Étude algébrique des systèmes d'équations différentielles polynomiales d'ordre arbitraire

Mercedes Haiech

▶ **To cite this version:**

Mercedes Haiech. Étude algébrique des systèmes d'équations différentielles polynomiales d'ordre arbitraire. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Rennes, 2020. Français. NNT : 2020REN1S035 . tel-03123641

HAL Id: tel-03123641
https://theses.hal.science/tel-03123641

Submitted on 28 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs interactions*

Par
Mercedes HAIECH

Étude algébrique des systèmes d'équations différentielles polynomiales d'ordre arbitraire

Surdétermination, tropicalisation, nilpotence et déformations.

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 7 Décembre 2020
Unité de recherche : IRMAR

Rapporteurs avant soutenance :

Fuensanta AROCA	Chercheuse à Universidad Nacional Autónoma de México
Anne MOREAU	Professeur des Universités au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Composition du Jury :

Président :	François BOULIER	Professeur des Universités à l'Université de Lille
Examinateurs :	Zoé CHATZIDAKIS	Directrice de recherche à l'ENS
	Dima GRIGORIEV	Directeur de recherche à l'Université de Lille
	Anne MOREAU	Professeur des Universités au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay
Dir. de thèse :	David BOURQUI	Maître de conférence à l'Université de Rennes 1
Dir. de thèse :	Julien SEBAG	Professeur des Universités à l'Université de Rennes 1

REMERCIEMENTS

Pour commencer je tiens à remercier David Bourqui et Julien Sebag pour m'avoir encadrée en thèse pendant ces trois dernières années, et pour m'avoir initiée à la géométrie algébrique et au schéma des arcs.
Merci à David Bourqui pour sa disponibilité, ses conseils, ses remarques toujours précises et pertinentes.
Merci à Julien Sebag pour m'avoir inspirée depuis la Licence 3, sa réactivité, et d'avoir toujours été présent pour me guider.
Merci à eux pour leur investissement et d'avoir cru en moi.

Merci également à Fuensanta Aroca et Anne Moreau d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, merci pour leurs corrections et leur relecture attentive.
Merci à François Boulier, Zoé Chatzidakis, Dima Grigoriev et Anne Moreau d'avoir accepté d'être les membres du jury de ma thèse.
Merci particulièrement à François Boulier pour les nombreux échanges que j'ai pu avoir avec lui sur l'algèbre différentielle.

Il m'est ensuite difficile de remercier toutes les personnes qui sont intervenues de près ou de loin dans l'avancement dans ma thèse. Je tenterai donc d'être succincte.

Merci à toute l'équipe administrative de l'IRMAR et de l'école doctorale pour m'avoir permis de me sentir chez moi à Rennes 1, pour leurs sourires et leur bonne humeur et m'avoir aidée dans toutes les démarches.
Merci plus généralement au personnel de l'IRMAR, en particulier aux informaticiens d'avoir été disponibles toutes les fois où j'ai toqué à leur porte.
Merci à l'équipe de Géométrie et Singularité de m'avoir accueillie pendant trois ans.
Merci à l'ENS de m'avoir donné une mission d'enseignement et le TD de Théorie des groupes.
Merci à l'IREM pour m'avoir permis de m'occuper d'un groupe recherche et formation et où j'ai eu mon bureau pour la troisième année.
Merci aux membres de l'IRMAR et de l'ENS avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger, à ceux que j'ai eu en cours ou en TD. Merci à ceux et celles qui m'ont conseillée et encouragée.

Merci aux chercheurs qui m'ont encadrée à l'occasion de stages et qui m'ont fait découvrir des domaines des mathématiques.
Merci à mes co-bureaux (respectivement bureaux 621 et 232) d'avoir égayé mes journées. Merci également à tous les doctorants de l'IRMAR avec qui j'ai eu l'occasion d'interagir, ceux qui sont partis avant moi et ceux qui resteront après et à qui je souhaite bonne continuation. Merci pour les discussions de mathématiques, celles autour de Moebius, les différentielles de Gâteaux et les après-midi jeux. Un remerciement particulier va à mon «grand frère de thèse» qui m'a beaucoup conseillée ces derniers mois avant la soutenance.

Merci à tous les professeurs et professeures que j'ai eus et qui m'ont montrés le chemin, pour toutes les choses que vous m'avez apprises.
Merci aux organisateurs et organisatrices du Mathematic Park, ainsi qu'à la créatrice du Cercle Mathématique de Strasbourg pour avoir pavé mon chemin de mathématiques durant mes années de lycée et de prépa.
Merci à tous mes amis extérieurs à l'IRMAR, que l'on se soit rencontré à Rennes, à l'ENS ou à l'escrime, à Paris, ou à Strasbourg. Merci à mes amis de JdR pour l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su créer. Merci Sarah et Laura, parmi tant d'autres, d'être encore là depuis plus de dix ans, merci Sarah pour toutes les mathématiques qu'on a faites ensemble.

Pour conclure merci à toute ma famille pour leur soutien sans faille. Merci particulièrement à mes parents Jacques et Marie-Claude pour m'avoir toujours encouragée et permis de suivre ma voie. D'avoir joué le rôle difficile de parents qui oscille entre ami, soutien et professeur. Cette thèse n'est pas la fin, ce n'est que le commencement.

Force lumineuse et bienveillante
Gratitude infinie pour celui qui guide
Respect
Pierre Bottero, *Le pacte des marchombres*, tome 1.

TABLE DES MATIÈRES

I Préliminaires algébriques **25**

1 Dérivations et formes différentielles **27**

1.1 Dérivations 27

1.1.1 Premières définitions et exemples 27

1.1.2 La structure de module sur l'ensemble des dérivations 28

1.1.3 Fonctorialité 29

1.2 Formes différentielles 30

1.2.1 Une description alternative des formes différentielles relatives 32

1.3 Représentabilité du foncteur de dérivation 34

1.4 Dérivations de Hasse-Schmidt 37

2 Algèbre différentielle **43**

2.1 Le formalisme de base de l'algèbre différentielle 43

2.2 Les adjoints du foncteur d'oubli 47

2.2.1 Adjoint à droite 47

2.2.2 Adjoint à gauche 49

2.3 Adjonction d'indéterminées différentielles dans le cas d'une famille de dérivations 50

2.4 Le théorème de la base finie de Ritt-Raudenbusch et ses conséquences dans l'étude des équations différentielles polynomiales 52

2.5 Sur les polynômes différentiels sur un corps 55

2.6 Sur la décomposition irréductible des idéaux différentiels parfaits monogènes de $K\{y\}$ 55

2.7 Le théorème des petites puissances 57

3 Généralités sur la complétion **60**

3.1 Notations et définitions de base 60

3.2 La complétion algébrique 64

II Systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires 69

4 Les systèmes d'EDO affines en une variable différentielle sont différentiellement de rang plus petit que 2 71

4.1 Notations 71
4.2 Des candidats pour les générateurs 72
4.3 Un lemme préparatoire 74
4.4 La preuve du théorème 4.4.1 75
4.4.1 Le cas où A est un corps 75
4.4.2 Le cas général 76
4.5 Calcul des générateurs grâce à l'algorithme de Buchberger 77
4.6 Une conséquence sur la structure des idéaux des opérateurs différentiels 79
4.7 Exemples 80

III Le théorème fondamental de la géométrie différentielle partielle tropicale 83

5 Algèbre différentielle et géométrie tropicale 85

5.1 Semi-anneau des supports et ensemble des sommets 85
5.2 L'anneau différentiel des séries formelles et l'application support . . . 90
5.3 Les polynômes tropicaux différentiels 93

6 Le théorème fondamental de la géométrie différentielle tropicale partielle 97

6.1 Notations 97
6.2 Le théorème fondamental 97
6.3 Exemples et limites du théorème fondamental 102

IV Une observation sur les topologies des complétions 107

7 Trois topologies sur la complétion qui coïncident seulement dans le cas noethérien 109

7.1 Énoncé du problème 109
7.2 Une condition necessaire et suffisante pour être préadiquement complet 110
7.3 Une complétion non I-préadiquement complète 116

V Schéma des arcs des variétés algébriques 123

8 Schéma des arcs 126

8.1 Définition 126
8.2 Propriétés importantes 130

9 Les voisinages formels des arcs rationnels non dégénérés 135
9.1 Foncteur de déformations 135
9.1.1 Notations 136
9.1.2 Foncteur des points 138
9.1.3 Définition des déformations infinitésimales d'un point k-rationnel 140
9.1.4 Exemple de déformations : les arcs rationnels 142
9.2 Preuve du théorème 9.0.1 dans le cas des courbes affines planes . . . 142

10 Nilpotents de l'espace des arcs 146
10.1 Nilpotence, annulateurs et dérivations de Hasse-Schmidt 147
10.1.1 Notation 147
10.1.2 Nilradical et annulateur 147
10.1.3 Les dérivations de Hasse-Schmidt 149
10.2 Application au schéma des arcs : preuve des résultats principaux . . . 150
10.2.1 Préliminaires 150
10.2.2 Forme de torsion différentielles et fonctions nilpotentes du schéma des arcs 151
10.3 Preuve du théorème 10.0.1 153
10.4 Preuve du théorème 10.0.2 154

VI Schéma des arcs différentiels 157

11 Schéma des arcs différentiels 159
11.1 Définition générale et premières remarques 159
11.2 Le schéma des arcs différentiels associés à une variété algébrique munie d'une donnée différentielle 161
11.3 Le cas d'une EDO 164

12 Espace tangent et dimension de plongement 167
12.1 Définition 167
12.2 Propriétés et caractérisations 170

13 Une propriété de noetherianité des voisinages formels du schéma des arcs différentiels 176
13.1 Foncteur des déformations 177
13.2 L'équation différentielle linéarisée 179

13.3 Preuve du théorème 13.0.1 180

14 Schéma des arcs différentiels dont la dimension de plongement est majorée par 1 **182**
14.1 Propositions préliminaires 183
14.2 Preuve du théorème 14.0.1 185
14.3 Remarques et exemples 186

15 Schémas des arcs différentiels des équations différentielles d'ordre 2 **187**
15.1 Solutions singulières des équations différentielles ordinaires bimonomiales d'ordre 2 et espace tangent 187
15.2 Exemples 193

16 Exemples plus généraux **196**
16.1 Retour sur l'étude des équations d'ordre 2 196
16.2 Exemples d'ordre deux et supérieur 199

VII Annexes **203**

17 Annexes **204**
17.1 Théorème de préparation de Weierstrass 204
17.2 Définitions autour de la lissité et régularité 205
17.2.1 Points réguliers et singuliers 205
17.2.2 Fibre d'un morphisme 205
17.2.3 Lissité 205
17.2.4 Intersection complète 206
17.3 Propriétés utiles 206
17.3.1 Critère Jacobien 206
17.3.2 Co-restriction 207

Bibliography **211**

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions les solutions formelles des systèmes d'équations différentielles et leurs espaces. De ce point de vue ce travail se situe à l'intersection de l'analyse, l'algèbre (différentielle et commutative) et de la géométrie (algébrique). Le principe général qui a guidé ce travail de thèse est de chercher des outils issus de la géométrie et de l'algèbre afin d'étudier qualitativement les espaces de séries formelles solutions des équations différentielles. En effet, si la structure des espaces de solutions pour les équations différentielles *linéaires* à coefficients constants est bien connue puisqu'il s'agit d'un espace vectoriel (ou d'un espace affine lorsque l'équation possède un second membre) dont la dimension est l'ordre de l'équation, il en va autrement pour les systèmes d'équations différentielles algébriques de degré $d \geqslant 2$ arbitraire, dont il est difficile, en général, d'extraire des informations. Par exemple l'explicitation des solutions n'est pas toujours possible, tant du point de vue théorique qu'effectif. Pour illustrer ce fait, soulignons par exemple que, dans [DL84, thm 4.11], J. DENEF et L. LIPSCHITZ montrent qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si un système d'équations différentielles partielles admet une solution dans $\mathbf{C}[[x_1, \cdots x_r]]$. Les divers chapitres de cette thèse ont été écrit avec la volonté de chercher différentes approches afin d'appréhender les systèmes d'équations différentielles algébriques.

Le dénominateur commun de tous les chapitres de notre thèse est l'algèbre différentielle telle qu'introduite par J. F. RITT entre les années 1930–50 puis largement développée par son élève E. KOLCHIN. L'idée est « d'algébriser » les équations différentielles en considérant une équation différentielle comme un polynôme sur un certain anneau (dont les variables représentent les fonctions solutions) et auquel on ajoute la possibilité de dériver les variables (éventuellement partiellement). Plus formellement, l'objet de base de l'algèbre différentielle est la donnée d'un anneau commutatif muni d'un ou plusieurs opérateurs de dérivation, permettant l'action de dériver au sein de cet anneau. L'adjonction de cette « donnée différentielle » aux objets de l'algèbre commutative ouvre de multiples voies pour l'étude des structures dans lesquelles les solutions des équations différentielles trouvent naturellement une place.

À l'instar du principe de la géométrie algébrique, l'algèbre différentielle repose sur ce que l'on pourrait considérer aujourd'hui comme une sorte de tautologie, à savoir que les équations contiennent les informations sur les solutions. Cela se décrit plus précisément par l'idée qu'il n'est donc pas toujours nécessaire d'expliciter les solutions pour les comprendre. En suivant ce mantra général, on peut interpréter les travaux de J. F. RITT et de E. KOLCHIN comme un analogue pour les solutions des systèmes d'équations différentielles de ce que l'on pourrait faire en algèbre commutative pour étudier la géométrie des formes produites par les systèmes d'équations poly-

nomiaux ; autrement dit, l'approche rittienne se comparerait à une sorte de « géométrie algébrique affine » des espaces de solutions des systèmes d'équation différentielle. Le cadre dans lequel se place l'algèbre différentielle apporte cependant une difficulté par rapport à l'étude des systèmes polynomiaux : les anneaux commutatifs considérés en algèbre différentielle sont (quasiment toujours) non noethériens. En particulier, beaucoup de théorèmes classiques sur les anneaux commutatifs noethériens, utiles en géométrie algébrique ou bien deviennent erronés, ou bien demandent à être étendus par des arguments *ad hoc*.

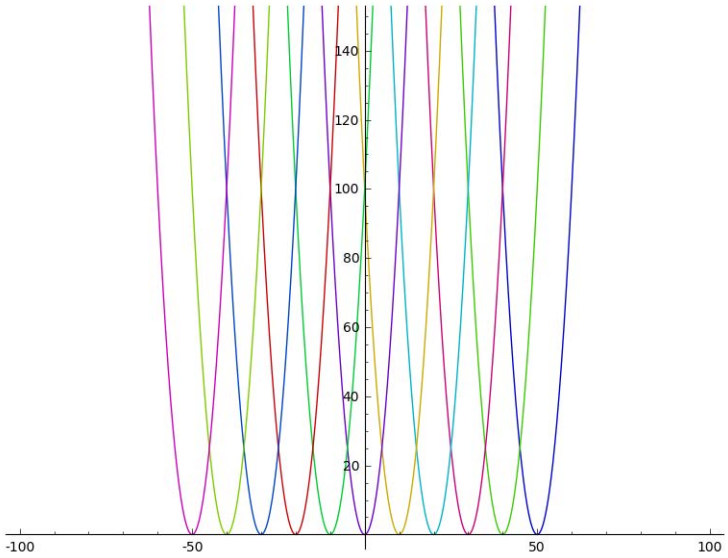
Illustrons notre propos par deux exemples : la décomposition d'un idéal radical dans un anneau et la complétion des anneaux. Dans un anneau commutatif noethérien tout idéal radical se décompose en une intersection finie d'idéaux premiers (ce qui correspond géométriquement à l'existence d'un nombre fini de composantes irréductibles). Ce résultat reste valide en algèbre différentielle mais demande des lemmes spécifiques à l'algèbre différentielle dont la notion de *base* (voir [Rit50, 12. p10 et 16. p13]). On peut également retrouver ce résultat à partir d'une sorte de propriété de noethérianité différentielle que représente le théorème de la base finie de *Ritt-Raudenbush* (voir section 2.4.4) ; cet énoncé assure en effet que tout idéal différentiel radical est engendré par un nombre fini d'éléments.

Un autre exemple est la complétion d'un anneau muni d'une topologie pré-adique (c'est-à-dire dont la notion de distance se définit à partir de l'appartenance à une puissance d'un idéal de définition). Ce type d'objet apparaît naturellement en géométrie algébrique pour étudier l'équivalent des voisinages tubulaires de sous-objets, que l'on appelle *voisinages formels*. Si l'anneau de départ est noethérien, la topologie qui rend le complété complet (comme le nom le suggère) est également une topologie préadique. Cependant lorsque l'anneau n'est plus noethérien, le résultat n'est plus aussi évident. Et si, à ce stade, la question de savoir si le complété est complet pour une topologie pré-adique est, à notre connaissance, ouverte, nous montrons dans cette thèse (voir partie IV et plus précisément le théorème 7.3.1) que les candidats naturels ne conviennent pas.

Malgré ces difficultés, une force de la théorie de J. F. RITT est qu'il ne construit pas seulement des outils abstraits, mais des outils et des énoncés qui permettent également d'expliciter tout ou partie de l'information. Un exemple de tels résultats est fourni par le théorème des petites puissances de J. F. RITT (ou low power theorem voir [Rit50, p64] ou 2.7).

La question sous-jacente tourne autour de celle de la décomposition minimale d'un idéal différentiel parfait I comme l'intersection d'idéaux premiers, appelés *composantes*. Dans le cas où l'idéal différentiel I est engendré (à radical près) par un élément, disons $I = \{F\}$, alors cette décomposition, comme intersection d'idéaux

premiers, comporte, de manière générale, deux types d'idéaux premiers : un de ces idéaux ne contient pas le séparant de F (on appelle cet idéal la solution générale de F voir [Rit50, 12 p30]) tandis que tous les autres contiennent le séparant. Par ailleurs, on peut montrer que toute composante de I, qui n'est pas la solution générale, est la solution générale d'un autre polynôme différentiel A. Réciproquement, si la composante générale d'un polynôme A est une composante de l'idéal différentiel I on dira que A est une composante de I. Une question que se pose J. F. RITT est de savoir si, étant donné le polynôme différentiel A, sa solution générale est une composante de F. Le théorème des petites puissances fournit une réponse sous la forme d'une caractérisation (nécessaire et suffisante) numérique simple et algorithmique, une fois que F est éventuellement réécrit sous une forme « admissible » ce que J. F. RITT appelle le théorème de préparation (voir [Rit50, 17. p63] et 2.7). Considérons par exemple l'équation différentielle ordinaire $(y')^2 = 4y$. On résout cette équation en la réécrivant (de manière un peu informelle) sous la forme $y_1/\sqrt{y} = 2$. La solution qui sort de cette méthode est faisceau de courbes du plan paramétré (pour $c \in \mathbf{R}$) par $y(x) = (x + c)^2$.



Cela correspond à ce que J. F. RITT appelle la solution générale. Notons que cette équation possède également une solution singulière qui est donnée par $y(x) = 0$. Du point de vue de la décomposition $y(x) = 0$ et $y(x) = (x + c)^2$ décrivent analytiquement nos deux composantes. Le Low Power prédit directement que $y(x) = 0$ induira une composante, simplement parce que la puissance en y' est strictement supérieure à celle de y dans l'équation que nous considérons ici.

Les applications de la théorie de Ritt-Kolchin sont nombreuses et dans cette thèse elle sous-tend l'ensemble de nos résultats. La première illustration de l'utilisation de cette théorie est visible dans la partie II. Elle nous a en effet permis de redémontrer

un résultat sur la structure des idéaux de l'anneau des opérateurs différentiels et de l'étendre aux équations différentielles avec second membre. Dans [Sab93, proposition 2.3.1], se pose la question de savoir si un idéal (à gauche) d'opérateurs différentiels du plan à coefficients analytiques en l'origine est engendré par un nombre fini d'opérateurs. C. SABBAH y prouve qu'il suffit de deux opérateurs pour engendrer un tel idéal. Nous montrons au chapitre 4 (voir section 4.6) comment ce problème peut se retraduire dans le monde commutatif en la question de la surdétermination des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires, et y répondons. Ceci fournit parallèlement une preuve alternative du résultat de SABBAH qui utilise seulement des fondamentaux de l'algèbre différentielle, ce qui apporte la facilité, par rapport aux opérateurs différentiels, de penser dans le monde commutatif. Nous avons ainsi montré que tout système d'équations différentielles ordinaires linéaires sur $k[[t]], k[t]$ ou $k\{t\}$, avec ou sans second membre, est en fait engendré par au plus deux équations.

Théorème (H.–SEBAG)**.** *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit A une extension différentielle de k (que l'on note K), ou un anneau ∂-euclidien dont le corps des fractions est K. On note $A\{y\}$ l'anneau des polynômes différentiels en la variable y et à coefficients dans l'anneau A.*

Soit I un idéal différentiel de l'anneau $A\{y\}$ engendré par des éléments de degré un. On suppose que l'idéal $I \otimes_A K$ est un idéal propre de $K\{y\}$. Alors il existe deux polynômes différentiels $g_1, g_2 \in I$ tels que $I = [g_1, g_2]$, c'est à dire que I coïncide avec l'idéal différentiel engendré par g_1 et g_2.

Ce résultat est encore plus fort dans le cas des équations différentielles à coefficients sur un corps arbitraire (non nécessairement un corps de constantes), car un système d'EDO linéaires y est en fait engendré par une unique équation (voir théorème 4.4.1 et proposition 4.4.2). L'autre propriété de notre preuve est qu'elle permet de traiter, de manière uniforme le cas des EDO linéaires à coefficients non constants variants dans des anneaux divers, alors que les preuves correspondantes pour les opérateurs différentiels proposent pour chaque anneau des argumentaires différents. Elle fournit enfin un algorithme (voir théorème 4.5.1) quand les coefficients varient dans un corps (voir les exemples de la section 4.7).

Les résultats de cette thèse suivent les principes généraux que nous venons d'évoquer et s'organisent autour des deux axes principaux suivants :

1. L'algèbre différentielle tropicale.
2. L'espace des déformations infinitésimales des solutions des systèmes d'EDO.

Dans les années 1970-1980 apparaît une nouvelle branche en mathématiques : la *géométrie tropicale*. La géométrie tropicale a des liens multiples avec de nombreuses disciplines des mathématiques, que ce soit en mathématiques fondamentales ou appliquées. Ses origines remontent aux années 1970 et apparaissent dans un travail de G. BERGMAN [Ber71] sur les ensembles limites logarithmiques. Depuis la géométrie tropicale a connu son essor grâce aux travaux de M. KAPRANOV, M. KONTSEVICH, G. MIKHALKIN, O. VIRO et B. STURMFELS et s'est notamment illustrée comme un outil très efficace de la géométrie algébrique réelle. L'idée principale de cette théorie est de remplacer les objets algébro-géométriques par des fonctions affines par morceaux. Dans le monde tropical l'addition est remplacée par le maximum (ou parfois le minimum dans ce qui sera utile dans cette thèse) et la multiplication est remplacée par l'addition. Transformer un polynôme *via* ses opérations, par exemple, est ce qu'on appellera dans cette thèse l'action de *tropicalisation*. Chercher les « zéros » de ces polynômes tropicaux prend alors un sens très différent.

Les similarités entre la géométrie algébrique et la géométrie tropicale résident dans le fait que, grâce à l'opération des logarithmes, la géométrie algébrique « dégénère » en la géométrie tropicale. Ainsi, on peut raisonnablement espérer que des propriétés vraies sur des objets de géométrie algébrique se transposent en géométrie tropicale et réciproquement (voir [BS13] pour une introduction à la géométrie tropicale). Suite aux premiers succès de cette théorie, D. GRIGORIEV introduit en 2015 dans un article publié en 2017 dans [Gri17] les éléments de l'*algèbre différentielle tropicale*, mélange entre l'algèbre différentielle et la géométrie tropicale. Il y développe en particulier la notion de solutions tropicales des systèmes d'équations différentielles tropicalisées et, étant donné d'un idéal différentiel d'équations différentielles *ordinaires*, il y décrit un morphisme allant des solutions de ce système vers les solutions tropicales de l'idéal tropicalisé. Ce morphisme consiste à considérer le support des solutions de l'idéal d'équation différentielles. Dans l'article D. GRIGORIEV pose la question de savoir si ce morphisme est surjectif. La réponse à cette question dans le cadre des équations différentielles ordinaires est positive ; c'est l'objet du théorème fondamental de la géométrie différentielle tropicale pour les systèmes d'équations ordinaires obtenu dans [AGT16].

Si $\mathbf{Q} \subset k$, étant donné une équation différentielle ordinaire algébrique à coefficients dans $k[[t]]$, la tropicalisation différentielle, à l'instar du cadre algébrique, consiste à transformer les opérations $+$ en $\min$ et $\times$ en $+$ et les séries formelles en t par leur valuation. On peut évaluer un polynôme tropical en un point $S = (s_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ en remplaçant y_n par $\mathrm{Val}_n(S) = \min(\{s \geqslant n \mid s \in S\})$. Une solution d'un polynôme tropical est un point de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ pour lequel le $\min$ est atteint au moins deux fois (ou si ce $\min$ est l'ensemble vide). Étant donné f un polynôme différentiel

le théorème fondamental de la géométrie différentielle tropicale énonce que le support des solutions de f est donné par les solutions tropicales des tropicalisés de $[f]$ (c'est-à-dire des éléments de l'idéal différentiel engendré par f).

Exemple. Le polynôme différentiel $f = t\cdot y_2 + y_1y_0 + 2$ de $\mathbf{R}[[t]]\{y\}$ se tropicalise en $f_{trop} = \min(1+y_2, y_1+y_0, 0)$. Une solution de $\min(1+y_2, y_1+y_0, 0)$ est $S = \{0, 1\}$. En effet

$$\begin{aligned} f_{trop}(S) &= \min(1 + \mathrm{Val}_2(S), \mathrm{Val}_1(S) + \mathrm{Val}_0(S), 0) \\ &= \min(\varnothing, 0 + 0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi le minimum de $f_{trop}(S)$ qui vaut zéro est atteint deux fois. Par contre, $S = \{0, 2\}$ car bien $1 + y_2$ et $y_1 + y_0$ évalués en S valent 1, le minimum n'est atteint qu'une fois en 0. Bien entendu $S = \{0, 1\}$ n'est *a priori* pas le support d'une solution de $t\cdot y_2 + y_1y_0 + 2$, car pour cela il faudrait que S soit également la solution des tropicalisés de toutes les dérivées de $t \cdot y_2 + y_1y_0 + 2$.

Le résultat principal de cette thèse, autour du théorème fondamental, concerne une généralisation du théorème fondamental de la géométrie tropicale différentielle au cadre des équations différentielles aux dérivées partielles. Précisément, nous nous sommes intéressés à la question suivante : si l'on donne un sens raisonnable aux analogues des objets dans ce cadre, le morphisme de support (qui va des solutions de l'idéal différentiel engendré par les équations aux dérivées partielles vers les solutions tropicales du l'idéal tropicalisé) est-il encore surjectif ? À l'instar du théorème fondamental pour les EDO, la réponse à cette question reste positive.

Théorème (BOULIER–FALKENSTEINER– GARAY-LÓPEZ–H.–NOORDMAN–TOGHANI)**.** *Soit K un corps algébriquement clos et indénombrable de caractéristique nulle. Soit G un idéal différentiel de l'anneau $R_{m,n}$. Alors*

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}(G)) = \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G)).$$

Une des principales difficultés rencontrées a été de définir, dans ce cadre partiel, la notion de « tropicalisé » pour les polynômes différentiels (voir section 5.3 et définition 5.3.3). Cela a été rendu possible en considérant un objet géométrique : les sommets du polytope de Newton d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ (voir section 5.1 et définition 5.1.5). Cette notion se voulait un remplacement, pour les séries formelles à plusieurs variables, de la notion de valuation (voir la définition de l'application tropicalisation 5.2.1). Avec cette idée et une fois définie une généralisation de Val_n, la tropicalisation et l'évaluation d'un polynôme différentiel partiel tropical fait sens.

Encore une fois grâce à l'utilisation d'arguments d'algèbre différentielle, mais aussi de géométrie, et de géométrie algébrique, nous avons pu montrer que l'équivalent du théorème fondamental de la géométrie tropicale différentielle est vrai pour les équations aux dérivées partielles (voir partie III et en particulier le théorème 6.2.1).

Le dernier axe de mon travail concerne l'étude de l'espace des déformations infinitésimales des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Précisons que ce que l'on appelle ici « déformations infinitésimales » a, plus simplement, été appelé « déformations » dans une bonne partie de la littérature sur le sujet. Ici nous rajouterons le terme *infinitésimal* afin de souligner que les déformations considérées prennent leur valeur dans un anneau local complet, et pas seulement un anneau local. Si $\mathbb{S}$ est un système d'EDO et $\gamma \in k[[T]]$ une solution donnée, une déformation de γ est la donnée d'une solution $\gamma_\varepsilon(T)$, « proche » algébriquement de la solution γ. Concrètement, si $\gamma(T) = \sum_{i\geqslant 0} a_i T^i$, une déformation $\gamma_\varepsilon(T)$ sera une série formelle $\sum_{i\geqslant 0} b_i(\varepsilon)T^i$ encore solution du système $\mathbb{S}$; le paramètre ε exprimant cette contrainte de « proximité ». En particulier, en $\varepsilon = 0$ on force $\gamma_0(T) = \gamma(T)$. La géométrie algébrique donne un sens à ce type d'espaces de solutions de systèmes d'équations différentielles et de leurs déformations. C'est ce que nous présentons aux chapitres 11 et 13.

L'ensemble des solutions formelles du système $\mathbb{S}$ prend un sens en géométrie algébrique à travers la construction de l'*espace des arcs* (ou, plus précisément, un sous-schéma fermé de l'espace des arcs) [1]. Les déformations infinitésimales de γ, quant à elles, se comprennent comme des points du *voisinage formel* de γ dans l'espace des arcs.

Le schéma des arcs a été introduit en 1968 par J. NASH dans un article qui ne sera publié qu'en 1995 dans [Nas95], et a été utilisé depuis comme outil utile à de nombreux développements notamment de la théorie des singularités. Mon travail s'inscrit dans ces sujets. Si X est une variété algébrique sur un corps k, le schéma des arcs $\mathscr{L}_\infty(X)$ de X est un espace qui paramètre les germes formels de courbes tracés sur X. Par construction, nous dirons que si x est un point de $\mathscr{L}_\infty(X)$, il lui correspond un germe de courbe sur X, c'est-à-dire un morphisme de k-schémas $\mathrm{Spec}(k[[T]]) \to X$.

1. En réalité, il y a, au moins, deux manières de comprendre l'espace des arcs d'un polynôme différentiel. Soit l'on suppose que l'on sait construire le schéma des arcs associé à un polynôme non différentiel à plusieurs variables (voir plus bas) et l'on spécialise chacune de ses variables en une dérivée, ce qui permet de voir l'espace des arcs d'un polynôme différentiel comme un sous-schéma fermé du schéma des arcs d'un certain polynôme non différentiel. Soit, au contraire, on peut voir le schéma des arcs d'un polynôme non différentiel comme un cas particulier de l'espace des arcs d'un polynôme différentiel d'ordre zéro.

Si par exemple X est un k-schéma affine de type fini, c'est-à dire si

$$X = \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m))$$

est une variété affine définie par la donnée du système des équations algébriques f_i, alors un point k-rationnel $x \in \mathscr{L}_\infty(X)(k)$ correspond encore à un n-uplet de séries formelles $\gamma(T) \in k[[T]]^n$ tel que $f_i(\gamma(T)) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

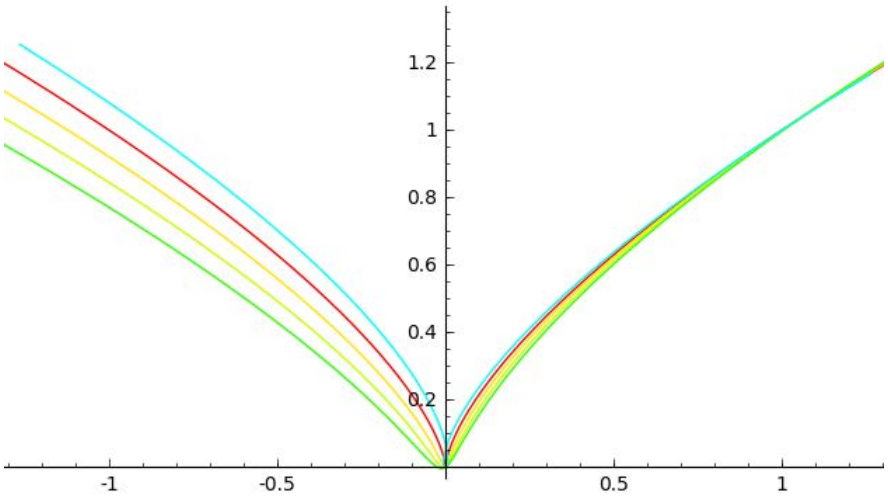
Classiquement en géométrie algébrique, le voisinage formel d'un schéma Y le long d'un sous-schéma fermé (typiquement, un point fermé de Y) correspond à la notion de voisinage tubulaire (infinitésimal) du sous-schéma à l'intérieur de Y. De manière générale, la géométrie algébrique propose une version de la théorie des déformations (infinitésimales) de ses objets. Si k est un corps et que l'on se donne un foncteur d'ensembles F défini sur la catégorie des k-algèbres, une A-déformation infinitésimale de $\gamma \in F(k)$, pour une k-algèbre locale quasi-artienne A (en particulier complète), est la donnée de $\gamma_A \in F(A)$ qui se réduit sur γ par le morphisme $A \to k = A/\mathfrak{M}_A$. Le théorème d'adjonction établi au chapitre 9 permet de donner une interprétation naturelle de la notion de déformations infinitésimales algébrique en termes de voisinages formels (voir proposition 9.1.12). Dans le cadre de cette thèse, cette adjonction nous intéressera essentiellement dans le cas du schéma des arcs, ou plus précisément du lien qu'elle induit entre les déformations infinitésimales des solutions des équations différentielles et les voisinages formels du schéma des arcs (voir proposition 13.1.2). Autrement dit, appliqué au cadre d'un germe formel de courbe $\gamma(T)$ sur X, c'est-à-dire un point rationnel de $\mathscr{L}_\infty(X)$, le voisinage formel en γ paramètre quant à lui la notion de déformations précédente.

On note en général $\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma$ le voisinage formel de γ dans X. Cependant comme la notion de voisinage formel de γ est locale, le voisinage formel de γ dans X peut s'étudier en se restreignant à des voisinages ouverts (affines par exemple) de γ. L'avantage de l'étude lorsqu'elle est restreinte à des voisinages ouverts affines, c'est que par l'équivalence de catégorie entre les schémas affines et les anneaux, il suffit d'étudier des anneaux. Ainsi comprendre le voisinage formel $\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma$ revient à comprendre l'anneau topologique $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$ (complétion de l'anneau des germes de X en γ). Notons encore une fois que cet énoncé n'est pas spécifique aux arcs. Le voisinage formel d'un point x d'un schéma X est le spectre formel de l'anneau topologique $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$.

Si $(A, \mathfrak{m}_A)$ est une k-algèbre locale quasi-artinienne (c'est-à-dire une k-algèbre locale dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ est nilpotent et le corps résiduel isomorphe à k), les A-points du k-schéma formel $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}})$ se voient en effet, dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m))$, comme les n-uplets de $\gamma_A(T) \in A[[T]]^n$ tel que $f_i(\gamma_A(T)) = 0$ et $\gamma_A(T) \equiv \gamma(T) \pmod{\mathfrak{m}_A}$. L'appartenance des coefficients des

séries formelles de $\gamma_A(T)$ à l'anneau A, sorte d'épaississement infinitésimal, traduit la notion de « proximité » évoquée précédemment, pour le type de topologie linéaire que nous étudierons dans la partie IV.

Exemple. Considérons la courbe définie par la donnée du polynôme $f = y^2 - x^3$ (dessinée en rouge) ainsi que quelques déformations infinitésimales de l'arc $\gamma = (t^2, t^3)$. Les autres courbes tracées représentent les courbes engendrées par des déformations infinitésimales vues au premier ordre. Plus précisément les autres couleurs représentent des déformations infinitésimales de la forme $\gamma_a = (t^2 + 2at, t^3 + 3at)$ pour différentes valeurs de a choisies proches de 0.



Ces voisinages formels des points rationnels dans le schéma des arcs possèdent une structure particulière décrite par un théorème dû, en caractéristique zéro, à M. GRINBERG et D. KAZHDAN, puis généralisé pour les corps de caractéristique arbitraire par V. DRINFELD, dont voici l'énoncé :

Théorème (GRINBERG–KAZHDAN, DRINFELD)**.** *Soit X un schéma de type fini sur un corps k, $\gamma\colon \mathrm{Spec}\ k[[t]] \to X$ un arc rationnel non dégénéré, c'est-à-dire un élément de $(\mathscr{L}_\infty(X)\backslash\mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X)))(k)$, et $\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma$ le voisinage formel de γ dans $\mathscr{L}_\infty(X)$. On suppose que $\dim_{\gamma(0)}(X) \geqslant 1$. Il existe un k-schéma S de type fini, un point $s \in S(k)$ et un isomorphisme de k-schéma formels $\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma \cong S_s \times_k \mathrm{Spf}(k[[(T_i)_{i\in\mathbf{N}}]])$.*

De manière imagée ce théorème indique que les voisinages formels des points rationnels *non dégénérés* [2] dans le schéma des arcs sont des « cylindres » de base noethérienne S_s et de dimension infinie. Notons que ce théorème est faux, en général,

2. Si $\mathrm{nSm}(X)$ désigne le lieu non lisse de X, alors un arc est dit non dégénéré si $\gamma \notin \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$

lorsqu'on considère des arcs dégénérés, c'est-à-dire entièrement contenus dans le lieu non lisse (voir par exemple [BS17c] et [CH16]). Dans différents travaux (voir [BS17b], [BS17d], [BS19a]), D. BOURQUI et J. SEBAG ont montré que, même si une infinité de base pouvait convenir, il existait dans la classe d'isomorphie (des bases convenables) un représentant naturel et que ce modèle encodait les singularités du germe formel de X au point base de γ. Si cet énoncé, enfin, vaut pour les points rationnels, il ne s'étend pas en général à tout point du schéma des arcs $\mathscr{L}_\infty(X)$ puisque, comme l'ont prouvé A. REGUERA ou T. DE FERNEX et R. DOCAMPO, pour d'autres points le complété est noethérien.

Le premier travail dans cette veine contenu dans notre thèse a consisté à étudier le lien, ou plutôt l'absence de lien entre les nilpotents au voisinage formel d'un arc non dégénéré et les nilpotents dans la complétion de ce voisinage formel. D'un côté, si γ est un arc k-rationnel non dégénéré, D. BOURQUI et J. SEBAG ont suggéré dans [BS17d] qu'il devrait y avoir un lien entre les nilpotents de la complétion $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$ et les singularités de X. D'un autre côté, on sait également les fonctions régulières nilpotentes de $\mathscr{L}_\infty(X)$ contiennent de l'information sur les singularités de X. Il a été montré dans [Seb17, thm 1.2] que, si k est un corps de caractéristique nulle, et si $\mathfrak{C}$ est , par exemple, une k-courbe intégrale et localement d'intersection complète, alors $\mathfrak{C}$ est lisse si et seulement si le k-schéma $\mathscr{L}_\infty(\mathfrak{C})$ est réduit. L'existence de fonctions régulières nilpotentes au niveau du schéma des arcs semble donc, à plusieurs niveaux, corrélée à l'existence de singularités sur la variété étudiée. En complément de ces premières observations, nous avons montré dans le théorème 10.0.1 que les fonctions locales nilpotentes au voisinage d'un arc non dégénéré γ (c'est-à-dire les fonctions nilpotentes de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$) et les fonctions nilpotentes de la complétion de ce voisinage (qui correspond au voisinage formel de γ) ne sont pas reliées les unes aux autres.

Ce résultat était déjà connu sur un corps k de caractéristique nulle lorsque l'arc γ est un point stable [3] (voir [Reg09, Theorem 3.13] pour l'énoncé et [Reg06], [Reg09], [FD17, section 11] pour la notion de point stable). Il était annoncé, sans preuve, dans [FD17] que le théorème [Reg09, Theorem 3.13] sur les points stables s'étendait en caractéristique positive, grâce aux dérivations de Hasse-Schmidt. Par ailleurs, on pouvait trouver dans [BS17b, Proposition 8.1] des considérations sur le nilradical de $\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma$ lorsque γ est un point rationnel non dégénéré. Ces divers énoncés nous ont conduit à penser que le résultat [Reg09, Theorem 3.13] s'étendait pour des arcs, plus généraux que des points stables et en caractéristique positive.

En utilisant, effectivement, les dérivations de Hasse-Schmidt et en particulier la dérivation d'Hasse-Schmidt d'adjonction (qui est une dérivation de Hasse-Schmidt sur

3. De façon imagée un point du schéma des arcs est stable lorsqu'il est « gros », dans le sens où il est de codimension finie.

l'algèbre universelle de Hasse-Schmidt associée à un anneau) [4] , nous avons donné une preuve fonctionnant pour tout arc non dégénéré sur un corps quelconque. Ce résultat semble suggérer que la classe des arcs non dégénérés forme une classe intéressante dans le sens où l'on obtient un énoncé sur toute cette classe d'arc qui est faux sur les arcs dégénérés (voir par exemple [BS17c]).

Enfin, on pourra citer comme corollaire de certains arguments utilisés dans la preuve que, pour tout schéma réduit de type fini dont le schéma des arcs est irréductible, il existe une identification naturelle entre les formes différentielles de torsion les et fonctions nilpotentes de poids 1 du schéma des arcs, déjà connue en caractéristique nulle. Une question intéressante est alors de caractériser les classes de k-variétés irréductibles (où k est de caractéristique p positive) pour lesquelles le schéma des arcs reste irréductible (en caractéristique zéro le schéma des arcs d'une variété irréductible reste toujours irréductible par un résultat de [Kol73, Prop. 10, p. 200]).

Théorème (BOURQUI–H.)**.** *Soient k un corps, X une k-schéma réduit de type fini, $\mathscr{L}_\infty(X)$ le schéma des arcs de X et γ un arc tel que $\gamma \notin \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$. Alors le nilradical de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est inclus dans le noyau du morphisme $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma} \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$.*

Il est naturel de se demander si l'inclusion donnée dans ce théorème est une égalité. D'après [Reg09, Theorem 3.13 & Corollary 4.3], c'est une égalité si k est de caractéristique nulle et si γ est un point *constructible* non dégénéré du schéma des arcs, appelé *stable* dans *loc. cit.*. Nous montrons également le résultat suivant :

Théorème (BOURQUI–H.)**.** *Soit k un corps et X un k-schéma géométriquement réduit de type fini admettant une résolution des singularités. Soit $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X)$ un point fermé tel que $\gamma \notin \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$. Alors le nilradical de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ coïncide avec le noyau du morphisme de complétion $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma} \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$.*

Un second travail dans l'étude des déformations infinitésimales des solutions formelles concerne les EDO d'ordre arbitraire. Dans [BS16], D. BOURQUI et J. SEBAG ont montré que la notion de déformations infinitésimales, comme indiqué plus haut, faisant encore sens dans le cadre différentiel. Il « suffit » en effet d'utiliser la caractérisation générale des voisinages formels en terme de déformations infinitésimales appliquée au schéma des arcs et l'adjonction entre le schéma des arcs et le schéma des arcs différentiel.

Le résultat principal de [BS16] montre que l'espace des déformations infinitésimales d'une solution non constante d'une EDO d'ordre 1 s'identifie à un disque formel

4. La dérivation d'Hasse-Schmidt d'adjonction est utilisée dans [BNS20, §7.6] pour construire un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui envoie une algèbre munie de dérivations de Hasse-Schmidt sur son algèbre sous-jacente. Nous n'avons pas trouvé d'autres occurrences de cet objet pourtant naturel dans la littérature concernant le schéma des arcs. On pourra cependant se référer à la remarque 1.4.6.

de dimension 1. (Notons que nous fournissons une preuve alternative de ce résultat au chapitre 14.) L'objet de notre théorème est la généralisation de [BS16] au cadre des EDO d'ordre arbitraire et au voisinage d'une solution non singulière [5] (voir théorème 13.0.1.) En ordre supérieur, la situation est nettement plus compliquée, et une première question était donc de savoir si cet espace de solutions allait rester noethérien. Comme indiqué plus haut, une solution d'une EDO $f^\partial = 0$, ou *arc différentiel*, peut se définir comme un point d'un sous-schéma fermé du schéma des arcs algébrique associé à l'équation algébrique $f = 0$ sous-jacente [6]. Nous notons encore $\mathscr{L}_\infty([f^\partial])$ ce k-schéma. En tant que schéma affine, il fait donc encore sens de lui associer un voisinage formel en un point γ, c'est-à-dire en un arc différentiel, que l'on définit comme le k-schéma formel $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty([f^\partial]),\gamma}})$. C'est à nouveau cet objet qui va paramétrer les déformations infinitésimales différentielles (voir chapitre 13). La dimension de l'espace tangent d'un tel objet en un point de cet objet géométrique est ce qu'on appelle la *dimension de plongement*, que nous notons $\mathrm{emb.dim}$. Nous montrons l'énoncé suivant :

Théorème (H.)**.** *Soit k un corps de caractéristique 0. Soit $f^\partial = 0$ une EDO algébrique d'ordre $n \geqslant 1$. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution qui n'annule pas le séparant S_f. Alors l'espace des déformations infinitésimales différentielles de f^∂ en γ est noethérien et sa dimension de plongement majorée par n. Autrement dit, l'anneau $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty([f^\partial]),\gamma}}$ est noethérien et $\mathrm{emb.dim}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty([f^\partial]),\gamma}}) \leqslant n$.*

Soulignons que cet énoncé diffère du théorème de DRINFELD-GRINBERG-KAZHDAN puisqu'ici l'espace de déformations infinitésimales est bien noethérien, et se rapproche en ce sens d'énoncé du type [Reg09 ; FD17]. Notons enfin que pour un ordre arbitraire cet espace n'est pas toujours un disque formel mais que des relations de contraintes peuvent exister sur les coefficients des déformations, ce qui participe à complexifier la situation. La preuve de ce théorème utilise un point de vue géométrique relevant de l'étude des voisinages formels et de leur espace tangent. Ces éléments sont présentés dans le chapitre 12.

Exemple. Considérons par exemple l'équation différentielle $f^\partial = (y')^4 - 2^3 y^2 y''$ sur un corps k de caractéristique nulle, et $f = y_1^4 - 2^3 y_0^2 y_2$ le polynôme (différentiel) sous-jacent. Considérons la solution $\gamma(T) = T^2$. Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ une k-algèbre locale quasi-artinienne, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $\mathfrak{M}_A^m = 0$ et que $A/\mathfrak{M}_A = k$. Comprendre les déformations infinitésimales de f^∂ au voisinage de γ

5. Dans ce cadre, cela signifie que la solution n'annule pas le séparant. Le séparant d'une EDO f^∂ d'ordre n est la dérivée partielle de f^∂ par rapport à la dérivée $y^{(n)}$ de plus haut ordre dans l'expression de f^∂.

6. On peut également voir ce résultat à travers une adjonction (voir équation 11.1.1)

revient à comprendre fonctoriellement en A l'ensemble

$$\{\gamma_A(T) \in \mathfrak{M}_A[[T]] \mid f(\gamma + \gamma_A) = 0\}.$$

En particulier, on peut montrer que la dimension de plongement en γ est donnée par la dimension de l'espace vectoriel

$$\{\gamma_\epsilon(T) \in \mathfrak{M}_{k[\epsilon]/(\epsilon)^2}[[T]] \mid f(\gamma + \gamma_\epsilon) = 0\}.$$

En utilisant la formule de Taylor sur $f(\gamma + \gamma_\epsilon) = 0$, on peut montrer que cette dimension de plongement est également donnée par la dimension de l'espace des solutions de

$$\partial_{y_2}(f)\gamma_\epsilon'' + \partial_{x_1}(f)\gamma_\epsilon' + \partial_{x_0}(f)\gamma_\epsilon = 0.$$

Si on note $\gamma_\epsilon = \sum_{i \geqslant 0} u_{\epsilon,i} T^i$, et en identifiant les coefficients dans la formule précédente, on peut montrer que la dimension de l'espace des solutions de l'équation linéaire ci-dessus vaut 2.

Cependant, on peut montrer que l'anneau $(k\widehat{\{y\}/[f]})_\gamma$ n'est pas isomorphe à $k[[T_1, T_2]]$, car si l'on cherche à calculer l'ensemble

$$\{\gamma_\epsilon(T) \in \mathfrak{M}_{k[\epsilon]/(\epsilon)^8}[[T]] \mid f(\gamma + \gamma_\epsilon) = 0\}$$

avec $\gamma_\epsilon = \sum_{i \geqslant 0} u_{\epsilon,i} T^i$, on peut montrer que l'égalité $f(\gamma + \gamma_\epsilon) = 0$ impose les relations $u_{\epsilon,1}^4 u_{\epsilon,4}^3 = 0$. Tous les détails justifiant les affirmations de cet exemple sont le cœur de la partie VI.

Enfin, dans le cas de l'ordre 2 et des EDO bimonomiales, nous relions le précédent théorème au principe de décomposition irréductible de l'idéal différentiel $\{f^\partial\}$ et de l'existence de singularités essentielles expliqués plus haut. Précisément nous montrons (voir chapitre 15 et théorème 15.0.2) :

Théorème (H.)**.** *Soit k un corps de caractéristique 0. Soit $f^\partial = f(y, y', y'') = 0$ une équation* bimonomiale [7] *d'ordre 2 à coefficients constants. Soient $d \geqslant 2$ un entier tel que $\gamma(T) = T^d$ soit une solution de l'EDO f^∂. Si l'idéal différentiel parfait $\{f^\partial\}$ possède une solution singulière essentielle* [8]*, alors la dimension de l'espace tangent de l'espace des déformations infinitésimales différentielles de $f^\partial = 0$ en γ vaut 1. Autrement dit, sous nos hypothèses,* $\mathrm{emb.dim}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty([f^\partial]),\gamma}}) = 1$.

7. La notion d'équation bimonomiale est définie en 15.0.1.
8. La notion de composante singulière essentielle est définie en 2.6.2

Le manuscrit est organisé de la manière suivante. La partie I est consacrée à des préliminaires algébriques. Dans le chapitre 1, nous rappelons les concepts de base liés aux aspects différentiels de l'algèbre commutative (dérivations, formes différentielles, dérivations de Hasse Schmidt), qui serviront au chapitre 2 où nous présentons des fondamentaux de l'algèbre différentielle, dont le théorème des petites puissances de RITT. Dans le dernier chapitre de cette partie, le chapitre 3, nous aborderons la notion de complétion en algèbre commutative. Cette notion est centrale puisqu'elle sous-tend celle des voisinages formels qui sont à la base de certains des résultats importants de cette thèse.

Dans une deuxième partie II nous nous intéresserons à la surdétermination des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires. L'énoncé principal de cette section est le théorème 4.4.1 qui prouve que deux équations suffisent pour comprendre les solutions d'un système d'EDO linéaires.

Dans une troisième partie III nous abordons les questions à la frontière entre la géométrie tropicale et l'algèbre différentielle. Dans un premier chapitre 5 nous définissons les notions d'algèbres différentielles et tropicales nécessaires à l'énoncé du théorème 6.2.1, appelé *théorème fondamental de l'algèbre différentielle tropicale partielle*, en particulier la notion d'évaluation d'un polynôme tropical en une solution. Dans un second chapitre 6 nous y présentons la preuve du théorème 6.2.1.

Dans la quatrième partie V, nous présenterons dans un premier chapitre 8 la construction du schéma des arcs ainsi que quelques propriétés importantes pour notre propos. Ensuite dans le chapitre 9 nous étudierons les voisinages formels de point rationnels du schéma des arcs en rappelant un théorème de structure dû à V. DRINFELD, M.GRINBERG– D.KAZHDAN. Ce théorème servira de modèle à nos propres résultats de structure sur les espaces de déformations infinitésimales des solutions des EDO énoncés dans la partie VI. Enfin, dans le chapitre 10, nous présenterons le théorème 10.0.1 qui calcule le noyau du morphisme de complétion de l'anneau local du schéma des arcs en un point arbitraire.

Inspirés par le théorème de V. DRINFELD, M.GRINBERG – D.KAZHDAN vu dans la partie précédente, nous nous intéresserons dans la partie VI aux voisinages formels de solutions de polynômes différentiels. Nous y définirons dans le chapitre 11 le schéma des arcs différentiels, puis nous montrerons dans les chapitres suivants 12 et 13 que la notion de déformation y fait toujours sens et que nous pouvons définir la notion d'espace tangent et de dimension de plongement. Finalement dans les chapitres 14, 15 nous démontrerons nos résultats sur la dimension de plongement des équations différentielles d'ordre 1 (voir théorème 14.0.1), et les équations d'ordre 2 (voir théorème 15.0.2). Nous conclurons cette partie par des exemples présentés dans le chapitre 16.

Notations, conventions

Cette section regroupe les notations qui seront utiles ou utilisées tout au long de cette thèse. Cette partie complète l'index.

Tous les anneaux considérés seront supposés commutatifs et unitaires.

— On note $\mathbf{Mod}_A$ la catégorie des A-modules.

— On note $D_k(A, M)$ l'ensemble des k-dérivations de A à valeur dans M.

— On note $(\Omega^1_{A/k}, d_{A/k})$ le A-module des formes différentielles relatives (ou différentielles de Kähler) de A sur k.

— On note $\mathbf{Alg}_k$ la catégorie des k-algèbres.

— On note $\mathbf{Algdiff}_{(k,D)}$ la catégorie des (k, D) algèbres différentielles.

— On note A^D l'ensemble des constantes de l'anneau A pour la dérivation D.

— On note $\mathbf{HS}^m_{A/k}$ la m-ième k-algèbre universelle de A.

— On note $[I]$ l'idéal différentiel engendré par I et $\{I\}$ l'idéal différentiel parfait engendré par I.

— On note en général For le foncteur d'oubli.

— On note $\mathrm{Vert}\ X$ l'ensemble des sommets de X.

— $\mathrm{Val}_J(S)$ (voir défintion 5.3.1)

— On note $\widehat{M}$ la complétion (algébrique) de M.

— On note $\mathbf{Sch}_k$ la catégorie des k-schémas.

Première partie

Préliminaires algébriques

Cette partie est dédiée à la présentation des différentes notions fondamentales d'algèbre au cœur de notre travail. Ces préliminaires se concentrent autour de l'algèbre différentielle et de la notion de complétion dans les catégories usuelles de l'algèbre commutative. L'algèbre différentielle a été développée par J. F. RITT à partir des années 1930 jusqu'aux années 50. L'idée est de construire, à l'instar de ce qui existait en géométrie algébrique à l'époque, une théorie algébrique permettant l'étude à la fois qualitative et algorithmique des équations différentielles (ordinaires ou aux dérivées partielles) *polynomiales*. Cette théorie, qui sous l'influence de E. KOLCHIN, élève de J. F. RITT, s'est largement développée en intégrant les éléments de la théorie de Galois différentielle (dans un cadre arbitraire, non nécessairement linéaire), et constitue aujourd'hui un champ d'investigations riche et au potentiel important.

Au premier chapitre 1 nous définirons les modules des dérivations et des différentielles de Kahler sur un anneau commutatif. Ces notions constituent le socle nécessaire pour aborder le chapitre 2 qui le suit et qui présentera à son tour les fondamentaux de ce que l'on appelle *algèbre différentielle*. Elles permettront également via la notion de dérivations d'ordre supérieur (ou dérivations de *Hasse-Schmidt*) de donner une définition alternative d'une autre notion fondamentale de cette thèse : le *schéma des arcs* (voir chapitre 8).

Dans le chapitre 2, nous donnons les définitions de base et présentons quelques-uns des succès de l'approche rittienne : les théorèmes de la base ou des petites puissances, dus à Ritt-Raudenbusch et Ritt-Kolchin, seront par exemple utilisés dans la partie III ou le chapitre 15, le théorème d'irréductibilité de Kolchin, quant à lui, possède une interprétation géométrique en terme de schéma des arcs et sera utile aux chapitres 8, 9 ou 10.

Le dernier chapitre de cette partie portera sur la notion de complétion algébrique qui est au coeur des parties V et VI. Nous présenterons au chapitre 3 les définitions élémentaires et les principales propriétés qui permettront d'aborder sans références extérieures les résultats du chapitre 7.

CHAPITRE 1

DÉRIVATIONS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

La présentation de ce chapitre s'appuie ou s'inspire principalement sur [Laf77] et des notes de D. BOURQUI et J. SEBAG.

1.1 Dérivations

1.1.1 Premières définitions et exemples

Définition 1.1.1. Soit k un anneau et $\varphi\colon k \to A$ une k-algèbre. Une k-dérivation à valeurs dans un A-module M est la donnée d'une application k-linéaire $D\colon A \to M$ telle que

$$\forall a, b \in A, \quad D(ab) = aD(b) + bD(a) \tag{1.1.1}$$

La condition 1.1.1 est appelée la *règle de Leibniz* . Remarquons également que la k-linéarité de D ainsi que la règle de Leibniz impose que pour tout $x \in k$, on ait $D(\varphi(x)) = 0$.

Un anneau A est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{Z}$-algèbre par le morphisme $\varphi\colon \mathbf{Z} \to A, n \mapsto n1_A$. Une dérivation de la $\mathbf{Z}$-algèbre A dans M sera appelé dérivation de A dans M.

On note $D_k(A, M)$ l'ensemble des k-dérivations de A à valeur dans M. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on se permettra de noter $D(A, M)$ cet ensemble.

Remarque 1.1.2. On déduit de la règle de Leibniz que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $a \in A$, on a

$$D(a^n) = na^{n-1}D(a).$$

Par ailleurs, si $s \in A$ est un élément inversible, alors

$$D(as^{-1}) = (sD(a) - aD(s))s^{-2}.$$

Exemple 1.1.3. L'application nulle $0\colon A \to M, a \mapsto 0_M$ est une dérivation que l'on appelle la dérivation nulle ou *dérivation triviale*.

Exemple 1.1.4. Soit I un ensemble d'indice non vide. Soit k un anneau. Pour tout élément $i \in I$, on note ∂_{X_i}, la dérivée partielle de l'anneau de polynôme $k[(X_i)_{i\in I}]$ par rapport à X_i. Pour tout élément $i \in I$, la dérivée partielle ∂_{X_i} est une k-dérivation de $k[(X_i)_{i\in I}]$ dans $k[(X_i)_{i\in I}]$ (muni de sa structure triviale de $k[(X_i)_{i\in I}]$-module).

Définition 1.1.5. Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre et M un A-modules. Soit D une k-dérivation de A dans M. Une constante pour D est un élément $a \in A$ tel que $D(a) = 0$. On note A^D l'ensemble des constantes pour D.

On remarque que, pour toute k-dérivation D, l'ensemble A^D est une sous-algèbre de la k-algèbre A. Si l'anneau A est un corps, alors l'anneau A^D est un sous-corps de A.

Exemple 1.1.6. Soit k un anneau et A une k-algèbre. Soit M un A-module. Soit $D \to A$ la R-dérivation triviale. Alors $A^D = A$.

Exemple 1.1.7. Soit I un ensemble d'indice non vide. Soit k un anneau. Pour tout élément $i \in I$, on note I_i l'ensemble $I\backslash\{i\}$. Alors pour tout élément $i \in I$ on a $k[(X_j)_{j\in I}]^{\partial_{X_i}} = k[(X_j)_{j\in I_i}]$.

Lemme 1.1.8. *Soit k un anneau, A une k-algèbre, M un A-module et $G \subset A$ une famille génératrice pour la k-algèbre A. Une k-dérivation D de A dans M est déterminée par les éléments $D(g)$, où l'élément g parcourt G.*

Démonstration. Soit $a \in A$. Par hypothèse il existe $g_1, \cdots, g_n \in G$ et $P \in k[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $a = P(g_1, \cdots, g_n)$. En appliquant la règle de Leibniz 1.1.1, on remarque que

$$D(a) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{X_i} P)(g_1, \cdots, g_n) D(g_i).$$

Ce qui conclut la preuve. □

1.1.2 La structure de module sur l'ensemble des dérivations

On peut munir $D_k(A, M)$ d'une structure de A-module. Plus précisément la structure de groupe est donnée par la loi suivante. Soit $D_1, D_2 \in D_k(A, M)$, on peut définir $D_1 + D_2 \colon A \to M, a \mapsto D_1(a) + D_2(a)$. Si $a, b \in A$, on a alors

$$\begin{aligned}(D_1 + D_2)(ab) &= D_1(ab) + D_2(ab) \\ &= aD_1(b) + bD_2(a) + aD_1(b) + bD_2(a) \\ &= a(D_1 + D_2)(b) + b(D_1 + D_2)(a)\end{aligned}$$

La dérivation triviale constitue l'élément neutre de ce groupe, et pour $D \in D_k(A, M)$, la dérivation $-D\colon A \to M, a \mapsto -D(a)$ est l'opposé de D. Muni de ces lois, le groupe $D_k(A, M)$ est un sous-module du A-module M^A.

Si $\{g_i\}_{i\in I}$ est un système générateur de la k-algèbre A, on remarque que l'application

$$\begin{array}{ccc} D_k(A, M) & \to & M^I \\ D & \mapsto & (D(g_i))_{i\in I} \end{array} \tag{1.1.2}$$

est A-linéaire et injective d'après le lemme 1.1.8.

Exemple 1.1.9. Soit I un ensemble non vide. Soit k un anneau. On note $A := k[(X_i)_{i\in I}]$ l'anneau des polynômes en plusieurs variables. Alors on remarque que l'application A-linéaire $M^I \to D_k(A, M)$ défini par $(m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \partial_{X_i}(\cdot)m_i$ est une bijection . Remarquons que cette application est bien définie, même si I est infini car un élément de A est annulé par toutes les dérivations partielles, sauf un nombre fini. L'inverse de cette application est l'application définie en 1.1.2 (avec $M = A$). Dans le cas où $M = A$ et si I est fini de cardinal n on en déduit que le A-module $D_k(A, A)$ est libre de rang n, une base étant donnée par $(\partial_{X_i})_{i\in I}$.

Soit k' une k-algèbre. Soit A' une k'-algèbre, M' un A'-module. On note $A := A'_{|k}$ (respectivement M'_A) la k-algèbre (respectivement le A-module) obtenu à partir de A' (respectivement de M') par la restriction des scalaires de k' à k. Alors toute k' dérivation $D \in D_{k'}(A', M')$ est une k-dérivation de $D_k(A, M_{|A})$. En d'autres termes, on a une inclusion $D_{k'}(A', M') \subset D_k(A, M_{|A})$.

Soit k un anneau et A une k-algèbre. Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres. Soit M un A-module et N un B-module. Soit $D \in D_k(A, M)$ une k-dérivation. On dit qu'une k-dérivation $D' \in D_k(B, M)$ est une extension de la k-dérivation D s'il existe une application A-linéaire $f\colon M \to N$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D} & M \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{D} & N. \end{array}$$

1.1.3 Fonctorialité

Soit M et N deux A-modules et $f\colon M \to N$ un morphisme de A-modules. Soit $D \in D_k(A, M)$ une R-dérivation dans M. L'application $f \circ D\colon A \to N$ est R-linéaire,

car composée de deux applications k-linéaires. Par ailleurs, pour $a, b \in A$, on a

$$\begin{aligned} f \circ D(ab) &= f(aD(b) + bD(a)) \\ &= f(aD(b)) + f(bD(a)) \\ &= af(D(b)) + bf(D(a)). \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ D \in D_k(A, N)$. On note $D_k(f) = f \circ D$.

Proposition 1.1.10. *Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre et M, N deux A-modules. Soit également $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_A}(M, N)$. Alors la donnée de $M \mapsto D_k(A, M)$ et de $f \mapsto D_k(f)$ induit un endofoncteur (covariant) de la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ des A-modules. Ce foncteur est exact à droite.*

Démonstration. La donnée de $D_k(A, \cdot)$ définit bien un foncteur car la composition à gauche est fonctorielle. Par ailleurs ce foncteur est exact à droite car le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \cdot)$ l'est. □

Une question naturelle est de savoir si ce foncteur est représentable (voir [KS06, def 1.4.8 p 25] pour la définition de foncteur représentable). La réponse est positive et demande l'introduction des formes différentielles.

1.2 Formes différentielles

Soit k un anneau et A une k-algèbre. On considère l'application k-bilinéaire suivante $m_A \colon A \times A \to A, (a, b) \mapsto ab$. D'après la propriété universelle du produit tensoriel, l'application m se factorise par $A \otimes_k A$. Il existe une unique application k-linéaire $\mu_A \colon A \otimes_k A \to A$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{m_A} & A \\ \downarrow & \nearrow_{\mu_A} & \\ A \otimes_k A & & \end{array} \tag{1.2.1}$$

On note $\mathscr{I}_A = \mathrm{Ker}(\mu_A)$. On remarque que pour tout $a \in A$, l'élément $a \otimes 1 - 1 \otimes a \in A \otimes_k A$ est dans le noyau de μ_A.

On note $i_1 \colon A \to A \otimes_k A$ (respectivement $i_2 \colon A \to A \otimes_k A$) le morphisme de R-algèbre défini par $a \mapsto 1 \otimes a$ (respectivement $a \mapsto a \otimes 1$).

On remarque le morphisme μ_A induit un isomorphisme de k-algèbres $A \otimes_k A \simeq A$ et, que pour tout élément $a \in A$, on a $i_1(a) = i_2(a) \mod \mathscr{I}_A$.

Lemme 1.2.1. *Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre. Soit $G = (g_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de la k-algèbre A. Alors la famille $(1 \otimes g_i - g_i \otimes 1)_{i\in I}$ engendre l'idéal $\mathscr{I}_A$.*

Démonstration. Soit $z = \sum_j x_j \otimes y_j$ un élément de l'idéal $\mathscr{I}_A$. On peut réécrire z sous la forme

$$z = (\sum_j x_j y_j) \otimes 1 + \sum_j (x_j \otimes 1)(1 \otimes y_j - y_j \otimes 1).$$

Par hypothèse $\mu_A(z) = 0$, ainsi $\sum_j x_j y_j = 0$. En particulier z s'écrit alors sous la forme

$$z = \sum_j (x_j \otimes 1)(1 \otimes y_j - y_j \otimes 1)$$

donc la famille $(1 \otimes y - y \otimes 1)_{y\in A}$ engendre l'idéal $\mathscr{I}_A$.

De plus, on remarque que pour tout couple d'éléments $(y, y') \in A^2$, on a la relation suivante :

$$1 \otimes (yy') - (yy') \otimes 1 = (1 \otimes y)(1 \otimes y' - y' \otimes 1) + (1 \otimes y')(1 \otimes y - y \otimes 1).$$

Puisque, pour tout élément $y \in A$, il existe $n \in \mathbf{N}$ et une famille presque nulle $(b_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^n}$ d'éléments de k tels que $y = \sum_{\nu\in\mathbf{N}^n} b_\nu g^\nu$, l'équation précédente montre que l'idéal engendré par la famille $(1\otimes g_i - g_i\otimes 1)_{i\in I}$ contient la famille $(1\otimes y - y\otimes 1)_{y\in A}$, ce qui conclut. □

Rappelons le fait général suivant ; pour tout idéal I d'un anneau B, le B-module I/I^2 est muni d'une structure naturelle de B/I-module. En effet, pour tous $x, y \in B$ tels que $x - y \in I$ et pour tout $\bar{\iota} \in I/I^2$, on remarque que

$$x\bar{\iota} = \bar{x}\iota = \bar{y}\iota = y\bar{\iota} \mod I^2.$$

Notons que si G est un sous-ensemble de I, l'idéal de B engendré par G coïncide modulo I^2 avec le B/I sous-module de I/I^2 engendré par G.

Dans notre contexte, on en déduit une structure de $(A\otimes_k A/\mathscr{I}_A)$-module sur le $A\otimes A$-module $\mathscr{I}_A/\mathscr{I}_A^2$. À l'aide de isomorphisme $A\otimes_k A/\mathscr{I}_A \simeq A$ défini précédemment, on munit $\mathscr{I}_A/\mathscr{I}_A^2$ d'une structure de A-module qui est notée $\Omega^1_{A/k}$. Plus précisément pour tout $a \in A$ et $x \in \mathscr{I}_A$, la multiplication scalaire de la classe de x dans $\mathscr{I}_A/\mathscr{I}_A^2$ est donnée par

$$a \cdot x = (a \otimes 1) \cdot x = (1 \otimes a) \cdot x \mod \mathscr{I}_A^2$$

On définit alors l'application

$$\begin{array}{rccc} d_{A/k}\colon & A & \to & \mathscr{I}_A/\mathscr{I}_A^2 \\ & a & \mapsto & 1\otimes a - a\otimes 1. \end{array}$$

Définition 1.2.2. Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre. Le couple $(\Omega^1_{A/k}, d_{A/k})$ est appelé le A-module des formes différentielles relatives (ou différentielles de Kähler) de A sur k.

Pour tout $a \in A$, on notera en général $d(a)$ ou da l'image de a par $d_{A/k}$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur A et k. On déduit directement du lemme 1.2.1 le lemme suivant :

Lemme 1.2.3. *Soit k un anneau, A une k-algèbre et $G \subset A$ une partie génératrice de A comme k-algèbre. Le A-module $\Omega^1_{A/k}$ est engendré par la famille $(dg)_{g\in G}$. En particulier, si la k-algèbre A est de type fini, alors le A-module $\Omega^1_{A/k}$ est de type fini.*

En particulier, pour tout élément $\omega \in \Omega^1_{A/k}$, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ et des éléments $a_1, \cdots, a_n \in A$ et $b_1, \cdots b_n \in A$ tels que $\omega = \sum_{i=1}^n a_i d(b_i)$. Le lemme suivant va nous permettre de montrer que $d_{A/k}$ est une k-dérivation.

Lemme 1.2.4. *Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre et $\varphi\colon k \to A$ le morphisme structural.*

1. *Pour tout élément $x \in k$, on a $d(\varphi(x)) = 0$.*
2. *Pour tout couple $a, b \in A^2$, on a $d(a+b) = d(a) + d(b)$.*
3. *Pour tout couple $a, b \in A^2$, on a $d(ab) = a\cdot d(b) + b\cdot d(a)$.*

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent de la définition de d, de la k-bilinéarité (respectivement l'additivité) du produit tensoriel.

Pour prouver la dernière propriété, prenons $a, b \in A$. Alors, on a

$$\begin{array}{rcl} d(ab) & = & 1\otimes(ab) - (ab)\otimes 1 \mod \mathscr{I}_A^2 \\ & = & a\otimes 1\cdot(1\otimes b - b\otimes 1) + 1\otimes b\cdot(1\otimes a - a\otimes 1) \mod \mathscr{I}_A^2 \\ & = & a\cdot d(b) + b\cdot d(a) \end{array}$$

□

1.2.1 Une description alternative des formes différentielles relatives

Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre et $\varphi\colon k \to A$ son morphisme structural. Nous allons donner une description alternative du A-module $\Omega^1_{A/k}$. Définissons

d'abord le A-module $\Omega(A,k)$ comme le quotient du A-module libre $\oplus_{a\in A} Ae_a$ par le sous-module engendré par les éléments suivants :

$$\begin{cases} (e_{\varphi(x)})_{x\in k} \\ (e_{a+b}-e_a-e_b)_{a,b\in A} \\ (e_{ab}-ae_b-be_a)_{a,b\in A} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Si $\alpha \in \oplus_{a\in A} Ae_a$, on note $[\alpha]$ sa classe dans le A-module $\Omega(A,R)$. On note $\delta_{A/k}\colon A \to \Omega(A,k)$ l'application définie par $a \mapsto [e_a]$.

Proposition 1.2.5. *Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre et $\varphi\colon k \to A$ son morphisme structural. L'application A-linéaire $\theta\colon \Omega(A,k) \to \Omega^1_{A/k}$ définie par $[e_a] \mapsto d_{A/k}(a)$ est bien définie, surjective, et rend le diagramme de k-modules suivant commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(A,k) & \xrightarrow{\theta} & \Omega^1_{A/k} \\ {\scriptstyle \delta_{A/k}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d_{A/k}} \\ A & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & A \end{array}$$

Démonstration. Le lemme 1.2.4 prouve que θ est bien défini. La commutativité du diagramme se déduit de la définition de $\delta_{A/k}$ et de θ. D'après le lemme 1.2.3, la famille $(d_{A/k}(a))_{a\in A}$ engendre le A-module $\Omega^1_{A/k}$. Ainsi θ est surjective. □

Remarque 1.2.6. On prouvera plus tard, dans la proposition 1.3.2 que θ est un isomorphisme de A-modules en montrant que les couples $(\Omega(A,k),\delta_{A,k})$ et $(\Omega^1_{A/k}, d_{A/k})$ satisfont la même propriété universelle.

Le A-module $\Omega^1_{A/k}$ possède plusieurs propriétés fonctorielles. Soit $f\colon A \to B$ le morphisme de k-algèbres. Soit $(a_i)_i \in A^{\mathbf{N}}$ et $(\alpha_i)_i \in A^{\mathbf{N}}$ deux familles presque nulles de A. Alors cela induit un unique morphisme de A-modules $\Omega^1_{A/k} \to \Omega^1_{B/k}$ défini par

$$\sum_i a_i d_{A/k}(\alpha_i) \mapsto \sum_i f(a_i) d_{B/k}(f(\alpha_i)).$$

En effet, si l'on garde les notations de 1.2.1, on vérifie que $f(\mathscr{I}_A) \subset \mathscr{I}_B$. Ainsi la propriété universelle du passage au quotient implique l'existence de ce morphisme. La A-linéarité de ce morphisme se déduit du lemme 1.2.4. Par l'extension des scalaires ce morphisme induit un unique morphisme de B-modules

$$\Omega^1_{A/k} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/k}.$$

Soit $(b_i)_i, (\beta_i)_i \in B$ deux familles presque nulles de B. On a alors un unique morphisme de A-modules $\Omega^1_{B/k} \to \Omega^1_{B/A}$ défini par

$$\sum_i b_i d_{B/k}(\beta_i) \mapsto \sum_i b_i d_{B/A}(\beta_i)$$

qui induit une suite exacte de B-modules :

$$\Omega^1_{A/k} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/k} \to \Omega^1_{B/A} \to 0.$$

Soit A une k-algèbre, I un idéal de A et $B = A/I$. Mentionnons une propriété importante des différentielles. Soit $a \in I$, alors l'élément $d_{A/k}(a) \otimes 1_B \in \Omega^1_{A/k} \otimes B$ dépend uniquement de la classe de l'élément a modulo I^2. En effet soit $a' \in I$ tel que $a - a' \in I^2$. Ainsi par le lemme 1.2.4, on a :

$$\begin{array}{lcl} d_{A/k}(a - a') & \in & I \\ d_{A/k}(a - a') \otimes 1_B & = & 0 \\ d_{A/k}(a) \otimes 1_B & = & d_{A/k}(a') \otimes 1_B. \end{array}$$

Ainsi l'application $\delta\colon I/I^2 \to \Omega^1_{A/k} \otimes B$ définie par $\bar{a} \mapsto d_{A/k}(a) \otimes 1_B$ est bien définie. Cette application est également B-linéaire. En effet, par définition de la structure de B-module sur I/I^2, pour tout élément $a \in I$ et tout élément $\alpha \in A$, on a d'après le lemme 1.2.4 :

$$\begin{array}{rcl} \delta(\bar{\alpha a}) & = & d_{A/k}(\alpha a) \otimes 1_B \\ & = & (\alpha d_{A/k}(a)) \otimes 1_B + (a d_{A/k}(\alpha)) \otimes 1_B \\ & = & \bar{\alpha} \cdot (d_{A/k}(a) \otimes 1_B) + d_{A/k}(\alpha) \otimes \bar{a} \\ & = & \bar{\alpha} \cdot (d_{A/k}(a) \otimes 1_B). \end{array}$$

Finalement, on vérifie que ce morphisme induit la suite exacte suivante

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{A/k} \otimes B \longrightarrow \Omega^1_{B/k} \longrightarrow 0. \tag{1.2.3}$$

1.3 Représentabilité du foncteur de dérivation

Définition 1.3.1. Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre. Soit M un A-module et soit $d \in D_k(A, M)$. Le couple (M, d) est appelé k-dérivation universelle si, pour tout A-module N et pour toute k-dérivation $D \in D_k(A, N)$ il existe une unique application

A-linéaire tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D} & N \\ {\scriptstyle d}\downarrow & \nearrow_{f} & \\ M & & \end{array} \tag{1.3.1}$$

En d'autres termes une k-dérivation universelle est un couple représentant le foncteur $D_k(A, \cdot)$. On en déduit que si elle existe la k-dérivation universelle est unique (à isomorphisme unique de A-modules près).

Proposition 1.3.2. *Soit k un anneau et A une k-algèbre. Le couple $(\Omega^1_{A/k}, d_{A/k})$ est la k-dérivation universelle. Le couple $(\Omega(A,k), \delta_{A/k})$ est également la k-dérivation universelle (voir définition de la sous-section 1.2.1). En particulier $\Omega^1_{A/k}$ et $\Omega(A,k)$ sont isomorphes en tant que A-modules.*

Démonstration. On a déjà vu dans le lemme 1.2.4 que $d_{A/k}$ est un élément de $D_k(A, \Omega^1_{A/k})$.

Soit N un A-module et $D \in D_k(A,N)$. Par le lemme 1.2.3, la famille $(d_{A/k}(a))_{a\in A}$ engendre le A-module $\Omega^1_{A/k}$. Ainsi pour toute application A-linéaire $f\colon \Omega^1_{A/k} \to N$, la commutativité du diagramme 1.3.1 (pour $M = \Omega^1_{A/k}$ et $d = d_{A/k}$) est équivalent à la fomule :

$$\forall a \in A, \quad f(d_{A/k}(a)) = D(a). \tag{1.3.2}$$

Ceci montre en particulier qu'il existe au plus une application linéaire $f\colon \Omega^1_{A/k} \to N$ satisfaisant l'équation 1.3.1.

Commençons par construire une application de $A \otimes A$ vers $A \oplus N$. On considère sur le A-module $A \oplus N$ l'application A-bilinéaire définie par

$$((a,m),(b,n)) \mapsto (ab, a\cdot n + b \cdot m)$$

Cette application munit le A-module $A \oplus N$ d'une structure de A-algèbre (et donc de k-algèbre par restriction des scalaires). Ainsi l'application k-linéaire $D'\colon A \to A\oplus N$ définie par $a \mapsto (a, D(a))$ devient, pour la structure d'anneau, un morphisme de k-algèbres. On note $i\colon A \to A \oplus N$ le morphisme d'inclusion donné par $a \mapsto (a,0)$. C'est un morphisme de A-algèbres (et donc de k-algèbres). Ainsi par la propriété universelle du produit tensoriel des k-algèbres il existe un morphisme de k-algèbres $g := D' \otimes i\colon A \otimes A \to A \oplus N$ qui satisfait pour tout couple d'éléments $(a,b) \in A^2$ la formule :

$$g(a \otimes b) = D'(a)i(b) = (ab, bD(a)).$$

Pour tout élément $a \in A$ remarquons que

$$g(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = (a, D(a)) - (a, 0) = (0, D(a)). \tag{1.3.3}$$

Puisque d'après le lemme 1.2.1 l'idéal $\mathscr{I}_A$ est engendré par les éléments de la forme $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ et que g est un morphisme de k-algèbres, on en déduit de l'équation 1.3.3 que $g(\mathscr{I}_A^2) = 0$.

En composant avec le morphisme de projection $A \oplus N \to N$ le morphisme g induit un morphisme de k-modules $f\colon \Omega^1_{A/k} = \mathscr{I}_A/\mathscr{I}_A^2 \to N$. D'après l'équation 1.3.3 et la définition de $d_{A/k}$, l'application f satisfait l'équation 1.3.1. Il reste à prouver que f est A-linéaire.

D'après le lemme 1.2.3, le A-module $\mathscr{I}_A/\mathscr{I}_A^2$ est engendré par $(a\otimes 1 - 1\otimes a)_{a\in A}$. D'après l'équation

$$a \cdot x = (a \otimes 1) \cdot x = (1 \otimes a) \cdot x \mod \mathscr{I}_A^2$$

qui décrit la structure de A-module sur $\mathscr{I}_A/\mathscr{I}_A^2$, on doit seulement montrer que pour tout $a, b \in A$, on a

$$g((b \otimes 1)(a \otimes 1 - 1 \otimes a)) = (0, b \cdot D(a)).$$

Mais on a

$$\begin{aligned} g((b \otimes 1)(a \otimes 1 - 1 \otimes a)) &= g(ba \otimes 1 - b \otimes a) \\ &= (ba, D(ab)) - (ba, a \cdot D(b)) \\ &= (0, b \cdot D(a)) \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve pour le couple $(\Omega^1_{A/k}, d_{A/k})$.

Montrons maintenant que le couple $(\Omega(A,k), \delta_{A/k})$ est également la dérivation universelle. La preuve sera plus simple par construction du couple. D'après les équations 1.2.2, l'application $\delta_{A/k}$ est un élément de $D_k(A, \Omega(A,k))$. Soit N un A-module et $D \in D_k(A,N)$. Par construction la famille $(\delta_{A/k}(a))_{a\in A}$ engendre le A-module $\Omega(A,k)$. Ainsi pour toute application A-linéaire $f\colon \Omega(A,k) \to N$, la commutativité du diagramme 1.3.1 (avec $M = \Omega(A,k)$ et $d = \delta_{A/k}$)) est équivalent à la propriété

$$\forall a \in A, \quad f(\delta_{A/k})(a)) = D(a). \tag{1.3.4}$$

Ceci montre en particulier qu'il existe au plus une telle application A-linéaire f. L'existence de f découle de la construction de $\Omega^1_{A/k}$, le fait que D est un élément de $D_k(A,N)$ et le théorème de factorisation dans la catégorie des A-modules.

Ce qui conclut la preuve. □

Théorème 1.3.3. *Soit k un anneau et A une k-algèbre. Le foncteur $D_k(A, \cdot)$ est représentable dans la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ par les dérivations universelles $(\Omega^1_{A/k}, d_{A/k})$. Pour tout A-module M, on un isomorphisme naturel de A-modules*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_A}(\Omega^1_{A/k}, M) \to D_k(A, M) \tag{1.3.5}$$

défini par $f \mapsto f \circ d_{A/k}$.

Démonstration. La seule affirmation qui n'est pas comprise dans la proposition 1.3.2 est que l'application $f \mapsto f \circ d_{A/R}$ est A-linéaire, ce qui se vérifie aisément. □

1.4 Dérivations de Hasse-Schmidt

Cette section est inspirée de [Voj07], à l'exception de la partie concernant la dérivation de Hasse-Schmidt d'adjonction qui vient de l'article dont est issu le chapitre 10 ainsi que de [BNS20].

Définition 1.4.1. Soit k un anneau, soient $f\colon k \to A$ et $k \to R$ des k-algèbres et soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Alors une dérivation supérieure (ou dérivation de Hasse-Schmidt) d'ordre m de A vers R sur k est une famille $(D_0, \cdots, D_m)$ où $D_0\colon A \to R$ est un morphisme de k-algèbres et $D_1, \cdots, D_m\colon A \to R$ sont des morphismes de k-modules tels que

1. $D_i(f(a)) = 0$ pour $a \in k$ et $i = 1, \cdots, m$
2. (Règle de Leibniz) pour $x, y \in A$ et tout $k = 0, \cdots, m$

$$D_k(xy) = \sum_{i+j=k} D_i(x) D_j(y). \tag{1.4.1}$$

Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Par convention, si $m = \infty$, on dira que $R[[t]]/(t^{m+1}) = R[[t]]$. Une dérivation de Hasse-Schmidt de A vers R d'ordre m peut également se voir comme un morphisme de k-algèbres $\mathrm{HS}\colon A \to R[[t]]/(t^{m+1})$. En effet, à une famille $(D_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ vérifiant les propriétés de la définition 1.4.1, on fait correspondre le morphisme de k-algèbre

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{HS}\colon & A & \to & R[[t]]/(t^{m+1}) \\ & a & \mapsto & \sum_{i=0}^m D_i(a) t^i. \end{array}$$

Réciproquement à un morphisme $\mathrm{HS}\colon A \to R[[t]]/(t^{m+1})$ de k-algèbres (où l'on note $\mathrm{HS}(a) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{HS}_i(a)t^i$) on déduit une famille $(D_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$, donnée par $D_i = \mathrm{HS}_i$. Ces deux constructions sont réciproques l'une de l'autre.

Lemme 1.4.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit R une k-algèbre et $\Delta \in \mathrm{Der}_k(R)$ une k-dérivation de R. Le morphisme*

$$\begin{array}{rccc} \exp(\Delta t)\colon & R & \to & R[[t]] \\ & f & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{\Delta^i(f)t^i}{i!} \end{array}$$

est un morphisme de k-algèbres.

Démonstration. La k-linéarité découle directement de la k-linéarité de la dérivation Δ. La suite de la démonstration de ce lemme va nécessiter la règle de Leibniz généralisée : soient $f, g \in R$, alors

$$\frac{\Delta^{(i)}(fg)}{i!} = \sum_{k=0}^{i} \frac{\Delta^{(k)}(f)\Delta^{(i-k)}(g)}{k!(i-k)!}$$

On procède par récurrence sur i. Le résultat est clair pour $i = 0$, on le suppose alors vrai pour un certain rang $i \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \Delta^{(i+1)}(fg) =& \Delta^{(i)}(f\Delta(g)) + \Delta^{(i)}(g\Delta(f)) \\ =& \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \Delta^{(k)}(f)\Delta^{(i+1-k)}(g) + \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \Delta^{(k+1)}(f)\Delta^{(i-k)}(g) \\ =& \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \Delta^{(k)}(f)\Delta^{(i+1-k)}(g) + \sum_{k=1}^{i+1} \binom{i}{k-1} \Delta^{(k)}(f)\Delta^{(i+1-k)}(g) \\ =& \sum_{k=1}^{i} \left(\binom{i}{k} + \binom{i}{k-1} \right) \Delta^{(k)}(f)\Delta^{(i+1-k)}(g) + f\Delta^{(i+1)}(g) + g\Delta^{(i+1)}(f) \\ =& \sum_{k=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} \Delta^{(k)}(f)\Delta^{(i+1-k)}(g) \end{aligned}$$

Ces calculs prouvent que le résultat est vrai au rang $i+1$, donc le résultat est vrai pour tout entier i. À l'aide de ce lemme, montrons que le morphisme $\exp(\Delta t)$ est un

morphisme d'anneaux. Soient $f, g \in R_\infty$, alors

$$\begin{aligned}\exp(\Delta t)(fg) &= \sum_{i\geqslant 0} \frac{\Delta^{(i)}(fg)t^i}{i!} \\ &= \sum_{i\geqslant 0}\sum_{k=0}^{i} \frac{\Delta^{(k)}(f)\Delta^{(i-k)}(g)}{k!(i-k)!}t^i \\ &= \exp(\Delta t)(f)\cdot\exp(\Delta t)(g)\end{aligned}$$

□

Pour toute k-algèbre R et pour tout $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on peut définir le foncteur qui va de la catégorie des k-algèbres $\mathbf{Alg}_k$ dans la catégorie des ensembles $\mathbf{Ens}$

$$R \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, R[[t]]/(t^{m+1})).$$

Ce foncteur est représentable et nous renvoyons aux notes de VOJTA [Voj07] pour les démonstrations des propriétés que nous allons énoncer.

Définition 1.4.3. Soit k un anneau, $f\colon k \to A$ un morphisme de A-algèbres et $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. On définit une A-algèbre $\mathbf{HS}^m_{A/k}$ comme le quotient de l'algèbre de polynômes $A[x^{(i)}]_{x\in A, i=1,\cdots,m}$ par l'idéal I engendré par l'union des ensembles :

$$\{(x+y)^{(i)} - x^{(i)} - y^{(i)} \ :\ x, y \in A, i = 1, \cdots, m\} \tag{1.4.2}$$

$$\{f(a)^{(i)} \ :\ a \in k, i = 1, \cdots, m\} \tag{1.4.3}$$

$$\{(xy)^{(k)} - \sum_{i+j=k} x^{(i)}y^{(j)} \ :\ x, y \in A, k = 0, \cdots, m\} \tag{1.4.4}$$

où l'on confond $x^{(0)}$ avec x, pour $x \in A$ (et que l'on interprète $i = 1, \cdots, m$ comme $i \in \mathbf{Z}_{>0}$ lorsque $m = \infty$ par l'abus de notation usuel). On appelle $\mathbf{HS}^m_{A/k}$ la m-ième k-algèbre universelle de A .

On définit de plus la dérivation universelle $(d_0, \cdots, d_m)$ de A dans $\mathbf{HS}^m_{A/k}$ comme $d_i(x) = x^{(i)} \mod I$. Comme on l'a remarqué précédemment cette dérivation correspond à la donnée d'un morphisme de k-algèbres $\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}_m\colon A \to \mathbf{HS}^m_{A/k}[[t]]/(t^{m+1})$, définie par $x \mapsto \sum_{i=0}^m x^{(i)}t^i \mod I$.

L'objet ainsi produit $\mathbf{HS}^m_{A/k}$ est une A-algèbre

$$s\colon A \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}_m} \mathbf{HS}^m_{A/k}[[t]]/(t^{m+1}) \xrightarrow{t\mapsto 0} \mathbf{HS}^m_{A/k}$$

qui peut aussi être vue comme une k-algèbre *via* f. C'est également une A (ou k)-

algèbre graduée par le poids, où le poids de $d_i x$ est i. Par exemple, on a $\mathbf{HS}^0_{A/k} = A$ et $\mathbf{HS}^1_{A/k} = \oplus_{d\geqslant 0}\mathbf{S}^d\Omega_{A/k}$.

Remarque 1.4.4. Pour $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant \infty$, on a des morphismes de A-algèbres graduées $f_{ij}\colon \mathbf{HS}^i_{A/k} \to \mathbf{HS}^j_{A/k}$. Pour $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant \infty$, ils satisfont $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$, et $f_{ii} = \mathrm{id}_{\mathbf{HS}^i_{A/k}}$. On a ainsi un système inductif et $\mathbf{HS}^\infty_{A/k} = \varinjlim_m \mathbf{HS}^m_{A/k}$

Proposition 1.4.5. *Soient $k \to A$ et $k \to R$ deux k-algèbres et soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Étant donné un morphisme de k-algèbres $\psi\colon A \to R[[t]]/(t^{m+1})$, il existe un unique morphisme $\varphi\colon \mathbf{HS}^m_{A/k} \to R$, qui induit un morphisme de k-algèbres $\tilde{\varphi}\colon \mathbf{HS}^m_{A/k}[[t]]/(t^{m+1}) \to R[[t]]/(t^{m+1})$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & R[[t]]/(t^{m+1}) \\ {\scriptstyle \mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}_m}\downarrow & \nearrow_{\tilde{\varphi}} & \\ \mathbf{HS}^m_{A/k}[[t]]/(t^{m+1}) & & \end{array}$$

En particulier le couple $(\mathbf{HS}^m_{A/k}, \mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}_m)$ représente le foncteur

$$R \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, R[[t]]/(t^{m+1})).$$

Notation. Dans la suite, pour simplifier les notations, on se permettra de noter $\mathbf{HS}_{A/k}$ pour $\mathbf{HS}^\infty_{A/k}$.

Par ailleurs, pour toute k-algèbre R, on notera

$$\epsilon(R)\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, R[[t]]) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(\mathbf{HS}_{A/k}, R)$$

On introduit maintenant un nouvel objet, la dérivation de Hasse-Schmidt d'adjonction $\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}$ qui sera utile au chapitre 10. Pour cela, considérons le morphisme φ défini comme la composée des morphismes suivants

$$\varphi\colon A \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}} \mathbf{HS}_{A/k}[[t]] \xrightarrow{t\mapsto t+u} \mathbf{HS}_{A/k}[[t]][[u]].$$

Par la propriété universelle, on déduit de $\varphi\colon A \to \mathbf{HS}_{A/k}[[t]][[u]]$ un morphisme de k-algèbres $\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}\colon \mathbf{HS}_{A/k} \to \mathbf{HS}_{A/k}[[t]]$ que l'on appelle dérivation d'adjonction .

Remarque 1.4.6. Comme il l'a été signalé par un referee anonyme à propos de l'article dont est issu la partie 10, la dérivation d'Hasse-Schmidt d'adjonction peut-être vu comme un exemple de prolongation, une notion qui apparaît fréquemment dans l'étude des espaces de jet en géométrie différentielle. Un exemple typique est le relèvement d'une courbe lisse sur une variété à un espace de jet ou d'arc sur cette même variété

(voir par exemple [Dem97, §4]). En suivant ce point de vue, la dérivation de Hasse-Schmidt d'adjonction est une prolongation de l'arc universel.

Proposition 1.4.7. *Avec les notations précédentes, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{HS}_{A/k} & \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}} & \mathbf{HS}_{A/k}[[t]] \\ {\scriptstyle s}\uparrow & \nearrow_{\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}} & \\ A & & \end{array}$$

Démonstration. On a défini un morphisme $\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}} : \mathbf{HS}_{A/k} \to \mathbf{HS}_{A/k}[[t]]$. Par ailleurs, d'après la propriété universelle de $\mathbf{HS}_{A/k}$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, \mathbf{HS}_{A/k}[[t]]) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k})} & \mathrm{Hom}(\mathbf{HS}_{A/k}, \mathbf{HS}_{A/k}) \\ {\scriptstyle \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}[[t]]\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}\circ} \\ \mathrm{Hom}(A, \mathbf{HS}_{A/k}[[t]][[u]]) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])} & \mathrm{Hom}(\mathbf{HS}_{A/k}, \mathbf{HS}_{A/k}[[t]]) \end{array}$$

On considère le devenir de $\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}} \in \mathrm{Hom}(A, \mathbf{HS}_{A/k}[[t]])$ par ce diagramme, on obtient que

$$\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}} \circ \epsilon(\mathbf{HS}_{A/k})(\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}) = \epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])(\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}[[t]] \circ \mathrm{HS}^{\mathrm{univ}})$$

Cependant, par construction $\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k})(\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{HS}_{A/k}}$ et $\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])(\varphi) = \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}$. En particulier, on en déduit que

$$\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])(\varphi) = \epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])(\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}[[t]] \circ \mathrm{HS}^{\mathrm{univ}})$$

soit encore que

$$\varphi = \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}[[t]] \circ \mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}.$$

Par ailleurs, la composée des morphismes suivants

$$A \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}} \mathbf{HS}_{A/k}[[t]] \xrightarrow{t \mapsto t+u} \mathbf{HS}_{A/k}[[t]][[u]] \xrightarrow{t \mapsto 0} \mathbf{HS}_{A/k}[[u]]$$

est égale à $\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}$, et la composée de

$$A \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}} \mathbf{HS}_{A/k}[[t]] \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}[[t]]} \mathbf{HS}_{A/k}[[t]][[u]] \xrightarrow{t \mapsto 0} \mathbf{HS}_{A/k}[[u]]$$

est égale à la composée de

$$A \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}} \mathbf{HS}_{A/k}[[t]] \xrightarrow{t \mapsto 0} \mathbf{HS}_{A/k} \xrightarrow{\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}} \mathbf{HS}_{A/k}[[u]].$$

Ainsi

$$\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}} = (t \mapsto 0) \circ \varphi = (t \mapsto 0) \circ \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}[[t]] \circ \mathrm{HS}^{\mathrm{univ}} = \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}} \circ s$$

ce qui est bien la commutativité du diagramme désirée. □

Proposition 1.4.8. *Pour $a \in A$, si l'on note $\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}(a) = \sum_{i \geqslant 0} \mathrm{HS}_i^{\mathrm{ad}}(a) t^i$ alors $\mathrm{HS}_0^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_{\mathbf{HS}_{A/k}}$.*

Démonstration. La preuve est du même type que précédemment, il s'agit de considérer le bon diagramme. Si l'on s'intéresse au devenir de $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbf{HS}_{A/k}[[t]][[u]])$ dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, \mathbf{HS}_{A/k}[[t]][[u]]) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])} & \mathrm{Hom}(\mathbf{HS}_{A/k}, \mathbf{HS}_{A/k}[[t]]) \\ \downarrow{\scriptstyle (t \mapsto 0)\circ} & & \downarrow{\scriptstyle (t \mapsto 0)\circ} \\ \mathrm{Hom}(A, \mathbf{HS}_{A/k}[[u]]) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k})} & \mathrm{Hom}(\mathbf{HS}_{A/k}, \mathbf{HS}_{A/k}) \end{array}$$

on en déduit que

$$(t \mapsto 0) \circ \epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])(\varphi) = \epsilon(\mathbf{HS}_{A/k})((t \mapsto 0) \circ \varphi).$$

Or, par définition, on a $\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k}[[t]])(\varphi) = \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}$, $(t \mapsto 0) \circ \varphi = \mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}$. et $\epsilon(\mathbf{HS}_{A/k})(\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{HS}_{A/k}}$. Ainsi

$$\mathrm{HS}_0^{\mathrm{ad}} = (t \mapsto 0) \circ \mathrm{HS}^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_{\mathbf{HS}_{A/k}}$$

□

Définition 1.4.9. Soit k un anneau et A une k-algèbre. On suppose que A est muni d'une dérivation de Hasse-Schmidt d'ordre infini au dessus de k (ce qui correspond à la donnée d'un morphisme d'anneau $\mathrm{HS}\colon A \to A[[t]]$). On suppose que $\mathrm{HS}_0 = \mathrm{id}_A$. Soit I un idéal de A.

1. On dit que I est un HS-*idéal* , si pour tout $a \in A$, on a $\mathrm{HS}(a) \in I[[t]]$.
2. Soit E un sous-ensemble de A. On appelle HS-idéal engendré par E et on note $[E]_{\mathrm{HS}}$ l'intersection de tous les HS-idéaux de A contenant E.

CHAPITRE 2

ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE

Dans ce chapitre, nous introduisons les fondamentaux de l'algèbre différentielle et quelques résultats s'inscrivant dans l'approche de J. F. RITT et E. KOLCHIN de l'étude algébrique des équations différentielles polynomiales. L'idée de ce point de vue est de considérer la donnée d'un anneau (ou d'une algèbre) munie d'une dérivation (cf. définition 1.1). Cet ajout de structure permet d'obtenir différents résultats (algébrique) de structure, applicables à la fois à l'étude qualitative des équations différentielles et à la mise d'algorithmes de résolution. Après un survol des notions de base dans la section 2.1, nous établirons un lien entre la structure algébrique et différentielle dans la section 2.2 à travers des foncteurs d'adjonctions. Ces adjonctions seront utiles lorsqu'il s'agira de faire le lien entre le schéma des arcs et le schéma des arcs différentiels dans le chapitre VI. Nous présentons ensuite quelques résultats fondamentaux de l'approche rittienne, dont le théorème de la base de Ritt-Raudenbush (théorème 2.4.5), le théorème d'irréductibilité de Kolchin (théorème 2.4.8) ou le théorème des petites puissances (théorème 2.7.3), plus connu sous le nom de « low power theorem », qui seront utiles dans nos chapitres suivants.

Nous avons principalement utilisé pour cette présentation les sources suivantes [Kol73 ; Rit50 ; Kap76].

2.1 Le formalisme de base de l'algèbre différentielle

Définition 2.1.1. Un anneau différentiel (R, D) est la donnée d'un anneau commutatif unitaire R ainsi que d'un ensemble $D = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ formé de $m \geqslant 1$ dérivations qui commutent deux à deux. Autrement dit, pour tout couple d'éléments $(a, b) \in R^2$ et tout couple de dérivations $(\delta, \delta') \in D$, on a les propriétés suivantes :

1. $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$;
2. $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$;
3. $(\delta\delta')(a) = \delta(\delta'(a)) = \delta'(\delta(a)) = (\delta'\delta)(a)$.

On note Θ le monoïde libre engendré par D. Si $J = (j_1, \ldots, j_m)$ est un élément du monoïde $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0} = (\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}, +, 0)$, on note $\Theta(J) = \delta_1^{j_1} \cdots \delta_m^{j_m}$ *l'opérateur dérivé* défini par J. Si a est un élément de R, alors $\Theta(J)a$ est un élément de R obtenu en appliquant l'opérateur dérivé $\Theta(J)$ sur a. On peut aussi le noter $a_{t_1^{j_1} \cdots t_m^{j_m}}$ ou $a_{t^{\Theta(J)}}$. Cet élément sera appelé *dérivée* de a. L'*ordre* de $\Theta(J)$ est l'entier $\sum_{i=1}^{m} j_i$.

L'exemple fondamental que nous utiliserons dans la plupart des chapitres suivant est le cas d'un anneau R muni d'une unique dérivation δ, c'est-à-dire $D = \{\delta\}$. C'est l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle anneau différentiel (non trivial).

Exemple 2.1.2.

1. Un anneau R peut être vu comme un anneau différentiel en le munissant de la dérivation nulle. On note alors $(R, 0)$ l'anneau différentiel correspondant.

2. Soit R un anneau de caractéristique nulle, alors $R[[T]]$ est naturellement muni d'une dérivation ∂_T définie par : $\partial_T(a) = 0$ pour $a \in R$ et $\partial_T(T) = 1$. Si, de plus, R est une k-algèbre, alors $(R[[T]], \partial_T)$ est naturellement une $(k, 0)$-algèbre différentielle.

3. Soit E un ensemble non vide. Si k est un corps et n un entier naturel, on définit l'anneau différentiel $k\{X_e, e \in E\}$ comme l'anneau des polynômes

$$k[X_{e,j},\ e \in E\ j \in \mathbf{N}].$$

   muni de la k-dérivation $\Delta(x_{i,j}) = x_{i,j+1}$. On appelle $(k\{X_e, e \in E\}, \Delta)$ *l'anneau des polynômes différentiels* en les variables X_e, et ses éléments sont appelés des *polynômes différentiels*. (Cf. section 2.2).

4. Soit k un corps. L'anneau des polynômes $k[x_1, \ldots, x_n]$ muni de l'ensemble $D = \{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\}$ définit un anneau différentiel.

5. Soit k un corps. L'anneau des séries formelles $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ muni de l'ensemble $D = \{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\}$ définit un anneau différentiel.

Soient (R_1, D_1) et (R_2, D_2) deux anneaux différentiels tel que le cardinal de D_1 et D_2 soient finis et égaux. On suppose que $D_1 = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$ et $D_2 = (d_1, \cdots, d_n)$. Un morphisme d'anneaux $\varphi\colon R_1 \to R_2$ est appelé morphisme d'anneaux *différentiels* si, pour tout élément $a \in R_1$ et tout élément $\delta_i \in D_1$, la formule suivante est vérifiée :

$$\varphi(\delta_i(a)) = d_i(\varphi(a)).$$

Cette égalité est également décrite par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\varphi} & R_2 \\ {\scriptstyle \delta_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ R_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & R_2 \end{array}$$

Si un anneau différentiel (R_2, D_2) est muni d'un morphisme d'anneaux différentiels $\varphi\colon R_1 \to R_2$, on dira que (R_2, D_2) est une (R_1, D_1)-*algèbre différentielle* . Si (k, D_0) est un anneau différentiel et $(R_1, D_1), (R_2, D_2)$ deux (k, D_0)-algèbres différentielles, un morphisme d'anneaux différentiels $\varphi : R_1 \to R_2$ est un morphisme de (k, D_0)-*algèbres différentielles* si φ est un morphisme de k-algèbres pour les structures sous-jacentes. On note $\mathbf{Algdiff}_{(k,D_0)}$ la catégorie des (k, D_0) algèbres différentielles.

Exemple 2.1.3. Soit k un anneau, considéré comme anneau différentiel trivial. La construction $k\{X_e, e \in E\}$ de l'exemple 2.1.2 munit l'anneau $k\{X_e, e \in E\}$ d'une structure de k-algèbre différentielle. Soit $f\colon k[X_e, e \in E] \to k[Y_{e'}, e' \in E']$ un morphisme de k-algèbres. On construit un morphisme de k-algèbres différentielles de l'anneau $(k\{X_e, e \in E\}, \Delta)$ des polynômes différentiels en les X_e dans l'anneau $(k\{Y_{e'}, e' \in E'\}, \Delta')$ des polynômes différentiels en les $Y_{e'}$ en assignant à chaque variable $X_{e,j}$ le polynôme différentiel $\Delta'^j(f(X_e))$.

En particulier si (R_1, D_1) et (R_2, D_2) sont deux anneaux différentiels tels que $D_1 = \{\delta_1\}, D_2 = \{\delta_2\}$ sont des singletons, alors les définitions précédentes nous donnent qu'un morphisme d'anneaux $\varphi : R_1 \to R_2$ est un morphisme d'anneaux différentiels si, pour tout $a \in R_1$ on a la formule suivante :

$$\varphi(\delta_1(a)) = \delta_2(\varphi(a)).$$

Comme précédemment ceci induit, dans ce cas, la notion d'algèbre différentielles et de morphisme d'algèbres différentielles. Pour ne pas alourdir les notations, dans le cas de l'anneau différentiel k trivial, on parlera de k-algèbre différentielle plutôt que de $(k, 0)$-algèbre différentielle. Si k est l'anneau différentiel trivial, notons que la dérivation Δ associée à une k-algèbre différentielle (R, Δ) est automatiquement une k-dérivation de R.

Notation. Si (R, δ) est un anneau différentiel et $a \in R$, on note $\delta^0(a) = a$, et pour $i \geqslant 1$, on définit par récurrence, $\delta^i(a) = \delta(\delta^{i-1}(a))$.

Soit (R, D) un anneau différentiel. Soit I un idéal de R. On dit que I est un *idéal différentiel* de R si, pour tout élément a de I, on a $\delta(a) \in I$ pour tout $\delta \in D$. On dit

qu'un idéal différentiel I est *parfait* ou *réduit* si, pour tout $a \in R$, on a $a \in I$ si et seulement si il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a^n \in I$. Étant donné un sous-ensemble E de R, on définit $[E]$ comme étant l'intersection de tous les idéaux différentiels contenant E. L'idéal $[E]$ est alors le plus petit idéal différentiel contenant E (au sens de l'inclusion) et on l'appelle *l'idéal différentiel engendré par* E.

Évidemment, du point de vue ensembliste, l'idéal $[E]$ coïncide avec l'idéal de l'anneau R engendré par $\Theta(J)E$ pour tout $\Theta(J) \in \Theta$. Le *radical (différentiel)* de l'idéal différentiel I se définit comme l'intersection de tous les idéaux *parfaits* qui contiennent I. C'est le plus petit idéal différentiel parfait contenant I ; on le note $\{I\}$. En général, cette notion diffère de la notion usuelle de « radical » en algèbre commutative (cf. exemple 2.1.6). Si R contient $\mathbf{Q}$, alors le radical différentiel de I coïncide avec le radical algébrique de l'idéal algébrique sous-jacent à I. Autrement dit,

$$\{I\} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbf{N},\ a^n \in I\} =: \sqrt{I},$$

et cet idéal est différentiel. Si E est un sous-ensemble de R, on définit l'idéal parfait engendré par E par la formule $\{E\} = \{[E]\}$.

Exemple 2.1.4. Soit k un corps. Soient $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ l'anneau des séries formelles sur K en les X_i et $D = \{\partial_{X_1}, \ldots, \partial_{X_n}\}$. L'idéal (0) est l'unique idéal différentiel propre de $(K[[X_1, \ldots, X_n]], D)$. En effet, tout idéal différentiel I non nul de cet anneau contient une série formelle non nulle. Ou bien cette série formelle est inversible, ou bien elle le devient après application d'un opérateur différentiel $\partial_{X_1}^{i_1} \ldots \partial_{X_n}^{i_n}$ bien choisi.

Exemple 2.1.5. Soit f un polynôme différentiel de $(k\{x_0, \cdots, x_n\}, \Delta)$. Alors l'idéal différentiel engendré par f est décrit comme étant l'idéal algébrique engendré par $(\Delta^i(f))_{i \in \mathbf{N}}$.

Exemple 2.1.6. Nous donnons ici un exemple d'idéal différentiel dont la racine au sens algébrique ne coïncide pas avec la notion de racine différentielle. Considérons l'anneau $R = \mathbf{F}_2[X]/(X^2)$ muni de la $\mathbf{F}_2$-dérivation ∂ définie par $\partial(x) = 1$ (ici x désigne la classe de X dans R). Soit $I = [0]$. Le radical algébrique de I est l'idéal maximal de R (engendré par x) ; mais cet idéal n'est pas différentiel. Sinon, il coïnciderait avec R. Le radical différentiel de I est R.

Soient (R, D) un anneau différentiel et I un idéal différentiel de R. Soit $\delta \in D$. Si deux éléments $a, b \in R$ sont congrus modulo I, leurs dérivées $\delta(a), \delta(b)$ sont encore congrues modulo I. Ceci permet de définir sur l'anneau quotient R/I, muni de l'ensemble des dérivations D, une unique structure d'anneau différentiel rendant le

morphisme quotient différentiel. Quelques conséquences se déduisent de cette observation. La première est que tout idéal différentiel d'un anneau différentiel R se réalise comme le noyau d'un morphisme différentiel défini sur R ; la seconde est que la correspondance bijective entre idéaux de R et idéaux de l'anneau R/I, induit par restriction aux idéaux différentiels, une correspondance bijective.

Soit (R, D) un anneau différentiel. Soit S une partie multiplicative (non vide) de R. Soit $\delta \in D$. Pour tout $a, b \in R$ et $s, t \in S$, l'égalité (dans $S^{-1}R$)

$$\frac{s\delta(a) - a\delta(s)}{s^2} = \frac{t\delta(b) - b\delta(t)}{t^2}$$

permet de munir $(S^{-1}R, D)$ d'une structure d'anneau différentiel rendant le morphisme de localisation $R \to S^{-1}R$ différentiel.

2.2 Les adjoints du foncteur d'oubli

Soit k un anneau, considéré le cas échéant comme un anneau différentiel trivial. Dans cette section, nous supposons que k est une $\mathbf{Q}$-algèbre. Les k-algèbres différentielles de cette section, sauf mention contraire explicite, sont munies d'une unique dérivation.

On dispose d'un foncteur naturel de la catégorie des k-algèbres différentielles $\mathbf{Algdiff}_k$ vers la catégorie des k-algèbres $\mathbf{Alg}_k$ qui consiste à oublier la structure différentielle

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{For}: & \mathbf{Algdiff}_k & \to & \mathbf{Alg}_k \\ & (R, \delta) & \mapsto & R. \end{array}$$

2.2.1 Adjoint à droite

Soit

$$\begin{array}{rccc} (\,)^\infty: & \mathbf{Alg}_k & \to & \mathbf{Algdiff}_k \\ & A & \mapsto & (A[[T]], \partial_T) \\ & f \in \mathrm{Hom}(A, B) & \mapsto & (\sum_{i\in\mathbf{N}} a_i T^i \mapsto \sum_{i\in\mathbf{N}} f(a_i) T^i) \end{array}$$

le foncteur défini de la catégorie des k-algèbres dans celle des k-algèbres différentielles.

Proposition 2.2.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Le foncteur d'oubli* $\mathrm{For}: \mathbf{Algdiff}_k \to \mathbf{Alg}_k$ *possède un adjoint à droite ; cet adjoint est le foncteur* $(\,)^\infty$. *Autrement dit, pour*

toute k-algèbre différentielle (R,δ) et toute k-algèbre A, il existe une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}((R,\delta),A^\infty) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(\mathrm{For}(R,\delta),A)$$

fonctorielle en A et (R,δ).

Démonstration. Soit (A,δ_A) une R-algèbre différentielle et B une R-algèbre. On définit un morphisme de R-algèbres par $\mathrm{ev}_0\colon B[[T]] \to B, T \mapsto 0$ et un morphisme d'algèbres différentielles R-linéaire par $\exp_A\colon (A,\delta_A) \to (A[[T]],\partial_T), a \mapsto \sum_{i\geqslant 0}\frac{\delta_A^i(a)}{i!}T^i$.

On définit deux applications

$$\begin{array}{rccc}\varphi\colon & \mathrm{Hom}_R^\delta((A,\delta_A),(B[[T]],\partial_T)) & \to & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{For}(A,\delta_A),B)\\ & f & \mapsto & \mathrm{ev}_0\circ f\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc}\psi\colon & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{For}(A,\delta_A),B) & \to & \mathrm{Hom}_R^\delta((A,\delta_A),(B[[T]],\partial_T))\\ & g & \mapsto & \tilde{g}\colon a\mapsto \sum_{i\geqslant 0}\frac{g(\delta_A^i(a))}{i!}T^i\end{array}$$

Remarque 2.2.2. Notons que pour la définition des diverses applications ci-dessus il est essentiel que que k soit de caractéristique nulle pour que la division par $i!$ fasse sens.

On remarque pour tout élément $a \in A$, on a bien $\tilde{g}(\delta_A(a)) = \partial_T(\tilde{g}(a))$. Montrons que φ et ψ sont des applications inverses l'une de l'autre. Soit $g\colon A \to B$ un morphisme de R-algèbres. Soit $a \in A$

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(g))(a) &= \mathrm{ev}_0\circ\psi(g)(a)\\ &= \mathrm{ev}_0(\sum_{i\geqslant 0}\frac{g(\delta_A^i(a))}{i!}T^i)\\ &= g(a)\end{aligned}$$

Soit $f\colon (A,\delta_A) \to (B[[T]],\partial_T)$ un morphisme de R-algèbres différentielles, et $a \in A$. On note $f(a) = \sum_{i\geqslant 0} a_i T^i$. Comme f est un morphisme d'algèbres différentielles

alors $f(\Delta_A^i(a))) = \partial_T^{(i)}(f(a))$.

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(f))(a) &= \sum_{i\geqslant 0} \frac{\mathrm{ev}_0[f(\delta_A^i(a))]}{i!} T^i \\ &= \sum_{i\geqslant 0} \frac{\mathrm{ev}_0[\partial_T^{(i)}(f(a))]}{i!} T^i \\ &= \sum_{i\geqslant 0} \frac{i! a_i}{i!} T^i \\ &= f(a)\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(A, \delta_A) \in \mathbf{Algdiff}_k$ et $B \in \mathbf{Alg}_k$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{F}(A, \delta_A), B) \simeq \mathrm{Hom}_R^{\delta}((A, \delta_A), (B[[T]], \partial_T))$$

qui est fonctoriel en A et en B de manière évidente. Ce qui prouve le résultat. □

2.2.2 Adjoint à gauche

Soit A une k-algèbre. Le choix d'un système de générateurs et relations de cette algèbre définit un isomorphisme de k-algèbres $A = R[(X_e)_{e\in E}]/I$. À partir de cette remarque, on construit le foncteur

$$\begin{array}{rccc} (\ )_\infty : & \mathbf{Alg}_k & \to & \mathbf{Algdiff}_k \\ & A = R[(X_e)_{e\in E}]/I & \mapsto & A_\infty := (R\{X_e)_{e\in E}\}/[I], \Delta) \\ & f \in \mathrm{Hom}(A, B) & \mapsto & f_\infty : x_{e,i} \mapsto \Delta^i(f(x_e)) \end{array}$$

de la catégorie des k-algèbres dans celle des k-algèbres différentielles. (Cf. exemples 2.1.2 et 2.1.3.) Les éléments x_e sont ici les images des variables X_e dans A. La définition de A_∞ ne dépend en particulier pas du choix de la présentation.

Proposition 2.2.3. *Le foncteur d'oubli* For *possède un adjoint à gauche ; ce foncteur adjoint est* $(\ )_\infty$. *Autrement dit, pour toute k-algèbre différentielle (B, δ_B) et toute k-algèbre A, il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}(A_\infty, \Delta), (B, \delta_B)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, \mathrm{For}(B, \Delta_B))$$

fonctorielle en A et (B, δ_B).

Démonstration. Soit $A = k[(X_e)_{e\in E}]/I$ une k-algèbre et (B, Δ_B) une k-algèbre dif-

férentielle. On définit deux applications :

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}((k\{(X_e)_{e\in E}\}/[I],\Delta),(B,\delta_B)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(k[(X_e)_{e\in E}]/I,\mathrm{For}(B,\delta_B)) \\ & f & \mapsto & X_e \mapsto f(X_{e,0}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(k[(X_e)_{e\in E}]/I,\mathrm{For}(B,\delta_B)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}((k\{(X_e)_{e\in E}\}/[I],\Delta),(B,\Delta_B)) \\ & g & \mapsto & X_{e,i} \mapsto \delta_B^{(i)}(g(X_e)) \end{array}$$

On remarque que $\psi(g)(\Delta(X_{e,i})) = \psi(g)(X_{e,i+1}) = \delta_B(\psi(g)(X_{e,i}))$.

Montrons que φ et ψ sont des applications inverses l'une de l'autre. Soit

$$g\colon k[(X_e)_{e\in E}]/I \to \mathrm{For}(B,\delta_B),$$

et $e \in E$:

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(g))(X_e) &= \psi(g)(X_{e,0}) \\ &= g(X_e) \end{aligned}$$

Soit maintenant $f\colon (k\{(X_e)_{e\in E}\}/[I] \to \Delta),(B,\delta_B)$ et $(e,i) \in E \times \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(f))(X_{e,i}) &= \Delta_B^{(i)}(\varphi(f)(X_e)) \\ &= \Delta_B^{i}(f(X_{e,0})) \\ &= f(\Delta^i(X_{e,0})) = f(X_{e,i}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $A \in \mathbf{Alg}_k$ et $(B,\delta_B) \in \mathbf{Algdiff}_k$, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A,\mathrm{For}(B,\delta_B)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}((A_\infty,\Delta),(B,\delta_B))$$

fonctoriel en A et en B. □

2.3 Adjonction d'indéterminées différentielles dans le cas d'une famille de dérivations

Dans cette sous-section, nous allons généraliser l'exemple 2.1.2 au cas d'un anneau différentiel muni d'une famille D de dérivations. Commençons par définir quelques notions utiles. La présentation s'appuie sur [Kol99, Théorème de la base finie, p60/61].

Soit (R, D) un anneau différentiel. Soit (S, D) une (R, D)-algèbre différentielle. Soit E un ensemble non vide et $(x_e)_{e\in E}$ une famille d'éléments de S. Le sous-anneau de S engendré par R et les dérivés des x_e, c'est-à-dire les éléments $\Theta(J)(x_e)$, pour tout sous-ensemble fini J de $\mathbf{N}^m$ et tout élément e de E, est un sous-anneau différentiel de S. Si la famille $(\Theta(J)x_e)_{J\in\mathbf{N}^m, e\in E}$ est algébriquement indépendante sur R, on dit que les x_e sont des *indéterminées différentielles* et que l'anneau différentiel ainsi obtenu par adjonction de ces indéterminées différentielles est l'*anneau des polynômes différentiels* en les x_e à coefficients dans R. On le note $R\{x_e, e \in E\}$.

Dans le cas où $E = \{1, \ldots, n\}$, on observe que Θ agit sur les indéterminées différentielles $\{x_1, \ldots, x_n\}$, donnant un ensemble infini de dérivées qui sont notées $x_{i,J}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ and $J \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$. Étant donné $1 \leqslant k \leqslant m$ et une dérivée $x_{i,J}$ l'action de δ_k sur $x_{i,J}$ est défini par $\delta_k(x_{i,J}) = x_{i,J+e_k}$ où e_k est le vecteur dont la k-ième coordonnée est 1 et toutes les autres sont nulles. On note $R\{x_1, \ldots, x_n\}$ (ou R_m) l'anneau des polynômes différentiels à coefficients dans R, dont les variables sont les dérivées. Plus formellement, l'anneau $R\{x_1, \ldots, x_n\}$ consiste en toutes les combinaisons R-linéaires de monômes différentiels, où un monôme différentiel en n variables indépendantes et d'ordre inférieur ou égal à r est une expression de la forme

$$E_M := \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ ||J||_\infty \leqslant r}} x_{i,J}^{M_{i,J}} = \prod_{i,J} x_{i,J}^{M_{i,J}}, \tag{2.3.1}$$

où $J = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, $||J||_\infty := \max_i\{j_i\} = \max(J)$ et $M = (M_{i,J}) \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^{n\times(r+1)^m}$. Le couple $(R\{x_1, \ldots, x_n\}, D)$ est l'*anneau de polynômes différentiels* en les x_i à coefficients dans R.

Un polynôme différentiel $P \in R\{x_1, \ldots, x_n\}$ induit une application de R^n vers R donné par

$$\begin{array}{rccc} P\colon & R^n & \to & R \\ & (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) & \mapsto & P|_{x_{i,J}=(\varphi_i)_{t^{\Theta(J)}}}, \end{array}$$

où $P|_{x_{i,J}=(\varphi_i)_{t^{\Theta(J)}}}$ est l'élément de R obtenu en substituant les variables $x_{i,J}$ par $(\varphi_i)_{t^{\Theta(J)}}$.

Un *zéro* ou *solution* d'un polynôme différentiel $P \in R\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un n-uplet $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R^n$ tel que $P(\varphi) = 0$. Un n-uplet $\varphi \in R^n$ est une solution d'un système de polynômes différentiels $\Sigma \subseteq R\{x_1, \ldots, x_n\}$ si c'est une solution de tout élément de Σ. On note $\mathrm{Sol}(\Sigma)$ l'ensemble des solutions du système Σ.

2.4 Le théorème de la base finie de Ritt-Raudenbusch et ses conséquences dans l'étude des équations différentielles polynomiales

Cette section s'appuie sur [Rit50 ; Kol99, Théorème de la base finie, p60/61] qui est, à notre connaissance, la version la plus générale du théorème de la base finie.

Soit R un anneau. Soit $\mathfrak{C}$ un ensemble d'idéaux de R. On dit que $\mathfrak{C}$ est un *système conservatif* de R si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'intersection arbitraire d'éléments de $\mathfrak{C}$ est un élément de $\mathfrak{C}$.
2. La réunion d'un ensemble totalement ordonné non vide d'éléments de $\mathfrak{C}$ est un élément de $\mathfrak{C}$.
3. Soient $I \in \mathfrak{C}$, $h \in R$. La saturation de h dans I, c'est-à-dire l'idéal $(I : h^\infty) := \cup_{n\in\mathbf{N}}(I : h^n) = \{g \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ h^n g \in I\}$, appartient à $\mathfrak{C}$.

On dit qu'un système conservatif est *parfait* si tous les idéaux qui le composent sont parfaits.

Exemple 2.4.1. L'ensemble de tous les idéaux de R est un système conservatif. L'ensemble des idéaux parfaits de R est un système conservatif parfait.

Soit $\mathfrak{C}$ un système conservatif de R. Soit I un élément de $\mathfrak{C}$. On dit que I possède une $\mathfrak{C}$-base Φ, s'il existe une partie non vide finie Φ de R tel que I coïncide avec l'intersection de tous les éléments de $\mathfrak{C}$ contenant Φ. Pour tout système conservatif $\mathfrak{C}$ de R, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Chaque élément possède une $\mathfrak{C}$-base.
2. Chaque partie non vide de $\mathfrak{C}$ possède un élément maximal.

Définition 2.4.2. Un système conservatif $\mathfrak{C}$ de R qui est parfait et qui vérifie l'une des deux conditions équivalentes ci-dessus est appelé *système conservatif rittien*.

Définition 2.4.3. Un anneau différentiel dans lequel l'ensemble des idéaux parfaits forme un système conservatif rittien est appelé *anneau rittien*.

Le formalisme précédent permet d'obtenir des résultats essentiels dans l'étude des idéaux différentiels parfaits.

Théorème 2.4.4. *Si $\mathfrak{C}$ est un système conservatif rittien d'un anneau R, tout idéal de $\mathfrak{C}$ est l'intersection d'un ensemble fini d'idéaux premiers dans $\mathfrak{C}$ dont aucun ne contient un autre. Cet ensemble fini d'idéaux premiers est unique.*

En particulier, le théorème 2.4.4 assure que la décomposition irréductible de tout idéal parfait d'un anneau différentiel rittien est obtenue par l'intersection d'un nombre *fini* d'idéaux premiers *différentiels*.

Le théorème suivant est souvent appelé théorème de la base (cf. [Kol99, §9, Théorème de la base finie, p60/61] pour des versions plus générales.

Théorème 2.4.5 (Théorème de la base)**.** *Soit R un anneau différentiel rittien. Alors l'anneau des poynômes différentiels $R\{X_1, \ldots, X_n\}$ est rittien.*

Exemple 2.4.6. Soit K un corps de caractéristique zéro. Il découle du théorème 2.4.5 que $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ est rittien. Ainsi, tout idéal parfait de $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ s'écrit comme une intersection finie d'idéaux différentiels premiers et possède une base.

Nous pouvons spécialiser le théorème précédent de la manière suivante. Nous utiliserons la proposition 2.4.7 dans les chapitres suivants. Soit K un corps de caractéristique zéro. Étant donné deux entiers $m, n \geqslant 1$ on note R_m l'anneau différentiel

$$(K[[t_1, \ldots, t_m]], D),$$

où $D = \{\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}\}$ et $R_{m,n}$ l'anneau différentiel $R_m\{x_1, \ldots, x_n\}$. Remarquons que l'anneau différentiel R_m est rittien, car il ne contient que deux idéaux différentiels parfaits (à savoir R_m et 0). On a la proposition suivante :

Proposition 2.4.7. *Soit $\Sigma \subseteq R_{m,n}$ un système fini ou infini de polynômes différentiels. Alors il existe un ensemble fini Φ de Σ tel que*

$$\mathrm{Sol}(\Sigma) = \mathrm{Sol}(\Phi).$$

Démonstration. Comme les solutions de Σ coïncident avec les solutions de l'idéal parfait $\{\Sigma\}$ en vertu de la définition (voir section 2.3), on est ramené à prouver l'existence de Φ tel que $\mathrm{Sol}(\{\Sigma\}) = \mathrm{Sol}(\Phi)$. Le théorème 2.4.5 assure l'existence d'une base Φ pour l'idéal parfait $\{\Sigma\}$ relativement au système conservatif rittien de $R_{m,n}$ formé par ses idéaux parfaits. Ceci implique en particulier que $\Phi \subset \{\Sigma\}$; donc $\{\Phi\} \subset \{\Sigma\}$ et $\mathrm{Sol}(\Sigma) \subset \mathrm{Sol}(\Phi)$. Comme par ailleurs $\{\Phi\}$ est un idéal différentiel premier qui contient Φ, c'est un élément de l'intersection avec laquelle coïncide $\{\Sigma\}$. Donc $\{\Sigma\} \subset \{\Phi\}$. On en conclut que $\mathrm{Sol}(\Sigma) = \mathrm{Sol}(\Phi)$.

□

Soit K un corps de caractéristique 0. Tout idéal I de l'anneau des polynômes (algébriques) $K[X_1, \ldots, X_n]$ peut définir un idéal différentiel parfait de l'anneau

$K\{X_1, \ldots, X_n\}$ en considérant le radical de l'idéal différentiel engendré par I. Dans ce cas particulier, le théorème 2.4.4 peut s'exprimer d'une manière plus précise. Le théorème suivant est connu sous le nom de théorème d'irréductibilité de Kolchin :

Théorème 2.4.8 (Théorème d'irréductibilité de Kolchin)**.** *Soit K un corps de caractéristique 0. Soit I un idéal premier de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Alors l'idéal $\{I\}$ est un idéal différentiel premier.*

Ce théorème est faux en caractéristique positive.

Exemple 2.4.9. Soit $I = \langle x^2 - y^2 z \rangle$ un idéal de $\mathbf{F}_2[x, y, z]$. Cet idéal est premier car le polynôme $x^2 - y^2 z$ est irréductible. En effet, s'il n'était pas irréductible, il existerait des polynômes $P, A, B \in \mathbf{F}_2[x, y, z]$ avec P non inversible, tels que

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 z &= P(x,y)(A(x,y) + zB(x,y) \\ &= P(x,y)A(x,y) + zP(x,y)B(x,y). \end{aligned}$$

Puisque $P(x, y)$ n'est pas inversible, alors en identifiant les coefficients (en z), on a que x divise $P(x, y)$ et $y^2 = P(x, y)B(x, y)$, ce qui est impossible.

Considérons maintenant l'idéal différentiel parfait, que l'on note $\{I\}$, engendré par $x_0^2 - y_0^2 z_0$ dans $\mathbf{F}_2\{x, y, z\}$. Comme on est en caractéristique 2, on a $\Delta(x_0^2 - y_0^2 z_0) = -z_1 y_0^2$. Si $\{I\}$ est premier alors $y_0 \in \{I\}$ ou $z_1 \in \{I\}$.

On rappelle que si J est un idéal de $\mathbf{F}_2\{x, y, z\}$, on peut voir un élément de J comme une équation différentielle sur F_2 en les fonctions inconnues x, y et z dont on peut chercher les solutions sous forme de séries formelles. On définit

$$\mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(J) = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{F}_2[[t]]^3 \mid \forall f \in J, f(x(t), y(t), z(t)) = 0\}.$$

Si $y_0 \in \{I\}$, alors $\mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(\{I\}) \subset \mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(y_0)$. Or

$$\mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(y_0) = \{(x(t), 0, z(t)) \mid (x(t), z(t)) \in \mathbf{F}_2[[t]]^2\}.$$

Cependant $(1, 1, 1) \in \mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(\{I\})$ mais n'est pas dans $\mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(y_0)$.

Si $z_1 \in \{I\}$ alors $\mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(\{I\}) \subset \mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(z_1)$. Or

$$\mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(z_1) = \{(x(t), a, y(t)) \mid (x(t), z(t)) \in \mathbf{F}_2[[t]]^2, a \in \mathbf{F}_2\}.$$

Cependant $(t^2, t, t^2) \in \mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(\{I\})$ mais n'est pas dans $\mathrm{Sol}_{\mathbf{F}_2}(z_1)$.

Ainsi ni y_0, ni z_1 ne sont dans $\{I\}$ et donc cet idéal n'est pas premier.

Notons également que le théorème d'irréductibilité de Kolchin induit que, si I est un idéal parfait de $K[X_1, \ldots, X_n]$ et si $I = \cap_{j=1}^{s} \mathfrak{I}_j$ est la décomposition irréductible

de I, alors $\cap_{j=1}^{s}\{I_j\}$ est la décomposition irréductible de I.

2.5 Sur les polynômes différentiels sur un corps

Cette section s'appuie sur [Rit50, p. I]. Elle présente des définitions intervenant dans l'énoncé des théorèmes des sections suivantes.

Soit K un corps de caractéristique 0. Soit $K\{X_1, \cdots, X_n\}$ l'anneau des polynômes différentiels à n variables. On suppose que l'ensemble des dérivations sur cet anneau se limite à une seule, notée δ, qui agit sur les variables de la manière présentée dans la section 2.3, à savoir que, pour tout entiers $i \in \{1, n\}$ et $j \in \mathbf{N}$, on a $\delta(X_{i,j}) = X_{i,j+1}$. En particulier, pour tout entier $i \in \{1, \cdots, n\}$ la j-eme dérivée de X_i se note $X_{i,j}$

On suppose qu'un ordre (au sens d'une relation d'ordre, que l'on appelle aussi *ranking*) est fixé sur les variables $X_1, \cdots, X_n$. En général on supposera que $X_1 < X_2 < \cdots < X_n$ On appelle *classe* d'un polynôme différentiel $F \in K\{X_1, \ldots, X_n\}$, le plus grand i (relativement au ranking) tel qu'il existe j tel que $X_{i,j}$ apparaît effectivement dans l'écriture de F. Si F est un polynôme différentiel et i un entier, on appelle *ordre de F par rapport à y_i* le plus grand j tel que $X_{i,j}$ apparaît effectivement dans l'écriture de F. Si F est de classe i et d'ordre j par rapport à y_i, le *séparant* de F, noté S_F est la dérivée partielle de F par rapport à $y_{i,j}$, à savoir $S_F = \frac{\partial F}{\partial y_{i,j}}$.

Exemple 2.5.1. Si l'anneau de polynômes différentiels est $\mathbf{R}\{X_1, X_2\}$ et si $F = X_{1,2}X_{2,1} + X_{2,2}^2 + X_{2,2}X_{1,5} + 6$, alors la classe de F est 2 et son ordre est 2 par rapport à X_2 et 5 par rapport à X_1. Le séparant de F est

$$S_F = \frac{\partial F}{\partial X_{2,2}} = 2X_{2,2} + X_{1,5}.$$

Lorsqu'il n'y aura qu'une seule variable différentielle et si $F \in K\{X\}$, on appellera *ordre* de F le plus grand entier i tel que X_i (la i-eme dérivée de X) apparaisse effectivement dans l'expression de F.

2.6 Sur la décomposition irréductible des idéaux différentiels parfaits monogènes de $K\{y\}$

Soit K un corps de caractéristique 0. Soit $F \in K\{y\}$ un polynôme différentiel non constant. On va s'intéresser ici à l'idéal $\{F\}$ pour préciser le théorème 2.4.4 dans ce cas. Les observations que nous tireront ici seront utilisés dans les chapitres suivants.

En vertu du théorème 2.4.4, nous savons que le cet idéal différentiel parfait se décompose en une intersection d'idéaux différentiels premiers. Notons S_F le séparant de F. Remarquons que $\{F, S_F\}$ est encore un idéal parfait de $K\{y\}$. Donc en vertu du théorème 2.4.4, il existe des idéaux premiers différentiels $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ tels que

$$\{F, S_F\} = \cap_{i=1}^{s} \mathfrak{P}_i.$$

Un résultat classique d'algèbre différentielle s'énonce alors ainsi (cf. [Kap76, Theorem 7.10] :

Proposition 2.6.1. *Soit K un corps de caractéristique 0. Soit $F \in K\{y\}$ un polynôme différentiel irréductible. Alors on la décomposition sous forme d'idéaux parfait*

$$\{F\} = (\{F\} : S_F) \cap \{F, S_F\}.$$

De plus $(\{F\} : S_F)$ est un idéal différentiel premier. Si on note $\{F, S_F\} = \cap_{i=1}^{s} \mathfrak{P}_i$, il existe un sous-ensemble $J \subset \{1, \ldots, s\}$ tel que la décomposition irréductible de l'idéal $\{F\}$ soit donnée par

$$\{F\} = (\{F\} : S_F) \cap \left(\cap_{j \in J} \mathfrak{P}_j\right).$$

Définition 2.6.2. L'idéal différentiel premier $(\{F\} : S_F)$ est appelée *composante de la solution générale de F* [1] ; les $\mathfrak{P}_j$ intervenant dans la formule, les *composantes des solutions singulières essentielles de F* [2] .

Remarque 2.6.3. La proposition 2.6.1 permet également de traiter le cas où le polynôme F n'est pas irréductible. En effet, la décomposition irréductible de l'idéal différentiel $\{F\}$ s'obtiendra à partir de cette proposition appliquée aux facteurs irréductibles de F.

Voici un exemple issu de [Kap76, chap VII, 31].

Exemple 2.6.4. Soit $F = y_1^2 - 4y_0 \in K\{y\}$. D'après la proposition 2.6.1, on peut décomposer l'idéal différentiel parfait $\{F\}$ sous la forme

$$\{F\} = (\{F\} : S_F) \cap \{F, S_F\}.$$

Or $S_F = 2y_1$, donc $\{F, S_F\} = \{y_0\}$. Or l'idéal $\{y_0\}$ est premier, on a donc la décomposition de $\{F, S_F\}$ sous forme d'idéaux premiers. Il reste à identifier l'idéal $(\{F\} : S_F)$, dont on sait qu'il est premier.

1. On dit parfois également composante générale.
2. On dit parfois également composantes singulières essentielles.

La dérivée de F se factorise ainsi : $\delta(F) = 2y_1(y_2-2)$. Montrons que $y_1 \notin (\{F\} : S_F)$. Si tel était le cas, comme $y_1 \in \{F, S_F\}$ et que $\{F\}$ est l'intersection de ces deux idéaux, on aurait $y_1 \in \{F\}$. En particulier cela implique $\mathrm{Sol}_K(F) \subset \mathrm{Sol}_K(y_1) = \{a \in K\}$. Mais l'ensemble

$$\mathrm{Sol}_K(F) = \{x(t) \in K[[t]] \mid F(x(t)) = 0\}$$

contient $x(t) = t^2$ qui n'est pas un élément de $\mathrm{Sol}_K(y_1)$. Donc $y_1 \notin (\{F\} : S_F)$, mais comme cet idéal est premier et contient $\delta(F)$, on en déduit que $(y_2 - 2) \in (\{F\} : S_F)$. On note $Q = \{y_1^2 - 4y_0, y_2 - 2\}$. Cet idéal est contenu dans $(\{F\} : S_F)$ et est premier car le morphisme

$$\begin{array}{ccccc} K\{y\}/\{F, y_2-2\} & \to & K[y_0, y_1]/\langle F\rangle & & \\ y_0 & \mapsto & y_0 & & \\ y_1 & \mapsto & y_1 & & \\ y_2 & \mapsto & 2 & & \\ y_i & \mapsto & 0 & & \text{pour } i \geqslant 3 \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Or $\langle y_1^2 - 4y_0\rangle$ est un idéal premier de $K[y_0, y_1]$, donc l'idéal Q est premier. Comme $\{F\} \subset Q$, on a

$$\{F\} = (\{F\} : S_F) \cap \{F, S_F\} \cap Q.$$

Or $Q \subset (\{F\} : S_F)$, donc la décomposition de F en idéaux premiers est la suivante :

$$\{F\} = \{y_1^2 - 4y_0, y_2 - 2\} \cap \{y_0\}$$

et on en déduit que $\{y_1^2 - 4y_0, y_2 - 2\} = (\{F\} : S_F)$.

2.7 Le théorème des petites puissances

Le théorème des petites puissances de Ritt, plus connu sous le nom de « Low Power Theorem », est une des grandes réussites de l'approche rittienne de l'algèbre différentielle. Ce théorème est un énoncé algorithmique simple qui s'inscrit dans la problématique de déterminer la décomposition irréductible d'un idéal parfait monogène $\{F\}$ de $K\{X_1, \ldots, X_n\}$. Introduit dans [Rit50, p. II] dans le cas des corps différentiels à une dérivation, ce théorème trouve également une présentation dans [Kol73, p. 13, 15] dans le cas d'ensembles finis arbitraires de dérivations. Dans cette section, nous nous limiterons au cas d'un corps différentiel K, muni d'une dérivation δ éventuellement

triviale tel que proposé par Ritt .

Ce théorème exploite une procédure de préparation algorithmique, s'interprétant comme une sorte de de pseudo-division. Voici comment la procédure de préparation algorithmique s'énonce (voir [Rit50, p. II, 17]).

Proposition 2.7.1 (Preparation process)**.** *Soit A et F deux polynômes différentiels de $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ de même classe h. On note l l'ordre de A et m l'ordre de F par rapport à y_h. On note S_A le séparant de A. Il existe deux entiers $t \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ tels que $S_A^t F$ soit de la forme*

$$S_A^t F = \sum_{j=1}^{r} C_j A^{p_i} \delta(A)^{i_{1,j}} \delta^2(A)^{i_{2,j}} \cdots \delta^{m-l}(A)^{i_{m-l,j}}$$

avec

1. *les p_j et $i_{k,j}$ sont des entiers positifs ;*
2. *les $(m-l)$-uplets $(i_{1,j}, \cdots, i_{m-l,j})$ sont tous distincts deux à deux ;*
3. *les C_j sont d'ordre inférieur à l en y_h et ne sont pas divisibles par A.*

Exemple 2.7.2.

1. Soit $F = y_1^2 - 4y_0$ et $A = y_0$, alors F est déjà sous forme "préparée" avec $t = 0$, $r = 2$, $C_1 = 1$, $p_1 = 0$, $i_{1,1} = 2$, $C_2 = -4$, $p_2 = 1$, et toute les autres entiers valent 0.
2. De même si $F = y_1^2 - 4y_0$ et $A = y_1$, alors F est déjà sous forme "préparée" avec $t = 0$, $r = 2$, $C_1 = 1$, $p_1 = 2$ et $C_2 = -4y_0$, et tous les autres entiers valent zéros.

Le théorème des petites puissances peut alors s'énoncer de la manière suivante (voir [Rit50, p. II, 20]).

Théorème 2.7.3 (Low power theorem)**.** *Soit K un corps de caractéristique zéro. Soit $A, F \in K\{Y\}$ deux polynômes différentiels irréductibles. Soit*

$$S_A^t F = \sum_{j=1}^{r} C_j A^{p_i} \delta(A)^{i_{1,j}} \delta^2(A)^{i_{2,j}} \cdots \delta^{m-l}(A)^{i_{m-l,j}} \tag{2.7.1}$$

une préparation de F par rapport à A. Alors l'idéal différentiel premier $(\{A\} : S_A)$ est une composante irréductible de $\{F\}$ si et seulement si

1. *dans 2.7.1 il y a un terme $C_k A^{p_k}$ ne faisant pas apparaître de derivée de A*
2. *pour tout entier $j \neq k$, on a $p_k < p_j + i_{1,j} + \cdots + i_{m-l,j}$.* [3]

3. Si $m = l$ et si 2.7.1 contient un unique terme de la forme $C_k A^{p_k}$, la condition est également vérifiée.

Exemple 2.7.4. Reprenons les exemples précédents 2.7.2.

1. Soit $F = y_1^2 - 4y_0$ et $A = y_0$, alors il existe un terme de la forme $-4y_0$, où la dérivée de A n'apparaît pas. Et $p_2 = 1 < p_1 + i_{1,1} = 2$. Donc y_0 est une composante irréductible de $\{F\}$.
2. Si $F = y_1^2 - 4y_0$ et $A = y_1$, alors la première hypothèse du lower power theorem est vérifié, mais pas la seconde, donc y_1 n'est pas une composante irréductible de $\{F\}$.

Dans le cas où l'on veut tester si $\{y_0\}$ est une composante singulière essentielle de $\{F\}$, cet énoncé prend la forme plus simple suivante : l'idéal différentiel $\{y_0\}$ sera une composante de $\{F\}$ si et seulement si l'expression de F contient un terme de la forme αy_0 ($\alpha \in K$) de degré (total) strictement inférieur au degré de tout autre monôme (non nul) apparaissant dans l'expression de F. (Voir également [Mat77].)

CHAPITRE 3

GÉNÉRALITÉS SUR LA COMPLÉTION

3.1 Notations et définitions de base

Dans cette partie nous rappellerons quelques définitions classiques de topologie.

Nous nous intéresserons particulièrement à des topologies sur des modules ou algèbres dont la topologie sera donnée par une filtration de sous-modules, respectivement d'idéaux.

Définition 3.1.1 (Espace topologique)**.** Soit E un ensemble et $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de E. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un *espace topologique* si les éléments de $\mathcal{T}$, qu'on appelle *ouverts*, vérifient les propriétés suivantes :

1. L'ensemble vide et E appartiennent à $\mathcal{T}$.
2. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert. Soit encore, si I est un ensemble arbitraire d'indices et si $(O_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$, alors $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
3. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. Soit encore si I est un ensemble fini d'indices et si $(O_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$, alors $\bigcap_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

La donnée de $\mathcal{T}$ est appelée une topologie sur E.

Étant donné $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, on peut munir l'ensemble produit $E \times E$ d'une topologie appelée *topologie produit*, de sorte que O est un ouvert du produit $E \times E$ si et seulement si, pour tout $x \in O$, il existe deux ouverts U et V de E, tels que $x \in U \times V \subset O$.

Définition 3.1.2 (Voisinages)**.** Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit x un point de E. On appelle *voisinage* de x toute partie V de E qui contient un ouvert $U \in \mathcal{T}$ vérifiant $x \in U \subset V$.

Définition 3.1.3 (Base de voisinages)**.** Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in E$. Soit I un ensemble d'indices et $(V_i)_{i\in I}$ une famille de voisinages de x. On dit que $(V_i)_{i\in I}$ est une base de voisinages de x pour la topologie $\mathcal{T}$ si pour tout voisinage U de x, il existe $i \in I$ tel que $V_i \subset U$.

Définition 3.1.4 (Application continue)**.** Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques. Une application $f\colon E_1 \to E_2$ est dite *continue* si, pour tout ouvert $O_2 \in \mathcal{T}_2$, son image réciproque par f est un ouvert de E_1, c'est-à-dire $f^{-1}(O_2) \in \mathcal{T}_1$.

La topologie produit est la topologie la plus fine qui rend toutes les projections continues. C'en est même une caractérisation.

Définition 3.1.5 (Groupe topologique)**.** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $\mathcal{T}$ une topologie sur G. On dit que $(G, \mathcal{T})$ est un *groupe topologique*, si la loi de composition interne et si l'application inverse $G \to G, x \to x^{-1}$ sont continues pour la topologie $\mathcal{T}$ et la topologie produit induite.

Définition 3.1.6 (Anneau topologique)**.** Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et $\mathcal{T}$ une topologie sur A. On dit que $(A, \mathcal{T})$ est un *anneau topologique*, si les lois internes sont continues, à savoir l'addition et la multiplication pour la la topologie produit, et l'application inverse définie sur $A^\times$ pour la topologie induite.

Définition 3.1.7 (Morphisme d'anneaux topologiques)**.** Soient $(A, \mathcal{T})$ et $(B, \mathcal{U})$ deux anneaux topologiques. Un *morphisme d'anneaux topologiques* $\varphi\colon (A, \mathcal{T}) \to (B, \mathcal{U})$ est un morphisme d'anneaux continu.

On peut alors considérer la catégorie des anneaux topologiques dont les objets sont des anneaux topologiques et les morphismes des morphismes d'anneaux topologiques.

Définition 3.1.8 (Module topologique)**.** Soit $(A, \mathcal{T})$ un anneau topologique et $(G, \mathcal{T}')$ un groupe topologique. On dit que G est un A-module topologique si G est un A-module et que la multiplication scalaire $A \times G \to G, (a, g) \mapsto a \cdot g$ est continue.

Définition 3.1.9 (Algèbre topologique)**.** Soit $(A, \mathcal{T})$ un anneau topologique et $(R, \mathcal{T}')$ un anneau topologique. On dit que R est une A-algèbre topologique si R est une A-algèbre et que le morphisme structural $A \to R$ est continu.

Comme précédemment on peut définir la catégorie des modules topologiques et des algèbres topologiques.

Un certain type de topologie qui nous intéressera particulièrement dans la suite est la topologie linéaire sur un anneau.

Définition 3.1.10 (Anneau linéairement topologisé)**.** Soit R un anneau topologique. On dit que R est *linéairement topologisé* s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux (nécessairement ouverts).

Réciproquement, étant donné une famille d'idéaux sur un anneau R on peut donner une condition pour qu'elle définisse une structure d'anneau topologique (voir lemme 3.1.13). Avec cette topologie, R sera linéairement topologisé.

Définition 3.1.11 (Famille filtrante)**.** Soit X un ensemble et I un ensemble totalement ordonné. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles. On dit que $(X_i)_{i\in I}$ est une famille *filtrante* (ou une filtration) de X si pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \leqslant j$, on a $X_j \subset X_i$.

Remarque 3.1.12. Si R est anneau et que $(J_i)_{i\in I}$ est une filtration sur R et si chacun des J_i est un idéal de R, on dira que $(J_i)_{i\in I}$ est une filtration de R en idéaux.

La donnée d'une filtration sur une structure algébrique permet de munir cette dernière d'une topologie compatible avec la structure algébrique, pour peu que chacun des éléments de la filtration ait également une certaine structure. Dans le lemme suivant nous nous contenterons d'énoncer le résultat dans le cas des anneaux.

Lemme 3.1.13. *Soit R un anneau et I un ensemble totalement ordonné. Soit $(J_i)_{i\in I}$ une filtration de R en idéaux (c'est-à-dire que pour tout $i \in I$, l'élément J_i est un idéal de R). Alors la donnée de $(J_i)_{i\in I}$ munit R d'une structure d'anneau topologiquement linéarisé définie comme suit : un sous-ensemble U de R est un ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $i \in I$ tel que $x + J_i \subset U$.*

En particulier cette topologie est stable par translation (c'est-à-dire que si U est un ouvert et $y \in R$ alors $y + U$ est un ouvert) et la filtration $(J_i)_{i\in I}$ forme, pour cette topologie, une base de voisinage de zéro.

Démonstration. Cette preuve comporte deux temps. Il faut d'abord vérifier que la donnée de la famille $(J_i)_{i\in I}$ définit bien une topologie, puisque que cette topologie est compatible avec les lois sur R.

Notons $\mathcal{T} = \{U \subset R \mid \forall x \in U, \exists i \in I,\ x + J_i \subset U\}$ et montrons que cet ensemble vérifie les propriétés des ouverts. On remarque que $\varnothing \in \mathcal{T}$. Soit Λ un ensemble d'indice et $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \mathcal{T}^\Lambda$. Soit $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, alors il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $x \in U_{\lambda_0}$. Par hypothèse, il existe $i_0 \in I$ tel que $x + J_{i_0} \subset U_{\lambda_0}$. Donc $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$. Finalement, soit $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ et $x \in U_1 \cap U_2$. Par hypothèse il existe $i_1, i_2 \in I$ tels que $x + J_{i_1} \subset U_1$ et $x + J_{i_2} \subset U_2$. Puisque la famille $(J_i)_{i\in I}$ est une filtration, on peut supposer sans perte de généralité que $J_{i_1} \subset J_{i_2}$. Alors $x + J_{i_2} \subset U_1 \cap U_2$.

Vérifions maintenant que cette topologie rend les lois sur R continues. Soit U un ouvert de R. Montrons que l'ensemble $V = \{(x,y) \in R^2 \mid x + y \in U\}$ est un ouvert de $R \times R$. Notons que la topologie considérée sur $R \times R$ est la topologie produit, en particulier V est un ouvert si pour tout $(x,y) \in V$ il existe $i_1, i_2 \in I$ tel que $(x + J_{i_1}) \times (y + J_{i_2}) \subset V$. Soit donc $(x,y) \in R^2$. Comme $x + y \in U$ il existe $i_0 \in I$ tel que $x + y + J_{i_0} \subset U$. Alors, comme J_{i_0} est un idéal (en particulier est stable par addition), on a $(x + J_{i_0}) \times (y + J_{i_0}) \subset V$. Donc V est un ouvert de $R \times R$.

Considérons maintenant $W = \{(x,y) \in R^2 \mid x \cdot y \in U\}$ et montrons que c'est un ouvert de $R \times R$. Soit $(x,y) \in W$. Puisque U est un ouvert de R, il existe $i \in I$ tel que

$x \cdot y + J_i \subset U$. Comme J_i est un idéal de R (est stable par somme et par produit d'un élément extérieur à l'idéal) on a que $(x + J_i) \times (y + J_i) \subset W$. Ainsi W est un ouvert de $R \times R$ et la topologie sur R le muni bien d'une structure d'anneau topologique. □

Remarque 3.1.14. La topologie décrite dans le lemme 3.1.13 est la topologie la plus fine stable par translation qui admet $(J_i)_{i\in I}$ comme base de voisinage de zéro. En effet, soit $\mathcal{T}'$ une topologie stable par translation admettant $(J_i)_{i\in I}$ comme base de voisinage de zéro. Soit U un ouvert et $x \in U$. Alors $U - x$ est un ouvert, et c'est un voisinage de zéro, donc il existe $i \in I$ tel que $J_i \subset U - x$. En particulier $x + J_i \subset U$, donc U est un ouvert de la topologie $\mathcal{T} = \{U \subset R \mid \forall x \in U, \exists i \in I,\ x + J_i \subset U\}$. Ainsi $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Remarquons également que la preuve s'adapte si l'on considère un groupe G muni d'une filtration de sous-groupes.

Définition 3.1.15 (Topologie d'anneau définie par une filtration d'idéaux)**.** Soit R un anneau et $(J_i)_{i\in I}$ une filtration de R en idéaux. On appellera *topologie définie par la filtration* $(J_i)_{i\in I}$, la topologie la plus fine, stable par translation, admettant $(J_i)_{i\in I}$ comme base de voisinage de zéro.

Définition 3.1.16 (Topologie préadique sur un anneau)**.** Soit R un anneau topologique et I un idéal de R. On dit que la topologie de R est *I-préadique* (voir [GD71, Ch.0, 7.1.9]) si elle est définie à partir de la filtration $(I^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Lemme 3.1.17. *Soit R un anneau et I un ensemble soit totalement ordonné. Soit $(J_i)_{i\in I}$ une filtration d'idéaux qui munit R d'une structure d'anneau topologiquement linéarisé. Soit G un R-module et $\varphi\colon R \times M \to G, (a, m) \mapsto a \cdot m$ la multiplication scalaire. Soit $(M_i)_{i\in I}$ une filtration de sous-modules de M qui munit M d'une structure de groupe topologique topologiquement linéarisé. On suppose de plus que, pour tout $i \in I$, on a $J_i \cdot M \subset M_i$. Alors le morphisme de multiplication scalaire φ est continu. Autrement dit, M est un R-module topologique.*

Démonstration. Le lemme précédent 3.1.13 décrit la topologie sur R et M.

Soit U un ouvert de M, il s'agit de montrer que $\varphi^- - 1(U)$ est un ouvert de $R \times M$. Soit $(a, m) \in \varphi^- - 1(U)$. Comme U est un ouvert de M et que $a \cdot m \in U$, il existe $i \in I$ tel que $a \cdot m + M_i \subset U$. Vérifions que $(a + J_i, m + M_i) \subset \varphi^- - 1(U)$. Soit $j \in J_i$ et $l \in M_i$, alors

$$(a + j) \cdot (m + l) = a \cdot m + a \cdot l + j \cdot (m + l).$$

Or $j \cdot (m + l)$ car $J_i \cdot M \subset M_i$ et $a \cdot l \in M_i$, car $l \in M_i$ et M_i est un sous R-module de M. Ainsi $(a + j) \cdot (m + l) \subset a \cdot m + M_i \subset U$. Donc $(a + J_i, m + M_i) \subset \varphi^- - 1(U)$ et $\varphi^- - 1(U)$ est un ouvert de $R \times M$. □

Définition 3.1.18 (Topologie de module définie par une filtration en sous-modules)**.** Soit R un anneau topologique et M un R-module topologique. Soit $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une filtration de M en sous-modules. On dira que la topologie de M est définie par la filtration en sous-module $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$, si la topologie de M est stable par translation et la plus fine admettant $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ comme base de voisinage de zéro.

Définition 3.1.19 (Topologie préadique sur un module)**.** Soit R un anneau topologique et M un R-module topologique. Soit I un idéal de R. On dit que la topologie sur M est I-préadique, si elle est définie par la filtration en sous-modules $(I^nM)_{n\in\mathbf{N}}$.

Une variante de du lemme 3.1.17 est également vraie pour les algèbres.

Lemme 3.1.20. *Soit R un anneau et I un ensemble soit totalement ordonné. Soit $(J_i)_{i\in I}$ une filtration d'idéaux qui munit R d'une structure d'anneau topologiquement linéarisé. Soit A une R-algèbre et $\varphi\colon R \to A$ le morphisme structurel. Soit $(K_i)_{i\in I}$ une filtration d'idéaux de A qui munit A d'une structure d'anneau topologiquement linéarisé. On suppose de plus que, pour tout $i \in I$, on a $\varphi(J_i)A \subset K_i$ (où $\varphi(J_i)A$ est l'idéal de A engendré par J_i). Alors le morphisme structurel φ est continu. Autrement dit, A est une R-algèbre topologique.*

Démonstration. Le lemme 3.1.13 décrit la topologie sur R et A.

Soit U un ouvert de A, montrons que $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert de R. Soit $x \in \varphi^{-1}(U)$. Par hypothèse, il existe $i \in I$ tel que $\varphi(x) + K_i \subset U$. Or $\varphi(x + J_i) \subset \varphi(x) + K_i \subset U$. En particulier $\varphi^{-1}(\varphi(x + J_i)) \subset \varphi^{-1}(U)$. Donc $x + J_i \subset \varphi^{-1}(U)$. Ce qui prouve que le morphisme structurel φ est continu. □

3.2 La complétion algébrique

Proposition 3.2.1. *Soit R un anneau et I un idéal de R. On suppose que la topologie de R est I-préadique, donnée par la filtration d'idéaux $(I^n)_{n\in\mathbf{N}*}$. Soit M un R-module dont la topologie est définie par une filtration de sous-modules que l'on note $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$, tels que pour tout entier $n > 1$, on ait $I^nM \subset M_n$. La limite projective*

$$\widehat{M} = \varprojlim_n M/M_n$$

existe dans la catégorie des R-modules topologiques.

Démonstration. La limite projective existe dans la catégorie des modules. On rappelle que la construction ensembliste de $\widehat{M}$ se fait comme suit. Un élément x de $\widehat{M}$ peut-être décrit comme un élément du produit $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \prod_{n\geqslant 1} M/M_n$ tel que, pour tout entiers $m \geqslant n$, si $\pi_{m,n}$ désigne la projection $\pi_{m,n}\colon M/M_m \to M/M_n$, on ait

$\pi_{m,n}(x_m) = x_n$. La loi de composition interne sur M et la structure de R-module s'étend naturellement. On note $\pi_n \colon \widehat{M} \to M/M_n$ les projections canoniques.

On munit, de plus, le R-module $\widehat{M}$ d'une strucutre de module topologique en considérant la topologie la plus fine stable par translation sur $\widehat{M}$ pour laquelle la famille des $(K_n = \mathrm{Ker}(\pi_n))_{n\in\mathbf{N}}$ forme une base de voisinage de zéro. Cette topologie rend les projections $(\pi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ continues. En effet La topologie induite sur le quotient M/M_n est la topologie discrète, donc pour que π_n soit continue il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}(\pi_n)$ soit un ouvert de $\widehat{M}$.

Alors $\widehat{M}$ munie de cette topologie est la limite projective $\varprojlim_n M/M_n$ dans la catégorie des R-modules topologiques. □

En particulier si, pour tout entier $n > 1$, on a $I^nM = M_n$, alors une base de voisinage de 0 pour la topologie induite sur $\widehat{M}$ est décrite par la filtration

$$(K_n = \mathrm{Ker}(\widehat{M} \to M/I^nM))_{n\in\mathbf{N}*},$$

où $\pi_n \colon \widehat{M} \to M/I^nM$ sont les morphismes de projection.

Définition 3.2.2 (Complétion)**.** Avec les notations de la proposition précédente on appelle *complétion* de M par rapport à la filtration $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la limite projective

$$\widehat{M} = \varprojlim_n M/M_n$$

dans la catégorie des R-modules topologiques.

Définition 3.2.3 (Module topologie complet)**.** Soit R un anneau et I un idéal de R. Soit M un R-module. On suppose que R est muni de la topologie I-préadique. Soit $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une filtration sur M telle que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on ait $I^nM \subset M_n$. On note $\widehat{M} = \varprojlim_n M/M_n$ la complétion de M par rapport à la filtration $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Le R-module M est *complet pour la topologie définie par la filtration* $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si le morphisme canonique $M \to \widehat{M}$ est un isomorphisme dans la catégorie des R-modules topologiques.

Proposition 3.2.4. *Soit R un anneau et I un idéal de R. Soit M un R-module. On suppose que R est muni de la topologie I-préadique. Soit $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une filtration sur M telle que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on ait $I^nM \subset M_n$. On note $\widehat{M} = \varprojlim_n M/M_n$ la complétion de M par rapport à la filtration $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors $\widehat{M}$ est un R-module topologique complet.*

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $\pi_n \colon \widehat{M} \to M/M_n$ les projections canoniques. On a vu que la topologie considérée sur $\widehat{M}$ est définie par la filtration $(K_n = \mathrm{Ker}(\pi_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Or on a un isomorphisme de R-modules entre $\widehat{M}/K_n$ et

M/M_n puisque les morphismes π_n sont surjectifs. Ainsi $\widehat{M} = \varprojlim_n \widehat{M}/K_n$ comme R-module. Par ailleurs, si $\varphi_n \colon \varprojlim_n \widehat{M}/K_n \to \widehat{M}/K_n$ désignent les morphismes de projections, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Ker}(\pi_n)$. Donc $\widehat{M} = \varprojlim_n \widehat{M}/K_n$ comme R-module topologique. Ainsi $\widehat{M}$ est complet. □

On peut définir une notion de complétion de manière similaire dans la catégorie des R-algèbres. Soit R un anneau et I un idéal tel que la topologie de R soit I-préadique. Soit A une R-algèbre et $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une filtration en idéaux de A. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $I^n A \subset J_n$. La topologie définie par la filtration $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ muni A d'une strucutre de R-algèbre topologique. Alors la limite projective $\widehat{A} = \varprojlim_n A/J_n$ existe dans la catégorie des R-algèbres topologiques. De plus si $\pi_n \colon \widehat{A} \to A/J_n$ désignent les projections canoniques, la topologie sur $\widehat{A}$ est définie par la filtration $\mathrm{Ker}(\pi_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

On appelle $\widehat{A}$ la complétion de A par rapport à la filtration $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$. De plus on dit que A est complet si le morphisme canonique $A \to \widehat{A}$ est un isomorphisme dans la catégorie des R-algèbres topologiques.

Par ailleurs $\widehat{A}$ est une R-algèbre topologique complète pour la topologie définie par la filtration $\mathrm{Ker}(\pi_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exemple 3.2.5. Donnons quelques exemples pour illustrer ces définition. Dans ces les deux derniers exemples, k sera un corps.

1. Soit R un anneau et $I = \langle 0 \rangle$ l'idéal nul. La topologie I-préadique sur R est la topologie discrète. Pour cette topologie R est complet.
2. Soit R un anneau et $I = R$. La topologie I-préadique sur R est la topologie grossière. La complétion de R pour cette topologie est l'anneau nul.
3. On considère l'anneau de polynôme en une indéterminée $k[x]$ muni de la filtration $(\langle x^n \rangle)_{n\in\mathbf{N}*}$. L'anneau $k[x]/\langle x^n \rangle$ peut-être vu comme un k-espace vectoriel de dimension n. On peut représenter un élément de cet anneau comme un polynôme de $k[x]$ de degré au plus $n-1$. La complétion de $k[x]$ est l'anneau des séries formelles $k[[x]]$. Un élément f de $k[[x]]$ peut s'écrire sous la forme $f = \sum_{i\geqslant 0} a_i x^i$, où $a_i \in k$.
4. Le deuxième exemple est une généralisation du premier. On considère Λ un ensemble au plus dénombrable et $k[(x_l)_{l\in\Lambda}]$ un anneau de polynômes. Soit $I = \langle (x_l)_{l\in\Lambda} \rangle$ l'idéal de $k[(x_l)_{l\in\Lambda}]$ engendré par toutes les variables. On munit l'anneau de la topologie I-préadique. Un élément de $k[(x_l)_{l\in\Lambda}]/I^n$ peut être interprété comme un polynôme en plusieurs variables dont le degré total n'excède pas n. On note $k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$ la complétion de $k[(x_l)_{l\in\Lambda}]$ pour la topologie précédemment décrite et un élément de cette complétion peut être vu comme une

somme formelle

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\sum_{\text{finie}} \text{monôme de degré total } n \right).$$

Deuxième partie

Systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires

Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $\mathbb{S}$ un système d'équations différentielles ordinaires algébriques, c'est-à-dire un sous-ensemble de $k[[x]]\{y\}$ (voir chapitre 2 pour plus de détails sur l'algèbre différentielle). Soit R une k-algèbre différentielle. On note $\mathbb{S}(R)$ l'ensemble des morphismes d'anneaux différentiels $\varphi\colon k[[x]]\{y\}/[\mathbb{S}] \to R$, où $[\mathbb{S}]$ désigne l'idéal différentiel engendré par $\mathbb{S}$ dans $k[[x]]\{y\}$.

Deux systèmes (fini ou infini) $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}'$ d'EDO algébriques sont dit *équivalents* s'il existe une transformation naturelle bijective $\mathbb{S}(R) \to \mathbb{S}'(R)$ fonctorielle en R pour toute k-algèbre différentielle R. Dans ce chapitre, nous démontrons à l'aide de méthodes provenant de l'algèbre différentielle que tout système d'équations différentielles ordinaires (EDO) affines, c'est-à-dire des EDO algébriques linéaires, est équivalent à un système composé d'au plus deux équations. Autrement dit, nous montrons que tout système d'au moins trois telles EDO est surdéterminé.

Pour démontrer notre théorème principal (cf. 4.4.1), nous donnerons dans un premier temps une description concrète des générateurs à partir de la donnée du système (voir section 4.2). Les paragraphes 4.2–4.2 sont inspirés de [Sab93, §2.3]. Notre preuve est basée sur un résultat technique présenté dans la section 4.3. Enfin dans la section 4.5.1 nous fournissons un algorithme qui permet d'expliciter les générateurs dans le cas où les coefficients des équations du système appartiennent à une extension de corps différentiels du corps de base k. Dans ce cas, tout idéal de $K\{y\}$ engendré par des éléments de degré un est en fait engendré par un seul élément (voir proposition 4.4.2). Notre résultat principal permet en outre de retrouver un résultat de structure connu sur les idéaux de l'anneau des opérateurs différentiels ; nous expliquons comment dans la section 4.6. Nous concluons le chapitre en donnant quelques exemples qui illustrent notre résultat principal et son utilité potentielle dans la résolution effective de système d'EDO linéaires (avec ou sans second membre).

Ce chapitre est issu d'une prépublication écrite en collaboration avec JULIEN SEBAG.

CHAPITRE 4

LES SYSTÈMES D'EDO AFFINES EN UNE VARIABLE DIFFÉRENTIELLE SONT DIFFÉRENTIELLEMENT DE RANG PLUS PETIT QUE 2

4.1 Notations

Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit A une k-algèbre. Une *équation différentielle ordinaire (ODE) affine sur* A est une ODE linéaire en une variable, avec un potentiel second membre et à coefficients dans l'anneau A.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les systèmes d'ODE à coefficients dans les k-algèbres classiques suivantes : l'anneau des polynômes $k[x]$, l'anneau des séries formelles $k[[x]]$, ou l'anneau des séries formelles convergentes $k\{\{x\}\}$ (lorsque k est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ par exemple). On peut remarquer que toutes les algèbres que nous avons citées partagent les propriétés suivantes :

1. L'anneau A est euclidien, muni d'un stathme euclidien $\nu\colon A\backslash\{0\} \to \mathbf{N}$.
2. L'anneau A est une k-algèbre muni d'une k-dérivation $\delta \in \mathrm{Der}_k(A)$.
3. L'anneau des constantes A^δ de δ est exactement k.
4. Pour tout $a \in A\backslash A^\delta$, on a $\nu(\delta(a)) < \nu(a)$.
5. Il existe un élément $u \in A\backslash\{0\}$ tel que, pour tout $a \in A\backslash\{0\}$, on ait $\nu(au) = \nu(a) + 1$.

Ces propriétés sont des ingrédients essentiels dans les preuves et ils ne dépendent pas du choix de l'algèbre des coefficients A. Ainsi, dans la suite, pour des raisons de simplicité, nous appellerons *anneau ∂-euclidien* (sur k) toute k algèbre qui vérifie

les 5 axiomes précédents. À partir de maintenant, nous travaillerons dans cette classe d'anneau.

Soit (R, δ) une k-algèbre différentielle et $R\{y\}$ l'anneau des polynômes différentiels (voir chapitre 2). Soit Δ la k-dérivation $\Delta \in \mathrm{Der}_k(R\{y\})$ définie par $\Delta_{|_R} = \delta$ et $\Delta(y_i) = y_{i+1}$ pour tout entier $i \in \mathbf{N}$. Si $S \subset R\{y\}$, on rappelle qu'on note $[S]$ l'idéal différentiel engendré par S dans l'anneau $R\{y\}$.

Soit P un polynôme différentiel. L'*ordre* d'un polynôme différentiel non constant P est l'entier $\mathrm{ord}(P)$ défini comme étant le plus grand entier m telle que la variable y_m apparaît effectivement dans l'expression de P. Le *degré* d'un polynôme différentiel P est le degré total de P considéré comme polynôme algébrique dans l'anneau $R[y_i, i \in \mathbf{N}]$.

Exemple 4.1.1. Si $R = (k[x], \partial_x)$, alors le polynôme différentiel $P = 5x^2y_2 + x$ est de degré 1 alors que le polynôme $Q = xy_1 + y_2y_3$ est de degré 2.

On suppose de plus que R est muni d'une structure d'anneau ∂-euclidien et d'un stathme euclidien ν. Si $\mathrm{ord}(P) = m$ et $P = \sum_{i=0}^{m} a_i y_i$, on note $\nu(P)$ l'entier $\nu(a_m)$. Cet entier est appelé le *degré du coefficient dominant* de P. Dans ce cas, l'*exposant* de P, noté $\mathrm{Exp}(P)$, est le couple $(\nu(P), \mathrm{ord}(P))$.

Soit S un sous-ensemble de $R\{y\}$ formé par les éléments de degré 1. L'*exposant* de S est l'ensemble :

$$\mathrm{Exp}(S) = \{\mathrm{Exp}(P) \mid P \in S\backslash\{0\}\}.$$

4.2 Des candidats pour les générateurs

Soit A un anneau ∂-euclidien. Dans cette section, nous allons définir les générateurs qui apparaissent dans le théorème 4.4.1. Soit I un idéal différentiel engendré par des polynômes différentiels de degré un à coefficients dans A. On peut supposer que I est un idéal propre de $A\{y\}$.

Soit I_1 le sous-ensemble de I formé par les éléments de I de degré un. On remarque que I_1 a une structure de R-module et est stable sous l'action de Δ. L'exposant de I_1 possède la propriété suivante : $\mathrm{Exp}(I_1) = \mathrm{Exp}(I_1) + \mathbf{N}^2$. En effet, si $P \in I_1$, alors, avec $u \in R$ défini comme dans la sous-section 4.1, on a $\mathrm{Exp}(uP) = (1, 0) + \mathrm{Exp}(P)$ and $\mathrm{Exp}(\Delta(P)) = (0, 1) + \mathrm{Exp}(P)$.

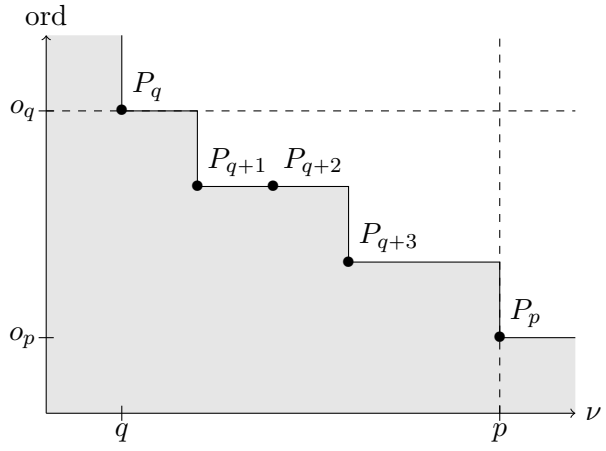


FIGURE 4.1 – Exposant de I_1

Soit E_ν l'ensemble formé par les polynômes différentiels non nuls de I_1 dont le degré du coefficient dominant est minimal. Pour tout polynôme différentiel $Q \in I_1 \backslash \{0\}$ et pour tout polynôme différentiel $P \in E_\nu$, on a alors $\nu(P) \leqslant \nu(Q)$. Puisque cet ensemble est non vide, on peut choisir un élément $P_\nu \in E_\nu$ d'ordre minimal. On pose $\nu(P_\nu) := q$ et $\mathrm{ord}(P_\nu) = o_q$.

Soit E_{ord} l'ensemble formé des polynômes différentiels non nuls de I_1 d'ordre minimal. Pour tout polynôme différentiel $Q \in I_1 \backslash \{0\}$ et pour tout polynôme différentiel $P \in E_{\mathrm{ord}}$, on a alors $\mathrm{ord}(P) \leqslant \mathrm{ord}(Q)$. Puisque cet ensemble est non vide, on peut choisir un élément $P_{\mathrm{ord}} \in E_{\mathrm{ord}}$ dont le degré du coefficient dominant est minimal. On pose alors $\nu(P_{\mathrm{ord}}) := p$ et $o_p = \mathrm{ord}(P_{\mathrm{ord}})$.

Pour tout entier $j \in \{q, \ldots, p\}$, on pose E_j l'ensemble formé par les polynômes différentiels P de I_1 tels que $\nu(P) = j$. Puisque E_j n'est pas vide, on peut choisir un élément d'ordre minimal $P_{j,0} := P_j \in E_j$. On note $\mathrm{ord}(P_j) = o_j$. Pour tout entier $j \in \{q+1, \ldots, p\}$ et tout entier $i \in \{1, \ldots, o_q - o_j - 1\}$, on pose $P_{j,i} = \Delta^i(P_j)$.

Remarque 4.2.1. Grâce aux remarques précédentes dans ce paragraphe, notons que l'ensemble $\mathrm{Exp}(I_1)$ ressemble à des escaliers. Plus précisément, si $j_1 < j_2$, alors $\mathrm{ord}(P_{j_1}) \geqslant \mathrm{ord}(P_{j_2})$. Sinon, de par l'existence de u dans 4.1/(5), on peut trouver un élément $Q := u^r P_{j_1}$ tel que $\mathrm{ord}(Q) = \mathrm{ord}(P_{j_1}) < \mathrm{ord}(P_{j_2})$ et $\nu(Q) = j_2$, ce qui contredit l'hypothèse sur P_{j_2}. Il n'y a donc pas de polynôme différentiel de I_1 dans la partie grise de la figure 4.2, par construction de P_j. On appellera cette partie grise, la partie "sous l'escalier".

Nous allons prouver dans la section 4.4 que les polynômes différentiels P_p, P_q forment un système de générateurs de l'idéal différentiel I.

4.3 Un lemme préparatoire

Dans cette section, nous allons établir un résultat technique (voir proposition 4.3.2), qui est un argument clé dans la preuve du théorème 4.4.1 (voir sous-section 4.4.2). Commençons d'abord par un premier lemme.

Lemme 4.3.1. *Soient $f, g \in I_1\backslash\{0\}$ avec $\mathrm{ord}(f) \geqslant \mathrm{ord}(g)$ et $\nu(f) \geqslant \nu(g)$, alors il existe $h \in I_1$, avec $\mathrm{ord}(h) < \mathrm{ord}(f)$ ou $h = 0$, et $r \in A$, avec $r = 0$ ou $\nu(r) < \nu(g)$, tels que*

$$f - (ry_{\mathrm{ord}(f)} + h) \in [g]$$

Démonstration. On pose $f = ay_m + f_1$ avec $a \in A\backslash\{0\}$, $m = \mathrm{ord}(f)$, $f_1 \in I_1$ et $\mathrm{ord}(f_1) < m$ ou $f_1 = 0$. On pose également $g = by_n + g_1$ avec $b \in A$, $n = \mathrm{ord}(g)$, $g_1 \in I_1$ et $\mathrm{ord}(g_1) < n$ ou $g_1 = 0$. Par hypothèse, il existe un entier positif α et $g_2 \in I_1$ avec $\mathrm{ord}(g_2) < n + \alpha = m$ tel que $\Delta^\alpha(g) = by_m + g_2$. Par division euclidienne de a par b, on peut écrire $a = bx + r$ avec $r = 0$ ou $\nu(r) < \nu(b)$. On a

$$\begin{aligned} f &= (bx + r)y_m + f_1 \\ &= x\Delta^\alpha(g) + ry_m - tg_2 + f_1. \end{aligned}$$

Le polynôme $h := -xg_2 + f_1$ a alors la propriété désirée. □

Proposition 4.3.2 (Lemme préparatoire)**.** *On suppose que $I \otimes_A K$ est un idéal propre de $K\{y\}$. Soit $f \in I_1$. Alors pour tout entier $j \in \{q+1, \ldots, p\}$ et tout entier $i \in \{0, \ldots, o_q - o_j - 1\}$, il existe $Q_{j,i} \in A$ tel que*

$$f - \sum_{i=0}^{o_q - o_j - 1} \sum_{j=p}^{q-1} Q_{j,i} P_{j,i} \in [P_q].$$

Démonstration. Puisque $I \otimes_A K$ est un idéal propre de $K\{y\}$, alors il n'existe pas d'élément de degré zéro dans I_1.

Étape 1. Soit $f \in I_1$. Montrons qu'il existe un polynôme différentiel $h \in I_1$ avec $h = 0$ ou $\mathrm{ord}(h) < o_q$ tel que $f - h \in [P_q]$. Si $\mathrm{ord}(f) < o_q$, on pose $h = f$. Sinon, on applique le lemme 4.3.1 à (f, P_q). On construit alors des polynômes r, h tels que $Q := ry_{\mathrm{ord}(f)} + h \in I_1$ avec $h = 0$ ou $\mathrm{ord}(h) < \mathrm{ord}(f)$, et $r = 0$ ou $\nu(r) < q$. Si $r \neq 0$ alors $\nu(Q) < q$, ce qui est absurde. Ainsi par le lemme 4.3.1, on déduit que $f - h \in [P_q]$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence à h (si $h \neq 0$), on conclut la preuve.

On remarque également que s'il n'existe pas de polynôme $g \in I_1 \backslash \{0\}$ tel que $\mathrm{ord}(g) < \mathrm{ord}(P_q)$, alors $h = 0$. Dans ce cas $[I_1] = [P_q] = [P_p]$.

Étape 2. D'après l'étape 1, il suffit de prouver l'assertion pour tout polynôme différentiel $f \in I_1$ avec $\mathrm{ord}(f) < o_q$. On procède par induction sur l'ordre de f. Si son ordre est strictement plus petit que l'ordre de P_p, alors $f = 0$. Soit $i_0 \in \{q+1, \ldots, p\}$ tel que $\mathrm{ord}(P_{i_0}) \leqslant \mathrm{ord}(f)$ et, pour tout entier $i < i_0$, on a $\mathrm{ord}(P_i) > \mathrm{ord}(f)$. On applique le lemme 4.3.1 à (f, P_{i_0}). Notons que par construction de P_{i_0}, on a $\nu(f) \geqslant \nu(P_{i_0})$. Alors il existe $r \in A$, $h \in I_1$ avec $\nu(r) < \nu(P_{i_0})$ ou $r = 0$ tel que $f - r y_{\mathrm{ord}(f)} - h \in [P_{i_0}]$. Si $r \neq 0$, on déduit que $\nu(r y_{\mathrm{ord}(f)} + h) = \nu(r) < \nu(P_{i_0})$. Ainsi, puisque pour tout entier $i < i_0$, on a $\mathrm{ord}(P_i) > \mathrm{ord}(r y_{\mathrm{ord}(f)} + h) = \mathrm{ord}(f)$, on en déduit par la remarque 4.2.1 que le polynôme $r y_{\mathrm{ord}(f)} + h$ est "sous l'escalier", ce qui est impossible. Ainsi, on a que $r = 0$, ce qui conclut la preuve grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à h. □

4.4 La preuve du théorème 4.4.1

Plus précisément, on peut énoncer le théorème principal 4.4.1 de la manière suivante dans le langage de l'algèbre différentielle.

Théorème 4.4.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit A une extension différentielle de k (que l'on note K), ou un anneau ∂-euclidien dont le corps des fractions est K. On note $A\{y\}$ l'anneau des polynômes différentiels en la variable y et à coefficients dans l'anneau A.*

Soit I un idéal différentiel de l'anneau $A\{y\}$ engendré par des éléments de degré un. On suppose que l'idéal $I \otimes_A K$ est un idéal propre de $K\{y\}$. Alors il existe deux polynômes différentiels $g_1, g_2 \in I$ tels que $I = [g_1, g_2]$, c'est à dire que I coïncide avec l'idéal différentiel engendré par g_1 et g_2.

On notera que dans le théorème 4.4.1, il n'est pas exclu que g_1 puisse coïncider avec g_2.

4.4.1 Le cas où A est un corps

Dans cette sous-section, nous supposerons que $A = K$ est une extension de corps de k. Dans ce cas, le théorème 4.4.1 s'exprime plus simplement comme on peut le voir dans la proposition 4.4.2. Ce résultat est également un élément clé de la preuve du cas général.

Proposition 4.4.2. *Soit K un corps de caractéristique zéro. Soit I_K un idéal différentiel propre de $K\{y\}$ engendré par des polynômes différentiels de degré un. Soit $P_p \in I_K$ un polynôme différentiel de degré un d'ordre minimal. Alors on a $[P_p] = I_K$.*

Démonstration. Montrons que $I_K \subset [P_p]$, l'inclusion réciproque étant immédiate. Soit $Q \in I_K$ avec $o_Q = \mathrm{ord}(Q)$. Par définition de P_p on sait que $o_Q \geqslant o_p$ (si $Q \neq 0$). Montrons notre assertion par une récurrence sur o_Q. Si $o_Q = o_p$, alors, puisque P_p est de degré un, on peut effectuer une division euclidienne (dans un anneau de polynôme approprié au dessus de K). On déduit qu'il existe des polynômes différentiels $F, G \in K\{y\}$ tels que $Q = FP_p + G$ et $\mathrm{ord}(G) < o_p$ ou $G = 0$. Puisque $G \in I_K$, à cause du choix de P_p, on en déduit que $G = 0$. Si $o_Q > o_p$, alors il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que $\mathrm{ord}(\Delta^\ell(P_p)) = o_p + \ell = o_Q$. Par la division euclidienne, on déduit qu'il existe un polynôme différentiel $F_1, G_1 \in K\{y\}$ tel que $Q = F_1\Delta^\ell(P_p) + G_1$ et $G_1 = 0$ ou $o_p \leqslant \mathrm{ord}(G_1) < o_Q$. Ainsi on conclut la preuve par récurrence. □

Corollaire 4.4.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit A un anneau ∂-euclidien dont le corps des fractions est noté K. Soit I un idéal différentiel de $A\{y\}$ engendré par des polynômes de degré un. On suppose que $I \otimes_A K \neq K\{y\}$. Soit $Q \in I_1$. Alors il existe un élément $a \in A\backslash\{0\}$ tel que $aQ \in [P_p]$.*

Démonstration. On considère la k-algèbre différentielle $K\{y\}$ obtenu en étendant la dérivation Δ de A à K. On applique la proposition 4.4.2. Il existe des polynômes différentiels $A_0, \ldots, A_n \in K\{y\}$ tels que

$$Q = \sum_{i=0}^{n} A_i \Delta^i(P_q).$$

Si, pour tout entier $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $A_i = a_i/a$, alors l'élément $a \in A\backslash\{0\}$ possède la propriété requise. □

4.4.2 Le cas général

Dans cette sous-section, on supposera que l'anneau A est un anneau ∂-euclidien arbitraire. Montrons un résultat préliminaire.

Proposition 4.4.4. *Pour tout entier $j \in \{q-1, \ldots, p-1\}$ et tout entier $i \in \{0, \ldots, o_q - o_j - 1\}$, le polynôme différentiel $P_{j,i}$ définis en 4.2 appartient à l'idéal $[P_p, P_q]$ engendré par P_p et P_q.*

Démonstration. On suppose qu'il existe certains polynômes $P_{j,i}$ qui n'appartient pas à l'idéal $[P_p, P_q]$. On les note $C_1, \ldots, C_n$. D'après le corollaire 4.4.3, il existe un élément $b \in A$ avec $\nu(b)$ minimal, tel que, pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $bC_i \in$

$[P_q, P_p]$. Soulignons que l'élément b n'est pas inversible, sinon on aurait $C_i \in [P_q, P_p]$, ce qui contredit notre hypothèse sur les C_i. Il existe un entier $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $aC_{j_0} \notin [P_q, P_p]$, pour tout $a \in A\backslash\{0\}$ avec $\nu(a) < \nu(b)$, à cause de la minimalité de $\nu(b)$. On remarque que

$$\Delta(bC_{j_0}) = \Delta(b)C_{j_0} + b\Delta(C_{j_0}). \tag{4.4.1}$$

Alors $\Delta(bC_{j_0}) \in [P_q, P_p]$ puisque l'idéal $[P_q, P_p]$ est différentiel. De plus, par la proposition 4.3.2, on déduit qu'il existe un polynôme $Q_{i,j} \in A$ tel que

$$\Delta(C_{j_0}) - \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=p}^{q-1} Q_{j,i} P_{j,i} \in [P_q] \tag{4.4.2}$$

puisque $\Delta(C_{j_0}) \in I_1$. À cause du choix du polynôme b, on déduit de l'équation (4.4.2) que le polynôme différentiel $b\Delta(C_{j_0})$ appartient à $[P_q, P_p]$. Ainsi d'après la relation (4.4.1), on en déduit que $\Delta(b)C_{j_0} \in [P_q, P_p]$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité sur le degré du coefficient dominant de b, puisque $\nu(\Delta(b)) < \nu(b)$ (car $b \notin k^{\times}$). □

On peut prouver maintenant que $I_1 \subset [P_q, P_p]$, ce qui est la formulation du théorème 4.4.1. Soit $Q \in I_1$. Par la proposition 4.3.2, il existe des polynômes $Q_{i,j} \in A$ tel que

$$Q - \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=p}^{q-1} Q_{j,i} P_{j,i} \in [P_q].$$

On conclut la preuve en appliquant la proposition 4.4.4.

4.5 Calcul des générateurs grâce à l'algorithme de Buchberger

Dans cette section, on suppose que k est un corps de caractéristique zéro, que le corps A est une extension différentielle de k (aussi noté K). On suppose qu'il existe des polynômes différentiels $f_1, \ldots, f_n \in K\{y\}$ de degré un, tels que $I = [f_1, \ldots, f_n]$ et que $I \neq K\{y\}$.

On suppose que $A = K$ est une extension différentielle de corps de k. Soit $F = ay_j$ un monome. Par la formule de Leibniz, on remarque

$$\Delta^s(F) = \sum_{r+u=s} \mathbf{C}_s^u \Delta^u(a) y_{j+r}.$$

Soit $N \in \mathbf{N}$. On déduit de l'observation précédente que tout monome du polynôme différentiel $\Delta^{2\nu(a)+1+N}(F)$ est d'ordre plus grand que $N+1$. Pour tout entier $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $(a_{i,j})_j$ les coefficients de f_i. On pose $M = \max_{i,j}(2\nu(a_{i,j})) + \min_i(\mathrm{ord}(f_i)) + 1$. Par construction, le polynôme P_p appartient à l'idéal (algébrique) engendré par les dérivées de f_i. Plus précisément, on a

$$P_p \in \langle \Delta^j(f_i);\ i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{0,\dots,M\} \rangle. \tag{4.5.1}$$

Remarquons que l'entier $M := M(P_p)$ dépend uniquement de la donnée des f_i.

On note $\mathfrak{F}$ la famille de polynôme formée par, pour tout entier $i \in \{1,\dots,n\}$, les f_i et leurs dérivées $\Delta^j(f_i)$ pour tous les entiers $j \in \{1,\dots,M\}$. On suppose qu'il existe un entier m tel que, pour tout $f \in \mathfrak{F}$, on ait $f \in k[y_0,\dots,y_m]$.

Soit J l'idéal (algébrique) de $K[y_0,\dots,y_m]$ engendré par $\mathfrak{F}$. On considère l'ordre lexicographique gradué sur l'anneau $k[y_0,\dots,y_m]$ avec $y_0 < \cdots < y_m$.

Théorème 4.5.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $A = K$ une extension différentielle de corps de k. On garde les notations de la sous-section 4.5. Dans toute base de Groebner de l'idéal J (pour l'ordre monomial donné par l'ordre lexicographique, voir sous-section 4.5), le polynôme différentiel P_p peut-être choisi comme un élément d'ordre minimal. Ainsi le théorème 4.4.1 est effectif.*

Démonstration. Soit P_p un polynôme de I_1 d'ordre minimal. Soit $\mathfrak{B} = \{h_1,\dots,h_s\}$ une base de Groebner de l'idéal J. On déduit qu'il existe un entier $i_0 \in \{1,\dots,s\}$ tel que le coefficient dominant $\mathrm{LT}(P_p)$ de P_p est divisible par $\mathrm{LT}(h_{i_0})$. À cause du choix de l'ordre monomial, on remarque que h_{i_0} est de degré un, et est d'ordre minimal à cause de l'hypothèse de minimalité sur P_p. Ainsi, quitte à remplacer P_p par h_{i_0}, on peut supposer que $P_p \in \mathfrak{B}$. □

Soit $\mathbb{S}$ un système d'EDO dont les coefficients sont dans un anneau ∂-euclidien A dont le corps des fractions est noté K. On note $\mathbb{S}_K$ le système $\mathbb{S}$ considéré avec coefficients dans K. Alors on a

$$\mathbb{S}(A) \subset \mathbb{S}(K) = \mathbb{S}_K(K).$$

Ainsi on voit que les solutions dans A d'un système fini $\mathbb{S}$ peuvent être cherchées dans $\mathbb{S}_K(K)$ après utilisation du théorème 4.5.1. Si le système $\mathbb{S}$ est infini et défini par des polynômes $(f_i)_{i\in\mathscr{I}}$, alors on remarque que l'espace des solutions $\mathbb{S}_K(K)$ dépend uniquement du radical de l'idéal différentiel $[f_i, i \in \mathscr{I}]$. D'après le théorème de Ritt-Raudenbusch, on sait que cet idéal différentiel $\sqrt{[f_i, i \in \mathscr{I}]}$ est radicalement différen-

tiellement engendré par un nombre fini d'éléments de $K\{y\}$. C'est-à-dire qu'il existe $g_1, \ldots, g_s \in \sqrt{[f_i, i \in \mathscr{I}]}$ tels que $\sqrt{[f_i, i \in \mathscr{I}]} = \sqrt{[g_j, j \in \{1, \ldots, s\}]}$. Ainsi le problème de trouver des solutions dans A de tout système d'EDO est équivalent à trouver les solutions dans A d'un système fini d'EDO.

On suppose que $A = (k[x], \deg, \partial_x)$, $K = k(x)$ et que l'idéal I est premier dans l'anneau $A\{y\}$. Notons que le théorème 4.5.1 donne un algorithme effectif pour calculer le polynôme P_p dans ce cas. En effet, en appliquant le théorème 4.5.1 à l'idéal $I \otimes_A K$, on obtient un polynôme $\tilde{P}_p \in IK\{y\}$ d'ordre minimal. Il existe un élément $u \in A$ tel que $u\tilde{P}_p \in I$. Ainsi $\mathrm{ord}(u\tilde{P}_p)$ est minimal dans I_1. Par ailleurs, choisissons l'élément u tel que les coefficients du polynôme $\tilde{P} := u\tilde{P}_p \in A\{y\}$ soient premiers entre eux dans leur ensemble (c'est possible car $I_K \neq K\{y\}$ et I est premier). Soit P_p un polynôme différentiel dans $A\{y\}$ défini comme dans la sous-section 4.2 dont les coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble. Alors il existe deux éléments premiers entre eux $a, b \in A$ tels que $a\tilde{P} = bP_p$. Ainsi $b|\tilde{P}$ et $a|P_p$. Grâce à l'hypothèse sur les polynômes $\tilde{P}$ et P_p, on en déduit que $a, b \in k^*$. On en déduit donc que, quitte à multiplier par un élément bien choisi $u \in k^*$, le polynôme $\tilde{P}_p$ donne un polynôme différentiel P_p définit comme dans la sous-section 4.2.

4.6 Une conséquence sur la structure des idéaux des opérateurs différentiels

Soit k un corps de caractéristique nulle et A un corps contenant K ou $A = k[[x]]$ ou $A = k[x]$. Soit $\mathscr{D}_A = \{\sum_i a_i \partial_x^i, a_i \in A\}$ l'anneau des opérateurs différentiels sur l'anneau A. Le théorème 4.4.1 implique le résultat suivant, que l'on peut retrouver dans [Dix70], qui correspond dans notre contexte, au cas particulier de la donnée d'un idéal différentiel homogène.

Corollaire 4.6.1. *Tout idéal à gauche I de l'anneau $\mathscr{D}_A$ est engendré par au plus deux opérateurs différentiels.*

Démonstration. Soit M le sous A-module différentiel de $A\{y\}$ engendré par les y_i pour tout entier $i \in \mathbf{N}$. On considère le morphisme de A-modules à gauche $\theta : \mathscr{D}_A \to M$ qui envoie ∂_x^i vers y_i pour tout entier $i \in \mathbf{N}$. Ce morphisme est clairement bijectif.

Ainsi, se donner un idéal J propre à gauche de $\mathscr{D}_A$ revient à se donner un sous A-module N de M. L'idéal I engendré différentiellement par N dans $A\{y\}$ est engendré par au plus deux éléments de degré 1 d'après le théorème 4.4.1. Ces éléments sont homogènes et engendrent N comme module différentiel. Donc J est engendré par au plus deux éléments. □

Ainsi le corollaire précédent est une application directe du théorème 4.4.1. On fournit ainsi une preuve alternative du résultat de [Sab93, §2.3] (valide pour $A = k[[x]], \mathbf{C}\langle x\rangle$) et un analogue pour les structures à gauche de [Sta78, Thm 3.1] (qui énonce un résultat similaire à [Sab93, §2.3] mais pour les structures à droite sur $A = k[x]$ et plus généralement pour des anneaux de polynômes ; voir également [Bjö79 ; Ley04] pour des approches algorithmiques sur les structures à droite).

Remarquons également que les arguments de [Sab93] différent par nature de ceux utilisés dans nos preuves qui appartiennent au "monde commutatif". De plus, notre preuve est unique pour tous les anneaux ∂-euclidien.

4.7 Exemples

Dans cette section nous allons donner quelques illustrations du théorème 4.4.1 sur des systèmes d'équations définis sur des corps.

Considérons le système suivant $\mathbb{S}$ défini sur k un corps de caractéristique nulle

$$\begin{cases} f_1 := y'' - 2y' & = & 0 \\ f_2 := y''' - 3y'' + 2y' & = & 0 \\ f_3 := 5y^{(4)} - 15y''' + 8y'' + 4y' & = & 0. \end{cases}$$

Appliquons l'algorithme de Buchberger à la famille $\mathfrak{F}$, comme introduite dans la sous-section 4.5. On obtient une base de Groebner $\mathfrak{B} = \langle y_4 - 8y_1, y_3 - 4y_1, y_2 - 2y_1\rangle$. On en conclut que $I := [f_1, f_2, f_3] = [y_2 - 2y_1]$ Dans l'anneau ∂-euclidien $(k[[x]], \mathrm{val}, \partial_x)$, les solutions du système peuvent être décrites comme :

$$\mathbb{S}(k[[x]]) = \{\lambda e^{2x} + \mu; \lambda, \mu \in k\} \cong k^2.$$

Ce résultat implique également que l'idéal à droite d'opérateurs différentiels $\langle \partial_x^2 - 2\partial_x, \partial_x^3 - 3\partial_x^2 + 2\partial_x, 5\partial_x^4 - 15\partial_x^3 + 8\partial_x^2 + 4\partial_x\rangle$ coïncident avec $\langle \partial_x^2 - 2\partial_x\rangle$.

Considérons le système suivant $\mathbb{S}$ défini sur un corps k par :

$$\begin{cases} f_1 := y^{(4)} - y''' - y'' + y' & = & 0 \\ f_2 := y''' - 2y'' + y' & = & 0 \\ f_3 := y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' & = & 0. \end{cases}$$

Appliquons l'algorithme de Buchberger à la famille $\mathfrak{F}$, comme introduite dans la sous-section 4.5. On obtient une base de Groebner $\mathfrak{B} = \langle y_4 - 3y_2 + 2y_1, y_3 - 2y_2 + y_1\rangle$.

Alors on conclut que $I := [f_1, f_2, f_3] = [y_3 - 2y_2 + y_1]$. Dans l'anneau ∂-euclidien $(k[[x]], \mathrm{val}, \partial_x)$, les solutions du système $\mathbb{S}$ peuvent être décrites comme :

$$\mathbb{S}(k[[x]]) = \{\lambda_1 x e^x + \lambda_2 e^x + \lambda_1; \lambda_i \in k \ \forall i \in \{1,2,3\}\} \cong k^3.$$

Ce résultat implique également que l'idéal à droite d'opérateurs différentiels $\langle \partial_x^4 - \partial_x^3 - \partial_x^2 + \partial_x, \partial_x^3 - 2\partial_x^2 + \partial_x, \partial_x^4 - 3\partial_x^3 + 3\partial_x^2 - \partial_x \rangle$ coïncide avec $\langle \partial_x^3 - 2\partial_x^2 + \partial_x \rangle$.

Ajoutons des seconds membres et considérons le système $\mathbb{S}'$ (défini sur $\mathbf{Q}(x)$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1 & = & 2x - 2 \\ f_2 & = & 2x - 4 \\ f_3 & = & 6 - 2x. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'algorithme de Buchberger appliqué à la famille $\mathfrak{F}$, comme introduite dans la sous-section 4.5 donne une base de Groebner $\mathfrak{B} = \langle y_4 - 3y_2 + 2y_1 - 4x + 6, y_3 - 2y_2 + y_1 - 2x + 4 \rangle$. On conclut que $I := [f_1 - 2x + 2, f_2 - 2x + 4, f_3 - 6 + 2x] = [y_3 - 2y_2 + y_1 - 2x + 4]$. Dans l'anneau ∂-euclidien $(\mathbf{Q}[[x]], \mathrm{val}, \partial_x)$, les solutions du système $\mathbb{S}$ peuvent être décrites comme :

$$\mathbb{S}'(\mathbf{Q}[[x]]) = \mathbb{S}'(\mathbf{Q}((x))) = \{\lambda_1 x e^x + \lambda_2 e^x + \lambda_1 + x^2; \lambda_i \in k \ \forall i \in \{1,2,3\}\}.$$

Soit $f_1 := y_1 + xy_0, f_2 := y_4 + 5y_3 \in \mathbf{Q}(x)\{y\}$. Considérons le système suivant $\mathbb{S}$ défini sur $\mathbf{Q}(x)$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1(y, y', 0, 0) & = & x^3 + 5x \\ f_2(0, 0, y''', y^{(4)}) & = & 0. \end{array} \right.$$

Appliquons l'algorithme de Buchberger à la famille $\mathfrak{F}$, comme introduite dans la sous-section 4.5. On obtient une base de Groebner $\mathfrak{B} = \langle y_4, y_3, y_2 - 2, y_1 - 2x, y_0 - x^2 - 3 \rangle$. On conclut que $I := [f_1, f_2] = [y_0 - x^2 - 3]$. Les solutions du système $\mathbb{S}$ peuvent être décrites comme :

$$\mathbb{S}(\mathbf{Q}(x)) = \{x^2 + 3\}.$$

Soit $\mathfrak{F}$ la famille $f_1 := x(x+1)(x+2)y_2 + 2xy_1 + 2y_0, f_2 := (1+x)^2 xy_2 + 2y_0, f_3 := (1+x)^3 xy_3 - 6y_0 \in \mathbf{Q}(x)\{y\}$. On considère le système suivant $\mathbb{S}$ défini sur $\mathbf{Q}(x)$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1 & = & 0 \\ f_2 & = & 0 \\ f_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

L'algorithme de Buchberger appliqué à la famille $\mathfrak{F}$ donne une base de Groebner dont un polynôme d'ordre minimal est $(x^2 + x)y_1 - y_0$. Ainsi les solutions du système $\mathbb{S}$ peuvent être décrites comme :

$$\mathbb{S}(\mathbf{Q}(x)) = \{\lambda \frac{x}{x+1};\ \lambda \in \mathbf{Q}\}.$$

Troisième partie

Le théorème fondamental de la géométrie différentielle partielle tropicale

La géométrie tropicale apparaît dans les années 1970 dans un travail de G. BERGMAN [Ber71] sur les ensembles limites logarithmiques. Elle s'est ensuite développée grâce aux travaux de M. KAPRANOV, M. KONTSEVICH, G. MIKHALKIN, O. VIRO et B. STURMFELS et s'est notamment illustrée comme un outil très efficace de la géométrie algébrique réelle. L'idée principale de cette théorie peut se voir comme une forme de linéarisation : il s'agit de remplacer les objets algébro-géométriques par des fonctions affines par morceaux. Plus précisément, dans le monde tropical l'addition est remplacée par le maximum (ou parfois le minimum le minimum dans ce chapitre) et la multiplication est remplacée par l'addition.

Suite aux premiers succès de cette théorie, D. GRIGORIEV introduit en 2015 dans un article publié en 2017 dans [Gri17] les éléments de l'*algèbre différentielle tropicale*, mélange entre l'algèbre différentielle et la géométrie tropicale. La géométrie différentielle tropicale considère des problèmes issus de la théorie des équations différentielles et essaye d'extraire des informations sur les solutions à partir d'une certaine structure des solutions. Le théorème fondamental de la géométrie différentielle tropicale [AGT16] énonce que le support de solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients dans un corps indénombrable et algébriquement clos de caractéristique nulle peut être obtenu en résolvant le système tropicalisé. Les équations différentielles tropicalisées utilisent une structure algébrique différente que celle usuelle qui peut être plus simple pour des calculs informatiques.

Dans cette partie, nous allons dans un premier temps donner les définitions de géométrie tropicale utiles dans la suite, puis décrire et donner quelques propriétés de Vert : les sommets du polygone de Newton d'une partie de $\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$. Dans ce cadre, la notion de Vert est à $\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$ ce que le minimum est à $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ et joue un rôle essentiel dans l'opération décrite ensuite : la tropicalisation des polynômes. Finalement dans le chapitre 6, nous énoncerons le théorème fondamental de la géométrie différentielle tropicale partielle et discuterons dans la section 6.3 de ses limites.

Cette partie est issue d'un travail en collaboration avec FRANÇOIS BOULIER, SEBASTIAN FALKENSTEINER, CRISTHIAN GARAY-LÓPEZ, MARC PAUL NOORDMAN, & ZEINAB TOGHANI [Fal+20] lors d'un workshop à Londres au Queen Mary University of London.

CHAPITRE 5

ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE ET GÉOMÉTRIE TROPICALE

5.1 Semi-anneau des supports et ensemble des sommets

Dans cette section nous allons donner quelques propriétés de notre semi-anneau idempotent, à savoir le semi-anneau des supports $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$ et le semi-anneau des ensembles de sommets $\mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$. En particulier, on s'intéressera aux propriétés de l'application $\mathrm{Vert}\colon \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}) \longrightarrow \mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$ (définie en 5.1.5) qui est un morphisme de semi-anneau.

Commençons par rappeler quelques notions sur les ensembles partiellement ordonnés (ou *poset*).

Définition 5.1.1. Soit $(P, \leqslant)$ un poset et considérons une sous partie $S \subseteq P$. On dit que S est une *anti-chaîne* si deux éléments distincts de S sont incomparables. On note $\min(S)$ l'ensemble des éléments minimaux de S *c-a-d.* $\min(S) = \{a \in S \ : \ b \leqslant a,\ b \in S \Rightarrow b = a\}$.

Remarquons que $\min(S)$ est toujours une anti-chaîne et que si S est une anti-chaîne si et seulement si $\min(S) = S$. Si on a plusieurs préordres $\leqslant_1, \ldots, \leqslant_m$ définis sur P, alors on note $\min_{\leqslant_i}(S)$ l'anti-chaîne des éléments minimaux de S par rapport au préordre $\leqslant_i$.

Définition 5.1.2. Un semi-anneau commutatif S est un uplet $(S, +, \times, 0, 1)$ tel que $(S, +, 0)$ et $(S, \times, 1)$ soient des monoïdes commutatifs et tels que, pour tout $a, b, c \in S$, on a

1. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;
2. $0 \times a = 0$.

Un semi-anneau est dit *idempotent* si, pour tout $a \in S$, on $a + a = a$. Soient S_1 et S_2 deux semi-anneaux. Une application $f : S_1 \longrightarrow S_2$ est appelée morphisme de semi-anneau s'il induit un morphisme de monoïdes au niveau des deux structures de monoïdes.

Exemple 5.1.3. Soit $M = (M, *, e)$ un monoïde commutatif. Alors M admet un préordre naturel $\leqslant_*$, appelé le préordre algébrique du monoïde, défini par : pour tout $x, y \in M$, on a $x \leqslant_* y$ si et seulement s'il existe $z \in M$ tel que $x * z = y$. Ce préordre est algébrique dans le sens où il est compatible avec la structure de monoïde : pour tout $z \in M$ et $x \leqslant_* y$, on a que $x * z \leqslant_* y * z$.

Définition 5.1.4. Soit $m \geqslant 1$ un entier. On note $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)$ le semi-anneau idempotent dont les éléments sont les sous-ensembles de $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m$ muni des opérations somme donné par $X \cup Y$ et produit donné par la somme de Minkowski $X + Y = \{x + y \ : \ x \in X, y \in Y\}$. On l'appelle le *semi-anneau des supports*.

Pour tout entier $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ et $X \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)$, la notation nX signifiera

$$nX = \underbrace{X + \cdots + X}_{n \text{ times}}.$$

Par convention $0X = \{(0, \ldots, 0)\}$.

Les préordres algébriques (voir exemple 5.1.3) correspondant à ces opérations $\leqslant_\cup$ et $\leqslant_+$ définis sur $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)$ sont en fait des ordres partiels. Par exemple, on a $X \leqslant_\cup Y$ si et seulement si $X \subseteq Y$. Pour $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)$, on note $\min_\cup(S)$ ou $\min_+(S)$ les anti-chaînes d'éléments minimaux de S correspondantes à ces ordres partiels.

Définition 5.1.5. Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)$. On appelle *polygone de Newton* et l'on note $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathbf{R}_{\geqslant 0}^m$ l'enveloppe convexe de $X + \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m$. On dit que $x \in X$ est un *sommet* de X si $x \notin \mathcal{N}(X \backslash \{x\})$. On note $\operatorname{Vert} X$ l'ensemble des sommets de X.

Remarque 5.1.6. On remarque que $\operatorname{Vert} X$ est un sous-ensemble d'une base minimale de l'idéal monomial engendré par X (voir par exemple [CLO07]), mais qu'ils ne sont en général pas égaux (voir l'exemple 5.1.11). Ainsi les résultats suivants ne semblent pas être des conséquences immédiates des résultats classiques sur les idéaux monomiaux.

Lemme 5.1.7. *Soient $S, T \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)$ tels que $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T)$. Alors $\operatorname{Vert} S = \operatorname{Vert} T$.*

Démonstration. Soit $s \in \operatorname{Vert} S$ et supposons que $s \in \mathcal{N}(T \backslash \{s\})$. Alors il existe $t_i \in T \backslash \{s\}$, $w_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m$ et des réels positifs $\lambda_i \in \mathbf{R}$ dont la somme fait 1 tels que

$$s = \sum_i \lambda_i (t_i + w_i).$$

Puisque $t_i \in \mathcal{N}(S)$, on peut écrire les t_i sous la forme

$$t_i = \sum_j \mu_{i,j}(s_{i,j} + z_{i,j}),$$

où $s_{i,j} \in S$, $z_{i,j} \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$ et $\mu_{i,j} \in \mathbf{R}$ sont des réels positives dont la somme vaut 1. Ainsi

$$s = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_{i,j}(s_{i,j} + z_{i,j} + w_i) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_{i,j} s_{i,j} + v,$$

où v est un vecteur avec des coefficients positifs. En excluant de la somme les indices (i, j) tels que $s_{i,j} = s$, on obtient

$$s = cs + \sum_{\substack{i,j \\ s_{i,j} \neq s}} \lambda_i \mu_{i,j} s_{i,j} + v$$

où $c = \sum_{i,j:s_{i,j}=s} \lambda_i \mu_{i,j} \in [0, 1]$. Si $c < 1$, on peut résoudre l'équation ci-dessus pour s afin d'obtenir

$$s = \sum_{\substack{i,j \\ s_{i,j} \neq s}} \frac{\lambda_i \mu_{i,j}}{1 - c} s_{i,j} + \frac{v}{1 - c}.$$

Les coefficients pour les $s_{i,j}$ sont positifs et leur somme vaut 1. Ainsi la sommation dans la partie droite donne un élément de $\mathcal{N}(S\backslash\{s\})$. Puisque $\mathcal{N}(S\backslash\{s\})$ est fermé sous l'action d'ajouter des éléments de $\mathbf{R}^m_{\geqslant 0}$, et que le coefficient $v/(1 - c)$ est positif, alors on a que $s \in \mathcal{N}(S\backslash\{s\})$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que s est un sommet de S. Si $c = 1$ alors tous les $s_{i,j}$ sont égaux à s, et on obtient $s = s + v$. Donc $v = 0$ et $t_i = s$ pour tout i, et en particulier $s \in T\backslash\{s\}$, ce qui est absurde. Ainsi on conclut que $s \notin \mathcal{N}(T\backslash\{s\})$ et s est un sommet de T. □

Lemme 5.1.8. *Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$. Alors $\mathcal{N}(\operatorname{Vert} X) = \mathcal{N}(X)$.*

Démonstration. Par le lemme de Dickson [CLO07, chap. 2, Thm 5], il existe un ensemble fini $S \subseteq X$ tel que $X \subseteq S + \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$. Pour un tel S, on a que $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(S)$ que par le lemme 5.1.7, on en déduit que $\operatorname{Vert} X = \operatorname{Vert} S$. Ainsi, en remplaçant X par S, on peut supposer que X est fini.

On procède par récurrence sur le cardinal de X. En effet si $X = \varnothing$, il n'y a rien à démontrer. Soit X un ensemble fini quelconque. Si tout élément de X est un sommet de X alors $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(\operatorname{Vert} X)$ est vrai. Sinon, prenons $x \in X\backslash \operatorname{Vert} X$ et $Y = X\backslash\{x\}$ Alors, par définition, $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(Y)$. Ainsi en appliquant le lemme 5.1.7, on en déduit que $\operatorname{Vert} X = \operatorname{Vert} Y$. Puisque le cardinal de Y est strictement inférieur au cardinal de X, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Y et on obtient que $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(Y) = \mathcal{N}(\operatorname{Vert} Y) = \mathcal{N}(\operatorname{Vert} X)$. □

On en déduit que les sommets de $X \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$ sont uniquement caractérisés par son polygone de Newton.

Corollaire 5.1.9. *Pour $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$, on a $\operatorname{Vert} X = \operatorname{Vert} Y$ si et seulement si $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(Y)$.*

Dans le lemme suivant nous allons voir que l'application Vert se comporte bien vis-à-vis de l'union et de la somme de Minkowski, qui sont la somme et le produit dans le semi-anneau des supports.

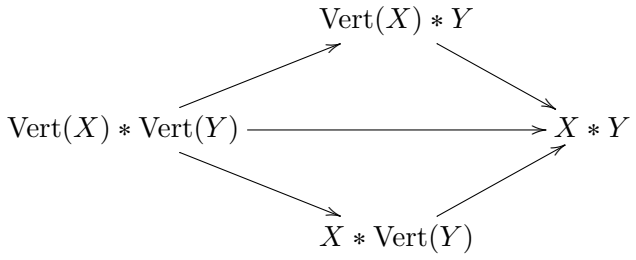
Lemme 5.1.10. *Pour$X, Y \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$, on a*

$$\begin{aligned}\operatorname{Vert}(\operatorname{Vert}(X) \cup \operatorname{Vert}(Y)) &= \operatorname{Vert}(\operatorname{Vert}(X) \cup Y) \\ &= \operatorname{Vert}(X \cup \operatorname{Vert}(Y)) \\ &= \operatorname{Vert}(X \cup Y)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{Vert}(\operatorname{Vert}(X) + \operatorname{Vert}(Y)) &= \operatorname{Vert}(\operatorname{Vert}(X) + Y) \\ &= \operatorname{Vert}(X + \operatorname{Vert}(Y)) \\ &= \operatorname{Vert}(X + Y).\end{aligned}$$

Démonstration. On note $*$ soit l'opération $\cup$ soit l'opération $+$. Alors on a le diagramme suivant où les flèches sont des inclusions.



Montrons que ces quatre ensembles engendrent le même polygone de Newton, ce qui permettra de conclure grâce au corollaire 5.1.9. En particulier il suffit de montrer que $X * Y \subseteq \mathcal{N}(\operatorname{Vert}(X) * \operatorname{Vert}(Y))$ (car pour tout $Z \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$, on a $\mathcal{N}(\mathcal{N}(Z)) = \mathcal{N}(Z)$).

Si $* = \cup$, on a $X \subseteq \mathcal{N}(\operatorname{Vert} X) \subseteq \mathcal{N}(\operatorname{Vert}(X) \cup \operatorname{Vert}(Y))$ et de manière symétrique $Y \subseteq \mathcal{N}(\operatorname{Vert}(X) \cup \operatorname{Vert}(Y))$. Ainsi $X \cup Y \subseteq \mathcal{N}(\operatorname{Vert}(X) \cup \operatorname{Vert}(Y))$.

Supposons maintenant que $* = +$. Soit $t \in X + Y$ et notons $t = x + y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$. D'après les inclusions $X \subseteq \mathcal{N}(\operatorname{Vert} X)$ et $Y \subseteq \mathcal{N}(\operatorname{Vert} Y)$,il existe $x_i \in \operatorname{Vert}(X)$, $y_j \in \operatorname{Vert}(Y)$, $u_i, v_j \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$ et $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ qui vérifient $\sum_i \alpha_i = 1$ et

$\sum_j \beta_j = 1$ tels que

$$t = \sum_i \alpha_i(x_i + u_i) + \sum_j \beta_j(y_j + v_j).$$

En ré-indexant cette somme, on obtient

$$t = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j(x_i + y_j + u_i + v_j).$$

Pour tout couple i, j, l'expression entre parenthèse est un élément de $\mathrm{Vert}(X) + \mathrm{Vert}(Y) + \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ et ses coefficieints sont des réels positifs dont la somme fait 1. Ceci montre que $t \in \mathcal{N}(\mathrm{Vert}(X) + \mathrm{Vert}(Y))$, ce qui termine la preuve. □

Exemple 5.1.11. De manière générale, si $B(X)$ est une base minimale pour l'idéal monomial engendré par $X \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$, alors $\mathrm{Vert}(X) \subset B(X)$ mais cette inclusion peut-être stricte. Considérons par exemple l'ensemble $X = \{A_1 = (1, 4), A_2 = (2, 3), A_3 = (3, 3), A_4 = (4, 1)\} \subseteq \mathbf{Z}^2_{\geqslant 0}$ avec $B(X) = \{A_1, A_2, A_4\}$. Alors le polygone de Newton $\mathcal{N}(X)$ peut être représenté par la figure 5.1.

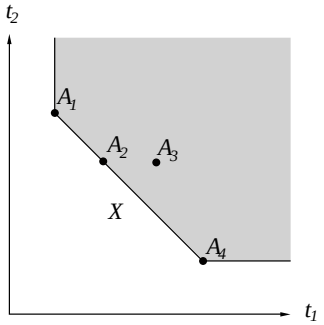


FIGURE 5.1 – Le polygone de Newton de X. L'ensemble des sommets de X est $\{A_1, A_4\}$.

Alors $\{S \subseteq X \ : \ \mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(X)\} = \{\{A_1, A_4\} \subseteq S \subseteq X\}$, et l'ensemble $\mathrm{Vert}(X)$ des sommets de X est l'élément minimal de cette famille par rapport à l'inclusion, à savoir $\{A_1, A_4\}$.

On déduit du corollaire 5.1.9 que l'application $\mathrm{Vert} : \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$ est une projection, dans le sens où $\mathrm{Vert}^2 = \mathrm{Vert}$.

Définition 5.1.12. On note $\mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$ l'image de l'opérateur Vert, et on appelle ses éléments soit des *ensembles de sommets*, soit des *séries formelles tropicales*. Pour $S, T \in \mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$, on définit

$$S \oplus T = \mathrm{Vert}(S \cup T) \quad \text{et} \quad S \odot T = \mathrm{Vert}(S + T).$$

Corollaire 5.1.13. *L'ensemble* $(\mathbb{T}[[t_1,\dots,t_m]],\oplus,\odot)$ *est un semi-anneau commutatif dont l'élément nul est* $\varnothing$*, et dont l'unité est* $\{0\}$.

Remarque 5.1.14. Dans le cas où $m=1$ alors l'application Vert coïncide avec le $\min$ sur $\mathbf{N}$. En particulier, le semi-anneau considéré est $\mathbf{N},\min,+$ qui sont les opérations tropicales usuelles.

Démonstration. Les seules choses qu'il reste à vérifier sont l'associativité de $\oplus$, l'associativité de $\odot$ et la distributivité. L'associativité de $\oplus$ et de $\odot$ découlent des égalités

$$S\oplus(T\oplus U)=\mathrm{Vert}(S\cup T\cup U)=(S\oplus T)\oplus U$$

et

$$S\odot(T\odot U)=\mathrm{Vert}(S+T+U)=(S\odot T)\odot U$$

qui sont des conséquences du lemme 5.1.10. Quant à la distributivité, elle découle de l'égalité

$$S\odot(T\oplus U)=\mathrm{Vert}((S+T)\cup U)=\mathrm{Vert}((S+T)\cup(S+U))=(S\odot T)\oplus(S\odot U).\ \square$$

Corollaire 5.1.15. *L'application* Vert *est un homomorphisme de semi-anneaux commutatifs. En particulier, pour tout famille finie* $\{X_i\}_i$ *d'éléments* $X_i\in\mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$*, on a* $\mathrm{Vert}(\sum_i X_i)=\bigodot_{i\in I}\mathrm{Vert}(X_i)$*,* $\mathrm{Vert}(\bigcup_i X_i)=\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Vert}(X_i)$ *et* $\mathrm{Vert}(nT)=\mathrm{Vert}(T)^{\odot n}$.

Démonstration. Découle directement des lemmes 5.1.10 et 5.1.13. $\square$

5.2 L'anneau différentiel des séries formelles et l'application support

On considère l'anneau différentiel R_m défini dans la section 2.3, et les semi-anneaux $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$ et $\mathbb{T}[[t_1,\dots,t_m]]$ issus de la section 5.1. Dans cette partie, nous allons introduire le support et l'application de tropicalisation, qui sont reliées par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_m & \xrightarrow{\text{Supp}} & \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}) \\ & \searrow^{\text{trop}} & \downarrow{\scriptstyle \text{Vert}} \\ & & \mathbb{T}[[t_1,\dots,t_m]] \end{array} \tag{5.2.1}$$

Si $J = (j_1, \dots, j_m)$ est un élément de $\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$, on notera t^J le monôme $t_1^{j_1} \cdots t_m^{j_m}$. Un élément de R_m est de la forme $\varphi = \sum_{J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}} a_J t^J$ avec $a_J \in K$.

Définition 5.2.1. 1. Le *support* de $\varphi = \sum a_J t^J \in R_m$ est défini comme

$$\mathrm{Supp}(\varphi) = \{J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0} \mid a_J \neq 0\}.$$

2. Pour un entier n fixé, l'application de R_m^n vers le produit $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n$ est également noté Supp.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Supp}\colon & R_m^n & \to & \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n \\ & \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) & \mapsto & \mathrm{Supp}(\varphi) = (\mathrm{Supp}(\varphi_1), \dots, \mathrm{Supp}(\varphi_n)). \end{array}$$

3. *L'ensemble des supports* de $T \subseteq R_m^n$ est son image par l'application Supp :

$$\mathrm{Supp}(T) = \{\mathrm{Supp}(\varphi) \mid \varphi \in T\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n.$$

4. L'application qui envoie toute série formelle de R_m vers l'ensemble des sommets de son support est appelé l'application de *tropicalisation*.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{trop}\colon & R_m & \to & \mathbb{T}[[t_1, \dots, t_m]] \\ & \varphi & \mapsto & \mathrm{Vert}(\mathrm{Supp}(\varphi)). \end{array}$$

Lemme 5.2.2. *L'application de tropicalisation est une valuation non dégénérée dans le sens de [GG16, Definition 2.5.1]. C'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{trop}(0) = \varnothing$, $\mathrm{trop}(\pm 1) = \{0\}$,
2. $\mathrm{trop}(\varphi \cdot \psi) = \mathrm{trop}(\varphi) \odot \mathrm{trop}(\psi)$,
3. $\mathrm{trop}(\varphi + \psi) \oplus \mathrm{trop}(\varphi) \oplus \mathrm{trop}(\psi) = \mathrm{trop}(\varphi) \oplus \mathrm{trop}(\psi)$,
4. $\mathrm{trop}(\varphi) = \varnothing$ *implique que* $\varphi = 0$.

Démonstration. Le premier point est clair.

Pour le second, on remarque le polygone de Newton a la propriété bien connue suivante

$$\mathcal{N}(\mathrm{Supp}(\varphi \cdot \psi)) = \mathcal{N}(\mathrm{Supp}(\varphi)) + \mathcal{N}(\mathrm{Supp}(\psi)) = \mathcal{N}(\mathrm{Supp}(\varphi) + \mathrm{Supp}(\psi)).$$

Ainsi, les sommets de l'ensemble $\mathrm{Supp}(\varphi) + \mathrm{Supp}(\psi)$ coïncident avec les sommets de $\mathrm{Supp}(\varphi \cdot \psi)$. Ceci implique que $\mathrm{trop}(\varphi \cdot \psi) = \mathrm{Vert}(\mathcal{N}(\mathrm{Supp}(\varphi) + \mathrm{Supp}(\psi)))$. Finalement le fait que $\mathrm{trop}(\varphi \cdot \psi) = \mathrm{trop}(\varphi) \odot \mathrm{trop}(\psi)$ se déduit du lemme 5.1.10.

Le troisième point se déduit du fait que $\mathrm{Supp}(\varphi + \psi) \subseteq \mathrm{Supp}(\varphi) \cup \mathrm{Supp}(\psi)$ et du lemme 5.1.15.

Le dernier point se déduit du fait que l'ensemble vide est le seul ensemble dont le polygone de Newton est vide. □

Définition 5.2.3. Pour $J = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$, on définit $\Theta_{\mathrm{trop}}(J) : \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}) \to \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})$ comme

$$\Theta_{\mathrm{trop}}(J)T := \left\{ (t_1 - j_1, \ldots, t_m - j_m) \;\middle|\; \begin{array}{c} (t_1, \ldots, t_m) \in T, \\ \text{for all } 1 \leqslant i \leqslant m : \; t_i - j_i \geqslant 0 \end{array} \right\}$$

Par exemple, si T est la zone grise de la partie gauche de la figure 5.2 et si $J = (1, 2)$, alors de manière informelle $\Theta_{\mathrm{trop}}(J)T$ est la translation de T par le vecteur J et l'on garde que la partie positive (les points dont toutes les coordoonées sont positives). L'ensemble $\Theta_{\mathrm{trop}}(J)T$ est la zone grise sur sur la partie droite de la figure 5.2.

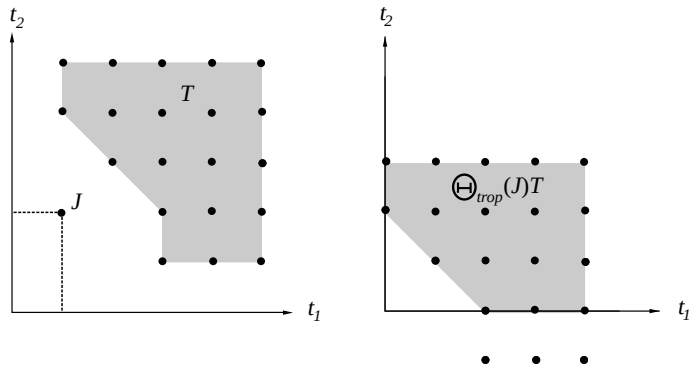


FIGURE 5.2 – L'opérateur $\Theta_{\mathrm{trop}}(J)$ pour $J = (1, 2)$ appliqué à l'ensemble T.

Puisque K est de caractéristique nulle alors, pour tout $\varphi \in R_m$ et $J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$, on a

$$\mathrm{Supp}(\Theta(J)\varphi) = \Theta_{\mathrm{trop}}(J)\mathrm{Supp}(\varphi) \tag{5.2.2}$$

Maintenant, étant donné un monôme différentiel E_M comme dans l'équation (2.3.1), nous avons tous les outils pour définir l'évaluation de E_m en un support $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n$. On pose

$$E_M(S) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ ||J||_\infty \leqslant r}} M_{i,J}\Theta_{\mathrm{trop}}(J)S_i \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}). \tag{5.2.3}$$

Lemme 5.2.4. *Étant donné une série formelle $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R^n_m$ et un monôme différentiel E_M, on a* $\mathrm{trop}(E_M(\varphi)) = \mathrm{Vert}(E_M(\mathrm{Supp}(\varphi)))$

Démonstration. En appliquant l'application trop à l'équation (5.2.2), on obtient

$$\mathrm{trop}(\Theta(J)\varphi_i) = \mathrm{Vert}(\Theta_{\mathrm{trop}}(J)\mathrm{Supp}(\varphi_i)). \tag{5.2.4}$$

En utilisant la multiplicativité de trop (voir lemme 5.2.2), l'équation (5.2.4) et le lemme 5.1.15, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{trop}(E_M(\varphi)) &= \bigodot_{i,J} \mathrm{trop}(\Theta(J)\varphi_i)^{\odot M_{i,J}} = \bigodot_{i,J} \mathrm{Vert}(\Theta_{\mathrm{trop}}(J)\mathrm{Supp}(\varphi_i))^{\odot M_{i,J}} \\ &= \mathrm{Vert}(E_M(\mathbf{Supp}(\varphi))).\end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.5. Si $P = \sum_M \alpha_M E_M \in R_{m,n}$ et $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R_m^n$, alors on peut considérer le *support supérieur* $US(P, \varphi)$ of P at φ défini comme

$$US(P, \varphi) = \bigcup_M (\mathrm{Supp}(\alpha_M) + \mathrm{Supp}(E_M(\varphi))) \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}).$$

On peut maintenant calculer les sommets de $US(P, \varphi)$ en appliquant l'opération Vert et le lemme 5.1.15 à l'expression ci-dessus pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathrm{Vert}\Big(\bigcup_M (\mathbf{Supp}(\alpha_M) + \mathbf{Supp}(E_M(\varphi))\Big) &= \bigoplus_M \mathrm{Vert}(\mathbf{Supp}(\alpha_M) + \mathbf{Supp}(E_M(\varphi)) \\ = \bigoplus_M \mathrm{trop}(\alpha_M) \odot \mathrm{trop}(E_M(\varphi)) &= \bigoplus_M \mathrm{trop}(\alpha_M) \odot \mathrm{Vert}(E_M(\mathbf{Supp}(\varphi))),\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{trop}(E_M(\varphi)) = \mathrm{Vert}(E_M(\mathrm{Supp}(\varphi)))$ par le lemme 5.2.4. ceci motive la définition de polynômes différentiels tropicaux que nous verrons dans la section suivante.

5.3 Les polynômes tropicaux différentiels

Dans cette section, nous définissons l'ensemble des polynômes tropicaux différentiels $\mathbb{T}_{m,n}$ et le morphisme de tropicalisation $\mathrm{trop}\colon R_{m,n} \to \mathbb{T}_{m,n}$. On rappelle que $\mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$ est l'ensemble des sommets dans $\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$ et que $\mathrm{Vert}\colon \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}) \longrightarrow \mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$ est l'homomorphisme de projection (voir section 5.1). Remarquons que dans le cas $m = 1$ les définitions et propriétés présentées coïncident avec celles utilisées dans la preuve du théorème fondamental de la géométrie différentielle tropicale [AGT16]. De plus, dans la section 6.3 nous illustrerons dans l'exemple 6.3.2 les raisons des définitions données ici.

Définition 5.3.1. Pour un ensemble $S \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)$ un un m-uplet $J \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m$, on définit

$$\mathrm{Val}_J(S) = \mathrm{Vert}(\Theta_{\mathrm{trop}}(J)S).$$

Notons que pour $\varphi \in R_m$ et tout m-uplet J, ceci implique que

$$\mathrm{Val}_J(\mathrm{Supp}(\varphi)) = \mathrm{trop}(\Theta(J)\varphi).$$

En particulier $\mathrm{Val}_J(S) = \varnothing$ si et seulement si $\Theta(J)\varphi = 0$. On déduit du lemme 5.1.15 que

$$\mathrm{Vert}(E_M(S)) = \bigodot_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ ||J||_\infty \leqslant r}} \mathrm{Val}_J(S_i)^{\odot M_{i,J}}.$$

Définition 5.3.2. Un *monôme tropical différentiel* en les variables $x_1, \ldots, x_n$ d'ordre plus petit ou égal à r est une expression de la forme

$$\epsilon_M = \bigodot_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ ||J||_\infty \leqslant r}} x_{i,J}^{\odot M_{i,J}}$$

où $M = (M_{i,J}) \in (\mathbf{Z}_{\geqslant 0})^{n\times(r+1)^m}$.

Un monôme tropical différentiel ϵ_M induit une application de

$$\mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)^n \to \mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$$

donné par

$$\epsilon_M(S_1, \ldots, S_n) = \mathrm{Vert}(E_M(S)) = \bigodot_{i,J} \mathrm{Val}_J(S_i)^{\odot M_{i,J}},$$

où $\mathrm{Val}_J(S_i)$ est défini dans la définition 5.3.1 et $E_M(S)$ dans l'équation (5.2.3). Rappellons que d'après le lemme 5.1.13, on peut aussi écrire

$$\epsilon_M(S_1, \ldots, S_n) = \mathrm{Vert}\left(\sum_{i,J} \mathrm{Val}_J(S_i)^{\odot M_{i,J}}\right).$$

Définition 5.3.3. Un *polynôme tropical différentiel* en les variables $x_1, \ldots, x_n$ d'ordre plus petit ou égal à r est une expression de la forme

$$p = p(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{M\in\Delta} a_M \odot \epsilon_M,$$

où $a_M \in \mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$, $a_M \neq \varnothing$ and Δ est un sous-ensemble fini de $(\mathbf{Z}_{\geqslant 0})^{n\times(r+1)^m}$.

On notera $\mathbb{T}_{m,n} = \mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des polynômes tropicaux différentiels.

Un polynôme tropical différentiel p comme défini dans 5.3.3 induit une application de $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n$ vers $\mathbb{T}[[t_1, \ldots, t_m]]$ donné par

$$p(S) = \bigoplus_{M \in \Delta} a_M \odot \epsilon_M(S) = \mathrm{Vert}\Big(\bigcup_{M \in \Delta} (a_M + \epsilon_M(S)) \Big)$$

La seconde égalité se déduit du lemme 5.1.13. Un polynôme différentiel $P \in R_{m,n}$ d'ordre au plus r est de la forme

$$P = \sum_{M \in \Delta} \alpha_M E_M,$$

où Δ est un sous-ensemble fini de $(\mathbf{Z}_{\geqslant 0})^{n \times (r+1)^m}$, $\alpha_M \in K[[t_1, \ldots, t_m]]$ et E_M est un monôme différentiel comme dans (2.3.1). Alors la *tropicalisation* de P est définie comme

$$\mathrm{trop}(P) = \bigoplus_{M \in \Delta} \mathrm{trop}(\alpha_M) \odot \epsilon_M \in \mathbb{T}_{m,n},$$

où ϵ_M est le monôme différentiel tropical correspondant à E_M.

Définition 5.3.4. Soit $G \subseteq R_{m,n}$ un idéal différentiel. Sa **tropicalisation** $\mathrm{trop}(G)$ est l'ensemble des polynômes tropicaux $\{\mathrm{trop}(P) \mid P \in G\}$.

Lemme 5.3.5. *Etant donné un monôme différentiel E_M et un n-uplet de séries formelles $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in K[[t_1, \ldots, t_m]]^n$, on a*

$$\mathrm{trop}(E_M(\varphi)) = \epsilon_M(\mathrm{Supp}(\varphi)).$$

Démonstration. Se déduit des notations et du lemme 5.2.4. □

La définition suivante de solution d'un polynôme tropicale est une généralisation naturelle du cas $m = 1$, sauf que l'évaluation $p(S)$ donne un ensemble de sommet au lieu d'un simple minimum.

Définition 5.3.6.

1. Soit $p = \bigoplus_{M \in \Delta} a_M \odot \epsilon_M$ un polynôme tropical différentiel. Un n-uplet $S \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n$ est appelé *solution* de p si pour tout $J \in p(S)$ il existe $M_1, M_2 \in \Delta$ avec $M_1 \neq M_2$ tel que $J \in a_{M_1} \odot \epsilon_{M_1}(S)$ et $J \in a_{M_2} \odot \epsilon_{M_2}(S)$. Remarquons que si $p(S) = \varnothing$, alors S est une solution de p.
2. Soit $H \subseteq \mathbb{T}_{m,n}$ une famille de polynômes tropicaux différentiels. Alors S est une *solution* de H si S est solution de tous les polynômes tropaux différentiels

de H. L'ensemble des solutions de H sera noté $\mathrm{Sol}(H)$, *c-a-d*

$$\mathrm{Sol}(H) = \{S \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0}^m)^n \mid S \text{ is a solution of } p \text{ for every } p \in H\}$$

CHAPITRE 6

LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE TROPICALE PARTIELLE

6.1 Notations

6.2 Le théorème fondamental

Le but de cette section est de démontrer qu'étant donné un idéal différentiel G de $R_{m,n}$ le support des solutions de G coïncide avec les solutions de la tropicalisation de G. Plus précisément on veut démontrer le théorème suivant

Théorème 6.2.1 (Théorème fondamental)**.** *Soit K un corps algébriquement clos et indénombrable de caractéristique nulle. Soit G un idéal différentiel de l'anneau $R_{m,n}$. Alors*

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}(G)) = \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G)).$$

Remarque 6.2.2. Ce théorème est la généralisation avec des dérivées partielles du théorème fondamental de la géométrie différentielle tropicale, voir [AGT16].

Nous allons commencer par démontrer que l'inclusion $\mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}(G)) \subseteq \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G))$ est toujours vraie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, indépendamment du fait que K soit indénombrable.

Proposition 6.2.3. *Soit G un idéal différentiel de l'anneau des polynômes différentiels $R_{m,n}$. Si $\varphi \in \mathrm{Sol}(G)$, alors $\mathrm{Supp}(\varphi) \in \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G))$.*

Démonstration. Soit φ une solution de G et $S = \mathrm{Supp}(\varphi)$. Soit $P = \sum_{M \in \Delta} \alpha_M E_M \in G$ un polynôme différentiel de G et $p = \mathrm{trop}(P) = \bigoplus_{M \in \Delta} a_M \odot \epsilon_M$, où $a_M = \mathrm{trop}(\alpha_M)$. Nous allons montrer que S est solution de p. Soit $J \in p(S)$ un sommet quelconque. Par définition de la loi $\oplus$, il existe un indice M_1 tel que

$$J \in a_{M_1} \odot \epsilon_{M_1}(S).$$

Ainsi d'après le lemme 5.3.5 et la multiplicativité de l'application trop (voir le lemme 5.2.2), on a

$$J \in \mathrm{Vert}(\mathrm{Supp}(\alpha_{M_1} E_{M_1}(\varphi))).$$

Puisque $P(\varphi) = 0$, il existe un autre indice $M_2 \neq M_1$ tel que

$$J \in \mathrm{Supp}(\alpha_{M_2} E_{M_2}(\varphi)),$$

car sinon il n'y aurait pas d'annulation. Puisque J est un sommet de $p(S)$, on en déduit que J est un sommet de tout sous-ensemble de $\mathcal{N}(p(S))$ contenant J et en particulier de $\mathcal{N}(\mathrm{Supp}(\alpha_{M_2} E_{M_2}(\varphi)))$. Ainsi

$$J \in a_{M_2} \odot \epsilon_{M_2}(S)$$

et comme J et P ont été choisi arbitrairement, on en déduit que S est une solution de G. □

Il ne reste donc plus qu'à démontrer l'inclusion réciproque. C'est en particulier dans la proposition 6.2.5, qu'il sera important que K soit indénombrable. La remarque 6.3.3 montre que le théorème 6.2.1 est en général faux si K est dénombrable.

La preuve du théorème fondamental prendra le reste de cette section et sera décomposée en plusieurs parties. D'abord nous introduirons quelques notations. Si $J = (j_1, \ldots, j_m)$ est un élément de $\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$, on dédinit $J!$ comme étant le produit $j_1! \cdots j_m!$. La bijection entre $K^{\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}}$ et R_m donnée par

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & K^{\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}} & \to & R_m \\ & \underline{a} = (a_J)_{J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}} & \mapsto & \displaystyle\sum_{J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}} \frac{1}{J!} a_J t^J \end{array}$$

nous permet d'identifier les points de R_m avec les points de $K^{\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}}$. De plus, si $I \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$, l'application ψ possède la propriété suivante :

$$\Theta(I)\psi(\underline{a}) = \sum_{J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}} \frac{1}{J!} a_{I+J} t^J$$

qui implique que

$$\underline{a} = (\Theta(I)\psi(\underline{a})|_{t=0})_{I \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}}.$$

Pour le reste de cette section, on se fixe un ensemble fini de polynômes différentiels $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_s\} \subseteq G$ tels que Σ possède les mêmes solutions que G (ce qui est

possible d'après la propriété 2.4.7).. Pour tout $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ et $I \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$ on définit

$$F_{\ell,I} = (\Theta(I)P_\ell)|_{t_1=\cdots=t_m=0} \in K\big[x_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}\big]$$

et

$$A_\infty = \{(a_{i,J}) \in K^{n\times(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})} : F_{\ell,I}(a_{i,J}) = 0 \text{ for all } 1 \leqslant \ell \leqslant s, I \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}\}.$$

L'ensemble A_∞ correspond aux séries formelles solutions du système différentiel $\Sigma = 0$ comme le montre le lemme suivant.

Lemme 6.2.4. *Soit $\varphi \in K[[t_1, \ldots, t_m]]^n$ avec $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, où*

$$\varphi_i = \sum_{J\in(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})} \frac{a_{i,J}}{J!} t^J.$$

Alors φ est une solution de $\Sigma = 0$ si et seulement si $(a_{i,J}) \in A_\infty$.

Démonstration. Cet énoncé se déduit de la formule

$$P_\ell(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{I\in(\mathbf{Z}_{\geqslant 0})^m} \frac{F_{\ell,I}((a_{i,J})_{i,J})}{I!} t^I,$$

qui est aussi appellée formule de Taylor. Voir [Sei58] pour plus de détails. □

Pour tout $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n$ on définit

$$A_{\infty,S} = \{(a_{i,J}) \in A_\infty : a_{i,J} = 0 \text{ si et seulement si } J \notin S_i\}.$$

Cet ensemble correspond aux séries formelles solution du système $\Sigma = 0$ dont le support est exactement S. En particulier $S \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}(G))$ si et seulement si $A_{\infty,S} \neq \varnothing$.

Les ensembles A_∞ et $A_{\infty,S}$ font intervenir un nombre infini de coefficients. On aimerait pouvoir travailler à un niveau fini. Dans ce but, nous donnons les définitions suivantes. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on choisit $N_k \geqslant 0$ minimal tel que pour tout entier $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ et $||I||_\infty \leqslant k$, on a

$$F_{\ell,I} \in K[x_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, ||J||_\infty \leqslant N_k].$$

Remarquons que si $k_1 \leqslant k_2$ alors $N_{k_1} \leqslant N_{k_2}$. On définit alors

$$A_k = \{(a_{i,J}) \in K^{n\times\{1,\ldots,N_k\}^m} : F_{\ell,I}(a_{i,J}) = 0 \quad \forall 1 \leqslant \ell \leqslant s, ||I||_\infty \leqslant k\}$$

et

$$A_{k,S} = \{(a_{i,J}) \in A_k : a_{i,J} = 0 \text{ si et seulement si } J \notin S_i\}.$$

Il existe des applications de projection $\pi_{k,l} : A_{k,S} \to A_{l,S}$ pour tout $k, l \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$ avec $k \geqslant l$. On a que $A_{\infty,S} = \varprojlim A_{k,S}$.

Proposition 6.2.5. *Soit $S \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n$. Si $A_{\infty,S} = \varnothing$, alors il existe $k \geqslant 0$ tel que $A_{k,S} = \varnothing$.*

Démonstration. Supposons que, pour tout entier $k \geqslant 0$, l'ensemble $A_{k,S}$ soit non vide ; on va montrer que cela implique que $A_{\infty,S} \neq \varnothing$. On suit la stratégie de la preuve [DL84, Theorem 2.10] : dans un premier temps on utilise un ultraproduit afin de construire un corps plus grand $\mathbb{K}$ sur lequel on peut trouver une série formelle solution dont le support est S. Ensuite on montre que ceci implique l'existence d'une solution avec le même support et à coefficients dans K. Pour plus d'informations sur les ultrafiltres et les ultraproduits, le lecteur pourra consulter [Bec+79].

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on choisit un élément $(a^{(k)}_{i,J})_{1 \leqslant i \leqslant n, ||J||_\infty \leqslant N_k} \in A_{k,S}$. Fixons un ultra-filtre non-principal $\mathcal{U}$ sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ et considérons l'ultra-produit $\mathbb{K} = (\prod_{r \in \mathbb{N}} K)/\sim$ où $x \sim y$ pour $x = (x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_r)_{r \in \mathbb{N}}$ si et seulement si l'ensemble $\{r \in \mathbb{N} : x_r = y_r\}$ est dans $\mathcal{U}$. On notera $[(x_r)]$ la classe d'équivalence d'une suite (x_r). On considère $\mathbb{K}$ comme une K-algèbre à l'aide de l'application diagonale $K \to \mathbb{K}, x \mapsto (x)_{r \in \mathbf{N}}$. Pour tout i dans J, on va définir $a_{i,J} \in \mathbb{K}$ comme

$$a_{i,J} = [(a^{(k)}_{i,J} : k \in \mathbb{N})]$$

où l'ensemble $a^{(k)}_{i,J} = 0$ pour un nombre fini de valeurs de k avec $||J||_\infty > N_k$. Pour tout entier $\ell \in \mathbf{N}$ et I, on a $F_{\ell,I}((a^{(k)}_{i,J})_{i,J}) = 0$ pour k assez grand. Ainsi $F_{\ell,I}((a_{i,J})_{i,J}) = 0$ dans $\mathbb{K}$ (car l'ensemble des k tels que $F_{\ell,I}((a^{(k)}_{i,J})_{i,J}) \neq 0$ est fini). De plus pour $J \in S_i$, on a $a^{(k)}_{i,J} \neq 0$ pour tout k assez grand (par hypothèse), ainsi $a_{i,J} \neq 0$ dans $\mathbb{K}$. De l'autre côté pour $J \notin S_i$, on a $a^{(k)}_{i,J} = 0$ pour tout k, et donc $a_{i,J} = 0$.

On considère maintenant l'anneau

$$R = K\left[\begin{array}{l} x_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0} \\ x^{-1}_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}, J \in S_i \end{array}\right] \Big/ \left(\begin{array}{l} F_{\ell,I} : 1 \leqslant \ell \leqslant s, I \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0} \\ x_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, J \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}, J \notin S_i \end{array}\right)$$

Le paragraphe ci-dessus prouve que l'application $R \to \mathbb{K}$ définie par $x_{i,J} \mapsto a_{i,J}$ est un morphisme d'anneau bien défini. En particulier R n'est pas l'anneau nul. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R. Montrons que la composition $K \to R \to R/\mathfrak{m}$ est un isomorphisme. En effet, $R/\mathfrak{m}$ est un corps et une K-algèbre engendré par un nombre

au plus dénombrable d'éléments (puisque R l'est). Ainsi, le corps $R/\mathfrak{m}$ de dimension au plus dénombrable comme K espace-vectoriel. Si $t \in R/\mathfrak{m}$ était transcendant sur K, alors par la théorie de la décomposition en éléments simples, les éléments $1/(t-\alpha)$ pour $\alpha \in K$ formeraient un sous-ensemble K linéaire de $R/\mathfrak{m}$ indénombrable (c'est précisément ici que la non-dénombrabilité de K joue un rôle). Ceci n'est pas possible, ainsi $R/\mathfrak{m}$ est algébrique sur K. Comme K est algébriquement clos, alors $K = R/\mathfrak{m}$. Ainsi par construction l'ensemble $(b_{i,J})$ satisfait les conditions $F_{\ell,I}((b_{i,J})) = 0$ pour tout ℓ et I, et $b_{i,J} = 0$ si et seulement si $J \notin S_i$. Ainsi $(b_{i,J})$ est un élément de $A_{\infty,S}$. En particulier $A_{\infty,S} \neq \varnothing$. □

Preuve de 6.2.1. Nous allons maintenant prouver la direction manquante du théorème fondamental par contraposée. Soit $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^m_{\geqslant 0})^n$ tel que $A_{\infty,S} = \varnothing$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de solution série formelle de $\Sigma = 0$ dans $K[[t_1, \ldots, t_m]]^n$ ayant S comme support. Alors d'après la proposition 6.2.5, il existe $k \geqslant 0$ tel que $A_{k,S} = \varnothing$. De manière équivalente

$$V\left(\begin{array}{l} F_{\ell,I} : 1 \leqslant \ell \leqslant s, ||I||_\infty \leqslant N_k \\ x_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, J \notin S_i, ||J||_\infty \leqslant k \end{array}\right) \subseteq V\left(\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ J \in S_i \\ ||J||_\infty \leqslant N_k}} x_{i,J}\right).$$

D'après le théorème des zéros de Hilbert, il existe un entier $M \geqslant 1$ tel que

$$E := \left(\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ J \in S_i \\ ||J||_\infty \leqslant N_k}} x_{i,J}\right)^M \in \left\langle \begin{array}{l} F_{\ell,I} : 1 \leqslant \ell \leqslant s, ||I||_\infty \leqslant N_k \\ x_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, J \notin S_i, ||J||_\infty \leqslant k \end{array}\right\rangle.$$

Ainsi il existe $G_{\ell,I}$ and $H_{i,J}$ in $K[x_{i,J} : 1 \leqslant i \leqslant n, ||J||_\infty \leqslant N_k]$ tel que

$$E = \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant s \\ ||I||_\infty \leqslant k}} G_{\ell,I} F_{\ell,I} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ J \notin S_i \\ ||J||_\infty \leqslant N_k}} H_{i,J} x_{i,J}.$$

Définissons le polynôme différentiel P par

$$P = \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant s \\ ||I||_\infty \leqslant k}} G_{\ell,I} \Theta(I)(P_\ell).$$

Alors P est un élément de l'idéal différentiel engendré par $P_1, \ldots, P_s$. Ainsi, en par-

ticulier $P \in G$. Puisque $F_{\ell,I} = \Theta(I)(P_\ell)|_{t=0}$, il existe $h_i \in R_{m,n}$ tel que

$$P = E - \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ J\notin S_i \\ ||J||_\infty \leqslant N_k}} H_{i,J} x_{i,J} \; + \; t_1 h_1 + \ldots + t_m h_m.$$

Remarquons que E apparaît comme un monôme dans P puisqu'il ne peut pas s'annuler avec les autres termes de la somme ci-dessus. Par construction, on a $\mathrm{trop}(E)(S) = \{(0,\ldots,0)\}$. Cependant on a $(0,\ldots,0) \notin \mathrm{trop}(H_{i,J}x_{i,J})(S)$ car $J \notin S_i$, et on a $(0,\ldots,0) \notin \mathrm{trop}(t_i h_i)(S)$ car le facteur t_i oblige le $i$eme coefficient de tous les éléments de $\mathrm{trop}(t_i h_i)(S)$ d'être au moins 1. Ainsi le sommet $\{(0,\ldots,0)\}$ de $\mathrm{trop}(P)(S)$ n'est atteint qu'une seule fois (dans le monôme E) et ainsi S n'est pas une solution de $\mathrm{trop}(P)$. Puisque $P \in G$, on en déduit que $S \notin \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G))$, ce qui prouve l'énoncé. □

6.3 Exemples et limites du théorème fondamental

Dans cette section, nous donnons des exemples pour illustrer les résultats obtenus dans les sections précédentes. De plus, nous donnerons quelques idées de généralisations directes où le théorème fondamental [AGT16] et notre version 6.2.1 ne s'appliquent plus. Nous donnerons aussi quelques pistes pour des développements.

Exemple 6.3.1. Considérons le système de polynômes différentiels

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&P_1 = x_{1,(1,0)}^2 - 4\,x_{1,(0,0)}\,,\; P_2 = x_{1,(1,1)}\,x_{2,(0,1)} - x_{1,(0,0)} + 1\,,\\ &P_3 = x_{2,(2,0)} - x_{1,(1,0)}\}\end{aligned}$$

dans $R_{2,2}$. Par des méthodes d'éliminations en algèbre différentielle, telles que celles implémentées dans le package `DifferentialAlgebra` de MAPLE, on peut prouver que

$$\begin{aligned}\mathrm{Sol}(\Sigma) = \{&\varphi_1(t_1,t_2) = 2\,c_0\,t_1 + c_0^2 + \sqrt{2}\,c_0\,t_2 + t_1^2 + \sqrt{2}\,t_1\,t_2 + \frac{1}{2}\,t_2^2,\\ &\varphi_2(t_1,t_2) = c_2\,t_1 + c_1 + \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,(c_0^2-1)\,t_2 + c_0\,t_1^2 + \sqrt{2}\,c_0\,t_1\,t_2 + \frac{1}{2}\,c_0\,t_2^2\\ &+ \frac{1}{3}\,t_1^3 + \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,t_1^2\,t_2 + \frac{1}{2}\,t_1\,t_2^2 + \frac{1}{12}\,\sqrt{2}\,t_2^3\},\end{aligned}$$

où $c_0, c_1, c_2 \in K$ sont des constantes arbitraires. En posant par exemple $c_0 = c_2 = 0, c_1 \neq 0$, on obtient comme supports

$$(\{(2,0),(1,1),(0,2)\},\{(0,0),(0,1),(3,0),(2,1),(1,1),(0,3)\}) \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}(\Sigma)).$$

Nous allons maintenant illustrer que grâce au théorème fondamental des conditions nécessaires et des relations sur le support peuvent être trouvées. Soit $(S_1, S_2) \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^2_{\geqslant 0})^2$ une solution de $\mathrm{trop}([\Sigma])$. Considérons dans un premier temps

$$\mathrm{trop}(P_1)(S_1, S_2) = \mathrm{Vert}(2 \cdot \mathrm{Vert}(\Theta(1,0)S_1) \cup \mathrm{Vert}(S_1)).$$

Si l'on suppose que $(0,0) \in S_1$, alors $(0,0)$ est un sommet de S_1. Par définition de solution de polynôme tropical différentiel, on sait que $(1,0) \in S_1$. Réciproquement si $(1,0) \in S_1$, alors on en déduit que $(0,0) \in S_1$. C'est ce qu'on attendait puisque les monômes correspondant dans φ_1 s'annulent si et seulement si $c_0 = 0$.

Considérons maintenant

$$\mathrm{trop}(\Theta(1,0)P_1)(S_1, S_2) = \mathrm{Vert}(\mathrm{Vert}(\Theta(1,0)S_1) \cup (\mathrm{Vert}(\Theta(2,0)S_1) + \mathrm{Vert}(S_1))).$$

Si l'on suppose que $(0,0)$ n'est pas un sommet, ce qui implique que $(0,0), (1,0), (2,0) \notin S_1$, et si l'on suppose également que $(k,0)$ est un sommet pour un certain $k \geqslant 1$, alors on en déduit du premier monôme tropical différentiel que $(k+1,0) \in S_1$ et du second monôme que $(2k+1,0) = (k+1,0) \in S_1$, ce qui contredit que $k \geqslant 1$. Alors, il ne peut pas y avoir de solution φ_1 dont le support ne contient pas $(0,0), (1,0)$ ou $(2,0)$.

En considérant pour $k, l \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ les polynômes tropicaux différentiels

$$\mathrm{trop}(\Theta(k,l)P_3)(S_1, S_2) = \mathrm{Vert}(\mathrm{Vert}(\Theta(2+k,l)S_2) \cup \mathrm{Vert}(\Theta(1+k,l)S_1),$$

on obtient le lien entre φ_1 et φ_2. De manière similaire à précédemment, on obtient, en supposant que l'origine est un sommet de $\mathrm{trop}(\Theta(k,l)P_3)(S_1, S_2)$, que $(1+k,l) \in S_1$ si et seulement si $(2+k,l) \in S_2$.

Une manière naturelle de définir $\odot$ et $\oplus$ dans la section 5.1 aurait été de prendre le polygone de Newton et pas son ensemble de sommets, comme on le fait. Cependant, certains résultats, en particulier une des inclusions du théorème, la proposition 6.2.3, n'aurait plus été vraie comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple 6.3.2. Soit $\{e_1, \ldots, e_4\}$ une base de $\mathbf{Z}^4_{\geqslant 0}$. Dans $R_{4,1} = K[[t_1, \ldots, t_4]]\{x\}$ considérons l'idéal différentiel engendré par

$$P = x_{e_3} x_{e_4} + (-t_1^2 + t_2^2) x_{e_1+e_3} = \frac{\partial x}{\partial t_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_4} + (-t_1^2 + t_2^2) \frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_3}$$

et la solution $\varphi = (t_1 + t_2)t_3 + (t_1 - t_2)t_4$. Alors

$$\mathrm{Supp}(\varphi) = \{e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_4\}.$$

Par ailleurs, pour $S \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^4_{\geqslant 0})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{trop}(P)(S) = \mathrm{Vert}(\ &\mathrm{Vert}(\Theta_{\mathrm{trop}}(e_3)S + \Theta_{\mathrm{trop}}(e_4)S)\\ &\cup \mathrm{Vert}(2e_1 + \Theta_{\mathrm{trop}}(e_1+e_3)S)\\ &\cup \mathrm{Vert}(2e_2 + \Theta_{\mathrm{trop}}(e_1+e_3)S).\end{aligned}$$

Si l'on pose $S = \mathrm{Supp}(\varphi)$, on a

$$\mathrm{trop}(P)(S) = \mathrm{Vert}(\ \mathrm{Vert}(\{2e_1, e_1+e_2, 2e_2\}) \cup \{2e_1\} \cup \{2e_2\}).$$

Puisque

$$\mathrm{Vert}(\{2e_1, e_1+e_2, 2e_2\}) = \{2e_1, 2e_2\},$$

tout $J \in \mathrm{trop}(P)(S)$, en particulier $2e_1$ et $2e_2$, apparaît dans deux monômes de $\mathrm{trop}(P)(S)$, et S est bien dans $\mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(P))$. Remarquons que dans le polygone de Newton, le point $e_1 + e_2$, qui n'est pas un sommet, vient seulement d'un seul monome dans $\mathrm{trop}(P)(S)$. C'est pourquoi il est nécessaire de considérer seulement les sommets et non tout le polygone de Newton pour certaines propositions, comme la proposition 6.2.3, soient vraies.

Remarque 6.3.3. Le théorème fondamental pour les systèmes d'équations différentielles au dérivées partielles, sur un corps dénombrable tel que $\overline{\mathbb{Q}}$, n'est en général plus vrai. En effet, d'après [DL84, corollaire 4.7], il existe un système d'équations différentielles aux dérivées partielles G sur $\mathbb{Q}$ possédant une solution dans $\mathbb{C}[[t_1, \ldots, t_m]]$ mais aucune dans $\overline{\mathbb{Q}}[[t_1, \ldots, t_m]]$. Prenant $K = \overline{\mathbb{Q}}$ comme corps de base, on a que $\mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G)) \neq \varnothing$ car $\mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G)) = \mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}(G))$ est non vide sur $\mathbb{C}$, mais $\mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}(G)) = \varnothing$.

Nous nous sommes seulement intéressés aux solutions qui sont des séries formelles. Une extension naturelle pourrait-être de considérer les séries des Puiseux.

Exemple 6.3.4. Considérons $R_{1,1} = K[t]\{x\}$ et l'idéal différentiel engendré par le polynôme différentiel

$$P = 2tx_{(1)} - x_{(0)} = 2t \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - x.$$

Il n'existe pas de série formelle non nulle qui soit solution de $P = 0$. Par contre $\varphi = ct^{1/2}$ est, pour tout $c \in \mathbb{C}$ une solution. En fait $\{\varphi\}$ est l'ensemble de toutes les solutions $P = 0$ sous forme de séries de Puiseux.

Par ailleurs, soit $S \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0})$. Alors tout point J de

$$\mathrm{trop}(P)(S) = \mathrm{Vert}(\mathrm{Vert}(\{1\} + (\Theta_{\mathrm{trop}}(1)S) \cup \mathrm{Vert}(S))$$

apparaît dans deux monômes, sauf si $0 \in J$. Alors, pour tout $S \in \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(P))$, on sait que $0 \notin S$. Pour tout $I \geqslant 0$, on a que

$$\Theta(I)P = 2tx_{(I+1)} + (2I-1)x_{(I)} \in G$$

et

$$\mathrm{trop}(\Theta(I)P)(S) = \mathrm{Vert}(\mathrm{Vert}(\{(1)\} + (\Theta_{\mathrm{trop}}((I+1)S) \cup \mathrm{Vert}(\Theta_{\mathrm{trop}}(I)S)).$$

De manière similaire à ci-dessus, tout $J \in \mathrm{trop}(\Theta(I)P)(S)$ apparaît dans deux monômes, sauf si $I \in J$. Ainsi $I \notin S$ et donc, le seul $S \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{\geqslant 0})$ avec $S \in \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}([P]))$ est $S = \varnothing$. Donc $\mathrm{Sol}(\mathrm{trop}([P])) = \{\varnothing\} = \mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}([P]))$.

On souhaite maintenant considérer les séries de Puiseux solution plutôt que les solutions séries formelles. On connait le support des solutions qui sont une série de Puiseux

$$\{\mathrm{Supp}(\varphi)\} = \{\varnothing, \{1/2\}\}.$$

Maintenant, pour $S \in \mathbb{Q}^m$ and $J = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbf{Z}^m_{\geqslant 0}$, on pose

$$\Theta_{\mathrm{trop}}(J)S = \left\{ (s_1 - j_1, \ldots, s_m - j_m) \;\middle|\; \begin{array}{c} (s_1, \ldots, s_m) \in S, \\ \forall 1 \leqslant i \leqslant m,\ s_i < 0 \text{ or } s_i - j_i \notin \mathbf{Z}_{<0} \end{array} \right\}$$

C'est une définition naturelle, puisque c'est seulement dans le cas où l'exposant du monôme est positif que la dérivée peut s'annuler. Pour Val_J et les opérations $\odot$ et $\oplus$ la définition reste la même.

Soit $Q \in [P]$. Alors

$$Q = \sum_{k \in \mathcal{I}} Q_k \cdot \Theta(I_k)P$$

pour un certain ensemble d'indice $\mathcal{I}$ et $Q_k \in R_{m,n}$. Pour tout I_k, on sait que $\mathrm{Supp}(\varphi) = \{(1/2)\} \in \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(\Theta(I_k)P))$. Soit $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Alors pour tout $J \in \mathrm{trop}(\Theta(I_k)P) \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, on a $\Theta_{\mathrm{trop}}(J)\{(1/2)\} = \Theta_{\mathrm{trop}}(J)\{(\alpha)\} + \{(1/2-\alpha)\}$. Ainsi $(\alpha) \in \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(\Theta(I_k)P))$. Puisque

$$\mathrm{trop}(G_k \cdot \Theta(I_k)P) = \mathrm{trop}(G_k) \odot \mathrm{trop}(\Theta(I_k)P),$$

on peut trouver des solutions même si l'on multiplie par G_k. Ainsi $\alpha \in \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}(G_k \cdot \Theta(I_k)P))$ et par conséquent $\alpha \in \mathrm{Sol}(\mathrm{trop}([P]))$. Cependant $\alpha \notin \mathrm{Supp}(\mathrm{Sol}([P]))$ pour $\alpha \neq 1/2$.

Remarquons que P est un polynôme différentiel ordinaire et que par des calculs similaires à ceux effectués ici, une généralisation directe des séries formelles aux séries de Puiseux pour le théorème fondamental [AGT16] ne fonctionnerait pas non plus.

En conclusion, insistons sur le fait que le théorème fondamental peut aider à trouver des conditions nécessaires sur le support de solutions de système d'équations partielles différentiels, mais en général cette méthode ne peut-être complètement algorithmique. En effet, selon [DL84][Theorem 4.11], l'existence de solutions en séries formelles pour un système d'équations linéaires dont les coefficients sont des séries formelles est en général indécidable.

Quatrième partie

Une observation sur les topologies des complétions

Dans cette partie, nous évoquons une « particularité » importante des complétés d'anneaux locaux dans le cas non nothérien. Si, dans le cas noethérien, la situation est bien comprise et essentiellement régie par le théorème de Krull, la situation dans le cas non noethérien, est quant à elle plus compliquée comme en atteste notre théorème 7.1.2.

L'observation formulée dans cette partie peut se résumer ainsi : si R est un anneau local, alors son complété est naturellement muni de la topologie de la limite projective pour laquelle il devient un anneau topologique complet ; dans le cas non noethérien et contrairement au cas noethérien, ce complété $\hat{R}$ n'est pas complet pour les topologies adiques que l'on peut construire sur $\hat{R}$ à partir de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_R$ de R.

CHAPITRE 7

TROIS TOPOLOGIES SUR LA COMPLÉTION QUI COÏNCIDENT SEULEMENT DANS LE CAS NOETHÉRIEN

Tous les groupes et tous les anneaux de ce chapitre sont supposés commutatifs.

7.1 Énoncé du problème

Soit R un anneau topologique, M un R-module topologique et I un idéal de R. On suppose que la topologie de R ainsi que celle de M sont I-préadiques. On considère $\widehat{M}$ la complétion de M par rapport à la filtration $(I^nM)_{n\in\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\pi_n \colon \widehat{M} \to M/I^nM$ les projections canoniques. On rappelle que la topologie sur $\widehat{M}$ est définie par la filtration en sous-modules $(K_n = \mathrm{Ker}(\pi_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Pour cette topologie, l'anneau $\widehat{M}$ est complet.

Lorsque R est un anneau noéthérien, on peut montrer que la topologie sur $\widehat{M}$ définie par la filtration $(K_n = \mathrm{Ker}(\pi_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est préadique, comme l'énonce le théorème suivant (voir par exemple [Mat80, 23.L, Corollary 4]).

Théorème. *Soit R un anneau noethérien, I un idéal de R, M un R-module de type fini muni de la topologie I-préadique. Si l'on note $\widehat{M} = \varprojlim_n M/I^nM$ la complétion de M et $\{K_n\}_{n\in N*}$ la filtration sur $\widehat{M}$ définie par $K_n = \mathrm{Ker}(\widehat{M} \to M/I^nM)$ alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $K_n = \widehat{I^nM} = I^n\widehat{M} = (\widehat{I})^n\widehat{M}$.*

Dans le théorème précédent, on considère trois filtrations sur $\widehat{M}$:

1. La filtration définie par $(K_n = \mathrm{Ker}(\pi_n) = \widehat{I^nM})_{n\in\mathbf{N}}$ qui est la topologie naturelle sur $\widehat{M}$. Cette topologie fait de $\widehat{M}$ un R-module topologique complet et rend les projections π_n continues.

2. La topologie I-préadique sur $\widehat{M}$ (celle définie par la filtration $I^n\widehat{M}$). Cette topologie fait également de $\widehat{M}$ un R-module topologique et rend les projections π_n continues.
3. La topologie définie par la filtration $\widehat{I}^n\widehat{M}$. C'est la topologie $\widehat{I}$-préadique sur $\widehat{M}$ lorsqu'on considère $\widehat{M}$ avec sa structure de $\widehat{R}$-module. Cette topologie fait de $\widehat{M}$ un R et un $\widehat{R}$-module topologique et rend les projections π_n continues.

Dans le cadre de l'étude du théorème précédent dans le cas non-noethérien nous allons répondre à la question suivante :

Question 7.1.1. Soit R est un anneau quelconque, I un idéal de R et M un R-module topologique muni de la topologie I-préadique. Si $\widehat{M} = \varprojlim_n M/I^nM$, est-ce que $\widehat{M}$ est complet pour la topologie I-préadique, respectivement pour la topologie $\widehat{I}$-préadique ?

A. YEKUTIELI présente dans l'introduction de son article [Yek11] un contre-exemple au théorème précédent lorsque R n'est plus noethérien. Plus précisément, il démontre que si $A = k[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]$ est l'anneau des polynômes en une infinité de variables, que si $\mathfrak{m} = \langle(x_l)_{l\in\mathbf{N}}\rangle$ désigne l'idéal engendré par les variables alors le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique, $\widehat{A} = k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$, n'est pas complet pour la topologie induite par la filtration $\mathfrak{m}^n\widehat{A}$.

Un exercice dans [Bou06, Ex.12, chap. III §2] suggère qu'en toute généralité le R-module $\widehat{M}$ n'est pas complet pour la topologie $\widehat{I}$-préadique. Un exemple est décrit dans un TAG de Stacks Project [Stacksb, Tag 05JA].

Nous allons, dans ce qui suit, organiser les arguments donnés dans Stacks Project et généraliser le résultat comme suit :

Théorème 7.1.2. *Soit k un anneau, $k[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]$ l'anneau de polynôme en une infinité de variables et $\mathfrak{m} = \langle(x_l)_{l\in\mathbf{N}}\rangle$ l'idéal de $k[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]$ engendré par les variables. Alors la complétion $k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$ de $k[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]$ par rapport à la filtration $\{\mathfrak{m}^n\}_{n\in\mathbf{N}*}$, n'est ni $\mathfrak{m}$-préadiquement complète, ni $\widehat{\mathfrak{m}}$-préadiquement complète.*

Plus généralement, pour tout entier $m \geqslant 1$, la complétion $k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$ n'est pas $\widehat{\mathfrak{m}^m}$-préadiquement complète.

7.2 Une condition necessaire et suffisante pour être préadiquement complet

Proposition 7.2.1. *Soit R un anneau et $(K_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $(L_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ trois systèmes projectifs $(K_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $(L_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de R-modules dont on note $k_i\colon K_{i+1} \to K_i$,*

$l_i\colon L_{i+1} \to L_i$ et $m_i\colon M_{i+1} \to M_i$ les morphismes de transition. On suppose que

$$0 \to K_i \to L_i \to M_i \to 0$$

est une suite exacte de R-modules de sorte que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_i & \xrightarrow{\tau_i} & L_i & \xrightarrow{\mu_i} & M_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle k_i} & & \uparrow{\scriptstyle l_i} & & \uparrow{\scriptstyle m_i} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_{i+1} & \xrightarrow[\tau_{i+1}]{} & L_{i+1} & \xrightarrow[\mu_{i+1}]{} & M_{i+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Si tous les morphismes k_i sont surjectifs, alors la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i K_i \xrightarrow{\tau} \varprojlim_i L_i \xrightarrow{\mu} \varprojlim_i M_i \longrightarrow 0$$

est exacte.

Remarque 7.2.2. La proposition 7.2.1 est un cas particulier du cas où le système projectif $(K_i, k_i)_{i\geqslant 1}$ est de Mittag-Leffler, voir par exemple [Lan02, III §10 Prop 10.3].

Démonstration. On rappelle que le foncteur $(M_i)_{i\in\mathbf{N}} \mapsto \varprojlim_i M_i$ est covariant et exact à gauche, voir [Lan02, III §10 p164].

Ainsi, il ne reste qu'à prouver que le morphisme μ est surjectif. Soit $y = (y_1, y_2, \cdots) \in \varprojlim_i M_i$. Puisque, pour tout entier $i \geqslant 1$, le morphisme μ_i est surjectif, il existe $x_i \in L_i$ tel que $\mu_i(x_i) = y_i$. Cependant, il est possible que l'élément $(x_1, x_2, \cdots)$ ainsi construit n'appartienne pas au module $\varprojlim_i L_i$. Cependant, on vérifie que

$$\mu_i(l_i(x_{i+1})) = m_i(\mu_{i+1}(x_{i+1})) = m_i(y_{i+1}) = y_i = \mu_i(x_i).$$

Ainsi $l_i(x_{i+1}) - x_i \in \mathrm{Ker}(\mu_i)$. Nous allons construire par récurrence un élément $(\tilde{x}_i)_{i\in\mathbf{N}}$ qui sera dans $\varprojlim_i L_i$. On procède comme suit : soit $\tilde{x}_1 = x_1$. Comme $l_2(x_2) - x_1 \in \mathrm{Ker}(\mu_1) = \mathrm{Im}(\tau_1)$, il existe un élément $c_1 \in K_1$ tel que $l_1(x_2) - x_1 = \tau_1(c_1)$. Comme le morphisme k_1 est surjectif, on peut trouver un élément $\tilde{c}_2 \in K_2$ vérifiant

$k_1(\tilde{c}_2) = c_1$. Soit $\tilde{x}_2 = x_2 - \tau_2(\tilde{c}_2)$. On a alors

$$\begin{aligned} l_1(\tilde{x_2}) &= l_1(x_2 - \tau_2(\tilde{c}_2)) \\ &= l_1(x_2) - l_1(\tau_2(\tilde{c}_2)) \\ &= x_1 + \tau_1(c_1) - l_1(\tau_2(\tilde{c}_2)) \\ &= x_1 + \tau_1(c_1) - \tau_1(k_1(\tilde{c}_2)) \\ &= x_1 \\ &= \tilde{x}_1. \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait construit les éléments $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_r) \in \prod_{i=1}^{r} L_i$ tels que, pour tout entier $i \in \{1, \cdots, r-1\}$, on ait $l_i(\tilde{x}_{i+1}) = \tilde{x}_i$ et $l_r(x_{r+1}) - \tilde{x}_r \in \mathrm{Ker}(\mu_r)$, et pour tout enter $i \in \{1, \cdots, r\}$,, on ait également $\mu_i(\tilde{x}_i) = y_i$.

Il existe un élément $c_r \in K_r$ tel que $l_r(x_{r+1}) - \tilde{x}_r = \tau_r(c_r)$. Comme le morphisme k_r est surjectif, on peut trouver un élément $\tilde{c}_{r+1} \in K_{r+1}$ tel que $k_r(\tilde{c}_{r+1}) = c_r$. Soit $\tilde{x}_{r+1} = x_{r+1} - \tau_{r+1}(\tilde{c}_{r+1})$. On a alors que $l_{r+1}(x_{r+2}) - \tilde{x}_{r+1} \in \mathrm{Ker}(\mu_{r+1})$ et que $\mu_{r+1}(\tilde{x}_{r+1}) = y_r$. De plus

$$\begin{aligned} l_r(\tilde{x}_{r+1}) &= l_r(x_{r+1} - \tau_2(\tilde{c}_{r+1})) \\ &= l_r(x_{r+1}) - l_r(\tau_{r+1}(\tilde{c}_{r+1})) \\ &= \tilde{x}_r + \tau_r(c_r) - l_r(\tau_{r+1}(\tilde{c}_{r+1})) \\ &= \tilde{x}_r + \tau_r(c_r) - \tau_r(k_r(\tilde{c}_{r+1})) \\ &= \tilde{x}_r. \end{aligned}$$

Ainsi, on a construit par récurrence un élément $x = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots) \in \varprojlim_i L_i$ qui vérifie $\mu(x) = y$. Ce qui prouve bien que le morphisme μ est surjectif. □

Proposition 7.2.3. *Sous les hypothèses de la proposition 7.2.1, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le morphisme $\mu\colon \varprojlim_i L_i \to \varprojlim_i M_i$ induit un isomorphisme de R-modules.*
2. *On a $\varprojlim_i K_i = 0$.*
3. *Pour tout entier $i \geqslant 0$, on a $K_i = 0$.*

Démonstration. Les implications $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ sont claires.

$(1) \Rightarrow (2)$. Par hypothèse, la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i K_i \xrightarrow{\tau} \varprojlim_i L_i \xrightarrow{\mu} \varprojlim_i M_i \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\tau) = (0)$. Comme $\mathrm{Im}(\tau) = \varprojlim_i K_i$, on en déduit que $\varprojlim_i K_i = 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Supposons, par l'absurde, que l'on puisse trouver un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $K_n \neq 0$. En particulier soit $x_n \in K_n \backslash \{0\}$. Puisque les morphismes de transitions $k_i \colon K_{i+1} \to K_i$ sont surjectifs, on peut construire par récurrence une suite $(x_i)_{i \geqslant n}$ telle que, pour tout entier $i \geqslant n$, on ait $k_i(x_{i+1}) = x_i$. En particulier, ceci signifie pour tout entier $i \geqslant n$, que $x_i \neq 0$. Pour $1 \leqslant i < n$, on définit par récurrence x_i par $x_i := k_i(x_{i+1})$. Ainsi, l'élément $(x_i)_{i \in \mathbf{N}*}$ appartient par construction à $\varprojlim_i K_i$ et n'est pas nul. Ceci contredit (2), donc pour tout entier $i \geqslant 0$, on a $K_i = 0$. □

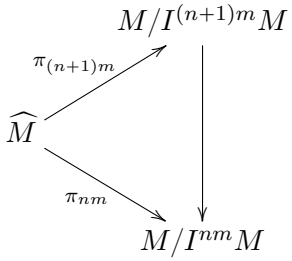
Proposition 7.2.4. *Soit R un anneau et I un idéal de R. Soit M un R–module. Soit $\widehat{M} := \varprojlim_n M/I^nM$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose*

$$K_n := \mathrm{Ker}(\widehat{M} \to M/I^nM)$$

Soit $m \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $K_{(n+1)m} + I^{nm}\widehat{M} = K_{nm}$.

Démonstration. Pour $k \geqslant 1$, on note π_k le morphisme canonique $\widehat{M} \to M/I^kM$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Ainsi $K_k = \mathrm{Ker}(\pi_k)$. Le diagramme de morphismes de R-modules suivant



est commutatif. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\pi_{(n+1)m}) \subset \mathrm{Ker}(\pi_{nm})$. Par ailleurs, on a que $I^{nm}\widehat{M} \subset K_{nm}$. On en déduit l'inclusion $K_{(n+1)m} + I^{nm}\widehat{M} \subset K_{nm}$.

Soit maintenant $x = (x_j)_{j \in \mathbf{N}*} \in \widehat{M}$ où $x_j \in M/I^jM$. Par la suite, on se permettra l'abus de notation suivant : x_j pourra désigner un élément de M/I^jM ou un de ses relèvements dans M. Supposons que $x \in K_{nm}$, alors, pour tout entier $j \leqslant nm$, on a $x_j = 0$. On définit $u = (u_j)_{j \in \mathbf{N}*} \in \widehat{M}$ à partir de x de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_j = 0 & \forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant mn \\ u_j = x_i & \forall j,\ mn+1 \leqslant j < m(n+1) \\ u_j = x_{m(n+1)} & \forall j,\ j \geqslant m(n+1) \end{cases}$$

Par construction, on a $u \in I^{nm}\widehat{M}$. De plus $x - u \in K_{(n+1)m}$ puisque, pour tout entier $j \leqslant (n+1)m$, on a $x_j - u_j = 0$. Ainsi, on a prouvé que $x = y + u \in K_{(n+1)m} + I^{nm}\widehat{M}$. □

Proposition 7.2.5. *Soit R un anneau, I un idéal de R. Soit M un R–module. On note $\widehat{M} := \varprojlim_n M/I^nM$. Soit $m \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$. Le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M} & \to & \varprojlim_n M/I^{nm}M \\ (x_j)_{j\in\mathbf{N}*} & \mapsto & (x_{jm})_{j\in\mathbf{N}*} \end{array}$$

est un isomorphisme de R-modules.

Démonstration. Pour $a \geqslant b$, soit $\pi_{a,b}$ le morphisme canonique $\pi_{a,b}\colon M/I^aM \to M/I^bM$.

On vérifie que le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M} & \to & \varprojlim_n M/I^{nm}M \\ (x_j)_{j\in\mathbf{N}*} & \mapsto & (x_{jm})_{j\in\mathbf{N}*} \end{array}$$

est un isomorphisme R-modules, dont l'inverse est donné par

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_n M/I^{nm}M & \to & \widehat{M} \\ (x_{jm})_{j\in\mathbf{N}*} & \mapsto & (y_j)_{j\in\mathbf{N}*} \end{array}$$

où, si pour un certain entier k on a $km < j \leqslant (k+1)m$, alors

$$y_j = \pi_{(k+1)m,j}(x_{(k+1)m}).$$

□

Théorème 7.2.6. *Soit R un anneau, I un idéal de R. Soit M un R–module. On pose $\widehat{M} := \varprojlim_n M/I^nM$ et $K_n = \mathrm{Ker}(\widehat{M} \to M/I^nM)$. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de $\widehat{R}$, tel qu'il existe un entier $m \in \mathbf{N}^*$ vérifiant $I^m\widehat{M} \subset \mathfrak{b}\widehat{M} \subset K_m$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Le $\widehat{R}$-module $\widehat{M}$ est $\mathfrak{b}$-préadiquement complète.*
2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'égalité $K_{nm} = \mathfrak{b}^n\widehat{M}$ est vérifiée*

Démonstration. Comme pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inclusion $\mathfrak{b}^n\widehat{M} \subset (K_m)^n \subset K_{nm}$ est vérifiée, on en déduit un diagramme :

$$0 \longrightarrow K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \xrightarrow{\tau_n} \widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \xrightarrow{\mu_n} M/I^{nm}M \longrightarrow 0$$

dont les morphismes τ_n et μ_n sont définis comme suit. Soit $i_n : K_{nm} \to \widehat{M}$ le morphisme d'inclusion. Ainsi le morphisme induit $\tau_n : K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M}$ est également injectif. Comme $\mathfrak{b}^n\widehat{M} \subset K_{nm}$, on a $\widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \widehat{M}/K_{nm} = M/I^{nm}M$. Ce

morphisme est surjectif puisqu'il est déduit du morphisme $\widehat{M} \twoheadrightarrow \widehat{M}/K_{nm}$ qui est également surjectif. Nous allons montrer que le diagramme induit une suite exacte. Il faut prouver que $\mathrm{Ker}(\mu_n) = \mathrm{Im}(\tau_n)$. Ce qui est vrai puisque $\mathrm{Ker}(\mu_n) = K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} = \mathrm{Im}(\tau_n)$.

Désormais nous allons prouver que le diagramme induit

$$0 \to \varprojlim_n K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \varprojlim_n \widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \varprojlim_n M/I^{nm}M \to 0$$

définit une suite exacte.

On considère les systèmes projectifs $(K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M}, k_n)_{n\in\mathbf{N}*}$, $(\widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M}, l_n)_{n\in\mathbf{N}*}$ et $(M/I^{nm}M, m_n)_{n\in\mathbf{N}*}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les morphismes de transition $l_n\colon \widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \widehat{M}/\mathfrak{b}^{n+1}\widehat{M}$ et $m_n\colon M/I^{nm} \to M/I^{(+1)nm}$ sont définis comme des morphismes de projection. La définition de k_n est déduite de la propriété universelle du quotient. Puisque $K_{(n+1)m} \subset K_{nm}$, on obtient un morphisme

$$\varphi_n\colon K_{(n+1)m} \to K_{nm} \to K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M}.$$

De plus $\mathfrak{b}^{n+1} \subset \mathfrak{b}^n$, ainsi, par la propriété universelle du quotient φ_n induit le morphisme

$$k_n\colon K_{(n+1)m}/\mathfrak{b}^{n+1}\widehat{M} \to K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M}.$$

De plus, il faut prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, les morphismes de transitions k_n sont surjectifs *c-à-d* que tout morphisme φ_n est surjectif, ce qui revient à montrer que $K_{(n+1)m} + \mathfrak{b}^n\widehat{M} = K_{nm}$. Grâce à la proposition 7.2.4 nous savons que $K_{(n+1)m} + I^{nm}\widehat{M} = K_{nm}$ et par hypothèse $I^m\widehat{M} \subset \mathfrak{b}$, ce qui prouve l'égalité voulue.

Nous avons montré que les hypothèses de la proposition 7.2.1 sont vérifiées, ainsi la suite

$$0 \to \varprojlim_n K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \varprojlim_n \widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \varprojlim_n M/I^{nm}M \to 0$$

est exacte.

Par ailleurs, nous avons vu dans la proposition 7.2.5 que $\varprojlim_n M/I^{nm}M \simeq \widehat{M}$. Ainsi, la conclusion provient du fait que les assertions suivantes sont équivalentes, ce qui se déduit de la proposition 7.2.3 :

1. L'anneau $\widehat{M}$ est $\mathfrak{b}$-préadiquement complet.
2. Le morphisme $\varprojlim_n \widehat{M}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} \to \widehat{M}$ est bijectif.
3. On a $\varprojlim_n K_{nm}/\mathfrak{b}^n\widehat{M} = 0$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $K_{nm} = \mathfrak{b}^n\widehat{M}$.

□

7.3 Une complétion non I-préadiquement complète

Nous allons maintenant construire un exemple d'un anneau R *non noethérien*, et un idéal I, non engendré par un nombre fini d'éléments, de sorte que la complétion de R par rapport à la topologie I-préadique, ne soit ni I-préadiquement complète, ni K_1-préadiquement complète. On rappelle que

$$K_n := \mathrm{Ker}(\widehat{R} \to R/I^n) = \widehat{I^n}.$$

Le but de cette partie est précisément de démontrer que théorème suivant.

Théorème 7.3.1. *Il existe un anneau non noethérien R et un idéal propre I, tel que si l'on note $\widehat{R}$ la complétion de R par rapport à la topologie I-préadique, et $K_n := \mathrm{Ker}(\widehat{R} \to R/I^n)$ alors :*

1. $K_1 \neq I\widehat{R}$
2. $K_{2m} \neq (K_m)^2$, *pour tout* $m \geqslant 1$.

En particulier, l'anneau topologique $\widehat{R}$ n'est pas I-préadiquement complet, ni K_m-préadiquement complet.

Ce théorème sera une conséquence des propositions 7.3.2 et 7.3.3 que nous allons démontrer par la suite.

Soit k un anneau, $R = k[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]$ l'anneau des polynômes en une infinité de variables et $\mathfrak{m} = \langle (x_l)_{l\in\mathbf{N}} \rangle$ l'idéal engendré par les variables. L'anneau R est non noethérien et l'idéal $\mathfrak{m}$ n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments. La complétion $\widehat{R}$ de R par rapport à la topologie I-préadique est décrite par l'anneau $k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$ des séries formelles en une infinité de variables introduit dans l'exemple 3.2.5. Plus précisément, un élément $f \in k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$ peut être vu comme une série formelle

$$f = \sum_{\nu\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}} a_\nu x^\nu$$

où

1. la fonction $\nu\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ a un support fini
2. la notation x^ν signifie $\prod_{l\in\mathbf{N}} x_l^{\nu(l)}$
3. pour tout entier $d \geqslant 0$ l'ensemble $\{a_\nu \mid a_\nu \neq 0,\ \sum_{l\in\mathbf{N}} \nu(l) = d\}$ est fini.

Notation. À partir de maintenant et dans toute la suite, on notera R l'anneau $k[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]$ des polynômes en une infinité de variables et $\widehat{R} = k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$ sa complétion par rapport à l'idéal $\mathfrak{m} = \langle (x_l)_{l\in\mathbf{N}} \rangle$.

Proposition 7.3.2. *La complétion $\widehat{R}$ de l'anneau R n'est pas complète pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique.*

Démonstration. La proposition se prouve en appliquant la condition du théorème 7.2.6 pour être $\mathfrak{m}$-préadiquement complet. Il suffit de montrer que $K_1 \neq \mathfrak{m}\widehat{R}$. Pour ce faire, considérons l'élément $f = \sum_{l\geqslant 1} x_l^l$ de l'anneau $k[[(x_l)_{l\in\mathbf{N}}]]$. Il est clair que $f \in K_1$. Si l'on suppose que $f \in \mathfrak{m}\widehat{R}$, alors il existe une entier $r \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$, des éléments $u_1, \cdots, u_r \in \mathfrak{m}$, et $h_1, \cdots, h_r \in \widehat{R}$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{r} u_i \cdot h_i.$$

Puisque tous les u_i sont dans l'idéal $\mathfrak{m}$, seulement un nombre fini de variables apparait effectivement dans les u_i. Ainsi il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ tel que pour tout entier $i \in \{1, \cdots, r\}$, la variable x_{n_0} n'apparait effectivement dans aucun des polynômes u_i.

On considère le morphisme d'anneaux $\psi\colon \widehat{R} \to k[[x_{n_0}]]$, induit par le morphisme d'anneaux $\varphi\colon R \to k[x_{n_0}]$ défini par $\varphi(x_l) = 0$ si $i \neq n_0$ et $\varphi(x_{n_0}) = x_{n_0}$. En particulier, le morphisme ψ vérifie $\psi(x_l) = 0$ si $i \neq n_0$ et $\psi(x_{n_0}) = x_{n_0}$. Ainsi $\psi(\sum_{i=1}^{r} u_i \cdot h_i) = 0$. Cependant $\psi(\sum_{l\geqslant 1} x_l^l) = x_{n_0}^{n_0}$. Ce qui est une contraction, ainsi $f \notin \mathfrak{m}\widehat{R}$. □

Théorème 7.3.3. *Soit $m \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$. La complétion $\widehat{R}$ de l'anneau R n'est pas complète pour la topologie K_m-préadique.*

Remarque 7.3.4. Cette preuve ne permet cependant pas de conclure si la topologie sur R est préadique pour un idéal bien choisi.

Les arguments avancés ici ne permettent pas de conclure et à ce stade il n'y a, à ma connaissance, ni exemple, ni contre-exemple.

Avant de commencer la preuve, nous allons rappeler quelques propositions à propos de la dimension des anneaux universellement caténaire, voir [Eis95, part 2 Dimension theory] pour les définitions.

Soit A un anneau, alors une chaine d'idéaux de la forme

$$\mathfrak{p}_r \supsetneq \mathfrak{p}_{r-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_0$$

est dit de *longueur* r. On rappelle que si E est un sous-ensemble de A, alors

$$V(E) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid E \subset \mathfrak{p}\}$$

et que la dimension de A que l'on note $\dim(A)$ est le supremum de la longueur des chaines d'idéaux premiers. De plus, si I est un idéal de A, la dimension de I, que l'on

note $\dim(I)$ est défini comme la dimension $\dim(A/I)$. Si on note $\sqrt{I}$ le radical de l'idéal I, une conséquence de la définition est l'égalité

$$\dim(A/I) = \dim(A/\sqrt{I}).$$

Finalement, on note $\dim(V(E))$ la dimension de l'idéal engendré par E. Cette dernière définition a du sens car si I et J sont deux idéaux de A tels que $V(I) = V(J)$ alors $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ et en particulier $\dim(I) = \dim(J)$.

Proposition 7.3.5. *Soit k un corps et $k[[x_1, \cdots, x_n]]$ l'anneau des séries formelles en n variables. Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des éléments non nuls de k et m un entier non nul. Soit E le sous-ensemble $\{a_1x_1^m, \cdots, a_nx_n^m\}$ de $k[[x_1, \cdots, x_n]]$. Alors* $\dim(V(E)) = 0$.

Démonstration. Soit $I = \langle E\rangle$. Puisque les éléments $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont non nuls, ils possèdent un inverse. En particulier $\sqrt{I} = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$. Alors

$$\dim(V(E)) = \dim(k[[x_1, \cdots, x_n]]/\sqrt{I}) = \dim(k).$$

Mais $\dim(k) = 0$, donc $\dim(V(E)) = 0$. □

Lemme 7.3.6. *Soit A un anneau et I, J deux idéaux de A tels que $J \subset I$. Alors* $\dim(A/I) \leqslant \dim(A/J)$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}_r \supsetneq \mathfrak{p}_{r-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_0 \supset I$ un chaine d'idéaux premiers contenant I. Alors, c'est également une chaine d'idéaux premiers contenant J. En particulier, si $r = \dim(A/I)$, on obtient $\dim(A/I) \leqslant \dim(A/J)$. □

Proposition 7.3.7. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau noethérien intègre caténaire et commutatif. Supposons que $I = \langle f_1, \cdots, f_r\rangle$ est un idéal propre de A engendré par r éléments. Alors on a* $\dim(A/I) \geqslant \dim(A) - r$.

Démonstration. Voir la discussion [Eis95, part II, §13, p286] après le corollaire 13.5 ou/et [Mat80, 12.I, thm 18, p77]. □

Il nous faut encore une proposition avant de démarrer la preuve du théorème 7.3.3.

Proposition 7.3.8. *L'anneau des séries formelles en n variables sur un corps k, à savoir $k[[x_1, \cdots x_n]]$, est un anneau commutatif universellement caténaire. De plus* $\dim(k[[x_1, \cdots x_n]]) = n$.

Démonstration. Puisqu'un corps un anneau commutatif universellement caténaire et que $k[[x_1, \cdots x_n]]$ est un anneau noethérien, la première partie de la proposition est une conséquence de [Sey70, thm 1.12 p24].

Il reste à prouver l'assertion concernant la dimension. La chaîne d'idéaux premiers

$$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \supset \langle x_1, \cdots, x_{n-1} \rangle \supset \cdots \supset \langle x_1 \rangle \supset \{0\}$$

est de longueur n, ainsi $\dim(k[[x_1, \cdots x_n]]) \geqslant n$. Par ailleurs, on déduit de la proposition 7.3.7 que

$$\begin{aligned} \dim(k[[x_1, \cdots x_n]]) &\leqslant n + \dim(k[[x_1, \cdots x_n]]/\langle x_1, \cdots, x_n \rangle) \\ &= n + \dim(k) \\ &= n \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(k[[x_1, \cdots x_n]]) = n$. □

Preuve du théorème 7.3.3. Nous allons prouver que l'anneau $\widehat{R} = k[[(x_l)_{l \in \mathbf{N}*}]]$ n'est pas K_m-préadiquement complet. Nous allons appliquer le théorème 7.2.6 où K_m jouera le rôle de $\mathfrak{b}$. Ledit théorème énonce une équivalence, s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $K_{nm} \neq K_m^n$, alors on pourra en déduire que $\widehat{R}$ n'est pas K_m-préadiquement complet. En particulier, nous allons prouver que $(K_m)^2 \neq K_{2m}$.

Remarquons qu'un élément de $(K_m)^2$ peut s'écrire comme une somme finie :

$$\sum_{j=1,\cdots,t} f_j g_j \tag{7.3.1}$$

avec $f_j, g_j \in K_m$. Construisons des polynômes $z_i \in k[(x_l)_{l \in \mathbf{N}*}]$ et deux suites d'entiers $2m \leqslant d_1 < d_2 < \cdots$ et $0 < l_1 < l_2 < \cdots$ telles que

$$z_i \in k[x_{l_i}, x_{l_i+1}, \cdots, x_{l_{i+1}-1}]$$

vérifiant, que dans l'anneau $k[[x_{l_i}, x_{l_i+1}, \cdots, x_{l_{i+1}-1}]]$, l'élément z_i en peut pas s'écrire comme une somme de la forme (7.3.1) avec $t \leqslant i$.

Posons $l_1 = 1$ et pour tout entier $i \geqslant 2$, on choisit $l_i = l_{i-1} + 2(i-1) + 1$. Soit $(d_i)_{i \geqslant 1}$ une suite croissante d'entiers (telle que $d_i < d_{i+1}$) telle que, pour tout entier $i \geqslant 1$, l'entier d_i est premier avec la caractéristique du corps k. On définit $z_i = \sum_{k=l_i}^{l_{i+1}-1} x_k^{d_i}$. Cet élément vit dans l'anneau $k[x_{l_i}, x_{l_i+1}, \cdots, x_{l_{i+1}-1}]$. Supposons par l'absurde que, pour un certain entier $t \leqslant i$, le polynôme z_i comme une somme

$$z_i = \sum\nolimits_{i=1,\ldots,t} f_i g_i \tag{7.3.2}$$

avec $f_i, g_i \in k[[x_{l_i}, x_{l_i+1}, \cdots, x_{l_{i+1}-1}]]$ et tels que les polynômes f_i, g_i soient sans

terme constant. Alors, on pose

$$E = (\frac{\partial z_i}{\partial x_{n_i}}, \cdots, \frac{\partial z_i}{\partial x_{l_{i+1}-1}}) = (d_i x_{l_i}^{d_i-1}, \cdots, d_i x_{l_{i+1}-1}^{d_i-1}).$$

On considère

$$V(E) \subset \mathrm{Spec}(k[[x_{l_i}, x_{l_i+1}, \cdots, x_{l_{i+1}-1}]]).$$

Alors $\dim(V(E)) = 0$ car $V(E)$ est réduit à un point (voir proposition 7.3.5). Par ailleurs, pour tout entier $j \in \{n_i, \cdots, n_{i+1} - 1\}$, on a

$$\frac{\partial(\sum_{i=1,\cdots,t} f_i g_i)}{\partial x_j} \in \langle f_1, \cdots, f_t, g_1, \cdots, g_t \rangle.$$

On pose $E' = \{\frac{\partial(\sum_{i=1,\cdots,t} f_i g_i)}{\partial x_j}\}_{l_i \leqslant j \leqslant l_{i+1}-1}$. On remarque que $E = E'$ d'après l'équation (7.3.2), mais nous allons cependant conserver la notation E' pour signifier que l'on utilise l'écriture $\sum_{i=1,\ldots,t} f_i g_i$ de z_i dans les caculs. Alors, d'après le lemme 7.3.6,

$$\dim(V(E')) \geqslant \dim(V(f_1, \cdots, f_t, g_1, \cdots, g_t)).$$

De plus, la dimension de $V(f_1, \ldots, f_t, g_1, \ldots, g_t)$ est au moins

$$l_{i+1} - 1 - l_i + 1 - 2t = 2i + 1 - 2t \geqslant 1,$$

d'après la proposition 7.3.7 appliquée à l'anneau $k[[x_{l_i}, \cdots, x_{l_{i+1}-1}]]$ (qui est caténaire $n_{i+1} - n_i$, comme vu dans la proposition 7.3.8) et l'idéal $\langle f_1, \cdots, f_t, g_1, \cdots, g_t \rangle$ qui est propre puisque qu'aucun des polynômes f_i ou g_i n'a de terme constant. Ainsi $\dim(V(E')) \geqslant 1$. On obtient une contradiction puisque $0 = \dim(V(E)) = \dim(V(E')) \geqslant 1$.

On pose $z = \sum_{i \geqslant 1} z_i \in k[[(x_l)_{l \in \mathbf{N}*}]]$. Alors $z \in K_{2m}$. Si $z \in (K_m)^2$ on peut trouver $t > 0$ et $f_j, g_j \in k[[(x_l)_{l \in \mathbf{N}*}]]$ tels que

$$z = \sum_{j=1,\cdots,t} f_j g_j.$$

On pose

$$f_{j,t} = f_j(0, 0, \cdots, 0, x_{l_t}, \cdots, x_{l_{t+1}-1}, 0, 0, \cdots)$$
$$g_{j,t} = g_j(0, 0, \cdots, 0, x_{l_t}, \cdots, x_{l_{t+1}-1}, 0, 0, \cdots).$$

Alors puisque $z_t = z(0, 0, \cdots, 0, x_{l_t}, \cdots, x_{l_{t+1}-1}, 0, 0, \cdots)$, on a

$$z_t = \sum_{j=1,\cdots,t} f_{j,t} g_{j,t}. \tag{7.3.3}$$

Ainsi $f_{j,t}$ et $g_{j,t}$ sont des éléments de $k[[x_{l_t}, x_{n_i+1}, \cdots, x_{l_{t+1}-1}]]$. Cependant, par construction, z_t ne peut pas s'écrire comme une somme de la forme 7.3.1 puisque $t \leqslant t$. Alors l'égalité (7.3.3) est impossible. Donc $z \notin (K_m)^2$. □

Cinquième partie

Schéma des arcs des variétés algébriques

Le schéma des arcs d'une variété algébrique X est l'objet géométrique qui paramètre les germes formels de courbes tracés sur X. Cette objet dont la définition est très naturelle est apparue à la fin des années 1960 dans une prépublication de J. Nash (voir [Nas95]) dont le résultat principal crée un lien entre la topologie du schéma des arcs et les résolutions des singularités de X (ouvrant ainsi des perspectives connues sous le nom « problème de Nash » dont la formulation originelle a récemment été résolue). Le développement un peu systématique de l'étude du schéma des arcs en relation avec la géométrie birationnelle ou la théorie des singularités, et plus récemment le programme de Langlands, s'est quant à lui enclenché, au milieu des années 1990, avec la construction des intégrales motiviques et de l'introduction de la théorie de l'intégration motivique, que l'on peut décrire succinctement comme une théorie de la mesure dont une des particularités est de définir sa tribu de parties mesurables comme une famille de sous-ensembles du schéma des arcs (voir par exemple [Kon95 ; DL99].

Notons que dans tous ces sujets, seule la structure réduite du schéma des arcs est utile. L'étude de la structure schématique (locale ou globale) de cet objet n'a pas connu d'essor équivalent. Dans les dernières décennies, un certain nombre de travaux ont fait acte dans cette direction révélant ainsi l'intérêt de cette structure dans la compréhension du schéma des arcs de X et de ce qu'il encode de la géométrie de la variété à laquelle il est associé. Citons par exemple certains travaux en relation avec le travail réalisé dans cette thèse. L'étude locale *via* celle de voisinages formels de points du schéma des arcs a connu des avancées par [Reg09 ; Dri02 ; FD17 ; BS19a ; BS17d ; BS17a ; BS17b ; BS17c ; Seb16], l'étude Zariski-locale des fonctions nilpotentes notamment dans [BS19b ; Seb18 ; Seb17 ; Seb11 ; GNMS20 ; MCnS20 ; Reg09].

Après avoir défini le schéma des arcs et évoqué les propriétés qui nous seront utiles dans le chapitre 8, nous décrivons dans le chapitre 9 un théorème de structure fondamental décrivant les voisinages formels des arcs rationnels non dégénérés dans le schéma des arcs. Ce théorème dû à Grinberg et Kazhdan, puis généralisé par Drinfeld, montre que bien que le schéma des arcs ne soit pas un objet noethérien, une propriété de noethérianité régit ces voisinages formels qui se trouvent réalisés comme des « cylindres » de dimension infinie construits sur une base noethérienne. Cette base noethérienne, dépendant de l'arc, trouve un représentant particulier dans sa classe d'isomorphie, dans lequel la géométrie des singularités du germe de la variété au point base de l'arc considérés semble lisible. (Voir par exemple [BS17b].) Ce théorème, ainsi que [Reg09 ; FD17] inspirera profondément nos résultats contenus dans la partie VI.

Dans le chapitre 10, nous montrons que les fonctions régulières nilpotentes et les nilpotents de la complétion en un arc non dégénéré (quelconque, non nécessairement

rationnel) ne sont pas directement reliés. (Voir théorème 10.0.1.)

CHAPITRE 8

SCHÉMA DES ARCS

Dans ce chapitre, nous présentons la construction du schéma des arcs et certaines de ses propriétés qui seront utiles dans les chapitres suivants. L'essentiel des propriétés nécessaires a été établi dans la partie I.

8.1 Définition

Nous rappelons que la définition 1.4.3 introduit, pour tout élément $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ et toute k-algèbre A, la k-algèbre $\mathrm{HS}^m_{A/k}$.

Définition 8.1.1. Soit k un anneau arbitraire. Soit A une k-algèbre. Le *schéma des arcs* du k-schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ est le k-schéma $\mathscr{L}_\infty(\mathrm{Spec}(A)) := \mathrm{Spec}(\mathrm{HS}^\infty_{A/k})$.

Pour toute k-algèbre B, un élément de $\mathscr{L}_\infty(\mathrm{Spec}(A))(B)$ est appelé *B-arc* de $\mathrm{Spec}(A)$ (ou arc sur B).

Différentes propriétés découlent directement des propriétés établies dans la section 1.4. Nous les traduisons ici en termes du schéma des arcs. Ce k-schéma n'est pas de type fini en général, et sa construction est fonctorielle en A. Pour toute k-algèbre B, on a, par construction, une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}_k}(\mathrm{Spec}(B), \mathscr{L}_\infty(\mathrm{Spec}(A))) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}_k}(\mathrm{Spec}(B[[T]]), \mathrm{Spec}(A)).$$

Fixons une présentation de la k-algèbre A en nous donnant un ensemble E non vide et un isomorphisme de k-algèbres $A = k[X_e, e \in E]/I$. Pour toute k-algèbre B, on déduit de cette formule qu'un B-arc s'identifie à la donnée d'une famille de séries formelles $(\varphi_e(T))_{e\in E}$ avec $\varphi_e(T) \in B[[T]]$, vérifiant $f((\varphi_e)_{e\in E}) = 0$ pour tout $f \in I$. Cette observation permet de déduire facilement une présentation de l'algèbre $\mathcal{O}(\mathscr{L}_\infty(\mathrm{Spec}(A)))$ à partir d'une présentation de A. Les exemples ci-dessous illustrent cette remarque importante.

Exemple 8.1.2. Soit et $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ l'espace affine de dimension n. Soit B une k-algèbre. On considère un B-arc $\gamma = (\sum_{i\geqslant 0} x_{1,i}T^i, \cdots, \sum_{i\geqslant 0} x_{n,i}T^i)$ de $\mathrm{Spec}(A)$.

Il n'y a pas de conditions sur les coefficients d'un arc dessiné sur l'espace affine de dimension n.

Ainsi on déduit une présentation de $\mathrm{HS}^{\infty}_{A/k} = k[(x_j, y_j)_{j\in\mathbf{N}}]$.

Exemple 8.1.3. Soit $f = x^3 - y^2 \in k[x, y]$ et $A = k[x, y]/(f)$. Soit B une k-algèbre. On considère un B-arc $\gamma = (\sum_{i\geqslant 0} x_i T^i, \sum_{j\geqslant 0} y_j T^j)$ solution de f. L'égalité $f(\gamma) = 0$ se traduit sous la forme

$$0 = (\sum_{i\geqslant 0} x_i T^i)^3 - (\sum_{j\geqslant 0} y_j T^j)^2 = \sum_{i\geqslant 0} F_i T^i,$$

où $F_i \in k[(x_j, y_j)_{0\leqslant i\leqslant i}]$. On peut encore écrire l'égalité précédente sous la forme suivante :

$$\sum_{i_1\geqslant 0}\sum_{i_2\geqslant 0}\sum_{i_3\geqslant 0} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}T^{i_1+i_2+i_3} - \sum_{j_1\geqslant 0}\sum_{j_2\geqslant 0} y_{j_1}y_{j_1}T^{j_1+j_2} = 0.$$

Par exemple le terme devant T^0 est donné par $F_0 = x_0^3 - y_0^2$, celui devant T^1 par $F_1 = 3x_0^2x_1 - 2y_0y_1$.

En particulier, une présentation de $\mathrm{HS}^{\infty}_{A/k}$ est donné par

$$\mathrm{HS}^{\infty}_{A/k} = k[(x_j, y_j)_{j\in\mathbf{N}}]/(F_i)_{i\in\mathbf{N}}$$

et on peut calculer les F_i par identification.

Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit A une k-algèbre. Dans la sous-section 2.2.2, nous avons introduit la k-algèbre différentielle (A_∞, Δ). Nous allons montrer que, dans ce cas, le schéma des arcs $\mathscr{L}_\infty(\mathrm{Spec}(A))$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spec}(\mathrm{For}(A_\infty, \Delta))$ grâce aux propriétés d'adjonction établies dans le chapitre 2. Rappelons que For est le foncteur d'oubli de la structure différentielle défini de la catégorie des k-algèbres différentielles dans la catégorie des k-algèbres. Comme le schéma des arcs de $\mathrm{Spec}(A)$ représente l'endofoncteur

$$B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, B[[T]])$$

de la catégorie des k-algèbres, il est suffisant de vérifier que le k-schéma $\mathrm{Spec}(A_\infty)$ vérifie cette même propriété fonctorielle. En utilisant les propositions 2.2.1 et 2.2.3, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(\mathrm{F}((A_\infty, \Delta)), B) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}((A_\infty, \Delta), (B[[T]], \partial_T)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, F((B[[T]], \partial_T)).\end{aligned}$$

Ce point de vue est très efficace du point de vue algorithmique pour calculer une présentation de la k-algèbre $\mathcal{O}(\mathscr{L}_\infty(\mathrm{Spec}(A)))$ à partir d'une présentation de A. En effet, nous avons vu au chapitre 2 que, si $A = k[X_e, e \in E]/I$, alors $A_\infty = k[X_{e,i}, e \in E, i \in \mathbf{N}]/[I]$. Autrement dit, l'idéal différentiel engendré par I sous l'action de la k-dérivation Δ fournit une présentation de la k-algèbre A_∞ dans l'anneau des polynômes $k[X_{e,i}, e \in E, i \in \mathbf{N}]$. Nous pouvons en outre expliciter l'isomorphisme identifiant $\mathcal{O}(\mathscr{L}_\infty(\mathrm{Spec}(A)))$ et A_∞. Pour une extension de ce point de vue algorithmique en caractéristique non nulle, on pourra se reporter à [BNS20].

Par simplicité, nous allons nous placer dans le cas noethérien, en supposant que A est isomorphe à $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ avec $I = \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. Si l'on note $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, on rappelle que $R_\infty = k[(x_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}\times\mathbf{N}}]$.

On sait alors que $A_\infty = R_\infty/(F_{j,\nu} \,;\, j \in \{1, \cdots, m\}, \nu \in \mathbf{N})$, où $F_{j,\nu}$ est défini pour tout j et tout ν par

$$f_j(\sum_{i\in\mathbf{N}} a_{1,i}t^i, \cdots, \sum_{i\in\mathbf{N}} a_{n,i}t^i) = \sum_{\nu\in\mathbf{N}} F_{j,\nu}((a_{i,l})_{i,l})t^\nu.$$

Par ailleurs, soit $j \in \{1, \cdots, m\}$, en appliquant le lemme 1.4.2, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\geqslant 0} \frac{\Delta^\nu(f_j)}{\nu!}t^\nu &= \exp(t\Delta)(f_j)\\ &= f_j(\exp(\Delta t)(x_1), \cdots, \exp(\Delta t)(x_n))\\ &= f_j(\sum_\nu \frac{x_{1,\nu}}{\nu!}t^\nu, \cdots, \sum_\nu \frac{x_{n,\nu}}{\nu!}t^\nu))\\ &= \sum_{\nu\geqslant 0} F_{j,\nu}((\frac{x_{l,\nu}}{\nu!})_{\nu,l})t^\nu\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on en déduit

$$\frac{\Delta^{(\nu)}(f_j)}{\nu!} = F_{j,\nu}\left((\frac{x_{l,\nu}}{\nu!})_{\nu,l}\right)$$

Exemple 8.1.4. Soit k un corps, et X le cusp $X = \mathrm{Spec}(k[x,y]/\langle x^3 - y^2\rangle)$.

On pose $f = x_0^3 - y_0^2$ et $R = k[x,y]$. On note $R_\infty = k\{x,y\}$ À l'aide des calculs précédents, vérifions que

$$\mathscr{L}_\infty(X) = \mathrm{Spec}(R_\infty/[x_0^3 - y_0^2])$$

On a en effet,

$$\begin{aligned} f &= x_0^3 - y_0^2 \\ \Delta(f) &= 3x_0^2 x_1 - 2y_0 y_1 \\ \Delta^2(f) &= 6x_0 x_1^2 + 3x_0^2 x_2 - 2y_1^2 - 2y_0 y_1 \end{aligned}$$

Soit maintenant un arc $\gamma = (\sum_{i\geqslant 0} x_i T^i, \sum_{j\geqslant 0} y_j T^j)$ de $\mathscr{L}_\infty(X)(k)$. Si l'on identifier les coefficients devant T^2 dans

$$(\sum_{i\geqslant 0} x_i T^i)^3 = (\sum_{j\geqslant 0} y_j T^j)^2$$

On se rend compte que cette égalité n'est autre que :

$$\sum_{i_1\geqslant 0}\sum_{i_2\geqslant 0}\sum_{i_3\geqslant 0} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}T^{i_1+i_2+i_3} = \sum_{j_1\geqslant 0}\sum_{j_2\geqslant 0} y_{j_1}y_{j_1}T^{j_1+j_2}$$

Le terme devant T^2 est donc donné par

$$F_2(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) = 3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2 - y_1^2 - 2y_0 y_2$$

Cependant

$$2!\left(F_2(x_0, x_1, \frac{x_2}{2}, y_0, y_1, \frac{y_2}{2})\right) = 3x_0^2 x_2 + 6x_0 x_1^2 - 2y_1^2 - 2y_0 y_2$$

Ainsi $F_2(x_0, x_1, \frac{x_2}{2}, y_0, y_1, \frac{y_2}{2}) = \Delta^2(f)/2!$

La construction du schéma des arcs se généralise au cas de k-schémas arbitraires. Nous renvoyons à [Seb04 ; CLNS18] pour de plus amples détails sur la construction. Nous nous contenterons ici d'indiquer que, pour tout k-schéma X, il existe un k-schéma $\mathscr{L}_\infty(X)$, appelé *schéma des arcs* de X, qui n'est en général pas de type fini et vérifie la propriété suivante : pour toute k-algèbre B, il existe une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}_k}(\mathrm{Spec}(B), \mathscr{L}_\infty(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}_k}(\mathrm{Spec}(B[[T]]), X)$$

fonctorielle en B. Cette construction est également fonctorielle en X et définit $\mathscr{L}_\infty(X)$ de manière canonique.

La propriété suivante est importante car elle permet de faire le lien avec les paragraphes précédents : si la famille $(U_i)_{i\in I}$ forme un recouvrement ouvert de X par des sous-schémas affines, alors la famille $(\mathscr{L}_\infty(U_i))_{i\in I}$ forme un recouvrement ouvert de $\mathscr{L}_\infty(X)$ par des sous-schémas affines (voir [CLNS18, p. 3/3.2.4].)

Tout point de $\mathscr{L}_\infty(X)$ est appelé *arc* de X, tout élément de $\mathscr{L}_\infty(X)(B)$ est appelé *B-arc* de X. Par construction, le k-schéma $\mathscr{L}_\infty(X)$ est muni d'un morphisme de k-schémas surjectif

$$\pi_0 \colon \mathscr{L}_\infty(X) \to X.$$

Pour toute extension de corps K du corps k, tout K-arc $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X)(K)$, l'image de γ par le morphisme π_0 est un point de $X(K)$ que l'on appelle *point base* de γ. Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, l'arc γ correspond, par construction, à la donnée d'une famille de séries formelles, paramétrant les équations des présentations de X, et son point base s'obtient par la spécialisation $T \to 0$ dans l'expression de ces séries formelles.

8.2 Propriétés importantes

Soit X un k-schéma. La donnée d'un arc est une donnée locale. Soit F un corps contenant k et soit $\gamma \colon \mathrm{Spec}\ F[[t]] \to X$. Topologiquement, $\mathrm{Spec}\ F[[t]]$ contient deux points que l'on notera o et η et qui correspondent respectivement à l'idéal $\langle t \rangle$ et l'idéal nul. En particulier $o \in \overline{\eta}$.

Lemme 8.2.1. *Si U est un ouvert de X contenant $\gamma(o)$, alors U contient aussi $\gamma(\eta)$.*

Démonstration. Si l'on note $\overline{\{\eta\}}$ l'adhérence de $\{\eta\}$ dans $\mathrm{Spec}\ F[[t]]$, on a $o \in \overline{\{\eta\}}$. Ainsi $\gamma(o) \in \gamma(\overline{\{\eta\}})$.

Supposons par l'absurde que $\gamma(\eta) \notin U$. Alors si l'on note F le complémentaire de U, alors certainement $\eta \in \gamma^{-1}(F)$, soit encore $\overline{\{\eta\}} \subset \overline{\gamma^{-1}(F)} = \gamma^{-1}(F)$ par continuité de γ. Donc $\gamma(\overline{\{\eta\}}) \in F$, ce qui implique $\gamma(o) \in F$, ce qui est absurde par hypothèse. □

Si l'on revient à notre arc $\gamma \colon \mathrm{Spec}\ F[[t]] \to X$, qui vérifie $\gamma(o) \in U$, on peut considérer le morphisme de schéma $\tilde{\gamma} \colon \gamma^{-1}(U) \to U$. Or le lemme 8.2.1 nous assure que $\gamma^{-1}(U) = \mathrm{Spec}\ F[[t]]$. On en déduit donc un diagramme commutatif par la proposition 17.3.5 :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ F[[t]] & \xrightarrow{\gamma} & X \\ & \searrow^{\tilde{\gamma}} & \uparrow{\scriptstyle i} \\ & & U \end{array}$$

Donc γ se factorise par U. Si l'on suppose U ouvert affine contenant $\gamma(o)$, on peut alors se restreindre au cas où X est affine.

Un arc est contenu dans tout sous-schéma fermé qui contient son point générique. Comme on l'a vu précédemment, on peut déjà se restreindre au cas où X est affine.

Soit alors X' une sous-schéma fermé de X, alors il existe un idéal I de $\mathcal{O}_X(X)$ tel que $X' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)/I)$.

Proposition 8.2.2. *Soit $\gamma\colon \mathrm{Spec}\ F[[t]] \to X$, et soit X' un sous-schéma fermé de X tel que $\gamma(\eta) \in X'$, alors l'arc γ se factorise de manière unique en un arc $\gamma'\colon \mathrm{Spec}\ F[[t]] \to X'$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ F[[t]] & \xrightarrow{\gamma} & X \\ & \searrow^{\gamma'} & \uparrow \\ & & X' \end{array}$$

Démonstration. On garde les notations précédentes et on note o le point fermé de $\mathrm{Spec}\ F[[t]]$ et η son point générique.

On note aussi $X' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)/I)$. Remarquons dans un premier temps que $\gamma(o) \in X'$ car $\gamma(o) \in \overline{\{\gamma(\eta)\}} \subset X'$.

La donnée de l'arc $\gamma\colon \mathrm{Spec}\ F[[t]] \to X$ correspond à la donnée d'un morphisme d'anneaux $\gamma^\sharp\colon \mathcal{O}_X(X) \to A$. Pour que $\gamma^\sharp$ se factorise par $\mathcal{O}_X(X)/I$, il faut et il suffit que ${\gamma^\sharp}^{-1}(\langle 0\rangle) \supset I$, soit encore que $\gamma(\eta) \in V(I)$. Or c'est le cas par hypothèse, donc la propriété universelle du passage au quotient nous indique que $\gamma^\sharp$ se factorise de manière unique :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\gamma^\sharp} & A \\ \downarrow & \nearrow_{\gamma^{\sharp\prime}} & \\ \mathcal{O}_X(X)/I & & \end{array}$$

Ce qui nous donne le diagramme commutatif voulu dans la catégorie des schémas affines. □

Définition 8.2.3. Soit k un anneau. Soit X un k-schéma et B une k-algèbre. Soit γ un B-arc de X. On note $\mathrm{nSm}(X)$ le lieu non lisse de X. On dit que γ est *non dégénéré* si $\gamma \in (\mathscr{L}_\infty(X) \backslash \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X)))(B)$.

Proposition 8.2.4. *Soit $\gamma\colon \mathrm{Spec}\ F[[t]] \to X$, un arc non dégénéré de X, alors il existe une unique composante irréductible X' de X tel que l'arc γ se factorise de manière unique en un arc $\gamma'\colon \mathrm{Spec}\ F[[t]] \to X'$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ F[[t]] & \xrightarrow{\gamma} & X \\ & \searrow^{\gamma'} & \uparrow \\ & & X' \end{array}$$

Démonstration. On considère X' une composante irréductible contenant $\gamma(\eta)$, alors la factorisation découle de la proposition 8.2.2. Il ne reste que l'unicité à démontrer. Il

s'agit de montrer que $\gamma(\eta)$ ne se trouve pas dans l'intersection de deux composantes irréductibles de X. Or les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,\gamma(\eta)}$ correspondent aux composantes irréductibles de X qui contiennent $\gamma(\eta)$. Si $\mathcal{O}_{X,\gamma(\eta)}$ possède plus qu'un idéal premier minimum alors ce n'est pas un anneau intègre. Cependant les anneaux locaux réguliers sont des anneaux intègres. Puisque γ est un arc non dégénéré, cela signifie que $\gamma(\eta) \notin \mathrm{nSm}(X)$, donc que $\mathcal{O}_{X,\gamma(\eta)}$ est un anneau local régulier.

□

La donnée d'un arc ne dépend que de l'anneau local en son point base. Comme précédemment, soit $\gamma\colon \operatorname{Spec} F[[t]] \to X$ un arc et U un ouvert affine contenant $\gamma(o)$.

Alors γ induit un morphisme sur les germes :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim\limits_{\substack{\gamma(o)\in V \\ V \text{ affine}}} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,\gamma(o)} & \xrightarrow{\gamma} & F[[t]]_{\langle t\rangle} \simeq F[[t]] \\ \uparrow & \nearrow_{\tilde{\gamma}^\sharp} & \\ \mathcal{O}_X(U) & & \end{array}$$

En particulier, la donnée de $\tilde{\gamma}^\sharp$ définit un morphisme de schémas $\tilde{\gamma}\colon \operatorname{Spec} F[[t]] \to U$.

Proposition 8.2.5. *Soit A un anneau local dont l'unique point fermé est noté a. Soit X un schéma. Alors il existe une bijection entre*

$$\{(\psi, \theta)\colon \operatorname{Spec}(A) \to X\}$$

et

$$\{(x, \varphi),\ x \in X, \varphi\colon \mathcal{O}_{X,x} \to A \text{ un morphisme d'anneaux locaux}\}$$

donnée par $x = \psi(a)$ et $\varphi = \theta_x$.

Remarque 8.2.6. Soit k un corps et X un k-schéma. Si F est un corps contenant k alors la proposition précédente se traduit dans le cas des arcs en disant qu'il existe une bijection entre

$$\left\{(\gamma^\sharp, \gamma)\colon \operatorname{Spec}(F[[T]]) \to X\right\}$$

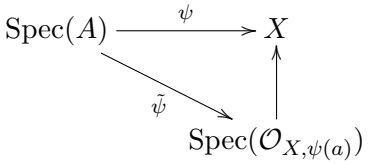
et

$$\{(x, \varphi),\ x \in X, \varphi\colon \mathcal{O}_{X,x} \to F[[T]] \text{ un morphisme d'anneaux locaux}\}$$

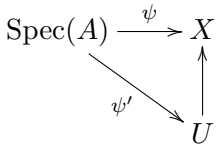
donnée par $x = \gamma^\sharp(o)$ et $\varphi = \gamma_x$.

Démonstration. Nous allons montrer dans un premier temps que tout morphisme $u =$

$(\psi, \theta)\colon \mathrm{Spec}(A) \to X$ se factorise de manière unique en :



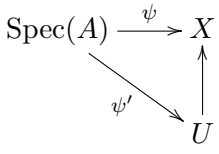
Pour cela, nous allons déjà montrer que nous pouvons nous restreindre au cas où X est affine. On fixe un ouvert affine U de X qui convient $\psi(a)$, montrons que ψ se factorise de manière unique



Soit $y \in \mathrm{Spec}(A)$ puisque $a \in \overline{\{y\}}$, alors $\psi(a) \in \overline{\psi(\{y\})}$. En particulier,supposons que $\psi(y) \notin U$, cela impliquerait $\psi(a) \notin U$, ce qui est absurde par hypothèse. Donc $\psi(\mathrm{Spec}(A)) \subset U$. La proposition 17.3.5, nous assure dès lors que le morphisme

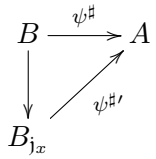
$$\psi'\colon \mathrm{Spec}(A) = \psi^{-1}(U) \to U$$

est un morphisme de schéma qui rend le diagramme



commutatif. Puisque l'inclusion $U \to X$ est un monomorphisme, alors ψ' est défini de manière unique. On peut donc se restreindre au cas où X est affine.

Si $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine, la donnée de $u = (\psi, \theta)$ correspond à la donnée d'un morphisme d'anneau $\psi^\sharp\colon B \to A$. On pose $x = \psi(a)$, et $\mathfrak{j}_x$ l'idéal premier de B correspondant à x. Pour avoir notre le résultat, il suffit de montrer que la morphisme d'anneaux $\psi^\sharp\colon B \to A$ se factorise de manière unique par $B_{\mathfrak{j}_x} \to A$. Cela résulte de la propriété universelle de la localisation. En effet, soit $b \notin \mathfrak{j}_x$, puisque $x = \psi(a)$, c'est-à-dire $\psi^{\sharp -1}(\mathfrak{j}_a) = \mathfrak{j}_x$, cela implique que $\psi^\sharp(b) \notin \mathfrak{j}_a$. La propriété universelle de localisation implique donc que le morphisme $\psi^\sharp$ se factorise de manière unique



Ainsi la donnée d'un morphisme de schéma $u = (\psi, \theta)\colon \mathrm{Spec}(A) \to X = \mathrm{Spec}(B)$ correspond bijectivement à la donnée d'un morphisme d'anneaux $\psi^{\sharp\prime}\colon \mathcal{O}_{X,x} \to A$, où $\mathcal{O}_{X,x} = B_{\mathfrak{j}_x}$ avec $x \in X$. □

CHAPITRE 9

LES VOISINAGES FORMELS DES ARCS RATIONNELS NON DÉGÉNÉRÉS

L'objectif principal de ce chapitre est de prouver le théorème de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan suivant :

Théorème 9.0.1 (Drinfeld, Grinberg-Kazhdan)**.** *Soit X un schéma de type fini sur un corps k, $\gamma\colon \operatorname{Spec} k[[t]] \to X$ un arc non degeneré, c'est-à-dire un élément de $(\mathscr{L}_\infty(X)\backslash\mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X)))(k)$. On note $\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma$ le voisinage formel de γ dans $\mathscr{L}_\infty(X)$. Il existe un k-schéma S de type fini, un point $s \in S(k)$ et un isomorphisme de k-schéma formels :*

$$\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma \cong S_s \times_k \operatorname{Spf}(k[[(T_i)_{i\in\mathbf{N}}]]).$$

Pour cela, nous devons introduire la notion importante de *déformation infinitésimale* pour les arcs, et le foncteur associé (voir section 9.1). Nous en montrons les propriétés utiles. La preuve du théorème 9.0.1 sera donnée dans le cas des courbes planes ; les arguments étant, dans ce cas très particulier, exactement ceux dont les analogues permettent de prouver le cas général tout en permettant un lecture plus aisée.

Notons que le théorème 9.0.1 et ses ingrédients serviront de modèle à notre résultat de structure sur les voisinages formels des arcs différentiels (voir théorème 13.0.1), qui peut également se rapprocher de résultats de structure obtenus par exemple dans [Reg09 ; FD17].

9.1 Foncteur de déformations

Définition 9.1.1. Une k-algèbre locale $(A, \mathfrak{M}_A)$ est dite *quasi-artinienne* si son corps résiduel est k-isomorphe à k et si son idéal maximal est nilpotent.

Remarque 9.1.2. Les anneaux quasi-artiniens sont appelés dans certaines références

des *anneaux tests* (voir par exemple [Dri02 ; BS17b]). La terminologie plus explicite utilisée ici est dûe à Alexis Bouthier ([Bou20].

9.1.1 Notations

Dans la suite k désignera un corps quelconque. On va définir trois catégories :

1. La catégorie $\mathbf{Algloc}_k$ dont les objets sont les k-algèbres locales de corps résiduel k-isomorphe à k et dont les morphismes sont les morphismes d'anneaux locaux.
2. La catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$ dont les objets sont les k algèbres locales topologiques qui sont une complétion d'un objet de $\mathbf{Algloc}_k$ et dont les morphismes sont les morphismes continus de k-algèbres.
3. La catégorie $\mathbf{QArt}_k$ qui est une sous catégorie pleine de $\mathbf{AlgLC}_k$ dont les objets sont les objets de $\mathbf{AlgLC}_k$ dont l'idéal maximal est nilpotent. On appelle $\mathbf{QArt}_k$ la catégorie des *anneaux quasi-artiniens*.

Remarque 9.1.3. Un objet $(B, \mathfrak{m}_B)$ de $\mathbf{AlgLC}_k$ n'est pas nécessairement complet pour la topologie $\mathfrak{m}_B$-préadique comme discuté dans la partie IV (voir théorème 7.3.1). Cependant si B est noéthérien, alors il est complet pour la topologie $\mathfrak{m}_B$-préadique, même s'il est le complété d'un anneau non noéthérien (voir proposition 12.2.7).

Remarque 9.1.4. Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un objet de $\mathbf{Algloc}_k$ et $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ son complété. En complément de la remarque précédente insistons sur le fait que l'idéal maximal de $\widehat{A}$ est décrit par $\mathfrak{M}_{\widehat{A}} = \widehat{\mathfrak{M}_A}$. La topologie naturelle sur $\widehat{A}$ (issue de sa construction en tant que limite projective) est décrite par la famille $(\widehat{\mathfrak{M}_A^n})_{n\in\mathbf{N}}$. En général, la famille $(\widehat{\mathfrak{M}_A^n})_{n\in\mathbf{N}}$ ne coïncide pas la famille des puissances de l'idéal maximal de $\widehat{A}$ (sauf si A est noethérien). Si A n'est pas noéthérien, en général $\widehat{\mathfrak{M}_A^n} \neq \widehat{\mathfrak{M}_A}^n$. On prendra donc un soin particulier à les distinguer. Toutes ces affirmations sont discutées et démontrées dans la partie IV.

Proposition 9.1.5. *Soient $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ deux objets de $\mathbf{Algloc}_k$. On note $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}_A^n$, et $\widehat{B} = \varprojlim_n B/\mathfrak{m}_B^n$. Par construction $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont des objets de $\mathbf{AlgLC}_k$.*
On se donne $\varphi\colon \widehat{A} \to \widehat{B}$ un morphisme d'anneaux.

1. *Si le morphisme φ est continu, alors il est local ;*
2. *Si le morphisme φ est local et si la famille d'idéaux $(\widehat{\mathfrak{M}_A}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ forment une base de la topologie de $\widehat{A}$ alors φ est continu.*

Démonstration. (1) On suppose que φ est continu, et montrons que $\varphi^{-1}(\widehat{\mathfrak{M}_B}) = \widehat{\mathfrak{M}_A}$. Comme φ est continue alors $\varphi^{-1}(\widehat{\mathfrak{M}_B})$ est un ouvert de $\widehat{A}$. En particulier, comme

$0 \in \varphi^{-1}(\widehat{\mathfrak{M}_B})$, il existe un entier j tel que

$$\widehat{\mathfrak{M}_A}^j \subset \widehat{\mathfrak{M}_A^j} \subset \varphi^{-1}(\widehat{\mathfrak{M}_B}).$$

Or comme $\varphi^{-1}(\widehat{\mathfrak{M}_B})$ est un idéal premier de $\widehat{A}$, les inclusions précédentes impliquent que $\widehat{\mathfrak{M}_A} \subset \varphi^{-1}(\widehat{\mathfrak{M}_B})$. Donc φ est local.

(2) On suppose que φ est local. Soit U un ouvert de $\widehat{B}$. Soit $x \in \varphi^{-1}(U)$. Comme $\varphi(x) \in U$, il existe un entier j tel que $\varphi(x) + \widehat{\mathfrak{M}_B^j} \subset U$. Par ailleurs $\widehat{\mathfrak{M}_B}^j \subset \widehat{\mathfrak{M}_B^j}$. Ainsi $\varphi(x + \widehat{\mathfrak{M}_A}^j) \subset \varphi(x) + \widehat{\mathfrak{M}_B}^j \subset U$. Donc $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert, donc φ est continu. □

Proposition 9.1.6. *Soient $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ deux objets de $\mathbf{Algloc}_k$. On note $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}_A^n$, et $\widehat{B} = \varprojlim_n B/\mathfrak{m}_B^n$. Par construction $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont des objets de $\mathbf{AlgLC}_k$.*

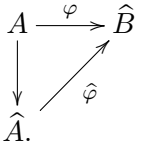
On se donne $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux locaux. Alors le morphisme induit $\widehat{\varphi}\colon \widehat{A} \to \widehat{B}$ est continu.

Démonstration. Comme le morphisme φ est local alors, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, le morphisme $\widehat{\varphi}$ vérifie $\widehat{\varphi}(\widehat{\mathfrak{M}_A^n}) \subset \widehat{\mathfrak{M}_B^n}$.

Soit U un ouvert de $\widehat{B}$. Soit $x \in \widehat{\varphi}^{-1}(U)$. Comme $\widehat{\varphi}(x) \in U$, il existe un entier j tel que $\widehat{\varphi}(x) + \widehat{\mathfrak{M}_B^j} \subset U$. Ainsi $\widehat{\varphi}(x + \widehat{\mathfrak{M}_A^j}) \subset \widehat{\varphi}(x) + \widehat{\mathfrak{M}_B^j} \subset U$. Donc $\widehat{\varphi}^{-1}(U)$ est un ouvert, donc $\widehat{\varphi}$ est continu. □

Proposition 9.1.7. *Soient $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ deux objets de $\mathbf{Algloc}_k$. On note $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}_A^n$, et $\widehat{B} = \varprojlim_n B/\mathfrak{m}_B^n$. Par construction $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont des objets de $\mathbf{AlgLC}_k$.*

On se donne $\varphi\colon A \to \widehat{B}$ un morphisme d'anneaux locaux. Alors il existe un unique morphisme d'anneaux locaux continu $\widehat{\varphi}\colon \widehat{A} \to \widehat{B}$ qui fasse commuter le diagramme suivant



Démonstration. Soit $j \in \mathbf{N}$ un entier. Puisque le morphisme φ est local et que $\widehat{\mathfrak{M}_B}^j \subset \widehat{\mathfrak{M}_B^j}$, alors φ induit un morphisme d'anneaux locaux

$$\varphi_j\colon A/\mathfrak{M}_A^j \to \widehat{B}/\widehat{\mathfrak{M}_B}^j = B/\mathfrak{M}_B^j.$$

Soit $\hat{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widehat{A}$. On pose $\widehat{\varphi}(\hat{a}) = (\varphi_n(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Comme le morphisme φ est local alors $\widehat{\varphi}(\hat{a}) \in \widehat{B}$ donc $\widehat{\varphi}$ est bien défini. De plus comme chaque φ_j est local, alors $\widehat{\varphi}$ est local.

Par construction du morphisme $\widehat{\varphi}$, on a également $\widehat{\varphi}(\widehat{\mathfrak{M}_A^n}) \subset \widehat{\mathfrak{M}_B^n}$, ce qui implique que le morphisme φ est continu (voir preuve précédente pour des détails).

L'unicité se vérifie car A est dense dans $\widehat{A}$ et que $\widehat{\varphi}$ est continu. □

Remarque 9.1.8. La proposition 9.1.7 prouve en particulier que si $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ sont deux objets de $\mathbf{Algloc}_k$, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, \widehat{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{A}, \widehat{B}).$$

En particulier, si B est un anneau quasi-artinien (un objet de $\mathbf{QArt}_k$), alors on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{A}, B)$$

car, dans ce cas, $B = \widehat{B}$.

9.1.2 Foncteur des points

D'après le lemme de YONEDA, on dispose d'un foncteur pleinement fidèle défini sur les objets par :

$$\begin{array}{rccccccc} \alpha\colon & \mathbf{AlgLC}_k & \to & \mathrm{Func}(\mathbf{AlgLC}_k, \mathbf{Ens}) & & & & \\ & \hat{B} & \mapsto & h_{\hat{B}}\colon & \mathbf{AlgLC}_k & \to & \mathbf{Ens} \\ & & & & \hat{A} & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B}, \hat{A}) \end{array}$$

Soit $\hat{B}$ et $\hat{C}$ deux objets de $\mathbf{AlgLC}_k$. La pleine fidélité est l'existence d'un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C}, \hat{B})$ et $\mathrm{Hom}(h_{\hat{C}}, h_{\hat{B}})$. Autrement dit, se donner un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C}, \hat{B})$, revient à se donner une collection de morphismes

$$\left\{\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C}, \hat{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B}, \hat{A})\right\}_{\hat{A} \in \mathbf{AlgLC}_k}$$

fonctoriels en $\hat{A}$.

On peut restreindre notre foncteur α à la sous-catégorie $\mathbf{QArt}_k$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AlgLC}_k & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Func}(\mathbf{AlgLC}_k, \mathbf{Ens}) \\ & \searrow^{\alpha'} & \downarrow \\ & & \mathrm{Func}(\mathbf{QArt}_k, \mathbf{Ens}) \end{array}$$

où $\alpha'(\hat{B}) = h_{\hat{B}} : \hat{A} \in \mathbf{QArt}_k \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B}, \hat{A})$.

Proposition 9.1.9. *Le foncteur* $\alpha'\colon \mathbf{AlgLC}_k \to \mathrm{Func}(\mathbf{QArt}_k, \mathbf{Ens})$ *est pleinement fidèle.*

Démonstration. On cherche à montrer que si $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont des objets de $\mathbf{AlgLC}_k$, alors on a l'existence d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C},\hat{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}(\mathbf{QArt}_k,\mathbf{Ens})}(h_{\hat{C}},h_{\hat{B}}).$$

D'après le lemme de YONEDA, on a l'existence d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C},\hat{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}(\mathbf{AlgLC}_k,\mathbf{Ens})}(h_{\hat{C}},h_{\hat{B}}).$$

On se donne une transformation naturelle $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}(\mathbf{QArt}_k,\mathbf{Ens})}(h_{\hat{C}},h_{\hat{B}})$, ce qui correspond à la donnée de morphismes

$$\left\{\varphi(\hat{A})\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C},\hat{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\hat{B},\hat{A})\right\}_{\hat{A}\in\mathbf{QArt}_k}$$

fonctoriels en A.

Soit $\hat{A}$ un objet de $\mathbf{AlgLC}_k$, alors il existe $A \in \mathbf{AlgLC}_k$ tel que $\hat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$. Alors on a que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B},\hat{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(B,\hat{A})$$

d'après la proposition 9.1.7. Comme le foncteur Hom préserve les limite projective à gauche, on a les d'égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B},\hat{A}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(B,\hat{A}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(B,\varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n) \\
&= \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(B,A/\mathfrak{M}_A^n) \\
&= \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B},A/\mathfrak{M}_A^n).
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie car $A/\mathfrak{M}_A^n$ est un anneau quasi-artinien, donc $\widehat{A/\mathfrak{M}_A^n} = A/\mathfrak{M}_A^n$.

On a donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B},\hat{A}) = \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\hat{B},A/\mathfrak{M}_A^n) \tag{9.1.1}$$

Finalement si on se donne un objet $\hat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ de $\mathbf{AlgLC}_k$, alors on peut construire un unique morphisme $\varphi(\hat{A})\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C},\hat{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{B},\hat{A})$ à partir des données fonctorielles

$$\left\{\varphi(A/\mathfrak{M}_A^n)\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\hat{C},A/\mathfrak{M}_A^n) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\hat{B},A/\mathfrak{M}_A^n)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$$

du morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}(\mathbf{QArt}_k,\mathbf{Ens})}(h_{\hat{C}},h_{\hat{B}})$.

On étend donc le morphisme φ précédent en un morphisme

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}(\mathbf{AlgLC}_k,\mathbf{Ens})}(h_{\hat{C}}, h_{\hat{B}}).$$

□

9.1.3 Définition des déformations infinitésimales d'un point k-rationnel

Soit X un k-schéma. Soit x un k-point de X. On note $\mathcal{O}_{X,x}$ la fibre du faisceau structural de X en x.

Définition 9.1.10. Soit X un k-schéma et x un k-point de X. Si A est un anneau quasi-artinien (un objet de $\mathbf{QArt}_k$), alors les A-points de $\mathcal{O}_{X,x}$ sont appelés les A-déformations de x . On note $\mathrm{Def}_x(\mathcal{O}_X, A)$ l'ensemble des A-déformations de x.

Par définition (et équivalence de catégorie)

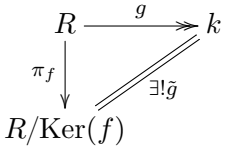
$$\mathrm{Def}_x(\mathcal{O}_X, A) = X_x(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}, A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{X,x}, A).$$

Pour la dernière égalité, voir remarque 9.1.8 et proposition 9.1.7.

Description alternative des déformations

Lemme 9.1.11. *Soit k un corps et R une k-algèbre. On se donne deux morphismes de k-algèbres $f, g\colon R \to k$ de sorte que* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. *Alors $f = g$.*

Démonstration. Puisque f et g sont des morphismes de k-algèbres, on note que f et g sont nécessairement surjectifs. Ainsi, le morphisme déduit de la propriété universelle de passage au quotient $R/\mathrm{Ker}(f) \to k$ est bijectif. Puisque $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, on en déduit, toujours par la propriété universelle de passage au quotient, le diagramme commutatif suivant.



Or le seul morphisme de k-algèbre entre k et k est l'identité. Donc $\tilde{g} = \mathrm{id}$, et $g = \pi_f$. De même on montre que $f = \pi_f$, d'où $f = g$. □

Proposition 9.1.12. *Si X est un k-schéma affine, $x \in X(k)$ un point rationnel et A un anneau quasi-artinien, alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}, A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{X,x}, A) = \{x_A \in X(A) \mid \overline{x_A} = x\}$$

où $\overline{x_A}$ est la réduction de x_A via $X(A) \to X(k)$ (via $A \to A/\mathfrak{M} = k$).

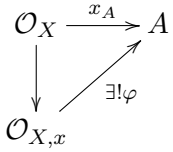
Remarque 9.1.13. Comme d'après la proposition 9.1.9 le foncteur $\alpha' \colon \mathbf{AlgLC}_k \to \mathrm{Func}(\mathbf{QArt}_k, \mathbf{Ens})$ est pleinement fidèle alors si A est un objet de $\mathbf{AlgLC}_k$, on a également

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}, A) = \{x_A \in X(A) \mid \overline{x_A} = x\}.$$

Démonstration. D'après la remarque 9.1.8 on sait déjà que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}, A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{X,x}, A)$.

On se propose de définir une application bijective de $\{x_A \in X(A) \mid \overline{x_A} = x\}$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{X,x}, A)$. Pour cela, on se donne $x_A \in X(A)$, qui correspond à un morphisme de k-algèbre $x_A \colon \mathcal{O}_X \to A$ tel que $\overline{x_A} = x$. On note $\mathrm{Ker}(x) = \mathfrak{p}_x$.

Par propriété universelle de la localisation, pour que x_A se factorise par $\mathcal{O}_{X,x}$ il faut et il suffit que si $y \notin \mathfrak{p}_x$ alors $x_A(y)$ soit inversible dans A, soit encore que $\overline{x_A}(y) \neq 0$ dans $k = A/\mathfrak{M}_A$. Or comme $y \notin \mathfrak{p}_x$, alors $\overline{x_A}(y) = x(y) \neq 0$. Donc x_A se factorise de manière unique :



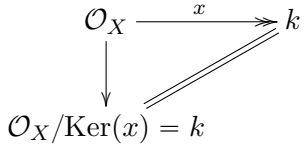
On a donc obtenu un morphisme injectif

$$\alpha \colon \{x_A \in X(A) \mid \overline{x_A} = x\} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{X,x}, A).$$

Reste à montrer que α est surjectif. On se donne un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{X,x}, A)$. On note $l_x \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X,x}$ le morphisme canonique de localisation. On note toujours $\mathrm{Ker}(x) = \mathfrak{p}_x$.

On pose $x_A = \varphi \circ l_x$. Par définition de φ, si $y \notin \mathfrak{p}_x$, alors $x_A(y)$ est inversible dans A, soit encore $\widehat{x_A}(y) \neq 0$ (dans k). On en déduit que $y \notin \mathrm{Ker}(x) \Rightarrow y \notin \mathrm{Ker}(\widehat{x_A})$. Soit encore $\mathrm{Ker}(\widehat{x_A}) \subset \mathrm{Ker}(x)$.

Mais, on sait aussi que $\mathrm{Ker}(x)$ et $\mathrm{Ker}(\widehat{x_A})$ sont des idéaux maximaux de $\mathcal{O}_X$ puisque (pour x par exemple) :



On en déduit que $\mathrm{Ker}(\widehat{x_A}) = \mathrm{Ker}(x)$.

Mais d'après le lemme précédent 9.1.11, cela implique que $\widehat{x_A} = x$. Ce qui prouve la surjectivité de α et donc l'égalité

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{X,x}, A) = \{x_A \in X(A) \mid \overline{x_A} = x\}.$$

□

9.1.4 Exemple de déformations : les arcs rationnels

Exemple 9.1.14. Soit X un schéma affine. On renvoie à la section 8.1 pour la définition de $\mathscr{L}_\infty(X)$ lorsque X est une k-variété affine. Soit γ un point de $\mathscr{L}_\infty(X)$. On rappelle que si X est affine, alors $\mathscr{L}_\infty(X)$ l'est également et $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est le spectre du localisé en γ de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X)}$, ou plus généralement si U est un ouvert de $\mathscr{L}_\infty(X)$ contenant γ alors $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma} = \mathcal{O}_{U,\gamma}$.

Si $X = \mathrm{Spec}(k[X_1, \cdots, X_n]/(F_j))$, et A est un objet de $\mathbf{AlgLC}_k$ alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}, A) = \{\gamma_A \in X(A[[t]]) \mid X(k[[t]]) \ni \bar{\gamma}_A = \gamma\}.$$

Si $\gamma \in X(k[[t]])$, on se permet d'identifier γ à la donnée de $\gamma \in k[[t]]^n$ tel que $F_i(\gamma) = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ (essentiellement grâce au lemme 9.1.11).

Soit $\gamma_A \in \{\gamma_A \in X(A[[t]]) \mid \bar{\gamma}_A = \gamma\}$, alors on peut voir γ_A comme appartenant à $A[[t]]^n$, et la condition $\bar{\gamma}_A = \gamma$ est équivalente à $\gamma_A - \gamma \in \mathfrak{M}_A[[t]]^n$.

9.2 Preuve du théorème 9.0.1 dans le cas des courbes affines planes

Dans cette section, nous présentons une preuve du théorème 9.0.1. Le cadre de la preuve est celui des courbes affines planes. C'est en effet dans ce cas très particulier que les arguments établissant ce résultat sont les plus visibles car dégagés de différentes réductions géométriques formelles et autres arguments techniques qui complexifient la démonstration du cas général. Il n'en reste pas moins que le cadre des courbes affines planes offre la possibilité d'expliquer le cœur de l'argument général ; c'est la raison de notre choix.

Remarque 9.2.1 (Note historique). Ce théorème a d'abord été prouvé par Grinberg et Kazhdan en caractéristique 0, puis par Drinfeld en caractéristique arbitraire. La formulation du théorème est la réponse de Grinberg et Kazhdan a une question que leur avait posé initialement Drinfeld. (cf. [GK00, Introduction].) Contrairement à la preuve initiale, celle de Drinfeld présente l'intérêt supplémentaire d'être algorithmique au

sens où elle permet à partir d'une présentation locale de X et d'une troncature suffisamment grande de l'arc γ de produire une présentation d'un k-schéma S induisant l'isomorphisme proposé par l'énoncé. Il est cependant important de remarquer que l'algorithme fourni par l'argument de Drinfeld est extrêmement peu efficace dans la pratique, y compris dans le cas des courbes planes (voir à ce sujet [BS20, Remark 3.20] et [BS17d, Remark 6.7])

Démonstration. Nous supposons dans la suite que $X = \mathrm{Spec}(k[x,y])/\langle F\rangle$ où $F \in k[x,y]$. On note $\gamma(T) = (x(T), y(T)) \in k[[T]]^2$ un arc rationnel non dégénéré de $\mathscr{L}_\infty(X)(k)$ (c'est-à-dire un élément de $(\mathscr{L}_\infty(X)\backslash\mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X)))(k)$).

D'après cette hypothèse de non dégénérescence sur l'arc, le critère jacobien (voir théorème 17.3.1) nous permet de supposer que $\partial_Y F(x(T), y(T)) \neq 0$. En particulier on pose $d = \mathrm{ord}_T(\partial_Y F(x(T), y(T)))$.

On procède aux divisions euclidiennes suivantes :

$$\begin{cases} x(T) = z(T)T^{2d} + \tilde{x}(T) \\ y(T) = w(T)T^d + \tilde{y}(T) \end{cases}$$

où $w(T), z(T) \in k[[T]]$, $\tilde{x}(T), \tilde{y}(T) \in k[T]$ et $\deg(\tilde{x}(T)) \leqslant 2d-1$, $\deg(\tilde{y}(T)) \leqslant d-1$.

Soient $x_A, y_A \in \mathfrak{M}_A[[T]]$ tels que $x + x_A, y + y_A \in \mathrm{Def}_{\mathscr{L}_\infty(X)_\gamma}(A)$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass (voir théorème 17.1.2), il existe $q_A \in W_d(A)$ et $u_A \in A[[T]]^\times$ tels que

$$\partial_Y F(x(T) + x_A(T), y(T) + y_A(T)) = q_A u_A$$

Les conditions du théorème de préparation de Weierstrass sont vérifiées car

$$\partial_Y F(x(T) + x_A(T), y(T) + y_A(T)) \notin \mathfrak{M}_A[[T]].$$

En effet en réduisant modulo $\mathfrak{M}_A[[T]]$ on vérifie que l'on obtient $\partial_Y F(x(T), y(T))$ qui est non nul dans $k[[T]]$.

On pose alors :

$$\begin{cases} x + x_A = (z + z_A)q_A^2 + \tilde{x} + \tilde{x_A} \\ y + y_A = (w + w_A)q_A + \tilde{y} + \tilde{y_A} \end{cases}$$

où $z_A, w_A \in \mathfrak{M}_A[[T]]$, $\tilde{x}_A, \tilde{y}_A \in \mathfrak{M}_A[T]$ avec $\deg(\tilde{x}_A) \leqslant 2d-1$ et $\deg(\tilde{y}_A) \leqslant d-1$.

Remarque 9.2.2. Il est important de noter que les éléments $z, z_A, \tilde{x}, \tilde{x}_A, w, w_A, \tilde{y}$ et $\tilde{y}_A$ sont définis de manière unique.

On définit alors une flèche :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A\colon & \mathrm{Def}_{\mathscr{L}_\infty(X)_{\gamma_0}}(A) & \to & \mathfrak{M}_A[[T]] \times \mathfrak{M}_A[T]_{\deg\leqslant 2d-1} \times \mathfrak{M}_A[T]_{\deg\leqslant d-1} \times W_d(A) \\ & (x_A, y_A) & \mapsto & (z_A \quad , \quad \tilde{x}_A \quad , \quad \tilde{y}_A \quad , \quad q_A) \end{array}$$

telle que q_A divise $\partial_Y F(\tilde{x}+\tilde{x}_A, \tilde{y}+\tilde{y}_A)$ et q_A^2 divise $F(\tilde{x}+\tilde{x}_A, \tilde{y}+\tilde{y}_A)$. On note ces deux conditions ($\star$).

Vérifions déjà que les éléments ainsi construits vérifient bien les conditions ($\star$). Cette vérification passe par plusieurs utilisations successives de la formule de Taylor.

$$\begin{array}{rcl} \partial_Y F(\tilde{x}+\tilde{x}_A, \tilde{y}+\tilde{y}_A) & = & \partial_Y F(x+x_A-(z+z_A)q_A^2, y+y_A-(w+w_A)q_A) \\ & = & \partial_Y F(x+x_A, y+y_A) + q_A(\ldots) \end{array}$$

Or par construction $\partial_Y F(x(T)+x_A(T), y(T)+y_A(T)) = q_A u_A$, donc q_A divise bien $\partial_Y F(\tilde{x}+\tilde{x}_A, \tilde{y}+\tilde{y}_A)$. Le calcul est analogue pour vérifier que q_A^2 divise $F(\tilde{x}+\tilde{x}_A, \tilde{y}+\tilde{y}_A)$.

On veut montrer que l'application φ_A est bijective. Si on a ce résultat, comme les applications φ_A sont fonctorielles en A , on aura alors bien le résultat voulu.

On prend $(z_A, \tilde{x}_A, \tilde{y}_A, q_A)$ qui vérifient la condition ($\star$). On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} x+x_A = (z+z_A)q_A^2 + \tilde{x} + \tilde{x_A} \\ y+\hat{y}_A = (w+w_A)q_A + \tilde{y} + \tilde{y_A} \end{array} \right.$$

et on veut montrer qu'il existe un unique $w_A \mathfrak{M}_A[[T]]$ tel que

$$F(x+x_A, y+\hat{y}_A + w_A q_A) = 0 \tag{9.2.1}$$

Par les formules de Taylor, on a que

$$\begin{array}{rcc} F(x+x_A, y+\hat{y}_A+w_A q_A) & = & F(x+x_A, y+\hat{y}_A) \\ & & +w_A q_A\ \partial_Y F(x+x_A, y+\hat{y}_A) \\ & & +q_A^2 w_A^2(\ldots\ldots) \end{array}$$

En utilisant les formules de Taylor, la condition ($\star$) nous permet de prouver que $F(x+x_A, y+\hat{y}_A)$ est divisible par q_A^2 et que $\partial_Y F(x+x_A, y+\hat{y}_A) = q_A v_A$ où $v_A \in A[[T]]^\times$. Pour ce dernier point, après avoir montré que $\partial_Y F(x+x_A, y+\hat{y}_A)$ est divisible par q_A par les formules de Taylor les la condition ($\star$), on écrit $\partial_Y F(x+x_A, y+\hat{y}_A) = q_A v_A$ puis on réduit modulo $\mathfrak{M}_A[[T]]$ où l'égalité devient

$$\partial_Y F(x,y) = T^d \bar{v}_A$$

Or, on sait que $d = \mathrm{ord}_T(\partial_Y F(x(T), y(T)))$, donc v_A est d'ordre 0 dans $k[[T]]$, donc inversible dans $A[[T]]$.

Remarque 9.2.3. On utilise ensuite que si A est complet, alors tout polynôme de $W_d(A)$ n'est pas un diviseur de 0 dans $A[[T]]$ (voir proposition 17.1.1).

Puisque q_A n'est pas un diviseur de 0 dans $A[[T]]$ l'équation (9.2.1) est équivalente à l'existence d'un unique $w_A \in \mathfrak{M}_A[[T]]$ tel que $\theta_A + w_A + w_A^2 P(w_A) = 0$, où $P \in A[[T]]$ et $\theta_A \in \mathfrak{M}_A[[T]]$ (en divisant par q_A puis en inversant v_A).

Pour résoudre cette équation, on va utiliser le lemme de Hensel. En effet puisque $(A, \mathfrak{M}_A)$ est complet, il en va de même pour $(A[[T]], \langle \mathfrak{M}_A, T \rangle)$ et en particulier $A[[T]]$ est hensélien.

On réduit donc l'équation $\theta_A + X + X^2 P(X) = 0$ modulo $\langle \mathfrak{M}_A, T \rangle$, où l'on obtient l'équation $X + X^2 \bar{P}(X) = 0$ qui admet au moins une solution, à savoir 0. Le lemme d'Hensel nous assure alors qu'il existe un unique élément $w_A \in A[[T]]$ tel que $w_A \in \langle \mathfrak{M}_A, T \rangle$ tel que $\theta_A + w_A + w_A^2 P(w_A) = 0$.

On vérifie encore que $w_A \in \mathfrak{M}_A$; pour cela on réduit l'équation $\theta_A + w_A + w_A^2 P(w_A) = 0$ modulo $\mathfrak{M}_A[[T]]$ et on obtient $\bar{w}_A(1 + \bar{w}_A \bar{P}(\bar{w}_A)) = 0$. Or $w_A = \alpha f + Tq$ où $f, q \in A[[T]$ et $\alpha \in \mathfrak{M}_A$, puisque $w_A \in \langle \mathfrak{M}_A, T \rangle$. Donc $\mathrm{ord}_T(\bar{w}_A) \geqslant 1$, ce qui implique que $1 + \bar{w}_A \bar{P}(\bar{w}_A)$ est inversible modulo $\mathfrak{M}_A[[T]]$. Donc $\bar{w}_A = 0$ modulo $\mathfrak{M}_A[[T]]$. Ce qu'il fallait démontrer.

On a donc bien prouvé que la flèche φ_A est une bijection, ce qui achève la preuve du théorème de DGK dans ce cas particulier.

□

CHAPITRE 10

NILPOTENTS DE L'ESPACE DES ARCS

Ce chapitre est issu d'un travail en collaboration avec DAVID BOURQUI [BH20]. Nous y étudions le lien, ou plutôt l'absence de lien entre les nilpotents au voisinage d'un arc et les nilpotents dans la complétion de ce voisinage. Soit k un corps de caractéristique quelconque, X une k-variété, c'est-à-dire un k-schéma de type fini, et $\mathscr{L}_\infty(X)$ l'espace des arcs de X. Soit également $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X)$ un arc non dégénéré (c'est-à-dire que $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X)\backslash\mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$).

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au lien entre les éléments nilpotents de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ et ceux de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$. Plus précisément

Théorème 10.0.1. *Soit k un corps quelconque, X un k-schéma réduit de type fini, $\mathscr{L}_\infty(X)$ le schéma des arcs de X et $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X)$ un arc tel que $\gamma \notin \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$.*

Alors le nilradical de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est contenu dans le noyau du morhisme de complétion $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma} \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$.

Insistons sur le fait que ce théorème 10.0.1 n'implique pas que l'anneau $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$ est réduit, on pourra *e.g.* consulter [BS17b, Example 6.3] pour un exemple explicite.

Lorsque la caractéristique de k est nulle et que γ est un point *stable* non dégénéré (voir [Reg06], [Reg09] et [FD17, section 11] pour la notion de point stable), c'est un résultat de REGUERA dans [Reg09, Theorem 3.13 and Corollary 4.3]. Dans [FD17] il est annoncé sans preuve que le résultat de REGUERA sur les points stables s'étend à tous les corps parfait à l'aide des dérivations de Hasse-Schmidt. Dans ce chapitre, en utilisant effectivement les dérivations de Hasse-Schmidt, on donne une preuve qui fonctionne pour tout arc non dégénéré sur un corps quelconque.

Il est naturel de se demander dans quels cas l'inclusion donnée par le théorème 10.0.1 est en fait une égalité. D'après [Reg09, Theorem 3.13 & Corollary 4.3], c'est le cas si k est de caractéristique nulle et si γ est un point stable du schéma des arcs. Ici nous montrons que

Théorème 10.0.2. *Soit k un corps, X un k-schéma géométriquement réduit de type fini possédant une résolution des singualrités (i.e. tout k-schéma de type fini si k est*

de caractéritique nulle).

Soit $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X)$ un point fermé tel que $\gamma \notin \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$.

Alors le nilradical de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ coïncide avec le noyau du morphisme de complétion $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma} \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}}$.

10.1 Nilpotence, annulateurs et dérivations de Hasse-Schmidt

10.1.1 Notation

Soit k un anneau. Soit A une k-algèbre et S une partie multiplicative de A.

De plus, si I est un idéal de A, alors $S^{-1}I$ désignera l'idéal engendré par I dans $S^{-1}A$. Le conducteur de S dans I, noté $I : S$ est décrit par l'ensemble $\{a \in R \mid \exists s \in S,\ sa \in I\}$. En particulier, si $a \in A$, on utilisera la notation $I : a^\infty$ pour $I : S$ et $A[a^{-1}]$ pour $S^{-1}A$ quand $S = \{1, a, a^2, \cdots\}$.

On dira que l'anneau A est *irréductible* si son nilradical est un idéal premier, soit encore si $A_{\mathrm{red}} = A/\mathrm{Nilrad}(A)$ est intègre. Remarquons que toute localisation non nulle d'un anneau irréductible est encore irréductible.

Si M est un A-module, on définit le module de torsion de M dans A comme $\mathrm{Tors}_A(M) = \{m \in M \mid \exists a \in A,\ am = 0\}$.

10.1.2 Nilradical et annulateur

Lemme 10.1.1. *Soit A un anneau et I un idéal de A. Si S est une partie multiplicative de A, alors* $\mathrm{Ker}(A \to S^{-1}A/I) = I : S$.

Démonstration. On note φ le morphisme de localisation $A \to S^{-1}A/I$. Par définition

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in A \mid \frac{x}{1} \in I\}$$

où $\frac{x}{1}$ est l'image de x dans $S^{-1}A$. En particulier

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in A \mid \exists s \in S,\ sa \in I\} = I : S.$$

□

Remarque 10.1.2. On déduit de ce lemme que si B est une A-algèbre, de sorte que le morphisme structural $A \to B$ soit injectif et si $a \in A$ et $B[a^{-1}]$ est intègre alors $(0 : a^\infty)$ est un idéal premier de B.

Lemme 10.1.3. *Soit A une k-algèbre, B une A-algèbre, I un idéal de B, $a \in A$ et S une partie multiplicative de B, alors $S^{-1}(I : a^\infty) = (S^{-1}I : a^\infty)$.*

Démonstration. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{s} \in (S^{-1}I : a^\infty) &\Leftrightarrow \exists N \in \mathbf{N}, a^N \tfrac{x}{s} \in S^{-1}I \\
&\Leftrightarrow \exists \tfrac{y}{s'} \in S^{-1}B, \exists b \in I, \exists N \in \mathbf{N}, a^N \tfrac{x}{s} = \tfrac{y}{s'} b \\
&\Leftrightarrow \exists t \in S \exists \tfrac{y}{s'} \in S^{-1}B, \exists b \in I, \exists N \in \mathbf{N}, t(a^N x s' - ybs) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists s' \in S, \exists t \in S, xs't \in (I : a^\infty) \\
&\Leftrightarrow \tfrac{x}{s} \in S^{-1}(I : a^\infty)
\end{aligned}$$

□

Proposition 10.1.4. *Soit B un anneau. On suppose qu'il existe $b \in B$ tel que $B[b^{-1}]$ est un anneau intègre.*

1. *On a*
$$\mathrm{Nilrad}(B) \subset (0 : b^\infty).$$
De plus $(0 : b^\infty)$ est l'unique idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de B tel que $b \notin \mathfrak{p}$, et l'égalité est vraie si et seulement si B est irréductible.

2. *Soit $S \subset B$ une partie multiplicative telle que $S \cap (0 : b^\infty) = \varnothing$ et $S^{-1}B$ est irréductible, alors*
$$\mathrm{Nilrad}(S^{-1}B) = S^{-1}(0 : b^\infty).$$

3. *Soit A un anneau intègre tel que B est une A-algèbre dont le morphisme structural $A \to B$ est injectif. Soit $b \in A$ alors on a*
$$(0 : b^\infty) = \mathrm{Tors}_A(B).$$

Démonstration. D'après le lemme 10.1.1 et les hypothèses, l'idéal $(0 : b^\infty) = \mathrm{Ker}(B \to B[b^{-1}])$ est un idéal premier de B et donc contient $\mathrm{Nilrad}(B)$ Soit $\mathfrak{p}$ l'unique idéal premier minimal de B tel que $b \notin \mathfrak{p}$ (l'unicité est vraie car $B[b^{-1}]$ est un anneau intègre). Puisque $\{1, b, b^2, \ldots\} \cap \mathfrak{p} = \varnothing$, on a $(0 : b^\infty) \subset \mathfrak{p}$ et donc $(0 : b^\infty) = \mathfrak{p}$. Le reste de l'asserction (1) se déduit facilement et grâce au lemme 10.1.3, l'assertion (2) est une conséquence directe de l'assertion (1).

Reste à prouver (3). Remarquons que puisque $B[b^{-1}]$ est un anneau intègre, l'inclusion $(0 : b^\infty) \subset \mathrm{Tors}_A(B)$ est toujours vraie. Soit $b' \in \mathrm{Tors}_A(B)$ et $\alpha \in A \backslash \{0\}$ tels que $\alpha b' = 0$. En particulier $\alpha b' \in (0 : b^\infty)$. Puisque A est un anneau intègre et que $A \to B$ est injective, alors $\alpha \notin (0 : b^\infty)$. Puisque $(0 : b^\infty)$ est un idéal premier, on a $b' \in (0 : b^\infty)$ et $\mathrm{Tors}_A(B) \subset (0 : b^\infty)$. □

10.1.3 Les dérivations de Hasse-Schmidt

Lemme 10.1.5. *Soit k un anneau et B une k-algèbre. Soit* $\mathrm{HS}\colon B \to B[[t]]$ *une dérivation de Hasse-Schmidt sur B au dessus de k telle que* $\mathrm{HS}_0 = \mathrm{id}_B$. *Si $b \in B$, alors* $(0 : b^\infty)$ *est un* HS*-idéal.*

Démonstration. On note $I = (0 : b^\infty)$. Soit $c \in I$, on note $\mathrm{HS}(c) = \sum_{i \geqslant 0} c_i t^i$. Par hypothèse $c_0 = c \in I$. Si l'on suppose que $c_0, \cdots, c_n \in I$, alors il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que $b^N c = 0$. En particulier $\mathrm{HS}(b)^N \mathrm{HS}(c) = 0$. Si l'on considère cette égalité modulo $I[[t]]$, on obtient

$$0 = b_0^N c_{n+1} t^{n+1} + t^{n+2}(\cdots) + \cdots$$

En particulier, on déduit que $b^N c_{n+1} \in I = (0 : b^\infty)$. Ainsi $c_{n+1} \in I$. □

Théorème 10.1.6. *Soit k un anneau et B un k-algèbre, dont le morphisme structural est injectif. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B. Soit* $\mathrm{HS}\colon B \to B[[t]]$ *une dérivation de Hasse-Schmidit sur B au dessus de k telle que* $\mathrm{HS}_0 = \mathrm{id}_B$. *On suppose de plus qu'il existe $b \in B$ tel que* $\mathrm{HS}(b) \notin \mathfrak{p}[[t]]$. *Alors*

$$(0 : b^\infty)_\mathfrak{p} \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{p}^n B_\mathfrak{p}.$$

Démonstration. On note $\mathrm{HS}(b) =: \sum_{i \in \mathbf{N}} b_i t^i$. Soit i_0 le plus petit des entiers vérifiant $b_{i_0} \notin \mathfrak{p}$. Let $b \in (0 : a^\infty)$. Il est clair que $(0 : b^\infty)_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^0 B_\mathfrak{p}$. On suppose que $(0 : b^\infty)_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^n B_\mathfrak{p}$ pour un certain entier n et on va montrer que $(0 : b^\infty)_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^{n+1} B_\mathfrak{p}$. Soit $c \in (0 : b^\infty)_\mathfrak{p}$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $b^N c = 0$, ainsi $\mathrm{HS}(b)^N \mathrm{HS}(c) = 0$. Comme $(0 : b^\infty)_\mathfrak{p}$ est un HS-idéal, on a $\mathrm{HS}(c) \in \mathfrak{p}^n B_\mathfrak{p}[[t]]$. Si l'on considère l'équation $\mathrm{HS}(b)^N \mathrm{HS}(c) = 0$ modulo $\mathfrak{p}^{n+1} B_\mathfrak{p}$, on obtient

$$t^{N i_0 N} a_{i_0}^N b + \text{termes d'ordre plus grand en } t$$

Cependant $b_{i_0} \in (B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{n+1} B_\mathfrak{p})^\times$, ainsi $c \in \mathfrak{p}^{n+1} B_\mathfrak{p}$. Donc $(0 : b^\infty) \subset \mathfrak{p}^{n+1} B_\mathfrak{p}$.

On a ainsi montré par récurrence que $(0 : b^\infty)_\mathfrak{p} \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{p}^n B_\mathfrak{p}$. □

Corollaire 10.1.7. *Soit k un anneau et B une A-algèbre telle que le morphisme structural $A \to B$ soit injectif. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B tel que $B_\mathfrak{p}$ est irréductible. Soit* $\mathrm{HS}\colon B \to B[[t]]$ *une dérivation de Hasse-Schmidt sur B au dessus de k telle que* $\mathrm{HS}_0 = \mathrm{id}_B$. *Supposons qu'il existe $b \in B$ tel que $B[b^{-1}]$ est intègre et que*

$\mathrm{HS}(b) \notin \mathfrak{p}[[t]]$. *Alors*

$$\mathrm{Nilrad}(B_{\mathfrak{p}}) = (0 : b^{\infty})_{\mathfrak{p}} \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{p}^n B_{\mathfrak{p}}.$$

10.2 Application au schéma des arcs : preuve des résultats principaux

Dans cette section, nous allons utiliser les résultats de la partie précédente 10.1 afin de prouver le résultat 10.0.1 et 10.0.2, ainsi que le théorème 10.2.5.

10.2.1 Préliminaires

Soit k un corps quelconque et X un k-schéma réduit de type fini. On rappelle que l'on note $\mathrm{nSm}(X)$ le lieu non lisse de X et $\mathscr{L}_\infty(X)$ le schéma des arcs de X (pour plus de détails sur le schéma des arcs se référer *e.g.* à [CLNS18, Chapter 3]).

Si Y est un fermé de X, par un abus de notation, il sera plus simple de noter $\mathscr{L}_\infty(Y)$ le sous-ensemble fermé de $\mathscr{L}_\infty(X)$, qui correspond au schéma des arcs associé à Y (muni *e.g.* de sa structure réduite).

Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, alors $\mathscr{L}_\infty(X)$ est également affine et l'on notera $\mathscr{L}_\infty(X) = \mathrm{Spec}(A_\infty)$. Dans ce cas, nous considérerons l'arc universel $\mathrm{HS}_A^{\mathrm{univ}} \colon A \to A_\infty[[t]]$ et la dérivation d'adjonction de Hasse-Schmidt $\mathrm{HS}_A^{\mathrm{ad}} \colon A_\infty \to A_\infty[[t]]$ (voir section 1.4).

Pour la proposition suivante voir [NS10, Theorem 3.15 (1)].

Proposition 10.2.1. *Soit X un k-schéma réduit de type fini, $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des composantes irréductibles de X. Alors les composantes irréductibles de $\mathscr{L}_\infty(X)$ non contenues dans $\mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$ sont les $\mathscr{L}_\infty(X_i)$ tels que X_i n'est pas contenu dans $\mathrm{nSm}(X)$.*

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 10.2.2. *Soit X un k-schéma réduit de type fini et*

$$\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X) \backslash \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X)).$$

Alors $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est irréductible.

Démonstration. Soit $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les composantes irréductibles de X. Puisque γ envoie le point générique vers un point lisse de X, alors quitte à renuméroter on peut supposer

que ce point est un élément de $X\backslash(\mathrm{nSm}(X) \cup \cup_{i=2}^{n} X_i)$. Ainsi γ vit dans dans le sous-ensemble ouvert $\mathscr{L}_\infty(X)\backslash(\mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X)) \cup \cup_{i=2}^{n}\mathscr{L}_\infty(X_i))$ de $\mathscr{L}_\infty(X)$. D'après la proposition précédente, ce sous-ensemble ouvert est irréductible. □

La propriété suivante est un résultat classique sur la structure du schéma des arcs d'une variété lisse et se déduit par la compatibilité de la construction du schéma des arcs avec les morphismes étales (voir *e.g.* [NS10, Thm 2.5(3)]).

Proposition 10.2.3. *Soit X un k-schéma lisse. Alors il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $X = \cup_{i\in I}\mathrm{Spec}(A_i)$ tel que le schéma des arcs $\mathscr{L}_\infty(X)$ associé à X soit recouvert par les ouverts affines $\mathrm{Spec}(A_i[x_j \ : \ j \in \mathbf{N}])$.*

D'après les propositions 10.2.3 et 10.2.1, on déduit :

Corollaire 10.2.4. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un k-schéma affine réduit de type fini, Z une composante irréductible de X, $J \subset A$ un idéal dont le support est la réunion de $\mathrm{nSm}(X)$ et des composantes irrécutibles de X distinctes de Z, et soit $a \in J\backslash\{0\}$. Alors l'anneau $(A_\infty)[a^{-1}] = (A[a^{-1}])_\infty$ est un anneau intègre.*

Bien entendu, ce corollaire n'est utile que si Z n'est pas contenu dans $\mathrm{nSm}(X)$.

10.2.2 Forme de torsion différentielles et fonctions nilpotentes du schéma des arcs

Théorème 10.2.5. *Soit k un corps quelconque et $X = \mathrm{Spec}(A)$ un k-schéma intègre et géométriquement réduit de type fini.*

1. *Supposons que $\mathscr{L}_\infty(X) = \mathrm{Spec}(A_\infty)$ est irréductible. Alors le A-module $\mathrm{Tors}_A(\Omega^1_{A/k})$ des formes différentielles de Kähler de torsion sur $X = \mathrm{Spec}(A)$ s'identifie avec le A-module des fonctions régulières de poids 1 sur $\mathscr{L}_\infty(X)$ qui sont nilpotentes.*
2. *Supposons que X est une courbe géométriquement intègre ou une variété torique normale, alors on a la même conclusion.*
3. *Supposons que k soit de caractéristique nulle, alors on a la même conclusion.*

Démonstration. Rappelons (voir section 1.4) qu'en général on a un isomorphisme naturel entre le A-module $A_\infty^{(1)}$ des éléments de poids 1 de A_∞ et le A-module des formes de Kähler différentielles $\Omega^1_{A/k}$.

De l'autre côté, le morphisme naturel $A \to A_\infty$ est oujours injectif, donc il admet une retraction qui correspond géométriquement au morphisme associé à $x \in \mathrm{Spec}(A)$: l'arc constant dont l'origine est x.

Ainsi (1) se déduit directement du corollaire 10.2.4 et de la proposition 10.1.4(1)(3) (remarquons que puisque X est géométriquement réduit alors $\mathrm{nSm}(X)$ est un sous-ensemble fermé propre de X).

Si k est un corps quelconque et X un courbe géométriquement intègre ou une variété torique normale, alors $\mathscr{L}_\infty(X)$ est irréductible d'après [Ish04, Corollary 3.3] et [NS10, Lemma 3.13]. Si la caractéristique du corps k est nulle, alors $\mathscr{L}_\infty(X)$ est irréductible d'après un théorème de E. KOLCHIN [Kol73, Prop. 10, p. 200]. Ainsi (2) et (3) se déduisent de (1). □

Remarque 10.2.6. L'assertion (3) se retrouve également à partir d'un résultat de [BS18] (voir aussi [Seb17]) où la théorie de Ritt et Kolchin, et en particulier une forme du lemme de Rosenfeld, est utilisée dans l'arguement. Remarquons qu'il existe des preuves du théorème de Kolchin ne reposant pas sur la théorie de Ritt et Kolchin (voir [NS05] ou [IK03, Lemma 2.12]).

Remarque 10.2.7. Si l'on note $\mathscr{L}_1(X) = \mathrm{Spec}(A_1)$ le schéma des 1-jet de X (ou, dit autrement le schéma tangent à X), la A-algèbre A_1 est naturellement munie d'une graduation, à l'instar de l'algèbre universelle des dérivations de Hasse-Schmidt de hauteur 1 sur A (voir [Voj07]), et le morphisme naturel $A_1 \to A_\infty$ est un morphisme gradué de A-algèbres induisant un isomorphisme de A-module $A_1^{(1)} \xrightarrow{\sim} A_\infty^{(1)}$ en poids 1. Ainsi, si $a \in A$, on peut calculer $(0 : a^\infty) \cap A_\infty^{(1)}$ dans A_1, qui est une k-algèbre de type fini. Ceci donne une procédure effectivement pour calculer le A-module des formes différentielles de Kähler de torsion sur A (et les éléments nilpotents de poids 1 de A_∞ dans le cas où A_∞ est irréductible). Concrètement, supposons que A admet une présentation sous la forme $k[x_0, \dots, x_n]/I$ où $I = \langle F_1, \dots, F_s \rangle$. Pour $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ on définit $F^{(1)}$ par

$$F(x_i + t x_i^{(1)}) = F((x_i)) + tF^{(1)}((x_i), (x_i^{(1)})) + t^2 \dots$$

Alors A_1 admet une présentation sous la forme $k[x_0, \dots, x_n, x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}]/I_1$ où

$$I_1 = \langle F_1, \dots, F_s, F_1^{(1)}, \dots, F_s^{(1)} \rangle.$$

La graduation est donnée par $\mathrm{wt}\, x_i = 0$ et $\mathrm{wt}\, x_i^{(1)} = 1$. Ayant déterminé un élément $a \notin I_1$ appartenant à l'idéal jacobien, on calcule une base de Gröbner de $(I_1 : a^\infty)$ Les éléments de poids 1 de cette base de Gröbner donnent un système de générateur pour le A-module $\mathrm{Tors}_A(\Omega^1_{A/k})$.

Par exemple, si X est la surface torique

$$\mathrm{Spec}(k[x_0, x_1, x_2, x_3]/\langle x_0x_2 - x_1^2, x_1x_3 - x_2^3, x_0x_3 - x_1x_2^2 \rangle$$

on trouve que le A-module $\mathrm{Tors}_A(\Omega^1_{A/k})$ est engendré par

$$x_3dx_0 - 2x_2^2dx_1 + x_1x_2dx_2 \quad \text{and} \quad x_2^2dx_1 - 3x_1x_2dx_2 + x_0dx_3.$$

Remarque 10.2.8. Soit p un nombre premier et k un corps de caractéritique p. L'exemple le plus connu où $\mathrm{Spec}(A)$ est intègre tandis que $\mathrm{Spec}(A_\infty)$ est réductible est donné par le p-parapluie de Whitney $A = k[x_0, x_1, x_2]/\langle x_0^p x_1 - x_2^p\rangle$. Puisque $x_0^p dx_1 = d(x_0^p x_1 - x_2^p)$, la forme différentielle dx_1 appartient à $\mathrm{Tors}_A(\Omega^1_{A/k})$. Cependant la fonction régulière associée sur $\mathrm{Spec}(A_\infty)$ envoie l'arc $(x_i + tx_i^{(1)} + \dots)_{0\leqslant i\leqslant 2}$ vers $x_1^{(1)}$ qui n'est donc pas nilpotent puisqu'il ne disparaît pas sur l'arc $(0, t, 0)$. Ceci est conforme à la proposition 10.1.4.

10.3 Preuve du théorème 10.0.1

Puisque l'énoncé du théorème 10.0.1 est local, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine. Grâce au corollaire 10.1.7, le théorème 10.0.1 est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 10.3.1. *Soit k un corps quelconque, $X = \mathrm{Spec}(A)$ un k-schéma affine réduit de type fini et $\mathscr{L}_\infty(X) = \mathrm{Spec}(A_\infty)$ le schéma des arcs associé. Soit $\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}_A \colon A_\infty \to A_\infty[[t]]$ la dérivation de Hasse-Schmidt d'adjonction.*

Soit $\mathfrak{p} = \gamma$ un arc non degénéré. Soit Z la seule composante irréductible de X contenant l'image du point générique par γ. Soit $J \subset A$ un idéal dont le support est la réunion du lieu non lisse $\mathrm{nSm}(X)$ de X et des composantes irréductibles de X distinctes de Z. Soit $a \in J$ tel que $a(\gamma(t)) \neq 0$. Alors on a :

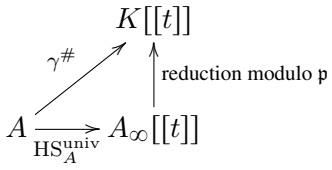
1. *$A_\infty[a^{-1}]$ est un anneau intègre ;*
2. *$(A_\infty)_\mathfrak{p}$ est irréductible ;*
3. *$(0 : a^\infty) \subset \mathfrak{p}$;*
4. *$\mathrm{HS}^{\mathrm{ad}}_A(a) \notin \mathfrak{p}[[t]]$.*

Démonstration. Le point (1) se déduit du corollaire 10.2.4 et le point (2) du corollaire 10.2.2.

D'après la proposition 10.1.4(1), l'idéal premier minimal $(0 : a^\infty) \subset A_\infty$ est le point générique de $\mathscr{L}_\infty(Z)$, et par la proposition 10.2.1, on a nécessairement $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(Z)$, donc (3) est vrai.

Montrons (4). D'après le lemme 1.4.7, on a seulement à prouver que $\mathrm{HS}^{\mathrm{univ}}_A(a) \notin \mathfrak{p}[[t]]$. Soit K le corps résiduel de γ. L'arc γ induit un morphisme de k-algèbre $\gamma^\# \colon A \to$

$K[[t]]$. Ce morphisme se factorise à travers la dérivation universelle comme suit :



On déduit du diagramme précédent que $\mathrm{HS}_A^{\mathrm{univ}}(a) \in \mathfrak{p}[[t]]$ implique que $\gamma^{\#}(a) = 0$. De l'autre côté $\gamma^{\#}(a) = 0$ signifie que $a(\gamma(t)) = 0$. En particulier si $a(\gamma(t)) \neq 0$ alors $\mathrm{HS}_A^{\mathrm{univ}}(a) \notin \mathfrak{p}[[t]]$. □

Remarquons qu'on obtient, comme corollaire du théorème 10.0.1, le résultat suivant :

Corollaire 10.3.2. *Soit k un corps, X un k-schéma réduit de type fini et $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X)$ un arc tel que $\gamma \notin \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$. Alors le morphisme naturel*

$$\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}} \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X)_{\mathrm{red}},\gamma}}$$

est un isomorphisme.

10.4 Preuve du théorème 10.0.2

Le lemme suivant est une conséquence de [And75, Proposition 2 & Theorem 4].

Lemme 10.4.1. *Soit A un anneau noethérien intègre, et soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de l'anneau de polynômes $B = A[x_i \ : \ i \in \mathbf{N}]$. Alors dans la localisation $B_{\mathfrak{M}}$ on a*

$$\bigcap_{n \geqslant 0} (\mathfrak{M} \cdot B_{\mathfrak{M}})^n = \{0\}.$$

Le théorème 10.0.2 se déduit du théorème 10.0.1 et de l'énoncé suivant :

Théorème 10.4.2. *Soit k un corps quelconque et X un k-schéma géométriquement réduit de type fini.*

Supposons qu'il existe un k-schéma lisse Y et un morphisme propre de k-schémas $\varphi\colon Y \to X$ induisant un isomorphisme

$$\varphi\colon Y \backslash \varphi^{-1}(\mathrm{nSm}(X)) \xrightarrow{\sim} X \backslash \mathrm{nSm}(X).$$

Soit $\gamma \in \mathscr{L}_\infty(X) \backslash \mathscr{L}_\infty(\mathrm{nSm}(X))$ un point fermé. Si on note $\mathfrak{M}_\gamma$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$, alors

$$\bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{M}_\gamma^n \subset \mathrm{Nilrad}(\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que φ induit une bijection entre les points génériques des composantes irréductibles de Y et les points génériques des composantes irréductibles de X. Soit $\varphi_\infty \colon \mathscr{L}_\infty(Y) \to \mathscr{L}_\infty(X)$ le morphisme induit au niveau du schéma des arcs. Alors φ_∞ induit une bijection entre les points génériques des composantes irréductibles de $\mathscr{L}_\infty(Y)$ et les points génériques des composantes irréductibles de $\mathscr{L}_\infty(X)$.

D'après le critère valuatif de propreté (valuative criterion of properness), il existe $\eta \in \mathscr{L}_\infty(Y)$ tel que $\varphi_\infty(\eta) = \gamma$. Puisque γ est un point fermé de $\mathscr{L}_\infty(X)$, quitte à remplacer η par une specialisation, on peut supposer que η est un point fermé de $\mathscr{L}_\infty(Y)$. Par la remarque précédente, le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(Y),\eta}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma})$ est dominant.

Ainsi d'après [Stacksa, Tag 00FL], le noyau du morphisme d'anneaux locaux induit

$$(\varphi_\infty)_\gamma \colon \mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma} \to \mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(Y),\eta}$$

est contenu dans $\mathrm{Nilrad}(\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma})$.

Soit $\mathfrak{M}_\eta$ l'idal maximal de $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(Y),\eta}$. Puisque

$$(\varphi_\infty)_\gamma(\bigcap_{n\geqslant 0} \mathfrak{M}_\gamma^n) \subset \bigcap_{n\geqslant 0} \mathfrak{M}_\eta^n$$

il suffit maintenant de montrer que $\bigcap_{n\geqslant 1} \mathfrak{M}_\eta^n = \{0\}$. Puisque η est un poitn fermé de $\mathscr{L}_\infty(Y)$ et que Y est lisse, alors ceci est une conséquence du lemme 10.4.1 et de la proposition 10.2.3. □

Remarque 10.4.3. Gardons les notations et les hypothèses du théorème 10.4.2. Puisque $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est irréductible d'après le lemme 10.3.1, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. la topologie préadique sur l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est séparée ;
2. $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est un anneau intègre ;
3. $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X),\gamma}$ est réduit.

Remarque 10.4.4. Il serait interessant d'étendre le lemme 10.4.1 au cas d'un idéal premier arbitraire de $A[x_i \,:\, i \in \mathbf{N}]$. Ceci permettrait d'enlever l'hypothèse imposant que γ soit un point fermé dans l'énoncé du théorème 10.0.2.

Sixième partie

Schéma des arcs différentiels

Soit k un corps de caractéristique nulle. Dans ce chapitre nous allons développer l'analogue des constructions et résultats de la partie V dans le cadre différentiel. À toute k-algèbre différentielle est naturellement associé un k-schéma affine, dont les points, via les propriétés d'adjonction du chapitre, s'interprètent comme des séries formelles satisfaisant certaines relations algebro-différentielles. Pour cette raison, un tel objet est baptisé *schéma des arcs différentiels*. Le schéma des arcs associé à un k-schéma affine peut être considéré comme un cas particulier de cette construction, plus précisément comme un schéma des arcs différentiels d'ordre 0. De même que le schéma des arcs classique se construit à partir de la donnée d'une variété algébrique, on peut associer un schéma des arcs différentiel $\mathscr{L}_\infty((X,\Theta))$ à la donnée (X,Θ) d'une variété algébrique affine X munie d'une « donnée différentielle » Θ.

Dans le chapitre 11, nous introduisons le schéma des arcs différentiels et donnons un sens précis à (X,Θ) et $\mathscr{L}_\infty((X,\Theta))$. Nous démontrons des propriétés pour le schéma des arcs différentiels comparables à celles de la section 8.2.

Dans le chapitre 13 (voir section 13.1), nous introduisons l'analogue du foncteur des déformations pour la donnée d'un point rationnel du schéma des arcs différentiels et montrons des propriétés analogues au cadre algébrique. Le chapitre 13 utilise les constructions précédentes pour démontrer un résultat de structure sur les voisinages formels du schéma des arcs différentiels associé à une équation différentielle ordinaire (à coefficients constants) au voisinage de solutions formelles rationnelles de cette équation. Ce théorème peut s'interpréter comme un analogue à la fois du théorème de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan (voir théorème 9.0.1) (en ce sens que nous considérons des voisinages formels en des points rationnels vérifiant une condition de « non-dégénérescence ») et des résultats de structure obtenus par exemple dans [Reg09 ; FD17] (en ce sens que nous obtenons un résultat de noetherianité pour ces voisinages formels). C'est le théorème 13.0.1. L'ingrédient clé de notre démonstration est l'utilisation de la dimension de plongement pour les k-schémas arbitraires dont nous rappelons définition et propriétés dans le chapitre 12.

Les chapitres 14 et 15 précisent le théorème 13.0.1 dans le cas des EDO d'ordre 1 et des EDO monomiales d'ordre 2.

CHAPITRE 11

SCHÉMA DES ARCS DIFFÉRENTIELS

Dans ce chapitre k sera un corps de caractéristique zéro.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire l'espace qui va paramétrer les solutions formelles des systèmes d'équations différentielles ordinaires algébriques. C'est ce que nous appellerons schéma des arcs différentiels associés aux systèmes d'EDO. Comme une variété algébrique affine peut s'interpréter comme l'objet géométrique associé à un système d'EDO d'ordre 0, le point de vue de ce chapitre est de comprendre les solutions des systèmes d'EDO comme une généralisation au cadre différentiel de la construction du chapitre 8. Sur le modèle du schéma des arcs associé à une variété algébrique, nous montrons donc comment associer un schéma des arcs *différentiel* à toute variété algébrique munie d'une « donnée différentielle ». Dans le cadre de cette thèse, nous nous limiterons, par simplicité, au cadre local de ce type d'objets, puisque notre résultat principal va concerner les voisinages formels de points dans cet espace de solutions. L'avantage de géométriser des systèmes d'EDO est notamment d'offrir la possibilité d'étudier qualitativement ces systèmes par la biais des outils géométriques. Notre théorème 13.0.1 est une illustration de cette philosophie.

11.1 Définition générale et premières remarques

Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $m \geqslant 1$ un entier. Soit $\mathbb{S}$ un système d'EDO polynomiales à m variables différentielles. Rappelons que deux systèmes (finis ou infinis) $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}'$ d'ODE sont dit *équivalents* s'il existe une transformation naturelle bijective $\mathbb{S}(R) \to \mathbb{S}'(R)$, fonctorielle en R, entre les solutions dans R de $\mathbb{S}$ et de $\mathbb{S}'$, pour toute k-algèbre différentielle R. La classe d'équivalence $[\mathbb{S}]$ du système $\mathbb{S}$ définit naturellement un idéal différentiel $J \subset k\{y_1, \ldots, y_m\}$ que l'on munit de la k-dérivation Δ d'adjonction (qui envoie $y_{i,j}$ sur sa dérivée $y_{i,j+1}$). Pour toute k-algèbre B, les solutions dans $B[[T]]$ du système $\mathbb{S}$ se réalisent alors comme les morphismes différentiels du quotient $(k\{y_1, \ldots, y_m\}/J, \Delta)$ dans $(B[[T]], \delta_T)$. Par souci de pré-

cision, nous rappelons et utilisons dans ce paragraphe le foncteur d'oubli For de la catégorie des k-algèbres différentielles dans la catégorie des k-algèbres. En vertu de la proposition 2.2.1, si $(A, \Delta_A) = (k\{y_1, \ldots, y_m\}/J, \Delta)$, on déduit que, pour toute k-algèbre B, on a une bijection naturelle

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(\mathrm{For}((A,\Delta_A)), B) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}(A,\Delta_A), (B[[T]], \delta_T) \\ & = & \mathrm{Sol}_{B[[T]]}(\mathbb{S}). \end{array} \tag{11.1.1}$$

Ceci suggère la définition suivante pour permettre d'associer au système d'EDO polynomial $\mathbb{S}$ l'objet géométrique qui paramètre ses solutions formelles :

Définition 11.1.1. Soit k un corps de caractéristique nulle. Le *schéma des arcs différentiels* associé (à la classe d'équivalence) au système d'EDO $\mathbb{S}$ (ou à l'idéal différentiel J qu'il engendre) est le k-schéma affine

$$\mathscr{L}_\infty([\mathbb{S}]) := \mathrm{Spec}(k\{y_1, \ldots, y_m\}/J).$$

Soit $A = k\{y_1, \ldots, y_m\}/J$ et Δ_A la k-dérivation d'adjonction. Soulignons que la définition 11.1.1 sous-entend que la k-algèbre différentielle A est considérée, dans la formule, simplement comme une k-algèbre par oubli de sa structure différentielle. En particulier, le schéma des arcs différentiels ne sera pas de type fini en général. Le schéma des arcs différentiels est donc défini universellement puisqu'il représente le foncteur défini de la catégorie $\mathbf{Alg}_k^{\mathrm{op}}$ dans la catégorie des ensembles qui est naturellement associé à

$$B \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}((A,\Delta_A), (B[[T]], \delta_T)).$$

Si $A = k\{y_1, \ldots, y_m\}/J$, nous observons que le schéma des arcs différentiels $\mathscr{L}_\infty([\mathbb{S}])$ est un sous-schéma fermé du schéma des arcs usuel $\mathscr{L}_\infty(\mathbf{A}_k^m)$ associé à $\mathbf{A}_k^m$.

Remarque 11.1.2. Soit $\mathbb{S} \subset k[y_1, \ldots, y_m]$ un système d'équations algébriques. Il découle de la définition 11.1.1 que le schéma des arcs algébriques défini au chapitre 8 coïncide avec la construction associée à ce même système considéré comme un système d'EDO algébriques d'ordre 0. (Voir section 8.1.)

Remarque 11.1.3. Le schéma des arcs différentiels associé à un système d'EDO à coefficients constants se construit se construit grâce à un anneau différentiel dont on oublie dérivation afin de le voir comme un schéma classique. Cependant cette dérivation munit naturellement le schéma des arcs d'un champ de vecteurs algébriques non trivial [1]. En effet, si $X = \mathrm{Spec}(k\{y_1, \ldots, y_m\}/[f])$ avec $(k\{y_1, \ldots, y_m\}/[f], \Delta)$ une

1. La correspondance entre dérivation et champ de vecteur n'est pas spécifique au cadre du schéma

k-algèbre différentielle, $x \in X$, alors la donnée du champ de vecteur en x est donnée par

$$\begin{array}{ccc} k\{y_1,\dots,y_m\}/[f] & \to & k[\epsilon]/(\epsilon^2) \\ g & \mapsto & g(x)+\epsilon\Delta(g)(x). \end{array}$$

On retrouve cette donnée lors de l'étude au premier ordre de la déformation différentielle $\gamma(t+\epsilon)$ où γ est une solution de f et $\gamma(t+\epsilon) \in (k[\epsilon]/\epsilon^2)[[t]]$.

Notons cependant que ceci n'est plus vérifié si l'on remplace k par $k[[t]]$ dans ce qui précède. L'objet qui paramètre les arcs différentiels n'est alors pas $k[[t]]\{y_1,\dots,y_m\}/[f]$ mais sa fibre spéciale.

Soit B une k-algèbre intègre. Par l'identification

$$\mathscr{L}_\infty([\mathbb{S}])(B) = \mathrm{Sol}_{B[[T]]}(\mathbb{S}) = \mathrm{Sol}_{B[[T]]}(J),$$

il découle facilement que $\mathscr{L}_\infty([\mathbb{S}])(B) = \mathrm{Sol}_{B[[T]]}(\sqrt{J})$.

En vertu du théorème 2.4.4, nous savons que tout idéal différentiel *parfait* $J \subset k\{y_1,\dots,y_m\}$ va se décomposer comme une intersection (finie) d'idéaux différentiels *premiers*. Ceci suggère le résultat suivant, analogue de la proposition 8.2.2.

Proposition 11.1.4. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $\mathbb{S}$ un système d'EDO, engendrant, dans l'anneau $k\{y_1,\dots,y_m\}$, l'idéal différentiel* parfait *J. Soit $\mathfrak{J}_i$, $i \in I$, les composantes irréductible de J et, pour tout $i \in I$, $\mathbb{S}_i$ le système d'EDO associé. Soit K une extension du corps k. Soit $\gamma(T) \in \mathscr{L}_\infty([\mathbb{S}])(K)$. Alors il existe $i \in I$ tel que $\gamma(T) \in \mathscr{L}_\infty([\mathbb{S}_i])(K)$.*

Démonstration. La donnée de γ correspond à celle d'un morphisme de k-algèbres différentielles $k\{y_1,\dots,y_m\}/J \to K[[T]]$. Le noyau de ce morphisme en vertu du lemme de factorisation correspond à un idéal *premier* de $k\{y_1,\dots,y_m\}$ contenant J. Donc ce noyau contient l'un des $\mathfrak{J}_i$. En appliquant l'argument ci-dessus nous concluons que $\gamma \in \mathscr{L}_\infty([\mathbb{S}_i])$. □

11.2 Le schéma des arcs différentiels associés à une variété algébrique munie d'une donnée différentielle

L'objectif de cette section est d'associer un schéma des arcs différentiels à la donnée d'une k-variété algébrique affine (correspondant donc à un systèmes d'équations algébriques) et d'une « donnée différentielle ». Ce point de vue permet d'appréhender

des arcs, elle est vrai dans un cadre plus général.

l'ensemble des systèmes d'EDO polynomiales produits à partir d'un même système d'équations algébriques.

Soit B une k-algèbre de type fini et (A, δ_A) une k-algèbre différentielle différentiellement de type fini, c'est-à-dire pour laquelle il existe un entier naturel m et un idéal différentiel J de $k\{y_1, \dots, y_m\}$ tel que $A \cong (k\{y_1, \dots, y_m\}/J, \Delta_A)$ en tant que k-algèbres différentielles.

Définition 11.2.1. On appelle *donnée différentielle sur* $\mathrm{Spec}(A)$ celle d'un morphisme de k-algèbres $\theta\colon B \to A$.

On dira que cette donnée différentielle est

1. *pleine* si la k-algèbre différentielle engendré par $\theta(B)$ vaut A ;
2. *fidèle* si θ est injectif
3. *pleinement fidèle* si θ est plein et fidèle.

Exemple 11.2.2. Le morphisme $\theta\colon k[X_0, \cdots, X_n] \to k\{y\}, X_i \mapsto 0$ est une donnée différentielle sur $\mathrm{Spec}(k\{y\})$ qui n'est ni pleine, ni fidèle.

Exemple 11.2.3. Soit k un corps et $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme. On considère le morphisme de k-algèbres

$$\begin{array}{rccc} \delta\colon & k[X_0, \dots, X_n] & \to & k\{y\} \\ & X_i & \mapsto & y_i. \end{array}$$

On rappelle que $y_i = \Delta^i(y_0)$, c'est-à-dire la i-ème dérivée de y. Nous notons $f^\delta = \delta(f)$. Le morphisme δ induit une donnée différentielle

$$\delta\colon k[X_0, \dots, X_n]/(f) \to k\{y\}/[f^\delta].$$

Dans ce cas, la donnée différentielle est pleinement fidèle. Dans le chapitre 13, nous utiliserons ce type de données différentielles.

Définition 11.2.4. Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit (A, δ_A) une k-algèbre différentielle différentiellement de type fini. Soit X une k-variété affine. Soit $\theta : \mathcal{O}(X) \to A$ une donnée différentielle. Le *schéma des arcs différentiels* associé à (X, θ) est le k-schéma affine

$$\mathscr{L}_\infty(X, \theta) := \mathrm{Spec}(A).$$

L'idée de cette définition est de pouvoir plonger X dans algèbre différentielle afin de voir les équations qui définissent X comme des EDO. Bien entendu, il y a plusieurs manières d'effectuer un tel plongement et même à A fixé, θ n'est pas unique.

On pourra également remarquer que la définition $\mathscr{L}_\infty(X,\theta) := \mathrm{Spec}(A)$ fait disparaître (du côté droit) X et θ. Par exemple, on considérant $\theta_1 \colon k[X] \to k\{y\}, X \mapsto y_0$ et $\theta_2 \colon k[X,Y,Z]/(X^2+Y^2-Z^2) \to k\{y\}, X \mapsto y_0, Y \to 0, Z \to y_0$, alors $\mathscr{L}_\infty(X_1,\theta_1) = \mathscr{L}_\infty(X_2,\theta_2) = \mathrm{Spec}(k\{y\})$.

Remarque 11.2.5. Si θ est fidèle, alors le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to X$ est dominant.

On verra un peu plus loin que si θ est un morphisme plein, on peut relier $\mathrm{Spec}(A)$ au schéma des arcs de X.

Soit $A = k\{y_1,\dots,y_m\}/J$, et B une k-algèbre. Alors, d'après la bijection naturelle 11.1.1, l'ensemble $\mathscr{L}_\infty(X,\theta)(B)$ des B-points de $\mathrm{Spec}(A)$ s'identifie aux solutions dans $B[[T]]$ du système d'EDO (à m variables) défini par l'idéal différentiel J. Tout B-point de $\mathscr{L}_\infty(X,\theta)$ est appelé *B-arc différentiel* de $X(\theta)$, ou simplement *arc différentiel* si $B = k$.

La proposition suivante fait le lien entre la notion d'arc et celle d'arc différentiel. Soit X une k-variété. Soit $\theta \colon \mathcal{O}(X) \to A$ une donnée différentielle sur X. Soit B une k-algèbre et $\varphi : A \to (B[[T]],\delta_T)$ un morphisme de k-algèbres différentielles. On dispose d'un diagramme commutatif de morphismes de k-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & A \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varphi} & \\ & B[[T]] & \end{array}$$

où f est défini par $X_i \mapsto \varphi(\theta(X_i))$. Comme ce diagramme est fonctoriel en B, on a construit un morphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algdiff}_k}((A,\Delta_A),((\cdot)[[T]],\delta_T)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A,\cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(\mathcal{O}(X),(\cdot)[[T]]),$$

c'est-à-dire, par le lemme de Yoneda, un morphisme de k-schémas

$$\mathscr{L}_\infty(J) = \mathrm{Spec}(A) \to \mathscr{L}_\infty(X). \tag{11.2.1}$$

Proposition 11.2.6. *Soit X une k-variété. Soit $\theta \colon \mathcal{O}(X) \to A$ une donnée différentielle sur X. Si θ est plein alors le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathscr{L}_\infty(X)$ est une immersion fermée.*

Démonstration. Si X est une k-variété affine, disons $X = \mathrm{Spec}(k[x_1,\cdots,x_m]/J)$, alors

$$\mathscr{L}_\infty(X) = \mathrm{Spec}(k\{x_1,\cdots,x_m\}/[J]).$$

Le morphisme de k-algèbres différentielles $\theta_\infty \colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathscr{L}_\infty(X)$ induit par θ est décrit par

$$\begin{array}{rccc} \theta_\infty^\sharp \colon & k\{x_1, \cdots, x_m\}/[J] & \to & A \\ & x_{i,0} & \mapsto & \theta(x_i) \end{array}$$

Si θ est plein, alors $\theta_\infty^\sharp$ est surjectif. Donc θ_∞ est une immersion fermée. □

Définition 11.2.7. Soit X une k-variété. Soit $\theta \colon \mathcal{O}(X) \to A$ une donnée différentielle sur X. Si θ est pleinement fidèle, on dira que X est une *approximation algébrique du schéma des arcs différentiels associé à* A.

11.3 Le cas d'une EDO

Dans ce paragraphe, nous développons le formalisme géométrique précédent dans le cas d'une EDO en une variable différentielle. Ceci constituera une base de résultats importants pour l'étude réalisée dans la partie VI. Pour cela, nous devons souligner que la donné d'une EDO s'insère dans le formalisme précédent grâce au choix de la donnée différentille induite par le morphisme de k-algèbres $\delta \colon k[X_0, \ldots, X_n] \to k\{y\}$ défini pas $X_i \mapsto y_i$ (voir exemple 11.2.3). Dans ce cas, rappelons que l'image de $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ par δ est notée f^δ, c'est-à-dire

$$f^\delta := \delta(f) = f(y_0, y_1, \ldots, y_n). \tag{11.3.1}$$

Pour la donnée induite

$$\delta \colon k[X_0, \ldots, X_n]/(f) \to k\{y\}/(f^\delta)$$

nous noterons $\mathscr{L}_\infty(X, \delta) =: \mathscr{L}_\infty(X^\delta)$ pour $X = \mathrm{Spec}(k[X_0, \ldots, X_n]/(f))$. Le schéma des arcs différentiels $\mathscr{L}_\infty(X^\delta)$ est défini comme le k-schéma affine $\mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\delta])$. L'ensemble de ses k-points correspond bijectivement à l'ensemble des séries formelles $\gamma(T) \in k[[T]]$ telles que $f(\gamma(T), \gamma'(T), \ldots, \gamma^{(n)}(T)) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}_\infty(X^\delta)(k) & = & \mathrm{Sol}_{k[[T]]}([f^\delta]) \\ & = & \mathrm{Sol}_{k[[T]]}(f^\delta) \end{array}$$

Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition 11.2.6.

Corollaire 11.3.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$. La donnée différentielle δ sur X définie ci-dessus est pleinement fidèle. Autrement dit, le k-schéma $\mathscr{L}_\infty(X^\delta)$ est un sous-schéma fermé du schéma des arcs $\mathscr{L}_\infty(X)$ associé à X.*

En particulier X est une approximation algébrique du schéma des arcs différentiels associé à $k\{y\}/(f^\delta)$.

Le morphisme θ induit un morphisme de k-schémas $\pi_0 \colon \mathscr{L}_\infty(X^\delta) \to X$, qui se décrit sur les k-points par $\gamma(T) \mapsto (\gamma(0), \ldots, \gamma^{(n)}(0))$.

Définition 11.3.2. Soit k un corps de caractéristiquelle nulle et X un k-variété. Soit $g \in \mathcal{O}(X) = k[X_1, \cdots, X_n]/I$. On note $A = k\{y\}/[\delta(I)]$. Le morphisme de k-algèbres $\delta \colon \mathcal{O}(X) \to A$ induit un morphisme de k-algèbres au niveau des localisés $D(g) \to A_{g^\delta}$. Alors, par définition, le schéma des arcs différentiels associé à l'ouvert distingué $D(g)$ est

$$\mathscr{L}_\infty(D(g)^\delta) := D(g^\delta).$$

Observons la propriété de localisation suivante :

Lemme 11.3.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit X une k-variété. Soit $g \in \mathcal{O}(X)$, alors on a les isomorphismes de k-schémas suivants :*

$$\mathscr{L}_\infty(D(g)^\delta) := D(g^\delta) \cong \pi_0^{-1}(D(g)).$$

En particulier, si les $D(g_i)$, $i \in I$ sont un recouvrement (ouvert affine) de X, alors la famille formée des $D(g_i^\delta)$ forme un recouvrement (ouvert affine) de $\mathscr{L}_\infty(X^\delta)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que tous ces k-schémas sont des schémas affines et qu'ils sont par construction des sous-schémas ouverts de $\mathscr{L}_\infty(X^\delta)$. En effet, nous avons

$$\pi_0^{-1}(D(g)) = D(\pi_0^\sharp(g)))$$

où nous désignons par $\pi_0^\sharp : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(\mathscr{L}_\infty(X^\delta)$ le morphisme adjoint de π_0. Mais dans ce cas de figure ce morphisme coïncide avec le morphisme θ, ce qui prouve l'isomorphisme (canonique) de gauche.

□

Au-dessus du voisinage ouvert affine U d'un point lisse, le schéma de arcs $\mathscr{L}_\infty(X)$ a une structure schématique simple. En effet, il s'identifie, dans ce cas, au spectre d'un anneau de polynômes à une infinité (dénombrable) de variables à coefficients dans $\mathcal{O}(U)$ (voir par exemple [Seb04, p. 3.4.2] ou [CLNS18]). Pour le schéma de arcs différentiels associé à une EDO $f^\delta = 0$ la situation est encore plus favorable. Au voisinage d'un point « non singulier » (de l'EDO $f^\delta = 0$), c'est-à-dire un point n'annulant pas son séparant S_{f^δ}, le schéma des arcs différentiels s'identifie à une k-variété lisse. L'énoncé suivant précise cette idée ; remarquons que, si f^δ est d'ordre $n \geqslant 1$, alors $S_{f^\delta} := \partial_{y_n}(f^\delta) = (\partial_{X_n}(f))^\delta$.

Proposition 11.3.4. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ un polynôme non constant. Soit $X = \mathrm{Spec}(k[X_0, \ldots, X_n]/(f)$. Soit S_f le séparant de f^δ. Soit $D(S_f)$ l'ouvert standard de X défini par S_f, c'est-à-dire le complémentaire du lieu d'annulation $V(S_f)$ de S_f dans X. Alors on a un isomorphisme de k-schémas $\pi_0^{-1}(D(S_f)) = \mathscr{L}_\infty(D(S_f)^\delta) \cong D(S_f)$. En particulier, $\mathscr{L}_\infty(D(S_f)^\delta)$ est une k-variété lisse et un sous-schéma ouvert affine de X.*

Remarque 11.3.5. Il serait intéressant de vérifier si le résultat se généralise de la manière suivante : Soit Z une approximation algébrique du schéma des arcs différentiels $\mathscr{L}_\infty(X^\delta)$. Alors le morphisme naturel $\mathscr{L}_\infty(X^\delta) \to Z$ induit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert lisse de Z.

Démonstration. En vertu du lemme 11.3.3, il suffit de prouver l'existence de l'isomorphisme $\mathscr{L}_\infty(D(S_f)^\delta) \cong D(S_f)$. Remarquons que la formule de Leibniz appliquée à f^δ dans la k-algèbre différentielle $(k\{y\}, \Delta)$ produit la formule suivante :

$$\Delta(f^\delta) = \sum_{i=0}^{n} (\partial_{X_i}(f))^\delta y_{i+1}.$$

En conséquence, l'idéal différentiel $([f^\delta]k\{y\})_{S_f}$ contient l'élément

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\partial_{X_i}(f))^\delta}{S_f^\delta} y_{i+1}$$

et toutes ses dérivées. Il en découle un isomorphisme de k-algèbres (car δ est injectif)

$$\mathcal{O}(\mathscr{L}_\infty(D(S_f)^\delta)) \cong k[y_0, \ldots, y_n]/(f(y_0, \ldots, y_n))[S_f^{-1}],$$

ce qui prouve le résultat. □

CHAPITRE 12

ESPACE TANGENT ET DIMENSION DE PLONGEMENT

Dans ce chapitre, nous allons présenter et rassembler des résultats essentiellement connus sur la notion d'espace tangent et de dimension de plongement pour des schéma généraux. Le matériel de ce chapitre constitue les ingrédients clé au cœur des résultats que nous obtiendrons dans le chapitre suivant. Compte tenu du rôle que les énoncés joueront dans la suite, nous avons choisi de présenter les preuves des plus importants pour la facilité de lecture de cette thèse. La plupart des résultats exposés dans ce chapitre sont connus cependant, à notre connaissance, le corollaire 12.2.6 et la proposition 12.2.7 sont neuves.

12.1 Définition

Définition 12.1.1. Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local. La *dimension de plongement* de A est la dimension du $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$. On la note $\mathrm{emb.dim}(A)$.

L'espace tangent de A est le dual du $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$ que l'on note $(\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2)^\vee$.

Remarque 12.1.2. Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local et $n \in \mathbf{N}$ un entier. Le A-module $\mathfrak{M}_A^n/\mathfrak{M}_A^{n+1}$ est muni d'une structure de $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel. En effet, si $a \in A$ et $b \in \mathfrak{M}_A^n$ alors $(a + \mathfrak{M}_A)(b + \mathfrak{M}_A^{n+1}) = ab + \mathfrak{M}_A^{n+1}$.

Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ une k-algèbre locale de corps résiduel k isomorphe à k. On notera $A/\mathfrak{M}_A = k$ pour signifier que le morphisme structural de k-algèbre $k \to A/\mathfrak{M}_A$ est un isomorphisme. On note $\pi\colon A \to A/\mathfrak{M}_A = k$ le morphisme quotient. Soit $a \in A$. On note $a_0 = \pi(a) \in k$. Alors $\pi(a - a_0) = \pi(a) - a_0 = 0$. Ainsi $a - a_0 \in \mathfrak{M}_A$. Autrement dit, pour tout $a \in A$, il existe $a_0 \in k$ et $a_1 \in \mathfrak{M}_A$ tel que $a = a_0 + a_1$. On remarque également que cette décomposition est unique.

Dans le lemme suivant on considère l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ des morphismes de k-algèbres locales de corps résiduel k-isomorphe à k.

Lemme 12.1.3. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ une k-algèbre locale dont le corps résiduel est k-isomorphe à k. Si $a \in A$, on a vu qu'on peut l'écrire de manière unique sous la forme $a = a_0 + a_1$ avec $a_0 \in k$ et $a_1 \in \mathfrak{M}_A$.*

L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ a une structure de k-espace vectoriel, définie par :

1. *Si φ_1 et φ_2 sont deux éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ et $\lambda \in k$, on définit*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 + \lambda\varphi_2 : & A & \to & k[\epsilon]/(\epsilon)^2 \\ & a = a_0 + a_1 & \mapsto & a_0 + \varphi_1(a_1) + \lambda\varphi_2(a_1). \end{array}$$

2. *L'élément neutre est donné par*

$$\begin{array}{rccc} 0_{\mathrm{Hom}} : & A & \to & k[\epsilon]/(\epsilon)^2 \\ & a = a_0 + a_1 & \mapsto & a_0 \end{array}$$

Par ailleurs, cette structure de k-espace vectoriel est fonctorielle en A, c'est-à-dire que si $\psi : A \to B$ est un morphisme de k-algèbres, alors le morphisme induit

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}(\psi) : & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(B, k[\epsilon]/(\epsilon)^2) \\ & \varphi & \mapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

est un morphisme de k-espaces vectoriels.

Démonstration. Soit φ_1 et φ_2 deux éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ et $\lambda \in k$. On vérifie que $\varphi := \varphi_1 + \lambda\varphi_2$ est bien un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$. Soit $a = a_0 + a_1$ et $b = b_0 + b_1$ deux éléments de A. Alors $\varphi(a+b) = a_0 + b_0 + \varphi_1(a_1) + \varphi_1(b_1) + \lambda\varphi_2(a_1) + \lambda\varphi_2(b_1) = \varphi(a) + \varphi(b)$. De plus

$$\varphi(ab) = a_0b_0 + \varphi_1(a_0b_1 + b_0a_1) + \lambda\varphi_2(a_0b_1 + b_0a_1)$$

et, comme, pour $i \in \{1, 2\}$, on a $\varphi_i(a_1b_1) = 0$ alors

$$\varphi(a)\varphi(b) = (a_0 + \varphi_1(a_1) + \lambda\varphi_2(a_1))(b_0 + \varphi_1(b_1) + \lambda\varphi_2(b_1)) = \varphi(ab).$$

Ainsi φ est bien un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$.

Le reste des affirmations se vérifie facilement. □

Dans ce cadre, on peut donc proposer une définition équivalente de la dimension de plongement.

Proposition 12.1.4. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ une k-algèbre locale dont le corps résiduel est k-isomorphe à k. Alors l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ est isomorphe, en*

temps que k-espace vectoriel, au dual de $\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$, que l'on note $(\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2)^\vee$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ et $a \in A$. Alors a s'écrit de manière unique sous la forme $a = a_0 + a_1$ avec $a_0 \in k$ et $a_1 \in \mathfrak{M}_A$. Ainsi $\varphi(a) = a_0 + \varphi(a_1)$, où $\varphi(a_1) = \epsilon\varphi_1(a_1)$. L'application $\varphi_1 \colon \mathfrak{M}_A \to k$ est nulle sur $\mathfrak{M}_A^2$ et passe donc au quotient. On note encore $\varphi_1 \colon \mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2 \to k$ l'application quotient. Cette application est k-linéaire. C'est donc un morphisme de k-espace vectoriel.

On définit

$$\begin{array}{rccc} \psi \colon & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2) & \to & (\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2)^\vee \\ & \varphi & \mapsto & \varphi_1. \end{array}$$

Vérifions que ψ est bijectif.

Soit $\phi, \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$, vérifiant $\psi(\phi) = \psi(\varphi)$. Soit $a \in A$, on écrit, comme précédemment, a sous la forme $a = a_0 + a_1$. Alors

$$\phi(a) = a_0 + \epsilon\phi_1(a_1) = a_0 + \epsilon\varphi_1(a_1) = \varphi(a).$$

Donc ψ est injectif.

Soit $\theta \in (\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2)^\vee$ et $a = a_0 + a_1 \in A$ On définit $\varphi(a) = a_0 + \epsilon\theta(a_1)$. Soit $a, b \in A$. Comme θ est k-linéaire, on vérifie que $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Par ailleurs, en notant $a = a_0 + a_1$ et $b = b_0 + b_1$, comme θ est nulle sur $\mathfrak{M}_A^2$, on a

$$\varphi(ab) = \varphi(a_0b_0 + a_0b_1 + b_0a_1 + a_1b_1) = a_0b_0 + \epsilon(a_0\theta(b_1) + b_0\theta(a_1)) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Ainsi ψ est surjective.

On vérifie également que ψ est une application k-linéaire. □

Proposition 12.1.5. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ une k-algèbre locale dont le corps résiduel est k-isomorphe à k. Alors $\mathrm{emb.dim}(A)$ la dimension de plongement de A est finie si et seulement si la la dimension du k-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ est finie. Dans ce cas, ces deux dimensions sont égales.*

Démonstration. D'après la proposition 12.1.4, il existe un isormophisme de k-espace vectoriel entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Algloc}_k}(A, k[\epsilon]/(\epsilon)^2)$ et le dual de $\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$. Comme $\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$ est de dimension finie si et seulement si son dual est de dimension finie, et que dans ce cas leurs dimensions sont égales, on en déduit la proposition. □

12.2 Propriétés et caractérisations

Lemme 12.2.1. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local et $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ son complété. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ un entier. On suppose qu'il existe un entier d tel $\dim_{A/\mathfrak{M}_A}(\mathfrak{M}_A^n/\mathfrak{M}_A^{n+1}) = d$, alors $\widehat{\mathfrak{M}_A^n}$ est un $\widehat{A}$-module de type fini engendré par au plus d éléments.*

En particulier avec $n = 1$, si $\mathrm{emb.dim}(A) = d$ alors $\widehat{\mathfrak{M}_A}$ est un $\widehat{A}$-module de type fini engendré par au plus d éléments.

Démonstration. Comme $\dim_{A/\mathfrak{M}_A}(\mathfrak{M}_A^n/\mathfrak{M}_A^{n+1}) = d$, il existe des éléments

$$a_1, \cdots, a_d \in \mathfrak{M}_A^n$$

qui forment une base de $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_A^n/\mathfrak{M}_A^{n+1}$. On pose le morphisme de A-module $\psi\colon A^d \to \mathfrak{M}_A^n, e_i \mapsto a_i$, où $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ où l'unique 1 est en i-eme position.

D'après [Stacksa, Tag 0315 (1)] si R est un anneau, $I \subset R$ un idéal et $\varphi\colon M \to N$ un morphisme de R-module alors si $M/IM \to N/IN$ est surjectif alors $\widehat{M} \to \widehat{N}$ est surjectif.

En appliquant cette proposition avec $R = A$, $I = \mathfrak{M}_A$, $M = A^d$, $N = \mathfrak{M}_A^n$ et $\varphi = \psi$, on en déduit que le morphisme

$$\widehat{\psi}\colon \widehat{A}^d \to \widehat{\mathfrak{M}_A^n}$$

est surjectif (car $\varprojlim_m A^d/\mathfrak{M}_A^{n+m} = \varprojlim_m A^d/\mathfrak{M}_A^m$). □

Remarque 12.2.2. L'idée de la preuve de [Stacksa, Tag 0315 (1)] est la suivante : on utilise le lemme de Nakayama (voir [Stacksa, Tag 00DV]) pour prouver que si $M/IM \to N/IN$ est surjective, alors pour tout entier $n \geqslant 1$ le morphisme $M/I^nM \to N/I^nN$ est surjectif. On pose alors $K_n = \{x \in M \mid \varphi(x) \in I^nN\}$. On obtient la suite exacte

$$0 \to K_n/I^nM \to M/I^nM \to N/I^nN \to 0$$

et on vérifie qu'elle est de Mittag-Leffler (*i.e.* que les morphismes $K_{n+1}/I^{n+1}M \to K_n/I^nM$ sont surjectifs). On en déduit alors (voir par exemple 7.2.1) que la suite des complétés est exactes et donc que le morphisme $\widehat{M} \to \widehat{N}$ est surjectif.

Le lemme suivant est une adaptation du lemme [Stacksa, Tag 05GH]. L'énoncé ne s'applique pas directement car, en général, si l'anneau local $(A, \mathfrak{M}_A)$ n'est pas noethérien alors, $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ et $\widehat{\widehat{A}} = \varprojlim_n \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^n$ ne sont pas isomorphes (voir partie IV). Cependant la preuve du lemme peut se réutiliser pour notre propre énoncé

en remarquant que si une suite est de Cauchy pour la topologie $\widehat{\mathfrak{M}_A}$ pré-adique sur $\widehat{A}$, alors cette suite est aussi de Cauchy pour la topologie qui rend $\widehat{A}$ complet.

Lemme 12.2.3. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local et $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ son complété. On suppose que $\widehat{\mathfrak{M}_A}$ est un idéal de type fini. Alors $\widehat{A}$ est noethérien.*

Démonstration. On note $f_1, \cdots, f_t \in \widehat{\mathfrak{M}_A}$ une famille génératrice de $\widehat{\mathfrak{M}_A}$. On considère la somme directe $B = \oplus_{n\geqslant 0}\widehat{\mathfrak{M}_A}^n/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$ dans la catégorie des $\widehat{A}$-modules. Cette somme directe possède une structure additionnelle d'anneau. On considère le morphisme d'anneau

$$\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}[T_1, \cdots, T_t] \to B$$

qui envoie T_j sur $\bar{f_j}$. Ce morphisme est surjectif, donc B est un anneau noethérien.

Soit J un idéal de $\widehat{A}$. On considère l'idéal $J_B = \oplus_{n\geqslant 0} J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^n/J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$ de B. Comme B est noethérien, il existe un famille finie $\bar{g_1}, \cdots \bar{g_m}$ d'éléments de B qui engendrent J_B. Quitte à augmenter la taille de la famille, on peut supposer que pour tout j, on a $\bar{g_j} \in J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^{d_j}/J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^{d_j+1}$. Il existe $g_j \in J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^{d_j}$ qui s'envoie sur $\bar{g_j}$ par passage au quotient. Montrons que la famille $g_1, \cdots, g_m$ engendre J.

Soit $x \in J$. Il existe un entier n tel que $x \in J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^n$ et $x \notin J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$. Si on considère $\bar{x}$ l'image de x dans $J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^n/J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$, on en déduit qu'il existe une famille $a_j \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{\max(0,n-d_j)}$ tels que $\bar{x} = \sum_{j=1}^m \bar{a_j}\bar{g_j}$ car la famille des g_j engendre J_B. Ainsi $x - \sum_{j=1}^m a_j g_j \in J \cap \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$. En itérant ce procédé on peut trouver une famille $(a_{1,n}, \cdots, a_{m,n})$ avec $a_{j,n} \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{\max(0,n-d_j)}$ tels que

$$x = \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{m} a_{j,n}g_j \mod \widehat{\mathfrak{M}_A}^N$$

On pose $A_j = \sum_{n\geqslant 0} a_{j,n}$. Comme la suite $\sum_{j=0}^N a_{j,n}$ est de Cauchy (pour la topologie qui rend $\widehat{A}$ complet) car, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n \subset \widehat{\mathfrak{M}_A^n}$ alors A_j est bien défini dans $\widehat{A}$. Ainsi $x = \sum_{j=0}^m A_j g_j$, car $\cap_{N\in\mathbf{N}}\widehat{\mathfrak{M}_A^N} = 0$ (car $\hat{A}$ est complet pour la filtration $(\widehat{\mathfrak{M}_A^N})_{N\in\mathbf{N}}$) ce qui prouve que J est de type fini. □

Remarque 12.2.4. Si $\widehat{A}$ est noethérien, alors $\mathrm{emb.dim}(A)$ est finie.

Le résultat suivant peut également se trouver dans [FD17, Lemme 10.12].

Lemme 12.2.5. *Soit k un corps. Soit X un k-schéma. Soit $x \in X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La dimension de plongement de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est finie.*
2. *Le complété $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ de l'anneau local en x est noethérien.*

Démonstration. L'énoncé est local, il suffit donc de montrer le résultat d'algèbre suivant : Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local. Alors $\dim_{A/\mathfrak{M}_A}(\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2) < \infty$ si et seulement si le complété $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ est noethérien.

Supposons que $\dim_{A/\mathfrak{M}_A}(\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2) < \infty$, alors en appliquant le lemme 12.2.1 on en déduit que $\widehat{\mathfrak{M}_A}$ est un idéal de type fini, puis en apliquant le lemme 12.2.3, on en déduit que $\widehat{A}$ est noethérien.

Réciproquement, si l'anneau $\widehat{A}$ est noethérien, comme on a l'inclusion $\widehat{\mathfrak{M}_A}^2 \subset \widehat{\mathfrak{M}_A^2}$ le morphisme $\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2 \to \mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$ est surjectif. Donc la dimension de plongement de A est finie. □

Corollaire 12.2.6. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local. On note $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ la complétion de A. Alors $\mathrm{emb.dim}(A)$ est finie si et seulement si $\mathrm{emb.dim}(\widehat{A})$, et dans ce cas $\mathrm{emb.dim}(A) = \mathrm{emb.dim}(\widehat{A})$.*

Démonstration. Le fait que $\mathrm{emb.dim}(A)$ est finie si et seulement si $\mathrm{emb.dim}(\widehat{A})$ l'est se déduit du lemme 12.2.5.

Supposons que ces dimensions de plongement soient finies. D'après l'inclusion $\widehat{\mathfrak{M}_A}^2 \subset \widehat{\mathfrak{M}_A^2}$, on a un morphisme surjectif de $A/\mathfrak{M}_A$-espaces vectoriels

$$\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2 \to \widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A^2} = \mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2.$$

Ainsi $\mathrm{emb.dim}(A) \leqslant \mathrm{emb.dim}(\widehat{A})$.

Par ailleurs, on sait d'après le lemme 12.2.1 que $\widehat{\mathfrak{M}_A}$ est engendré comme $\widehat{A}$-module par au plus $d := \mathrm{emb.dim}(A)$ éléments. Notons $u_1, \cdots, u_d \in \widehat{\mathfrak{M}_A}$ une famille génératrice de $\widehat{\mathfrak{M}_A}$. Soit $x \in \widehat{\mathfrak{M}_A}$, alors il existe $(a_1, \cdots, a_d) \in \widehat{A}^d$ tels que $x = \sum_{i=1}^d a_i u_i$. Soit $\pi\colon \widehat{A} \to \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{M}_A} = A/\mathfrak{M}_A$ le morphisme de projection canonique. Puisque $\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2$ est muni d'une structure de $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel, on considère l'élément $y = \sum_{i=0}^d \pi(a_i)\bar{u_i}$ de $\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2$. Ainsi $\bar{x} - y = 0$ dans $\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2$. Donc le $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel $\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2$ est de dimension au plus d. Donc $\mathrm{emb.dim}(\widehat{A}) \leqslant \mathrm{emb.dim}(A)$. □

Les propositions démontrées plus haut permettent de prouver l'énoncé suivant sur la complétion d'un anneau :

Proposition 12.2.7. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local. On note $\widehat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{M}_A^n$ la complétion de A. Si $\widehat{A}$ est un anneau noethérien alors $\widehat{A}$ est complet pour la topologie $\widehat{\mathfrak{M}_A}$ préadique.*

Démonstration. On va montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n = \widehat{\mathfrak{M}_A^n}$, ce qui prouvera la proposition d'après le théorème 7.2.6.

Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Pour $n = 2$, comme $\widehat{\mathfrak{M}_A}^2 \subset \widehat{\mathfrak{M}_A^2}$ on sait que le morphisme de $A/\mathfrak{M}_A$ ($= \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}$)-espaces vectoriels

$$\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2 \to \widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A^2} = \mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$$

est surjectif. Comme $\widehat{A}$ est noethérien, alors $\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2$ est de dimension finie. Or on a vu dans le corollaire 12.2.6 que $\mathrm{emb.dim}(A) = \mathrm{emb.dim}(\widehat{A})$. Donc ce morphisme est surjectif entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie) donc il est bijectif. Ainsi $\widehat{\mathfrak{M}_A}^2 = \widehat{\mathfrak{M}_A^2}$

Supposons désormais que $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n = \widehat{\mathfrak{M}_A^n}$. De par l'inclusion $\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1} \subset \widehat{\mathfrak{M}_A^{n+1}}$, on en déduit un morphisme surjectif

$$\varphi_n \colon \widehat{\mathfrak{M}_A}^n/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1} \to \widehat{\mathfrak{M}_A^n}/\widehat{\mathfrak{M}_A^{n+1}} = \mathfrak{M}_A^n/\mathfrak{M}_A^{n+1}.$$

Comme $\widehat{A}$ est noéthérien, alors le $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel $\widehat{\mathfrak{M}_A^n}/\widehat{\mathfrak{M}_A^{n+1}}$ est de dimension finie et donc $\widehat{\mathfrak{M}_A^n}/\widehat{\mathfrak{M}_A^{n+1}}$ est également de dimension finie.

Notons $d = \dim_{A/\mathfrak{M}_A}(\mathfrak{M}_A^n/\mathfrak{M}_A^{n+1})$, alors d'après le lemme 12.2.1, on en déduit que $\widehat{\mathfrak{M}_A^n}$ est un $\widehat{A}$ module engendré par au plus d éléments. Or par hypothèse $\widehat{\mathfrak{M}_A^n} = \widehat{\mathfrak{M}_A}^n$. Notons $u_1, \cdots, u_d \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^n$ une famille génératrice de $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n$. Soit $x \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^n$, alors il existe $(a_1, \cdots, a_d) \in \widehat{A}^d$ tels que $x = \sum_{i=1}^d a_i u_i$. Soit $\pi \colon \widehat{A} \to \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{M}_A} = A/\mathfrak{M}_A$ le morphisme de projection canonique. Puisque $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$ est muni d'une structure de $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel, on considère l'élément $y = \sum_{i=0}^d \pi(a_i)\bar{u_i}$ de $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$. Ainsi $\bar{x} - y = 0$ dans $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$. Donc le $A/\mathfrak{M}_A$-espace vectoriel $\widehat{\mathfrak{M}_A}^n/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$ est de dimension au plus d.

On en déduit que le morphisme φ_n est un morphisme de $A/\mathfrak{M}_A$-espaces vectoriels surjectif entre deux espaces vectoriels de même dimension, il est donc bijectif. Ainsi $\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1} = \widehat{\mathfrak{M}_A^{n+1}}$. Ce qui conclut la récurrence. □

Remarque 12.2.8. La proposition 12.2.7 est fausse en général si l'anneau $\widehat{A}$ n'est pas noethérien comme il l'a été vu dans le théorème 7.3.1.

Proposition 12.2.9. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ une k-algèbre locale dont le corps résiduel est k-isomorphe à k telle que* $\mathrm{emb.dim}(A)$ *la dimension de plongement de A soit finie égale à d. Alors il existe un morphisme de k-algèbres locales surjectif $k[[x_1, \cdots, x_d]] \to \widehat{A}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 12.2.6, on sait que $\mathrm{emb.dim}(\widehat{A}) = d$. On note $(u_1, \cdots, u_d) \in \widehat{\mathfrak{M}_A}$ une base du k-espace vectoriel $\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2$. Soit $u \in \widehat{A}$, on va montrer par récurrence que, tout $i \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme $P_{u,i} \in k[x_1, \cdots, x_d]$

homogène de degré total i tel que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on ait

$$u - \sum_{i=1}^{n} P_{u,i}(u_1, \cdots, u_d) \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}.$$

Pour $n = 0$, on remarque que comme $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{M}_A} = k$, alors si $P_{u,0} \in k$ désigne l'image u par le morphisme $\widehat{A} \to \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}$, on a bien $u - P_{u,0} \in \mathfrak{M}_A$.

Si $u \in \widehat{\mathfrak{M}_A}$, alors comme le k-espace vectoriel $\widehat{\mathfrak{M}_A}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^2$ est engendré par $(u_1, \cdots, u_d)$, il existe $P_{u,1}$ un polynôme homogène de degré total 1 tel que $u - P_{u,1}(u_1, \cdots, u_d) \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^2$.

Soit maintenant $u \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$ et montrons qu'il existe un polynôme $P_{u,n+1} \in k[x_1, \cdots, x_d]$ homogène de degré $n+1$ tel que $u - P_{u,n+1} \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+2}$. Comme $u \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}$, il existe un ensemble fini J, une famille $\alpha_j \in \widehat{A}$ et $(b_{j,i})_{j\in J, 1\leqslant i\leqslant n+1}$ une famille d'éléments de $\widehat{\mathfrak{M}_A}$ tels que

$$u = \sum_{j\in J} \alpha_j \prod_{i=1}^{n+1} b_{j,i}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que, pour tout $j \in J$, on a $\alpha_j \notin \widehat{\mathfrak{M}_A}$. Alors il existe $P_{\alpha_j,0}$ un polynôme homogène de degré 0 (c'est-à-dire un élément de k) tel que $\alpha_j - P_{\alpha_j,0} \in \widehat{\mathfrak{M}_A}$. Par ailleurs, il existe $P_{b_{j,i},1} \in k[x_1, \cdots, x_d]$ des polynômes homogènes de degré 1 tels que, pour tout $j \in J$ et $1 \leqslant i \leqslant n+1$, on ait

$$b_{j,i} - P_{b_{j,i},1}(u_1, \cdots, u_d) \in \widehat{\mathfrak{M}_A}.$$

On vérifie que u et

$$P_{u,n+1}(u_1, \cdots, u_d) := \sum_{j\in J} P_{\alpha_j,0} \prod_{i=1}^{n+1} P_{b_{j,i},1}(u_1, \cdots, u_d)$$

ont la même image dans $\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+2}$. Il suffit, pour cela, de remarquer que

$$0 = \sum_{j\in J} (\alpha_j - P_{\alpha_j,0}) \prod_{i=1}^{n+1} (b_{j,i} - P_{b_{j,i},1}(u_1, \cdots, u_d)) \mod \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+2}$$

et qu'en développant le membre de gauche, on obtient

$$0 = u - P_{u,n+1}(u_1, \cdots, u_d) \mod \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}/\widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+2}.$$

On a ainsi que $u - P_{u,n+1}(u_1, \cdots, u_d) \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+2}$.

Si $u \in \widehat{A}$, cela montre l'existence pour tout $i \in \mathbf{N}$, d'un polynôme $P_{u,i} \in k[x_1, \cdots, x_d]$ homogène de degré total i tel que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on ait

$$u - \sum_{i=1}^{n} P_{u,i}(u_1, \cdots, u_d) \in \widehat{\mathfrak{M}_A}^{n+1}.$$

Si l'on pose $P := \sum_{i \geqslant 0} P_{u,i}$, alors $P \in k[[x_1, \cdots, x_d]]$ car tous les polynômes $P_{u,i}$ sont homogènes de degré i. Par ailleurs $u - P(u_1, \cdots, u_d) \in \cap_{N \in \mathbf{N}} \widehat{\mathfrak{M}_A}^N$, et l'intersection $\cap_{N \in \mathbf{N}} \widehat{\mathfrak{M}_A}^N$ est nulle car $\cap_{N \in \mathbf{N}} \widehat{\mathfrak{M}_A}^N \subset \cap_{N \in \mathbf{N}} \widehat{\mathfrak{M}_A^N} = \{0\}$.

Finalement cela montre qu'il existe une surjection de $k[[x_1, \cdots, x_d]] \to \widehat{A}$, définie par $x_i \mapsto u_i$. □

CHAPITRE 13

UNE PROPRIÉTÉ DE NOETHERIANITÉ DES VOISINAGES FORMELS DU SCHÉMA DES ARCS DIFFÉRENTIELS

Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme non constant. Soient $f^\partial = f(y, y', \dots, y^{(n)}) \in k\{y\}$ et $X^\partial = \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$ le ∂-schéma associé. L'objectif principal de ce chapitre est de prouver le résultat suivant :

Théorème 13.0.1. *Soit k un corps de caractéristique 0. Soit $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme non constant. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution de l'EDO $f^\partial = 0$ qui n'annule pas le séparant S_f. Alors le voisinage formel $\widehat{\mathscr{L}_\infty(X^\partial)}_\gamma$ est noethérien, de dimension de plongement majorée par n.*

Remarque 13.0.2. Si γ est une solution de $f^\partial = 0$. La condition « n'annule pas le séparant » peut être facilement remplacée par « il existe $i \in [0, n]$, tel que $\partial_{y_i} f^\partial(\gamma) \neq 0$ ».

Si pour tout entier $i \in [0, n]$, on a $\partial_{y_i} f(f^\partial) = 0$, alors la dimension de plongement est infinie puisque la linéarisée (voir définition 13.2.1) est nulle .

La preuve suivra la stratégie générale de celle du chapitre 9, en s'appuyant sur l'utilisation du foncteur des points de tels objets. (Voir théorème 9.0.1.) C'est à cette fin que nous introduisons un foncteur de déformations adapté à la situation. Notre problème différentiel présente la particularité de se « linéariser » (cf. section 13.2), ce qui va ramener le problème de noethérianité à un problème de calcul de dimension.

Il est important de souligner que cette propriété de noethérianité que nous obtenons est une différence substancielle avec le cadre algébrique usuel et le théorème 9.0.1. Dans l'étude des voisinages formels des schémas des arcs de variétés algébriques cet énoncé se rapprochent plus des résultats de structure du type de ceux obtenus dans [Reg09 ; FD17].

13.1 Foncteur des déformations

Dans la section 9.1 nous avons développé la notion de déformation dans le cadre algébrique. Dans cette section, nous allons introduire le foncteur des déformations différentielles sur le modèle de la construction de la section 9.1. Nous établirons également des propriétés élémentaires analogues. Nous conservons les notations du chapitre 11.

Soit k un corps de caractéristique nulle. Rappelons qu'une k-algèbre locale $(A, \mathfrak{M}_A)$ est dite *quasi-artinienne* si son corps résiduel est k-isomorphe à k et si son idéal maximal est nilpotent. Soit $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$. Nous notons $X = \mathrm{Spec}(k[X_0, \ldots, X_n]/(f))$ et $\mathscr{L}_\infty(X^\partial) = \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$. Soit $\gamma(T) \in \mathscr{L}_\infty(X^\partial)(k)$.

Définition 13.1.1. Le *foncteur des déformations différentielles* de X en γ est le foncteur induit par la donnée

$$A \mapsto \mathrm{Def}_\gamma(X, A) := \left\{\gamma_A \in \mathscr{L}_\infty(X^\partial)(A) \mid \gamma_A - \gamma \in \mathfrak{M}_A[[t]]\right\}$$

pour toute k-algèbre quasi-artienne A. Tout élément $\gamma_A(T) \in \mathrm{Def}_\gamma(X, A)$ est appelé *déformation différentielle de* γ.

Notation. Dans un souci de simplicité, avec $X = \mathrm{Spec}(k[X_1, \cdots, X_n]/(f))$, nous noterons parfois $\mathrm{Def}_\gamma(X, A) = \mathrm{Def}_\gamma([f], A)$. Et pour étudier les déformations de $\mathscr{L}_\infty(X^\partial)_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(k\{y\}/\{f^\partial\})$, on notera

$$\mathrm{Def}_\gamma(\{f^\partial\}, A) := \left\{\gamma_A \in \mathscr{L}_\infty(X^\partial)_{\mathrm{red}}(A) \mid \gamma_A - \gamma \in \mathfrak{M}_A[[t]]\right\}.$$

Comme dans le cadre algébrique, nous avons le résultat suivant :

Proposition 13.1.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ un polynôme non nul et $\gamma(T) \in \mathscr{L}_\infty(X^\partial)(k)$ une solution de l'EDO associée. Pour toute k-algèbre quasi-artinienne A on a une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}, A) \cong \mathrm{Def}_\gamma(X, A).$$

Autrement dit, le complété formel de l'anneau local de $\mathscr{L}_\infty(X^\partial)$ en γ "représente" le foncteur des déformations différentielles de γ.

Remarque 13.1.3. En combinant cette proposition avec la proposition 12.1.4 et la remarque 9.1.8, on remarque que l'étude des déformations pour $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ équivaut à l'étude de l'espace tangent de X.

Démonstration. Cette proposition découle de la proposition 9.1.12 (ou voir plus précisément l'exemple 9.1.14).

□

Exemple 13.1.4. Soit $X = \mathrm{Spec}(k[X_0, X_1])/(X_1 - X_0)$, alors

$$\mathscr{L}_\infty(X^\partial) = \mathrm{Spec}(k\{y\}/[y_1 - y_0]).$$

Autrement dit $\mathscr{L}_\infty(X^\partial)$ est défini par l'équation différentielle $y' = y$. Une solution de cette équation est de la forme $\gamma(T) = Ce^T$ avec $C \in k$. Une telle solution correspond à un k-point de $\mathscr{L}_\infty(X^\partial)$. Fixons $C \in k$ et $\gamma(T) = Ce^T$ une solution. Calculons $\mathrm{Def}_\gamma([y_1 - y_0], A)$

$$\mathrm{Def}_\gamma([y_1 - y_0], A) := \left\{\gamma_A \in \mathscr{L}_\infty(X^\partial)(A) \mid \gamma_A - \gamma \in \mathfrak{M}_A[[t]]\right\}.$$

On note $\gamma_A = \gamma + \sum_{i \geqslant 0} a_i T^i$. Par définition, γ_A doit vérifier l'équation $\gamma_A(T)' - \gamma_A(T) = 0$. On en déduit que

$$\forall i \geqslant 0, \quad (i+1)a_{i+1} - a_i = 0.$$

En particulier, la donnée de $a_0 \in \mathfrak{M}_A$ fixe tout les a_i. On en déduit que $\mathrm{Def}_\gamma([y_1 - y_0], A)$ est naturellement en bijection avec $\mathfrak{M}_A$, et donc que $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ est isomorphe à $k[[T]]$ dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$.

Exemple 13.1.5. Soit $f^\partial \in k\{y\}$ une EDO. Même si on la suppose irréductible, l'idéal différentiel parfait associé $\{f^\partial\}$ peut avoir plusieurs composantes irréductibles. C'est le phénomène des singularités essentielles. (Voir chapitre 2.6.) L'énoncé précédent peut se comprendre ici de manière *ad hoc*. Soit $S := S_{f^\partial}$ le séparant de f. Soit $\gamma(T) \in \mathscr{L}_\infty(X^\partial)(k)$ une solution de $f^\partial = 0$ qui n'annule pas son séparant. Alors c'est une solution générale de $f^\partial = 0$, et donc une solution de l'idéal différentiel parfait $J := ([f^\partial]\} : S^\infty)$. On peut montrer que toute déformation différentielle γ_A de γ est encore solution de J. Soit P un polynôme différentiel appartenant à J. Alors il existe un entier N tel que $S^N P \in [f]$. Comme $S(\gamma) \neq 0$, on déduit du théorème de Weierstrass que $P(\gamma_A(T)) = 0$, ce qui achève la preuve.

Notons qu'en général, similairement au cadre algébrique, les déformations différentielles d'une EDO ne correspondent pas à celles de l'EDO réduite associée : les foncteurs $\mathrm{Def}_\gamma([f], A)$ et $\mathrm{Def}_\gamma(\{f\}, A)$ ne coïncident en général pas. Si l'on considère, en effet, $f = x_2^m$ et A une k-algèbre quasi-artinienne dont l'indice de nilpotence de son idéal maximal est m, alors pour tout a dans $\mathfrak{M}_A$, la déformation $\gamma_A = T + aT^2$

de T est dans $\mathrm{Def}_T([x_2^m], A)$ mais pas dans $\mathrm{Def}_T(\{x_2^m\}, A)$ puisqu'elle n'annule pas x_2.

Remarque 13.1.6. Les déformations les plus intéressantes à considérer sont celles qui ne rendent pas le séparant inversible. En effet, au voisinage d'une solution qui rend le séparant inversible, l'espace de déformation se décrit comme un disque formel. Ce fait découle de la proposition 11.3.4, qui prouve plus généralement qu'au voisinage d'un arc rendant le séparant inversible, le schéma des arcs différentiels a une structure de variété lisse.

13.2 L'équation différentielle linéarisée

Soit $f \in k\{y\}$ un polynôme différentiel d'ordre $n \geqslant 1$, $\gamma(T) \in k[[T]]$ une solution de f et $X^\partial = \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f])$. (Voir section 2.3 pour une définition.) Soit $k[e] = k[X]/(X^2)$, le symbole e désignant la classe de l'élément X dans ce quotient. Remarquons qu'il existe un isomorphisme de k-algèbres évident $k[e][[T]] \cong k[[T]][e]$. De ce fait, toute déformation de γ dans $k[e]$, c'est-à-dire toute solution $\gamma + \gamma_e \in k[e][[T]]$ de f, peut se réécrire de manière unique comme un élément de $k[[T]][e]$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \mathrm{Def}_\gamma(X^\partial, k[e])) &:= \{\gamma_e(T) \in (e)[[T]] \mid f(\gamma + \gamma_e) = 0\} \\ &= \{\eta(T) \in k[[T]] \mid f(\gamma + e\eta) = 0\} \end{aligned}$$

Soit $\gamma(T) + e\eta(T) \in \mathrm{Def}_\gamma(X, k[e]))$. Par la formule de Taylor et la propriété $e^2 = 0$ dans l'anneau $k[e]$, on déduit

$$\begin{aligned} f(\gamma(T) + e\eta(T)) &= f(\gamma(T)) + e\left(\textstyle\sum_{i=0}^n \eta^{(i)}(T)(\partial_{y_i} f)(\gamma(T))\right) \\ &= e\left(\textstyle\sum_{i=0}^n \eta^{(i)}(T)(\partial_{y_i} f)(\gamma(T))\right). \end{aligned} \tag{13.2.1}$$

Grâce à la formule (13.2.1), nous déduisons que $f(\gamma(T) + e\eta(T)) = 0$ est équivalent à la condition

$$\sum_{i=0}^n \eta^{(i)}(T)(\partial_{y_i} f)(\gamma(T)) = 0. \tag{13.2.2}$$

Définition 13.2.1. Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k\{y\}$ un polynôme différentiel d'ordre $n \geqslant 1$, $\gamma(T) \in k[[T]]$ une solution de f. On appelle *équation différentielle linéarisée* de f en γ l'EDO linéaire (13.2.2). Nous la noterons $\mathcal{L}(f, \gamma)$.

Il est important de noter que l'équation différentielle linéarisée ne sera pas à coefficients constants en général.

Proposition 13.2.2. *La dimension de plongement du complété de l'anneau local de $\mathscr{L}_\infty(X^\partial)$ en γ coïncide avec la dimension du k-espace vectoriel*

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{L}(f,\gamma))(k[[T]]).$$

Démonstration. En vertu des considérations ci-dessus, cette proposition est une conséquence de la proposition 12.1.5 appliquée à $A = \widehat{k\{y\}/[f]}_\gamma$. □

13.3 Preuve du théorème 13.0.1

L'argument clé de la preuve du théorème 13.0.1 réside dans le calcul de cette dimension de plongement. En s'aidant de la remarque ci-dessus et du lemme suivant dû à RITT, nous pourrons fournir une majoration de cette dimension, ce qui suffira pour notre propos.

Définition 13.3.1. Un ensemble d'éléments $\eta_1, \cdots, \eta_s \in k[[T]]$ est dit *linéairement dépendant* s'il existe des éléments $c_1, \cdots, c_s \in k$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{s} c_i \eta_i = 0.$$

Lemme 13.3.2. *Un ensemble d'éléments $\eta_1, \cdots, \eta_s \in k[[T]]$ est linéairement dépendant si et seulement si le déterminant Wronskien*

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_s \\ \eta_1' & \cdots & \eta_s' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1^{(s-1)} & \cdots & \eta_s^{(s-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration. Voir [Rit50, p34, 35]. □

Corollaire 13.3.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k\{y\}$ un polynôme différentiel d'ordre $n \geqslant 1$, $\gamma(T) \in k[[T]]$ une solution de f, qui n'annule pas le séparant de f, et $X^\partial = \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f])$. Alors, nous avons*

$$\mathrm{emb.dim}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}) \leqslant n.$$

Pour la définition de la dimension de plongement et ses propriétés voir chapitre 12.

Démonstration. Notons plus simplement $(\partial_{y_i} f)(\gamma(T)) = a_i(T)$ et

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(T) y_i = 0 \tag{13.3.1}$$

l'équation linéarisée de $\mathcal{L}(f, \gamma)$. Soit $\eta_1(T), \cdots, \eta_s(T)$ une famille libre de solutions dans $\mathrm{Def}_\gamma(X^\partial, k[\epsilon]/(\epsilon^2))$, c'est-à-dire une famille libre de solutions dans $k[[T]]$ de l'EDO (13.3.1). Ceci signifie que les $\eta_i(T)$ sont linéairement indépendants. D'après le lemme 13.3.2, on en déduit que le Wronskien

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_s \\ \eta_1' & \cdots & \eta_s' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1^{(s-1)} & \cdots & \eta_s^{(s-1)} \end{vmatrix}$$

doit être non nul. Supposons, par l'absurde, que $s > n$, alors la n-ième ligne du Wronskien vaut $(\eta_1^{(n)} \ \cdots \ \eta_s^{(n)})$. On peut multiplier le Wronskien par $a_n(T)$ qui est non nul (puisque c'est le séparant de f évalué en γ), et ainsi la ligne $a_n(T)y_1^{(n)} \ \cdots \ a_n(T)y_s^{(n)}$ est combinaison linéaire des précédentes. Ainsi le Wronskien est nul, ce qui est la contradiction recherchée. Ainsi $s \leqslant n$. □

L'énoncé du théorème 13.0.1 découle alors directement du corollaire 13.3.3 et du lemme 12.2.5.

CHAPITRE 14

SCHÉMA DES ARCS DIFFÉRENTIELS DONT LA DIMENSION DE PLONGEMENT EST MAJORÉE PAR 1

Soit k un corps de caractéristique nulle. Dans ce paragraphe nous explicitons le théorème 13.0.1 dans le cas particulier d'une EDO dont la dimension de plongement est majorée par 1. En particulier, cela recouvre le cas des équations d'ordre 1, c'est-à dire dans le cas où le schéma des arcs différentiels est associé à un polynôme irréductible $f \in k[X_1, X_2]$.

Dans ce cas particulier, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 14.0.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme irréductible, $f^\partial := f(y, \cdots, y^{(n)}) \in k\{y\}$ et $X^\delta := \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$ le ∂-schéma associé. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution non constante de l'équation $f^\partial = 0$. On suppose que la dimension de plongement de X^δ en γ est majorée par 1. Alors le voisinage formel $\widehat{\mathscr{L}_\infty(X^\partial)}_\gamma$ est isomorphe, en tant que k-schéma formel, à un disque formel $\mathbb{D} = \mathrm{Spf}(k[[T]])$ de dimension 1.*

D'après le théorème 13.0.1, si f^∂ est une équation différentielle d'ordre 1 et γ une solution non constante de $f^\partial = 0$, alors la dimension de plongement de X^δ en γ vaut exactement 1. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 14.0.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_1, X_2]$ un polynôme irréductible, $f^\partial := f(y, y') \in k\{y\}$ et $X^\delta := \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$ le ∂-schéma associé. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution non constante de l'équation $f^\partial = 0$. Alors le voisinage formel $\widehat{\mathscr{L}_\infty(X^\partial)}_\gamma$ est isomorphe, en tant que k-schéma formel, à un disque formel $\mathbb{D} = \mathrm{Spf}(k[[T]])$ de dimension 1.*

Remarque 14.0.3. Le corollaire permet de retrouver un résultat de BOURQUI & SEBAG de [BS16, Theorem 1.2].

14.1 Propositions préliminaires

Proposition 14.1.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme irréductible, $f^\partial := f(y, \cdots, y^{(n)}) \in k\{y\}$ et $X^\delta := \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$ le ∂-schéma associé. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution non constante de l'équation $f^\partial = 0$. Soit A un objet de la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$ des k-algèbres locales qui sont des complétion de k-algèbres locales. Alors il existe une application*

$$\iota_A \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(k[[T]], A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}, A)$$

injective et fonctorielle en A.

Démonstration. On sait d'après la section 9 que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}, A) = \{\gamma_A \in \mathfrak{M}_A[[T] \mid f^\partial(\gamma + \gamma_A) = 0\}.$$

Or pour tout $a \in \mathfrak{M}_A$, on a que $\gamma(T + a)$ est solution de f^∂. En particulier, si γ n'est pas constant, on obtient une application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_A & \to & \{\gamma_A \in \mathfrak{M}_A[[T] \mid f^\partial(\gamma + \gamma_A) = 0\} \\ a & \mapsto & \gamma(T + a) - \gamma(T) \end{array}$$

surjective et fonctorielle en A. Or on a une bijection fonctorielle en A entre $\mathfrak{M}_A$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(k[[T]], A)$. Ce qui donne le résultat voulu. □

Remarque 14.1.2. En particulier, l'énoncé montre également que la dimension de plongement de X^δ en un γ non constant ne peut jamais valoir 0 (en considérant $A = k[\epsilon]/(\epsilon)^2$).

Lemme 14.1.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et B et C des objets de cette catégorie. On suppose que pour tout objet A de la catégorie $\mathcal{C}$, on dispose d'une application*

$$\iota_A \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$$

injective et fonctorielle en A. Alors il existe un épimorphisme $\varphi \colon C \to B$.

Démonstration. Pour $A = B$, on note $\varphi = \iota_B(\mathrm{id})$. Il reste à vérifier que $\varphi \colon C \to B$ est un épimorphisme.

Soit D un objet de la catégorie $\mathcal{C}$ et $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$ tels que $g_1 \circ \varphi = g_2 \circ \varphi$. La fonctorialité de l'inclusion en A nous donne le diagramme commutatif

suivant (pour g_1) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,B) & \xrightarrow{\iota_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B) \\ {\scriptstyle g_1\circ -}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1\circ -} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,D) & \xrightarrow{\iota_D} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) \end{array}$$

En regardant le devenir de l'image de $id \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,B)$, on en déduit que $g_1 \circ \iota_B(\mathrm{id}) = \iota_D(g_1)$, soit encore $g_1 \circ \varphi = \iota_D(g_1)$. Or $g_1 \circ \varphi = g_2 \circ \varphi$, donc $\iota_D(g_1) = \iota_D(g_2)$. Comme i_D est injective, on en déduit que $g_1 = g_2$, donc φ est un épimorphisme. □

Proposition 14.1.4. *Soit A un objet de la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$ des k-algèbres locales qui sont des complétion de k-algèbres locales. Soit d un entier non nul. On suppose qu'il existe un épimorphisme φ de la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$ de A vers $k[[T_1, \cdots, T_d]]$ (c'est-à-dire que φ est un morphisme de k-algèbres locales continu). Alors φ est surjectif.*

Démonstration. Supposons que le morphisme $\varphi\colon A \to k[[T_1, \cdots, T_d]]$ ne soit pas surjectif. Alors il existe un entier $i_0 \in \{1, \cdots, d\}$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $\varphi(a) \neq T_{i_0}$. On note I l'idéal engendré par $\varphi(\mathfrak{M}_A)$ dans $k[[T_1, \cdots, T_d]]$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $k[[T_1, \cdots, T_d]]$. Alors $I \subsetneq \mathfrak{m}$ car $T_{i_0} \notin I$ et $I \subset \mathfrak{m}$.

On considère la k-algèbre $B = k[[T_1, \cdots, T_d]]/I$. C'est une k-algèbre locale qui est complète (en particulier B est la complétion de B pour la topologie préadique définie par son idéal maximal). On considère $\pi\colon k[[T_1, \cdots, T_d]] \to k[[T_1, \cdots, T_d]]/I$ le morphisme quotient. Ce morphisme est local et continu. On considère également

$$\mathrm{ev}_{T=0}\colon k[[T_1, \cdots, T_d]] \to k[[T_1, \cdots, T_d]]/I$$

où $\mathrm{ev}_{T=0}$ est le morphisme de k-algèbre qui envoie T_i sur 0 pour tout entier $i \in \{1, \cdots, d\}$. C'est également un morphisme de k-algèbre local et continu.

Soit $a \in A$, alors $\varphi(a) = P(T_1, \cdots, T_d)$ pour un certain polynôme P. On note $a_0 = P(0, \cdots, 0) \in k$. Alors $\varphi(a - a_0) = P(T_1, \cdots, T_d) - P(0, \cdots, 0) \in \mathfrak{m}$. Comme φ est un morphisme local, cela implique que $a - a_0 \in \mathfrak{M}_A$ et donc que $\varphi(a - a_0) \in I$. Ainsi $\pi \circ \varphi(a - a_0) = 0$ et $\mathrm{ev}_{T=0} \circ \varphi(a - a_0) = 0$. On constate alors que $\pi \circ \varphi = \mathrm{ev}_{T_i=0} \circ \varphi$.

Puisque φ est un épimorphisme, on devrait avoir $\pi = \mathrm{ev}_{T=0}$, ce qui n'est pas le cas car $I \subsetneq \mathfrak{m}$. Donc φ est surjectif. □

La proposition suivante est une conséquence immédiate des propositions et lemmes 14.1.1, 14.1.3 et 14.1.4.

Proposition 14.1.5. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme irréductible, $f^\partial := f(y, \cdots, y^{(n)}) \in k\{y\}$ et $X^\delta := \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$ le ∂-schéma associé. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution non constante de l'équation $f^\partial = 0$. Alors il existe un morphisme de k-algèbres $\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma} \to k[[T]]$ surjectif. Autrement dit il existe une immersion fermée $\mathbb{D}_k \to \mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{X,\gamma}})$.*

Lemme 14.1.6. *Soit d un entier strictement positif. On suppose qu'il existe un morphisme de k-algèbres locales surjectif $\phi\colon k[[T_1, \cdots, T_d]] \to k[[T_1, \cdots, T_d]]$. Alors ϕ est bijectif.*

Démonstration. Comme ϕ est surjectif, pour tout entier $i \in \{1, \cdots, d\}$, il existe $P_i \in k[u_1, \cdots, u_d]$ tel que $\phi(P_i(T_1, \cdots, T_d)) = T_i$. On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $k[[T_1, \cdots, T_d]]$ Comme ϕ est un morphisme local, alors $\phi(\mathfrak{m}^2) \subset \mathfrak{m}^2$. Ainsi $P_i(T_1, \cdots, T_d) \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$. En particulier, il existe une matrice $M \in \mathrm{M}_d(k)$ telle que

$$\begin{cases} P_1(T_1, \cdots, T_d) \\ \vdots \\ P_d(T_1, \cdots, T_d) \end{cases} = M \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_d \end{pmatrix}$$

La matrice M est inversible car si une combinaison k-linéaire des P_i était nulle, alors en composant par ϕ on aurait une combinaison k-linéaire des T_i qui serait nulle, ce qui n'est possible que si tous les coefficients sont nuls. Ainsi, quitte à composer par l'inverse de M qui est un automorphisme de $k[[T_1, \cdots, T_d]]$, on en déduit que $\phi = \mathrm{id}$. □

14.2 Preuve du théorème 14.0.1

Nous avons désormais les ingrédients pour prouver le théorème 14.0.1. Pour le montrer nous allons utiliser le résultat suivant :

Théorème 14.2.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme irréductible, $f^\partial := f(y, \cdots, y^{(n)}) \in k\{y\}$ et $X^\delta := \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$ le ∂-schéma associé. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution non constante de l'équation $f^\partial = 0$. Soit A un objet de la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$. On suppose que la dimension de plongement de X^δ en γ est majorée par d et qu'il existe une application*

$$\iota_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(k[[T_1, \cdots, T_d]], A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}, A)$$

injective et fonctorielle en A.

Alors le voisinage formel $\widehat{\mathscr{L}_\infty(X^\partial)}_\gamma$ est isomorphe, en tant que k-schéma formel, à un disque formel $\mathbb{D} = \mathrm{Spf}(k[[T_1, \cdots, T_d]])$ de dimension d.

Démonstration. De l'existence de ι_A, on déduit des propositions et lemmes 14.1.3 et 14.1.4 qu'il existe un morphisme surjectif de k-alèbres locales $\varphi\colon \widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}} \to k[[T_1,\cdots,T_d]]$. Par ailleurs, comme la dimension de plongement est majorée par d, il existe un morphisme surjectif $\pi\colon k[[T_1,\cdots,T_d]] \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ (d'après la proposition 12.2.9). En particulier, grâce au lemme 14.1.6, on en déduit que quitte à composer φ par un automorphisme de $k[[T_1,\cdots,T_d]]$, on a $\varphi\circ\pi = \mathrm{id}_{k[[T_1,\cdots,T_d]]}$. On en déduit que π et φ sont bijectifs, et ainsi le voisinage formel $\widehat{\mathscr{L}_\infty(X^\partial)}_\gamma$ est isomorphe, en tant que k-schéma formel, à un disque formel $\mathbb{D} = \mathrm{Spf}(k[[T_1,\cdots,T_d]])$ de dimension 1. □

Grâce au théorème 14.2.1 on déduit le théorème 14.0.1, en utilisant la proposition 14.1.1.

14.3 Remarques et exemples

Soit $f \in k[X_0,X_1,X_2]$. Supposons que f ne fasse intervenir aucun terme en X_0, mais fasse effectivement apparaître un terme en X_2. Alors $f^\partial \in k\{y\}$ est un polynôme différentiel d'ordre 2 mais sans terme en y_0. Si l'on note $f^\partial := f^\partial(y_0,y_1,y_2)$ alors on définit $g^\partial := f^\partial(0,y_0,y_1)$. Soit γ une solution de f^∂ qui n'annule pas le séparant de f^∂, alors γ' est une solution de g^∂ qui n'annule pas le séparant de g^∂. Soit A un objet de $\mathbf{AlgLC}_k$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}([f^\partial],A) &= \{\gamma_A \in \mathfrak{M}_A[[t]] \mid f^\partial(\gamma+\gamma_A)=0\}\\ &= \{\gamma_A \in \mathfrak{M}_A[[t]] \mid g^\partial(\gamma'+\gamma'_A)=0\}\\ &= \mathfrak{M}_A \times \{\gamma_A \in \mathfrak{M}_A[[t]] \mid g^\partial(\gamma'+\gamma_A)=0\}.\end{aligned}$$

Comme g^∂ est d'ordre 1, on a vu dans le théorème 14.0.1 que l'anneau $(k\{y\}/[g^\partial])_{\gamma'}$ est isomorphe à $k[[T]]$ dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$. Ainsi $\{\gamma_A \in \mathfrak{M}_A[[t]] \mid g^\partial(\gamma'+\gamma_A)=0\}$ est naturellement en bijection avec $\mathfrak{M}_A$, et ainsi l'anneau $(k\{y\}/[f^\partial])_\gamma$ est isomorphe à $k[[T1,T_2]]$ dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$.

On peut généraliser les calculs précédents et formuler la remarque suivante :

Remarque 14.3.1. Soit $f \in k[X_0,\cdots,X_n]$ un polynôme ne faisant apparaître effectivement dans son écriture que X_{n-1} et X_n. Soit γ une solution de f^∂ qui n'annule pas le séparant. Alors l'anneau $(k\{y\}/[f^\partial])_\gamma$ est isomorphe à $k[[T_1,T_2]]$ dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$.

CHAPITRE 15

SCHÉMAS DES ARCS DIFFÉRENTIELS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 2

Dans ce chapitre, nous allons connecter le théorème 13.0.1 et la notion de singulière essentielle introduite dans la section 2.6 pour les EDO d'ordre 2.

Définition 15.0.1. Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On dit que $f = 0$ est une *équation bimonomiale* s'il existe deux monômes $M, N \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $f = M - N$.

Plus précisément, dans le cas des EDO d'ordre 2 *bimonomiales*, nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 15.0.2. *Soit k un corps de caractéristique 0. Soit $f \in k[X_1, X_2, X_3]$ un polynôme irréductible. Nous supposons que l'EDO $f^\partial = f(y, y', y'') = 0$ est une équation* bimonomiale *d'ordre 2 à coefficients constants. Soient $d \geqslant 2$ un entier tel que $\gamma(T) = T^d$ soit une solution de l'EDO f^∂ et $X^\partial = \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$. Si l'idéal différentiel parfait $\{f\}$ possède une composante singulière essentielle, alors* $\mathrm{emb.dim}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}) = 1$.

15.1 Solutions singulières des équations différentielles ordinaires bimonomiales d'ordre 2 et espace tangent

Nous allons nous intéresser à des équations bimonomiales f d'ordre 2, c'est-à-dire que l'entier n vaut 3. Par ailleurs, nous supposerons que le polynôme f est irréductible, de sorte que de telles équations bimonomiales soient des trois types suivants :

$$X_1^a - \alpha X_2^b X_3^c$$
$$X_2^b - \alpha X_1^a X_3^c$$
$$X_3^c - \alpha X_1^a X_3^b$$

avec $a, b, c \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in k$. Notons en particulier que $\gamma(T) = T^d$ n'est pas une solution singulière de l'EDO $f^\partial = 0$, et que le fait que $\gamma(T) = T^d$ soit une solution de l'EDO $f^\partial = 0$ impose que le coefficient α appartient ici à $\mathbf{Q}_+$.

Nous allons désormais prouver le théorème 15.0.2. On suppose qu'il existe $\gamma(T) = T^d$ solution de l'équation différentielle $f^\partial(y, y', y'') = 0$. L'idée générale est de montrer que, dans ce cas particulier, on peut calculer indépendamment, puis relier, la condition pour l'idéal différentiel parfait $\{f^\partial\}$ d'avoir une solution singulière essentielle et la dimension de plongement du complété de l'anneau local du schéma des arcs différentiels associé en γ.

En suivant la stratégie générale du chapitre 13, nous considérons l'équation linéaire associée à f^∂ donnée dans $k\{y\}$ par :

$$\sum_{j=0}^{2} \partial_{y_j}(f)(\gamma(T))y_j = 0. \tag{15.1.1}$$

La proposition 13.2.2 nous permet, en effet, de conclure que la dimension de plongement de f^∂ en γ est donnée par la dimension de l'espace des solutions de la linéarisée.

La relation $\partial_T(f(\gamma(T), \gamma'(T), \gamma''(T)) = 0$ permet de conclure que $\gamma'(T)/(d-1) = T^{d-1}$ est une solution de cette EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants. Une deuxième solution existe donc dans une $(k[[T]], \partial_T)$-algèbre différentielle. La question de discriminer le cas où la dimension de plongement vaut 1 de celui où la dimension vaut 2 équivaut à comprendre sous quelles hypothèses cette seconde solution appartient à $k[[T]]$.

Formulons quelques observations préalables. Pour tout $j \in \{0, 1, 2\}$, il existe $m_j \in \mathbf{N}$ et $\beta_j \in k$ tel que $\partial_{y_j}(f)(\gamma(T)) = \beta_j T^{m_j}$. Ainsi on sait que

$$\beta_0 T^{m_0} T^d + \beta_1 T^{m_1} T^{d-1} + \beta_2 T^{m_2} T^{d-2} = 0. \tag{15.1.2}$$

Pour que l'égalité (15.1.2) soit vraie, il faut que

$$m_0 + d = m_1 + d - 1 = m_2 + d - 2,$$

ce qui équivaut à dire que $m_0 + 2 = m_1 + 1 = m_2$. Ainsi, si $f = 0$ est monomiale, calculer la dimension de l'espace des solutions dans $k[[T]]$ de l'équation (15.1.1)

revient à calculer la la dimension de l'espace des solutions dans $k[[T]]$ de l'équation

$$a_2T^2u_2 + a_1Tu_1 + a_0u_0 = 0 \tag{15.1.3}$$

(avec $a_i \in k$ et $a_2 \neq 0$). Nous reconnaissons ici une *équation d'Euler* (ou de Cauchy-Euler), dont la résolution est bien connue. Les solutions sont paramétrées par l'*équation caractéristique* associée, qui vaut ici :

$$a_2x(x-1) + a_1x + a_0 = a_2(x^2 + (\frac{a_1}{a_2} - 1)x + \frac{a_0}{a_2}) = 0 \tag{15.1.4}$$

Comme $\gamma(T) = T^d$ est solution de l'EDO (15.1.1), nous savons que $d-1$ soit solution de l'équation 15.1.4 et on cherche à déterminer la seconde solution que nous notons s et qui *a priori* peut appartenir à $\mathbf{C}$. Nous observons que

$$\begin{array}{rcl} 1 - \frac{a_1}{a_2} & = & d - 1 + s \\ \frac{a_0}{a_2} & = & (d-1)s \end{array} \tag{15.1.5}$$

La suite de la stratégie est d'étudier chacun des trois cas.

Le cas $y_2^c = \alpha y_1^b y_0^a$ Étant donné $a, b, c \in \mathbf{N}$ avec $c \geqslant 2$, on considère le polynôme différentiel $y_2^c - \alpha y_1^b y_0^a \in k\{y\}$, avec $\alpha \in \mathbf{Q}_+$. On suppose que ce polynôme différentiel admet $\gamma(T) = T^d$ comme solution. En particulier cela impose la relation

$$(d-2)c = b(d-1) + ad \tag{15.1.6}$$

Puisque T^d est solution de $y_2^c = \alpha y_1^b y_0^a$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \partial_{y_2}(f)(\gamma) & = & c(d(d-1))^{c-1}T^{(d-2)(c-1)} \\ \partial_{y_1}(f)(\gamma) & = & -\alpha bd^{b-1}T^{(d-1)(b-1)+da} \\ \partial_{y_0}(f)(\gamma) & = & -\alpha ad^bT^{(d-1)b+d(a-1)} \end{array}$$

Ainsi $a_2 = c(d(d-1))^{c-1}$, $a_1 = -\alpha bd^{b-1}$ et $a_0 = -\alpha ad^b$ donc , on sait que

$$\alpha = \frac{(d(d-1))^c}{d^b}$$

Donc $\alpha \geqslant 0$. Par ailleurs

$$(d-1)s = \frac{-\alpha ad^b}{c(d(d-1))^{c-1}}.$$

En particulier

$$s = -\frac{ad}{c}.$$

Si $a = 0$, l'équation devient $y_2^c = \alpha y_1^b$ et $s = 0$. Dans ce cas, on remarque par le théorème 2.7.3 que l'EDO a une solution singulière essentielle si et seulement $b \geqslant c$, mais la condition (15.1.6), ici $(d-2)c = b(d-1)$, est incompatible. Donc la dimension de plongement vaut 2 et il n'y a pas de solution singulière essentielle.

Si $a \neq 0$, nous déduisons que $s < 0$ et la dimension de plongement cherchée vaut 1. Dans ce cas, la seule composante singulière essentielle possible est $\{y_1\}$ et c'est une composante si et seulement si $b < c$. Or, si $b \geqslant c$, l'égalité $(d-2)c = b(d-1) + ad$ n'est pas possible, donc l'EDO a toujours une solution singulière et le théorème est vrai dans ce cas.

Le cas $y_0^a - \alpha y_1^b y_2^c$ Étant donné $a, b, c \in \mathbf{N}$ avec $c \geqslant 2$, on considère le polynôme différentiel $y_0^a - \alpha y_1^b y_2^c \in k\{y\}$, avec $\alpha \in \mathbf{Q}_+$. On suppose que ce polynôme admet $\gamma(T) = T^d$ comme solution. En particulier cela impose la relation

$$da = b(d-1) + c(d-2)$$

$$\begin{aligned}
\partial_{y_2}(f)(\gamma) &= -\alpha c(d(d-1))^{c-1} d^b T^{(d-2)(c-1)+(d-1)b} \\
\partial_{y_1}(f)(\gamma) &= -\alpha b d^{b-1} T^{(d-1)(b-1)+(d-2)c} \\
\partial_{y_0}(f)(\gamma) &= aT^{d(a-1)}
\end{aligned}$$

Ainsi $a_2 = -\alpha c(d(d-1))^{c-1} d^b$, $a_1 = -\alpha b d^{b-1}$ et $a_0 = a$. Puisque T^d est solution de $y_0^a = \alpha y_1^b y_2^c$, on sait que

$$\alpha = \frac{1}{d^b(d(d-1))^c}$$

Donc $\alpha \geqslant 0$. Par ailleurs

$$(d-1)s = \frac{a}{-\alpha c(d(d-1))^{c-1} d^b}$$

En particulier

$$s = -\frac{ad}{c}.$$

Si $a = 0$, l'équation devient $1 = \alpha y_1^b y_2^c$ et $s = 0$. Dans ce cas, on remarque que $\{f^\partial, S_{f^\partial}\} = k\{y\}$. Donc la dimension de plongement vaut 2 et il n'y a pas de solution singulière essentielle.

Si $a \neq 0$, nous avons $s < 0$ et la dimension de plongement de l'équation est 1. La seule composante possible pour les solutions singulières est $\{y_0\}$ si et seulement si

$a < b + c$. Si on suppose $a \geqslant b + c$, on déduit que $-b - 2c \geqslant 0$ ce qui est absurde. Donc $\{y_0\}$ est toujours composante irréductible.

Le cas $y_1^b - \alpha y_0^a y_2^c$ Ce cas est le plus riche. Étant donné $a, b, c \in \mathbf{N}$ avec $c \geqslant 2$, on considère le polynôme différentiel $y_1^b - \alpha y_0^a y_2^c \in k\{y\}$, avec $\alpha \in \mathbf{Q}_+$. On suppose que ce polynôme admet $\gamma(T) = T^d$ comme solution. En particulier cela impose la relation

$$(d-1)b = ad + (d-2)c$$

$$\begin{aligned}
\partial_{y_2}(f)(\gamma) &= -\alpha c(d(d-1))^{c-1} T^{(d-2)(c-1)+ad} \\
\partial_{y_1}(f)(\gamma) &= bd^{b-1} T^{(d-1)(b-1)} \\
\partial_{y_0}(f)(\gamma) &= -\alpha a(d(d-1))^{c} T^{(d-2)c+d(a-1)}
\end{aligned}$$

Ainsi $a_2 = -\alpha c(d(d-1))^{c-1}$, $a_1 = bd^{b-1}$ et $a_0 = -\alpha a(d(d-1))^c$. Puisque T^d est solution de $y_1^b = \alpha y_0^a y_2^c$, on sait que

$$\alpha = \frac{d^b}{(d(d-1))^c}$$

Donc $\alpha \geqslant 0$. Par ailleurs $(d-1)s \geqslant 0$ et

$$(d-1)s = \frac{\alpha a(d(d-1))^c}{\alpha c(d(d-1))^{c-1}} = \frac{ad(d-1)}{c}$$

Ainsi

$$s = \frac{ad}{c}$$

Montrons que le théorème 13.0.1 est encore valide dans ce cas.

Lemme 15.1.1. *Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{N}^2$ des entiers. On suppose que $d \geqslant 2$ et que $b < c$. On suppose, de plus, que l'égalité $(d-1)b = ad + (d-2)c$ est vérifiée. Alors ad/c n'est pas entier.*

Démonstration. Le nombre d vérifie l'égalité $(d-1)b = ad + (d-2)c$, ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$(d-1)(b-c) = ad - c$$

Si l'on suppose que $b < c$ alors $ad - c < 0$ car $d - 1 \geqslant 1$. Ainsi $ad/c < 1$, donc ad/c n'est pas un entier. □

Si l'idéal différentiel parfait $\{f^\partial\}$ a une solution singulière essentielle, alors $\{y_1\}$ est une composante singulière essentielle de $\{f\}$; ceci est réalisé si $b < c$ en vertu du

théorème 2.7.3.

Proposition 15.1.2. *Soit $f = y_1^b - \alpha y_0^a y_2^c$ et soit $d \geqslant 2$ vérifiant l'équation $(d-1)b = ad + (d-2)c$. Si $\{y_1\}$ est une composante de f alors la dimension de plongement du complété de l'anneau local du schéma des arcs différentiels associé à f^∂ en $\gamma(T) = T^d$ est 1.*

Démonstration. Si $\{y_1\}$ est une composante irréductible de $\{f^\partial\}$ alors d'après le théorème des petites puissances (voir 2.7.3), on a que $b < c$ et d'après le lemme 15.1.1 que ad/c n'est pas un entier. Donc la dimension de plongement cherchée vaut 1. □

Remarque 15.1.3. En général la réciproque du théorème 15.0.2 est fausse. Autrement dit, il existe des cas d'EDO bimonomiale dont la dimension de plongement au voisinage d'une solution est 1 et n'ayant pas de solution singulière essentielle. Les exemples suivants illustrent cette observation :

1. $f = y_1^5 - 3/16 y_0^2 y_2^4$ et $\gamma(T) = T^3$, alors $ad/c = 3/2$
2. $f = y_1^7 - 3^2/2^5 y_0^3 y_2^5$ et $\gamma(T) = T^3$ alors $ad/c = 9/5$
3. $f = y_1^8 - 2^5 y_0^4 y_2^3$ et $\gamma(T) = T^2$ alors $ad/c = 8/3$
4. $f = y_1^{10} - 2^6 y_0^5 y_2^4$ et $\gamma(T) = T^2$ alors $ad/c = 5/2$.

Remarque 15.1.4. Le code suivant permet de calculer des exemples d'équations pour lesquels la dimension de plongement est 1 mais telle que f n'a pas de composante singulière essentielle.

```
#Calcule la liste des [a,b,c,d,ad/c] et la renvoie si la dimension de
    plongement est 1 mais que f n'a pas de composantes
def Liste(n):
    L=[]
    for a in range (1,n):
        for b in range (1,n):
            for c in range (1,n):
                if a+c-b!=0:
                    d=(2*c-b)/(a+c-b)
                    if int(d)==d and d>1 and mod(a*d,c)!=0 and b>=c:
                        f=a*d/c
                        L=L+[[a,b,c,d,f]]
    return L
```

Remarque 15.1.5. Un sous-cas particulier intéressant du cas $y_1^b - \alpha y_0^a y_2^c$ est le cas où l'équation est homogène, à savoir si elle est de la forme $y_1^{2a} - \alpha y_0^a y_2^a$. Dans ce cas, on peut décrire entièrement les déformations.

Soit $d \geqslant 2$ un entier. Alors $\gamma(T) = T^d$ est solution de l'équation $f = y_1^{2a} - \frac{d}{(d(d-1))^a} y_0^a y_2^a$. Soit A un anneau de la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$. Soient $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{M}_A$. Alors

$\gamma_{\beta_1,\beta_2} = (1+\beta_1)(T+\beta_2)^d$ est une déformation de $\mathrm{Def}_\gamma([f],A)$. Ceci implique l'existence d'une application

$$\iota_A \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(k[[T_1,T_2]],A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{AlgLC}_k}(k\widehat{\{y\}/[f]}_\gamma,A)$$

injective et fonctorielle en A. Par ailleurs, en vertu du théorème 13.0.1, la dimension de plongement de l'anneau $k\widehat{\{y\}/[f]}_\gamma$ est majorée par n.

Donc d'après le théorème 14.2.1, on en déduit que l'anneau $k\widehat{\{y\}/[f]}_\gamma$ est isomorphe, dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$, à $k[[T_1,T_2]]$.

15.2 Exemples

Exemple 15.2.1. Exemples dans le cas $y_2^c = \alpha y_1^b y_0^a$.

1. Soit $f = y_2^3 - 6^3 y_0$. En vertu du low power theorem 2.7.3, cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_0\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^3$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.
2. Soit $f = 3y_2^5 - 6^5 y_0 y_1$. Cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_1\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^3$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.
3. Soit $f = 2^5 y_0^2 - y_1^4 y_2$. Cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_0\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^2$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.
4. Soit $f = 1600 y_0 y_1 - y_2^3$. Cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_1\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^5$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.
5. $f = 3^5 \times 2^6 y_0 y_1^2 - y_2^5$. Cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_1\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^4$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.

Exemple 15.2.2. Exemples dans le cas $y_0^a = \alpha y_1^b y_2^c$.

1. Soit $f = 18 y_0 - y_1 y_2$. En vertu du low power theorem 2.7.3, cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_0\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^3$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.
2. Soit $f = y_2 y_1^2 - 4^3 \times 3 y_0^2$. Cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_0\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^4$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.

3. Soit $f = 8y_0 - y_1^2 y_2$. Cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_0\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^2$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.

Exemple 15.2.3. Exemples dans le cas $y_1^b - \alpha y_0^a y_2^c$.

1. Soit $f = 2y_1^2 - 3y_0y_2$. En vertu du low power theorem 2.7.3, cette équation possède ne possède pas de composante singulière essentielle. Étudions les déformations de f au voisinage de $\gamma(T) = T^3$.

$$\begin{array}{rcccl} \partial_{y_0}(f) & = & -3y_2 & = & -18T \\ \partial_{y_1}(f) & = & 4y_1 & = & 12T^2 \\ \partial_{y_2}(f) & = & -3y_0 & = & -3T^3 \end{array}$$

   La linéarisée de f est donnée par

$$-3T^2y_2 + 12Ty_1 - 18y_0.$$

   L'équation caractéristique associée est

$$-3x^2 + 15x - 18 = 0$$

   Cette équation admet deux solutions qui sont 2 et 3. On constate, par ailleurs qu'étant donné un objet A de la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$, alors pour tout $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{M}_A$, la déformation $\gamma_{\beta_1,\beta_2} = (1+\beta_1)(T+\beta_2)^d$ est dans $\mathrm{Def}_\gamma([f], A)$. On en déduit en vertu des théorèmes 13.0.1 et 14.2.1 que $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ est isomorphe à $k[[T_1, T_2]]$ dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$.

2. Soit $f = y_1^4 - 2^3 y_0^2 y_2$. Cette équation possède ne possède pas de composante singulière essentielle. Étudions les déformations de f au voisinage de $\gamma(T) = T^2$.

$$\begin{array}{rcccl} \partial_{y_0}(f) & = & -2^4 y_0 y_2 & = & -2^5 T^2 \\ \partial_{y_1}(f) & = & 2^2 y_1^3 & = & 2^5 T^3 \\ \partial_{y_2}(f) & = & -2^3 y_0^2 & = & -2^3 T^4 \end{array}$$

   La linéarisée de f est donnée par

$$T^2y_2 - 4Ty_1 + 4y_0.$$

   L'équation caractéristique associée est

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Cette équation admet deux solutions qui sont 1 et 4. On en déduit que la dimension de plongement de l'anneau $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ vaut 2. De plus, l'anneau $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ est isomorphe à $k[[T_1,T_2]]/I$, pour un certain idéal I, dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$. Par ailleurs, un calcul informatique permet de montrer $I \neq 0$ puisque si l'on étudie les solutions de la linéarisée à valeurs dans $k[\epsilon](\epsilon^8)$, on peut montrer que $T_1^4T_2^3 +$ monômes de degré total strictement plus grand que $7 \in I$.

3. Soit $f = 2y_1^5 - 3^4y_0^3y_2$. Cette équation possède ne possède pas de composante singulière essentielle. Étudions les déformations de f au voisinage de $\gamma(T) = T^3$.

$$\begin{array}{rcccc} \partial_{y_0}(f) & = & -3^5y_0^2y_2 & = & -3^6 \times 2T^7 \\ \partial_{y_1}(f) & = & 2 \times 5y_1^4 & = & 2 \times 3^4 \times 5T^8 \\ \partial_{y_2}(f) & = & -3^4y_0^3 & = & -3^4T^9 \end{array}$$

La linéarisée de f est donnée par

$$T^2y_2 - 10Ty_1 + 18y_0.$$

L'équation caractéristique associée est

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

Cette équation admet deux solutions qui sont 2 et 9. On en déduit que la dimension de plongement de l'anneau $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ vaut 2. De plus, l'anneau $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ est isomorphe à $k[[T_1,T_2]]/I$, pour un certain idéal I, dans la catégorie $\mathbf{AlgLC}_k$. Par ailleurs, un calcul informatique permet de montrer $I \neq 0$ puisque si l'on étudie les solutions de la linéarisée à valeurs dans $k[\epsilon](\epsilon^9)$, on peut montrer que $T_1^6T_2^2$monômes de degré total strictement plus grand que $8 \in I$.

4. Soit $f = 2^{3a}y_1^{3a} - y_0^ay_2^{3a}$. cette équation possède composante singulière essentielle $\{y_1\}$. D'après le théorème 15.0.2, on en déduit qu'au voisinage de $\gamma(T) = T^3$, on a $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty^\delta(X),\gamma}} \simeq k[[T]]$.

CHAPITRE 16

EXEMPLES PLUS GÉNÉRAUX

16.1 Retour sur l'étude des équations d'ordre 2

Dans cette section on étudiera, de manière algorithmique, les déformations au voisinage d'une solution de $f^\partial \in k\{y\}$ où f est d'ordre 2, et plus particulièrement la dimension de plongement de f^∂ au voisinage d'une solution γ quelconque -qui ne rend pas le séparant inversible sinon voir proposition 11.3.4. Comme on l'a vu dans la proposition 13.2.2 la dimension de plongement de f^∂ en γ est donnée par la dimension de l'espace des solutions de la linéarisée.

Soit k un corps de caractéristique nulle et $f^\partial(y_2, y_1, y_0) \in k\{y\}$. On note $X = \mathrm{Spec}(k\{y\}/[f^\partial])$ et on se donne $\gamma \in X(k)$ un arc rationnel non constant qui n'annule pas le séparant de f (noté S_f). Pour $0 \leqslant i \leqslant 2$, on note

$$\partial_{x_i} f^\partial(\gamma''(T), \gamma'(T), \gamma(T)) = T^{m_i} v_i(T)$$

avec les conventions suivantes : soit $v_i(T) = 0$ et l'on pose $m_i = +\infty$ soit $v_i(T)$ est inversible.

On peut énoncer alors la proposition suivante, dont la première partie est un cas particulier du théorème 13.0.1.

Proposition 16.1.1. *Soit $f \in k[X_0, X_1, X_2]$ et $X = \mathrm{Spec}(k[X_0, X_1, X_2]/(f))$. Soit $\gamma \in k[[T]]$ une solution de $f^\partial \in k\{y\}$. Alors la dimension de plongement de $\mathscr{L}_\infty(X^\partial)$ en γ est majorée par 2.*

Si l'on suppose de plus que γ ne rend pas le séparant de f^∂ inversible, alors on a le résultat plus précis suivant :

1. *Si $2 + m_0 = 1 + m_1$ et $m_2 > 1 + m_1$, alors $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}} = k[[T]]$;*
2. *Si $2 + m_0 = m_2$ et $1 + m_1 > m_2$, alors $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}} = k[[T]]$.*

Dans les autres cas, on ne peut rien dire de plus.

Démonstration. On note $k[e] = k[x]/(x^2)$ et $\gamma_e(T) = \gamma(T) + eu(T)$, avec $u(T) = \sum_{i \geqslant 0} u_i T^i$ et $u_i \in k$. La formule de Taylor appliquée à $f^\partial(\gamma_e''(T), \gamma_e'(T), \gamma_e(T)) = 0$

dans $k[e]$ donne

$$\begin{aligned} 0 =& T^{m_0}v_0(T)u(T) + T^{m_1}v_1(T)u^{(1)}(T) + T^{m_2}v_2(T)u^{(2)}(T) \\ =& v_0(T)(\sum_{i\geqslant 0} u_i T^{i+m_0}) + v_1(T)(\sum_{i\geqslant 1} iu_i T^{i+m_1-1}) \\ &+ v_2(T)(\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)u_i T^{i+m_2-2}). \end{aligned} \tag{16.1.1}$$

On considère l'entier $0 \leqslant j \leqslant 2$ tel que, pour tout $0 \leqslant i \leqslant 2$, on ait $2 - j + m_j \leqslant 2 - i + m_i$. Pour l un entier, la plus petite puissance de T devant laquelle on voit apparaître u_{2+l} pour la première fois est $2 - j + m_j + l$. Ainsi le coefficient devant T^{2-j+m_j+l} fait intervenir u_{2+l} ainsi que des u_i pour $i \geqslant l + 2$. Nous allons étudier dans quels cas le coefficient devant T^{2-j+m_j+l} permet d'exprimer u_{2+l} en fonction des u_i pour $i \geqslant l + 2$ (qui auront alors été fixé par récurrence).

On voit désormais les u_i comme des variables et non plus comme des éléments de k. Dans la suite, pour l un entier, on notera $c_{u,2+l}$ le coefficient (dans k) devant $u_{2+l}T^d$, où d est la plus petite puissance de T devant laquelle on voit apparaître u_{2+l} pour la première fois. On va étudier les divers cas, selon les éléments $i_1, \cdots, i_m$ qui vérifient $2 - j + m_j + k = 2 - i_s + m_{i_s} + k$.

1. Si $2 + m_0 = 1 + m_1$ et $m_2 > 1 + m_1$, alors

   $$c_{u,2+l} = v_0(0) + (l + 2)v_1(0)$$

   Il existe au plus un entier l tel que $c_{u_A,2+l} = 0$. Par ailleurs, les coefficients devant T^{m_0} et T^{m_0+1} donnent les relations

   $$\begin{aligned} v_0(0)u_0 &= 0 \\ v_0(0)u_1 + v_1(0)u_1 + ?u_0 &= 0 \end{aligned}$$

   La première relation implique $u_0 = 0$, quant à la deuxième, le coefficient " ?" n'est pas important puisque $u_0 = 0$. Ainsi soit $v_0(0) = -v_1(0)$ et auquel cas $c_{u,2+l}$ n'est jamais nul pour $l \geqslant 0$, soit $v_0(0) \neq -v_1(0)$ auquel cas $u_1 = 0$.

   Dans tous les cas, la dimension de plongement est majorée par 1. Par la proposition 14.1.5, on en déduit que $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}} = k[[T]]$.

2. Si $2 + m_0 = m_2$ et $1 + m_1 > m_2$, alors

   $$c_{u,2+l} = v_0(0) + (l + 2)(l + 1)v_2(0)$$

   Il existe au plus un entier l tel que $c_{u,2+l} = 0$. En effet, si a et b sont deux entiers

vérifiant $v_0(0) + (a+2)(a+1)v_2(0) = v_0(0) + (b+2)(b+1)v_2(0) = 0$, alors $(a+2)(a+1) = (b+2)(b+1)$. Or une égalité du type $a(a+1) = b(b+1)$ avec a, b des entiers positifs n'est vérifiée que si $a = b$. Si l'on suppose par exemple $a > b$ alors $a(a+1) > b(b+1)$.

Par ailleurs, les coefficients devant T^{m_0} et T^{m_0+1} donnent les relations

$$v_0(0)u_0 = 0$$
$$v_0(0)u_1 + ?u_0 = 0$$

Ce qui prouve que $u_0 = u_1 = 0$, la dimension de plongement est au plus 1. De même que précédemment, on en déduit que $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}} = k[[T]]$.

Le reste des cas permet simplement de retrouver le théorème 13.0.1 dans le cas des polynômes différentiels d'ordre 2, à savoir que la dimension de plongement est majorée par deux.

3. Si $1 + m_1 = m_2$ et $2 + m_0 > m_2$ alors

$$c_{u,2+l} = (l+2)v_1(0) + (l+2)(l+1)v_2(0)$$

Il existe au plus un entier l tel que $c_{u,2+l} = 0$ puisqu'on peut simplifier l'équation par $l + 2$.

Par ailleurs $1 + m_0 > m_1$, ce qui donne lieu à deux cas.

   (a) Soit $m_0 > m_1$, auquel cas l'identification du coefficient devant T^{m_1} donne $u_1 = 0$.

   (b) Soit $m_0 = m_1$, auquel cas le coefficient devant T^{m_1} donne $v_0(0)u_0 + v_1(0)u_1 = 0$, ce qui permet d'exprimer u_0 en fonction de u_1 (ou l'inverse).

   On en déduit que dimension de plongement est au plus 2.

4. Si $1 + m_1 = m_2 = 2 + m_0$ alors

$$c_{u,2+l} = v_0(0) + (l+2)v_1(0) + (l+2)(l+1)v_2(0)$$

Posons $Y = l + 2$, alors $c_{u,2+l} = v_0(0) + (v_1(0) - v_2(0))Y + v_2(0)Y^2$ peut être vu comme un polynôme du second degré en Y. Il possède au plus deux valeurs d'annulations. Par ailleurs les relations données par l'identification des coefficients en T^{m_0} et en T^{m_0+1} donnent

$$v_0(0)u_0 = 0$$
$$v_0(0)u_1 + v_1(0)u1 + ?u_0 = 0$$

La première relation donne $u_0 = 0$, quant à la deuxième, il y a deux cas

(a) Soit $v_0(0) \neq -v_1(0)$ et donc $u_1 = 0$.

(b) Soit $v_0(0) = -v_1(0)$, auquel cas l'expression de $c_{u,2+l}$ devient

$$-v_1(0) + (v_1(0) - v_2(0))Y + v_2(0)Y^2 = v_2(0)(Y-1)(Y + \frac{v_1(0)}{v_2(0)})$$

or $Y = 1$ implique $l = -1$, ce qui est impossible puisque $l \geqslant 0$.

Dans tous les cas, la dimension de plongement est au plus deux.

5. Si $2 - j + m_j < 2 - i + m_i$ pour $i \neq j$, alors

$$c_{u,2+l} = v_j(0) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} (l + 2 - i)$$

donc tous les $u_{A,l+2}$, pour $l \geqslant 0$, sont entièrement déterminés par les u_i où $i < l + 2$. La dimension de plongement est donc au plus deux.

Étudier les cas selon si j vaut 0,1 ou 2 n'apporte pas plus d'informations. Ainsi la dimension de plongement est au plus 2.

□

Remarque 16.1.2. L'analyse calculatoire de la linéarisée peut-être menée à des ordres supérieurs. Elle permet de traiter des exemples comme nous le verrons dans le verrons dans quelques exemples ci-dessous, ou de produire un algorithme permettant d'automatiser le procédé.

16.2 Exemples d'ordre deux et supérieur

Exemple 16.2.1. Soit $f = 3y_2^5 + y_2^3 - 6^5 y_0 y_1 - 6^5 y_0$. On cherche les déformations de f au voisinage de $\gamma(T) = T^3$.

$$\begin{array}{rcll} \partial_{y_0}(f) & = & -6^5 y_1 - 6^3 & = -6^3 - 6^5 \times 3T^2 \\ \partial_{y_1}(f) & = & -6^5 y_0 & = -6^5 \times T^3 \\ \partial_{y_2}(f) & = & 15y_2^4 + 3y_2^2 & = 15 \times 6^4 T^4 + 3 \times 6^2 T^2 \end{array}$$

Ainsi $m_0 = 0$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$. En particulier $2 + m_0 = 2$, $1 + m_1 = 4$ et $m_2 = 2$. On se retrouve dans le second cas de la proposition 16.1.1 Montrons, en refaisant les calculs, que la dimension de plongement vaut 1.

Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau quasi-artinien vérifiant $\mathfrak{M}_A^2 = 0$ (d'indice de nilpotence 2). Comme précédemment, on pose $\gamma_A(T) = \gamma(T) + \sum_{i \geqslant 0} u_{A,i} T^i$ On applique la

formule de Taylor à $f(\gamma_A'', \gamma_A', \gamma_A)$.

$$\begin{aligned} 0 &= (-6^3 - 6^5 \times 3T^2)(\textstyle\sum_{i\geqslant 0} u_{A,i}T^i) - 6^5 \times T^3(\sum_{i\geqslant 1} iu_{A,i}T^{i-1}) \\ &\quad +(15 \times 6^4T^4 + 3 \times 6^2T^2)(\textstyle\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)u_{A,i}T^{i-2}) \end{aligned}$$

On déduit des 4 premières équations que $u_{A,0} = u_{A,1} = u_{A,3} = 0$ et que $u_{A,2}$ peut-être choisi librement. Par ailleurs, pour $i \geqslant 4$:

$$(3 \times 6^2 i(i-1) - 6^3)u_{A,i} + (-6^5 \times 3 - 6^5 i + 15 \times 6^4 i(i-1))u_{A,i-2} = 0$$

La seule valeur de $i \in \mathbf{N}$ qui annule l'équation précédente est $i = 2$. Seul $u_{A,2}$ peut-être fixé librement. Donc $\widehat{\mathcal{O}_{X,\gamma}} = k[[T]]$.

Par ailleurs $\{f\}$ possède une composante singulière essentielle y_0.

Exemple 16.2.2. Soit $f = \frac{1}{2}y_3^2 + 3y_2^2 - 432y_0 - 12$. On cherche les déformations de f au voisinage de $\gamma(T) = T^4 + T^2$.

$$\begin{aligned} \partial_{y_0}(f) &= -432 \\ \partial_{y_1}(f) &= 0 \\ \partial_{y_2}(f) &= 6y_2 &&= 6 \times (12T^2 + 2) \\ \partial_{y_3}(f) &= y_3 &&= 24T \end{aligned}$$

Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau quasi-artinien vérifiant $\mathfrak{M}_A^2 = 0$ (d'indice de nilpotence 2). On pose $\gamma_A(T) = \gamma(T) + \sum_{i\geqslant 0} u_{A,i}T^i$ On applique la formule de Taylor à $f(\gamma_A''', \gamma_A'', \gamma_A', \gamma_A)$ dans A.

$$0 = -432(\sum_{i\geqslant 0} u_{A,i}T^i) + 6 \times (12T^2+2)(\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)u_{A,i}T^{i-2}) + 24(\sum_{i\geqslant 3} i(i-1)(i-2)u_{A,i}T^{i-2})$$

Soit encore

$$\begin{aligned} 0 = &-432(\sum_{i\geqslant 0} u_{A,i}T^i) + 12(\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)u_{A,i}T^{i-2}) \\ &+ 72(\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)u_{A,i}T^i) + 24(\sum_{i\geqslant 3} i(i-1)(i-2)u_{A,i}T^{i-2}) \end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned} -432u_{A,0} + 24u_{A,2} &= 0 \\ -432u_{A,1} + 216u_{A,3} &= 0 \end{aligned}$$

et pour tout $i \geqslant 2$

$$(-432 + 72i(i-1))u_{A,i} + 12i(i-1)(1 + 2(i-2))u_{A,i+2} = 0$$

Pour $i \geqslant 2$ les coefficients $(-432 + 72i(i-1))$ et $12i(i-1)(1+2(i-2))$ ne peuvent s'annuler simultanément. Par ailleurs $(-432 + 72i(i-1))$ s'annule pour la valeur entière positive $i = 3$ et $12i(i-1)(1+2(i-2))$ ne s'annule pas pour $i \in \mathbf{N}$.

On constate donc que tous les $u_{A,i}$ pour $i \geqslant 2$ sont entièrement déterminé par $u_{A,0}$ et $u_{A,1}$. La dimension de plongement de l'anneau $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ vaut donc 2.

Par ailleurs $\{f\}$ possède une composante singulière essentielle y_0.

Exemple 16.2.3. Soit $f = y_3y_0 - y_2$. On cherche les déformations de f au voisinage de $\gamma(T) = T$.

$$\begin{array}{rcccl} \partial_{y_0}(f) & = & y_3 & = & 0 \\ \partial_{y_1}(f) & = & 0 & & \\ \partial_{y_2}(f) & = & -1 & & \\ \partial_{y_3}(f) & = & y_0 & = & T \end{array}$$

Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau quasi-artinien vérifiant $\mathfrak{M}_A^2 = 0$ (d'indice de nilpotence 2). On pose $\gamma_A(T) = \gamma(T) + \sum_{i\geqslant 0} u_{A,i}T^i$ On applique la formule de Taylor à $f(\gamma_A''', \gamma_A'', \gamma_A', \gamma_A)$.

$$0 = -(\sum_{i\geqslant 2} i(i-1)u_{A,i}T^{i-2}) + (\sum_{i\geqslant 3} i(i-1)(i-2)u_{A,i}T^{i-2})$$

En particulier

$$-432u_{A,2} = 0$$

et pour tout $i \geqslant 3$

$$i(i-1)(i-3)u_{A,i} = 0$$

Le coefficient $i(i-1)(i-3)$ s'annule lorsque $i = 3$, donc $u_{A,3}$ peut-être fixé librement. Ainsi on peut fixer librement $u_{A,0}$,$u_{A,1}$ et $u_{A,3}$.

En calculant modulo $\mathfrak{M}_A^3$ on peut montrer que $\widehat{\mathcal{O}_{\mathscr{L}_\infty(X^\partial),\gamma}}$ n'est pas un disque formel et qu'une relation de la forme $6u_1u_3 = 0$ doit être vérifié.

Par ailleurs $\{f\}$ n'a pas de composante singulière essentielle.

Exemple 16.2.4. Soit $f = y_{n-1}^n - (n!)^n y_0$. On cherche les déformations de f au voisinage de $\gamma(T) = T^n$.

$$\begin{array}{rcccl} \partial_{y_0}(f) & = & -(n!)^n & & \\ \partial_{y_i}(f) & = & 0 & & \\ \partial_{y_{n-1}}(f) & = & n(y_{n-1})^n & = & n(n!)^{n-1}T^{n-1} \end{array}$$

Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau quasi-artinien vérifiant $\mathfrak{M}_A^2 = 0$ (d'indice de nilpotence 2). On pose $\gamma_A(T) = \gamma(T) + \sum_{i\geqslant 0} u_{A,i}T^i$ On applique la formule de Taylor à

$f(\gamma_A''', \gamma_A'', \gamma_A', \gamma_A)$.

$$0 = -(n!)^n(\sum_{i\geqslant 0} u_{A,i}T^i) + n(n!)^{n-1}(\sum_{i\geqslant n-1} i(i-1)\cdots(i-n+2)u_{A,i}T^i)$$

En particulier

$$u_{A,i} = 0 \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2$$

et pour tout $i \geqslant n-1$

$$(-(n!)^n + n(n!)^{n-1}i(i-1)\cdots(i-n+2))u_{A,i} = 0$$

soit encore

$$(-(n-1)! + i(i-1)\cdots(i-n+2))u_{A,i} = 0$$

Pour $i \geqslant n-1$ ce coefficient ne s'annule que lorsque $i = n-1$. Donc seul $u_{A,n-1}$ est peut-être fixé librement. En particulier $\widehat{\mathcal{O}_{X,\gamma}} = k[[T]]$.

Par ailleurs, $\{f\}$ possède une composante singulière essentielle y_0.

Septième partie

Annexes

CHAPITRE 17

ANNEXES

17.1 Théorème de préparation de Weierstrass

Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local. On considère l'ensemble

$$W_d(A) = \{q(t) \in A[t], \text{unitaire de degré } d \text{ tels que } q(t) - t^d \in \mathfrak{M}_A[t]\}$$

Proposition 17.1.1. *Si $(A, \mathfrak{M}_A)$ est un anneau local, séparé pour la topologie $\mathfrak{M}_A$-adique, et si $q \in W_d(A)$ alors q n'est pas un diviseur de 0.*

Démonstration. On se permet de noter $f = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i t^i$ où $a_i \in \mathfrak{M}_A[[T]]$. Soit $q \in A[[T]]$ tel que $fq = 0$. On réduit cette équation modulo $\mathfrak{M}_A[[T]]$, et l'on obtient alors $t^d \bar{q} = 0$. Si l'on note $q = \sum_{j \geqslant 0} q_j t^j$, alors $t^d \bar{q} = 0$ donne que $q_j \in \mathfrak{M}_A$, pour tout $j \geqslant 0$.

On va procéder par récurrence sur k pour montrer que $q_j \in \mathfrak{M}_A^k$ pour tout $j \geqslant 0$. On suppose avoir montré que $q_j \in \mathfrak{M}_A^k$ pour tout $j \geqslant 0$ pour un certain $k \geqslant 1$. Par réduction modulo $\mathfrak{M}_A^{k+1}[[T]]$, on obtient :

$$t^q(\sum_{j \geqslant 0} q_j t^j) + \sum_{j \geqslant 0} \sum_{i=0}^{d-1} a_i q_j t^{i+j} = 0 \tag{17.1.1}$$

Or puisque $a_i \in \mathfrak{M}_A$ et $q_j \in \mathfrak{M}_A^k$, alors $a_j q_j \in \mathfrak{M}_A^{k+1}$ pour tous i, j. L'équation (17.1.1) devient alors

$$t^d(\sum_{j \geqslant 0} q_j t^j) = 0$$

modulo $\mathfrak{M}_A^{k+1}[[T]]$, soit encore $q_j \in \mathfrak{M}_A^{k+1}$.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $j \geqslant 0$, on a $q_j \in \bigcap_{k \geqslant 0} \mathfrak{M}_A^k$. Or comme A est séparé, on a $\bigcap_{k \geqslant 0} \mathfrak{M}_A^k = \{0\}$.

Ce qui prouve bien que $q = 0$ dans $A[[T]]$, donc que f n'est pas un diviseur de 0. □

On peut trouver une démonstration du résultat suivant, connu sous le nom de théorème de préparation de Weierstrass, dans [Lan02, IV, §9, Theorem 9.2].

Théorème 17.1.2. *Soit $(A, \mathfrak{M}_A)$ un anneau local complet. Soit $f \in A[[t]]$ tel que $f \notin \mathfrak{M}_A[[t]]$. On note $d = \mathrm{ord}_t(f, \mod \mathfrak{M}_A[[t]])$ Alors il existe une unique factorisation $f = qu$ où $q \in W_d(A)$ et $u \in A[[t]]^\times$.*

17.2 Définitions autour de la lissité et régularité

17.2.1 Points réguliers et singuliers

Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien de corps résiduel k. On peut munir $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ d'une structure de k espace vectoriel, et on a l'inégalité $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim(A)$.

Définition 17.2.1 (Anneau régulier)**.** Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien de corps résiduel k. On dit que A est régulier si $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim(A)$. D'après le lemme de Nakayamma, A est régulier si et seulement si $\mathfrak{m}$ est engendré par $\dim(A)$ éléments.

Définition 17.2.2 (Point régulier d'un schéma)**.** Soit X un schéma localement noethérien et soit $x \in X$ un point. On dit que X est régulier au point $x \in X$ (ou que x est un point régulier de X) si $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier.

On dit que X est régulier si, pour tout $x \in X$, le schéma X est régulier en x. Un point $x \in X$ qui n'est pas régulier est dit singulier. Un schéma qui n'est pas régulier est dit singulier.

17.2.2 Fibre d'un morphisme

Définition 17.2.3 (Fibre)**.** Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schéma. Pour tout $y \in Y$, on pose $X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}\ k(y)$. On l'appelle fibre de f au dessus de y. La seconde projection $X_y \to \mathrm{Spec}\ k(y)$ fait de X_y un $k(y)$-schéma.

Définition 17.2.4 (Fibre générique)**.** Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schéma avec Y irréductible de point générique ξ. On appelle X_ξ la fibre générique de f.

Proposition 17.2.5. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schéma. Alors pour tout $y \in Y$, la premier projection $p\colon X \times_Y \mathrm{Spec}\ k(y) \to X$ induit un homéomorphisme de X_y vers $f^{-1}(y)$.*

17.2.3 Lissité

Si k est un corps, on note $\bar{k}$ sa clôture algébrique.

Définition 17.2.6 (Point lisse)**.** Soit X une variété algébrique sur un corps k. On dit que X est lisse au point $x \in X$ si les points de $X_{\bar{k}} = X \times_k \mathrm{Spec}(\bar{k})$ au dessus de x sont réguliers (sur $X_{\bar{k}}$). On dit que X est lisse sur k s'il est lisse en tout ses points.

Proposition 17.2.7. *Soit k un corps et X un k-schéma. Si x est un point régulier de X dont le corps résiduel est une extension séparable de k alors x est lisse.*

Démonstration. Voir [Mat80, 28.I, p204]. □

Définition 17.2.8 (Morphisme lisse)**.** Soit Y un schéma localement noethérien et soit $f\colon X \to Y$. On dit que f est lisse en x si f est plat en x et si $X_y \to \mathrm{Spec}(k(y))$ (où $y = f(x)$) est lisse en x.

17.2.4 Intersection complète

Définition 17.2.9. Soit k un corps et A une k-algèbre de type finie.

1. On dit que A est une k-algèbre d'intersection complète sur k s'il existe une présentation de A de la forme $A = k[x_1, \cdots, x_n]/\langle f_1, \cdots, f_r\rangle$ telle que $\dim(A) = n - r$.
2. On dit que A est k-algèbre d'intersection complète *locale* sur k s'il existe un recouvrement $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup D(g_i)$ tel que chaque anneau A_{g_i} soit d'intersection complète sur k.

17.3 Propriétés utiles

17.3.1 Critère Jacobien

Théorème 17.3.1 (Critère jacobien)**.** *Soit k un corps et soit $X = V(I)$ une sous-variété fermée de $\mathbf{A}^n_k$, $F_1, \cdots F_r$ un système de générateurs pour I et $x \in X(k)$ un point rationnel. On considère la matrice*

$$J_x = \left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathrm{M}_{r\times n}(k).$$

Alors X est régulier en x si et seulement si $\mathrm{rg}(J_x) = n - \dim(\mathcal{O}_{X,x})$.

Démonstration. Voir [Mat80, 29, p213]. □

Remarque 17.3.2. On a toujours, par des calculs de dimension et le Hauptidealsatz,

$$n - \mathrm{rg}(J_x) \geqslant \dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant n - r$$

donc si $\mathrm{rg}(J_x) = r$ il y a égalité partout.

Remarque 17.3.3. En général, le critère jacobien est un critère de lissité et non de régularité (dans la formulation du théorème 17.3.1, c'est la même chose puisqu'on

travaille sur des points k-rationnels). Si l'on prend un corps non parfait k, et t un élément de k qui n'est pas une puissance p-ème et $k' = k[X]/\langle X^p - t\rangle$. L'unique point de $\mathrm{Spec}(k')$ est régulier, mais le critère jacobien n'est pas vérifié.

Proposition 17.3.4. *Soit $V = \mathrm{Spec}(k[X_1, .., X_n]/I)$. Soit J l'idéal engendré par les éléments de la forme $h \cdot d$ où : r est un entier, $F_1, \cdots, F_r$ sont des éléments de I, d est un mineur d'ordre r de la matrice*

$$Jac = (\partial_{X_j} F_i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

h est un élément du conducteur $\langle F_1, .., F_r\rangle : I$ où

$$\langle F_1, .., F_r\rangle : I := \{f \in k[X_1, .., X_n] \mid fg \in \langle F_1, .., F_r\rangle,\ \forall g \in I\}.$$

Alors le lieu non lisse de V est exactement le lieu des zéros de $I + J$.

Démonstration. Voir [Swa98, Thm 4.1]. □

17.3.2 Co-restriction

Proposition 17.3.5. *Soient X et Y deux schémas et $(\varphi, \theta) \colon Y \to X$ un morphisme de schémas. Soit U un ouvert de X muni de sa structure de sous-schéma ouvert. Alors, φ induit un morphisme de schémas $(\psi, \Theta) \colon \varphi^{-1}(U) \to U$ qui fait commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \end{array}$$

où i et j désignent les morphismes d'inclusion.

Démonstration. On note $\psi \colon \varphi^{-1}(U) \to U$ l'application entre les deux espaces topologiques. Puisque φ est continue et que U est ouvert, $\varphi^{-1}(U)$ est ouvert dans Y et donc naturellement muni d'une structure de sous-schéma ouvert de Y. Le faisceau d'anneaux associé à $\varphi^{-1}(U)$, vérifie pour tout ouvert $W \subset \varphi^{-1}(U)$, l'égalité $\mathcal{O}_{Y|\varphi^{-1}(U)}(W) = \mathcal{O}_Y(W)$.

Pour que $\varphi^{-1}(U) \to U$ soit un morphisme de schéma, il nous faut aussi définir un morphisme de faisceaux $\Theta \colon \mathcal{O}_U \to \psi^* \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U)}$. Pour cela, on considère $V \subset U \subset X$. Par définition $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$. De plus, on a $\varphi^{-1}(V) \subset \varphi^{-1}(U) \subset Y$, donc $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U)}(\varphi^{-1}(V)) = \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(V))$. Comme $\varphi^{-1}(V) = \psi^{-1}(V)$, on pose alors

$$\Theta(V) = \theta(V) \colon \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_X(V)$$

Le morphisme $\theta(V)$ étant fonctoriel en les $V \subset X$, et en particulier en les $V \subset U$, la donnée des $\{\Theta(V)\}_{V \subset U}$ définit bien un morphisme de faisceaux $\Theta \colon \mathcal{O}_U \to \psi^* \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U)}$.

Enfin, pour tout $x \in U$, comme $\Theta_x = \theta_x$ où $\Theta_x \colon \mathcal{O}_{U,x} \to \psi^* \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U),x}$, le morphisme d'anneaux locaux Θ_x est local, et donc la donnée de $(\phi, \Theta) \colon \varphi^{-1}(U) \to U$ définit bien un morphisme de schémas.

Le diagramme est commutatif par construction de (ψ, Θ). □

INDEX

Algèbre
  différentielle, 45
  universelle, 39
  quasi-artinienne, 135
Anneau
  ∂-euclidien, 71
  des polynômes différentiels, 44
  différentiel, 43
  linéairement topologisé, 61
  rittien, 52
Arc, 126
  différentiel, 163
  non dégénéré, 131

Bimonomiale, 187

Classe
  d'un polynôme différentiel, 55
Complétion (algébrique), 65
Composante de la solution générale, 56
Composantes des solutions singulières essentielles, 56
Élément constant pour une dérivation, 28

Déformations d'un point rationnel, 140
Déformations
  différentielles, 177
Dérivation, 27
  d'adjonction, 40
  de Hasse-Schmidt, 37
  universelle, 34
Dérivée d'un élément, 44
Dimension de plongement, 167
Donnée différentielle, 162
  fidèle, 162
  pleine, 162

Espace tangent
  d'un anneau local, 167

Famille filtrante, 62
Formes différentielles relatives, 32

HS-idéal, 42

Idéal différentiel, 45
  parfait, 46
Intersection complète, 206

Monôme
  tropical différentiel, 94

Opérateur dérivé, 44
Ordre
  d'un opérateur différentiel, 44
  d'un polynôme différentiel par rapport à une variable, 55

Polygône de Newton, 86
Polynôme
  tropical différentiel, 94

Radical d'un idéal différentiel, 46
Ranking, 55
Règle de Leibniz, 27

Schéma des arcs, 126
  différentiels, 162
Semi-anneau
  des supports, 86
Séparant, 55
Séries formelles tropicales, 89
Sommets, 86

Support
d'une série formelle, 91
Système conservatif, 52
parfait, 52
rittien, 52

Théorème d'irréductibilité de Kolchin, 54
Topologie
définie par une filtration d'idéaux, 63
pré-adique, 63

BIBLIOGRAPHIE

[AGT16] Fuensanta AROCA, Cristhian GARAY et Zeinab TOGHANI. « The Fundamental Theorem of Tropical Differential Algebraic Geometry ». In : *Pacific J. Math.* 283.2 (2016). arXiv:1510.01000v3, p. 257-270.

[And75] Daniel D. ANDERSON. « The Krull intersection theorem ». In : *Pacific J. Math.* 57.1 (1975), p. 11-14. ISSN : 0030-8730. URL : http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102906166.

[Bec+79] Joseph BECKER et al. « Ultraproducts and Approximation in Local Rings I ». In : *Inventiones mathematicae* 51 (1979), p. 189-203.

[Ber71] George M. BERGMAN. « The logarithmic limit-set of an algebraic variety ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 157 (1971), p. 459-469. ISSN : 0002-9947. DOI : 10.2307/1995858. URL : https://doi.org/10.2307/1995858.

[BH19] François BOULIER et Mercedes HAIECH. « The Ritt-Raudenbush Theorem and Tropical Differential Geometry ». Available at https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02403365. 2019.

[BH20] David BOURQUI et Mercedes HAIECH. « On the nilpotent functions at a non-degenerate arc ». In : *Manuscripta Mathematica* (2020).

[Bjö79] J.-E. BJÖRK. *Rings of differential operators*. T. 21. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979, p. xvii+374. ISBN : 0-444-85292-1.

[BNS20] David BOURQUI, Johannes NICAISE et Julien SEBAG. « Arc schemes in geometry and differential algebra ». In : *Arc Schemes and Singularities*. World Sci. Publ., 2020. DOI : 10.1142/q0213. URL : https://doi.org/10.1142/q0213.

[Bou06] Nicolas BOURBAKI. *Algebre commutative : Chapitres 1 a 4*. Springer, 2006.

[Bou09] Nicolas BOURBAKI. *Topologie générale : Chapitres 1-4*. Springer, 2009.

[Bou19] François BOULIER. « A Differential Algebra Introduction For Tropical Differential Geometry ». Lecture Notes for the Workshop on Tropical Differential Geometry, Queen Mary College of the University of London, Dec. 2-7. Available at https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02378197. 2019.

[Bou20] Alexis BOUTHIER. « Théorèmes de structure sur les espaces d'arcs ». In : *Arc Schemes and Singularities*. World Sci. Publ., 2020. DOI : 10.1142/q0213. URL : https://doi.org/10.1142/q0213.

[Bou68] Nicolas BOURBAKI. *Theory of sets*. Springer, 1968.

[BP12] Javier Fernández de BOBADILLA et María Pe PEREIRA. « The Nash problem for surfaces ». In : *Ann. of Math. (2)* 176.3 (2012), p. 2003-2029. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2012.176.3.11. URL : https://doi.org/10.4007/annals.2012.176.3.11.

[BS13] Erwan BRUGALLÉ et Kristin SHAW. *A bit of tropical geometry*. 2013. arXiv : 1311.2360 [math.AG].

[BS16] David BOURQUI et Julien SEBAG. « Deformations of differential arcs ». In : *Bull. Aust. Math. Soc.* 94.3 (2016), p. 405-410. ISSN : 0004-9727. DOI : 10.1017/S0004972716000459. URL : https://doi.org/10.1017/S0004972716000459.

[BS17a] David BOURQUI et Julien SEBAG. « Smooth arcs on algebraic varieties ». In : *J. Singul.* 16 (2017), p. 130-140. DOI : 10.1017/s1474748015000341. URL : https://doi.org/10.1017/s1474748015000341.

[BS17b] David BOURQUI et Julien SEBAG. « The Drinfeld-Grinberg-Kazhdan Theorem for formal schemes and singularity theory ». In : *Confluentes Mathematici* 9.1 (2017), p. 29-64.

[BS17c] David BOURQUI et Julien SEBAG. « The Drinfeld-Grinberg-Kazhdan theorem is false for singular arcs ». In : *J. Inst. Math. Jussieu* 16.4 (2017), p. 879-885. ISSN : 1474-7480. DOI : 10.1017/S1474748015000341. URL : https://doi.org/10.1017/S1474748015000341.

[BS17d] David BOURQUI et Julien SEBAG. « The minimal formal models of curve singularities ». In : *Internat. J. Math.* 28.11 (2017), p. 1750081, 23. ISSN : 0129-167X. DOI : 10.1142/S0129167X17500811. URL : https://doi.org/10.1142/S0129167X17500811.

[BS18] David BOURQUI et Julien SEBAG. « On torsion Kähler differential forms ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 222.8 (2018), p. 2229-2243. ISSN : 0022-4049. DOI : 10.1016/j.jpaa.2017.09.007. URL : https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2017.09.007.

[BS19a] David BOURQUI et Julien SEBAG. « Finite formal model of toric singularities ». In : *J. Math. Soc. Japan* 71.3 (2019), p. 805-829. ISSN : 0025-5645. DOI : 10.2969/jmsj/78927892. URL : https://doi.org/10.2969/jmsj/78927892.

[BS19b] David BOURQUI et Julien SEBAG. « The radical of the differential ideal generated by XY in the ring of two variable differential polynomials is not differentially finitely generated ». In : *J. Commut. Algebra* 11.2 (2019), p. 155-162. ISSN : 1939-0807. DOI : 10.1216/jca-2019-11-2-155. URL : https://doi.org/10.1216/jca-2019-11-2-155.

[BS20] David BOURQUI et Julien SEBAG. « The local structure of arc schemes ». In : *Arc Schemes and Singularities*. World Sci. Publ., 2020. DOI : 10.1142/q0213. URL : https://doi.org/10.1142/q0213.

[CH16] C. CHIU et H. HAUSER. *On the Formal Neighborhood of Degenerate Arcs*. 2016. URL : https://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/Publications/chiu%20hauser%20nov%207%202016.pdf.

[CLNS18] Antoine CHAMBERT-LOIR, Johannes NICAISE et Julien SEBAG. *Motivic integration*. T. 325. Progress in Mathematics. Birkhäuser/Springer, New York, 2018, p. xx+526. ISBN : 978-1-4939-7885-4 ; 978-1-4939-7887-8. DOI : 10.1007/978-1-4939-7887-8. URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7887-8.

[CLO07] David COX, John LITTLE et Donal O'SHEA. *Ideals, Varieties and Algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. 3rd. Undergraduate Texts in Mathematics. New York : Springer Verlag, 2007.

[Dem97] Jean-Pierre DEMAILLY. « Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials ». In : *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*. T. 62. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 285-360. DOI : 10.1090/pspum/062.2/1492539. URL : https://doi.org/10.1090/pspum/062.2/1492539.

[Dix70] Jacques DIXMIER. « Sur les algèbres de Weyl. II ». In : *Bull. Sci. Math. (2)* 94 (1970), p. 289-301. ISSN : 0007-4497.

[DL84] J. DENEF et L. LIPSHITZ. « Power series solutions of algebraic differential equations ». In : *Math. Ann.* 267.2 (1984), p. 213-238. ISSN : 0025-5831. DOI : 10.1007/BF01579200. URL : https://doi.org/10.1007/BF01579200.

[DL99] Jan DENEF et François LOESER. « Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration ». In : *Invent. Math.* 135.1 (1999), p. 201-232. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/s002220050284. URL : https://doi.org/10.1007/s002220050284.

[Dri02] Vladimir DRINFELD. *ON THE GRINBERG – KAZHDAN FORMAL ARC THEOREM*. Avr. 2002. URL : arXiv:math/0203263.

[Eis95] David EISENBUD. *Commutative Algebra : with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 150. Springer New York, 1995.

[Fal+20] Sebastian FALKENSTEINER et al. *The Fundamental Theorem of Tropical Partial Differential Algebraic Geometry*. 2020.

[FD17] Tommaso de FERNEX et Roi DOCAMPO. *Differentials on the arc space*. 2017. URL : arXiv:1703.07505.

[Fer13] Tommaso de FERNEX. « Three-dimensional counter-examples to the Nash problem ». In : *Compos. Math.* 149.9 (2013), p. 1519-1534. ISSN : 0010-437X. DOI : 10.1112/S0010437X13007252. URL : https://doi.org/10.1112/S0010437X13007252.

[GD71] A. GROTHENDIECK et J. A. DIEUDONNÉ. *Eléments de géométrie algébrique. I*. T. 166. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1971, p. ix+466. ISBN : 3-540-05113-9 ; 0-387-05113-9.

[GG16] Jeffrey GIANSIRACUSA et Noah GIANSIRACUSA. « Equations of tropical varieties ». In : *Duke Math. J.* 165.18 (2016), p. 3379-3433. ISSN : 0012-7094. DOI : 10.1215/00127094-3645544. URL : https://doi.org/10.1215/00127094-3645544.

[GK00] Mikhail GRINBERG et David KAZHDAN. « Versal deformations of formal arcs ». In : *Geometric & Functional Analysis GAFA* 10.3 (2000), p. 543-555.

[GNMS20] Michel GROS, Luis NARVÁEZ MACARRO et Julien SEBAG. « Arc scheme and Bernstein polynomials ». In : *Arc Schemes and Singularities*. World Sci. Publ., 2020. URL : https://doi.org/10.1142/q0213.

[Gri17] Dima GRIGORIEV. « Tropical differential equations ». In : *Advances in Applied Mathematics* 82 (2017), p. 120-128.

[HS01] Andre HILLEBRAND et Wiland SCHMALE. « Towards an Effective Version of a Theorem of Stafford ». In : *Journal of Symbolic Computation* 32.6 (2001), p. 699 -716. ISSN : 0747-7171. DOI : https://doi.org/10.1006/jsco.2001.0491. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717101904912.

[IK03] Shihoko ISHII et János KOLLÁR. « The Nash problem on arc families of singularities ». In : *Duke Math. J.* 120.3 (2003), p. 601-620. ISSN : 0012-7094. DOI : 10.1215/S0012-7094-03-12034-7. URL : https://doi.org/10.1215/S0012-7094-03-12034-7.

[Ish04] Shihoko ISHII. « The arc space of a toric variety ». In : *J. Algebra* 278.2 (2004), p. 666-683. ISSN : 0021-8693. DOI : 10.1016/j.jalgebra.2003.12.015. URL : https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.12.015.

[JK13] Jennifer M. JOHNSON et János KOLLÁR. « Arc spaces of cA-type singularities ». In : *J. Singul.* 7 (2013), p. 238-252. DOI : 10.5427/jsing.2013.7m. URL : https://doi.org/10.5427/jsing.2013.7m.

[Kap76] Irving KAPLANSKY. *An introduction to differential algebra*. Second. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1251, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. V. Hermann, Paris, 1976, p. 64. ISBN : 2-7056-1252-3.

[Kha82] S.M. KHALEELULLA. *Counterexamples in Topological Vector Spaces*. 1re éd. Lecture Notes in Mathematics 0936. Springer, 1982.

[Kol42] Ellis Robert KOLCHIN. « On the basis theorem for differential systems ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 52 (1942), p. 115-127.

[Kol73] E. R. KOLCHIN. *Differential algebra and algebraic groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973, p. xviii+446.

[Kol99] Ellis KOLCHIN. *Selected works of Ellis Kolchin with commentary*. Commentaries by Armand Borel, Michael F. Singer, Bruno Poizat, Alexandru Buium and Phyllis J. Cassidy, Edited and with a preface by Hyman Bass, Buium and Cassidy. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, p. xiv+639. ISBN : 0-8218-0542-8.

[Kon95] Maxim KONTSEVICH. *lecture at Orsay*. 1995.

[KS06] Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA. *Categories and sheaves*. T. 332. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2006, p. x+497. ISBN : 978-3-540-27949-5 ; 3-540-27949-0. DOI : 10.1007/3-540-27950-4. URL : https://doi.org/10.1007/3-540-27950-4.

[Laf77] Jean Pierre LAFON. *Algebre commutative : langages geometrique et algebrique*. Hermann. Collection Enseignement des sciences ; 24. Hermann, 1977.

[Lan02] Serge LANG. *Algebra*. third. T. 211. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002, p. xvi+914. ISBN : 0-387-95385-X. DOI : 10.1007/978-1-4613-0041-0. URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0.

[Lem03] François LEMAIRE. « An orderly linear PDE system with analytic initial conditions with a non analytic solution ». In : *Special Issue on Computer Algebra and Computer Analysis, Journal of Symbolic Computation* 35.5 (2003), p. 487-498.

[Ley04] Anton LEYKIN. « Algorithmic proofs of two theorems of Stafford ». In : *Journal of Symbolic Computation* 38.6 (2004), p. 1535 -1550. ISSN : 0747-7171. DOI : https://doi.org/10.1016/j.jsc.2004.07.003. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717104001002.

[Mat77] Michihiko MATSUDA. « An application of Ritt's low power theorem ». In : *Nagoya Math. J.* 68 (1977), p. 17-19. ISSN : 0027-7630. URL : http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118796539.

[Mat80] Hideyuki MATSUMURA. *Commutative algebra*. 2nd Edition. Mathematics lecture note series ; 56. Benjamin-Cummings Pub Co, 1980.

[Mat89] Hideyuki MATSUMURA. *Commutative ring theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[MCnS20] Mario MORÁN CAÑÓN et Julien SEBAG. « On the tangent space of a weighted homogeneous plane curve singularity ». In : *J. Korean Math. Soc.* 57.1 (2020), p. 145-169. ISSN : 0304-9914. DOI : 10.4134/JKMS.j180796. URL : https://doi.org/10.4134/JKMS.j180796.

[MFA69] I. G. MacDonald M. F. ATIYAH. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley publishing company, 1969.

[Mus01] Mircea MUSTAŢĂ. « Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities ». In : *Inventiones mathematicae* 145.3 (2001), p. 397-424.

[Mus06] Mircea MUSTAŢĂ. *Spaces of arcs in birational geometry*. 2006. URL : http://www-personal.umich.edu/~mmustata/lectures_arcs.pdf.

[Nas95] John F. NASH Jr. « Arc structure of singularities ». In : *Duke Math. J.* 81.1 (1995). A celebration of John F. Nash, Jr., 31-38 (1996). ISSN : 0012-7094. DOI : 10.1215/S0012-7094-95-08103-4. URL : https://doi.org/10.1215/S0012-7094-95-08103-4.

[NS05] Johannes NICAISE et Julien SEBAG. « Le théorème d'irréductibilité de Kolchin ». In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 341.2 (2005), p. 103-106. ISSN : 1631-073X. DOI : 10.1016/j.crma.2005.05.019. URL : https://doi.org/10.1016/j.crma.2005.05.019.

[NS10] Johannes NICAISE et Julien SEBAG. « Greenberg approximation and the geometry of arc spaces ». In : *Comm. Algebra* 38.11 (2010), p. 4077-4096. ISSN : 0092-7872. DOI : 10.1080/00927870903295398. URL : https://doi.org/10.1080/00927870903295398.

[Reg06] Ana J. REGUERA. « A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map ». In : *Compositio Mathematica* 142.1 (2006), 119–130.

[Reg09] Ana J. REGUERA. « Towards the Singular Locus of the Space of Arcs ». In : *American Journal of Mathematics* 131.2 (2009), p. 313-350. ISSN : 00029327, 10806377. URL : http://www.jstor.org/stable/40263770.

[Rit50] Joseph Fels RITT. *Differential Algebra*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1950, p. viii+184.

[Sab93] Claude SABBAH. « Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations ». In : *Éléments de la théorie des systèmes différentiels. $\mathscr{D}$-modules cohérents et holonomes (Nice, 1990)*. T. 45. Travaux en Cours. Hermann, Paris, 1993, p. 1-80.

[Sch02] Pierre SCHAPIRA. *Categories and homological algebra*. 2002. URL : https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/HomAl.pdf.

[Sch71] H.H. SCHAEFER. *Topological vector spaces*. 1st ed. 1967. Corr. 3rd printing. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1971.

[Seb04] Julien SEBAG. « Intégration motivique sur les schémas formels ». In : *Bull. Soc. Math. France* 132.1 (2004), p. 1-54. ISSN : 0037-9484. DOI : 10.24033/bsmf.2458. URL : https://doi.org/10.24033/bsmf.2458.

[Seb11] Julien SEBAG. « Arcs schemes, derivations and Lipman's theorem ». In : *J. Algebra* 347 (2011), p. 173-183. ISSN : 0021-8693. DOI : 10.1016/j.jalgebra.2011.08.018. URL : https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.08.018.

[Seb16] Julien SEBAG. « Primitive arcs on curves ». In : *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 23.4 (2016), p. 481-486. ISSN : 1370-1444. URL : http://projecteuclid.org/euclid.bbms/1480993581.

[Seb17] Julien SEBAG. « A remark on Berger's conjecture, Kolchin's theorem, and arc schemes ». In : *Archiv der Mathematik* 108.2 (2017), p. 145-150.

[Seb18] Julien SEBAG. « On logarithmic differential operators and equations in the plane ». In : *Illinois J. Math.* 62.1-4 (2018), p. 215-224. ISSN : 0019-2082. DOI : 10.1215/ijm/1552442660. URL : https://doi.org/10.1215/ijm/1552442660.

[Sei56] Abraham SEIDENBERG. « An elimination theory for differential algebra ». In : *Univ. California Publ. Math. (New Series)* 3 (1956), p. 31-65.

[Sei58] Abraham SEIDENBERG. « Abstract differential algebra and the analytic case ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958), p. 159-164.

[Sey70] H. SEYDI. « Anneaux henséliens et conditions de chaînes ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* (1970).

[Sta78] J. T. STAFFORD. « Module structure of Weyl algebras ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 18.3 (1978), p. 429-442. ISSN : 0024-6107. DOI : 10.1112/jlms/s2-18.3.429. URL : https://doi.org/10.1112/jlms/s2-18.3.429.

[Stacksa] The STACKS PROJECT AUTHORS. https ://stacks.math.columbia.edu/.

[Stacksb] The STACKS PROJECT AUTHORS. *Tag 05JA*. https ://stacks.math.columbia.edu/tag/05JA. 2017.

[Swa98] Richard G. SWAN. « Néron-Popescu desingularization ». In : *Algebra and geometry (Taipei, 1995)*. T. 2. Lect. Algebra Geom. Int. Press, Cambridge, MA, 1998, p. 135-192.

[Voj07] Paul VOJTA. « Jets via Hasse-Schmidt derivations ». In : *Diophantine geometry*. T. 4. CRM Series. Ed. Norm., Pisa, 2007, p. 335-361.

[Yek11] Amnon YEKUTIELI. « On flatness and completion for infinitely generated module over noetherian rings ». In : *Communications in Algebra* (2011).

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Titre : Étude algébrique des systèmes d'équations différentielles polynomiales d'ordre arbitraire

Mot clés : Algèbre différentielle, géométrie algébrique, schéma des arcs, équations différentielles

Résumé : Dans cette thèse, plusieurs axes d'études dont le dénominateur commun est l'algèbre différentielle ont été suivis pour mettre en lumière certaines propriétés algébriques des systèmes d'équations différentielles. Dans une partie nous nous sommes interessée à la surdétermination des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires et avons produit un algorithme permettant de trouver les générateurs d'un tel système. Une autre partie se penche sur la compréhension du support de solutions d'équations différentielles partielles à l'aide d'outils issus de la géométrie tropicale. Dans une troisième partie, nous nous intéressons à l'objet géométrique décrit par l'ensemble des solutions d'une équation différentielle ordinaire et mettons en relation l'existence de composantes singulières essentielles pour l'équation différentielle considérée et la décroissance de la dimension de l'espace tangent de cet objet calculé au voisinage de solutions non dégénérées. En particulier, cette étude implique de se pencher sur la complétion d'anneaux non noethériens ; cette situation et les pathologies afférentes sont par ailleurs au coeur de deux autres parties de cette thèse.

Title: Algebraic study of systems of polynomial differential equations of arbitrary order

Keywords: Differential algebra, algebraic geometry, arc scheme, differential equations

Abstract: In this thesis, several lines of study whose common denominator is differential algebra have been followed to highlight some algebraic properties of systems of differential equations. In one part we have been interested in the overdetermination of ordinary linear differential equation systems and have produced an algorithm to find the generators of such a system. Another part deals with the understanding of the support of partial differential equation solutions using tools from tropical geometry. In a third part, we were interested in the geometrical object described by the set of solutions of an ordinary differential equation and relate the existence of singular essential components for the considered differential equation and the decrease of the dimension of the tangent space of this object calculated at the neighborhood of non-degenerated solutions. In particular, this study involves looking at completion of non-Netherian rings; this situation and the related pathologies are also at the heart of two other parts of this thesis.