hat{u}$ est un idempotent. Par conséquent, il existe toujours des fonctions $b_1, \dots, b_p \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ telles que $\Lambda(b_j^2) = \Lambda(b_j) > 0$ et $\Lambda(b_j b_k) = 0$ pour tout $j, k = 1, \dots, p, j \neq k$. De plus tout $P \in \mathcal{S}$ peut être représenté d'une manière unique sous la forme

$$P = \sum_{j=1}^p \Lambda(b_j)^{-1} \Lambda(P b_j) b_j + P_0, \quad (1.23)$$

où $P_0 \in I_\Lambda$ et $p = \dim \mathcal{H}_\Lambda$, voir [97, Corollaire 1].

Remarks 1. *Considérons le cas où $\Lambda : \mathcal{P}_{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ est une uspf et $\gamma = (\gamma_\alpha)_{|\alpha| \leq 2m}$ la suite y associée. Soit $A = A_\Lambda = (\gamma_{\alpha, \beta})_{|\alpha|, |\beta| \leq m}$ une matrice réelle qui agit sur \mathcal{P}_m identifié à l'espace d'Hilbert \mathbb{C}^N où chaque polynôme est affecté au vecteur constituant ses coefficients dans la*

base canonique et N est la dimension de \mathcal{P}_m :

$$\mathbb{C}^N \longrightarrow \mathcal{P}_m \quad (1.24)$$

$$(x_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \longmapsto P_x = \sum_{|\alpha| \leq m} x_\alpha t^\alpha. \quad (1.25)$$

De plus, nous avons $\langle P_x, P_y \rangle = \langle x, y \rangle$ et $\|P_x\| = \|x\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{C}^N$. Alors A est positive et vérifie la propriété $\langle AP, Q \rangle = \Lambda(PQ)$ pour tout $P, Q \in \mathcal{P}_m$. En outre pour $x \in \mathbb{R}^N$ l'équation $\Lambda(P_x^2) = \Lambda(P_x)$ devient

$$\langle Ax, x \rangle = \langle Ae_1, x \rangle. \quad (1.26)$$

L'équation (1.26) sera appelée l'équation d'idempotent. Notons au passage que tout les éléments réels de I_Λ sont des solutions de cette équation, mais ils sont moins intéressants pour nous du fait qu'ils sont équivalents à zéro.

1.4.4 Les éléments Λ -multiplicatifs et la représentation intégrale de la uspf

Afin de donner une caractérisation des uspf_s qui possèdent une représentation intégrale, nous allons introduire des nouvelles notions et mettre en œuvre quelques préparations.

Définition 27. Soit $\Lambda : \mathcal{P}_{2m} \mapsto \mathbb{C}$ une uspf et $\mathcal{B} = \{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p\}$ une base orthogonale de \mathcal{H}_Λ composée d'idempotents. Alors on dit que \mathcal{B} est Λ -multiplicative si

$$\Lambda(t^\alpha b_j) \Lambda(t^\beta b_j) = \Lambda(b_j) \Lambda(t^{\alpha+\beta} b_j), \quad |\alpha| + |\beta| \leq m, j = 1, \dots, p. \quad (1.27)$$

La Λ -multiplicativité de \mathcal{B} peut être traduite à un autre langage tant que l'espace d'Hilbert \mathcal{H}_Λ est une C^* -algèbre. En fait la base \mathcal{B} est Λ -multiplicative si et seulement si pour tout caractère φ de la C^* -algèbre \mathcal{H}_Λ nous avons $\varphi(\hat{t}^\alpha) = \varphi(\hat{t}^\alpha)$, pour tout $|\alpha| \leq m$.

Le résultat suivant donne une caractérisation des uspf_s qui admettent une représentation intégrale en termes de la Λ -multiplicativité. Pour une preuve et des exemples concrets voir [97, pages 317-318].

Théorème 28. La uspf Λ de la Définition 27 possède une représentation intégrale (ou une mesure représentante) sur \mathbb{R}^d dont le nombre d'atomes est $p := \dim \mathcal{H}_\Lambda$ si et seulement s'il existe une base \mathcal{B} Λ -multiplicative de \mathcal{H}_Λ . De plus si on appelle une telle mesure μ alors $L^2(\mu) = \mathcal{H}_\Lambda$.

Le même manuscrit donne un résultat plus précis dans le cas où l'opérateur de Hankel A est inversible et on peut trouver également une description des bases Λ -multiplicatives en termes de la uspf Λ .

Plusieurs résultats importants ont été obtenus dans [22, 18] et dans les autres papiers de mêmes auteurs, mais le point de départ était toujours le même. En effet il s'agit de l'hypothèse de l'existence d'une extension plate qui est fondamentale et qui mène

à l'existence et l'unicité de la représentation intégrale. Cependant l'existence d'une telle extension n'est pas toujours simple à constater et des conditions explicites ne sont connues que dans des cas particuliers. L'existence d'une extension plate implique, par le Théorème 28, l'existence d'une base Λ -multiplicative alors que la mesure représentante issue de la base Λ -multiplicative n'est pas nécessairement unique.

Pour finir cette section, Nous donnons une caractérisation de l'existence d'une mesure représentante en termes des éléments idempotents Λ -multiplicatifs. Le théorème suivant est une autre version du Théorème 24.

Théorème 29. ([97]) *Soit $\Lambda : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ une uspf. Alors Λ admet une représentation intégrale sur \mathbb{R}^d si et seulement s'il existe une suite $(m_j)_{j \geq 1}$ des entiers positifs telle que chaque \mathcal{H}_{Λ_j} , où $\Lambda_j := \Lambda|_{\mathcal{P}_{2m_j}} : \mathcal{P}_{2m_j} \rightarrow \mathbb{C}$, possède une base Λ_j -multiplicative, ceci pour tout entier $j \geq 1$.*

1.4.5 Contributions de recherches menées dans cette thèse

Dans le travail collaboré avec H. El Azhar et J. Stochel, nous avons considéré le problème de moments complet où on désigne par \mathcal{P}^d l'algèbre des polynômes à d indéterminés. A partir d'une suite multi-indexée $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$, on construit la fonctionnelle de Riesz associée, supposant qu'elle vérifie les trois propriétés fondamentales 1,2 et 3. En fait ces trois conditions ne sont pas suffisantes pour donner une caractérisation de solvabilité dans le cas général, d'où la nécessité de l'introduction de la notion de l'espace à shift borné. voir Chapitre 3, Section 2 dans l'article. Dans le cas où l'espace est à shift borné il s'avère que l'espace de Hilbert \mathcal{H} coïncide exactement avec L^2 associé à la mesure représentante. L'espace de Hilbert \mathcal{H} est dite à shift borné si pour tout $i \leq d$, l'opérateur shift

$$\begin{aligned} M_{t_i} : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ P &\mapsto t_i P \end{aligned}$$

est borné, où t_1, \dots, t_d sont les d indéterminés. En particulier, ils existent des constantes C_i telles que

$$\Lambda(t_i^2 |P|^2) \leq C_i \Lambda(|P|^2).$$

Ce travail contient aussi une étude plus profonde de la représentation intégrale de la fonctionnelle en question via des éléments Λ -multiplicatifs. Un exemple qui montre l'importance du fait que ces derniers soient orthogonaux est également fourni. Apparemment si l'espace est à shift borné, alors on a automatiquement l'orthogonalité. Ce phénomène est clairement expliqué par la présence d'une unique solution dont les polynômes sont denses grâce à la compacité du support de la mesure représentante. Ce dernier point attire l'attention sur la question : quelle sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un élément Λ -multiplicatif s'identifie à une fonction caractéristique d'un seul point, bien entendu, sous l'hypothèse que la mesure représentante existe.

1.5 L'étude asymptotique de certains opérateurs non bornés de Jacobi

Considérons une matrice tridiagonale infinie dont la forme générale est

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & d_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & d_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & d_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

où $(d_k)_{k=1}^\infty$, $(a_k)_{k=1}^\infty$ et $(b_k)_{k=1}^\infty$ sont des suites complexes données. Alors par définition, la matrice \hat{J} définit une application linéaire $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ par la formule

$$\begin{cases} (\hat{J}x)_1 = d_1 x_1 + b_1 x_2, \\ (\hat{J}x)_k = a_{k-1} x_{k-1} + d_k x_k + b_k x_{k+1}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Les matrices tridiagonales infinies interviennent dans les domaines de mathématiques tels que la théorie des équations différentielles et aux différences finies, l'analyse numérique, la théorie des polynômes orthogonaux (voir par exemple [1], [5], [15], [94], [100]). Elles jouent aussi un rôle très important dans certains problèmes de la physique mathématique, en particulier en physique du solide (modèles aléatoires) et optique quantique. Dans la suite nous donneront des exemples des problèmes de la physique qui font apparaître les matrices de Jacobi non aléatoires.

1.5.1 Analyse spectrale de l'opérateur défini par la matrice (1.28)

Dans la suite nous nous limitons au cas où la matrice (1.28) définit un opérateur linéaire J agissant dans l'espace des suites carré sommables ℓ^2 , c'est-à-dire $J : \text{Dom}(J) \rightarrow \ell^2$ est défini comme la restriction de \hat{J} à

$$\text{Dom}(J) := \{(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2 : (\hat{J}x)_{k=1}^\infty \in \ell^2\}$$

et l'objet de notre étude est le spectre de J .

Le cas le plus étudié est celui de la matrice hermitienne (c'est-à-dire $d_k \in \mathbb{R}$ et $b_k = \bar{a}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) et en particulier la situation des coefficients réels. L'opérateur J est alors souvent appelé l'opérateur de Jacobi (voir [94]). Dans le contexte non aléatoire les propriétés spectrales des opérateurs de Jacobi ont été étudiées entre autres par J. Dombrowski ([38], [37], [36]), J. Janas et S. Naboko ([60], [57], [58], [54], [59], [62], [61], [55], [64], [73], [31], [63], [73], [74], [7], [75]).

En particulier (voir [59], [65]) l'opérateur J est auto-adjoint si sa matrice est hermi-

tienne et

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k^2}{|a_k|^2 + |a_{k-1}|^2} > 2. \quad (1.30)$$

Dans la suite on suppose que la matrice (1.28) est hermitienne, la condition (1.30) est satisfaite et de plus

$$d_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty. \quad (1.31)$$

La condition (1.31) implique le fait que l'opérateur diagonal $\text{diag}(d_k)_{k=1}^{\infty}$ est un opérateur à résolvante compacte et la condition (1.30) assure que J est une perturbation relativement compacte de $\text{diag}(d_k)_{k=1}^{\infty}$. Ainsi le spectre de J est discret et inférieurement borné. Suivant la convention usuelle on désigne par $(\lambda_n(J))_{n=1}^{\infty}$ la suite croissante des valeurs propres de J . On connaît l'expression explicite pour $\lambda_n(J)$ uniquement dans certains cas particuliers (voir [53]) et il est naturel de poser la question d'une approximation de la n -ième valeur propre de J .

Pour commencer la présentation de recherches sur le comportement de $\lambda_n(J)$ quand n tend vers l'infini, nous citons le travail fondamental de J. Janas et S. Naboko [56] dans lequel les auteurs ont développé une approche connue sous le nom de la méthode de diagonalisations successives. Cette approche est basée sur une construction d'une suite des transformations qui permettent d'obtenir des opérateurs semblables à l'opérateur J et de plus en plus proches d'un opérateur diagonal. Dans l'article [56] les auteurs expliquent aussi pourquoi cette thématique de recherches est importante pour la physique quantique et donnent un exemple concret d'un modèle d'une molécule dans un champ électrique constant (voir Section 1.5.2).

L'idée de construire un opérateur semblable proche d'un opérateur diagonal avait été déjà utilisée auparavant pour étudier l'asymptotique de grandes valeurs propres du problème de Sturm-Liouville, mais c'est le travail remarquable de G. V. Roseblum [86] qui fait apparaître l'idée d'approximations successives comme l'outil fondamental pour étudier le comportement asymptotique de grandes valeurs propres.

La méthode de diagonalisations successives est devenue un point clé pour obtenir des résultats de plus en plus généraux sur l'asymptotique de grandes valeurs propres des opérateurs de Jacobi dans des travaux de Boutet de Monvel, Naboko, Silva [8], Janas, Malejki [53] et Malejki [70].

L'idée de contrôler l'erreur asymptotique grâce à la construction d'un opérateur semblable, était aussi utilisée dans l'étude des opérateurs en provenance de l'optique quantique (voir [96], [101], [10], [9], [12], [11]).

Le problème de la diagonalisation et de l'asymptotique de grandes valeurs propres peut être posé également pour certaines classes des matrices tridiagonales complexes et définies par blocs. Dans ce cadre général des résultats ont été obtenus par Malejki ([69], [68]), Braeutigam, Polyakov [13], Baskakov, Garkavenko, Glazkova, Uskova et Zgolich ([13], [3]), Djakov et Mityagin [35].

Pour compléter cette présentation de résultats dans la thématique du comportement asymptotique des valeurs propres des opérateurs de Jacobi, nous citons les travaux de Masson, Repka [71] et Edward [39] sur les cas particuliers d'opérateur agissant dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et les travaux sur la densité des valeurs propres de matrices rationnelles [32, 33, 34].

1.5.2 Exemples de problèmes liés avec les opérateurs de Jacobi dont le spectre est discret

L'équation de Mathieu. On considère le problème de trouver λ tels que l'équation

$$w''(t) + (\lambda - 2h^2 \cos(2t))w(t) = 0$$

possède une solution impaire de période π . En munissant $L^2(0, \pi/2)$ de la base orthonormale $(e_n)_{n=1}^\infty$ de la forme

$$e_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin(2nt),$$

on réduit le problème initial au problème de trouver λ qui est une valeur propre de l'opérateur de Jacobi dont les coefficients sont

$$\begin{cases} d_k = 4k^2, \\ a_k = h^2. \end{cases} \quad (1.32)$$

L'équation des ondes sphéroïdales. Le problème de trouver une valeur propre λ de l'équation d'onde sphéroïdale se traduit à la recherche de λ tel que l'équation

$$((1-t^2)w')'(t) + \left(\lambda + \gamma^2(1-t^2) \frac{m^2}{1-t^2} \right) w(t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

possède une solution paire et bornée sur l'intervalle $(-1, 1)$ (ici γ^2 est un paramètre réel donné et $m \in \mathbb{N}$). En munissant $L^2(0, 1)$ de la base orthonormée $(e_n)_{n=1}^\infty$ de la forme

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(t),$$

où P_n^m est un polynôme de Legendre, on réduit le problème initial au problème de la recherche des valeurs propres de l'opérateur de Jacobi J_m dont les coefficients sont

$$\begin{cases} d_k = (2k+m-2)(2k+m-1) - 2\gamma^2 \frac{(2k+m-2)(2k+m-1) - 1 + m^2}{(4k+2m-5)(4k+2m-1)}, \\ a_k = \frac{\sqrt{(2k-1)2k} \sqrt{(2k+2m-1)(2k+2m)}}{(4k+2m-3)\sqrt{(4k+2m-3)(4k+2m+1)}}. \end{cases} \quad (1.33)$$

Le problème des valeurs propres pour l'équation de Mathieu et pour l'équation des ondes sphéroïdale est étudié dans l'article de Volkmer [100]. Grâce à un développement de la méthode de Rayleigh-Ritz, Volkmer donne des estimations de l'écart entre $\lambda_n(J)$ et la n -ième valeur propre des matrices finies obtenues en tronquant la matrice de l'opérateur J . L'estimation de l'erreur est obtenue sous l'hypothèse que l'indice n est fixé et ne s'applique pas à l'étude du comportement asymptotique de $\lambda_n(J)$ quand $n \rightarrow \infty$.

L'hamiltonien d'une molécule dans le champ électrique homogène. Dans le cas de modèles de la physique quantique, l'hamiltonien du modèle est un opérateur auto-adjoint dont les valeurs propres correspondent aux niveaux d'énergie qui peuvent être mesurés expérimentalement. En comparant les propriétés théoriques des valeurs propres de l'hamiltonien avec les données expérimentales, on peut tester la validité du modèle en question. Dans le cas général, un modèle dépend d'un certain nombre de paramètres physiques qui interviennent dans le comportement asymptotique de grandes valeurs propres. On peut alors espérer qu'en connaissant le spectre de l'hamiltonien grâce aux données expérimentales, on peut obtenir des renseignements sur les valeurs des paramètres physiques du modèle considéré.

L'article de Janas, Naboko [56] donne un exemple du modèle d'une molécule dans un champ électrique constant. L'hamiltonien du modèle en question s'écrit sous la forme

$$H = \frac{L^2}{2I} + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I} \right) L_z^2 - gz, \quad (1.34)$$

où L est l'opérateur du moment cinétique, L_z sa projection sur l'axe de z , I, I_3 sont les moments d'inertie correspondants. En utilisant les fonctions sphériques généralisées $(\phi_{m,j}^n)_{-n \leq j, m \leq n}^{n=0,1,\dots}$ on peut exprimer les valeurs propres de H à l'aide des valeurs propres des opérateurs de Jacobi $J_{m,j}$ dont les coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} d_k = \frac{h^2}{2I} k(k-1) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I} \right) j^2 - \frac{gmj}{k(k-1)}, \\ a_k = \frac{-g}{(2k-1)k} \sqrt{|(k^2 - m^2)(k^2 - j^2)|}, \end{cases} \quad (1.35)$$

où h est la constante de Planck.

La méthode des diagonalisations successives développée dans l'article [56] permet de donner l'expression pour $\lambda_n(J_{m,k})$ avec précision $O(n^{-3})$ quand $n \rightarrow \infty$.

Le modèle quantique de Rabi. L'hamiltonien quantique de Rabi décrit le plus simple modèle d'interactions entre une mode du champ de radiation à fréquence ω et un atome à deux niveaux. Il est unitairement équivalent à une somme directe $J_+ \oplus J_-$, où J_{\pm} est l'opérateur de Jacobi dont les coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} d_k^{\pm} = \omega k \pm \frac{E}{2} (-1)^k \\ a_k = g\sqrt{k} \end{cases} \quad (1.36)$$

où E est l'écart entre deux niveaux d'énergie de l'atome et g est une constante de couplage du champ de radiation (voir [77], [95], [11]).

Il s'avère que dans le cas particulier $E = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} d_k = \omega k, \\ a_k = g\sqrt{k}, \end{cases} \quad (1.37)$$

la n -ième valeur propre est égale $\omega n - \frac{g^2}{\omega}$ (voir [11]). Dans le cas du modèle général (1.36), la question d'une description précise du comportement asymptotique de $\lambda_n(J_{\pm})$ reste ouverte. Les travaux [96], [101], [9] donnent une formule asymptotique à deux termes,

$$\lambda_n(J_{\pm}) = \omega n - \frac{g^2}{\omega} + O(n^{-\alpha})$$

avec un certain $\alpha > 0$. Enfin le travail [12] donne une formule asymptotique à trois termes. Cette formule fait apparaître les trois paramètres du modèle (ω , g , E) et suivant [11], on peut l'utiliser pour déterminer les valeurs des paramètres ω , g , E , à partir du spectre de l'hamiltonien de Rabi.

1.5.3 L'historique des résultats sur l'asymptotique des grandes valeurs propres des opérateurs de Jacobi

Dans cette section nous donnons les détails des résultats décrits dans les articles [56], [8], [53] et [70].

L'article de J. Janas et S. Naboko [56] est le premier travail de recherche où l'asymptotique des grandes valeurs propres des opérateurs de Jacobi est obtenue grâce à l'usage des diagonalisations successives et du lemme fondamental suivant

Lemma 1.5.1. (*Lemma 2.1, Janas et Naboko [56]*). Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert muni d'une base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ et soit D un opérateur diagonal auto-adjoint de la forme $De_k = \nu_k e_k$ où les valeurs propres ν_k sont simples et la suite $\nu_k \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$. Supposons de plus que $|\nu_j - \nu_i| \geq \varepsilon_0 > 0$ si $j \neq i$. Si R est un opérateur compact (pas nécessairement auto-adjoint) sur \mathcal{H} , alors le spectre de l'opérateur $T = D + R$ est discret et constitué des valeurs propres complexes $\lambda_n(T)$ qui vérifient l'estimation $\lambda_n(T) = \nu_n + O(\|R^* e_n\|)$ quand $n \rightarrow \infty$.

L'article [56] donne le comportement asymptotique de $\lambda_n(J)$ avec l'erreur $O(n^{-3})$ pour les opérateurs de Jacobi dont les coefficients ont la forme

$$\begin{cases} d_k = k^2 + c_1 k + c_2 k^{-1} + c_3 k^{-2} + O(k^{-3}), \\ a_k = g + c'_1 k^{-1} + c'_2 k^{-2} + O(k^{-3}). \end{cases} \quad (1.38)$$

Dans le travail [8], A. Boutet de Monvel, S. Naboko et L. O. Silva considèrent les

opérateurs de Jacobi dont les coefficients ont la forme

$$\begin{cases} d_k = k^2 + c_k, \\ a_k = g_k \sqrt{k}, \end{cases} \quad (1.39)$$

où les suites $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ et $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ sont périodiques.

Dans le travail [53], J. Janas et M. Malejki considèrent les opérateurs de Jacobi dont les coefficients ont la forme

$$\begin{cases} d_k = c k^{\mu}(1 + \Delta_k), \\ a_k = k^{\beta}(1 + w_k), \end{cases} \quad (1.40)$$

où $\mu > 2\beta + 1$, $\beta \geq 0$, $c > 0$, $\Delta_{k+1} - \Delta_k = o(k^{-1})$, $\Delta_k \rightarrow 0$ et $w_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Sous ces hypothèses ils démontrent l'estimation $\lambda_n(J) = d_n + O(n^{2\beta+1-\mu})$.

Dans le même article on démontre l'estimation $\lambda_n(J) = d_n + O(n^{-3/2})$ dans le cas

$$\begin{cases} d_k = k^{1/2}, \\ a_k = k^{-1/2}. \end{cases} \quad (1.41)$$

De plus l'article [53] donne trois exemples particuliers où les opérateurs de Jacobi sont unitairement équivalents à des opérateurs modèles sur certains espaces de Hilbert fonctionnels. Il s'agit de l'opérateur (1.37) dont on connaît explicitement toutes les valeurs propres et les opérateurs dont les coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} d_k = k, \\ a_k = c, \end{cases} \quad (1.42)$$

ou

$$\begin{cases} d_k = \delta k, \\ a_k = \sqrt{(k+c)^2 + b} \end{cases} \quad (1.43)$$

avec $\delta > 2$. Dans le cas de l'opérateur (1.42), les auteurs de [53] montrent que la différence $\lambda_n(J) - n$ décroît plus rapidement que l'exponentielle $e^{-\alpha n}$ ($\alpha > 0$). Dans le cas de l'opérateur (1.43), l'asymptotique est donnée avec l'erreur $O(n^{-1/2})$ si $b \neq 0$ et avec une erreur exponentiellement petite si $b = 0$. Ce dernier résultat est obtenu grâce l'analyse d'une équation différentielle dans l'espace de Hardy H^2 .

En 2009 dans [70], M. Malejki étudie l'asymptotique des opérateurs de Jacobi d'une classe très générale. Cette classe est définie par la condition que pour certaines constantes C , $c > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}^*$, les suites réelles $(d_k)_{k=1}^{\infty}$, $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ vérifient les inégalités

$$d_{k+1} - d_k \geq c k^{\mu-1} \quad \text{si } k \geq k_0, \quad (1.44)$$

$$|a_k| \leq C k^{\beta} \quad \text{si } k \geq k_0, \quad (1.45)$$

et les exposants μ, β vérifient

$$\mu > \beta + 1 \quad \text{et} \quad \beta \geq 0. \quad (1.46)$$

En combinant la méthode des diagonalisations successives avec un algorithme basé sur le calcul des déterminants, M. Malejki obtient des estimations asymptotiques précises de la n -ième valeur propre de J , c'est-à-dire une description du comportement asymptotique de $\lambda_n(J)$ avec l'erreur $O(n^{-N})$ donnée pour tout $N \in \mathbb{N}$. En particulier, la formule asymptotique comportant la première correction, prend la forme

$$\lambda_n(J) = d_n + \frac{a_{n-1}^2}{d_n - d_{n-1}} - \frac{a_n^2}{d_{n+1} - d_n} + O(n^{\mu-3(\mu-\beta-1)}). \quad (1.47)$$

Il est clair que les coefficients donnés par (1.32), (1.33), (1.35), (1.39), vérifient les conditions (1.44)-(1.46). De plus, le travail [70] permet de retrouver les résultats de [56] et [8]. De l'autre côté le modèle de Rabi (donné par (1.36)) correspond à $\mu = 1$ et $\beta = 1/2$, donc la condition (1.46) n'est pas satisfaite.

1.5.4 Contributions de recherches menées dans cette thèse

Dans la suite on se pose la question de chercher des estimations asymptotiques précises de la n -ième valeur propre de J , c'est-à-dire donner une description du comportement asymptotique de $\lambda_n(J)$ avec l'erreur $O(n^{-N})$ où N est donné d'une manière arbitraire. On remarque alors qu'à l'exception des cas spéciaux donnés par (1.41), (1.42) et (1.43), des estimations précises étaient obtenues seulement dans la situation où

$$\frac{|a_k| + |a_{k-1}|}{d_k} = O(k^{-\rho}) \quad (1.48)$$

est satisfaite avec $\rho > 1$.

Il est naturel de poser la question s'il est possible d'obtenir des estimations asymptotiques précises également dans le cas où $\rho \leq 1$. Une de nos motivations était la question suivante : que peut-on dire si on remplace $a_k = \sqrt{k}$ par $a_k = \sqrt{k+c}$ dans l'exemple (1.37). La réponse n'était pas connue car dans cet exemple on a (1.48) avec $\rho = 1/2$. Dans la section 1.5.5 nous allons donner quelques explications pourquoi il existe une grande différence entre la situation $\rho > 1$ et $\rho = 1/2$.

Dans le travail [45] commun avec mes directeurs de thèse El Hassan Zerouali et Lech Zielinski, on considère l'opérateur de Jacobi J dont les coefficients possèdent un comportement asymptotique classique à l'infini, c'est-à-dire

$$d_k \sim k^\mu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_i}{k^i} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty, \quad (1.49)$$

$$a_k \sim k^{\mu-\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{k^i} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty, \quad (1.50)$$

où $\mu > 0$, $\rho > 0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\delta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots$) et $\delta_0 > 0$. On démontre que sous ces hypothèses, $\lambda_n(J)$ possède le comportement asymptotique à l'infini de la forme

$$\lambda_n(J) \sim d_n + n^{\mu-2\rho} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{c_{i,j}}{n^{i+2j\rho}} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (1.51)$$

avec certains coefficients réels $c_{i,j}$. De plus on présente un algorithme du calcul des coefficients $c_{i,j}$ par récurrence et on donne les valeurs explicites de $c_{0,0}$, $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ et $c_{0,1}$.

Les hypothèses (1.49) et (1.50) peuvent être affaiblies. On peut donner une description précise de l'asymptotique de $\lambda_n(J)$ si le comportement de coefficients $(d_k)_{k=1}^{\infty}$ et $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ est suffisamment régulier à l'infini (du type des symboles) et la condition (1.44) est satisfaite. L'approche utilisée s'applique également aux matrices 'bande', mais le cas des matrices tridiagonales est le plus important pour des applications et les expressions explicites des premières corrections dans la formule asymptotique sont plus simples pour les matrices tridiagonales. Dans le cas des matrices tridiagonales dont les coefficients satisfont (1.49) et (1.50), on obtient la formule avec la première correction de la forme

$$\lambda_n(J) = d_n + \frac{|a_{n-1}|^2}{d_n - d_{n-1}} - \frac{|a_n|^2}{d_{n+1} - d_n} + O(n^{\mu-4\rho}). \quad (1.52)$$

Notre résultat est obtenu par une approche nouvelle qui est une adaptation de la théorie de perturbations de Schrieffer-Wolff (voir [88, 44]), utilisée en physique de la matière condensée, de semi-conducteurs, en mécanique quantique relativiste etc. La méthode de Schrieffer-Wolff a été utilisée en vue d'une diagonalisation approximative de l'opérateur auto-adjoint

$$H(g) = D(g) + gR(g),$$

où l'opérateur $D(g)$ est diagonal et g est un petit paramètre. Au départ on suppose que $P(g)$ est un opérateur auto-adjoint tel que le commutateur $[iP(g), D(g)] = -R(g)$. Alors

$$e^{igP} H e^{-igP} = H + g[iP, H] + \frac{1}{2} g^2 [iP, [iP, H]] + \frac{1}{3!} g^3 [iP, [iP, [iP, H]]] + \dots \quad (1.53)$$

et l'égalité $[iP, D] = -R$ permet d'écrire (1.53) sous la forme

$$e^{igP} H e^{-igP} = D + \frac{1}{2} g^2 [iP, R] + g^3 \widetilde{R}. \quad (1.54)$$

Dans notre approche le rôle de la perturbation R est joué par la partie hors diagonale de la matrice et le petit paramètre g est remplacé par le grand paramètre n (l'indice de la valeur propre). L'avantage de cette approche réside principalement dans la simplicité de la formule (1.53) qui fait usage successif des commutateurs et profite de la régularité des coefficients grâce au fait que chaque commutateur supplémentaire permet de gagner

un facteur $n^{-\alpha}$ (où $\alpha > 0$) dans la taille des coefficients.

Un autre avantage de cette méthode consiste en possibilité de travailler avec des opérateurs auto-ajoints à chaque étape d'approximation et utiliser le principe de min-max. L'utilisation du principe de min-max est essentiel pour couvrir le cas $\mu < 1$ dans (1.49). En effet, dans le cas $\mu < 1$ on a $d_{k+1} - d_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ et on ne peut pas utiliser le Lemme 2.1 de Janas, Naboko [56] (notons l'hypothèse $\mu \geq 1$ dans [70]).

1.5.5 Remarques sur les hypothèses

Les conséquences de l'hypothèse $\rho > 1$ sont énormes. Pour commencer nous remarquons qu'il est possible de localiser le spectre discret de l'opérateur de Jacobi dans la réunion des intervalles de Gershgorin

$$I_k = [d_k - |a_k| - |a_{k-1}|, d_k + |a_k| + |a_{k-1}|],$$

et l'hypothèse $\rho > 1$ implique le fait que les intervalles de Gershgorin I_n sont deux à deux disjoints pour $n \geq n_0$. De plus on a $\lambda_n(J) \in I_n$ pour $n \geq n_0$ et il est possible de bien contrôler la différence entre la n -ième valeur propre de J et une valeur propre correspondante de la matrice tronquée. Plus précisément, désignons par $J_{n,l}$ la matrice de taille $2l + 1$ donnée par le bloc de la matrice (1.28) centré en (n, n) . Il s'avère que si on choisit de manière arbitraire $N \in \mathbb{N}$, alors on peut trouver $l_N \in \mathbb{N}^*$ tel que la valeur propre centrale de J_{n,l_N} est égale à $\lambda_n(J) + O(n^{-N})$. Grâce à cette propriété, le comportement asymptotique de $\lambda_n(J)$ avec l'erreur $O(n^{-N})$ s'obtient par l'étude de la valeur propre centrale de J_{n,l_N} . Ainsi le problème est réduit à l'étude des valeurs propres de la matrice de taille de $2l_N + 1$ en fonction du paramètre n . Dans l'approche de Malejki [70], une telle étude est faite à l'aide des calculs de déterminants et grâce à la localisation des valeurs dans les intervalles de Gershgorin deux à deux disjoints.

On peut dire que l'hypothèse $\rho > 1$ donne lieu à la situation où le caractère de l'interaction de la partie hors diagonale est à courte portée. Par contre dans le cas $\rho < 1$ la situation semble avoir un caractère à longue portée, c'est-à-dire il n'est pas possible d'utiliser une troncature d'une taille fixée autour n pour contrôler l'erreur de $\lambda_n(J)$. En effet, l'introduction d'une telle troncature détruit la régularité du comportement des coefficients et en particulier l'approche utilisée dans [45] ne marche pas.

On peut alors poser la question si la régularité des coefficients est effectivement nécessaire pour obtenir les résultats souhaités. Ci-dessous on va donner un argument en faveur de la conjecture que l'hypothèse de la régularité des coefficients ne peut pas être évitée. Pour cela désignons par J_0 l'opérateur de Jacobi dont les coefficients sont donnés par (1.37) avec $\omega = 1$, c'est-à-dire $d_k = k$ et $a_k = g\sqrt{k}$. Dans ce cas $\lambda_n(J_0) = n - g^2$. Considérons maintenant deux opérateurs de Jacobi, J_+ , J , obtenus en ajoutant une perturbation diagonale. Soit donc J l'opérateur dont les coefficients sont

$$\begin{cases} d_k = k + ck^\theta, \\ a_k = g\sqrt{k}, \end{cases} \quad (1.55)$$

avec $\theta < 1$ et soit J_+ l'opérateur dont les coefficients sont

$$\begin{cases} d_k^+ = k + c(-1)^k \\ a_k = g\sqrt{k}. \end{cases} \quad (1.56)$$

La suite $(d_k)_{k=1}^\infty$ satisfait les hypothèses de la régularité de [45] et on a la formule asymptotique (1.52) avec $\mu = 1$ et $\rho = 1/2$. De plus si d_k et a_k sont donnés par (1.55), alors on vérifie facilement que $r_{1,n} = -g^2 + O(n^{\theta-1})$ et on voit qu'en ajoutant à J_0 la perturbation k^θ sur la diagonale, on obtient bien sûr

$$\lambda_n(J) = \lambda_n(J_0) + cn^\theta + o(1) \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (1.57)$$

Par contre, une formule analogue

$$\lambda_n(J_+) = \lambda_n(J_0) + c(-1)^n + o(1) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (1.58)$$

est fautive, car on a $\lambda_n(J_+) = \lambda_n(J_0) + O(n^{-1/4})$ d'après [12] (voir aussi [101]). Il s'avère que le comportement peu régulier de la suite $(-1)^k$ donne lieu à un phénomène étrange : la perturbation de la diagonale par le biais de cette suite, donne lieu à l'erreur $O(n^{-1/4})$ dans l'asymptotique de $\lambda_n(J)$.

Bibliographie

- [1] Naum Iljič AKHEIZER. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Oliver & Boyd, 1965.
- [2] Emil ARTIN. « Über die zerlegung definiter funktionen in quadrate ». In : *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. T. 5. 1. Springer. 1927, p. 100-115.
- [3] A. G. BASKAKOV et al. « On spectral properties of one class of difference operators ». In : *Journal of Physics : Conference Series*. T. 1479. 1. IOP Publishing. 2020, p. 012002.
- [4] Christian BAYER et Josef TEICHMANN. « The proof of Tchakaloff's theorem ». In : *Proceedings of the American mathematical society* 134.10 (2006), p. 3035-3040.
- [5] Yu M BEREZANSKII. « Expansion in Eigenfunction of Self-Adjoint Operators, AMS, Providence, RI, 1968 ». In : *Russian edition : Naukova Dumka, Kiev* (1965).
- [6] Christian BERG, JP Reuss CHRISTENSEN et CU JENSEN. « A remark on the multidimensional moment problem ». In : *Mathematische Annalen* 243.2 (1979), p. 163-169.
- [7] Anne BOUTET DE MONVEL, Jan JANAS et Serguei NABOKO. « Unbounded Jacobi matrices with a few gaps in the essential spectrum : constructive examples ». In : *Integral Equations and Operator Theory* 69.2 (2011), p. 151-170.
- [8] Anne BOUTET DE MONVEL, Serguei NABOKO et Luis O. SILVA. « The asymptotic behaviour of eigenvalues of a modified Jaynes-Cummings model ». In : *Asymptot. Anal.* 47.3-4 (2006), p. 291-315.
- [9] Anne BOUTET DE MONVEL et Lech ZIELINSKI. « Asymptotic behaviour of large eigenvalues for Jaynes-Cummings type models ». In : *J. Spectr. Theory* 7.2 (2017), p. 559-631.
- [10] Anne BOUTET DE MONVEL et Lech ZIELINSKI. « Asymptotic behaviour of large eigenvalues of a modified Jaynes-Cummings model ». In : *E. Khruslov, L. Pastur, and D. Shepelsky (eds), Spectral Theory and Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. Series 2* 233 (2014), p. 77-93.
- [11] Anne BOUTET DE MONVEL et Lech ZIELINSKI. « On the spectrum of the quantum Rabi model ». In : *Analysis as a Tool in Mathematical Physics*. Springer, 2020, p. 183-193.

- [12] Anne BOUTET DE MONVEL et Lech ZIELINSKI. « Oscillatory Behavior of Large Eigenvalues in Quantum Rabi Models ». In : *International Mathematics Research Notices*, doi.org/10.1093/imrn/rny294 (à paraître) (2019).
- [13] I. N. BRAEUTIGAM et D. M. POLYAKOV. « Asymptotics of eigenvalues of infinite block matrices ». In : *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal* 11.3 (2019), p. 10-29.
- [14] Torsten CARLEMAN. « Sur le probleme des moments ». In : *CR Acad. Sci. Paris* 174 (1922), p. 1680-1682.
- [15] Theodore S CHIHARA. « An introduction to orthogonal polynomials ». In : (1978).
- [16] Raúl E CURTO. « Recursiveness, positivity and truncated moment problems ». In : *Houston Journal of Mathematics* 17 (1991), p. 603-635.
- [17] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « A duality proof of Tchakaloff's theorem ». In : *Journal of mathematical analysis and applications* 269.2 (2002), p. 519-532.
- [18] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. *Flat Extensions of Positive Moment Matrices : Recursively Generated Relations*. T. 648. American Mathematical Soc., 1998.
- [19] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « Flat extensions of positive moment matrices : Relations in analytic or conjugate terms ». In : *Nonselfadjoint operator algebras, operator theory, and related topics*. Springer, 1998, p. 59-82.
- [20] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « Recursively generated weighted shifts and the subnormal completion problem ». In : *Integral Equations and Operator Theory* 17.2 (1993), p. 202-246.
- [21] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « Recursively generated weighted shifts and the subnormal completion problem, II ». In : *Integral Equations and Operator Theory* 18.4 (1994), p. 369-426.
- [22] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. *Solution of the truncated complex moment problem for flat data*. T. 568. American Mathematical Soc., 1996.
- [23] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « Solution of the truncated hyperbolic moment problem ». In : *Integral Equations and Operator Theory* 52.2 (2005), p. 181-218.
- [24] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « Solution of the truncated parabolic moment problem ». In : *Integral Equations and Operator Theory* 50.2 (2004), p. 169-196.
- [25] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « The truncated complex K -moment problem ». In : *Transactions of the American mathematical society* 352.6 (2000), p. 2825-2855.
- [26] Raúl E CURTO et Lawrence A FIALKOW. « Truncated K -moment problems in several variables ». In : *Journal of Operator Theory* (2005), p. 189-226.
- [27] Raúl E CURTO et Mihai PUTINAR. « Nearly subnormal operators and moment problems ». In : *Journal of functional analysis* 115.2 (1993), p. 480-497.

- [28] Raúl E CURTO et Seonguk Yoo. « A new approach to the nonsingular cubic binary moment problem ». In : *Annals of Functional Analysis* (2018).
- [29] Raúl E CURTO et Seonguk Yoo. « Concrete solution to the nonsingular quartic binary moment problem ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 144.1 (2016), p. 249-258.
- [30] Raúl E CURTO et Seonguk Yoo. « Cubic column relations in truncated moment problems ». In : *Journal of Functional Analysis* 266.3 (2014), p. 1611-1626.
- [31] David DAMANIK et Serguei NABOKO. « Unbounded Jacobi matrices at critical coupling ». In : *Journal of approximation theory* 145.2 (2007), p. 221-236.
- [32] J. S. DEHESA. « The asymptotical spectrum of Jacobi matrices ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 3.3 (1977), p. 167-171.
- [33] J. S. DEHESA. « The eigenvalue density of rational Jacobi matrices ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 11.9 (1978), p. L223.
- [34] J. S. DEHESA. « The eigenvalue density of rational Jacobi matrices. II ». In : *Linear Algebra and its Applications* 33 (1980), p. 41-55.
- [35] P. DJAKOV et B. MITYAGIN. « Trace formula and spectral Riemann surfaces for a class of tri-diagonal matrices ». In : *J. Approximation Theory* 139 (2006), p. 293-326.
- [36] J. DOMBROWSKI et S. PEDERSEN. « Spectral measures and Jacobi matrices related to Laguerre-type systems of orthogonal polynomials ». In : *Constructive approximation* 13.3 (1997), p. 421-433.
- [37] Joanne DOMBROWSKI. « Tridiagonal matrix representations of cyclic self-adjoint operators. II ». In : *Pacific Journal of Mathematics* 120.1 (1985), p. 47-53.
- [38] Joanne DOMBROWSKI. « Tridiagonal matrix representations of cyclic selfadjoint operators ». In : *Pacific Journal of Mathematics* 114.2 (1984), p. 325-334.
- [39] J. EDWARD. « Spectra of Jacobi matrices, differential equations on the circle, and the $su(1, 1)$ Lie algebra ». In : *SIAM J. Math. Anal.* 24.3 (2006), p. 824-831.
- [40] Hamza EL AZHAR et al. « The quintic complex moment problem ». In : *Operators and Matrices* 13.4 (2019), p. 1003-1022.
- [41] Lawrence FIALKOW et Jiawang NIE. « Positivity of Riesz functionals and solutions of quadratic and quartic moment problems ». In : *Journal of Functional Analysis* 258.1 (2010), p. 328-356.
- [42] Paul R HALMOS. « Normal dilations and extensions of operators ». In : *Bulletin Of The American Mathematical Society*. T. 57. 4. Amer Mathematical Soc 201 Charles St, Providence, RI 02940-2213. 1951, p. 294-294.
- [43] Hans HAMBURGER. « Über eine erweiterung des stieltjesschen momentenproblems ». In : *Mathematische Annalen* 81.2-4 (1920), p. 235-319.

- [44] Rukhsan Ul HAQ, Sachin Satish BHARADWAJ et Towseef Ali WANI. « An Explicit Method for Schrieffer-Wolff Transformation ». In : *arXiv preprint arXiv :1901.08617* (2019).
- [45] Ayoub HARRAT, El Hassan ZEROUALI et Lech ZIELINSKI. « Asymptotic expansion of large eigenvalues for a class of unbounded Jacobi matrices ». In : *Opuscula Mathematica* 40.2 (2020).
- [46] E. K. HAVILAND. « On the momentum problem for distribution functions in more than one dimension ». In : *American Journal of Mathematics* 57.3 (1935), p. 562-568.
- [47] E. K. HAVILAND. « On the momentum problem for distribution functions in more than one dimension. II ». In : *American Journal of Mathematics* 58.1 (1936), p. 164-168.
- [48] E. HELLINGER. « Zur Stieltjesschen Kettenbruchtheorie ». In : *Mathematische Annalen* 86 (1922), p. 18-29.
- [49] E. HELLY. « Über lineare Funktionaloperationen ». In : *Wien. Ber.* 121 (1912), p. 265-297.
- [50] David HILBERT. « Über die darstellung definiter formen als summe von formenquadraten ». In : *Mathematische Annalen* 32.3 (1888), p. 342-350.
- [51] T. H. HILDEBRANDT et I. J. SCHOENBERG. « On linear functional operations and the moment problem for a finite interval in one or several dimensions ». In : *Annals of Mathematics* (1933), p. 317-328.
- [52] K IDRISSI et EH ZEROUALI. « Complex moment problem and recursive relations ». In : *Methods of Functional Analysis and Topology* 25.01 (2019), p. 15-34.
- [53] J. JANAS et M. MALEJKI. « Alternative approaches to asymptotic behaviour of eigenvalues of some unbounded Jacobi matrices ». In : *Comput. Appl. Math.* 200 (2007), p. 342-356.
- [54] J. JANAS et S. NABOKO. « Asymptotics of generalized eigenvectors for unbounded Jacobi matrices with power-like weights, Pauli matrices commutation relations and Cesaro averaging ». In : *Differential operators and related topics*. Springer, 2000, p. 165-186.
- [55] J. JANAS et S. NABOKO. « Criteria for semiboundedness in a class of unbounded Jacobi operators ». In : *Algebra i Analiz* 14.3 (2002), p. 158-168.
- [56] J. JANAS et S. NABOKO. « Infinite Jacobi matrices with unbounded entries : asymptotics of eigenvalues and the transformation operator approach ». In : *SIAM J. Math. Anal.* 36.2 (2004), 643-658 (electronic).
- [57] J. JANAS et S. NABOKO. « Jacobi matrices with absolutely continuous spectrum ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 127.3 (1999), p. 791-800.
- [58] J. JANAS et S. NABOKO. « Jacobi matrices with power-like weights—grouping in blocks approach ». In : *Journal of Functional Analysis* 166.2 (1999), p. 218-243.

- [59] J. JANAS et S. NABOKO. *Multithreshold spectral phase transition examples in a class of unbounded Jacobi matrices. II*. Citeseer, 2000.
- [60] J. JANAS et S. NABOKO. « On the point spectrum of some Jacobi matrices ». In : *Journal of Operator Theory* (1998), p. 113-132.
- [61] J. JANAS et S. NABOKO. « Spectral analysis of selfadjoint Jacobi matrices with periodically modulated entries ». In : *Journal of Functional Analysis* 191.2 (2002), p. 318-342.
- [62] J. JANAS et S. NABOKO. « Spectral properties of selfadjoint Jacobi matrices coming from birth and death processes ». In : *Recent Advances in Operator Theory and Related Topics*. Springer, 2001, p. 387-397.
- [63] J. JANAS, S. NABOKO et G. STOLZ. « Decay bounds on eigenfunctions and the singular spectrum of unbounded Jacobi matrices ». In : *International Mathematics Research Notices* 2009.4 (2009), p. 736-764.
- [64] J. JANAS, S. NABOKO et G. STOLZ. « Spectral theory for a class of periodically perturbed unbounded Jacobi matrices : elementary methods ». In : *Journal of computational and applied mathematics* 171.1-2 (2004), p. 265-276.
- [65] Jan JANAS et Petru A. COJUHARI. « Discreteness of the spectrum for some unbounded Jacobi matrices ». In : *Acta Sci. Math. (Szeged)* 73.3-4 (2007), p. 649-667.
- [66] David P KIMSEY. « The cubic complex moment problem ». In : *Integral Equations and Operator Theory* 80.3 (2014), p. 353-378.
- [67] Monique LAURENT et Bernard MOURRAIN. « A generalized flat extension theorem for moment matrices ». In : *Archiv der Mathematik* 93.1 (2009), p. 87-98.
- [68] M. MALEJKI. « Asymptotics of the discrete spectrum for complex Jacobi matrices ». In : *Opuscula Mathematica* 34.1 (2014), p. 139-160.
- [69] Maria MALEJKI. « Asymptotic behaviour and approximation of eigenvalues for unbounded block Jacobi matrices ». In : *Opuscula Mathematica* 30 (2010), p. 311-330.
- [70] Maria MALEJKI. « Asymptotics of large eigenvalues for some discrete unbounded Jacobi matrices ». In : *Linear Algebra Appl.* 431.10 (2009), p. 1952-1970.
- [71] David R MASSON et Joe REPKA. « Spectral Theory of Jacobi Matrices in $l^2(\mathbb{Z})$ and the $su(1,1)$ Lie Algebra ». In : *SIAM journal on mathematical analysis* 22.4 (1991), p. 1131-1146.
- [72] T. S. MOTZKIN. *The arithmetic-geometric inequality, Inequalities (Proc. Sympos. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965)*. 1967.
- [73] Serguei NABOKO, Irina PCHELINTSEVA et Luis O SILVA. « Discrete spectrum in a critical coupling case of Jacobi matrices with spectral phase transitions by uniform asymptotic analysis ». In : *Journal of Approximation Theory* 161.1 (2009), p. 314-336.

- [74] Serguei NABOKO et Sergey SIMONOV. « Spectral analysis of a class of hermitian Jacobi matrices in a critical (double root) hyperbolic case ». In : *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 53.1 (2010), p. 239-254.
- [75] Serguei NABOKO et Sergey SIMONOV. « Titchmarsh-Weyl formula for the spectral density of a class of Jacobi matrices in the critical case ». In : *arXiv preprint arXiv :1911.10282* (2019).
- [76] Rolf Herman NEVANLINNA. *Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem*. Suomalaisen tiedeakatemia kustantama, 1922.
- [77] K.M. NG, C. F. LO et K. L. LIU. « Exact eigenstates of the intensity-dependent Jaynes–Cummings model with the counter-rotating term ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 275.3-4 (2000), p. 463-474.
- [78] Albrecht PFISTER. « Zur darstellung definiter funktionen als summe von quadra-ten ». In : *Inventiones mathematicae* 4.4 (1967), p. 229-237.
- [79] Victoria POWERS et Bruce REZNICK. « A new bound for Pólya’s theorem with applications to polynomials positive on polyhedra ». In : *Journal of pure and applied algebra* 164.1-2 (2001), p. 221-229.
- [80] Mihai PUTINAR. « A dilation theory approach to cubature formulas ». In : *EXPOSITIONES MATHEMATICAE* 15 (1997), p. 183-192.
- [81] Mihai PUTINAR. « Operator dilations with prescribed commutators ». In : *Operator Theory, System Theory and Related Topics*. Springer, 2001, p. 453-460.
- [82] Marcel RIESZ. « Sur le probleme des moments et le théoreme de Parseval correspondant ». In : *Scandinavian Actuarial Journal* 1924.1 (1924), p. 54-74.
- [83] Marcel RIESZ. « Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant ». In : *Scandinavian Actuarial Journal* 1924.1 (1924), p. 54-74.
- [84] Marcel RIESZ. « Sur le probleme des moments, Troisieme Note ». In : *Ark. Mat. Fys* 16 (1923), p. 1-52.
- [85] Marcel RIESZ. « Sur le problème des moments. I, II,III ». In : *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 16.16 (1922), p. 1922.
- [86] V. ROZENBLJUM. « Near-similarity of operators and the spectral asymptotic behaviour of pseudodifferential operators on the circle (Russian) ». In : *Trudy Maskov. Mat. Obshch* 36 (1978), p. 59-84.
- [87] Konrad SCHMÜDGEN. « The K -moment problem for compact semi-algebraic sets ». In : *Mathematische Annalen* 289.1 (1991), p. 203-206.
- [88] John R SCHRIEFFER et Peter A WOLFF. « Relation between the anderson and kondo hamiltonians ». In : *Physical Review* 149.2 (1966), p. 491.
- [89] James Alexander SHOHAT et Jacob David TAMARKIN. *The problem of moments*. 1. American Mathematical Soc., 1943.

- [90] Gilbert STENGLÉ. « A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry ». In : *Mathematische Annalen* 207.2 (1974), p. 87-97.
- [91] T-J STIELTJES. « Recherches sur les fractions continues ». In : *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*. T. 4. 1. UNIVERSITE PAUL SABATIER. 1995, J1-J35.
- [92] Jan STOCHEL. « Solving the truncated moment problem solves the full moment problem ». In : *Glasgow Mathematical Journal* 43.3 (2001), p. 335.
- [93] Vladimir TCHAKALOFF. « Formules de cubatures mécaniques à coefficients non négatifs ». In : *Bull. Sci. Math* 81.2 (1957), p. 123-134.
- [94] Gerald TESCHL. *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*. T. 72. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2000, p. xvii+351.
- [95] È. A. TUR. « Jaynes–Cummings model : solution without rotating wave approximation ». In : *Optics and Spectroscopy* 89.4 (2000), p. 574-588.
- [96] È. A. TUR. « Jaynes-Cummings model without rotating wave approximation ». In : *arXiv :math-ph/0211055v1* 22 Nov 2002 ().
- [97] Florian-Horia VASILESCU. « An Idempotent Approach to Truncated Moment Problems ». In : *Integral Equations and Operator Theory* 79.3 (2014), p. 301-335.
- [98] Florian-Horia VASILESCU. « Dimensional stability in truncated moment problems ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 388.1 (2012), p. 219-230.
- [99] Florian-Horia VASILESCU. « Integral Representations of Semi-Inner Products in Function Spaces ». In : *International Journal of Analysis and Applications* 14.2 (2017), p. 107-133.
- [100] Hans VOLKMER. « Error estimates for Rayleigh-Ritz approximations of eigenvalues and eigenfunctions of the Mathieu and spheroidal wave equation ». In : *Constr. Approx.* 20.1 (2004), p. 39-54.
- [101] Eduard A. YANOVICH. « Asymptotics of eigenvalues of an energy operator in a problem of quantum physics ». In : *Operator Methods in Mathematical Physics*. Springer, 2013, p. 165-177.

Chapitre **2**

Le Problème de Moments Complexe
Quintique

THE QUINTIC COMPLEX MOMENT PROBLEM

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

(Communicated by H. Bercovici)

Abstract. Let $\gamma^{(m)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq m}$ be a given complex-valued sequence. The truncated complex moment problem (TCMP in short) involves determining necessary and sufficient conditions for the existence of a positive Borel measure μ on \mathbb{C} such that $\gamma_{ij} = \int \bar{z}^i z^j d\mu$ for $0 \leq i+j \leq m$. The TCMP has been completely solved only when $m = 1, 2, 3$ and 4 .

We provide in this paper a concrete solution to the, almost all, quintic TCMP (that is, when $m = 5$). We also study the cardinality of the minimal representing measure. Based on the bi-variate recurrence sequences properties with some Curto-Fialkow's results. Our method intended to be useful for all odd-degree moment problems.

1. Introduction

Given a doubly indexed finite sequence of complex numbers

$$\gamma \equiv \gamma^{(m)} = \{\gamma_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq m} = \{\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}, \dots, \gamma_{0m}, \dots, \gamma_{m0}\},$$

with $\gamma_{00} > 0$ and $\bar{\gamma}_{ij} = \gamma_{ji}$ for $0 \leq i+j \leq m$. The truncated complex moment problem (in short, TCMP) associated with γ entails finding a positive Borel measure μ supported in the complex plane \mathbb{C} such that

$$\gamma_{ij} = \int \bar{z}^i z^j d\mu, \quad 0 \leq i+j \leq m. \quad (1.1)$$

A sequence $\{\gamma_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq m}$ satisfying (1.1) will be called a truncated moment sequence and the solution μ is said to be a representing measure associated to the sequence $\{\gamma_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq m}$.

In [34] J. Stochel has shown that solving TCMP solves the widely studied Full Moment Problem (see, for example, [1, 2, 3, 17, 29, 30, 33, 36]). More precisely, a full moment sequence $\{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ admits a representing measure if and only if each of its truncation $\gamma^{(m)}$ admits a representing measure.

Mathematics subject classification (2010): 47A57, 15A83, 30E05, 44A60.

Keywords and phrases: Quintic complex moment problem, minimal representing measure, complex-valued bi-sequence.

The authors are dept full for the anonymous referee for his valuable comments that improved the first version of this paper.

The truncated complex moment problem serves as a prototype for several other moment problems to which it is closely related. Its application can be found in subnormal operator theory [31, 24, 35], polynomial hyponormality [12] and joint hyponormality [4, 5]. It is also related to the optimization theory [26, 25, 27, 28, 29] and arises in pure and applied mathematics, in physics and in several other domains.

For the even case $m = 2n$, Curto and Fialkow developed in a series of papers an approach for TCMP based on positivity and flat extensions of the moment matrix, see Section 2. This allowed them to find solutions for various particular cases of truncated moment problems (see, for instance, [6, 8, 7, 10, 11, 21, 20]). However, only the cases $m = 2$ and $m = 4$ are completely solved (cf. [6, 9, 19, 14]).

In the odd case $m = 2n + 1$, a general solution to some partial cases of the TCMP can be found in [22] and [23] as well as a solution to the truncated matrix moment problem; a solution to the cubic complex moment problem (when $m = 3$) was given in [23], see also [16]. The solution is based on commutativity conditions of matrices determined by $\{\gamma_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq 2n+1}$.

Therefore, only the cases $m = 1, 2, 3$ and 4 (the quadratic, the cubic and the quartic moment problem) have been completely achieved. All the other cases (quintic, sextic, ...) are open and interest several authors; as indicated in many recent papers (see, for instance, [13, 15, 16, 37, 38]).

In this paper, we provide a concrete solution to the, almost all, quintic moment problem (i.e. $m = 5$) when one desires a minimal representing measure. To this aim, we investigate the structure of recursive complex-valued bi-indexed sequences and we combine the obtained observations with some results due to R. Curto and L. Fialkow, to provide a new technique for solving the odd-degree TCMP. We notice that our techniques furnish a short solution to the cubic moment problem (we omit the proof because the cubic moment problem is already solved, see [16, 23]) and expected to be useful for higher odd-degree truncated moment problems.

Let $\gamma^{(5)} = \{\gamma_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq 5}$ be a given complex valued bi-sequence. We associate with $\gamma^{(5)}$ the next two matrices that will play a crucial role in our approach.

$$M(2) := \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{10} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{20} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{20} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} \\ \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{30} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} \\ \gamma_{02} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} \\ \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} \\ \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} \\ \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{50} \\ \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} \\ \gamma_{05} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Let us recall that thanks to Douglas factorization theorem, we have $\text{Rang } B \subseteq \text{Rang } M(2)$ if, and only if, there exists a matrix W such that $B = M(2)W$. We will show, in Section 2, that the Hermitian matrix $W^*M(2)W$ is symmetric with respect to the counter diagonal (persymmetric), then one can set

$$W^*M(2)W = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{b} & e & f & c \\ \bar{c} & \bar{f} & e & b \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{b} & a \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

As we will see in the sequel, the entries a, b, e and f in the matrix $W^*M(2)W$ encode the complete information on the cardinal of the support of the minimal representing measure.

THEOREM 1.1. *Let $\gamma^{(5)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 5}$ be a given finite sequence, such that $M(2) \geq 0$, $\text{Rang } B \subseteq \text{Rang } M(2)$ and $a \neq e$ or $b = f$. Then the quintic moment problem, associated with $\gamma^{(5)}$, admits a solution μ . Moreover, the smallest cardinality of $\text{supp } \mu$ is:*

- $\text{card } \text{supp } \mu = r \iff a = e \text{ and } b = f$;
- $\text{card } \text{supp } \mu = r + 1 \iff a \neq e \text{ and } \frac{a-e}{2} < |b-f|$;
- $\text{card } \text{supp } \mu = r + 2 \iff a > e \text{ and } \frac{a-e}{2} \geq |b-f|$;

where r is the rank of $M(2)$ and the numbers a, b, e and f are given by (1.3).

Since (as we will show in Section 2) $M(2) \geq 0$ and $\text{Rang } B \subseteq \text{Rang } M(2)$ are two necessary conditions for the quintic TCMP, associated with $\gamma^{(5)}$ to own a solution, then Theorem 1.1 provides a concrete solution to the quintic complex moment problem, except for the case $a = e$ and $b \neq f$. The difficulty that we encountered in solving the remaining case ($a = e$ and $b \neq f$) is technical, not a failure in the method, see Section 5.

This paper is organized as follows. In Section 2, we will give useful tools and results usually used in the treatment of the truncated complex moment problems. We will investigate in Section 3 the complex-valued recursive bi-sequences and we will present in section 4 a solution for the quintic TCMP associated with each, as well as a solution to the minimal support problem. Finally, in Section 5, we give several examples illustrating the different cases arising in the quintic complex moment problem.

2. Preliminaries

First, we recall a fundamental necessary condition. To this end, let us assume that $\gamma^{(2n)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 2n}$ is a given moment sequence and let μ be the associated representing measure. Then, for every $p \equiv \sum_{h,k} a_{hk} \bar{z}^h z^k \in \mathbb{C}[\bar{z}, z]$, we have

$$0 \leq \int |p|^2 d\mu = \sum_{h,k,h',k'} a_{hk} \bar{a}_{h'k'} \int \bar{z}^{h+k'} z^{k+h'} = \sum_{h,k,h',k'} a_{hk} \bar{a}_{h'k'} \gamma_{h+k', k+h'}$$

or equivalently, the moment matrix $M(n) \equiv M(n)(\gamma^{(2n)})$, defined below, is positive semi-definite.

$$M(n) := \begin{pmatrix} M[0,0] & M[0,1] & \dots & M[0,n] \\ M[1,0] & M[1,1] & \dots & M[1,n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M[n,0] & M[n,1] & \dots & M[n,n] \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

where

$$M[i,j] = \begin{pmatrix} \gamma_{i,j} & \gamma_{i+1,j-1} & \dots & \gamma_{i+j,0} \\ \gamma_{i-1,j+1} & \gamma_{i,j} & \dots & \gamma_{i+j-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{0,i+j} & \gamma_{1,i+j-1} & \dots & \gamma_{j,i} \end{pmatrix}.$$

Considering the lexicographic order,

$$1, Z, \bar{Z}, Z^2, Z\bar{Z}, \bar{Z}^2, \dots, Z^n, Z^{n-1}\bar{Z}, \dots, Z\bar{Z}^{n-1}, \bar{Z}^n, \quad (2.2)$$

1006

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

to denote rows and columns of the moment matrix $M(n)$. For example, the $M(3)$ matrix is

$$\begin{matrix}
 & 1 & Z & \bar{Z} & Z^2 & Z\bar{Z} & \bar{Z}^2 & Z^3 & Z^2\bar{Z} & Z\bar{Z}^2 & \bar{Z}^3 \\
 1 & \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{10} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{20} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} \\
 Z & \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{20} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{30} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} \\
 \bar{Z} & \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{11} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} \\
 Z^2 & \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{30} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{40} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{50} \\
 Z\bar{Z} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{21} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} \\
 \bar{Z}^2 & \gamma_{02} & \gamma_{03} & \gamma_{12} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{05} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} \\
 Z^3 & \gamma_{30} & \gamma_{31} & \gamma_{40} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{50} & \gamma_{33} & \gamma_{42} & \gamma_{51} & \gamma_{60} \\
 Z^2\bar{Z} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{31} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{41} & \gamma_{24} & \gamma_{33} & \gamma_{42} & \gamma_{51} \\
 Z\bar{Z}^2 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{22} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{32} & \gamma_{15} & \gamma_{24} & \gamma_{33} & \gamma_{42} \\
 \bar{Z}^3 & \gamma_{03} & \gamma_{04} & \gamma_{13} & \gamma_{05} & \gamma_{14} & \gamma_{23} & \gamma_{06} & \gamma_{15} & \gamma_{24} & \gamma_{33}
 \end{matrix} \quad (2.3)$$

Observe in passing that each block $M[i, j]$ has a Toeplitz form. That is each of its diagonals contains constant entries. On the other hand, it is easy to see that the matrix $M(n)$ detects the positivity of the Riesz functional given by

$$\Lambda_{\gamma(2n)} : p(\bar{z}, z) \equiv \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} a_{ij} \bar{z}^i z^j \longrightarrow \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} a_{ij} \gamma_{ij}$$

on the cone generated by the collection $\{p\bar{p} : p \in \mathbb{C}_n[\bar{z}, z]\}$, where $\mathbb{C}_n[\bar{z}, z]$ is the vector space of polynomials in two variables with complex coefficients and total degree less than or equal to n .

It is an immediate observation that the row $\bar{z}^k z^l$, column $\bar{z}^i z^j$ entry of the matrix $M(n)$ is equal to $\Lambda_{\gamma(2n)}(\bar{z}^{i+l} z^{j+k}) = \gamma_{i+l, j+k}$. For reason of simplicity, we identify a polynomial $p(\bar{z}, z) \equiv \sum a_{ij} \bar{z}^i z^j$ with its coefficient vector $p = (a_{ij})$ with respect to the basis of monomials of $\mathbb{C}_n[\bar{z}, z]$ in degree-lexicographic order. Clearly, $M(n)$ acts on these coefficient vectors as follows:

$$\langle M(n)p, q \rangle = \Lambda_{\gamma(2n)}(p\bar{q}). \quad (2.4)$$

A theorem of Smul'jan [32] shows that a block matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0, \quad (2.5)$$

if and only if:

- (i) $A \geq 0$;
- (ii) there exists a matrix W such that $B = AW$;
- (iii) $C \geq W^*AW$.

Since $A = A^*$, we obtain that W^*AW is independent of the choice of W provided that $B = AW$. Moreover, $\text{rank } M = \text{rank } A \Leftrightarrow C = W^*AW$ for some W such that $B = AW$. Conversely, if $A \geq 0$, any extension M satisfying $\text{rank } M = \text{rank } A$ (if this condition is satisfied, we say that M is a flat extension of A) is necessarily positive. Notice also that from the expression

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -W^* & I' \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & -W \\ 0 & I' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C - W^*AW \end{pmatrix},$$

where I and I' denote the unit matrices, we deduce that

$$\text{rank } M = \text{rank } A + \text{rank } (C - W^*AW). \quad (2.6)$$

By Smul'jan's theorem, $M(n) \geq 0$ admits a (necessarily positive) flat extension

$$M(n+1) = \begin{pmatrix} M(n) & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

in the form of a moment matrix $M(n+1)$ if and only if:

- (i) $B = M(n)W$ for some W ;
- (ii) $C = W^*M(n)W$ is a Toeplitz matrix.

Furthermore, we have the next result due to Curto and Fialkow.

THEOREM 2.1. [6, Theorem 5.13] *The finite sequence $\gamma^{(2n)}$ has a rank $M(n)$ -atomic representing measure if and only if $M(n) \geq 0$ and $M(n)$ admits a flat extension $M(n+1)$. That is, $M(n)$ can be extended to a positive moment matrix $M(n+1)$ satisfying $\text{rank } M(n+1) = \text{rank } M(n)$.*

An important step in our approach is to show that the Hermitian matrix $W^*M(n)W$ is persymmetric, that is, it is symmetric across its lower-left to upper-right diagonals. For this purpose, we introduce first some additional notations.

We denote the successive columns of W and B (given as in Expression (2.7)) by $W|_{\mathbb{Z}^{n+1}}, W|_{\mathbb{Z}^n}, \dots, W|_{\mathbb{Z}^{n+1}}$ and $B|_{\mathbb{Z}^{n+1}}, B|_{\mathbb{Z}^n}, \dots, B|_{\mathbb{Z}^{n+1}}$, respectively.

Let us consider the $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ -matrix built as follows,

$$M_\varphi(n) := J_0 \oplus J_1 \oplus \dots \oplus J_n;$$

where $J_p = (\delta_{i+j, p+1})_{1 \leq i, j \leq p}$ with $\delta_{i,j}$ is the Kronecker symbol given by $\delta_{l,k} = 1$ for $k = l$ and zero otherwise. For example

$$J_0 = (1), \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

LEMMA 2.2. *Let $M_\varphi(n)$, $M(n)$ and $B_{\mathbb{Z}^{n-i}\mathbb{Z}^i}$ ($i = 0, \dots, n$) be as above, then:*

1. $(M_\varphi(n))^2 = I$;
2. $(M_\varphi(n))^* = M_\varphi(n)$;
3. $M_\varphi(n)B_{\mathbb{Z}^i\mathbb{Z}^{n-i}} = B_{\mathbb{Z}^{n-i}\mathbb{Z}^i}$, $i = 0, \dots, n$;
4. $M_\varphi(n)M(n) = \overline{M(n)}M_\varphi(n)$.

Proof. The assertions (1), (2) and (3) are obvious. Only the fourth assertion requires a proof. To this aim, we recall that $M(n) = [M(i, j)]_{0 \leq i, j \leq n}$, see (2.1). Therefore

$$\begin{aligned} [M_\varphi(n)]M(n) &= \left[\bigoplus_{i=0}^n J_i \right] [M(i, j)]_{i, j \leq n} = [J_i M(i, j)]_{i, j \leq n} = [\overline{M(i, j)} J_j]_{i, j \leq n} \\ &= [\overline{M(i, j)}]_{i, j \leq n} \left[\bigoplus_{i=0}^n J_i \right] = \overline{M(n)} M_\varphi(n). \quad \square \end{aligned}$$

1008

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

PROPOSITION 2.3. *Let n be a given integer and let $M(n)$ and W be as above, then $W^*M(n)W$ is an Hermitian Persymmetric matrix.*

Proof. Setting $W^*M(n)W = (c_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$, then we have

$$c_{n-j, n-i} = W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j}^* M(n) W_{\overline{Z}^{n-i}Z^i}. \quad (2.8)$$

By multiplying left sides of the fourth equation in Lemma 2.2 by $M_\varphi(n)$ we obtain

$$M_\varphi(n)M_\varphi(n)M(n) = M_\varphi(n)\overline{M(n)}M_\varphi(n). \quad (2.9)$$

Hence, by applying Lemma 2.2-(1), we get

$$M(n) = M_\varphi(n)\overline{M(n)}M_\varphi(n). \quad (2.10)$$

It follows, from (2.8) and (2.10), that

$$c_{n-j, n-i} = W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j}^* M_\varphi(n)\overline{M(n)}M_\varphi(n)W_{\overline{Z}^{n-i}Z^i}. \quad (2.11)$$

The fact that $M_\varphi(n)$ is self-adjoint allows to write

$$c_{n-j, n-i} = \left(M_\varphi(n)W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j} \right)^* \overline{M(n)} \left(M_\varphi(n)W_{\overline{Z}^{n-i}Z^i} \right). \quad (2.12)$$

By using the assertions (3) and (4), in Lemma 2.2, we deduce that:

$$\overline{M(n)}M_\varphi(n)W_{\overline{Z}^{n-i}Z^i} = M_\varphi(n)M(n)W_{\overline{Z}^{n-i}Z^i} = M_\varphi(n)B_{\overline{Z}^{n-i}Z^i} = B_{\overline{Z}^iZ^{n-i}}.$$

Therefore, (2.12) implies that

$$\begin{aligned} c_{n-j, n-i} &= \left(M_\varphi(n)W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j} \right)^* B_{\overline{Z}^iZ^{n-i}} = W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j}^* M_\varphi(n)M(n)W_{\overline{Z}^iZ^{n-i}} \\ &= \left(M(n)M_\varphi(n) \right)^* W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j}^* W_{\overline{Z}^iZ^{n-i}} = \left(M_\varphi(n)M(n)W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j} \right)^* W_{\overline{Z}^iZ^{n-i}} \\ &= \overline{M(n)}M_\varphi(n)W_{\overline{Z}^{n-j}Z^j}^* W_{\overline{Z}^iZ^{n-i}} = \left(M(n)W_{\overline{Z}^jZ^{n-j}} \right)^* W_{\overline{Z}^iZ^{n-i}} = W_{\overline{Z}^iZ^{n-j}}^* M(n)W_{\overline{Z}^iZ^{n-i}} \\ &= c_{i, j}. \end{aligned}$$

This concludes the proof of the Proposition 2.3. \square

3. Complex-valued recursive bi-sequences

Let $\gamma^{(n)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq n}$, with $\overline{\gamma_{ij}} = \gamma_{ji}$ and $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, be a given complex-valued sequence and let $P_{\overline{z}^e z^{d-e}} = \sum_{\substack{l+k \leq d \\ (l, k) \neq (e, d-e)}} a_{lk} \overline{z}^l z^k$ be in $\mathbb{C}_d[\overline{z}, z]$, the vector space of polynomials in

two variables with complex coefficients and total degree less than or equal to d (we assume that $d \leq n$). The sequence $\gamma^{(n)}$ is said to be recursive, associated with a generating polynomial $\overline{z}^e z^{d-e} - P_{\overline{z}^e z^{d-e}}$, if

$$\gamma_{e+i, d-e+j} = \Lambda_{\gamma^{(n)}}(\overline{z}^i z^j P_{\overline{z}^e z^{d-e}}), \quad \text{for all } i+j \leq n-d, \quad (3.1)$$

or, equivalently, if

$$\gamma_{e+i, d-e+j} = \sum_{\substack{l+k \leq d \\ (l, k) \neq (e, d-e)}} a_{lk} \gamma_{l+i, k+j}, \quad i+j \leq n-d. \quad (3.2)$$

We notice that, because of the equality $\overline{\gamma_{ij}} = \gamma_{ji}$, Equation (3.2) is equivalent to the following one:

$$\gamma_{d-e+i,e+j} = \sum_{\substack{l+k \leq d \\ (l,k) \neq (e,d-e)}} \overline{a_{lk}} \gamma_{k+i,l+j}, \quad (3.3)$$

for all integers i and j , with $i+j \leq n-d$.

Therefore, $\overline{z}^{d-e} z^e - P_{\overline{z}^{d-e} z^e}$ (where $P_{\overline{z}^{d-e} z^e} = \overline{P_{z^{d-e}}}$) is, also, a generating polynomial, associated with $\gamma^{(n)}$; that is,

$$\gamma_{d-e+i,e+j} = \Lambda_{\gamma^{(n)}}(\overline{z}^i z^j P_{\overline{z}^{d-e} z^e}), \quad i+j \leq n-d. \quad (3.4)$$

The following proposition provides a connection, via Λ , between the polynomials $P_{\overline{z}^f z^{f+1}}$ and $P_{z^{f+1} z^f}$.

PROPOSITION 3.1. *Let $\gamma^{(n)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq n}$ be a recursive bi-sequence and let $\overline{z}^f z^{f+1} - P_{\overline{z}^f z^{f+1}}$ be an associated generating polynomial, then*

$$\Lambda_{\gamma^{(n)}}(\overline{z}^{l+1} z^k P_{\overline{z}^f z^{f+1}}) = \Lambda_{\gamma^{(n)}}(\overline{z}^l z^{k+1} P_{z^{f+1} z^f}), \quad l+k \leq n-2f-2.$$

Proof. For all integers l and k , with $l+k \leq n-2f-2$, we have

$$\begin{aligned} \Lambda_{\gamma^{(n)}}(\overline{z}^{l+1} z^k P_{\overline{z}^f z^{f+1}}) &= \gamma_{f+l+1, f+k+1} = \overline{\gamma_{f+k+1, f+l+1}} = \overline{\Lambda_{\gamma^{(n)}}(\overline{z}^{k+1} z^l P_{z^{f+1} z^f})} \\ &= \Lambda_{\gamma^{(n)}}(\overline{z}^l z^{k+1} P_{z^{f+1} z^f}). \quad \square \end{aligned}$$

It is well known that the classical singly indexed recursive sequence can be defined by the initial data and the associated recurrence relation (or, characteristic polynomial), see [18]. In a similar way, one can define recursive bi-sequences as observed below.

REMARK 3.2. (i) A generating polynomial $z^e - P_{z^e}$ (or, equivalently, $\overline{z}^e - P_{\overline{z}^e}$), where $\deg P_{z^e} < e$, with the initial data $\{\gamma_{ij}\}_{i,j < e}$ verifying $\overline{\gamma_{ij}} = \gamma_{ji}$, stand together to furnish the sequence $\gamma^{(n)}$.

(ii) For a generating polynomial $\overline{z} z^{e-1} - P_{\overline{z} z^{e-1}}$, with $\deg P_{\overline{z} z^{e-1}} < e$, we need (all) the data $\{\gamma_{ij}\}_{i,j < e} \cup \{\gamma_{0j}\}_{j=e, \dots, n}$ and the equality $\overline{\gamma_{ij}} = \gamma_{ji}$ to get the recursive bi-sequence $\gamma^{(n)}$.

In the next lemma, we provide useful results for solving the quintic moment problem.

LEMMA 3.3. *Let $\gamma^{(8)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 8}$, with $\overline{\gamma_{ij}} = \gamma_{ji}$, be a truncated bi-sequence and let $z^4 - P_{z^4}$ (where $P_{z^4} = \beta z^3 + R_{z^4}$ and $R_{z^4} \in \mathbb{C}_2[\overline{z}, z]$) be an associated generating polynomial. Assume that $\overline{z} z^2 - P_{\overline{z} z^2}$ (where $P_{\overline{z} z^2} = \alpha z^3 + R_{\overline{z} z^2}$, $\alpha \neq 0$ and $R_{\overline{z} z^2} \in \mathbb{C}_2[\overline{z}, z]$) is a generating polynomial for $\gamma^{(6)} \cup \{\gamma_{34}, \gamma_{43}\}$, then $\overline{z} z^2 - P_{\overline{z} z^2}$ is a generating polynomial for $\gamma^{(8)}$.*

Proof. We have $z^4 - P_{z^4}$ is a generating polynomial for $\gamma^{(8)}$, that is,

$$\gamma_{i,j+4} = \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z}^i z^j P_{z^4}) = \beta \gamma_{i,j+3} + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z}^i z^j R_{z^4}), \quad i+j \leq 4. \quad (3.5)$$

As shown in (3.4), the last equality (3.7) is equivalent to

$$\gamma_{i+4,j} = \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z}^i z^j P_{z^4}) = \overline{\beta} \gamma_{i+3,j} + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z}^i z^j R_{z^4}), \quad i+j \leq 4; \quad (3.6)$$

1010

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

where $\overline{P_{z^4}} := P_{\overline{z^4}} = \overline{\beta z^3} + \overline{R_{\overline{z^2}}}$.

Also, the polynomial $\overline{z z^2} - P_{\overline{z z^2}}$ is a generating one for $\gamma^{(6)} \cup \{\gamma_{34}, \gamma_{43}\}$; that is, for all $i + j \leq 3$ and $(i, j) = (2, 2), (3, 1)$:

$$\gamma_{i+1, j+2} = \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z^i z^j P_{\overline{z z^2}}}) = \alpha \gamma_{i, j+3} + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z^i z^j R_{\overline{z z^2}}}), \quad (3.7)$$

or, equivalently, for $i + j \leq 3$ and $(i, j) = (2, 2), (1, 3)$:

$$\gamma_{i+2, j+1} = \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z^i z^j P_{\overline{z z^2}}}) = \overline{\alpha} \gamma_{i+3, j} + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z^i z^j R_{\overline{z z^2}}}), \quad (3.8)$$

where $P_{\overline{z z^2}} := \overline{P_{z z^2}} = \overline{\beta z^3} + R_{\overline{z z^2}}$, see (3.4).

We have to show that (3.7) remains valid for all integers i and j , verifying $i + j \leq 5$. To this end, we consider the recursive bi-sequence $\widehat{\gamma}^{(8)} \equiv \{\widehat{\gamma}_{i, j}\}_{i+j \leq 8}$ defined by

$$\begin{cases} \widehat{\gamma}_{i+1, j+2} &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\overline{z^i z^j P_{\overline{z z^2}}}), & i + j \leq 5, \\ \widehat{\gamma}_{i, j} &= \gamma_{i, j}, & \text{otherwise;} \end{cases} \quad (3.9)$$

and we will show that $\widehat{\gamma}^{(8)} = \gamma^{(8)}$. Notice that since $\overline{z z^2} - P_{\overline{z z^2}}$ is a generating polynomial for $\widehat{\gamma}^{(8)}$, then $\overline{z z^2} - P_{\overline{z z^2}}$ is an other one. Thus

$$\widehat{\gamma}_{i+2, j+1} = \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\overline{z^i z^j P_{\overline{z z^2}}}), \quad i + j \leq 5. \quad (3.10)$$

It follows from (3.7) and (3.9) that, for $n + m \leq 6$, $n = 0$ and $(n, m) = (3, 4), (4, 3)$:

$$\gamma_{nm} = \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z^n z^m}) = \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\overline{z^n z^m}) := \widehat{\gamma}_{nm}. \quad (3.11)$$

Remark that if $\widehat{\gamma}_{nm} = \gamma_{nm}$ then $\widehat{\gamma}_{mn} = \overline{\widehat{\gamma}_{nm}} = \overline{\gamma_{nm}} = \gamma_{mn}$.

Therefore, it remains to show (3.11), only, for $(n, m) = (2, 5), (1, 6); (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)$. We start with γ_{25} and γ_{16}

$$\begin{aligned} \gamma_{25} &= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z^2 z P_{z^4}}) && \text{utilizing (3.5)} \\ &= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(P_{\overline{z z^2}} P_{z^4}) && \text{employ (3.8) and } \deg P_{z^4} \leq 3 \\ &= \overline{\alpha} \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\overline{z^3 P_{z^4}}) + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(R_{\overline{z z^2}} P_{z^4}) \\ &= \overline{\alpha} \gamma_{34} + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(z^4 R_{\overline{z z^2}}) && \text{applying (3.5)} \\ &= \overline{\alpha} \widehat{\gamma}_{34} + \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^4 R_{\overline{z z^2}}) && \text{use } \deg z^4 R_{\overline{z z^2}} \leq 6 \text{ and (3.11)} \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\overline{\alpha z^3 z^4} + z^4 R_{\overline{z z^2}}) \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^4 P_{\overline{z z^2}}) \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\overline{z z^3 P_{z^2 \overline{z}}}) && \text{according to Proposition 3.1} \\ &= \widehat{\gamma}_{25} && \text{from (3.10).} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{16} &= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}z^2 P_{z^4}) && \text{use (3.5)} \\
&= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(P_{\bar{z}z^2} P_{z^4}) && \text{employ (3.7) and } \deg P_{z^4} \leq 3 \\
&= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\alpha z^3 P_{z^4} + R_{\bar{z}z^2} P_{z^4}) \\
&= \alpha \gamma_{07} + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(z^4 R_{\bar{z}z^2}) && \text{utilizing (3.5)} \\
&= \alpha \widehat{\gamma}_{07} + \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^4 R_{\bar{z}z^2}) && \text{using (3.11) and } \deg z^4 R_{\bar{z}z^2} \leq 6 \\
&= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\alpha z^7 + z^4 R_{\bar{z}z^2}) \\
&= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^4 P_{\bar{z}z^2}) \\
&= \widehat{\gamma}_{16} && \text{according to (3.9).}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Thus, the equality (3.11) is valid for every integer n and m with $n+m \leq 7$. In other words,

$$\gamma_{nm} = \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}^n z^m) = \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^n z^m) := \widehat{\gamma}_{nm}, \quad n+m \leq 7. \tag{3.14}$$

Hence one can generalize relation (3.7) as follows

$$\gamma_{i+1,j+2} = \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}^i z^j P_{\bar{z}z^2}) = \alpha \gamma_{i,j+3} + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}^i z^j R_{\bar{z}z^2}), \quad i+j \leq 4. \tag{3.15}$$

Now, let us show (3.11) for the remaining cases ($n+m=8$).

$$\gamma_{08} = \widehat{\gamma}_{08}, \quad \text{by the construction of } \widehat{\gamma}^{(8)}, \text{ see (3.9).} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{17} &= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}z^3 P_{z^4}) && \text{according to (3.5)} \\
&= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(z P_{z^4} P_{\bar{z}z^2}) && \text{because } \deg z P_{z^4} \leq 4 \text{ and (3.15)} \\
&= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(z^5 P_{\bar{z}z^2}) && \text{utilizing (3.5)} \\
&= \alpha \Lambda_{\gamma^{(8)}}(z^8) + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(z^5 R_{\bar{z}z^2}) \\
&= \alpha \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^8) + \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^5 R_{\bar{z}z^2}) && \text{using (3.16) and (3.14)} \\
&= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^5 P_{\bar{z}z^2}) \\
&= \widehat{\gamma}_{17} && \text{applying (3.9).}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{26} &= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}^2 z^2 P_{z^4}) && \text{according to (3.5)} \\
&= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z} P_{z^4} P_{\bar{z}z^2}) && \text{use } \deg \bar{z} P_{z^4} \leq 4 \text{ and (3.15)} \\
&= \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}z^4 P_{\bar{z}z^2}) && \text{utilizing (3.5)} \\
&= \alpha \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}z^7) + \Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}z^4 R_{\bar{z}z^2}) \\
&= \alpha \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}z^7) + \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}z^4 R_{\bar{z}z^2}) && \text{by using (3.17) and (3.14)} \\
&= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}z^4 P_{\bar{z}z^2}) \\
&= \widehat{\gamma}_{26} && \text{according to (3.9).}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Before we continue the proof of our lemma, let us remark that the relation (3.14) implies that, for all $i+j \leq 5$,

$$\Lambda_{\gamma^{(8)}}(\bar{z}^{i+1} z^{j+2}) = \widehat{\gamma}_{i+1,j+2} = \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^i z^j (\alpha z^3 + R_{\bar{z}z^2})),$$

1012

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

therefore

$$\Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^i z^{j+3}) = \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^i z^j (\bar{z} z^2 - R_{\bar{z} z^2})), \quad i+j \leq 5. \quad (3.19)$$

Now, we write

$$\begin{aligned} \gamma_{35} &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^3 z P_{z^4}) && \text{according to (3.5)} \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^3 z P_{z^4}) && \text{because } \deg \bar{z}^3 z P_{z^4} \leq 7 \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}\left(\frac{1}{\alpha} (P_{\bar{z} z} - R_{\bar{z} z}) z P_{z^4}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}((\bar{z}^2 z - R_{\bar{z} z}) z P_{z^4}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}((\bar{z}^2 z - R_{\bar{z} z}) z P_{z^4}) && \text{applying (3.14)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^2 z^6) - \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^5 R_{\bar{z} z}) && (3.20) \\ &= \frac{1}{\alpha} \gamma_{26} - \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^5 R_{\bar{z} z}) && \text{remark that } \deg z^5 R_{\bar{z} z} \leq 7 \\ &= \frac{1}{\alpha} \widehat{\gamma}_{26} - \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(z^5 R_{\bar{z} z}) && \text{from (3.18)} \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}\left(\frac{1}{\alpha} (P_{\bar{z} z} - R_{\bar{z} z}) z^5\right) \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^3 z^5) \\ &= \widehat{\gamma}_{35}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{44} &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^4 P_{z^4}) \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^3 \bar{z} P_{z^4}) && \text{using (3.14)} \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}\left(\frac{1}{\alpha} (P_{\bar{z} z} - R_{\bar{z} z}) \bar{z} P_{z^4}\right) && \text{by (3.19)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^3 z P_{z^4}) - \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z} P_{z^4} R_{\bar{z} z}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^3 z P_{z^4}) - \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z} P_{z^4} R_{\bar{z} z}) && (3.21) \\ &= \frac{1}{\alpha} \gamma_{35} - \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z} P_{z^4} R_{\bar{z} z}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \widehat{\gamma}_{35} - \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z} P_{z^4} R_{\bar{z} z}) && \text{applying (3.20)} \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}\left(\frac{1}{\alpha} (P_{\bar{z} z} - R_{\bar{z} z}) \bar{z} P_{z^4}\right) \\ &= \Lambda_{\widehat{\gamma}^{(8)}}(\bar{z}^4 P_{z^4}) \\ &= \widehat{\gamma}_{44}. \end{aligned}$$

 This finishes the proof of Lemma 3.3. \square

4. Solving the quintic moment problem

Let $\gamma^{(5)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 5}$ be a given complex-valued bi-sequence, with $\gamma_{00} > 0$ and $\overline{\gamma_{ij}} = \gamma_{ji}$ for $i+j \leq 5$. The quintic complex moment problem involves determining necessary and

sufficient conditions for the existence of a positive Borel measure μ on \mathbb{C} (called a representing measure for $\gamma^{(5)}$) such that

$$\gamma_{ij} = \int \bar{z}^i z^j d\mu, \quad \text{for } i+j \leq 5.$$

In this section we will show that in almost all cases the classical necessary conditions $M(2) \geq 0$ and $B = M(2)W$, for some W , (with $M(2)$ and B are as in (2.7)) guarantee the existence of at most $(r+2)$ -atomic (here $r := \text{rank } M(2)$) representing measure for $\gamma^{(5)}$.

According to Proposition 2.3, the Hermitian 4×4 -matrix $W^*M(2)W$ is symmetric with respect to the counter diagonal, then one can set

$$W^*M(2)W = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{b} & e & f & c \\ \bar{c} & \bar{f} & e & b \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{b} & a \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

The next theorem gives a concrete solution to the quintic complex moment problem, except for the case $a = e$ and $b \neq f$.

THEOREM 4.1. *Let $\gamma^{(5)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 5}$ be a given sequence, we assume that $M(2) \geq 0$ and $\text{Rang } B \subseteq \text{Rang } M(2)$, and $a \neq e$ or $b = f$.*

Then the quintic moment problem, associated with $\gamma^{(5)}$, admits a solution μ . Moreover, the smallest cardinality of $\text{supp } \mu$ is given by:

- $\text{card } \text{supp } \mu = r \iff a = e \text{ and } b = f;$
- $\text{card } \text{supp } \mu = r+1 \iff a \neq e \text{ and } \frac{a-e}{2} < |b-f|;$
- $\text{card } \text{supp } \mu = r+2 \iff a > e \text{ and } \frac{a-e}{2} \geq |b-f|;$

where a, b, e and f are as in (4.1).

Before we develop the proof of our theorem, let us introduce some notations. For $n \in \{3, 4\}$; let $\gamma^{(2n)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 2n}$ be a truncated complex bi-sequence and let $M(n)$ be the associated moment matrix. As before, we denote by $B(n)$ and $C(n)$ the $(n-1) \times n$ -matrix and the $n \times n$ -matrix, respectively, such that

$$M(n) = \begin{pmatrix} M(n-1) & B(n) \\ B^*(n) & C(n) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Let $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}(n) \equiv \{\bar{Z}^i Z^j\}_{(i,j) \in \mathfrak{R}}$ (where $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}(n) \subseteq \{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\}$) be a basis for the column space of $M(n)$. Let us remark that the $r \times r$ -matrix $M(n)|_{\mathfrak{B}}$, where $r \equiv r(n) := \text{card } \mathfrak{R}(n)$, the restriction of the moment matrix $M(n)$ to the basis \mathfrak{B} , is invertible.

Proof of Theorem 4.1. The main idea is to extend the initial data $\gamma^{(5)}$ to an even-degree $\gamma^{(6)}$ (by adding the sixtic moments $\gamma_{60} = \overline{\gamma_{06}}$, $\gamma_{51} = \overline{\gamma_{15}}$, $\gamma_{42} = \overline{\gamma_{24}}$ and $\gamma_{33} \in \mathbb{R}$) such that the associated moment matrix $M(3)$, for an appropriate choice of the missing moments, is either a flat extension of $M(2)$ or admits a flat extension $M(4)$. Theorem 2.1 yields that $M(3)$ has a representing measure; and as a consequence, $\gamma^{(5)}$ also admits a representing measure μ . It is also proved that the smallest cardinality of $\text{supp } \mu$ will be $r := \text{rank } M(2)$ or $r+1$ or $r+2$.

By virtue of the Smul'jan's Theorem, we need to find a Toeplitz square matrix $C(3)$, built with the new, sixtic, moments as entries and such that $C(3) - W^*M(2)W \geq 0$. Setting

$$C(3) - W^*M(2)W = \begin{pmatrix} \gamma_{33} - a & \gamma_{42} - b & \gamma_{51} - c & \gamma_{60} - d \\ \gamma_{24} - \bar{b} & \gamma_{33} - e & \gamma_{42} - f & \gamma_{51} - c \\ \gamma_{15} - \bar{c} & \gamma_{24} - \bar{f} & \gamma_{33} - e & \gamma_{42} - b \\ \gamma_{06} - \bar{d} & \gamma_{15} - \bar{c} & \gamma_{24} - \bar{b} & \gamma_{33} - a \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

1014

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

in the sequel, we distinguish two cases:

Case I: $a = e$ and $b = f$. In this case the matrix $W^*M(2)W$ is a Toeplitz one, then it suffices to consider that $C(3) = W^*M(2)W$. According to (2.6), the matrix $M(3)$ is a flat extension of $M(2)$ and thus $\gamma^{(6)}$ (and in force $\gamma^{(5)}$) has a r -representing measure.

Case II: $a \neq e$. We proceed in two steps for this case. Obviously, the matrix $W^*M(2)W$ is not a Toeplitz one. Therefore, for every choice of a Toeplitz 4×4 -matrix $C(3)$, we have $\text{rank}(C(3) - W^*M(2)W) \geq 1$. We will show, in first step, that the smallest possible $\text{rank}(C(3) - W^*M(2)W)$ will be either 1 or 2. In the second step, we will show that the moment matrix $M(3)$, obtained by extending $\gamma^{(5)}$ with the entries of some suitable $C(3)$, has a flat extension and thus admits a $\text{rank} M(3)$ -atomic representing measure, see Theorem 2.1.

Step 1: Construction of $C(3)$. Firstly, let us observe that

$$\text{rank}(C(3) - W^*M(2)W) = 1 \text{ and } C(3) - W^*M(2)W \geq 0 \tag{4.4}$$

if and only if we have:

$$\begin{aligned} (0) \quad & \gamma_{33} > \max(a, e); \\ (i) \quad & |\gamma_{42} - b| = \sqrt{(\gamma_{33} - a)(\gamma_{33} - e)} \quad \text{and} \quad |\gamma_{42} - f| = \gamma_{33} - e; \\ (ii) \quad & (\gamma_{15} - \bar{c})(\gamma_{42} - b) = (\gamma_{33} - a)(\gamma_{24} - \bar{f}); \\ (iii) \quad & (\gamma_{06} - \bar{d})(\gamma_{42} - b)^2 = (\gamma_{33} - a)^2(\gamma_{24} - \bar{f}) \quad \text{and} \quad |\gamma_{06} - \bar{d}|^2 = (\gamma_{33} - a)^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Remark that the equalities in (i) provide the compatibility of the two equalities in (iii) and vice versa.

The condition (i) means that γ_{42} belongs to the intersection of the circles $\mathcal{C} = \mathcal{C}(b, \sqrt{(\gamma_{33} - a)(\gamma_{33} - e)})$, of radius $\sqrt{(\gamma_{33} - a)(\gamma_{33} - e)}$ and centered at b , and $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(f, \gamma_{33} - e)$.

It is geometrically easy to see that, the two circles \mathcal{C} and \mathcal{C}' have a nonempty intersection if, and only if, there exists $\gamma_{33} > \max(a, e)$, such that

$$|(\gamma_{33} - e) - \sqrt{(\gamma_{33} - a)(\gamma_{33} - e)}| \leq |b - f| \leq \gamma_{33} - e + \sqrt{(\gamma_{33} - a)(\gamma_{33} - e)}. \tag{4.6}$$

Since the function $x \rightarrow (x - e) - \sqrt{(x - a)(x - e)}$ is decreasing (on $[\max(a, e); +\infty[)$, then $(x - e) - \sqrt{(x - a)(x - e)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{a - e}{2}$ and $(x - e) + \sqrt{(x - a)(x - e)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Therefore (4.6) is verified if and only if $a = e$ and $b \neq f$ or $a < e$ or $a > e$ and $|b - f| > \frac{a - e}{2}$.

Sub-case II-1: $a < e$ or $a > e$ and $|b - f| > \frac{a - e}{2}$. It suffices to choose γ_{33} verifying (4.6), and thus γ_{42} exists (as an intersection point of the two circles \mathcal{C} and \mathcal{C}'). Furthermore, from (0) and (i) we derive that

$$(\gamma_{42} - b)(\gamma_{42} - f) \neq 0. \tag{4.7}$$

Equality (ii) gives the moment γ_{15} and (iii) supplies γ_{06} , and this completes the construction of a Toeplitz matrix $C(3)$ for which $\text{rank}(C(3) - W^*M(2)W) = 1$. Note that,

$$\text{rank} M(3)|_{\mathfrak{B}(2) \cup \{Z^3\}} = \text{rank} M(2) + 1 = \text{rank} M(3).$$

Hence, in $M(3)$, the columns $\bar{Z}Z^2, \bar{Z}^2Z$ and \bar{Z}^3 are linear combinations of the columns $\mathfrak{B}(2) \cup \{Z^3\}$. In particular, we can set

$$\bar{Z}Z^2 = P_{\bar{z}z^2}(Z, \bar{Z}) = \alpha Z^3 + R_{\bar{z}z^2}(Z, \bar{Z}), \tag{4.8}$$

with

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\det \begin{vmatrix} M(2)|_{\mathfrak{B}(2)} & \overline{ZZ}^2|_{\mathfrak{B}(2)} \\ (Z^3|_{\mathfrak{B}(2)})^* & \gamma_{42} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} M(2)|_{\mathfrak{B}(2)} & Z^3|_{\mathfrak{B}(2)} \\ (Z^3|_{\mathfrak{B}(2)})^* & \gamma_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\det \begin{vmatrix} M(2)|_{\mathfrak{B}(2)} & \overline{ZZ}^2|_{\mathfrak{B}(2)} \\ (Z^3|_{\mathfrak{B}(2)})^* & b \end{vmatrix} + (\gamma_{42} - b) \det |M(2)|_{\mathfrak{B}(2)}|}{\det \begin{vmatrix} M(2)|_{\mathfrak{B}(2)} & Z^3|_{\mathfrak{B}(2)} \\ (Z^3|_{\mathfrak{B}(2)})^* & a \end{vmatrix} + (\gamma_{33} - a) \det |M(2)|_{\mathfrak{B}(2)}|} \\ &= \frac{(\gamma_{42} - b) \det |M(2)|_{\mathfrak{B}(2)}|}{(\gamma_{33} - a) \det |M(2)|_{\mathfrak{B}(2)}|} = \frac{\gamma_{42} - b}{\gamma_{33} - a} \neq 0; \quad \text{by virtue of (4.7).} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sub-case II-2: $a > e$ and $\frac{a-e}{2} \geq |b-f|$. Then $\text{rank}(C(3) - W^*M(2)W) \geq 2$ for every 4×4 -Toeplitz matrix $C(3)$. Let us choose the sixtic moments as follows

$$\begin{cases} \gamma_{33} > \max(a, e), \\ |\gamma_{42} - b| = \sqrt{(\gamma_{33} - a)(\gamma_{33} - e)}, \\ \gamma_{15} - \bar{c} = \frac{\gamma_{33} - a}{\gamma_{42} - b} (\gamma_{24} - \bar{f}), \\ \gamma_{06} - \bar{d} = \left(\frac{\gamma_{33} - a}{\gamma_{42} - b} \right)^2 (\gamma_{24} - \bar{f}). \end{cases} \tag{4.10}$$

We notice that as the first sub-case II-1, we have

$$\frac{\gamma_{42} - b}{\gamma_{33} - a} = \sqrt{\frac{\gamma_{33} - e}{\gamma_{33} - a}} \neq 0. \tag{4.11}$$

The moments defined in (4.10) construct a Toeplitz matrix $C(3)$ for which $\text{rank}(C(3) - W^*M(2)W) = 2$. Indeed, it suffices to observe that:

- $(C(3) - W^*M(2)W)(Z^3) = \frac{\gamma_{33} - a}{\gamma_{42} - b} (C(3) - W^*M(2)W)(\overline{ZZ}^2)$;
- $(C(3) - W^*M(2)W)(\overline{Z}^3) = \frac{\gamma_{33} - a}{\gamma_{24} - b} (C(3) - W^*M(2)W)(\overline{Z}^2 Z)$;
- the columns $(C(3) - W^*M(2)W)(Z^3)$ and $(C(3) - W^*M(2)W)(\overline{Z}^3)$ are nonlinear (because (i) can not be verified).

Therefore, in $M(3)$, the column \overline{ZZ}^2 is a linear combination of the columns in $\mathfrak{B}(2) \cup \{Z^3\}$. For reason of simplicity, we adopt the notation of the Relation (4.8), that is,

$$\overline{ZZ}^2 = P_{\overline{ZZ}^2}(Z, \overline{Z}) = \alpha Z^3 + R_{\overline{ZZ}^2}(Z, \overline{Z}), \tag{4.12}$$

where

$$\alpha = \frac{\gamma_{42} - b}{\gamma_{33} - a} \neq 0,$$

by using (4.11).

We conclude that, in the both cases II-1 and II-2, we have extended the initial data $\gamma^{(5)}$ to $\gamma^{(6)}$ so that the associated moment matrix $M(3)$ has the following columns relation

$$\overline{ZZ}^2 = P_{\overline{ZZ}^2}(Z, \overline{Z}) = \alpha Z^3 + R_{\overline{ZZ}^2}(Z, \overline{Z}), \quad \text{with } \alpha \neq 0. \tag{4.13}$$

We also note that since $a \neq e$ we get,

$$|\alpha| = \left| \frac{\gamma_{42} - b}{\gamma_{33} - a} \right| = \frac{\sqrt{(\gamma_{33} - a)(\gamma_{33} - e)}}{\gamma_{33} - a} \neq 1. \tag{4.14}$$

1016

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

Step 2: $M(3)$ has a flat extension, and therefore has a representing measure. We will build moments $\{\gamma_{ij}\}_{i+j=7,8}$ for which the moment matrix $M(4)$ is a flat extension of $M(3)$.

The relation (4.13) yields that

$$\langle M(3)\bar{Z}Z^2, \bar{Z}^j Z^i \rangle = \langle M(3)P_{\bar{z}z^2}(Z, \bar{Z}), \bar{Z}^j Z^i \rangle, \quad \text{for all } i+j \leq 3.$$

By applying (2.4), one obtains

$$\Lambda_{\gamma^{(6)}}(\bar{z}^{i+1} z^{j+2}) = \Lambda_{\gamma^{(6)}}(\bar{z}^i z^j P_{\bar{z}z^2}), \quad i+j \leq 3. \quad (4.15)$$

Since $|\alpha| \neq 1$, we derive that there exists a complex number $\gamma_{43} = \overline{\gamma_{34}}$ such that

$$\gamma_{43} = \Lambda(\bar{z}^3 z P_{\bar{z}z^2}), \quad (4.16)$$

that is,

$$\gamma_{43} = \alpha \gamma_{34} + \sum_{i+j \leq 2} \alpha_{i,j} \gamma_{i+3, j+1}.$$

It follows, from (4.16) and (4.15), that $\bar{z}z^2 - P_{\bar{z}z^2}$ is a generating polynomial of $\gamma^{(6)} \cup \{\gamma_{34}, \gamma_{43}\}$. Since $\begin{pmatrix} M(2)_{|\mathfrak{B}(2)} & Z_{|\mathfrak{B}(2)}^3 \\ (Z_{|\mathfrak{B}(2)}^3)^* & \gamma_{33} \end{pmatrix} > 0$, then there exists a (unique) vector, denoted here

$$P_{z^4} = \beta z^3 + R_{z^4} = \beta z^3 + \sum_{\bar{z}^i z^j \in \mathfrak{B}(2)} \beta_{ij} \bar{z}^i z^j$$

the associated polynomial, such that

$$\begin{pmatrix} M(2)_{|\mathfrak{B}(2)} & Z_{|\mathfrak{B}(2)}^3 \\ (Z_{|\mathfrak{B}(2)}^3)^* & \gamma_{33} \end{pmatrix} P_{z^4} = ((\gamma_{04}, \gamma_{14}, \gamma_{05}, \gamma_{24}, \gamma_{15}, \gamma_{06})_{|\mathfrak{B}(2)}, \gamma_{34})^T.$$

Therefore the sequence $\gamma^{(6)} \cup \{\gamma_{34}, \gamma_{43}\}$ verifies that

$$\gamma_{i,j+4} = \Lambda(\bar{z}^i z^j P_{z^4}), \quad \text{for all } i+j \leq 2 \text{ and } (i,j) = (3,0), \quad (4.17)$$

and

$$\gamma_{i+4,j} = \Lambda(\bar{z}^i z^j P_{z^4}), \quad \text{for all } i+j \leq 2 \text{ and } (i,j) = (0,3). \quad (4.18)$$

Thus $z^4 - P_{z^4}$ is a generating polynomial of $\gamma^{(6)} \cup \{\gamma_{34}, \gamma_{43}\}$.

We will build $\gamma^{(8)} \equiv \{\gamma_{ij}\}_{i+j \leq 8}$, the extension of $\gamma^{(6)} \cup \{\gamma_{34}, \gamma_{43}\}$, by using the generating polynomial P_{z^4} and the initial data $\{\gamma_{ij}\}_{i,j \leq 3}$, that is,

$$\gamma_{i,j+4} = \Lambda(\bar{z}^i z^j P_{z^4}) = \beta \gamma_{i,j+3} + \sum_{\bar{z}^l z^k \in \mathfrak{B}(2)} \beta_{lk} \gamma_{i+l, j+k}, \quad i+j \leq 4, \quad (4.19)$$

or, equivalently,

$$\gamma_{i+4,j} = \Lambda(\bar{z}^i z^j P_{z^4}) = \overline{\beta} \gamma_{i+3, j} + \sum_{\bar{z}^l z^k \in \mathfrak{B}(2)} \overline{\beta}_{lk} \gamma_{i+k, j+l}, \quad i+j \leq 4. \quad (4.20)$$

Hence, Lemma 3.3 implies that $\bar{z}z^2 - P_{\bar{z}z^2}$ and $z^4 - P_{z^4}$ are two generating polynomials of $\gamma^{(8)}$. Therefore, in $M(4)$, the columns $Z^4, \bar{Z}Z^3, \bar{Z}^2 Z^2, \bar{Z}^3 Z, \bar{Z}^4$ are linear combinations of the columns $\{\bar{Z}^i Z^j\}_{i+j \leq 3}$ and thus $M(4)$ is a flat extension of $M(3)$. Indeed, it suffices to observe

that $P_{z^4}, P_{\bar{z}^4}, P_{z z^2}, P_{\bar{z}^2 z} \in V \equiv \text{Vect}(Z^3, \bar{Z}^3, Z^2, \bar{Z}Z, \bar{Z}^2, \bar{Z}, Z, 1)$, therefore $zP_{\bar{z}z^2}, \bar{z}P_{z^2z}, \bar{z}P_{\bar{z}z^2} \in V$. Also one has, for all $i + j \leq 4$,

$$\begin{aligned} \langle M(4)Z^4, \bar{Z}^i Z^j \rangle &= \langle M(4)P_{z^4}, \bar{Z}^i Z^j \rangle; \\ \langle M(4)\bar{Z}^4, \bar{Z}^i Z^j \rangle &= \langle M(4)P_{\bar{z}^4}, \bar{Z}^i Z^j \rangle; \\ \langle M(4)\bar{Z}Z^3, \bar{Z}^i Z^j \rangle &= \langle M(4)zP_{\bar{z}z^2}, \bar{Z}^i Z^j \rangle; \\ \langle M(4)\bar{Z}^2 Z^2, \bar{Z}^i Z^j \rangle &= \langle M(4)\bar{z}P_{z^2z}, \bar{Z}^i Z^j \rangle; \\ \text{and } \langle M(4)\bar{Z}^3 Z, \bar{Z}^i Z^j \rangle &= \langle M(4)\bar{z}P_{\bar{z}^2z}, \bar{Z}^i Z^j \rangle. \end{aligned}$$

This finishes the proof. \square

5. Examples

We give in this section four examples illustrating the different solved cases.

5.1. The case $a = e$ and $b = f$

We consider the quintic sequence,

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= 6 \\ \gamma_{01} &= 1+i & \gamma_{10} &= 1-i \\ \gamma_{20} &= -2i & \gamma_{11} &= 6 & \gamma_{02} &= 2i \\ \gamma_{30} &= -2-2i & \gamma_{21} &= 2-2i & \gamma_{12} &= 2+2i & \gamma_{03} &= -2+2i \\ \gamma_{40} &= 0 & \gamma_{31} &= -4i & \gamma_{22} &= 8 & \gamma_{13} &= 4i & \gamma_{04} &= 0 \\ \gamma_{50} &= -4+4i & \gamma_{41} &= -4-4i & \gamma_{32} &= 4-4i & \gamma_{23} &= 4+4i & \gamma_{14} &= -4+4i & \gamma_{05} &= -4-4i. \end{aligned}$$

Then, we have

$$M(2) = \begin{pmatrix} 6 & 1+i & 1-i & 2i & 6 & -2i \\ 1-i & 6 & -2i & 2+2i & 2-2i & -2-2i \\ 1+i & 2i & 6 & -2+2i & 2+2i & 2-2i \\ -2i & 2-2i & -2-2i & 8 & -4i & 0 \\ 6 & 2+2i & 2-2i & 4i & 8 & -4i \\ 2i & -2+2i & 2+2i & 0 & 4i & 8 \end{pmatrix}$$

and

$$B = \begin{pmatrix} -2+2i & 2+2i & 2-2i & -2-2i \\ 4i & 8 & -4i & 0 \\ 0 & 4i & 8 & -4i \\ 4+4i & 4-4i & -4-4i & -4+4i \\ -4+4i & 4+4i & 4-4i & -4-4i \\ -4-4i & -4+4i & 4+4i & 4-4i \end{pmatrix}.$$

The fact that $M(2)$ is positive definite implies,

$$W = (M(2))^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{3i}{4} & \frac{1}{4} - \frac{i}{4} & -\frac{1}{4} - \frac{i}{4} & -\frac{3}{4} + \frac{3i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} - \frac{3i}{4} & -\frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3i}{4} \end{pmatrix}$$

1018

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

and

$$W^*M(2)W = \begin{pmatrix} 12 & -8i & -4 & 8i \\ 8i & 12 & -8i & -4 \\ -4 & 8i & 12 & -8i \\ -8i & -4 & 8i & 12 \end{pmatrix}.$$

Since $a = e = 12$ and $b = f = -8i$, according to the main theorem, our sequence provides a moment matrix for a 6 atoms measure. In fact, from W , we can see that $Z^3 + \frac{3(1+i)}{4}(\bar{Z}^2 - Z^2) - \bar{Z}$ and $Z^2\bar{Z} + \frac{(1-i)}{4}(\bar{Z}^2 - Z^2) - Z$ are two characteristic polynomials for this moment sequence. The common roots of the two polynomials are

$$\{\pm 1, \pm i, 0, 1 + i\}.$$

Finally we can write that $\mu = \delta_1 + \delta_{-1} + \delta_i + \delta_{-i} + \delta_0 + \delta_{1+i}$.

5.2. The case $a < e$

We consider the quintic sequence,

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= 7 \\ \gamma_{01} &= 0 & \gamma_{10} &= 0 \\ \gamma_{20} &= -4i & \gamma_{11} &= 8 & \gamma_{02} &= 4i \\ \gamma_{30} &= 0 & \gamma_{21} &= 0 & \gamma_{12} &= 0 & \gamma_{03} &= 0 \\ \gamma_{40} &= -4 & \gamma_{31} &= -8i & \gamma_{22} &= 12 & \gamma_{13} &= 8i & \gamma_{04} &= -4 \\ \gamma_{50} &= 0 & \gamma_{41} &= 0 & \gamma_{32} &= 0 & \gamma_{23} &= 4 + 4i & \gamma_{14} &= 0 & \gamma_{05} &= 0. \end{aligned}$$

Then, we have

$$M(2) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4i & 8 & -4i \\ 0 & 8 & -4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -4i & 0 & 0 & 12 & -8i & -4 \\ 8 & 0 & 0 & 8i & 12 & -8i \\ 4i & 0 & 0 & -4 & 8i & 12 \end{pmatrix}$$

and

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8i & 12 & -8i & -4 \\ -4 & 8i & 12 & -8i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Since $M(2)$ is positive semi-definite implies, we can take W as follows:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & \frac{4}{3} & -\frac{i}{3} & 0 \\ 0 & \frac{i}{3} & \frac{4}{3} & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

therefore

$$W^*M(2)W = \begin{pmatrix} 8 & -12i & -8 & 4i \\ 12i & \frac{56}{3} & -\frac{44i}{3} & -8 \\ -8 & \frac{44i}{3} & \frac{56}{3} & -12i \\ -4i & -8 & 12i & 8 \end{pmatrix}.$$

Since $a = 8 < e = \frac{56}{3}$, according to the main theorem, our sequence is a moment sequence associated with a 7 atoms measure. In fact, examining (4.6) we can take $\gamma_3 = 20$, then $\gamma_4 = -16i$. Therefore $\gamma_6 = -16i$, then $\bar{Z}Z^2 = \frac{i}{3}Z^3 + Z + \frac{i}{3}\bar{Z}$ is a characteristic polynomial and with $\gamma_4 = 0$ we derive another characteristic polynomial given by $Z^4 = \frac{3i}{2}Z^2 + \bar{Z}Z - \frac{3i}{2}\bar{Z}^2$. The common roots of the two polynomials are

$$\{\pm 1, \pm i, 0, 1+i, -1-i\}.$$

Finally we get

$$\mu = \delta_0 + \delta_1 + \delta_{-1} + \delta_i + \delta_{-i} + \delta_{1+i} + \delta_{-1-i}.$$

5.3. The case $a > e$ and $a - e < 2|b - f|$

We consider the quintic sequence,

$$\gamma_0 = 7, \gamma_1 = 1 + 5i, \gamma_{10} = 1 - 5i,$$

$$\gamma_2 = -64 - 60i, \gamma_{11} = 230, \gamma_3 = -64 + 60i,$$

$$\gamma_4 = 277 - 161i, \gamma_{12} = -203 + 257i, \gamma_{13} = -203 - 257i, \gamma_{14} = 277 + 161i,$$

$$\gamma_{20} = 3722 + 4320i, \gamma_{21} = -4816 - 4200i, \gamma_{22} = 10778,$$

$$\gamma_{23} = -4816 + 4200i, \gamma_{24} = 3722 - 4320i,$$

$$\gamma_{30} = -59219 - 29695i, \gamma_{31} = 31021 - 11585i, \gamma_{32} = -16979 + 24353i,$$

$$\gamma_{33} = -16979 - 24353i, \gamma_{34} = 31021 + 11585i \text{ and } \gamma_{35} = -59219 + 29695i.$$

Then $M(2) =$

$$\begin{pmatrix} 7 & 1+5i & 1-5i & -64-60i & 230 & -64+60i \\ 1-5i & 230 & -64+60i & -203+257i & -203-257i & 277+161i \\ 1+5i & -64-60i & 230 & 277-161i & -203+257i & -203-257i \\ -64+60i & -203-257i & 277+161i & 10778 & -4816+4200i & 3722-4320i \\ 230 & -203+257i & -203-257i & -4816-4200i & 10778 & -4816+4200i \\ -64-60i & 277-161i & -203+257i & 3722+4320i & -4816-4200i & 10778 \end{pmatrix}$$

and

$$B = \begin{pmatrix} 277-161i & -203+257i & -203-257i & 277+161i \\ -4816-4200i & 10778 & -4816+4200i & 3722-4320i \\ 3722+4320i & -4816-4200i & 10778 & -4816+4200i \\ -16979+24353i & -16979-24353i & 31021+11585i & -59219+29695i \\ 31021-11585i & -16979+24353i & -16979-24353i & 31021+11585i \\ -59219-29695i & 31021-11585i & -16979+24353i & -16979-24353i \end{pmatrix}.$$

1020

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

The fact that $M(2)$ is positive definite allows to calculate W and $W^*M(2)W$. Finally, using the same process in above, one gets the following expression of μ

$$\mu = \delta_2 + \delta_{-6} + \delta_{4i} + \delta_{-7i} + \delta_{3+3i} + \delta_{5-3i} + \delta_{-3+8i}.$$

5.4. The remaining case $a = e$ and $b \neq f$

We consider the quintic sequence,

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= 7 \\ \gamma_{01} &= 9 + 9i & \gamma_{10} &= 9 - 9i \\ \gamma_{20} &= 22i & \gamma_{11} &= 34 & \gamma_{02} &= -22i \\ \gamma_{30} &= -18 + 18i & \gamma_{21} &= 58 + 58i & \gamma_{12} &= 58 - 58i & \gamma_{03} &= -18 - 18i \\ \gamma_{40} &= 40 & \gamma_{31} &= 164i & \gamma_{22} &= 256 & \gamma_{13} &= -164i & \gamma_{04} &= 40 \\ \gamma_{50} &= 304(1 + i) & \gamma_{41} &= 128(i - 1) & \gamma_{32} &= 480(i + 1) & \gamma_{23} &= 480(1 - i) & \gamma_{14} &= -128(1 + i) \\ \gamma_{05} &= 304(1 - i). \end{aligned}$$

Then, we obtain

$$M(2) = \begin{pmatrix} 7 & 9 + 9i & 9 - 9i & 22i & 34 & -22i \\ 9 - 9i & 34 & -22i & 58 + 58i & 58 - 58i & -18 - 18i \\ 9 + 9i & 22i & 34 & -18 + 18i & 58 + 58i & 58 - 58i \\ -22i & 58 - 58i & -18 - 18i & 256 & -164i & 40 \\ 34 & 58 + 58i & 58 - 58i & 164i & 256 & -164i \\ 22i & -18 + 18i & 58 + 58i & 40 & 164i & 256 \end{pmatrix}$$

and

$$B = \begin{pmatrix} -18 + 18i & 58 + 58i & 58 - 58i & -18 - 18i \\ 164i & 256 & -164i & 40 \\ 40 & 164i & 256 & -164i \\ 480 + 480i & 480 - 480i & -128 - 128i & 304 - 304i \\ -128 + 128i & 480 + 480i & 480 - 480i & -128 - 128i \\ 304 + 304i & -128 + 128i & 480 + 480i & 480 - 480i \end{pmatrix}.$$

Since $M(2)$ is not invertible. We can take W as follows,

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{1041}{319} + \frac{1041i}{319} & \frac{931}{319} + \frac{931i}{319} & -\frac{1041}{319} + \frac{1041i}{319} & \frac{3483}{319} + \frac{3483i}{319} \\ -\frac{1}{319}(2028i) & -\frac{2061}{319} & -\frac{1}{319}(752i) & -\frac{4613}{319} \\ -\frac{89}{319} & -\frac{1}{319}(1220i) & -\frac{89}{319} & -\frac{1}{319}(2496i) \\ \frac{39}{11} + \frac{39i}{11} & \frac{17}{11} - \frac{17i}{11} & \frac{17}{11} + \frac{17i}{11} & \frac{39}{11} - \frac{39i}{11} \\ \frac{24}{29} - \frac{24i}{29} & \frac{82}{29} + \frac{82i}{29} & \frac{82}{29} - \frac{82i}{29} & \frac{24}{29} + \frac{24i}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$W^*M(2)W = \begin{pmatrix} \frac{719500}{319} & -\frac{1}{319}(448504i) & \frac{152956}{319} & -\frac{1}{319}(622040i) \\ \frac{448504i}{319} & \frac{719500}{319} & -\frac{1}{319}(449800i) & \frac{152956}{319} \\ \frac{152956}{319} & \frac{449800i}{319} & \frac{719500}{319} & -\frac{1}{319}(448504i) \\ \frac{622040i}{319} & \frac{152956}{319} & \frac{448504i}{319} & \frac{719500}{319} \end{pmatrix}.$$

In this case we get $a = e = \frac{719500}{319}$ and $b = -\frac{448504i}{319} \neq f = \frac{449800i}{319}$. This is the remaining case which is not covered by the main theorem. We notice that this sequence is a moment sequence associated with a 7 atoms representing measure:

$$\mu = \delta_1 + \delta_i + \delta_{1+i} + \delta_{1+2i} + \delta_{1+3i} + \delta_{2+i} + \delta_{3+i}.$$

Acknowledgement. The authors were supported by Hassan 2 academy for sciences. H. El-Azhar was supported by CNRST excellence grant number 24UM5R2015 and A. Harrat by CNRST excellence grant 44UM5R2017.

REFERENCES

- [1] N. I. AKHEIZER, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Oliver & Boyd, 1965.
- [2] C. BAYER AND J. TEICHMANN, *The proof of Tchakaloff's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (10) (2006), 3035–3040.
- [3] G. BLEKHERMAN, *Nonnegative polynomials and sums of squares*, J. Amer. Math. Soc. **25** (3) (2012), 617–635.
- [4] R. E. CURTO AND L. A. FIALKOW, *Recursively generated weighted shifts and the subnormal completion problem*, Integral Equations Operator Theory **17** (2) (1993), 202–246.
- [5] R. E. CURTO AND L. A. FIALKOW, *Recursively generated weighted shifts and the subnormal completion problem II*, Integral Equations Operator Theory **18** (4) (1994), 369–426.
- [6] R. E. CURTO AND L. A. FIALKOW, *Solution of the truncated complex moment problem for flat data*, Volume 568, American Mathematical Soc., 1996.
- [7] R. E. CURTO AND L. A. FIALKOW, *Flat Extensions of Positive Moment Matrices: Recursively Generated Relations*, Volume 648, American Mathematical Soc., 1998.
- [8] R. E. CURTO AND L. A. FIALKOW, *Flat extensions of positive moment matrices: Relations in analytic or conjugate terms*, In Nonselfadjoint operator algebras, operator theory, and related topics, pages 59–82. Springer, 1998.
- [9] R. E. CURTO AND L. A. FIALKOW, *Solution of the singular quartic moment problem*, J. Operator Theory **48** (2) (2002), 315–354.
- [10] R. E. CURTO AND L. A. FIALKOW, *Truncated K -moment problems in several variables*, J. Operator Theory **54** (1) (2005), 189–226.
- [11] R. E. CURTO, L. A. FIALKOW, AND H. M. MÖLLER, *The extremal truncated moment problem*, Integral Equations Operator Theory, **60** (2) (2008), 177–200.
- [12] R. E. CURTO AND M. PUTINAR, *Nearly subnormal operators and moment problems*, J. Funct. Anal. **115** (2) (1993), 480–497.
- [13] R. E. CURTO AND S. YOO, *Non-extremal sextic moment problems*, J. Funct. Anal. **269** (3) (2015), 758–780.
- [14] R. E. CURTO AND S. YOO, *Concrete solution to the nonsingular quartic binary moment problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (1) (2016), 249–258.
- [15] R. E. CURTO AND S. YOO, *The division algorithm in sextic truncated moment problems*, Integral Equations Operator Theory **87** (4) (2017), 515–528.
- [16] R. E. CURTO AND S. YOO, *A new approach to the nonsingular cubic binary moment problem*, Ann. Funct. Anal. **9** (4) (2018), 525–536.
- [17] O. DEMANZE, *Moments and positivity*, J. Math. Anal. Appl. **247** (2) (2000), 570–587.
- [18] F. DUBEAU, W. MOTTA, M. RACHIDI, AND O. SAEKI, *On weighted r -generalized Fibonacci sequences*, The Fibonacci Quarterly **35** (2) (1997), 102–110.
- [19] L. FIALKOW AND J. NIE, *Positivity of riesz functionals and solutions of quadratic and quartic moment problems*, J. Funct. Anal. **258** (1) (2010), 328–356.
- [20] K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI, *Charges solve the truncated complex moment problem*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **21** (4) (2018), 1850027.
- [21] K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI, *Multivariable recursively generated weighted shifts and the 2-variable subnormal completion problem*, Kyungpook Math. J., **58** (4) (2018), 711–732.
- [22] D. P. KIMSEY, *Matrix-valued moment problems*, PhD thesis, Drexel University, 2011.
- [23] D. P. KIMSEY, *The cubic complex moment problem*, Integral Equations Operator Theory **80** (3) (2014), 353–378.
- [24] A. LAMBERT, *A characterization of subnormal operators*, Glasg. Math. J. **25** (1) (1984), 99–101.
- [25] J. LASSERRE, *Polynomials nonnegative on a grid and discrete optimization*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2) (2002) 631–649.

1022

H. EL-AZHAR, A. HARRAT, K. IDRISSE AND E. H. ZEROUALI

- [26] J. B. LASSERRE, *Global optimization with polynomials and the problem of moments*, SIAM J. Optim. **11** (3) (2001), 796–817.
- [27] J. B. LASSERRE, *Bounds on measures satisfying moment conditions*, Ann. Appl. Probab., **12** (3) (2002), 1114–1137.
- [28] J.-B. LASSERRE, *Moments, positive polynomials and their applications*, World Scientific, 2010.
- [29] M. LAURENT, *Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials*, In Emerging applications of algebraic geometry, pages 157–270. Springer, 2009.
- [30] M. PUTINAR AND C. SCHEIDERER, *Multivariate moment problems: geometry and indeterminateness*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **5** (2) (2006), 137–158.
- [31] D. SARASON, *Moment problems and operators in Hilbert space*, Moments in Mathematics, Proc. Sympos. Appl. Math. **37** (1987), 54–70.
- [32] Y. L. SHMUL'YAN, *An operator Hellinger integral (Russian)*, Mat. Sb. **91** (4) (1959), 381–430.
- [33] J. A. SHOHAT AND J. D. TAMARKIN, *The problem of moments*, Math. Surveys I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1943.
- [34] J. STOCHEL, *Solving the truncated moment problem solves the full moment problem*, Glasg. Math. J. **34** (3) (2001), 335–341.
- [35] V. TCHAKALOFF, *Formules de cubatures mécaniques à coefficients non négatifs*, Bull. Sci. Math. **81** (2) (1957), 123–134.
- [36] F.-H. VASILESCU, *Dimensional stability in truncated moment problems*, J. Math. Anal. Appl., **388** (1) (2012), 219–230.
- [37] S. YOO, *Extremal sextic truncated moment problems*, PhD thesis, The University of Iowa, 2010.
- [38] S. YOO, *Sextic moment problems on 3 parallel lines*, Bull. Korean Math. Soc., **54** (1) (2017), 299–318.

(Received June 11, 2018)

H. El-Azhar
Center of Mathematical research in Rabat (CeReMaR)
Mohammed V University in Rabat.
Rabat, Morocco
e-mail: elazharhamza@gmail.com

A. Harrat
Center of Mathematical research in Rabat (CeReMaR)
Mohammed V University in Rabat.
Rabat, Morocco
e-mail: ayoub1993harrat@gmail.com

K. Idrissi
Center of Mathematical research in Rabat (CeReMaR)
Mohammed V University in Rabat.
Rabat, Morocco
e-mail: kaissar.idrissi@gmail.com

E. H. Zerouali
Center of Mathematical research in Rabat (CeReMaR)
Mohammed V University in Rabat.
Rabat, Morocco
e-mail: zerouali@fsr.ac.ma

Chapitre **3**

Mesure Discrète, Idempotents et
Problème de Moments

Idempotents and Moment problem of discrete measure

Hamza El-Azhar, Ayoub Harrat, and Jan Stochel

ABSTRACT. In this paper, we investigate the full moment problem for discrete measures using Vasilescu's idempotent approach based on Λ -multiplicative elements with respect to associated square positive Riesz functional. We give a sufficient condition for the existence of a discrete integral representation for the associated Riesz functional, Which turn to be necessary in bounded shift space case. A particular attention is given to Λ -multiplication elements, where total description for the cases where they are a single point indicator functions.

1. Introduction

The problem of moment for polynomials consists of giving a multi-sequence of real numbers $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ with $\gamma_0 = 1$, and looking for the existence of a positive measure μ on \mathbb{R}^d such that

$$\gamma_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} t^\alpha d\mu(t), \quad (1)$$

where $t = (t_1, \dots, t_d)$ is the d -tuple of coordinate functions in \mathbb{R}^d , and $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}$, for all $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

Since its introduction by Stieltjes [20], this problem has attracted several mathematicians aiming to resolve it. We mention the M. Riesz method [12] based on duality theorem and extension of linear forms on vector spaces. In general, to solve the one dimensional moment problem, the description of positive polynomial and the theory of orthogonal polynomials is usually required. See classical books [1] and [18].

The multidimensional moment problem turns out to be much more difficult because of the non-existence of a good characterization for positive polynomials [2, 10]. Also, the theory of orthogonal polynomials in multidimensional case seems to be not sufficiently developed. To circumvent these difficulties many approaches were given. For example, the operator approach which was firstly treated by Stone [23] and by Naimark [9] and largely developed by numerous authors [8, 14, 19, 24]. For compact semi-algebraic sets, an elegant condition for the resolution of the multidimensional moment problem was given by Schmüdgen in [15, 16]. Other sufficient conditions for resolving the multidimensional moment problem, using an extension of the moment sequence, were given by Putinar and Vasilescu in [11], and also by Stochel and Szafraniec in [22].

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 44A60; Secondary 47A57, 46C99.

Key words and phrases. Idempotent, Λ -multiplicative, Discrete measure, moment problem.

The truncated moment problem entails solving (1) with only finite initial data. More precisely, for a given finite multi-sequence of real numbers $\gamma = (\gamma_\alpha)_{|\alpha| \leq p}$ where $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ with $\gamma_0 = 1$, one looks for a positive measure μ on \mathbb{R}^d such that

$$\text{for } |\alpha| \leq p, \quad \gamma_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} t^\alpha d\mu(t). \quad (2)$$

The study of the truncated moment problem comes naturally from the study of the full one. We recall that in [21] Stochel proves that the resolution of the truncated moment problem solves the full moment problem. Actually this fact attracts several authors to investigate the truncated moment problem.

The literature around truncated moment problem has been intensively developed recently in a multitude of papers and memoirs by Curto and Fialkow, see [5, 6, 4, 7], etc. The strategy in these papers is usually based on the existence of a special positive extension of the moment matrix (or in other words looking for a such extension) which preserves the rank, called flat extension. In fact, it was proved that the existence of a rank preserving non negative extension moment matrix leads to the existence of an atomic measure solution of the truncated problem where the number of atoms is exactly the rank of the moment matrix. This last remark motivates our interest to discrete measure solution. Where we mean by discrete probability measure, a probability measure concentrated on at most a countable set.

Recently, unlike in the works done by Curto and Fialkow where the central object is the moment matrix, Vasilescu adopted another approach to solve the moment problem, see [25, 26, 27]. He considered the linear functional, often called the Riesz functional, induced by the assignment $t^\alpha \mapsto \gamma_\alpha$ on the space of polynomials, which is supposed to be non-negative on the cone of sums of squares of real-valued polynomials. His approach is mainly based on several techniques of analysis on Hilbert spaces, especially around the notion of idempotents, which seems to be more appropriate for the study of discrete measures.

By using the Riesz functional, Vasilescu proved that the existence of a representing measure for truncated case is equivalent to the existence of a special orthogonal basis formed by idempotent elements, via some elementary C^* -algebra techniques, see [26].

In what follows, we designate by \mathcal{P}_d the algebra of polynomials in $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, with complex coefficients and real indeterminates. Taking a multi-sequence of real numbers $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ with $\gamma_0 = 1$, we associate it with the Riesz map $\Lambda_\gamma : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbb{C}$ given by $\Lambda_\gamma(t^\alpha) = \gamma_\alpha$, extended to \mathcal{P}_d by linearity. We clearly have $\Lambda_\gamma(1) = 1$ and $\Lambda_\gamma(\overline{P}) = \overline{\Lambda_\gamma(P)}$ for all $P \in \mathcal{P}_d$. If, moreover, $\Lambda_\gamma(|P|^2) \geq 0$ for all $P \in \mathcal{P}_d$, then Λ_γ is said to be a *unital square positive functional* [25, 26] (briefly, a uspf, see the next section). In this case, we say that γ itself is square positive.

Conversely, if $\Lambda : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbb{C}$ is a uspf, setting $\Lambda(t^\alpha) = \gamma_\alpha$, we have $\Lambda = \Lambda_\gamma$, as above. The square positive multi-sequence $\gamma = (\gamma_\alpha)_\alpha$ is said to be associated with the uspf Λ . Therefore finding a representing measure for the map Λ is equivalent to solving the moment problem associated with γ .

Let us briefly present the content of this work. In the next section, all definitions needed will be given. Idempotents and Λ -multiplicative elements related to unital square positive functional are introduced and some of their properties are discussed. We define

the class of bounded shift spaces and provide that they are exactly the L^2 -space with compact support.

The third section contains some results which deal with integral representation of unital square positive functional, via Λ -multiplicative elements, and other ones which can be considered as tools that simplifies the proofs of main results therein. Proposition 3.1 can be viewed as one of the principle tools in this paper, particularly, in this section. Theorem 3.1 gives a positive answer to this question of the existence of representing measures having a number of atoms equals the maximal cardinality of an orthogonal family of idempotents. Theorem 3.2 gives the reciprocal result of Theorem 3.1 but we do not get back the orthogonality condition. In this context, Example 3 shows that the orthogonality can not be recovered. The key point in this approach is the condition (12), which corresponds to the projection of characteristic function on a single point of the support. In the case of a bounded shift space, we can easily regain the reciprocal of Theorem 3.1.

The last section will hold a discussion on Λ -multiplicative elements and what kind of conditions should we have to identify them with one point characteristic functions. We notice that here we suppose that Λ has a representing measure μ . To this aim we provide in Theorem 4.1 the first necessary and sufficient condition, although an alternative will be the subject of Theorem 4.3. Theorem 4.4 summarizes those results before. We should mention that in bounded shift spaces no additional assumption is required, any Λ -multiplicative idempotent is almost everywhere a One point characteristic function.

2. Definitions and Elementary Properties

Recall that \mathcal{P}_d denotes the (commutative complex) algebra of all polynomials in d indeterminates t_1, \dots, t_d with complex coefficients. As usual, members of \mathcal{P}_d are identified with complex polynomial functions in d variables $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$. We regard \mathcal{P}_d as a $*$ -algebra with involution $P \mapsto \bar{P}$ given by $\bar{P}(t) = \overline{P(t)}$ for $t \in \mathbb{R}^d$ and $P \in \mathcal{P}_d$. We write $|P|^2 = \bar{P}P$ for $P \in \mathcal{P}_d$. Following [25, 26], we say that a linear map $\Lambda: \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbb{C}$ is a *unital square positive functional*¹ (briefly, a **uspf**) if

- 1° $\Lambda(1) = 1$,
- 2° $\Lambda(|P|^2) \geq 0$ for all $P \in \mathcal{P}_d$.

It is well known that 2° yields

- 3° $\Lambda(\bar{P}) = \overline{\Lambda(P)}$ for all $P \in \mathcal{P}_d$.

The Cauchy-Schwarz inequality for the semi-inner product $(P, Q) \mapsto \Lambda(P\bar{Q})$ reads

$$|\Lambda(P\bar{Q})| \leq \sqrt{\Lambda(|P|^2)}\sqrt{\Lambda(|Q|^2)}, \quad P, Q \in \mathcal{P}_d. \quad (3)$$

Applying the Gelfand-Naimark-Segal construction, we associate with a uspf Λ a complex Hilbert space \mathcal{H} , the main object of our study. To do this, observe that

$$I_\Lambda := \{P \in \mathcal{P}_d: \Lambda(|P|^2) = 0\} \stackrel{(3)}{=} \{P \in \mathcal{P}_d: \Lambda(PQ) = 0 \forall Q \in \mathcal{P}_d\}.$$

Using (3) again, we deduce that I_Λ is a $*$ -ideal of \mathcal{P}_d . Let \mathcal{P}_d/I_Λ be the quotient $*$ -algebra with the quotient map $\pi_d: \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_d/I_\Lambda$ given by $\pi_d(P) = P + I_\Lambda$ for $P \in \mathcal{P}_d$. Clearly,

¹ or a unital positive definite linear functional

4

HAMZA EL-AZHAR, AYOUB HARRAT, AND JAN STOCHEL

π_d is a $*$ -algebra epimorphism. Endow \mathcal{P}_d/I_Λ with the inner product

$$\langle \pi_d(P), \pi_d(Q) \rangle = \Lambda(P\bar{Q}), \quad P, Q \in \mathcal{P}_d. \quad (4)$$

We denote by \mathcal{H} any Hilbert space completion of \mathcal{P}_d/I_Λ and call it the Hilbert space *associated with* Λ . We preserve this notation throughout the whole paper. Obviously, such \mathcal{H} is separable. Moreover, there exists a unique conjugation² on \mathcal{H} such that $C(\pi_d(P)) = \pi_d(\bar{P})$ for all $P \in \mathcal{P}_d$. By analogy with complex conjugation, we abbreviate Cx to \bar{x} and call \bar{x} the conjugation of $x \in \mathcal{H}$. We say that $x \in \mathcal{H}$ is *real* if $x = \bar{x}$. We denote by $\mathbf{R}(\mathcal{H})$ the set of all real elements of \mathcal{H} . Since $\pi_d(\mathcal{P}_d)$ is dense in \mathcal{H} , C is continuous and $\frac{1}{2}(P + \bar{P})$ is a polynomial with real coefficients whenever $P \in \mathcal{P}_d$, we deduce that

$$\pi_d\left(\{P \in \mathcal{P}_d: P \text{ is a polynomial with real coefficients}\}\right) \text{ is dense in } \mathbf{R}(\mathcal{H}). \quad (5)$$

We say that a Borel measure μ on \mathbb{R}^d is a *representing measure* of a uspf Λ if $P \in L^1(\mu)$ for every $P \in \mathcal{P}_d$ and

$$\Lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^d} P d\mu, \quad P \in \mathcal{P}_d. \quad (6)$$

Let μ satisfy (6). Denote by $\mathcal{H}^2(\mu)$ the closure of the set of all (a.e. $[\mu]$) equivalence classes $[P]_\mu$ of polynomials $P \in \mathcal{P}_d$ in $L^2(\mu)$. Then the map

$$\mathcal{H} \ni \pi_d(P) \longmapsto [P]_\mu \in \mathcal{H}^2(\mu) \quad (7)$$

is a unitary isomorphism. In particular, we have

$$\Lambda(P\bar{Q}) = \langle [P]_\mu, [Q]_\mu \rangle, \quad P, Q \in \mathcal{P}_d.$$

This implies that the conjugation on \mathcal{H} defined above is unitarily isomorphic to the usual conjugation of equivalence classes $[f]_\mu \mapsto [\bar{f}]_\mu$ on $\mathcal{H}^2(\mu)$. In other words, we can choose $\mathcal{H}^2(\mu)$ as a completion of \mathcal{P}_d/I_Λ and regard $\mathcal{H}^2(\mu)$ as the Hilbert space associated with Λ equipped with the conjugation $\mathcal{H}^2(\mu) \ni [f]_\mu \mapsto [\bar{f}]_\mu \in \mathcal{H}^2(\mu)$.

In the future in cases where no confusion can arise we will simply write \mathcal{P}_d in place $\pi_d(\mathcal{P}_d)$, P instead of $\pi_d(P)$ and f in place of $[f]_\mu$.

In what follows χ_Ω stands for the characteristic function of a subset Ω of \mathbb{R}^d , $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ denotes the σ -algebra of Borel subsets of \mathbb{R}^d and δ_c ($c \in \mathbb{R}^d$) indicates the Borel probability measure on \mathbb{R}^d concentrated on $\{c\}$.

DEFINITION 1. An element $x \in \mathbf{R}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ is called an *idempotent* if

$$\langle x, x \rangle = \langle x, 1 \rangle. \quad (8)$$

Let us show some useful properties of idempotent elements.

LEMMA 2.1. *Let \mathcal{H} be the Hilbert space associated with a uspf Λ on \mathbb{R}^d and $x \in \mathcal{H}$ be an idempotent. Then*

- (i) $\|x\| \leq 1$,
- (ii) $\|x\| = 1$ if and only if $x = 1$.

² A map $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ is said to be a *conjugation* if it is anti-linear, $C(Cx) = x$ for all $x \in \mathcal{H}$ and $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$ for all $x, y \in \mathcal{H}$.

PROOF. (i) It follows from the Cauchy-Schwarz inequality and (4) that

$$\|x\|^2 \stackrel{(8)}{=} \langle x, 1 \rangle \leq \|x\| \sqrt{\Lambda(1)} \stackrel{1^\circ}{=} \|x\|, \quad (9)$$

which yields $\|x\| \leq 1$.

(ii) If $\|x\| = 1$, then equality holds in the Cauchy-Schwarz inequality (9), and so $x = \lambda 1$ for some $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. By (8), $x = 1$. The converse implication is trivial. \square

It is immediate from Lemma 2.1(i) that, in general, the sum of two idempotents may not be an idempotent. But by adding the orthogonality condition, this sum becomes an idempotent. In the following proposition, we state some important properties of orthogonal families of idempotents.

PROPOSITION 2.1. *Let \mathcal{H} the Hilbert space associated with a uspf Λ on \mathbb{R}^d and $\{x_i\}_{i \in I}$ be an orthogonal family of idempotents of \mathcal{H} . Then the series $\sum_{i \in I} x_i$ is convergent and the following conditions are equivalent:*

- (i) $\{x_i : i \in I\}^\perp \subseteq \{1\}^\perp$,
- (ii) $1 \in \bigvee \{x_i : i \in I\}$,
- (iii) $\sum_{i \in I} x_i = 1$.

In particular, the following implication holds:

$$\{x_i\}_{i \in I} \text{ is total in } \mathcal{H} \implies \sum_{i \in I} x_i = 1. \quad (10)$$

PROOF. Set $e_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$ for $i \in I$. First note that by Definition 1, we have

$$\langle 1, e_i \rangle = \langle \bar{e}_i, \bar{1} \rangle = \langle e_i, 1 \rangle = \|x_i\|, \quad i \in I. \quad (11)$$

The series $\sum_{i \in I} x_i$ is convergent because the system $\{e_i\}_{i \in I}$ is orthonormal and

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 \stackrel{(11)}{=} \sum_{i \in I} |\langle 1, e_i \rangle|^2 \leq \|1\|^2 = 1 \text{ (Bessel's inequality).}$$

- (i) \Leftrightarrow (ii) Use the standard double orthogonal complement argument.
- (ii) \Rightarrow (iii) Apply (11) and the Fourier series expansion to the vector 1 with respect to the orthonormal basis $\{e_i : i \in I\}$ of $\bigvee \{x_i : i \in I\}$.
- (iii) \Rightarrow (ii) This is obvious. \square

The following example shows that the converse to (10) doesn't hold in general.

EXAMPLES 1. Let $d = 1$ and let Λ be a uspf on \mathcal{P}_1 given by (6), where μ is a Borel probability measure on \mathbb{R} with the closed support $\{u_1, u_2, u_3\}$ (distinct atoms). Set $I = \{1, 2\}$, $x_1 = \chi_{\{u_1, u_2\}}$ and $x_2 = \chi_{\{u_3\}}$. Then $\{x_i\}_{i \in I}$ is an orthogonal family of idempotents of \mathcal{H} such that $\sum_{i \in I} x_i = 1$. However, the family $\{x_i\}_{i \in I}$ is not total in \mathcal{H} .

Below, we introduce one of the main concepts of this paper. Since we are interested in discrete measures representing uspf's, we should find a good method of indicating their atoms. To illustrate this concept, we make the following observation. Suppose $\mu = \sum_{i \in J} a_i \delta_{c_i}$ is a representing discrete measure of a uspf Λ on \mathbb{R}^d , where $\text{card}(J) \leq \aleph_0$, $\{a_i\}_{i \in J} \subseteq (0, \infty)$ and $\{c_i\}_{i \in J} \subseteq \mathbb{R}^d$ (we assume that $c_i \neq c_j$ whenever $i \neq j$). Then

$$\langle t^\alpha, \chi_{\{c_j\}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} t^\alpha \chi_{\{c_j\}}(t) d\mu(t) = a_j c_j^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^d, j \in J.$$

6

HAMZA EL-AZHAR, AYOUB HARRAT, AND JAN STOCHEL

Consequently, we have

$$\langle t^\alpha, \chi_{\{c_j\}} \rangle \langle t^\beta, \chi_{\{c_j\}} \rangle = \langle 1, \chi_{\{c_j\}} \rangle \langle t^{\alpha+\beta}, \chi_{\{c_j\}} \rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, j \in J.$$

This simple observation leads to the following definition.

DEFINITION 2. Let $x \in R(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$. We say that x is Λ -multiplicative if

$$\langle t^\alpha, x \rangle \langle t^\beta, x \rangle = \langle 1, x \rangle \langle t^{\alpha+\beta}, x \rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d. \quad (12)$$

Note that if x is Λ -multiplicative, then so is αx for every $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Since $\{t^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ is a Hamel basis of \mathcal{P}_d , we obtain the following characterization of Λ -multiplicativity.

LEMMA 2.2. Let $x \in R(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$. Then x is Λ -multiplicative if and only if

$$\langle P, x \rangle \langle Q, x \rangle = \langle 1, x \rangle \langle PQ, x \rangle, \quad P, Q \in \mathcal{P}_d. \quad (13)$$

We will now discuss the role of factor $\langle 1, x \rangle$ in (13).

LEMMA 2.3. Let \mathcal{H} be the Hilbert space associated with a uspf Λ on \mathbb{R}^d . Suppose that $x \in \mathcal{H}$ and $\xi \in \mathbb{C}$ are such that

$$\langle P, x \rangle \langle Q, x \rangle = \xi \langle PQ, x \rangle, \quad P, Q \in \mathcal{P}_d. \quad (14)$$

Then the following statements hold:

- (i) if $\xi = 0$, then $\langle 1, x \rangle = 0$,
- (ii) if $\xi \neq 0$ and $\langle 1, x \rangle = 0$, then $x = 0$,
- (iii) $\xi \neq 0$ and $x \neq 0$ if and only if $\langle 1, x \rangle \neq 0$; if $\langle 1, x \rangle \neq 0$, then $\xi = \langle 1, x \rangle$.

PROOF. (i) Substitute $P = Q = 1$ into (14).

(ii) Substituting $Q = 1$ into (14), we deduce that $\langle P, x \rangle = 0$ for all $P \in \mathcal{P}_d$, which implies that $x = 0$.

(iii) If $\xi \neq 0$ and $x \neq 0$, then by (ii), $\langle 1, x \rangle \neq 0$. Conversely, if $\langle 1, x \rangle \neq 0$, then substituting $P = Q = 1$ into (14) yields $\xi = \langle 1, x \rangle$. This completes the proof. \square

Hereafter, we introduce a class of bounded shift spaces, which includes several classical Hilbert function spaces.

DEFINITION 3. Let Λ be a uspf on \mathbb{R}^d and \mathcal{H} be the associated Hilbert space. We say that \mathcal{H} is a *bounded shift space* if for every $j = 1, \dots, d$, multiplication by the j th independent variable t_j on \mathcal{P}_d (called the j th shift)

$$M_{t_j} : \mathcal{P}_d \ni P \longmapsto t_j P \in \mathcal{P}_d$$

is bounded with respect to the norm of \mathcal{H} , i.e., there exists $C_j \in [0, \infty)$ such that

$$\Lambda(t_j^2 |P|^2) \leq C_j \Lambda(|P|^2).$$

REMARK 2.1. Notice that for every $j = 1, \dots, d$, multiplication by the j th independent variable t_j is a well-defined linear map on \mathcal{P}_d . Indeed, by (3) we have

$$|\Lambda(t_j^2 |P|^2)| = |\Lambda((t_j^2 P) \bar{P})| \leq \sqrt{\Lambda(t_j^4 |P|^2)} \sqrt{\Lambda(|P|^2)}, \quad P \in \mathcal{P}_d,$$

which implies that the ideal I_Λ is closed under multiplication by t_j . This shows that M_{t_j} is well defined on \mathcal{P}_d .

EXAMPLES 2. 1) If μ is a compactly supported Borel probability measure on \mathbb{R}^d and Λ is the uspf on \mathbb{R}^d defined by (6), then using [13, Theorem 3.14] and the Stone-Weierstrass theorem we deduce that $\mathcal{H}^2(\mu)$ coincides with $L^2(\mu)$, and so $L^2(\mu)$ is the Hilbert space associated with Λ which is a bounded shift space. In particular, considering μ with a finite number of atoms shows that any finite dimensional Hilbert space is a bounded shift space.

2) Let Λ_γ be the uspf on \mathcal{P}_1 induced by the Stieltjes moment sequence $\gamma_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$ (i.e., $\Lambda_\gamma(t^k) = \gamma_k$ for all $k \in \mathbb{N}$). Then the associated Hilbert space is not a bounded shift space because

$$\frac{\Lambda_\gamma(t^2|t^k|^2)}{\Lambda_\gamma(|t^k|^2)} = \frac{\gamma_{2k+2}}{\gamma_{2k}} = (2k+1)(2k+2), \quad k \in \mathbb{N}.$$

3) Let μ be the discrete Borel probability measure on \mathbb{R} given by

$$\mu = \frac{1}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2/2} \delta_{e^n}.$$

The k th moment $\gamma_k := \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t)$ of μ is equal to

$$\gamma_k = e^{k^2/2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Let Λ_γ be the uspf on \mathcal{P}_1 induced by $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ as in 2). Then the associated Hilbert space is not a bounded shift space because

$$\frac{\Lambda_\gamma(t^2|t^k|^2)}{\Lambda_\gamma(|t^k|^2)} = e^{4k+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

In view of Example 2, compactly supported Borel probability measures on \mathbb{R}^d generate bounded shift spaces. Using the operator theory approach as in [8, 24, 15], we show that bounded shift spaces always come from compactly supported Borel probability measures on \mathbb{R}^d .

PROPOSITION 2.2. *Let \mathcal{H} be the Hilbert space associated with a uspf Λ on \mathcal{P}_d . Then the following conditions are equivalent:*

- (i) \mathcal{H} is a bounded shift space,
- (ii) there exists a compactly supported representing measure μ of Λ such that $\mathcal{H}^2(\mu) = L^2(\mu)$.

Moreover, if (ii) holds, then the multi-sequence $\gamma_\alpha := \Lambda(t^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, is ultra-determinate, the conjugation of $f \in \mathcal{H}^2(\mu)$ coincides with \bar{f} and $\mathcal{R}(\mathcal{H}^2(\mu)) = \{f \in L^2(\mu) : f = \bar{f} \text{ a.e. } [\mu]\}$.

PROOF. (i) \Rightarrow (ii) By assumption, for every $j = 1, \dots, d$, the multiplication operator $M_{t_j} : \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$ is bounded and symmetric, i.e., $\langle M_{t_j} P, Q \rangle = \langle P, M_{t_j} Q \rangle$ for all $P, Q \in \mathcal{P}$, so it has a unique bounded self-adjoint extension to $\mathcal{H}^2(\mu)$, denoted by the same symbol M_{t_j} . Then $(M_{t_1}, \dots, M_{t_d})$ is a d -tuple of commuting bounded self-adjoint operators on $\mathcal{H}^2(\mu)$. Let E be its joint spectral measure. Since the closed support of E is a compact subset of \mathbb{R}^d , so is the closed support of $\mu(\cdot) := \langle E(\cdot)1, 1 \rangle$. Then

$$\gamma_\alpha = \Lambda(t^\alpha) = \langle M_{t_1}^{\alpha_1} \cdots M_{t_d}^{\alpha_d} 1, 1 \rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}^d} t^\alpha E(dt) 1, 1 \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} t^\alpha d\mu(t), \quad \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

8

HAMZA EL-AZHAR, AYOUB HARRAT, AND JAN STOCHER

Since μ is compactly supported, the multi-sequence $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ is ultra-determinate, and consequently \mathcal{P}_d is dense in $L^2(\mu)$ (see [8]). However, $\Lambda(P\bar{Q}) = \int_{\mathbb{R}^d} P\bar{Q}d\mu$ for all $P, Q \in \mathcal{P}_d$, so $\mathcal{H}^2(\mu) = L^2(\mu)$. Finally, since an L^2 -convergent sequence has an almost everywhere convergent subsequence, we see that the conjugation of $f \in \mathcal{H}^2(\mu)$ coincides with \bar{f} (or by the uniqueness of extension of conjugation from \mathcal{P}/I_Λ to \mathcal{H}), and thus $R(\mathcal{H}) = \{f \in L^2(\mu) : f = \bar{f} \text{ a.e. } [\mu]\}$.

(ii) \Rightarrow (i) Obvious. \square

REMARK 2.2. There has been constructed in [3] an example of a determinate moment multi-sequence such that polynomials are not dense in L^2 . For instance see also [17] and [8], for more details.

In passing, we mention an interesting propriety of Λ -multiplicative elements in bounded shift spaces.

PROPOSITION 2.3. *Let \mathcal{H} be a bounded shift space and let x and y be two Λ -multiplicative idempotent elements of $R(\mathcal{H})$. Then*

$$\langle x, y \rangle \neq 0 \iff x = y.$$

In other words, every two different Λ -multiplicative idempotents are orthogonal. This fact will be clearly seen through Section 4.

PROOF. We assume that $\langle x, y \rangle \neq 0$, and let $R \in \mathcal{P}_d$. By the construction of \mathcal{H} there exist two real bounded sequences $(P_k)_k$ and $(Q_l)_l$ in \mathcal{P}_d that converge to x and y respectively. Therefore for any $R \in \mathcal{P}_d$ we have,

$$\langle R, y \rangle \langle x, y \rangle = \lim_k \lim_l \langle P_k R, Q_l \rangle \langle 1, y \rangle = \lim_k \lim_l \Lambda(P_k R Q_l) \langle 1, y \rangle \quad (15)$$

Since the shift operator is bounded we have

$$\langle R, y \rangle \langle x, y \rangle = \lim_l \lim_k \Lambda(R Q_l P_k) \langle 1, y \rangle = \frac{\langle y, x \rangle \langle R, x \rangle \langle 1, y \rangle}{\langle 1, x \rangle}. \quad (16)$$

Which means,

$$\frac{\langle R, x \rangle}{\langle 1, x \rangle} = \frac{\langle R, y \rangle}{\langle 1, y \rangle},$$

for every $R \in \mathcal{P}_d$. Therefore

$$x = \frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, y \rangle} y.$$

By using the fact that x is an idempotent, we derive the following equality

$$\langle x, 1 \rangle = \langle y, 1 \rangle.$$

Finally,

$$x = y.$$

\square

3. Discrete representing measure of unital square positive functional

This section is mainly devoted to the study of discrete integral representation of an uspf. Keeping the same notation as above, let Λ be an uspf and \mathcal{H} be the associated Hilbert space.

As said in the second section, we drive a Λ -multiplicative element from the indicator function of a single point. In the finite dimensional case, the converse of this fact was given by F-H. Vasilescu in [26]. He utilized the finite dimensional structure to prove that Λ -multiplicative orthogonal basis of \mathcal{H} induces a set of characters on the C^* -algebra \mathcal{H} . In the general case, we will drive such a representation for the whole space of polynomials \mathcal{P}_d/I_Λ , in term of Λ -multiplicative elements.

The following simple observation allows us to reduce the problem of describing Λ -multiplicative elements to just Λ -multiplicative idempotents. This is clearly due to the equation (12) and the fact that it still holds for any scalar multiplication of x . We leave its simple proof to the reader.

LEMMA 3.1. *Let \mathcal{H} be the Hilbert space associated with a uspf Λ and $x \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ be such that $\langle 1, x \rangle \neq 0$. Then $\hat{x} := \frac{\langle 1, x \rangle}{\|x\|^2} x$ is an idempotent and the following conditions are equivalent:*

- (i) x is Λ -multiplicative,
- (ii) \hat{x} is a Λ -multiplicative idempotent of \mathcal{H} .

The following result describes Λ -multiplicative elements.

PROPOSITION 3.1. *If $v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, then the following conditions are equivalent:*

- (i) $\langle P, v \rangle \langle Q, v \rangle = \langle PQ, v \rangle$ for all $P, Q \in \mathcal{P}_d$,
- (ii) there exists (a unique) $c \in \mathbb{C}^d$ such that

$$\langle P, v \rangle = P(c), \quad P \in \mathcal{P}_d. \quad (17)$$

Moreover, if (ii) holds and $v \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$, then $c \in \mathbb{R}^d$. If $c \in \mathbb{C}^d$, then the following conditions are equivalent:

- (iii) there exists (a unique) $v \in \mathcal{H}$ such that (17) holds,
- (iv) there exists $\kappa < \infty$ such that

$$|P(c)| \leq \kappa \sqrt{\Lambda(|P|^2)}, \quad P \in \mathcal{P}_d. \quad (18)$$

The smallest κ in (18) is equal to $\|v\|$, where v is as in (iii).

If $v \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ satisfies the condition (i) of Proposition 3.1, then by Lemmata 2.3 and 3.1, $1 = \langle 1, v \rangle$ and the vector $\tilde{v} := \frac{1}{\|v\|^2} v$ is an idempotent which is Λ -multiplicative.

PROOF OF PROPOSITION 3.1. (i) \Rightarrow (ii) By induction on n (and the above observation), we see that

$$\langle P^n, v \rangle = \langle P, v \rangle^n \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

This implies that

$$\langle t^\alpha, v \rangle = \langle t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}, v \rangle = \langle t_1^{\alpha_1}, v \rangle \cdots \langle t_d^{\alpha_d}, v \rangle \stackrel{(19)}{=} c^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad (20)$$

10

HAMZA EL-AZHAR, AYOUB HARRAT, AND JAN STOCHEL

where $c = (\langle t_1, v \rangle, \dots, \langle t_d, v \rangle)$. By linearity, (20) yields (17). Substituting $P(t) = t_j$ into (17), we obtain $c_j = \langle t_j, v \rangle$ for $j = 1, \dots, d$, which justifies the uniqueness of c . If additionally $v \in \mathbb{R}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$, then $\langle t_j, v \rangle = \langle v, t_j \rangle = \overline{\langle t_j, v \rangle}$ for $j = 1, \dots, d$, and so $c \in \mathbb{R}^d$.

(ii) \Rightarrow (i) Obvious.

(iii) \Rightarrow (iv) Apply the Cauchy-Schwarz inequality.

(iv) \Rightarrow (iii) Applying the Riesz representation theorem, we get $v \in \mathcal{H}$ as in (ii) with $\kappa = \|v\|$. Then

$$\mathbb{R} \ni P(c) = \langle P, v \rangle = \langle \bar{v}, P \rangle = \langle P, \bar{v} \rangle, \quad P \in \mathcal{P}_d \cap \mathbb{R}(\mathcal{H}).$$

As a consequence, we have

$$0 = \langle P, v - \bar{v} \rangle, \quad P \in \mathcal{P}_d,$$

which yields $v = \bar{v}$. □

A direct consequence of the proposition, is the linear independence of normalized Λ -multiplicative elements

COROLLARY 3.1. *If x_1, \dots, x_κ are Λ -multiplicative elements of \mathcal{H} , then the following conditions are equivalent:*

- (i) *There exists $\{\rho_j\}_{j=1}^\kappa \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that $x = \sum_{j=1}^\kappa \rho_j x_j$ is a Λ -multiplicative element of \mathcal{H} ,*
- (ii) *$\frac{x_j}{\langle 1, x_j \rangle} = \frac{x_\kappa}{\langle 1, x_\kappa \rangle}$ for all $j = 1, \dots, \kappa$.*

PROOF. (i) \Rightarrow (ii) First we define the equivalence relation R on $J = \{1, \dots, \kappa\}$ by iRj if and only if $\frac{x_i}{\langle 1, x_i \rangle} = \frac{x_j}{\langle 1, x_j \rangle}$. Denote by \mathcal{R} the set of all equivalence classes. Then

$$x = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{R}} \left[\sum_{j \in \mathbf{a}} \left(\rho_j \frac{\langle 1, x_j \rangle}{\langle 1, x_{l_{\mathbf{a}}} \rangle} \right) \right] x_{l_{\mathbf{a}}} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{R}} \tilde{\rho}_{\mathbf{a}} x_{l_{\mathbf{a}}} \quad (\text{with representatives } l_{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}).$$

Hence, if \mathcal{R} has one element, then we are done. Suppose that \mathcal{R} has more than one element. Without loss of generality we may assume that $x = \sum_{j=1}^\kappa \rho_j x_j$, $\kappa \geq 2$ and

$$\frac{x_i}{\langle 1, x_i \rangle} \neq \frac{x_j}{\langle 1, x_j \rangle} \quad \text{for all } i \neq j. \quad (21)$$

Since x is Λ -multiplicative, by Proposition 3.1, there exists $c \in \mathbb{R}$ such that

$$\langle P, x \rangle = \langle 1, x \rangle P(c) = \sum_{j=1}^\kappa \rho_j \langle 1, x_j \rangle P(c), \quad P \in \mathcal{P}_d. \quad (22)$$

For the same reason, for every $j = 1, \dots, \kappa$, there exists $c_j \in \mathbb{R}$ such that

$$\langle P, x_j \rangle = \langle 1, x_j \rangle P(c_j), \quad P \in \mathcal{P}_d. \quad (23)$$

By (21) and Proposition 3.1, we have

$$c_i \neq c_j, \quad i \neq j. \quad (24)$$

Combining (22) and (23), we see that

$$\sum_{j=1}^\kappa \rho_j \langle 1, x_j \rangle [P(c) - P(c_j)] = 0, \quad p \in \mathcal{P}_d. \quad (25)$$

Substituting $P(t) = \prod_{j=1}^{\kappa} \|t - c_j\|^2$, we get

$$0 = \sum_{j=1}^{\kappa} \rho_j \langle 1, x_j \rangle P(c) = P(c) \sum_{j=1}^{\kappa} \rho_j \langle 1, x_j \rangle = P(c) \langle 1, x \rangle.$$

This implies that $P(c) = 0$ so $c \in P^{-1}(\{0\}) = \{c_1, \dots, c_{\kappa}\}$. After reordering, we may assume that $c = c_{\kappa}$. Combined with Proposition 3.1, this gives $x = \alpha_{\kappa} x_{\kappa}$ for some $\alpha_{\kappa} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Now there are two possibilities: either $\alpha_{\kappa} \neq \rho_{\kappa}$ and then $x = \sum_{j=1}^{\kappa-1} \rho'_j x_j$ with $\{\rho'_j\}_{j=1}^{\kappa-1} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, or $\alpha_{\kappa} = \rho_{\kappa}$ and then $\sum_{j=1}^{\kappa-1} \rho_j x_j = 0$, which implies that

$$0 = \langle P, \sum_{j=1}^{\kappa-1} \rho_j x_j \rangle = \sum_{j=1}^{\kappa-1} \rho_j \langle P, x_j \rangle \stackrel{(23)}{=} \sum_{j=1}^{\kappa-1} \rho_j \langle 1, x_j \rangle P(c_j), \quad P \in \mathcal{P}_d. \quad (26)$$

We show that the latter does not hold. Indeed, otherwise by (24), we can apply the multivariable Lagrange interpolation theorem to find a polynomial $P \in \mathcal{P}_d$ such that $P(c_j) = \frac{1}{\rho_j \langle 1, x_j \rangle}$ for $j = 1, \dots, \kappa - 1$. Substituting P into (26), we get a contradiction.

Thus $x = \sum_{j=1}^{\kappa-1} \rho'_j x_j$ with $\{\rho'_j\}_{j=1}^{\kappa-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so we can proceed by induction to conclude that $x = \alpha_j x_j$ for all $j = 1, \dots, \kappa$ and for some $\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. This implies that $\frac{x_i}{\langle 1, x_i \rangle} = \frac{x_j}{\langle 1, x_j \rangle}$ for all $i \neq j$, which contradicts (21).

(ii) \Rightarrow (i) Obvious. \square

The coming Theorem 3.1 gives intrinsic conditions to the existence of a representing measure for an uspf Λ . In other words, it provides the sufficient conditions for it.

THEOREM 3.1. *Let Λ be an uspf, and $(x_i)_{i \in I}$ be a total family of Λ -multiplicative orthogonal idempotent elements. Then, there exists a discrete probability measure μ such that $\text{Card}(\text{supp}(\mu)) = \dim \mathcal{H}$, and*

$$\Lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t) d\mu(t), \quad P \in \mathcal{P}_d.$$

PROOF. Since the family $(x_i)_i$ satisfies the conditions of Proposition 2.1, we obtain $\langle x, 1 \rangle = \sum_i \langle x, x_i \rangle$. Therefore, by proposition 3.1, we have

$$\Lambda(P) = \sum_i \langle P, x_i \rangle = \sum_i \langle 1, x_i \rangle P(c_i) = \sum_i \|x_i\|^2 P(c_i).$$

In addition, we have

$$\sum_i \langle 1, x_i \rangle |P(c_i)| \leq \left(\sum_i \langle 1, x_i \rangle \right)^{1/2} \left(\sum_i \langle 1, x_i \rangle |P(c_i)|^2 \right)^{1/2} = \Lambda(|P|^2)^{1/2}$$

Hence, the measure $\mu = \sum_i \|x_i\|^2 \delta_{c_i}$ gives an integral representation for Λ . Furthermore, Since all c_i are distinct, μ is a discrete probability measure on \mathbb{R}^d . \square

As a consequence of the previous theorem, in the case of bounded shift space, we get

COROLLARY 3.2. *Let Λ be an uspf and \mathcal{H} be a bounded shift space, then the following conditions are equivalent:*

- (i) *there is a total family $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ of Λ -multiplicative elements,*

(ii) *there exists a discrete probability measure $\mu = \sum_{i \in I} a_i \delta_{c_i}$ such that*

$$\Lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t) d\mu(t), \quad P \in \mathcal{P}_d.$$

PROOF. (i) \Rightarrow (ii) Using Lemma 3.1, we provide a family $(\hat{x}_i)_{i \in I}$ that is Λ -multiplicative idempotent family. Since \mathcal{H} is a bounded shift space, Proposition 2.3 gives that $(\hat{x}_i)_i$ is an orthogonal basis and our claim becomes evident in view of Theorem 3.1.

(ii) \Rightarrow (i) Since \mathcal{H} is a bounded shift space, then Proposition 2.2 gives that $\mathcal{H} = L^2(\mu)$, we take $(x_i)_{i \in I} = (\chi_{\{c_i\}})_{i \in I}$ which is a total family of \mathcal{H} consisting of Λ -multiplicative elements. \square

Since all conditions in Theorem 3.1 are intrinsic, it is natural to investigate the existence of a converse. A partial answer is given in the next result,

THEOREM 3.2. *Let Λ be an uspf such that there exists a discrete probability measure μ satisfying*

$$\Lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t) d\mu(t).$$

Then, there exists a family $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ verifying,

- (1) $\langle x_i, x_i \rangle = \langle 1, x_i \rangle$.
- (2) $\text{Vect}(x_i)_i$ is dense in \mathcal{H} .
- (3) $\forall i \in I, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \quad \langle t^\alpha, x_i \rangle \langle t^\beta, x_i \rangle = \langle 1, x_i \rangle \langle t^{\alpha+\beta}, x_i \rangle$.

PROOF. We assume that $\Lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t) d\mu(t)$ where $\mu = \sum_i \rho_i \delta_{\Lambda_i}$ with $\Lambda_i \in \mathbb{R}^d$ are distinct for all index i , and let $P_{\mathcal{H}} : L^2(\mu) \rightarrow \mathcal{H}$ be the orthogonal projection on the closed subspace \mathcal{H} .

We put $x_i = P_{\mathcal{H}}(\chi_{\Lambda_i})$, we have $\langle 1, x_i \rangle = \langle 1, P_{\mathcal{H}}(\chi_{\Lambda_i}) \rangle = \langle 1, \chi_{\Lambda_i} \rangle = \rho_i > 0$, since $\overline{\chi_{\Lambda_i}} = \chi_{\Lambda_i}$, we get $x_i \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Using Lemma 3.1, we exhibit a vector \hat{x}_i , which satisfies 1. The fact that $\text{Vect}(\chi_{\Lambda_i})_i$ is dense in $L^2(\mu)$ implies that $\text{Vect}(x_i)_i$ is dense in \mathcal{H} and then $\text{Vect}(\hat{x}_i)_i$ is dense in \mathcal{H} too. This proves 2.

Let $i \in I$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, we have in one hand

$$\begin{aligned} \langle t^\alpha, x_i \rangle \langle t^\beta, x_i \rangle &= \langle t^\alpha, P_{\mathcal{H}}(\chi_{\Lambda_i}) \rangle \langle t^\beta, P_{\mathcal{H}}(\chi_{\Lambda_i}) \rangle = \langle P_{\mathcal{H}}(t^\alpha), \chi_{\Lambda_i} \rangle \langle P_{\mathcal{H}}(t^\beta), \chi_{\Lambda_i} \rangle \\ &= \rho_i^2 \chi_{\Lambda_i}^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

and in other hand,

$$\langle t^{\alpha+\beta}, x_i \rangle \langle 1, x_i \rangle = \langle P_{\mathcal{H}}(t^{\alpha+\beta}), \chi_{\Lambda_i} \rangle \langle P_{\mathcal{H}}(1), \chi_{\Lambda_i} \rangle = \rho_i^2 \chi_{\Lambda_i}^{\alpha+\beta}. \quad (27)$$

So x_i and hence \hat{x}_i is Λ -multiplicative. \square

We should mention here that even with the assumption of polynomials are dense, we do not get back the orthogonality condition. For illustration see Example 3

4. Λ -multiplicative elements

In the present section, assuming that the uspf Λ has a representing measure μ , we discuss the question when a Λ -multiplicative element of $\mathcal{H}^2(\mu)$ can be written as an indicator function. Strictly speaking, what kind of assumption should we have to obtain that this Λ -multiplicative element is, μ -almost everywhere, a characteristic function

of one point. In this context, the first theorem in this section gives a necessary and sufficient condition for a Λ -multiplicative idempotent to be, μ -almost everywhere, the required function in above. In particular, to get the same result, the case of bounded shift space does not need any additional constraint on a Λ -multiplicative idempotent. However, Theorem 4.3 gives a different but natural condition that is the existence of such a characteristic function.

THEOREM 4.1. *Suppose that Λ is a uspf having a representing measure μ and $\mathcal{H} = \mathcal{H}^2(\mu)$. If $x \in \mathcal{H}$, then the following conditions are equivalent:*

- (i) x is a Λ -multiplicative idempotent in \mathcal{H} such that $P \cdot x \in \mathcal{H}$ for all $P \in \mathcal{P}$,
- (ii) x is a Λ -multiplicative idempotent in \mathcal{H} such that $x \cdot \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$, that is $f \cdot x \in \mathcal{H}$ for all $f \in \mathcal{H}$,
- (iii) there exists $c \in \mathbb{R}^d$ such that $\mu(\{c\}) > 0$ and $x = \chi_{\{c\}}$ a.e. $[\mu]$.

PROOF. (ii) \Rightarrow (i) This is obvious.

(i) \Rightarrow (iii) Set $e = \frac{x}{\|x\|}$. Since x is an idempotent (i.e., $\langle 1, x \rangle = \|x\|^2$), we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (xP)\bar{Q}d\mu &= \langle x, \bar{P}Q \rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle x, \bar{P} \rangle \langle x, Q \rangle \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \langle P, x \rangle \langle x, Q \rangle \\ &= \langle (e \otimes e)P, Q \rangle, \quad P, Q \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (28)$$

Denote by M_x the operator of multiplication by x in $L^2(\mu)$. It is well known that M_x is closed (in fact, M_x is selfadjoint because $x \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$). By our assumption $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}(M_x)$. Hence, it follows from (28) that

$$\langle (M_x|_{\mathcal{P}})P, Q \rangle = \langle (e \otimes e|_{\mathcal{P}})P, Q \rangle, \quad P, Q \in \mathcal{P}. \quad (29)$$

Since \mathcal{P} is dense in \mathcal{H} and $M_x(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{H}$, we infer from (29) that $M_x|_{\mathcal{P}} = e \otimes e|_{\mathcal{P}}$. Therefore, by the boundedness of $e \otimes e$ and the closedness of M_x , we have

$$e \otimes e = \overline{e \otimes e|_{\mathcal{P}}} = \overline{M_x|_{\mathcal{P}}} \subseteq M_x.$$

This implies that $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{D}(M_x)$, $M_x(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ and $M_x|_{\mathcal{H}} = e \otimes e$. Since $1 \in \mathcal{H}$ and $e \otimes e$ is an orthogonal projection, we get

$$x = M_x|_{\mathcal{H}}(1) = e \otimes e(1) = (e \otimes e)^2(1) = (M_x|_{\mathcal{H}})^2(1) = x^2.$$

This in turn implies that there exists $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ such that $x = \chi_{\Omega}$ a.e. $[\mu]$. Applying Proposition 3.1 to $v := \frac{1}{\langle 1, x \rangle} x \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$, we deduce that there exists $c = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ such that (17) holds. This yields

$$\int_{\Omega} P d\mu = \langle P, x \rangle = \mu(\Omega)P(c), \quad P \in \mathcal{P}. \quad (30)$$

Substituting $P = P_c$ into (30), where $P_c(t) := \sum_{j=1}^d (t_j - c_j)^2$, gives $\int_{\Omega} P_c d\mu = 0$. Since $P_c(t) > 0$ for all $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{c\}$, we see that $\mu(\Omega \setminus \{c\}) = 0$. As a consequence, $x = \chi_{\{c\}}$ a.e. $[\mu]$ and $\mu(\{c\}) = \|x\|^2 > 0$.

14

HAMZA EL-AZHAR, AYOUB HARRAT, AND JAN STOCHTEL

(iii) \Rightarrow (ii) Clearly, such x is a Λ -multiplicative idempotent in \mathcal{H} . In turn, $P \cdot x = P(c) \cdot x \in \mathcal{H}$ for all $P \in \mathcal{P}$ (because by assumption $x \in \mathcal{H}$), so $M_x(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{H}$. Since the operator M_x is bounded, $M_x(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$. This completes the proof. \square

Using Lemmata 2.3 and 3.1 and Theorem 4.1, one can obtain the following variant of Theorem 4.1.

THEOREM 4.2. *Suppose that Λ is a uspf having a representing measure μ and $\mathcal{H} = \mathcal{H}^2(\mu)$. If $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ and $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, then the following conditions are equivalent:*

- (i) $x \in \mathbf{R}(\mathcal{H})$, $\langle P, x \rangle \langle Q, x \rangle = \xi \langle PQ, x \rangle$ for all $P, Q \in \mathcal{P}_d$ and $P \cdot x \in \mathcal{H}$ for all $P \in \mathcal{P}_d$,
- (ii) there exists $c \in \mathbb{R}^n$ such that $\mu(\{c\}) > 0$ and $x = \frac{\xi}{\mu(\{c\})} \chi_{\{c\}}$ a.e. $[\mu]$.

Moreover, if (ii) holds, then $\xi = \langle 1, x \rangle$ and $\langle 1, x \rangle^2 = \|x\|^2 \mu(\{c\})$.

The following is a direct consequence of Lemma 2.3 and Theorem 4.1.

COROLLARY 4.1. *Let Λ be a uspf and \mathcal{H} be the associated Hilbert space. If \mathcal{H} is a bounded shift space and $x \in \mathcal{H}$, then the following conditions are equivalent:*

- (i) x is a Λ -multiplicative idempotent of \mathcal{H} ,
- (ii) $x \in \mathbf{R}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ and $\langle P, x \rangle \langle Q, x \rangle = \|x\|^2 \langle PQ, x \rangle$ for all $P, Q \in \mathcal{P}$,
- (iii) there exists $c \in \mathbb{R}^n$ such that $\mu(\{c\}) > 0$ and $x = \chi_{\{c\}}$ a.e. $[\mu]$, where μ is a representing measure of Λ associated with \mathcal{H} as in Proposition 2.2.

The following theorem characterizes nonzero Λ -multiplicative elements x of \mathcal{H} which are nonnegative a.e. with respect to a given representing measure μ of Λ .

THEOREM 4.3. *Suppose that Λ is a uspf having a representing measure μ and $\mathcal{H} = \mathcal{H}^2(\mu)$. If $x \in \mathcal{H}$, then the following conditions are equivalent:*

- (i) x is a nonzero Λ -multiplicative element of \mathcal{H} such that $x \geq 0$ a.e. $[\mu]$,
- (ii) there exist $c \in \mathbb{R}^d$ and $\alpha \in (0, \infty)$ such that $\mu(\{c\}) > 0$ and $x = \alpha \chi_{\{c\}}$ a.e. $[\mu]$.

PROOF. The implication (ii) \Rightarrow (i) is obvious.

(i) \Rightarrow (ii) It follows from (i) that $\langle 1, x \rangle > 0$, because otherwise $\int_{\mathbb{R}^d} x d\mu = 0$, which together with $x \geq 0$ a.e. $[\mu]$ implies that $x = 0$ a.e. $[\mu]$, a contradiction. Set $v = \frac{x}{\langle 1, x \rangle}$. Then $\langle 1, v \rangle = 1$ and $v \geq 0$ a.e. $[\mu]$. Clearly $\langle P, v \rangle \langle Q, v \rangle = \langle PQ, v \rangle$ for all $P, Q \in \mathcal{P}_d$, so by Proposition 3.1 there exists $c \in \mathbb{R}^d$ such that

$$\langle P, v \rangle = P(c), \quad P \in \mathcal{P}. \quad (31)$$

Define the positive Borel measure ν on \mathbb{R}^d by $d\nu = v d\mu$. Since $\langle 1, v \rangle = 1$, ν is a probability measure. Note that

$$\int_{\mathbb{R}^d} |P|^2 d\nu = \langle \bar{P}P, v \rangle < \infty, \quad P \in \mathcal{P}. \quad (32)$$

This implies that $P \in L^1(\nu)$ for every $P \in \mathcal{P}$. Hence, by (31), we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} P d\nu = \langle P, v \rangle = P(c), \quad P \in \mathcal{P}. \quad (33)$$

Substituting the polynomial $P = P_c$ into (33), where P_c is as in the proof of Theorem 4.1, we deduce that $\nu(\mathbb{R}^d \setminus \{c\}) = 0$. This implies that $x = \alpha \chi_{\{c\}}$ a.e. $[\mu]$ for some $\alpha \in (0, \infty)$. Moreover, $\alpha^2 \mu(\{c\}) = \|x\|^2 > 0$, which completes the proof. \square

Summarizing Theorems 4.1 and 4.3, we obtain the following result.

THEOREM 4.4. *Suppose that Λ is a uspf having a representing measure μ and $\mathcal{H} = \mathcal{H}^2(\mu)$. If $x \in \mathcal{H}$, then the following conditions are equivalent:*

- (i) x is a Λ -multiplicative idempotent in \mathcal{H} such that $P \cdot x \in \mathcal{H}$ for all $P \in \mathcal{P}$,
- (ii) x is a Λ -multiplicative idempotent in \mathcal{H} such that $x \cdot \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$,
- (iii) x is a Λ -multiplicative idempotent in \mathcal{H} such that $x \geq 0$ a.e. $[\mu]$,
- (iv) there exists $c \in \mathbb{R}^d$ such that $\mu(\{c\}) > 0$ and $x = \chi_{\{c\}}$ a.e. $[\mu]$.

Now we construct an example showing that the implication (i) \Rightarrow (iii) of Theorem 4.1 (or the implication (i) \Rightarrow (iv) of Theorem 4.4) is not true if we drop the assumption that $P \cdot x \in \mathcal{H}$ for all $P \in \mathcal{P}$ even if \mathcal{P} is dense in $L^2(\mu)$, and that the implication (i) \Rightarrow (ii) of Theorem 4.3 (as well as the implication (iii) \Rightarrow (iv) of Theorem 4.4) is no longer true without assuming that $x \geq 0$ a.e. $[\mu]$.

EXAMPLES 3. First, we recall some facts from moment theory (all necessary details concerning N-extremal measure may be found in [19, 17]). It is well known that the closed supports of N-extremal measures of an indeterminate Hamburger moment sequence $\gamma = (\gamma_k)_{k=0}^\infty$ form a partition of \mathbb{R} (in particular, the supports are disjoint) and that each of them is infinite with no accumulation points in \mathbb{R} . Hence, each N-extremal measure of γ is a discrete measure. What is more, \mathcal{P}_1 is dense in $L^2(\mu)$ for any N-extremal measure μ of γ .

Let $d = 1$ and let $\gamma = (\gamma_k)_{k=0}^\infty$ be an indeterminate Hamburger moment sequence (the first such example was given by Stieltjes in his famous article in 1895 [20] : $\gamma_k = q^{-\frac{1}{2}k^2}$, $k \geq 0$, $q \in (0, 1)$). let μ_1 and μ_2 be two distinct N-extremal measures of γ . Then by the above discussion for every $j = 1, 2$, the measure μ_j is discrete, polynomials are dense in $L^2(\mu_j)$ and

$$\text{supp}(\mu_1) \cap \text{supp}(\mu_2) = \emptyset. \quad (34)$$

For $j = 1, 2$, take $c_j \in \text{supp}(\mu_j)$. Then $\mu_j(\{c_j\}) > 0$ for $j = 1, 2$, $c_1 \neq c_2$ and (\mathcal{H} depends on the representing measure, so we must be careful)

$$\left\langle [P]_{\mu_j}, [\chi_{\{c_j\}}]_{\mu_j} \right\rangle_{\mu_j} = \mu_j(\{c_j\})P(c_j), \quad P \in \mathcal{P}_1, j = 1, 2, \quad (35)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ stands for the inner product of $L^2(\mu)$ and $[f]_\mu$ stands for the equivalence relation of f with respect to the equivalence relation "a.e. $[\mu]$ ". This yields

$$\left\langle [P]_{\mu_j}, [\chi_{\{c_j\}}]_{\mu_j} \right\rangle_{\mu_j} \left\langle [Q]_{\mu_j}, [\chi_{\{c_j\}}]_{\mu_j} \right\rangle_{\mu_j} = \mu_j(\{c_j\}) \left\langle [PQ]_{\mu_j}, [\chi_{\{c_j\}}]_{\mu_j} \right\rangle_{\mu_j} \quad (36)$$

for all $P, Q \in \mathcal{P}_1$ and $j = 1, 2$. In particular, we have $\mu_j(\{c_j\}) = \left\langle [1]_{\mu_j}, [\chi_{\{c_j\}}]_{\mu_j} \right\rangle_{\mu_j}$ for $j = 1, 2$, and thus $[\chi_{\{c_j\}}]_{\mu_j} \in RL^2(\mu_j) \setminus \{0\}$ is a Λ -multiplicative idempotent of $L^2(\mu_j)$

for $j = 1, 2$. Note that there exists a unique unitary isomorphism $U : L^2(\mu_1) \longrightarrow L^2(\mu_2)$ such that ³

$$U([P]_{\mu_1}) = [P]_{\mu_2}, \quad P \in L^2(\mu_1). \quad (37)$$

Since elements of $\mathbb{R}(\mathcal{H})$ can be approximated by real polynomials, one can easily deduce from (37) that $UR(L^2(\mu_1)) = \mathbb{R}(L^2(\mu_2))$. It follows that

$$\begin{aligned} \left\langle [P]_{\mu_2}, U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} \right\rangle_{\mu_2} &\stackrel{(37)}{=} \left\langle U[P]_{\mu_1}, U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} \right\rangle_{\mu_2} \\ &= \left\langle [P]_{\mu_1}, [\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} \right\rangle_{\mu_1} \stackrel{(35)}{=} \mu_1(\{c_1\})P(c_1), \end{aligned} \quad (38)$$

for $P \in \mathcal{P}_1$. As consequence, $U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1}$ is a nonzero Λ -multiplicative idempotent in $L^2(\mu_2)$.

Now we show that there is no $u \in \mathbb{R}^d$ such that (see also the last paragraph of this example)

$$U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} = [\chi_u]_{\mu_2}. \quad (39)$$

Indeed, otherwise we have

$$\mu_1(\{c_1\})P(c_1) \stackrel{(38)}{=} \left\langle [P]_{\mu_2}, U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} \right\rangle_{\mu_2} \stackrel{(39)}{=} \left\langle [P]_{\mu_2}, [\chi_{\{u\}}]_{\mu_2} \right\rangle_{\mu_2} = \mu_2(\{u\})P(u) \quad (40)$$

for all $P \in \mathcal{P}_1$. Then $u = c_1$ and $\mu_2(\{u\}) = \mu_1(\{c_1\})$. Indeed, if $u \neq c_1$, then there exists a polynomial $P \in \mathcal{P}_1$ such that $P(u) = 0$ and $P(c_1) = 1$, and so by (40) and $\mu_1(\{c_1\}) > 0$ we have a contradiction. Now, applying (40) with $P = 1$, we get $\mu_2(\{c_1\}) = \mu_1(\{c_1\}) > 0$, which implies that $c_1 \in \text{supp}(\mu_1) \cap \text{supp}(\mu_2)$, thereby contradicting (34).

Finally, we show that there exists $c \in K := \text{supp}(\mu_2)$ such that the nonzero Λ -multiplicative idempotents $U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1}$ and $[\chi_{\{c\}}]_{\mu_2}$ are distinct however they are not orthogonal in $L^2(\mu_2)$.

Since $U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} \in RL^2(\mu_2) \setminus \{0\}$ and the set K is infinite with no accumulation points in \mathbb{R} , there is a sequence $\{\beta_c\}_{c \in K}$ of real numbers such that

$$U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} = \sum_{c \in K} \beta_c \cdot [\chi_{\{c\}}]_{\mu_2}. \quad (41)$$

This implies that

$$\begin{aligned} \mu_1(\{c_1\})P(c_1) &\stackrel{(38)}{=} \left\langle [P]_{\mu_2}, U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1} \right\rangle_{\mu_2} \stackrel{(41)}{=} \sum_{c \in K} \beta_c \left\langle [P]_{\mu_2}, [\chi_{\{c\}}]_{\mu_2} \right\rangle_{\mu_2} \\ &= \sum_{c \in K} \beta_c \mu_2(\{c\})P(c), \quad P \in \mathcal{P}_1. \end{aligned} \quad (42)$$

Note that the set $K_0 = \{c \in K : \beta_c \neq 0\}$ is infinite. indeed, otherwise using (34) we can find a polynomial $P \in \mathcal{P}_1$ such that $P(c_1) = 1$ and $P(c) = 0$ for all $c \in K_0$, which contradicts (42) and $\mu_1(\{c_1\}) > 0$. Take any $d_2 \in K_0$, then the nonzero Λ -multiplicative idempotents $U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1}$ and $[\chi_{\{d_2\}}]_{\mu_2}$ are distinct and

$$\left\langle U[\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1}, [\chi_{\{d_2\}}]_{\mu_2} \right\rangle_{\mu_2} \stackrel{(41)}{=} \beta_{d_2} \mu_2(\{d_2\}) \neq 0 \quad (43)$$

³As shown in this example (see (39)), U is not given by $U([f]_{\mu_1}) = [f]_{\mu_2}$ for $f \in L^2(\mu_1)$.

this means that $U [\chi_{\{c_1\}}]_{\mu_1}$ and $[\chi_{\{d_2\}}]_{\mu_2}$ are not orthogonal in $L^2(\mu_2)$.

As a consequence of the reasoning in the last paragraph of this example (see (42)), we obtain the following corollary

COROLLARY 4.2. *There exists an infinite sequence $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of distinct positive numbers with no accumulation points in \mathbb{R} and a sequence $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of nonzero real numbers such that*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P(r_k) = 0, \quad P \in \mathcal{P}_1 \quad (44)$$

Acknowledgements

References

- [1] N. I. Akheizer. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Oliver & Boyd, 1965.
- [2] C. Berg, J. R. Christensen, and C. Jensen. A remark on the multidimensional moment problem. *Mathematische Annalen*, 243(2):163–169, 1979.
- [3] C. Berg and M. Thill. Rotation invariant moment problems. *Acta Mathematica*, 167(1):207–227, 1991.
- [4] R. Curto and L. Fialkow. The truncated complex k-moment problem. *Transactions of the American mathematical society*, 352(6):2825–2855, 2000.
- [5] R. E. Curto and L. A. Fialkow. *Solution of the truncated complex moment problem for flat data*, volume 568. American Mathematical Soc., 1996.
- [6] R. E. Curto and L. A. Fialkow. *Flat Extensions of Positive Moment Matrices: Recursively Generated Relations: Recursively Generated Relations*, volume 648. American Mathematical Soc., 1998.
- [7] R. E. Curto and L. A. Fialkow. Truncated k-moment problems in several variables. *Journal of Operator Theory*, pages 189–226, 2005.
- [8] B. Fuglede. The multidimensional moment problem. *Expo. Math.*, 1:47–65, 1983.
- [9] M. Neumark. Spectral functions of a symmetric operator. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 4(3):277–318, 1940.
- [10] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3):969–984, 1993.
- [11] M. Putinar and F.-H. Vasilescu. Solving moment problems by dimensional extension. *Annals of Mathematics*, 149(3):1087–1107, 1999.
- [12] M. Riesz. Sur le problème des moments. i, ii,iii. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 16(16):1922, 1922.
- [13] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [14] D. Sarason. Moment problems and operators in hilbert space. In *Proc. Symp. Appl. Math*, volume 37, pages 54–70, 1987.
- [15] K. Schmüdgen. The k-moment problem for compact semi-algebraic sets. *Mathematische Annalen*, 289(1):203–206, Mar 1991.
- [16] K. Schmüdgen. On the moment problem of closed semi-algebraic sets. *J. Reine Angew. Math*, 558:225–234, 2003.
- [17] K. Schmüdgen. *The moment problem*, volume 277. Springer, 2017.
- [18] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin. *The problem of moments*. Number 1. American Mathematical Soc., 1943.
- [19] B. Simon. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator. *Advances in mathematics*, 137(1):82–203, 1998.
- [20] T. Stieltjes. Sur les fractions continues. In *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, volume 8, page J71, 1894.
- [21] J. Stochel. Solving the truncated moment problem solves the full moment problem. *Glasgow Mathematical Journal*, 43(3):335, 2001.

- [22] J. Stochel and F. H. Szafraniec. The complex moment problem and subnormality: a polar decomposition approach. *Journal of functional analysis*, 159(2):432–491, 1998.
- [23] M. H. Stone. *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, volume 15. American Mathematical Soc., 1932.
- [24] F. Szafraniec. Boundedness of the shift operator related to positive definite forms: an application to moment problems. *Arkiv för Matematik*, 19(1-2):251–259, 1981.
- [25] F.-H. Vasilescu. Dimensional stability in truncated moment problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 388(1):219–230, 2012.
- [26] F.-H. Vasilescu. An idempotent approach to truncated moment problems. *Integral Equations and Operator Theory*, 79(3):301–335, 2014.
- [27] F.-H. Vasilescu. Integral representations of semi-inner products in function spaces. *International Journal of Analysis and Applications*, 14(2):107–133, 2017.

CENTER OF MATHEMATICAL RESEARCH OF RABAT, P.O. BOX 1014, FACULTY OF SCIENCES, MOHAMMED V UNIVERSITY IN RABAT, RABAT, MOROCCO.

Email address: `elazharhamza@gmail.com`

CENTER OF MATHEMATICAL RESEARCH OF RABAT, P.O. BOX 1014, FACULTY OF SCIENCES, MOHAMMED V UNIVERSITY IN RABAT, RABAT, MOROCCO.

LMPA, UNIVERSITÉ DU LITTORAL, 50 RUE F. BUISSON, B.P. 699, 62228 CALAIS, FRANCE

Email address: `Ayoub.Harrat@etu.univ-littoral.fr`

INSTYTUT MATEMATYKI, UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI, UL. ŁOJASIEWICZA 6, PL-30348 KRAKÓW, POLAND

Email address: `Jan.Stochel@im.uj.edu.pl`

Chapitre **4**

L'Étude Asymptotique des Valeurs
Propres de une Classe de Matrices de
Jacobi Non Bornées

Opuscula Math. 40, no. 2 (2020), 241–270
<https://doi.org/10.7494/OpMath.2020.40.2.241>

OPUSCULA MATHEMATICA

ASYMPTOTIC EXPANSION OF LARGE EIGENVALUES FOR A CLASS OF UNBOUNDED JACOBI MATRICES

Ayoub Harrat, El Hassan Zerouali, and Lech Zielinski

Communicated by P.A. Cojuhari

Abstract. We investigate a class of infinite tridiagonal matrices which define unbounded self-adjoint operators with discrete spectrum. Our purpose is to establish the asymptotic expansion of large eigenvalues and to compute two correction terms explicitly.

Keywords: tridiagonal matrix, band matrix, unbounded self-adjoint operator, discrete spectrum, large eigenvalues, asymptotics.

Mathematics Subject Classification: 47B25, 47B36, 15A18.

1. INTRODUCTION

1.1. GENERAL REMARKS

Infinite Jacobi matrices have appeared in many recent papers related to various questions of pure and applied mathematics (see [7, 9, 14, 19, 23]). In this paper we consider a Hermitian tridiagonal matrix

$$\begin{pmatrix} d(1) & \overline{a(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ a(1) & d(2) & \overline{a(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & a(2) & d(3) & \overline{a(3)} & \cdots \\ 0 & 0 & a(3) & d(4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

such that $(d(k))_{k=1}^{\infty}$ is an increasing sequence going to infinity and $(a(k))_{k=1}^{\infty}$ is a complex valued sequence dominated by $(d(k))_{k=1}^{\infty}$. Then (1.1) defines in ℓ^2 a self-adjoint operator J with discrete spectrum (see [8]). Moreover, J is bounded from below and *the eigenvalue sequence of J* is defined as the non-decreasing sequence

$(\lambda_n(J))_{n=1}^\infty$ such that $Jv_n = \lambda_n(J)v_n$ for $n \in \mathbb{N}^*$ and $(v_n)_{n=1}^\infty$ is an orthonormal basis of ℓ^2 .

We begin the discussion of known results by the fundamental paper of J. Janas, S. Naboko [14]. In this paper the authors describe a method of approximative diagonalization and its application to the analysis of large eigenvalues in certain quantum models. The paper [14] gives also explanations why this type of analysis is important in Quantum Physics.

Concerning non self-adjoint problems, we refer to [10] and [16]. Concerning the self-adjoint problem, we remark that the papers [1–5, 7, 14, 15] use the following hypothesis.

Hypothesis. There exist $\mu, \rho, C, c, k_0 \in (0; \infty)$ such that for $k \geq k_0$ one has

- (H1) $ck^\mu \leq d(k) \leq Ck^\mu$,
- (H2) $d(k+1) - d(k) \geq ck^{\mu-1}$,
- (H3) $|a(k)| \leq Ck^{\mu-\rho}$.

It turns out that asymptotic estimates crucially depend on whether $\rho > 1$ or not.

Case $\rho > 1$. The papers [14] and [7] treat a type of coefficients satisfying (H1)–(H3) with $\mu = 2$ and $\rho = \frac{3}{2}$. An asymptotic expansion of large eigenvalues is constructed in [15] using (H1)–(H3) with $\mu \geq 1$, $\rho > 1$ and in [1] using (H1)–(H3) with $\mu > 0$, $\rho > 1$.

Case $\rho \leq 1$. It appears that $\rho = \frac{1}{2}$ is the most important value for the Quantum Optics and the asymptotic behaviour of large eigenvalues for models considered in [1–5, 20–22] turned out to have a quite special form. However, it is an open problem to describe eigenvalue asymptotics without additional regularity of entries. Other special models are investigated in papers [11, 13] and [17].

In this paper we construct an asymptotic expansion of large eigenvalues under additional regularity conditions imposed on the entries and we give explicit expressions for correction terms in the asymptotic formula with error $O(n^{\mu-6\rho})$. In Theorem 1.1 we assume that the entries have a classical expansion at infinity. The case $\rho = \frac{1}{2}$ gives a nice surprise by ensuring a classical expansion of eigenvalues. A similar construction still works if entries satisfy regularity conditions of symbol type (see Section 1.3). The restriction to tridiagonal matrices is not essential in our approach and we can work all the time with band matrices, but tridiagonal matrices make formulas and calculus more simple. We mention as well that this paper can be viewed as a development of [6] (see also [15]).

1.2. ASYMPTOTIC EXPANSION OF LARGE EIGENVALUES

We denote by ℓ^2 the Hilbert space of square summable complex valued sequences $x: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ with the norm

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 \right)^{1/2}$$

and the scalar product $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x(k)}y(k)$. For any $\theta > 0$ we denote

$$\ell^{2,\theta} := \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{k=1}^{\infty} |k^\theta x(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Let $(d(k))_{k=1}^{\infty}, (a(k))_{k=1}^{\infty}$ satisfy the hypothesis (H1)–(H3) for a fixed $\mu > 0$ and $\rho > 0$. For $x \in \ell^{2,\mu}$ we define $Jx \in \ell^2$ by the formula

$$Jx(k) = d(k)x(k) + \bar{a}(k)x(k+1) + a(k-1)x(k-1) \text{ for } k \in \mathbb{N}^*, \quad (1.2)$$

where we assume $x(0) = 0$ and $a(0) = 0$. The formula (1.2) defines the operator J on the domain of definition $\mathcal{D}(J) = \ell^{2,\mu}$. Then J is self-adjoint in ℓ^2 , bounded from below and has compact resolvent (see [8]). We will prove the following result.

Theorem 1.1. *Let $\mu > 0, \rho > 0$ be fixed and assume*

$$d(k) \sim k^\mu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_i}{k^i} \quad \text{as } k \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

$$a(k) \sim k^{\mu-\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{k^i} \quad \text{as } k \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

where $\alpha_i \in \mathbb{C}, \delta_i \in \mathbb{R}$ for $i \in \mathbb{N}$ and $\delta_0 > 0$. Then (H1)–(H3) hold and (1.2) defines in ℓ^2 the self-adjoint operator J on the domain $\mathcal{D}(J) = \ell^{2,\mu}$. If $(\lambda_n(J))_{n=1}^{\infty}$ is the eigenvalue sequence of the operator J , then

$$\lambda_n(J) = d(n) + \mathfrak{r}(n),$$

where $\mathfrak{r}(n)$ obeys the asymptotic expansion of the form

$$\mathfrak{r}(n) \sim n^{\mu-2\rho} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{c_{i,j}}{n^{i+2j\rho}} \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

and $c_{i,j}$ are real coefficients obtained by the induction scheme in Section 5. The explicit values of $c_{0,0}, c_{1,0}, c_{2,0}$ are computed in Section 6.4 and the value of $c_{0,1}$ in Section 6.5 (see also (1.11) and (1.14)–(1.15)).

The operator J is a relatively compact perturbation of the diagonal operator $\text{diag}(d(n))_{n=1}^{\infty}$ and the special form of this perturbation allows one to deduce

$$\lambda_n(J) = d(n) + O(n^{\mu-\rho}) \quad (1.6)$$

from the min-max principle (see Corollary 3.3). It appears that the assumptions of Theorem 1.1 allow one to replace (1.6) by the stronger estimate

$$\lambda_n(J) = d(n) + O(n^{\mu-2\rho})$$

and the remainder $\mathfrak{r}(n) = \lambda_n(J) - d(n)$ obeys the asymptotic formula

$$\mathfrak{r}(n) = \mathfrak{r}_1(n) + O(n^{\mu-4\rho}),$$

where $\mathfrak{r}_1(n)$ is given by (1.9). The quantity $\mathfrak{r}_1(n)$ is of order $n^{\mu-2\rho}$ and we call it *the first correction term*. We mention that the expression (1.9) for the first correction term was obtained in [15] under the assumptions (H1)–(H3) with $\mu \geq 1$, $\rho > 1$ (and with weaker remainder estimates).

The next step of precision is attained in Theorem 6.2 which describes the asymptotic behaviour of $\mathfrak{r}(n)$ modulo $O(n^{\mu-6\rho})$. We show the formula (1.12) and give explicit expressions (1.13)–(1.15) for the leading coefficient of *the second correction term*, which is of order $O(n^{\mu-4\rho})$.

In order to obtain a complete asymptotic expansion, we use a method of approximative diagonalization. The idea of our approach is similar to the method presented in [14], but we do not need the assumptions $\mu \geq 1$ and $\rho > 1$ used in [14].

At the end of this discussion we remark that the result of Theorem 1.1 is inspired by the paper [18]. The main differences between [18] and our work are the following:

- we consider the Hilbert space $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ instead of $\ell^2(\mathbb{Z})$,
- we give a simple algorithm of computing the coefficients $c_{i,j}$ adopted to our problem,
- our approach allows us to see that (1.5) contains only even powers of $n^{-\rho}$.

1.3. FURTHER RESULTS

We construct an asymptotic expansion for large eigenvalues under assumptions slightly weaker than used in Theorem 1.1.

Notation 1.2. For any $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ we write $\partial^0 f(k) := f(k)$,

$$\partial f(k) = f(k+1) - f(k),$$

and, by using induction, we define $\partial^{m+1} f := \partial(\partial^m f)$ for $m = 0, 1, 2, \dots$

If $\nu \in \mathbb{R}$ then S_1^ν denotes the set of $p : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ such that the estimate

$$\partial^m p(k) = O(k^{\nu-m})$$

holds for every $m \in \mathbb{N}$.

Throughout the paper $\mu > 0$, $\rho > 0$ are fixed and we centre our analysis on the Jacobi operators (1.2) such that

$$d \in S_1^\mu, \tag{1.7}$$

$$a \in S_1^{\mu-\rho} \tag{1.8}$$

and (H1)–(H2) hold. These conditions could be weakened if one wants to obtain the remainder estimate $O(n^{-\eta})$ for a fixed value of the exponent η (see Theorem 4.1), but for simplicity we use (1.7)–(1.8) throughout Section 5 and 6.

As before, J is the self-adjoint operator in ℓ^2 with $\mathcal{D}(J) = \ell^{2,\mu}$ and $(\lambda_n(J))_{n=1}^\infty$ denotes its non-decreasing eigenvalue sequence (counted with multiplicities). We consider the asymptotic formula for $(\lambda_n(J))_{n=1}^\infty$ with three different degrees of precision.

(i) *The asymptotic formula with one correction term.* We show that

$$\lambda_n(J) = d(n) + \mathfrak{r}_1(n) + O(n^{\mu-4\rho})$$

holds with

$$\mathfrak{r}_1(n) := \frac{|a(n-1)|^2}{d(n) - d(n-1)} - \frac{|a(n)|^2}{d(n+1) - d(n)}. \quad (1.9)$$

If (1.3)–(1.4) hold, then (1.7)–(1.8) hold as well. Under the assumptions (1.3)–(1.4), it is easy to see that the quantity $\mathfrak{r}_1(n)$ defined by (1.9) satisfies

$$\mathfrak{r}_1(n) \sim n^{\mu-2\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{i,0}}{n^i} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

In Section 6.4 we show that in the case $\delta_0 = 1$ one has (1.10) with

$$\begin{cases} c_{0,0} = -\frac{\mu-2\rho+1}{\mu} |\alpha_0^2|, \\ c_{1,0} = \frac{\mu-2\rho}{\mu} \left((\mu - \rho + \delta_1(1 - \frac{1}{\mu})) |\alpha_0^2| - 2\text{Re}(\alpha_0 \bar{\alpha}_1) \right). \end{cases} \quad (1.11)$$

It is clear that the general case can be reduced to the case $\delta_0 = 1$ by means of the multiplication of J by a suitable constant.

(ii) *The asymptotic formula with two correction terms.* In Theorem 6.2 we prove

$$\lambda_n(J) = d(n) + \mathfrak{r}_1(n) + \mathfrak{r}_2(n) + O(n^{\mu-6\rho}), \quad (1.12)$$

where \mathfrak{r}_1 is given by (1.9) and $\mathfrak{r}_2 \in S_1^{\mu-4\rho}$.

Let us assume that (1.3) holds and (1.4) holds with $\delta_0 = 1$. Then (1.10)–(1.11) are still true and in Section 6.5 we show that

$$\mathfrak{r}_2(n) = c_{0,1} n^{\mu-4\rho} + O(n^{\mu-4\rho-1}) \quad (1.13)$$

holds with

$$c_{0,1} = c_1 + c_2 + c_3, \quad (1.14)$$

where

$$\begin{cases} c_1 = -(\mu - 2\rho)(\mu + 1 - 2\rho)(\mu + 1 - 4\rho) \frac{|\alpha_0^4|}{2\mu^3}, \\ c_2 = (\mu - 1)(\mu + 2 - 4\rho)(\mu + 1 - 4\rho) \frac{|\alpha_0^4|}{4\mu^3}, \\ c_3 = -(\mu - 1)^2(\mu + 1 - 4\rho) \frac{|\alpha_0^4|}{4\mu^3}. \end{cases} \quad (1.15)$$

(iii) *A complete asymptotic expansion.* In Section 5 we construct $\mathfrak{r}_l \in S_1^{\mu-2^l\rho}$, where $l = 1, 2, \dots$ and for every $m \in \mathbb{N}^*$ one has

$$\lambda_n(J) = d(n) + \sum_{l=1}^m \mathfrak{r}_l(n) + O(n^{\mu-2^{m+1}\rho}).$$

This construction is used to deduce Theorem 1.1.

2. PRELIMINARIES

2.1. BASIC NOTATIONS AND PROPERTIES

Throughout the paper $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ denotes the canonical basis in ℓ^2 (i.e. $e_k(j) = \delta_{k,j}$) and the shift operator is denoted by S (i.e. S is the linear bounded operator in ℓ^2 satisfying $Se_k = e_{k+1}$ for $k \in \mathbb{N}^*$). We denote by Λ the self-adjoint operator in ℓ^2 defined by the formula

$$(\Lambda x)(k) = kx(k)$$

on the domain of definition $\mathcal{D}(\Lambda) = \ell^{2,1}$. Using the functional calculus, we can define $f(\Lambda)$ as the closed linear operator satisfying $f(\Lambda)e_k = f(k)e_k$ for all $k \in \mathbb{N}^*$. These notations allow us to write down the Jacobi operator (1.2) in the form

$$J = d(\Lambda) + Sa(\Lambda) + \bar{a}(\Lambda)S^*,$$

where S^* is the adjoint of S .

Below we introduce more notations.

Notation 2.1. Let $i \in \mathbb{Z}$. We write $S^{(i)} = S^i$ if $i \in \mathbb{N}$ and $S^{(i)} = S^{*|i|}$ if $i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. According to this notation, the operator $S^{(i)}$ is the linear mapping on ℓ^2 satisfying

- (i) $S^{(i)}e_k = e_{k+i}$ if $k+i \geq 1$,
- (ii) $S^{(i)}e_k = 0$ if $k+i \leq 0$.

Let $i \in \mathbb{Z}$ and $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$. Then $\tau_i f$ denotes the sequence $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ satisfying

- (i) $\tau_i f(k) = f(k+i)$ if $k+i \geq 1$,
- (ii) $\tau_i f(k) = 0$ if $k+i \leq 0$.

We denote by $\partial_i f$ the sequence $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ given by the formula

$$\partial_i f(k) := \tau_i f(k) - f(k).$$

In particular $\partial_0 f = 0$ and $\partial_1 f(k) = \partial f(k) = f(k+1) - f(k)$ is the derivative introduced in Section 1. We observe that for any fixed $i \in \mathbb{Z}$,

$$\partial f(k) = O(k^\nu) \implies \partial_i f(k) = O(k^\nu). \quad (2.1)$$

Remark 2.2. The above notations allow us to write $S^{(i)}x = \tau_{-i}x$ and

$$f(\Lambda)S^{(i)} = S^{(i)}(\tau_i f)(\Lambda), \quad (2.2)$$

where $(\tau_i f)(\Lambda)$ is the shifted diagonal operator satisfying $(\tau_i f)(\Lambda)e_k = \tau_i f(k)e_k$.

Notation 2.3. If $\nu \in \mathbb{R}$ and $N \in \mathbb{N}$, then $S_1^\nu(N)$ denotes the set of all $p : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ such that $\partial^m p(k) = O(k^{\nu-m})$ holds for $m \in \{0, \dots, N\}$.

Lemma 2.4.

- (i) If $N \geq 1$, $i \in \mathbb{Z}$ and $p \in S_1^\nu(N)$ then $\partial_i p \in S_1^{\nu-1}(N-1)$.
- (ii) If $p \in S_1^\nu(N)$ and $q \in S_1^\eta(N)$ then $pq \in S_1^{\nu+\eta}(N)$.
- (iii) Assume that $p \in S_1^\nu(N)$ and there exists $c > 0$ such that $|p(k)| \geq ck^\nu$ for all $k \in \mathbb{N}^*$.

Then $1/p \in S_1^{-\nu}(N)$.

Proof. (i) It suffices to use (2.1) and the definition of $S_1^\nu(N)$.

(ii) We obtain

$$\partial^m(pq)(k) = O(k^{\nu+\eta-m})$$

by induction with respect to m using

$$\partial(fg) = f\partial g + g\partial f + \partial f\partial g.$$

(iii) We obtain

$$\partial^m(1/p)(k) = O(k^{-\nu-m})$$

by induction with respect to m using

$$\partial(1/p)(k) = -\frac{\partial p(k)}{p(k)p(k+1)}.$$

□

2.2. OPERATOR VALUED ERRORS

In this section we introduce notations used throughout the paper to control errors of large eigenvalues. As before, S denotes the shift operator in ℓ^2 , i.e. $Se_k = e_{k+1}$. If $\theta \geq 0$, then Λ^θ denotes the self-adjoint operator in ℓ^2 such that $\Lambda^\theta e_k = k^\theta e_k$ and $\mathcal{D}(\Lambda^\theta) = \ell^{2,\theta}$. If $\theta \leq 0$, then Λ^θ is the inverse of $\Lambda^{|\theta|}$. In order to deal with these operators, we introduce the subspace of fast decaying sequences

$$S^{-\infty} = \bigcap_{\theta > 0} \ell^{2,\theta} = \{x \in \ell^2 : x(k) = O(k^{-N}) \text{ for any } N \geq 0\}. \quad (2.3)$$

The space $S^{-\infty}$ defined by (2.3) will be assumed to be invariant for all operators considered further on and we use the fact that this type of operators form an algebra. Clearly $S^{-\infty}$ is invariant for the shifts S, S^* and for $f(\Lambda)$ if $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ is polynomially bounded.

We adopt the following convention: for a linear mapping $P : \mathcal{D}(P) \rightarrow \ell^2$ we write $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ if and only if the closure of P is a bounded operator $\ell^2 \rightarrow \ell^2$.

Let $\eta \in \mathbb{R}$. We introduce the notation

$$P = O(\Lambda^\eta) \iff \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \Lambda^\theta P \Lambda^{-\theta-\eta} \in \mathcal{B}(\ell^2). \quad (2.4)$$

Then (2.4) immediately ensures the properties

$$P = O(\Lambda^\eta) \implies S^{-\infty} \text{ is an invariant subspace of } P,$$

$$\begin{aligned}
f(k) = O(k^\eta) &\implies f(\Lambda) = O(\Lambda^\eta), \\
P = O(\Lambda^\eta), \quad Q = O(\Lambda^{\tilde{\eta}}) &\implies PQ = O(\Lambda^{\eta+\tilde{\eta}}).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

The notation $P = O(\Lambda^{-\infty})$ means that $P = O(\Lambda^{-\theta})$ holds for all $\theta \geq 0$ and the notation

$$P = Q + O(\Lambda^\eta)$$

means that $P - Q = O(\Lambda^\eta)$ and $S^{-\infty}$ is invariant for both operators P, Q .

2.3. FINITE DIFFERENCE OPERATORS.

Any complex matrix $(P(i, j))_{i, j=1}^\infty$ can be written in the form

$$\begin{pmatrix}
p_0(1) & p_{-1}(2) & p_{-2}(3) & p_{-3}(4) & \dots \\
p_1(1) & p_0(2) & p_{-1}(3) & p_{-2}(4) & \dots \\
p_2(1) & p_1(2) & p_0(3) & p_{-1}(4) & \dots \\
p_3(1) & p_2(2) & p_1(3) & p_0(4) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

where $(p_i(k))_{k=1}^\infty$ is a complex valued sequence (for any $i \in \mathbb{Z}$).

Definition 2.5. We say that P is a *band matrix* if and only if P has the form (2.6) and there is $i_0 \in \mathbb{N}$ such that $|i| > i_0$ implies $p_i(k) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}^*$.

Definition 2.6. We say that P is *off-diagonal* if and only if $p_0(k) = 0$ holds for all $k \in \mathbb{N}^*$. If P is given by (2.6), then $p_0(\Lambda)$ is called *the diagonal part of P* .

Lemma 2.7. We fix $\nu \in \mathbb{R}$ and $i_0 \in \mathbb{N}$. Assume that $p_i(k) = O(k^\nu)$ for all $i \in \mathbb{Z}$ and $|i| > i_0$ implies $p_i(k) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}^*$. Then the band matrix P given by (2.6) can be identified with the linear mapping acting on $S^{-\infty}$ according to the formula

$$(Px)(k) = \sum_{i=-i_0}^{\min\{i_0, k-1\}} p_i(k-i)x(k-i). \tag{2.7}$$

Moreover $P = O(\Lambda^\nu)$.

Proof. We observe that (2.7) can be written in the form

$$Px = \sum_{-i_0 \leq i \leq i_0} S^{(i)} p_i(\Lambda)x \text{ for } x \in S^{-\infty}. \tag{2.8}$$

The assumptions $p_i(k) = O(k^\nu)$ ensure $p_i(\Lambda) = O(\Lambda^\nu)$ and due to (2.5) it remains to show that $S = O(\Lambda^0)$ and $S^* = O(\Lambda^0)$. In order to show $\Lambda^\theta S \Lambda^{-\theta} \in \mathcal{B}(\ell^2)$ for any $\theta \in \mathbb{R}$, we use (2.2) to write $\Lambda^\theta S \Lambda^{-\theta} = S(\Lambda + 1)^\theta \Lambda^{-\theta}$ and observe that $(\Lambda + 1)^\theta \Lambda^{-\theta} \in \mathcal{B}(\ell^2)$. Taking the adjoint, we get $\Lambda^{-\theta} S^* \Lambda^\theta \in \mathcal{B}(\ell^2)$. \square

2.4. CLASS OF OPERATORS $\text{FDO}_1^\nu(N)$

Notation 2.8. If $\nu \in \mathbb{R}$ and $N \in \mathbb{N}$, then $\text{FDO}_1^\mu(N)$ denotes the set of all band matrices P given by (2.6), where $p_i \in \mathcal{S}_1^\nu(N)$ for all i . Further on the elements of $\text{FDO}_1^\nu(N)$ are always identified with linear mappings given by (2.8) where $p_i \in \mathcal{S}_1^\nu(N)$.

Lemma 2.9. *If $P \in \text{FDO}_1^\nu(N+1)$ and $Q \in \text{FDO}_1^\eta(N+1)$, then the commutator*

$$[P, Q] := PQ - QP \in \text{FDO}_1^{\nu+\eta-1}(N).$$

Proof. It suffices to prove the formula

$$B_{i,j} := [S^{(i)}p_i(\Lambda), S^{(j)}q_j(\Lambda)] = S^{(i+j)}(q_j\partial_j p_i - p_i\partial_i q_j)(\Lambda). \quad (2.9)$$

Indeed, if $p_i \in \mathcal{S}_1^\nu(N+1)$ and $q_j \in \mathcal{S}_1^\mu(N+1)$, then

$$b_{i,j} := q_j\partial_j p_i - p_i\partial_i q_j \in \mathcal{S}_1^{\nu+\mu-1}(N),$$

which ensures that the right-hand side of (2.9) belongs to $\text{FDO}_1^{\nu+\mu-1}(N)$.

In order to prove (2.9), we observe that (2.2) allows us to express

$$\begin{aligned} B_{i,j} &= S^{(i)}p_i(\Lambda)S^{(j)}q_j(\Lambda) - S^{(j)}q_j(\Lambda)S^{(i)}p_i(\Lambda) \\ &= S^{(i)}S^{(j)}(\tau_j p_i)(\Lambda)q_j(\Lambda) - S^{(j)}S^{(i)}(\tau_i q_j)(\Lambda)p_i(\Lambda). \end{aligned}$$

Since $b_{i,j} = q_j\tau_j p_i - p_i\tau_i q_j$, it remains to check the equalities

$$S^{(i)}S^{(j)}(\tau_j p_i)(\Lambda)q_j(\Lambda) = S^{(i+j)}(\tau_j p_i)(\Lambda)q_j(\Lambda), \quad (2.10)$$

$$S^{(j)}S^{(i)}(\tau_i q_j)(\Lambda)p_i(\Lambda) = S^{(i+j)}(\tau_i q_j)(\Lambda)p_i(\Lambda). \quad (2.11)$$

Case $j \geq 0$. In this case $S^{(i)}S^{(j)} = S^{(i+j)}$ holds for any $i \in \mathbb{Z}$.

Case $j < 0, i < 0$. In this case $S^{(i)}S^{(j)} = S^{(i+j)}$ holds as well.

Case $j < 0, i \geq 0$. In this case $S^{(i)}S^{(j)}e_k = S^{(i+j)}e_k$ holds if $k > -j$. Assume now that $k \leq -j$. Then $S^{(i)}S^{(j)}e_k = 0$ and $(\tau_j p_i)(\Lambda)e_k = \tau_j p_i(k)e_k = 0$, hence (2.10) holds. Similarly we check (2.11). \square

3. MAIN INGREDIENTS

3.1. CONSEQUENCES OF THE MIN-MAX PRINCIPLE

In this section we prove Proposition 3.2 which is the first fundamental tool of our approach. Its purpose is to detect perturbations which give small errors for large eigenvalues. The importance of Proposition 3.2 lies in the fact that it is used as the ingredient of our approach replacing Lemma 2.1 of J. Janas, S. Naboko [14].

We notice that Lemma 2.1 from [14] is used in [7, 15, 16, 22], but we prefer using Proposition 3.2 for several reasons. One of them is the fact that Lemma 2.1 from [14] needs the additional assumption $\mu \geq 1$ in the hypothesis (H1).

Notation 3.1. If L is a self-adjoint, bounded from below operator with compact resolvent in ℓ^2 , then $\lambda_1(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L) \leq \lambda_{n+1}(L) \leq \dots$ are eigenvalues of L , enumerated in non-decreasing order, counting multiplicities.

Proposition 3.2. We fix $\mu, \rho, \eta \in (0; \infty)$. Let $D = d(\Lambda)$ be the diagonal operator with d satisfying (H1). Let A be a symmetric operator such that $\mathcal{D}(A) \supset \ell^{2,\mu}$ and

$$A = O(\Lambda^{\mu-\rho}). \quad (3.1)$$

Let J be the operator defined by

$$J = D + A \quad (3.2)$$

and $\mathcal{D}(J) = \ell^{2,\mu}$. Then J is self-adjoint, bounded from below and has compact resolvent in ℓ^2 . If R is a symmetric operator such that $\mathcal{D}(R) \supset \ell^{2,\mu}$ and

$$R = O(\Lambda^{\mu-\eta}),$$

then the operator $J + R$ is self-adjoint in ℓ^2 on the domain $\mathcal{D}(J + R) = \ell^{2,\mu}$. Moreover, $J + R$ is a bounded from below operator with compact resolvent and one has

$$\lambda_n(J + R) = \lambda_n(J) + O(n^{\mu-\eta}). \quad (3.3)$$

Proof. Let $\tilde{C} > 0$ and denote $\tilde{D} := D + \tilde{C}I$. Assume that \tilde{C} is fixed large enough. Then (H1) ensures $C^{-1}\Lambda^\mu \leq \tilde{D} \leq C\Lambda^\mu$ with $C > 0$, hence \tilde{D}^{-1} is compact. Since A has zero relative bound with respect to \tilde{D} (due to (3.1)), the operator

$$\tilde{J} := J + \tilde{C}I = \tilde{D} + A$$

is self-adjoint, bounded from below, has compact resolvent and

$$(2C)^{-1}\Lambda^\mu \leq \tilde{J} \leq 2C\Lambda^\mu \quad (3.4)$$

holds if \tilde{C} is large enough. Since $\lambda_n(\tilde{J}) = \lambda_n(J) + \tilde{C}$ and $\lambda_n(\tilde{J} + R) = \lambda_n(J + R) + \tilde{C}$, it remains to prove

$$\lambda_n(\tilde{J} + R) = \lambda_n(\tilde{J}) + O(n^{\mu-\eta}). \quad (3.5)$$

Step 1. We prove that (3.5) holds if $\eta \leq 2\mu$.

Since $\lambda_n((2C)^{\pm 1}\Lambda^\mu) = (2C)^{\pm 1}n^\mu$, the min-max principle used in (3.4) gives

$$(2C)^{-1}n^\mu \leq \lambda_n(\tilde{J}) \leq 2Cn^\mu. \quad (3.6)$$

The well known result concerning the powers of positive operators ensures that

$$(2C)^{-|s|}\Lambda^{\mu s} \leq \tilde{J}^s \leq (2C)^{|s|}\Lambda^{\mu s} \quad (3.7)$$

follows from (3.4) if $-1 \leq s \leq 1$. Since $0 \leq \eta \leq 2\mu$, we can use (3.7) with $s = 1 - \eta/\mu$ ensuring existence of positive constants C_1, C_2 such that

$$\pm R \leq C_1\Lambda^{\mu-\eta} \leq C_2\tilde{J}^{1-\eta/\mu}. \quad (3.8)$$

Let $f_{\pm} : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be given by the formula $f_{\pm}(t) := t \pm C_2 t^{1-\eta/\mu}$. Then (3.8) ensures

$$f_{-}(\tilde{J}) \leq \tilde{J} + R \leq f_{+}(\tilde{J})$$

and the min-max principle ensures

$$\lambda_n(f_{-}(\tilde{J})) \leq \lambda_n(\tilde{J} + R) \leq \lambda_n(f_{+}(\tilde{J})). \quad (3.9)$$

Since f_{\pm} is increasing on $(t_0; \infty)$ if t_0 is fixed large enough, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$n \geq n_0 \implies \lambda_n(f_{\pm}(\tilde{J})) = f_{\pm}(\lambda_n(\tilde{J})). \quad (3.10)$$

Combining (3.9) and (3.10), we find that for $n \geq n_0$ one has

$$\lambda_n(\tilde{J}) - C_2 \lambda_n(\tilde{J})^{1-\eta/\mu} \leq \lambda_n(\tilde{J} + R) \leq \lambda_n(\tilde{J}) + C_2 \lambda_n(\tilde{J})^{1-\eta/\mu}. \quad (3.11)$$

Using (3.6), we conclude that (3.11) ensures

$$|\lambda_n(\tilde{J} + R) - \lambda_n(\tilde{J})| \leq C_2 \lambda_n(\tilde{J})^{1-\eta/\mu} = O(n^{\mu-\eta}).$$

Step 2. Let $k \in \mathbb{N}^*$. We claim that the assertion of Proposition 3.2 holds if $\eta \leq 2^k \mu$.

Indeed, the case $k = 1$ was proved in Step 1 and using induction with respect to $k \in \mathbb{N}^*$, we fix $k \in \mathbb{N}^*$ and assume that the assertion of Proposition 3.2 holds if $\eta \leq 2^k \mu$.

As before $\tilde{C} > 0$ is fixed large enough, $\tilde{D} = d(\Lambda) + \tilde{C}I$ and d satisfies (H1) for a given $\mu > 0$. Let $\tilde{J} = \tilde{D} + A$ where $A = O(\Lambda^{\mu-\rho})$ and $\rho > 0$. Then

$$\tilde{J}^2 = \tilde{D}^2 + A' \text{ holds with } A' = \tilde{D}A + A\tilde{D} + A^2 = O(\Lambda^{2\mu-\rho}),$$

i.e. $J' := \tilde{J}^2$ satisfies the hypotheses of Proposition 3.2 with $\mu' := 2\mu$ instead of μ . Assume now that $R = O(\Lambda^{\mu-\eta})$ and $0 < \eta \leq 2^{k+1}\mu = 2^k \mu'$. Then

$$(\tilde{J} + R)^2 = \tilde{J}^2 + R' \text{ holds with } R' = \tilde{J}R + R\tilde{J} + R^2 = O(\Lambda^{2\mu-\eta})$$

and by using Proposition 3.2 with $J' := \tilde{J}^2$, $\mu' := 2\mu$ instead of J , μ , we obtain

$$\lambda_n((\tilde{J} + R)^2) = \lambda_n(\tilde{J}^2) + O(n^{2\mu-\eta}). \quad (3.12)$$

Let \tilde{C} be large enough to ensure $\tilde{J} + R \geq 0$. Then (3.12) implies

$$\lambda_n(\tilde{J} + R)^2 = \lambda_n(\tilde{J})^2 + O(n^{2\mu-\eta}) = \lambda_n(\tilde{J})^2(1 + O(n^{-\eta})),$$

where the last estimate follows from (3.6). Thus

$$\lambda_n(\tilde{J} + R) = \lambda_n(\tilde{J})(1 + O(n^{-\eta}))^{1/2} = \lambda_n(\tilde{J})(1 + O(n^{-\eta}))$$

and using (3.6) in the last estimate, we deduce that (3.5) holds with $\eta \leq 2^{k+1}\mu$. \square

Corollary 3.3. *Let $\mu > 0$ and $\rho > 0$. Assume that (H1) and (H3) hold and there exists k_0 such that $d(k+1) \geq d(k)$ for $k \geq k_0$. If the operator J is given by (1.2), then*

$$\lambda_n(J) = d(n) + O(n^{\mu-\rho}).$$

Proof. Denote $D = d(\Lambda)$ and $R = Sa(\Lambda) + \bar{a}(\Lambda)S^*$. Since (H3) ensures $R = O(\Lambda^{\mu-\rho})$, we can write (3.3) with D instead of J and find $\lambda_n(D + R) = \lambda_n(D) + O(n^{\mu-\rho})$. To complete the proof, we observe that $\lambda_n(d(\Lambda)) = d(n)$ for $n \geq n_0$. \square

3.2. SPECIAL SELF-ADJOINT OPERATORS

Lemma 3.4. *Let P be a symmetric operator on $S^{-\infty}$ given by the formula*

$$Px = \sum_{1 \leq i \leq i_0} (S^i p_i(\Lambda) + \overline{p_i}(\Lambda) S^{(-i)})x \text{ for } x \in S^{-\infty}. \quad (3.13)$$

If $p_i(k) = O(k)$ for $i = 1, \dots, i_0$, then P is essentially self-adjoint on $S^{-\infty}$.

Proof. Let $\theta \geq 0$. Then $[iP, \Lambda^{2\theta}]$ is symmetric on $S^{-\infty}$ and we claim that

$$[iP, \Lambda^{2\theta}] = O(\Lambda^{2\theta}). \quad (3.14)$$

Indeed, if $f_\theta(k) = k^{2\theta}$, then $\partial_i f_\theta(k) = O(k^{2\theta-1})$, hence (2.2) ensures

$$[P, \Lambda^{2\theta}] = \sum_{1 \leq i \leq i_0} (S^i (p_i \partial_i f_\theta)(\Lambda) + \text{hc}) \text{ with } (p_i \partial_i f_\theta)(k) = O(k^{2\theta}).$$

By (3.14) we can find a constant $C_\theta > 0$ such that

$$\pm \langle y, \Lambda^{-\theta} [iP, \Lambda^{2\theta}] \Lambda^{-\theta} y \rangle \leq C_\theta \|y\|^2 \text{ for } y \in \ell^2.$$

Writing $y = \Lambda^\theta x$, we get

$$\pm \langle x, [iP, \Lambda^{2\theta}] x \rangle \leq C_\theta \|\Lambda^\theta x\|^2 \text{ for } x \in \ell^{2,\theta}. \quad (3.15)$$

Using (3.15) with $\theta = 1/2$ and the fact that

$$\|Px\| \leq C \|\Lambda x\| \text{ for } x \in S^{-\infty}, \quad (3.16)$$

we deduce the assertion by Nelson's Commutator Theorem. Indeed, the properties (3.16) and (3.15) with $\theta = \frac{1}{2}$ allow us to apply Corollary 1.1 in [12] (using P , Λ and $S^{-\infty}$ instead of H , N and \mathcal{C} in [12]). \square

Notation 3.5. If $P \in \text{FDO}'_1(N)$ is given by (2.8), then the adjoint matrix $(P^\dagger(i, j))_{i, j=1}^\infty = (\overline{P(j, i)})_{i, j=1}^\infty$ satisfies

$$P^\dagger x = \sum_{-i_0 \leq i \leq i_0} \overline{p_i}(\Lambda) S^{(-i)} x = \sum_{-i_0 \leq i \leq i_0} S^{(-i)} (\tau_{-i} \overline{p_i})(\Lambda) x \text{ for } x \in S^{-\infty}$$

and it is clear that $P^\dagger \in \text{FDO}'_1(N)$. We will use the notation

$$P + \text{hc} := P + P^\dagger.$$

If moreover $p_i(k) = O(k)$ for $i = 1, \dots, i_0$, then

$$P = \sum_{1 \leq i \leq i_0} (S^i p_i(\Lambda) + \text{hc}) \quad (3.17)$$

will always denote the self-adjoint operator satisfying (3.13).

Proposition 3.6. *Assume that $p_i(k) = O(k)$ for $i = 1, \dots, i_0$ and P is the self-adjoint operator given by (3.17). If $\theta \geq 0$ then $\ell^{2,\theta}$ is an invariant subspace of e^{itP} for any $t \in \mathbb{R}$. Moreover there is a constant C_θ such that*

$$\|\Lambda^\theta e^{itP} x\| \leq e^{C_\theta |t|} \|\Lambda^\theta x\| \quad (3.18)$$

holds for all $x \in S^{-\infty}$ and $t \in \mathbb{R}$.

Proof. Let $\mathcal{D}(P)$ denote the domain of the self-adjoint operator P equipped with its graph norm. Let $\varepsilon > 0$ and denote

$$\Lambda_\varepsilon^{(\theta)} := \Lambda^{2\theta} (\varepsilon \Lambda^{2\theta} + I)^{-1} = \varepsilon^{-1} I - \varepsilon^{-1} (\varepsilon \Lambda^{2\theta} + I)^{-1}$$

and we define the quadratic form

$$q_\varepsilon^{(\theta)}(x) = \langle iPx, \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x \rangle + \langle \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x, iPx \rangle \text{ for } x \in \mathcal{D}(P).$$

We claim that there is a constant $C_\theta > 0$ such that

$$\pm q_\varepsilon^{(\theta)}(x) \leq C_\theta \|\Lambda^\theta (\varepsilon \Lambda^{2\theta} + I)^{-1/2} x\|^2 = C_\theta \langle x, \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x \rangle \quad (3.19)$$

holds for all $x \in \mathcal{D}(P)$. Indeed, if $x \in S^{-\infty}$ then we compute

$$q_\varepsilon^{(\theta)}(x) = \langle x, [\Lambda_\varepsilon^{(\theta)}, iP]x \rangle = \langle (\varepsilon \Lambda^{2\theta} + I)^{-1} x, [iP, \Lambda^{2\theta}] (\varepsilon \Lambda^{2\theta} + I)^{-1} x \rangle$$

and by using $(\varepsilon \Lambda^{2\theta} + I)^{-1} x$ instead of x in (3.15), we find that (3.19) holds for $x \in S^{-\infty}$. Since $S^{-\infty}$ is dense in $\mathcal{D}(P)$, the estimate (3.19) holds for $x \in \mathcal{D}(P)$ as well.

Let $x \in \mathcal{D}(P)$ and denote $x_t := e^{itP} x$ for $t \in \mathbb{R}$. By using $\frac{d}{dt} \langle x_t, \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x_t \rangle = q_\varepsilon^{(\theta)}(x_t)$ and (3.19), we obtain

$$\pm \frac{d}{dt} \langle x_t, \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x_t \rangle \leq C_\theta \langle x_t, \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x_t \rangle$$

and Gronwall's inequality ensures

$$\langle x_t, \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x_t \rangle \leq e^{C_\theta |t|} \langle x, \Lambda_\varepsilon^{(\theta)} x \rangle. \quad (3.20)$$

If $x \in S^{-\infty}$, then the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ in (3.20) gives $x_t \in \ell^{2,\theta}$ and (3.18) holds. Since $S^{-\infty}$ is dense in $\ell^{2,\theta}$, we still have (3.18) for all $x \in \ell^{2,\theta}$ and $x_t \in \ell^{2,\theta}$ if $x \in \ell^{2,\theta}$. \square

Corollary 3.7. *Let P be as in Lemma 3.4. Then*

- (i) $S^{-\infty}$ is an invariant subspace of e^{itP} for any $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) $t \rightarrow e^{itP} x$ is a smooth function $\mathbb{R} \rightarrow \ell^{2,\theta}$ for any $\theta \geq 0$ if $x \in S^{-\infty}$.

Proof. (ii) Let $x \in S^{-\infty}$, $\varepsilon \geq 0$ and denote

$$x_t^{\varepsilon,\theta} := \Lambda^\theta (\varepsilon \Lambda^{2\theta} + I)^{-1} e^{itP} x.$$

It is clear that $t \rightarrow x_t^{\varepsilon,\theta}$ is smooth $\mathbb{R} \rightarrow \ell^2$ if $\varepsilon > 0$. Let us fix $N \in \mathbb{N}^*$ and $t_0 > 0$. Then the family $(x_t^{\varepsilon,\theta})_{0 < \varepsilon \leq 1}$ is bounded in $C^N([-t_0, t_0]; \ell^2)$ due to (3.18), hence using the Ascoli Theorem we can find a sequence $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ which converges to 0 and $(x_t^{\varepsilon_n,\theta})_{n=0}^\infty$ is convergent in $C^{N-1}([-t_0, t_0]; \ell^2)$. We conclude that the pointwise limit $t \rightarrow \Lambda^\theta e^{itP} x$ is a function belonging to $C^{N-1}([-t_0, t_0]; \ell^2)$. \square

3.3. APPLICATION OF THE TAYLOR FORMULA

Let P be the operator satisfying the assumptions of Lemma 3.4 and assume $Q = O(\Lambda^\mu)$. We will denote

$$F_{tP}(Q) := e^{-itP} Q e^{itP} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

Let $x \in S^{-\infty}$ and $\eta \in \mathbb{R}$. Then the function $t \rightarrow \Lambda^\eta F_{tP}(Q)x$ is smooth $\mathbb{R} \rightarrow \ell^2$ due to Corollary 3.7. Denoting

$$\text{ad}_{iP}^1 Q = \text{ad}_{iP} Q := [Q, iP] \quad \text{and} \quad \text{ad}_{iP}^{m+1} Q = [\text{ad}_{iP}^m Q, iP],$$

we can express the m -th derivative with respect to $t \in \mathbb{R}$ in the form

$$\frac{d^m}{dt^m} F_{tP}(Q)x = F_{tP}(\text{ad}_{iP}^m Q)x \quad \text{for } x \in S^{-\infty}$$

and by using the Taylor formula in $t = 1$, we obtain on $S^{-\infty}$ the equality

$$e^{-iP} Q e^{iP} = Q + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m!} \text{ad}_{iP}^m Q + R_N(\text{ad}_{iP}^N Q), \quad (3.21)$$

where

$$R_N(T) := \frac{1}{(N-1)!} \int_0^1 e^{-itP} T e^{itP} (1-t)^{N-1} dt.$$

It is clear that Proposition 3.6 ensures

$$T = O(\Lambda^\nu) \implies R_N(T) = O(\Lambda^\nu). \quad (3.22)$$

4. ASYMPTOTIC FORMULA WITH ONE CORRECTION TERM FOR BAND MATRICES

4.1. STATEMENT OF THE RESULT

In this section we will prove the following result.

Theorem 4.1. *Let $\mu > 0$ and $\rho > 0$ be fixed. Assume that $d \in S_1^\mu(2)$ satisfies (H1) and (H2). Assume that $a_i \in S_1^{\mu-\rho}(1)$ for $i = 1, \dots, i_0$, and define the operator*

$$A = d(\Lambda) + \sum_{1 \leq i \leq i_0} (S^i a_i(\Lambda) + \text{hc}) \quad (4.1)$$

on the domain $\mathcal{D}(A) = \ell^{2,\mu}$. Then A is a self-adjoint and bounded from below operator with compact resolvent in ℓ^2 . Moreover,

(i) the eigenvalue sequence of A satisfies

$$\lambda_n(A) = d(n) + O(n^{\mu-2\rho}),$$

(ii) if $d \in S_1^\mu(3)$ and $a_i \in S_1^{\mu-\rho}(2)$ for $i = 1, \dots, i_0$, then

$$\lambda_n(A) = d(n) + \mathfrak{r}_1(n) + O(n^{\mu-3\rho})$$

holds with

$$\mathfrak{r}_1(n) := \sum_{i=1}^{i_0} \left(\frac{|a_i(n-i)|^2}{d(n) - d(n-i)} - \frac{|a_i(n)|^2}{d(n+i) - d(n)} \right). \quad (4.2)$$

4.2. SOLUTION OF AN AUXILIARY MATRIX EQUATION

We observe that the assumptions (H1) and (H2) concern the sequence $(d(k))_{k=k_0}^\infty$, where $k_0 \in \mathbb{N}$ is fixed. Since any modification of $\{d(k) : k < k_0\}$ can be viewed as a perturbation R satisfying $R = O(\Lambda^{-\infty})$, the corresponding error of the n -th eigenvalue is $O(n^{-\infty})$ due to Proposition 3.2. Neglecting such errors we may assume that (H2) holds with $k_0 = 1$, i.e.

$$\exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}^* \quad d(k+1) - d(k) \geq ck^{\mu-1}. \quad (4.3)$$

Lemma 4.2. Let $\mu > 0$, $\rho > 0$ and consider a symmetric operator on $S^{-\infty}$ given by

$$A^0 = \sum_{1 \leq i \leq i_0} (S^i a_i(\Lambda) + \text{hc}). \quad (4.4)$$

Assume that $a_i(k) = O(k^{\mu-\rho})$ for $i = 1, \dots, i_0$, $(d(k))_{k=1}^\infty$ satisfies (4.3) and denote

$$p_i(k) = i \frac{a_i(k)}{d(k+i) - d(k)} = i \frac{a_i(k)}{\partial_i d(k)}. \quad (4.5)$$

(i) If P is expressed by (3.13) with p_i given by (4.5), then

$$[D, iP] + A^0 = 0. \quad (4.6)$$

(ii) If $d \in S_1^\mu(N+1)$ and $a_i \in S_1^{\mu-\rho}(N)$, then $p_i \in S_1^{1-\rho}(N)$.

Proof. (i) By (2.2), we have

$$[D, iP] = \sum_{1 \leq i \leq i_0} \left([d(\Lambda), iS^i p_i(\Lambda)] + \text{hc} \right) = \sum_{1 \leq i \leq i_0} \left(S^i \partial_i d(\Lambda) i p_i(\Lambda) + \text{hc} \right)$$

and (4.6) holds if and only if $\partial_i d(k) i p_i(k) + a_i(k) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) It suffices to use Lemma 2.4. □

4.3. PROOF OF THEOREM 4.1(i)

Step 1. Let A be given by (4.1). Then

$$A = D + A^0$$

holds with $D = d(\Lambda)$ and A^0 given by (4.4). Let $P \in \text{FDO}_1^{1-\rho}(1)$ be as in Section 4.2. According to Section 3.2 the operator P is self-adjoint and we claim that

$$e^{-iP} A^0 e^{iP} = A^0 + O(\Lambda^{\mu-2\rho}). \quad (4.7)$$

Indeed, $A^0 \in \text{FDO}_1^{\mu-\rho}(1)$ and $P \in \text{FDO}_1^{1-\rho}(1)$ ensure $[A^0, P] \in \text{FDO}_1^{\mu-2\rho}(0)$ due to Lemma 2.9, hence $[A^0, P] = O(\Lambda^{\mu-2\rho})$ and the Taylor formula gives

$$e^{-iP} A^0 e^{iP} = A^0 + R_1([A^0, iP]),$$

where $R_1([A^0, iP]) = O(\Lambda^{\mu-2\rho})$ follows from $[A^0, iP] = O(\Lambda^{\mu-2\rho})$ due to (3.22).

Step 2. We claim that

$$e^{-iP} D e^{iP} = D - A^0 + O(\Lambda^{\mu-2\rho}). \quad (4.8)$$

Indeed, by using $[D, iP] = -A^0$ in the Taylor formula

$$e^{-iP} D e^{iP} = D + [D, iP] + R_2([D, iP], iP),$$

we obtain

$$e^{-iP} D e^{iP} = D - A^0 - R_2([A^0, iP])$$

and $R_2([A^0, iP]) = O(\Lambda^{\mu-2\rho})$ follows from $[A^0, iP] = O(\Lambda^{\mu-2\rho})$ due to (3.22).

Step 3. Denote $\widehat{A} := e^{-iP} A e^{iP}$. Summing up (4.7) and (4.8), we obtain

$$\widehat{A} = e^{-iP} (D + A^0) e^{iP} = D + O(\Lambda^{\mu-2\rho}). \quad (4.9)$$

Using (4.9) and Proposition 3.2, we obtain

$$\lambda_n(A) = \lambda_n(\widehat{A}) = \lambda_n(D) + O(n^{\mu-2\rho}) = d(n) + O(n^{\mu-2\rho}).$$

4.4. PROOF OF THEOREM 4.1(ii)

Step 1. As before we write $A = D + A^0$ and P is defined as in Section 4.2. Then

$$A^0 \in \text{FDO}_1^{\mu-\rho}(2), \quad P \in \text{FDO}_1^{1-\rho}(2) \quad \Rightarrow \quad [A^0, P] \in \text{FDO}_1^{\mu-2\rho}(1)$$

follows from Lemma 2.9 and we claim that the diagonal part of $[A^0, iP]$ satisfies

$$[A^0, iP](k, k) = 2\mathfrak{r}_1(k),$$

where $\mathfrak{r}_1(k)$ is given by (4.2). Indeed, for $i = 1, \dots, i_0$, we have

$$[S^i a_i(\Lambda), i\bar{p}_i(\Lambda)(S^i)^*] = S^i (i a_i \bar{p}_i)(\Lambda) (S^i)^* - (i a_i \bar{p}_i)(\Lambda) = \partial_{-i} (i a_i \bar{p}_i)(\Lambda)$$

and the diagonal part of $[A^0, iP]$ equals

$$\sum_{1 \leq i \leq i_0} \left([S^i a_i(\Lambda), i\bar{p}_i(\Lambda)(S^i)^*] + \text{hc} \right) = \sum_{1 \leq i \leq i_0} q_i(\Lambda),$$

where $q_i(\Lambda) = \partial_{-i}(ia_i\bar{p}_i)(\Lambda) + \text{hc}$, i.e.

$$q_i = 2\text{Re}\partial_{-i}(ia_i\bar{p}_i) = -2\partial_{-i}\text{Im}(a_i\bar{p}_i)$$

and

$$[A^0, iP](k, k) = \sum_{1 \leq i \leq i_0} q_i(k) = \sum_{1 \leq i \leq i_0} 2\partial_{-i} \left(\frac{|a_i(k)|^2}{\partial_i d(k)} \right) = 2\mathbf{r}_1(k).$$

Step 2. We claim that

$$e^{-iP} A^0 e^{iP} = A^0 + [A^0, iP] + O(\Lambda^{\mu-3\rho}). \quad (4.10)$$

Indeed, Lemma 2.9 ensures

$$[A^0, iP] \in \text{FDO}_1^{\mu-2\rho}(1), \quad P \in \text{FDO}_1^{1-\rho}(2) \implies \text{ad}_{iP}^2 A^0 \in \text{FDO}_1^{\mu-3\rho}(0),$$

hence $\text{ad}_{iP}^2 A^0 = O(\Lambda^{\mu-3\rho})$ and the Taylor formula gives

$$e^{-iP} A^0 e^{iP} = A^0 + [A^0, iP] + R_2(\text{ad}_{iP}^2 A^0),$$

where $R_2(\text{ad}_{iP}^2 A^0) = O(\Lambda^{\mu-3\rho})$ follows from $\text{ad}_{iP}^2 A^0 = O(\Lambda^{\mu-3\rho})$ and (3.22).

Step 3. We claim that

$$e^{-iP} D e^{iP} = D - A^0 - \frac{1}{2}[A^0, iP] + O(\Lambda^{\mu-3\rho}). \quad (4.11)$$

Indeed, it suffices to use $[D, iP] = -A^0$ in the Taylor formula

$$e^{-iP} D e^{iP} = D + [D, iP] + \frac{1}{2}[[D, iP], iP] + R_3(\text{ad}_{iP}^3 D)$$

and $R_3(\text{ad}_{iP}^3 D) = O(\Lambda^{\mu-3\rho})$ follows from $\text{ad}_{iP}^3 D = -\text{ad}_{iP}^2 A^0 = O(\Lambda^{\mu-3\rho})$.

Step 4. Denote $\widehat{A} := e^{-iP} A e^{iP}$. Summing up (4.10) and (4.11), we obtain

$$\widehat{A} = e^{-iP} (D + A^0) e^{iP} = D + \frac{1}{2}[A^0, iP] + O(\Lambda^{\mu-3\rho}) \quad (4.12)$$

and Proposition 3.2 ensures

$$\lambda_n(A) = \lambda_n(\widehat{A}) = \lambda_n(A_1) + O(n^{\mu-3\rho}), \quad (4.13)$$

where we denoted

$$A_1 := D + \frac{1}{2}[A^0, iP].$$

Let

$$d_1(k) := d(k) + \frac{1}{2}[A^0, iP](k, k) = d(k) + \mathbf{r}_1(k).$$

Then $D_1 = d_1(\Lambda)$ is the diagonal part of A_1 and we can write

$$A_1 = d_1(\Lambda) + A_1^0,$$

where $A_1^0 \in \widehat{\text{FDO}}_1^{\mu-2\rho}(1)$ is off-diagonal. Thus Theorem 4.1(i) can be applied to A_1 with $d_1(k) = d(k) + \mathbf{r}_1(k)$ instead of $d(k)$ and 2ρ instead of ρ . We obtain

$$\lambda_n(A_1) = d_1(n) + O(n^{\mu-4\rho}),$$

which completes the proof due to (4.13).

5. A METHOD OF APPROXIMATIVE DIAGONALIZATION

5.1. INTRODUCTION

In this section J satisfies (H1)–(H3) and assuming (1.7)–(1.8), we describe a special sequence of operators $(J_N^{(l)})_{l=0}^\infty$ such that $J_N^{(l)}$ is self-adjoint in ℓ^2 on the domain $\mathcal{D}(J_N^{(l)}) = \ell^{2,\mu}$ for any $l, N \in \mathbb{N}$. Moreover $J_N^{(l)}$ is a bounded from below operator with compact resolvent and the eigenvalue sequence $(\lambda_n(J_N^{(l)}))_{n=1}^\infty$ satisfies

$$\lambda_n(J) = \lambda_n(J_N^{(l)}) + O(n^{\mu-\rho N}). \quad (5.1)$$

Besides (5.1), the operators $(J_N^{(l)})_{l=0}^\infty$ have a special structure of band matrices (see (5.3), (5.4)) and in Section 5.2 we describe its construction. Using $(J_N^{(l)})_{l=0}^\infty$ and suitable classes of operators defined in Section 5.3, we complete the proof of Theorem 1.1 in Section 5.4.

Notation 5.1. If $\nu \in \mathbb{R}$ then FDO_1^ν denotes the set of all linear operators on $S^{-\infty}$ of the form

$$P = \sum_{-i_0 \leq i \leq i_0} S^{(i)} p_i(\Lambda) \quad \text{with } p_i \in S_1^\nu \\ \text{for } i \in [-i_0, i_0] \cap \mathbb{Z}.$$

Clearly Lemma 2.4 holds with S_1^ν instead of $S_1^\nu(N)$ and the proof of Lemma 2.9 ensures

$$P \in \text{FDO}_1^\nu, \quad Q \in \text{FDO}_1^\eta \implies [P, Q] \in \text{FDO}_1^{\nu+\eta-1}. \quad (5.2)$$

The structure of $(J_N^{(l)})_{l=0}^\infty$ is the following. We write $\rho_l := 2^l \rho$ and construct $J_N^{(l)}$ such that $J_N^{(0)} = J$ and

$$J_N^{(l)} = d_N^{(l)}(\Lambda) + A_N^{(l)} \quad \text{with } A_N^{(l)} \in \text{FDO}_1^{\mu-\rho_l}, \quad (5.3)$$

where $A_N^{(l)}$ is off-diagonal and

$$d_N^{(l)}(k) = d(k) + \sum_{1 \leq m \leq l} \mathfrak{r}_{m,N}(k) \quad \text{with } \mathfrak{r}_{m,N} \in S_1^{\mu-\rho_m}. \quad (5.4)$$

Remark 5.2. Since (5.4) ensures $d_N^{(l)} - d \in S_1^{\mu-2\rho}$, (H1) and (H2) ensure

$$d_N^{(l)}(k) \geq \frac{1}{2}ck^\mu \quad \text{for } k \geq k_N^{(l)}, \quad (5.5)$$

$$\partial d_N^{(l)}(k) \geq \frac{1}{2}ck^{\mu-1} \quad \text{for } k \geq k_N^{(l)}, \quad (5.6)$$

where $k_N^{(l)} \in \mathbb{N}^*$ is fixed large enough.

Remark 5.3. It is clear that (5.3) implies

$$J_N^{(l)} = d_N^{(l)}(\Lambda) + O(\Lambda^{\mu-\rho_l}). \quad (5.7)$$

Thus the operator $J_N^{(l)}$ has the domain $\ell^{2,\mu}$ and is a bounded from below self-adjoint operator with compact resolvent in ℓ^2 due to (5.4)–(5.5).

Remark 5.4. The estimate (5.1) ensures

$$\lambda_n(J) = d_N^{(l)}(n) + O(n^{\mu-N\rho}) \text{ if } l \geq \log_2 N. \quad (5.8)$$

Indeed, using (5.7) and Proposition 3.2, we obtain

$$\lambda_n(J_N^{(l)}) = \lambda_n(d_N^{(l)}(\Lambda)) + O(n^{\mu-\rho_l}). \quad (5.9)$$

Combining (5.9), (5.1) with $\rho_l = 2^l \rho \geq N\rho$, we obtain

$$\lambda_n(J) = \lambda_n(d_N^{(l)}(\Lambda)) + O(n^{\mu-N\rho}) \text{ if } l \geq \log_2 N. \quad (5.10)$$

To deduce (5.8) from (5.10), we observe that due to (5.5) and (5.6) we can find $n_N^{(l)} \in \mathbb{N}^*$ large enough to ensure $\lambda_n(d_N^{(l)}(\Lambda)) = d_N^{(l)}(n)$ for $n \geq n_N^{(l)}$.

5.2. CONSTRUCTION OF THE SEQUENCE $(J_N^{(l)})_{l=0}^\infty$

We fix N and skip this index writing $J^{(l)}$ instead of $J_N^{(l)}$. If $l = 0$, then $J^{(0)} = J$ and (5.3) takes the form

$$J^{(0)} = d(\Lambda) + A^{(0)} \text{ with } A^{(0)} = Sa(\Lambda) + \text{hc},$$

i.e. $A^{(0)} \in \text{FDO}_1^{\mu-\rho_0}$ holds with $\rho_0 = \rho$.

Next we fix $l \in \mathbb{N}$ and make the induction hypothesis that $J^{(l)}$ has the properties given in Section 5.1. Our purpose is to construct $J^{(l+1)}$ having analogical properties for $l+1$ instead of l . At the beginning we assume that $A^{(l)} \in \text{FDO}_1^{\mu-\rho_l}$ is off-diagonal, i.e.

$$A^{(l)} = \sum_{1 \leq i \leq i_l} (S^i a_i^{(l)}(\Lambda) + \text{hc}) \text{ with } a_i^{(l)} \in S_1^{\mu-\rho_l}.$$

Let $k^{(l)} \in \mathbb{N}^*$ be fixed large enough. Then $\partial d^{(l)}(k) \geq \frac{1}{2}ck^{\mu-1}$ holds for $k \geq k^{(l)}$ (see (5.6)), hence we can define $p_i^{(l)} \in S_1^{1-\rho_l}$ by the formula

$$p_i^{(l)}(k) = i \frac{a_i^{(l)}(k)}{d^{(l)}(k+i) - d^{(l)}(k)} \text{ for } k \geq k^{(l)}$$

and $p_i^{(l)}(k) = 0$ if $k < k^{(l)}$. Similarly as in Section 4.2 we find that the operator

$$P^{(l)} = \sum_{1 \leq i \leq i_l} (S^i p_i^{(l)}(\Lambda) + \text{hc})$$

satisfies

$$[d^{(l)}(\Lambda), iP^{(l)}] + A^{(l)} = O(\Lambda^{-\infty}). \quad (5.11)$$

We observe that (5.2) ensures

$$P^{(l)} \in \text{FDO}_1^{1-\rho_l}, \quad A^{(l)} \in \text{FDO}_1^{\mu-\rho_l} \implies [P^{(l)}, A^{(l)}] \in \text{FDO}_1^{\mu-2\rho_l}$$

and it is easy to see that using induction, we obtain

$$\text{ad}_{iP^{(l)}}^{m-1} A^{(l)} \in \text{FDO}_1^{\mu-m\rho_l} \text{ holds for } m \geq 2. \quad (5.12)$$

Next we choose $m_l \in \mathbb{N}^*$ large enough and write the Taylor formula

$$e^{-iP^{(l)}} D^{(l)} e^{iP^{(l)}} = D^{(l)} + \sum_{m=1}^{m_l-1} \frac{1}{m!} \text{ad}_{iP^{(l)}}^m D^{(l)} + R_{m_l}(\text{ad}_{iP^{(l)}}^{m_l} D^{(l)}), \quad (5.13)$$

where $D^{(l)} := d^{(l)}(\Lambda)$. Since $\text{ad}_{iP^{(l)}}^m D^{(l)} = -\text{ad}_{iP^{(l)}}^{m-1} A^{(l)} + O(\Lambda^{-\infty})$ holds due to (5.11), we can rewrite (5.13) in the form

$$e^{-iP^{(l)}} D^{(l)} e^{iP^{(l)}} = D^{(l)} - A^{(l)} - \sum_{m=2}^{m_l-2} \frac{1}{m!} \text{ad}_{iP^{(l)}}^{m-1} A^{(l)} + O(\Lambda^{\mu-\rho_l m_l}), \quad (5.14)$$

where the estimate of last term follows from $\text{ad}_{iP^{(l)}}^{m_l-1} A^{(l)} = O(\Lambda^{\mu-\rho_l m_l})$ and (3.22). Writing $m-1$ instead of m in the Taylor's formula (3.21), we get

$$e^{-iP^{(l)}} A^{(l)} e^{iP^{(l)}} = A^{(l)} + \sum_{m=2}^{m_l-2} \frac{1}{(m-1)!} \text{ad}_{iP^{(l)}}^{m-1} A^{(l)} + O(\Lambda^{\mu-\rho_l m_l}). \quad (5.15)$$

Combining (5.15) with (5.14), we obtain

$$e^{-iP^{(l)}} (D^{(l)} + A^{(l)}) e^{iP^{(l)}} = D^{(l)} + \tilde{A}^{(l)} + O(\Lambda^{\mu-\rho_l m_l}), \quad (5.16)$$

where

$$\tilde{A}^{(l)} := \sum_{m=2}^{m_l-2} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \frac{1}{m!} \right) \text{ad}_{iP^{(l)}}^{m-1} A^{(l)} \in \text{FDO}_1^{\mu-2\rho_l}. \quad (5.17)$$

Let us denote

$$J^{(l+1)} := D^{(l)} + \tilde{A}^{(l)}. \quad (5.18)$$

Using (5.18) and $J^{(l)} = D^{(l)} + A^{(l)}$, we find that (5.16) gives

$$e^{-iP^{(l)}} J^{(l)} e^{iP^{(l)}} = J^{(l+1)} + O(\Lambda^{\mu-m_l \rho_l}). \quad (5.19)$$

Applying Proposition 3.2, we find that (5.19) ensures

$$\lambda_n(J^{(l)}) = \lambda_n(e^{-iP^{(l)}} J^{(l)} e^{iP^{(l)}}) = \lambda_n(J^{(l+1)}) + O(n^{\mu-m_l \rho_l}). \quad (5.20)$$

Let $A^{(l+1)}$ be the off-diagonal part of $\tilde{A}^{(l)}$ and let $\mathfrak{r}_{l+1}(\Lambda)$ be its diagonal part. Then

$$\tilde{A}^{(l)} = \mathfrak{r}_{l+1}(\Lambda) + A^{(l+1)},$$

Asymptotic expansion of large eigenvalues for a class of unbounded Jacobi matrices 261

where $A^{(l+1)} \in \text{FDO}_1^{\mu-\rho_{l+1}}$, $\mathbf{r}_{l+1} \in \mathbb{S}_1^{\mu-\rho_{l+1}}$ due to (5.17) and $\rho_{l+1} = 2\rho_l$. Thus setting

$$d^{(l+1)} := d^{(l)} + \mathbf{r}_{l+1}$$

we find

$$J^{(l+1)} = d^{(l)}(\Lambda) + \mathbf{r}_{l+1}(\Lambda) + A^{(l+1)} = d^{(l+1)}(\Lambda) + A^{(l+1)},$$

i.e. (5.3), (5.4) hold with $l+1$ instead of l . Finally (5.1) and (5.20) ensure

$$\lambda_n(J) = \lambda_n(J^{(l+1)}) + O(n^{\mu-m_l\rho_l}) + O(n^{\mu-N\rho}),$$

hence (5.1) holds with $l+1$ instead of l if $m_l\rho_l \geq N\rho$, i.e. if we choose $m_l \geq 2^{-l}N$.

5.3. AUXILIARY CLASSES OF SYMBOLS AND OPERATORS

Notation 5.5. If $\nu \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, then $\mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\nu$ denotes the set of $p : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$p(k) \sim \sum_{i,j=0}^{\infty} \gamma_{i,j} k^{\nu-2\rho j-i} \quad (5.21)$$

holds for a certain complex valued sequence $(\gamma_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$. The formula (5.21) means that

$$p(k) = \sum_{i,j=0}^{N-1} \gamma_{i,j} k^{\nu-2\rho j-i} + O(k^{\nu-N \min\{2\rho,1\}})$$

holds for any $N \in \mathbb{N}^*$. One checks easily the following properties

$$\mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu-2k\rho-m} \subset \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\nu \text{ if } k, m \in \mathbb{N}, \quad (5.22)$$

$$p \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\nu \implies \tau_i p \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\nu, \quad \partial_i p \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu-1},$$

$$p \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\nu, \quad q \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\eta \implies pq \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu+\eta}.$$

If there exists $c > 0$ such that $|p(k)| \geq ck^\nu$ for all $k \in \mathbb{N}^*$, then

$$p \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\nu \implies 1/p \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{-\nu}.$$

Notation 5.6. We denote by $\text{FDO}_{[1,2\rho]}^\nu$ the set of all linear operators on $S^{-\infty}$ of the form

$$P = \sum_{-i_0 \leq i \leq i_0} S^{(i)} p_i(\Lambda) \text{ with } p_i \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu-\rho|i|} \text{ for } i \in [-i_0, i_0] \cap \mathbb{Z}.$$

Lemma 5.7. *If $P \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^\nu$ and $Q \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^\eta$ then $[P, Q] \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^{\nu+\eta-1}$.*

Proof. It suffices to check that the right hand side of (2.9) belongs to $\text{FDO}_{[1,2\rho]}^{\nu+\mu-1}$, i.e.

$$q_j \partial_j p_i - p_i \partial_i q_j \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu+\eta-1-\rho|i+j|}. \quad (5.23)$$

If $q_j \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\eta-\rho|j|}$, $p_i \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu-\rho|i|}$, then $\partial_i q_j \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\eta-1-\rho|j|}$, $\partial_j p_i \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu-1-\rho|i|}$ and

$$q_j \partial_j p_i - p_i \partial_i q_j \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu+\eta-1-\rho|i|-\rho|j|}.$$

Hence, (5.23) follows if we know that

$$\mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu+\eta-1-\rho|i|-\rho|j|} \subset \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\nu+\eta-1-\rho|i+j|}.$$

We deduce the last inclusion using (5.22) with $k = \frac{1}{2}(|i| + |j| - |i + j|)$, $m = 0$ and $\nu + \eta - 1$ instead of ν . Indeed, it is easy to see that $\frac{1}{2}(|i| + |j| - |i + j|) \in \mathbb{N}$ for every $i, j \in \mathbb{Z}$. \square

5.4. PROOF OF THEOREM 1.1

The assertion of Theorem 1.1 follows from

Theorem 5.8. *Let $\mu > 0$, $\rho > 0$ and let J be given by (1.2) with entries satisfying (H1)–(H3). If $d \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\mu$ and $a \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\mu-\rho}$, then $n \rightarrow \lambda_n(J)$ belongs to $\mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\mu$.*

Proof. Let $N \in \mathbb{N}^*$ and as in Section 5.2 denote $J^{(l)}$ instead of $J_N^{(l)}$. We claim that

$$J^{(l)} \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^\mu \quad (5.24)$$

holds for every $l \in \mathbb{N}$. Indeed, $J^{(0)} = d(\Lambda) + (Sa(\Lambda) + \text{hc}) \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^\mu$ follows from the assumptions $d \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\mu$ and $a \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\mu-\rho}$. Assume now that (5.24) holds for a given $l \in \mathbb{N}$. Then $a_i^{(l)} \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\mu-\rho|i|}$ and $\partial_k d^{(l)} \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{\mu-1}$ implies $p_i^{(l)} \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^{1-\rho|i|}$, hence $P^{(l)} \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^1$ and $[P^{(l)}, A^{(l)}] \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^\mu$ due to Lemma 5.7.

We observe that $\text{ad}_{iP^{(l)}}^m A^{(l)} \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^\mu$ follows by induction with respect to m , hence $\tilde{A}^{(l)} \in \text{FDO}_{[1,2\rho]}^\mu$ and (5.24) still holds with $l + 1$ instead of l .

In order to deduce that $n \rightarrow \lambda_n(J)$ belongs to $\mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\mu$, it suffices to observe that for any $N \in \mathbb{N}^*$ one has the estimate (5.8) and $d_N^{(l)} \in \mathbb{S}_{[1,2\rho]}^\mu$ holds due to (5.24). \square

6. EXPRESSION OF THE SECOND CORRECTION TERM

6.1. STATEMENT OF THE RESULT

Notation 6.1. If $i, j \in \mathbb{Z}$ and $a, b : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$, then we denote

$$\begin{aligned} \{a, b\}_{i,j}(k) &:= b(k) \partial_j a(k) - a(k) \partial_i b(k), \\ \{a, b\}(k) &:= \{a, b\}_{1,1}(k) = b(k) \partial a(k) - a(k) \partial b(k). \end{aligned}$$

Theorem 6.2. *Let $\mu > 0$ and $\rho > 0$. Let $a \in S_1^{\mu-\rho}$, let $d \in S_1^\mu$ be such that (H1), (H2) hold for all $k \in \mathbb{N}^*$ and define*

$$p := i \frac{a}{\partial d}, \quad (6.1)$$

$$\mathfrak{r}_1 := -\partial_{-1} \operatorname{Im}(a\bar{p}) = \partial_{-1} \left(\frac{|a|^2}{\partial d} \right). \quad (6.2)$$

If J is given by (1.2), then its eigenvalue sequence $(\lambda_n(J))_{n=1}^\infty$ satisfies

$$\lambda_n(J) = d(n) + \mathfrak{r}_1(n) + \mathfrak{r}_2(n) + O(n^{\mu-6\rho}),$$

where \mathfrak{r}_1 is given by (6.2) and

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_{2,1} + \mathfrak{r}_{2,2} + \mathfrak{r}_{2,3} \quad (6.3)$$

holds with

$$\mathfrak{r}_{2,1} := -\frac{1}{2} \partial_{-1} (|p|^2 \partial \mathfrak{r}_1), \quad (6.4)$$

$$\mathfrak{r}_{2,2} := \frac{1}{4} \partial_{-1} \operatorname{Im}(\bar{p} \{ \{a, p\}, \tau_{-1} \bar{p} \}_{2,-1}), \quad (6.5)$$

$$\mathfrak{r}_{2,3} := \frac{1}{4} \partial_{-2} \left(\frac{|\{a, p\}|^2}{\partial^2 d} \right). \quad (6.6)$$

6.2. ANALYSIS OF COMMUTATORS

As in Section 4 we assume that $(d(k))_{k=1}^\infty$ is strictly increasing. We also assume that p is given by (6.1), \mathfrak{r}_1 is given by (6.2) and the operators $A^{(0)} \in \operatorname{FDO}_1^{\mu-\rho}$, $P \in \operatorname{FDO}_1^{1-\rho}$ are defined by

$$A^{(0)} = Sa(\Lambda) + \operatorname{hc}, \quad (6.7)$$

$$P = Sp(\Lambda) + \operatorname{hc}. \quad (6.8)$$

Lemma 6.3. *If $A^{(0)}$ and P are given by (6.7) and (6.8), then*

$$\operatorname{ad}_{iP} A^{(0)} = q_0(\Lambda) + (S^2 q_2(\Lambda) + \operatorname{hc}), \quad (6.9)$$

$$\operatorname{ad}_{iP}^2 A^{(0)} = (Sq'_1(\Lambda) + S^3 q'_3(\Lambda)) + \operatorname{hc}, \quad (6.10)$$

$$\operatorname{ad}_{iP}^3 A^{(0)} = q''_0(\Lambda) + (S^2 q''_2(\Lambda) + \operatorname{hc}) + (S^4 q''_4(\Lambda) + \operatorname{hc}), \quad (6.11)$$

$$\operatorname{ad}_{iP}^4 A^{(0)} = (Sq'''_1(\Lambda) + S^3 q'''_3(\Lambda) + S^5 q'''_5(\Lambda)) + \operatorname{hc} \quad (6.12)$$

hold with

$$q_0 = 2\mathfrak{r}_1, \quad (6.13)$$

$$q_2 = \{a, ip\}, \quad (6.14)$$

$$q'_1 := 2ip\partial \mathfrak{r}_1 - \{ \{a, p\}, \tau_{-1} \bar{p} \}_{2,-1}, \quad (6.15)$$

$$q''_0 = -2\partial_{-1} \operatorname{Im}(q'_1 \bar{p}) \quad (6.16)$$

and

$$q_i \in S_1^{\mu-2\rho}, \quad q'_i \in S_1^{\mu-3\rho}, \quad q''_i \in S_1^{\mu-4\rho}, \quad q'''_i \in S_1^{\mu-5\rho} \quad (6.17)$$

hold for any i .

Proof. In this proof we deal with operators of the form $S^{(i)}p_i(\Lambda)$, which are written in the shortened way as $S^{(i)}p_i$. In particular, the formula (2.9) expressed in the shortened way, takes the form

$$[S^{(i)}p_i, S^{(j)}q_j] = S^{(i+j)}\{p_i, q_j\}_{i,j}.$$

Step 1. Analysis of $Q := \text{ad}_{iP}A^{(0)}$. The diagonal part of $Q = [Sa + \text{hc}, iP]$ is

$$[Sa, i\bar{p}S^*] + \text{hc} = \partial_{-1}(ia\bar{p}) + \text{hc} = 2\partial_{-1}\text{Re}(ia\bar{p}) = -2\partial_{-1}\text{Im}(a\bar{p}) = 2\mathbf{r}_1 \quad (6.18)$$

and the off-diagonal part of $[Sa + \text{hc}, iP]$ is

$$[Sa, iSp] + \text{hc} = S^2\{a, ip\} + \text{hc}.$$

Thus (6.9) holds with q_0, q_2 given by (6.13) and (6.14).

Step 2. Analysis of $Q' := \text{ad}_{iP}^2A^{(0)}$. Combining (6.9) with $Q' = [Q, iP]$, we get

$$Q' = [q_0, iP] + [S^2q_2 + \text{hc}, iS^*\tau_{-1}\bar{p}] + [S^2q_2 + \text{hc}, iSp] = Q'_1 + \tilde{Q}'_1 + Q'_3,$$

where

$$\begin{aligned} Q'_1 &= [q_0, iP] = [q_0, iSp] + \text{hc} = Sip\partial q_0 + \text{hc}, \\ \tilde{Q}'_1 &= [S^2q_2, iS^{(-1)}\tau_{-1}\bar{p}] + \text{hc} = Si\{q_2, \tau_{-1}\bar{p}\}_{2,-1} + \text{hc}, \\ Q'_3 &= [S^2q_2, iSp] + \text{hc} = S^3i\{q_2, p\}_{2,1} + \text{hc} = S^3q'_3 + \text{hc}. \end{aligned}$$

Thus (6.10) holds with $q'_1 = ip\partial q_0 + i\{q_2, \tau_{-1}\bar{p}\}_{2,-1}$ and we get (6.15) from (6.13)–(6.14).

Step 3. Analysis of $Q'' := \text{ad}_{iP}^3A^{(0)}$. Using (6.10), (6.15), we find that the diagonal part of $Q'' = [Q', iP]$ can be obtained, similarly as in (6.18), by taking q'_1 instead of a , i.e.

$$[Sq'_1, i\bar{p}S^*] + \text{hc} = 2\partial_{-1}\text{Re}(iq'_1\bar{p}) = -2\partial_{-1}\text{Im}(q'_1\bar{p}) = q''_0.$$

The off-diagonal part of Q'' is the sum of

$$\begin{aligned} [Sq'_1, iSp] + \text{hc} &= S^2i\{q'_1, p\} + \text{hc}, \\ [S^3q'_3, iS^{(-1)}\tau_{-1}\bar{p}] + \text{hc} &= S^2i\{q'_3, \tau_{-1}\bar{p}\}_{3,-1} + \text{hc}, \\ [S^3q'_3, iSp] + \text{hc} &= S^4i\{q'_3, p\}_{3,1} + \text{hc}. \end{aligned}$$

Step 4. End of the proof. Denote $Q''' := \text{ad}_{iP}^4A^{(0)}$. By using (6.11), we find easily that the commutator $Q''' = [Q'', iP]$ has the form given in (6.12). To complete the proof, we observe that the properties (6.17) follow from (5.12). \square

6.3. END OF THE PROOF OF THEOREM 6.2

Writing $J = J^{(0)} = D^{(0)} + A^{(0)} = d(\Lambda) + (Sa(\Lambda) + \text{hc})$ in (5.16)–(5.17) with $l = 0$, $\rho_0 = \rho$ and $m_0 = 6$, we obtain

$$e^{-iP} J e^{iP} = J' + O(\Lambda^{\mu-6\rho}), \quad (6.19)$$

where

$$J' = d(\Lambda) + \frac{1}{2}\text{ad}_{iP}A^{(0)} + \frac{1}{3}\text{ad}_{iP}^2A^{(0)} + \frac{1}{8}\text{ad}_{iP}^3A^{(0)} + \frac{1}{30}\text{ad}_{iP}^4A^{(0)}. \quad (6.20)$$

Taking into account the assertion of Lemma 6.3, we find

$$J' = d'(\Lambda) + A', \quad (6.21)$$

where

$$d' = d + \frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{8}q_0'' \quad (6.22)$$

and

$$A' = \sum_{1 \leq i \leq 5} (S^i a_i(\Lambda) + \text{hc}) \quad (6.23)$$

holds with

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3}q_1' + \frac{1}{30}q_1''', \\ a_2 &= \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{8}q_2'', \\ a_i &\in S_1^{\mu-3\rho} \text{ if } i \neq 2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

We observe that by using the expressions for q_0, q_0'' given by (6.13), (6.16), we can write (6.22) in the form

$$d' = d + \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_{2,1} + \mathfrak{r}_{2,2}, \quad (6.25)$$

where $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_{2,1}, \mathfrak{r}_{2,2}$ are given by (6.2), (6.4), (6.5) respectively.

We observe that $A' \in \text{FDO}_1^{\mu-2\rho}$ and applying Theorem 4.1 to $d', A', 2\rho$ instead of d, A^0, ρ , we obtain

$$\lambda_n(J') = d'(n) + \mathfrak{r}'_1(n) + O(n^{\mu-6\rho}), \quad (6.26)$$

where

$$\mathfrak{r}'_1 := \sum_{1 \leq i \leq 5} \partial_{-i} \left(\frac{|a_i|^2}{\partial_i d'} \right) \in S_1^{\mu-4\rho}. \quad (6.27)$$

Since (6.19) ensures

$$\lambda_n(J) = \lambda_n(J') + O(n^{\mu-6\rho}),$$

the assertion of Theorem 6.2 will follow from (6.25)–(6.26), if we check that the quantity \mathfrak{r}'_1 introduced in (6.27) satisfies the estimate

$$\mathfrak{r}'_1(n) = \mathfrak{r}_{2,3}(n) + O(n^{\mu-6\rho}), \quad (6.28)$$

where $\mathfrak{r}_{2,3}$ is given by (6.6). In order to check (6.28), we first observe that (6.24) ensures

$$\mathfrak{r}'_1(n) = \partial_{-2} \left(\frac{|a_2(n)|^2}{\partial_2 d'(n)} \right) + O(n^{\mu-6\rho}).$$

We observe that $\partial_2 d'(n) = \partial_2 d(n)(1 + O(n^{-2\rho}))$ ensures

$$\mathfrak{r}'_1(n) = \partial_{-2} \left(\frac{|a_2(n)|^2}{\partial_2 d} \right) + O(n^{\mu-6\rho}). \quad (6.29)$$

Using $a_2 - \frac{1}{2}q_2 \in S_1^{\mu-4\rho}$, it is easy to check that (6.29) still holds if a_2 is replaced by $\frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{2}\{a, p\}$, i.e. (6.28) holds with $\mathfrak{r}_{2,3}$ given by (6.6).

6.4. EXPRESSIONS FOR COEFFICIENTS $c_{0,0}$, $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ IN (1.10)

Notation 6.4. We write $p(k) = q(k) + S_1^\nu$ if and only if $p, q : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ satisfy $p - q \in S_1^\nu$.

Step 1. Expansion of $\partial d(k)$. Assume that (1.3) holds. Then for any $N \in \mathbb{N}^*$ one has

$$\partial d(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \delta_i k^{\mu-i} ((1+k^{-1})^{\mu-i} - 1) + O(k^{\mu-N}).$$

Let us assume $\delta_0 = 1$. Then

$$\partial d(k) = \mu k^{\mu-1} (1 + \delta'_1 k^{-1} + \delta'_2 k^{-2}) + S_1^{\mu-4}$$

holds with $\delta'_1 := \frac{1}{\mu} \left(\binom{\mu}{2} + (\mu-1)\delta_1 \right)$, $\delta'_2 := \frac{1}{\mu} \left(\binom{\mu}{3} + \binom{\mu-1}{2}\delta_1 + (\mu-2)\delta_2 \right)$.

Step 2. Expansion of $|a(k)|^2$. We assume that (1.4) holds. Then

$$|a(k)|^2 = k^{2\mu-2\rho} (|\alpha_0|^2 + \beta_1 k^{-1} + \beta_2 k^{-2}) + S_1^{2\mu-2\rho-3}$$

holds with $\beta_1 := 2\operatorname{Re}(\alpha_0 \bar{\alpha}_1)$, $\beta_2 := 2\operatorname{Re}(\alpha_0 \bar{\alpha}_2) + |\alpha_1|^2$.

Step 3. Expansion of $|a(k)|^2 / \partial d(k)$. Since

$$\frac{|\alpha_0|^2 + \beta_1 k^{-1} + \beta_2 k^{-2}}{1 + \delta'_1 k^{-1} + \delta'_2 k^{-2}} = |\alpha_0|^2 + \gamma_1 k^{-2} + \gamma_2 k^{-2} + S_1^{2\mu-2\rho-3}$$

holds with $\gamma_1 := \beta_1 - |\alpha_0|^2 \delta'_1$, $\gamma_2 := \beta_2 - \beta_1 \delta'_1 + |\alpha_0|^2 (\delta_1'^2 - \delta_2')$, we find

$$\frac{|a(k)|^2}{\partial d(k)} = \frac{k^{\mu-2\rho+1}}{\mu} (|\alpha_0|^2 + \gamma_1 k^{-1} + \gamma_2 k^{-2}) + S_1^{\mu-2\rho-2}.$$

Step 4. Expansion of $\mathfrak{r}_1(k)$. We conclude that

$$\mathfrak{r}_1(k) = \partial_{-1} \frac{|a|^2}{\partial d}(k) = k^{\mu-2\rho} (c_{0,0} + c_{1,0} k^{-1} + c_{2,0} k^{-2}) + S_1^{\mu-2\rho-3} \quad (6.30)$$

holds with

$$\begin{cases} c_{0,0} := -\frac{1}{\mu} (\mu - 2\rho + 1) |\alpha_0|^2, \\ c_{1,0} := \frac{1}{\mu} \left(\binom{\mu-2\rho+1}{2} |\alpha_0|^2 - (\mu - 2\rho) \gamma_1 \right), \\ c_{2,0} := \frac{1}{\mu} \left(-\binom{\mu-2\rho+1}{3} |\alpha_0|^2 + \binom{\mu-2\rho}{2} \gamma_1 - (\mu - 2\rho - 1) \gamma_2 \right). \end{cases} \quad (6.31)$$

We deduce (1.11) using r_1 expressed in (6.31) with γ_1 given in Step 3, β_1 given in Step 2 and δ'_1 given in Step 1.

6.5. EXPRESSION OF $c_{0,1}$ IN (1.13)

Due to (6.3), it suffices to show that

$$\mathfrak{r}_{2,i}(k) = c_i k^{\mu-4\rho} + O(k^{\mu-4\rho-1}) \text{ for } i = 1, 2, 3, \quad (6.32)$$

holds with $\mathfrak{r}_{2,1}$, $\mathfrak{r}_{2,2}$, $\mathfrak{r}_{2,3}$ given by (6.4)–(6.6) and c_1 , c_2 , c_3 given by (1.15).

Case $i = 1$. By using (6.30)–(6.31), we obtain

$$\partial \mathfrak{r}_1(k) = -\frac{|\alpha_0|^2}{\mu}(\mu + 1 - 2\rho)(\mu - 2\rho)k^{\mu-2\rho-1} + S_1^{\mu-2\rho-2}. \quad (6.33)$$

Then we observe that (6.33) and $p(k) = i \frac{a}{\partial d}(k) = i \frac{\alpha_0}{\mu} k^{1-\rho} + S_1^{-\rho}$ imply

$$|p(k)|^2 \partial \mathfrak{r}_1(k) = -\frac{|\alpha_0|^4}{\mu^3}(\mu + 1 - 2\rho)(\mu - 2\rho)k^{\mu-4\rho+1} + S_1^{\mu-4\rho}. \quad (6.34)$$

In order to deduce (6.32) for $i = 1$, it remains to remark that (6.34) gives

$$\partial_{-1}(|p|^2 \partial \mathfrak{r}_1)(k) = \frac{|\alpha_0|^4}{\mu^3}(\mu + 1 - 2\rho)(\mu - 2\rho)(\mu + 1 - 4\rho)k^{\mu-4\rho} + O(k^{\mu-4\rho-1}).$$

Case $i = 2$. Denote $q_2 := \{a, ip\}$. By using

$$q_2(k) = \left\{ \alpha_0 k^{\mu-\rho}, -\frac{\alpha_0}{\mu} k^{1-\rho} \right\} + S_1^{\mu-2\rho-1} = -\frac{\alpha_0^2}{\mu}(\mu - 1)k^{\mu-2\rho} + S_1^{\mu-2\rho-1} \quad (6.35)$$

and $\tau_{-1}\bar{p}(k) = \bar{p}(k) + S_1^{-\rho} = -i \frac{\bar{\alpha}_0}{\mu} k^{1-\rho} + S_1^{-\rho}$, we find

$$\begin{aligned} \bar{p}(k) \{q_2, \tau_{-1}\bar{p}\}_{2,-1}(k) &= -i \frac{\bar{\alpha}_0}{\mu} k^{1-\rho} \left\{ -\frac{\alpha_0^2}{\mu}(\mu - 1)k^{\mu-2\rho}, -i \frac{\bar{\alpha}_0}{\mu} k^{1-\rho} \right\}_{2,-1} + S_1^{\mu-3\rho} \\ &= \frac{|\alpha_0|^4}{\mu^3}(\mu - 1)(\mu + 2 - 4\rho)k^{\mu+1-4\rho} + S_1^{\mu-4\rho}. \end{aligned}$$

In order to deduce (6.32) for $i = 2$, it remains to remark that the last estimate gives

$$\begin{aligned} \partial_{-1} \text{Im}(\bar{p} \{ -iq_2, \tau_{-1}\bar{p} \}_{2,-1})(k) \\ = \frac{|\alpha_0|^4}{\mu^3}(\mu - 1)(\mu + 2 - 4\rho)(\mu + 1 - 4\rho)k^{\mu-4\rho} + O(k^{\mu-4\rho-1}) \end{aligned}$$

Case $i = 3$. As before $q_2 := \{a, ip\}$. Since (6.35) provides

$$\frac{|q_2(k)|^2}{\partial_2 d(k)} = \frac{|\alpha_0|^4}{2\mu^3}(\mu - 1)^2 k^{\mu+1-4\rho} + S_1^{\mu-4\rho}, \quad (6.36)$$

in order to deduce (6.32) for $i = 3$, it remains to remark that (6.36) gives

$$\partial_{-2} \frac{|q_2|^2}{\partial_2 d}(k) = -\frac{|\alpha_0|^4}{\mu^3}(\mu - 1)^2(\mu + 1 - 4\rho)k^{\mu-4\rho} + O(k^{\mu-4\rho-1}).$$

Acknowledgements

The first co-author was supported by CNRST excellence grant number 44UM5R2017.

REFERENCES

- [1] A. Boutet de Monvel, L. Zielinski, *Explicit error estimates for eigenvalues of some unbounded Jacobi matrices*, Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations: IWOTA10, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 221, Birkhäuser Verlag, Basel, 2012, pp. 187–215.
- [2] A. Boutet de Monvel, L. Zielinski, *Asymptotic behaviour of large eigenvalues of a modified Jaynes–Cummings model*, [in:] E. Khruslov, L. Pastur, D. Shepelsky (eds), *Spectral Theory and Differential Equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 233, Providence, RI, 2014, pp. 77–93.
- [3] A. Boutet de Monvel, L. Zielinski, *Asymptotic behaviour of large eigenvalues for Jaynes–Cummings type models*, J. Spectr. Theory **7** (2017), 1–73.
- [4] A. Boutet de Monvel, L. Zielinski, *Oscillatory behavior of large eigenvalues in quantum Rabi models*, International Mathematics Research Notices, doi.org/10.1093/imrn/rny294, (2019), see also arXiv:1711.03366.
- [5] A. Boutet de Monvel, L. Zielinski, *On the spectrum of the quantum Rabi Models*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, to appear.
- [6] A. Boutet de Monvel, J. Janas, L. Zielinski, *Asymptotics of large eigenvalues for a class of band matrices*, Reviews in Mathematical Physics **25** (2013) 8, 1350013.
- [7] A. Boutet de Monvel, S. Naboko, L.O. Silva, *The asymptotic behaviour of eigenvalues of a modified Jaynes–Cummings model*, Asymptot. Anal. **47** (2006) 3–4, 291–315.
- [8] P.A. Cojuhari, J. Janas, *Discreteness of the spectrum for some unbounded Jacobi matrices*, Acta Sci. Math. (Szeged) **73** (2007) 3–4, 649–667.
- [9] P. Djakov, B. Mityagin, *Simple and double eigenvalues of the Hill operator with a two term potential*, J. Approximation Theory **135** (2005) 1, 70–104.
- [10] P. Djakov, B. Mityagin, *Trace formula and spectral Riemann surfaces for a class of tri-diagonal matrices*, J. Approximation Theory **139** (2006), 293–326.
- [11] J. Edward, *Spectra of Jacobi matrices, differential equations on the circle, and the $su(1, 1)$ Lie algebra*, SIAM J. Math. Anal. **24** (2006) 3, 824–831.
- [12] W.G. Faris, R.B. Lavine, *Commutators and self-adjointness of Hamiltonian operators*, Commun. Math. Phys. **35** (1974), 39–48.
- [13] J. Janas, M. Malejki, *Alternative approaches to asymptotic behaviour of eigenvalues of some unbounded Jacobi matrices*, Comput. Appl. Math. **200** (2007), 342–356.
- [14] J. Janas, S. Naboko, *Infinite Jacobi matrices with unbounded entries: asymptotics of eigenvalues and the transformation operator approach*, SIAM J. Math. Anal. **36** (2004) 2, 643–658.
- [15] M. Malejki, *Asymptotics of large eigenvalues for some discrete unbounded Jacobi matrices*, Linear Algebra Appl. **431** (2009) 10, 1952–1970.
- [16] M. Malejki, *Asymptotics of the discrete spectrum for complex Jacobi matrices*, Opuscula Math. **34** (2014) 1, 139–160.

- [17] D. Masson, J. Repka, *Spectral theory of Jacobi matrices in $l^2(\mathbb{Z})$ the $su(1,1)$ Lie algebra*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 1131–1146.
- [18] G.V. Rozenbljum, *Near-similarity of operators and the spectral asymptotic behaviour of pseudodifferential operators on the circle*, Trudy Maskov. Mat. Obshch **36** (1978), 59–84 [in Russian].
- [19] G. Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [20] È.A. Tur, *Jaynes–Cummings model: solution without rotating wave approximation*, Optics and Spectroscopy **89** (2000) 4, 574–588.
- [21] È.A. Tur, *Jaynes–Cummings model without rotating wave approximation*, arXiv:math-ph/0211055v1 (2002).
- [22] È.A. Yanovich, *Asymptotics of eigenvalues of an energy operator in a problem of quantum physics*, [in:] J. Janas, P. Kurasov, A. Laptev, S. Naboko (eds), *Operator Methods in Mathematical Physics OTAMP 2010, Bedlewo*, Oper. Theory Adv. Appl. **227** (2013), 165–177.
- [23] H. Volkmer, *Error estimates for Rayleigh–Ritz approximations of eigenvalues and eigenfunctions of the Mathieu and spheroidal wave equation*, Constr. Approx. **20** (2004) 1, 39–54.

Ayoub Harrat
ayoub.harrat@etu.univ-littoral.fr

Center of Mathematical Research of Rabat
Department of Mathematics
Mohammed V University of Rabat
P.O. Box 1014, Marocco

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Joseph Liouville EA 2597
Université du Littoral Côte d'Opale
F-62228 Calais, France

El Hassan Zerouali
zerouali@fsr.ac.ma

Center of Mathematical Research of Rabat
Department of Mathematics
Mohammed V University of Rabat
P.O. Box 1014, Marocco

270

Ayoub Harrat, El Hassan Zerouali, and Lech Zielinski

Lech Zielinski (corresponding author)
lech.zielinski@univ-littoral.fr

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Joseph Liouville EA 2597
Université du Littoral Côte d'Opale
F-62228 Calais, France

Received: January 13, 2020.

Revised: January 27, 2020.

Accepted: January 27, 2020.

Table des matières

Résumé	xxi
Remerciements	xxiii
Sommaire	xxv
1 Préliminaires	1
1.1 Histoire et Problèmes de Moments Classiques	2
1.1.1 Histoire	2
1.1.2 Problèmes de moments classiques	2
1.2 Le problème unidimensionnel et multidimensionnel	3
1.2.1 Le problème unidimensionnel : Méthode de Riesz	3
1.2.2 Le Problème multi-dimensionnel	5
1.3 Le problème de moments tronqué et l’approche de platitude	8
1.3.1 L’approche de Flatness	8
1.3.2 Le cas unidimensionnel	8
1.3.3 Le cas multidimensionnel	10
1.3.4 Contributions de recherches menées dans cette thèse	13
1.4 L’approche de problème de moments tronqué basée sur les idempotents	14
1.4.1 La Stabilité dimensionnelle	16
1.4.2 La représentation des fonctionnelles unitaires positives sur les carrés	17
1.4.3 Les idempotents par rapport à une uspf	18
1.4.4 Les éléments Λ -multiplicatifs et la représentation intégrale de la uspf	20
1.4.5 Contributions de recherches menées dans cette thèse	21
1.5 L’étude asymptotique de certains opérateurs non bornés de Jacobi	22
1.5.1 Analyse spectrale de l’opérateur défini par la matrice (1.28)	22
1.5.2 Exemples de problèmes liés avec les opérateurs de Jacobi dont le spectre est discret	24
1.5.3 L’historique des résultats sur l’asymptotique des grandes valeurs propres des opérateurs de Jacobi	26
1.5.4 Contributions de recherches menées dans cette thèse	28
1.5.5 Remarques sur les hypothèses	30

Bibliographie	33
2 Le Problème de Moments Complexe Quintique	41
3 Mesure Discrète, Idempotents et Problème de Moments	63
4 L'Étude Asymptotique du Spectre Discret de Matrice de Jacobi Non Bornée	83
Table des matières	115

PROBLÈME DE MOMENTS AVEC APPLICATIONS ET ESTIMATIONS DU SPECTRE DISCRET DES OPÉRATEURS DÉFINIS PAR DES MATRICES INFINIES NON BORNÉES

Moment problem with applications and discrete spectrum estimations of certain operators defined by unbounded Jacobi matrices

Résumé

Dans cette thèse on donne d'abord une solution concrète pour presque tous les scénarios qu'on peut avoir dans le problème de moments complexe quintique et en particulier dans le cas d'une mesure à support minimal. On présente aussi de nombreux exemples pour illustrer chaque cas. La seconde partie présente une approche qui permet de passer du problème de moments tronqué au problème complet à l'aide des idempotents. Il s'agit d'une approche très différente de celle utilisée dans la première partie. Plus précisément, au lieu d'appliquer les méthodes de R. Curto et L. Fialkow où l'objet central est la matrice de moments, on utilise l'approche de F. Vasilescu dont l'objet central est la fonctionnelle de Riesz. Cette fonctionnelle fait associer à chaque monôme t^α la valeur γ_α et elle satisfait trois conditions naturelles dans le cas où la suite $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ est donnée par les intégrales de t^α par rapport à une mesure. La troisième partie est consacrée à l'asymptotique du spectre pour une classe de matrices hermitiennes tridiagonales infinies. Le but est d'obtenir le comportement asymptotique précis des valeurs propres y associées à partir du comportement asymptotique de ces coefficients. Le résultat est obtenu par une approche nouvelle qui est une adaptation de la théorie de perturbations de Schrieffer-Wolff utilisé en physique de la matière condensée. Cette méthode marche également pour des matrices 'bandes', mais le cas des matrices tridiagonales est le plus important pour des applications et encore les expressions explicites des premières corrections dans la formule asymptotique sont plus simples pour les matrices tridiagonales.

Mots clés : problème de moments, quintique, idempotents, asymptotiques, matrice de jacobin, spectre discret

MOMENT PROBLEM WITH APPLICATIONS AND DISCRETE SPECTRUM ESTIMATIONS OF CERTAIN OPERATORS DEFINED BY UNBOUNDED JACOBI MATRICES

Problème de moments avec applications et estimations du spectre discret des opérateurs définis par des matrices infinies non bornées

Abstract

In this thesis, we first provide a concrete solution to the, almost all, quintic TCM (that is, when $m = 5$). We also study the cardinality of the minimal representing measure. Based on the bi-variate recurrence sequence properties with some Curto-Fialkow's results. Our method intended to be useful for all odd-degree moment problems. Second, we investigate the full moment problem for discrete measures using Vasilescu's idempotent approach based on Λ -multiplicative elements with respect to the associated square positive Riesz functional. We give a sufficient condition for the existence of a discrete integral representation for the associated Riesz functional, which turns to be necessary in bounded shift space case. A particular attention is given to Λ -multiplicative elements, where a total description, for the cases where they are a single point indicator functions, is given. Lastly, We investigate a class of infinite Jacobi matrices which define unbounded self-adjoint operators with discrete spectrum. Our purpose is to establish the asymptotic expansion of large eigenvalues and to compute two correction terms explicitly. This method works in general for band matrices but Jacobi matrices case still much interesting due to applications and explicit expressions obtained for the first correction terms in the asymptotic formula.

Keywords: moment problem, quintic, idempotents, asymptotics, jacobin matrix, discrete spectrum

LMPA Joseph Liouville* et LAMA**

*Maison de la Recherche Blaise Pascal – 50, rue Ferdinand Buisson – CS 80699 – 62228 Calais Cedex – France – **Faculté des sciences de Rabat – 4 Avenue Ibn Batouta – BP 1014 RP, Rabat – Morocco