



HAL
open science

Accumulation et évolution des hélicités magnétiques relative, non potentielle et mêlée, lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire

Luis Linan

► **To cite this version:**

Luis Linan. Accumulation et évolution des hélicités magnétiques relative, non potentielle et mêlée, lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paris Sciences & Lettres, 2020. Français. NNT : . tel-03124289v1

HAL Id: tel-03124289

<https://theses.hal.science/tel-03124289v1>

Submitted on 28 Jan 2021 (v1), last revised 2 Jul 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Observatoire de Paris

Accumulation et évolution des hélicités magnétiques relative, non potentielle et mêlée, lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire

Soutenue par

Luis Linan

Le 16 octobre 2020

École doctorale n°127

AAIF

Spécialité

Astronomie et Astrophysique

Composition du jury :

Chantal STEHLE
Directrice de recherche émérite du CNRS, Observatoire de Paris - LERMA *Présidente du jury*

Marianne FAUROBERT
Professeur, Université côte d'Azur - Laboratoire Lagrange *Rapporteur*

Dana LONGCOPE
Professeur, Montana State University - Department of Physics *Rapporteur*

Miho JANVIER
Astronome-Adjointe, Université Paris-Saclay - IAS *Examinatrice*

Aurelie MARCHAUDON
Chargée de Recherche CNRS, Université Paul Sabatier - IRAP *Examinatrice*

Étienne PARIAT
Chargé de recherche CNRS, Observatoire de Paris - LESIA *Directeur*

Guillaume AULANIER
Astronome, Observatoire de Paris - LESIA *Co-Directeur*

Remerciements

Si aujourd'hui, il est l'heure pour moi de conclure un manuscrit de thèse, c'est grâce à de nombreuses personnes que j'aimerais remercier ici.

J'aimerais tout d'abord remercier les membres de mon jury : merci à Chantal STEHLE qui a accepté de présider ce jury ; merci à Marianne FAUROBERT et Dana LONGCOPE pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et merci à Aurélie MARCHAUDON et Miho JANVIER pour avoir accepté de participer en tant qu'examineurs. Je vous remercie pour le temps et l'attention que vous allez consacrer à ce manuscrit. Je ne saurais vous exprimer toute ma reconnaissance.

Je suis également très reconnaissant envers mes deux directeurs de thèse : Étienne Pariat et Guillaume Aulanier. Merci ! Merci de m'avoir accompagné, aidé, poussé¹ et motivé. Vous m'avez énormément appris tant sur le plan professionnel que personnel. J'ai beaucoup grandi pendant cette thèse et c'est en partie grâce à vous. Je tiens spécialement à vous remercier d'avoir toujours été disponible pour moi² et de m'avoir offert un si grand nombre d'opportunités professionnelles et humaines. J'espère avoir été à la hauteur de vos attentes, je n'aurais pour ma part, pas pu espérer de meilleurs directeurs pour cette thèse.

Je souhaite également remercier l'ensemble des membres du pôle solaire avec qui j'ai pu interagir : Nicole VILMER, Brigitte SCHMIEDER, Lidia VAN DRIEL-GESZTELYI, Pascal DEMOULIN, Sophie MASSON, Jean-Marie MALHERBE, Ludwig KLEIN, Monique PICK et Véronique BOMMIER. Perdu dans la campagne anglaise ou à l'autre bout du monde en conférence, j'ai toujours pu compter sur l'un de vous. Je vous remercie pour nos interactions scientifiques et humaines. De par la multitude de caractères qui s'y côtoient, avec le goût du débat qui sied aux réunions de famille les plus animées, le pôle solaire est un lieu vivant et chaleureux que je ne saurais oublier.

Une pensée également pour les visiteurs et les post-doctorants qui sont passés par le pôle solaire pendant ma thèse : Sophie MUSSET, Kevin DALMASSE, Chloé GUENNOU, Krzysztof BARCZYNSKI³, Reetika JOSHI, Tomin JAMES, Guiping RUAN, Jilong PENG, Thierry SOUVERIN et Quentin NORAZ. Je vous souhaite à tous un avenir radieux. Merci pour toute l'aide que vous m'avez apportée, pour tous vos conseils, mais également pour tous nos échanges amicaux. Je tiens particulièrement à remercier Kostas MORAITIS avec qui j'ai partagé mon bureau pendant presque 3 ans ainsi que mes nombreuses aventures aussi bien scientifiques qu'humaines.

J'étends mes remerciements à l'ensemble du personnel de l'Observatoire et du LESIA qui ont rendu ma thèse et toutes les opportunités que j'y ai eues ; possibles. Une pensée particulière pour Alain DORESSOUNDIRAM et Constante IMAD qui ont montré une patience sans faille face à mes nombreuses questions pas toujours explicites. J'aimerais également remercier l'ensemble des personnes qui m'ont permis de faire de l'enseignement durant ma thèse. Merci à Caroline

1. Parfois/souvent dans des directions opposées, mais ça fait partie du charme de votre encadrement.

2. Par exemple, répondre à mes mails à 4h du matin alors que je venais de passer 9 h dans ma voiture sous la neige.

3. Je n'aiderai plus naïvement quelqu'un qui cherche de l'aide "rapide" pour son déménagement.

BARBAN et Christian BALANCA pour m'avoir fait confiance pendant 3 ans en me confiant le cours du langage de programmation C, promulgué aux étudiants du master. Cela a été un réel challenge pour moi et une opportunité unique⁴. Merci à Cedric LEYRAT et Sophie MASSON pour m'avoir laissé tutorer des étudiants via la formation en ligne DU LU⁵. Merci également à Noël ROBICHON pour m'avoir permis d'aller à l'Observatoire de Haute-Provence afin d'enseigner l'astronomie/astrophysique à des enseignants du secondaire. Ce fut un réel privilège et j'ai pu goûter au plaisir des longues soirées d'observations⁶. Malgré la pleine lune, j'en garde de très jolies images.

Durant ma thèse, on m'a offert la chance de voyager⁷ et de participer à de nombreuses conférences. J'y ai rencontré des personnes bienveillantes, passionnantes et toujours prêtes à partager un peu de leurs savoirs. Merci à Axel BRANDENBURG, Simon CANDELARESI, Gareth HAWKES, Yang LIU, Julia THALMANN, Anthony YEATES, Cristina MANDRINI, Sergio DASSO, Lucie GREEN, Xudong SUN et Antoine STRUGAREK pour ne citer qu'eux. Un merci particulier pour Gherardo VALORI qui m'a tant appris⁸ du début à la fin de ma thèse et qui m'a si chaleureusement accueilli dans son laboratoire en Angleterre. Merci également à Florian REGNAULT, Julien Frank, Alice FAZZINI, Emma DAVIES, Jennifer O'KANE, Alexander JAMES et Jack JENKINS pour leurs sympathies et les moments passés ensemble⁹.

Je souhaite également remercier l'ensemble des membres du discord PHD STUDENT. Merci de m'avoir tant aidé, de m'avoir écouté et motivé lors des moments difficiles et inédits que nous avons pu vivre cette année¹⁰. Vous avez su m'apporter de précieux conseils et vous pouvez compter sur moi pour aider de mon mieux tous ceux qui sont encore sur le chemin, aussi tumultueux que passionnant, du doctorat.

Pour finir, j'aimerais dédier ce dernier paragraphe à mes proches. Tout d'abord je souhaite témoigner toute mon affection à mes amis, entre autres : Julien, Joseph, Axel, Maxime, Yanis, Lucie, David, Gabriel, Florian, Éric, Maëlle, Léon, Mathieu ... Je souhaite également remercier l'ensemble de ma famille, en particulier mes sœurs et frères : Sandrine, Sarah, Thierry et Sébastien. Vous avez toujours été là pour votre petit frère, et j'espère vous rendre fier. Une pensée particulière pour JB, merci de prendre soin de ma sœur et de Sofia en tout temps, même lorsque le Soleil brille un peu moins fort. Et si je suis devenu l'homme que je suis¹¹, c'est avant tout grâce à mes parents Marie et Antoine. Vous m'avez toujours soutenu et accompagné. Vous avez tout donné et fait votre maximum pour que je puisse réussir. Merci pour votre soutien, votre patience et votre amour. Je terminerais par remercier Lauren. À l'heure où j'écris ces lignes, cela fait, à un jour près, deux ans que tu me supportes¹². Merci pour tout ce que tu m'apportes au quotidien¹³. Tu as su m'épauler durant toute cette aventure et durant tous les moments difficiles. Merci. Et ainsi ; pour terminer cet écrit, j'espère n'avoir oublié personne, et j'espère que ces années d'études et de recherches, que j'ai pleinement appréciées ; m'apporteront un avenir aussi passionnant que ces dernières années passées au sein de l'Observatoire.

4. Je n'ai presque fait pleurer aucun de mes étudiants.

5. Lumières sur l'Univers.

6. Parfois un peu trop longue quand il fallait donner un cours à 8h le lendemain.

7. L'image de l'éclipse solaire restera gravée en moi pendant de nombreuses années.

8. La liste de ses enseignements est si longue que je ne peux l'exprimer ici, j'espère cependant qu'il sait à quel point je suis reconnaissant.

9. Je n'aime cependant toujours pas l'alcool même après trois ans de thèse.

10. Et non un confinement, ce n'est pas une période idéale pour écrire une thèse.

11. Et que cette thèse contient beaucoup moins de fautes d'orthographe qu'au départ.

12. Quelle idée de choisir un étudiant en pleine thèse

13. Et merci à la famille Guerin de m'avoir accueilli sous le Soleil de Magny là où il fait bon vivre.

Résumé

Les phénomènes spectaculaires que sont les éruptions solaires peuvent impacter les infrastructures humaines. L'évolution technologique de notre société nous rend de plus en plus sensibles à l'activité solaire, ainsi sa prévision devient un enjeu économique croissant. Ma thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet de l'Agence Nationale de la Recherche, HeliSol, visant à établir des critères déterministes permettant des prédictions fiables des éruptions solaires. Je me suis intéressé durant ma thèse à une quantité prometteuse liée à la géométrie du champ magnétique : l'hélicité magnétique. Malgré quelques précédents résultats théoriques, analytiques et observationnels, la plaçant au cœur de divers processus liés à l'activité solaire, l'hélicité magnétique reste encore aujourd'hui mal comprise. Mon travail s'est porté en particulier sur l'étude des propriétés d'une décomposition de l'hélicité magnétique : l'hélicité magnétique non potentielle (liée au champ magnétique porteur de courants électriques) et l'hélicité mêlée (contenant le reste de l'information).

Tout d'abord, je me suis concentré sur le lien entre l'éruptivité d'un système magnétique et ses hélicités. Via des simulations numériques magnétohydrodynamiques (MHD), j'ai montré que le ratio entre l'hélicité non potentielle et l'hélicité totale possède une valeur seuil au-delà de laquelle une instabilité à l'origine de l'éruption se déclenche systématiquement. Les données magnétiques, issues d'observations, m'ont permis de confirmer le ratio d'hélicité comme marqueur significatif de l'éruptivité de différentes régions actives. Ces analyses reposent sur la production de reconstructions 3D du champ magnétique coronale générées à partir des mesures observationnelles de la distribution 2D du champ magnétique au niveau de la "surface" du Soleil. Comme j'ai pu le démontrer néanmoins, le ratio ne peut être correctement déterminé si le champ magnétique reconstruit ne respecte pas la propriété solénoïdale.

J'ai également utilisé des approches analytiques et numériques pour étudier les propriétés des hélicités qui composent le ratio susmentionné. J'ai ainsi proposé un formalisme théorique pour quantifier la non additivité de l'hélicité magnétique. J'ai aussi introduit pour la première fois une expression analytique pour la variation temporelle des hélicités non potentielle et mêlée. Cela m'a permis de montrer que, contrairement à l'hélicité totale, les hélicités non potentielle et mêlée ne sont pas des grandeurs conservées. Leurs évolutions sont dictées d'une part par les flux traversant les frontières, mais également par un transfert d'une forme d'hélicité à l'autre. J'ai de plus démontré, par application des simulations numériques, que ce transfert d'hélicité a un rôle majeur dans la dynamique des hélicités magnétiques durant une éruption solaire.

En conclusion, le ratio d'hélicité magnétique mis en évidence pourrait participer au développement de nouveaux outils destinés à la prédiction des éruptions solaires. Plus généralement, mes travaux permettent de mieux appréhender l'évolution des configurations magnétiques responsables des événements actifs de la couronne solaire. Ces recherches peuvent en outre être la base de futures études théoriques sur le lien entre hélicités magnétiques et déclenchement d'éruptions.

Abstract

The spectacular phenomena that are solar eruptions can impact human infrastructures. As we become more and more sensitive to solar activity because of the technological evolution of our society, solar forecasting is a growing economic stake. My thesis is part of the Heli-Sol research project of the Agence Nationale de la Recherche. The project aims to establish deterministic criteria allowing reliable predictions of solar eruptions. My thesis focuses on a promising quantity related to the geometry of the magnetic field : magnetic helicity. Despite some previous theoretical, analytical, and observational results, placing it at the core of various processes related to solar activity, magnetic helicity still remains largely unfathomed. More precisely, my work is focused on the study of the properties of a decomposition of magnetic helicity : the non-potential magnetic helicity (linked to the magnetic field carrying electric currents) and the volume-threading magnetic helicity (containing the rest of the information).

First, I focused on the link between the eruptivity of a magnetic system and its helicities. Using magnetohydrodynamic (MHD) numerical simulations, I showed that the ratio between non-potential helicity and total helicity has a threshold beyond which an eruption systematically occurs. Magnetic data obtained from observations allowed me to confirm that the helicity ratio is a significant marker of the eruptivity of different active regions. These analyses are based on the production of 3D reconstructions of the coronal magnetic field generated from observational measurements of the 2D distribution of the magnetic field at the level of the Sun's "surface". Nevertheless, as I could demonstrate, the ratio cannot be correctly determined when the reconstructed magnetic field does not respect the solenoidal property.

I used analytical and numerical approaches to study the properties of the helicities that constitutes the above-mentioned ratio. I proposed a theoretical formalism to quantify the non-additivity of magnetic helicity. I also derived for the first time an analytical expression for the temporal variation of non-potential and volume-threading helicities. This allowed me to show that, unlike total helicity, non-potential and volume-threading helicities are not conserved. Their evolution is dictated not only by fluxes across boundaries, but also by a transfer from one form of helicity to another. With the help of numerical simulations, I also demonstrated that this helicity transfer has a major role in the dynamics of magnetic helicities during solar eruptions.

In conclusion, the highlighted magnetic helicity ratio could be used to develop new prediction tools for solar eruptions. More generally, my work provides a better understanding of the evolution of the magnetic configurations responsible for the active events of the solar corona. These researches could also serve as the basis for future theoretical studies on the link between magnetic helicities and the trigger of solar eruptions.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	L'activité solaire	12
1.1.1	Taches solaires et régions actives	12
1.1.2	Champ magnétique des régions actives	13
1.1.3	Présence et importance des structures torsadées	15
1.1.4	Éruptions solaires : flare et éjection de masse coronale	16
1.1.5	Propagation des CMEs dans l'espace interplanétaire	18
1.2	La météorologie de l'espace	20
1.2.1	Conséquence de l'activité solaire sur les technologies humaines	20
1.2.2	Prédiction des éruptions solaires	21
1.3	Introduction à la physique des éruptions	22
1.3.1	Énergie magnétique	23
1.3.1.1	Champ magnétique potentiel et non potentiel	23
1.3.1.2	Minimum d'énergie et énergie libre	24
1.3.2	Modèles standards des éruptions solaires : déroulement et déclenchement	25
1.3.2.1	Le modèle CSHKP	25
1.3.2.2	Déclenchement des éruptions solaires	27
1.4	L'hélicité magnétique	29
1.4.1	Définition	29
1.4.2	Hélicité et nombre de liens	30
1.4.3	Hélicité mutuelle et propre	31
1.5	Origine du champ magnétique et de l'hélicité magnétique de la couronne solaire	32
1.5.1	La dynamo solaire	32
1.5.2	Génération d'hélicité magnétique	34
1.5.2.1	Préférence hémisphérique	34
1.5.2.2	Génération d'hélicité magnétique par effets α et Ω	35
1.5.3	Formation des tubes de flux	36
1.5.4	Transport dans la zone de convection	37
1.5.5	Rôle de la torsion dans l'émergence du flux magnétique dans un milieu stratifié	38
1.6	Sujet de la thèse	39
2	Reconstruction du champ magnétique coronal	43
2.1	Mesure du champ magnétique photosphérique	45
2.2	Contraintes observationnelles pour les reconstructions coronales 3D	47
2.2.1	Supprimer l'ambiguïté sur l'orientation du champ transverse	48
2.2.2	Transformation héliographique	48
2.2.3	Modification du magnétogramme	49
2.3	Extrapolation du champ magnétique sans force non linéaire	52
2.3.1	Présentation de deux méthodes d'extrapolation NLFFF	53

2.3.1.1	Méthode magnéto frictionnelle	53
2.3.1.2	Mon utilisation de la méthode magnéto frictionnelle : étude de la région active NOAA 12441	54
2.3.1.3	Méthode d'optimisation	57
2.3.2	Limitations des méthodes de reconstruction	59
2.4	Contrôle de la qualité des extrapolations	61
2.4.1	Présentation de différentes métriques	61
2.4.2	Contrôle de la propriété solénoïdale du champ magnétique	62
2.4.2.1	Théorème de Thomson-Valori	62
2.4.2.2	Influence de la divergence du champ magnétique	63
3	Hélicité magnétique relative : propriétés et mesures	67
3.1	Hélicité magnétique relative et ses décompositions	68
3.1.1	Invariance de jauge	68
3.1.2	Hélicité magnétique relative	69
3.1.3	Hélicité potentielle et Hélicité mixte	71
3.1.4	Hélicité non potentielle et Hélicité mêlée	72
3.2	Conservation de l'hélicité magnétique relative	73
3.2.1	Conservation de l'hélicité magnétique en MHD idéale	73
3.2.1.1	Variation temporelle de l'hélicité magnétique	73
3.2.2	Conservation en MHD non idéale	74
3.2.2.1	L'hypothèse de Taylor	74
3.2.2.2	Validation numérique de la conservation d'hélicité relative	76
3.2.2.3	Théorème de Woltjer-Taylor	78
3.2.2.4	Limite à la relaxation de Taylor et au théorème de Woltjer-Taylor	79
3.2.3	Conséquence de la conservation d'hélicité	80
3.3	Mesure et représentation de l'hélicité magnétique	82
3.3.1	Mesure de l'hélicité par intégration directe volumique	83
3.3.1.1	Présentation générale	83
3.3.1.2	Méthode employant la jauge de Coulomb	84
3.3.1.3	Méthode employant la jauge de DeVore	85
3.3.1.4	Mon développement et implémentation numérique de la méthode	86
3.3.1.5	Comparaison des différentes méthodes d'IDV	87
3.3.2	Intégration du flux d'hélicité	89
3.3.2.1	Flux d'hélicité magnétique relative	89
3.3.2.2	Mesure du flux photosphérique d'hélicité relative	91
3.3.3	Hélicité magnétique par ligne de champ	93
3.3.4	Densité de flux d'hélicité	96
3.4	Additivité de l'hélicité magnétique relative	98
3.4.1	Partition de l'hélicité relative entre deux volumes : Valori, Pariat, Dé- moulin, Moraitis, Yeates, & Linan (2020)	99
3.4.1.1	Résumé	99
3.4.1.2	Ma contribution	101
3.4.1.3	Perspectives	102
4	Hélicité magnétique et éruptivité	117
4.1	Liens entre l'hélicité magnétique relative et l'éruptivité d'une configuration ma- gnétique	118
4.1.1	Accumulation d'hélicité magnétique relative avant une éruption	119
4.1.1.1	Approche observationnelle et statistique	119

4.1.1.2	Approche théorique et numérique	120
4.1.2	Influence de la quantité d'hélicité relative coronale sur les propriétés de l'éruption	122
4.1.3	Liens entre éruptivité et flux d'hélicité relative	123
4.2	Rôle de l'hélicité magnétique non potentielle comme indicateur de l'éruptivité	125
4.2.1	Ratio de l'hélicité magnétique non potentielle sur hélicité magnétique relative	126
4.2.2	Seuil du ratio d'hélicité magnétique :Zuccarello, Pariat, Valori, & Linan (2018)	128
4.2.2.1	Résumé	128
4.2.2.2	Ma contribution	130
4.2.3	Perspectives	131
4.3	Seuil du ratio d'hélicité dans des régions actives	145
4.3.1	Influence de la solénoïdalité du champ magnétique sur la mesure du ratio d'hélicité : Thalmann et al. (2019a)	145
4.3.1.1	Résumé	145
4.3.1.2	Ma contribution	147
4.3.2	Évolution des hélicités dans la région active NOAA 12673 : Moraitis, Sun, Pariat, & Linan (2019b)	154
4.3.2.1	Résumé	154
4.3.2.2	Ma contribution	156
4.3.3	Influence de la morphologie de la région active Thalmann, Moraitis, Linan, Pariat, Valori, & Dalmasse (2019b)	164
4.3.3.1	Résumé	164
4.3.3.2	Ma contribution	166
4.3.4	Perspectives	167
5	Évolution, transfert et variation d'hélicités	177
5.1	Propriétés des hélicités relative, non potentielle et mêlée : état de l'art	178
5.2	Variations temporelles des hélicités mêlée et non potentielle	179
5.2.1	Approche analytique	179
5.2.1.1	Formulations des variations temporelles	179
5.2.1.2	Impact du choix de jauge	182
5.2.1.3	Time variations of the non-potential and volume-threading magnetic helicities : Linan, Pariat, Moraitis, Valori, & Leake (2018)	184
5.2.2	Transfert et flux d'hélicités	186
5.2.2.1	Méthode numérique de calcul des variations temporelles	186
5.2.2.2	Exemple d'analyse	187
5.2.2.3	Injection et éjection d'hélicités magnétiques	189
5.2.2.4	Transfert d'hélicités	191
5.2.3	Perspectives	193
5.3	Étude croisée des flux d'hélicités et d'énergies	214
5.3.1	Variation temporelle des énergies	215
5.3.2	Energy and helicity fluxes in line-tied eruptive simulations : Linan, Pariat, Aulanier, Moraitis, & Valori (2020)	217
5.3.3	Perspectives	218
6	Conclusions et perspectives	237
	Bibliographie	243

A	Éléments de magnétohydrodynamique	265
A.1	Les équations de la magnétohydrodynamique	265
A.2	Paramètre β	267
A.3	Nombre de Reynolds	268
A.4	La magnétohydrodynamique idéale	269
A.4.1	Lignes de champ magnétique	269
A.4.2	Théorèmes d'Alfvén	269
A.4.3	Relaxation du champ magnétique	270
A.5	La théorie de la reconnexion magnétique	271
B	Extrapolation d'un champ magnétique sans force linéaire	273
B.1	Méthode	273
B.2	Hélicité magnétique relative d'un champ magnétique sans force linéaire	275
C	Liste de publications et communications	277
C.1	Articles dans revues à comité de lecture	277
C.2	Contributions orales	278
	Table des figures	279

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	L'activité solaire	12
1.1.1	Taches solaires et régions actives	12
1.1.2	Champ magnétique des régions actives	13
1.1.3	Présence et importance des structures torsadées	15
1.1.4	Éruptions solaires : flare et éjection de masse coronale	16
1.1.5	Propagation des CMEs dans l'espace interplanétaire	18
1.2	La météorologie de l'espace	20
1.2.1	Conséquence de l'activité solaire sur les technologies humaines	20
1.2.2	Prédiction des éruptions solaires	21
1.3	Introduction à la physique des éruptions	22
1.3.1	Énergie magnétique	23
1.3.1.1	Champ magnétique potentiel et non potentiel	23
1.3.1.2	Minimum d'énergie et énergie libre	24
1.3.2	Modèles standards des éruptions solaires : déroulement et déclenchement	25
1.3.2.1	Le modèle CSHKP	25
1.3.2.2	Déclenchement des éruptions solaires	27
1.4	L'hélicité magnétique	29
1.4.1	Définition	29
1.4.2	Hélicité et nombre de liens	30
1.4.3	Hélicité mutuelle et propre	31
1.5	Origine du champ magnétique et de l'hélicité magnétique de la couronne solaire	32
1.5.1	La dynamo solaire	32
1.5.2	Génération d'hélicité magnétique	34
1.5.2.1	Préférence hémisphérique	34
1.5.2.2	Génération d'hélicité magnétique par effets α et Ω	35
1.5.3	Formation des tubes de flux	36
1.5.4	Transport dans la zone de convection	37
1.5.5	Rôle de la torsion dans l'émergence du flux magnétique dans un milieu stratifié	38
1.6	Sujet de la thèse	39

Dans ce chapitre, je commencerai par décrire l'atmosphère solaire et en particulier les régions où se développent les principales manifestations de l'activité solaire (cf. Sect. 1.1). Nous verrons également que l'activité solaire peut impacter l'environnement magnétique de la Terre ainsi que les technologies humaines (cf. Sect. 1.2). Minimiser les effets néfastes de l'activité solaire est l'enjeu d'une nouvelle discipline appliquée, la météorologie de l'espace, qui se repose sur les recherches en physique des relations Soleil-Terre.

Je ferai ensuite un état des lieux succinct de nos connaissances sur la physique des éruptions solaires (cf. Sect. 1.3). Nous verrons en particulier qu'à l'heure actuelle les différents mécanismes à l'origine du déclenchement des éruptions ne sont pas encore parfaitement connus. Une meilleure compréhension de ces mécanismes nécessite des études plus approfondies sur les propriétés du champ magnétique coronal.

Dans la section (1.4), je présenterai une grandeur permettant de caractériser la géométrie du champ magnétique : l'hélicité magnétique. Je décrirai ensuite les différents mécanismes responsables de la génération du champ magnétique et de l'hélicité magnétique observés dans la couronne solaire (cf. Sect. 1.5). Pour finir, section (1.6), j'exposerai les différentes problématiques aux cœurs de mes travaux de thèse.

1.1 L'activité solaire

Aristote, environ 400 ans avant J.C, a introduit le concept de perfection et de constance du Soleil (Tricot 1949). Cette croyance perdura pendant des siècles. Cependant, des observations de la surface visible solaire, appelée la photosphère, permettent de se rendre compte de quelques légers changements transitoires du Soleil. Ces variations se manifestent par l'apparition, l'évolution et la disparition de taches sombres au niveau photosphérique (Dame 1966). Par la suite, la variabilité solaire s'est révélée avoir de nombreuses manifestations différentes, notamment le fait que la "constante solaire", ou l'irradiance solaire totale, TSI (le rayonnement électromagnétique solaire total entrant dans toutes les longueurs d'onde par unité de surface au sommet de l'atmosphère), n'est pas une constante (Willson et al. 1981; Steinhilber et al. 2009). En réalité, le Soleil est beaucoup plus compliqué et actif qu'une simple boule de plasma chaud en équilibre thermodynamique. Il présente, à la différence d'un Soleil que l'on pourrait qualifier de "calme", divers processus actifs non stationnaires tels que les flares, les éjections de masse coronale et les proéminences solaires (cf. Sect. 1.1.4). L'ensemble de ces manifestations définit l'activité solaire.

Dans cette section, nous verrons que les principaux événements de l'activité solaire, les éruptions solaires (cf. Sect. 1.1.4), ont lieu dans des régions restreintes de l'atmosphère solaire, appelées régions actives (cf. Sect. 1.1.2). Ces régions, visibles à l'œil nu sous la forme de taches sombres à la surface du Soleil (cf. Sect. 1.1.1), sont caractérisées par la présence d'un important champ magnétique qui est souvent torsadé et/ou cisailé (cf. Sect. 1.1.3). Nous verrons également que certaines éruptions solaires éjectent une grande quantité de matières hors de l'atmosphère solaire. Cette matière éjectée est ensuite libre de se propager dans le milieu interplanétaire (cf. Sect. 1.1.5).

1.1.1 Taches solaires et régions actives

Les observations de la surface du Soleil en lumière visible révèlent la présence de régions de tailles variables qui sont plus sombres que le reste du disque solaire (McIntosh 1990). Ces régions sont appelées taches solaires. Déjà observées en Chine depuis plus de deux siècles avant J.C, les taches solaires sont un des principaux marqueurs de l'activité solaire (cf. Sects. 1.1.2

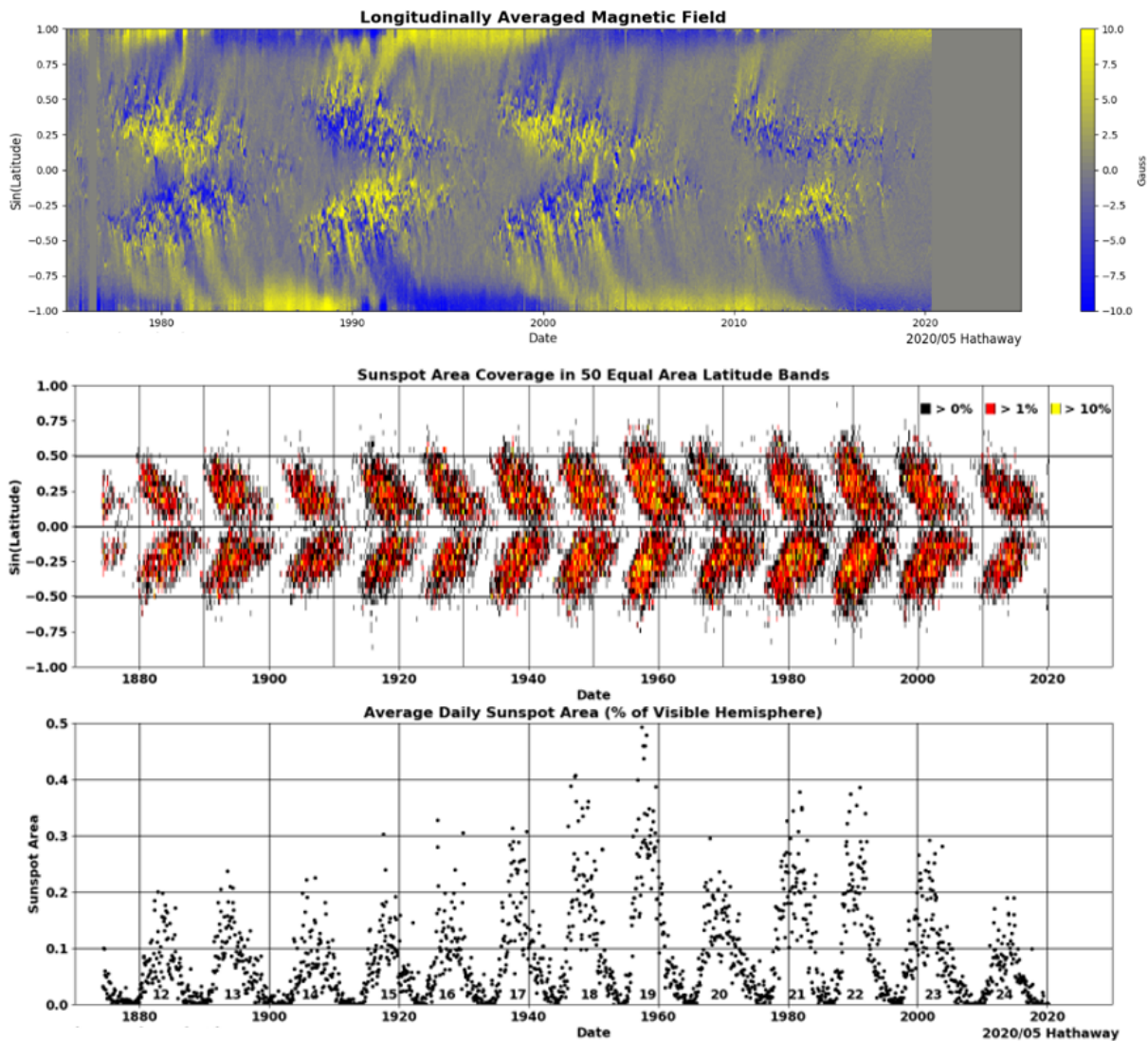


FIGURE 1.1 – **Haut** : Diagramme "papillon" magnétique représentant la distribution du champ magnétique (longitudinale) durant quatre cycles solaires. **Milieu** : Diagramme "papillon" représentant la répartition des taches solaires en fonction de la latitude depuis 1874. **Bas** : Aire couverte par les taches solaires en pourcentage de l'hémisphère visible ([Charbonneau 2010, 2014](#)).

et 1.1.4).

Au 19^e siècle, le scientifique Samuel Heinrich Schwabe a montré que le nombre de taches, et donc l'activité solaire, suit un cycle périodique de 11 ans ([Schwabe 1844](#)). Une période de maximum d'activité est caractérisée par la présence de nombreuses taches tandis qu'on observe un faible nombre de taches durant les périodes d'activité minimale. Le nombre de taches durant un cycle varie d'un cycle à l'autre (cf. Fig 1.1). De plus, les observations montrent que la distribution spatiale des taches évolue également durant un cycle. Au début de celui-ci, elles émergent principalement autour de $\pm 30^\circ$ de latitude. Puis au cours du cycle, elles migrent des hautes latitudes vers l'équateur ([Charbonneau 2010, 2014](#)).

1.1.2 Champ magnétique des régions actives

[Hale \(1908\)](#) a montré que les taches solaires représentent en réalité des concentrations importantes de champ magnétique (cf. Fig 1.2). L'intensité du champ magnétique au niveau d'une

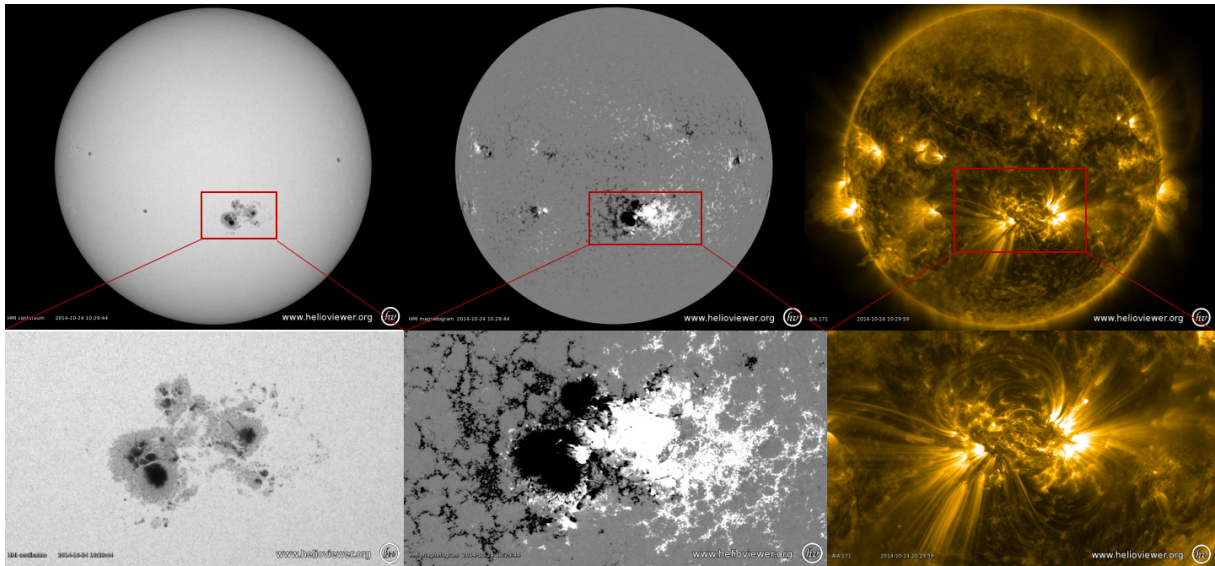


FIGURE 1.2 – Le Soleil observé par le satellite SDO. **Haut gauche** : carte de l'intensité du continuum du spectre solaire à 6173 \AA prise par l'instrument HMI qui présente d'importantes taches solaires. **Haut milieu** : magnétogramme de la composante longitudinale du champ magnétique obtenue par l'instrument HMI, c.-à-d. carte de la valeur algébrique de la projection du champ magnétique observé le long de la ligne de visée codée en niveau de gris. Les régions blanches indiquent que le champ magnétique est dirigé vers l'observateur tandis que les régions noires indiquent qu'il est dirigé vers l'opposé. **Haut droit** : image prise par l'instrument AIA en EUV (à 171 \AA) qui présente des boucles coronales lumineuses qui témoignent de la présence d'un champ magnétique. **Bas** : mêmes images, mais agrandies et centrées sur la région active NOAA 12192 à l'origine de nombreuses éruptions solaires.

tache peut atteindre plusieurs milliers de Gauss alors qu'elle est bien plus faible, $\sim 10\text{G}$, au niveau du reste de la surface solaire. Ces régions où le champ magnétique est intense sont appelées régions actives. Elles sont composées de polarités négatives (régions où le champ magnétique rentre dans le Soleil) et de polarités positives (régions où le champ magnétique sort du Soleil). Des lignes de champ magnétique pouvant monter à des altitudes de l'ordre de la centaine de mégamètres (Mm) au-dessus de la photosphère, relient les polarités de signes opposés. Les structures de plasma observées dans l'atmosphère solaire nommées boucles coronales (cf. Fig. 1.2) témoignent de la présence du champ magnétique.

En effet, dans l'atmosphère solaire, le plasma et le champ magnétique sont gelés l'un à l'autre (voir l'appendice A sur les bases de la magnétohydrodynamique et plus particulièrement la section A.4.2). Les boucles coronales observées au niveau des régions actives matérialisent donc des tubes de flux magnétique dans lesquels le plasma est confiné (cf. Fig. 1.2).

Le champ magnétique au niveau des régions actives est complexe et varie entre celles-ci (Longcope 2005). Cependant, certaines structures topologiques du champ magnétique peuvent se retrouver dans différentes régions. Citons par exemple les points nuls qui sont des points particuliers de l'espace où les trois composantes du champ magnétique s'annulent (Parnell et al. 1997), ou les *Bald Patches* ("régions chauves") qui sont des régions où les lignes de champ sont tangentes à la photosphère (Titov et al. 1993). Ces structures particulières définissent des séparatrices où se forment spontanément des courants électriques. Ce sont également des sites préférentiels pour des changements très localisés de la topologie du champ magnétique (e.g. Pariat et al. 2010; Galsgaard & Pontin 2011) : la reconnexion magnétique (cf. Append. A.5). Ce processus est au cœur de la libération d'énergie lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire (cf. Sect. 1.1.4).

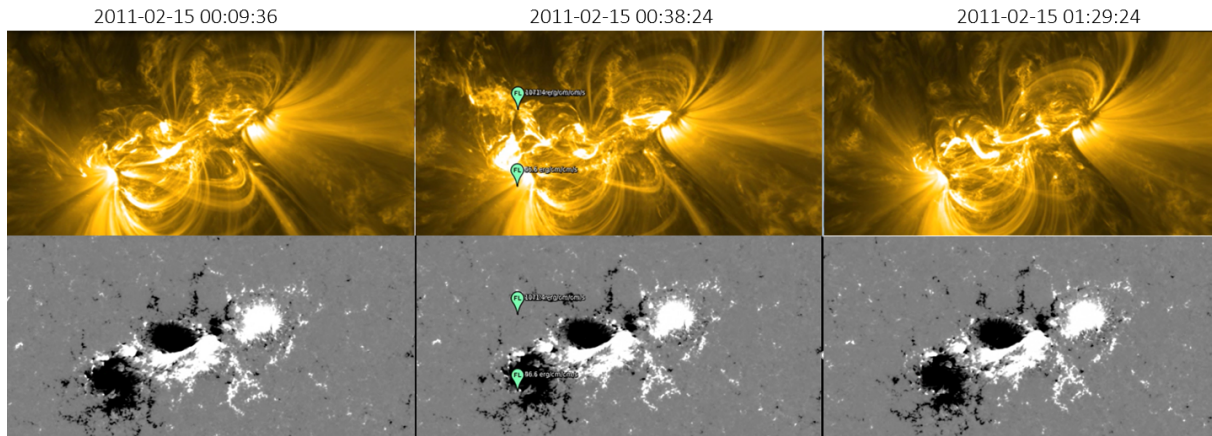


FIGURE 1.3 – **Haut** : images prises par l'instrument AIA en EUV (à 171 Å) durant l'éruption de la région active NOAA 11158 du 15 février 2011. Les marqueurs verts indiquent la localisation des flares. **Bas** : magnétogrammes de la même région mesurés aux mêmes instants par HMI/SDO. Durant les flares, le champ magnétique présente des variations majeures tandis que le champ magnétique photosphérique longitudinale ne varie quasiment pas.

Les régions actives sont également à l'origine de la majorité des phénomènes actifs ([van Driel-Gesztelyi & Green 2015](#)). Notons cependant que la dynamique du plasma et du champ magnétique n'est pas identique entre la surface solaire (la photosphère) et l'atmosphère solaire composée de la chromosphère et de la couronne solaire¹. Dans la couronne solaire, la dynamique du plasma est gouvernée par la force de Lorentz ($\beta \ll 1$, cf. Append. A.2), tandis qu'au niveau de la photosphère la force de Lorentz est compensée par la pression magnétique ($\beta \approx 1$, cf. Append. A.2). Il en résulte des échelles d'évolution temporelle différentes ([Schrijver 2009](#)). Le champ magnétique de la photosphère a une échelle de temps caractéristique qui est beaucoup plus longue que celle de la couronne solaire et est donc relativement insensible à l'évolution du champ magnétique coronal dans des périodes courtes. Par conséquent, lors d'événements rapides comme les éruptions solaires (cf. Sect. 1.1.4) liés à un changement de configuration du champ magnétique coronal, la distribution du champ photosphérique ne varie que peu (e.g. [Wang & Liu 2015](#), et Fig. 1.3). Au contraire, les mouvements continus au niveau de la photosphère peuvent induire une modification de la configuration magnétique coronale ([Green et al. 2018](#)).

1.1.3 Présence et importance des structures torsadées

Nous avons vu dans la sous-section (1.1.2) que du champ magnétique est présent dans l'atmosphère solaire. Les lignes de champ magnétique reliant les polarités ne sont que très rarement planes. Les boucles coronales présentent généralement des formes caractéristiques en *S* ou *Z* ([Savcheva et al. 2014](#)). De façon générale, l'atmosphère solaire contient un ensemble de structures magnétiques possédant une géométrie avec un fort degré de cisaillement/torsion ([Kuperus & Raadu 1974](#); [Raadu et al. 1988](#); [Amari & Aly 1992](#); [Schmieder & Shibata 1995](#); [Aulanier & Schmieder 2002](#); [Török & Kliem 2005](#); [Schrijver et al. 2008a](#); [Magara 2009](#); [Luoni et al. 2011](#); [Savcheva et al. 2011](#)).

Les observations de la surface solaire révèlent la présence d'un certain degré de torsion

1. La chromosphère et la couronne définissent deux couches composant l'atmosphère solaire. La chromosphère est la couche d'épaisseur $\sim 2\text{Mm}$ située directement au-dessus de la photosphère. La température dans la chromosphère est de l'ordre de 10^4K . La couronne solaire s'étend de la chromosphère à 1.5 rayon solaire. La température y est très élevée, $2 \sim 10^6\text{K}$, et sa densité plus faible, $2 \times 10^{8-9}\text{cm}^{-3}$. La couronne solaire émet essentiellement dans l'ultraviolet (UV) et X.

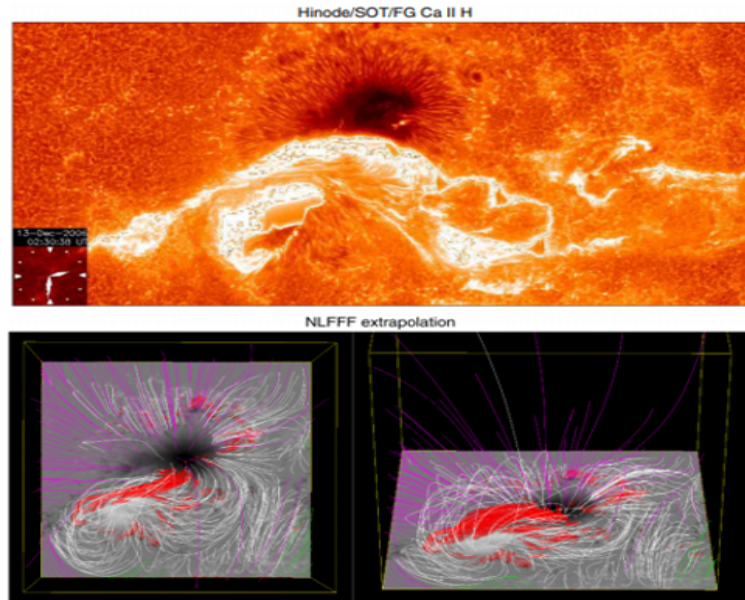


FIGURE 1.4 – Éruption de classe X au niveau de la région active 10930. **Haut** : image prise par le satellite HINODE et son instrument SOT dans la raie Ca II H (Toriumi & Wang 2019). **Bas** : Reconstruction 3D du champ magnétique coronal à partir d'un magnétogramme photosphérique 2D obtenu par l'instrument SOT/HINODE. Les différentes lignes correspondent à des lignes de champ magnétique juste avant l'éruption de classe X. Les régions rouges montrent les régions où le courant électrique est le plus élevé (Schrijver et al. 2008a).

à des échelles différentes. Au niveau des régions actives la présence d'élongations du champ magnétique émergent, appelées en anglais "magnetic tongues", suggère une torsion à grande échelle (Canou et al. 2009; Archontis & Hood 2010; Luoni et al. 2011; Poisson et al. 2020). L'existence des structures torsadées est également suggérée par les observations de mouvements de rotation des polarités magnétiques et parfois de mouvements de rotation des taches les unes autour des autres. Ces mouvements sont interprétés comme la conséquence de l'émergence de tubes de flux magnétique torsadés (e.g. Leka et al. 1993; Wang & Abramenko 2000; Fuentes et al. 2003; Zhang et al. 2007; Poisson et al. 2015; Vemareddy et al. 2016; Walker & Brown 2016; Yan et al. 2018).

La torsion et le cisaillement se retrouvent également au niveau des fibrilles et des filaments (et les protubérances) qui sont des structures observables dans l'atmosphère solaire. Des reconstructions du champ magnétique 3D des régions actives (cf. Chap. 2 et Fig. 1.4) permettent de confirmer la présence de structures torsadées et cisillées (Mandrini et al. 2006; Guo et al. 2008; Canou & Amari 2010; Inoue et al. 2012; Jiang & Feng 2013; Dalmasse et al. 2013a; Guo et al. 2017a; James et al. 2018).

La présence de cisaillement, de torsion ou d'enroulement des lignes de champ magnétique dans l'atmosphère solaire peut être révélée lors des phénomènes éruptifs (cf. Fig 1.5) que je présenterai dans la sous-section suivante (cf. Sect. 1.1.4). Par exemple, les jets coronaux présentent des mouvements hélicoïdaux (Shen et al. 2011; Hong et al. 2013; Liu et al. 2019). Les éjections de masse coronale montrent également des mouvements apparents de rotation du plasma que l'on peut ensuite mesurer in situ (Wang 2018; Al-Haddad et al. 2019).

1.1.4 Éruptions solaires : flare et éjection de masse coronale

La présence de concentrations magnétiques implique d'importantes quantités d'énergie magnétique qui peuvent être libérées lors de phénomènes actifs appelés éruptions solaires (Forbes

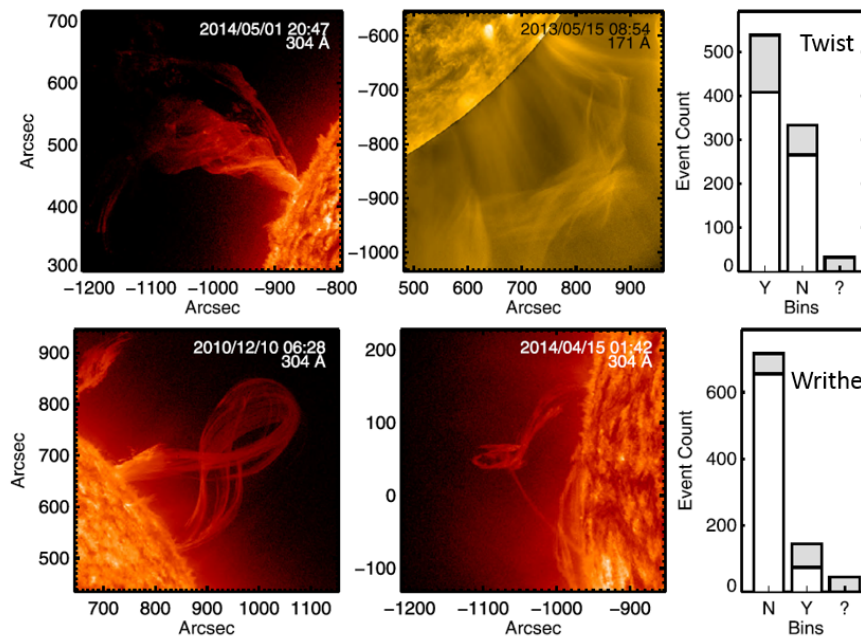


FIGURE 1.5 – **Haut** : exemples de régions actives présentant du "twist" lors d'une éruption solaire, observées par AIA. **Bas** : exemples de régions actives présentant du "writhe" lors d'une éruption solaire, observées par AIA. **Panneaux de droite** : nombre de régions actives présentant (Y) ou ne présentant pas (N) une structure en "twist" et "writhe" parmi un échantillon de 903 éruptions solaires. Les portions blanches représentent les régions où le "twist" ou le "writhe" est clairement identifiable. Tandis que les portions grises sont les régions où le "twist" ou le "writhe" peut être présent, mais une ambiguïté persiste. La colonne "?" représente les régions où il est impossible de conclure sur la présence de "twist" ou de "writhe". Adaptée de [McCauley et al. \(2015\)](#).

[et al. 2006](#)). Cette libération d'énergie a pour origine une rapide modification de la configuration magnétique de la région active, rendue possible entre autres par la reconnexion magnétique (cf. [Append. A.5](#)).

Observationnellement, une éruption solaire peut être composée d'une augmentation du rayonnement de la couronne (flare) et/ou d'une éjection de matière ([Shibata & Magara 2011](#)). Un flare se définit comme le chauffage rapide et temporaire d'une région restreinte de la chromosphère et de la couronne (cf. [Fig 1.6](#)). Lors de celui-ci, l'émission électromagnétique augmente dans une large gamme de longueurs d'onde allant des ondes radio kilométriques jusqu'aux rayons- γ ($\sim 10^{-3}\text{\AA}$) en passant par le visible dans le cas des flares les plus intenses. L'intensité maximale du flux énergétique en X-mou définit la classe du flare (cf. [Fig 1.4](#)).

Lors d'une éruption, la libération d'énergie peut également être accompagnée par une accélération de particules jusqu'à des vitesses relativistes ([Masson et al. 2009](#)), par des sursauts radio ([Pick et al. 1998](#)) et par l'embrillancement en $H\alpha$ de régions étroites et allongées appelées rubans d'éruptions ([Schmieder et al. 1987](#)).

Dans certains cas, les flares s'accompagnent d'une éjection de plasma. On parle alors de flare éruptif. Si la structure éjectée arrive à s'étendre spatialement et peut être ensuite observée dans la haute couronne, elle définit alors une éjection de masse coronale (Coronal Mass Ejection, CME). Durant une CME, une grande quantité de plasma ($10^{12} - 10^{13}\text{kg}$) est éjectée brusquement depuis la couronne solaire à des vitesses $\sim 400 - 2500\text{km s}^{-1}$ ([Chen 2011](#); [Gopalswamy et al. 2004](#)). En occultant suffisamment le Soleil (à l'aide de coronographes), les éjections de masse coronale, plus denses que leur environnement, peuvent être observées en lumière blanche. Cela

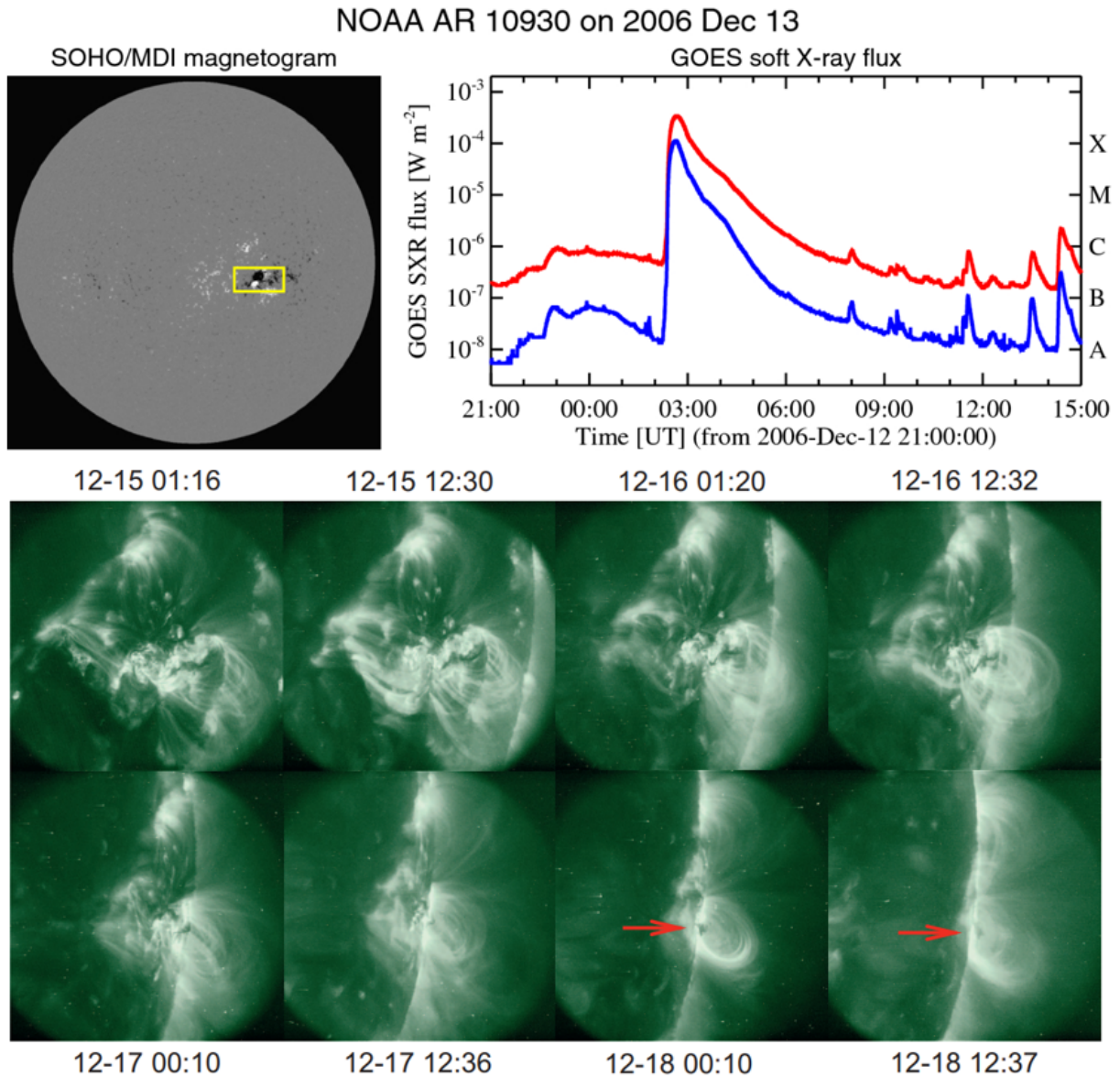


FIGURE 1.6 – Éruption de classe X au niveau de la région active NOAA 10930. **Haut** : la première figure montre le magnétogramme obtenu par l'instrument MDI à bord du satellite SOHO. La deuxième représente le flux en rayonnement X pris par le satellite GOES durant l'éruption. La courbe rouge représente la longueur d'onde à 1-8 Å et la courbe bleue à 0.5-4 Å (Toriumi & Wang 2019). **Bas** : évolution de la région active observée par le satellite TRACE à 195 Å entre le 15 et le 18 décembre 2006. Une proéminence est marquée par la flèche rouge (Bong et al. 2014).

résulte de la diffusion du rayonnement de la photosphère par les électrons libres de la couronne (diffusion Thomson, e.g. Thompson et al. 1998).

Au contraire si aucune structure magnétique n'est éjectée, l'éruption est désignée sous le terme de flare confiné (e.g. Török & Kliem 2005; Masson et al. 2017).

1.1.5 Propagation des CMEs dans l'espace interplanétaire

En se propageant dans l'espace interplanétaire, une éjection de masse coronale devient une éjection de masse coronale interplanétaire (ICME). Les ICMEs entraînent des variations de la densité, de la température et du champ magnétique du milieu interplanétaire (Wimmer-

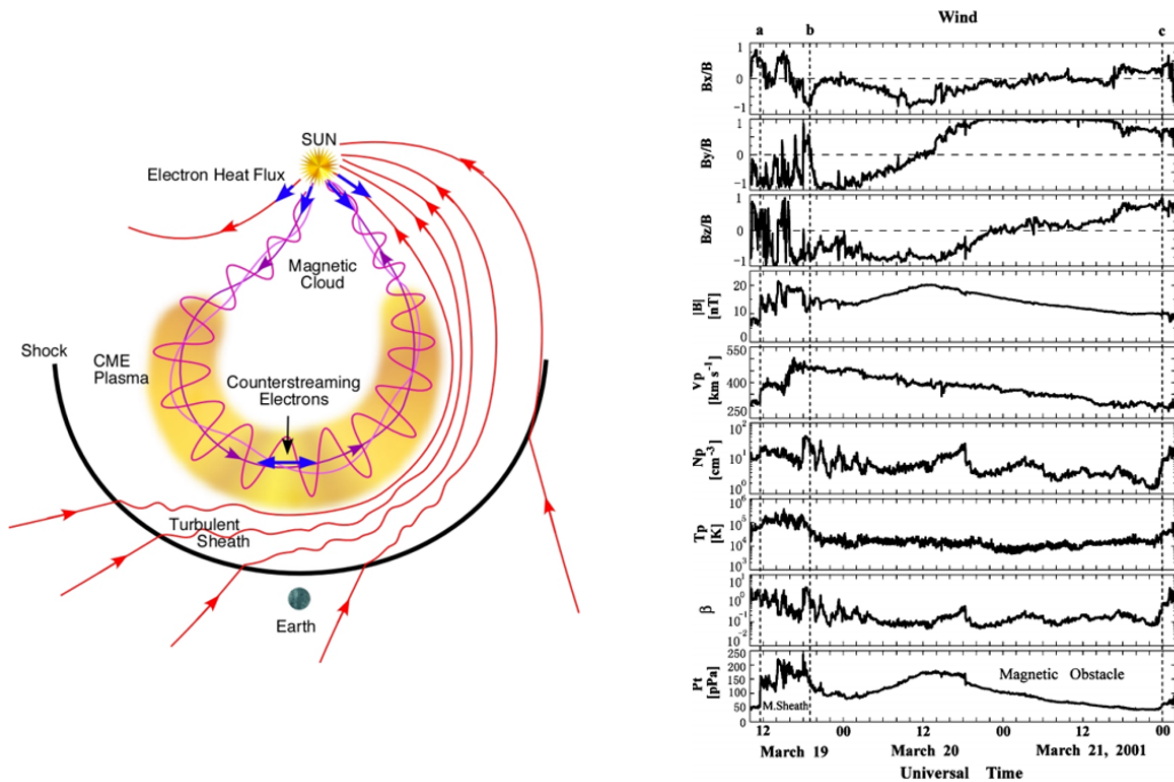


FIGURE 1.7 – **Gauche** : structure 3D d'une ICME (Zurbuchen & Richardson 2006). **Droite** : variations des paramètres du vent solaire au passage d'une ICME. De haut en bas évolution de : l'orientation du champ magnétique, l'intensité du champ magnétique, la vitesse du vent solaire, la densité de protons, la température des protons, le paramètre β et la pression totale perpendiculaire (Jian et al. 2006).

Schweingruber et al. 2006). Ces variations sont mesurées in situ par les différentes sondes présentes dans le milieu interplanétaire telles que ACE, Helios ou encore Wind. Les ICMEs se propagent à une vitesse supersonique de 300 à 2000 km s⁻¹.

L'intensité du champ magnétique de l'ICME diminue lors de son expansion dans le milieu interplanétaire, mais elle reste suffisante pour interagir avec le vent solaire². En particulier, le champ magnétique interplanétaire du vent solaire peut être balayé par le passage d'une ICME suffisamment intense. Les ICMEs détectées dans le vent solaire sont nommées nuages magnétiques (Burlaga et al. 1981). Les nuages magnétiques sont caractérisés par un ensemble de signatures observées telles qu'une augmentation de l'intensité du champ magnétique, un paramètre β inférieur à 1 ainsi qu'une rotation graduelle de la direction du champ magnétique (cf. Fig 1.7). On considère qu'environ 30% des ICMEs sont associées à des nuages magnétiques (Gosling 1990). Dans deux tiers des événements, la trajectoire des satellites qui rencontrent une ICMEs s'effectue loin du centre de l'ICME et ne permet donc pas d'identifier un tube de flux magnétique (Démoulin 2010; Jian et al. 2006).

La structure magnétique des ICMEs peut interagir avec le champ magnétique terrestre, c.-à-d. la magnétosphère. En effet, le champ magnétique des ICMEs a une orientation opposée à celle du champ magnétique de la magnétosphère. Ainsi, la reconnexion magnétique est possible entre le champ magnétique interplanétaire et celui de la Terre (cf. Append. A.5). Cette reconnexion entraîne un transfert d'énergie vers les régions internes de la magnétosphère (Aka-

2. Le vent solaire est un flux de particules chargées continuellement éjecté de l'atmosphère solaire. Le vent solaire émis par les régions proches des pôles du Soleil est beaucoup plus rapide que le vent des régions équatoriales.

sofu 1981; Dungey 1961). Il en résulte une intensification du courant électrique de ces régions. Quand la perturbation magnétique s'étend à l'échelle mondiale, on parle alors d'orage magnétique (Chapman 1962; Humboldt 1978). Les variations du milieu interplanétaire causées par les ICMEs modulent les effets de l'impact de l'activité solaire sur l'environnement terrestre.

1.2 La météorologie de l'espace

Dans cette section, nous verrons la nécessité de se prémunir des effets néfastes de l'activité solaire sur nos technologies (cf. Sect. 1.2.1), et de ce fait l'intérêt de pouvoir prédire la survenue des éruptions (cf. Sect. 1.2.2).

1.2.1 Conséquence de l'activité solaire sur les technologies humaines

L'activité solaire sous ses différentes formes a un impact sur l'environnement magnétique terrestre et sur les technologies humaines (Bothmer & Daglis 2007). Entre autres, les communications satellitaires peuvent être perturbées, des signaux GPS peuvent être perdus à cause de variations électroniques au niveau de l'ionosphère, des courants induits peuvent endommager le réseau électrique, etc.

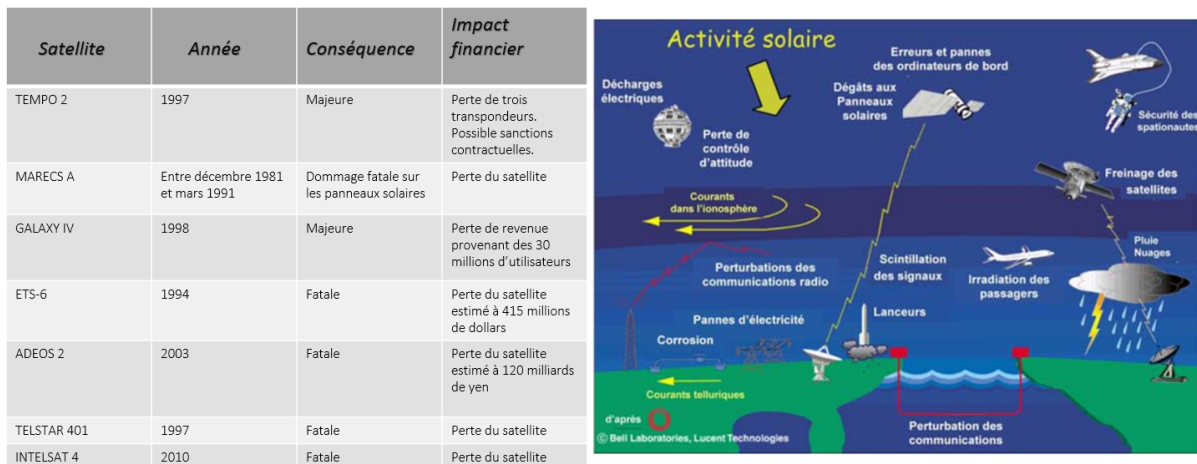


FIGURE 1.8 – **Gauche** : tableau regroupant des exemples de satellites qui présentent des anomalies causées par l'activité solaire. **Droite** : schéma présentant quelques exemples d'infrastructures humaines sensibles à l'activité solaire dans notre environnement.

Les premières conséquences de l'activité solaire ont été enregistrées il y a plus d'un siècle par l'industrie télégraphique (Knipp 2015) et il y a 80 ans sur le réseau électrique (Davidson 1940). Le 19 mars 1847, Barlow (1849) nota des dysfonctionnements des télégraphes sur plusieurs lignes de chemin de fer pendant toute la période où une aurore boréale apparaissait comme très brillante. Il conjectura alors que les courants électriques observés sont attribués à l'action de perturbations aurorales. Il s'agit certainement de l'une des premières mesures de courants induits géomagnétiquement dans un système technologique.

Depuis de très nombreuses manifestations de perturbations causées par l'activité solaire ont été observées (Morley 2020). De nombreux secteurs industriels tels que l'énergie, la télécommunication, les transports peuvent être impactés plus ou moins directement (Hapgood & Thomson 2010). Puisque ces différents secteurs sont de plus en plus interconnectés, une défaillance d'un de leurs systèmes peut entraîner une réaction en cascade et ainsi conduire à des pannes généralisées. Les conséquences économiques peuvent alors être immenses (cf. Fig. 1.8).

Par exemple, les satellites et plus précisément leurs systèmes embarqués sont particulièrement vulnérables aux perturbations causées par une augmentation soudaine des radiations et de la charge électrique. Durant les événements solaires d'octobre 2003, plus de 30 satellites ont présenté des anomalies de fonctionnements. Un fut même totalement inopérant. Ces dysfonctionnements ont un coût très élevé. Il a été ainsi reporté qu'un événement majeur tel que celui de Carrington en 1869 pourrait causer des pertes de revenus d'environ 30 milliards de dollars pour les opérateurs satellitaires (Odenwald & Green 2007).

Au même titre que des constructions parasismiques existent pour se prévenir des risques de tremblement de terre, les différents secteurs économiques doivent avoir une réponse adaptée aux risques liés à l'activité solaire. Entre autres, cela peut passer par :

- la construction de protections robustes afin de résister aux diverses variations de l'environnement ;
- un ajustement de l'utilisation des composants à risques pouvant impliquer une reconfiguration temporelle du système durant un événement solaire ;
- la création de service dédié à l'évaluation et à la prévention des risques.

L'ensemble de ces approches nécessitent en amont une connaissance approfondie en physique de la relation Soleil-Terre. Cette relation est au cœur d'une toute nouvelle discipline appliquée en pleine émergence : la météorologie de l'espace. Un des objectifs de ce nouveau domaine est la prédiction quantitative de l'impact de l'activité solaire sur l'environnement terrestre et sur les technologies humaines.

1.2.2 Prédiction des éruptions solaires

L'impact potentiel de l'activité solaire sur les infrastructures humaines étant de mieux en mieux connu, la météorologie spatiale est devenue un sujet de préoccupation législative (e.g. Caldwell et al. 2017; Office 2015). Aux États-Unis par exemple, en octobre 2016, un décret présidentiel nommé "Coordinating Efforts to Prepare the Nation for Space Weather Events" porte sur les efforts gouvernementaux menés pour se préparer aux risques engendrés par l'activité solaire afin de minimiser l'impact sur l'économie et la population. En particulier, ce décret précise que le gouvernement fédéral doit avoir la capacité de prévoir et de détecter un événement solaire (voir également Knipp & Gannon 2019).

En parallèle à l'élaboration de lois et de décrets, ces dernières années ont été marquées par le développement de structures et de services dédiés à la météorologie de l'espace. Au niveau international, l'ONU a mis en place un groupe de travail se concentrant sur cette thématique, et l'ESA a développé un programme de météorologie de l'espace dont la France fait partie. Au niveau national, il se développe également de plus en plus de centres de prévision, par exemple le "National Oceanic and Atmospheric Administration's (NOAA) Space Weather Prediction Centre (SWPC)" aux États-Unis opérationnel depuis 1941 (Siscoe 2000) ; ou plus récemment le "United Kingdom's Met Office Space Weather Operation Center" (Murray et al. 2017). En France, dans le cadre des activités de la Défense et au sein de l'armée de l'air française s'est créé un service d'alerte aux événements et activités solaires, connu sous le nom de FEDOME. Le Service international de l'environnement spatial rend compte de l'étendue des services mondiaux de météorologie spatiale³. Récemment, l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale, OACI⁴, a lancé un nouveau service qui recueille et diffuse des bulletins de météorologie de l'espace destinés à l'aviation internationale, en utilisant des données collectées auprès de centres mondiaux établis par 14 pays (dont la France). Comme le service proposé par l'OACI, de nombreux centres se reposent sur des données recueillies par des organismes de recherche.

3. <http://www.spaceweather.org/>

4. <https://www.icao.int/Newsroom/Pages/FR/New-global-aviation-space-weather-network-launched.aspx>

Les problématiques soulevées par la météorologie de l'espace sont multiples⁵. Les objectifs et les enjeux des centres prévisionnels sont donc variés. Par exemple, une éruption solaire n'implique pas forcément une perturbation de l'environnement terrestre. Lorsqu'elle a lieu, il faut alors déterminer si elle va impacter la Terre et si oui sous quelle forme (flux de particules chargées, rayonnements électromagnétiques, ICME ..). Dans ce manuscrit, la problématique de météorologie de l'espace qui nous intéresse est celle de la prédiction des éruptions solaires. Nous chercherons une réponse à la question suivante : une éruption solaire aura-t-elle lieu dans un futur plus ou moins proche ?

À l'heure actuelle, il existe un certain nombre de méthodes de prédiction dont les efficacités ont été comparées dans la revue [Barnes et al. \(2016\)](#). À partir d'un même jeu de données, [Barnes et al. \(2016\)](#) ont montré qu'aucune méthode de prédiction ne présente de résultats concluants. Leurs performances sont à peine meilleures que celle d'une prédiction purement aléatoire. En particulier, toutes les méthodes annoncent non éruptives un certain nombre de régions éruptives. Ce type d'erreur est potentiellement très coûteux. Plus récemment, de nouvelles méthodes notamment basées sur l'apprentissage profond se sont développées (e.g. [Park et al. 2018a](#); [Li et al. 2020](#)). Ces nouveaux algorithmes ont également présenté des résultats limités pour les éruptions de classe $\geq M$. Finalement, la probabilité de détection d'une éruption majeure de classe X 24h à l'avance n'est de l'ordre que de 40%. De plus, environ 15% des éruptions majeures ne peuvent pas être prédites suffisamment à l'avance en raison d'un manque d'observations à partir d'instruments éloignés de la ligne de visée Terre-Soleil ([Park et al. 2020](#)).

Le problème principal des méthodes existantes est qu'elles sont basées sur des approches empiriques et statistiques (e.g. [Barnes et al. 2016](#); [Yu et al. 2010](#); [Falconer et al. 2011, 2014](#)). En effet, la plupart des méthodes de prévision sont basées sur la paramétrisation des données solaires observées pour caractériser la région active ciblée, comme le calcul du flux magnétique total, l'énergie injectée, etc. Ensuite, la valeur des paramètres calculés est comparée avec celles de régions actives observées précédemment. Il est alors supposé que la région active observée va avoir le même comportement éruptif que les régions actives ayant les mêmes caractéristiques (e.g. [Bobra & Couvidat 2015](#); [Bobra & Ilonidis 2016](#)). Il en ressort finalement une probabilité d'éruption. Plus il y a de mesure sur d'anciennes régions actives, plus la probabilité va être précise. Or la fréquence d'une éruption majeure est très faible. Durant un cycle solaire, il n'y a en moyenne qu'une centaine d'éruptions de classe X ([Aschwanden & Freeland 2012](#)). Les approches statistiques sont donc limitées. Pour les algorithmes d'apprentissage automatique, la rareté d'une éruption majeure fait qu'il existe peu de données pour entraîner le modèle (e.g. [Qahwaji & Colak 2007](#); [Sadykov et al. 2018](#); [Florios et al. 2018](#)). D'autre part, tous les paramètres utilisés dans les différentes méthodes reposent sur des conditions nécessaires et non suffisantes ([Guennou et al. 2017](#)). On sait donc au mieux si l'éruption peut avoir lieu et non si elle va réellement avoir lieu.

Une méthode de prédiction idéale serait construite à partir de critères déterministes basés sur des conditions suffisantes.

1.3 Introduction à la physique des éruptions

Pour l'élaboration de critères déterministes permettant de prédire l'éruptivité d'une région active, il est nécessaire de comprendre la physique des éruptions et des processus qui les déclenchent. Dans cette section, je vais ainsi présenter un rapide état des lieux des connaissances sur ce sujet.

5. Dans cette thèse, je me concentre uniquement sur la météorologie de l'espace en lien avec les éruptions solaires. En pratique, l'environnement terrestre peut être également impacté par des rayonnements cosmiques sans liens avec le Soleil.

Chaque éruption est différente, néanmoins nous verrons ci-après qu'il existe des modèles standards d'éruptions solaires permettant d'expliquer leurs principales signatures observationnelles (cf. Sect. 1.3.2). Dans cette section, j'introduirai également l'énergie libre qui permet de quantifier l'énergie pouvant être libérée lors d'une éruption solaire (cf. Sect. 1.3.1).

1.3.1 Énergie magnétique

Les éruptions solaires sont caractérisées par une libération rapide d'une grande quantité d'énergie magnétique. Ci-après, nous verrons qu'une partie seulement de l'énergie magnétique peut être libérée (cf. Sect. 1.3.1.2).

L'énergie disponible lors d'une éruption est obtenue à partir d'une décomposition du champ magnétique en un champ potentiel et en un champ porteur de courants électriques (cf. Sect. 1.3.1.1).

1.3.1.1 Champ magnétique potentiel et non potentiel

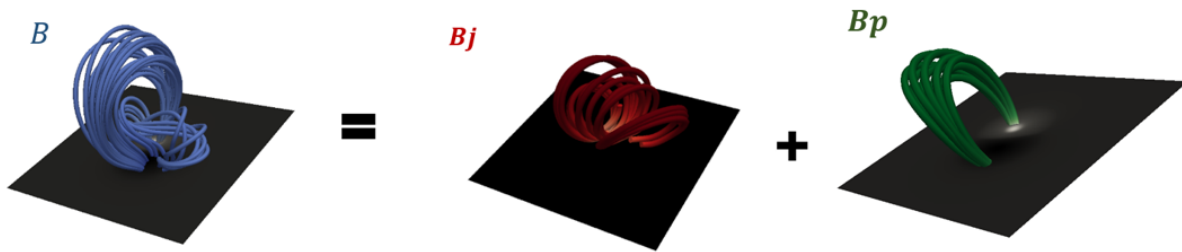


FIGURE 1.9 – Exemple d'une décomposition du champ magnétique (\mathbf{B} , en bleu) en un champ magnétique potentiel (\mathbf{B}_p , en vert) et un champ magnétique porteur de courants électriques (\mathbf{B}_j , en rouge).

Les éruptions solaires sont des phénomènes violents pouvant libérer une énergie allant jusqu'à 10^{26} J (Sturrock et al. 1984), or seule l'énergie magnétique peut être la source de tels événements (Svestka 1976; Dennis & Schwartz 1989). À cause de la forte concentration de champ magnétique dans la couronne solaire, cette dernière dépasse en effet de plusieurs ordres de grandeur tous les autres types d'énergies. Dans un volume V , l'énergie magnétique est égale à :

$$E_v = \int_v \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV. \quad (1.1)$$

Il est cependant nécessaire de distinguer l'énergie qui va être réellement libérée lors d'une éruption de celle qui va subsister. Pour cela, la première étape consiste à diviser le champ magnétique en une composante potentielle et en une composante non potentielle, possédant chacune une énergie associée (cf. Fig 1.9) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_j \quad (1.2)$$

$$E_p = \int_v \frac{\mathbf{B}_p^2}{2\mu_0} dV; \quad E_j = \int_v \frac{\mathbf{B}_j^2}{2\mu_0} dV. \quad (1.3)$$

Le champ magnétique B_p est potentiel, $\nabla \times \mathbf{B}_p = 0$, et dérive donc d'un potentiel scalaire ϕ tel que :

$$\mathbf{B}_p = \nabla\phi. \quad (1.4)$$

Son flux étant conservé ($\nabla \cdot \mathbf{B}_p = 0$), le potentiel scalaire est solution de l'équation de Laplace, $\Delta\phi = 0$. De plus sa densité de courants électriques associée, \mathbf{j}_p vaut :

$$\mathbf{j}_p = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_p = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla\phi) = 0. \quad (1.5)$$

Le champ magnétique potentiel ne porte donc aucun courant électrique.

Pour un champ magnétique \mathbf{B} donné dans un volume V délimité par une surface δV , si le champ potentiel possède la même distribution surfacique normale que \mathbf{B} , c.-à-d :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_p|_{\delta V} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\delta V} \quad (1.6)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire sortant normal à δV , alors le potentiel scalaire ϕ satisfait la condition de Neumann :

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\delta V} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\delta V}. \quad (1.7)$$

L'équation (1.4) couplée à la condition (1.7) définit un unique champ magnétique potentiel.

Le champ potentiel étant unique, le champ non potentiel, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$, l'est également. L'équation (1.6) implique que la composante normale du champ \mathbf{B}_j soit nulle le long de la surface :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_j|_{\delta V} = 0 \quad (1.8)$$

D'autre part, le champ non potentiel contient l'intégralité des courants électriques :

$$\nabla \times \mathbf{B}_j = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (1.9)$$

1.3.1.2 Minimum d'énergie et énergie libre

En injectant la décomposition du champ magnétique, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_j$ (cf. Eq. 1.2), dans l'équation (1.1) de l'énergie magnétique on obtient :

$$E = \int_{\mathbf{v}} \frac{(\mathbf{B}_p^2 + \mathbf{B}_j^2)}{2\mu_0} dV \quad (1.10)$$

$$E = E_p + E_j + \frac{1}{\mu_0} \int_S (\phi \mathbf{B}_j) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathbf{v}} \phi (\nabla \cdot \mathbf{B}_j) dV. \quad (1.11)$$

Puisque la composante normale du champ porteur de courants est nulle le long de la surface du domaine (cf. Eq. 1.6), l'intégrale surfacique s'annule. De même, le champ magnétique non potentiel étant théoriquement solénoïdal ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), l'intégrale volumique est nulle. On en déduit la relation :

$$E_v = E_j + E_p \quad (1.12)$$

Cette équation est connue sous le nom de théorème de Thompson (e.g. [Evans 2010](#)). L'énergie magnétique d'un champ magnétique parfaitement solénoïdal est la somme de son énergie potentielle et de son énergie non potentielle.

Dans un volume fini, considérons un champ magnétique où seule sa distribution surfacique est connue. Comme mentionné précédemment (cf. Sect. [1.3.1.1](#)), à partir d'une distribution du flux magnétique donnée, on peut en déduire un unique champ magnétique potentiel, \mathbf{B}_p qui respecte l'équation (1.6). Par conséquent, l'énergie potentielle est également fixée. Néanmoins, pour une distribution $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\delta V}$ donnée, il existe une infinité de possibilités pour \mathbf{B} dans le volume et donc de \mathbf{B}_j . Puisque l'énergie magnétique est positive, la solution qui possède le minimum d'énergie magnétique est celle pour laquelle $E_j = 0$ (et donc $B_j = 0$). Ainsi pour une distribution surfacique donnée du champ magnétique, le minimum d'énergie est obtenu par la configuration potentielle du champ magnétique ([Cowling 1976](#); [Sakurai 1989](#)).

Les éruptions impliquent des modifications rapides de la configuration magnétique coronale de l'ordre de quelques minutes ([Schrijver 2009](#)). Ainsi, au moment même de l'éruption, le champ photosphérique reste donc inchangé (cf. Sect. [1.1.2](#)). Par conséquent, le champ potentiel, qui est entièrement déterminé par la distribution du champ magnétique à la frontière, ne varie également pas. Son énergie magnétique est donc constante. L'énergie disponible/libre lors d'une éruption est donc la différence entre l'énergie totale du domaine et l'énergie potentielle :

$$E_{Libre} = E_v - E_p \quad (1.13)$$

$$= E_j \quad (1.14)$$

L'énergie libérable lors d'une éruption est donc l'énergie non potentielle. Les régions actives dont la configuration magnétique est fortement non potentielle, contiendraient donc plus d'énergie libre et pourraient conduire à une plus grande libération d'énergie (e.g. [Schrijver et al. 2005](#); [Dun et al. 2007](#); [Jing et al. 2010](#)). La non-potentialité des systèmes magnétiques peut être due en partie à la torsion et aux cisaillements des lignes de champ magnétique. Dans la section ([5.3](#)), je reviendrai sur l'injection d'énergie en comparaison avec l'injection d'hélicité.

1.3.2 Modèles standards des éruptions solaires : déroulement et déclenchement

Les éruptions solaires ont pour origine une reconfiguration du champ magnétique présent dans l'atmosphère solaire. Les signatures observationnelles des éruptions solaires présentent un certain nombre de similitudes (lors de l'accélération et l'émission des particules par exemple). [Carmichael \(1964\)](#); [Sturrock \(1966\)](#); [Hirayama \(1974\)](#); [Kopp & Pneuman \(1976\)](#) ont ainsi développé un modèle standard en 2D, nommé modèle CSHKP (d'après le nom des différents auteurs), afin d'expliquer les différentes signatures communes observées (cf. Fig. [1.10](#)).

Après avoir présenté ce modèle (cf. Sect. [1.3.2.1](#)), j'introduirai la problématique du déclenchement des éruptions solaires (cf. Sect. [1.3.2.2](#)) qui, à l'heure actuelle, reste encore très mal comprise.

1.3.2.1 Le modèle CSHKP

Le modèle CSHKP est essentiellement bidimensionnel et cherche à expliquer les émissions électromagnétiques d'un système en éruption. Il repose sur le développement d'un tube de flux (ou plasmöïde) sous des arcades magnétiques. La montée du plasmöïde entraîne un pincement des lignes de champ des arcades sous le plasmöïde créant une nappe de courants électriques verticale ([Lin & Forbes 2000](#)). Cette nappe de courants située entre deux champs magnétiques non potentiels d'orientation opposée va être le site préférentiel de la reconnexion magnétique

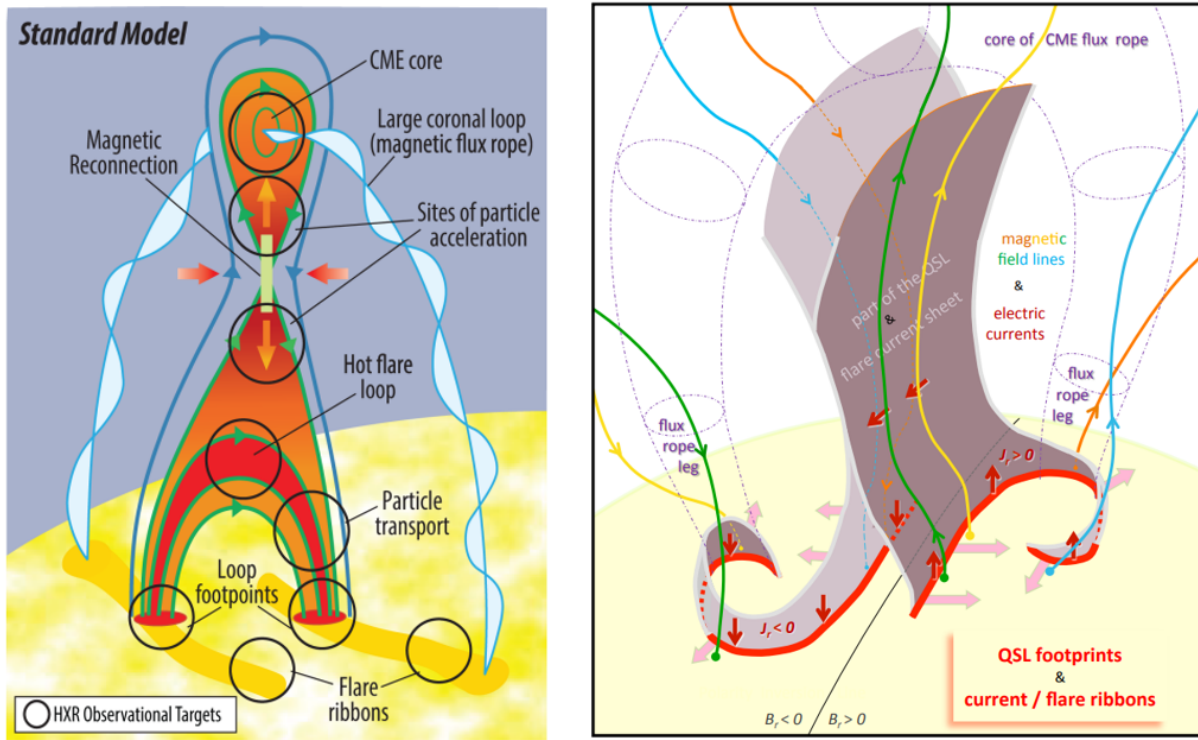


FIGURE 1.10 – **Gauche** : modèle standard d’une éruption solaire qui montre les principales régions d’émission X (Christe et al. 2017). **Droite** : extension 3D du modèle CSHKP (Janvier et al. 2013a).

(cf. Append. A.5). Cela donne naissance à de nouvelles lignes de champ magnétique dont une partie se referme au niveau de la surface solaire (c.-à-d. les boucles post-éruptives) et dont l’autre partie s’enroule autour du plasmioïde.

À partir du site de reconnexion, l’énergie est transportée le long des lignes de champ magnétique vers la photosphère (par des particules accélérées, par la conduction thermique, par des ondes). Il en résulte un chauffage local aux pieds des lignes de champ magnétique se traduisant par une émission électromagnétique dans une large gamme de longueurs d’onde (c.-à-d. les rubans d’éruptions).

Notons que le modèle CSHKP d’éruption présenté ici n’est pas unique (Shibata 1998), mais il reste le plus accepté et répandu au sein de la communauté. De plus, même s’il est initialement basé sur une géométrie 2D simple, il reste pour autant généralisable à différentes topologies magnétiques (Chen 2011).

Cependant, les observations de l’atmosphère solaire ont révélé un ensemble de caractéristiques 3D du champ magnétique qui ne sont pas explicables à l’aide du modèle standard 2D telles que la présence de boucles coronales cisailées (Asai et al. 2003; Warren et al. 2011). Aulanier et al. (2012, 2013); Janvier et al. (2013a) ont ainsi étendu le modèle CSHKP en 3D pour tenir compte des processus/observations absents du modèle précédent et pour expliquer la distribution spatiale des différentes structures d’émissions lumineuses (rubans d’éruptions, boucles post-éruptives, etc.). Leur description repose sur un tube de flux magnétique torsadé entouré par des arcades magnétiques environnantes (cf. Fig. 1.10, panneau de droite). La reconnexion magnétique est permise entre le champ quasi potentiel ambiant et le tube de flux. Il en résulte une paire de rubans parallèles de part et d’autre de la ligne d’inversion. Les rubans sont sous la forme de J ou J -inversé ; comme observés dans l’atmosphère solaire (cf. Fig. 1.10, panneau de droite, et Chandra et al. 2009; Janvier et al. 2016; Zhao et al. 2016; Dudík et al. 2016). Au niveau des crochets du J ou J -inversé dans chacune des polarités magnétiques se

trouvent les pieds photosphériques du tube de flux magnétique éjecté lors de l'éruption.

Là où le modèle 2D permet d'expliquer les émissions électromagnétiques émises lors d'une éruption solaire, le modèle en 3D s'intéresse davantage à la topologie et à la morphologie du champ magnétique. Par exemple, la structure magnétique 3D présente des volumes où la connectivité magnétique subit de forts gradients. Ces structures topologiques appelées *quasi-séparatrix layer* (QSL, Priest & Démoulin 1995; Demoulin et al. 1996), non présentes dans le modèle 2D, sont fortement propices à la formation de nappes de courant et au développement de la reconnexion magnétique. L'ensemble des caractéristiques 3D permet de rendre compte de la distribution spatiale des émissions UV et X dans l'atmosphère solaire (Masson et al. 2009; Reid et al. 2012), ainsi que l'évolution temporelle des rubans d'éruptions (Janvier et al. 2013a). Le modèle 3D inclut également la question du déclenchement des éruptions, processus intrinsèquement 3D (cf. Sect. 1.3.2.2).

1.3.2.2 Déclenchement des éruptions solaires

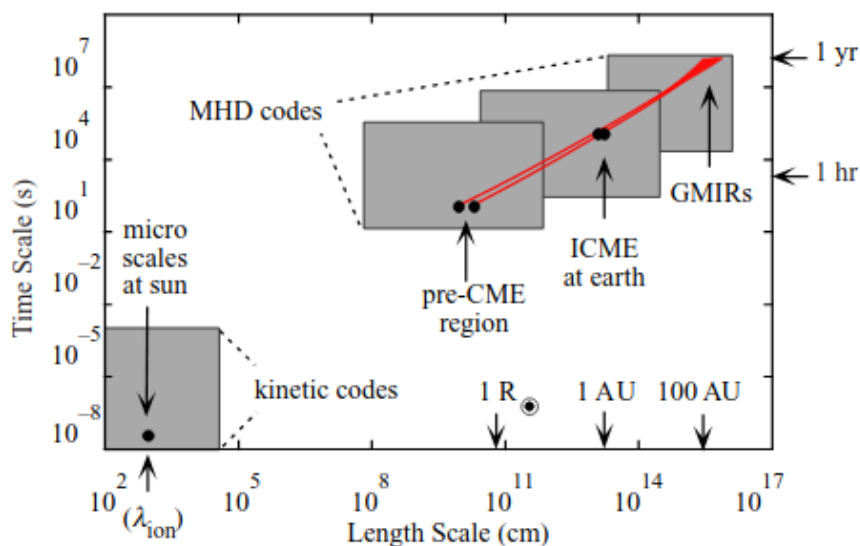


FIGURE 1.11 – Schéma décrivant l'ensemble des échelles spatiales et temporelles associées au développement d'une CME. Les différents rectangles gris indiquent les échelles couvertes par les codes numériques non hybrides existants. La ligne rouge marque l'évolution d'une CME depuis sa région active d'origine, vers le milieu interplanétaire (ICME) pour finir en structure à grande échelle (global merged interaction region, GMIR). Adaptée de Forbes et al. (2006).

Si le modèle standard est globalement accepté pour expliquer les émissions électromagnétiques émises lors d'une éruption solaire, la question du déclenchement de ces éruptions reste quant à elle encore très discutée et controversée.

De façon générale, le déclenchement des éruptions requiert que le champ magnétique coronal dépasse un certain seuil au-delà duquel l'équilibre entre la pression magnétique (dirigée vers le haut) du champ magnétique porteur de courants électriques et la tension magnétique du champ environnant (dirigée vers le bas) n'est plus respecté. L'éruption a lieu quand le système entre subitement dans un régime où la pression domine. L'éruption s'accompagne d'une reconfiguration des lignes de champ magnétique par reconnexion magnétique.

La structure magnétique éruptive peut alors être partiellement détruite dans le cas des flares confinés. Si au contraire, la structure magnétique arrive à s'étendre spatialement, cela

peut aboutir à une CME. L'expansion spatiale du champ magnétique ainsi que la reconnexion magnétique vont contribuer à diminuer l'énergie magnétique du système (Priest & Forbes 2007).

Il est maintenant admis que les éruptions solaires sont dues à une telle déstabilisation violente des champs magnétiques coronaux précédemment alimentés en énergie. Néanmoins, les mécanismes détaillés qui amènent le système à un stade éruptif, et qui finissent par engendrer l'éruption, ne sont pas encore totalement compris. Plusieurs modèles de déclenchement des éruptions, basés sur des mécanismes différents, existent (voir les revues de Aulanier 2013; Green et al. 2018; Schmieder et al. 2013). Certains reposent sur l'augmentation de la pression magnétique en augmentant par exemple le flux magnétique axial du tube de flux (e.g. Kliem et al. 2013); tandis que d'autres reposent sur la diminution de la tension magnétique du champ magnétique en arcade qui enveloppe le champ magnétique porteur de courant (e.g. Moore et al. 2001; Forbes & Isenberg 1991).

Dans les différents modèles, il est important de distinguer les mécanismes qui conduisent le champ magnétique coronal d'un état stable à un état instable (les "drivers") et les mécanismes qui déclenchent l'éruption (les "trigger"). Les processus responsables du développement du champ magnétique coronale juste avant l'éruption sont distincts de ceux impliqués dans son déclenchement (e.g. Sterling et al. 2007a,b; Schrijver et al. 2008b). Green et al. (2018) ont souligné que la majorité des mécanismes physiques proposés dans les modèles de déclenchement d'éruptions permettent d'expliquer le passage d'une configuration magnétique stable à une configuration instable, mais ne permettent pas d'expliquer le déclenchement de l'éruption en lui même. Autrement dit, ce sont des "drivers" et non des "triggers". Par exemple, l'instabilité de "kink" (Török et al. 2004) entraîne une déformation de la forme du tube de flux magnétique, mais ne peut pas être responsable de son expansion spatiale.

À l'heure actuelle, deux processus de "triggers" prédominent (Green et al. 2018) : l'instabilité de Torus (Van Tend & Kuperus 1978; Kliem & Török 2006; Kliem et al. 2014) et les modèles de type "flare-reconnection" (Lin & Forbes 2000; Vršnak 2008). Dans ce dernier, la reconnexion joue un rôle dans l'évolution du champ magnétique coronal vers une configuration instable, mais également dans le déclenchement même de l'éruption (e.g. Temmer et al. 2010; Karpen et al. 2012; Kumar et al. 2019).

L'instabilité de Torus apparaît également comme un processus prometteur pour le déclenchement d'une éruption (Démoulin & Aulanier 2010; Zuccarello et al. 2015; James et al. 2018; Zou et al. 2020). Cette instabilité magnétohydrodynamique (MHD) 3D caractérise la perte d'équilibre d'une structure magnétique toroïdale porteuse de courants électriques, telle qu'un tube de flux magnétique cisailé/torsadé, si l'intensité du champ magnétique qui la confine décroît trop rapidement avec l'altitude. Le taux de variation de l'intensité du champ magnétique avec l'altitude est quantifiable par l'indice d'affaiblissement, n , défini par :

$$n = -\frac{d \ln \mathbf{B}_{ext,p}}{d \ln R}, \quad (1.15)$$

où $\mathbf{B}_{ext,p}$ est l'intensité de la composante poloïdale du champ magnétique externe du tube de flux magnétique, et R le rayon du tube de flux (e.g. James et al. 2018). La valeur critique du seuil d'affaiblissement entraînant la perte d'équilibre est comprise entre $1 - 3/2$ en fonction de la géométrie des lignes de champ magnétique considérées (Bateman 1978; Kliem & Török 2006; Aulanier et al. 2009; Kliem et al. 2013; Zuccarello et al. 2015).

Une des grandes différences entre le modèle "flare reconnection" et l'instabilité de Torus est l'échelle spatiale impliquée. L'instabilité de Torus est un processus à grande échelle de la taille de la région active ($10^6\text{m} - 10^8\text{m}$). Tandis que les modèles de "flare-reconnection" sont basés sur des processus à petites échelles ($10^{-2}\text{m} - 10^1\text{m}$). Dans ces petites échelles (au niveau des nappes de courant électrique par exemple), il peut se développer des instabilités non-MHD

telles que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ou de "Tearing" (e.g. Cassak et al. 2009; Uzdensky & Loureiro 2016).

Numériquement, il existe de nombreux codes modélisant les différents processus physiques liés aux éruptions solaires couvrant une gamme d'échelles spatiales allant de 10^2cm à 10^{15}m . Il existe cependant un énorme écart d'échelle entre les codes MHD et les codes cinétiques nécessaires à la modélisation de la physique des nappes de courant telle que la reconnexion magnétique (cf. Fig. 1.11).

Même si des codes hybrides commencent à se développer (e.g. Karimabadi et al. 2004; Moschou et al. 2019), il reste numériquement impossible à l'heure actuelle d'étudier simultanément les différentes instabilités. Cela empêche de conclure sur les véritables processus nécessaires au déclenchement des éruptions solaires.

D'autre part, il est souvent difficile, voire impossible, de déterminer à partir des observations quel mécanisme particulier ou quelle combinaison de mécanismes a déclenché une éruption spécifique. En effet, la plupart des processus ne sont pas directement observables, seules leurs conséquences telles qu'un embrillancement en EUV peuvent être observées. Le problème est qu'une même signature observationnelle peut être produite par différents mécanismes physiques.

Pour conclure sur le rôle de la reconnexion magnétique et plus généralement sur l'instabilité nécessaire à la production d'une éruption, il faut les étudier indirectement. Nous verrons dans la section (4.2.2) comment mon étude de la géométrie du champ magnétique semble indiquer que l'instabilité de Torus est responsable du déclenchement d'une éruption.

1.4 L'hélicité magnétique

Les éruptions solaires sont gouvernées par l'évolution du champ magnétique au niveau des régions actives (cf. Sect. 1.1.2). Ainsi comprendre la physique des éruptions solaires passe par la caractérisation des propriétés du champ magnétique. Plusieurs grandeurs complémentaires peuvent être utilisées dans ce but. Citons par exemple l'énergie magnétique (cf. Sect. 1.3.1) ou les courants électriques (e.g. Van Tend & Kuperus 1978; Low & Wolfson 1988).

Durant ma thèse, je me suis particulièrement intéressé à l'étude des propriétés géométriques du champ magnétique coronal. Ces propriétés sont quantifiables à l'aide d'une grandeur MHD : l'hélicité magnétique. Ci-après, je présenterai uniquement sa définition (cf. Sect. 1.4.1), son rôle dans l'évolution d'une région active ainsi que ces propriétés sont décrites dans l'ensemble de ce manuscrit, notamment au chapitre (3).

Nous verrons dans cette section que l'hélicité magnétique peut s'écrire en fonction de l'enlacement des lignes de champ magnétique du système étudié (cf. Sect. 1.4.2). Je montrerai également comment l'expression trouvée s'interprète quand le nombre de lignes de champ magnétique est discret (cf. Sect. 1.4.3).

1.4.1 Définition

L'hélicité magnétique est une grandeur mathématique qui permet de quantifier, dans un volume donné, les propriétés géométriques globales d'une configuration magnétique, telles que le cisaillement, la torsion et l'entortillement des lignes de champ magnétique (cf. Fig. 1.12). Dans un volume, V , l'hélicité magnétique, H_m , est définie par (Elsasser 1956) :

$$H_m = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (1.16)$$

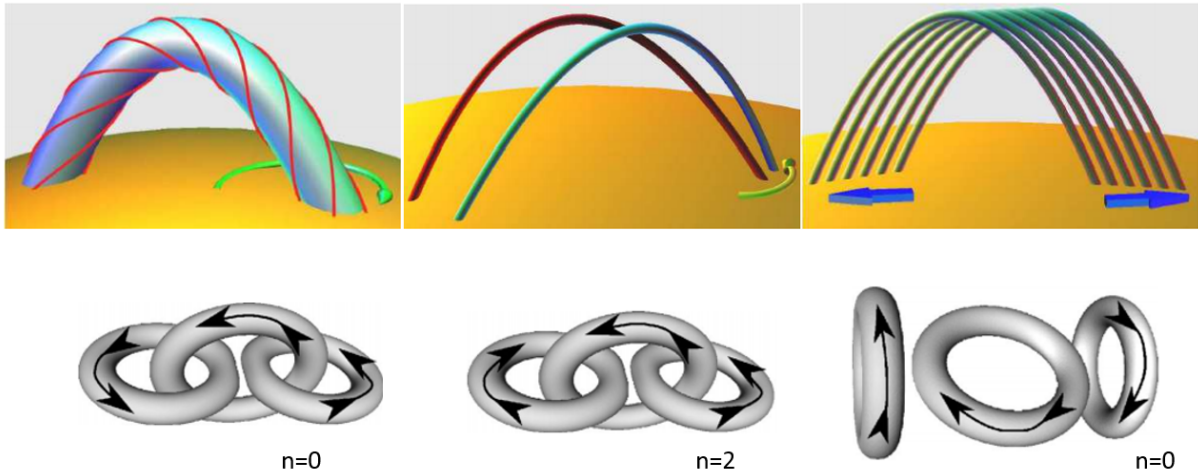


FIGURE 1.12 – **Haut** : configuration magnétique permettant la génération d'hélicité magnétique. De droite à gauche : torsion des lignes de champ d'un même tube de flux magnétique, entortillement de deux lignes de champ, cisaillement des lignes de champ magnétique en arcade (Berger & Ruzmaikin 2000). **Bas** : schéma présentant trois anneaux de courant. La flèche noire indique la direction des lignes de champ magnétique et "n" indique le nombre de liens (Del Sordo et al. 2010).

où \mathbf{A} est le vecteur potentiel associé au champ magnétique \mathbf{B} , tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Par construction, l'hélicité magnétique est homogène à un flux magnétique au carré et son unité dans le système international est le Weber² (ou le maxwell dans le système CGS, tel que $1\text{Mx} \equiv 10^{-8}\text{Wb}$). Son étude est particulièrement intéressante en physique solaire puisque l'hélicité magnétique est l'une des seules quantités invariantes en MHD idéale (cf. Sect. 3.2).

1.4.2 Hélicité et nombre de liens

Mathématiquement, l'enlacement de deux courbes supposées fermées fut initialement introduit par *Karl Friedrich Gauss*. La quantité mathématique décrivant la façon dont deux courbes sont liées l'une par rapport à l'autre est appelée : nombre de liens (cf. Fig. 1.12).

Il existe plusieurs façons de mesurer le nombre de liens. Le plus simple consiste cependant à donner à chaque courbe une orientation privilégiée et à considérer les croisements d'une courbe avec l'autre en ne prenant pas en compte les éventuels croisements d'une courbe avec elle-même. À chaque croisement est affecté un indice ± 1 . Le nombre de liens est alors la demi-somme des indices de tous les croisements d'une courbe avec l'autre. Autrement dit, si l'on définit une surface s'appuyant sur l'une des courbes, le nombre de liens est la somme algébrique du nombre de fois où la deuxième courbe traverse cette surface. En particulier, si l'on peut séparer les deux courbes sans devoir les couper, alors le nombre de liens vaut zéro.

Considérons les deux courbes fermées C_1 et C_2 d'abscisses curvilignes respectives σ et τ . L'équation de la courbe C_1 (resp. C_2) est donnée par $\mathbf{x}(\sigma)$ (resp. $\mathbf{x}(\tau)$). Le nombre de liens entre ces deux courbes, $L(C_1, C_2)$, est alors donné par :

$$L(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left(\frac{d\mathbf{x}'}{d\tau} \times \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} d\sigma d\tau. \quad (1.17)$$

On remarque ici que le nombre est liens est une quantité symétrique, c.-à-d. $L(C_1, C_2) = L(C_2, C_1)$. De plus ce nombre est invariant à toutes déformations des courbes qui impliquent ni qu'elles s'ouvrent ni qu'elles se coupent. Son utilisation est donc particulièrement intéressante

pour des quantités physiques discrètes telles que les tubes de flux magnétique. En supposant qu'une des courbes délimite une surface et que l'autre est parcourue par un courant électrique, le nombre de liens correspond à la densité de courant à travers la surface (loi de Biot et Savart). En biologie, l'équation (1.17) est également utilisée pour caractériser l'enroulement de deux brins en double hélice de l'ADN.

Plus généralement, l'hélicité d'une quantité vectorielle peut s'écrire comme la somme des nombres de liens de chaque couple de lignes de champs de cette quantité (Moffatt 1969). Dans le cas d'un champ magnétique, \mathbf{B} , complètement contenu dans un volume, V , l'hélicité magnétique est la somme du nombre de liens de chaque couple (i, j) de tubes de flux magnétique élémentaires $(d\Phi_i, d\Phi_j)$ associés aux courbes (C_i, C_j) :

$$H_m = \int_{\Phi_i} \int_{\Phi_j} L(C_i, C_j) d\Phi_i d\Phi_j. \quad (1.18)$$

Moffatt (1969) a montré que cette formulation peut également s'exprimer directement à l'aide du champ magnétique :

$$H_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \int_{V'} \mathbf{B}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV dV'. \quad (1.19)$$

Dans la jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), la définition de l'hélicité introduite ici (cf. Eq. 1.18) est strictement équivalente à la formulation classique (cf. Eq. 1.16) avec un potentiel vecteur égal à (Moffatt 1969) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} dV. \quad (1.20)$$

1.4.3 Hélicité mutuelle et propre

Si le nombre de tubes de flux, N , est discret, l'équation (1.18) se réduit à une somme finie (Berger 1984; Démoulin et al. 2006) :

$$H_m = \sum_{i=1}^N T_i \Phi_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N L_{i,j} \Phi_i \Phi_j. \quad (1.21)$$

Le premier terme de droite est la somme des hélicités propres, $T_i \Phi_i^2$ (où i correspond à l'indice du tube de flux). Le deuxième terme dépend de l'hélicité dite mutuelle, $L_{i,j} \Phi_i \Phi_j$, où $L_{i,j}$ est le nombre de liens des tubes i et j .

L'hélicité propre correspond à l'hélicité magnétique d'un tube de flux i liée à la géométrie des lignes de champ le composant. L'hélicité propre se décompose en un terme, Tw (pour "Twist"), correspondant à la torsion des lignes de champs autour de l'axe du tube, et en un terme, Wr (pour "Writhe"), reflétant la torsion de l'axe lui-même (Berger 1999; Berger & Prior 2006; Prior & Berger 2012). Pour un tube de flux uniformément torsadé n fois autour de l'axe du tube, l'hélicité propre est simplement égale à $|H_m| = |Tw| = n\Phi^2$. Dans le cas plus général où le tube de flux est également torsadé, il faut alors tenir compte du terme *writhe*, Wr . L'hélicité peut être stockée préférentiellement sous la forme *writhe* et évoluer vers une forme *twist* (et vice-versa).

L'hélicité mutuelle correspond à la torsion et le cisaillement relatif entre deux tubes de flux. Lorsqu'un tube de flux élémentaire peut être assimilé à une unique ligne de champ, son hélicité propre est nulle. Ainsi, dans le cas d'une distribution continue du champ magnétique

($N \rightarrow +\infty$), l'hélicité magnétique tend vers la somme des hélicités mutuelles de chaque couple de tubes de flux élémentaires. Autrement dit, l'équation (1.21) tend vers la formulation de l'équation (1.18).

Si le champ magnétique est décrit comme un ensemble de tubes flux élémentaires, l'hélicité magnétique ne dépend plus que des hélicités mutuelles (cf. Eq. 1.21). Contrairement à la formulation classique de l'hélicité magnétique (cf. Eq. 1.16), l'hélicité mutuelle ne nécessite pas de connaître le vecteur potentiel du champ magnétique. Le calcul de l'hélicité magnétique en utilisant cette approche semble donc facilité.

1.5 Origine du champ magnétique et de l'hélicité magnétique de la couronne solaire

Nous avons vu que l'activité solaire est dictée par l'évolution du champ magnétique coronal et que la géométrie de ce champ peut être caractérisée à l'aide de l'hélicité magnétique. Ci-après, j'introduirai le processus de dynamo solaire à l'origine du champ magnétique solaire (cf. Sect. 1.5.1) et de l'hélicité magnétique (cf. Sect. 1.5.2). Je présenterai également comment le champ magnétique généré dans les couches internes⁶ du Soleil se fractionne en tubes de flux magnétique (cf. Sect. 1.5.3) et est transporté vers la surface solaire (cf. Sect. 1.5.4). Nous verrons que lors de son ascension, le champ magnétique doit avoir un degré minimal de torsion (et donc d'hélicité, cf. Sect. 1.5.5).

1.5.1 La dynamo solaire

Dans le noyau et la zone radiative, le plasma a une rotation solide. Au contraire, dans la zone de convection le plasma a une rotation différentielle : il tourne plus rapidement au niveau de l'équateur qu'aux pôles. La rotation différentielle s'observe au niveau de la photosphère où les taches solaires n'ont pas la même vitesse en fonction de la latitude. La période de rotation est de 25 jours au niveau de l'équateur contre 30 jours à $\pm 60^\circ$ de latitude. L'interface entre les deux zones possédant des rotations distinctes s'appelle la tachocline. Du fait de la faible épaisseur de cette région, d'importants gradients de vitesse ainsi que de fortes turbulences y sont présents. L'activité magnétique solaire résulte alors de phénomènes d'induction magnétique connus sous le nom de dynamo solaire. Depuis les premiers modèles de Babcock (Babcock 1961) et Leighton (Leighton 1964) suggérant que la rotation différentielle est le moteur de la dynamo solaire, plusieurs modèles se sont développés (Roberts 1972; Charbonneau & MacGregor 1997; Charbonneau 2010, 2014; Brandenburg et al. 2012; Jouve et al. 2008, 2010).

Les modèles de dynamo solaire doivent respecter les observations de la surface solaire (Cameron et al. 2017). Les deux diagrammes papillon (cf. Fig. 1.1) fournissent un ensemble d'informations qui doivent être retrouvées par la dynamo solaire. À partir des observations, différentes propriétés ont été décrites. En particulier, les théories de dynamo solaire respectent trois lois principales (van Driel-Gesztelyi & Green 2015) :

- La loi de Spörer qui décrit la dépendance de la position des taches en fonction de la période du cycle (diagramme papillon Carrington 1858).
- La loi de Joy qui décrit la présence d'un angle d'inclinaison entre une paire de taches solaires par rapport à l'axe est-ouest. Cet angle varie en fonction de la latitude et de la période dans le cycle (Hale et al. 1919).

6. L'intérieur solaire est composé de quatre régions : le cœur nucléaire, la zone radiative, la tachocline et la zone convective.

- La loi de Hale suggère que les régions actives bipolaires qui sont alignées approximativement dans la direction est-ouest ont des polarités magnétiques opposées sur des hémisphères opposés. Les polarités magnétiques alternent entre les cycles successifs des taches solaires (Hale & Nicholson 1925).

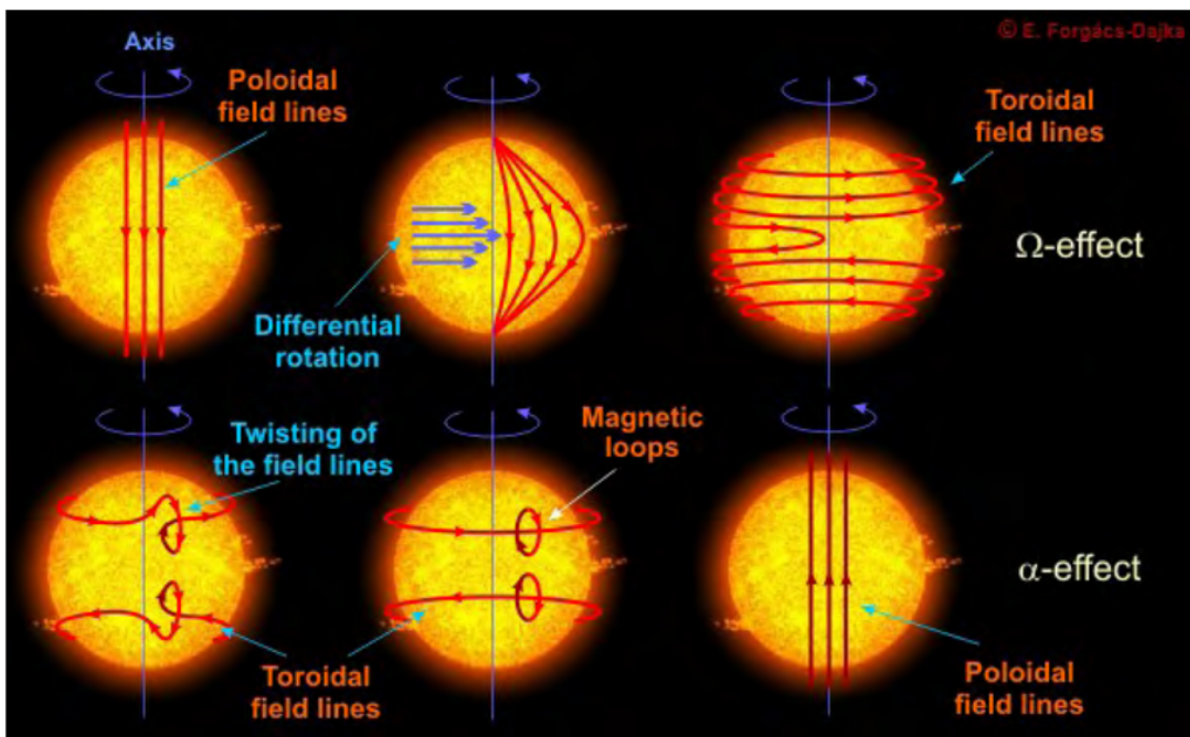


FIGURE 1.13 – Évolution du champ magnétique durant un cycle solaire et formation du champ poloïdal et toroïdal par effet α et effet Ω (schéma de Forgacs-Dajka).

Ces caractéristiques sont des contraintes d'observation fondamentales pour les modèles de dynamo. De plus, les lois de Hale and Joy suggèrent que les régions actives sont issues de l'émergence de boucles- Ω provenant d'un champ magnétique toroïdal à l'intérieur du soleil, qui serait situé au bas de la zone de convection dans la région de la tachocline (Charbonneau 2010; Tobias 2002).

La configuration du champ magnétique toroïdal aux maxima solaires, et du champ magnétique poloïdal aux minima solaires, indique que la dynamo solaire est de type Babcock-Leighton (Cameron & Schüssler 2015). Il s'agit d'un modèle de type champ moyen où l'intensification du champ magnétique résulte de l'action de deux sortes de mouvement, les effets α et Ω , appliqués à un champ magnétique moyen (Jouve et al. 2008; Roberts 1972). On parle également de dynamo $\alpha - \Omega$ (cf. Fig. 1.13). L'effet Ω correspond à l'enroulement du champ poloïdal sous l'effet de la rotation différentielle. Autrement dit, la rotation différentielle déforme progressivement les lignes de champ magnétique qui s'enroulent autour de l'axe du Soleil. Sous l'effet Ω le champ poloïdal se transforme en un champ toroïdal. Quant à l'effet α , il produit l'inclinaison des régions actives par rapport à l'équateur (loi de Joy). Contrairement à l'effet Ω , l'effet α est encore méconnu. Les processus de l'effet α diffèrent selon les modèles (Charbonneau 2010). Par exemple, la force de Coriolis pourrait être impliquée dans l'effet α (Cameron & Schüssler 2015). Cependant, il reste à savoir si la force de Coriolis agit directement sur les mouvements associés à l'ascension des tubes de flux (D'silva & Choudhuri 1993) ou si elle agit sur les mouvements convectifs qui interagissent ensuite avec le tube de flux (Parker 1955).

Analytiquement, dans le cas d'une dynamo $\alpha - \Omega$ (cf. Fig. 1.13), le champ magnétique

moyen \mathbf{B}_0 évolue selon l'équation d'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0) + \nabla \times (\alpha \mathbf{B}_0) - \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0, \quad (1.22)$$

où \mathbf{v}_0 est le champ de vitesse moyen à grande échelle, α est un coefficient proportionnel à l'hélicité cinétique du champ de vitesse turbulent et η la diffusivité magnétique. Le premier terme dans le membre de droite traduit l'amplification du champ magnétique par rotation différentielle (effet Ω). Le second terme correspond aux effets des mouvements de convection sur le champ magnétique (effet *alpha*). Pour finir, le dernier terme correspond à la dissipation turbulente du champ magnétique. L'amplification du champ magnétique résulte donc des effets $\alpha - \Omega$ contre balancés par la dissipation des lignes de champ magnétique sous l'action de la turbulence.

1.5.2 Génération d'hélicité magnétique

Des structures magnétiques torsadées/cisaillées sont omniprésentes dans l'atmosphère solaire (cf. Sect. 1.1.3). Nous verrons dans la suite de ce manuscrit que l'hélicité magnétique ne peut être créée directement dans la couronne solaire (cf. Sect. 3.2). Par conséquent, sa présence est entièrement due à son injection à travers la photosphère.

Il se pose alors la question des processus physiques à l'origine de la génération d'hélicité magnétique. Dans cette section, je présenterai tout d'abord les informations que fournissent les études du flux d'hélicité photosphérique et de la chiralité des structures magnétiques de l'atmosphère solaire (cf. Sect. 1.5.2.1). Puis je proposerai des interprétations de ces observations basées sur la dynamo solaire (cf. Sect. 1.5.2.2).

1.5.2.1 Préférence hémisphérique

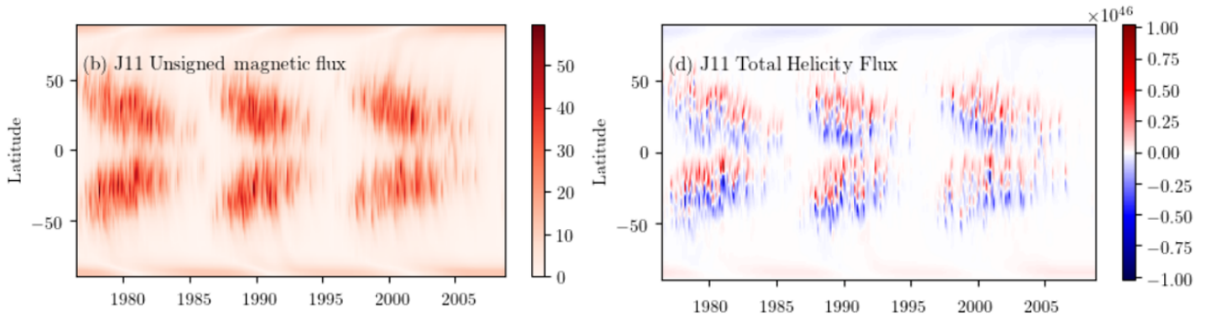


FIGURE 1.14 – **Gauche** : distribution du flux magnétique en latitude en fonction du temps. Le flux magnétique est injecté par rotation différentielle, par la diffusion de la supergranulation et par la vitesse méridionale. **Droite** : distribution du flux d'hélicité totale (Hawkes & Yeates 2019).

Les observations de la surface et de l'atmosphère solaire dans différentes longueurs d'onde ont révélé que la chiralité des structures magnétiques est globalement opposée d'un hémisphère à l'autre (Pevtsov 2002). Les structures de l'hémisphère nord présentent généralement une chiralité gauche (c.-à-d. une hélicité négative), tandis que celles de l'hémisphère sud ont une chiralité droite (c.-à-d. une hélicité positive). Cette tendance est appelée préférence hémisphérique et ne varie pas selon le cycle solaire (Pevtsov et al. 2008). Néanmoins, cette préférence hémisphérique est plus ou moins bien respectée selon la structure considérée et selon son échelle spatiale.

Pour les structures magnétiques à grande échelle, cette préférence est globalement respectée. C'est le cas par exemple des filaments quiescents qui respectent à plus de 90% la préférence hémisphérique (Martin et al. 1994; Lim & Chae 2009; Ouyang et al. 2017). L'hélicité magnétique injectée à l'échelle d'un hémisphère a également un signe opposé d'un hémisphère à l'autre. En effet, Berger & Ruzmaikin (2000) ont calculé la production d'hélicité magnétique par rotation différentielle en utilisant 22 ans de données issues de magnétogrammes. Berger & Ruzmaikin (2000) ont trouvé que le signe de l'hélicité injectée est en accord avec la chiralité préférentielle des structures coronales observées. Ce signe est opposé d'un hémisphère à l'autre. L'hélicité magnétique produite dans chaque hémisphère est de l'ordre de $4 \times 10^{46} \text{MX}^2$ par cycle solaire. Plus récemment, en se basant également sur la rotation solaire à grande échelle, Hawkes & Berger (2018); Hawkes & Yeates (2019) ont également trouvé une injection globale d'hélicité positive dans un hémisphère et négative dans l'autre. Néanmoins, le signe du flux d'hélicité dépend de la latitude. Aux hautes latitudes, l'injection est toujours négative/positive dans l'hémisphère nord/sud, alors qu'aux basses latitudes, l'injection a tendance à avoir le signe opposé lorsqu'elle est intégrée sur l'ensemble du cycle solaire (cf. Fig. 1.14). Hawkes & Yeates (2019) ont également montré que le flux d'hélicité par rotation solaire a une distribution spatiale qui suit celle du flux magnétique (cf. Fig. 1.14) et plus généralement celle du moment dipolaire du champ magnétique (c.-à-d. le diagramme papillon).

À l'échelle d'une région active, la préférence hémisphérique est moins bien vérifiée. Par exemple, elle n'est que respectée que pour 55% – 76% des filaments issus de régions actives (Martin et al. 1994; Pevtsov et al. 2003). Le signe de l'hélicité magnétique varie également d'une région active à une autre (Yang et al. 2009; Wang 2013; Liu et al. 2014). Sur un échantillon de 393 régions actives, LaBonte et al. (2007) ont montré que seules 57% (respectivement 60%) des régions actives présentent une injection d'hélicité négative (respectivement positive) dans l'hémisphère nord (respectivement sud). De même, en étudiant 151 régions actives, Liu et al. (2014) ont montré que la préférence hémisphérique dépend de la complexité de la région considérée (son nombre de polarités magnétiques, la torsion du tube de flux magnétique, etc.). La préférence hémisphérique semble donc être une tendance plutôt qu'une loi empirique au niveau des régions actives.

Remarquons également que l'injection d'hélicité magnétique au niveau d'une région active dépend de la rotation différentielle, mais également à des mouvements propres du plasma associés à l'émergence des structures magnétiques discrètes. Chae (2001) en utilisant le champ de vitesse donné par la méthode "Local Correlation Tracking" (cf. Sect. 3.3.2.2) a décomposé l'injection d'hélicité en une composante liée aux mouvements locaux et en une composante liée à la rotation différentielle. Grâce à cela, il a été prouvé que l'injection d'hélicité par rotation différentielle est négligeable par rapport à l'injection d'hélicité propre à la région active même si cette dernière peut varier fortement d'une région à l'autre (e.g. Chae 2001; Kusano et al. 2002; Nindos et al. 2003).

1.5.2.2 Génération d'hélicité magnétique par effets α et Ω

Comment interpréter la dispersion des résultats concernant la préférence hémisphérique? Différentes études suggèrent que cette dispersion résulte d'une action couplée de la dynamo solaire (Choudhuri 2003), des forces de Coriolis s'exerçant sur les tubes de flux magnétique émergeant (Wang 2013) et de la convection turbulente dans la partie supérieure de la zone de convection (Longcope et al. 1998; Nandy 2005, 2006). En particulier, les effets Ω et α (cf. Sect. 1.5.1) peuvent en partie expliquer les différences de signes dans chaque hémisphère. Notons dès maintenant que la question de l'origine de l'hélicité est encore très mal comprise (e.g. Yang et al. 2019; Ocker & Petrie 2016; Pipin 2020; Prior et al. 2020).

Tout d'abord, la rotation différentielle liée à l'effet Ω en déformant le champ magnétique

poloïdal produit une hélicité magnétique de signe opposé entre chaque hémisphère (cf. Sect. 1.5.1) avec un bilan global nul. L'effet Ω engendre une hélicité positive dans l'hémisphère sud et négatif dans l'hémisphère nord en accord avec les résultats de Berger & Ruzmaikin (2000) et Hawkes & Berger (2018).

L'effet Ω ne permet cependant pas d'expliquer la non-vérification de la préférence hémisphérique au niveau d'une région active. À l'échelle locale d'une région active, l'injection d'hélicité dépend des mouvements propres du plasma (cf. Sect. 1.5.2.1). L'effet α de la dynamo solaire peut en partie expliquer l'injection d'hélicité à cette échelle. En effet, au niveau de la tachocline, l'effet α par des mouvements hélicoïdaux du plasma va générer localement des hélicités de signe opposé à des échelles différentes. Tout d'abord, il entraîne de la formation d'hélicité "writhe" (cf. Sect. 1.4.3) en déformant l'axe des tubes de flux magnétique. D'autre part, la déformation de l'axe du tube de flux est accompagnée par la torsion des tubes de flux. L'hélicité créée est de signe opposé à l'hélicité "writhe". Ces deux contributions sont générées et vont évoluer vers des échelles spatiales différentes (Blackman & Brandenburg 2002; Alexakis et al. 2006; Brandenburg et al. 2009, 2017). L'hélicité magnétique de torsion est transférée vers les petites échelles là où elle va être potentiellement dissipée. Tandis que l'hélicité "writhe" évolue vers les grandes échelles spatiales. La somme des deux contributions entraîne la génération d'une hélicité globale non nulle. De plus, à cause de la séparation d'échelle entre les hélicités de signes opposées, l'effet α est un candidat idéal pour expliquer les observations d'une injection unipolaire d'hélicité au niveau d'une région active (Pariat et al. 2005).

Néanmoins, l'effet α et donc la génération d'hélicité au niveau d'une région active reste encore mal compris. Une des raisons est que la géométrie des structures torsadées de l'atmosphère solaire ne peut être déterminée de façon exacte ni à partir de mesures ni à partir d'observations (cf. Sect. 2.1). Quoi qu'il en soit, la génération et l'injection d'hélicité magnétique sont des contraintes pour les modèles de dynamo solaire qui doivent être en mesure de les expliquer.

1.5.3 Formation des tubes de flux

Au niveau de la surface solaire, le champ magnétique présente des structures discrètes sous la forme par exemple de taches solaires (cf. Sect. 1.1.1). De plus, le champ magnétique n'est pas réparti uniformément sur l'ensemble de la surface. Cela suggère que dans les couches internes du Soleil, le champ magnétique se fragmente en structures discrètes, c.-à-d. des tubes de flux magnétique (Shibata et al. 1989).

Si certains aspects de la dynamo solaire restent en débat, il en est de même pour la question de la fragmentation du champ magnétique en tubes de flux magnétique (Fan 2009a; Gilman 2018; Nelson et al. 2013; Kitchatinov 2020). Dans les modèles de dynamo, cette fragmentation est générée au niveau d'une couche magnétique formée à la tachocline par l'amplification du champ magnétique (Nelson et al. 2012; Pinto & Brun 2013).

La fragmentation en tubes de flux magnétique peut prendre son origine dans le changement de mode d'ondulation du plasma déclenché par l'instabilité de Parker (Parker 1966, 1984), aussi appelée instabilité de Rayleigh-Taylor pour un plasma magnétisé (Manchester IV 2001). L'instabilité de Rayleigh-Taylor est favorisée par la densité dans la zone convective plus élevée que celle du plasma dans la tachocline. En détail, la densité de la zone de convective est celle d'un gaz parfait, $\rho_{zc} = mP_{zc}/2T_{zc}k_B$ (où P_{zc} est la pression, T_{zc} la température et k_B la constante de Boltzmann), tandis que la pression de la tachocline est celle du gaz auquel se rajoute l'effet de la pression magnétique : $\rho_{tach} = mP_{tach}/2T_{tach}k_B - B_0/4\mu_0T_{tach}k_B$. En supposant l'équilibre thermodynamique, $T_{tach} = T_{zc}$ et $P_{tach} = P_{zc}$, il existe alors une différence de densité du plasma

entre les deux régions valant :

$$\Delta\rho = \rho_{zc} - \rho_{tach} = \frac{mB_0^2}{4\mu_0k_B T} > 0. \quad (1.23)$$

Cette différence de pressions permet le déclenchement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. L'instabilité déclenchée par une perturbation en pression ou densité va entraîner une ondulation du plasma, et puisque le champ magnétique est gelé dans le plasma (cf. Appen. A.4.2), une ondulation du champ magnétique (Cheung & Isobe 2014). Le changement de mode d'ondulation est considéré comme le mécanisme de décomposition du flux toroïdal à grande échelle à la base de la zone de convection en de minces tubes de flux qui sont finalement observés comme des taches solaires à la surface (Parker 1977; Cattaneo & Hughes 1988; Cattaneo et al. 1990; Matthews et al. 1995; Wissink et al. 2000).

1.5.4 Transport dans la zone de convection

Une fois créés, les tubes de flux magnétique vont se déplacer à travers la zone convective grâce à la poussée d'Archimède (Parker 1955; Moreno-Insertis 1997; Fan 2009b).

À l'intérieur du tube de flux, la pression s'exprime comme celle du plasma à laquelle se rajoute celle due au champ magnétique, $P_{int} + B_0^2$. L'équilibre des pressions entre le tube de flux et l'extérieur considéré comme un milieu stratifié implique donc l'égalité $P_{ext} = P_{int} + B_0^2/2\mu_0$. Comme dans la section précédente, à l'équilibre thermodynamique, il s'en suit une différence de densité entre l'intérieur du tube de flux et le milieu ambiant telle que :

$$\Delta\rho = \rho_{ext} - \rho_{int} = \frac{mB_0^2}{2\mu_0k_B T(z)} = \frac{B_0^2}{2\mu_0g(z)H_P}, \quad (1.24)$$

avec z l'altitude du tube de flux magnétique dans la zone convective, m la masse moyenne d'une particule de plasma, et H_P la hauteur de pression définit par :

$$H_P = \left(\frac{d \ln P}{dz} \right)^{-1} = \frac{k_B T(z)}{mg(z)}. \quad (1.25)$$

Dans le cas où au lieu de l'équilibre thermique, les plasmas intérieur et extérieur ont la même entropie, la différence de densité s'exprime de façon quasi similaire en rajoutant l'indice adiabatique de Chandrasekhar (Chandrasekhar & Chandrasekhar 1957).

Dans tous les cas, la densité de plasma dans le tube de flux est plus faible que celle du plasma environnant. La poussée d'Archimède entraîne le plasma vers la photosphère. Puisque dans la zone de convection, le champ magnétique est gelé dans le plasma (cf. Append. A.4.2), il est donc advecté par celui-ci : le flux magnétique subit un mouvement ascendant.

Ce modèle se place dans l'approximation des tubes de flux fins (Roberts & Webb 1978; Spruit 1981). La taille des sections des tubes de flux doit être inférieure aux échelles caractéristiques du milieu environnant. En particulier, la section d'un tube de flux magnétique doit être inférieure à la hauteur caractéristique de variations de pression, c'est à dire à la hauteur de pression du gaz, H_P (Parker 1955; Fan 2009b). Si la section du tube de flux magnétique diminue en dessous de l'ordre de l'échelle de hauteur de pression, et donc que l'intensité du champ magnétique diminue trop (puisque le flux est constant dans un tube de flux), la poussée d'Archimède ne permet plus d'assurer l'ascension du tube de flux. Les tubes de flux avec une intensité trop faible sont fortement affectés par la force de Coriolis (Choudhuri 1989) ce qui peut empêcher leurs émergences (Moreno-Insertis 1992). D'autre part, le modèle requiert que le temps mis par

les ondes sonores pour traverser le tube de flux soit plus petit que le temps que met le tube à se déplacer à hauteur de son diamètre. En d'autres termes, la vitesse du son doit être largement supérieure à la vitesse d'ascension du tube du flux. Cette hypothèse n'est valide que jusqu'à $\sim 20 - 30Mm$ en dessous de la photosphère (Fan 2009b).

1.5.5 Rôle de la torsion dans l'émergence du flux magnétique dans un milieu stratifié

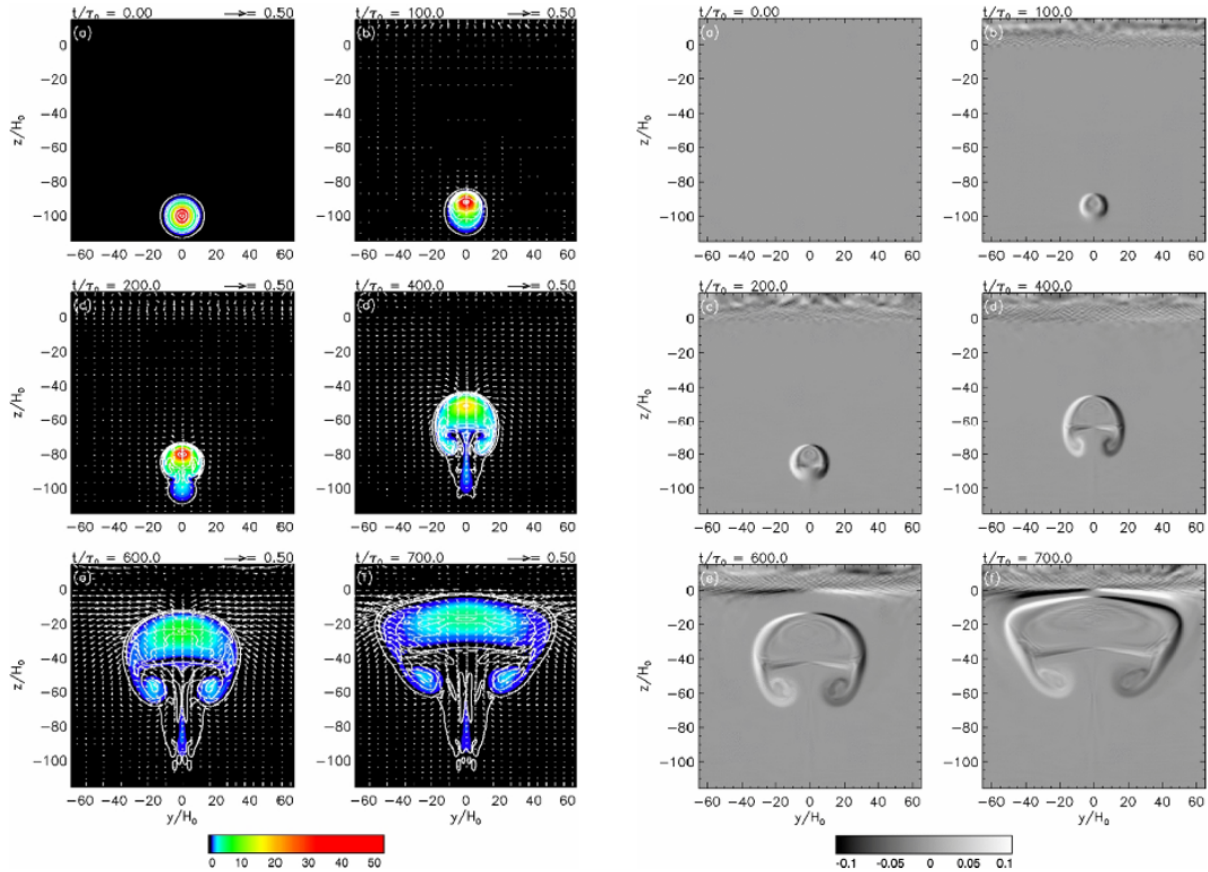


FIGURE 1.15 – Simulation MHD 2D de l'évolution d'un tube de flux magnétique torsadé dans une zone de convection polytropic. Le tube de flux s'aplatit à l'approche de la surface supérieure du domaine. **Gauche** : évolution du champ magnétique. Les différents contours représentent la composante longitudinale du champ magnétique tandis que la composante azimutale est représentée par les lignes continues. **Droite** : évolution de la composante selon la direction x du champ de vitesse. Adaptée de Toriumi & Yokoyama (2011)

La zone de convection est fortement stratifiée et la densité volumique de matière diminue fortement entre le bas de la région, $\rho = 10^{-1} \text{gcm}^{-3}$, et la surface, $\rho = 10^{-7} \text{gcm}^{-3}$ (Spruit 1974; Christensen-Dalsgaard et al. 1991; Fan 2009b). La hauteur de pression, H_P , diminue donc fortement en fonction de l'altitude. Si le tube de flux conserve sa pression et sa densité initiale au long de l'ascension, sa pression va rapidement dépasser celle de son environnement. En d'autres termes, à l'approche de la photosphère le plasma autour du tube de flux devient progressivement convectivement stable. Spruit et al. (1987) ont alors prédit que pour maintenir l'équilibre des pressions, le tube de flux va s'aplatir (cf. Fig 1.15) progressivement sous la photosphère (e.g. Cheung et al. 2010; Toriumi & Yokoyama 2010). La poussée d'Archimède ne suffit donc pas à expliquer l'émergence du flux magnétique dans l'atmosphère solaire. Un

certain degré de torsion des lignes de champ magnétique est nécessaire pour préserver l'intégrité du tube de flux et permettre son émergence.

La figure (1.15) présente l'ascension d'un tube de flux torsadé dans la zone convective d'après le modèle de Toriumi & Yokoyama (2011). Dans leur modèle, le milieu est fortement stratifié et présente 20 échelles de pression différentes en fonction de l'altitude. L'évolution est comparable à celles précédemment trouvées dans d'autres jeux de simulation (Schüssler 1979; Moreno-Insertis & Emonet 1996). Ces simulations montrent que l'ascension d'un tube de flux est accompagnée par la création de deux vortex tournant en sens opposé due au gradient de pression horizontale (Schüssler 1979; Longcope et al. 1996). Ces vortex présents dans les lobes latéraux (cf. Fig. 1.15) vont progressivement englober l'intégralité du flux magnétique et donc ralentir l'ascension. Le gradient de pression horizontal qui conduit à l'expansion horizontale du tube initial, combiné à la vorticité nette de chacun des fragments, entraîne des forces aérodynamiques dirigées vers le bas qui stoppent l'ascension de la structure magnétique (Longcope et al. 1996).

Cependant, Moreno-Insertis & Emonet (1996) et Emonet & Moreno-Insertis (1998) ont montré que la tension magnétique induite par un certain niveau de torsion peut empêcher la création des vorticités et permettre la poursuite de l'émergence par la poussée d'Archimède. Emonet & Moreno-Insertis (1998) ont défini un critère sur l'intégrité d'un tube de flux basée sur une grandeur nommée le nombre de Weber magnétique :

$$W_e = \frac{4v^2 \rho \pi}{B_t^2}, \quad (1.26)$$

où v est la vitesse d'ascension du tube de flux et B_t est le champ transverse. Le tube de flux garde son intégrité si le nombre de Weber magnétique reste inférieur à 1. Une possibilité pour cela est d'ajouter une composante polo  idale B_ϕ au champ axial B_z définissant un angle de torsion Ψ tel que $\tan\Psi = B_\phi/B_z$. Un angle de torsion suffisamment élevé permet de réduire le nombre de Weber et donc de garder la cohérence du tube de flux (Moreno-Insertis & Emonet 1996; Emonet & Moreno-Insertis 1998) qui peut ainsi traverser la zone convective.

De nombreuses simulations numériques ont par la suite confirmé l'importance de la torsion dans le processus d'émergence (e.g. Abbett et al. 2000; Dorch & Nordlund 1998; Krall et al. 1998; Murray et al. 2006; Toriumi et al. 2014). En particulier, les modèles 2D ont été étendus en 2.5D et 3D. Ainsi, Dorch & Nordlund (1998) dans des simulations 3D d'émergence avec des champs magnétiques d'intensité variable ont montré que même un champ magnétique transverse faible (inférieur à l'ordre de grandeur du champ longitudinal) suffit pour maintenir l'intégrité d'un tube de flux émergeant. Murray et al. (2006), en faisant varier la torsion entre différentes simulations 2.5D, ont trouvé que seules les simulations avec une torsion suffisante gardent des tubes de flux cohérents et capables d'émerger. Cependant, même si la torsion initiale du tube de flux est faible, le tube de flux peut rester intègre à condition qu'il ait une courbure suffisamment importante au sommet (Abbett et al. 2000).

Finalement, une torsion minimale est requise pour qu'un tube de flux puisse émerger dans l'atmosphère solaire. Cela peut expliquer la présence de torsions et de cisaillements observés au niveau des structures de l'atmosphère solaire (cf. Sect. 1.1.3).

1.6 Sujet de la thèse

Le Soleil n'est pas un astre calme. Régulièrement, des éruptions solaires ont lieu au niveau de son atmosphère, ce qui engendre une libération d'énergie et de matière potentiellement dirigée vers la Terre (cf. Sect. 1.1.5). L'activité éruptive du Soleil peut alors impacter directement l'environnement terrestre et les infrastructures humaines (cf. Sect. 1.2.1). Il s'est alors développé

une nouvelle discipline appliquée, la météorologie de l'espace, dont l'objectif est d'aider à la prévention des effets nocifs des éruptions (cf. Sect. 1.2.2). Dans ce cadre s'est posée la question de la prévision des éruptions. Jusqu'à maintenant, les recherches fondamentales des relations Soleil-Terre n'ont cependant pas abouti à l'élaboration d'outils fiables de prédiction (cf. Sect. 1.2.2).

L'ensemble de mes travaux de thèse font partie d'un projet jeune-chercheur, HeliSol⁷, visant entre autres à améliorer la prévision des éruptions solaires en apportant de nouvelles connaissances sur la physique du déclenchement des événements énergétiques solaires. HeliSol est un projet sur 5 ans qui est dirigé par E. Pariat. Il a conduit à de nombreuses publications référées qui seront présentées dans ce manuscrit. L'angle d'étude abordé dans ce projet et dans ma thèse est celui de l'hélicité magnétique (cf. Sect. 1.4.1). Cette grandeur qui mesure le degré d'entortillement, de cisaillement et de rotation des lignes de champ magnétique permet une caractérisation des propriétés du champ magnétique au niveau des régions actives (cf. Sect. 1.1.2). Nous avons en effet vu section (1.1.3) qu'un degré de torsion/cisaillement est omniprésent dans les structures magnétiques observées de la couronne solaire. Dans les couches internes du Soleil, l'hélicité magnétique joue également un rôle important puisqu'elle est nécessaire à l'émergence des structures discrètes qui forment les régions actives (Cf. Sect. 1.5.5).

L'hélicité magnétique est une quantité pertinente pour décrire les champs magnétiques lors des éruptions notamment parce qu'elle est l'une des rares quantités invariantes dans le paradigme de l'étude des phases pré-éruptive des structures magnétiques à grande échelle : la magnétohydrodynamique idéale (MHD, cf. Append. A). Nous verrons également (cf. Sect. 3.2.1.1) que l'hélicité magnétique est quasi conservée, alors même que de grandes quantités d'énergie magnétique peuvent être dissipées lors de processus non idéaux tels que la reconnexion magnétique (cf. Append. A.5).

Malgré cette propriété, l'hélicité magnétique est une quantité encore peu exploitée en physique solaire. Une des raisons à cela est qu'elle est, de par sa complexité, très difficile à mesurer précisément dans l'atmosphère solaire. Ce n'est que très récemment que des méthodes robustes ont été développées pour estimer l'hélicité magnétique de façon fiable (cf. Sect. 3.3).

L'objectif de mon travail de thèse a été d'apporter des éléments de réponses à certaines des grandes inconnues qui persistaient encore sur la dynamique de l'hélicité magnétique et ses propriétés. Je me suis concentré en particulier sur l'étude d'une décomposition de l'hélicité magnétique (cf. Sect. 3.1.4) : l'hélicité magnétique non potentielle (liée au champ magnétique porteur de courants électriques) et l'hélicité mêlée (contenant le reste de l'information). Durant ma thèse, j'ai notamment étudié les questions suivantes :

- Quel rôle l'hélicité magnétique joue-t-elle dans l'évolution et le déclenchement d'une éruption (cf. Sect. 4.1)? Quels sont les liens entre l'éruptivité d'une région active et son hélicité magnétique?
- Peut-on définir un critère déterministe indiquant l'éruptivité d'une région active qui soit basé sur les hélicités magnétiques (cf. Sect. 4.2)? Si oui, dans quelle mesure est-il applicable pour la prévision des éruptions solaires (cf. Sect. 4.3)?
- Quels sont les propriétés des hélicités magnétiques non potentielle et mêlée (cf. Chap. 5)? Comment évoluent-elles? Sont-elles conservées en MHD idéale et non idéale (cf. Sect. 5.1)?
- Comment se compare la dynamique des hélicités avec celles des énergies (cf. Sect. 5.3)?

Pour répondre à ces différentes questions, mon travail a été basé sur plusieurs axes dont un axe théorique qui est passé par le calcul analytique de flux d'hélicité (cf. Sect. 5.2) ainsi que des réflexions sur l'additivité de l'hélicité (cf. Sect. 3.4). Mon approche théorique a été complétée par le suivi de la dynamique des hélicités magnétiques dans une dizaine de simulations numériques

7. <https://sites.lesia.obspm.fr/helisol/>

couvrant une large gamme de configurations magnétiques (cf. Sects 5.2.2 et 4.2.2). J'ai ainsi développé un ensemble d'outils numériques afin de traiter rapidement et de façon rigoureuse les données magnétiques issues de ces simulations (cf. Sects. 3.3.1.4 et 5.2.2.1). Pour finir, j'ai également étudié l'hélicité magnétique de plusieurs régions actives observées (cf. Sect. 4.3). Comme nous le verrons dans le chapitre suivant (cf. Chap. 2), cela a nécessité des reconstructions 3D du champ magnétique coronal obtenues à partir de carte 2D de la distribution du champ photosphérique. Durant ma thèse, j'ai été amené en particulier à me familiariser avec l'utilisation des différentes méthodes de reconstructions (cf. Sect. 2.3.1.2). J'ai alors pu me rendre compte de leurs avantages ainsi que leurs limitations (cf. Sect. 2.4).

Comme nous le verrons tout le long de ce manuscrit, l'ensemble de mes travaux théoriques, numériques et observationnelles apportent de nouveaux éléments clés sur les propriétés des hélicités magnétiques. De façon générale cela permet de mieux appréhender la dynamique du champ magnétique d'une région active lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire. J'ai en particulier mis en évidence un nouveau critère d'éruptivité basée sur l'hélicité magnétique qui pourrait servir à la prédiction des éruptions solaires dans le cadre de la météorologie de l'espace (cf. Chap. 6).

Chapitre 2

Reconstruction du champ magnétique coronal

Sommaire

2.1	Mesure du champ magnétique photosphérique	45
2.2	Contraintes observationnelles pour les reconstructions coronales 3D	47
2.2.1	Supprimer l'ambiguïté sur l'orientation du champ transverse	48
2.2.2	Transformation héliographique	48
2.2.3	Modification du magnétogramme	49
2.3	Extrapolation du champ magnétique sans force non linéaire	52
2.3.1	Présentation de deux méthodes d'extrapolation NLFFF	53
2.3.1.1	Méthode magnéto frictionnelle	53
2.3.1.2	Mon utilisation de la méthode magnéto frictionnelle : étude de la région active NOAA 12441	54
2.3.1.3	Méthode d'optimisation	57
2.3.2	Limitations des méthodes de reconstruction	59
2.4	Contrôle de la qualité des extrapolations	61
2.4.1	Présentation de différentes métriques	61
2.4.2	Contrôle de la propriété solénoïdale du champ magnétique	62
2.4.2.1	Théorème de Thomson-Valori	62
2.4.2.2	Influence de la divergence du champ magnétique	63

Dans l'atmosphère solaire, les divers phénomènes actifs tels que les éruptions solaires dépendent de la topologie et de la dynamique du champ magnétique tridimensionnel (cf. Sect. 1.3.2). Pour comprendre le rôle fondamental que joue le champ magnétique durant une éruption, il est possible de suivre son évolution à l'aide des images prises dans différentes longueurs d'onde grâce à des instruments tels que AIA ("Atmospheric Imaging Assembly") embarqué à bord de SDO¹ ("Solar Dynamics Observatory", [Lemen et al. 2011](#)). Nous avons également vu dans le chapitre précédent que des grandeurs telles que l'énergie magnétique (cf. Sect. 1.3.1) et l'hélicité magnétique (cf. Sect. 1.4) peuvent servir à caractériser le champ magnétique de l'atmosphère solaire. Si l'on prend leurs définitions classiques (cf. Eqs. 1.1 et 1.16), l'énergie et l'hélicité sont formulées comme une intégrale volumique dépendant du champ magnétique. Autrement dit, pour les estimer au niveau d'une région active par exemple, nous avons besoin de la valeur du champ magnétique dans l'ensemble du volume étudié.

1. à condition que l'événement solaire qui nous intéresse soit dans le champ de vue de l'instrument

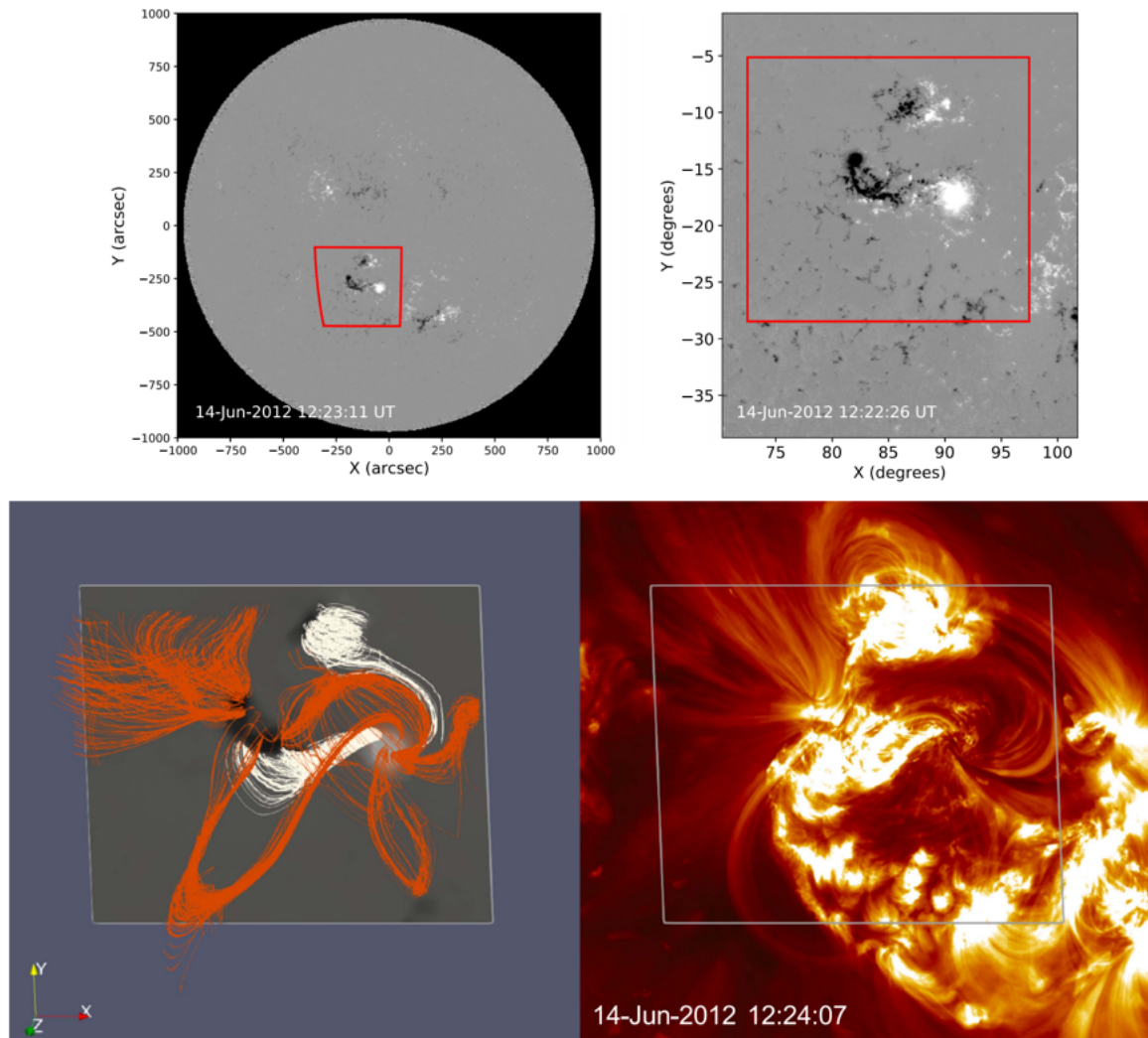


FIGURE 2.1 – **Haut gauche** : champ magnétique le long de la ligne de visée mesuré par HMI/SDO sur l'ensemble du disque solaire. **Haut droit** : magnétogramme de la région active NOAA 11504. Le rectangle rouge désigne les limites de l'extrapolation. **Bas gauche** : champ magnétique coronal reconstruit en 3D. Les courbes orange et blanches représentent des lignes de champ magnétique. **Bas droite** : image de la région active prise par l'instrument AIA dans la longueur d'onde 193 Å. On remarque que le champ magnétique reconstruit présente d'importante ressemblance avec les structures observées par AIA. Adaptée de [James et al. \(2018\)](#).

Malheureusement, la mesure du champ magnétique dans l'atmosphère solaire n'est pas chose aisée. En particulier, des déterminations fiables du champ magnétique vectoriel dans la couronne solaire sont à l'heure actuelle toujours impossibles ([Casini et al. 2017](#)). Fondamentalement, il y a deux raisons principales à cela. Tout d'abord, les structures coronales sont généralement de 8 à 9 ordres de grandeur moins denses que le plasma photosphérique, et 6 ordres de grandeur moins intenses dans la région optique du spectre solaire. Cela rend la détection de tout signal optique provenant de la couronne solaire difficile ([Stix 2012](#)). Deuxièmement, en raison du volume très important dont dispose le plasma coronal et de sa densité nettement plus faible, le champ magnétique ambiant est beaucoup moins intense (de 2 à 3 ordres de grandeur) qu'au niveau de la photosphère. Les exigences en matière de sensibilité et de précision des instruments et des techniques de mesure du champ magnétique coronal deviennent donc extrêmement élevées.

La mesure directe du champ magnétique coronal est quasi-impossible. Au contraire, le champ

magnétique est mesuré systématiquement par différents instruments à intervalle de temps régulier (tout les 12 minutes par HMI/SDO par exemple) au niveau de la surface solaire. En effet, nous verrons section (2.1) qu'au niveau de la photosphère, puisque la densité est plus élevée et la température plus basse que dans l'atmosphère solaire, il est possible d'estimer le champ magnétique. Les mesures du champ magnétique photosphérique fournissent des cartes 2D qui sont accessibles librement via des bases de données.

Dans ce chapitre, nous verrons qu'à partir des cartes 2D de la distribution du champ magnétique photosphérique, le champ magnétique coronal peut être reconstruit en 3D (cf. Fig. 2.1). Les reconstructions 3D s'appuient sur l'hypothèse d'un champ magnétique sans force, $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ (avec \mathbf{B} le champ magnétique et \mathbf{J} la densité de courants électriques, cf. Append. A.4.3).

Nous verrons également dans ce chapitre que des modifications du champ magnétique mesuré sont nécessaires afin de l'adapter aux différentes méthodes de reconstructions (cf. Sect. 2.2). Puis je présenterai la principale méthode de reconstruction : l'extrapolation sans force non linéaire (cf. Sect. 2.3). Il est cependant possible de faire des extrapolations sans force linéaire (cf. Append. B.1), mais cette méthode est ancienne et quasi plus utilisée. De plus, j'ai été formé durant ma thèse à l'utilisation et à la création de reconstruction magnétique sans force non linéaire, ce qui a abouti à plusieurs publications (cf. Sect. 4.3). Notons également qu'une fois le champ magnétique reconstruit, il faut nécessairement vérifier sa consistance (cf. Sect. 2.4).

2.1 Mesure du champ magnétique photosphérique

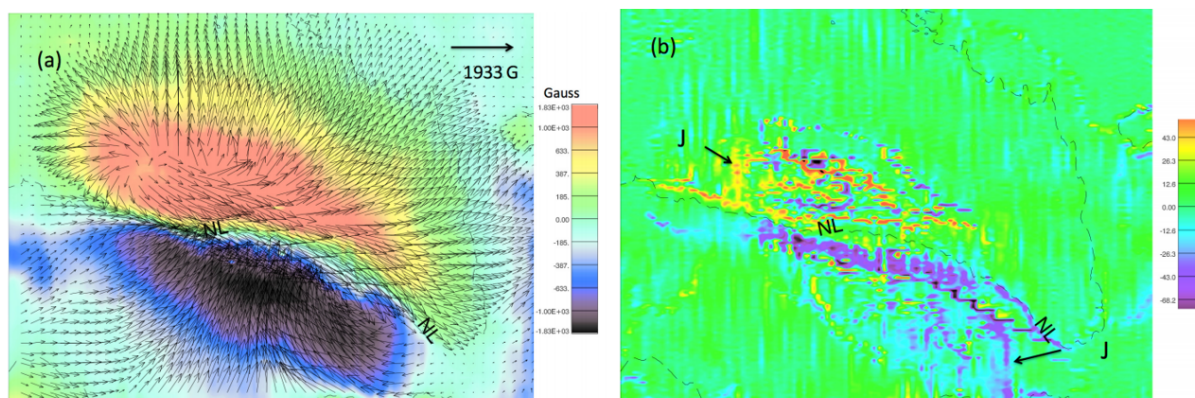


FIGURE 2.2 – **Gauche** : magnétogramme vectoriel de la région active 10808 obtenu par THEMIS le 13 septembre 2005. Les flèches noires représentent l'orientation et l'intensité du champ magnétique transverse. **Droite** : composante verticale de la densité de courants électriques. Adaptée de [Schmieder & Aulanier \(2018\)](#).

Pour estimer le champ magnétique au niveau de la photosphère, il existe différentes méthodes ([Stenflo 1978](#); [Beckers 1971](#)). La plus utilisée repose sur la mesure de la polarisation dans les raies spectrales. Sous l'effet du champ magnétique, les niveaux atomiques d'énergie d'une molécule ou d'un atome se divisent en plusieurs sous-niveaux distincts (dégénérescence des niveaux énergétiques). On observe alors une séparation des raies spectrales émises ou absorbées par le Soleil en plusieurs composantes. Ce phénomène est désigné sous le nom d'effet Zeeman ([Hale 1908](#)). Un champ magnétique peu intense peut seulement entraîner un élargissement des raies. La présence d'un champ magnétique, par effet Zeeman, modifie donc l'état de polarisation des ondes électromagnétiques émises par le Soleil. Le champ magnétique, même faible, peut également entraîner une réduction de la polarisation de la lumière par effet Hanle. Cet effet

est dû à l'excitation des atomes par une lumière polarisée dans un milieu magnétique (Stenflo 2013).

Le champ magnétique au niveau de la photosphère est caractérisé par l'état de polarisation de la lumière observée le long de la ligne de visée en mesurant les paramètres de Stokes : I, Q, U, V. I est l'intensité totale, V l'intensité de la polarisation circulaire, U et Q décrivent l'intensité de la polarisation linéaire. La polarisation est observée de façon régulière par des télescopes spatiaux tels que le "Solar Optical Telescopes" (SOT, Lites et al. 2013) à bord du satellite Hinode, où le "Helioseismic and Magnetic Imager" (HMI, Schou et al. 2012) à bord du satellite SDO. Il existe également des télescopes sur Terre tels que le "Solar Magnetic Field Telescope" (SMFT, Su & Zhang 2004) ou le Télescope Héliographique pour l'Étude du Magnétisme et des Instabilités Solaires (THEMIS, Bommier et al. 2007).

Une fois les paramètres acquis, il faut maintenant en déduire le champ magnétique (problème d'inversion). Ce n'est cependant pas un problème bien posé mathématiquement (Iniesta & Cobo 1996). La méthode la plus utilisée consiste à faire correspondre des profils de Stokes modélisés avec les observations en faisant varier différents paramètres tels que l'intensité du champ magnétique et son angle d'inclinaison (Unno 1956; Rachkovsky 1962; Landolfi & Degl'Innocenti 1982). Il s'agit d'un problème non linéaire des moindres carrés, qui est généralement résolu par l'algorithme de Levenberg-Marquardt (Marquardt 1963). Basé sur cet algorithme, diverses procédures existent comme le "Milne-Eddington Line Analysis using and Inversion Engine" (MELANIE, Socas-Navarro 2001), le code "UNNOFIT" (Landolfi & Degl'Innocenti 1982) et le code "Very Fast Inversion of the Stoke Vector" (VFISV, Borrero et al. 2011). Ces codes sont appliqués directement lors de la mesure de la polarisation par certains instruments : MELANIE pour SOT, UNNOFIT pour THEMIS et VFISV pour HMI.

Notons que les instruments n'acquièrent pas l'état de polarisation de manière identique. Par exemple l'acquisition par THEMIS se fait le long d'une fente qui va balayer l'ensemble de la région active, tandis que la mesure par HMI repose sur la combinaison de douze images du Soleil obtenues à différentes longueurs d'onde. L'ensemble des informations est ensuite regroupé sous la forme de carte 2D (cf. Fig. 2.3) où le champ magnétique est mesuré à chaque pixel. Néanmoins, la mesure au niveau d'un pixel est indépendante de celle du pixel voisin. Nous verrons section (2.2) qu'il est possible de modifier légèrement le champ magnétique obtenu en corrélant les valeurs de chaque pixel pour tenir compte notamment des erreurs de mesure.

Quoi qu'il en soit, les différentes méthodes d'inversion conduisent à des magnétogrammes vectoriels, c.-à-d. des cartes 2D regroupant l'intensité du champ magnétique le long de la ligne de visée ainsi que l'intensité et l'orientation du champ magnétique transverse (cf. Fig. 2.2). Ce sont ces données qui seront utilisées comme conditions aux limites des reconstructions 3D du champ magnétique coronal (cf. Sect. 2.2).

De nouvelles méthodes continuent à être développées pour avoir accès à des structures solaires encore non résolues par les procédures actuelles. C'est le cas par exemple de la méthode «V-moment inversion» (VMI) qui propose une procédure d'inversion basée uniquement sur les paramètres Q, U et V (Mein et al. 2016). Notons que même si les principales procédures donnent des résultats assez cohérents les uns avec les autres (voir Guo et al. 2010b; Dalda 2017, pour des comparaisons détaillées entre MELANIE et UNNOFIT, et entre MELANIE et VFISV), les différents modèles d'inversion peuvent faire varier légèrement le champ magnétique obtenu et donc l'extrapolation finale (cf. Fig. 2.3).

Des incertitudes sur le champ magnétique mesuré apparaissent lors de l'inversion des paramètres de Stokes. Grossièrement, la composante du champ magnétique le long de la ligne de visée, B_L vaut $c_1 V/L$ (avec c_1 une constante). Son incertitude est alors de :

$$\delta B_L = c_1 \frac{\delta V}{I} \sim \frac{\delta I}{I} \sim \sqrt{I}. \quad (2.1)$$

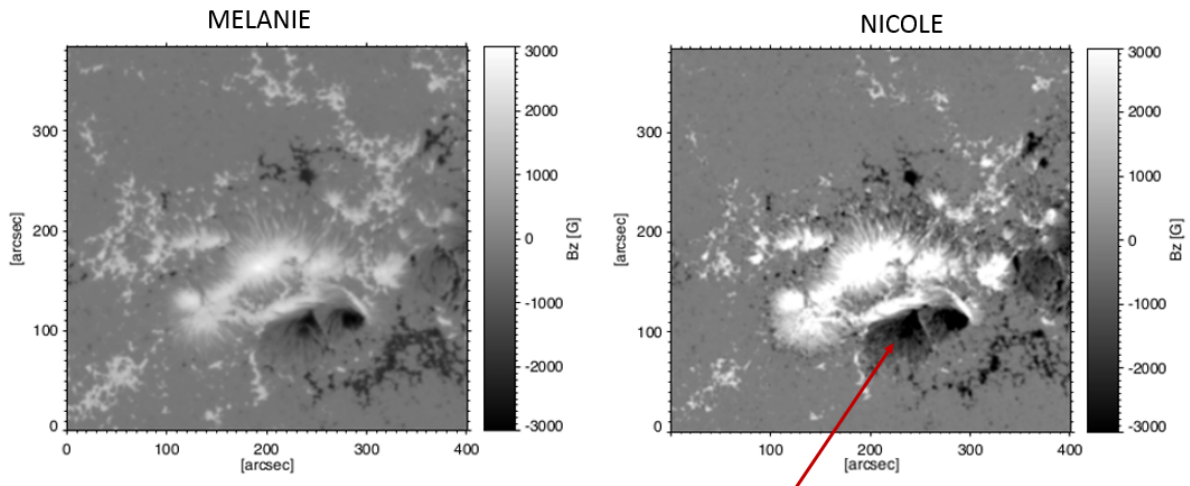


FIGURE 2.3 – Magnétogrammes d’une même région active obtenus à partir de deux codes d’inversion différents. **Gauche** : champ magnétique déduit par le code MELANIE (Socas-Navarro 2001). **Droite** : champ magnétique déduit par le code NICOLE (Socas-Navarro 2015). Le magnétogramme obtenu par le code NICOLE est beaucoup plus contrasté et présente des régions, absentes du magnétogramme produit par le code MELANIE, où le champ magnétique est fortement négatif. La différence observée entre les deux champs magnétiques résulte dans la manière de traiter d’importantes asymétries dans le profil du paramètre de Stokes V. Adaptée de (Sankarasubramanian & Rimmele 2002).

Le bruit de l’intensité I est donc indépendant du champ B_L . La principale source d’erreur provient du champ magnétique transverse B_{trans} avec $B_{trans}^2 = c_2 \sqrt{Q^2 + U^2}/I$ (c_2 est également une constante). Son incertitude vaut alors :

$$2B_{trans}\delta B_{trans} = c_2 \frac{Q\delta Q + U\delta U}{\sqrt{Q^2 + U^2}I} \sim c_2 \frac{\sqrt{\delta Q^2 + \delta U^2}}{I} \sim \frac{\delta I}{I} \sim constant. \quad (2.2)$$

Par conséquent, le bruit sur champ magnétique transverse est particulièrement élevé pour des régions de champ magnétique faible. En pratique, l’erreur sur le champ magnétique transverse est d’environ un ordre de grandeur supérieur à celui du champ longitudinal (Lites 2000).

2.2 Contraintes observationnelles pour les reconstructions coronales 3D

Les magnétogrammes vectoriels produits par inversion des profils de Stokes suffisent-ils pour reconstruire le champ magnétique coronal ? La réponse est négative. En effet, nous verrons que les données magnétiques doivent être légèrement modifiées. Tout d’abord, il est nécessaire de supprimer l’ambiguïté de 180° de ces composantes transversales qui persiste après les méthodes d’inversion (cf. Sect. 2.2.1). Nous verrons également qu’il faut corriger un effet de projection provenant de la nature sphérique du Soleil (cf. Sect. 2.2.2). Ensuite, le champ magnétique vectoriel peut servir de conditions limites pour une reconstruction 3D après un prétraitement adéquat qui va le rendre plus compatible avec l’hypothèse du champ sans force (cf. Sect. 2.2.3).

2.2.1 Supprimer l’ambiguïté sur l’orientation du champ transverse

Les paramètres de Stokes contiennent un ensemble d’informations sur le champ longitudinal (le long de la ligne de visée), mais également sur le champ transverse (perpendiculaire à la ligne de visée). Cependant si l’azimut du vecteur champ magnétique change de 180° , les profils de Stokes sont identiques à ceux de l’azimut d’origine (e.g. équation 28 dans [Jefferies et al. 1989](#)). L’effet Zeeman est ainsi insensible à l’orientation du champ magnétique. Par conséquent, la composante transverse du champ magnétique est mesurée en amplitude et direction, mais pas en orientation ([Jefferies et al. 1989](#)). Une ambiguïté de 180° réside et nécessite d’être soulevée. Bien qu’il a été proposé de mesurer le champ magnétique vectoriel à plus d’une hauteur pour lever l’ambiguïté en utilisant la propriété solénoïdale, la détermination des hauteurs de formation des différentes lignes spectrales s’avère difficile ([Bommier 2013](#)). Par conséquent, l’ambiguïté est généralement résolue par des hypothèses physiques supplémentaires sur le champ magnétique.

Les méthodes de résolution les plus répandues sont basées sur la minimisation de grandeurs qui par définition doivent être les plus faibles possible telles que : la densité de courants électriques \mathbf{J} et la divergence du champ magnétique $\nabla \cdot \mathbf{B}$ ([Metcalf et al. 2006](#); [Moon et al. 2003](#); [Cuperman et al. 1993](#); [Georgoulis et al. 2004](#); [Gary & Demoulin 1995](#); [Canfield et al. 1993](#)). Une première technique consiste à considérer que l’orientation correcte du champ magnétique observé est celle qui forme un angle aigu avec le champ potentiel local, c.-à-d. $\mathbf{B}_{trans}^{obs} \cdot \mathbf{B}_{trans}^{pot} > 0$ ([Moon et al. 2003](#)). Cette méthode est rapide, simple et souvent utilisée comme première étape de méthodes plus élaborées.

La production de donnée par SDO/HMID ou Hinode/SP utilise une méthode de minimisation de fonction dérivant de l’énergie magnétique ([Georgoulis 2005](#); [Metcalf et al. 2006](#)) :

$$E = \sum_{mgm} (|\nabla \cdot \mathbf{B}| + |\mathbf{J}|)^2. \quad (2.3)$$

L’énergie est minimale quand la divergence du champ magnétique et les courants électriques sont nuls. Il s’agit de la méthode donnant les meilleurs résultats à l’heure actuelle ([Metcalf et al. 2006](#)). Le minimum global est trouvé par recuit simulé utilisant une reconstruction sans force linéaire pour calculer \mathbf{B} dans la définition de E . Cette méthode a ensuite été améliorée par [Leka et al. \(2009\)](#). Cependant, plusieurs minimums d’énergie existent. Résoudre l’ambiguïté du champ magnétique transverse est donc un problème mathématique mal posé.

2.2.2 Transformation héliographique

À moins de regarder exactement au centre du disque solaire (à la latitude et la longitude 0), la ligne de visée des télescopes solaires n’est pas perpendiculaire à la surface solaire. Ce problème est inhérent à la nature sphérique du Soleil. Par conséquent, le champ magnétique longitudinal mesuré n’est pas équivalent au champ magnétique normal à la photosphère. De même, le champ transverse mesuré n’est pas parfaitement parallèle à la surface du Soleil. Les observations sur le plan image déforment donc les positions géométriques du champ magnétique vectoriel sur la surface solaire. Cette déformation peut être corrigée en projetant l’image plane observée par les instruments solaires dans de nouvelles coordonnées sphériques correspondant au Soleil et adapter à une grille cartésienne. Analytiquement, cela revient à résoudre la transformation linéaire :

$$\mathbf{B}^{helio} = \mathbf{M}_{rot} \cdot \mathbf{B}^{image}, \quad (2.4)$$

où \mathbf{M}_{rot} est une matrice de rotation dont les différents composants dépendent de la latitude et longitude de chaque pixel (Gary & Hagyard 1990).

Cette projection se résout numériquement assez bien. Pour autant, la transformation héliographique mixte les champs magnétiques longitudinaux et transverses pour obtenir les nouvelles composantes. Les erreurs de mesure sur une des composantes se propagent donc.

De plus, plus on s'éloigne du centre du disque, plus les effets de projection sont marqués. Rien que pour une région éloignée de 10° du centre de disque, on observe d'importants écarts entre l'image observée initialement et l'image projetée. La position de la ligne d'inversion et sa topologie peuvent être complètement différentes (e.g. Gary & Hagyard 1990).

Quoi qu'il en soit, pour une reconstruction 3D du champ magnétique qui ressemble le plus possible au champ magnétique coronale, il faut utiliser en point de départ de préférence uniquement des régions proches du centre du disque solaire. D'autre part, la projection dans un nouveau système de coordonnées est adaptée uniquement pour un champ de vue petit. En effet, la résolution de l'équation (2.4) proposée par Gary & Hagyard (1990) est basée sur une approximation qui omet la courbure du Soleil et qui suppose que la région observée est un plan. La validation de cette hypothèse dépend de la taille du champ de vision. Lorsque le champ de vue est grand, l'approximation plane provoque de grandes erreurs dues à la surface sphérique du Soleil (Hoeksema et al. 2014).

2.2.3 Modification du magnétogramme

À priori et même après les différences étapes mentionnées précédemment, le champ magnétique photosphérique n'est pas sans force ($\mathbf{J} \times \mathbf{B} \neq 0$). Le paramètre β du plasma est de l'ordre de grandeur de 1 (cf. Append. A.2). Les forces de pression et de gravité ne peuvent pas être négligées. Cependant, en supprimant les échelles spatiales inférieures aux diamètres des supergranules, le champ magnétique photosphérique restant représente le champ de la base de la couronne. La couronne solaire, étant sans force, $\beta \approx 10^{-4}$ (cf. Append. A.2), le champ magnétique photosphérique devrait également être proche d'un état sans force (Aly 1989). Cette approximation est cependant limitée par la présence de bruits dans les mesures et des erreurs lors des étapes précédentes.

D'autre part, pour faciliter le calcul numérique, il peut être utile de lisser les données initiales. Cela permet de supprimer des gradients locaux pouvant altérer le résultat final. De plus, les légères fluctuations du champ magnétique photosphérique s'atténuent rapidement avec la hauteur (en e^{-z} pour un champ potentiel). Lisser la surface inférieure n'impacte donc que des couches très basses proches de la photosphère. En pratique la grille dans la direction x et y est plus fine que le pas spatial en z pour permettre une bonne résolution. Notons que l'équation du champ sans force ne dépend pas de l'échelle spatiale (cf. Append. A.4.3). Le lissage des données ne fait pas perdre d'informations physiques autres que celles déjà écartées par l'hypothèse sans force. Un lissage du magnétogramme permet donc de supprimer les erreurs, les inconsistances ainsi que de réduire le bruit.

Pour obtenir la meilleure extrapolation possible/physique, il peut être donc intéressant de modifier légèrement le magnétogramme afin de le rendre plus compatible avec l'hypothèse sans force (étape dite de prétraitement, cf. Fig. 2.4). Des comparaisons entre des extrapolations avec et sans étapes de prétraitement ont été faites (Valori 2016; Schrijver et al. 2008a). J'ai également pu durant ma thèse, modifier les paramètres de l'étape de prétraitement. En tendance générale, il a été constaté que la qualité des extrapolations se trouve fortement améliorée si le magnétogramme est garanti sans force, c.-à-d. que le champ reconstruit présente davantage de similitudes dans sa morphologie avec celle du champ coronal observé en EUV. Cela reste cependant subjectif. Une série de tests montre également que le prétraitement peut améliorer l'extrapolation du champ non linéaire en diminuant la divergence magnétique et la force de

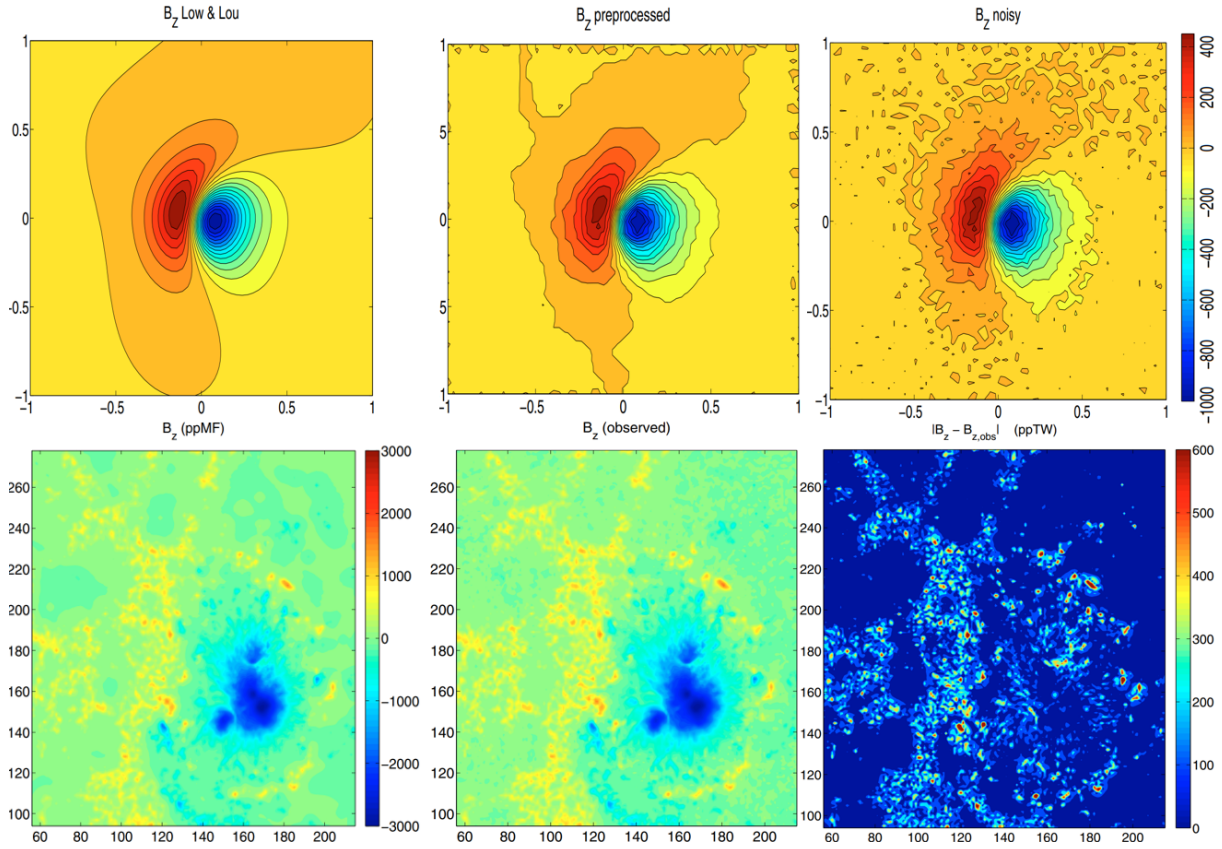


FIGURE 2.4 – **Haut** : magnétogrammes dérivés du champ magnétique semi-analytique proposé par (Low & Lou 1990). **De gauche à droite** : champ magnétique théorique, champ magnétique après l’ajout artificiel d’erreurs, champ magnétique après prétraitement. Adaptée de Fuhrmann et al. (2007). **Bas, de gauche à droite** : magnétogramme de la région active NOAA 1093, magnétogramme après prétraitement, différence entre les magnétogrammes observé et prétraité. Adaptée de Fuhrmann et al. (2011).

Lorentz (Wiegmann et al. 2006; Fuhrmann et al. 2007; Metcalf et al. 2008; Fuhrmann et al. 2011; Guo et al. 2012; Jiang & Feng 2013). De plus, en comparant des extrapolations d’une même région active faites avec différentes méthodes, Schrijver et al. (2008a) ont remarqué que la présence de force au niveau de la surface solaire peut conduire à une énergie magnétique inférieure à l’énergie potentielle, $E < E_p$ (cf. Sect. 1.3.1.1). Les reconstructions du champ magnétique à partir d’un magnétogramme avec force peuvent donc conduire à des solutions non physiques (Valori 2016; Schrijver et al. 2008a).

L’étape de prétraitement est donc presque toujours utilisée en amont d’une reconstruction du champ magnétique coronal. Les méthodes de prétraitement existant reposent sur les travaux de Aly (1989) qui a dérivé une série de relations nécessairement respectées par un champ sans force. En s’appuyant sur ces contraintes, Wiegmann et al. (2006) ont construit une fonction, L , dont la minimisation permet d’obtenir un magnétogramme plus consistant :

$$L = \mu_1 L_{force} + \mu_2 L_{torque} + \mu_3 L_{dist} + \mu_4 L_{smooth}, \quad (2.5)$$

avec

$$L_{force} = \left(\sum_{mgm} B_x B_z \right)^2 + \left(\sum_{mgm} B_y B_z \right)^2 + \left(\sum_{mgm} B_z^2 - B_x^2 - B_y^2 \right)^2 \quad (2.6)$$

$$L_{torque} = \left(\sum_{mgm} x(B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) \right)^2 + \left(\sum_{mgm} y(B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) \right)^2 \quad (2.7)$$

$$+ \left(\sum_{mgm} (yB_zB_x - xB_yB_z) \right)^2 \quad (2.8)$$

$$L_{dist} = \sum_{mgm} (B_x - B_{x,obs})^2 + \sum_{mgm} (B_y - B_{y,obs})^2 + \sum_{mgm} (B_z - B_{z,obs})^2 \quad (2.9)$$

$$L_{smooth} = \sum_{mgm} ((\Delta B_x)^2 + (\Delta B_y)^2 + (\Delta B_z)^2). \quad (2.10)$$

Chaque contrainte L_x est pondérée par une constante μ_i (avec $i = 1, 2, 3, 4$) permettant de lui donner plus ou moins d'importance. Les constantes doivent être déterminées cas par cas ou du moins instrument par instrument ([Wiegelmann & Sakurai 2012](#)). Le premier terme, L_{force} , garantit un champ sans force. Le deuxième, L_{torque} , provient du moment du champ magnétique. Le terme suivant, L_{dist} , optimise la surface pour qu'elle corresponde le plus possible aux données photosphériques mesurées. Le dernier terme, L_{smooth} , lisse le magnétogramme.

L'objectif des codes de prétraitement est d'obtenir le champ magnétique qui minimise L en réduisant, si possible, chaque contrainte simultanément. Pour cela, le champ magnétique à chaque point de maille est modifié par la méthode numérique de Newton : $B_i \rightarrow B_i - \mu dL/dB_i$ (avec μ une constante). Les codes de prétraitement changent localement la valeur de B_x et B_y dans l'objectif de réduire les différents L . Le prétraitement est cependant un problème mal posé qui, par des ajustements locaux, cherche à minimiser une quantité globale. Remarquons également que le prétraitement ne tient pas compte de la connectivité des lignes de champ. Il peut donc aboutir à magnétogramme sans force qui ne correspond pas à la réalité. En effet, le prétraitement doit modifier les données photosphériques pour satisfaire à la condition d'absence de force et le champ magnétique résultant est supposé correspondre au champ chromosphérique. La validité de cet argument doit encore être vérifiée par des observations directes du champ magnétique chromosphérique ou par des modèles plus sophistiqués ([DeRosa et al. 2009](#); [Fuhrmann et al. 2011](#)).

L'étape de prétraitement fait partie des quatre étapes présentées dans cette sous-section qui sont fortement recommandées avant de procéder à l'extrapolation à proprement parler. Cependant, seule l'étape de projection est un problème mathématique correctement posée. Pour les autres, plusieurs solutions existent. D'autre part, chaque étape peut se réaliser à partir de différents codes qui impliquent différents paramètres, modèles, hypothèses. Pour une région active, il existe donc plusieurs champs magnétiques initiaux possibles (plus ou moins différent) et donc plusieurs reconstructions 3D possibles². Les extrapolations non linéaires sont donc à prendre avec d'extrêmes précautions. Le résultat final doit être absolument contrôlé avec le champ coronal observé.

2. Je ne parle ici que de l'impact de la qualité des données observées et de l'étape de prétraitement sur la reconstruction finale. La reconstruction elle-même peut se faire de différentes manières et donc conduire à différents résultats en fonction de la méthode employée.

2.3 Extrapolation du champ magnétique sans force non linéaire

Une fois le champ magnétique acquis et prétraité, on souhaite s'en servir comme condition aux limites afin de reconstruire en 3D le champ magnétique coronal. Pour cela, il y a différentes possibilités. Une première consiste à considérer que le champ magnétique coronal est potentiel. Cependant, les reconstructions potentielles ne permettent pas d'estimer l'énergie libre qui pourrait alimenter des éruptions solaires (cf. Sect. 1.3.1.1). En effet, dans ce cas, le champ magnétique, \mathbf{B} , est potentiel, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_p$, alors l'énergie magnétique est également purement potentielle, $E = E_p$.

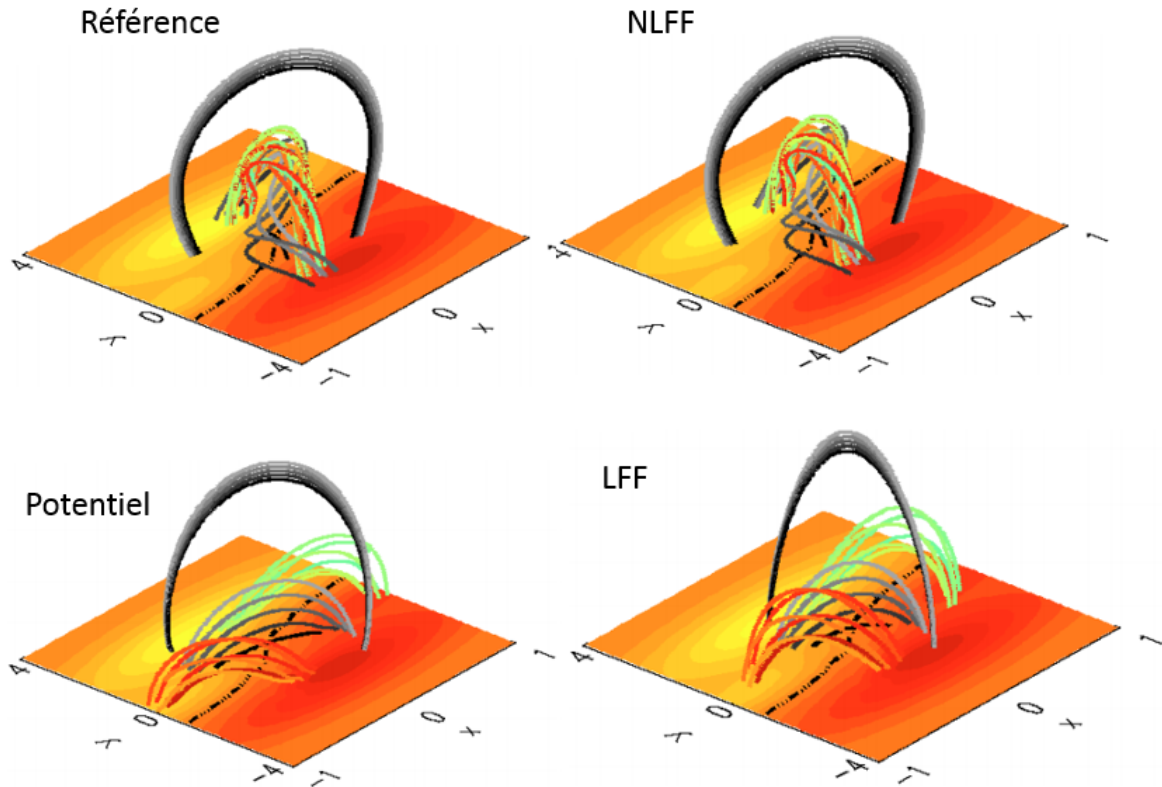


FIGURE 2.5 – Trois modélisations du champ magnétique 3D de [Low & Lou \(1990\)](#) qui sert de référence. Les lignes en gris, vert, orange et rouge représentent des lignes de champ magnétique. Les points de départ des lignes de champ sont les mêmes pour les quatre panneaux. La surface inférieure correspond à l'intensité du champ $B_z(x, y, 0)$. Seule l'extrapolation sans force non linéaire permet de rendre compte de la topologie réelle du champ magnétique. En particulier, il n'y a pas de tubes de flux dans les reconstructions potentielle et sans force linéaire. Adaptée de [Valori et al. \(2010\)](#).

Les magnétogrammes vectoriels peuvent également être utilisés comme conditions initiales à des modèles MHD se servant de solutions analytiques/paramétriques pour le champ magnétique coronal (e.g. [Yeates & Page 2018](#); [Guo et al. 2019](#); [Pomoell et al. 2019](#)). Il s'agit d'un champ d'études à part entière qui ne sera pas traité dans cette section. Nous verrons cependant dans le chapitre (4) que les simulations numériques MHD d'éruptions solaire permettent l'étude des caractéristiques du champ magnétique lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire.

Il est également possible de reconstruire le champ magnétique coronal 3D à partir des magnétogrammes vectoriels en se basant sur l'hypothèse que le champ reconstruit est sans

force (cf. Append. A.4.3) :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.11)$$

où \mathbf{J} est la densité de courant électrique. Le paramètre de cisaillement, α , peut être uniforme dans le domaine on parle alors d'extrapolation sans force linéaire ("linear force free field", LFFF), ou bien varier selon la position, l'extrapolation est alors dite sans force non linéaire ("nonlinear force free field", NLFFF).

Par rapport à un modèle de champ sans force linéaire, un champ sans force non linéaire est plus proche des observations coronales lorsqu'il y a, à la fois des boucles coronales à grande échelle et des filaments ou protubérances sous-jacents (Valori 2016). Ainsi, une modélisation NLFFF est plus proche de la configuration magnétique qu'on pourrait obtenir s'il était possible de mesurer le champ magnétique coronal (cf. Fig. 2.5). Ainsi, à ma connaissance depuis quelques années il n'existe presque plus de travaux reposant uniquement sur des extrapolations linéaires.

2.3.1 Présentation de deux méthodes d'extrapolation NLFFF

Il existe divers algorithmes numériques pour calculer des modèles de champ sans force non linéaire, tels que les méthodes Grad-Rubin, d'intégration verticale, de relaxation MHD, d'optimisation (voir la revue de Wiegmann & Sakurai 2012). Ne cherchant pas à faire une revue générale des méthodes existantes, je présenterai ici que deux méthodes qui sont celles que j'ai utilisées et qui sont à l'origine de certains de mes travaux de thèse (Moraitis et al. 2019a; Thalmann et al. 2019a,b) : la méthode magnéto frictionnelle (cf. Sect. 2.3.1.1 et Sect. 2.3.1.2) et la méthode d'optimisation (cf. Sect. 2.3.1.3). Ces deux méthodes possèdent cependant un certain nombre de limitations (cf. Sect. 2.3.2).

2.3.1.1 Méthode magnéto frictionnelle

Durant un séjour en Angleterre, au Mullard Space Science Laboratory (MSSL), j'ai été formé à l'utilisation de la méthode d'extrapolation : magnéto frictionnelle (Yang et al. 1986; Klimchuk & Sturrock 1992) que je présente ci-après.

L'idée générale de cette méthode est d'inclure dans l'équation d'Euler (cf. Eq. A.2) un terme de dissipation, $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ tel que :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad (2.12)$$

Le terme de dissipation peut s'exprimer comme terme de friction $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = -v(x, y, z, t)\mathbf{v}$ (Roumeliotis 1996; Valori et al. 2005, 2007, 2010) ou comme un terme de viscosité $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot (v(x, y, z, t)\rho \nabla \mathbf{v})$ (Amari et al. 1996, 1997). Ici v est un paramètre libre permettant de contrôler la vitesse de dissipation.

Lorsque l'on considère un modèle de champ sans force non linéaire, l'inertie ainsi que le gradient de pression et les forces de gravité sont omis dans l'équation (2.12). Dans le cas où le terme de dissipation dépend de la friction, (Valori et al. 2005, 2007, 2010) ont montré que cela revient alors à suivre l'évolution pseudo-temporelle jusqu'à un état d'équilibre d'un champ magnétique initial respectant l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + c_L \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}), \quad (2.13)$$

avec :

$$\mathbf{v} = c_Y \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.14)$$

Les paramètres c_L et c_Y sont des facteurs numériques artificiels. On remarque que la solénoïdalité du champ magnétique est garantie par l'inclusion de la dissipation dans l'équation d'induction. Différentes conditions initiales et aux limites sont possibles (Savcheva et al. 2015, 2016). Le plus souvent, le champ magnétique est pris initialement potentiel et est dérivé du magnétogramme le long de la ligne de visée (Seehafer 1978). Dans ce cas, la méthode magnéto frictionnelle requiert donc les trois composantes photosphériques du champ magnétique.

À partir de l'équation (2.13), il est possible d'extraire l'énergie magnétique tel que :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c_Y \int_V |\mathbf{J}_\perp|^2 dV - c_L \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B})^2 dV. \quad (2.15)$$

L'énergie magnétique décroît donc aussi longtemps qu'il y a des forces de Lorentz et de la divergence dans le domaine. Durant l'évolution/relaxation du champ magnétique suivant l'équation (2.13), la diminution du courant perpendiculaire \mathbf{J}_\perp réduit également la vitesse \mathbf{v} . Lorsque l'état d'équilibre est atteint ($\partial E/\partial t = 0$), le champ magnétique est solénoïdal et la vitesse est nulle. Le champ magnétique obtenu est donc bien sans force non linéaire.

Les deux critères c_L et c_Y permettent de pondérer l'importance qu'on donne aux forces de Lorentz ou à la solénoïdalité du champ magnétique. En pratique, le schéma numérique utilisé pour résoudre les différentes équations fait apparaître d'autres critères artificiels permettant d'éviter les instabilités numériques (Valori et al. 2007). Utiliser la méthode magnéto frictionnelle requiert donc un choix réfléchi des différents critères pour permettre une exécution relativement rapide, stable et donnant le meilleur résultat possible.

2.3.1.2 Mon utilisation de la méthode magnéto frictionnelle : étude de la région active NOAA 12441

Comme mentionné précédemment, je suis allé deux semaines au Mullard Space Science Laboratory (MSSL) en Angleterre où j'ai été formé par G. Valori et A. James à l'utilisation et au développement d'un code magnéto frictionnelle (cf. Sect. 2.3.1.1) ainsi qu'aux codes de prétraitement (cf. Sect. 2.2.3).

Même si j'ai par la suite reconstruit différentes régions actives, mon objectif initial était l'étude de la région active de petite taille NOAA 12441 dont l'émergence a lieu vers le 27 octobre 2015. À la suite de discussions avec L. Green, j'ai choisi cette région active pour différentes raisons. Tout d'abord, elle est isolée des autres régions actives de cette période. Les observations EUV montrent des boucles coronales reliant les polarités, mais qui n'interagissent pas avec le champ magnétique d'autres régions actives (cf. Fig. 2.6). Les lignes de champ ne semblent pas présenter de complexités particulières. Le grand avantage de cette région est également qu'elle passe relativement proche du centre du disque le 31 octobre 2015 vers 12h00 U.T. J'ai donc centré mon analyse de cette région sur cette heure précise. Cela limite les effets de projection lors de la reconstruction 3D.

Une fois la région ciblée, j'ai eu besoin de son magnétogramme vectoriel. J'ai choisi d'utiliser les données mesurées par HMI/SDO sous le format SHARP ("Space-weather HMI active region patches", Bobra et al. 2014) accessible par la base de données JSOC ("Joint Science Operations Centre"). Les données SHARP sont sous la forme de cartes par parcelles qui englobent les régions actives suivies automatiquement pendant toute leur durée de vie. Les profils de Stokes déduits par HMI sont inversés par le code VFSV avec le modèle d'atmosphère solaire Milne-

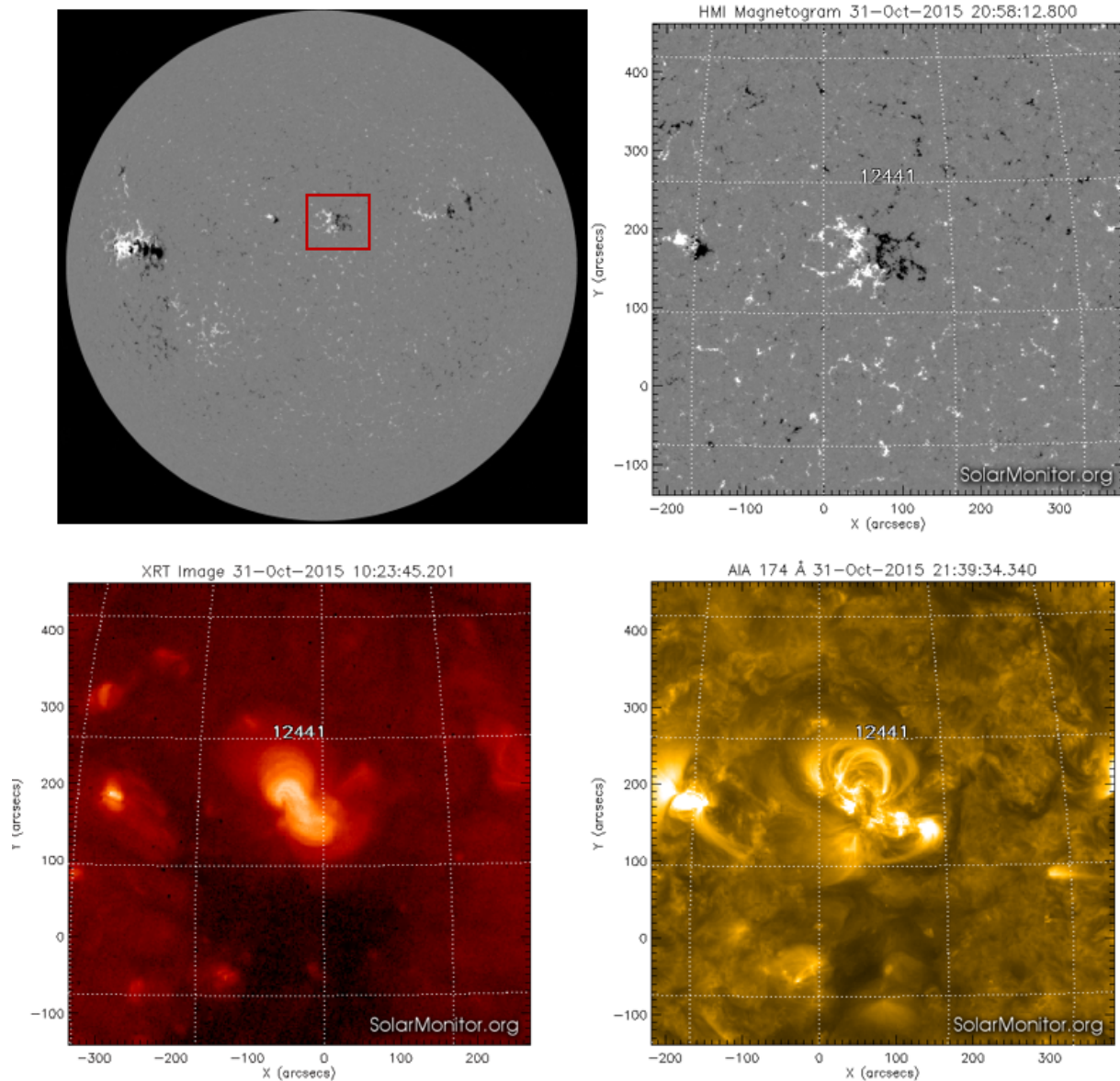


FIGURE 2.6 – **Haut** : magnétogramme de la région active NOAA 12441. On observe que les autres régions actives sont relativement éloignées de cette dernière. **Bas gauche** : observation de la région active par l'instrument XRT embarqué à bord du satellite Hinode. **Bas droite** : observation de la région active à la longueur d'onde 171 \AA obtenue par AIA/SDO

Eddington ([Borrero et al. 2011](#)). Le champ magnétique est ensuite transformé par la projection équivalente cylindrique de Lambert ([Sun 2013](#)). L'ambiguïté de 180° est résolue par un code de "minimum d'énergie" ([Leka et al. 2009](#)).

Une fois les données magnétiques acquises depuis la base de données, il a fallu les prétraiter selon la méthode décrite section (2.2.3). G. Valori et A. James m'ont fourni les codes numériques pour cela. Conçu initialement pour être exécuté sur le serveur du MSSL, j'ai transporté l'ensemble des procédures sur le serveur de mon laboratoire d'attachement (le serveur "LE-SIA08"). Ces procédures se divisent en deux groupes. Un premier groupe est composé de codes tournant en IDL dans l'environnement SolarSoft ([Freeland & Handy 1998](#)) qui permettent de fixer les paramètres du prétraitement (la résolution du magnétogramme, les marges d'erreur autorisée, etc.). Le deuxième groupe contient les codes numériques écrits en FORTRAN 90 ([Adams et al. 1992](#)) permettant la minimisation de l'équation (2.21). Notons que les calculs se font sur plusieurs processeurs en utilisant l'interface de programmation pour le calcul parallèle,

OpenMP. Quoi qu'il en soit, à l'heure actuelle, l'ensemble des codes peut tourner sur le serveur "LESIA08".

Une fois le prétraitement terminé, le magnétogramme vectoriel peut servir comme condition initiale à l'extrapolation sans force non linéaire par la méthode magnéto frictionnelle (cf. Sect. 2.3.1.1). Là encore, les codes m'ont été fournis par G. Valori et A. James. Ces codes demandent beaucoup de ressources de calcul. J'ai donc décidé de les exécuter sur la grappe de calcul et de traitement de données de l'Observatoire de Paris-Meudon : tycho. La grappe de calcul est composée d'une frontale pour l'édition, la compilation et la soumission des différentes tâches ainsi que de 62 nœuds où peuvent s'exécuter les tâches.

J'ai donc adapté l'ensemble des codes d'extrapolations NLFFF pour leur utilisation sur tycho. En particulier, j'ai développé des scripts de soumissions "slurm" (Yoo et al. 2003) dans lesquels je précise les ressources nécessaires (nombre de cœurs, mémoire disque et mémoire vive, etc.) à l'exécution du code d'extrapolation. Grâce à ces scripts, l'extrapolation NLFFF est lancée sur un nœud dédié qui possède les bonnes caractéristiques.

En pratique, la résolution des équations (2.13) et (2.15) ne se fait pas en une seule exécution du code. En effet, pour gagner en précision, le code d'extrapolation est d'abord lancé sur un remaillage de la grille initiale où la résolution est volontairement dégradée (moins de points de maille dans chacune des directions). Lorsque j'évalue que l'énergie magnétique ne varie plus (cf. Fig. 2.7), j'arrête manuellement le calcul. Les données magnétiques obtenues sont ensuite interpolées sur un maillage avec une meilleure résolution. Le champ magnétique interpolé sur ce nouveau maillage sert ensuite de condition initiale à une deuxième exécution du code d'extrapolation. Je procède ainsi jusqu'à revenir sur le maillage initial. Le nombre de maillages intermédiaires est fixé initialement. J'ai par ailleurs développé des scripts de soumission pour chaque maillage. En fonction de la résolution, le calcul ne nécessite en effet pas autant de ressources numériques. Notons ici que le code actuel avec lequel je me suis familiarisé est basé sur une grille cartésienne. Il utilise une méthode de différence finie centrée d'ordre quatre pour la discrétisation spatiale. Tandis que la discrétisation temporelle bénéficie de la technique d'accélération Runge-Kutta-Chebyshev (Valori et al. 2010).

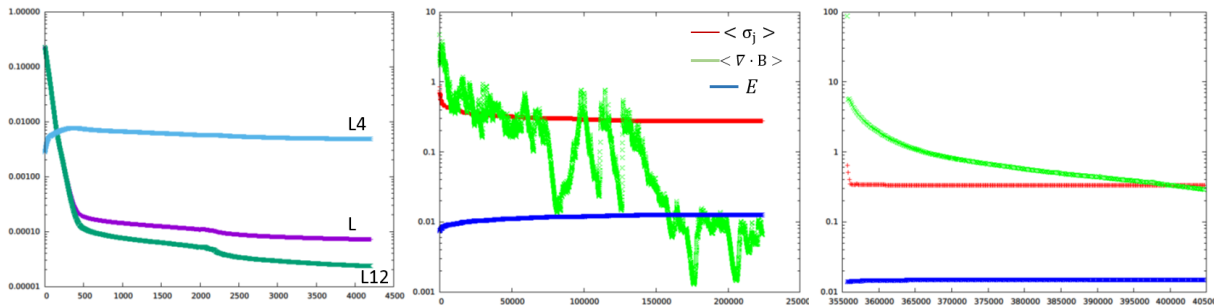


FIGURE 2.7 – **Gauche** : évolution des quantités à minimiser durant le prétraitement de la région active NOAA 12441. L'axe des abscisses représente le nombre d'itérations. La courbe violette correspond à la quantité globale L (cf. Eq. 2.5) tandis que la courbe bleue est la somme de $L_{torque} + L_{force}$ (cf. Eqs. 2.8+2.6), et la courbe verte représente L_{smooth} (cf. Eq. 2.10). **Milieu et droite** : évolution de l'énergie magnétique (cf. Eq. 2.15), de la moyenne de la divergence du champ magnétique et de la métrique σ_j (cf. Eq. 2.24), en fonction du nombre d'itérations durant l'exécution du code d'extrapolation. Le panneau du milieu correspond au maillage grossier de taille $84 * 50 * 89$ tandis que le panneau de droite correspond au maillage final de taille $325 * 190 * 353$.

Une fois que l'énergie magnétique de la grille pleinement résolue est constante, j'arrête définitivement l'exécution du code. J'ai alors accès à un fichier contenant le champ magnétique

coronal reconstruit en 3D. Durant ma thèse, j’ai appris à lire ce fichier dans le logiciel Paraview (Ahrens et al. 2005) pour représenter les lignes de champ magnétique. Le résultat de l’extrapolation de la région 12441 est représenté figure (2.7).

Aussi jolie soit-elle, nous verrons dans la section (2.4.2.2) que la reconstruction créée ne permet pas d’étude quantitative de l’hélicité magnétique. J’ai par la suite modifié les paramètres du code (le nombre de maillages, les facteurs numériques c_L et c_V etc.), je n’ai cependant jamais réussi à produire une reconstruction plus qualitative (cf. Fig. 2.8). Une des raisons est qu’une extrapolation NLFFF requière investissement temporel très élevé. L’exécution des différents codes, bien que bénéficiant de l’architecture parallèle des serveurs, nécessite environ 4 jours de temps de calcul. À cela se rajoutent le temps nécessaire pour lancer les différents codes, les modifier, etc. Comme mentionné ci-dessus, l’arrêt des procédures se fait manuellement. Cela demande donc de surveiller très régulièrement le déroulement du calcul (cf. Fig. 2.7). Je n’ai donc pendant ma thèse pu faire qu’un nombre restreint de tentatives.

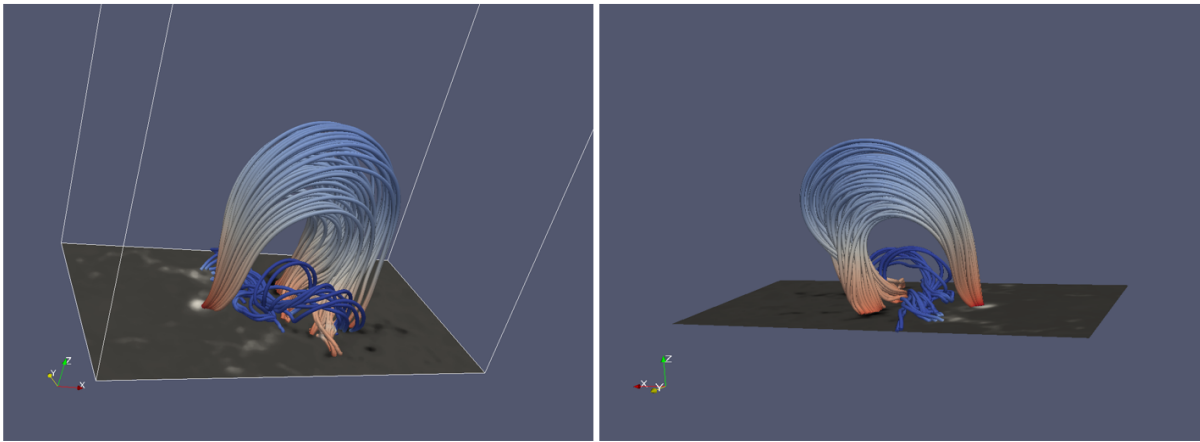


FIGURE 2.8 – Extrapolation sans force non linéaire de la région active NOAA 12441. Pour la modélisation 3D du champ magnétique, j’ai utilisé la méthode magnéto frictionnelle (cf. Sect. 2.3.1.1).

L’ensemble de mes études nécessitant des reconstructions 3D du champ magnétique coronal n’est pas basé sur mes propres extrapolations, mais sur des extrapolations NLFFF obtenues par des tierces-personnes en utilisant la méthode d’optimisation (Thalmann et al. 2019b,a; Moraitis et al. 2019b).

2.3.1.3 Méthode d’optimisation

La méthode d’optimisation a été développée par Wheatland et al. (2000). Pour un champ magnétique, \mathbf{B} , défini dans un volume, V , la méthode consiste à minimiser la quantité :

$$L = \int_V \left[\frac{|(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|^2}{B^2} + |\nabla \cdot \mathbf{B}|^2 \right] dV. \quad (2.16)$$

Si L est réduit à zéro (ou une valeur proche de zéro) par un processus d’itérations, cela signifie que $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} \approx 0$ partout dans le volume. Le champ magnétique est alors sans force et solénoïdale.

Si le champ magnétique est supposé stationnaire aux frontières (c.-à-d. $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$), Wheatland et al. (2000) ont montré que la variation temporelle de L est reliée à l’évolution du champ

magnétique telle que :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \mathbf{F}, \quad (2.17)$$

$$\frac{dL}{dt} = -2 \int_V \mu \mathbf{F}^2 dV, \quad (2.18)$$

avec μ une fonction arbitraire et :

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\Omega \times \mathbf{B}) - \Omega \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla(\Omega \cdot \mathbf{B}) + \Omega(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \Omega^2 \mathbf{B} \quad (2.19)$$

$$\Omega = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.20)$$

L'équation (2.17) définit une pseudo-évolution pour le champ magnétique qui entraîne la décroissance de L . Numériquement, le champ magnétique est calculé à chaque itération temporelle. Puis le code vérifie si $L(t+dt) < L(t)$. Si la condition n'est pas respectée le pas de temps, dt , est réduit d'un facteur 2. Le code s'arrête quand $L(t)$ est assez proche de zéro, ou quand dt atteint une valeur critique. Là encore, le champ potentiel sert de point de départ. Cette méthode comme la technique précédente requiert les trois composantes du champ magnétique photosphérique.

Le gros inconvénient du formalisme établi par [Wheatland et al. \(2000\)](#) est qu'il ne prend pas en compte que seul le champ magnétique photosphérique est connu (dans le cas d'extrapolation du champ coronale). La méthode d'optimisation ainsi proposée donne autant d'importance à toutes les frontières. Or les magnétogrammes donnent une information uniquement sur la frontière inférieure, les autres surfaces restent inconnues. Il en résulte une limitation importante de la méthode, les données aux frontières ne sont disponibles que dans des modèles numériques. [Wiegmann \(2004\)](#) a cependant montré qu'il était possible de réduire les effets des frontières latérales et supérieure en rajoutant un facteur de pondération, $w(x, y, z)$ dans l'équation (2.16) et en rajoutant des couches artificielles entourant le domaine d'étude. Dans ces couches le facteur $w(x, y, z)$ décroît progressivement vers zéro. Par conséquent, la méthode pondère les écarts par rapport à l'état sans force moins sévèrement proche des frontières latérales et supérieure. Cela permet de donner plus d'importance à la frontière inférieure qui est la seule parfaitement connue.

Autre problème, l'ancien formalisme ne tenait pas en compte que le champ magnétique observé, \mathbf{B}_{obs} , peut être inconsistant à cause de problèmes lors de la mesure telle que le bruit ambiant ou le manque de données observées. [Wiegmann & Inhester \(2010\)](#) ont alors étendu la méthode en rajoutant dans l'équation (2.16) un terme surfacique permettant d'intégrer les erreurs de mesure et traiter les données manquantes dans les conditions limites. La nouvelle équation plus adaptée est la suivante :

$$L = \int_V w_f \frac{|(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|^2}{B^2} + w_d |\nabla \cdot \mathbf{B}|^2 dV + v \int_S (\mathbf{B} - \mathbf{B}_{obs}) \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_{obs}) dS, \quad (2.21)$$

où w_f , w_d et v sont des facteurs de pondération. Dans l'intégrale surfacique, \mathbf{W} est une matrice d'erreur diagonale composée de termes, w_{los} liés au champ magnétique le long de la ligne de visée, et de termes w_{trans} liés au champ magnétique transverse. Chaque terme est inversement proportionnel à l'erreur locale mesurée par l'instrument (e.g. HMI/SDO). Puisque le champ magnétique le long de la ligne de visée est mesuré avec une assez bonne précision, le terme w_{los} est généralement égal à 1. Au contraire, la composante transverse w_{trans} est faible, mais positive. Les régions où le champ transverse n'est pas mesuré ou est inconsistant sont caractérisées par $w_{trans} = 0$.

Ici, le champ magnétique peut également se relaxer à la frontière inférieure. Par conséquent

même les régions où $w_{trans} = 0$ évoluent naturellement vers un état sans force. Ainsi le nouveau formalisme (cf. Eq. 2.21), en tenant compte de l'écart entre le champ mesuré et le champ modélisé, permet d'obtenir un champ magnétique sans force non linéaire même si les observations sont inconsistants (Wiegelmann & Inhester 2010).

Proposée par Wheatland et al. (2000); Wiegelmann (2004); Wiegelmann & Inhester (2010) la méthode d'optimisation est développée en coordonnées cartésiennes et sphériques. Des exemples d'utilisations peuvent être trouvés dans Schrijver et al. (2006); Metcalf et al. (2008) dans un système cartésien et dans Guo et al. (2012) pour une version sphérique. Tadesse et al. (2009, 2011) ont par ailleurs utilisé la méthode d'optimisation en géométrie sphérique pour reconstruire le champ magnétique coronal global. En parallèle, Inhester & Wiegelmann (2006) ont proposé un schéma d'éléments finis pour la méthode d'optimisation, alors que tous les autres codes utilisent des schémas de différences finies.

2.3.2 Limitations des méthodes de reconstruction

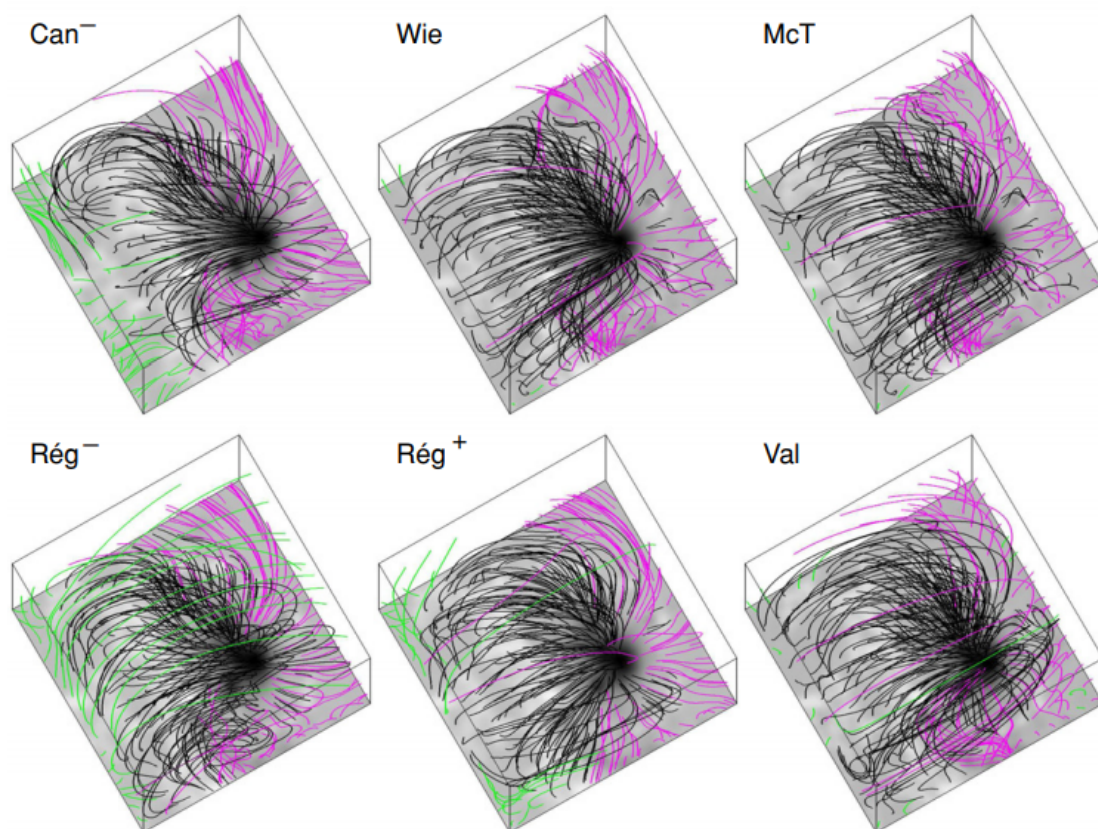


FIGURE 2.9 – Lignes de champ magnétique de la région active NOAA 10963 modélisées à partir de six méthodes d'extrapolation NLFFF. Les lignes noires interceptent la frontière inférieure deux fois tandis que les lignes violettes et vertes représentent des lignes de champ qui quittent le domaine. Adaptée de DeRosa et al. (2009).

J'ai présenté ci-dessus, les deux méthodes d'extrapolation : la méthode magnéto frictionnelle que j'ai été amené à utiliser pour reconstruire le champ magnétique de différentes régions actives ; et la méthode d'optimisation qui a fourni des données que j'ai par la suite analysées (cf. Sect. 4.3.3). Il existe cependant trois autres grandes approches que je n'ai pas décrites (Wiegelmann & Sakurai 2012) : la méthode d'intégration ascendante (Nakagawa 1974; Wu et al. 1985, 1990), la méthode Grad–Rubin (Grad & Rubin 1958; Sakurai 1981) et la méthode

des éléments limites (Yan & Sakurai 2000). Il se pose alors la question de savoir si toutes ces méthodes sont équivalentes.

En 2004 s'est formé un groupe de travail dirigé par Karel Schrijver dans l'optique de comparer et d'améliorer les méthodes d'extrapolation sans force non linéaire. Cela a abouti à cinq principales publications (Schrijver et al. 2006; Metcalf et al. 2008; Schrijver et al. 2008a; DeRosa et al. 2009, 2015) dont les résultats peuvent être retrouvés dans Wiegelmann & Sakurai (2012). Les comparaisons sont faites à partir de modèles analytiques d'un champ sans force (Schrijver et al. 2006), de simulations d'éruption solaire (Metcalf et al. 2008) et de régions actives observées par SOT/Hinode (Schrijver et al. 2008a; DeRosa et al. 2009, 2015).

Dans les modèles analytiques et numériques, toutes les méthodes d'extrapolations réussissent à reproduire très fidèlement le champ magnétique voulu. Les résultats sont plus contrastés à partir de données observées par Hinode. Schrijver et al. (2008a); DeRosa et al. (2009, 2015) ont montré que les différentes méthodes ont produit une grande variété de géométries du champ magnétique (cf. Fig. 2.9). En particulier, elles produisent des estimations différentes de l'énergie magnétique libre lorsqu'elles sont appliquées aux données mesurées SOT/Hinode.

Les raisons à la grande variété de résultats trouvés s'expliquent par les problèmes inhérents aux extrapolations discutés section (2.2). Elles se résument en particulier en trois points qui posent les principales contraintes pour une extrapolation réussite :

- Le magnétogramme initial doit être suffisamment large. Un magnétogramme vectoriel de champ de vue trop réduit, qui ne contient pas une région active entière et ses environs, ne fournit pas la connectivité magnétique nécessaire à la réussite des extrapolations non linéaires. Avec le nouveau champ de vue offert par HMI/SDO qui est plus grand que celui de SOT/Hinode, ce problème est partiellement résolu. Cependant, lors du choix du domaine d'étude, il est nécessaire de s'assurer que l'ensemble de l'information magnétique souhaitée est bien dans celui-ci.
- La région active doit être proche du centre du disque. Loin de celui-ci, les erreurs sur la mesure du champ magnétique (notamment sur la composante transverse) sont trop importantes. Cela entraîne de trop nombreuses incertitudes et donc un champ magnétique reconstruit qui est faussé.
- L'étape de prétraitement influe fortement sur la géométrie du champ magnétique reconstruit. Cependant, il est nécessaire de transformer le champ photosphérique observé en une approximation réaliste du champ chromosphérique, presque sans force pour obtenir des reconstructions cohérente avec les boucles coronales observées en EUV ou X.

Finalement, la reconstruction 3D du champ magnétique coronale est un outil puissant pour étudier l'évolution de quantités globales telles que l'hélicité magnétique et l'énergie magnétique. Mais il faut être extrêmement prudent lors de son utilisation. Il n'existe pas une méthode fortement plus performante qu'une autre. Chaque étape de la reconstruction doit être contrôlée minutieusement en s'assurant d'avoir bien un champ magnétique sans force qui présente le plus possible de similarités avec les boucles coronales observées. Une fois la reconstruction 3D vérifiée (ou assumée), de nombreux résultats peuvent en découler (e.g. Jing et al. 2010; Gilchrist et al. 2012; Regnier & Amari 2004; Valori et al. 2012; Sun et al. 2012; Thalmann et al. 2019a,b; Moraitis et al. 2019b). En particulier, nous verrons dans la suite de ce manuscrit que des reconstructions de différentes régions actives m'ont permis d'analyser le lien entre leur éruptivité et l'évolution de leur hélicité magnétique (cf. Sect. 4.2 Moraitis et al. 2019b; Thalmann et al. 2019b). J'ai également participé à une étude visant à quantifier le maximum de solénoïdalité du champ magnétique reconstruit au-dessus duquel les études de son hélicité magnétique ne peuvent pas montrer de résultats physiques (cf. Sect. 4.3.1 et Thalmann et al. 2019a). La mesure de l'hélicité magnétique est en effet sensible à la présence de divergence du champ magnétique (cf. Sect. 3.3.1.5).

2.4 Contrôle de la qualité des extrapolations

Les méthodes numériques d'extrapolations sont basées sur la minimisation de la divergence du champ magnétique ($\nabla \cdot \mathbf{B}$) et de la condition sans force, $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$. Du fait de la discrétisation des données et les incertitudes des méthodes numériques, ces contraintes ne peuvent être parfaitement respectées.

Ainsi, une fois le magnétogramme vectoriel obtenu, et l'extrapolation finie, il faut vérifier la qualité de la reconstruction 3D. Il existe de nombreuses métriques permettant de quantifier la qualité de l'extrapolation (Valori et al. 2010; Wheatland et al. 2000; Wiegelmann 2004; Schrijver et al. 2006). Dans cette section, je présenterai plusieurs de ces métriques en commençant par des quantités liées à la propriété sans force du champ magnétique (cf. Sect. 2.4.1). Puis je m'attarderai davantage sur l'impact de la divergence du champ magnétique reconstruit. Nous verrons en effet que si le champ magnétique n'est pas assez solénoïdal, les mesures de l'hélicité magnétique peuvent ne plus être pertinentes/consistantes. Cette problématique a été au cœur de plusieurs de mes travaux de thèse (e.g. Thalmann et al. 2019a).

2.4.1 Présentation de différentes métriques

Dans le cas où l'on dispose d'un modèle théorique du champ magnétique, \mathbf{b} , il est possible de vérifier la qualité de l'extrapolation en comparant directement l'écart entre le champ magnétique reconstruit, \mathbf{B} et le champ magnétique théorique (Wheatland et al. 2000). Quantitativement, cela passe par le calcul de deux métriques. La première est la métrique de corrélation vectorielle, C_{vec} définie par :

$$C_{vec} = \frac{\sum_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{b}_i}{(\sum_i |\mathbf{B}_i|^2 \sum_i |\mathbf{b}_i|^2)^{1/2}}, \quad (2.22)$$

où \mathbf{B}_i et \mathbf{b}_i sont les champs magnétiques à un point i de la grille. Si les vecteurs sont identiques alors $C_{vec} = 1$. Au contraire si le champ reconstruit est perpendiculaire au vecteur théorique alors $C_{vec} = 0$.

La seconde métrique, C_{CS} , est basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{B}||\mathbf{b}|$) et vaut :

$$C_{CS} = \frac{1}{M} \sum_i \frac{\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{b}_i}{|\mathbf{B}_i||\mathbf{b}_i|} = \frac{1}{M} \sum_i \cos\theta_i, \quad (2.23)$$

avec M le nombre total de vecteurs dans le volume et θ_i est l'angle entre le vecteur reconstruit et le vecteur théorique. Ainsi $C_{CS} = 1$ si \mathbf{B} et \mathbf{b} sont parallèles et $C_{CS} = 0$ si \mathbf{B} et \mathbf{b} sont perpendiculaires.

Ces deux métriques sont particulièrement intéressantes si le champ magnétique théorique, \mathbf{b} , est parfaitement connu, par exemple à partir des simulations numériques (e.g. Schrijver et al. 2006; Valori et al. 2007, 2010; Metcalf et al. 2008). Néanmoins, quand on reconstruit le champ magnétique coronal d'une région active, on ne dispose pas de \mathbf{b} . La qualité de l'extrapolation est quantifiée grâce à d'autres métriques. Par exemple, il faut vérifier que le champ magnétique reconstruit est bien sans force. Pour cela, on calcule généralement l'angle entre la densité de courants électriques, \mathbf{J} , et le champ magnétique (Wheatland et al. 2000) :

$$\sigma_J = \frac{\sum_i J_i \sigma_i}{\sum_i J_i}, \quad (2.24)$$

avec

$$\sigma_i = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|_i}{J_i B_i}. \quad (2.25)$$

Plus σ_J est petit, plus le champ magnétique est sans force (e.g. [Schrijver et al. 2008a](#)). En effet, la solution idéale est telle que la densité de courant est parallèle au champ magnétique $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$. La valeur limite acceptée dépend de l'usage de l'extrapolation souhaitée. En reconstruisant le champ magnétique des modèles de tube de flux de [Titov & Démoulin \(1999\)](#) à l'aide de la méthode magnéto frictionnelle (cf. Fig. 2.5), [Valori et al. \(2010\)](#) ont mesuré des valeurs de σ_J inférieure à 0.02, montrant ainsi que la méthode est efficace, mais évidemment pas parfaite.

Durant ma thèse, j'ai développé un code dans le langage de programmation "Python" permettant de calculer les trois métriques ci-dessus (cf. Eqs. 2.22, 2.23 et 2.24) à partir de données magnétiques issues d'extrapolations NLFFF (cf. Sect. 4.3.1.2). J'ai notamment utilisé ce code lors de mon étude de la région active NOAA 11158, dont les résultats sont décrits section (4.3.1) et dans [Thalmann et al. \(2019a\)](#).

Pour finir, le calcul des métriques ne dispense pas de vérifier si les lignes de champ magnétique reconstruites ont une géométrie proche de celle des boucles coronales de la région active observée par les instruments solaires (cf. Fig. 2.6). D'autre part, il faut également vérifier si le champ magnétique est bien solénoïdal (cf. Sect. 2.4.2).

2.4.2 Contrôle de la propriété solénoïdale du champ magnétique

Dans le cas où le champ magnétique présente un degré fini de solénoïdalité trop élevé, le calcul de l'énergie magnétique et de l'hélicité magnétique n'est plus consistant ([Valori et al. 2013](#); [Thalmann et al. 2019a](#)). Pour utiliser un champ magnétique coronal dans le but de suivre l'évolution de l'hélicité magnétique, il est donc nécessaire de quantifier à quel point la propriété solénoïdale du champ magnétique (cf. Eq. 2.11) est bien respectée.

Ci-après, je présenterai une version revisitée du théorème de Thomson dans le cas où la divergence du champ magnétique n'est pas nulle (cf. Sect. 2.4.2.1). Nous verrons qu'à partir du nouvel énoncé du théorème de Thomson, il est possible d'extraire une énergie particulièrement utile pour quantifier l'impact de la non-solénoïdalité dans des données numériques du champ magnétique (cf. Sect. 2.4.2.2).

2.4.2.1 Théorème de Thomson-Valori

Le théorème de Thomson (cf. Sect. 1.3.1.1 et Eq. 1.12) est vrai uniquement si le champ magnétique est parfaitement solénoïdal. En pratique, le champ magnétique qu'il soit obtenu par extrapolation sans force non linéaire (e.g. [Thalmann et al. 2019a](#)) ou issu de simulations numériques (e.g. [Zuccarello et al. 2018](#)) est représenté par un ensemble discret de valeurs. Dans ce cas, puisque les dérivées spatiales au niveau d'une valeur ne sont qu'approximées, garantir une divergence nulle n'est pas trivial ([Brackbill & Barnes 1980](#)). Même si des méthodes numériques se développent pour assurer la solénoïdalité du champ magnétique ([McNally 2011](#); [Balsara & Kim 2004](#)), un certain niveau de non-solénoïdalité (c.-à-d. $\nabla \cdot \mathbf{B} \simeq 0$) persiste dans la plupart des simulations MHD (voir l'ensemble des simulations utilisées dans mes études [Linan et al. 2018, 2020](#)).

Le champ magnétique potentiel, \mathbf{B}_p , est obtenu à partir du champ magnétique. Les différentes méthodes numériques existantes n'étant pas parfaites, cela peut conduire à une divergence finie du champ potentiel. Par construction, le champ porteur de courants électriques, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$, n'est également pas parfaitement solénoïdal. [Valori et al. \(2013\)](#) ont montré que

les champs magnétiques peuvent alors être décomposés en deux composantes, une purement solénoïdale (notée "s") et une possédante une divergence non nulle (notée "ns") :

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_{p,s} - \mathbf{B}_{p,ns} \quad \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_{j,s} - \mathbf{B}_{j,ns}. \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) peut être ensuite injectée dans l'équation de l'énergie magnétique pour obtenir une version revisitée du théorème de Thomson, le théorème de Thomson-Valori (Valori et al. 2013) :

$$E_v = E_{j,s} + E_{p,s} + E_{p,ns} + E_{j,ns} + E_{mix}. \quad (2.27)$$

Les énergies magnétiques $E_{p,s}$ et $E_{j,s}$ sont associées aux champs purement solénoïdaux, $\mathbf{B}_{j,s}$ et $\mathbf{B}_{p,s}$. Tandis que $E_{p,ns}$ et $E_{j,ns}$ sont les énergies magnétiques des champs non solénoïdaux, $\mathbf{B}_{j,ns}$ et $\mathbf{B}_{p,ns}$. Le terme mixte, E_{mix} est une quantité positive ou négative qui tient compte de la divergence des champs potentiel et non potentiel. Pour un champ magnétique parfaitement solénoïdal on a alors $E_{p,s} = E_p$, $E_{j,s} = E_j$, $E_{p,ns} = E_{j,ns} = E_{mix} = 0$. L'équation (2.27) se simplifie en l'équation (1.12). De plus, la somme des contributions non solénoïdales définit une nouvelle quantité :

$$E_{ns} = E_{p,ns} + E_{j,ns} + E_{mix}, \quad (2.28)$$

qui mesure la différence sur l'énergie obtenue entre le cas idéal ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) et le cas réel. La présence d'une énergie non solénoïdale non nulle peut expliquer pourquoi certaines études fournissent une énergie libre négative (DeRosa et al. 2009).

2.4.2.2 Influence de la divergence du champ magnétique

Théorème de Thomson-Valori						
E [10^{33} erg]	$E_{p,s}/E$	$E_{j,s}/E$	$E_{p,ns}/E$	$E_{j,ns}/E$	E_{mix}/E	E_{ns}/E
0.0093	0.72	0.38	0.0001	0.0673	-0.179	-0.112

Avec
 $H = -0.0607 Mx^2$
 $\sigma_j = 0.37$

FIGURE 2.10 – Tableau regroupant les énergies issues du théorème de Thomson-Valori (cf. Eq. 2.27) et obtenues à partir des données magnétiques de la reconstruction 3D de la région active NOAA 12441.

Comme mentionné précédemment, le contrôle de la qualité d'une extrapolation NLFFF passe par la quantification de la propriété solénoïdale du champ magnétique. En effet, la méthode d'optimisation ainsi que la méthode magnéto frictionnelle reposent en partie sur la minimisation de la divergence du champ magnétique (cf. Eqs. 2.15 et 2.21).

Classiquement, la divergence du champ magnétique est estimée à partir du flux fractionné d'un point de maille Wheatland et al. (2000) :

$$fi \equiv \frac{\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B})_i dV}{\int_S |\mathbf{B}_i| dS}, \quad (2.29)$$

où V est un petit volume centré autour du point i (Wheatland et al. 2000). Dans le cas discret,

la moyenne du flux fractionné vaut :

$$\langle |f_i| \rangle = \frac{\Delta}{6M} \sum_i \frac{|\nabla \cdot \mathbf{B}_i|}{|\mathbf{B}_i|}, \quad (2.30)$$

avec M le nombre de points de maille et Δ la longueur de l'arrête des petits volumes. Cependant, Valori et al. (2013) et Valori et al. (2016) ont montré que le flux fractionné n'est pas la grandeur la plus adaptée pour quantifier le niveau de divergence d'un champ magnétique. En effet, cette métrique dépend du nombre de pixels ainsi que de la résolution spatiale. Par conséquent, il est impossible de comparer le flux fractionné entre deux simulations possédant des domaines complètement différents. La quantité $\langle |f_i| \rangle$ est cependant utile pour suivre l'évolution temporelle de la divergence du champ magnétique dans une même simulation avec une même résolution.

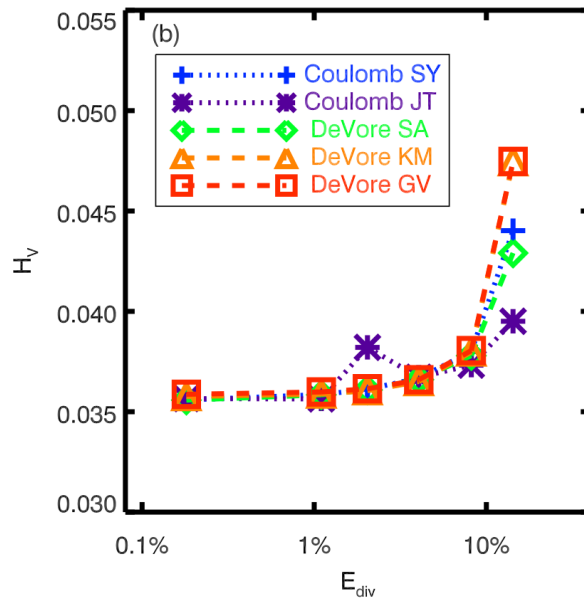


FIGURE 2.11 – Influence de la divergence du champ magnétique sur la mesure de l'hélicité magnétique relative calculée à partir des données magnétiques de simulation numérique MHD de l'émergence stable d'un tube de flux torsadé (Leake et al. 2013). Les différentes courbes représentent chacune une méthode de mesure de l'hélicité relative par intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1). Jusqu'à la valeur $E_{div}/E_v = 10\%$, toutes les méthodes donnent des valeurs équivalentes. Passé cette valeur, la valeur de l'hélicité relative présente une importante dispersion entre les méthodes (Valori et al. 2016).

Pour quantifier la solénoïdalité du champ magnétique, il est préférable d'utiliser une grandeur basée sur le théorème de Thomson-Valori (cf. Sect. 2.4.2.1). Valori et al. (2013) ont montré que la présence d'une quantité finie de divergence entraîne le non-respect de l'équation de Thomson (1.12), qui se traduit par la présence d'une énergie non solénoïdale E_{ns} (cf. Eq. 2.28). Cependant, cette énergie peut être petite si les termes qui la composent se compensent. Il est donc plus adéquat de prendre la valeur absolue de ses termes. On préfère donc utiliser l'énergie, E_{div} définie par :

$$E_{div} = E_{p,ns} + E_{j,ns} + |E_{mix}|. \quad (2.31)$$

Voir la section (2.4.2.1) pour le détail des trois énergies présentes dans cette décomposition.

L'écart entre un champ magnétique parfaitement solénoïdal et le champ magnétique reconstruit est quantifié par le ratio, E_{div}/E_v (Valori et al. 2013). Contrairement à $\langle |f_i| \rangle$, le ratio E_{div}/E_v est universel et permet de comparer les simulations. (Valori et al. 2016) ont en effet montré que des simulations avec un ratio E_{div}/E_v similaire pouvaient présenter des valeurs de $\langle |f_i| \rangle$ différentes, car leurs résolutions ne sont pas identiques. Cependant, l'énergie E_{ns} est une quantité globale. Pour comprendre la distribution locale de la divergence, le ratio E_{div}/E_v n'est pas le plus adapté. En pratique les deux grandeurs, E_{div}/E_v et $\langle |f_i| \rangle$ sont utilisées de façon complémentaire.

La divergence du champ magnétique doit être contrôlée, car elle impacte fortement la mesure de l'hélicité magnétique relative (cf. Eq. 3.9) que j'introduirai section (3.1.2). En utilisant des données magnétiques issues de simulations numériques, Valori et al. (2016) ont trouvé que pour $E_{div}/E_v = 15\%$ la valeur de l'hélicité magnétique relative pouvait varier de 18% selon la méthode de calcul (cf. Fig. 3.6). Pour être sûr que la valeur de l'hélicité magnétique soit consistante, il faut donc s'assurer que la valeur de E_{div} soit la plus petite possible.

Pour ma reconstruction 3D du champ magnétique coronal de la région active NOAA 12441 (cf. Fig. 2.8), j'ai calculé une valeur de E_{div}/E_v égale à 25% (cf. Fig. 2.10). Cette valeur est bien supérieure au seuil limite pour obtenir une hélicité magnétique consistante. Pour cette raison, mon extrapolation ne peut pas servir à une étude sur l'hélicité magnétique de la région active. La reconstruction présentée dans la figure (2.8) est la première que j'ai réalisée. Durant toute ma thèse je n'ai cependant jamais réussi à créer une extrapolation avec une valeur de E_{div}/E_v inférieure à 10%.

De façon générale, dans l'ensemble de mes travaux de thèse (Linan et al. 2018, 2020; Thalmann et al. 2019a,b; Moraitis et al. 2019b), j'ai toujours vérifié que le champ magnétique était suffisamment solénoïdal pour permettre une mesure précise et correcte de l'hélicité magnétique. Autrement dit, j'ai toujours calculé le ratio E_{div}/E_v et vérifié si sa valeur est inférieure à 10%.

Chapitre 3

Hélicité magnétique relative : propriétés et mesures

Sommaire

3.1 Hélicité magnétique relative et ses décompositions	68
3.1.1 Invariance de jauge	68
3.1.2 Hélicité magnétique relative	69
3.1.3 Hélicité potentielle et Hélicité mixte	71
3.1.4 Hélicité non potentielle et Hélicité mêlée	72
3.2 Conservation de l'hélicité magnétique relative	73
3.2.1 Conservation de l'hélicité magnétique en MHD idéale	73
3.2.1.1 Variation temporelle de l'hélicité magnétique	73
3.2.2 Conservation en MHD non idéale	74
3.2.2.1 L'hypothèse de Taylor	74
3.2.2.2 Validation numérique de la conservation d'hélicité relative	76
3.2.2.3 Théorème de Woltjer-Taylor	78
3.2.2.4 Limite à la relaxation de Taylor et au théorème de Woltjer-Taylor	79
3.2.3 Conséquence de la conservation d'hélicité	80
3.3 Mesure et représentation de l'hélicité magnétique	82
3.3.1 Mesure de l'hélicité par intégration directe volumique	83
3.3.1.1 Présentation générale	83
3.3.1.2 Méthode employant la jauge de Coulomb	84
3.3.1.3 Méthode employant la jauge de DeVore	85
3.3.1.4 Mon développement et implémentation numérique de la méthode	86
3.3.1.5 Comparaison des différentes méthodes d'IDV	87
3.3.2 Intégration du flux d'hélicité	89
3.3.2.1 Flux d'hélicité magnétique relative	89
3.3.2.2 Mesure du flux photosphérique d'hélicité relative	91
3.3.3 Hélicité magnétique par ligne de champ	93
3.3.4 Densité de flux d'hélicité	96
3.4 Additivité de l'hélicité magnétique relative	98
3.4.1 Partition de l'hélicité relative entre deux volumes : Valori, Pariat, Démoulin, Moraitis, Yeates, & Linan (2020)	99

3.4.1.1	Résumé	99
3.4.1.2	Ma contribution	101
3.4.1.3	Perspectives	102

Des structures magnétiques torsadées ou cisailées sont omniprésentes dans l’atmosphère solaire notamment au niveau des régions actives éruptives (cf. Sect. 1.1.3). Les propriétés géométriques du champ magnétique étant reliées à l’hélicité magnétique (cf. Sect. 1.4), cette grandeur semble particulièrement pertinente dans l’étude de l’atmosphère solaire.

Néanmoins, pour savoir si la torsion et le cisaillement du champ magnétique jouent un rôle clé dans l’évolution d’une région active, il est nécessaire de pouvoir estimer l’hélicité magnétique proprement dans l’atmosphère solaire. Nous verrons dans ce chapitre que l’hélicité magnétique définie classiquement (cf. Eq. 1.16) ne peut pas être correctement estimée dans l’atmosphère solaire à la différence d’une formulation légèrement différente : l’hélicité magnétique relative (cf. Sect. 3.1.2). Dans la section (3.1.4), j’introduirai en particulier deux formes d’hélicité qui sont liées au champ magnétique porteur de courants électriques et au champ potentiel. Ces deux nouvelles hélicités magnétiques sont au cœur de mon travail de thèse (cf. chapitres suivants 4 et 5).

Nous verrons également que l’hélicité magnétique relative est conservée même en MHD non idéale (cf. Sect. 3.2). Cette propriété a des conséquences sur l’évolution du champ magnétique coronal et pourrait expliquer l’existence des éjections de masse coronale.

Dans la suite du chapitre, je présenterai les différentes techniques de mesure de l’hélicité magnétique dans l’atmosphère solaire (cf. Sect. 3.3). Je montrerai les avantages et les différences de l’ensemble des techniques en me consacrant davantage sur la méthode numérique que j’ai utilisée durant ma thèse. Enfin, la section (3.4) est dédiée au problème d’additivité de l’hélicité magnétique. Nous verrons que l’hélicité magnétique relative n’est pas une grandeur simplement additive, mais qu’il est possible de formuler analytiquement les contributions non additives.

3.1 Hélicité magnétique relative et ses décompositions

Dans cette section, nous allons voir que l’hélicité magnétique définie par l’équation (1.16) n’est pas invariante de jauge à la différence de l’hélicité magnétique relative dont nous introduirons la définition (cf. Eq. 3.9, Sect. 3.1). Néanmoins, sans hypothèse particulière, l’hélicité nouvellement définie n’est pas strictement équivalente à l’hélicité magnétique classique. Nous verrons que la différence entre les deux définitions fait apparaître deux nouvelles formes d’hélicité : potentielle et mixte (cf. Sect. 3.1.3).

Dans la section (1.3.1), nous avons vu que l’énergie magnétique totale peut être décomposée en une énergie potentielle et une énergie non potentielle. Dans la même ligne de pensée, l’hélicité magnétique relative peut également se décomposer en une hélicité qui dépend du champ magnétique porteur de courants électriques et en une hélicité qui contient le reste de l’information (cf. Sect. 3.1.4).

3.1.1 Invariance de jauge

Si l’on considère un volume fixe, V , de surface, S , également fixée, dans lequel évolue un champ magnétique, \mathbf{B} , la principale difficulté lors du calcul de l’équation (1.16) réside dans l’estimation du potentiel vecteur \mathbf{A} . En effet, le rotationnel d’un gradient étant toujours nul, le potentiel vecteur respectant $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, est déterminé à un gradient près. Il existe donc une infinité de potentiels vecteurs représentant le même champ magnétique.

Pour que l’hélicité magnétique ait un sens physique, l’hélicité doit être invariante de jauge. La valeur de l’hélicité magnétique ne doit pas dépendre de la jauge du potentiel vecteur. Soit

la transformation de jauge $\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\phi$ avec ϕ une fonction scalaire, l'hélicité magnétique, $H_m(\mathbf{A}')$, dans le volume V délimité par la surface S s'écrit :

$$H_m(\mathbf{A}') = \int_v (\mathbf{A} + \nabla\phi) \cdot \mathbf{B} \, dV \quad (3.1)$$

$$= \int_v \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV + \int_v \nabla\phi \cdot \mathbf{B} \, dV. \quad (3.2)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, l'hélicité ainsi définie est égale à :

$$H_m(\mathbf{A}') = \int_v \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV + \int_s \phi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.3)$$

$$H_m(\mathbf{A}') = H_m(\mathbf{A}) + \int_s \phi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.4)$$

L'hélicité magnétique est donc invariante de jauge, si et seulement si, le champ magnétique est tangent à la surface, en tout point de celle-ci. C'est une contrainte forte qui restreint l'utilisation de l'hélicité telle quelle au seul volume magnétique où la composante normale du champ magnétique est nulle tout le long de la surface (c.-à-d. $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}|_S = 0$). En particulier, du champ magnétique émerge en permanence des niveaux inférieurs dans l'atmosphère solaire (cf. Sect. 1.5.4). Il est donc impossible d'estimer l'hélicité avec la définition classique (cf. Eq. 1.16) pour l'étude des événements actifs du Soleil. Une nouvelle définition, invariant de jauge, est donc indispensable.

Cette question de l'invariance de jauge est une problématique qui est récurrente tout le long de ma thèse, que ce soit lors des travaux sur les propriétés de l'hélicité telles que l'additivité (cf. Sect. 3.4) ou lors de l'étude des flux d'hélicités (cf. Sect. 5.2).

3.1.2 Hélicité magnétique relative

Dans le cas d'un volume potentiellement non magnétique, [Berger & Field \(1984\)](#) ont défini une hélicité magnétique dite relative comme la différence entre l'hélicité du champ magnétique étudié, \mathbf{B} , et l'hélicité d'un champ de référence \mathbf{B}_0 . Le champ de référence doit, de plus, posséder la même distribution normale le long de la surface du domaine que le champ magnétique total \mathbf{B} (cf. Fig. 3.1).

Pour un volume quelconque, V , [Finn & Antonsen Jr \(1985\)](#) ont montré que l'hélicité magnétique relative, $H_{r,0}$, peut s'écrire sous la forme :

$$H_{r,0} = \int_v (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \, dV, \quad (3.5)$$

avec \mathbf{A}_0 le potentiel vecteur du champ de référence $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$.

Comme pour l'hélicité classique, il faut s'assurer que l'hélicité relative est invariante de jauge. Pour cela, on considère une transformation de jauge indépendante pour les deux potentiels vecteurs, $\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\phi$ et $\mathbf{A}'_p \rightarrow \mathbf{A}_0 + \nabla\phi_0$. L'hélicité relative, $H'_{r,0}(\mathbf{A}', \mathbf{A}'_0)$, obtenue est

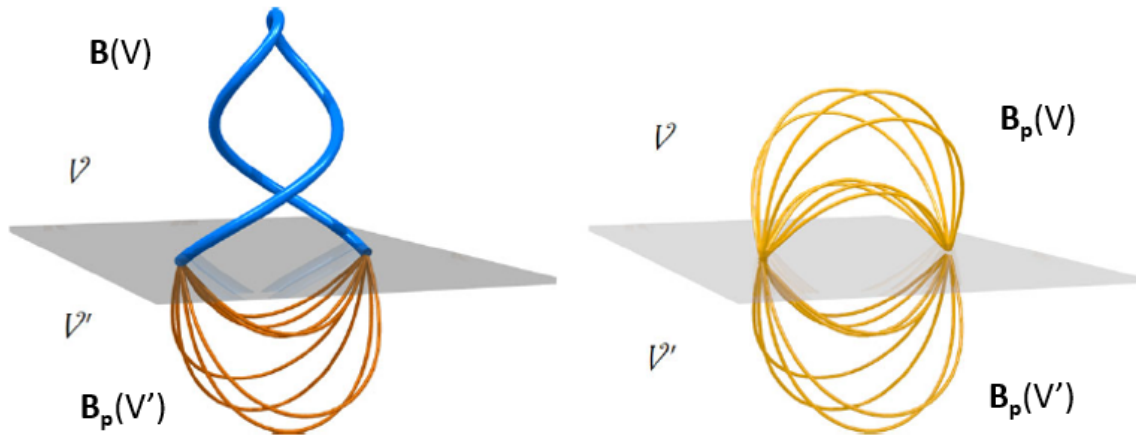


FIGURE 3.1 – **Gauche** : Le champ magnétique $\mathbf{B}(V)$ est initialement ouvert. Pour calculer son hélicité magnétique, on ferme le champ magnétique en rajoutant un volume V' contenant un champ $\mathbf{B}_p(V')$ tel que $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p$ à l'interface entre V et V' . L'hélicité de l'ensemble vaut alors H_{tot} . **Droite** : le champ magnétique dans le volume V est remplacé par son champ potentiel. On note H_{ref} l'hélicité du nouveau champ fermé ainsi créé. L'hélicité magnétique relative est alors déduite, à un terme H_{mix} près (cf. Eq. 3.10), de la différence $H_{tot} - H_{ref}$. Adaptée de Pevtsov et al. (2014).

alors :

$$H'_{r,0}(\mathbf{A}', \mathbf{A}'_0) = \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) dV \quad (3.6)$$

$$= H_{r,0} + \int_{\mathbf{v}} \nabla(\phi + \phi_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) dV \quad (3.7)$$

$$= H_{r,0}(\mathbf{A}, \mathbf{A}_0) + \int_S (\phi + \phi_0)(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \cdot dS. \quad (3.8)$$

L'hélicité relative est donc invariante de jauge puisque \mathbf{B} et \mathbf{B}_0 ont la même distribution de flux surfacique, c.-à-d. $(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \cdot dS = 0$.

Une des limites de l'hélicité relative est qu'elle dépend du choix de référence, ce qui complique son interprétation physique (Prior & Yeates 2014). Généralement, le champ de référence employé est le champ potentiel, \mathbf{B}_p , qui possède bien la même distribution normale le long de la surface du domaine que le champ magnétique total \mathbf{B} (cf. Eq. 1.6). Le champ potentiel est bien défini et est unique. Il caractérise également l'énergie magnétique minimale d'un champ magnétique (cf. Sect. 1.3.1.1). Dans le cas des champs magnétiques ayant une seule limite plane, Berger (1986) et Démoulin et al. (2006) ont montré que l'hélicité relative correspond au nombre d'enroulements moyen des lignes de champ magnétique.

Dans ce manuscrit, et dans mes différents travaux de thèse, j'ai donc choisi de prendre le champ potentiel (cf. Eq. 1.4, Sect. 1.3.1.1) comme champ de référence, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_{Pp}$ tel que :

$$H_r = \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV, \quad (3.9)$$

C'est le choix qui est classiquement employé dans les travaux sur l'hélicité, mais d'autres champs de références sont possibles (e.g. Prior & Yeates 2014). Par exemple, Longcope & Malanushenko (2008) ont exploré différents choix de champ de référence pour l'hélicité relative dans des sous-

volumes de la couronne solaire.

Notons également que l'hélicité magnétique est généralement calculée sous la forme de l'hélicité magnétique relative. Pour autant, d'autres expressions de l'hélicité magnétique existent. Par exemple [Low \(2006, 2011\)](#) a proposé des formulations de l'hélicité magnétique sous la forme d'hélicités lagrangienne et absolue en se basant sur une décomposition du champ magnétique en un champ toroïdal et un champ poloïdal ([Chandrasekhar & Chandrasekhar 1957](#)). [Prior & Yeates \(2014\)](#) ont, pour leur part, suggéré l'utilisation de la définition classique de l'hélicité magnétique, mais dans un choix de jauge particulière (voir l'équation 18 dans [Prior & Yeates 2014](#)). Ainsi, la valeur et l'interprétation de l'hélicité magnétique dépendent du choix des expressions (hélicité magnétique classique, relative, lagrangienne ou absolue).

3.1.3 Hélicité potentielle et Hélicité mixte

Si l'hélicité relative peut s'utiliser dans des volumes moins restreints que l'hélicité originale, il est cependant possible de quantifier la différence d'informations apportée par les deux définitions. Pour cela, l'hélicité magnétique peut être divisée de telle sorte à faire apparaître l'hélicité magnétique relative :

$$H_m = H_r + H_p - H_{\text{mix}} \quad (3.10)$$

$$H_p = \int_v (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_p) dV \quad (3.11)$$

$$H_{\text{mix}} = \int_v (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_p) dV = \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{A}_p) \cdot dS. \quad (3.12)$$

Cette décomposition met en lumière deux nouvelles hélicités : l'hélicité du champ potentiel, H_p et une hélicité mixte H_{mix} . Ces deux termes n'ont cependant pas de sens physique puisqu'ils dépendent du choix de la jauge utilisée pour les calculer.

Pour annuler le terme mixte, il suffit que les deux potentiels vecteurs aient la même composante transverse à la surface, c.-à-d. :

$$\mathbf{A} \times dS|_S = \mathbf{A}_p \times dS|_S. \quad (3.13)$$

Une fois cette condition respectée alors l'hélicité relative est égale à la différence entre l'hélicité du champ étudié et l'hélicité du champ potentiel ($H_r = H_m(\mathbf{B}) - H_m(\mathbf{B}_p)$). De plus, en assurant le respect de l'équation (3.13) la condition (1.6) est forcément contrainte, mais le choix de la jauge de \mathbf{A} est maintenant lié avec celui de \mathbf{A}_p .

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, l'hélicité du champ potentiel se décompose :

$$H_p = \int_v \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_p dV = \int_v \mathbf{A}_p \cdot \nabla \Phi dV \quad (3.14)$$

$$= \int_S \Phi \mathbf{A}_p \cdot dS - \int_v \Phi \nabla \cdot \mathbf{A}_p dV. \quad (3.15)$$

Ainsi l'hélicité potentielle est nulle en restreignant le choix du vecteur potentiel \mathbf{A}_p tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_p \cdot dS|_S = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Les conditions (3.16) et (3.13) suffisent en théorie pour que l'hélicité relative soit strictement égale à l'hélicité classique.

Nous verrons section (3.3.1.3), que les méthodes de calcul des vecteurs potentiels dans des domaines cartésiens ou sphériques permettent de choisir les jauges employées. Cependant, à ma connaissance il n'existe pas de méthode qui puisse garantir simultanément les conditions (3.16) et (3.13) au niveau de toutes les frontières des domaines d'étude (Valori et al. 2012). De plus, des méthodes d'estimation de l'hélicité relative nécessitent d'employer des jauges particulières. C'est le cas de la méthode basée sur le calcul du flux d'hélicité relative dont l'expression est simplifiée si les conditions (3.16) et (3.13) sont respectées (cf. Sect. 3.2.1.1).

3.1.4 Hélicité non potentielle et Hélicité mêlée

La décomposition de l'hélicité relative (cf. Eq. 3.10), est mathématique, mais pas physique puisque chaque terme pris indépendamment dépend de la jauge utilisée. Si l'on veut étudier en détail l'influence sur l'hélicité relative du champ potentiel, \mathbf{B}_p et sa contrepartie le champ non potentiel \mathbf{B}_j (tel que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_p$, cf. Sect. 1.3.1.1) une autre décomposition est possible.

De la même manière que l'énergie magnétique, \mathbf{E}_v , se décompose en énergie libre, \mathbf{E}_j et énergie potentielle \mathbf{E}_p (cf. Sect. 1.3.1.1 et Eq. 1.3), l'hélicité relative se divise en (Berger 2003) :

$$H_r = H_j + H_{pj} \quad (3.17)$$

avec

$$H_j = \int_v (\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{B}_j) dV \quad (3.18)$$

$$H_{pj} = 2 \int_v (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_j) dV. \quad (3.19)$$

Le potentiel vecteur \mathbf{A}_j est associé au champ non potentiel ($\nabla \times \mathbf{A}_j = \mathbf{B}_j$). Dans l'équation (3.18), H_j correspond à l'équation classique de l'hélicité magnétique du champ non potentiel, \mathbf{B}_j , tandis que H_{pj} est l'hélicité dite mêlée qui contient le reste de l'information. Puisque la décomposition du champ magnétique en \mathbf{B}_j et \mathbf{B}_p est unique, la décomposition de l'hélicité relative en H_{pj} et H_j l'est également.

Soit le jeu de transformation de jauge $(\mathbf{A}'_j; \mathbf{A}'_p) \rightarrow (\mathbf{A}_j + \nabla\phi_j; \mathbf{A}_p + \nabla\phi_p)$, l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle s'écrivent à présent dans cette transformation :

$$H'_j(\mathbf{A}'_j, \mathbf{A}'_p) = \int_v \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{B}_j dV + \int_S \phi_j \mathbf{B}_j \cdot dS. \quad (3.20)$$

$$= H_j(\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_p) + \int_S \phi_j \mathbf{B}_j \cdot dS \quad (3.21)$$

$$H'_{pj}(\mathbf{A}'_j, \mathbf{A}'_p) = 2 \int_v \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_j dV + 2 \int_S \phi_p \mathbf{B}_j \cdot dS \quad (3.22)$$

$$= H_{pj}(\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_p) + 2 \int_S \phi_p \mathbf{B}_j \cdot dS. \quad (3.23)$$

Par définition de \mathbf{B}_j , la composante normale du champ non potentiel est nulle le long de la surface $\mathbf{B}_j \cdot dS|_S = 0$. Par conséquent, les deux hélicités sont invariantes de jauge. Cette décomposition de l'hélicité relative est donc pertinente.

La décomposition de l'hélicité relative est proche de celle obtenue pour l'énergie (cf. Sect. 1.3.1.2). La comparaison a cependant ses limites (Linan et al. 2020). Par exemple si l'énergie potentielle dépend uniquement du champ potentiel; l'hélicité mêlée, quant à elle, a également une contribution du champ non potentiel. Une partie de mon travail fut d'étudier en parallèle

l'évolution et les variations temporelles des différentes hélicités et énergies afin de relever les similitudes et les différences dans des simulations numériques d'éruptions solaires (cf. Sect. 5.3). Dans mon travail de thèse, je me suis étroitement intéressé à l'étude des propriétés ainsi qu'à la mesure des hélicités mêlée et non potentielle qui apparaissent comme des quantités prometteuses (cf. Sect. 4.2.2).

3.2 Conservation de l'hélicité magnétique relative

Dans cette section, nous verrons que l'hélicité magnétique relative est conservée en MHD idéale (cf. Sect. 3.2.1), mais également en présence de processus non idéaux tels que la reconnexion magnétique (cf. Sect. 3.2.2).

L'hélicité relative étant conservée même lors des éruptions solaires, nous verrons que les CMEs permettent d'empêcher son accumulation infinie dans l'atmosphère solaire (cf. Sect. 3.2.3).

3.2.1 Conservation de l'hélicité magnétique en MHD idéale

Si l'hélicité relative est conservée, cela signifie que sa variation temporelle dans un volume fini peut s'écrire comme la somme des flux à travers les surfaces. Dans le paradigme de la MHD idéale (cf. Append. A.4), nous verrons que c'est effectivement le cas (cf. Sect. 3.2.1.1).

3.2.1.1 Variation temporelle de l'hélicité magnétique

Dans un volume \mathbf{V} délimité par une surface \mathbf{S} , la variation temporelle de l'hélicité relative s'écrit (Pariat et al. 2015) :

$$\frac{dH_r}{dt} = \int_{\mathbf{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV + \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV \quad (3.24)$$

$$= \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \times \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} + 2 \int_{\mathbf{V}} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV - 2 \int_{\mathbf{V}} \mathbf{A}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV. \quad (3.25)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, l'équation de Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, ainsi que le potentiel scalaire du champ magnétique potentiel, $\nabla \phi = \mathbf{B}_p$, l'équation (3.24) se décompose en (Pariat et al. 2015) :

$$\begin{aligned} \frac{dH_r}{dt} &= \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \times \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} + 2 \int_{\mathbf{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_p dV \\ &\quad - 2 \int_{\mathbf{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV - 2 \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} - 2 \int_{\mathbf{S}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cette équation étant invariante de jauge, des contraintes sur les potentiels vecteurs peuvent être rajoutées pour simplifier les différents termes. Dans le cas particulier où \mathbf{A} et \mathbf{A}_p respectent les conditions (3.13) et (3.16), la variation temporelle devient simplement :

$$\frac{dH_r}{dt} = -2 \int_{\mathbf{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV - 2 \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{E} \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.27)$$

Notons que sous ce choix de jauge spécifique l'hélicité magnétique relative est strictement identique à l'hélicité magnétique (cf. Sect. 3.1.3). L'équation ci-dessus correspond donc également à la variation temporelle de l'hélicité. Le terme volumique décrit la dissipation de l'hélicité.

Il traduit les différentes reconnections et recoupements des lignes de champ magnétique, qui modifient leurs nombres de liens et donc l'hélicité. Le terme surfacique, quant à lui, correspond aux flux d'hélicité injectés ou éjectés à travers la surface.

Dans le cadre de l'approximation de la magnétohydrodynamique (MHD) idéale (cf. Append. A.1), le champ électrique est perpendiculaire au champ magnétique $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La variation d'hélicité, c.-à-d. l'équation (3.27), se simplifie en :

$$\begin{aligned} \frac{dH_r}{dt} &= 2 \int_S ((\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} \\ &= 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_h) \mathbf{v}_n dS - 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{v}_h) \mathbf{B}_n dS \end{aligned} \quad (3.28)$$

où l'indice «n» désigne la composante normale dirigée vers l'intérieur du volume, et «h» représente la composante horizontale (parallèle à la surface). Deux termes surfaciques apparaissent. Ces deux contributions et plus précisément leurs valeurs doivent cependant être considérées avec précaution puisqu'elles dépendent de la jauge utilisée. Uniquement leur somme reliée aux mouvements d'advection aux surfaces du domaine et aux cisaillements du champ magnétique, a un sens physique (Pariat et al. 2015).

Le point important ici est que la variation d'hélicité en MHD idéale dépend uniquement des flux à travers la surface. La dissipation d'hélicité est nulle, et par conséquent, l'hélicité magnétique constitue un des invariants de la MHD idéale (Woltjer 1958).

3.2.2 Conservation en MHD non idéale

Dans l'atmosphère solaire, les éruptions solaires sont liées à un changement rapide de la configuration magnétique par reconnexion magnétique (cf. Sect. 1.3.2). Un tel processus ne peut pas être décrit en MHD idéale (cf. Sect. A.5) et nécessite des modèles plus complexes tels que la MHD résistive.

L'hélicité magnétique relative peut cependant être considérée comme conservée même dans les modèles MHD dits non idéaux. Cette affirmation a d'abord été supposée et pressentie (cf. Sect. 3.2.2.1) avant d'être vérifiée numériquement (cf. Sect. 3.2.2.2).

Supposons maintenant un système isolé avec comme contrainte la conservation de l'hélicité magnétique. Quel est l'état relaxé du champ magnétique? Cette question est au cœur du théorème de Woljer-Taylor présenté section (3.2.2.3). Un théorème qui n'est cependant pas le plus adéquat pour décrire l'atmosphère solaire (cf. Sect. 3.2.2.4).

3.2.2.1 L'hypothèse de Taylor

En présence de processus physiques "non-idéaux", l'équation d'induction du champ magnétique peut tenir compte d'une résistivité, η tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{J}), \quad (3.29)$$

avec \mathbf{J} la densité de courant électrique. Dans ce cas, la dissipation de l'hélicité n'est pas nulle et s'écrit sous la forme :

$$\left. \frac{dH_r}{dt} \right|_{Diss} = -2 \int_V \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (3.30)$$

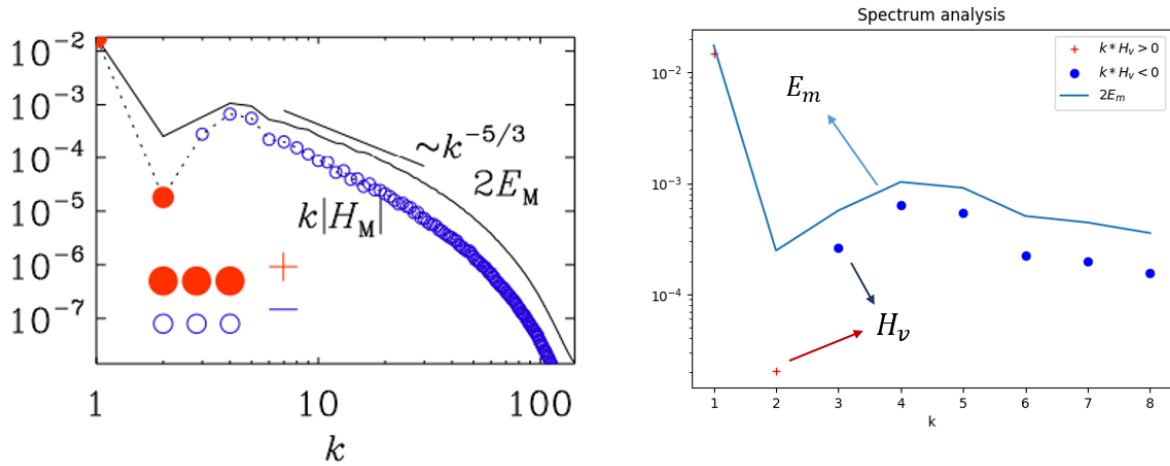


FIGURE 3.2 – **Gauche** : comparaison entre l'évolution de l'énergie magnétique $E_m(k)$ et de l'hélicité magnétique $H_m(k)$ en fonction de la fréquence spatiale k . Le champ magnétique est issu d'une simulation de dynamo turbulente en MHD idéale (Brandenburg & Scannapieco 2020). **Droite** : à partir du même champ magnétique, comparaison entre l'hélicité relative cette fois-ci et l'énergie magnétique. Pour chaque k , on a la relation $E_m(k) > kH_m$.

Cependant, Taylor (1974) conjectura que la dissipation devrait être très faible et donc, que l'hélicité magnétique devrait être approximativement conservée dans les milieux à haut nombre de Reynolds magnétique comme l'atmosphère solaire. Son argument est que les changements de topologie magnétique liés aux reconnections n'entraînent que des variations légères du champ magnétique lui-même. Par conséquent, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ est redistribué le long des lignes de champ, mais n'est pas détruit. La géométrie globale de l'ensemble des lignes de champ n'est pas significativement modifiée. L'hélicité ne devrait donc pas changer. Notons que Yeates (2020) a également montré que l'hélicité par ligne de champ magnétique (cf. Sect. 3.3.3) est également redistribuée entre les différentes lignes de champ, plutôt que détruite.

Ci-après, je présenterai trois arguments possibles pour expliquer que l'hélicité magnétique ne varie que faiblement lors de la libération/dissipation d'énergie :

- Considérons une faible résistivité, dans ce cas, le courant électrique est concentré dans une nappe de courant très fine (Browning 1988; Pontin & Hornig 2015). La densité de courant, \mathbf{j} est reliée aux champs magnétiques par la relation $j \simeq B/\partial$ (avec ∂ l'épaisseur caractéristique de la nappe de courant telle que $\partial \ll 1$). Par conséquent, on a $|\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}| \ll j^2$ et :

$$\left| \frac{dH_r}{dt} \right|_{Diss} \ll \left| 2 \int_v \eta j^2 dV \right| = \left| \frac{dE_v}{dt} \right|_{Diss}. \quad (3.31)$$

Ainsi le taux de dissipation de l'hélicité est beaucoup plus lent que celui de l'énergie.

- D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne dans le cas d'une résistivité constante (Berger 1984) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{dH_r}{dt} \right|_{Diss}^2 &\leq 4 \left(\int_v \eta^2 j^2 dV \right) \left(\int_v \mathbf{B}^2 dV \right) \\ &\Rightarrow \left| \frac{dH_r}{dt} \right|_{Diss} \leq \sqrt{8\mu_0 \eta E_v} \left| \frac{dE_v}{dt} \right|. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dans un système isolé où ni l'énergie ni l'hélicité ne peuvent être échangées avec l'exté-

rieur, considérons une structure hélicoïdale de taille effective $L = |H_r|/\mu_0 E_v$. L'intégration de l'équation (3.32) sur un temps Δt donne une limite supérieure à la dissipation d'hélicité magnétique égale à :

$$\left| \frac{\Delta H_r}{H_r} \right| \leq \sqrt{\frac{8\Delta t}{\tau_d}}. \quad (3.33)$$

Son temps caractéristique de dissipation par des mécanismes tels que la reconnexion magnétique est alors de : $\tau_d = \sigma L^2 \eta$. D'après l'équation (3.33), la variation d'hélicité est négligeable pour des durées inférieures au temps de dissipation $\Delta t \ll \tau_d$. Pour un tube de flux magnétique de diamètre $L \simeq 30\text{Mm}$, situé dans la couronne solaire de résistivité $\eta \simeq 1\text{m}^2\text{s}^{-1}$, il faudrait de l'ordre d'un an pour dissiper l'intégralité de l'hélicité magnétique. Pour une région active évoluant durant quelques jours seulement (Mackay et al. 2011, e.g.), l'hélicité magnétique est donc quasi conservée durant toute la durée de vie de la région active.

- Une autre approche consiste à décomposer le champ magnétique et son potentiel vecteur en spectre de puissance pour en déduire les densités spectrales d'énergie et d'hélicité associées à la fréquence spatiale (Choudhuri et al. 1998). Cette approche est utilisée dans le cadre de la turbulence MHD, particulièrement adaptée à l'étude de la dynamo solaire (Alexakis et al. 2006; Brandenburg & Scannapieco 2020). En se basant sur des simulations numériques, Pouquet et al. (1976) ont découvert que, contrairement à l'énergie qui évolue vers des petites échelles spatiales, l'hélicité suit une cascade inverse. Elle s'accumule vers les grandes échelles spatiales (Pouquet et al. 1976; Müller et al. 2012; Malapaka & Müller 2013; Brandenburg et al. 2017; Brandenburg & Scannapieco 2020).. Basé sur les formulations en termes de spectre de puissance, Frisch et al. (1975) ont également démontré que pour une hélicité fixée, l'énergie magnétique sera plus faible si l'hélicité magnétique est stockée aux petites fréquences spatiales (cf. Fig. 3.2). Ainsi lorsque l'énergie est dissipée, l'hélicité va évoluer vers les grandes échelles spatiales. Comme la dissipation ohmique est plus efficace aux petites échelles, on en déduit que l'énergie magnétique se dissipe plus rapidement que l'hélicité magnétique.

3.2.2.2 Validation numérique de la conservation d'hélicité relative

Récemment, de nombreuses méthodes numériques se sont développées et ont permis un calcul fiable et robuste de l'hélicité magnétique (cf. Sect. 3.3). La conservation de l'hélicité en régime non idéale a ainsi pu être observée (Zhao et al. 2015; Knizhnik et al. 2015), mais également quantifiée (Yang et al. 2013a; Pariat et al. 2015).

Pour cela, Pariat et al. (2015) ont utilisé une simulation numérique 3D d'un jet coronal, introduite par Pariat et al. (2009). Cette simulation est divisée en deux phases : une première phase où la reconnexion magnétique est strictement inhibée ; et une deuxième phase dite non idéale où près de 80% de l'énergie magnétique est transformée par reconnexion magnétique. Dans cette simulation, Pariat et al. (2015) ont calculé l'hélicité magnétique relative, $H_r(t)$, à chaque instant par la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1). L'évolution de l'hélicité relative ainsi mesurée est comparée à l'hélicité relative injectée et éjectée du domaine à travers les frontières, $H_{\partial V}(t)$, définie par :

$$H_{\partial V}(t) = \int_0^t F_{tot}(\tau) d\tau, \quad (3.34)$$

avec F_{tot} le flux d'hélicité magnétique calculé comme la somme des intégrales surfaciques pré-

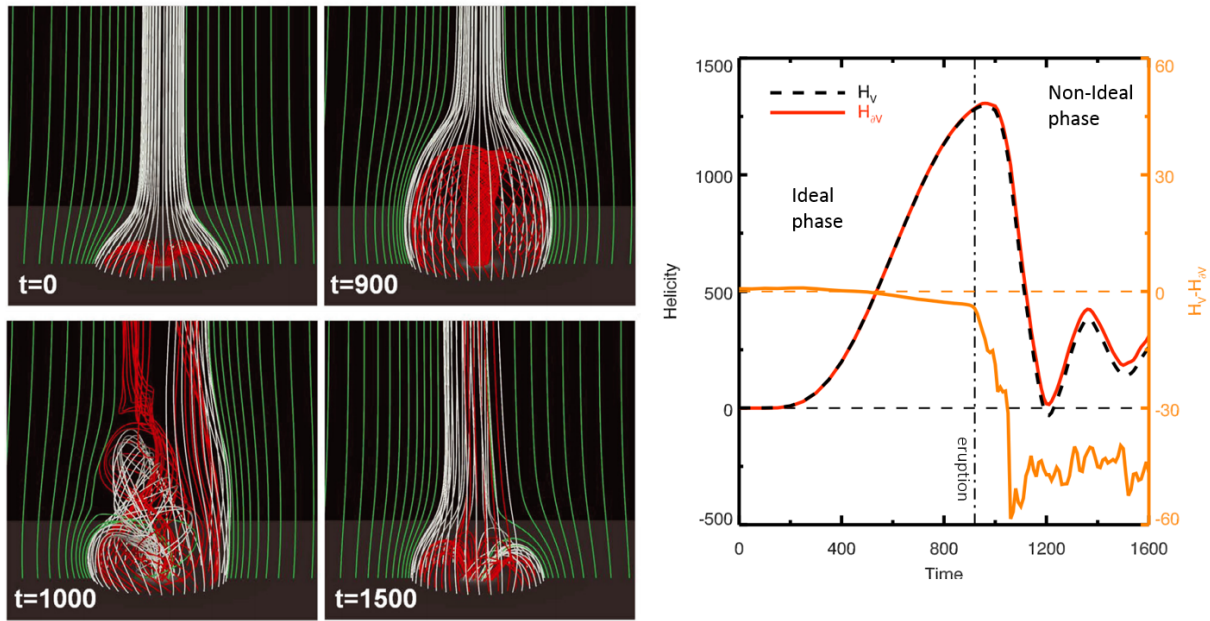


FIGURE 3.3 – **Gauche** : évolution du champ magnétique dans la simulation MHD 3D de la génération d'un jet coronal (Pariat et al. 2009). Les lignes de champ rouges sont initialement fermées tandis que les blanches sont ouvertes. **Droite** : comparaison entre les évolutions de l'hélicité injectée à travers les six frontières $H_{\partial V}(t)$ (courbe rouge, cf. Eq. 3.34), et de l'hélicité totale du domaine, $H_r(t)$ (courbe noire, cf. Eq 3.9). La courbe jaune montre la différence entre les deux quantités. Cette différence étant très faible même dans la phase non idéale, on en déduit que l'hélicité magnétique relative est quasi conservée. Adaptée de Pariat et al. (2015).

sentes dans la variation temporelle d'hélicité magnétique relative (cf. Eqs 3.26 et 3.28) :

$$\begin{aligned}
 F_{tot} = & \int_S (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \times \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} - 2 \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} - 2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S} \\
 & + 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} dS - 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B} dS.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dans la jauge de Coulomb pour le vecteur potentiel du champ magnétique potentiel, $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$, la différence entre l'hélicité relative injectée/éjectée, $H_{\partial V}(t)$ et l'hélicité relative totale, $H_r(t)$, dépend uniquement de la dissipation d'hélicité. Si l'hélicité relative est conservée alors à chaque instant :

$$H_r(t) = H_{\partial V}(t). \tag{3.36}$$

Autrement dit, il n'y a pas création ni de dissipation d'hélicité à l'intérieur du domaine. Les variations d'hélicité relative proviennent uniquement des flux injectés ou éjectés à travers les frontières.

En comparant ainsi l'hélicité injectée/éjectée et l'hélicité totale du volume, Pariat et al. (2015) ont montré que l'équation (3.36) est très bien vérifiée même dans la période non idéale (cf. Fig. 3.3). Quantitativement, Pariat et al. (2015) ont estimé que moins de 0.2% d'hélicité est dissipée dans la phase idéale et moins de 3% dans la phase non idéale. **Dans le cas décrit précédemment, l'hélicité magnétique est donc une quantité très bien conservée même en MHD non idéale.**

La méthode employée par Pariat et al. (2015) n'utilise aucune hypothèse sur le type de

processus dissipatif ayant lieu dans le domaine. Leur méthode est donc applicable dans les différents modèles de la MHD. J'ai cependant montré dans [Linan et al. \(2018\)](#) qu'en MHD résistive, avec $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \nabla \times \mathbf{B}$ (où η est la résistivité), la dissipation d'hélicité relative s'écrit sous la forme :

$$\left. \frac{dH_r}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} dV. \quad (3.37)$$

De plus, j'ai proposé une forme similaire pour la dissipation de l'hélicité magnétique non potentielle et mêlée (cf. Sect. 5.2). J'ai cependant montré que même dans le cas où la dissipation d'hélicité non potentielle et mêlée est négligeable, ces deux grandeurs, contrairement à l'hélicité magnétique relative, ne sont pas conservées qu'importe le modèle de MHD employé (cf. Sect. 5.2.1.1).

3.2.2.3 Théorème de Woltjer-Taylor

En reprenant les travaux de [Woltjer \(1958\)](#), [Taylor \(1974\)](#) a cherché à caractériser l'état final relaxé d'un système magnétique isolé. L'hypothèse de Taylor est que dans ce système isolé, l'hélicité ne varie pas. De plus, il suppose que l'état relaxé du système est celui avec le minimum d'énergie et que la conservation de l'hélicité magnétique est la seule contrainte pour conduire à cet état.

Formellement, cela peut être vu comme un problème d'optimisation sous contrainte qui se résout par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ([Yeates 2020](#)). L'hélicité étant la seule contrainte, le minimum d'énergie est obtenu lorsque ([Yeates 2020](#)) :

$$\partial(E - \frac{1}{2}\alpha_0 H) = 0, \quad (3.38)$$

avec $1\alpha_0/2$ est un multiplicateur de Lagrange et ∂ une petite perturbation du champ magnétique obéissant à $\nabla \cdot \partial \mathbf{B} = 0$. Ici, le multiplicateur de Lagrange est sous la forme $1\alpha_0/2$ pour favoriser la suite des calculs. La perturbation du champ magnétique s'écrit en fonction du vecteur potentiel tel que $\partial \mathbf{B} = \nabla \times \partial \mathbf{A}$. [Yeates \(2020\)](#) a montré que dans une jauge particulière (tel que $\partial \mathbf{A}$ est nul le long des frontières) les perturbations d'énergie, ∂E , et d'hélicité, ∂H , s'écrivent alors :

$$\partial E = \int_v \partial \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \quad (3.39)$$

$$\partial H = 2 \int_v \partial \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (3.40)$$

En réinjectant ∂E et ∂H dans l'équation (3.38), un état de minimum d'énergie doit satisfaire :

$$\int_v \partial \mathbf{A} \cdot (\mathbf{j} - \alpha_0 \mathbf{B}) dV = 0 \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = \alpha_0 \mathbf{B} \quad (3.42)$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Woltjer-Taylor : si dans un volume donné et isolé l'hélicité ne varie pas au cours du temps lorsque la configuration magnétique se relaxe en minimisant son énergie alors le champ magnétique doit se relaxer vers un champ magnétique sans force linéaire ("Linear force free field", LFF).

Initialement introduit par [Taylor \(1974\)](#) et présenté formellement ici, il fut rigoureusement démontré par [Laurence & Avellaneda \(1991\)](#) qui ont prouvé que le minimum d'énergie peut réel-

lement être atteint et correspondre à l'équation (3.41). Dans l'atmosphère solaire par exemple, si l'hélicité n'est pas dissipée et si le flux d'hélicité photosphérique est négligeable par rapport à l'hélicité de la couronne alors l'application de Woltjer-Taylor est possible (Heyvaerts & Priest 1984). Il s'agit de l'approximation faite lors des extrapolations sans forces linéaires (cf. Append. B.1).

Remarquons également que, puisque le courant électrique est relié par la loi d'Ampère au champ magnétique, $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$, l'équation (3.41) peut être interprétée comme une équation aux valeurs propres pour l'opérateur rotationnel. Ainsi $\mu_0 \alpha_0$ est la valeur propre associée aux vecteurs propres \mathbf{B} (Cantarella et al. 2000). En général, il existe plusieurs solutions pour un ensemble discret de valeurs propres. L'état de relaxation correspond à celui avec l'énergie la plus basse.

Si l'hélicité d'un système isolé, H_0 ne varie pas, l'équation (3.38) implique que l'énergie magnétique, E est telle que $E > |\frac{1}{2} \alpha_0 H_0|$. Lors de la relaxation du champ magnétique, l'hélicité magnétique va être transportée et redistribuée vers les grandes échelles spatiales tandis que l'énergie magnétique va être dissipée aux petites échelles spatiales (cf. Sect. 3.2.2.1). Le cisaillement magnétique des lignes de champ va alors s'uniformiser entraînant par conséquent l'uniformisation du paramètre α . Le système devrait évoluer d'un champ sans force non linéaire (prédit par la MHD idéale, cf. Append. A.4.3) à un champ sans force linéaire de cisaillement uniforme α_0 , comme prévu par le théorème de Woltjer-Taylor (Yeates 2020).

3.2.2.4 Limite à la relaxation de Taylor et au théorème de Woltjer-Taylor

Le théorème de Woltjer-Taylor s'applique-t-il à la couronne solaire? Si l'on regarde les résultats obtenus en laboratoire, la réponse semble être positive (Yamada 1999). Cependant, les simulations numériques MHD d'évolutions des boucles coronales montrent que la relaxation du champ magnétique des régions actives est médiocrement modélisée par la théorie de Taylor (Antiochos & DeVore 1999; Karpen et al. 1998; Aulanier et al. 2012). Au contraire, Pontin et al. (2016) ont mis en évidence l'existence d'états finaux sans force non linéaire plutôt que linéaire dans diverses simulations numériques MHD 3D. Les observations montrent également une répartition du cisaillement non uniforme dans les volumes considérés. La torsion et le cisaillement peuvent en effet être très localisés (Gary et al. 1987; Schmieder et al. 1996).

Cela s'explique en partie par le nombre restreint de lignes de champ magnétique impliquées dans la reconnexion. Cette dernière ne concerne en effet que des lignes de champs proches de certaines structures topologiques telles que les séparatrices ou les quasi séparatrices qui sont nécessaires à la formation des nappes de courant. La relaxation du champ magnétique n'a donc lieu en priorité que pour des sous-volumes restreints du domaine (Antiochos & DeVore 1999). Par conséquent, l'uniformisation du cisaillement se fait principalement que localement et d'importants gradients de α subsistent.

En présence d'une résistivité, η , non nulle, les lignes de champs loin des structures topologiques vont également finir par se relaxer vers un état LFFF sur le long terme. Le temps caractéristique de diffusion du champ magnétique coronal, τ_{diss} vaut L^2/η , avec L la taille caractéristique de la région active. Ainsi dans la couronne, avec $L = 10^5 \text{ km}$ et $\eta = 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (Stix 2012), le temps nécessaire pour atteindre un état sans force linéaire est d'environ 12 jours. Ainsi, sur la durée d'évolution d'une région active, le champ magnétique n'a pas toujours le temps d'atteindre l'état LFFF.

Notons également que même l'application du théorème de Woltjer-Taylor dans des systèmes astrophysiques comme la couronne solaire n'est en fait que peu vraisemblable (Antiochos & DeVore 1999). Le problème principal est que lors de la relaxation du champ magnétique, le système n'est pas isolé. En particulier, le volume, V , n'a pas des frontières fixes et strictement définies. Au contraire, les frontières peuvent s'étendre pendant le processus de relaxation, et

cela n'est pas strictement pris en compte dans la théorie de Taylor (e.g. [Bareford et al. 2013](#)). D'autre part, Taylor a supposé que l'hélicité ne varie pas au cours du temps. Or de l'hélicité magnétique est constamment injectée au niveau des régions actives par les mouvements locaux du champ magnétique (cf. Sect. 1.5.2).

La relaxation de Taylor comme initialement introduite par [Taylor \(1974\)](#) a donc ses limites et nécessite d'être revisitée pour connaître réellement l'état du champ magnétique relaxé. Par exemple, un ajout au modèle proposé dans les sections précédentes consiste à prendre en compte la pression p du fluide, non considérée jusqu'à présent. L'équilibre MHD devient alors :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p. \quad (3.43)$$

[Smiet et al. \(2017\)](#) ont étudié ce cas de figure, et ont démontré que l'état de relaxation d'un système MHD idéal est caractérisé par d'importants gradients de p même en partant d'une pression initiale uniforme. Les méthodes numériques résolvant l'équation (3.43) restent cependant limitées et nécessitent des hypothèses spécifiques ([Hirshman & Whitson 1983](#); [Hudson et al. 2012](#)).

De plus, l'hypothèse de Taylor est que seule la conservation de l'hélicité est une contrainte lors du processus de relaxation (cf. Sect. 3.2.2.1). Il est potentiellement intéressant d'imposer davantage de contraintes. Cependant, la volonté d'ajouter des contraintes à la relaxation de Taylor n'est pas nouvelle (e.g. [Bhattacharjee & Dewar 1982](#)) et n'a toujours pas abouti à une théorie parfaitement applicable à l'étude de l'atmosphère solaire. Néanmoins, la relaxation de Taylor reste toujours utilisée à l'heure actuelle et fournit une approximation de l'état relaxé d'un système (e.g. [Hussain et al. 2017](#)).

3.2.3 Conséquence de la conservation d'hélicité

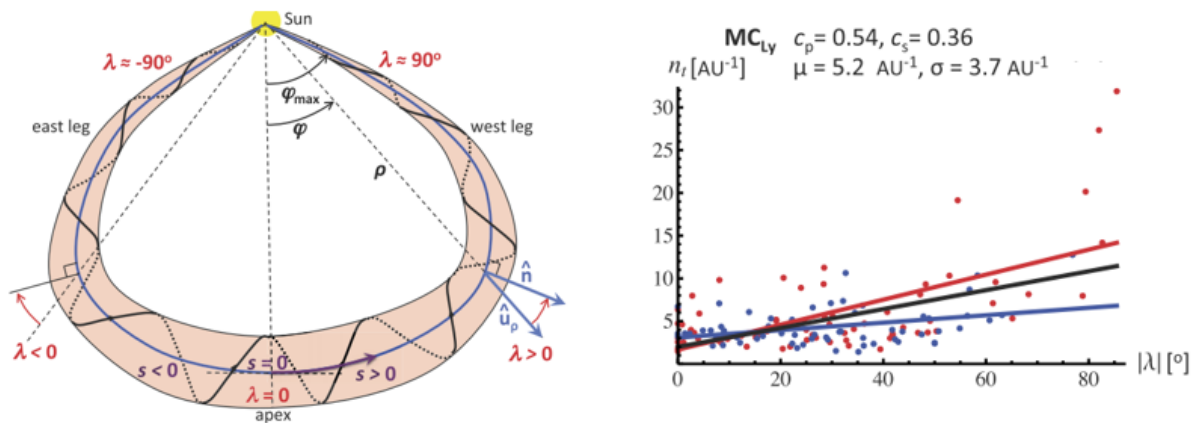


FIGURE 3.4 – **Gauche** : schéma d'un tube de flux modélisant un nuage magnétique. L'axe du tube de flux en bleu est entouré par une ligne de champ magnétique torsadée en noire. **Droite** : nombre de tours, n_t en fonction de l'angle λ entre la direction radiale $\hat{\mathbf{u}}_\rho$ et la direction normale à l'axe $\hat{\mathbf{n}}$. Les lignes représentent des régressions linéaires. Les points bleus (respectivement rouges) sont tel que $\lambda < 0$ (respectivement $\lambda > 0$). L'absence de corrélation significative entre le nombre de tours et l'angle λ implique que l'hélicité (cf. Eq. 3.45) est également indépendante de λ . Adaptée de [Démoulin et al. \(2016\)](#).

L'hélicité magnétique est en permanence injectée dans l'atmosphère solaire (cf. Sect. 1.5.2). Puisque l'hélicité magnétique est conservée pour des échelles de temps inférieures au temps

caractéristique de diffusion, l'hélicité doit donc s'accumuler indéfiniment dans la couronne ou être annihilée ou être éjectée vers le milieu interplanétaire.

Néanmoins, une accumulation infinie entraînerait des structures extrêmement torsadées dans la couronne solaire. De telles configurations magnétiques ne sont pas observées. D'autre part, l'annihilation d'hélicité magnétique par interactions de structure d'hélicité de signe opposé ne permet pas de réduire drastiquement la quantité d'hélicité magnétique dans la couronne. En effet, l'hélicité injectée dans l'hémisphère nord-sud au niveau d'une région active est globalement négative/positive (cf. Sect. 1.5.2). Le seul moyen d'annihiler l'hélicité magnétique est de faire interagir des structures magnétiques reliant les deux hémisphères. La reconnexion à longue distance entre régions actives est cependant relativement peu observée (Pevtsov 2000).

L'hélicité magnétique étant faiblement annihilée et ne pouvant pas s'accumuler indéfiniment, elle est forcément éjectée de l'atmosphère solaire vers l'espace interplanétaire. Suivant cette idée, Rust & Kumar (1994) et Low (1996) ont conjecturé que les CMEs et les nuages magnétiques sont des phénomènes nécessaires pour limiter l'accumulation de l'hélicité magnétique. **Autrement dit, l'hélicité magnétique peut être vue comme la raison d'être des CMEs.**

Le principe de conservation implique que l'hélicité éjectée d'une région active doit se retrouver dans les structures interplanétaires telles que les tubes de flux interplanétaire ou les nuages magnétiques. Ce principe semble être confirmé par les diverses observations. Tout d'abord, en moyenne le signe de l'hélicité des nuages magnétiques mesuré in situ est en accord avec le signe de l'hélicité injectée depuis l'hémisphère dont ils sont originaires (Rust 1994; Ruzmaikin et al. 2003; Cho et al. 2013). Quantitativement, il a cependant fallu attendre le développement des mesures de l'hélicité dans les structures interplanétaires (Gulisano et al. 2005; Qiu et al. 2007; Hu et al. 2014, 2015) assez robustes pour permettre de les relier à l'hélicité magnétique mesurée dans leur région solaire d'origine (Nindos et al. 2003; Luoni et al. 2005; Mandrini et al. 2005).

Pour une région active, Démoulin et al. (2002) ont formulé la conservation de l'hélicité magnétique sous la forme :

$$\Delta H_{emerg} + \Delta H_{rot,diff} = \Delta H_{couronne} + N \tilde{H}_{CME}, \quad (3.44)$$

où ΔH_{emerg} et $\Delta H_{rot,diff}$ sont les injections d'hélicité par émergence de structures magnétiques et par rotation différentielle; et où $\Delta H_{couronne}$ et \tilde{H}_{CME} correspondent respectivement à la variation d'hélicité coronale et à l'hélicité moyenne dans une CME (N étant le nombre de CMEs).

Avec pour objectif de comparer l'hélicité magnétique des CMEs avec celle injectée dans la couronne, Démoulin et al. (2016) se sont intéressés aux données d'un ensemble de nuages magnétiques observés entre 1995 et 2009 et catalogués par Lynch et al. (2005); Lepping & Wu (2010); Feng et al. (2007, 2008). Chaque mesure est prise à 1 AU. Puisque les données in situ fournissent uniquement les informations locales des paramètres physiques le long de la trajectoire du satellite, cela ne suffit pas pour calculer une quantité globale comme l'hélicité magnétique. Démoulin et al. (2016) ont donc supposé que chaque nuage magnétique était un tube de flux magnétique dont les deux pieds sont ancrés au Soleil. Basées sur un modèle précis de tube de flux (Janvier et al. 2015), les données mesurées servent à estimer localement les propriétés physiques d'une coupe 2D perpendiculaire à l'axe du tube. Les paramètres ainsi obtenus vont permettre de reconstruire la forme générale du tube de flux (cf. Fig. 3.4) et d'en déduire ses caractéristiques globales telles que sa longueur, L et son flux magnétique, F (Janvier et al. 2013b). L'hélicité magnétique peut ensuite être calculée suivant la relation (Dasso et al. 2003) :

$$H_{CME} = n_t F^2 L, \quad (3.45)$$

avec n_t le nombre de tours moyen par unité de longueur le long de l'axe du tube. Les données locales ont ainsi permis la mesure de l'hélicité totale du tube de flux magnétique.

Disposant des hélicités magnétiques de nombreux nuages magnétiques, [Démoulin et al. \(2016\)](#) ont ainsi pu estimer l'hélicité magnétique éjectée par les CMEs au cours du cycle solaire 23 et 24, H_{cycle} . En parallèle, l'hélicité magnétique injectée dans l'atmosphère solaire, H_{inj} , durant ces cycles a été calculée en utilisant des méthodes de mesure basées sur les flux d'hélicité (cf. Sect. 3.3.2). Pour le cycle 24, [Démoulin et al. \(2016\)](#) ont estimé une hélicité magnétique, H_{cycle} , environ 4 fois plus grande que la valeur $H_{inj} \approx 0.6 \times 10^{46} \text{Mx}^2$ trouvée par [Georgoulis et al. \(2009\)](#). De même, H_{cycle} est environ deux fois plus petit que la valeur calculée par [Zhang & Yang \(2013\)](#), $H_{inj} \approx 5 \times 10^{46} \text{Mx}^2$, pour le cycle 24.

En supposant que l'hélicité magnétique est très faiblement stockée dans la couronne (c.-à-d. $\Delta H_{couronne} = 0$), pour l'ensemble des régions actives d'un cycle solaire la relation (3.44) semble être validée. La différence entre l'hélicité injectée, H_{inj} et l'hélicité éjectée, H_{cycle} , s'explique de différentes façons, entre autres :

- Des incertitudes sont présentes dans la mesure des flux d'hélicité, mais également dans la mesure de l'hélicité des nuages magnétiques.
- D'autre part, suivant la position du satellite, une fraction seulement des CMEs peuvent être détectée. L'estimation du nombre total de CMEs doit être ajustée précautionneusement.
- Chaque tube de flux est supposé ancré dans la photosphère. En pratique, ce n'est pas toujours vrai. Cela entraîne une mauvaise estimation de la longueur, L , et une surestimation de l'hélicité.
- Les tubes de flux magnétiques peuvent par exemple se trouver érodés en se propageant dans le vent solaire ([Ruffenach et al. 2015](#)).

Malgré les nombreuses incertitudes, l'hélicité magnétique des nuages magnétiques est en ordre de grandeur cohérent, avec l'hélicité magnétique injectée par effet dynamo et mesurée au niveau des structures magnétiques émergentes. La conservation de l'hélicité est au niveau du système Soleil-héliosphère donc effectivement vérifiée observationnellement.

3.3 Mesure et représentation de l'hélicité magnétique

Face à l'importance de l'hélicité magnétique, de nombreuses méthodes de calcul numérique ont été développées. Tandis que certaines méthodes nécessitent la connaissance des différents vecteurs dans l'ensemble du volume d'étude ([Thalmann et al. 2011](#); [Valori et al. 2012](#)), d'autres sont basées uniquement sur des données surfaciques ([Chae 2001](#)). Certaines utilisent notamment des reformulations de l'hélicité ([Pariat et al. 2005](#); [Dalmasse et al. 2014](#); [Georgoulis et al. 2012](#)). Les techniques reposants sur des grilles cartésiennes ont été cataloguées et comparées par [Valori et al. \(2016\)](#).

Dans cette section, je présenterai plusieurs approches en me concentrant sur leurs avantages et leurs limites. En détail, quatre concepts sont présentés :

- l'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1);
- l'hélicité par ligne de champ magnétique (cf. Sect. 3.3.3);
- l'intégration du flux d'hélicité (cf. Sect. 3.3.2);
- la densité de flux d'hélicité (cf. Sect. 3.3.4).

Le panorama proposé dans cette section n'a pas la prétention d'être complet et certaines techniques telles que la méthode "Twist-Number" ([Guo et al. 2010a, 2013](#)) n'y sont pas présentées.

Nous verrons également que toutes les méthodes ne fournissent pas la même quantité. Le choix d'une méthode ou d'une autre dépend donc de l'information recherchée (cf. Fig. 3.5).

<p><u>Intégration Directe Volumique</u></p> $\mathcal{H}_V = \int_V (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV$ <ul style="list-style-type: none"> ➤ Requière \mathbf{B} dans l'ensemble du volume ➤ Donne une estimation de l'hélicité à un instant donné ➤ Ne dépend pas du choix de jauge ➤ Peut être utilisée pour estimer $H_j, H_{pj} \dots$ 	<p><u>Intégration du flux d'hélicité</u></p> $\frac{d\mathcal{H}_V}{dt} = 2 \int_{\partial V} [(\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B})v_n - (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{v}_t)B_n] dS$ <ul style="list-style-type: none"> ➤ Requière l'évolution de \mathbf{B} et \mathbf{v} à la surface ➤ Repose sur la conservation de l'hélicité relative ➤ Ne dépend pas de \mathbf{B} dans l'ensemble du volume ➤ Permet d'estimer l'hélicité relative accumulée
<p><u>Hélicité par ligne de champ magnétique</u></p> $\mathcal{H}_V = \int_S A(L(x, y)) B_n(x, y) dS. \quad A(\mathbf{x}) = \int_L \mathbf{A} \cdot dL.$ <ul style="list-style-type: none"> ➤ Dépend du choix de jauge du champ potentiel ➤ Nécessite \mathbf{A} (et donc \mathbf{B}) dans l'ensemble du volume ➤ Rend compte de la distribution spatiale de l'hélicité ➤ Permet une estimation de l'hélicité à un instant donné 	<p><u>Densité de flux d'hélicité</u></p> $G_\theta(x) = -\frac{B_n}{2\pi} \int_S \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n}]}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' ^2} B'_n(\mathbf{x}') dS,$ <ul style="list-style-type: none"> ➤ Permet de cartographier l'injection d'hélicité ➤ Donne accès au flux d'hélicité par ligne de champ ➤ Nécessite de connaître la connectivité du champ magnétique ➤ Dépend du choix de jauge

FIGURE 3.5 – Tableau récapitulatif des quatre méthodes de mesure et représentation de l'hélicité magnétique présentées dans ce manuscrit.

3.3.1 Mesure de l'hélicité par intégration directe volumique

La manière d'estimer l'hélicité qui semble la plus intuitive et naturelle est de simplement intégrer l'équation (1.16). Dans la suite, nous nous référerons à cette méthode sous l'appellation : Intégration Directe Volumique (IDV).

Ci-après, je présenterai tout d'abord le principe général de la méthode (cf. Sect. 3.3.1.1) avant d'introduire deux manières de l'implémenter numériquement (cf. Sects. 3.3.1.2 et 3.3.1.3) ainsi qu'une comparaison entre ces deux techniques (cf. Sect. 3.3.1.5). Je présenterai également mon implémentation numérique de la méthode d'IDV (cf. Sect. 3.3.1.4).

3.3.1.1 Présentation générale

Le calcul direct de l'équation (1.16) nécessite la connaissance du champ magnétique \mathbf{B} dans tout le volume V . L'IDV peut donc être utilisée à partir du champ magnétique, a priori connu dans l'ensemble du volume, issu de simulations numériques (Thalmann et al. 2011; Valori et al. 2012). Néanmoins, l'utilisation de l'IDV est moins immédiate à partir d'observations où seul le champ magnétique photosphérique est directement mesuré (cf. Sect. 2.1). Une possibilité pour pallier à cette limitation est d'utiliser d'autres méthodes d'estimation de l'hélicité nécessitant uniquement le champ magnétique 2D à la surface du domaine étudié (cf. Sect. 3.3.2). Néanmoins l'utilisation de l'IDV à partir d'observations est possible à condition de reconstruire numériquement le champ magnétique coronal l'aide des données photosphériques (cf. Sect. 2.3).

Une fois le champ magnétique acquis, plusieurs méthodes numériques permettant de calculer l'hélicité magnétique existent que ce soit dans des domaines cartésiens (e.g. Valori et al. 2012) ou plus récemment en géométrie sphérique (Moraitis et al. 2018). Les différents algorithmes existants diffèrent principalement dans la manière dont les potentiels vecteurs sont calculés (Valori et al. 2016). Les principaux codes numériques sont divisés en deux catégories selon la jauge utilisée lors du calcul des potentiels vecteurs : une catégorie utilise la jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), l'autre la jauge de DeVore ($\mathbf{A}_z = 0$, DeVore 2000). Puisque l'hélicité magnétique relative est invariante de jauge, choisir une jauge plutôt qu'une autre ne devrait pas impacter sa valeur. Le choix de jauge peut cependant avoir une influence sur le nombre et le type d'équations

à résoudre pour obtenir les potentiels vecteurs (Valori et al. 2016).

Le calcul de l'intégrale (1.16), dépend également du champ magnétique potentiel (cf. Eq. 1.4), $\mathbf{B}_p = \nabla\Phi$. Ce dernier est, à de rares exceptions près (e.g. Rudenko & Myshyakov 2011), calculé à partir de son potentiel scalaire $\Phi(x, y, z)$ qui est solution de l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})|_S. \end{cases} \quad (3.46)$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à la surface, S . Là encore, il existe plusieurs algorithmes permettant la résolution numérique de l'équation de Laplace (Press et al. 1992). On peut utiliser par exemple le solveur de la librairie Intel Mathematical Kernel Library (Valori et al. 2012) ou le solveur HW3CRT contenu dans la librairie FISHPACK (Moraitis et al. 2014). Des différences mineures apparaissent cependant dans les solutions proposées par ses deux solveurs ainsi qu'une différence dans le temps de calcul nécessaire (Valori et al. 2016). Quoi qu'il en soit, la résolution numérique de l'équation (3.46) est une source d'erreurs et d'incertitudes possibles.

La résolution de l'équation (3.46) assure que le champ magnétique potentiel ait bien la même distribution à la surface que le champ magnétique total (cf. Eq. 1.6), ce qui est indispensable pour une mesure précise de l'hélicité. En effet, si la condition $(\mathbf{B}_p \cdot dS)|_S = (\mathbf{B} \cdot dS)|_S$ n'est pas strictement imposée dans la totalité du domaine, Valori et al. (2012) et Moraitis et al. (2018) ont montré que le signe de l'hélicité relative ne peut pas être estimé correctement.

Remarquons pour finir, qu'une fois le champ magnétique total, le champ magnétique potentiel ainsi que leurs vecteurs potentiels connus, nous disposons de toutes les données nécessaires afin de calculer l'hélicité relative, mais également les hélicités non potentielle et mêlée. Ainsi, dans Linan et al. (2020) et Linan et al. (2018), j'ai utilisé l'intégration directe volumique pour estimer l'évolution des hélicités non potentielle et mêlée dans différentes simulations MHD 3D afin d'étudier les propriétés de ces deux types d'hélicité (cf. Sect. 5.2.2.1).

3.3.1.2 Méthode employant la jauge de Coulomb

Dans la jauge de Coulomb, le point clé est de résoudre l'équation de Laplace pour le potentiel vecteur du champ magnétique potentiel, \mathbf{A}_p , tel que :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_p = 0 \quad (3.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0 \quad (3.48)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_p)|_S = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})|_S; \quad (3.49)$$

et l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur du champ magnétique total \mathbf{A} :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J} \quad (3.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.51)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})|_S = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})|_S, \quad (3.52)$$

avec \mathbf{J} la densité de courants électriques $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$. Ces équations découlent naturellement de la condition imposant que le champ magnétique potentiel possède la même distribution surfacique que le champ magnétique total (cf. Eq. 1.6).

Des algorithmes d'intégration directe volumique dans la jauge de Coulomb ont notamment été développés par Rudenko & Myshyakov (2011); Rudenko & Anfinogentov (2014); Thalmann et al. (2011) et Yang et al. (2013a). Ces algorithmes résolvent différemment les équations (3.47) et (3.48). En particulier, la principale différence réside dans la manière dont le champ magné-

tique et son potentiel vecteur sont divisés en une composante potentielle et une composante porteuse de courants électriques (cf. Sect. 2.1 de Valori et al. 2016).

3.3.1.3 Méthode employant la jauge de DeVore

Une deuxième catégorie d'algorithme d'IDV s'appuie sur le choix de la jauge de DeVore, $\mathbf{A}_z = 0$ (DeVore 2000). C'est ce type de modèle numérique que j'ai été amené à utiliser dans ma thèse lors du suivi de l'évolution de l'hélicité dans différentes simulations numériques (Linan et al. 2018, 2020) ainsi qu'à partir de champs magnétiques coronaux reconstruits (Thalmann et al. 2019a,b; Moraitis et al. 2019b). J'ai utilisé en particulier la méthode de résolution développée par Valori et al. (2012) et explicitée ci-après. En pratique, d'autres implémentations numériques de cette méthode existent (e.g. Moraitis et al. 2014).

Pour un volume $V = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$, à partir de la relation $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, Valori et al. (2012) ont exprimé le vecteur potentiel sous la forme :

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{b}(x, y) + \hat{\mathbf{z}} \times \int_z^{z_2} \mathbf{B} dz'. \quad (3.53)$$

Ici, le vecteur $\mathbf{b}(x, y) = \mathbf{A}(x, y, z = z_2)$ est solution de :

$$0 = \partial_x b_y - \partial_y b_x - B_z(x, y, z = z_2), \quad (3.54)$$

avec $b_z = 0$. Une solution particulière de l'équation (3.54) est :

$$b_x = -\frac{1}{2} \int_{y_1}^y B_z(x, y', z = z_2) dy' \quad (3.55)$$

$$b_y = \frac{1}{2} \int_{x_1}^x B_z(x', y, z = z_2) dx'. \quad (3.56)$$

Ici, le potentiel vecteur, \mathbf{A} , dans l'équation (3.53) est obtenu par une intégration 1D dans l'intervalle $[z, z_2]$. Des expressions quasi similaires peuvent être obtenues dans le cas où l'intégration a lieu dans l'intervalle $[z_1, z]$ (cf. Sect. 2.1 de Valori et al. 2012).

Si le potentiel vecteur, \mathbf{A}_p , est également dans la jauge de DeVore, $\mathbf{A}_{pz} = 0$, alors il peut être obtenu à partir du champ magnétique potentiel, \mathbf{B}_p , de la même manière que le potentiel vecteur, \mathbf{A} est obtenu à partir du champ magnétique \mathbf{B} . En particulier, les équations ci-dessus peuvent être utilisées pour calculer le potentiel vecteur du champ potentiel en remplaçant \mathbf{B} par \mathbf{B}_p partout. Dans le cas où l'on utilise les équations (3.53)-(3.55) pour \mathbf{A} et \mathbf{A}_p , Valori et al. (2012) ont montré que nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p$ à la frontière supérieure, $z = z_2$ du domaine. Cela définit une jauge possible pour les deux vecteurs potentiels.

Cette jauge particulière est obtenue quand $\mathbf{A}(z)$ et $\mathbf{A}_p(z)$ proviennent de l'intégration de $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ et $\nabla \times \mathbf{A}_p = \mathbf{B}_p$ dans le même intervalle $[z, z_2]$. L'intégration commence par le haut du domaine. Ce n'est cependant pas obligatoire. En fonction de l'intervalle d'intégration utilisée, trois cas correspondant à trois jauges différentes, sont possibles (Valori et al. 2012) :

- $\mathbf{A}(z_2) = \mathbf{A}_p(z_2)$ si les deux vecteurs proviennent d'intégrations partant du haut du domaine (intervalle $[z, z_2]$) ;
- $\mathbf{A}(z_1) = \mathbf{A}_p(z_1)$ si les deux vecteurs proviennent d'intégrations partant du bas du domaine (intervalle $[z_1, z]$) ;
- $\mathbf{A}(z_2) \neq \mathbf{A}_p(z_2)$ et $\mathbf{A}(z_1) \neq \mathbf{A}_p(z_1)$ si les deux vecteurs proviennent d'intégrations partant d'un point de départ différent.

Même dans le cas où les potentiels vecteurs sont calculés dans la jauge de DeVore et sont

égaux au niveau d'une frontière du domaine, \mathbf{A} et \mathbf{A}_p ne sont pas uniques et davantage de contraintes sur leurs valeurs peuvent être fixées. En particulier, il est possible d'imposer la jauge de Coulomb pour le vecteur potentiel du champ magnétique potentiel, $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$. Cela revient à s'assurer que la divergence de l'équation (3.53) soit nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_p = \partial_x b_{px} + \partial_y b_{py} + \int_z^{z_2} (\partial_y \mathbf{B}_{px} - \partial_x \mathbf{B}_{py}) dz', \quad (3.57)$$

avec $\mathbf{b}_p(x, y) = \mathbf{A}_p(x, y, z = z_2)$. Le choix de la jauge de Coulomb associé au choix du domaine d'intégration définit les jauges possibles.

L'hélicité magnétique relative étant invariante de jauge, le choix d'imposer la jauge de Coulomb ou le choix du point de départ pour les intégrations ne doivent pas impacter sa valeur. Cependant, utiliser une jauge plutôt qu'une autre permet parfois de simplifier l'expression analytique de certaines quantités invariantes de jauge. Par exemple, dans [Linan et al. \(2018\)](#) j'ai montré que la formulation des flux d'hélicités non potentielle et mêlée pouvait être simplifiée en utilisant un choix de jauge judicieux pour les deux potentiels vecteurs.

3.3.1.4 Mon développement et implémentation numérique de la méthode

Durant ma thèse, j'ai utilisé un code d'IDV employant la jauge de DeVore qui m'a été initialement fourni par G. Valori et É. Pariat. Cette sous-section n'a pas pour objectif de décrire le fonctionnement détaillé de ce code, mais plutôt de présenter mon utilisation et mon développement de celui-ci.

Le code est écrit dans le langage de programmation "IDL" ("Interactive data language" [Bowman 2006](#); [Stern 2000](#)). Il prend comme donnée initiale un vecteur champ magnétique entièrement connu dans l'ensemble du volume d'étude dont les caractéristiques sont également connues (taille du maillage, nombre de points de maille, etc.). Dans un premier temps, le code lance le solveur de Poisson de la librairie Intel ([Wang et al. 2014a](#)) pour obtenir le champ magnétique potentiel (cf. Sect. 3.3.1.1). Une fois le champ magnétique potentiel déterminé, des fonctions sont lancées pour estimer les potentiels vecteurs en résolvant numériquement les équations présentées dans la section (3.3.1.3). Le choix de jauge est fixé par un paramètre donné en entrée du code. La résolution se fait dans le système de coordonnées cartésiennes en utilisant la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation. Une fois l'ensemble des vecteurs acquis, les hélicités relative, non potentielle et mêlée sont calculées à partir de leur définition intégrale (cf. Eqs. 3.9 et 3.18). Les valeurs des hélicités ainsi que celles du champ potentiel, du potentiel scalaire et des potentiels vecteurs sont ensuite sauvegardées dans des fichiers. Notons également que le code peut se répéter automatiquement pour traiter une série de champs magnétiques dont le nombre est fixé en paramètre d'entrée.

Dans sa version initiale, le code permettait de traiter uniquement le champ magnétique provenant de la simulation numérique MHD d'un jet coronal ([Pariat et al. 2009](#)). J'ai par la suite développé le code pour qu'il puisse utiliser les données magnétiques issues de dix simulations numériques différentes (cf. Sect. 5.2.3) et de trois séries d'extrapolations NLFFF ([Thalmann et al. 2019a,b](#); [Moraitis et al. 2019b](#)). En tout, plus de 1 téra-octet de données a été analysé durant ma thèse. Pour chaque configuration magnétique, les données n'ont pas la même résolution et sont sauvegardées initialement dans trois formats différents : le "Hierarchical Data Format" (".hdf" [Poinot 2010](#)), le format "SAVE" (".sav" [Landsman 1993](#)), et le format "eXternal Data Representation" (".xdr" [Srinivasan 1995](#)).

Initialement, le code s'exécutait uniquement sur la frontale du serveur de l'Observatoire de Paris (cf. Sect. 2.3.1.2). Or son exécution, qui dure parfois plusieurs heures dans le cas d'une grande série de données, demande d'importantes ressources de calcul et entraîne donc

une latence de l'intégralité du serveur. Pour corriger ce problème, j'ai modifié le code afin qu'il puisse tourner sur les nœuds de la grappe de calcul de l'Observatoire (cf. Sect. 2.3.1.2). J'ai en particulier écrit des scripts en Shell pour que le lancement du code soit traité par le gestionnaire de ressources de la grappe de calcul. Après avoir été mis en file d'attente, le code sera lancé dans un nœud possédant les caractéristiques précisées par les variables d'environnements inscrites dans le script. Ainsi, l'exécution du code ne perturbe plus le fonctionnement global de la frontale.

De plus, puisque le code tourne sur un nœud dédié à cela, son exécution est beaucoup plus rapide et performante que sur la frontale¹. Ainsi, il est maintenant possible de traiter une série de plus de 300 fichiers en une seule exécution (comme cela a été nécessaire dans l'étude de [Thalmann et al. 2019a](#), par exemple).

L'implémentation numérique de la méthode d'IDV n'est cependant toujours pas parfaite. En particulier, la résolution de l'équation de Laplace (cf. Eq. 3.46), nécessite un maillage structuré et uniforme, c.-à-d. l'intervalle spatial dans les trois directions doivent être égaux, $dx = dy = dz$. Il s'agit d'une contrainte majeure qui limite le champ d'application de la méthode. Le seul moyen de traiter les données magnétiques d'un maillage non uniforme est de les interpoler sur un maillage uniforme (e.g. [Linan et al. 2020](#)). Pour cela il existe plusieurs algorithmes numériques (e.g. [Muñoz Barrutia et al. 2000](#)). Néanmoins, les interpolations détériorent les données en ajoutant et/ou supprimant des points de mailles. Je travaille donc sur le développement d'une version du code d'IDV qui puisse utiliser les données magnétiques issues d'un maillage adaptatif. Le développement d'une telle version n'a cependant toujours pas abouti.

Rappelons pour finir, que mon implémentation numérique de la méthode d'IDV n'est pas unique. Plusieurs algorithmes existent (cf. Sects. 3.3.1.3 et 3.3.1.2). La sous-section suivante présente une comparaison de ces différentes implémentations.

3.3.1.5 Comparaison des différentes méthodes d'IDV

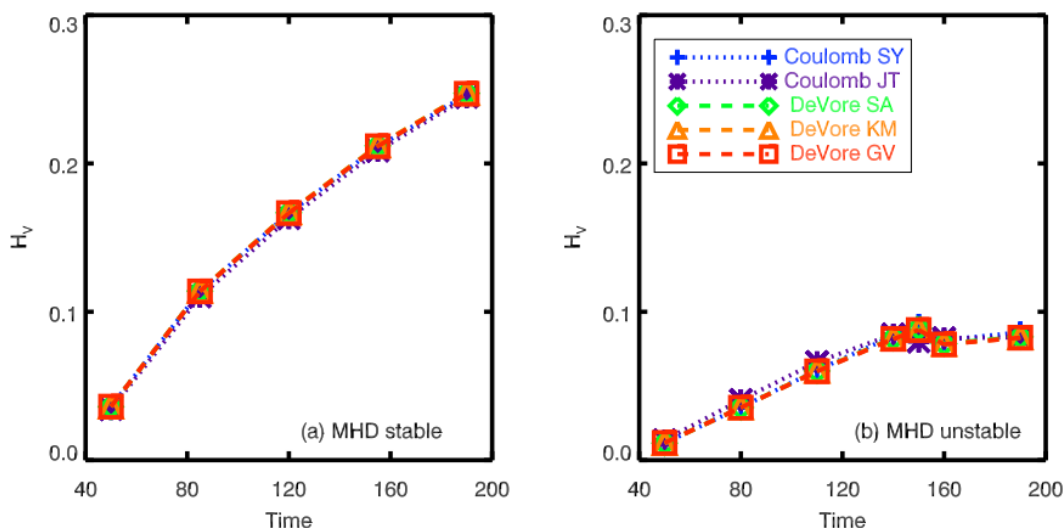


FIGURE 3.6 – Évolution de l'hélicité relative calculée à partir de 5 codes d'IDV. **Gauche** : évolution en fonction du temps dans la simulation numérique MHD de l'émergence stable d'un tube de flux torsadé ([Leake et al. 2013](#)). **Droite** : évolution en fonction du temps dans la simulation numérique MHD de l'émergence instable d'un tube de flux torsadé. Adaptée de [Valori et al. \(2016\)](#).

1. Il faut maintenant plus de temps pour transférer les fichiers de la frontale vers le nœud de calcul que pour les réellement les traiter.

Les différents algorithmes de résolution de l’IDV donnent-ils des résultats équivalents ? Cette question est discutée par Valori et al. (2016) qui ont comparé la valeur de l’hélicité relative provenant de cinq méthodes de résolution différentes (Thalmann et al. 2011; Yang et al. 2013a; Rudenko & Anfinogentov 2014; Valori et al. 2012; Moraitis et al. 2014). Trois méthodes utilisent la jauge de DeVore (cf. Sect. 3.3.1.3). Les deux autres utilisent des codes basés sur la jauge de Coulomb (cf. Sect. 3.3.1.2). Les méthodes ont été comparées à partir d’une variété de modèles de champ magnétique dont la topologie est proche de ce qui peut être observé dans l’atmosphère solaire : des modèles numériques de champ magnétique sans force (Low & Lou 1990; Titov & Démoulin 1999) et des simulations d’émergence d’un tube de flux magnétique (Leake et al. 2013, 2014). Valori et al. (2016) ont en particulier étudié l’influence de la présence de solénoïdalité finie dans les données magnétiques sur l’estimation de l’hélicité relative (cf. Sect. 4.3.1).

Valori et al. (2016) ont montré que toutes les méthodes comparées donnent des résultats très similaires (cf. Fig. 2.11) quand le champ magnétique est très solénoïdal ($E_{div}/E_v \approx 1\%$, cf. Sect. 2.4.2.2). Dans ce cas, et pour les cinq modèles de champ magnétique analysés, les différentes méthodes de résolution donnent une valeur de l’hélicité magnétique relative qui ne diffère au maximum que de 3%.

Cependant, quand le champ magnétique est loin d’être solénoïdal ($E_{div}/E_v > 10\%$, cf. Sect. 2.4.2.2 et Fig. 2.11), la dispersion dans l’estimation de l’hélicité relative obtenue pour les différentes méthodes peut dépasser les 20% de la valeur moyenne. En effet, en présence d’un degré trop important de solénoïdalité, l’hélicité magnétique relative n’est plus invariante de jauge (cf. Eq 42 de Valori et al. 2016). Ainsi, puisque les différents algorithmes utilisent des jauges différentes, leurs résultats sont également différents.

Dans Thalmann et al. (2019a) dont les résultats sont présentés en section (5.2.2.1), nous sommes revenus sur l’impact de la divergence du champ magnétique sur l’estimation de l’hélicité magnétique relative et ses décompositions. Nous avons proposé une valeur maximum pour l’énergie non solénoïdale (qui est liée à la divergence du champ magnétique, cf. Sect. 4.3.1) au-delà de laquelle la valeur de l’hélicité estimée par IDV n’est plus pertinente.

Quoi qu’il en soit, à condition que la propriété solénoïdale soit suffisamment remplie, les valeurs obtenues dans Valori et al. (2016) sont largement indépendantes des méthodes spécifiques employées. Les implémentations numériques d’IDV actuelle sont donc fiables et robustes. Remarquons ici que jusqu’à récemment les méthodes numériques d’IDV développées ne permettaient pas une estimation correcte de l’hélicité magnétique relative. Une des raisons à cela est qu’elles n’imposaient pas strictement le respect de la condition $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}|_{\delta V} = \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}|_{\delta V}$ sur l’ensemble des frontières du domaine d’étude (e.g. DeVore 2000). Comme mentionné section (3.3.1.1), le respect de cette condition est indispensable pour permettre d’estimer correctement l’hélicité magnétique.

Notons également, que même si les méthodes d’IDV actuelles sont numériquement robustes, l’estimation de l’hélicité magnétique relative reste sensible à la qualité des données. Par exemple, une résolution spatiale trop faible, entraîne une mauvaise approximation des dérivées spatiales qui interviennent notamment lors de la résolution de l’équation de Laplace (cf. Eq. 3.46). Ainsi l’estimation du champ magnétique et donc de l’hélicité magnétique peut être imprécise si la résolution n’est pas suffisante. D’autre part, il faut être prudent lors de l’utilisation de l’IDV à partir de données magnétiques issues d’extrapolation NLFF (cf. Sect. 2.3). En effet, si la reconstruction n’est pas réaliste, c.-à-d. si le champ magnétique reconstruit ne correspond pas au champ magnétique coronal, alors l’hélicité magnétique obtenue par IDV n’est pas égale à l’hélicité magnétique coronale de la région active. Dans ce cas, il est parfois préférable d’utiliser d’autres méthodes d’estimation de l’hélicité relative coronale par exemple la méthode d’intégration du flux d’hélicité (cf. Sect. 3.3.2) qui nécessite des données initiales et des approximations différentes.

En conclusion, l’IDV a cependant permis des études précises et fiables des propriétés de

l'hélicité en tant que traceur de l'évolution du champ magnétique (Valori et al. 2013; Moraitis et al. 2014, 2019b; Guo et al. 2017b; Polito et al. 2017; Temmer et al. 2017; James et al. 2018; Thalmann et al. 2019a,b). Par exemple, Yang et al. (2013b) ont appliqué un algorithme d'IDV utilisant la jauge de Coulomb (cf. Sect. 3.3.1.2) pour montrer que l'hélicité relative accumulée dans le volume d'une simulation numérique MHD coïncide bien avec l'hélicité injectée à travers les frontières. Pariat et al. (2015) ont également pu confirmer la conservation de l'hélicité relative même en présence de processus non idéaux tel que la reconnexion magnétique (cf. Sect. 3.2.2.2). Pariat et al. (2017) ont, pour leur part, montré que le ratio entre l'hélicité non potentielle et l'hélicité relative peut servir d'outil pour diagnostiquer le potentiel éruptif d'une configuration magnétique (cf. Sect. 4.2.1). Ce ratio fut mesuré pour la première fois au niveau d'une région active par IDV du champ magnétique coronale juste avant une éruption solaire (James et al. 2018). Pour finir, l'ensemble de mes travaux sur les propriétés de l'hélicité non potentielle et mêlée a également nécessité leurs estimations par IDV (Thalmann et al. 2019a,b; Moraitis et al. 2019b; Linan et al. 2018, 2020; Zuccarello et al. 2018).

3.3.2 Intégration du flux d'hélicité

L'hélicité magnétique relative est quasi conservée dans l'atmosphère. Par conséquent, il n'y a quasiment pas de création ni de dissipation d'hélicité relative au sein de la couronne solaire. L'accumulation d'hélicité est alors due uniquement à son transport et à sa génération lors de l'émergence de flux magnétique (cf. Sect. 3.2.2). En intégrant en fonction du temps le flux photosphérique d'hélicité magnétique au niveau d'une région active, on obtient donc une approximation de l'accumulation d'hélicité permettant une estimation de l'hélicité coronale (cf. Sect. 3.3.2.2).

3.3.2.1 Flux d'hélicité magnétique relative

Précédemment (cf. Sects. 3.2.1.1 et 3.2.2.2), nous avons montré que la variation d'hélicité magnétique relative dans un volume, V , délimité par une surface, S , s'écrit (Parat et al. 2015) :

$$\begin{aligned} \frac{dH_r}{dt} &= \int_S (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \times \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} + 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_p dV \\ &\quad - 2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV - 2 \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} - 2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad + 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} dS - 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B} dS. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Dans des modèles numériques où l'ensemble des vecteurs présents dans cette décomposition est accessible (e.g. Pariat et al. 2015; Linan et al. 2020), le calcul de l'équation (3.58) donne accès aux variations temporelles de l'hélicité relative. De plus, son intégration temporelle permet d'accéder à l'hélicité magnétique relative du système étudié.

Nous avons déjà vu dans la section (3.2.1.1), que cette expression analytique se simplifie en utilisant les conditions :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0 \\ \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}|_S = 0 \\ \mathbf{A}|_S - \mathbf{A}_p|_S = 0 \end{cases}, \quad (3.59)$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à la surface. De plus dans l'atmosphère solaire, la conductivité électrique est considérée comme infinie, on est alors dans le paradigme de la MHD idéale

(cf. Append. A.4). Dans ce cadre et avec les conditions (3.59) le flux d'hélicité à travers la photosphère, F_{phot} , s'écrit :

$$F_{phot} = 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_h) \mathbf{v}_n dS - 2 \int_S (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{v}_h) \mathbf{B}_n dS \quad (3.60)$$

$$= -2 \int_s (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}_n dS. \quad (3.61)$$

où les indices «n» et «h» représentent les composantes normales et horizontales et où «u» est la vitesse photosphérique de transport de flux magnétique (Démoulin & Berger 2003) définie par :

$$\mathbf{u} = v_h - \frac{v_n}{B_n} \mathbf{B}_h. \quad (3.62)$$

La vitesse «u» ainsi introduite est reliée aux mouvements photosphériques apparents des polarités magnétiques (Démoulin & Berger 2003). Il s'agit de la vitesse photosphérique des pieds des lignes de champ magnétique qui par définition est parallèle à la surface et dépend de la composante horizontale du champ de vitesse, mais également de sa composante normale (Démoulin & Berger 2003). Ainsi dans le cas général, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}_h$.

Les équations (3.60) et (3.61), sont deux expressions du flux d'hélicité magnétique photosphérique qui dépendent du potentiel vecteur, \mathbf{A}_p . Il est cependant possible de formuler le flux d'hélicité sans utiliser ce dernier. En effet, en utilisant la loi de Biot et Savart dans le cas d'une surface plane et infinie, le vecteur potentiel à la position \mathbf{x} peut se réécrire sous la forme (Berger 1984; Démoulin et al. 2002; Pariat et al. 2005) :

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{n}}{2\pi} \times \int_S \mathbf{B}_n(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2} dS \quad (3.63)$$

avec \mathbf{x} et \mathbf{x}' des vecteurs positions parcourant la surface S . Le potentiel vecteur ainsi formulé peut être réinjecté dans l'équation (3.61) qui se réécrit alors (Pariat et al. 2005) :

$$F_{phot} = -\frac{1}{\pi} \int_S \int_{S'} \frac{((\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2} \mathbf{B}_n(\mathbf{x}) \mathbf{B}_n(\mathbf{x}') dS dS' \quad (3.64)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_S \int_{S'} \frac{d\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{dt} \mathbf{B}_n(\mathbf{x}) \mathbf{B}_n(\mathbf{x}') dS dS', \quad (3.65)$$

avec

$$\frac{d\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{dt} = \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}')] \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \quad (3.66)$$

Ici, $d\theta/dt$ utilise la vitesse, \mathbf{u} , définie précédemment (cf. Eq. 3.62) et correspond au taux de rotation entre deux points \mathbf{x} et \mathbf{x}' . Le flux photosphérique d'hélicité est alors la somme des taux de rotation de tous les tubes de flux magnétique élémentaires. Cette nouvelle définition permet de se ramener à la définition originale de l'hélicité : la somme du nombre de liens d'une ligne de champ avec les autres lignes de champ du volume (cf. Sect. 1.4.2).

Nous avons présenté ici trois principales formulations du flux d'hélicité magnétique relative. Ce flux peut être intégré en fonction du temps pour avoir une estimation de l'hélicité accumulée,

H_{acc} :

$$H_{acc}(t) = \int_0^t F_{tot}(\tau) d\tau. \quad (3.67)$$

Dans la sous-section suivante, nous verrons comment calculer en pratique ses quantités dans l'atmosphère solaire.

3.3.2.2 Mesure du flux photosphérique d'hélicité relative

Le calcul du flux d'hélicité magnétique au niveau d'une région active nécessite tout d'abord la distribution 2D du champ magnétique qui peut être obtenue par spectropolarimétrie (cf. Sect. 2.1). Remarquons également que l'équation (3.61) dépend uniquement du champ magnétique normal à la surface. On est ainsi libéré des incertitudes liées à la mesure du champ transverse. Seules les erreurs dues à la projection du champ le long de ligne de la visée de l'instrument impactent l'estimation du flux d'hélicité (cf. Sect. 2.2.2).

Dans le but de mesurer le flux d'hélicité magnétique sous la forme (3.60) ou (3.61), le potentiel vecteur du champ magnétique potentiel est également nécessaire. Il existe différentes méthodes robustes permettant le calcul de ce vecteur potentiel (DeVore 2000; Chae 2001; Liu et al. 2013; Liu & Schuck 2013; Yang et al. 2013b). En pratique, le vecteur, \mathbf{A}_p , peut être par exemple déterminé par transformation de Fourier rapide de la composante normale du champ magnétique photosphérique (Chae 2001).

Le champ de vitesse photosphérique du plasma, \mathbf{v} , est également nécessaire pour calculer le flux d'hélicité sous la forme (3.60). Ce champ peut être déduit en partie grâce à la mesure du décalage spectrale des ondes électromagnétiques émises par la photosphère ((effet Doppler) Roudier et al. 1999). Comme pour le champ magnétique (cf. Sect. 2.1), seule la composante, \mathbf{v}_{\parallel} , le long de la ligne de visée est disponible. La vitesse longitudinale est égale à la vitesse normale uniquement pour des régions proches du centre, $v_{\parallel} \simeq v_n$.

Le flux d'hélicité peut cependant être obtenu grâce aux formulations (3.64) et (3.61) qui nécessitent uniquement la vitesse de transport de flux magnétique, \mathbf{u} (Chae 2001; Kusano et al. 2002; Longcope 2004; Welsch et al. 2004; Schuck 2006, 2008, e.g.). Afin d'évaluer \mathbf{u} , Chae (2001) a proposé l'utilisation de la méthode "Local Correlation Tracking" (LCT, Leese et al. 1971; November & Simon 1988) qui consiste à corrélérer l'évolution d'une petite région entre deux images successives décalées selon un déplacement variable. Le déplacement qui maximise le coefficient de corrélation entre sous-régions voisines dans deux images successives peut ensuite permettre d'estimer la vitesse, \mathbf{u} . La qualité des résultats reste cependant liée à la résolution spatiale et temporelle des données. Schuck (2005) a montré que la vitesse ainsi obtenue suit l'équation d'advection :

$$\frac{\partial B_n}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_n = 0. \quad (3.68)$$

avec $\nabla = (\partial_x, \partial_y, 0)$. Le principal problème de la LCT est que cette équation n'est pas compatible avec l'équation d'induction magnétique (cf. Eq. A.18). La LCT ne peut donc pas rendre compte de la physique de l'évolution du champ magnétique. En particulier, l'équation (3.68) ne tient compte que des mouvements qui modifient la distribution de B_n . Ainsi un certain nombre de contributions, telles que les mouvements de rotation ne sont pas pris en compte lors du calcul du flux d'hélicité. Même si des améliorations de la méthode existent (e.g. Longcope 2004; Schuck 2005), le flux d'hélicité diffère légèrement du flux réel et la vitesse fournie reste qu'une approximation de la vitesse horizontale du plasma.

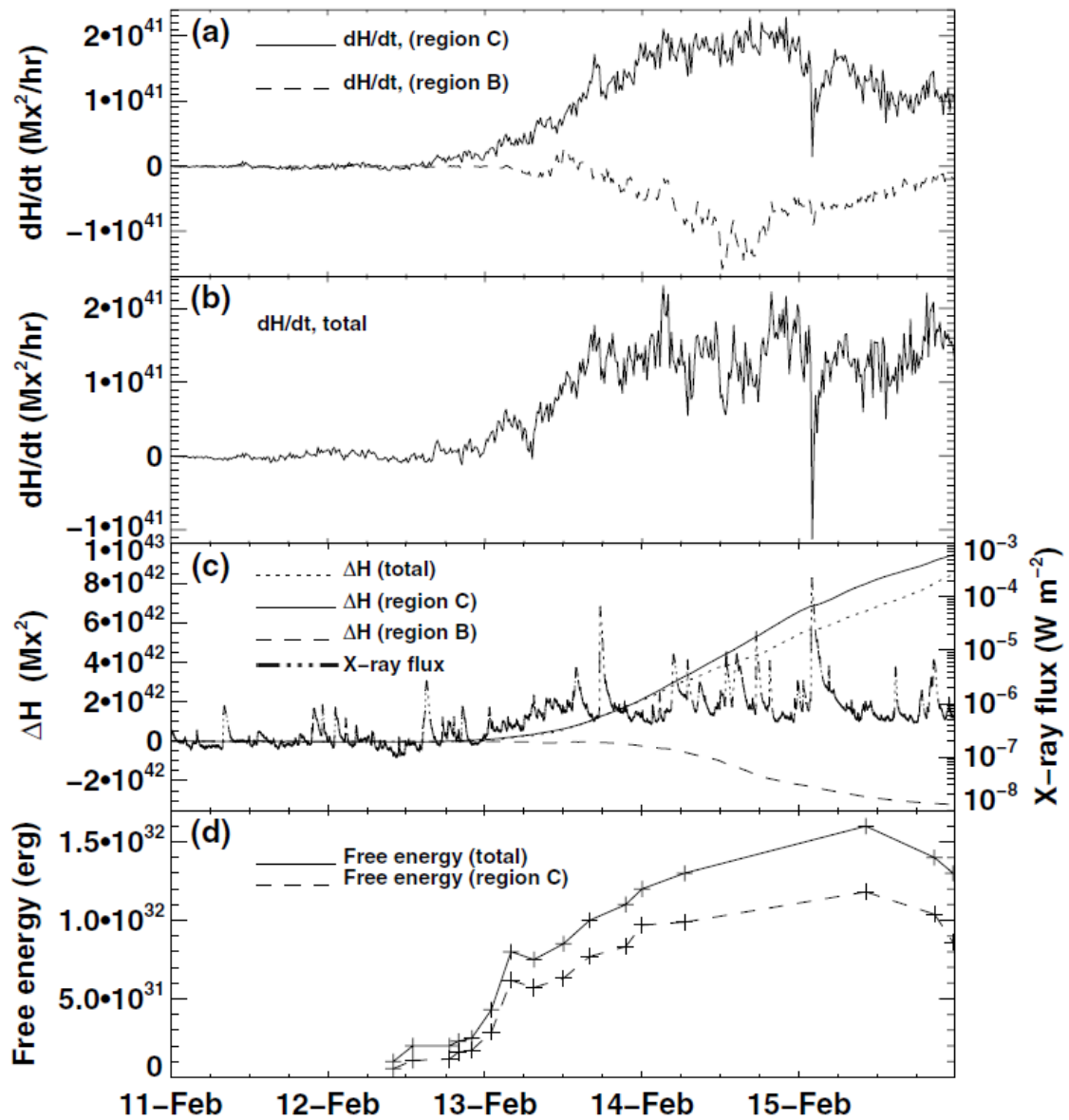


FIGURE 3.7 – **Panneau a** : évolution de la variation temporelle de l'hélicité relative au niveau de deux sous-régions (B et C) de la région active NOAA 11158. Les sous-régions B et C sont centrées autour des régions où les flares sont observées en rayonnement ultraviolet extrême (cf. Fig. 1 dans [Nindos et al. 2012](#)). **Panneau b** : évolution de la variation temporelle de l'hélicité relative au niveau de l'ensemble de la région active NOAA 11158. **Panneau c** : évolution de l'accumulation d'hélicité calculée en intégrant dH_r/dt (cf. Eq. 3.28) au niveau de l'ensemble de la région active et au niveau des régions B et C, comparée à l'évolution du rayonnement X. **Panneau d** : évolution de l'énergie libre au niveau de l'ensemble de la région active (trait plein) et au niveau de la sous-région C (trait en pointillé). Adaptée de [Nindos et al. \(2012\)](#).

En parallèle, des méthodes utilisant les mesures non seulement de la composante longitudinale, mais également des composantes transverses du vecteur champ magnétique se sont développées ([Schuck 2006](#); [Welsch et al. 2007](#)). En particulier, la méthode "differential affine velocity estimator for vector magnetogram" (DAVE4VM) introduite par [Schuck \(2008\)](#) est utilisée pour suivre l'évolution des flux d'hélicité photosphérique (e.g. [Bi et al. 2018](#)). Elle utilise uniquement le champ magnétique observé pour déterminer les composantes du vecteur vitesse, alignées avec le champ (respectivement \mathbf{v}_{\parallel} et v_{\perp}). Le résultat est donc fortement sensible aux in-

certitudes de mesure du champ magnétique. La solution unique pour \mathbf{v} obtenue permet ensuite de récupérer ses composantes selon les équations :

$$v_{\parallel} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{B^2} \quad (3.69)$$

$$v_{\perp} = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{B^2} \quad (3.70)$$

Les différents termes sont injectés dans l'équation (3.28) pour obtenir les deux composantes du flux d'hélicités. Cette méthode contrairement à la LCT respecte l'équation d'induction :

$$\frac{\partial B_n}{\partial t} + \nabla_n \cdot (B_n \mathbf{v}_h - v_n \mathbf{B}_h) = 0. \quad (3.71)$$

En plus de la LCT et de DAVE4VM d'autres méthodes existent, par exemple : l'IM ("Induction Method", Kusano et al. 2002), la MEF ("Minimum Energy Fit", Longcope 2004), l'ILCT ("Inductive LCT", Welsch et al. 2004) et DAVE (Schuck 2006). Dans un ensemble de simulations numériques MHD, Schuck (2008) et Welsch et al. (2007) ont comparé les différents algorithmes et ont montré que DAVE4VM et MEF donnent les meilleurs résultats et LCT les plus mauvais.

Une fois la distribution du champ magnétique photosphérique mesurée ainsi que la vitesse du plasma ou la vitesse de transport du flux magnétique, le flux photosphérique d'hélicité magnétique relative peut être calculé au niveau d'une région active (e.g. Kusano et al. 2002; Nindos et al. 2003; Yamamoto et al. 2005; Yamamoto & Sakurai 2009; Longcope et al. 2007; Liu & Schuck 2012; LaBonte et al. 2007; Vemareddy 2015; Bi et al. 2018; Sun et al. 2019; Liu 2019).

Une intégration temporelle du flux d'hélicité magnétique relative permet également d'estimer l'hélicité accumulée dans la couronne (Fig. 3.7 et Nindos et al. 2003; Démoulin et al. 2002; Green et al. 2002; Mandrini et al. 2004). Cela est rendu possible grâce à la quasi-conservation de l'hélicité magnétique relative (Pariat et al. 2015). En effet, puisque l'hélicité magnétique relative ne peut être dissipée ni créée à l'intérieur de la couronne solaire, sa variation temporelle peut s'écrire comme la somme de contributions surfaciques (cf. Sect. 3.2.1).

Si le flux d'hélicité relative est connu analytiquement et mesurable au niveau de la photosphère, ce n'était pas le cas, avant ma thèse, des flux d'hélicités non potentielle et mêlée. Dans Linan et al. (2018), j'ai ainsi présenté la première formulation analytique de ces flux (cf. Sect. 5.2). J'ai pu montrer que, contrairement à l'hélicité relative, l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle ne sont pas conservées même en MHD idéale (cf. Sect. 5.2.1.3). Il n'est donc pas possible d'utiliser une méthode d'intégration temporelle de leur flux pour estimer leurs accumulations dans l'atmosphère solaire (cf. Sect. 3.3.2).

3.3.3 Hélicité magnétique par ligne de champ

L'hélicité magnétique est une quantité globale. Puisque l'intégrant dans l'équation (3.9) n'est pas invariant de jauge, il n'existe pas de densité par unité de volume d'hélicité magnétique. Il est en revanche tout à fait possible d'introduire une densité d'hélicité magnétique par tube de flux élémentaire (également appelée hélicité magnétique par ligne de champ, HMLC). Une telle formulation permet de se soustraire du caractère global de l'hélicité pour avoir un aperçu de sa distribution dans le volume.

Initialement introduite par Antiochos (1987) et Berger (1988), le développement ainsi que l'utilisation de l'hélicité par ligne de champ n'a cependant connu un essor que très récemment

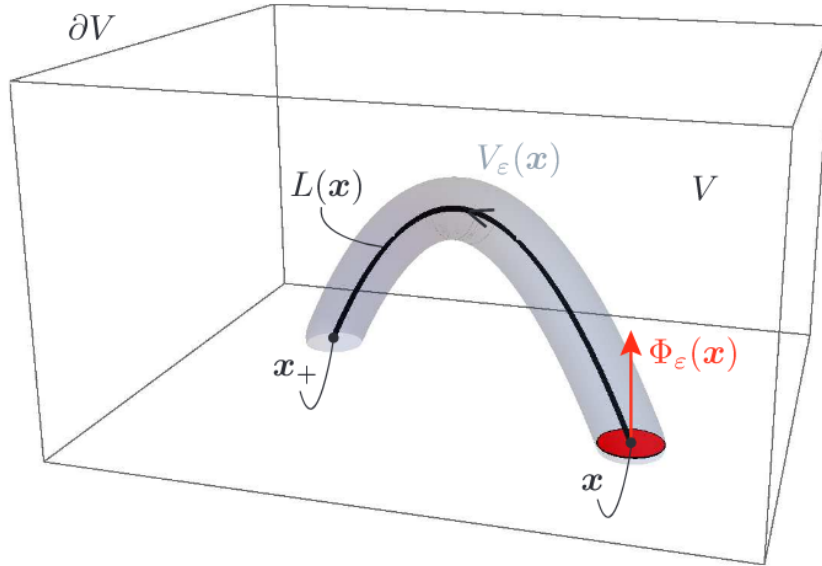


FIGURE 3.8 – Schéma d'un tube de flux élémentaire autour d'une ligne de champ $L(x)$ ancrée à la frontière au niveau des points x_+ et x . Le tube de flux a un volume $V(x)$ et est parcouru par un flux magnétique $\Phi(V_\xi)$. Figure de [Yeates & Page \(2018\)](#).

([Russell et al. 2015](#); [Aly 2017](#); [Yeates & Hornig 2016](#); [Yeates & Page 2018](#); [Moraitis et al. 2019a](#)). Dans un volume V délimité par une frontière ∂V , la densité d'hélicité, $A(\mathbf{x})$, d'un tube élémentaire de flux magnétique le long d'une ligne de champ, L , ancrée à la position \mathbf{x} (cf. Fig. 3.8), est telle que :

$$A(\mathbf{x}) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{h(V_\xi(\mathbf{x}))}{\Phi(V_\xi(\mathbf{x}))}, \quad (3.72)$$

où $\Phi(V_\xi)$ est le flux magnétique et où $h(V_\xi)$ est l'hélicité du sous-volume. Quand ξ tend vers 0, le tube V_ξ se collapse sur la ligne L , et $A(\mathbf{x})$ est bien l'hélicité d'une ligne de champ magnétique. À partir de la définition de $h(V_\xi)$, il en découle ([Yeates & Page 2018](#)) :

$$A(\mathbf{x}) = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (3.73)$$

En supposant qu'il existe une surface, S , par laquelle toutes les lignes de champ passent, l'hélicité totale peut être retrouvée en intégrant A le long de la surface :

$$H = \int_S A(L(x, y)) B_n(x, y) dS. \quad (3.74)$$

Le problème d'une telle formulation est que dans le cas général l'hélicité par ligne de champ de champ n'est pas invariante de jauge. En effet une transformation de jauge telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ change la valeur de la densité d'hélicité :

$$A'(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}_+) - \chi(\mathbf{x}), \quad (3.75)$$

avec \mathbf{x}_+ la position finale de la ligne de champ ancrée sur la surface ∂V (cf. Fig. 3.8). Dans le cas où la ligne de champ est fermée alors $A'(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$, la densité d'hélicité est invariante de

jauge. Le théorème de Stokes appliqué à l'équation (3.73) donne alors :

$$A(\mathbf{x}) = \int_L \mathbf{A} \cdot dL \quad (3.76)$$

$$= \int_{S_L} \nabla \times \mathbf{A} \cdot dS \quad (3.77)$$

$$= \int_{S_L} \mathbf{B} \cdot dS, \quad (3.78)$$

avec S_L la section du tube de flux. Dans ce cas, $A(\mathbf{x})$ est simplement le flux magnétique à travers le tube de flux. Dans le cas général où la ligne de champ n'est pas fermée, la densité d'hélicité n'est cependant pas invariante de jauge.

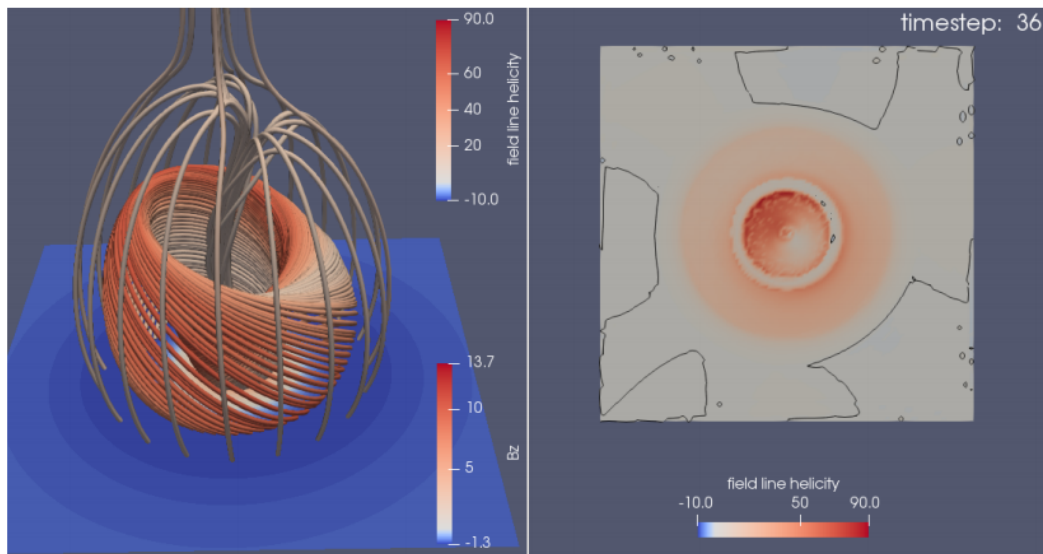


FIGURE 3.9 – Hélicité par ligne de champ magnétique dans la simulation numérique MHD de la génération d'un jet coronal (Pariat et al. 2009). **Gauche** : les lignes de champ sont colorisées selon la valeur de leur hélicité associée. La surface inférieure, qui correspond à la photosphère, représente l'intensité de la composante normale du champ magnétique. **Droite** : carte 2D de l'hélicité par ligne de champ magnétique au niveau de la surface inférieure du domaine. Adaptée de Moraitis et al. (2019a).

Récemment, Moraitis et al. (2019a) ont introduit une formulation² de l'hélicité magnétique relative par ligne de champ (HMRLC) valable pour n'importe quel choix de jauge pour les deux potentiels vecteurs, \mathbf{A} et \mathbf{A}_p . L'HMRLC n'étant également pas invariant de jauge, son interprétation physique dépend cependant du choix de jauge (cf. Sect. 2.2 dans Moraitis et al. 2019a).

Notons également que Moraitis et al. (2019a) ont démontré qu'il était possible d'obtenir une formulation par ligne de champ pour les deux hélicités aux propriétés prometteuses que sont les hélicités non potentielle et mêlée.

Moraitis et al. (2019a) ont également développé une méthode de calcul de l'HMRLC permettant de mesurer l'hélicité relative dans un volume fini. Dans trois simulations numériques différentes, Moraitis et al. (2019a) ont alors comparé la valeur de l'hélicité magnétique relative calculée à l'aide de leur nouvelle méthode basée sur l'HMRLC avec l'hélicité relative calculée par intégration directe volumique. À l'exception d'instantanés pris au début des simulations et de

2. Une formulation qui ne sera pas présentée ici pour préserver la clarté de cette section.

quelques autres où l'hélicité est très faible, les deux méthodes donnent des résultats dont la différence ne dépasse pas 5%.

Le coût de calcul de la HMRLC est plus élevé que celui d'une méthode par intégration directe volumique avec les mêmes choix de jauge. Cependant, la nouvelle méthode développée par [Moraitis et al. \(2019a\)](#) permet d'obtenir la distribution de l'hélicité magnétique relative par ligne de champ à l'intérieur du domaine d'étude. Dans la simulation d'un jet coronal, [Moraitis et al. \(2019a\)](#) ont par exemple montré que les valeurs maximales de l'HMRLC sont localisées dans les régions où la torsion est injectée. Cependant, des travaux supplémentaires sont nécessaires afin de déterminer si ce résultat est vrai dans n'importe quelle jauge.

Ainsi l'HMRLC offre un nouvel outil de représentation et de mesure de l'hélicité magnétique (cf. Fig. 3.9). Dans les situations, telles qu'une éjection de masse coronale ([Green et al. 2018](#)), où l'hélicité pourrait jouer un rôle important ([Rust & Kumar 1994](#); [Low 1996](#); [Green et al. 2002](#); [Mandrini et al. 2005](#); [Priest et al. 2016](#)), l'HMRLC pourrait aider à mieux comprendre ce rôle en permettant de suivre par exemple le transfert d'hélicité entre deux structures magnétiques. [Lowder & Yeates \(2017\)](#) ont aussi suggéré que l'hélicité magnétique par ligne de champ magnétique peut être utilisée pour détecter et caractériser des tubes de flux magnétiques. Leur point de départ est que les valeurs les plus élevées de l'hélicité magnétique par ligne de champ sont concentrées au niveau des tubes de flux dans la couronne solaire.

3.3.4 Densité de flux d'hélicité

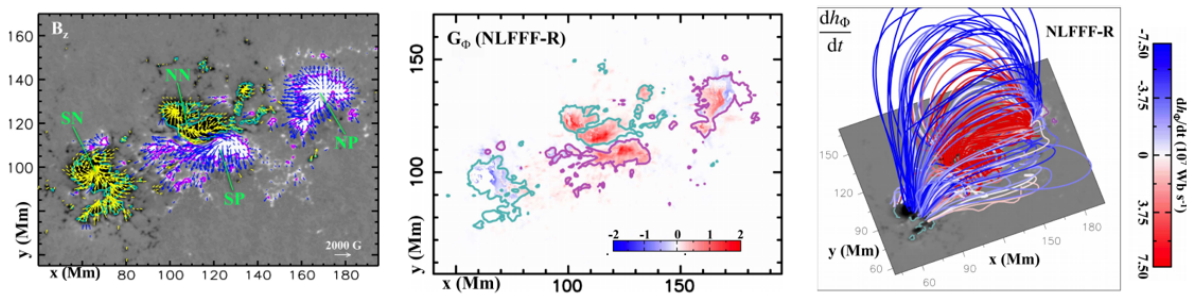


FIGURE 3.10 – **Gauche** : magnétogramme de la région active NOAA 11158. Les vecteurs en jaune et bleu représentent les composantes transverses du champ magnétique. **Milieu** : distribution spatiale de la densité du flux d'hélicité, G_θ (son unité est ici de $10^7 \text{Wb}^2 \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$), calculé à partir d'une extrapolation sans force non linéaire du champ magnétique. Les lignes violettes et cyan représentent des isolignes telles que $B_z = \pm 500 \text{G}$. **Droite** : représentation 3D de la densité de flux d'hélicité par ligne de champ, dh_{θ}/dt . Les lignes de champ apparaissent selon la valeur de leur flux d'hélicité. Adaptée de ([Dalmasse et al. 2018](#)).

En plus de l'accumulation globale d'hélicité, il est légitime de s'intéresser à la question de la distribution spatiale de l'injection de l'hélicité, c'est-à-dire comment l'injection d'hélicité est distribuée le long de surface du Soleil. Une telle connaissance pourrait aboutir à la construction de carte 2D de la distribution photosphérique de l'hélicité, un hélicitogramme. Cependant au même titre qu'il n'existe pas d'hélicité magnétique par unité de volume, il n'existe pas de flux d'hélicité magnétique par unité de surface. L'intégrant de l'équation (3.60) dépend de la jauge du vecteur potentiel et n'a donc pas de sens physique. Il est cependant possible de considérer une densité de flux d'hélicité par tube de flux magnétique élémentaire ([Pariat et al. 2005](#)). Une telle définition a un sens physique et décrit la variation du nombre de liens total de chaque tube de flux magnétique élémentaire.

Pour obtenir une densité surfacique de flux d'hélicité qui nous permettra de cartographier l'injection d'hélicité (cf. Fig. 3.10), il faut alors distribuer le flux d'hélicité par tube de flux

élémentaire en chacun des pieds de ce tube (Démoulin & Pariat 2009). Cette distribution ne peut pas être faite de manière unique. Il n'existe donc pas une unique définition de la densité surfacique du flux d'hélicité. Plusieurs proxys de densité de flux d'hélicité sont néanmoins pertinents et permettent de se rapprocher plus ou moins de la densité réelle de flux d'hélicité par ligne de champ magnétique.

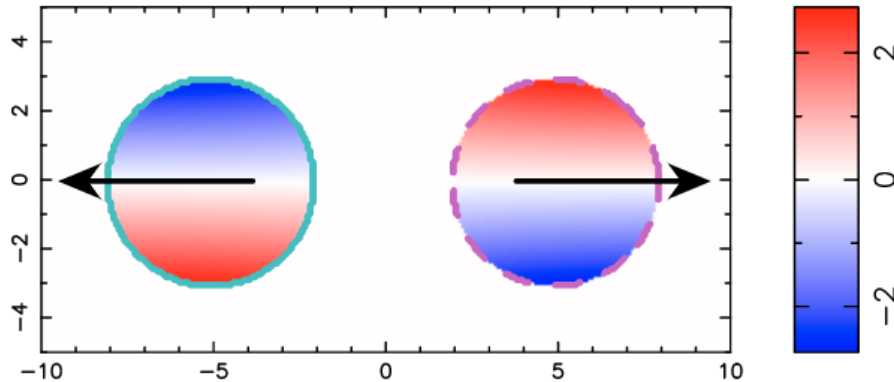


FIGURE 3.11 – Hélicitigramme obtenu à partir de G_A (cf. Eq. 3.79) pour un modèle de translation rectiligne de deux polarités magnétiques de signe opposé. (Pariat et al. 2005). La flèche noire représente la direction du mouvement de translation. La courbe cyan est un isocontour de B_n qui est uniforme dans les deux polarités magnétiques. Le mouvement de translation ne modifie pas l'hélicité des lignes de champ magnétique. Par conséquent, la densité de flux d'hélicité par ligne de champ doit être nulle. Néanmoins, on observe des contributions de signe opposé et de même amplitude à l'intérieur des polarités.. Ces signaux sont artificiels et dus à la définition de G_A . La valeur de G_A obtenue est sans dimension (cf. Eq. 36 dans Pariat et al. 2005, pour le détail du calcul de G_A en fonction de la vitesse de translation, du champ magnétique et des caractéristiques des polarités). Adaptée de Pariat et al. (2005).

L'intégrand de l'équation (3.61) donne un premier proxy de densité de flux d'hélicité :

$$G_A = -2(\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}_n. \quad (3.79)$$

Cette définition a servi à cartographier la distribution du flux d'hélicité magnétique de diverses régions actives (e.g. Chae 2001; Yamamoto et al. 2005; Park et al. 2012; Zhang et al. 2012b). Néanmoins, Pariat et al. (2005) ont montré que G_A ne parvient pas à représenter parfaitement le flux d'hélicité d'une région active. En effet, la densité G_A peut présenter des signaux parasites qui ne fournissent pas une véritable densité de flux d'hélicité (cf. Fig. 3.11).

Un deuxième proxy, nommé G_θ , est défini à partir de l'intégrand du flux d'hélicité présenté dans l'équation (3.64). Son expression est (Pariat et al. 2005) :

$$G_\theta(x) = -\frac{B_n}{2\pi} \int_S \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}')] \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} B'_n(\mathbf{x}') dS, \quad (3.80)$$

La définition de G_θ utilise la vitesse de transport du flux, \mathbf{u} définie précédemment (cf. Eq. 3.62) et dépend du mouvement relatif d'une polarité situé en \mathbf{x} par rapport aux autres polarités situées en \mathbf{x}' .

À partir de la définition de G_θ , Pariat et al. (2005) ont alors montré que la densité de flux

d'hélicité par ligne de champ, noté dh_{Θ}/dt vaut alors :

$$\left. \frac{dh_{\Theta}}{dt} \right|_c = \frac{G_{\theta}(\mathbf{x}_{c+})}{|B_n(\mathbf{x}_{c+})|} + \frac{G_{\theta}(\mathbf{x}_{c-})}{|B_n(\mathbf{x}_{c-})|}, \quad (3.81)$$

où ' c ' désigne un tube de flux magnétique ancré à la photosphère au niveau du pied $\mathbf{x}_{c\pm}$. La densité de flux d'hélicité par tube de flux magnétique élémentaire est alors la somme pondérée par le flux magnétique des densités de flux d'hélicité G_{θ} mesurées au niveau des pieds du tube de flux.

Un des inconvénients majeurs de la définition de G_{θ} est qu'elle mesure uniquement les variations liées aux mouvements relatifs des polarités. Elle ne tient pas compte des modifications de l'hélicité à l'intérieur du volume en réponse aux mouvements des pieds. L'hélicité étant une grandeur par définition 3D, il est essentiel de considérer la réorientation des lignes de champ dans le volume. Se limiter à la formulation de G_{θ} peut engendrer des surestimations du flux d'hélicité quand la région active est caractérisée par des injections d'hélicité de signe opposé (Dalmasse et al. 2014).

En complément de G_{θ} , [Pariat et al. \(2005\)](#) ont défini une nouvelle densité de flux d'hélicité G_{Θ} , en redistribuant dh_{Θ}/dt entre chaque pied du tube de flux élémentaire. La nouvelle densité de flux d'hélicité est définie par ³ :

$$G_{\Theta} = \frac{1}{2} \left(G_{\theta}(x_{c\pm}) + \left| \frac{B_n(x_{c\pm})}{B_n(x_{c\mp})} \right| G_{\theta}(x_{c\mp}) \right) \quad (3.82)$$

La densité G_{Θ} complète la définition de G_{θ} en donnant une représentation plus réaliste du flux d'hélicité, car elle tient compte des mouvements de chacune des deux polarités magnétiques photosphériques, x_{c-} et x_{c+} . Notons également que cette nouvelle définition nécessite de connaître la connectivité magnétique qui n'est accessible qu'indirectement par des méthodes de reconstructions du champ magnétique (cf. Sect. 2.3).

En intégrant le long d'une ligne de champ magnétique, [Dalmasse et al. \(2014\)](#) ont proposé à partir de données analytiques et numériques une méthode rigoureuse de calcul pour G_{θ} et G_{Θ} . Cette méthode fut utilisée à partir de données observationnelles pour la première fois par [Dalmasse et al. \(2013b\)](#) qui mit en évidence la présence de flux d'hélicité de signe opposé au niveau d'une même région active. Depuis la densité de flux d'hélicité a été utilisée pour cartographier l'injection d'hélicité de multiples régions actives (e.g. [Bi et al. 2015](#); [Vemareddy & Démoulin 2017](#); [Dalmasse et al. 2018](#)).

3.4 Additivité de l'hélicité magnétique relative

La conservation de l'hélicité est au cœur de nombreux processus de la physique solaire. Si l'on veut relier les différents mécanismes ensemble, tels que la dynamo solaire ([Brandenburg & Subramanian 2005](#)) et l'émergence du champ magnétique à travers la photosphère ([Schuck & Antiochos 2019](#)), ou bien les éruptions solaires ([Thalmann et al. 2019b](#)) et les nuages magnétiques ([Temmer et al. 2017](#)), il est cependant nécessaire de comprendre comment l'hélicité se transmet d'un système à l'autre. Cela n'est pas évident, car ces différents processus sont généralement traités par des modèles différents qui requièrent en particulier des volumes d'étude différents.

Pour comprendre la dynamique globale de l'hélicité magnétique, il faut alors être en mesure de partitionner l'hélicité entre des sous-volumes différents, par exemple un sous-volume pour

3. Le facteur 1/2 suppose que les deux polarités contribuent de manière égale.

l'intérieur du Soleil, et un autre pour l'atmosphère solaire. La principale difficulté à cela est que l'hélicité relative n'est pas une grandeur simplement additive (Longcope & Malanushenko 2008; Berger & Field 1984). Autrement dit la somme de l'hélicité relative de deux sous volumes adjacents, V_A et V_B , n'est pas simplement égale à l'hélicité relative totale du volume $V = V_A \cup V_B$.

Dans Valori et al. (2020) présenté ci-après, nous sommes revenus sur la question de l'additivité de l'hélicité magnétique relative entre deux volumes finis. Nous avons proposé une formulation analytique de l'additivité de l'hélicité sous la forme $H(V) = H(V_A) + H(V_B) + \delta H$, avec δH une contribution non additive. Et nous avons en particulier proposé une expression invariante de jauge pour la contribution non additive.

3.4.1 Partition de l'hélicité relative entre deux volumes : Valori, Pariat, Démoulin, Moraitis, Yeates, & Linan (2020)

3.4.1.1 Résumé

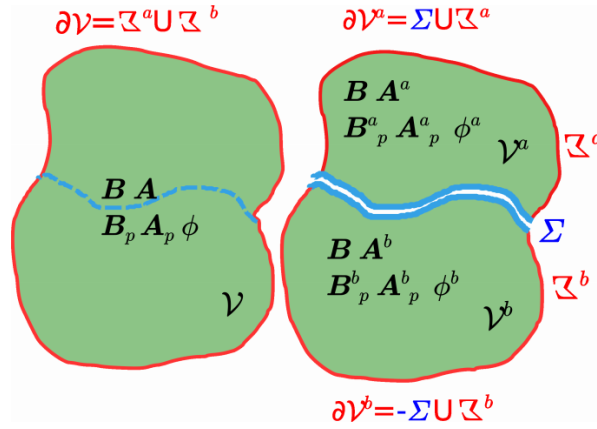


FIGURE 3.12 – Schéma de la division d'un volume, V , en deux sous-volumes, V^a et V^b partageant une frontière commune Σ . Σ^a (resp. Σ^b) correspond à l'interface du volume V^a (resp. V^b). Les grandeurs notées \mathbf{A}^a , \mathbf{A}_p^a , \mathbf{B}_p^a et ϕ^a (resp. \mathbf{A}^b , \mathbf{A}_p^b , \mathbf{B}_p^b et ϕ^b) sont associées aux volumes V^a (resp. V^b). Les notations utilisées dans le croquis sont identiques à celles employées dans la section (3.4). Adaptée de Valori et al. (2020).

Berger & Field (1984) et Longcope & Malanushenko (2008) ont montré que l'hélicité magnétique relative n'est pas une grandeur simplement additive. Berger & Field (1984) et Longcope & Malanushenko (2008) furent également les premiers à réfléchir sur une formulation de l'hélicité, nécessitant un choix de jauge et un champ de référence précis, qui puisse être additive. Malgré ces ébauches, un tel formalisme n'existait pas encore avant nos travaux dans Valori et al. (2020).

Pour se rendre compte des difficultés inhérentes à une partition de l'hélicité, on peut considérer un volume, V , séparable en deux sous-volumes, V^a et V^b , qui sont délimités par des surfaces, δV^a et δV^b , et qui partagent une surface commune, Σ (cf. Fig. 3.12). Par définition du champ potentiel, ce dernier respecte l'équation (1.6) dans les sous-volumes :

$$\hat{\mathbf{n}}^a \cdot \mathbf{B}_p^a|_{\delta V^a} = \hat{\mathbf{n}}^a \cdot \mathbf{B}|_{\delta V^a} \quad (3.83)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^b \cdot \mathbf{B}_p^b|_{\delta V^b} = \hat{\mathbf{n}}^b \cdot \mathbf{B}|_{\delta V^b} \quad (3.84)$$

Ainsi, à l'interface Σ , les composantes normales de \mathbf{B}_p^b et \mathbf{B}_p^a sont égales, mais pas leurs composantes transverses. Le champ potentiel n'est donc pas forcément continu à l'interface Σ . De la

même manière, le champ magnétique potentiel dans le volume entier est purement déterminé par la composante normale du champ magnétique le long des surfaces du volume δV . Aucune contrainte n'impose que ces deux composantes normales soient également égales le long de l'interface Σ . Par conséquent, le champ potentiel, \mathbf{B}_p , n'est pas la somme des champs potentiels \mathbf{B}_p^b et \mathbf{B}_p^a qui sont déterminés par la composante normale de \mathbf{B} et non de \mathbf{B}_p . Puisque la position de l'interface est arbitraire, la seule façon de régler ce problème, ainsi que la discontinuité de \mathbf{B}_p^b et \mathbf{B}_p^a , est de prendre un champ magnétique, \mathbf{B} , égal au champ magnétique potentiel, \mathbf{B}_p , dans au moins un des sous-volumes. Cela impliquerait une hélicité relative nulle dans ce volume.

Dans Valori et al. (2020), nous avons repris le problème d'additivité avec pour objectif principal d'apporter une expression pour la contribution non additive de l'hélicité qui ne dépende pas de la jauge employée. Dans ce but, nous avons traité le cas précédent, deux sous-volumes, V^a et V^b , partageant une surface en commun, Σ . Cela correspond par exemple à l'étude du transfert d'hélicité de la région sub photosphérique à la couronne solaire. Sans aucune hypothèse particulière, l'hélicité magnétique relative dans le volume V s'écrit (Valori et al. 2020) :

$$H(\mathbf{B}, V) = H(\mathbf{B}, V^a) + H(\mathbf{B}, V^b) + \delta H, \quad (3.85)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta H &= H(\mathbf{B}, V) - H(\mathbf{B}, V^a) - H(\mathbf{B}, V^b) \\ &= \delta H - \delta H_p + \delta H_{mix}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Le terme δH représente la composante non additive de l'hélicité. Cette contribution a été prouvée invariante de jauge. et cela implique donc que l'équation (3.85) l'est également. Par conséquent, il n'existe pas de jauge qui rendrait l'hélicité relative séparable entre sous-volumes. Cela ne veut pas dire que des exemples où l'hélicité est simplement additive n'existent pas, mais ça reste des cas spéciaux qui ne reflètent pas le comportement général.

En détail, le terme non additif δH se décompose en trois sous termes (cf. Eq. 3.86). Tout d'abord, on trouve une composante surfacique, δH , liée à la continuité du champ magnétique le long de l'interface commune, Σ . À cela vient s'ajouter un terme, δH_p , entièrement dépendant du champ magnétique potentiel. δH_p peut à son tour être décomposée en un ensemble de termes volumiques dépendant de la divergence du potentiel vecteur \mathbf{A}_p et de termes surfaciques reliés à la composante normale de ce vecteur le long des différentes interfaces. Pour finir, l'équation (3.86) contient un terme non additif mixte δH_{mix} composé des contributions croisées des différents vecteurs (voir Valori et al. 2020, pour l'expression analytique de ces composantes).

L'équation (3.85) étant invariante de jauge, nous avons montré qu'un choix spécifique et judicieux de jauge pouvait simplifier les formulations analytiques. En particulier, une utilisation réfléchie de la jauge de DeVore-Coulomb (Valori et al. 2012) peut supprimer les contributions volumiques de δH_p et annuler le terme mixte, δH_{mix} . De plus, nous avons montré que notre formalisme est une généralisation de ceux proposés par Berger & Field (1984) et Longcope & Malanushenko (2008) qui utilisent des jauges et des hypothèses particulières.

Une fois le formalisme établi, nous l'avons vérifié en utilisant un modèle numérique d'une région active bipolaire basé sur le modèle de tube de flux magnétique de Titov & Démoulin (1999). Le modèle utilisé représente un tube de flux torsadé entouré par un dans un champ potentiel. Le volume d'étude a été divisé soit par une coupe verticale soit par une coupe horizontale dont la position varie. Les tests réalisés ont validé notre théorie, mais ont aussi montré que le terme non additif n'est pas négligeable et peut même être supérieur aux autres contributions (cf. Fig. 3.13). Cela confirme que l'hélicité magnétique n'est pas une grandeur simplement additive. Remarquons néanmoins que les tests effectués montrent également que l'intensité du

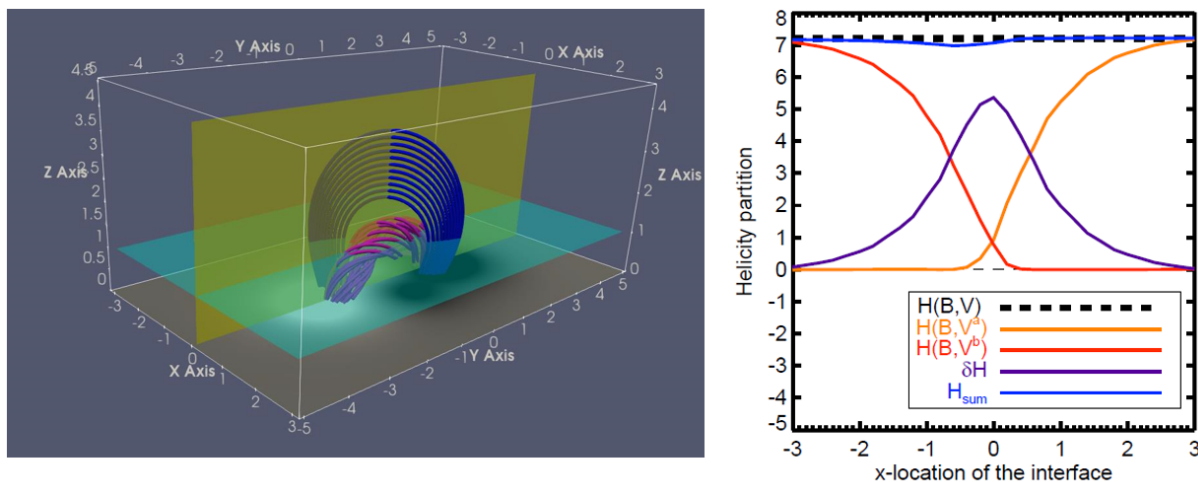


FIGURE 3.13 – **Gauche** : lignes de champ magnétique dans le modèle de tube de flux magnétique de [Titov & Démoulin \(1999\)](#). La distribution de la composante verticale du champ magnétique photosphérique est représentée en nuance de gris à $z = 0$. Les deux sections planes en jaune et cyan représentent des interfaces possibles pour notre formalisme de partition de l'hélicité. **Droite** : valeur de l'hélicité relative du volume entier V (courbe noire), de l'hélicité du volume V^a (courbe orange), de l'hélicité du volume V^b , du terme non additive δH (courbe violette) et de la somme de ces trois dernières contributions (courbe bleue, cf. Eq. 3.85) en fonction de la position de l'interface Σ (interface en jaune dans le panneau de gauche). L'hélicité du volume V est quasi égale à la valeur de l'hélicité calculée à partir de l'équation (3.85). Cela confirme la validité de notre formalisme. De plus, quand l'interface est au centre du domaine, c.-à-d. à la position $x = 0$, l'hélicité partitionnée, H_{sum} , est dominée par la contribution non additive, δH . Adaptée de [Valori et al. \(2020\)](#).

terme non additif dépend de la manière dont le volume est divisé.

3.4.1.2 Ma contribution

En 2018, s'est formé un groupe de travail international sur l'hélicité magnétique de plasma astrophysique. Ce groupe est dirigé par G. Valori et É. Pariat, et est composé de spécialistes de l'hélicité magnétique que sont A. Branderburg, S. Candelaresi, Y. Liu, K. Moraitis, J. Thalmann, A. Yeates ainsi que deux jeunes chercheurs, G. Hawkes et moi-même. L'objectif principal de ce groupe est entre autres de rassembler dans un même cadre théorique les méthodes d'estimation de l'hélicité qui ont été développées dans différents domaines, afin qu'elles puissent être comparées de manière significative les unes aux autres.

Durant les deux réunions du groupe, G. Valori a présenté ses travaux sur l'additivité de l'hélicité relative. Durant ces mêmes réunions, j'ai ainsi pu participer aux discussions menées autour de cette problématique. Des discussions qui ont été poursuivies à distance, mais également lors d'une visite de G. Valori au pôle solaire de l'observatoire de Paris où j'effectuais ma thèse.

J'ai donc contribué à l'article à travers les différents échanges que j'ai eu durant toute la durée de la phase de réflexion et de conception de celui-ci. J'ai également participé à l'écriture de l'article en relisant et en commentant toutes les versions précédentes. La première version de l'article date du 8 mai 2018, quelques semaines avant mon séjour au laboratoire de sciences spatiales Mullard (MSSL) où m'a accueilli G. Valori. J'ai ainsi pu à ce moment partager avec lui mes différents commentaires. Notons qu'entre la première version de l'article et la version qui a été soumise au journal *Astronomy & Astrophysics* (A&A) il s'est écoulé plus de deux ans.

3.4.1.3 Perspectives

Les différentes expressions mises en évidence dans [Valori et al. \(2020\)](#) sont applicables à des volumes cartésiens, mais sont également adaptables à des géométries sphériques. La seule contrainte était d'étudier deux sous-volumes partageant une frontière commune. Dans le cas contraire, il faudrait rajouter un sous-volume intermédiaire rempli par un champ magnétique potentiel par exemple. Un tel cas nécessiterait d'adapter le formalisme à l'étude de multiple sous-volumes.

La généralité de notre formalisme va cependant permettre d'étudier une large gamme de processus phares de la physique solaire dont leurs études étaient indépendantes jusqu'à présent. Nos travaux offrent désormais la possibilité de suivre l'évolution temporelle de l'hélicité entre deux sous volumes adjacents. Cela peut permettre par exemple de mieux comprendre comment l'hélicité est transférée de la zone convective jusqu'à l'atmosphère solaire. L'étude de la conservation de l'hélicité magnétique peut donc bénéficier de notre nouveau formalisme. En effet jusqu'à présent, la conservation de l'hélicité a été étudiée en comparant l'hélicité injectée dans un domaine et l'hélicité accumulée dans celui-ci (e.g. [Pariat et al. 2015](#)). On peut désormais rajouter le volume d'où provient l'hélicité injectée pour étudier la relation entre les flux à l'interface des deux volumes et leur relation avec la conservation de l'hélicité.

Additivity of relative magnetic helicity in finite volumes

Gherardo Valori¹, Pascal Démoulin², Etienne Pariat², Anthony Yeates³, Kostas Moraitis², and Luis Linan²

¹ University College London, Mullard Space Science Laboratory, Holmbury St. Mary, Dorking, Surrey, RH5 6NT, U.K. e-mail: g.valori@ucl.ac.uk

² LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

³ Department of Mathematical Sciences, Durham University, Durham, DH1 3LE, UK

Received ***; accepted ***

ABSTRACT

Context. Relative magnetic helicity is conserved by magneto-hydrodynamic evolution even in the presence of moderate resistivity. For that reason, it is often invoked as the most relevant constraint to the dynamical evolution of plasmas in complex systems, such as solar and stellar dynamos, photospheric flux emergence, solar eruptions, and relaxation processes in laboratory plasmas. However, such studies often indirectly imply that relative magnetic helicity in a given spatial domain can be algebraically split into the helicity contributions of the composing subvolumes, *i.e.*, that it is an additive quantity. A limited number of very specific applications have shown that this is not the case.

Aims. Progress in understanding the non-additivity of relative magnetic helicity requires removal of restrictive assumptions in favour of a general formalism that can be used both in theoretical investigations as well as in numerical applications.

Methods. We derive the analytical gauge-invariant expression for the partition of relative magnetic helicity between contiguous finite-volumes, without any assumptions on either the shape of the volumes and interface, or the employed gauge.

Results. The non-additivity of relative magnetic helicity in finite volumes is proven in the most general, gauge-invariant formalism, and verified numerically. More restrictive assumptions are adopted to derive known specific approximations, yielding a unified view of the additivity issue. As an example, the case of a flux rope embedded in a potential field shows that the non-additivity term in the partition equation is, in general, non-negligible.

Conclusions. The non-additivity of relative magnetic helicity can potentially be a serious impediment to the application of relative helicity conservation as a constraint to the complex dynamics of magnetized plasmas. The relative helicity partition formula can be applied to numerical simulations to precisely quantify the effect of non-additivity on global helicity budgets of complex physical processes.

Key words. Magnetic fields, Magnetohydrodynamics (MHD), Sun: magnetic fields, Sun: corona, Methods: analytical, Methods: numerical

1. Introduction

Magnetic helicity is a general measure of the complexity of magnetic fields that concisely expresses the amount of twist, writhe, and mutual winding of field lines in a given configuration (Elsasser 1956; Berger 1999). When applied to magnetized plasmas, the concept of helicity acquires the very special role of an integral of motion. Intuitively, the reason for that is that, as Alfvén's theorem demonstrates, in ideal magneto-hydrodynamics the topology of the magnetic field cannot be changed by plasma motions. As ideal evolution cannot change the field topology, and therefore the field lines' entanglement, magnetic helicity is conserved in dissipationless (ideal) plasmas (Woltjer 1958), and nearly conserved in mildly collisional ones (Matthaeus & Goldstein 1982; Berger 1984). From a different perspective, the inverse cascade that characterizes magnetic helicity (see, *e.g.*, Frisch et al. 1975; Alexakis et al. 2006; Müller & Malapaka 2013), as opposed to the direct cascade of magnetic energy towards the small dissipative scales, is often invoked as the underlying paradigm behind the appearance of large-scale magnetic fields (see, *e.g.*, Antiochos 2013). Taken together, the conservation and inverse-cascade properties give magnetic helicity a unique power to describe the evolution of magnetized plasma.

The concept of magnetic helicity is very general, and the wide applicability of magneto-hydrodynamics makes helicity a cross-disciplinary tool. In the solar context, for instance, it was applied to topics such as dynamos (Brandenburg & Subramanian 2005), reconnection (Del Sordo et al. 2010), fluxes of helicity through the photosphere (Pariat et al. 2005; Démoulin & Pariat 2009; Schuck & Antiochos 2019), the distribution of helicity in the corona (Yeates & Hornig 2016), the initiation of coronal mass ejections (Pariat et al. 2017; Thalmann et al. 2019) and their link to interplanetary coronal mass ejection (Nakwacki et al. 2011; Temmer et al. 2017), just to name a few examples. All these type of studies are related to each other by treating different aspects of the generation and evolution of the solar magnetic field that are constrained by the conservation of magnetic helicity.

Magnetic helicity is expressed as the volume integral of the magnetic field and its vector potential (see Eq. (1) below), and is therefore gauge-dependent, unless the considered volume is bounded by a magnetic flux surface. Such a requirement is generally not satisfied by natural plasmas, nor in numerical simulations. In order to overcome this limitation, Berger & Field (1984) and Finn & Antonsen (1985) introduced the concept of *relative* magnetic helicity, where the helicity in an arbitrarily

shaped finite volume is computed with respect to a reference field that has specific properties at the boundary. In this way, the values obtained by the volume integral are made independent from the details used in the vector potential computation, *i.e.*, are gauge-invariant.

Insofar as the different processes involved can be described by magneto-hydrodynamics, the helicity of the field generated in the interior of the Sun must be conserved during the buoyant phase, through its rearrangement during the emergence through the photospheric layer forming long-lived coronal structures that finally erupt (see *e.g.*, Priest et al. 2016), to its propagation through interplanetary space (*e.g.*, Démoulin et al. 2002; Green et al. 2002; Nindos et al. 2003; Thalmann et al. 2019). In principle, a budget of (relative) magnetic helicity can be built that accounts for the transformation of the magnetic field from the interior of the Sun up to transient perturbations of interplanetary coronal mass ejections (*e.g.*, Berger & Ruzmaikin 2000; Démoulin et al. 2016). To exploit such a remarkable property requires the quantitative separation and comparison of, *e.g.*, the helicity emerged in the corona from the helicity left under the photosphere, or the helicity ejected as a coronal mass ejection (and probed at the spacecraft position) from that left behind on the Sun.

Numerical simulations of different degrees of realism are available for all those processes. However, there is a principal difficulty in separating the helicity into subvolume contributions: a limited number of very specific applications (Berger & Field 1984; Longcope & Malanushenko 2008) have shown that the sum of the relative helicity in two contiguous subvolumes is not simply equal to the helicity of the total volume. In this sense, relative magnetic helicity is not an algebraically additive quantity. This is a serious impediment to the exploitation of the conservation principle in building global budgets of relative magnetic helicity. In addition, the discussion of the additivity issue by Berger & Field (1984) applies to volumes that are either unbounded or bounded by a flux surface, which are conditions that are not normally satisfied in numerical simulations. Similarly, Longcope & Malanushenko (2008) proposes an extension of the formalism in Berger & Field (1984) that is intended to be applied to the finite volumes of numerical simulations, but still basically considers a coronal volume that is bounded above by a flux surface. Finally, the choice of gauge made in Berger & Field (1984) and Longcope & Malanushenko (2008) is only one of the possibilities for discussing the non-additivity property, which may not be always available to specific applications where the gauge choice is limited by other factors (*e.g.*, by numerical precision).

The main goal of this work is to derive general equations for the additivity of the relative magnetic helicity in finite volumes, and to provide a gauge-invariant expression for the non-additive terms. In particular, the additivity problem is here formulated as a partition problem between two subvolumes that are contiguous and share a common boundary as, *e.g.*, in the flux emergence process where helicity is transferred from a sub-photospheric volume to the coronal volume. The generality of our treatment is such that, on the one hand, it allows us identify the reason for the non-additivity in a general way. On the other hand, our method can be easily adapted to different geometries and gauge choices, allowing for straightforward applications to numerical simulations.

In Sect. 2 we discuss the nature of the additivity problem; we then derive the general partition equation without any assumptions on either the shape of the volumes and interface, or the employed gauge. Section 3 gives a brief overview of how the partition equation is modified by the choice of commonly used

gauges, which are then applied in Sect. 4 to derive known expressions for the partition formula that are used in the literature. A numerical application to a solution of the force-free equation is used in Sect. 5 to verify the accuracy of the partition formula and to test the importance of the non-additive term with respect to the helicity of the field. Finally, in Sect. 6 we summarize our results, discuss their implication for the definition of the relative magnetic helicity, and propose a number of applications of our formalism.

2. Partition of helicity between two volumes

2.1. General definitions

As usual, for a magnetic field \mathbf{B} and its associated vector potential \mathbf{A} , we define the gauge-dependent magnetic helicity \mathcal{H} in a volume \mathcal{V} as

$$\mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d\mathcal{V}, \quad (1)$$

and the gauge-invariant relative magnetic helicity (Finn & Antonsen 1985) as

$$H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) \, d\mathcal{V}, \quad (2)$$

where the field \mathbf{B}_p of vector potential \mathbf{A}_p satisfies

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_p|_{\partial\mathcal{V}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}} \quad (3)$$

on the boundary $\partial\mathcal{V}$, with $\hat{\mathbf{n}}$ the external normal to $\partial\mathcal{V}$. By construction, $\partial\mathcal{V}$ is a flux surface for the field $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$. Any reference field that satisfies Eq. (3), and the solenoidal condition $\nabla \cdot \mathbf{B}_p = 0$, ensures the gauge-invariance of Eq. (2). In this work we assume that all magnetic fields satisfy the solenoidal condition exactly. A discussion of the consequences of the violation of the solenoidal condition in numerical computation of helicity and energy can be found in Valori et al. (2016) and Valori et al. (2013), respectively.

In principle, any field that satisfies Eq. (3) can be used as reference field, with Eq. (2) defining the helicity relative to the chosen reference field. We adopt the common choice of a potential field as reference field \mathbf{B}_p . In this case, \mathbf{B}_p is written in function of the scalar potential ϕ as $\mathbf{B}_p = \nabla\phi$, where ϕ satisfies the Laplace equation $\Delta\phi = 0$ in \mathcal{V} with the Neumann boundary condition

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi|_{\partial\mathcal{V}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}}, \quad (4)$$

such that the gauge-invariance requirement Eq. (3) is satisfied. Equation (4) uniquely defines \mathbf{B}_p in \mathcal{V} , and defines ϕ in \mathcal{V} up to an additive constant. The potential field defined by Eq. (4) has the minimal energy for the given distribution of the normal component of the field on the boundary, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}}$, see, *e.g.*, Valori et al. (2013). Therefore, this customary choice is not only convenient in its simplicity, but carries also a deeper physical meaning of the potential field being the “ground state” for a given distribution of field on the boundary, especially within the magneto-hydrodynamical framework, see *e.g.*, Schuck & Antiochos (2019). Moreover, if \mathbf{B}_p is the potential field in \mathcal{V} , then \mathbf{B}_j is the part of the magnetic field that is related to the presence of currents in \mathcal{V} , sometimes referred to as the current-carrying part of the field. We adopt the potential field as defined above as reference field in the remainder of the article, but we explicitly discuss the consequences of this choice on our results, when relevant.

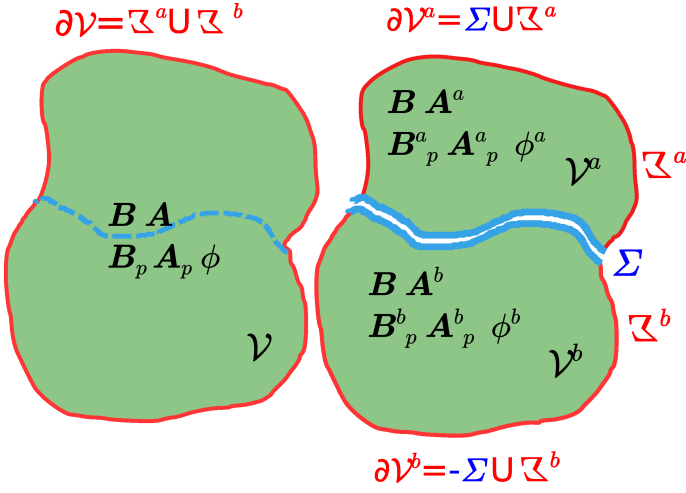


Fig. 1. Sketch of the volume splitting: an interface Σ splits the finite volume \mathcal{V} bounded by $\partial\mathcal{V}$ into two subdomains, \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , each one bounded by the surface $\partial\mathcal{V}^a$ and $\partial\mathcal{V}^b$, respectively.

The relative magnetic helicity, Eq. (2), can be recast as the sum of three non-gauge-invariant terms:

$$H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}) - \mathcal{H}(\mathbf{B}_p, \mathcal{V}) + \mathcal{H}_{\text{mix}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p, \mathcal{V}), \quad (5)$$

i.e., as the difference between the magnetic helicity of \mathbf{B} and \mathbf{B}_p plus a “mixed term” defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{mix}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p, \mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_p) \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (6)$$

where $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} \, dS$ is the oriented infinitesimal surface element on $\partial\mathcal{V}$.

2.2. Volume partition

We consider the case of two contiguous volumes of finite size and $\mathcal{V} = \mathcal{V}^a \cup \mathcal{V}^b$, such that \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b are bounded by the surfaces $\partial\mathcal{V}^a$ and $\partial\mathcal{V}^b$ with external normals $\hat{\mathbf{n}}^a$ and $\hat{\mathbf{n}}^b$, respectively. Figure 1 shows a graphical representation of the volumes involved. The boundary surface of each sub-volume can be split into an interface (Σ) plus a non-interface (\mathcal{Z}) contribution as

$$\partial\mathcal{V}^a = \Sigma^a \cup \mathcal{Z}^a, \quad (7)$$

$$\partial\mathcal{V}^b = \Sigma^b \cup \mathcal{Z}^b, \quad (8)$$

with the boundary $\partial\mathcal{V}$ of the volume \mathcal{V} given by

$$\partial\mathcal{V} = \mathcal{Z}^a \cup \mathcal{Z}^b. \quad (9)$$

The interface Σ^a and Σ^b represents the same surface but differ for the orientation of the normal, $\hat{\mathbf{n}}^a = -\hat{\mathbf{n}}^b$. When the orientation of the normal is not required we drop the superscript from Σ . In order to have a more compact notation, we also introduce

$$Z^{ab} = \begin{cases} Z^a & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}^a \\ Z^b & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}^b \end{cases} \quad (10)$$

where Z is any function or vector defined separately in \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b .

All volumes are assumed to be simply connected, to avoid the difficulties of multi-valued gauge functions, but no assumption is made on the shape of the volumes or of the interface. No

further assumption is made at this point about the geometry of the system.

For each of the three considered volumes \mathcal{V} , \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , the relative magnetic helicity, Eq. (2), can be computed. The question that we wish to address in this section is: what is the general relation between the three correspondent relative helicity values $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$, $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$, and $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$?

2.3. Difference in the reference fields

The relative helicity Eq. (2) is gauge-invariant because the reference potential field \mathbf{B}_p for the full volume \mathcal{V} is defined by Eq. (4), thus satisfying the gauge-invariance condition Eq. (3). Similarly, the computation of the relative helicity for the two subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b requires to define reference fields that fulfil the same condition, Eq. (3), but in each subvolume separately. In other words, the (potential) reference fields \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b are uniquely defined by $\Delta \phi^a = 0$ in \mathcal{V}^a and the boundary condition

$$\hat{\mathbf{n}}^a \cdot \nabla \phi^a|_{\partial\mathcal{V}^a} = \hat{\mathbf{n}}^a \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}^a}, \quad (11)$$

and $\Delta \phi^b = 0$ in \mathcal{V}^b and the boundary condition

$$\hat{\mathbf{n}}^b \cdot \nabla \phi^b|_{\partial\mathcal{V}^b} = \hat{\mathbf{n}}^b \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}^b}, \quad (12)$$

respectively. Notice that, because of the way the volume \mathcal{V} is split, the boundary conditions for the above Laplacian equations on the non-interface boundaries \mathcal{Z}^{ab} of \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b are the same as for \mathbf{B}_p (see Fig. 1).

In order to understand the differences between the reference fields, let us first consider a special case: if $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_p$ on the interface Σ , then the normal components of \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b match that of \mathbf{B}_p on the interface Σ too. Then it follows from the uniqueness of the solution to the Laplace problems that, in this special case, it is $\mathbf{B}_p^a = \mathbf{B}_p$ in \mathcal{V}^a and $\mathbf{B}_p^b = \mathbf{B}_p$ in \mathcal{V}^b . The combined field \mathbf{B}_p^{ab} as defined by Eq. (10) is continuous across Σ , and we have $\mathbf{B}_p^{ab} = \mathbf{B}_p$.

However, for a generic \mathbf{B} field, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}$ is different from $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_p$ on the interface Σ . Therefore, in the general case, the solutions of the Laplacian equations in \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b provide potential fields \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b that are different from \mathbf{B}_p in each of the subvolumes. Moreover, the transverse components of \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b are in general different on both sides of the interface Σ . The corresponding field \mathbf{B}_p^{ab} in the full volume \mathcal{V} is not fully potential but it contains a current sheet on Σ . As we show in the next section, this difference between the reference field in \mathcal{V} and in the subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b is at the core of the non-additivity of relative magnetic helicity.

It is worth noting that the difference between \mathbf{B}_p and \mathbf{B}_p^a (respectively, \mathbf{B}_p^b) in \mathcal{V}^a (respectively, \mathcal{V}^b) is not a consequence of the choice of potential fields as reference fields. Indeed, the same difference is to be expected for other non-potential reference fields. This is because, on the one hand, the gauge-invariance condition Eq. (3) needs to be imposed on the interface Σ for the reference fields of \mathcal{V}^a and of \mathcal{V}^b . On the other hand, Σ is not a boundary of \mathcal{V} , and therefore the reference field of \mathcal{V} cannot be specified on Σ . We conclude that, in general, the reference field \mathbf{B}_p in \mathcal{V} is not derived from the same information as \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b , and therefore \mathbf{B}_p is not simply the juxtaposition of the reference fields \mathbf{B}_p^a in \mathcal{V}^a and \mathbf{B}_p^b in \mathcal{V}^b . This, and the resulting discontinuity between \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b across Σ discussed above, are direct consequences of the property of Eq. (3) that reference fields must

fulfil in order for the relative magnetic helicity, Eq. (2), to be gauge-invariant.

Before we consider the relative helicity, let us first briefly discuss the consequences of the volume splitting on the magnetic energy

$$\mathcal{E}(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} B^2 \, d\mathcal{V}, \quad (13)$$

and the relative (or free) magnetic energy

$$E(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} (B^2 - B_p^2) \, d\mathcal{V}. \quad (14)$$

By introducing the volume splitting of Sect. 2.2 to the free energy we have

$$E(\mathbf{B}, \mathcal{V}) - E(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a) - E(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} ((B_p^{ab})^2 - B_p^2) \, d\mathcal{V}. \quad (15)$$

Since the right-hand side of Eq. (15) is in general non-vanishing, then the free energy in \mathcal{V} is not simply equal to the sum of the free energies in the composing subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , *i.e.*, the free energy is a non-additive quantity. In particular, the difference of reference magnetic fields in \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b from the one in \mathcal{V} implies the non-additivity of the relative energy, while the energy \mathcal{E} is manifestly additive.

2.4. Relative Magnetic helicity of contiguous volumes: General formulation

Without loss of generality, the relative magnetic helicity in \mathcal{V} can be formally written as

$$H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a) + H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b) + \delta H \quad (16)$$

with

$$\begin{aligned} \delta H &= H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) - H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a) - H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b) \\ &= \delta \mathcal{H} - \delta \mathcal{H}_p + \delta \mathcal{H}_{\text{mix}} \end{aligned} \quad (17)$$

where we defined

$$\delta \mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}) - \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a) - \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b) \quad (18)$$

$$\delta \mathcal{H}_p = \mathcal{H}(\mathbf{B}_p, \mathcal{V}) - \mathcal{H}(\mathbf{B}_p^a, \mathcal{V}^a) - \mathcal{H}(\mathbf{B}_p^b, \mathcal{V}^b) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{\text{mix}} &= \mathcal{H}_{\text{mix}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p, \mathcal{V}) - \mathcal{H}_{\text{mix}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p^a, \mathcal{V}^a) \\ &\quad - \mathcal{H}_{\text{mix}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p^b, \mathcal{V}^b). \end{aligned} \quad (20)$$

Equation (16) is the result of a simple reorganization that collects in δH all contributions that make the relative magnetic helicity a non-additive quantity and, by grouping similar terms together, allows for cancellations between them. In Appendix A we show that, by using Eqs. (1, 6) in Eq. (17), we obtain

$$\delta \mathcal{H} = \int_{\Sigma} \chi (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^a), \quad (21)$$

$$\delta \mathcal{H}_p = \delta \mathcal{H}_p^{\text{Coul}} + \delta \mathcal{H}_p^{\text{Surf}} \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_p^{\text{Coul}} &= \int_{\mathcal{V}^a} \phi^a (\nabla \cdot \mathbf{A}_p^a) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}^b} \phi^b (\nabla \cdot \mathbf{A}_p^b) \, d\mathcal{V} \\ &\quad - \int_{\mathcal{V}} \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}_p) \, d\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_p^{\text{Surf}} &= \int_{\partial \mathcal{V}} (\phi \mathbf{A}_p - \phi^{ab} \mathbf{A}_p^{ab}) \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad - \int_{\Sigma} (\phi^a \mathbf{A}_p^a - \phi^b \mathbf{A}_p^b) \cdot d\mathbf{S}^a, \end{aligned} \quad (24)$$

and

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{\text{mix}} &= \int_{\partial \mathcal{V}} (\mathbf{A}^{ab} \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^{ab})) \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad + \int_{\Sigma} [\mathbf{A}^a \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^a) - \mathbf{A}^b \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^b)] \cdot d\mathbf{S}^a \\ &\quad - \int_{\Sigma} \chi (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^a), \end{aligned} \quad (25)$$

where we use the notation of Eq. (10) for all fields defined in the subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , and χ is the gauge function defined by

$$\nabla \chi = (\mathbf{A}^b - \mathbf{A}^a) \Big|_{\Sigma}, \quad (26)$$

with χ a function of the interface variables only, see Eq. (A.22). On the interface Σ , the infinitesimal oriented surface was chosen to be that of $d\mathbf{S}^a$. The study of the properties of Eqs. (16 - 25) is the main focus of this article.

The first and most important result is that Eq. (16) shows in the most general way that the relative magnetic helicity is not an algebraically additive quantity: The relative magnetic helicity in the entire volume \mathcal{V} is not simply the sum of the relative helicity of the composing subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , but a general non-vanishing additional term, δH , is present. Note that, since the left-hand side (LHS) and the first two terms on the right-hand side (RHS) of Eq. (16) are gauge-invariant, then δH must be globally gauge-invariant too. Appendix B outlines how to see this directly from the terms in δH .

The gauge-invariance of Eq. (16) implies that the non-additivity of relative magnetic helicity is a general property: a special gauge that makes the relative helicity additive (or even partitionable between volumes) does not exist. This does not rule out that a very special combination of geometry, choice of the reference field, and boundary conditions may exist in which relative magnetic helicity is additive, but this is not true in general.

Finally, we notice that Eqs. (21 - 25) contain three types of terms in the representation that we have chosen, namely volume, interface, and outer boundaries (or non-interface) surface terms. This formalism allows for a more direct treatment of specific limits in the next sections, but is by no means the only possible one. Let us now discuss the individual non-additivity terms.

2.4.1. $\delta \mathcal{H}$: Non-additivity of the magnetic helicity

The non-additive term $\delta \mathcal{H}$ of Eq. (21) is an interface term that, for arbitrary \mathbf{B} , depends solely on the gauge specification, and can be therefore eliminated by specific gauge choices for \mathbf{A}^a and \mathbf{A}^b that insure $\chi = 0$ on Σ , see Sect. 3.4.

2.4.2. $\delta \mathcal{H}_p$: Non-additivity of the helicity of the reference fields

The $\delta \mathcal{H}_p$ in Eq. (22) is composed of a volume and surface terms. The volume term, $\delta \mathcal{H}_p^{\text{Coul}}$ contains the Coulomb gauge conditions for the three reference fields, a gauge that can be chosen to have this term vanish. It is interesting to note that the Coulomb conditions appear explicitly only in relation to reference fields, and not for any of the other vector potentials. The same happens for the time evolution of the relative magnetic helicity in Eq. (25) of Pariat et al. (2015), and in Eqs. (13,41) regulating the evolution of the current-carrying and volume-threading relative magnetic helicity derived by Linan et al. (2018). All these cases express helicity contributions due to sources in the vector

potentials of the potential fields, and thereby in the helicity, of the reference potential fields.

While $\delta\mathcal{H}_p^{Coul}$ accounts for volume differences, the surface term $\delta\mathcal{H}_p^{Surf}$ in Eq. (24) contains interface and non-interface contributions that depend on the components of vector potentials of the reference fields that are normal to the boundaries, and on the scalar potentials of the same reference fields. Since the reference fields in \mathcal{V} and \mathcal{V}^a (\mathcal{V} and \mathcal{V}^b , respectively) do *not* represent the same field (see Sect. 2.3), there is no general gauge relation between the vector potentials \mathbf{A}_p and \mathbf{A}_p^a (\mathbf{A}_p and \mathbf{A}_p^b , respectively) that can be used to simplify these expressions.

The last term in Eq. (24) is an interface term accounting for the discontinuity of the transverse components in the reference fields at Σ . As discussed in Sect. 2.3, this term can be seen as the contribution due to a surface current generated by the discontinuity of the transverse components of \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b across Σ , see also Sect. 4.1.

2.4.3. $\delta\mathcal{H}_{mix}$: Non-additivity of the mixed helicity

The first two integrals in Eq. (25) are directly related to the transverse components of the vector potentials at the boundaries. The additional complication of Eq. (25) with respect to the simpler Eq. (6) is that such integrals involve cross interactions between different vector potentials.

The last term in Eq. (25) is similar to that in $\delta\mathcal{H}$, but involves \mathbf{B}_p rather than \mathbf{B} , and similar considerations hold. Since, in general, \mathbf{B} and \mathbf{B}_p differ on Σ , then the combination of these two terms is nonzero, and it is related to the current-carrying part of the field, \mathbf{B}_j . Unless the gauge choices for \mathbf{A}^a and \mathbf{A}^b ensure $\chi = 0$, the only other case where the two terms cancel each other is that $\mathbf{B} = \mathbf{B}_p$ on Σ , which, according to the discussion in Sect. 2.3, is a very special case.

In summary, the non-additivity of the relative helicity H has the same origin as that of the relative energy E , a difference of reference field in each subvolume with the one in the full volume. This is the case even when the lowest energy state, the potential field, is selected as reference field. Still, the non-additivity terms of H are much more complex than the one for E , as they also involve the vector potentials.

3. Applications of the partition equation with specific gauges

Equation (16) is a gauge-invariant, general expression of the relative helicity partition that does not make any assumption about the specific gauges and boundary conditions that are used to compute the vector potentials. Such specifications are however required for its practical application.

The constraints on the scalar and vector potentials defined so far derive basically from the gauge-invariance constraint, see Eq. (3) and Sect. 2.3. In particular, the scalar potentials are determined by solving the Poisson problems Eqs. (A.8, A.9) that define ϕ , ϕ^a , and ϕ^b each modulo a constant. The vector potentials must obey the curl relations with the fields, Eq. (A.2). In addition, the connection between vector potentials of different volumes are prescribed by Eq. (26) (or, more specifically, Eq. (A.22)). This set of constraints is not sufficient to determine the vector potentials.

A gauge should be properly defined as the set of equations and boundary conditions that uniquely determines the scalar and vector potentials for a given magnetic field \mathbf{B} in \mathcal{V} . In this sense, in Sect. 5 we refer different sets of different boundary conditions

for the vector potentials as different gauges. In more relaxed sense, we often use the term gauge to mean a group of gauges, as when we speak of the ‘‘Coulomb gauge’’ meaning the $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ condition only. This is rather a family of gauges, to which additional boundary conditions must be added to uniquely determine the vector potentials.

Insofar they do not conflict with the other gauge constraints, such additional equations and/or boundary conditions are arbitrary, and, thanks to gauge invariance, they do not affect the outcome of Equation (16).

3.1. Coulomb gauge

Assuming that all three vector potentials are solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = \nabla \cdot \mathbf{A}_p^a = \nabla \cdot \mathbf{A}_p^b = 0$, then $\delta\mathcal{H}_p^{Coul} = 0$. In addition, Eq. (A.3) in conjunction with the Coulomb gauge, restricts the possible choice of the gauge functions to the class of functions that satisfy $\Delta\chi^a = \Delta\chi^b = 0$.

3.2. DeVore-Coulomb gauge

The DeVore gauge (DeVore 2000; Valori et al. 2012; Moraitis et al. 2018) sets one of the components of the vector potential equal to zero. For concreteness, let us assume that Σ is a plane parallel to the xy -plane, and set $A_z = 0$, as in Valori et al. (2012). The main advantage of the DeVore gauge is that it is very accurate and fast to compute numerically (Valori et al. 2016), since the vector potentials are computed by one-dimensional vertical integration of the magnetic field starting from one of the boundaries. A particularly useful formulation of the DeVore gauge requires, in addition, that the two-dimensional integration functions appearing in the computation of the vector potential of the potential field are solenoidal (see Section 5 in Valori et al. (2012)). In this case, the DeVore gauge ensures that $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$, *i.e.*, it is a DeVore-Coulomb gauge for the vector potential. If the DeVore-Coulomb gauge is adopted for all three vector potentials \mathbf{A}_p , \mathbf{A}_p^a and \mathbf{A}_p^b , then also in this case $\delta\mathcal{H}_p^{Coul} = 0$.

3.3. Boundary conditions

Before analyzing further Eq. (16), let us first consider the relative magnetic helicity in a single volume as given in Eq. (5). A commonly used condition that is often used in combination with the Coulomb gauge for \mathbf{A}_p (see *e.g.*, Berger 1999; Thalmann et al. 2011) is that

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}_p, \quad (27)$$

i.e., that the vector potential of field and reference field have the same tangential components on the boundary of the considered volume. Such a boundary condition is allowed since Eq. (27) implies Eq. (3). In this case, $\mathcal{H}_{mix}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p, \mathcal{V})$ vanishes by Eq. (6) and the relative magnetic helicity Eq. (2) equals the difference between the helicity of the field and the helicity of the relative reference field, *i.e.*,

$$H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}) - \mathcal{H}(\mathbf{B}_p, \mathcal{V}) \quad (28)$$

which is the definition of relative helicity predating Eq. (2), used *e.g.*, in Berger (1984) and Jensen & Chu (1984). In the practical computation of vector potentials, Eq. (27) is often indirectly imposed by assuming that $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p$ on $\partial\mathcal{V}$ as a boundary condition for \mathbf{A} . We stress, however, that the boundary condition in Eq. (27) is not compatible with the DeVore gauge, as shown by

Eq. (31) of Valori et al. (2012). Similarly, it is not possible, in general, to have $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} = 0$ in Eq. (25) in this gauge.

A special boundary condition is when $\partial\mathcal{V}$ is a flux surface. In this case, from $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0$, it follows that \mathbf{A} can be written as $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}}A_n + \nabla_{\perp}\chi$ for some function χ , where ∇_{\perp} is the gradient normal to $\hat{\mathbf{n}}$. Then, substituting in Eq. (6), we can extend the $\nabla_{\perp}\chi$ to a full gradient without changing the integral, and we obtain

$$\mathcal{H}_{\text{mix}} = \int_{\partial\mathcal{V}} \nabla \times (\chi\mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial\mathcal{V}} \chi\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}, \quad (29)$$

where the last term on the RHS vanishes since, from Eq. (3), $\partial\mathcal{V}$ is a flux surface of \mathbf{B}_p too. If the flux surface $\partial\mathcal{V}$ is closed, then the first term on the RHS of Eq. (29) vanishes too, and $\mathcal{H}_{\text{mix}}=0$ in this case. Moreover, since $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0$ in Eq. (4), then $\mathbf{B}_p = \mathbf{0}$, and $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V})$.

If the boundary condition of Eq. (27) is used in the computation of the three pairs vector potentials $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_p)$, $(\mathbf{A}^a, \mathbf{A}_p^a)$, and $(\mathbf{A}^b, \mathbf{A}_p^b)$, then Eq. (20), with Eq. (6) defining \mathcal{H}_{mix} , directly shows that

$$\mathcal{H}_{\text{mix}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p, \mathcal{V}) = \mathcal{H}_{\text{mix}}^a(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p^a, \mathcal{V}^a) = \mathcal{H}_{\text{mix}}^b(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p^b, \mathcal{V}^b) = 0, \quad (30)$$

and thus $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} = 0$. The same result can be also obtained directly from Eq. (25) using Eq. (A.3) to write $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{A}_p^{\text{ab}} + \nabla\chi) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}_p$.

3.4. Computation of the gauge function χ

The gauge function χ defined by Eq. (26) and appearing in Eqs. (21, 25) can be computed by direct integration, using the fundamental theorem of calculus for line integrals as

$$\chi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{a}) + \int_{C(\mathbf{a}, \mathbf{x})} (\mathbf{A}^b - \mathbf{A}^a) \cdot d\mathbf{l}, \quad (31)$$

for any curve $C(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ on Σ connecting points \mathbf{a} to \mathbf{x} , with $\chi(\mathbf{a}) = 0$ as a general prescription.

In general, the transverse components of \mathbf{A}^a and \mathbf{A}^b on Σ are different, and χ is a non-vanishing function of the Σ variables. However, depending on the gauge, special boundary conditions on \mathbf{A}^a and \mathbf{A}^b can be imposed such that $\chi = 0$. We give examples of such boundary conditions in Sect. 5 for the DeVore gauge.

4. Relation with other approaches

We show in this section how our general formula Eq. (16), in the proper limits, reproduces relevant results on helicity partition known from the literature.

4.1. Berger & Field (1984)'s additivity formula

In the second part of Section 3 Berger & Field (1984) derive a relative helicity summation equation for two domains, their Eq. (45), which in our notation reads

$$\mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a) + \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b) = H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a) + H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b) + \mathcal{H}(\mathbf{B}_p^a, \mathcal{V}^a) + \mathcal{H}(\mathbf{B}_p^b, \mathcal{V}^b). \quad (32)$$

This equation is less general than our Eq. (16) because, first, it assumes that the combined domain \mathcal{V} is magnetically closed; second, it adopts the definition of relative magnetic helicity Eq. (28), rather than the more general Eq. (2); third, Eq. (32) is

an addition formula, rather than a partition one like our Eq. (16), in the sense that Berger & Field (1984) are not concerned with the general relation to the relative helicity of the total volume (which indeed does not appear in Eq. (32)). In order to relate Eq. (32) to our Eq. (16) we then assume that (i) $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0$ on $\partial\mathcal{V}$, (ii) both $\mathbf{A}^a \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}^b \times \hat{\mathbf{n}}$ and $\mathbf{A}_p^a \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}_p^b \times \hat{\mathbf{n}}$ on the interface Σ , and (iii) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^a$ in \mathcal{V}^a and $\mathbf{A} = \mathbf{A}^b$ in \mathcal{V}^b . To see that Eq. (16) reduces to Eq. (32) under these conditions, note first that condition (i) implies that $\mathbf{B}_p = \mathbf{0}$ and $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) = \mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V})$, see Sect. 3.3. Adding $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ on both sides of the equation, we can rewrite Eq. (32) as

$$\delta H = \delta\mathcal{H} - \delta\mathcal{H}_p. \quad (33)$$

This would be equivalent to Eq. (16) if $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} = 0$. To see that this follows from conditions (i) and (ii), first note that $\mathcal{H}_{\text{mix}}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_p, \mathcal{V}) = 0$, see Sect. 3.3, so that

$$\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} = - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p^a \cdot d\mathbf{S}^a - \int_{\partial\mathcal{V}^b} \mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p^b \cdot d\mathbf{S}^b, \quad (34)$$

$$= - \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{A}^{\text{ab}} \times \mathbf{A}_p^{\text{ab}} \cdot d\mathbf{S}, \quad (35)$$

where the last step used condition (ii) on Σ . From condition (i) we have that $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}^{\text{ab}} = \hat{\mathbf{n}} \times \nabla\xi$ for some function ξ , so that

$$\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} = \int_{\partial\mathcal{V}} \xi\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (36)$$

So Eq. (45) of Berger & Field (1984) is indeed a special case of our more general Eq. (16). Finally, we can then formally adopt condition (iii), which directly results into $\delta\mathcal{H} = 0$ in Eq. (33). Under the same conditions (i-iii), Berger & Field (1984) also observe that the relative helicity becomes an additive quantity if the interface (our Σ) is a planar or spherical surface, since then $\mathcal{H}(\mathbf{B}_p^a, \mathcal{V}^a) = \mathcal{H}(\mathbf{B}_p^b, \mathcal{V}^b) = 0$.

4.2. The Longcope & Malanushenko (2008) approach

The approach in Longcope & Malanushenko (2008) addresses the partition problem explicitly and, in this sense, is the most relevant to compare with. The definition of relative magnetic helicity adopted by Longcope & Malanushenko (2008) is that of Eq. (28), with $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}_p$ on the boundary of each considered (sub-)volume. From the point of view of the problem formulation, Longcope & Malanushenko (2008) explicitly focus on macroscopic coronal flux tubes that have their bases in the photospheric plane (footprints) and are laterally bounded in the corona by flux surfaces. In our notation, their coronal flux surfaces are our separation interfaces between subvolumes, Σ , whereas their photospheric footprints belong to the \mathcal{Z} portion of the boundary of each subvolume.

For each subvolume, in one of the analysed cases, Longcope & Malanushenko (2008) consider that the reference field is potential and restricted to the subvolume, yielding the additive self-helicity formula (their Eq. (16)). This case shares the same approach (and limitations) to the reference potentials as ours, see discussion in Sect. 2.3. In order to link Eq. (16) in Longcope & Malanushenko (2008) to our Eqs. (21 - 25), let us restrict their notation to two subvolumes only. The first term on the LHS of Eq. (16) in Longcope & Malanushenko (2008) is then the relative magnetic helicity of the entire coronal volume, *i.e.*, the LHS of our Eq. (16). The second term on LHS of Eq. (16) in Longcope & Malanushenko (2008) is the sum of the relative magnetic helicity of the two composing subvolumes, *i.e.*, it is equal to the

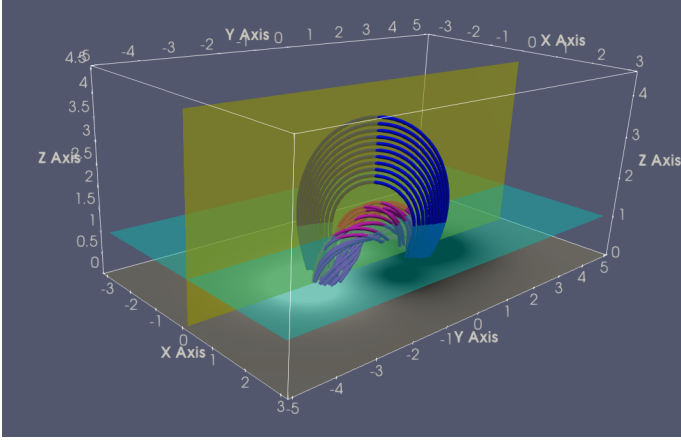


Fig. 2. Selected field lines of the TD equilibrium depicting the flux rope (pink) and the surrounding potential field (blue). The two section planes Σ used in Table 1 are the $z = 1$ plane (cyan) and the $x = 0$ plane (yellow), see Sect. 5 for details. The distribution of the vertical field component at $z = 0$ is shown in greyscale at the bottom.

first two terms in the RHS of our Eq. (16). Then, we are left to show under which conditions $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$ in Eq. (25) is equal to the RHS of Eq. (16) in Longcope & Malanushenko (2008). First, let us keep $\delta\mathcal{H}_p$ in the form given in Eq. (19). Second, adopting the assumption that Σ is a flux surface in Eqs. (21, 25) directly yields $\delta\mathcal{H} = 0$ and

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} &= \int_{\partial\mathcal{V}^a} (\mathbf{A}^a \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^a)) \cdot d\mathbf{S}^a + \int_{a \rightarrow b} \dots, \\ &= \int_{\partial\mathcal{V}^a} \mathbf{A}_p \cdot (\hat{\mathbf{n}}^a \times \mathbf{A}^a) dS \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \mathbf{A}_p^a \cdot (\hat{\mathbf{n}}^a \times \mathbf{A}^a) dS + \int_{a \rightarrow b} \dots, \end{aligned} \quad (37)$$

where the last integral indicates the repetition of all integrals with index $a \rightarrow b$. Since Σ is a flux surface, $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$ vanishes there, see Sect. 3.1. If we then recall that $\hat{\mathbf{n}}^a \times \mathbf{A}^a = \hat{\mathbf{n}}^a \times \mathbf{A}_p^a$ on the photospheric \mathcal{Z} boundary, regrouping $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$ and $\delta\mathcal{H}_p$ terms, we have

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H} &= \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} + \delta\mathcal{H}_p \\ &= \int_{\mathcal{V}^a} (\mathbf{A}_p^a \cdot \mathbf{B}_p^a - \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_p) d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}^a} (\mathbf{A}_p^a \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a \\ &\quad + \int_{a \rightarrow b} \dots, \end{aligned} \quad (38)$$

which is the RHS of Eq. (16) in Longcope & Malanushenko (2008) written in our notation. Therefore, for the special case of two single subvolumes bounded in the corona by flux surfaces, Eqs. (21 - 25) reduce to the self-helicity expression of Eq. (16) in Longcope & Malanushenko (2008).

5. Numerical verification of the partition equation

In this section the partition formula Eq. (16) is verified numerically using the Titov and Démoulin model of a bipolar active region (Titov & Démoulin 1999, hereafter TD).

5.1. Numerical model

The TD model is a parametric solution of the force-free equations that consists of a portion of a circular twisted flux rope embedded in a potential field. The specifications of the considered

Cartesian volume and the parameters of the particular solution employed here are the same as the $N=1$ case in Table 3 of Valori et al. (2016), except for the opposite sign of the twist. Figure 2 shows selected field lines depicting the flux rope and the two sectioning planes discussed below.

The computation of the vector potentials is performed here using the DeVore gauge $A_z = 0$, see Sect. 3.2, as implemented in Valori et al. (2012). The method has two parameters, representing different gauges of the DeVore family, as follows. First, a one-dimensional integral in the z -direction is involved in the computation of the vector potentials. This integral can be performed starting from either the bottom ($bc=b$) or from the top ($bc=t$) of the considered volume, corresponding to Eq. (10) and Eq. (11) of Valori et al. (2012), respectively. Second, two different boundary conditions can be used in the computation of the vector potential at the starting boundary, namely Eqs. (24,25) or Eq. (41) in Valori et al. (2012). As discussed in Sect. 3.2, the latter applied to a potential field results in the DeVore-Coulomb (dVC) gauge. We then use the notation dVC=n (no) and dVC=y (yes) if, respectively, Eqs. (24,25) or Eq. (41) in Valori et al. (2012) are used. Therefore, for each vector potential and volume, a different combination of bc and dVC can be used, effectively testing the gauge dependence of the computed quantities. There are 4 possibilities for each of the six vector potentials, yielding $4^6 = 4096$ possible combinations.

In the following we provide few representative examples of the possible gauge combinations for each realization of volume splitting. For instance, for the test number 2 in Table 1, $bc_{Ap}=[t,t,b]$ (respectively, $bc_A=[t,t,b]$) means that the computation of \mathbf{A}_p and \mathbf{A}_p^a (respectively, \mathbf{A} and \mathbf{A}^a) was performed starting from the top boundary in the volume \mathcal{V} and \mathcal{V}^a , and from the bottom boundary for \mathbf{A}_p^b (respectively, \mathbf{A}^b) in the volume \mathcal{V}^b . The triplets $dVC_{Ap}=dVC_A=[y,y,y]$ mean that Eq.(41) of Valori et al. (2012) was used for the computation of all vector potentials in the three volumes \mathcal{V} , \mathcal{V}^a , and \mathcal{V}^b .

5.2. Numerical verification of Eq. (16)

Table 1 summarizes the results of testing Eq. (16) in two representative realizations of volume splitting: in the first one ($z = 1$, in cyan in Fig. 2) the interface is a horizontal plane cutting through the flux rope at approximately the location of the apex of the flux rope axis. In this realization, most of the flux rope is contained in the lower subvolume \mathcal{V}^a , whereas \mathcal{V}^b mostly contains potential field. The second realization ($x = 0$, in yellow in Fig. 2) is a vertical plane cutting through the flux rope and approximately containing the flux rope axis. In this realization, the flux rope is approximately split symmetrically between the two subvolumes.

In Table 1, $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ and

$$H_{\text{sum}} \equiv H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a) + H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b) + \delta H \quad (39)$$

are, respectively, the LHS and RHS of Eq. (16), computed independently, and

$$\epsilon = 100 * (H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) - H_{\text{sum}}) / H(\mathbf{B}, \mathcal{V}) \quad (40)$$

represents the error of the helicity partition formula Eq. (16) in percentage.

In most of the cases in Table 1, the error ϵ in the partition formula is less than 1%, which clearly verifies that Eq. (16) is correct, and that its numerical implementation is extremely accurate. The first three tests in the $z = 1$ case (test=1,2,3 in Table 1) show that the error ϵ does not depend on the values of the

Table 1. Numerical verification of the partition equation

Test	Σ	$H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$	$H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$	δH	H_{sum}	$H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$	ϵ	bc_{Ap}	bc_A	dVC_{Ap}	dVC_A
1	$z=1$	6.4022	0.3675	0.3887	7.1584	7.2069	0.67	t t b	t t b	y n y	n y n
2	$z=1$	6.4101	0.3767	0.3756	7.1625	7.2052	0.59	t t b	t t b	y y y	y y y
3	$z=1$	6.3943	0.3582	0.3988	7.1514	7.2087	0.79	t t b	t t b	n n n	n n n
4	$z=1$	6.4101	0.3771	0.3764	7.1637	7.2052	0.58	t t t	t t b	y y y	y y y
5	$z=1$	6.4045	0.3672	0.3476	7.1193	7.1730	0.75	b b t	t t b	n n n	n n n
6	$z=1$	6.4218	0.3771	0.3443	7.1433	7.1840	0.57	b b t	t t b	y y y	y y y
7	$z=1$	6.3943	0.3582	0.3988	7.1514	7.2087	0.79	t t b	t t b	n n n	n n n
8	$z=1$	6.4220	0.3767	0.2638	7.0625	7.2052	1.98	t t b	t b b	y y y	y y y
9	$z=1$	6.4047	0.3582	0.2852	7.0481	7.2087	2.23	t t b	t b b	n n n	n n n
10	$x=0$	0.9215	1.0414	5.2347	7.1976	7.2052	0.11	t t b	t t b	y y y	y y y
11	$x=0$	0.9215	0.9638	5.3095	7.1948	7.2052	0.14	t t t	t t b	y y y	y y y
12	$x=0$	0.9215	1.0414	5.2347	7.1976	7.2052	0.11	t t b	t t b	y y y	y y y
13	$x=0$	0.9662	1.0414	5.1834	7.1910	7.2052	0.20	t t b	t b b	y y y	y y y
14	$x=0$	0.9720	0.7803	5.3074	7.0596	7.2087	2.07	t t b	t b b	n n n	n n n

Notes. Numerical verification of Eq. (16) using the TD test sliced with a plane Σ . The column Test labels the different test cases; Σ is the plane interface separating \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b ; $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$ and $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$ are the relative magnetic helicities of the subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , respectively, whereas δH is the non-addictive term; H_{sum} and $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ are the RHS and LHS of Eq. (16), respectively; ϵ is the error in percentage between $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ and H_{sum} as defined in Eq. (40); bc_{Ap} (respectively bc_A) is a triplet representing the integration direction for the computation of the vector potential \mathbf{A}_p (respectively \mathbf{A}) for the volume $\mathcal{V}, \mathcal{V}^a$, and \mathcal{V}^b , respectively; similarly, dVC_{Ap} (respectively dVC_A) is a triplet representing the boundary condition for the computation of the vector potential \mathbf{A}_p (respectively \mathbf{A}) on bc_{Ap} (respectively bc_A), for the volume $\mathcal{V}, \mathcal{V}^a$, and \mathcal{V}^b , respectively. See Sect. 5 for additional details.

dVC triplets, *i.e.*, is similar for both the deVore and the deVore-Coulomb gauges. This remains true for different combinations of the boundary condition bc for the six vector potentials (see tests 4 to 7 in Table 1). In particular, there is no dependence on the bc value for the vector potential of the potential field. The exception is for $bc_A=b$ in \mathcal{V}^a (see tests 8 and 9), where the error ϵ is around 2%. This gauge corresponds to an upward integration in the computation of the vector potential \mathbf{A}^a , *i.e.*, to use Eq. (10) of Valori et al. (2012) for \mathbf{A}^a . In this case, numerical errors that accumulate in the vertical integration end up affecting the accuracy of the gauge function χ , due to Eq. (31). Such analysis is confirmed by the $x = 0$ cases in Table 1 where some of the tests are repeated for the vertical slice of the volume. Therefore, Table 1 shows that our implementation of Eq. (16) can account for the helicity partition with an error typically smaller than 1%.

In order to attain such an accuracy, the computation of the gauge function χ , Eq. (31), was found to be particularly sensitive. For that we computed the line integral analogously to the Appendix 3 of Valori et al. (2013), *i.e.*, such that the integral is the numerical inverse operation of the derivation operator (in our case, a second order central difference scheme). If, for instance, a trapezoidal scheme is used instead, then ϵ can be easily one order of magnitude larger, or even two in some cases.

In terms of relative magnitude, the values of δH compared to the total helicity $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$, *i.e.*, with respect the LHS of Eq. (16), are only about 6% in the $z = 1$ case, but as large as 74% in the $x = 0$ case. This is a first evidence that the relative importance of the non-additive term for a given field depends on how the volume is sliced, and that it can be very significant indeed.

Within a given case, each line in Table 1 corresponds to a different combination of bc and dVC for the six vector potentials, *i.e.*, to a different gauge. Hence, an estimation of the error for Eq. (16) in fulfilling gauge-invariance can be obtained as the standard error of the mean of δH values. Such a statistical error, relative to the mean of δH , is 5% in the $z = 1$ case, where δH values are relatively small, and 0.5% for the $x = 0$ case. Such small variations confirm numerically the gauge-invariance of Eq. (16),

within the gauge-invariant accuracy of the underlining helicity computation method (see also the accuracy tests in Valori et al. (2016)).

As anticipated in Sect. 3.2, some of the gauge combinations in Table 1 would allow for analytical cancellations in Eqs. (21 - 25). For instance, the second and third tests correspond to the condition $\mathbf{A}_p^a = \mathbf{A}^a = \mathbf{A}_p^b = \mathbf{A}^b$ on Σ for identical dVC_{Ap} and dVC_A triplets, which would cancel the first interface term in $\delta \mathcal{H}_{\text{mix}}$, Eq. (25), and set $\chi = 0$ from Eq. (31), yielding $\delta \mathcal{H} = 0$ in Eq. (21) and cancelling the last term in Eq. (25). Similarly, each time a ‘y’ is present in the dVC_{Ap} triplet in Table 1, then the DeVore-Coulomb gauge is imposed on one of the vector potentials, and the corresponding term in $\delta \mathcal{H}_p$ should vanish. We verified that this is indeed the case to high numerical precision, but the numbers in Table 1 are computed always including all terms in Eqs. (21 - 25). Therefore, they account also for small numerical errors deriving, for example, from a non-perfect solenoidal property of the vector potentials.

5.3. Dependence on the interface position

As a first application of the partition formula, Fig. 3 shows the dependence of the different terms in Eq. (16) as a function of the position of the interface. With reference to Table 1, the gauge used for this application is the same as in test number 3, *i.e.*, $bc_{Ap}=bc_A=[t,t,b]$ and $dVC_{Ap}=dVC_A=[n,n,n]$.

The top panel of Fig. 3 refers to a case where the interface is a plane perpendicular to the z -axis. As the interface height changes from $z=0$ to $z=3$, its intersection with the TD flux rope rises from the legs, through the apex of the flux rope’s axis at $z = 1$, until the interface is above the flux rope’s top. To some extent, this numerical experiment is relevant to the study of flux emergence, as it simulates, for decreasing z , the idealized kinematic emergence of a twisted flux tube into the coronal volume, \mathcal{V}^b .

As the height of the interface raises (top panel of Fig. 3), the helicity $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$ of the lower volume \mathcal{V}^a (orange curve) and

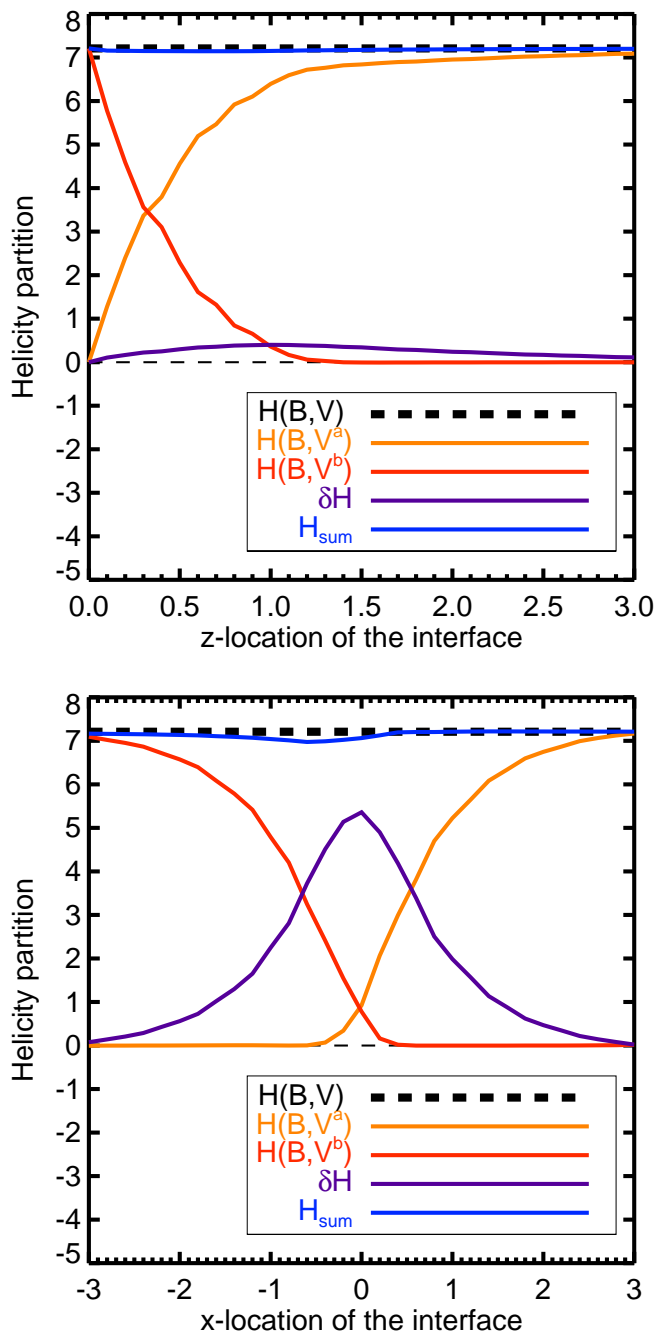


Fig. 3. Helicity partition, Eq. (16), for the TD volume split with an interface plane perpendicular to the z -axis (top panel) and to the x -axis (bottom panel), as a function of the interface position. Symbols are the same as in Table 1, see also Sect. 5 for details.

that $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$ of the upper volume \mathcal{V}^b (red curve) evolve almost perfectly anti-symmetrically: as \mathcal{V}^a includes more and more of the flux rope, its helicity $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$ increases, whereas $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$ decreases of a comparable amount. When the interface plane is placed at $z = 0.3$, the helicity is almost equally distributed between the two subvolumes. The non-additive term δH (violet curve) is always small for all heights of the interface, with a maximum of 6% of $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ at $z \simeq 1$. The accuracy of Eq. (16) is basically unaffected by the interface position, and H_{sum} (blue curve) overlaps $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ (dashed black curve) for all positions of the interface. On the grounds of this first experiment, one

would be tempted to say that the non-additivity term δH tends to be significantly smaller than the helicity of the composing subvolumes.

The bottom panel of Fig. 3 shows a similar experiment but with a vertical plane (perpendicular to the x -axis) that shifts from one side to the other of the flux rope. The change in the helicity of the subvolumes in this case is very different, as it involves a significant variation of δH too. As the interface position moves from $x = -3$ to $x = 0$, \mathcal{V}^a increases at the expense of \mathcal{V}^b . In this interval, $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$ (red curve) decreases of the same amount that δH (violet curve) increases, whereas $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$ (orange curve), which contains only potential field, is zero, until $x \simeq -0.3$ where it starts rapidly rising. The TD solution is line-symmetric with respect to the z -axis, therefore a symmetric evolution is present for $x > 0$ in the bottom panel of Fig. 3. Indeed, as the interface moves through $x = 0$ towards $x = 1$, $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$ contains more and more of the flux rope and its helicity $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$ increases, mostly at the expense of δH . Symmetrically to the left part of the plot, as soon as the interface moves out of the flux rope, approximately at $x = 0.3$, $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$ is practically zero.

Contrary to the horizontal slicing case in the top panel of Fig. 3, in the vertical slicing case in the bottom panel, δH is of the same order as $H(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ for a large interval of the slicing position, and even several times larger than both $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^a)$ and $H(\mathbf{B}, \mathcal{V}^b)$ in the central interval: in this case, the non-additive term δH is basically never negligible. Therefore, depending on the way a volume is sliced, the relative importance of the non-additive term δH can vary significantly, and cannot in general be neglected.

From the discussion in Sect. 2.3 we know that the non-additivity is related to the difference between the reference fields in the subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b with respect to the reference field in the full volume \mathcal{V} . On the other hand, the position and orientation of the interface directly determines the boundary conditions for the reference fields. Therefore, the magnitude of δH in the two cases in Fig. 3 is possibly determined by the way in which the boundary conditions for the subvolumes' reference fields change, as a function of the interface position. However, to validate such a speculation requires to study the different non-gauge-invariant contributions to δH in Eqs. (21 - 25) as a function of the interface orientation and position, a task that we reserve for future studies, see Sect. 6.3.

6. Conclusions

6.1. Results

The purpose of this work is to study the non-additivity of the relative magnetic helicity in finite-volumes, here formulated as a partition problem between contiguous subvolumes. In particular:

- We derive in Sect. 2.4 the general equation for the partition of relative magnetic helicity in a finite-size volume between two contiguous subvolumes separated by an interface, Eqs. (21 - 25). The explicit assumption of finiteness of the considered volume makes the partition equations directly applicable to numerical simulations. No assumption is made on the shape of interface or the (sub)volumes, as long as they are simply-connected. Therefore, Eqs. (21 - 25) can be easily adapted to different geometries, like spherical wedges and the fully spherical case, taking the due care about the required periodicity of vector potentials (*i.e.*, barring any mean field in the periodic direction (Berger 2003)).

- We show in the most general way that relative magnetic helicity is not an algebraically additive quantity, and that the non-additive term is gauge-invariant. This allows us to link the non-additivity to the very definition of helicity as relative to a reference field, see Sect. 6.2.

Next, we further apply our general equations to specific gauges, used in previous studies and numerical computations, as follows.

- In Sect. 3 we analyze the adaptation of the general partition equations to commonly used gauges (Coulomb and DeVore-Coulomb) and boundary conditions often used in the computation of the vector potentials.
- In Sect. 4 we relate our general approach to well-known reference approaches in the literature, such as those by Berger & Field (1984) and Longcope & Malanushenko (2008), which are obtained under more restrictive assumptions on volumes and gauges. In particular, our approach generalizes the one in Longcope & Malanushenko (2008) in few aspects, since all assumptions about the adopted gauge and boundary conditions are relaxed here. In the first place, we use the definition of relative helicity, Eq. (2), rather than a simple difference of helicities, Eq. (28). Second, the assumption that subvolumes are bounded by coronal flux surfaces made in Longcope & Malanushenko (2008) implies that the volume must be partitioned in a way that the flux is balanced within the photospheric footprint of each subvolume separately. While this might be a natural way of splitting a coronal volume into a collection of photospherically-anchored flux tubes, this might be not an easy task in other types of simulation where the logical split of volumes would not necessarily be following flux surfaces.
- Finally, we implement and test the accuracy and gauge-invariance of the partition equation using the family of DeVore gauges in Sect. 5, applied to the Titov & Démoulin (1999) solution of the nonlinear force-free equations. These preliminary tests, besides their verification purpose, show that the non-additive term is in general non-negligible, and that it can be significantly larger than the relative helicity of the composing subvolumes in some cases. However, these tests also show that the magnitude of the non-additive term depends on the way the volume is split. Therefore, applications of our general formalisms can be devised to investigate under which specific conditions the relative magnetic helicity may become approximately additive (see Sect. 6.3).

6.2. Discussion

The fundamental reason of the non-additivity of relative magnetic helicity lies in its very definition as relative to a reference field. The very same condition that is needed to ensure the gauge-invariance of relative magnetic helicity, Eq. (3), is also responsible for the interface discontinuities in the reference fields that ultimately cause the non-additivity. This is even more evident when the effect of the finiteness of the considered volume must be considered, as in numerical simulations (see, *e.g.*, Valori et al. 2012). We stress that the non-additive term δH cannot be interpreted as simply the mutual or linking term between the subvolumes, for the same reason that the \mathcal{H}_{mix} term in the definition of the relative magnetic helicity Eq. (2) is not the linking between the input and reference field.

On the other hand, as mentioned in Sect. 1, there are several examples of astrophysical plasmas where the conservation of magnetic helicity is expected to be a key for understanding the

complex processes at a fundamental level, such as the relation between solar and stellar dynamos and the emergence of magnetic flux through the photosphere, the stability of coronal structure, or the relation between solar eruptions and interplanetary coronal mass ejections. In most of such cases, either because of instrumental or numerical limitations, the helicity budget involves volumes that are neither unbounded, nor bounded by flux surfaces, and a general, finite-volume approach is unavoidable. The non-additivity of relative magnetic helicity in finite-volumes that we analyse in this work poses a serious threat to the applicability of the conservation of relative magnetic helicity in such fundamental applications. As a minimum, our work shows that, when considering the partition of relative magnetic helicity in such applications, the relative magnitude of its non-additive part must be considered.

On a general level, therefore, one would desire to have a different definition of relative magnetic helicity that has additivity *and* gauge-invariance as a core requirements, which, according to the results in this work, is not possible in general. This impediment does not depend on the *type* of reference field: as shown in Sect. 2.3, any reference field would lead to the same non-additivity problem because of the boundary conditions that need to be imposed on the interface in order to ensure gauge-invariance.

It is worth noting that the additivity problem can be solved if one is prepared to relax the requirement of gauge invariance and explicitly fix a gauge in the definition of helicity, since this dispenses with the need for a reference field. The original magnetic helicity $\mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ is then (trivially) additive between subvolumes, whatever the gauge of \mathbf{A} . However, for this additivity to be useful, one ought to be able to compute the helicity of each subregion locally, whereas in general \mathbf{A} must be computed globally (as, *e.g.*, with the Coulomb gauge). In fact, this problem can be avoided if the interfaces between subdomains are planes or spherical surfaces, since then one can determine a vector potential from \mathbf{B} purely by integration within these surfaces. This is the approach of both Prior & Yeates (2014) and Berger & Hornig (2018), who describe particular vector potentials for such configurations. In Prior & Yeates (2014), the interfaces are parallel planes, whereas Berger & Hornig (2018) allow for any spherical nested surfaces. In both cases, the corresponding $\mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V})$ is additive between subvolumes and locally computable. Moreover, these authors show that their gauge choices give a particular physical interpretation to $\mathcal{H}(\mathbf{B}, \mathcal{V})$, which is lacking for an arbitrary choice of gauge.

6.3. Future applications

Case studies may reveal that the non-additive term is, in fact, almost negligible in specific conditions. An example of such a case is the kinematic emergence of a flux rope of Sect. 5, and top panel of Figure 3. The bottom panel of the same figure, however, shows that this is not true in general. The reason for such a difference in the magnitude of the non-additive term is worth being further investigated. In other words, there might be specific arrangements of fields and interfaces for which δH is indeed non-zero, but still small enough to result into a relative helicity that is approximately additive.

A straightforward application of Eqs. (21 - 25) is to characterise the time evolution of the partition of helicity between sub- and super-photospheric volumes in flux emergence simulations such as, *e.g.*, Leake et al. (2013). Such a study can be extended to include dynamo simulations (see, *e.g.*, Brun & Browning 2017) and the relation to photospheric fluxes (see *e.g.*, Brandenburg

et al. 2017). Similarly, the partition between the helicity carried by an ejective instability and that remaining confined at lower altitudes during solar eruptions can be studied using simulations such as Leake et al. (2014); Pariat et al. (2015); Török et al. (2018).

On a more theoretical level, our formalism can be used to study the relation between fluxes at the interface of the partitioned volumes and their relation with helicity conservation (see, *e.g.*, Pariat et al. 2015). Similarly, the relative magnetic helicity proxy recently introduced by Pariat et al. (2017) was found to be a good marker of eruptivity potential in both numerical simulations (Zuccarello et al. 2018) and observed active regions (Moraitis et al. 2019; Thalmann et al. 2019). The eruptivity proxy is expressed in terms of the helicity of the current-carrying part of the field. Intriguingly, the same field appears when combining the Eq. (21) and the last term of Eq. (25).

These are only a few examples of applications of our general approach to the partition of relative magnetic helicity. Such applications will help us understanding how the conservation of relative magnetic helicity can practically be used in the interpretation of the evolution of complex physical processes in magneto-hydrodynamics.

Acknowledgements. GV acknowledges the support of the Leverhulme Trust Research Project Grant 2014-051, the support from the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme under grant agreement No 824135, and of the STFC grant number ST/T000317/. LL, EP, KM acknowledge support of the French Agence Nationale pour la Recherche through the HELISOL project ANR-15-CE31-0001. LL, EP and PD acknowledge the support of the french Programme National Soleil-Terre. ARY acknowledges financial support from Leverhulme Trust project grant 2017-169 and STFC grant ST/S000321/1. This article profited from discussions during the meetings of the ISSI International Team Magnetic Helicity in Astrophysical Plasmas.

References

- Alexakis, A., Mininni, P. D., & Pouquet, A. 2006, *ApJ*, 640, 335
 Antiochos, S. K. 2013, *ApJ*, 772, 72
 Berger, M. A. 1984, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 30, 79
 Berger, M. A. 1999, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 41, B167
 Berger, M. A. 2003, *Topological quantities in magnetohydrodynamics*, ed. K. Zhang, A. Soward, & C. Jones, 345–374
 Berger, M. A. & Field, G. B. 1984, *Journal of Fluid Mechanics*, 147, 133
 Berger, M. A. & Hornig, G. 2018, *Journal of Physics A Mathematical General*, 51, 495501
 Berger, M. A. & Ruzmaikin, A. 2000, *J. Geophys. Res.*, 105, 10481
 Brandenburg, A., Petrie, G. J. D., & Singh, N. K. 2017, *ApJ*, 836, 21
 Brandenburg, A. & Subramanian, K. 2005, *Phys. Rep.*, 417, 1
 Brun, A. S. & Browning, M. K. 2017, *Living Reviews in Solar Physics*, 14, 4
 Del Sordo, F., Candelaresi, S., & Brandenburg, A. 2010, *Phys. Rev. E*, 81, 036401
 Démoulin, P., Janvier, M., & Dasso, S. 2016, *Sol. Phys.*, 291, 531
 Démoulin, P., Mandrini, C. H., van Driel-Gesztelyi, L., et al. 2002, *A&A*, 382, 650
 Démoulin, P. & Pariat, E. 2009, *Advances in Space Research*, 43, 1013
 DeVore, C. R. 2000, *ApJ*, 539, 944
 Elsasser, W. M. 1956, *Reviews of Modern Physics*, 28, 135
 Finn, J. H. & Antonsen, T. M. J. 1985, *Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion*, 9, 111
 Frisch, U., Pouquet, A., Léorat, J., & Mazure, A. 1975, *Journal of Fluid Mechanics*, 68, 769
 Green, L. M., López fuentes, M. C., Mandrini, C. H., et al. 2002, *Sol. Phys.*, 208, 43
 Jensen, T. H. & Chu, M. S. 1984, *Physics of Fluids*, 27, 2881
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Antiochos, S. K. 2014, *ApJ*, 787, 46
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Török, T. 2013, *ApJ*, 778, 99
 Linan, L., Pariat, É., Moraitis, K., Valori, G., & Leake, J. 2018, *ApJ*, 865, 52
 Longcope, D. W. & Malanushenko, A. 2008, *ApJ*, 674, 1130
 Matthaeus, W. H. & Goldstein, M. L. 1982, *Stationarity of magnetohydrodynamic fluctuations in the solar wind*, NASA STI/Recon Technical Report N
 Moraitis, K., Pariat, E., Savcheva, A., & Valori, G. 2018, *Sol. Phys.*
 Moraitis, K., Sun, X., Pariat, É., & Linan, L. 2019, *A&A*, 628, A50

- Müller, W.-C. & Malapaka, S. K. 2013, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 107, 93
 Nakwacki, M. S., Dasso, S., Démoulin, P., Mandrini, C. H., & Gulisano, A. M. 2011, *A&A*, 535, A52
 Nindos, A., Zhang, J., & Zhang, H. 2003, *ApJ*, 594, 1033
 Pariat, E., Dalmasse, K., DeVore, C. R., Antiochos, S. K., & Karpen, J. T. 2015, *A&A*, 573, A130
 Pariat, E., Démoulin, P., & Berger, M. A. 2005, *A&A*, 439, 1191
 Pariat, E., Leake, J. E., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, 601, A125
 Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Dalmasse, K. 2015, *A&A*, 580, A128
 Priest, E. R., Longcope, D. W., & Janvier, M. 2016, *Sol. Phys.*, 291, 2017
 Prior, C. & Yeates, A. R. 2014, *ApJ*, 787, 100
 Schuck, P. W. & Antiochos, S. K. 2019, *ApJ*, 882, 151
 Temmer, M., Thalmann, J. K., Dissauer, K., et al. 2017, *Solar Physics*, 292
 Thalmann, J. K., Inhester, B., & Wiegelmann, T. 2011, *Sol. Phys.*, 272, 243
 Thalmann, J. K., Moraitis, K., Linan, L., et al. 2019, *ApJ*, 887, 64
 Titov, V. S. & Démoulin, P. 1999, *A&A*, 351, 707
 Török, T., Downs, C., Linker, J. A., et al. 2018, *ApJ*, 856, 75
 Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, E. 2012, *Sol. Phys.*, 278, 347
 Valori, G., Démoulin, P., Pariat, E., & Masson, S. 2013, *A&A*, 553, A38
 Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016, *Space Sci. Rev.*, 201, 147
 Woltjer, L. 1958, *Proceedings of the National Academy of Science*, 44, 833
 Yeates, A. R. & Hornig, G. 2016, *A&A*, 594, A98
 Zuccarello, F. P., Pariat, E., Valori, G., & Linan, L. 2018, *ApJ*, 863, 41

Appendix A: Derivation of the non-additive terms

To allow for cancellations between terms, we split contributions from $\partial\mathcal{V}^a$ (respectively, $\partial\mathcal{V}^b$) into contributions from the interface Σ^a (respectively, Σ^b) and contributions from the remaining, non-interface boundaries \mathcal{Z}^a (respectively, \mathcal{Z}^b), see Sect. 2.2.

Appendix A.1: Derivation of the $\delta\mathcal{H}$ term

Let us start from Eq. (18)

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}^a} \mathbf{A}^a \cdot \mathbf{B} \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}^b} \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{B} \, d\mathcal{V}. \quad (\text{A.1})$$

The solenoidal condition imposes that the normal component of \mathbf{B} is continuous across Σ (Berger & Field 1984). However, here we make the stronger assumption, reasonable in applications, that the vector potential \mathbf{A} is continuous with its derivatives at the interface such that the magnetic field \mathbf{B} is continuous there (*i.e.*, $\mathbf{A}|_{\Sigma} \in C^1$ and, hence, $\mathbf{B}|_{\Sigma} \in C^0$, at least).

First, we note that

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}^a & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}^a \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}^b & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}^b. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Since, *e.g.*, both \mathbf{A} and \mathbf{A}^a produce the same field in \mathcal{V}^a , then from Eq. (A.2) it follows that they can differ from \mathbf{A} at most by the gradient of a scalar function, *i.e.*,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}^a + \nabla\chi^a & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}^a \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^b + \nabla\chi^b & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}^b. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Using the continuity of \mathbf{A} and, hence of the RHSs of the above equations, we can split the first integral in Eq. (A.1) into the sum of the integrals on \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b to obtain

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}^a} \nabla\chi^a \cdot \mathbf{B} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}^b} \nabla\chi^b \cdot \mathbf{B} \, d\mathcal{V}, \quad (\text{A.4})$$

and, by means of Gauss theorem and the solenoidal condition for \mathbf{B} ,

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\partial\mathcal{V}^a} \chi^a (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^a) + \int_{\partial\mathcal{V}^b} \chi^b (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^b). \quad (\text{A.5})$$

We now split the surface integrals into interface and non-interface contributions obtaining

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\partial\mathcal{V}} \chi^{ab} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) + \int_{\Sigma^a} (\chi^a - \chi^b) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^a, \quad (\text{A.6})$$

where we introduced the notation of Eq. (10) for the gauge functions χ^a and χ^b , and we used Eq. (9) in the first integral on the RHS, and that $\hat{\mathbf{n}}^b = -\hat{\mathbf{n}}^a$ on Σ^b in the second. We anticipate that the first term on the RHS of Eq. (A.6) cancels with the homologous term from $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$ by virtue of Eq. (3), and it is therefore omitted from Eq. (21). Then, Eq. (A.6) implies Eq. (21) with $\chi = \chi^a - \chi^b$.

Appendix A.2: Derivation of the $\delta\mathcal{H}_p$ term

The explicit form of Eq. (19) is

$$\delta\mathcal{H}_p = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_p \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}^a} \mathbf{A}_p^a \cdot \mathbf{B}_p^a \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}^b} \mathbf{A}_p^b \cdot \mathbf{B}_p^b \, d\mathcal{V}. \quad (\text{A.7})$$

This cannot be computed as $\delta\mathcal{H}$ above because, in general, \mathbf{B}_p^a and \mathbf{B}_p^b are different from \mathbf{B}_p in the volume \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , respectively. Below, we rather consider explicitly that the reference fields are all potential in their respective domains and must satisfy the gauge-invariance conditions Eq. (3), *i.e.*, they satisfy

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p = \nabla\phi \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi|_{\partial\mathcal{V}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}}, \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

for the reference field in \mathcal{V} , and

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p^a = \nabla\phi^a \\ \hat{\mathbf{n}}^a \cdot \nabla\phi^a|_{\partial\mathcal{V}^a} = \hat{\mathbf{n}}^a \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}^a} \end{cases} \text{ and } \begin{cases} \mathbf{B}_p^b = \nabla\phi^b \\ \hat{\mathbf{n}}^b \cdot \nabla\phi^b|_{\partial\mathcal{V}^b} = \hat{\mathbf{n}}^b \cdot \mathbf{B}|_{\partial\mathcal{V}^b}, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

for the reference fields in \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , respectively.

Let us now use Eq. (A.8) and Eq. (A.9) and the Gauss theorem in Eq. (19) to readily derive

$$\delta\mathcal{H}_p = \delta\mathcal{H}_p^{\text{Coul}} + \delta\mathcal{H}_p^{\text{Surf}}, \quad (\text{A.10})$$

where

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_p^{\text{Coul}} = & \int_{\mathcal{V}^a} \phi^a (\nabla \cdot \mathbf{A}_p^a) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}^b} \phi^b (\nabla \cdot \mathbf{A}_p^b) \, d\mathcal{V} \\ & - \int_{\mathcal{V}} \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}_p) \, d\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_p^{\text{Surf}} = & - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \phi^a (\mathbf{A}_p^a \cdot d\mathbf{S}^a) - \int_{\partial\mathcal{V}^b} \phi^b (\mathbf{A}_p^b \cdot d\mathbf{S}^b) \\ & + \int_{\partial\mathcal{V}} \phi (\mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

The surface term $\delta\mathcal{H}_p^{\text{Surf}}$ can be further reorganized by spitting it into interface and non-interface contributions to obtain

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_p^{\text{Surf}} = & \int_{\partial\mathcal{V}} (\phi \mathbf{A}_p - \phi^{ab} \mathbf{A}_p^{ab}) \cdot d\mathbf{S} \\ & - \int_{\Sigma} (\phi^a \mathbf{A}_p^a - \phi^b \mathbf{A}_p^b) \cdot d\mathbf{S}^a, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

where, in the last term, we have used that $\hat{\mathbf{n}}^a = -\hat{\mathbf{n}}^b$ on Σ and the notation of Eq. (10) for the scalar potentials ϕ^a and ϕ^b and the vector potentials of the potential fields \mathbf{A}_p^a and \mathbf{A}_p^b .

Appendix A.3: Derivation of the $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$ term

$\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$, Equation (20), can be written in terms of solely surface integrals using Eq. (6) as

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} = & \int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial\mathcal{V}^a} (\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a \\ & - \int_{\partial\mathcal{V}^b} (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p^b) \cdot d\mathbf{S}^b. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Using the continuity of \mathbf{A} and \mathbf{A}_p across Σ and the definitions of Eqs. (7 - 9), we can split the first integral on $\partial\mathcal{V}$ into the sum over $\partial\mathcal{V}^a$ and $\partial\mathcal{V}^b$ by adding and subtracting the interface contributions as

$$\int_{\partial\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{Z}^a} + \int_{\mathcal{Z}^b} = \int_{\partial\mathcal{V}^a} + \int_{\partial\mathcal{V}^b} - \int_{\Sigma^a} - \int_{\Sigma^b}, \quad (\text{A.15})$$

and, using Eq. (A.3) to eliminate the vector potential \mathbf{A} , we have

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S} = & \int_{\partial\mathcal{V}^a} (\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a + \int_{\partial\mathcal{V}^b} (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^b \\ & + \int_{\partial\mathcal{V}^a} (\nabla\chi^a \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a + \int_{\partial\mathcal{V}^b} (\nabla\chi^b \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^b \\ & - \int_{\Sigma^a} ((\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p) - (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p)) \cdot d\mathbf{S}^a \\ & - \int_{\Sigma^a} ((\nabla\chi^a - \nabla\chi^b) \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

The identity

$$\nabla \times (\mathbf{A}_p \chi^a) = \chi^a \mathbf{B}_p + \nabla\chi^a \times \mathbf{A}_p, \quad (\text{A.17})$$

in $\partial\mathcal{V}^a$, and analogous expression for $\mathbf{A}_p \chi^b$ in $\partial\mathcal{V}^b$, where all vector fields satisfy the necessary continuity conditions, can be now used to re-write the second line in the RHS of Eq. (A.16) as

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{V}^a} \nabla \times (\chi^a \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a + \int_{\partial\mathcal{V}^b} \nabla \times (\chi^b \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^b \\ & - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \chi^a (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^a) - \int_{\partial\mathcal{V}^b} \chi^b (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^b), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

where the first two terms are identically zero because the curl of any (sufficiently continuous) vector field is solenoidal, and the flux trough a closed surface of a solenoidal field vanishes. Substituting back in Eq. (A.14),

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} = & \int_{\partial\mathcal{V}^a} (\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a + \int_{\partial\mathcal{V}^b} (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^b \\ & - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \chi^a (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^a) - \int_{\partial\mathcal{V}^b} \chi^b (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^b) \\ & - \int_{\Sigma^a} ((\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p) - (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p)) \cdot d\mathbf{S}^a \\ & - \int_{\Sigma^a} ((\nabla\chi^a - \nabla\chi^b) \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a \\ & - \int_{\partial\mathcal{V}^a} (\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a - \int_{\partial\mathcal{V}^b} (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p^b) \cdot d\mathbf{S}^b. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Splitting into interface and non-interface contributions we get $\delta\mathcal{H}_p$ that

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} &= \int_{\Sigma^a} (\mathbf{A}^a \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^a)) \cdot d\mathbf{S}^a + \int_{\Sigma^b} (\mathbf{A}^b \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^b)) \cdot d\mathbf{S}^b \\ &\quad - \int_{\Sigma^a} (\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a - \int_{\Sigma^b} (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p^b) \cdot d\mathbf{S}^b \\ &\quad - \int_{\Sigma^a} (\chi^a - \chi^b) (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^a) \\ &\quad - \int_{\Sigma^a} ((\nabla\chi^a - \nabla\chi^b) \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{V}} \chi^{ab} (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\delta\mathcal{H}_p \rightarrow \delta\mathcal{H}_p - \int_{\mathcal{V}} \phi \Delta\psi \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} \phi \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{B.1})$$

Using Gauss theorem twice and Eq. (A.8) we can write the first integral as

$$\int_{\mathcal{V}} \phi \Delta\psi \, d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}} \phi \nabla\psi \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial\mathcal{V}} \psi \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{V}} \psi (\nabla \cdot \mathbf{B}_p) \, d\mathcal{V},$$

where the last term vanishes since \mathbf{B}_p is solenoidal. Substituting in Eq. (B.1) we have

$$\delta\mathcal{H}_p \rightarrow \delta\mathcal{H}_p + \int_{\partial\mathcal{V}} \psi \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{B.2})$$

where the continuity of \mathbf{B}_p across Σ was used in the third line of the RHS and the notation of Eq. (10) for the gauge functions χ^a and χ^b in the last one. Using the notation in Eq. (10) also for the vector potentials $(\mathbf{A}^a, \mathbf{A}^b)$ and $(\mathbf{A}_p^a, \mathbf{A}_p^b)$, and the definition of Eq. (9), we can formally write

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} &= \int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{A}^{ab} \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^{ab})) \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad - \int_{\Sigma^a} ((\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}_p^a) - (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}_p^b)) \cdot d\mathbf{S}^a \\ &\quad - \int_{\Sigma^a} (\chi^a - \chi^b) (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^a) \\ &\quad + \int_{\Sigma^a} ((\mathbf{A}^a - \mathbf{A}^b) \times \mathbf{A}_p) \cdot d\mathbf{S}^a \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{V}} \chi^{ab} (\mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}), \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

where we used that, on Σ^a , is

$$\nabla\chi = \nabla\chi^a - \nabla\chi^b = -(\mathbf{A}^a - \mathbf{A}^b), \quad (\text{A.22})$$

by virtue of Eq. (A.3) and the continuity of \mathbf{A} across Σ , with $\chi = \chi^a - \chi^b$. Note that, while χ^a and χ^b are defined in the entire subvolumes \mathcal{V}^a and \mathcal{V}^b , respectively, the gauge function χ is defined only on the interface Σ and is a function of the interface variables only.

The last term on the RHS of Eq. (A.21) cancels with the homologous term in Eq. (A.6) by virtue of Eq. (3), and it is therefore omitted from Eq. (25).

Appendix B: Gauge-invariance of the additivity formula

In this section the invariance of Eq. (17) with respect to gauge transformations of the vector potentials is proven. First notice that each of Eqs. (21 - 25) are invariant if we interchange $a \leftrightarrow b$, since $d\mathbf{S}^a = -d\mathbf{S}^b$ on Σ . Hence, it suffices to check gauge invariance under gauge changes of \mathbf{A} , \mathbf{A}_p , \mathbf{A}^a , and \mathbf{A}_p^a . We consider these gauge transformations in turn:

1. $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$. Notice that \mathbf{A} does not explicitly appear in any of the expressions Eqs. (21 - 25). However, since we are not changing \mathbf{A}^a or \mathbf{A}^b , transforming $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$ corresponds to the change $\chi^a \rightarrow (\chi^a + \psi)$ and $\chi^b \rightarrow (\chi^b + \psi)$, as follows from Eq. (A.3). Since nevertheless these potentials appear only in the combination $\chi^b - \chi^a$ then δH is invariant with respect to the transformation.

2. $\mathbf{A}_p \rightarrow \mathbf{A}_p + \nabla\psi$. Equation (21) clearly shows that $\delta\mathcal{H}$ is unchanged by this transformation. From Eq. (22) we have for

Using Eq. (25) and Eqs. (7, 8), the gauge transformation of $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$ is

$$\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} \rightarrow \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} + \int_{\partial\mathcal{V}^a} \mathbf{A}^a \times \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}^a + \int_{\partial\mathcal{V}^b} \mathbf{A}^b \times \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}^b, \quad (\text{B.3})$$

where the first integral can be written, using Eq. (A.2), as

$$\int_{\partial\mathcal{V}^a} \mathbf{A}^a \times \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}^a = \int_{\partial\mathcal{V}^a} \nabla \times (\psi \mathbf{A}^a) \cdot d\mathbf{S}^a - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \psi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^a, \quad (\text{B.4})$$

where the first integral on the RHS vanishes. A similar expression can be derived for the second integral in Eq. (B.4), and, substituting back, we have

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} &\rightarrow \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \psi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^a - \int_{\partial\mathcal{V}^b} \psi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^b \\ &= \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} - \int_{\partial\mathcal{V}} \psi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

where, in the second line, we have used again Eqs. (7, 8) to separate the interface from the non-interface contributions, and $d\mathbf{S}^a = -d\mathbf{S}^b$. Hence, considering Eq. (B.2), Eq. (B.5), and Eq. (4) we have that overall δH is unchanged by this transformation.

3. $\mathbf{A}^a \rightarrow \mathbf{A}^a + \nabla\psi$. Since we are not changing \mathbf{A} , it follows from Eq. (A.3) that we must transform $\chi^a \rightarrow (\chi^a - \psi)$. Therefore, from Equation (21), we have

$$\delta\mathcal{H} \rightarrow \delta\mathcal{H} + \int_{\Sigma} \psi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^a. \quad (\text{B.6})$$

\mathbf{A}^a does not appear in Eq. (22), hence $\delta\mathcal{H}_p$ is unchanged by this transformation. On the other hand, using Eq. (7) we have that Eq. (25) transforms as

$$\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} \rightarrow \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} + \int_{\partial\mathcal{V}^a} \nabla\psi \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a - \int_{\Sigma} \psi \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^a;$$

with analogous manipulation as in Eq. (B.4), the first integral can be rearranged as

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{V}^a} \nabla\psi \times (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a &= \int_{\partial\mathcal{V}^a} \psi (\mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a \\ &= \int_{\Sigma} \psi (\mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

where the non-interface contribution vanishes because $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_p$ and $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_p^a$ are the same there, by virtue of Eq. (4) and Eq. (11). It follows that

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} &\rightarrow \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} + \int_{\Sigma} \psi (\mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^a) \cdot d\mathbf{S}^a - \int_{\Sigma} \psi \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}^a \\ &= \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} - \int_{\Sigma} \psi \mathbf{B}_p^a \cdot d\mathbf{S}^a, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

and therefore, considering Eqs. (B.6, B.8) and Eq. (11), we have that overall δH is unchanged by this transformation.

4. $\mathbf{A}_p^a \rightarrow \mathbf{A}_p^a + \nabla\psi$. Also in this case $\delta\mathcal{H}$ is unchanged by this transformation. From Eq. (22) we have for $\delta\mathcal{H}_p$ that

$$\delta\mathcal{H}_p \rightarrow \delta\mathcal{H}_p + \int_{\mathcal{V}^a} \phi^a \Delta\psi \, d\mathcal{V}^a - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \phi^a \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}^a, \quad (\text{B.9})$$

which is similar to Eq. (B.1) but written for (ϕ^a, \mathcal{V}^a) rather than (ϕ, \mathcal{V}) , and with opposite signs of the integrals. With similar transformations as in Eqs. (B.1 - B.2) we find

$$\delta\mathcal{H}_p \rightarrow \delta\mathcal{H}_p - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \psi \mathbf{B}_p^a \cdot d\mathbf{S}^a. \quad (\text{B.10})$$

For $\delta\mathcal{H}_{\text{mix}}$, the gauge change implies the transformation

$$\delta\mathcal{H}_{\text{mix}} \rightarrow \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} - \int_{\partial\mathcal{V}^a} \mathbf{A}^a \times \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}^a, \quad (\text{B.11})$$

where Eq. (7) was used. Using Eq. (B.4) we have

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} &\rightarrow \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} + \int_{\partial\mathcal{V}} \psi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^a \\ &= \delta\mathcal{H}_{\text{mix}} + \int_{\partial\mathcal{V}} \psi \mathbf{B}_p^a \cdot d\mathbf{S}^a, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

where Eq. (11) was used to obtain the second line. Once again, δH is unchanged overall.

This completes the proof.

Chapitre 4

Hélicité magnétique et éruptivité

Sommaire

4.1 Liens entre l'hélicité magnétique relative et l'éruptivité d'une configuration magnétique	118
4.1.1 Accumulation d'hélicité magnétique relative avant une éruption	119
4.1.1.1 Approche observationnelle et statistique	119
4.1.1.2 Approche théorique et numérique	120
4.1.2 Influence de la quantité d'hélicité relative coronale sur les propriétés de l'éruption	122
4.1.3 Liens entre éruptivité et flux d'hélicité relative	123
4.2 Rôle de l'hélicité magnétique non potentielle comme indicateur de l'éruptivité	125
4.2.1 Ratio de l'hélicité magnétique non potentielle sur hélicité magnétique relative	126
4.2.2 Seuil du ratio d'hélicité magnétique : Zuccarello, Pariat, Valori, & Linan (2018)	128
4.2.2.1 Résumé	128
4.2.2.2 Ma contribution	130
4.2.3 Perspectives	131
4.3 Seuil du ratio d'hélicité dans des régions actives	145
4.3.1 Influence de la solénoïdalité du champ magnétique sur la mesure du ratio d'hélicité : Thalmann et al. (2019a)	145
4.3.1.1 Résumé	145
4.3.1.2 Ma contribution	147
4.3.2 Évolution des hélicités dans la région active NOAA 12673 : Moraitis, Sun, Pariat, & Linan (2019b)	154
4.3.2.1 Résumé	154
4.3.2.2 Ma contribution	156
4.3.3 Influence de la morphologie de la région active Thalmann, Moraitis, Linan, Pariat, Valori, & Dalmasse (2019b)	164
4.3.3.1 Résumé	164
4.3.3.2 Ma contribution	166
4.3.4 Perspectives	167

L'hélicité magnétique est injectée continuellement dans la couronne solaire par l'émergence de flux magnétiques et par des mouvements photosphériques du plasma (cf. Sect. 1.5.2). Nous avons vu que puisque l'hélicité magnétique est conservée même durant des processus de MHD

non idéale (cf. Sect. 3.2.2.2), les CMEs pourraient agir comme des valves pour empêcher l'hélicité magnétique de s'accumuler indéfiniment dans l'atmosphère solaire (cf. Sect. 3.2.3). En effet, les régions actives pendant toute leur durée de vie peuvent être la source de nombreuses CMEs, qui éjectent hors de la couronne une quantité importante d'hélicité magnétique (cf. Sect. 3.2.3).

On peut cependant se demander si l'hélicité magnétique joue un rôle dans le déclenchement d'une CME ou d'une éruption solaire de façon générale. C'est-à-dire, est-ce que l'hélicité magnétique influe sur les processus physiques qui sont à l'origine des éruptions solaires? Cette question a conduit jusqu'à récemment à un ensemble de résultats contradictoires (cf. Sect. 4.2). Des études récentes bénéficiant du développement des méthodes d'estimations de l'hélicité magnétique (cf. Sect. 3.3) ont permis d'apporter des premiers éléments de réponse.

Nous verrons qu'avant le début de ma thèse, aucun critère basé sur l'hélicité magnétique ne permettait de prédire l'éruptivité d'un système magnétique. Même si un certain degré de torsion et de cisaillement est indispensable pour le déclenchement d'une éruption, les différentes observations et simulations numériques montrent que le minimum d'hélicité relative nécessaire dépend du système et de la configuration magnétique (cf. Sect. 4.1). L'hélicité magnétique relative seule ne peut donc pas signaler le caractère éruptif d'une région active (cf. Sect. 4.1.1.2). De façon plus générale, aucune grandeur physique n'avait été repérée comme véritablement efficace pour la prédiction des éruptions solaires (cf. Sect. 1.2.2).

Dans ce chapitre, je présenterai tout d'abord un certain nombre de résultats suggérant que l'hélicité magnétique relative influe sur le déclenchement et/ou les propriétés d'une éruption (cf. Sect. 4.1). J'introduirai ensuite un tout nouveau critère d'éruptivité défini comme le rapport entre l'hélicité non potentielle et l'hélicité relative (cf. Sect. 4.2). Nous verrons que ce critère d'éruptivité permet de signaler le potentiel éruptif d'une région active. Pour appuyer cette affirmation, j'introduirai les premiers résultats obtenus en suivant la dynamique de ce critère d'éruptivité au niveau de différentes régions actives observées (cf. Sect. 4.3).

4.1 Liens entre l'hélicité magnétique relative et l'éruptivité d'une configuration magnétique

Dans cette section, je présenterai un état de l'art des différents résultats reliant l'éruptivité d'une région active et son hélicité magnétique relative. Ces différents résultats se regroupent selon trois thématiques principales.

Tout d'abord (cf. Sect. 4.1.1), de nombreux travaux se sont intéressés à la capacité d'une région active d'engendrer une éruption en fonction de son hélicité magnétique relative. La question ici, est de savoir s'il existe une quantité minimale d'hélicité relative qu'une région active doit forcément acquérir pour entraîner une éruption solaire.

La deuxième thématique est l'étude des propriétés des éruptions solaires en fonction de la quantité d'hélicité relative de la région active (cf. Sect. 4.1.2). Par exemple, est-ce que les éruptions de classe X sont engendrées à partir de régions actives contenant une quantité plus importante d'hélicité relative que les régions produisant uniquement des éruptions de classe C ou M?

Pour finir (cf. Sect. 4.1.3), je présenterai des travaux se concentrant non pas sur la quantité d'hélicité relative contenue dans la couronne, mais plutôt sur son injection photosphérique. Il se pose alors les mêmes questions que précédemment : le potentiel éruptif d'une région active dépend-il du flux d'hélicité relative à travers la photosphère? Les propriétés de l'éruption sont-elles reliées à l'injection d'hélicité relative?

4.1.1 Accumulation d'hélicité magnétique relative avant une éruption

La question de l'existence d'un seuil d'hélicité magnétique relative avant une éruption solaire a été très débattue jusqu'à très récemment encore. Nous verrons dans les deux sous-sections suivantes, (4.1.1.1) et (4.1.1.2), que les résultats obtenus par les différentes études ont souvent été controversés et contradictoires à cause d'importants biais dans leurs hypothèses. Ci-après, j'ai divisé les résultats en deux parties : une première est composée d'études observationnelles comparant les éruptivités de plusieurs régions actives qui contiennent plus ou moins d'hélicité relative (cf. Sect. 4.1.1.1); et une deuxième qui se concentre sur les résultats obtenus théoriquement et à partir de simulations numériques d'éruptions solaires (cf. Sect. 4.1.1.2).

4.1.1.1 Approche observationnelle et statistique

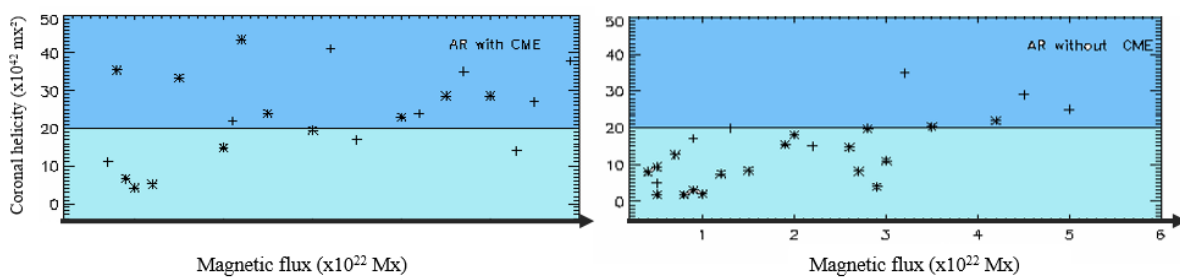


FIGURE 4.1 – **Gauche** : Hélicité magnétique coronale de régions actives engendrant une CME en fonction de leur flux magnétique. **Droite** : hélicité magnétique pour des régions actives qui n'engendrent pas de CMEs. Adaptée de [Nindos & Andrews \(2004\)](#).

L'hélicité magnétique relative contenue au niveau d'une région active est supérieure à celle d'une région du Soleil "calme" ([Tziotziou et al. 2012, 2014](#)). On peut alors se demander si toutes les régions actives sont équivalentes. Et, plus particulièrement, si la quantité d'hélicité d'une région active est directement liée à son éruptivité. Plusieurs études statistiques semblent aller dans ce sens (e.g. [Park et al. 2018b, 2010](#); [LaBonte et al. 2007](#); [Zhang et al. 2006](#); [Liu et al. 2016b](#)).

En mesurant l'hélicité relative injectée dans 378 régions actives, [Park et al. \(2010\)](#) ont montré que les éruptions majeures ($> M5$) résultent toutes d'une accumulation d'hélicité d'au moins $3 \times 10^{42} \text{Mx}^2$. Des études plus récentes basées sur la mesure de l'hélicité à partir d'un champ magnétique coronal reconstruit montrent également qu'avant une éruption une grande quantité d'hélicité ($> 10^{43} \text{Mx}^2$) est accumulée au niveau de la région active (e.g. [Ravindra et al. 2011](#); [Muhamad et al. 2018](#)).

D'autres travaux ont également suggéré que la quantité d'hélicité dans la couronne solaire est différente entre un flare et une éruption accompagnée par une CME (e.g. [Jing et al. 2015](#); [Liu et al. 2018b](#)). Par exemple, [Nindos et al. \(2003\)](#) et [Nindos & Andrews \(2004\)](#) ont comparé statistiquement l'hélicité de 78 éruptions solaires comprises entre 1996 et 1999. Les régions actives observées se divisent en deux groupes. Dans le premier, les éruptions ne sont pas accompagnées par une éjection de masse coronale. Tandis que dans le deuxième, les régions actives sont source de CMEs. L'hélicité est estimée à partir d'extrapolations du champ magnétique sans force linéaire ([Démoulin et al. 2002](#); [Green et al. 2002](#)). [Nindos & Andrews \(2004\)](#) ont alors montré que l'hélicité magnétique moyenne d'une région active engendrant une CME vaut $27 \times 10^{42} \text{Mx}^2$ contre $8 \times 10^{42} \text{Mx}^2$ pour une région active n'en produisant pas et cela indépendamment du flux magnétique injecté. La figure (4.1) montre qu'en effet, à flux magnétique donné, les régions

actives éruptives ont une plus grande quantité d'hélicité relative. Cela suggère que l'hélicité relative est une condition nécessaire au déclenchement d'une instabilité menant à la formation d'une CME.

Néanmoins, lorsqu'un flare confiné est suivi d'une éruption avec CME on n'observe pas toujours une augmentation de l'hélicité de la couronne (e.g. [Liu et al. 2018a](#)). Une explication possible est que la CME est facilitée par le flare qui a lieu avant. Durant le flare, la reconnexion magnétique entraîne une diminution de la tension magnétique. Le système qui est en résulte est instable et une CME s'y développe. Il s'agit là d'un effet domino suggéré par [Zuccarello et al. \(2009\)](#). La CME ne s'explique donc pas par des modèles standards qui nécessiteraient une quantité d'hélicité magnétique minimum.

Il y a néanmoins un grand nombre de biais dans les études menées jusqu'à présent. Tout d'abord, les méthodes de mesure de l'hélicité peuvent conduire à d'importantes erreurs. C'est le cas notamment des estimations basées sur une extrapolation sans force linéaire (cf. Append. [B.2](#)). De même, l'hélicité au niveau d'une région active est généralement estimée par la méthode d'intégration du flux photosphérique (cf. Sect. [3.3.2](#)) qui ne mesure en réalité que le flux d'hélicité à travers la photosphère et non l'hélicité qui est réellement stockée dans la couronne solaire.

Pour finir, dans la figure ([4.1](#)), on remarque qu'il est impossible de déterminer un seuil en hélicité relative dont le dépassement entraîne forcément une CME. En effet certaines régions actives qui n'engendrent pas une CME ont autant d'hélicité relative que des régions produisant une CME. Ces régions sont caractérisées par un flux magnétique à travers la photosphère importants ($> 10^{22}$ Mx). Finalement, Les observations montrent que l'hélicité relative est une grandeur extensive, ç-à-d. dépendante de la taille de la région active. Pour supprimer cette dépendance, une possibilité consiste à construire des grandeurs intensives telles que l'hélicité relative normalisée par le flux magnétique au carré (e.g. [Démoulin & Pariat 2009](#); [Thalmann et al. 2019a](#)). Quoi qu'il en soit, nous verrons dans la suite (cf. Sects. [4.1.1.2](#) et [4.2.2](#)) que ni l'hélicité relative telle quelle ni l'hélicité relative normalisée n'est un marqueur de l'éruptivité d'une région active.

4.1.1.2 Approche théorique et numérique

En parallèle des études observationnelles, le lien entre l'éruptivité d'une configuration magnétique et sa quantité d'hélicité magnétique relative est également évalué théoriquement et à partir de simulations numériques.

[Zhang et al. \(2006\)](#) et [Zhang & Flyer \(2008\)](#) ont par exemple étudié la limite supérieure théorique de l'hélicité qui peut être stockée dans diverses configurations de champ et ses implications pour l'évolution du champ magnétique coronale. Ils ont alors conjecturé que dans un volume sphérique ouvert comme la couronne, pour une distribution de flux magnétique donnée, il y a un seuil d'hélicité qu'un champ sans force ne doit pas dépasser pour rester stable. Lorsque l'hélicité accumulée dépasse cette limite, une situation de non-équilibre est atteinte, ce qui amorce le déclenchement des CMEs. Le seuil en hélicité dépend des conditions aux frontières et de la morphologie du champ magnétique ([Zhang et al. 2012a](#)).

Les travaux de [Jacobs et al. \(2006\)](#), reposant sur des simulations MHD 2.5D du vent solaire ([Linker & Mikic 1995](#)), suggèrent également l'existence d'une limite supérieure à l'hélicité magnétique. [Jacobs et al. \(2006\)](#) ont en effet constaté qu'un tube de flux torsadé se forme et s'éjecte si le rapport entre l'hélicité et le flux magnétique au carré est supérieur à 0,2-0,3. Différents modèles ont été testés et ont donné différents seuils.

Au contraire, d'autres études ont conclu que l'hélicité ne peut être le seul paramètre contrôlant le déclenchement d'une éruption. Par exemple, dans des simulations numériques 3D modélisant une région active bipolaire, [Amari et al. \(2003a,b\)](#) ont montré que l'instabilité engendrant

la CME a lieu après une phase où l'hélicité magnétique est constante. Cela signifie que le déclenchement de la CME n'est pas lié au dépassement d'un seuil en hélicité. Cependant, une torsion initiale est présente dans les simulations. [Amari et al. \(2003a,b\)](#) ont souligné qu'un tel degré de torsion pouvait être le résultat de processus ayant lieu avant l'émergence de la structure magnétique ([Nindos & Zhang 2002](#)). De même les simulations 2,5D de [Phillips et al. \(2005\)](#), basées sur le modèle "breakout" de CME ([Antiochos & DeVore 1999](#); [Antiochos 1998](#)), n'ont pas révélé de seuil en hélicité relative. Dans leurs simulations, les CMEs se produisent à une quantité fixe d'énergie libre dans la couronne solaire, qu'importe si la quantité d'hélicité magnétique relative stockée est nulle ou importante. Notons cependant que les simulations utilisées par [Phillips et al. \(2005\)](#) sont inconsistantes avec la présence d'hélicité dans les nuages magnétiques ([Ruzmaikin et al. 2003](#)). Puisque l'éruption a lieu quand l'énergie libre atteint une valeur déjà observée dans une précédente simulation ([MacNeice et al. 2004](#)), [Phillips et al. \(2005\)](#) ont suggéré l'existence d'un seuil en énergie libre et non en hélicité.

Les simulations MHD de [Zuccarello et al. \(2009\)](#) ont également montré que l'injection d'hélicité n'est pas une contrainte nécessaire à l'initiation des CMEs. Cependant, l'absence d'accumulation nette d'hélicité avant une éruption pourrait résulter de l'accumulation conjointe d'hélicités positive et négative, dans ce cas, de l'annihilation de l'hélicité pourrait être à l'œuvre ([Kusano et al. 2004](#)).

Finalement, comment expliquer des résultats si variés et contradictoires d'une simulation numérique à l'autre? Premièrement, les modèles utilisés ne sont pas toujours généralisables à l'ensemble des configurations magnétiques observables. Deuxièmement, jusqu'à très récemment, les méthodes numériques de mesures de l'hélicité magnétique relative étaient fortement imprécises. Ainsi, l'hélicité relative était probablement mal estimée dans beaucoup de travaux (cf. Sect. 3.3). La diversité des conclusions obtenues jusqu'à présent n'est donc pas surprenante.

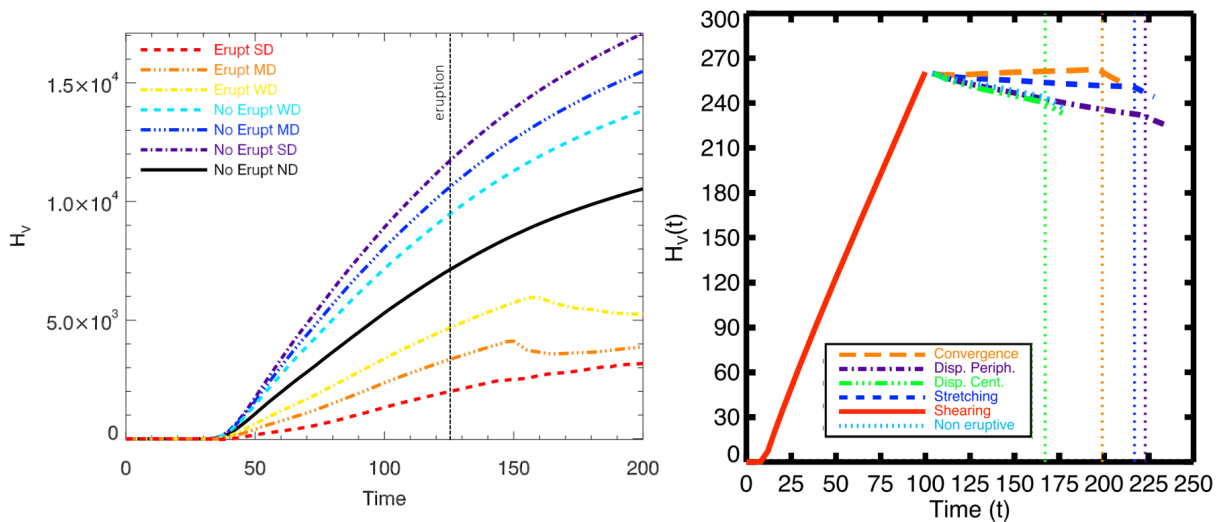


FIGURE 4.2 – **Gauche** : évolution de l'hélicité relative en fonction du temps dans les simulations de [Leake et al. \(2013, 2014\)](#). Les courbes orange, rouge et jaune correspondent aux simulations éruptives tandis que les courbes bleue, violette et noire représentent les simulations stables. Dans les simulations de [Leake et al. \(2013, 2014\)](#), l'hélicité relative est systématiquement plus grande pour les simulations non éruptive que pour les simulations éruptives. Adaptée de [Pariat et al. \(2017\)](#). **Droite** : évolution de l'hélicité relative (cf. Eq. 3.9), dans les simulations numériques MHD de [Zuccarello et al. \(2015\)](#). Chaque courbe représente une simulation différente. Les éruptions sont marquées par des traits verticaux en pointillés. Au moment de l'éruption, la valeur de l'hélicité relative est différente dans toutes les simulations. Adaptée de [Zuccarello et al. \(2018\)](#).

Récemment, en se servant de méthodes d'estimation plus robustes et consistantes (cf. Sect 3.3), [Pariat et al. \(2017\)](#) et [Zuccarello et al. \(2018\)](#) ont finalement conclu sur l'absence d'un seuil en hélicité magnétique totale (cf. Fig. 4.2). [Pariat et al. \(2017\)](#) ont utilisé la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1) pour estimer l'hélicité magnétique relative dans sept simulations numériques MHD (cf. Sect. 4.2.1 pour une description plus complète des simulations utilisées). [Pariat et al. \(2017\)](#) ont montré que les simulations éruptives possèdent une hélicité relative plus faible que les simulations non éruptives avant l'éruption (cf. Fig. 4.2, panneau de gauche). Cela est donc l'opposé de ce qui est attendu si un seuil en hélicité relative existait. Notons également que l'évolution de l'hélicité relative avant l'éruption est identique entre toutes les simulations. De même, nous avons dans [Zuccarello et al. \(2018\)](#) estimé l'hélicité relative de quatre simulation MHD éruptive qui possèdent des forçages photosphériques différents (cf. Sect. 4.2.1). Nous avons montré qu'au moment de l'éruption, la valeur de l'hélicité relative varie fortement d'une simulation à l'autre (cf. Fig. 4.2, panneau de droite). L'ensemble des résultats de [Zuccarello et al. \(2018\)](#) et [Pariat et al. \(2017\)](#) confirme donc que l'éruption d'un système magnétique n'est pas lié à un dépassement d'une valeur critique d'hélicité relative. De façon générale, l'hélicité relative ne peut donc pas servir pour prédire l'éruptivité d'une région active.

4.1.2 Influence de la quantité d'hélicité relative coronale sur les propriétés de l'éruption

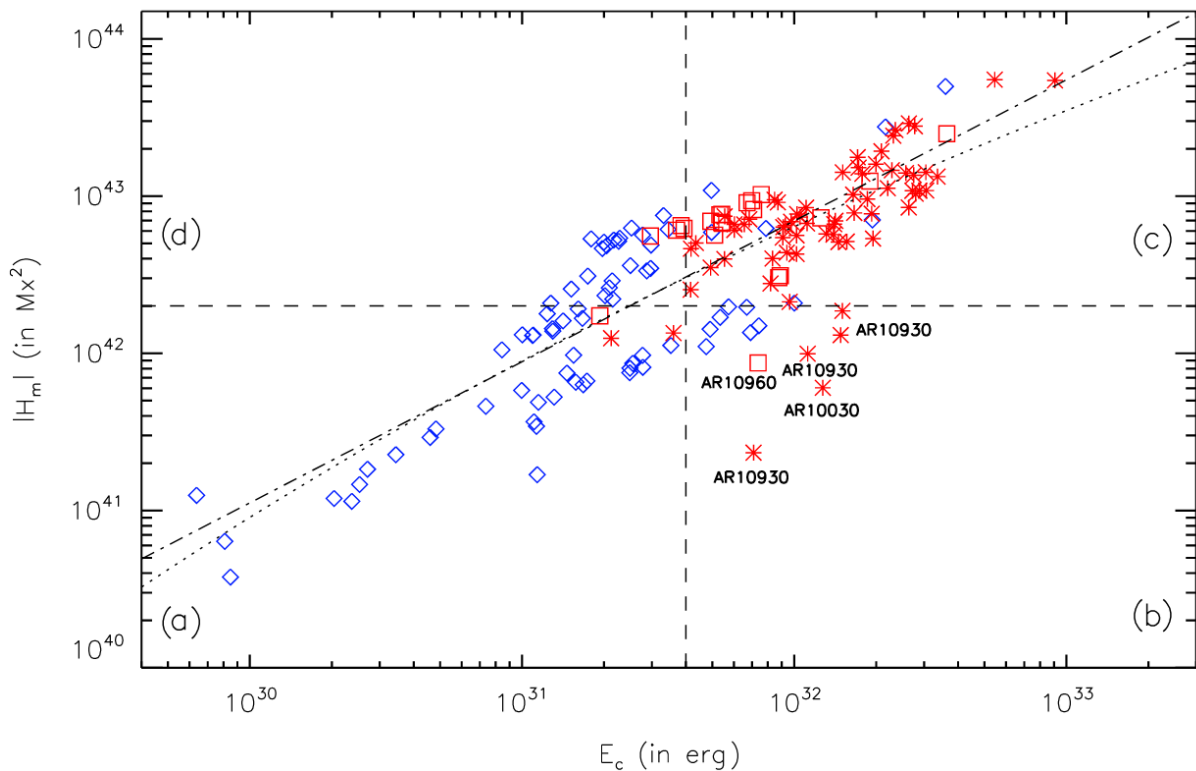


FIGURE 4.3 – Diagramme énergie libre-hélicité magnétique. Les losanges bleus, les carrés rouges et les astérisques rouges correspondent aux régions actives non éruptives, engendrant des éruptions de classe M et de classe X. Au-dessus de $H_m \approx 2 \times 10^{42} \text{ Mx}^2$ et $E_c \approx 4 \times 10^{31} \text{ erg}$, les régions actives semblent donner exclusivement des éruptions de classe X. Adaptée de [Tziotziou et al. \(2012\)](#).

Si la connaissance de la quantité d'hélicité accumulée dans la couronne solaire n'est pas

suffisante pour réellement conclure sur l'éruptivité d'une région active, peut-elle nous renseigner sur les caractéristiques d'une éventuelle éruption ?

Dans le même esprit que [Nindos & Andrews \(2004\)](#), mais en utilisant une modélisation du champ magnétique développée par [Georgoulis et al. \(2012\)](#), [Tziotziou et al. \(2012\)](#) ont mesuré l'hélicité magnétique à partir de 162 magnétogrammes correspondant à 42 régions actives différentes. L'analyse de l'hélicité relative fut couplée à celle de l'énergie libre (cf. Sect. 1.3.1.2). [Tziotziou et al. \(2012\)](#) ont trouvé un résultat cohérent avec celui de [Park et al. \(2010\)](#) : toutes les régions produisant une éruption de classe M et X ont une hélicité magnétique relative supérieure à $2 \times 10^{42} \text{Mx}^2$. Mais ces régions ont également une énergie libre supérieure à $2 \times 10^{42} \text{Mx}^2$ (cf. Fig. 4.3). [Tziotziou et al. \(2012\)](#) ont mis en évidence une relation linéaire entre l'énergie libre et l'hélicité relative (c.-à-d. $|H_r| \propto E_{\text{libre}}$). Cette relation fut également observée au niveau d'une seule région active ([Tziotziou et al. 2013](#)). Si cette dernière est généralisable, cela signifie que plus une région active contient d'hélicité magnétique relative, plus l'énergie libérable est grande (et réciproquement).

D'autre part, réduire l'hélicité magnétique relative d'un système entraînerait une diminution de son énergie libre ([Tziotziou et al. 2013](#)). Une éruption est donc d'autant plus énergétique si l'hélicité magnétique est fortement réduite lors de celle-ci. L'hélicité magnétique étant conservée, sa diminution nécessite son transfert vers l'extérieur du domaine ou son annihilation (cf. Sect. 3.2.3). Les éruptions solaires les plus énergétiques pourraient donc être dues à d'importantes annihilations d'hélicité magnétique (e.g. [Kusano et al. 1995](#)). Cette conjecture a conduit à l'élaboration de modèles de CMEs et d'éruptions solaires basés sur l'annihilation d'hélicité (e.g. [Kusano et al. 2003, 2004](#)). Dans des simulations numériques de reconnections entre tubes de flux magnétique, [Linton et al. \(2001\)](#) et [Linton & Antiochos \(2002\)](#) ont montré que lorsqu'elle est possible, l'interaction par reconnexion magnétique de deux tubes d'hélicités opposées entraîne un état relaxé d'énergie plus basse et la libération de plus d'énergie cinétique que l'interaction de tube de même hélicité. Différentes études observationnelles ont mis en évidence des flux d'hélicité qui ont un signe opposé (e.g. [Chandra et al. 2010](#); [Romano & Zuccarello 2011](#); [Dalmasse et al. 2013b](#); [Vemareddy & Démoulin 2017](#); [Dalmasse et al. 2018](#)), notamment avant le début d'une éruption ([Vemareddy et al. 2012](#); [Wang et al. 2014b](#); [Gao 2018](#)). Cela pourrait suggérer la présence d'annihilations au niveau des régions actives. Quoi qu'il en soit, la quantité d'hélicité magnétique stockée dans la couronne solaire pourrait être liée aux rayonnements électromagnétiques de cette dernière.

4.1.3 Liens entre éruptivité et flux d'hélicité relative

Dans les sous-sections précédentes (cf. Sects. 4.1.1 et 4.1.2), j'ai décrit un ensemble de travaux s'intéressant aux liens entre la quantité d'hélicité magnétique relative d'une région active et son éruptivité. Néanmoins, estimer l'hélicité magnétique contenue dans la couronne solaire n'est pas chose aisée (cf. Sect. 3.3). Cela peut nécessiter par exemple des reconstructions 3D du champ magnétique (cf. Sect. 3.3.1). À partir des données mesurées par les instruments solaires, il est cependant possible d'estimer le flux d'hélicité relative à travers la photosphère (cf. Sect. 3.3.2). Comme nous allons le voir ci-après, l'étude du flux d'hélicité donne également des informations sur l'éruptivité des régions actives ainsi que sur les propriétés des éruptions, si elles ont lieu (e.g. [Moon et al. 2002](#); [Chae et al. 2004](#); [Magara & Tsuneta 2008](#); [Liu et al. 2014](#); [Vemareddy 2015](#); [Bi et al. 2018](#); [Ye et al. 2018](#); [Vemareddy 2019](#)).

Tout d'abord, l'injection d'hélicité relative n'a pas la même dynamique durant toute l'évolution d'une région active éruptive. Des variations majeures peuvent être parfois observées pendant une éruption (e.g. [Moon et al. 2002](#)), mais également avant ou après celle-ci (e.g. [Smyrli et al. 2010](#)). L'origine des variations du flux d'hélicité n'est cependant par encore parfaitement connue et plusieurs éléments de réponse ont été proposés.

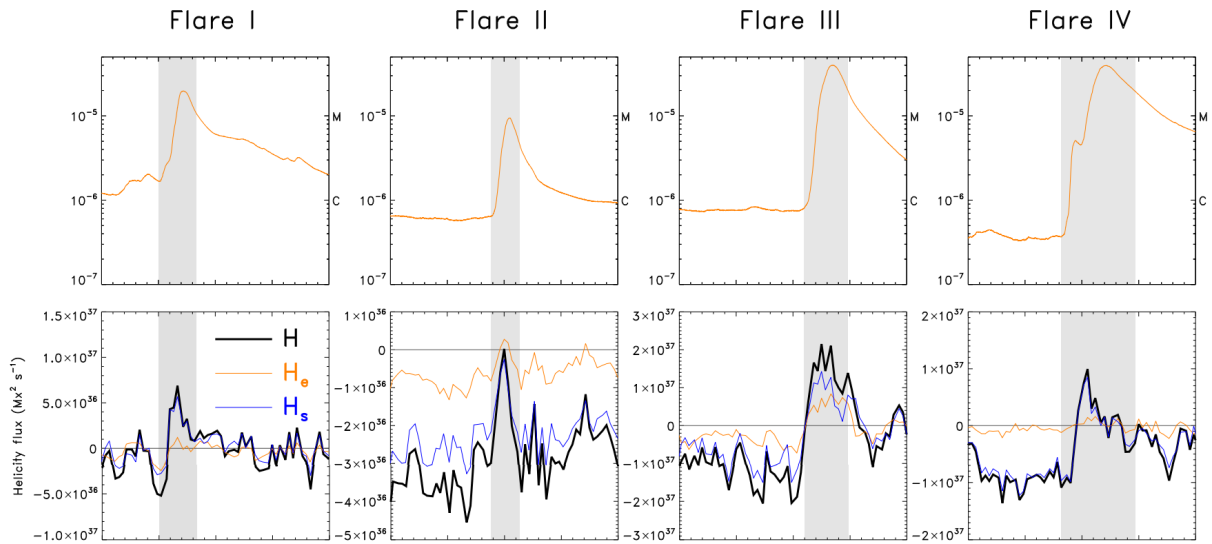


FIGURE 4.4 – **Haut** : évolution du rayonnement X au niveau de quatre régions actives différentes produisant des flares. **Bas** : variation du flux d’hélicité relative. La courbe noire représente dH_r/dt calculé à partir de l’équation (3.28). Les courbes orange et bleu correspondent aux intégrales du membre de droite de l’équation (3.28). Adaptée de Bi et al. (2018)

Pour Smyrli et al. (2010) par exemple une augmentation de l’injection d’hélicité juste avant une CME peut témoigner de l’émergence de nouveaux tubes de flux magnétique dans la couronne solaire, alors que les changements après la CME seraient dus au déséquilibre du moment magnétique entre la couronne appauvrie en hélicité et les régions sous-photosphériques comme suggéré par Longcope & Welsch (2000) et Démoulin et al. (2002). De brusques variations du flux d’hélicité pourraient également être dues à l’inversion rapide de la rotation d’une polarité (Bi et al. 2016) ou aux mouvements de rotation soudains des polarités des deux côtés de la ligne d’inversion (Bi et al. 2017). Des changements brusques de la polarité des régions actives peuvent en effet être observés durant une éruption (Wang et al. 2014b) notamment durant la propagation d’un ruban d’éruption (Liu et al. 2016a). Dans leur étude, Bi et al. (2018) ont montré une variation du flux d’hélicité pendant quatre éruptions solaires différentes (cf. Fig. 4.4). Selon Bi et al. (2018), cette variation aurait pour origine une modification rapide de la force de Lorentz s’exerçant sur les polarités qui a également lieu pendant l’éruption.

Notons cependant qu’il faut être très prudent sur l’interprétation d’une brusque variation de l’injection d’hélicité relative au moment même de l’éruption en particulier dans les études trop anciennes. En effet, Hartkorn & Wang (2004) ont montré que de telles variations n’ont pas d’origines physiques réelles, mais qu’elles proviennent de signaux artificiels dus à une trop faible résolution spatiale et temporelle lors de la mesure du champ magnétique photosphérique par l’instrument MDI/SOHO (Qiu & Gary 2003). En reproduisant ce biais de mesure dans des simulations numériques, Hartkorn & Wang (2004) ont ainsi retrouvé la même dynamique au moment de l’éruption que celle mise en évidence par Moon et al. (2002). Les instruments solaires actuels tels que HMI/SDO ont une meilleure résolution limitant ainsi la présence d’artefacts de mesure.

Rappelons également que l’hélicité magnétique est liée au flux magnétique (cf. Sect. 1.4.1). Une augmentation du flux d’hélicité peut alors être due à un pic de flux magnétique qui a lieu avant une CME (e.g. Suryanarayana & Balakrishna 2017). Pour tenir compte de l’influence du flux magnétique, Vemareddy (2019) s’est intéressé aux variations du flux d’hélicité relative normalisé par le flux magnétique au carré. En comparant la moyenne de l’injection d’hélicité normalisée pour quatre régions actives, Vemareddy (2019) a montré que les régions engendrant

des CMEs ont une moyenne de flux d'hélicité normalisée beaucoup plus élevée que celle dont l'éruption est confinée. Un lien pourrait donc exister entre l'éruptivité d'une région et son injection d'hélicité normalisée.

De plus, en s'intéressant davantage à l'évolution d'une région active (NOAA 12673), [Vemareddy \(2019\)](#) a montré que la rapide injection d'hélicité, qui a lieu avant l'éruption, est due aux mouvements de cisaillement et de convergence du plasma le long de la ligne d'inversion. L'injection d'hélicité contribue à l'augmentation du nombre de "Twist" (cf. Sect. 1.4.2) du tube de flux magnétique, qui pourrait finir par dépasser le seuil critique au déclenchement de l'instabilité de kink ([Török et al. 2004](#)). Cette instabilité a été suggérée comme responsable de l'éruption de cette région active ([Yang et al. 2017](#)). Le flux d'hélicité pourrait alors jouer un rôle dans le déclenchement de l'éruption ([Vemareddy 2019](#)). Notons que le nombre de "Twist" seul n'est cependant pas un critère suffisant pour signaler l'éruptivité d'une région active ([Jing et al. 2018](#)).

Pour finir, les propriétés d'une éruption pourraient également être reliées aux flux d'hélicités avant son déclenchement. Cela est suggéré par [Warnecke & Peter \(2019\)](#) qui, dans une simulation MHD 3D de la couronne solaire, ont testé l'influence de l'hélicité injectée sur le rayonnement émis. [Warnecke & Peter \(2019\)](#) ont alors montré que plus l'hélicité magnétique injectée à la photosphère est grande, plus la couronne devient chaude et émet beaucoup plus de rayons X. L'émission de rayons X augmente de façon cubique avec l'hélicité injectée. [Park et al. \(2012\)](#) suggèrent également que l'hélicité injectée influe sur la vitesse d'une éventuelle CME. Plus précisément, [Park et al. \(2012\)](#) à partir de 28 régions actives différentes ont trouvé que la vitesse des CMEs est corrélée linéairement avec le taux d'injection moyen d'hélicité magnétique de la région active. Plus il y a d'hélicité injectée par heure au niveau d'une région active, plus la CME engendrée va être rapide. Ce résultat ne fait cependant pas l'unanimité. Par exemple, [Kim et al. \(2017\)](#) ont montré qu'il est en général difficile de trouver de bonnes corrélations entre les vitesses des CMEs et les paramètres magnétiques de la région active, comme son injection d'hélicité. Ces faibles corrélations pourraient être cependant dues aux valeurs relativement plus faibles des vitesses de la CME et des paramètres magnétiques par rapport à celles des études précédentes.

En conclusion, le flux d'hélicité relative semble relié d'une façon ou d'une autre à l'éruptivité d'une région active. Néanmoins, corrélation n'est pas synonyme de causalité. Rien ne prouve formellement qu'une variation du flux d'hélicité influe sur le déclenchement d'une éruption ou qu'au contraire l'éruption impacte le flux d'hélicité. Comme mentionné précédemment, une variation du flux d'hélicité peut être simplement la conséquence des différents processus physiques qui accompagnent une éruption. Davantage d'études sont nécessaires pour déterminer le rôle exact que joue l'injection d'hélicité photosphérique lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire.

4.2 Rôle de l'hélicité magnétique non potentielle comme indicateur de l'éruptivité

Nous avons vu précédemment que l'hélicité magnétique relative semble être liée à l'éruptivité d'une région active (cf. Sect. 4.1.1.1), mais qu'elle ne peut pas être utilisée comme indicateur du déclenchement d'une éruption (cf. Sect. 4.1.1.2).

Dans cette section, je montrerai qu'au contraire le potentiel éruptif d'une région active peut être signalé à l'aide d'un ratio d'hélicité construit à partir de la décomposition de l'hélicité relative en hélicités non potentielle et mêlée (cf. Sect. 4.2.1). Dans différentes simulations d'éruptions solaires, ce ratio d'hélicité atteint en particulier son maximum au moment de l'érup-

tion (cf. Sect. 4.2.2). Il s'agit du principal résultat d'une étude à laquelle j'ai contribué et qui est menée dans [Zuccarello et al. \(2018\)](#). Je finirai par décrire les différentes perspectives qu'offre le nouveau critère d'éruptivité mis en évidence (cf. Sect. 4.2.3).

4.2.1 Ratio de l'hélicité magnétique non potentielle sur hélicité magnétique relative

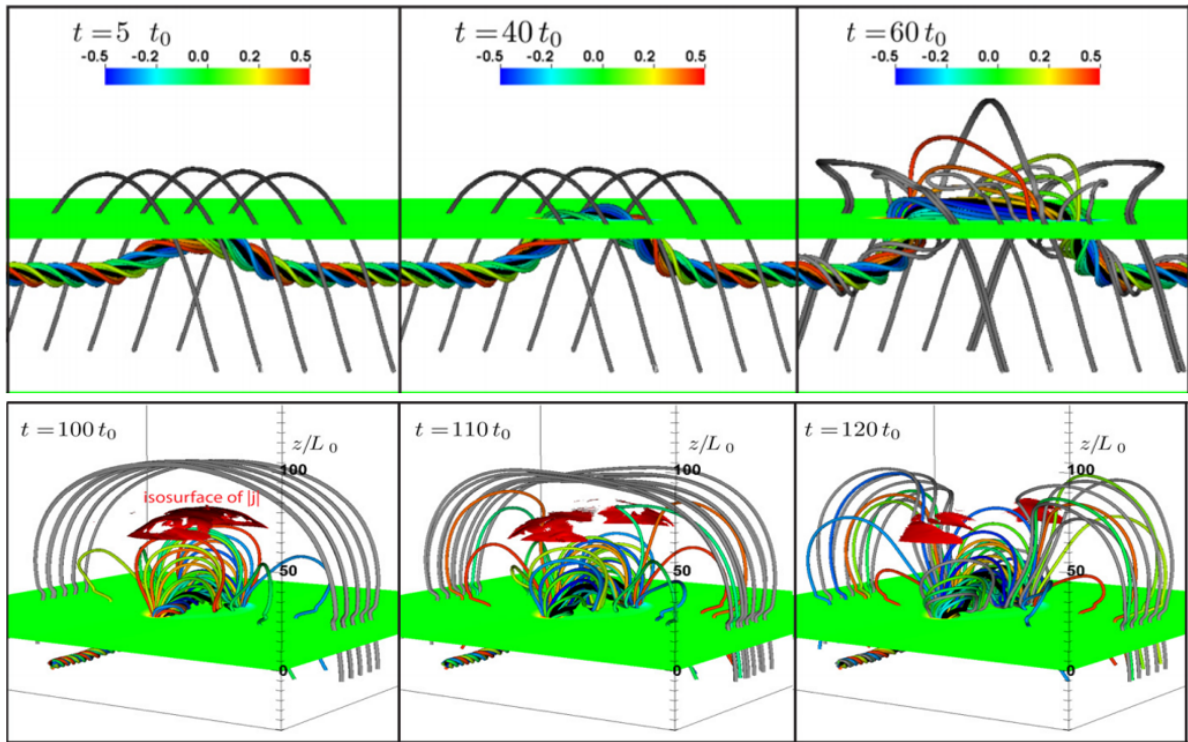


FIGURE 4.5 – Évolution des lignes de champ magnétique dans une simulation d'émergence et d'éruption d'un tube de flux torsadé. La surface verte correspond à la photosphère. Le champ magnétique du tube de flux émergeant reconnecte avec le champ magnétique potentiel en arcade vers $t = 110t_0$. Le tube de flux va ensuite être libre de s'étendre spatialement. Adaptée de [Leake et al. \(2014\)](#).

À la recherche d'une nouvelle grandeur reliée à l'éruptivité d'un système magnétique, [Pariat et al. \(2017\)](#) se sont intéressés au potentiel prédictif de quantités globales que sont les énergies totale E_v , libre E_j et potentielle E_p (cf. Sect. 1.3.1.2) ainsi que les hélicités relative H_r , non potentielle H_j et mêlée H_{pj} (cf. Sect. 3.1.4) dans différentes simulations numériques MHD 3D. Les hélicités non potentielle et mêlée n'avaient jusqu'alors jamais été étudiées sous cet axe. Chaque quantité est calculée à tous les instants en utilisant leur définition classique nécessitant le calcul d'intégrales volumiques (cf. Eqs. 1.1, 1.3, 3.9 et 3.18, cf. Sect. 3.3.1).

Les simulations MHD 3D utilisées décrivent l'émergence d'un tube de flux magnétique torsadé dans une atmosphère solaire stratifiée où un champ coronal sous forme d'arcade est présent ([Leake et al. 2013, 2014](#)). L'état final du tube de flux dépend du choix des paramètres du champ magnétique coronal. Il est ainsi possible de modifier la force du champ magnétique (c.-à-d. l'intensité de \mathbf{B}) et son orientation. En fonction du choix fait, le système est, soit éruptif soit stable. Dans les simulations non éruptives, la direction du champ magnétique coronal est identique à celui du haut du tube de flux, maximisant ainsi le confinement de ce dernier par le

champ magnétique environnant. Au contraire dans les simulations éruptives le champ magnétique horizontal \mathbf{B}_x change de signe à l'interface entre le tube de flux et l'arcade (créant donc une séparatrice, cf. Fig. 4.5). La reconnexion magnétique entre les deux structures est donc favorisée.

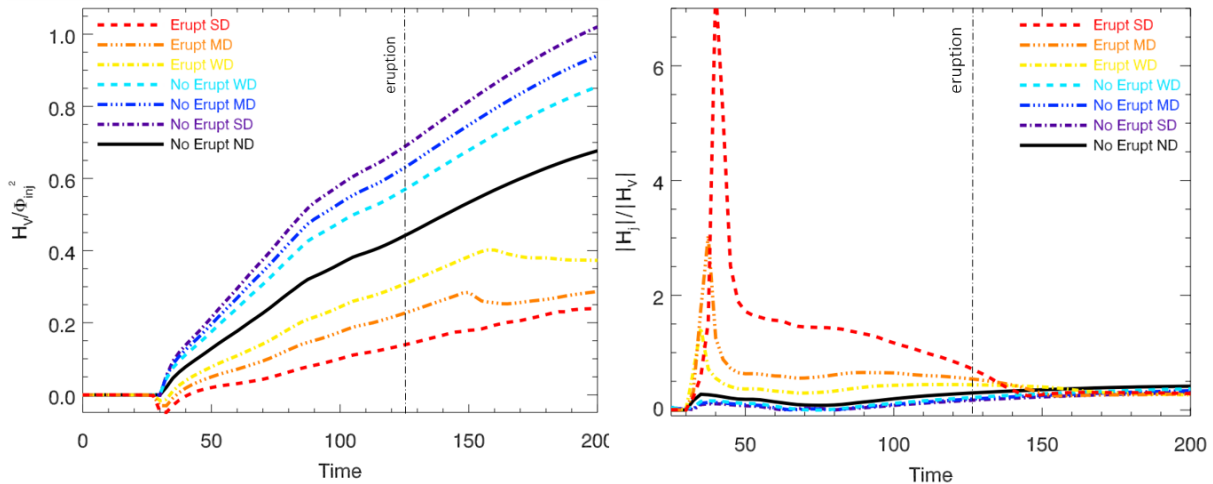


FIGURE 4.6 – **Gauche** : évolution de l'hélicité relative normalisée par le flux magnétique en fonction du temps. Les courbes orange, rouge, jaune correspondent aux simulations éruptives tandis que les courbes bleues, violette, noire représentent les simulations stables (Leake et al. 2013, 2014). Avant l'éruption, l'hélicité normalisée a des valeurs supérieures dans les simulations stables. Il n'existe donc pas de seuils en hélicité relative normalisée. **Droite** : même figure pour le rapport entre l'hélicité non potentielle et l'hélicité relative. Ce rapport atteint des maximums bien plus élevés dans les simulations éruptives avant l'éruption. Le ratio $\eta_H = H_j/H_r$ (cf. Eq. 4.1) peut donc servir comme indicateur de l'éruptivité. Adaptée de Pariat et al. (2017).

En calculant la déviation standard relative de toutes les quantités à un instant donné, ainsi que le ratio de leurs valeurs moyennes dans les simulations éruptives sur leurs valeurs moyennes dans les simulations non éruptives, Pariat et al. (2017) ont montré que tous les critères basés sur l'énergie magnétique ne sont pas des bons prédicteurs de l'éruptivité de la simulation. Avant la phase éruptive, leurs déviations standards sont très faibles. L'évolution des différentes énergies se comporte de façon similaire dans toutes les simulations. Au contraire les hélicités magnétiques, H_r , H_j , H_{pj} permettent de distinguer les différentes simulations. Cependant, les simulations stables tendent à avoir des hélicités magnétiques supérieures à celles des simulations éruptives soit avant l'éruption, soit après. Par conséquent, il est impossible de déterminer un seuil en hélicités relative, potentielle et mêlée qui soit atteint uniquement par les simulations éruptives. Ces hélicités ne sont pas des prédicteurs fiables et utilisables.

Une grandeur a cependant montré de très bons résultats, il s'agit du ratio entre l'hélicité magnétique non potentielle et l'hélicité magnétique relative :

$$\eta_H = \frac{|H_j|}{|H_r|}. \quad (4.1)$$

Le critère d'éruptivité, η_H , présente de grandes variations de sa déviation standard avant et après l'éruption. Il permet donc de distinguer les différentes simulations. D'autre part, avant l'éruption η_H est plus grande dans les simulations éruptives que dans les simulations non éruptives (cf. Fig. 4.6). Cela sous-entend l'existence d'un seuil de η_H qui si dépassé, conduirait forcément au déclenchement de l'éruption dans les instants qui suivent. De plus, après l'éruption

tion, la valeur moyenne de η_H dans les simulations éruptives est quasi identique à sa valeur moyenne dans les simulations stables. Ce résultat est attendu puisqu’aucune des simulations ne présente des comportements éruptifs dans les derniers instants. Cette quantité possède donc un fort potentiel pour permettre la prédiction des éruptions solaires.

L’étude menée par [Pariat et al. \(2017\)](#) fut la première à véritablement estimer le ratio $\eta_H = |H_j|/|H_r|$ (cf. Eq. 4.1). Il reste donc beaucoup de questions autour de ce dernier. Par exemple, comment évolue-t-il ? Comment le mesurer à partir d’observations ? Comment sa valeur dépend-elle du volume d’étude ? Pour répondre à ces différentes questions, je me suis intéressé aux propriétés théoriques et analytiques des hélicités mêlée et potentielle qui le composent (cf. Sect. 5.2.2). Jusqu’à présent, ces quantités et leurs propriétés étaient encore très méconnues.

On peut également se demander si ce critère peut vraiment être utilisé pour prédire l’éruptivité d’une région active. Sans prendre en compte les hypothèses liées au paradigme MHD, les simulations de [Leake et al. \(2013, 2014\)](#) ont différentes limitations. Tout d’abord, la quantité d’hélicité magnétique injectée dans ces simulations est largement supérieure à celle typiquement observée au niveau de la photosphère ([Tian & Alexander 2008](#); [Démoulin & Pariat 2009](#)). D’autre part, ici le flux du champ magnétique coronal est aussi intense que celui injecté par la structure émergente. Les observations solaires ont cependant montré que le flux du champ magnétique environnant est généralement bien plus faible que le flux émergeant. C’est pour ces deux principales raisons que les simulations se distinguent de ce qui peut être véritablement observé lors d’une éruption.

D’autres parts, les simulations de [Leake et al. \(2013, 2014\)](#) ne permettent pas de conclure à l’existence d’un seuil, η_{Hcrit} , du critère d’éruptivité η_H dont le dépassement entraînerait le déclenchement de l’éruption. En effet, dans les simulations de [Leake et al. \(2013, 2014\)](#) la stabilité du système magnétique est prédéterminée par les conditions initiales imposées. En fonction de l’orientation initiale du champ magnétique potentiel entourant le tube de flux, la simulation est soit stable soit éruptive. Ainsi, on ne peut pas savoir si l’instabilité qui déclenche l’éruption est atteinte une fois une valeur seuil de η_H dépassée puisqu’initialement la configuration magnétique est déjà instable.

Pour mettre en évidence un seuil η_{Hcrit} , il faut donc coupler les résultats obtenus par [Pariat et al. \(2017\)](#) avec ceux obtenus à partir de simulations numériques où le système est initialement stable et est amené progressivement vers une perte de stabilité (cf. Sect. 4.2.2). De plus, le rôle de η_H comme indicateur de l’éruptivité doit être confirmé par des études observationnelles. Dans cette optique, je présenterai section (4.3) l’évolution du ratio η_H mesuré à partir de données observationnelles issues de différentes régions actives. L’estimation de l’hélicité magnétique par intégration directe volumique nécessite cependant de nombreuses précautions, notamment sur la solénoïdalité du champ magnétique (cf. Sect. 4.3.1).

4.2.2 Seuil du ratio d’hélicité magnétique : [Zuccarello, Pariat, Valori, & Linan \(2018\)](#)

4.2.2.1 Résumé

Pour déterminer si le résultat de [Pariat et al. \(2017\)](#) est simplement dû à une configuration magnétique particulière, nous avons dans [Zuccarello et al. \(2018\)](#) estimé le ratio d’hélicité dans un autre jeu de simulations numériques paramétriques [Zuccarello et al. \(2015\)](#). De plus, notre objectif était de démontrer ou non la présence d’un seuil d’éruptivité relié au ratio d’hélicité η_H (cf. Eq. 4.1).

Au contraire, dans les simulations de [Zuccarello et al. \(2015\)](#) le système est amené vers le déclenchement de l’instabilité par des mouvements forcés du champ magnétique, à la frontière inférieure, qui imitent l’évolution typique d’une région active. Les lignes de champ magnétique

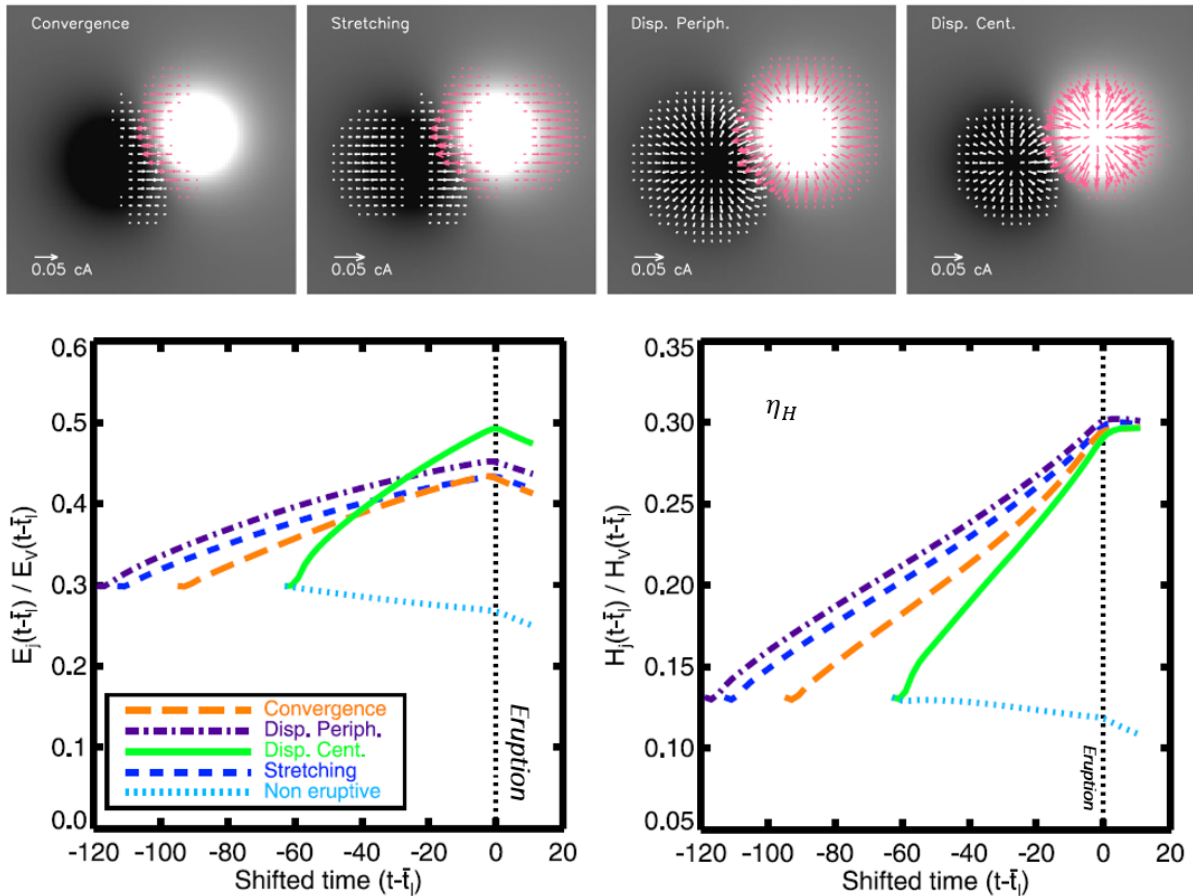


FIGURE 4.7 – **Haut** : magnétogramme des quatre simulations éruptives présentées dans [Zuccarello et al. \(2015\)](#). Les flèches blanches et rouges indiquent la direction et l'intensité du champ de vitesse des polarités magnétiques **Bas gauche** : évolution du rapport entre l'énergie libre, E_j (cf. Eq. 1.3), et l'énergie totale, E_v (cf. Eq. 1.1), dans les simulations numériques MHD de [Zuccarello et al. \(2015\)](#). Au moment de l'éruption la valeur ratio E_j/E_v présente une importante dispersion entre les différentes simulations. **Bas droit** : évolution du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1). Au moment de l'éruption, η_H atteint la même valeur, $\eta_{Hcrit} = 0.3$ pour toutes les simulations éruptives. Dans la simulation non éruptive (courbe bleu ciel), ce seuil n'est jamais atteint.

sont ancrées à la surface et il n'y a pas d'émergence de tubes de flux magnétique contrairement aux simulations de [Leake et al. \(2013, 2014\)](#). Dans [Zuccarello et al. \(2018\)](#), nous avons considéré quatre simulations numériques qui partagent une première phase commune, mais qui se différencient par le mouvement imposé à la surface lors de la formation du tube de flux magnétique. Pour chaque simulation, le temps exact de la déstabilisation est obtenu grâce à une série de "runs" de relaxations ([Zuccarello et al. 2015](#)).

Nous avons trouvé qu'à l'instant précis de l'éruption le ratio, $\eta_H = |H_j|/|H_r|$, atteint une valeur quasi identique dans toutes les simulations (cf. Fig. 4.7, panneau de droite). La très faible dispersion observée entre les quatre cas est inférieure à la précision des mesures de l'hélicité. Cela signifie qu'il existe une valeur seuil, η_{Hcrit} , du ratio η_H au-delà de laquelle le système devient instable et engendre l'éruption. Notre étude renforce donc le résultat préliminaire de [Pariat et al. \(2017\)](#) et confirme que le ratio constitue un critère suffisant d'éruptivité.

Pour toutes les autres grandeurs calculées dans cette étude (E_j , E_j/E_v , H_r etc.), le déclenchement de l'éruption a lieu quand ces grandeurs atteignent des valeurs variant fortement entre les différentes simulations (cf. Fig. 4.7, panneau de gauche). Comme montré par [Guennou](#)

et al. (2017) et Pariat et al. (2017), les grandeurs composées de l'énergie magnétique et de sa décomposition ne présentent aucun seuil.

Remarquons ici que la valeur particulière trouvée pour le ratio au moment de la déstabilisation n'a de sens que pour ce jeu de simulations uniquement. L'hélicité magnétique n'étant pas additive (cf. Sect. 3.4), un autre volume avec des conditions aux frontières différentes aurait conduit à une mesure du seuil différente. La valeur obtenue ici n'est donc pas universelle.

D'autre part, Zuccarello et al. (2015) ont montré que le déclenchement de l'éruption était lié à l'instabilité de Torus. Plus précisément, l'éruption a lieu quand l'axe du tube de flux atteint une hauteur où l'indice d'affaiblissement vaut $n \approx 1.45 \pm 0.05$. Cette valeur est proche de celle d'un anneau de courant idéal. L'indice d'affaiblissement critique est atteint quand l'hélicité non potentielle vaut un tiers de l'hélicité totale. À ce moment, le courant électrique accumulé par torsion du champ magnétique non potentiel ne peut plus être maintenu par la tension du champ potentiel environnant. Nos résultats suggèrent donc que le ratio d'hélicité a un lien avec l'instabilité de Torus.

4.2.2.2 Ma contribution

Notre article (Zuccarello et al. 2018) est basé sur la dynamique des hélicités non potentielle et mêlée dont l'étude des propriétés est au cœur de mes travaux de thèse (cf. Chap. 5). J'ai donc pu apporter mon expertise sur le sujet. J'ai en particulier repris les simulations de Zuccarello et al. (2015), pour comprendre entre autres, comment le ratio d'hélicité, η_H (cf. Eq. 4.1), se construit avant l'éruption. Pour cela, je me suis intéressé à la variation temporelle des hélicités non potentielle et mêlée (cf. Chap. 5). J'ai également comparé les différentes simulations de Zuccarello et al. (2015) ainsi que les flux d'hélicités avec les flux d'énergies (cf. Sect. 5.3). Mes conclusions sont regroupées dans Linan et al. (2020). Mon expertise sur les propriétés des hélicités non potentielle et mêlée fut utile notamment lors de la rédaction et de la relecture de l'article auxquelles j'ai contribué.

De plus, en utilisant mon implémentation numérique de la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sects. 3.3.1.4 et 5.2.2.1), j'ai estimé le critère d'éruptivité η_H dans les mêmes simulations numériques que Zuccarello et al. (2018) et j'ai obtenu les mêmes résultats. La faible dispersion de η_H au moment de l'éruption ne dépend donc pas de la méthode numérique employée pour estimer les différentes hélicités.

Le traitement numérique des données magnétiques issues des simulations de Zuccarello et al. (2015) a soulevé plusieurs problèmes. Le principal étant que le champ magnétique est initialement calculé dans un maillage non uniforme où le pas spatial entre deux valeurs varie dans le domaine (cf. Fig. 4.8). Au niveau des polarités, la résolution est plus de cinquante fois supérieure à celle des bords du volume. La taille des cellules dans la direction horizontale, dx varie en effet de 0.006 au centre du domaine à 0.32 aux frontières. Cela permet d'avoir une meilleure précision au niveau des régions où se concentrent les processus physiques (e.g. la formation du tube de flux torsadé) tout en gardant un nombre de points de maille restreint (cf. Fig. 4.8). Or, comme mentionné section (3.3.1.4), mon implémentation numérique pour l'estimation des différentes hélicités ne peut traiter que des données issues de maillage uniforme ($dx = dy = dz$, avec dx , dy et dz la taille des cellules du domaine dans les trois directions).

La solution a alors été d'interpoler les données magnétiques depuis le maillage non uniforme vers un maillage uniforme qui puisse être traité par mon implémentation numérique d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1.4). À partir d'un code d'interpolation linéaire écrit dans le langage IDL, j'ai développé une version dans le langage de programmation Python. Là où initialement le code en IDL traitait un par un les fichiers contenant le champ magnétique, ma version permet l'interpolation automatique et en parallèle de plusieurs fichiers simultanément. De plus, mon implémentation numériquement peut s'exécuter sur les nœuds de la grappe de

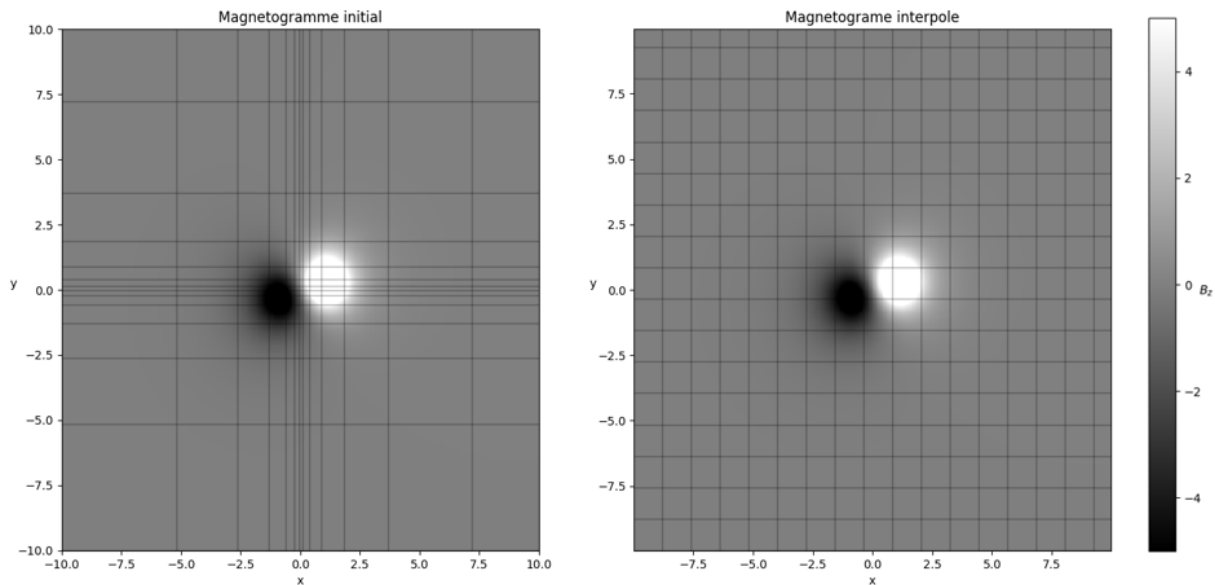


FIGURE 4.8 – **Gauche** : magnétogramme de la simulation "Convergence" de [Zuccarello et al. \(2015\)](#). **Droite** : magnétogramme de la même simulation après interpolation du maillage. Les lignes horizontales et verticales sont tracées tous les 20 points de maille.

calcul de l'Observatoire de Paris (cf. Sect. 2.3.1.2) afin de bénéficier des ressources nécessaires à son bon fonctionnement.

Le code d'interpolation prend en argument d'entrée la taille souhaitée des cellules du maillage interpolé. Le choix du dx (et donc du dy et dz puisque $dx = dy = dz$) est une étape cruciale. Si l'on choisit un dx très petit, $dx \sim 0.006$ par exemple, la résolution sera correcte au centre du domaine, mais les régions proches des frontières vont être sur échantillonnées. Autrement dit, on va créer beaucoup de nouveaux points qui n'étaient pas présents dans le maillage initial. Il existe cependant un maximum de points de maille qui peuvent être traités par le code d'intégration directe volumique sans engendrer des fuites de mémoire. Ce maximum est dépassé si la taille des cellules du maillage interpolé est inférieure à une limite déterminée empiriquement : $dx < 0.06$.

Lors de mes nombreux essais pour déterminer la meilleure résolution, j'ai remarqué que la création de nouveaux points de maille entraîne une modification de la divergence du champ magnétique. Or comme décrit section (2.4.2), le non-respect de la propriété solénoïdale entraîne une mauvaise estimation des hélicités magnétiques. J'ai donc cherché une taille de cellule qui puisse garantir un champ magnétique suffisamment solénoïdal, mais également un nombre de points restreint. Le choix final a été $dx = dy = dz = 0.06$ (cf. Fig. 4.8 et [Linan et al. 2020](#)).

Ce choix est le plus optimal pour l'estimation du critère η_H à partir des données magnétiques issues des simulations numériques de [Zuccarello et al. \(2015\)](#). Pour ne pas avoir à se soucier des limitations engendrées par l'interpolation des données, il est nécessaire de développer une méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1.4) qui puisse traiter des maillages non uniformes. Il s'agit d'un projet sur lequel je travaille.

4.2.3 Perspectives

Dans [Zuccarello et al. \(2018\)](#), nous avons confirmé les travaux de [Pariat et al. \(2017\)](#) en montrant que le critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1) semble un bon indicateur du potentiel éruptif d'une configuration magnétique. En particulier, nous avons mis en évidence un seuil dont le dépassement entraîne systématiquement le déclenchement de l'instabilité à l'origine de

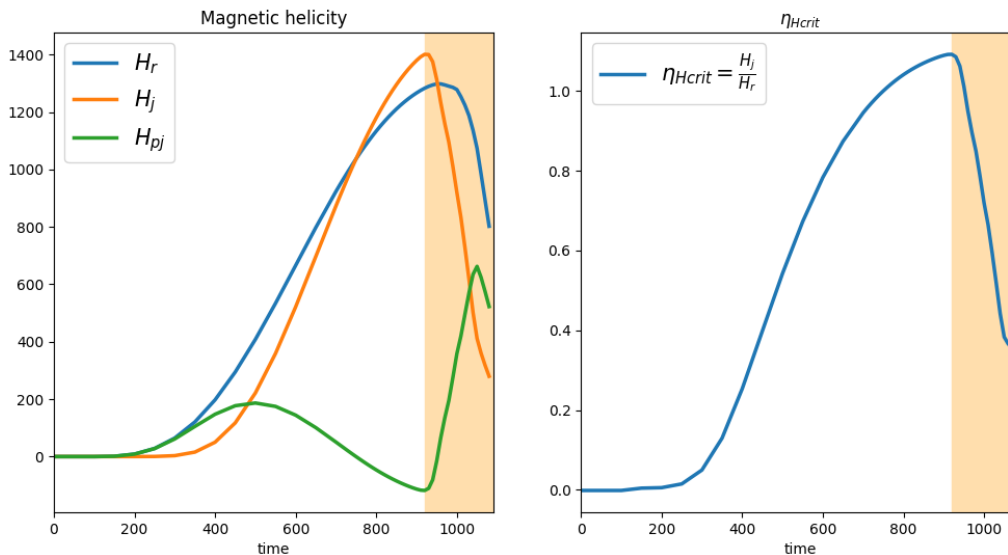


FIGURE 4.9 – **Gauche** : évolution des hélicités relative (H_r , en bleu), non potentielle (H_j , en orange) et mêlée (H_{pj} , en vert) dans la simulation MHD d'un jet coronal (Pariat et al. 2009). **Droite** : évolution du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1) dans la même simulation. La bande jaune correspond à la phase d'éruption. Le critère η_H atteint son maximum au moment de l'éruption.

l'éruption. En étudiant la distribution des courants électriques dans les mêmes simulations que nos travaux, Zuccarello et al. (2015) ont conclu que le "trigger" (cf. Sect. 1.3.2.2) de l'éruption est l'instabilité de Torus (Van Tend & Kuperus 1978; Kliem & Török 2006; Kliem et al. 2014). Dans la section (1.3.2.2), nous avons vu que l'instabilité a lieu quand un indice d'affaiblissement n (cf. Eq. 1.15), dépasse une valeur critique. On peut alors se demander à quel point l'indice d'affaiblissement est lié au ratio η_H . En particulier, est-ce que dans n'importe quelle configuration magnétique, un seuil du critère η_H est atteint quand la valeur de l'indice d'affaiblissement est critique, et réciproquement? Si oui, le lien théorique entre ces deux quantités reste encore à déterminer.

La nature du ratio η_H rappelle également l'instabilité de Torus. En effet $\eta_H = H_j/H_r$ dépend de l'hélicité du champ porteur de courants et de l'hélicité mêlée qui tient compte des propriétés géométriques du champ magnétique potentiel en lien avec le champ non potentiel (cf. Sect. 3.1.4). Tandis que le déclenchement de l'instabilité de Torus est également lié à la relation entre la structure porteuse de courants et le champ environnant qui la confine (cf. Sect. 1.3.2.2).

Quoi qu'il en soit, davantage d'études sont nécessaires pour déterminer si le ratio η_H est physiquement lié à l'instabilité de Torus ou est juste un indicateur de celui-ci. Il faut également confirmer nos résultats dans un nombre plus important de simulations numériques couvrant une large gamme de configuration magnétique. J'ai par exemple dans Linan et al. (2018) montré que η_H permettait de signaler l'éruptivité de la simulation MHD modélisant la génération d'un jet coronal (Pariat et al. 2009). En effet, comme dans Zuccarello et al. (2018), le ratio η_H atteint son maximum au moment de l'éruption (cf. Fig. 4.9). Le rôle de η_H comme indicateur de l'éruptivité a également été confirmée rétrospectivement dans les simulations de Moraitis et al. (2014).

Jusqu'à maintenant, nous avons abordé uniquement des résultats obtenus à partir de données magnétiques issues de simulations. Il est cependant intéressant de vérifier si η_H indique réellement le potentiel éruptif de régions actives observées. À l'heure actuelle plusieurs études basées sur l'estimation du ratio η_H dans la couronne solaire ont déjà vu le jour (James et al. 2018; Thalmann et al. 2019a,b; Moraitis et al. 2019b; Price et al. 2019). La suite de ce chapitre

sera dédiée à la présentation de trois d'entre elles (Thalmann et al. 2019a,b; Moraitis et al. 2019b) auxquelles j'ai contribué et qui sont basées sur l'étude du critère d'éruptivité au niveau de régions actives éruptives dont le champ magnétique a été reconstruit par extrapolation sans force non linéaire (cf. Sect. 2.3).

Pour finir, Yang et al. (2020) ont récemment proposé une formulation différente du critère d'éruptivité, η_H . Pour cela, Yang et al. (2020) ont décomposé le champ magnétique, \mathbf{B} en une composante porteuse de courants, B_c , et en une composante potentielle qui est périodique au niveau des frontières latérales du domaine, B_0 (Wheatland 2006, 2007). Strictement parlant, B_0 n'est pas équivalent au champ potentiel, B_p (cf. Sect. 1.3.1.1). Yang et al. (2020) ont construit alors l'hélicité relative, H_{cr} , du champ magnétique B_c ainsi que les hélicités non potentielle, H_{cj} , et mêlée, H_{cpj} , associées. Le nouveau critère est donc le ratio H_{cj}/H_{cr} . Yang et al. (2020) ont appliqué leur nouvelle définition à un ensemble de modèles analytiques et numériques. Le ratio H_{cj}/H_{cr} présente une dynamique légèrement différente à celle de notre critère η_H et semble être plus sensible aux variations des courants électriques dans le volume. Davantage d'études sont cependant nécessaires pour déterminer à quels points les deux définitions fournissent des informations identiques ou différentes sur l'éruptivité d'une région active.



Threshold of Non-potential Magnetic Helicity Ratios at the Onset of Solar Eruptions

F. P. Zuccarello^{1,2} , E. Pariat² , G. Valori³ , and L. Linan²

¹ Centre for mathematical Plasma Astrophysics, Department of Mathematics, KU Leuven, Celestijnenlaan 200B, B-3001 Leuven, Belgium
Francesco.Zuccarello@kuleuven.be

² LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, F-92195 Meudon, France; Etienne.Pariat@obspm.fr, Luis.Linan@obspm.fr

³ UCL-Mullard Space Science Laboratory, Holmbury St. Mary, Dorking, Surrey, RH5 6NT, UK; g.valori@ucl.ac.uk
Received 2018 April 25; revised 2018 June 17; accepted 2018 June 18; published 2018 August 8

Abstract

The relative magnetic helicity is a quantity that is often used to describe the level of entanglement of non-isolated magnetic fields, such as the magnetic field of solar active regions. The aim of this paper is to investigate how different kinds of photospheric boundary flows accumulate relative magnetic helicity in the corona and if and how well magnetic-helicity-related quantities identify the onset of an eruption. We use a series of three-dimensional, parametric magnetohydrodynamic simulations of the formation and eruption of magnetic flux ropes. All the simulations are performed on the same grid, using the same parameters, but they are characterized by different driving photospheric flows, i.e., shearing, convergence, stretching, and peripheral- and central- dispersion flows. For each of the simulations, the instant of the onset of the eruption is carefully identified by using a series of relaxation runs. We find that magnetic energy and total relative helicity are mostly injected when shearing flows are applied at the boundary, while the magnetic energy and helicity associated with the coronal electric currents increase regardless of the kind of photospheric flows. We also find that, at the onset of the eruptions, the ratio between the non-potential magnetic helicity and the total relative magnetic helicity has the same value for all the simulations, suggesting the existence of a threshold in this quantity. Such a threshold is not observed for other quantities as, for example, those related to the magnetic energy.

Key words: magnetic fields – methods: numerical – Sun: coronal mass ejections (CMEs) – Sun: flares

1. Introduction

Over the last few years, the study of magnetic helicity, a quantity estimating the level of twist and entanglement of the magnetic field lines in a magnetized plasma, has received renewed attention in solar physics. This evolution has been enabled thanks to the development of several new methods to compute and represent magnetic helicity (Rudenko & Myshyakov 2011; Thalmann et al. 2011; Valori et al. 2012; Yang et al. 2013; Yeates & Hornig 2013, 2014; Dalmasse et al. 2014; Prior & Yeates 2014). Among these new approaches, some allow us to properly compute magnetic helicity in non-magnetically isolated domains, i.e., in typical conditions for natural plasma where the magnetic field is threading the boundaries of the studied domain (see Valori et al. 2016, for a complete review and a benchmark of these methods). These new techniques now permit an exact and controlled estimation of magnetic helicity in three-dimensional (3D) data sets, and have in particular been applied to the study of the evolution of helicity in several numerical simulations of solar active events (Moraitis et al. 2014; Pariat et al. 2015, 2017; Sturrock et al. 2015; Sturrock & Hood 2016) as well as in coronal magnetic field extrapolations of observed active regions (Valori et al. 2013; Moraitis et al. 2014; Guo et al. 2017; James et al. 2018).

Magnetic helicity has recently been used as an innovative tool to study and better understand typical problems in solar physics such as the magnetic reconnection mechanism (Russell et al. 2015), the formation of filament channels (Knizhnik et al. 2015, 2017; Zhao et al. 2015) and their large-scale distribution over the solar cycle (Yeates & Hornig 2016), the solar dynamo (Miesch et al. 2016; Brandenburg et al. 2017), the formation of active regions (Liu & Schuck 2012; Liu et al. 2014a, 2014b; Moraitis et al. 2014; Pariat et al. 2017), the

rotation of sunspots (Sturrock et al. 2015; Sturrock & Hood 2016), and the generation of solar jets (Karpen et al. 2017).

A field of research in which magnetic helicity is expected to bring key results is the study of solar flares and eruptions. Even though magnetic helicity is only a strict invariant in ideal magnetohydrodynamic (MHD), Pariat et al. (2015) have confirmed Berger (1984)'s scaling argument that helicity is quasi-conserved in active events even when intense nonideal processes such as magnetic reconnection are acting to transform most of the magnetic energy. This now-demonstrated conservation of magnetic helicity is a key concept that is believed to be a ruling principle beyond the existence and the formation of coronal mass ejections (Rust & Kumar 1994; Low 1996; Green et al. 2002; Mandrini et al. 2005; Priest et al. 2016).

The study of the relationship between flare/eruptions and the magnetic evolution of active regions has been particularly prolific (e.g., Nindos & Zhang 2002; Nindos & Andrews 2004; Park et al. 2008, 2010; Zuccarello et al. 2011; Park et al. 2012; Tziotziou et al. 2012, 2013, 2014; Zuccarello et al. 2014, 2017). So far, most of the work has relied on computing magnetic helicity from observed series of magnetograms and estimating the helicity flux following the ground breaking method of Chae (2001), which has, however, some inherent limitations (Démoulin & Pariat 2009). It is nonetheless worth mentioning that several such observational studies have concluded on a close relation between high helicity content and enhanced eruptivity (e.g., Nindos & Andrews 2004; LaBonte et al. 2007; Smyrli et al. 2010; Tziotziou et al. 2012).

The new and exact methods to compute helicity in a 3D domain are however now enabling the comprehensive study of magnetic helicity in numerical data sets. Pariat et al. (2017)

have recently studied parametric simulations of the formation of solar active regions leading either to stable configurations or to eruptions (presented in Leake et al. 2013, 2014). They found that magnetic helicity was strongly discriminating between the different simulations. Furthermore, they showed that by using the helicity decomposition introduced by Berger (2003), the ratio of the magnetic helicity of the current-carrying part of the field to the total helicity could be used as a clear predictor of the eruptivity in the simulations. This quantity indeed presented high values only for the eruptive simulations and only before the eruption. Additionally, this helicity ratio was no longer differentiating the eruptive simulation from the non-eruptive one after the eruption, when the system was stable in all of the different runs.

The experimental set-up of Leake et al. (2013, 2014) does not permit one to determine the existence of an eruptivity threshold related to the helicity ratio. The stability of the magnetic system was indeed likely deterministically given by the initial condition, i.e., for the eruptive simulations, the system was not brought from an equilibrium stage toward instability by controlled imposed quasi-steady forcing. Therefore, while remarkable, the results of Pariat et al. (2017) were not conclusive on the reason why the helicity of the current-carrying part of the field could be related to an enhanced eruptivity. In order to determine whether their results were due to pure hazard or were symptomatic of a deeper physical meaning, the present study investigates the energy and helicity content of a radically different set of parametric simulations of eruptive events. This manuscript focuses on the analysis of the line-tied 3D MHD simulations of Zuccarello et al. (2015). In these simulations, eruptions are triggered by boundary-driven motions that mimic the long-term evolution of solar active regions, with the presence of shearing motions and large-scale diffusion of the magnetic polarities. Unlike with the flux-emergence simulations of Leake et al. (2013, 2014), the trigger time and mechanism have been carefully determined by performing numerous relaxation runs. Zuccarello et al. (2015) have shown that the eruptions were tightly related with the torus instability mechanism (Kliem & Török 2006; Török & Kliem 2007; Aulanier et al. 2010; Démoulin & Aulanier 2010; Olmedo & Zhang 2010; Kliem et al. 2014). A goal of the present study is to determine whether a helicity-based eruptivity predictor is also able to describe the eruptivity stage of the simulations of Zuccarello et al. (2015) and how it relates with the torus instability.

Additionally, the parametric simulations of Zuccarello et al. (2015) present different types of boundary-driving motions. Thanks to the comparison of these different simulations, it is possible to compare and determine which boundary motions are the most efficient at injecting total helicity in the coronal domain, as well as in the different terms of the helicity decomposition. Helicity accumulation is indeed a fundamental process of the formation and evolution of active regions (Green et al. 2002, 2003; Mandrini et al. 2005; Liu & Schuck 2012; Liu et al. 2014a, 2014b; Romano et al. 2014; Sturrock et al. 2015; van Driel-Gesztelyi & Green 2015; Sturrock & Hood 2016). Studying the most efficient way by which helicity is injected in active regions can reveal information that is particularly important for determining their eruptivity potential.

The manuscript is organized as follows. The simulation setups and evolution of the system are discussed in Section 2.

The different magnetic energy and helicity decompositions are presented in Section 3. Section 4 describes the evolution of the magnetic flux as a result of the applied boundary motions. Sections 5 and 6 present the results of our analysis, i.e., the time evolution of the different magnetic energy and helicity decompositions and their values at the onset of the eruptions. Finally, in Section 7, we discuss our results and conclude.

2. The MHD Simulations

To study the evolution of magnetic energy and helicity during the formation and eruption of magnetic flux ropes, we solve the full three-dimensional MHD equations using the OHM-MPI code (Aulanier et al. 2005; Zuccarello et al. 2015). In this paper, we analyze the same runs presented in Zuccarello et al. (2015) where the MHD equations are solved in a nonuniform Cartesian grid that expands from the location $x = y = z = 0$ and covers the domain $x \in [-10, 10]$, $y \in [-10, 10]$, $z \in [0, 30]$ where x and y are the horizontal directions and z is the vertical one. The goal of that study was to carefully determine and investigate the onset of the eruptions in the framework of the torus instability. To achieve this goal, a parametric study consisting of four different simulations was performed. For each of the four different simulations, the time of the onset of the eruption was carefully determined using a series of relaxation runs.

The four simulations share the same initial phase where the magnetic field is modified from an initial, potential configuration into a sheared one (Sections 2.1 and 2.2). From this point onward, four different boundary motions that result in four different ways to build a flux rope and bring it to the eruption point are applied (Section 2.4). Finally, a proper eruption phase follows in each of the four runs (Section 2.5). The first two phases, shearing and flux rope formation, are the most relevant ones for the study of helicity evolution discussed in this article.

2.1. Initial Condition

The initial condition for the magnetic field, common to all simulations, consists of an asymmetric and bipolar active region generated by two unbalanced sub-photospheric monopoles (see Figure 1, left panel). In the non-dimensional units of the simulation (cf. Section 2.4 of Aulanier et al. 2010, for a possible choice of dimensional units), the initial density in the volume is $\rho(t = 0) = B^2(t = 0)$, such that the initial Alfvén speed is $c_A(t = 0) = 1$, while the initial velocity field is $\mathbf{u}(t = 0) = 0$.

We impose “open” boundary conditions for all of the boundaries apart from the boundary at $z = 0$, i.e., the photospheric boundary, where line-tied boundary conditions are applied instead (Aulanier et al. 2005). We notice that, as a result of the applied boundary motions and field dynamics, the configuration of the field is naturally expanding and flux is free to leave the simulation box through lateral and top boundaries throughout the simulations.

2.2. The Common Shearing Phase

For all of the simulations, the initial potential magnetic field is evolved into a current-carrying magnetic field by imposing asymmetric vortices centered around the local maxima of $|B_z(z = 0)|$.

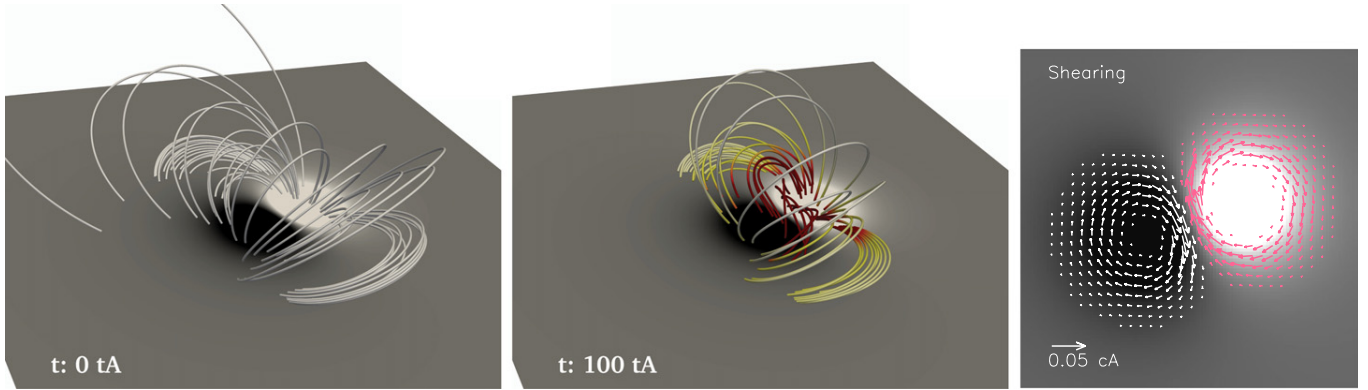


Figure 1. Evolution of the magnetic field for the shearing phase common to all the simulations (left and middle panels) and the applied boundary motions (right panel). The magnetic field lines are color coded with the current density, where yellow/red means higher current density. White/black indicate positive/negative $B_z(z=0)$, respectively. White/magenta arrows indicate flows applied to the negative/positive polarity.

Figure 1 (right panel) shows the applied flow field. By design, these boundary flows induce shear close to the polarity inversion line (PIL) of the active region and affect the periphery of the active region only mildly. Moreover, the flows are tangent to the iso-contours of $B_z(z=0)$; therefore, during this phase, the distribution of B_z at the photospheric boundary $z=0$ remains unchanged. Because the major component of the flow field during this phase consists of shearing motions close to the PIL, we refer to this phase as the shearing phase and to these motions as shearing motions.

The shearing flows are applied from $t \simeq 10t_A$ until $t \simeq 100t_A$. At the end of this phase, the magnetic field configuration is characterized by a highly sheared, current-carrying magnetic arcade surrounded by a quasi-potential background field anchored around the center of the magnetic polarities (see Figure 1, middle panel).

To ensure that the normal component of the magnetic field at the boundary remains unchanged, during this phase the photospheric diffusion is set to $\eta_{\text{phot}} = 0$. The coronal diffusion and pseudo-viscosity are set to $\eta_{\text{corona}} = 4.8 \times 10^{-4}$ and $\nu = 25$, respectively (see Section 2.3 of Zuccarello et al. 2015).

2.3. Control Case: The Non-eruptive Run

As a term of comparison throughout this paper, we also include a non-eruptive control run obtained by avoiding the photospheric driving phase of Section 2.4. For this run, at the photospheric boundary we impose $\mathbf{u}(t \gtrsim 100t_A) = 0$ and $\eta_{\text{phot}} = 4.8 \times 10^{-4}$ for $100t_A \lesssim t \lesssim 164t_A$ and $\eta_{\text{phot}} = 0$ for $t \gtrsim 164t_A$. The coronal diffusion and pseudo-viscosity are the same as those for the shearing phase for $100t_A \lesssim t \lesssim 164t_A$ and they are increased by a factor 4.37 and 1.67, respectively for $t \gtrsim 164t_A$.

The diffusion and pseudo-viscosity parameters have the same time dependence as the other four simulations runs. This allows us to distinguish the effects of direct diffusion, which we expect to be similar for identical parameters, from the run-specific dynamic due to different evolution of energy and helicity.

2.4. The Flux-rope Formation Phases

From $t \simeq 105t_A$, the flux rope formation phase starts. During this phase, at the line-tied boundary we apply four different types of photospheric motions.

Figure 2 (bottom panels) shows the applied boundary motions. The four different velocity fields aim to mimic flow patterns typically observed on the Sun. The four different velocity fields result in four different simulations runs labeled as “Convergence”, “Stretching”, “Dispersion Peripheral” (Disp. Periph.), and “Dispersion Central” (Disp. Cent.).

The run labeled “Convergence” is characterized by flows that only have a horizontal component and are applied only in the proximity of the PIL. These flows result in the advection of photospheric magnetic field toward the PIL, but do not affect the central and peripheral parts of the active region.

In the run labeled “Stretching”, the flows are now applied not only in the proximity of the PIL but also in the periphery of the active region. The effect of these flows is to induce an asymmetric stretching of $B_z(z=0)$.

Finally, the runs labeled as “Disp. Periph.” and “Disp. Cent.” are characterized by flows that spreads radially from the center of the magnetic polarities. The difference between the two flow patterns is the size of the portion of the magnetic polarities that is affected by the flow. In “Disp. Periph.”, only the periphery of the magnetic polarities is subjected to the flows, resulting in a peripheral dispersion of the magnetic field, while in “Disp. Cent.”, a larger region of the polarity is subjected to these flows, resulting in a more significant diffusion of the magnetic polarities.

Figure 2 (bottom panels) shows that all of the flows have a component that advects oppositely directed vertical magnetic field toward the PIL. To allow the cancellation of this oppositely directed magnetic flux, during this phase the photospheric diffusion is set to $\eta_{\text{phot}} = 4.8 \times 10^{-4}$. The coronal diffusion and pseudo-viscosity are kept the same as in the shearing phase.

The response of the solar corona to the applied boundary flows for the “Disp. Periph.” run is shown in Figure 2 (top panels). As a consequence of the cancellation of magnetic flux around the PIL, a magnetic flux rope is formed through magnetic reconnection at a bald-patch separatrix (Démoulin et al. 1996). This reconnection process transfers sheared, arcade-like magnetic flux into the flux rope, eventually increasing the total current within it, and driving its slow rise up to a point when the torus instability sets in and the flux rope undergoes a full eruption. A similar mechanism yields the formation of a flux rope in the other runs as well (see Zuccarello et al. 2015, for additional details). The flux rope

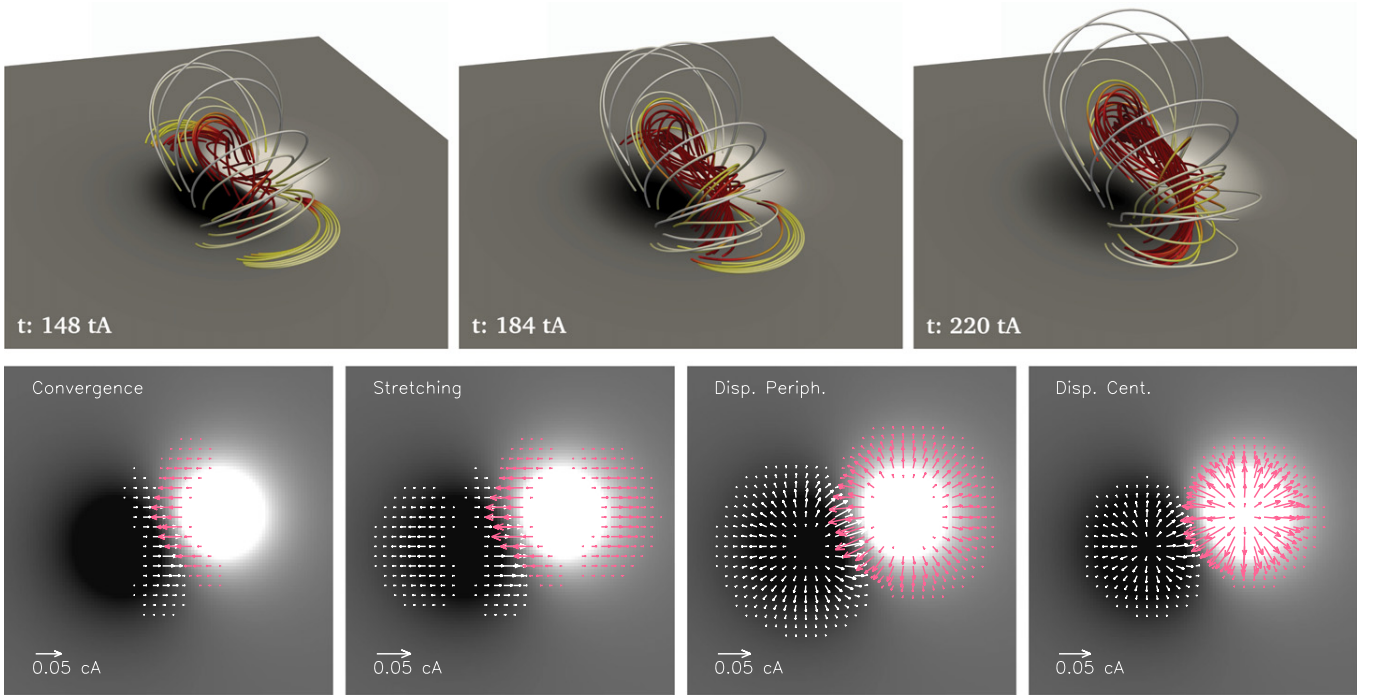


Figure 2. Evolution of the magnetic field for the Dispersion Peripheral run during the flux rope formation phase (top panels) and the applied boundary motions (bottom panels) for the four different simulations runs. The color scheme is the same as in Figure 1.

formation phase ends at the time of the eruption, which happens at a different time in the four simulations.

2.5. The Eruption Phase

The onset of the torus instability is determined through a series of relaxation runs in which the photospheric boundary flows are gradually re-set to zero using a ramp-down time profile of total time width $\Delta t = 6t_A$.

In other words, for each of the four experimental set-up, dozens of simulations have been performed in which the applied flows were imposed for different durations before being smoothly stopped. Only when the boundary flow was imposed long enough, a marked eruption was observed. If the boundary flows are stopped before the instant t_1 , the system either relaxes to a new equilibrium or the flux rope undergoes an extremely deflected eruption (see Zuccarello et al. 2015, for additional details). However, if the boundary flows are stopped at (or after) t_1 , the flux rope undergoes a full eruption and expands in the numerical domain. As the four simulations have different photospheric flow evolutions, the exact time at which the instability sets in is different for the four cases. By stopping the photospheric driver at different instants in time and letting the system evolve under the effect of the residual Lorentz force, Zuccarello et al. (2015) have shown that the onset of the instability leading to full eruptions occurs at $t_1 = 196, 214, 220$ and $164t_A$ for the “Convergence”, “Stretching”, “Disp. Periph.”, and “Disp. Cent.” runs, respectively. It should be noted that the time t_1 corresponds to the middle of the ramp-down time profile; therefore, the boundary flows are zero only for $\bar{t}_1 \gtrsim t_1 + 3t_A$. The vertical lines in all the Figures of the present paper indicate the time \bar{t}_1 .

By using the same ramp-down time profile, at time t_1 we also re-set the photospheric diffusion to zero. For numerical stability reasons, at the same time t_1 and by using a similar ramp-up time

profile, we increase the coronal diffusion by a factor 4.37 and the pseudo-viscosity by a factor 1.67. Because we focus on the triggering of the instability, in the following, only the evolution until $10t_A$ after the time \bar{t}_1 of each simulation is shown. However, all simulations were continued for long after that time (see Zuccarello et al. 2015).

3. Magnetic Helicity and Energy Decompositions

The magnetic helicity H of a magnetic field \mathbf{B} in a volume \mathcal{V} is defined as:

$$H = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d\mathcal{V}, \quad (1)$$

where $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$ is the vector potential. This quantity is gauge invariant only when the magnetic field \mathbf{B} is fully contained inside the volume \mathcal{V} , e.g., when the magnetic field is tangential to the surface $\partial\mathcal{V}$ that bounds \mathcal{V} . This condition is rarely satisfied in the magnetic field systems that are of interest in solar physics, i.e., open coronal volumes.

Following the work of Berger & Field (1984), Finn & Antonsen (1985) showed that in the case where \mathbf{B} is not fully contained in \mathcal{V} , a quantity that is gauge invariant by definition and it is better suited to characterize the system, is the relative magnetic helicity:

$$H_V = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) d\mathcal{V}, \quad (2)$$

with \mathbf{A}_p the vector potential of the potential field $\mathbf{B}_p = \nabla \times \mathbf{A}_p$ that has the same distribution of the normal component of \mathbf{B} on the bounding surface.

A possible decomposition of Equation (2) is (Berger 2003):

$$H_V = H_j + H_{pj}, \quad \text{with} \quad (3)$$

$$H_j = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) d\mathcal{V}, \quad (4)$$

$$H_{pj} = 2 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}_p \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) d\mathcal{V}, \quad (5)$$

where H_j is the magnetic helicity of the non-potential, or current-carrying, component of the magnetic field, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$, and H_{pj} is a volume-threading term involving both \mathbf{B}_p and \mathbf{B}_j . Because \mathbf{B} and \mathbf{B}_p have the same normal distribution on $\partial\mathcal{V}$, both H_V , H_j and H_{pj} are separately gauge invariant. Similarly to (Pariat et al. 2017, cf. Section 4.1), in the present paper, the quantities \mathbf{B}_p , \mathbf{A}_p , and \mathbf{A} are computed using the method of Valori et al. (2012).

The different flux rope formation phases are associated with different photospheric boundary motions that result in different evolutions of $B_z(z=0)$. As a result, the magnetic flux is different for the different simulations. In order to account for these differences when comparing the various helicity decompositions at the moment of the eruption we consider their normalized value, i.e., $H_V(t)/\Phi^2(t)$, $H_j(t)/\Phi^2(t)$ and $H_{pj}(t)/\Phi^2(t)$, where $\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_{z=0} |B_z(z=0, t)| dx dy$.

In the present paper, the different decompositions of the magnetic energy are computed following the approach discussed in Valori et al. (2013), where the magnetic energy of a magnetic field with finite non-solenoidality ($\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$), can be decomposed as:

$$E_V = E_p + E_j + E_{ns}, \quad (6)$$

where E_p and E_j are the energies associated with the potential and current-carrying solenoidal contributions, and E_{ns} , is the sum of the artifact non-solenoidal contributions (see Equations (7), (8) in Valori et al. 2013, for the corresponding expressions). For purely solenoidal fields E_{ns} is zero, however, finite non-solenoidality is generally present when discrete numerical meshes are considered. As discussed in Valori et al. (2016), the non-solenoidality of the field actually affects the precision of the helicity computations. For the simulations presented here, the average non-solenoidality is $E_{ns}/E_V \simeq 0.02$. We note that in order to apply the method of Valori et al. (2012), the nonuniform grid used to perform the simulations has been interpolated into a uniform grid, and the divergence values are increased by the interpolation. While these values are not representative of the quality of the simulations themselves, they nevertheless allow us to estimate the precision of the magnetic helicity computations discussed here. According to the results of Valori et al. (2016), the precision of our helicity computations is $\lesssim 2\%$.

4. Evolution of the Magnetic Flux

The evolution of the photospheric magnetic flux as a function of time and, for all the simulation runs, is presented in Figure 3. The magnetic flux is constant during the common shearing phase. This is a consequence of the design of the boundary motions, which do not change the photospheric

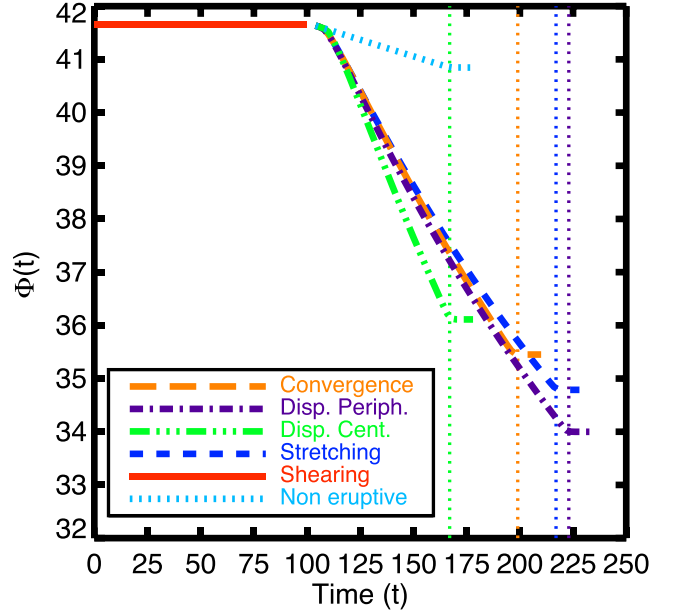


Figure 3. Time evolution of the photospheric magnetic flux for the common shearing phase (red), for the non-eruptive run (cyan), and for the four eruptive runs.

distribution of B_z , and of the fact that the photospheric diffusion is $\eta_{\text{phot}} = 0$ during this phase.

In the control non-eruptive run, where the flows are set to zero and only a finite photospheric diffusion is imposed at the boundary, only $\lesssim 2\%$ of the initial photospheric flux is diffused within $\sim 60 t_A$.

During the flux rope formation phase, opposite magnetic flux is advected toward the PIL in all four simulations. Combined with a finite photospheric diffusion, this results in the cancellation of about 13%–18% of the initial photospheric flux at the moment of the onset of the eruption.

From \bar{t}_i , both photospheric flows and diffusion are re-set to zero, and the photospheric flux remains constant until the end of the simulation.

The change in the slope of the photospheric flux that we observe toward the end of the flux rope formation phases in Figure 3 is essentially due to the change in the forcing of the bottom boundary of the simulation, as is expected considering that this quantity is only measured at this boundary, and does not allow one to discern the moment of the onset of the instability.

Finally, we note that at the moment of the eruption, the different runs have reached different values of the magnetic flux.

5. Trends in Magnetic Energy and Helicity

In this Section, we discuss the trends in the time evolution of the magnetic energy and of the magnetic helicity for the different runs.

5.1. Comparison between the Shearing and Flux-rope Formation Phases

Figure 4 (top panels) shows the evolution of the different energy decompositions. During the common shearing phase, i.e., from $t \simeq 10t_A$ to $t \simeq 100t_A$, E_V shows a linear increase up to about 37% of its initial value. A comparison between E_j and

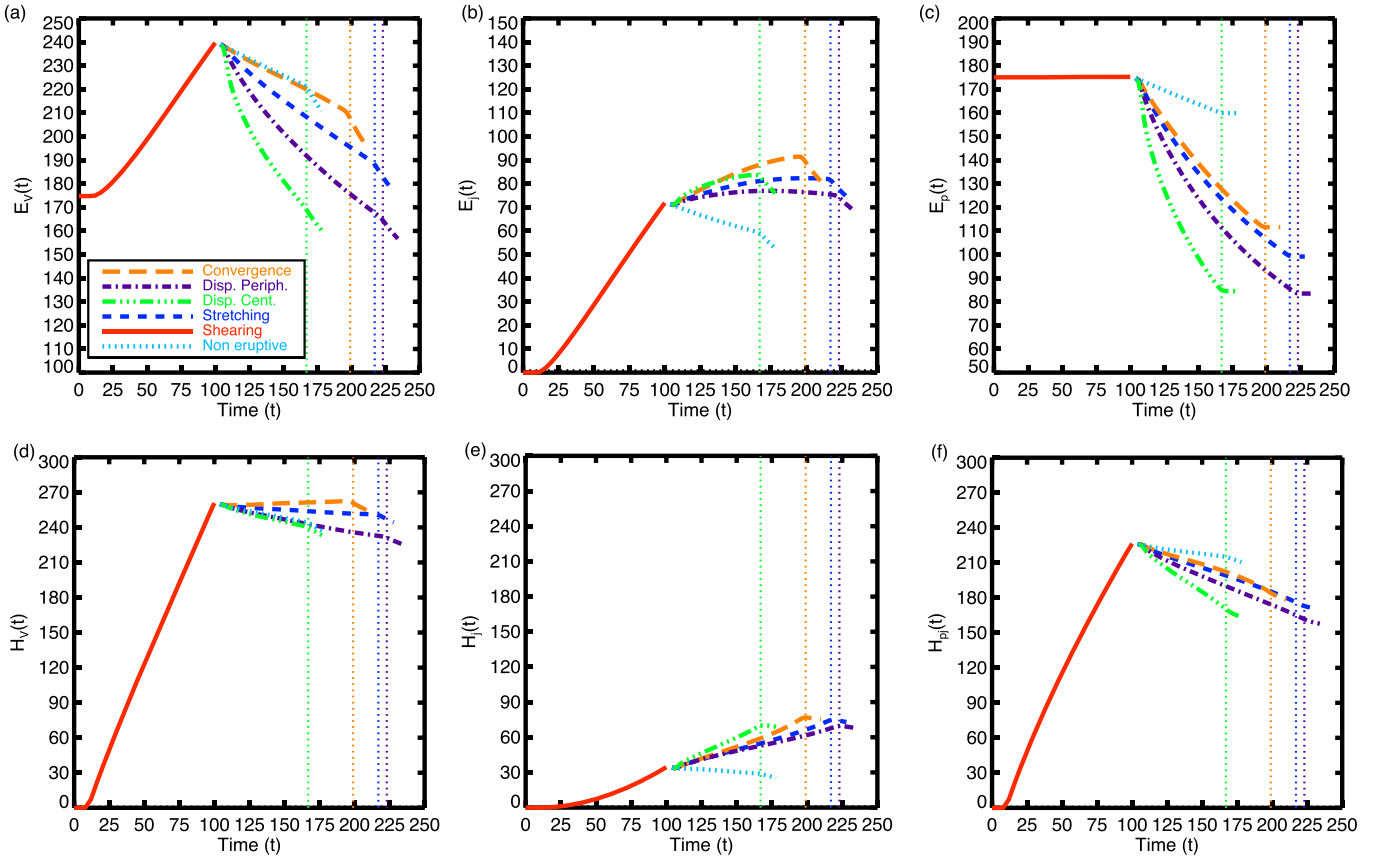


Figure 4. Time evolution of the different energy (top) and helicity (bottom) terms for the shearing and flux rope formation phases.

E_p (Figures 4(b) and (c)) shows that the increase in E_V is due to the increase of E_j . This is expected, as the shearing flows are designed in such a way to not change the boundary distribution of B_z , and, hence, of E_p .

In the control non-eruptive run, from $t \simeq 105t_A$ onward, all of the different energy decompositions display a decrease due to the finite photospheric and coronal diffusion. After $t \simeq 164t_A$, E_V and E_j continue to decrease even faster (the coronal diffusion is further increased during this phase, see Section 2.3), while E_p is now constant, as η_{phot} is re-set to zero during this phase.

During the different flux rope formation phases, i.e., from $t \simeq 105t_A$ to $t \simeq t_1$, E_V decreases, and this is the case up to the end of the simulations (not shown in the Figure). Despite the total magnetic energy decreases, Figure 4(b) shows that, apart from the control case, E_j actually increases during the flux rope formation phase, up to the time $t \simeq t_1$, where it reaches a maximum and starts to decrease. Figure 4(c) shows that E_p decreases during the flux rope formation phase, suggesting that the major reason of the energy decrease during the flux rope formation phase is due to a decrease of E_p .

A comparison between the shearing and the flux rope formation phases shows that the major injection of E_j occurs during the shearing phase; the rate of increase of E_j during the shearing phase is between ~ 4.5 and ~ 54 times higher than its rate of increase during the flux rope formation phase.

The time evolution of H_V is shown in Figure 4(d). During the common shearing phase, H_V steadily and linearly increases with time. This trend changes during the flux rope formation phase, when the total helicity is either roughly constant or

slightly decreases. This is true until the end of simulations (not shown in the Figure). The situation is different when only the current-carrying component of the helicity, i.e., H_j , is considered (Figure 4(e)). Similarly to H_V , H_j also increases during the shearing phase but with a profile that is somehow different. The linear increasing phase starts with a delay of about $10\text{--}15t_A$ with respect to H_V .

Figure 4(e) shows that from $t \simeq 105t_A$ onward, for the control run, H_j is either constant or decreases. The situation is different for the other runs, where during the flux rope formation phase H_j continues to increase up to \bar{t}_1 . Figure 4(e) also shows that H_j increases at a comparable rate both during the shearing and the flux rope formation phases.

The evolution of H_{pj} is shown in Figure 4(f). Similarly to H_V , during the shearing phase, H_{pj} steadily increases in time, accounting for the major part of the helicity injection during this phase. From $t \simeq 105t_A$ onward, H_{pj} for the control run is either constant or decreases. While the other runs also show the same trend, their respective decrease of H_{pj} is more significant than the one observed for the control run. Therefore, the decrease of H_{pj} during the flux rope formation phase is not only due to the finite diffusion, but likely to a re-distribution of the relative helicity between its different component H_j and H_{pj} (cf. L. Linan et al. 2018, in preparation).

To summarize, the analysis shows that: (1) the largest injection of total magnetic energy and relative magnetic helicity occurs during the shearing phase; (2) during the shearing phase, E_j increases as it is the case for H_{pj} , i.e., magnetic energy and helicity behave differently during this phase; (3) at the end of shearing phase, E_V is dominated by E_p , and H_V is dominated by

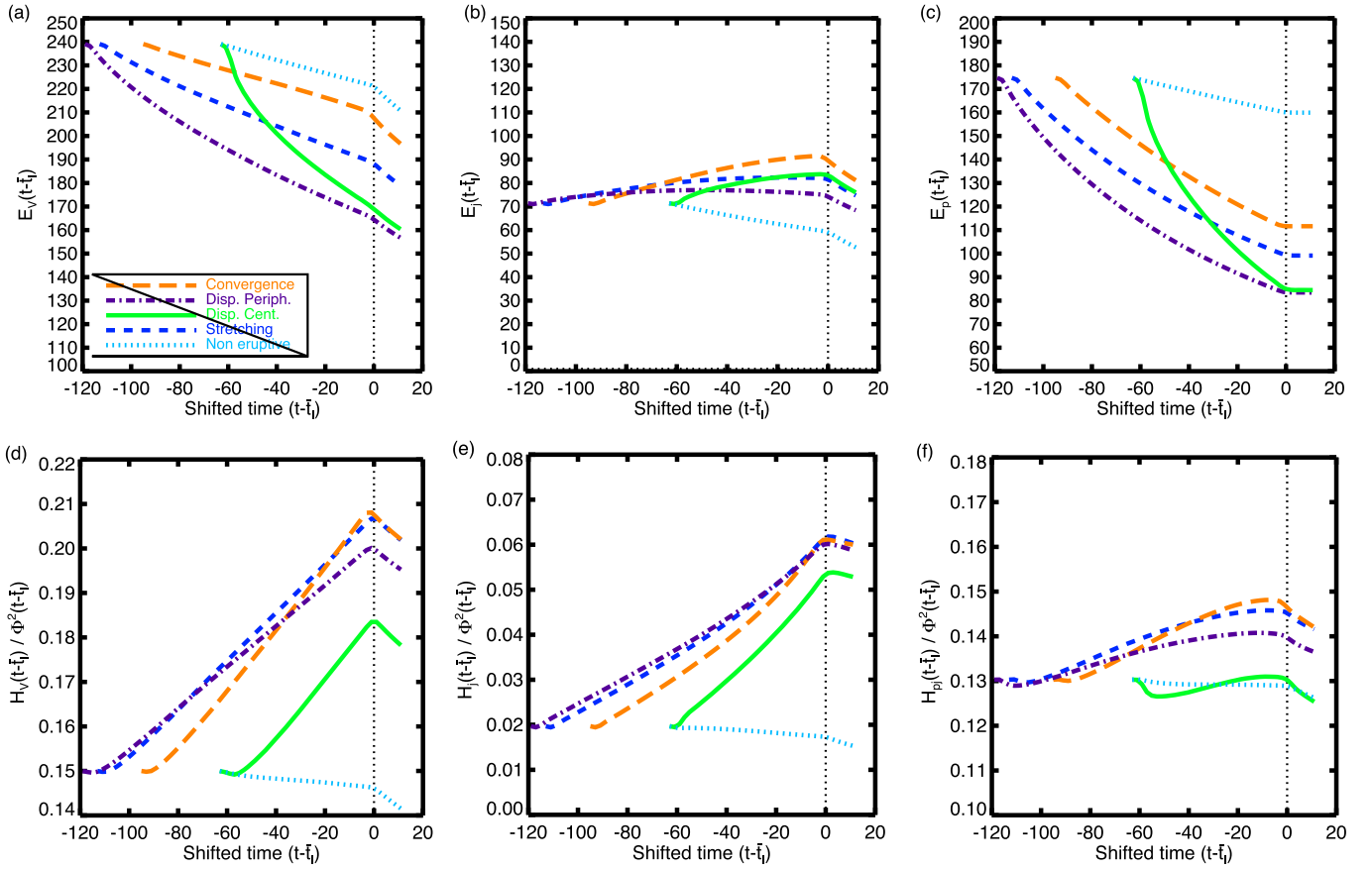


Figure 5. Time evolution of the different energy (top) and normalized-helicity (bottom) terms during the flux rope formation phase. The timescale is shifted so that the time are given with respect to \bar{t}_i .

H_{pi} , i.e., magnetic energy and helicity are similar in this aspect; (4) in the flux rope formation phase, both E_V and H_V decrease, both E_p and H_{pi} decrease, and both E_j and H_j increase, i.e., they behave similarly, unlike during the shearing phase; (5) H_j is injected with roughly the same rate during the shearing and flux rope formation phases, while this is not the case for E_j where the most of the injection occurs during the shearing phase; (6) overall, the flux rope formation phase has helped to strengthen the non-potentiality of the field and its relative portion in both E_V and H_V budgets; at the end of the flux rope formation phase, both E_j/E_V and H_j/H_V have increased compared to their values at the start of this phase (see Section 6).

5.2. Role of the Different Boundary Flows during the Flux-rope Formation Phase

In this Section, we compare the evolution during the different flux rope formation phases, focusing on the similarities and differences between them.

Figure 5 (top panels) shows the evolution of the different energy decompositions during the flux rope formation phases. In order to facilitate the comparison, the curves in Figures 5 and 6 are shifted such as to align the eruption times. The total magnetic energy, E_V , decreases for all the runs including the non-eruptive one (see Figure 5(a)). However, the “Disp. Cent.” run, which is the run where the major part of the active region is subjected to the convergence flows, displays the fastest decrease of E_V , while the “Convergence” run, where only the portion of the

active region closes to PIL is subjected to the convergence motions, shows the slowest decrease of E_V . The latter is actually comparable to the decrease of E_V for the control run, where no flows are applied and the energy dissipation is only due to the coronal and photospheric diffusion.

The time evolution of E_j is shown in Figure 5(b). A clearer distinction in the trends is visible between the eruptive runs and the non-eruptive one. For the eruptive simulations, E_j increases up to the moment of the eruption, while it is always decreasing for the non-eruptive run. Differently from E_V , E_j for the “Convergence” and “Disp. Cent.” runs follows a very similar trend, despite the fact that these two runs are the ones with the most different flows. Figure 5(b) shows that E_j starts to decrease after the onset of the eruption when driving flow is terminated and coronal dissipation is increased four-fold. A similar initial decrease is also observed for the control run as soon as the system is allowed to relax under the effect of the increased coronal diffusion.

Figure 5(c) shows that, during the flux rope formation phase, E_p decreases. Furthermore, the different curves are ordered in the same way as the ones of E_V , confirming that the major decrease of magnetic energy during the flux rope formation phase is due to the decrease of the energy associated with the potential magnetic field.

The time evolution of the different normalized-helicity decompositions is presented in Figure 5 (bottom panels). Globally, H_V/Φ^2 and H_j/Φ^2 show similar trends and clearly allow one to distinguish between the eruptive and non-eruptive runs; the two quantities increase for the eruptive runs, while

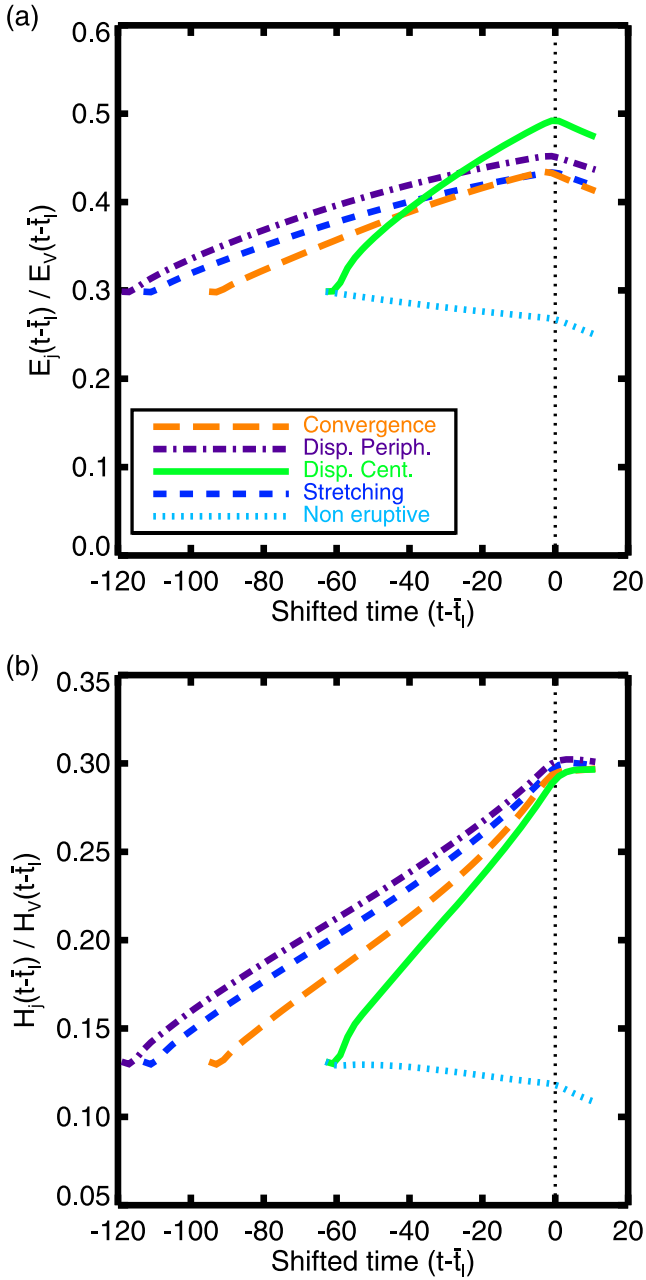


Figure 6. Time evolution of the E_j/E and H_j/H_V ratios around the onset of the eruptions.

they are roughly constant (although decreasing, largely because of the finite coronal diffusion) for the non-eruptive run. This is true until $t \simeq t_1$ when H_V/Φ^2 and H_j/Φ^2 start to decrease for all the runs (including the control run) as a consequence of the increased coronal diffusion.

A closer look at Figure 5(e) shows that, while the different curves follow a very similar trend, some differences exist. An interesting result can be found by comparing the “Stretching” and “Convergence” runs. For these two runs, the same photospheric motions profile is applied close to the PIL, and the difference only involves the periphery of the active region (see Figure 2, bottom panels). As a result, sheared arcade flux is advected toward the PIL and eventually converted into flux rope’s flux, in a similar fashion for the two runs. The only

difference is at the periphery of the active region where part of the overlying magnetic flux is anchored. This seems to suggest that even the evolution of H_j , which is in principle only related to the current-carrying part of the magnetic field, seems to be affected by the evolution of the background field. This is an example of the nonlocal character of the magnetic helicity. This result is also consistent with the analysis of the time evolution of H_j and H_{pj} of L. Linan et al. (2018, in preparation), which indicates that H_j is usually not evolving because of boundary flux but is rather transformed from H_{pj} .

Finally, Figure 5(f) shows that H_{pj}/Φ^2 initially decreases during the first stages of the convergence phase and then steadily increases up to a few Alfvén times before the onset of the instability. This behavior is observed for all of the eruptive runs, even if the “Disp. Cent.” run shows a proportionally larger (smaller) decrease (increase) during the early (main) stage of the convergence phase.

To summarize, the analysis shows that (1) apart from a single case (H_{pj}/Φ^2 for the “Disp. Cent.” run), the time evolution of all the different helicity terms shows a difference between the eruptive and non-eruptive runs, (2) this is not the case for the different magnetic energy terms, where only E_j shows a different trend. (3) At the time of the onset of the eruption, a change in the trend is observed for all of the simulation runs (apart from E_V for the “Disp. Cent.” run). The fact that this change in trend is also observed for the control, non-eruptive run suggests that the change in the coronal diffusion and in the boundary motions at the time of the eruption (see Section 2) may play an important role.

6. Thresholds in Magnetic Energy and Helicity

In the previous Section, we investigated the evolution of different magnetic-energy and helicity-related quantities around the moment of the onset of the torus instability, and we have discussed how a change in the trend of the different curves that occurs at $t \simeq t_1$, may be somehow related to these imposed boundary conditions. This is the reason why, for any given quantity, the existence of a threshold at the moment of the onset of the instability may be more important than a change in its trend.

Zuccarello et al. (2015) analyzed these simulations in the framework of the torus instability. In this framework, the instability occurs when the flux rope axis reaches a height where the decay index of the magnetic field has a critical value that depends on the particular magnetic field configuration. For these parametric simulations, Zuccarello et al. (2015) have shown that when an eruption occurs, all of the flux ropes have reached heights where the decay index n has a critical threshold value of $n \simeq 1.45 \pm 0.05$.

The aim of this Section is to investigate if a critical threshold value in any of the different energy and helicity decompositions exists. Said differently, we investigate whether or not any of the different energy and helicity decompositions have the same value (for all the simulations) when the instability sets in and the eruptions occur. The values of the different quantities around the time of the onset of the eruption are reported in Table 1.

6.1. Magnetic Energy and Helicity Terms

Figure 5(a) shows that no threshold in the total magnetic energy exists at the moment of the eruption. More

Table 1
Values of the Different Energy and Helicity Terms at the Moment of the Onset of the Instability

Run	$t_1 (t_A)$	Φ	E_V	E_p	E_j	E_j/E_V	H_V	H_j	H_{pj}	H_j/H_V
Convergence	196	35	206.5	114.7 ± 3.1	91.8 ± 3.1	0.444 ± 0.015	260 ± 5	77 ± 5	183 ± 5	0.296 ± 0.012
Stretching	214	35	187.4	102.8 ± 3.6	84.6 ± 3.6	0.451 ± 0.019	250 ± 5	75 ± 5	175 ± 5	0.300 ± 0.012
Dispersion Peripheral	220	34	163.7	86.8 ± 3.3	76.9 ± 3.3	0.470 ± 0.020	231 ± 5	70 ± 5	161 ± 5	0.303 ± 0.012
Dispersion Central	164	36	168.1	85.1 ± 0.4	83.1 ± 0.4	0.494 ± 0.002	239 ± 5	70 ± 5	169 ± 5	0.292 ± 0.012

Note. The value of the different quantities are given at $\bar{t}_1 \gtrsim t_1 + 3t_A$, i.e., after the boundary motions are re-set to zero.

specifically, Table 1 shows that E_V varies from about 163.7 for the ‘‘Disp. Periph.’’ run to about 206.5 for the ‘‘Convergence’’ run. The dispersion of the values, evaluated as $(\max[E_V(\bar{t}_1)] - \min[E_V(\bar{t}_1)]) / \max[E_V(\bar{t}_1)]$, is too large to correspond to an instability threshold solely based on that quantity. Indeed, if such a threshold existed and corresponded to $\max[E_V(\bar{t}_1)] = 206.5$, then no eruption should have been observed for all the simulations but the ‘‘Convergence’’ run, as their E_V did not reach that threshold value. If the instability threshold was equal to $\min[E_V(\bar{t}_1)] = 163.7$, then the eruption time, $t \simeq t_1$ should have been different, as all simulations but the ‘‘Disp. Cent.’’ run would have reached that value of E_V earlier than their corresponding t_1 .

For the type of numerical experiment presented here, in which the system is dynamically evolved from a stable to a unstable stage, the existence of an instability threshold uniquely based on a given quantity, Q , necessarily implies that the value of $Q(\bar{t}_1)$ should be the same for all the eruptive simulations. The measurement of the dispersion of $Q(\bar{t}_1)$ between the eruptive runs (as done above), is thus a way to state the existence of a threshold for that quantity. The dispersion of about 20% obtained for E_V disqualifies the existence of a threshold based on that quantity.

A similar conclusion can be drawn also for E_j (Figure 5(b)). At the moment of the onset of the eruption, E_j has different values for the different runs with a range of dispersion of about 17% of E_j of the Convergence run. Therefore, E_j also does not allow one to determine the onset of the instability. The discrepancies are even larger when the potential magnetic energy, E_p , is considered (Figure 5(c)).

Figure 5 (bottom panels) shows that no threshold exists also for the different decompositions of the normalized magnetic helicity. However, a closer inspection of the Figure and of Table 1 show that the dispersion of the different helicity and normalized-helicity terms is within 13% (9% for H_j), i.e., the dispersion between the different helicity curves is about half the dispersion of the total energy curves.

6.2. Current-carrying to Total Magnetic Energy and Helicity Ratios

Pariat et al. (2017) have shown that the ratio E_j/E_V is a possible good eruption proxy, in the sense that it could discern between erupting and non-erupting runs. The same authors have shown that a significantly better proxy is the ratio of the helicity of the current-carrying part of the magnetic field to the total magnetic helicity, H_j/H_V , in the sense that this proxy has consistently larger values before the eruption for eruptive runs

than for non-eruptive and, after the eruption, the proxies of eruptive and non-eruptive are indistinguishable.

The time evolution of the E_j/E_V and H_j/H_V for our simulations is shown Figure 6. At the moment of the eruption’s onset, no threshold is observed in the E_j/E_V ratio (Figure 6(a)); the different values have a dispersion of about 10% of the run with the highest value.

The situation is significantly different when the H_j/H_V ratio is considered. In fact, as shown in Figure 6(b), all the curves approach the same threshold value within a dispersion of about 3%. This dispersion range is between three and eight times smaller than the equivalent ranges in the different energies and helicities decompositions discussed in the previous Section, and about three times smaller than the E_j/E_V ratio. We note that this dispersion is (1) within the measurement precision of the helicity ratio, which is about 4% (see Section 3), hence basically the same value, and (2) it is about a factor two smaller than the dispersion of critical decay index values identified through the detailed analysis of the electric currents and magnetic field distribution in the different simulations (see Zuccarello et al. 2015).

7. Discussion and Conclusion

We have presented a series of eruptive and non-eruptive numerical MHD simulations of idealized solar active regions, which evolution is characterized by different boundary motions. With these series of simulations, we aimed at addressing (1) which of the different boundary motions are the most efficient to inject different decompositions of magnetic energy and helicity, and (2) whether any of the different energy and helicity decompositions are able to identify the moment of the onset of the eruptions.

The initial configuration consisted of an asymmetric, current-free, bipolar active region embedded in a constant Alfvén speed atmosphere.

During the first phase of the simulation runs, called the shearing phase, shearing motions have been applied in the proximity of the active region’s PIL. As a result, the coronal magnetic field evolves from a potential field into a current-carrying magnetic field characterized by a sheared arcade close to the PIL.

Starting from this configuration, four different classes of boundary motions, resembling motions often observed on the Sun, have been applied. This phase was called the flux rope formation phase. While the applied motions are relatively different among them, a characteristic that is common to all four motions is that they advect part of the photospheric

magnetic flux toward the PIL. During this flux rope formation phase, a change in the topology of the system is observed and a magnetic flux rope is formed, which eventually erupts (Zuccarello et al. 2015).

By analysing the time evolution of the different magnetic energy and helicity decompositions during the shearing and flux rope formation phases we have shown that:

1. Magnetic energy and total relative helicity are mostly injected during the shearing phase. The magnetic energy actually shows a significant decrease during the flux rope formation phase. This is due essentially to the decrease of the potential magnetic energy of the system, probably due the fact that magnetic flux is canceled at the PIL during the flux rope formation phase.
2. Shearing motions are the most efficient to inject E_j into the system. The injection rate of E_j during this phase is at least four times larger than during the flux rope formation phases.
3. The current-carrying component of the magnetic helicity, H_j , increases with a similar rate between the shearing and the flux rope formation phases.

In order to determine if any signature of the eruption’s onset could be found in any of the magnetic energy or helicity decompositions, we analyzed the evolution of these quantities around the moment of the onset of the eruption, to investigate if a threshold in any of these quantities exists. Our analysis showed that:

1. No threshold is observed for any of the quantities entering in the decomposition of the magnetic energy (Equation (3)) and relative helicity (Equation (6)). In the different simulations, the eruption occurs for various values of energies and helicities. The dispersion of these values is between 9% and 25% depending on the particular decomposition (with helicities decomposition in the lower part of this range).
2. A threshold appears to exist in the ratio between the current-carrying component of the magnetic helicity and the total relative magnetic helicity. The onset of the eruptions indeed occurs when the different eruptive simulations reach the very same value of H_j/H_V , within measurement precision. This is not the case when a similar ratio in energies, i.e., E_j/E , is considered.

Pariat et al. (2017) have already discussed the promising properties of the ratio H_j/H_V , as possible eruptivity proxy. The numerical experiments set-up was however limited in the sense that it could not conclude on the existence of a threshold, as the magnetic systems were not driven to instability in a controlled way from a stable configuration. This caveat is lifted for the numerical experiments analyzed in the present study.

For the same simulations discussed in this paper, Zuccarello et al. (2015) performed a detailed analysis of the current distributions as well as several relaxation runs to determine the onset of the eruption. These authors have concluded that the driver of the eruption is indeed the torus instability; however, different simulations had a slightly different critical values of the decay index. They found that the critical value of the decay index at the onset of the eruptions is in the range $n_{\text{critical}} \in [1.4, 1.5]$.

The torus instability occurs when the magnetic pressure of the current-carrying flux rope is not balanced by the magnetic

tension of the magnetic field “external” to it. The condition for the instability has been first derived analytically using infinitesimal current rings. It has been shown that the instability occurs when the apex of the current ring is in a location where the decay index is $n \gtrsim n_{\text{critical}} = 1.5$ (Bateman 1978; Kliem & Török 2006; Démoulin & Aulanier 2010). There are several reasons why the critical decay index may differ among the different simulations: slightly different flux rope morphologies, limitations in determining the axis of nonanalytical flux ropes and slightly different line-tying effects being the most relevant. Nevertheless, the clear result of Zuccarello et al. (2015) was that when the flux rope’s axis has reached an height where the decay index is $n \simeq 1.45 \pm 0.05$ a full eruption occurs. This value is remarkably close to the critical value for an idealized current ring.

The helicity of the current-carrying component of the magnetic field, H_j , is only related to the distribution of the electric currents. On the other hand, H_V also accounts for the contribution of the interaction between this magnetic field and the potential field. The ratio H_j/H_V estimates the importance of H_j over H_V , i.e., the importance of the field only associated with the currents over the total field. In our simulations, the torus instability occurs when the current-carrying flux rope has enough magnetic pressure that cannot be balanced by the tension of the potential field associated with the given boundary. For the present simulation set-up, when this occurs H_j is about one-third of H_V , i.e., enough currents, associated with twisted, pressure-carrying magnetic fields, have been accumulated and they cannot be balanced any more by the tension of the potential field associated with the given boundary.




In this paper, we have shown that at the moment of the onset of the torus instability, the ratio $H_j/H_V \simeq 0.29 \pm 0.01$ for four different simulations of torus unstable flux ropes. This suggests that the ratio H_j/H_V is a good proxy for the onset of the torus instability, at least for this set of simulations. Some caution should however be taken in interpreting the particular value of 0.29. Relative magnetic helicity, as defined in this study, is not a simply additive quantity. It implies that had the helicities been computed in a different volume, using different boundary locations, a different value of the helicity threshold may have been obtained. In the present study, the values obtained between the simulations are consistent with each other, because they are computed on the very same numerical domain, which robustly validates the core results of the existence of a threshold on H_j/H_V for these simulations. The specific value obtained is however likely not universal. This value should not be taken straightforwardly as an eruption trigger criteria in, for example, observational studies, before further studies have been carried out. Relative magnetic helicity remains a poorly understood physical quantity that may need to be theoretically partly redefined and whose properties need to be further understood (e.g., as in Demoulin et al. 2006; Yeates & Hornig 2013; Dalmasse et al. 2014; Russell et al. 2015; Aly 2018; Dalmasse et al. 2018; Oberti & Ricca 2018).

If the ratio H_j/H_V turns out to be either physically related to the torus instability or just a good proxy of it, this would constitute a significant step forward in forecasting solar eruptions. In fact, the determination of the eruptivity potential of an active region based on the evaluation of the decay index can be achieved through observations (Kliem et al. 2013; Zuccarello et al. 2014, 2016; James et al. 2018). However, its

routine application might not be straightforward: it requires one to address nontrivial problems such as defining and identifying the axis of nonanalytical flux ropes in strongly asymmetric configurations and inferring the three-dimensional nature of solar filaments from stereoscopic observations. On the other hand, evaluating the ratio H_j/H_V would only require the construction of a three-dimensional magnetic field model of the active region, the automation of which could be achieved more easily than the other approach. However, before considering all of the above, the robustness of this criterion, whether or not the threshold effectively exists, and if its value is magnetic-system independent, needs to be extensively tested, first using as many numerical experiments as possible, and then against observed data.

F.P.Z. acknowledges the support of the Research Foundation —Flanders, FWO grant No. 1272718N. E.P. acknowledges the support of the FLARECAST project, funded by the European Unions Horizon2020 research and innovation program under grant agreement No. 640216. E.P. and L.L. acknowledge the support of the French Agence Nationale pour la Recherche through the HELISOL project, contract No. ANR-15-CE31-0001. G.V. acknowledges the support of the Leverhulme Trust Research Project Grant 2014-051. This work was granted access to the HPC resources of MesoPSL financed by the Région Ile de France and the project Equip@Meso (reference ANR-10-EQPX-29-01) of the programme Investissements d’Avenir supervised by the Agence Nationale pour la Recherche.

ORCID iDs

Francesco P. Zuccarello  <https://orcid.org/0000-0003-0320-7528>
 E. Pariat  <https://orcid.org/0000-0002-2900-0608>
 G. Valori  <https://orcid.org/0000-0001-7809-0067>

References

- Aly, J.-J. 2018, *FIDyR*, **50**, 011408
 Aulanier, G., Démoulin, P., & Grappin, R. 2005, *A&A*, **430**, 1067
 Aulanier, G., Török, T., Démoulin, P., & DeLuca, E. E. 2010, *ApJ*, **708**, 314
 Bateman, G. 1978, *MHD Instabilities* (Cambridge, MA: MIT Press)
 Berger, M. A. 1984, *GApFD*, **30**, 79
 Berger, M. A. 2003, in *Topological Quantities in Magnetohydrodynamics*, ed. A. Ferriz-Mas & M. Núñez (London: Taylor & Francis), 345
 Berger, M. A., & Field, G. B. 1984, *JFM*, **147**, 133
 Brandenburg, A., Petrie, G. J. D., & Singh, N. K. 2017, *ApJ*, **836**, 21
 Chae, J. 2001, *ApJL*, **560**, L95
 Dalmasse, K., Pariat, E., Démoulin, P., & Aulanier, G. 2014, *SoPh*, **289**, 107
 Dalmasse, K., Pariat, E., Valori, G., Jing, J., & Démoulin, P. 2018, *ApJ*, **852**, 141
 Démoulin, P., & Aulanier, G. 2010, *ApJ*, **718**, 1388
 Démoulin, P., & Pariat, E. 2009, *AdSpR*, **43**, 1013
 Démoulin, P., Pariat, E., & Berger, M. A. 2006, *SoPh*, **233**, 3
 Démoulin, P., Priest, E. R., & Lonie, D. P. 1996, *JGR*, **101**, 7631
 Finn, J. M., & Antonsen, T. M. 1985, *CoPPC*, **9**, 111
 Green, L. M., Démoulin, P., Mandrini, C. H., & van Driel-Gesztelyi, L. L. 2003, *SoPh*, **215**, 307
 Green, L. M., López Fuentes, M. C., Mandrini, C. H., Démoulin, P., & van Driel-Gesztelyi, L. L. 2002, *SoPh*, **208**, 43
 Guo, Y., Pariat, E., Valori, G., et al. 2017, *ApJ*, **840**, 40
 James, A. W., Valori, G., Green, L. M., et al. 2018, *ApJL*, **855**, L16
 Karpen, J. T., DeVore, C. R., Antiochos, S. K., & Pariat, E. 2017, *ApJ*, **834**, 62
 Kliem, B., Lin, J., Forbes, T. G., Priest, E. R., & Török, T. 2014, *ApJ*, **789**, 46
 Kliem, B., Su, Y. N., van Ballegoijen, A. A., & DeLuca, E. E. 2013, *ApJ*, **779**, 129
 Kliem, B., & Török, T. 2006, *PhRvL*, **96**, 255002
 Knizhnik, K. J., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2015, *ApJ*, **809**, 137
 Knizhnik, K. J., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2017, *ApJ*, **835**, 85
 LaBonte, B. J., Georgoulis, M. K., & Rust, D. M. 2007, *ApJ*, **671**, 955
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Antiochos, S. K. 2014, *ApJ*, **787**, 46
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Török, T. 2013, *ApJ*, **778**, 99
 Liu, Y., Hoeksema, J. T., Bobra, M., et al. 2014a, *ApJ*, **785**, 13
 Liu, Y., Hoeksema, J. T., & Sun, X. 2014b, *ApJL*, **783**, L1
 Liu, Y., & Schuck, P. W. 2012, *ApJ*, **761**, 105
 Low, B. C. 1996, *SoPh*, **167**, 217
 Mandrini, C. H., Pohjolainen, S., Dasso, S., et al. 2005, *A&A*, **434**, 725
 Miesch, M. S., Zhang, M., & Augustson, K. C. 2016, *ApJL*, **824**, L15
 Moraitis, K., Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Archontis, V. 2014, *SoPh*, **289**, 4453
 Nindos, A., & Andrews, M. D. 2004, *ApJL*, **616**, L175
 Nindos, A., & Zhang, H. Q. 2002, *ApJL*, **573**, L133
 Oberti, C., & Ricca, R. L. 2018, *FIDyR*, **50**, 011413
 Olmedo, O., & Zhang, J. 2010, *ApJ*, **718**, 433
 Pariat, E., Leake, J. E., Valori, G., et al. 2017, arXiv:1703.10562
 Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Dalmasse, K. 2015, *A&A*, **580**, A128
 Park, S.-H., Chae, J., & Wang, H. 2010, *ApJ*, **718**, 43
 Park, S.-H., Cho, K. S., Bong, S.-C., et al. 2012, *ApJ*, **750**, 48
 Park, S.-H., Lee, J., Choe, G. S., et al. 2008, *ApJ*, **686**, 1397
 Priest, E. R., Longcope, D. W., & Janvier, M. 2016, *SoPh*, **291**, 2017
 Prior, C., & Yeates, A. R. 2014, *ApJ*, **787**, 100
 Romano, P., Zuccarello, F. P., Guglielmino, S. L., & Zuccarello, F. 2014, *ApJ*, **794**, 118
 Rudenko, G. V., & Myshyakov, I. I. 2011, *SoPh*, **270**, 165
 Russell, A. J. B., Yeates, A. R., Hornig, G., & Wilmot-Smith, A. L. 2015, *PhPI*, **22**, 032106
 Rust, D. M., & Kumar, A. 1994, *SoPh*, **155**, 69
 Smyrli, A., Zuccarello, F., Romano, P., et al. 2010, *A&A*, **521**, A56
 Sturrock, Z., & Hood, A. W. 2016, *A&A*, **593**, A63
 Sturrock, Z., Hood, A. W., Archontis, V., & McNeill, C. M. 2015, *A&A*, **582**, A76
 Thalmann, J. K., Inhester, B., & Wiegmann, T. 2011, *SoPh*, **272**, 243
 Török, T., & Kliem, B. 2007, *AN*, **328**, 743
 Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Liu, Y. 2013, *ApJ*, **772**, 115
 Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Raouafi, N.-E. 2012, *ApJL*, **759**, L4
 Tziotziou, K., Tsiropoula, G., Georgoulis, M. K., & Kontogiannis, I. 2014, *A&A*, **564**, 86
 Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, E. 2012, *SoPh*, **278**, 347
 Valori, G., Démoulin, P., Pariat, E., & Masson, S. 2013, *A&A*, **553**, 38
 Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016, *SSRv*, **201**, 147
 van Driel-Gesztelyi, L. L., & Green, L. M. 2015, *LRSP*, **12**, 1
 Yang, S., Büchner, J., Santos, J. C., & Zhang, H. Q. 2013, *SoPh*, **283**, 369
 Yeates, A. R., & Hornig, G. 2013, *PhPI*, **20**, 012102
 Yeates, A. R., & Hornig, G. 2014, *Journal of Physics: Conference Series*, **544**, 012002
 Yeates, A. R., & Hornig, G. 2016, *A&A*, **594**, A98
 Zhao, L., DeVore, C. R., Antiochos, S. K., & Zurbuchen, T. H. 2015, *ApJ*, **805**, 61
 Zuccarello, F. P., Aulanier, G., & Gilchrist, S. A. 2015, *ApJ*, **814**, 126
 Zuccarello, F. P., Aulanier, G., & Gilchrist, S. A. 2016, *ApJL*, **821**, L23
 Zuccarello, F. P., Chandra, R., Schmieder, B., Aulanier, G., & Joshi, R. 2017, *A&A*, **601**, A26
 Zuccarello, F. P., Romano, P., Zuccarello, F., & Poedts, S. 2011, *A&A*, **530**, A36
 Zuccarello, F. P., Seaton, D. B., Mierla, M., et al. 2014, *ApJ*, **785**, 88

4.3 Seuil du ratio d'hélicité dans des régions actives

Le ratio d'hélicité η_H (cf. Eq. 4.1) est une quantité prometteuse qui peut servir à signaler le potentiel éruptif d'une configuration magnétique. Son intérêt, mis en évidence initialement à partir de données magnétiques issues de simulations numériques, nécessite cependant d'être confirmé à partir de données observationnelles.

Pour estimer les hélicités magnétiques d'une région active, nous avons vu qu'une possibilité consiste à utiliser leurs définitions initiales comme des intégrales volumiques dépendant des champs magnétiques potentiel et non potentiel (cf. Sect. 3.18). Il s'agit de la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1). Puisque le champ magnétique n'est pas mesurable correctement dans la couronne solaire (cf. Chap. 2), une solution consiste à le reconstruire en 3D par la méthode d'extrapolation sans force non linéaire (NLFFF, cf. Sect. 2.3). Nous verrons cependant qu'en fonction de la qualité de l'extrapolation (en ce qui concerne la divergence du champ magnétique), la dynamique du critère d'éruptivité η_H peut varier fortement (cf. Sect. 4.3.1). J'introduirai donc un critère permettant de définir si la mesure de η_H est consistante ou non.

Je présenterai ensuite deux études auxquelles j'ai contribué. Dans la première, nous avons suivi l'évolution du ratio d'hélicité au niveau d'une région active donnant lieu à deux CMEs (cf. Sect. 4.3.2). Dans la deuxième, nous avons étudié l'influence de la morphologie de la région active sur la dynamique de ce ratio (cf. Sect. 4.3.3). Pour cela nous avons suivi son évolution à partir des données magnétiques de deux régions actives différentes : l'une engendre un flare confiné, l'autre donne lieu à une éjection de masse coronale (cf. Sect. 1.1.4).

Je finirai par présenter les différentes perspectives qu'offrent ces travaux (cf. 4.3.4).

4.3.1 Influence de la solénoïdalité du champ magnétique sur la mesure du ratio d'hélicité : [Thalmann et al. \(2019a\)](#)

4.3.1.1 Résumé

Dans la section (2.4.2.2) nous avons vu que si le champ magnétique n'était pas suffisamment solénoïdal, la mesure de l'hélicité magnétique n'était plus consistante. Nous avons également vu que la propriété solénoïdale du champ magnétique se quantifie à l'aide d'une énergie magnétique E_{div} (cf. Eq. 2.31) qui dépend de la divergence du champ magnétique. À partir de simulations numériques, [Valori et al. \(2016\)](#) ont montré que si $E_{div}/E_v < 10\%$ alors l'hélicité magnétique relative pouvait être correctement estimée. Dans la section (2.4.2.2), nous avons donc conclu que les reconstructions 3D du champ magnétique coronal devaient au minimum vérifier cette condition si elles devaient servir à l'estimation de l'hélicité magnétique relative.

Dans [Thalmann et al. \(2019a\)](#), nous sommes revenus sur l'impact qu'a la qualité de l'extrapolation sur la mesure de l'hélicité magnétique. Nous avons incorporé entre autres dans notre étude, le suivi temporel de l'hélicité non potentielle, H_j , de l'hélicité mêlée, H_{pj} , ainsi que du ratio $\eta_H = H_j/H_r$ (cf. Eq. 4.1) qui n'avait pas été considéré par [Valori et al. \(2016\)](#). Ces grandeurs sont calculées à partir de la méthode d'intégration directe volumique (IDV) appliquée à des données magnétiques obtenues par extrapolation sans force non linéaire (cf. Sect. 2.3.1.3).

Notre objectif était de voir à quel point la dynamique des différentes énergies et hélicités est identique entre deux extrapolations d'une même région active (cf. Fig. 4.10) qui n'ont pas la même qualité. En effet, la première série d'extrapolation a une qualité standard ($\sigma_J \approx 10^\circ$, $\langle |f_i| \rangle \propto 10^{-3}$ et $E_{div}/E_v \geq 0.05$). Tandis que la deuxième série a une meilleure solénoïdalité ($\sigma_J \approx 16^\circ$, $\langle |f_i| \rangle \propto 10^{-4}$ et $E_{div}/E_v \simeq 0.01$).

Nous avons suivi l'évolution de la région active, NOAA 11158, entre le 11 et le 16 février 2011 ce qui correspond à son passage proche du centre du disque solaire. La région présente

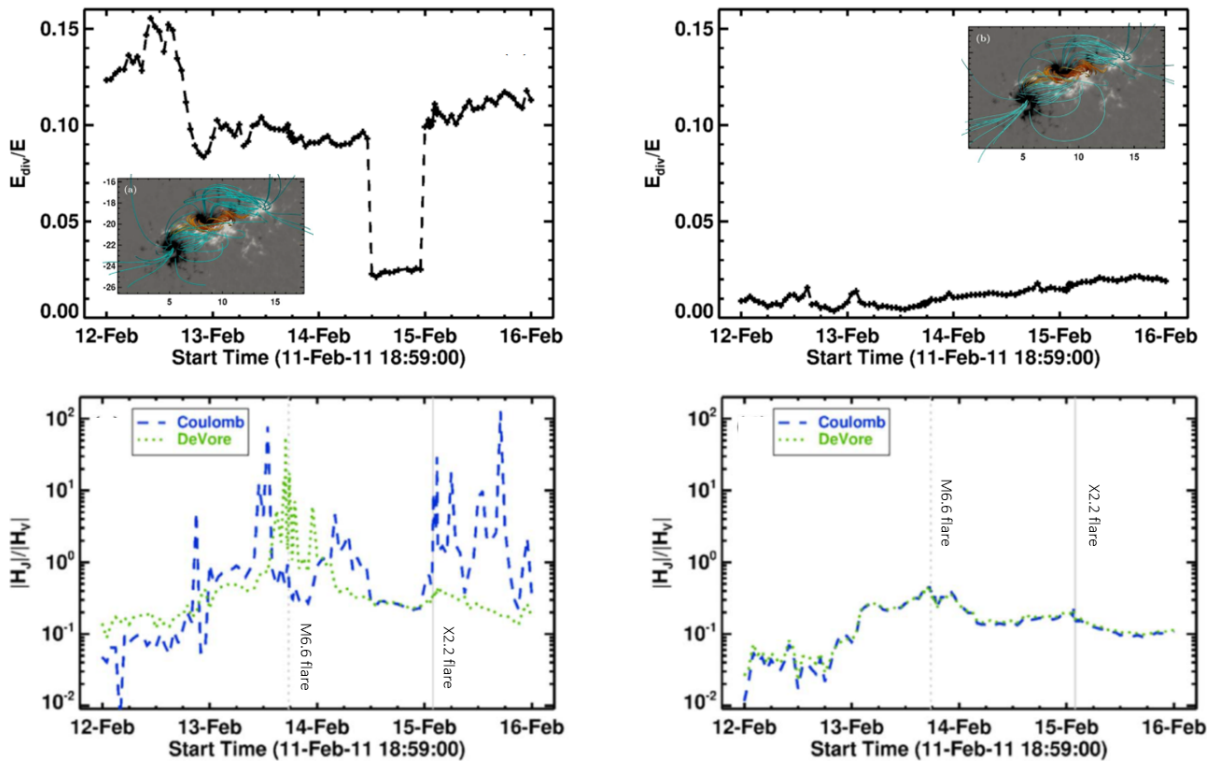


FIGURE 4.10 – Dynamique du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1) en fonction de la qualité de l'extrapolation de la région active NOAA 11158. Les panneaux de gauche et droite correspondent à deux séries d'extrapolation de cette région active. **Haut** : évolution temporelle de la divergence du champ magnétique quantifié par le ratio E_{div}/E_v (cf. Eq. 2.31) Les petits panneaux incorporés montrent la morphologie des lignes de champ magnétique le 14 février à 21 :00 UT. Le champ magnétique est en moyenne beaucoup plus solénoïdal dans la première série d'extrapolation. **Bas** : évolution temporelle du ratio $\eta_H = |H_j|/|H_r|$. Les traits verticaux représentent les éruptions solaires de classe X et M. Les courbes bleues et vertes correspondent à deux méthodes d'intégrations volumiques différentes utilisées pour estimer η_H . Quand le champ magnétique est suffisamment solénoïdal, les deux méthodes donnent des valeurs très similaires. Adaptée de [Thalmann et al. \(2019a\)](#)

une éruption de classe M le 13 février et de classe X le 15. À instant régulier durant toute la période de suivi, le champ magnétique a été reconstruit en 3D par la méthode d'optimisation (cf. Sect. 2.3.1.3). Les deux séries d'extrapolations utilisaient des paramètres différents notamment durant la phase de prétraitement (cf. Sect. 2.2). Les énergies et les hélicités ont été calculées par deux méthodes d'intégration directe volumique (cf. Fig 4.10), ce qui correspond en réalité à deux choix de jauge différents (cf. Sect. 3.3.1.1).

Voici les résultats principaux obtenus :

- En accord avec les résultats de [Valori et al. \(2016\)](#), le calcul des énergies est moins impacté par la qualité de l'extrapolation.
- L'évolution temporelle du ratio η_H varie fortement entre les deux séries. Cela est dû à des évolutions des hélicités non potentielle et mêlée également différentes.
- Pour la série fortement solénoïdale, le calcul du ratio d'hélicité donne des résultats très similaires entre les deux jauges employées. Cela confirme la robustesse des méthodes d'intégration directe volumique que nous avons déjà abordée section (3.3.1.5) quand le champ magnétique est suffisamment solénoïdal. Au contraire, aucune physique ne peut être déduite de la première série d'extrapolation. Les hélicités magnétiques ne sont plus invariantes de jauge (cf. Sect. 3.3.1.5), les deux méthodes d'IDV donnent donc des

résultats différents qui ne peuvent pas être exploités.

- Dans la deuxième série d'extrapolation (ζ -à d. celle où le champ magnétique est le plus solénoïdale), nous observons que η_H atteint des maximums locaux au moment de l'éruption comme le suggéraient les études numériques (Pariat et al. 2017; Zuccarello et al. 2018). Cela semble confirmer que le ratio d'hélicité η_H est un excellent candidat pour prédire l'éruptivité d'une région active (cf. Sect. 4.2.2).

Finalement, nous avons montré que les études de la dynamique du critère d'éruptivité η_H ne sont possibles que si la propriété solénoïdale du champ magnétique est suffisamment respectée.

4.3.1.2 Ma contribution

Dans Thalmann et al. (2019a), j'ai été responsable du calcul des hélicités par intégration directe volumique dans la jauge de DeVore-Colomb (cf. Sect. 3.3.1.3). Mes mesures sont tracées en vert dans la figure (4.10) et dans Thalmann et al. (2019a).

En détail, J. Thalmann m'a fourni le champ magnétique coronal reconstruit. Cela représente pour une série d'extrapolation 113 fichiers pour un total de 5Go de données. J'ai ensuite adapté mon implémentation numérique de la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1.4) afin qu'il puisse traiter ces données sur les serveurs de calcul de l'Observatoire de Paris. J'ai dû pour cela me familiariser avec le format "xdr" ("external data representation") dans lequel était stocké le champ magnétique reconstruit.

Comme décrit section (3.3.1.4), à partir du champ magnétique, \mathbf{B} , le champ magnétique potentiel, \mathbf{B}_p est obtenu en résolvant numériquement l'équation de Poisson (cf. Eq. 3.46). Les potentiels vecteurs, \mathbf{A} et \mathbf{A}_p sont ensuite calculés en utilisant la méthode numérique développée par Valori et al. (2012) et décrite section (3.3.1.3). Lors de leurs calculs, il est en particulier possible de choisir leurs jauges. J'ai ainsi fixé une divergence nulle pour le potentiel vecteur du champ magnétique potentiel, $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$, ainsi que l'égalité $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p$ à la surface supérieure du domaine. Dans Thalmann et al. (2019a), cette jauge est nommée "DeVore".

Les champs magnétiques ainsi que les potentiels vecteurs étant connus, j'ai pu calculer les différentes hélicités (relative, non potentielle et mêlée, cf. Eq. 3.18) ainsi que les différentes énergies (totale, libre et potentielle, cf. Eq. 1.3). En parallèle, J. Thalmann a calculé ces mêmes quantités à partir de la méthode proposée dans Thalmann et al. (2011). Ses résultats sont tracés en bleu dans la figure (4.10) et dans Thalmann et al. (2019a).

Pour comparer la qualité des deux séries d'extrapolations, nous avons calculé différentes métriques (cf. Sect. 2.4.1), en particulier l'angle entre le champ magnétique et la densité de courants électriques, σ_J (cf. Eq. 2.24), et la moyenne du flux fractionné, $\langle |f_i| \rangle$ (cf. Eq. 2.30). En partant de leurs définitions proposées par Schrijver et al. (2006), j'ai développé dans le langage de programmation Python une méthode numérique permettant de calculer ces métriques à partir d'un champ magnétique donné. Ce code permet le traitement de nombreuses configurations magnétiques différentes.

Une fois les différents résultats obtenus, j'ai contribué à la rédaction et à la relecture de l'article. Cet article a également bénéficié des discussions que nous avons eues lors de la réunion annuelle de notre groupe de travail sur l'hélicité dont les quatre auteurs sont membres (cf. Sect. 3.4.1.2). J'ai pu durant les nombreux échanges apporter mon expertise sur la dynamique des hélicités non potentielle et mêlée qui sont aux cœurs de mes travaux de thèse (cf. Chap. 5).



On the Reliability of Magnetic Energy and Helicity Computations Based on Nonlinear Force-free Coronal Magnetic Field Models

Julia K. Thalmann¹ , L. Linan², E. Pariat² , and G. Valori³

¹ University of Graz, Institute of Physics/IGAM, Universitätsplatz 5, A-8010 Graz, Austria; julia.thalmann@uni-graz.at

² LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, F-92195 Meudon, France

³ Mullard Space Science Laboratory, University College London, Holmbury St. Mary, Dorking, Surrey RH5 6NT, UK

Received 2019 June 17; revised 2019 July 1; accepted 2019 July 2; published 2019 July 18

Abstract

We demonstrate the sensitivity of magnetic energy and helicity computations regarding the quality of the underlying coronal magnetic field model. We apply the method of Wiegelmann & Inhester to a series of *Solar Dynamics Observatory*/Helioseismic and Magnetic Imager vector magnetograms, and discuss nonlinear force-free (NLFF) solutions based on two different sets of the free model parameters. The two time series differ from each other concerning their force-free and solenoidal quality. Both force- and divergence-freeness are required for a consistent NLFF solution. Full satisfaction of the solenoidal property is inherent in the definition of relative magnetic helicity in order to ensure gauge independence. We apply two different magnetic helicity computation methods to both NLFF time series and find that the output is highly dependent on the level to which the NLFF magnetic fields satisfy the divergence-free condition, with the computed magnetic energy being less sensitive than the relative helicity. Proxies for the nonpotentiality and eruptivity derived from both quantities are also shown to depend strongly on the solenoidal property of the NLFF fields. As a reference for future applications, we provide quantitative thresholds for the force- and divergence-freeness, for the assurance of reliable computation of magnetic energy and helicity, and of their related eruptivity proxies.

Key words: methods: data analysis – methods: numerical

1. Introduction

For practical cases, Valori et al. (2012) demonstrated the validity and physical meaningfulness to compute (and track in time) the relative magnetic helicity in order to characterize (the evolution of) a magnetic system. As its name implies, the relative helicity allows it to express the helicity of a magnetic field with respect to a reference field. This relative formulation allows it to circumvent the problem that magnetic helicity cannot be defined meaningfully for systems that are not magnetically closed (such as the solar corona).

Following Berger & Field (1984) and Finn & Antonsen (1984), the relative magnetic helicity (simply called helicity hereafter) in a volume, \mathcal{V} , bounded by a surface, $\partial\mathcal{V}$, can be written as

$$H_{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) d\mathcal{V}, \quad (1)$$

where the reference field, \mathbf{B}_0 , shares the normal component of the studied field \mathbf{B} on $\partial\mathcal{V}$. Often, a potential (current-free) field is used as reference field (see Prior & Yeates 2014 for an alternative choice). In Equation (1), \mathbf{A} and \mathbf{A}_p are the vector potentials satisfying $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ and $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_p$, respectively.

Following Berger (1999), Equation (1) may be written as $H_{\mathcal{V}} = H_J + H_{PJ}$, with

$$H_J = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) d\mathcal{V}, \quad (2)$$

$$H_{PJ} = 2 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}_p \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) d\mathcal{V}. \quad (3)$$

Here, H_J is the magnetic helicity in the volume associated with the electric current, and H_{PJ} is the helicity associated with the component of the field that is threading $\partial\mathcal{V}$. Because \mathbf{B} and \mathbf{B}_0

are designed such that they share their normal component, \mathbf{B}_n , on $\partial\mathcal{V}$, not only $H_{\mathcal{V}}$ but also both H_J and H_{PJ} are independently gauge invariant.

Importantly, the underlying magnetic fields, \mathbf{B} and \mathbf{B}_0 , have to adhere to a certain level of divergence-freeness, in order to ensure reliable helicity computation. For this purpose, Valori et al. (2013) used the decomposition of the magnetic energy within \mathcal{V} in the form

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} B^2 d\mathcal{V} = E_0 + E_J \\ &= E_{0,s} + E_{J,s} + E_{0,ns} + E_{J,ns} + E_{\text{mix}}, \end{aligned} \quad (4)$$

with E_0 and E_J being the energies of the potential and current-carrying magnetic field, respectively. E_0 is used to compute an upper limit for the free energy as $E_F = E - E_0$. $E_{0,s}$ and $E_{J,s}$ are the energies of the potential and current-carrying solenoidal magnetic field components. $E_{0,ns}$ and $E_{J,ns}$ are those of the corresponding nonsolenoidal components. E_{mix} corresponds to all cross terms (see Equation (8) in Valori et al. 2013 for the detailed expressions). For a perfectly solenoidal field, one finds $E_{0,s} = E_0$, $E_{J,s} = E_J$, and $E_{0,ns} = E_{J,ns} = E_{\text{mix}} = 0$.

Based on Equation (4), Valori et al. (2016) introduced the ratio E_{div}/E , with $E_{\text{div}} = E_{0,ns} + E_{J,ns} + |E_{\text{mix}}|$, as to be indicative of the divergence-freeness of the magnetic field, and tested the corresponding sensitivity of Equation (1), based on different numerical methods to compute magnetic helicity. Based on a specifically designed numerical experiment, where a finite divergence was added in a controlled way to a numerically solenoidal MHD model case, it was shown that the error in the computation of $H_{\mathcal{V}}$ may grow considerably if $E_{\text{div}}/E \gtrsim 0.1$.

Magnetic helicity computations are often performed based on nonlinear force-free (NLFF) coronal magnetic field extrapolations, using the optimization method of Wiegelmann & Inhester (2010). It represents the numerical solution to the boundary value problem of extrapolation of the measured surface magnetic field into the solar corona:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6)$$

The method allows several free model parameters to be chosen, in order to optimize the numerical solution of Equations (5) and (6). If used as a black box, predefined values are used, without optimization regarding underlying specific magnetogram data. The predefined values are to be thought of as to be initial guesses only, however, and a careful testing and tuning of the free model parameters is inevitable. Only a careful selection of the free model parameters is capable of producing NLFF solutions of highest quality, both in terms of force- and divergence-freeness. A high degree of force-freeness is crucial for the validity of the NLFF solution with respect to the measured photospheric field it is based on. A low level of divergence is mandatory for a reliable computation of H_V .

The presented work represents an extension of the work by Valori et al. (2016), by considering the dependency of energy and helicity computations on the field’s solenoidal property in observed solar cases, rather than an idealized model. Our work shall serve as a reference, concerning the quality an NLFF model has to suffice, in order to be used as an input for reliable helicity modeling.

2. Method

We use photospheric vector magnetic field data (Hoeksema et al. 2014), derived from *Solar Dynamics Observatory (SDO)*; Pesnell et al. 2012) Helioseismic and Magnetic Imager (HMI; Schou et al. 2012) polarization measurements. We use the HMI. SHARP_CEA_720S data series that provides a Lambert Cylindrical Equal-Area projected magnetic field vector within automatically identified active region patches (Bobra et al. 2014), with the azimuthal component of the vector magnetic field being disambiguated (Metcalfe 1994; Leka et al. 2009).

For computational feasibility, we bin the photospheric data by a factor of 4 to a plate scale of $0^\circ 12'$. We set our analysis time range such that it covers the time period 2011 February 12–16, i.e., the disk passage of active region (AR) NOAA 11158. Around intense flares (equal or larger *GOES* class M5.0), we use HMI’s native time cadence of 12 minutes, and a 1 hr cadence otherwise.

Based on the binned vector magnetic field data, we compute NLFF equilibria for each time step, which involves two computational steps. First, we “preprocess” the data, to obtain a more force-free consistent state (Wiegelmann et al. 2006). The preprocessing method allows different free parameters to be set:

1. μ_1 and μ_2 control the level of force and torque of the data;
2. μ_3 allows deviations from the input data; and
3. μ_4 controls the degree of applied smoothing.

In the original notation the predefined standard setting is $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (1, 1, 10^{-3}, 10^{-2})$.

Second, we apply the method of Wiegelmann & Inhester (2010) to the preprocessed maps. The optimization approach is designed such that the functional

$$L = \int_V w_f \frac{|(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|^2}{B^2} + w_d |\nabla \cdot \mathbf{B}|^2 dv + \nu \int_S (\mathbf{B} - \mathbf{B}_{\text{obs}}) \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_{\text{obs}}) ds \quad (7)$$

is minimized such that the volume-integrated Lorentz force and divergence becomes small.

The surface term in Equation (7) allows deviations between the NLFF solution, \mathbf{B} , and the magnetic field information at the lower boundary, \mathbf{B}_{obs} , in order to find a more force-free solution. The deviation from \mathbf{B}_{obs} is controlled by the diagonal error matrix, \mathbf{W} , which allows it to incorporate uncertainties on each component of the magnetic field, and in each pixel, separately. Ideally, \mathbf{B}_{obs} would be a magnetogram measured at a chromospheric height, i.e., in a force-free regime of the solar atmosphere. In practice, the preprocessed photospheric vector field, \mathbf{B}_{pp} , is supplied so that $\mathbf{B}_{\text{obs}} = \mathbf{B}_{\text{pp}}$.

The model parameters that can be freely assigned in Equation (7) are:

1. Separate weightings of the volume-integrated force (w_f) and divergence (w_d). In the original notation these are set as $w_f = w_d = 1$.
2. The components w_{los} and w_{hor} of the diagonal error matrix, \mathbf{W} , can be defined in different ways. The choice $w_{\text{los}} = w_{\text{hor}} = 1$ assures accuracy of both the longitudinal and horizontal magnetic field equally at all pixel locations. Alternatively, $w_{\text{hor}} = |B_{\text{hor}}| / \max(|B_{\text{hor}}|)$ may be applied, i.e., assuming stronger horizontal fields to be measured with higher accuracy.
3. The impact of the surface term, i.e., the influence of \mathbf{B}_{obs} onto the final NLFF solution, is controlled by ν . Wiegelmann & Inhester (2010) suggest ν in the range 10^{-4} – 10^{-1} .

Successful NLFF modeling involves finding a combination of free model parameters that delivers optimized results, in terms of force- and divergence-freeness. In order to quantify the consistency of the obtained NLFF solutions, we use the current-weighted average of the angle between the modeled magnetic field and electric current density, θ_I (Schrijver et al. 2006). We use the volume-averaged fractional flux, $\langle |f_i| \rangle$ (Wheatland et al. 2000), and the energy ratio, E_{div}/E (Valori et al. 2013), to quantify the level of divergence of the NLFF solution.

We use two finite-volume (FV) methods to compute the magnetic helicity based on Equations (1)–(3). The method of Thalmann et al. (2011) solves systems of partial differential equations to obtain the vector potentials \mathbf{A} and \mathbf{A}_p , using the Coulomb gauge, $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$ (“FV_{Coulomb}” hereafter). The method of Valori et al. (2012) is based on integral formulations, using the DeVore gauge, $A_z = A_{p,z} = 0$ (“FV_{DeVore}” hereafter). Both methods define the reference field as $\mathbf{B}_0 = \nabla \phi$, with ϕ being the scalar potential, subject to the constraint $\nabla_n \phi = \mathbf{B}_n$ on ∂V . The methods have been tested in the framework of an extended proof-of-concept study on FV helicity computation methods (Valori et al. 2016), where it has been shown that for various test setups the methods deliver helicity values in line with each other, differing by a few percent only.

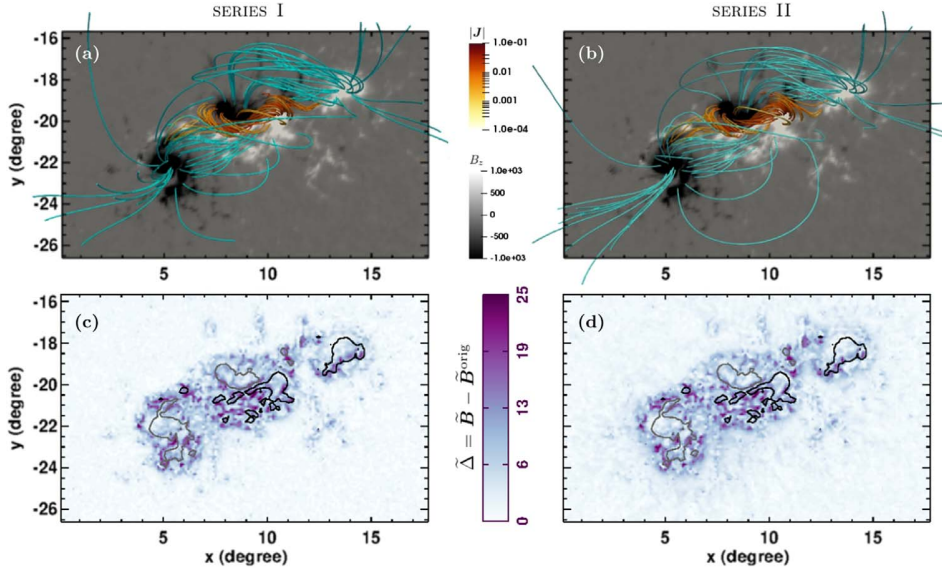


Figure 1. NLFF model solution for February 14 at 21:00 UT in (a) SERIES I and (b) SERIES II. Sample field lines outlining the large-scale magnetic field are colored green. Those originating from the AR center are color-coded according to the total absolute current density, $|J|$, at their footpoints. The gray scale background shows the measured vertical magnetic field, B_z , scaled to ± 1 kG. Panels (c) and (d) show the respective normalized changes at the lower NLFF boundary. Black/gray contours are drawn at ± 750 G.

In total we employed 18 NLFF extrapolations of the same HMI magnetogram at 12:00 UT, obtained with 18 different combinations of the parameters $(\mu_3, \mu_4, w_d, w_{\text{hor}})$, in order to pin down successful parameter sets. Unphysical NLFF solutions with $E_0 < E$ and solutions where $E_{\text{div}}/E > 0.1$ were discarded from further consideration. Seven solutions were found with favorable properties for helicity modeling, with $E_{\text{div}}/E \lesssim 0.1$. Out of those, two parameter sets were chosen for further consideration. In combination with $(\mu_1, \mu_2, w_f, \nu) = (1, 1, 1, 10^{-3})$, our first selected choice $(\mu_3, \mu_4, w_d, w_{\text{hor}}) = (10^{-3}, 10^{-3}, 2, \propto B_{\text{hor}})$ delivered an NLFF solution with an exceptionally low solenoidal level ($E_{\text{div}}/E < 0.01$). An NLFF model solution close to the limit $E_{\text{div}}/E \simeq 0.1$, suggested as to be tolerable for helicity modeling in Valori et al. (2016), was found based on the choice $(\mu_3, \mu_4, w_d, w_{\text{hor}}) = (10^{-3}, 10^{-3}, 1, 1)$, and also selected for further analysis.

We used these two sets of free model parameters to compute the full time series of NLFF models for NOAA 11158 between February 12 00:00 UT and February 16 00:00 UT (hereafter called SERIES II and SERIES I respectively), in order to demonstrate how important the degree of $\nabla \cdot \mathbf{B}$ of the input NLFF solutions is for successful helicity computation.

3. Results

3.1. Properties and Quality of NLFF Modeling

In Figures 1(a) and (b), the NLFF model solution of SERIES I and SERIES II for February 14 21:00 UT are shown, respectively. Both reveal a low-lying system of helical magnetic field along the main polarity inversion line in the AR center, in agreement with earlier works (e.g., Jing et al. 2012; Sun et al. 2012; Inoue et al. 2013).

Based on the used free parameter sets, the binned vector magnetic field, \mathbf{B}^{orig} , is changed to a different degree during NLFF modeling. Following DeRosa et al. (2015), we characterize the modifications of the vector field at the lower

Table 1
Changes to the Measured Magnetic Field during NLFF Modeling, as Shown in Figures 1(c) and (d)

Series	Δ_z^{rms} (G)	Δ_h^{rms} (G)	$\tilde{\Delta}_z^{\text{rms}}$ (G)	$\tilde{\Delta}_h^{\text{rms}}$ (G)
I	68.74	181.36	4.30	2.42
II	63.03	103.54	4.06	2.88

boundary ($z = 0$) as

$$\Delta = \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^{\text{orig}} \quad (8)$$

for each component $i = \{x, y, z\}$, where \mathbf{B} is the final magnetic field at the lower boundary of the NLFF model. The magnitudes of the changes are considered separately for the vertical (Δ_z) and horizontal magnetic field $\Delta_h = |(\Delta_x, \Delta_y)|$. In addition, we use the normalized change, $\tilde{\Delta} = \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}}^{\text{orig}}$, to incorporate the measurement uncertainties for each component, σ_i , where $\tilde{B}_i = B_i/\sigma_i$ and $\tilde{B}_i^{\text{orig}} = B_i^{\text{orig}}/\sigma_i$, for the computation of $\tilde{\Delta}_z$ and $\tilde{\Delta}_h = |(\tilde{\Delta}_x, \tilde{\Delta}_y)|/\sqrt{2}$. Table 1 lists the rms values for the magnitudes of the (normalized) changes of the vertical and horizontal magnetic field components. The normalized changes tend to be larger in weak field regions, i.e., outside of the AR core (see Figures 1(c) and (d)).

Figure 2(a) shows the mean current-weighted angle for SERIES I (gray stars), with a median of $\theta_j = 9^\circ 8 \pm 1^\circ 5$. For the volume-averaged fractional flux (black triangles), we find a median value of $\langle |f_i| \rangle \times 10^4 = 13.3 \pm 2.5$. Figure 2(c) shows that $E_{\text{div}}/E \gtrsim 0.05$, with a median value of $E_{\text{div}}/E = 0.06 \pm 0.02$, for the majority of time instances considered. For SERIES II, we find the median values $\theta_j = 15^\circ 6 \pm 2^\circ 7$ and $\langle |f_i| \rangle \times 10^4 = 2.2 \pm 1.0$. The nonsolenoidal contribution to the total energy is considerably lower than in SERIES I (Figure 2(d)), with a median value $E_{\text{div}}/E = 0.005 \pm 0.003$. Note that the improved solenoidal

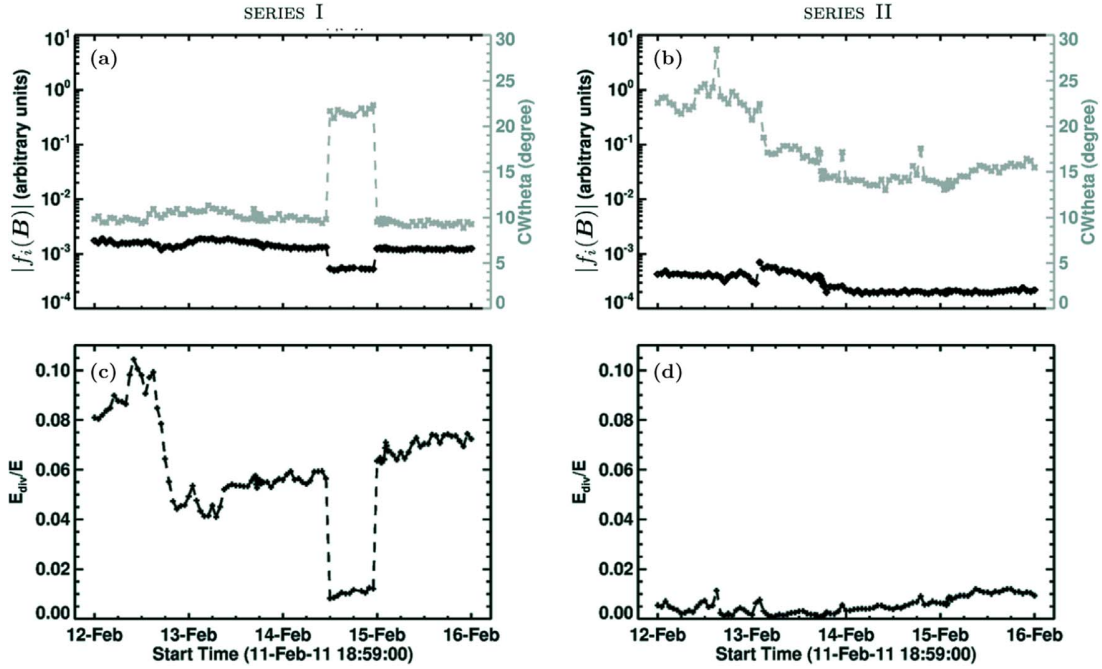


Figure 2. Quality of NLFF magnetic fields of SERIES I (left panels) and SERIES II (right panels). θ_f (gray stars) in panels (a) and (b) quantifies the degree of force-freeness. The fractional flux, $\langle |f_i| \rangle$ (black triangles), quantifies the level of $\nabla \cdot \mathbf{B}$. The nonsolenoidal contribution, E_{div} , to the total energy is shown in panels (c) and (d).

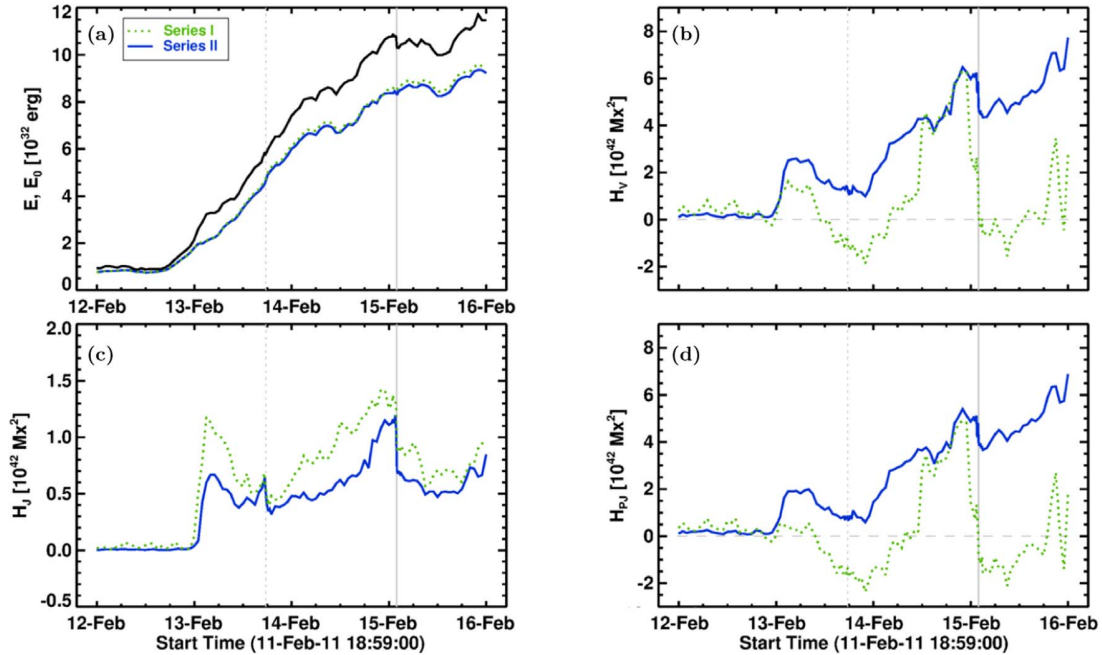


Figure 3. (a) Total energy (E ; black solid line) and potential energy (E_0) for SERIES I (green dashed) and SERIES II (blue solid). Panel (b) shows the corresponding total helicity, H_V , derived using the FV_{Coulomb} method. In panels (c) and (d), the contributions of H_J and H_{PJ} are shown, respectively. Vertical dashed and solid lines mark the GOES peak time of M- and X-class flares, respectively.

condition in SERIES II is achieved at the slight expense of force-freeness.

3.2. Effect of Divergence on Helicity Computations

Fast-evolving NOAA 11158 showed a considerable increase of unsigned magnetic flux starting on late February 12, at a time when a pronounced filament started to emerge (for an in-

depth analysis see Sun et al. 2012). Parts of the filament erupted during two eruptive flares, an M6.6 flare (SOL2011-02-13T17:38) and an X2.2 flare (SOL2011-02-15T01:56). Figure 3(a) shows the corresponding total (E ; black solid line) and potential field (E_0) energy for SERIES I (green dotted line) and SERIES II (blue solid line), including a considerable increase, starting with the emergence of the filament early on February 13.

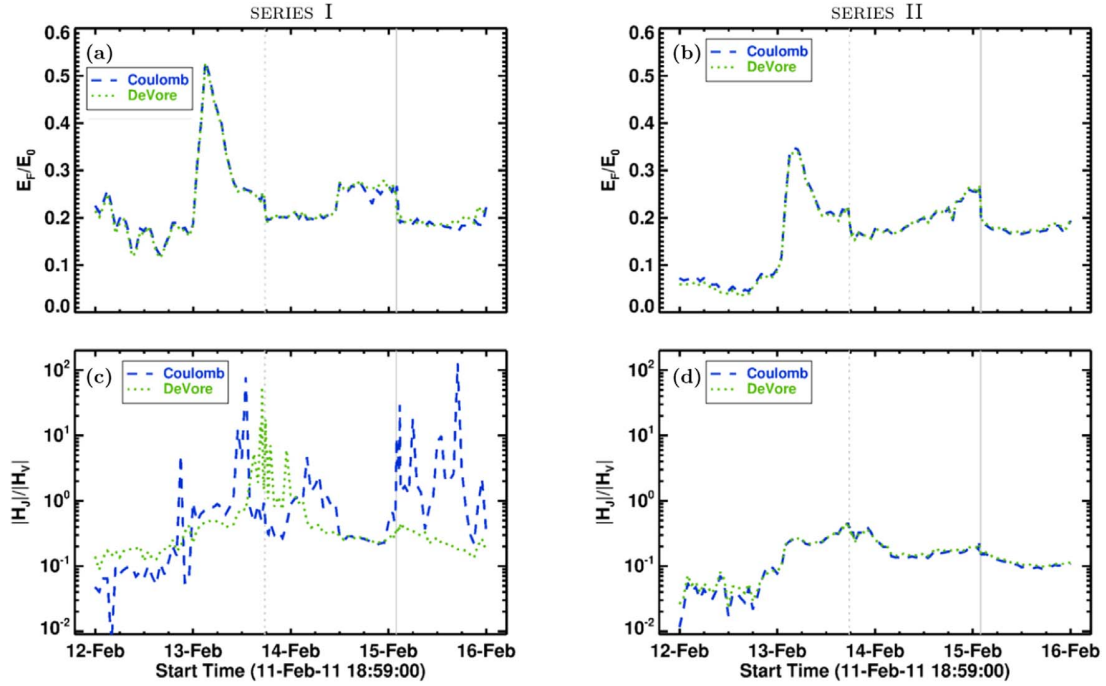


Figure 4. Magnetic energy ratio, E_F/E_0 , for (a) SERIES I and (b) SERIES II. Panels (c) and (d) show the helicity ratio, $|H_J|/|H_V|$, respectively. Blue dashed and green dotted lines represent the model solutions based on the FV_{Coulomb} and FV_{DeVore} methods. Vertical dashed and solid lines mark the *GOES* peak time of M- and X-class flares, respectively.

Figure 3(b) shows the total helicity, H_V , computed with the FV_{Coulomb} method. While exclusively positive values are found for H_V when based on SERIES II, the corresponding curve of SERIES I shows an unexpected behavior, including rapid and drastic changes, independent of the occurrence of the eruptive flares. A closer look into the contributors to the total helicity, H_J (Figure 3(c)) and H_{PJ} (Figure 3(d)), reveals that these changes mainly stem from the contribution of H_{PJ} . The magnitudes of H_J differ less, with slightly lower values obtained from SERIES II.

Though not shown explicitly, we note that the results derived using the FV_{DeVore} method show a similar behavior, though slightly less extreme. In SERIES I, a good match of H_V (and thus H_{PJ}) between the two methods is only found during a short time interval, between February 14 \sim 12:00 UT and early February 15, i.e., where the input magnetic fields were more divergence-free ($\langle |f_i| \rangle \propto 10^{-4}$ and $E_{\text{div}}/E \simeq 0.01$) than at other times (compare Figure 2(c)). In contrast, FV_{Coulomb} and FV_{DeVore} deliver almost identical results for the entire SERIES II.

3.3. Effect of Divergence onto Eruptivity Proxies

Often employed are proxies quantifying the nonpotentiality and eruptivity in the form of the free energy ratio, E_F/E_0 , and the helicity ratio, $|H_J|/|H_V|$. In Figure 4, we compare the effect of divergence in SERIES I (left panels) and SERIES II (right panels) onto the corresponding values derived with the FV_{Coulomb} and FV_{DeVore} method.

While E_F/E_0 is growing prior to the eruptive flares and $\gtrsim 0.2$ in SERIES II (Figure 4(b)), this is not the case for SERIES I (Figure 4(a)). Also, in SERIES I, E_F/E_0 appears rather large prior to the presence of strong magnetic fluxes (before late February 12) at a time when the AR did not exhibit signatures of a filament. Thus, the energy (ratio) at those times is mostly

dominated by the level of $\nabla \cdot \mathbf{B}$, and in that sense indicates that anything below $E_F/E_0 \simeq 0.2$ is not significant.

The effect on the helicity ratio $|H_J|/|H_V|$ is equally severe. While it may serve as a proxy for eruptivity, with (increasing) decreasing trend (before) after the major flares in SERIES II, and values $|H_J|/|H_V| \gtrsim 0.2$ prior to flare occurrence (Figure 4(d)), such a conclusion cannot be drawn based on SERIES I (Figure 4(c)). Here, clear and smooth trends around flares are hard to discriminate. In particular, $|H_J|/|H_V|$ exceeds a value of one at times when H_{PJ} based on the respective method takes unexpected turns (compare the dashed blue line in Figure 4(c) and the green dotted line in Figure 3(e) for the FV_{Coulomb} method). Again, $|H_J|/|H_V|$ based on the two different methods agrees only for times in SERIES I when the underlying magnetic field is more divergence free (compare Figures 2(a) and (c)).

4. Summary and Discussion

We aimed at testing the sensitivity of magnetic energy and helicity computations, based on real solar observations, in terms of the quality of the employed coronal magnetic field model. We employed the method of Wiegmann & Inhester (2010) based on two different free model parameter sets to a time series of observed vector magnetograms, in order to obtain two time series of NLFF models (SERIES I and SERIES II). A high degree of force-freeness is crucial for the validity of an NLFF solution with respect to the measured photospheric field it is based on. A low level of divergence is mandatory for a reliable computation of magnetic helicity (Valori et al. 2013, 2016).

While the NLFF fields of SERIES I are of “standard” quality ($\theta_j \simeq 10^\circ$, $\langle |f_i| \rangle \propto 10^{-3}$, and $E_{\text{div}}/E \gtrsim 0.05$), those of SERIES II are of higher solenoidal quality ($\langle |f_i| \rangle \propto 10^{-4}$ and $E_{\text{div}}/E \simeq 0.01$) and slightly lower force-freeness (Figure 2). The numbers for SERIES II represent remarkably good values

for observation-based NLFF modeling, competing with the best-performing models discussed in DeRosa et al. (2015), while better preserving the original input vector magnetic field (compare the rms values in Tables 1 and 3 of DeRosa et al. 2015).

We applied two different FV methods to compute the magnetic helicity of Thalmann et al. (2011; “FV_{Coulomb}”) and Valori et al. (2012; “FV_{DeVore}”), which are based on different gauges (Coulomb versus DeVore, respectively) and employ different mathematical approaches (differential versus integral formulation for the vector potentials, respectively). We applied both methods to both NLFF time series and find that the different methods deliver almost identical results (i.e., H_V , as well as H_J and H_{PJ}), given a sufficient solenoidal quality of the input magnetic field. We therefore suggest that, quite generally, helicity computations may be meaningful and trustworthy only if $E_{\text{div}}/E \lesssim 0.05$ and $\langle |f_i| \rangle \times 10^4 \lesssim 5$ for the underlying magnetic field model.

The different methods react differently on the quality of the input fields, with FV_{Coulomb} being more sensitive, with larger absolute variations in H_{PJ} (Figure 3(d)), and hence H_V (Figure 3(b)). The least difference, even for nonnegligible divergence, is found for H_J , both between the methods and between the two NLFF series (Figure 3(c)), which seems to point to an inconsistency in context with the potential field. In comparison, the magnetic energy shows only little sensitivity to the quality of the underlying NLFF solution (Figure 3(a)). Irrespective of the method, the proxies for nonpotentiality, E_F/E_0 , and for eruptivity, $|H_J|/|H_V|$, are affected to a degree that allows reliable conclusions only if the input NLFF field is solenoidal enough (Figure 4).




In our case, the unexpected behavior of H_{PJ} (and thus H_V) in SERIES I is caused by a too large divergence of the underlying NLFF solutions ($\langle |f_i| \rangle \times 10^4 \gtrsim 5$ and $E_{\text{div}}/E \gtrsim 0.05$). Correspondingly, we are able to verify the doubts of Moraitis et al. (2014) concerning the reliability of their long-term helicity analysis of ARs NOAA 11072 ($\langle |f_i| \rangle \times 10^3 = 1.3 \pm 0.2$) and NOAA 11158 ($\langle |f_i| \rangle \times 10^4 = 7.2 \pm 0.9$). Corresponding judgment of other earlier works are difficult because relevant control parameters were not reported (e.g., Jing et al. 2012, 2015).

The effect of nonsolenoidal contributions to H_V may be case dependent, however. A similar behavior may in some cases just represent the correct evolution. For instance, the most eruptive case of MHD simulations analyzed in Pariat et al. (2017) shows a change of the sign of H_{PJ} , though smoothly and to values small compared to the pre-eruption value. Also, a variation of the sign of H_J around zero, around times when strong magnetic flux is initially emerging in an AR, may just be physical (compare Figures 3 and 6 of Pariat et al. 2017).

In summary, we find that a quantitative assessment of the consistency of NLFF models in terms of force- and divergence-freeness is mandatory for making any reliable statement involving their energy and helicity content. Moreover, despite the necessity of high-quality (i.e., low-divergence) input magnetic fields for helicity computation, simplistic interpretations of the computed magnetic helicity of complex magnetic systems should be taken with care.

We thank the anonymous referee for helpful comments. J.K. T. acknowledges Austrian Science Fund (FWF): P31413-N27. E.P. and L.L. acknowledge support of the French Agence Nationale pour la Recherche through the HELISOL project ANR-15-CE31-0001. G.V. acknowledges the Leverhulme Trust Research Project grant 2014-051. *SDO* data are courtesy of the NASA/*SDO* AIA and HMI science teams. This article profited from discussions during the ISSI International Team meetings on Magnetic Helicity estimations in models and observations of the solar magnetic field and Magnetic Helicity in Astrophysical Plasmas.

ORCID iDs

Julia K. Thalmann  <https://orcid.org/0000-0001-8985-2549>
E. Pariat  <https://orcid.org/0000-0002-2900-0608>
G. Valori  <https://orcid.org/0000-0001-7809-0067>

References

- Berger, M. A. 1999, *PPCF*, **41**, B167
Berger, M. A., & Field, G. B. 1984, *JFM*, **147**, 133
Bobra, M. G., Sun, X., Hoeksema, J. T., et al. 2014, *SoPh*, **289**, 3549
DeRosa, M. L., Wheatland, M. S., Leka, K. D., et al. 2015, *ApJ*, **811**, 107
Finn, J., & Antonsen, T. J. 1984, *PPCF*, **9**, 111
Hoeksema, J. T., Liu, Y., Hayashi, K., et al. 2014, *SoPh*, **289**, 3483
Inoue, S., Hayashi, K., Shiota, D., Magara, T., & Choe, G. S. 2013, *ApJ*, **770**, 79
Jing, J., Park, S.-H., Liu, C., et al. 2012, *ApJL*, **752**, L9
Jing, J., Xu, Y., Lee, J., et al. 2015, *RAA*, **15**, 1537
Leka, K. D., Barnes, G., Crouch, A. D., et al. 2009, *SoPh*, **260**, 83
Metcalf, T. R. 1994, *SoPh*, **155**, 235
Moraitis, K., Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Archontis, V. 2014, *SoPh*, **289**, 4453
Pariat, E., Leake, J. E., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, **601**, A125
Pesnell, W. D., Thompson, B. J., & Chamberlin, P. C. 2012, *SoPh*, **275**, 3
Prior, C., & Yeates, A. R. 2014, *ApJ*, **787**, 100
Schou, J., Scherrer, P. H., Bush, R. I., et al. 2012, *SoPh*, **275**, 229
Schrijver, C. J., De Rosa, M. L., Metcalf, T. R., et al. 2006, *SoPh*, **235**, 161
Sun, X., Hoeksema, J. T., Liu, Y., et al. 2012, *ApJ*, **748**, 77
Thalmann, J. K., Inhester, B., & Wiegmann, T. 2011, *SoPh*, **272**, 243
Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, E. 2012, *SoPh*, **278**, 347
Valori, G., Démoulin, P., Pariat, E., & Masson, S. 2013, *A&A*, **553**, A38
Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016, *SSRv*, **201**, 147
Wheatland, M. S., Sturrock, P. A., & Roumeliotis, G. 2000, *ApJ*, **540**, 1150
Wiegmann, T., & Inhester, B. 2010, *A&A*, **516**, A107
Wiegmann, T., Inhester, B., & Sakurai, T. 2006, *SoPh*, **233**, 215

4.3.2 Évolution des hélicités dans la région active NOAA 12673 : Moraitis, Sun, Pariat, & Linan (2019b)

Dans [Thalmann et al. \(2019b\)](#), nous avons montré qu'à condition que le champ magnétique reconstruit soit suffisamment solénoïdal, il est possible de suivre la dynamique du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1) au niveau d'une région active. Basée sur une extrapolation qualitative, notre volonté dans [Moraitis et al. \(2019b\)](#) était de confirmer le potentiel du ratio d'hélicité, $\eta_H = H_j/H_r$, comme indicateur de l'éruptivité d'une région active.

4.3.2.1 Résumé

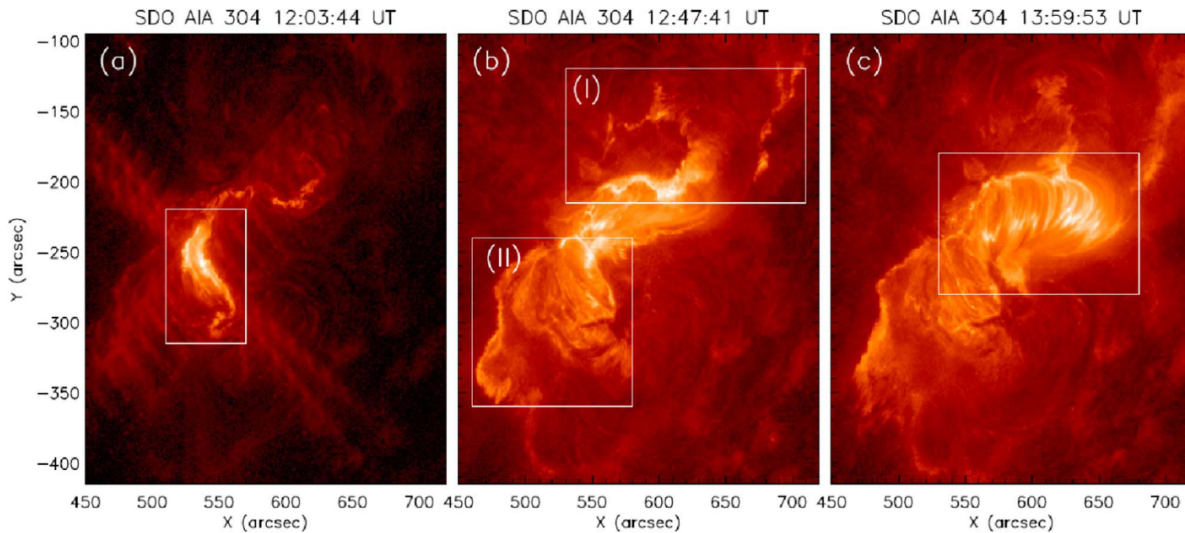


FIGURE 4.11 – Évolution de la région active 12673 vue par l'instrument AIA à la longueur d'onde 304 Å durant un flare de classe X. Les panneaux (a) et (b) montrent l'extension du ruban d'éruption. Au niveau du panneau (c), on distingue la présence de boucles post-éruptives. Adaptée de [Mitra et al. \(2018\)](#).

Dans [Moraitis et al. \(2019a\)](#), nous nous sommes intéressés à la région active la plus éruptive du cycle 24, la région NOAA 12673 ([Sun & Norton 2017](#)). Nous nous sommes concentrés sur une période temporelle de 10 heures pendant la journée du 6 septembre 2017. Durant cet intervalle, la région active a conduit à deux flares de classe X (cf. fig. 4.11). Le premier flare était confiné tandis que le deuxième a donné lieu à une CME ([Yang et al. 2017](#); [Inoue et al. 2018](#); [Hou et al. 2018](#); [Liu et al. 2018a](#); [Vemareddy 2019](#)).

Pour suivre l'évolution des hélicités magnétiques relative, mêlée et non potentielle, nous avons reconstruit le champ magnétique coronal en 3D par la méthode d'optimisation (cf. Sect. 2.3.1.3). Initialement, le champ magnétique photosphérique est mesuré par l'instrument Helioseismic and Magnetic Imager ([Scherrer et al. 2012](#)) embarqué à bord du satellite Solar Dynamics Observatory ([Pesnell et al. 2011](#)).

Plus précisément, nous avons modélisé le champ magnétique par deux méthodes. La première utilisait la minimisation proposée par [Wiegmann \(2004\)](#), c.-à-d. l'équation (2.16) tandis que la deuxième méthode reposait sur l'implémentation plus récente proposée par [Wiegmann & Sakurai \(2012\)](#), c.-à-d. l'équation (2.21). Nous avons un total de 46 extrapolations.

Le champ magnétique reconstruit n'a pas le même degré de solénoïdalité dans toutes les extrapolations (cf. Fig. 4 dans [Moraitis et al. 2019a](#)). Pour faire face aux incertitudes sur les mesures des hélicités entraînées par une importante divergence du champ magnétique, nous avons gardé uniquement les extrapolations ayant le ratio E_{div}/E_v le plus bas (inférieure à 8%

ici). Sur les 17 extrapolations sélectionnées 15 proviennent de la méthode de [Wiegmann & Sakurai \(2012\)](#) et les deux autres sont construites à partir de la méthode de [Wiegmann \(2004\)](#). D'après les résultats de [Thalmann et al. \(2019a\)](#), les extrapolations gardées sont donc les plus consistantes pour suivre la dynamique du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1). Une fois les extrapolations choisies, les hélicités magnétiques ont été calculées par la méthode d'intégration directe volumique de [Moraitis et al. \(2014\)](#).

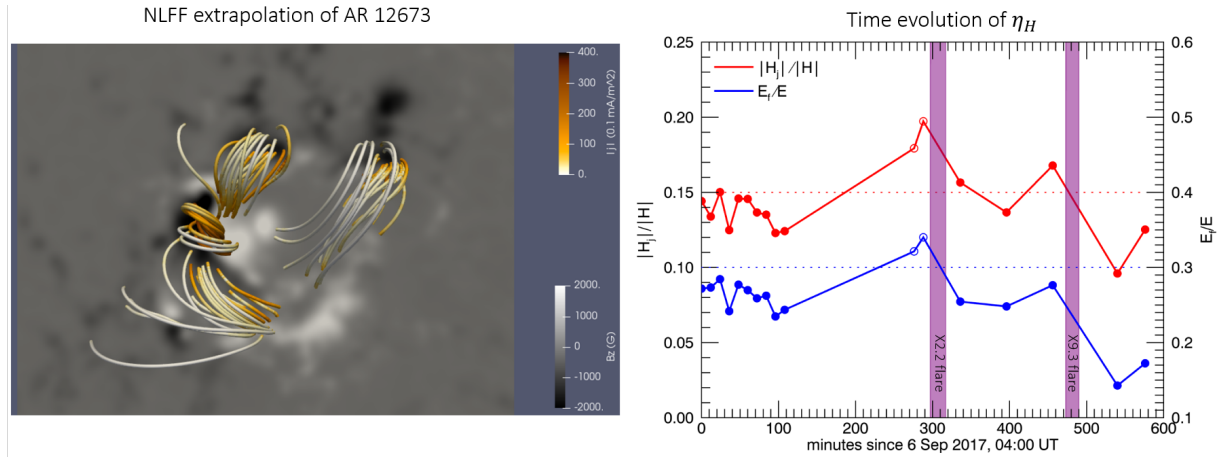


FIGURE 4.12 – **Gauche** : lignes de champ magnétique de la région active NOAA 12673 le 6 septembre 2017 à 08 :48 UT obtenues par extrapolation sans force non linéaire. Les lignes de champ sont colorées selon l'intensité de la densité de courants électriques. **Droite** : évolution du ratio η_H (cf. Eq. 4.1) pendant 10 h le 6 septembre 2017. Les bandes violettes marquent les deux éruptions de classe X. Les deux éruptions ont lieu quand η_H dépasse un seuil en pointillé à 0.15. Adaptée de [Moraitis et al. \(2019b\)](#).

Finalement, nous avons montré dans [Moraitis et al. \(2019b\)](#) que les évolutions des hélicités, H_r , H_j et H_{pj} dépendent du flux magnétique injecté (en particulier avant la première éruption). Plus le flux magnétique est important plus les hélicités le sont également. Notre étude se concentre plus particulièrement sur l'évolution du ratio η_H . Nous avons trouvé que le ratio augmente avant les deux éruptions de classe X, et diminue ensuite (cf. Fig. 4.12). Avant la première éruption, le ratio atteint une valeur maximum de 0.20 tandis que le maximum est de 0.17 juste avant la deuxième éruption. Le fait qu'il soit inférieur à 1 est en accord avec de précédents résultats ([Moraitis et al. 2014](#)). La présence de deux maximums locaux avant l'éruption suggère l'existence d'un seuil pour le ratio d'hélicité. Une fois ce seuil dépassé, le système est instable et conduit à une éruption. Au vu de nos courbes nous remarquons, que les éruptions ont lieu quelques minutes après que le ratio dépasse la valeur de 0.15 (cf. Fig. 4.12).

La valeur de ce seuil dépend cependant de la région active et notamment du volume considéré pour la mesure (cf. Sect. 3.4). Davantage d'études sont nécessaires afin d'établir ou non l'existence d'un seuil universel. Quoi qu'il en soit, cette étude confirme donc que le ratio η_H est un marqueur de l'éruptivité d'une région active, comme précédemment suggéré par [Pariat et al. \(2017\)](#) et [Zuccarello et al. \(2018\)](#) à partir de simulations numériques.

D'autre part en suivant l'évolution du ratio d'énergie E_j/E_v nous n'avons pu dégager aucun seuil précis. Ce ratio est donc moins adapté à l'étude de l'éruptivité d'un système. Nous avons cependant remarqué que la dynamique des énergies était très similaire à la dynamique des hélicités. Le ratio E_j/E_v atteint également des maximums locaux avant les éruptions. La similarité entre énergie et hélicité peut témoigner de la relation entre énergie libre et hélicité magnétique relative mentionnée par [Tziotziou et al. \(2012\)](#). Rappelons cependant qu'une expression analytique entre les différentes quantités reste à établir. Dans la section (5.3), je présenterai mes

différents résultats sur une étude comparée de l'évolution des énergies et des hélicités dans des simulations numériques. J'y soulignerai les points communs ainsi que les divergences.

4.3.2.2 Ma contribution

Ma plus grande contribution à l'article a été une validation croisée de l'ensemble des résultats. Nous avons montré dans [Thalmann et al. \(2019a\)](#) que deux méthodes d'intégration directe volumique (IDV) peuvent conduire à une dynamique différente du ratio η_H (cf. Eq. 4.1) si le champ magnétique n'est pas suffisamment solénoïdal (cf. Sect. 4.3.1). En effet, si la propriété solénoïdale n'est pas correctement respectée alors les hélicités ne sont plus invariantes de jauge. Les implémentations numériques étant basées sur des jauges différentes, elles fournissent alors des résultats également différents. Au contraire si les résultats obtenus par deux méthodes d'IDV sont identiques cela signifie qu'ils sont consistants et indépendants de la jauge (cf. Sect. 3.3.1.5).

À partir des données magnétiques issues d'extrapolations non linéaires sans force, j'ai calculé l'évolution de η_H en suivant les étapes décrites dans les sections (3.3.1.4) et (3.3.1.3). Là encore, cela a demandé un développement de mon implémentation numérique afin de l'adapter à cette étude. Lors du calcul des hélicités, j'ai utilisé en particulier la même jauge que dans [Thalmann et al. \(2019a\)](#), c.-à-d. $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$ et $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p$ au niveau de la surface supérieure du volume.

En parallèle, K. Moraitis a calculé les mêmes quantités en utilisant sa méthode d'IDV décrite dans [Moraitis et al. \(2014\)](#). Cette implémentation numérique possède deux différences avec celle que j'ai utilisée. Tout d'abord le solveur utilisé pour résoudre l'équation de Laplace (cf. Eq. 3.46) afin d'obtenir le champ magnétique potentiel est différent. [Moraitis et al. \(2014\)](#) utilise le solveur HW3CRT inclus dans la librairie en libre accès FISHPACK ([Swarztrauber & Sweet 1979](#)). Comme mentionné section (3.3.1.1), la solution fournit par le solveur HW3CRT est quasiment identique à celle obtenue par le solveur de la librairie Intel que j'utilise. La deuxième différence entre les deux implémentations numériques est dans la manière de calculer numériquement les intégrales et les dérivées qui apparaissent dans les équations (3.53) et (3.55). En particulier, [Moraitis et al. \(2014\)](#) utilise la méthode de Simpson ([Press et al. 1992](#)) pour calculer les intégrales : la fonction à intégrer est approximée par un polynôme quadratique donc l'intégrale est connue théoriquement. Au contraire, dans mon implémentation numérique les intégrales volumiques sont calculées selon l'approximation suivante :

$$\int_V f(x, y, z) dV \approx \sum_{i=0}^M f_i * dx * dy * dz * w, \quad (4.2)$$

où f_i est la valeur de la fonction à intégrer au point de maille i , M est le nombre de points et dx , dy et dz décrivent les distances entre deux points de maille. Dans l'équation (4.2), w décrit un paramètre de pondération valant 0.125 aux 8 coins du volume, 0.25 sur les arrêtes, 0.5 au niveau des surfaces et 1 partout ailleurs.

L'ensemble des différences dans l'implémentation numérique entraîne des écarts mineurs dans le calcul des potentiels vecteurs. Ces écarts s'apparentent à des jauges légèrement différentes ([Valori et al. 2016](#)). À partir des mêmes données magnétiques, mais avec ma version d'IDV, j'ai cependant obtenu exactement les mêmes valeurs pour le ratio η_H que celles calculées par K. Moraitis avec sa version. On en déduit que les extrapolations sont suffisamment solénoïdales et que les résultats présentés dans [Moraitis et al. \(2019b\)](#) sont consistants.

En plus de la validation croisée, j'ai également participé à l'ensemble des discussions ayant conduit à la conception de l'étude ainsi qu'à la rédaction et à la relecture de celle-ci. J'ai également apporté toute mon expertise sur la problématique de la solénoïdalité, qui découle naturellement de mes travaux menés dans [Thalmann et al. \(2019a\)](#).

Magnetic helicity and eruptivity in active region 12673

K. Moraitis¹, X. Sun², É. Pariat¹, and L. Linan¹

¹ LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
e-mail: kmorait@phys.uoa.gr

² Institute for Astronomy, University of Hawaii at Manoa, Pukalani, HI 96768-8288, USA

Received 11 May 2019 / Accepted 13 July 2019

ABSTRACT

Context. In September 2017, the largest X-class flare of solar cycle 24 occurred from the most active region (AR) of this cycle, AR 12673. This AR attracted much interest because of its unique morphological and evolution characteristics. Among the parameters that were examined in the AR was magnetic helicity, but either only approximately, or intermittently, or both.

Aims. We here study the evolution of the relative magnetic helicity and of the two components of its decomposition, the non-potential, and the volume-threading one, in the time interval around the highest activity of AR 12673. We especially focus on the ratio of the non-potential to total helicity, which has recently been proposed as an indicator of AR eruptivity.

Methods. We first approximated the coronal magnetic field of the AR with two different optimization-based extrapolation procedures, and chose the method that produced the most reliable helicity value at each instant. Moreover, in one of these methods, we weighted the optimization by the uncertainty estimates derived from the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) instrument for the first time. We then followed an accurate method to compute all quantities of interest.

Results. The first observational determination of the evolution of the non-potential to total helicity ratio seems to confirm the quality it has in indicating eruptivity. This ratio increased before the major flares of AR 12673 and afterwards relaxed to lower values. Additionally, we discuss the evolution patterns of the various helicity and energy budgets of AR 12673 and compare them with results from other works.

Key words. Sun: activity – magnetohydrodynamics (MHD) – Sun: flares – methods: numerical

1. Introduction

Magnetic helicity is a physical quantity that is used often in investigations of the eruptive behaviour of solar active regions (ARs, Rust 1994; Nindos & Andrews 2004; Green et al. 2018) because it is a conserved quantity of ideal magnetohydrodynamics (MHD), and thus it determines the dynamics of magnetized systems (Taylor 1974; Pariat et al. 2015; Linan et al. 2018). Magnetic helicity is a geometrical quantity that describes the level of complexity of a magnetic field, through the twist and writhe of its field lines, and their interlinking.

Magnetic helicity, however, is well defined only for systems that are magnetically closed, and thus is of limited use in the Sun and all other astrophysical conditions. The appropriate form of helicity in these situations is relative magnetic helicity (Berger & Field 1984; Finn & Antonsen 1985). It is defined through a volume integral as

$$H = \int_V (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV, \quad (1)$$

where \mathbf{B} denotes the 3D magnetic field in the volume of interest, V , and \mathbf{B}_p is a reference field that usually is taken to be potential. The two fields are generated from the vector potentials \mathbf{A} and \mathbf{A}_p . The potential magnetic field is chosen to have the same normal components with \mathbf{B} along the boundary of the volume, ∂V ,

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}|_{\partial V} = \hat{n} \cdot \mathbf{B}_p|_{\partial V}, \quad (2)$$

with \hat{n} denoting the unit vector that is normal to ∂V . This choice guarantees that the relative magnetic helicity given by Eq. (1) is

independent from the gauges of the vector potentials, and thus is physically meaningful.

Relative magnetic helicity can also be uniquely split into two gauge-independent components (Berger 1999),

$$H = H_j + H_{pj}. \quad (3)$$

These are the non-potential component

$$H_j = \int_V (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV, \quad (4)$$

which depends only on the current-carrying part of the magnetic field, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$, and the volume-threading component

$$H_{pj} = 2 \int_V \mathbf{A}_p \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV, \quad (5)$$

which additionally depends on the potential field. The detailed analysis of the behaviour of these components and of their dynamics in Linan et al. (2018) showed that unlike relative magnetic helicity, they are not conserved quantities of ideal MHD.

The study of the different components of relative magnetic helicity is important, however, as they provide additional information compared to H . Already from the first separate examination of these two components in eruptive ARs (Moraitis et al. 2014), it was observed that the non-potential component fluctuates in accordance with the eruptions of the AR. This was noted in both observed and synthetic MHD-modelled eruptive ARs.

Moreover, using this decomposition of helicity in a set of eruptive and non-eruptive MHD flux-emergence simulations,

Pariat et al. (2017) have determined that the ratio $|H_j|/|H|$ is an excellent indicator of the system eruptivity. They noted that the helicity ratio behaved differently in the eruptive than in the non-eruptive simulations, as well as between the pre- and post-eruptive phases of the former. The helicity ratio obtained high values only in the eruptive cases, and only before the eruptions. The possible importance of $|H_j|/|H|$ was also highlighted in Linan et al. (2018) using an MHD simulation of the formation of a coronal jet. Again, the helicity ratio attained very high values during the generation of the jet, and it dropped significantly after that.

This result was further tested in Zuccarello et al. (2018) with a different set of line-tied eruptive MHD simulations where the quality of the helicity ratio as an eruptivity indicator was reconfirmed. Additionally, by carefully identifying the onset of the eruption in these simulations, it was found that a threshold value of $|H_j|/|H| \approx 0.3$ was reached by all simulations when the eruptions occurred.

These promising results on the ratio $|H_j|/|H|$ led to an interest in deriving it in observations. In a first observational determination of the helicity ratio, James et al. (2018) have found the value $|H_j|/|H| \approx 0.17$ for the flux rope of an AR one hour before the occurrence of an eruption. A reasonable next step is to study the evolution of the helicity ratio in an observed AR, which is the central task of this work.

A perfect target for this is the most active region of Solar Cycle 24, AR 12673 (Sun & Norton 2017). During its passage across the solar disc in the week of 4–10 September 2017, it produced four X-class flares, including the two strongest of the cycle, 27 M-class flares, and numerous more of smaller size, as the Geostationary Operational Environmental Satellite (GOES) soft X-ray (0.1–0.8 nm) light curve of Fig. 1 depicts.

A few of these flares also produced coronal mass ejections (CMEs). Of the three halo CMEs, two were Earth-directed and geoeffective (Chertok et al. 2018), while one of them led to particle acceleration at the produced shock front (Morosan et al. 2019), and also to a ground-level enhancement of energetic particles (Augusto et al. 2019). This particle event originated from an X8.2 flare and its associated CME of 10 September 2017 (Veronig et al. 2018), when AR 12673 was crossing the west solar limb.

Most of the interest in the activity of AR 12673 was focused on the two X-class flares of 6 September 2017, however; the confined X2.2 flare that started at 08:57 UT (SOL2017-09-06T08:57), and the eruptive X9.3 flare, the largest since 2005, that followed three hours after the first, at 11:53 UT (SOL2017-09-06T11:53). In this work, we are interested in a ten-hour time interval centred around the X2.2 flare of 6 September that also includes the X9.3 flare.

The photospheric morphology of AR 12673 started as a single positive-polarity sunspot and quickly became quite complicated, displaying a complex network of δ -sunspots. It exhibited significant flux emergence and the highest instantaneous flux rate ever observed (Sun & Norton 2017), with values reaching up to $10^{21} \text{ Mx h}^{-1}$ on 3 September, as Fig. 1 also shows. Many dipoles emerged close to the initial sunspot, and the successive interactions between them resulted in the increased complexity of the system.

The magnetic field of the AR as measured by the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI, Scherrer et al. 2012) instrument on board the SDO was very strong, especially along the polarity inversion line (Wang et al. 2018). Photospheric shearing and twisting motions were also observed (Verma 2018), which helped in the creation of the highly non-potential configuration that powered the two flares.

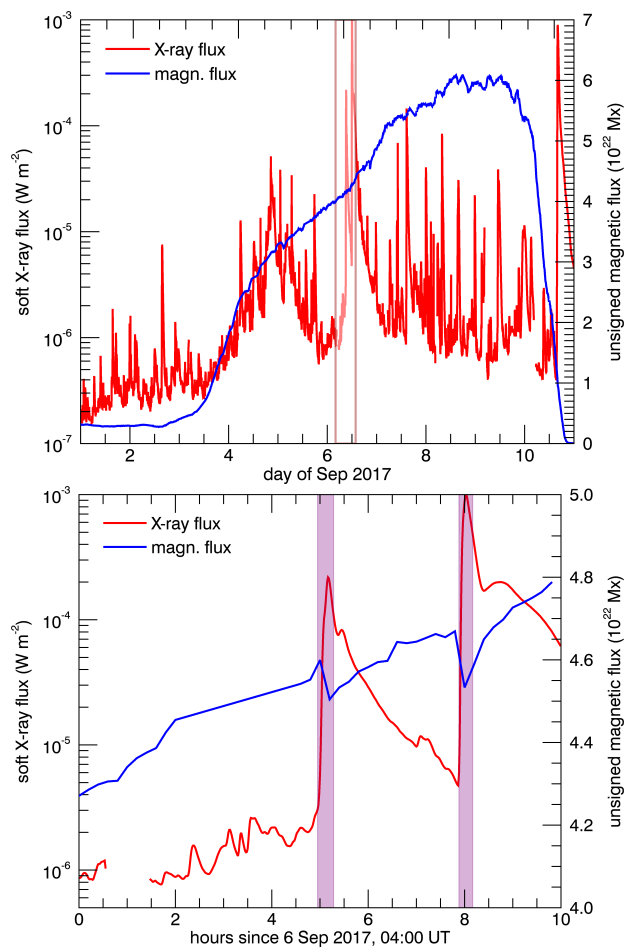


Fig. 1. GOES soft X-ray light curve and evolution of HMI unsigned magnetic flux in AR 12673 for the first ten days of September 2017 (top). The brown vertical lines denote the interval of interest for this study, which is shown zoomed in at the bottom. The purple bands in this plot denote the time intervals of the X2.2 and the X9.3 flares, with onset times at 08:57 UT and 11:53 UT, respectively. The HMI magnetic flux in the bottom plot is of limited accuracy due to the emission of the flares, while between 06:00 UT and 08:36 UT there were no observations due to an eclipse of the Solar Dynamics Observatory (SDO) (Pesnell et al. 2012).

Many models were invoked in order to explain the evolution of AR 12673 towards the two X-class flares and the eruption of the second. Yang et al. (2017) associated the increased flare-productivity of the AR with the blocking of newly emerging flux by already existing flux, and the eruptive flare with a filament becoming kink unstable. The formation of a coronal sigmoid and the initiation of both X-class flares from the core of the sigmoid led Mitra et al. (2018) to characterize the AR as a single “sigmoid-to-arcade” event.

Hou et al. (2018) attributed the generation of the two flares to the formation of multiple flux ropes and twisted loop bundles that eventually erupted. A large highly-twisted magnetic flux rope and some smaller flux ropes were also confirmed by the MHD modelling of the X9.3 flare of AR 12673 made by Inoue et al. (2018).

The highly twisted flux ropes that were found by many authors indicate that magnetic helicity probably is an important factor in the eruptivity of AR 12673. Liu et al. (2018) have found a significant enhancement, by almost a factor of three, of the magnetic helicity during the confined X2.2 flare, although they approximated helicity only with its twist. In another study,

Yan et al. (2018) did not find a significant change in helicity during the first X-class flare, but only a small decrease during the second. They found a negative helicity injection rate throughout the day of the two flares, however, which is consistent with the rotational motions of the sunspots in AR 12673.

The sign of magnetic helicity was negative for the whole week of the AR activity, as was deduced by integrating the helicity injection rate (Vemareddy 2019). Vemareddy (2019) also found that AR 12673 exhibited very fast helicity injection, by a factor of three higher than other ARs when it was normalized to the square of magnetic flux.

All these findings support the choice of AR 12673 as an interesting case to study the evolution of the helicity ratio in an observed AR. The question we address is whether this evolution is related with the eruptivity of the AR, as proposed by Pariat et al. (2017). In addition to $|H_j|/|H|$, we are also interested in examining the evolution of all helicity- and energy-related budgets of the AR. To determine all quantities of interest, the coronal magnetic field must first be estimated. The method we followed for this is described in Sect. 2. The results that we obtained are presented in Sect. 3, and they are then discussed in Sect. 4.

2. Method

This section describes the method we followed to compute all magnetic helicities and energies in AR 12673. We first describe the non-linear force-free (NLFF) field extrapolation method that we used in order to approximate the coronal magnetic field of the AR. Then, we verified that the produced coronal fields were suitable for use with the helicity computation method, which we briefly describe afterwards.

2.1. Coronal field modelling

The starting point of all computations performed in this work were magnetic field data from the HMI instrument of SDO. We used the vector magnetogram data with 12 min cadence (product `hmi.sharp_720s`). The actual cadence of the data varied during the interval of interest due to an eclipse of the observatory and a few low-quality data during the two flares. The morphology of the B_z distribution on the photosphere at the beginning and at the end of the ten-hour interval of study is shown in Fig. 2.

The next step was to model the 3D magnetic field of AR 12673 in a finite volume above the AR with an NLFF field extrapolation method. These methods try to simultaneously satisfy the force-free and the solenoidal conditions for the magnetic field, which read

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7)$$

The unavoidable presence of numerical errors in the solution process prevents the exact fulfilment of these conditions. The solenoidal condition is thus never fully constrained in an NLFF extrapolated magnetic field. The level of non-solenoidality is very important for the helicity computations, however. Valori et al. (2016) have shown that the values of helicity are unreliable when the non-solenoidality errors are above a certain level. It is therefore essential to estimate the level of solenoidality of the given magnetic field when the relative magnetic helicity is computed, which we performed in two ways, as described in Sect. 2.2.

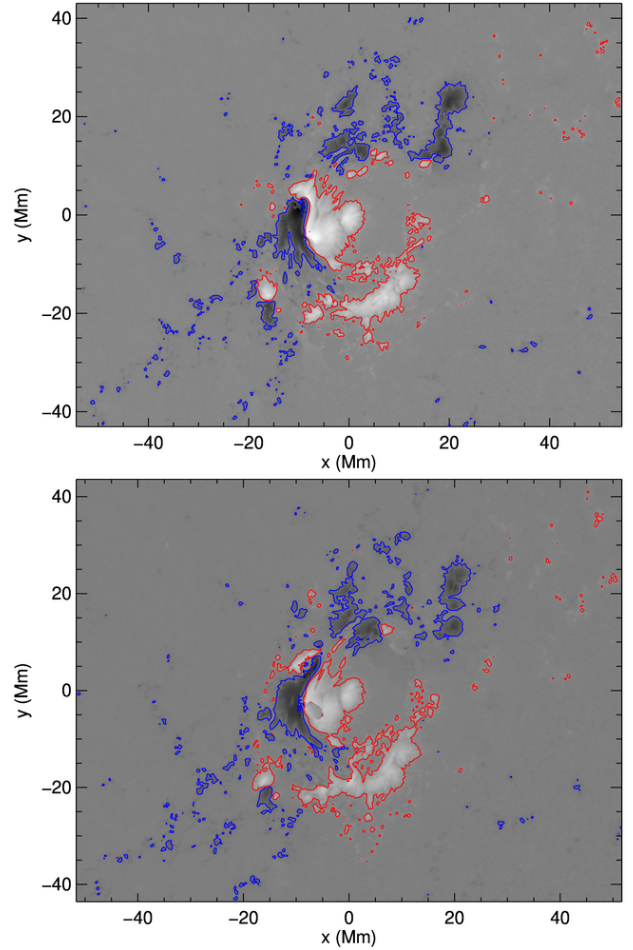


Fig. 2. Photospheric distribution of B_z in AR 12673 at the beginning, *top plot* at 04:12 UT, and the end of our study interval, *bottom plot* at 13:36 UT. Blue contours correspond to $B_z = -500$ G, and red to $B_z = 500$ G.

A possible way to optimize the 3D magnetic field model with respect to its divergence-freeness is to perform different extrapolations and then to retain the one that performs best. We estimated the magnetic field of AR 12673 using two different NLFF methods. The investigation of the various parameters in each method was not exhaustive because our goal was to have a reliable magnetic field for the helicity computations and not to determine it with the highest possible accuracy.

The first extrapolation method that we used was the optimization method of Wiegelmann (2004, hereafter W04). This tries to minimize a functional to fulfill the divergence- and force-free conditions, given by Eqs. (6), and (7). We note at this point that the assumption that the magnetic field is force free is not always true, especially near the photosphere and during solar flares. For this, the magnetograms were first preprocessed to make them more compatible with the force-free assumption (Wiegelmann et al. 2006) with the standard set of preprocessing parameters $[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4] = [1, 1, 10^{-3}, 10^{-2}]$, in the authors' original notation.

The resolution used in the extrapolations was $1'$, or 720 km, and the grid size was $320 \times 320 \times 320$ pixels. The computational volume consisted of the volume of interest surrounded by a boundary buffer layer in the lateral and top boundaries with 16 pixels on each side. In the helicity computations only the inner physical part of the fields were kept, after further cutting in height, at roughly two-thirds of the total height. The final

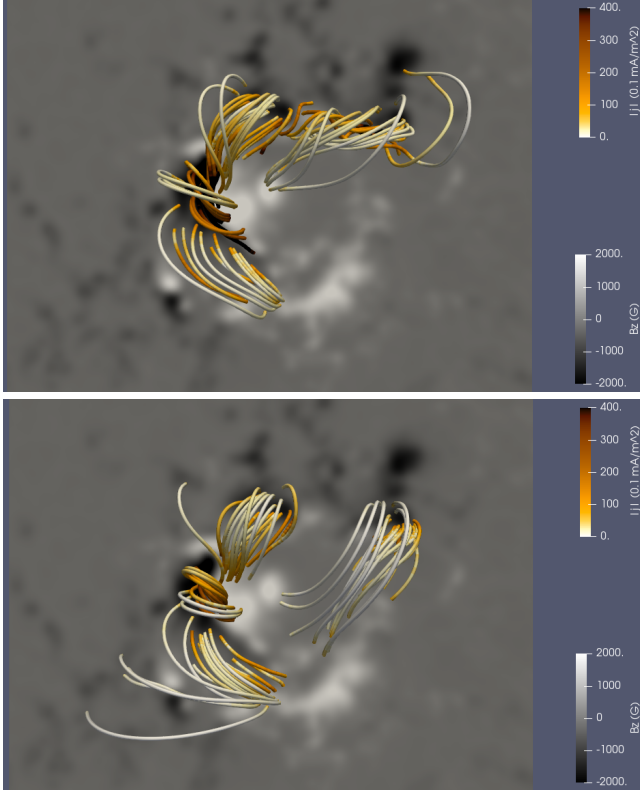


Fig. 3. Morphology of the reconstructed magnetic field of AR 12673 at 08:48 UT on 6 September 2017 with the two versions of the NLFF extrapolation methods (W04 to the *top*, W12 to the *bottom*). The same footpoints were used in both cases. Field lines are colored according to the magnitude of the electrical current density.

datacubes thus consisted of $288 \times 288 \times 203$ pixels. The total snapshots were 28, covering ten hours starting from 6 September 04:00 UT.

The second extrapolation method that we used was the newer version of the same optimization code (Wiegmann et al. 2012, hereafter W12), which usually performs better. The idea of W12 is to add another term to the functional of W04 to take into account the uncertainties in the measurements of the photospheric magnetic field components. This is done by weighting each pixel separately according to its uncertainty. We used the actual HMI measurement uncertainties for the first time. The empirical weighting function that we employed was

$$w = \begin{cases} 0.01 + 0.99 \exp\left(-\frac{\sigma_B}{0.03B}\right), & \text{pixels with } B \geq 200 \text{ G} \\ 0.01, & \text{pixels with } B < 200 \text{ G} \end{cases} \quad (8)$$

Here B denotes the magnetic field strength at a pixel on the photosphere, and σ_B its uncertainty. We assumed a value of 200 G for the typical noise threshold, and 0.03 for the typical value of σ_B/B . This choice sharply de-emphasizes the contribution of bad measurements in several strong field regions.

All remaining parameters were the same as in the W04 case, except for the size of the buffer, which was 32 pixels in this case. The final datacubes were thus $256 \times 256 \times 203$ pixels. We also used fewer snapshots in this case, 18 instead of 28, but with the same coverage until the first flare. The morphology of the 3D magnetic field for the two cases and for the same snapshot is shown in Fig. 3. We note that the two cases exhibit many differences in morphology. The morphology of the magnetic field evolves during the flares, following the evolution of the photospheric magnetic field.

We finally note that we also checked other cases for the extrapolation parameters, such as different μ_3 and/or μ_4 pre-processing parameters in W04, different binning in W04, and different weighting of the various terms in the functional of W12. None of these cases produced better results, however, and so we present here the two most accurate cases.

2.2. Solenoidality level estimation

The resulting magnetic fields were then tested for their quality with respect to how divergence and force free they were. A traditional way to quantify the divergence-freeness of a magnetic field is through the average absolute fractional flux increase, $\langle |f_i| \rangle$, (Wheatland et al. 2000). This parameter expresses the average of the local non-solenoidalities in the volume of interest; the smaller it is, the more solenoidal the field. The level of divergence-freeness in the W04 case was quite high with a mean value over all the 28 snapshots of $\langle |f_i| \rangle = (5.9 \pm 0.5) \times 10^{-4}$. The respective values for the W12 set were slightly better, with a mean value over all 18 snapshots of $\langle |f_i| \rangle = (5.3 \pm 0.6) \times 10^{-4}$.

We also tested the level of force-freeness of the extrapolated fields with an angle, θ_J , which expresses the average current-weighted angle between the current and the magnetic field (Wheatland et al. 2000). The mean value we found for the W04 magnetic fields was $\theta_J = (16.8 \pm 2.6)^\circ$, typical for this method. In the W12 case, the force-freeness level was again slightly better, with an average angle $\theta_J = (15.1 \pm 1.5)^\circ$.

Another parameter that indicates the divergence-freeness of a magnetic field is the energy ratio E_{div}/E , which was first used by Valori et al. (2016). It expresses the fraction of the total energy that is related to all the (numerical) non-solenoidalities of the magnetic field. To derive the mathematical expression for E_{div} , the magnetic field needs to be decomposed into potential and current-carrying components, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_j$, and then each component is split into solenoidal and non-solenoidal parts, $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_{p,s} + \mathbf{B}_{p,ns}$, and $\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_{j,s} + \mathbf{B}_{j,ns}$, following Valori et al. (2013). By defining the energy budget of each component through the relation

$$E_x = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{B}_x^2 dV, \quad (9)$$

we obtained the following decomposition for the total energy of the given magnetic field:

$$E = E_{p,s} + E_{p,ns} + E_{j,s} + E_{j,ns} + E_{\text{mix}}, \quad (10)$$

with E_{mix} the energy corresponding to all the cross terms. A non-negative energy associated with all non-solenoidal components of the magnetic field can then be defined by the quantity

$$E_{\text{div}} = E_{p,ns} + E_{j,ns} + |E_{\text{mix}}|. \quad (11)$$

This is an upper limit to the non-solenoidal energy because the absolute value of E_{mix} , the only signed term in the decomposition of Eq. (10), is considered. A perfectly solenoidal magnetic field has $E_{p,ns} = E_{j,ns} = E_{\text{mix}} = 0$, and thus also $E_{\text{div}} = 0$; the higher the values of E_{div} , the more non-solenoidal it becomes. Valori et al. (2016) have shown that when E_{div}/E exceeds $\sim 8\text{--}9\%$, the values of helicity become unreliable.

Because the energy ratio E_{div}/E is important for helicity computations, we focused more on this quantity. We calculated all components in the energy decomposition following Valori et al. (2013), and we show in Fig. 4 the evolution of E_{div}/E for the two sets of extrapolated magnetic fields that we used. We also show the condition $E_{\text{div}}/E = 0.08$, which,

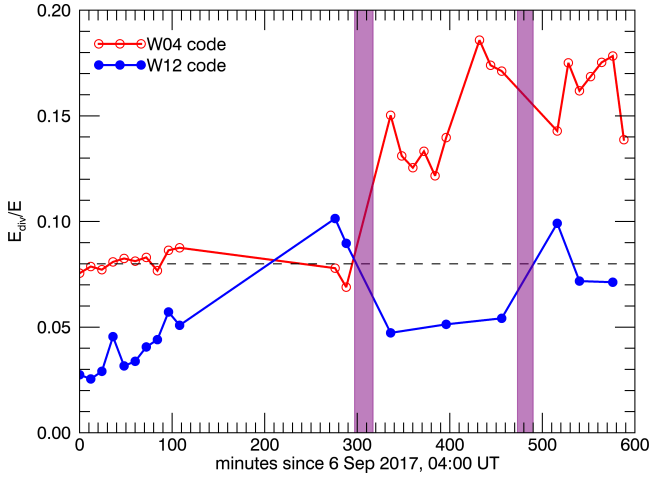


Fig. 4. Evolution of the divergence-related energy normalized to the total field energy in AR 12673 for ten hours around the two X-class flares of 6 September 2017, and for the two sets of extrapolated magnetic fields used. The purple bands denote the time intervals of the X2.2 and the X9.3 flares, with onset times at 08:57 UT and 11:53 UT, respectively.

according to Valori et al. (2016), distinguishes between magnetic fields that lead to reliable values of helicity and those that do not.

We note that the energy ratio in the W04 case performs well until the first X-class flare with values around the limit $E_{\text{div}}/E = 0.08$, but all snapshots after the first flare have much higher values. In contrast, most of the snapshots in the W12 case are well below the limit, with the exception of three points: the two immediately before the first flare, and the one after the second flare. Additionally, the values of the energy ratio for the W12 fields are much lower than those of W04, except for the two points before the first flare. Therefore, we kept in the following computations the best-performing snapshots of the W12 method, except from the two snapshots before the first flare, which were replaced by those of W04 that are better, and the snapshot after the second flare where both methods are above the limit and were thus discarded.

2.3. Magnetic helicity and energy computations

For each snapshot in the final dataset we computed relative magnetic helicity from its definition, Eq. (1), and also the two gauge-independent components that it splits into, Eqs. (4), and (5). All the helicities of interest were computed following the method of Moraitis et al. (2014). Briefly, this method first calculates the potential magnetic field that satisfies Eq. (2) so that the relative magnetic helicity given by Eq. (1) is gauge independent. The potential field is obtained from the numerical solution of Laplace's equation with pure Neumann boundary conditions. The two vector potentials are then computed following the recipe of Valori et al. (2012), which makes the clever choice for the gauges, $A_z = A_{p,z} = 0$, that results in the straightforward integration of the equations.

We were also interested in the evolution of the various energy budgets of the AR; the total field energy, E , the potential energy, E_p , including any non-solenoidal contribution it may have, and the free energy, $E_f = E - E_p$. For a perfectly solenoidal magnetic field this free energy coincides with $E_{j,s}$ as deduced from Eq. (10), and deviates from it proportionally to the value of E_{div} .

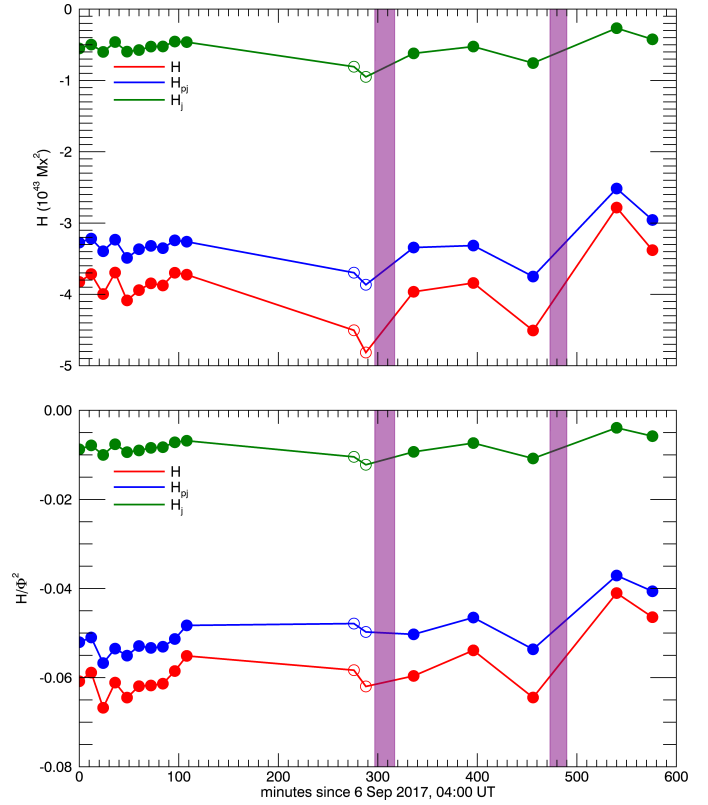


Fig. 5. Evolution of relative magnetic helicity and its two gauge-independent components in AR 12673 for ten hours around the two X-class flares of 6 September 2017, in physical units (*top panel*) and normalized to magnetic flux squared (*bottom panel*). The purple bands denote the time intervals of the X2.2 and the X9.3 flares, with onset times at 08:57 UT and 11:53 UT, respectively. Filled points correspond to the W12 method and open points to the W04 method.

3. Results

The evolution of relative magnetic helicity and its two components in AR 12673 is shown in the top panel of Fig. 5. We note that relative magnetic helicity is negative, in agreement with previous studies, and that all helicity budgets are also negative. The absolute values of relative magnetic helicity are very high and reach up to $5 \times 10^{43} \text{ Mx}^2$, mostly because of the high magnetic flux of the AR. The current-carrying component of helicity is much smaller than the other two helicities, as was also found in other cases (e.g., Moraitis et al. 2014). The evolution patterns are similar for all helicities, increasing before the first flare, relaxing after it, then again increasing before the second flare and relaxing afterwards.

The bottom panel of Fig. 5 shows the helicity budgets normalized to the square of the magnetic flux, Φ , which is calculated from the B_z maps of the NLFF fields as $\Phi = \frac{1}{2} \int_{\text{phot}} |B_z| dS$. The normalized helicity exhibits much more typical values compared to the helicity in physical units, confirming that the high values of helicity are due to the high flux. This plot reveals another feature of the helicity evolution. The normalized helicities have a much smoother evolution than the regular helicities before the first X-class flare, while afterwards, both behave similarly. This could mean that the rise of the helicity budgets before the first flare is related to the increase in flux then, but the later fluctuations are purely flare related.

The evolution of the total field energy, the potential energy, and the free energy is shown in Fig. 6. Again, all budgets attain

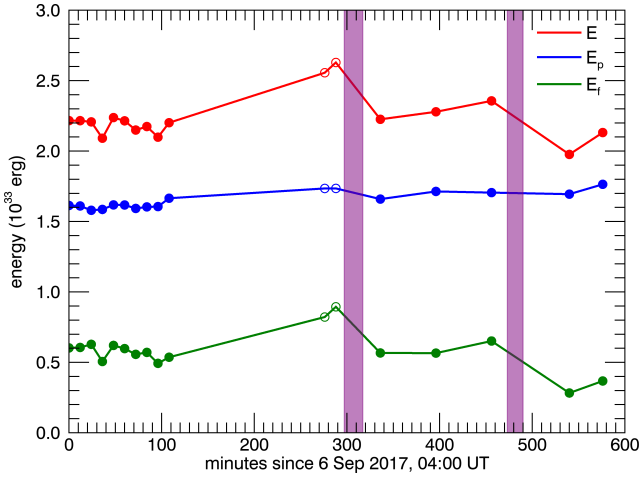


Fig. 6. Evolution of the various energy budgets in AR 12673 for ten hours around the two X-class flares of 6 September 2017. The purple bands denote the time intervals of the X2.2 and the X9.3 flares, with onset times at 08:57 UT and 11:53 UT, respectively. Filled points correspond to the W12 method and open points to the W04 method.

very high values due to the high magnetic flux of the AR. We note that the energy of the potential field changes only slightly during the ten hours of our study, as a consequence of the modest evolution of the normal field on the boundary that is evident in Fig. 2. The change in normal field is less than that in the horizontal field, however, which developed extensive kilogauss bald patches during this period (Sun et al., in prep.). We also note that, although not directly comparable, the evolution pattern of E_p is quite different than the pattern of H_{pj} , even though both quantities involve the potential field. As a result of the small change in potential energy, free energy and total field energy show very similar evolution patterns. Moreover, this pattern resembles the helicity patterns: it increases before the flares and relaxes afterwards.

The main purpose of this work was to examine whether an observed eruptive AR is compatible with the results of [Pariat et al. \(2017\)](#) and [Zuccarello et al. \(2018\)](#), that the helicity ratio $|H_j|/|H|$ can indicate AR eruptivity. The evolution of this quantity for AR 12673 is shown in Fig. 7. We note that $|H_j|/|H|$ increases before the two X-class flares and drops after them. The maximum values of the helicity ratio are $|H_j|/|H| \approx 0.20$ immediately before the first X-flare, and $|H_j|/|H| \approx 0.17$ before the second. Additionally, these two local maxima are the highest values in the helicity ratio time variation. In other words, a threshold in the value of $|H_j|/|H|$ can be identified from Fig. 7 (red dotted line) above which flares occur. Of course, the exact value of this threshold could depend on the conditions of the specific AR and it should be further examined whether a universal threshold exists. This result seems to be in agreement with the finding of [Pariat et al. \(2017\)](#) that $|H_j|/|H|$ attains its highest values before eruptions. Moreover, the ratio $|H_j|/|H|$ rises again at the end of our study interval, possibly indicating the subsequent activity of AR 12673.

Figure 7 also displays the evolution of the ratio of free energy to total energy, E_f/E , in AR 12673. This parameter has also been examined by [Pariat et al. \(2017\)](#) and [Zuccarello et al. \(2018\)](#), and it was found to be less indicative of eruptivity than $|H_j|/|H|$. The energy ratio evolution pattern that we find exhibits some similarities to the helicity ratio pattern, which could be a result of the relation between free energy and relative magnetic helicity magnitude ([Tziotziou et al. 2012, 2014](#)). The local maximum of the energy ratio before the second flare is much weaker than the corresponding local maximum of the helicity ratio, however.

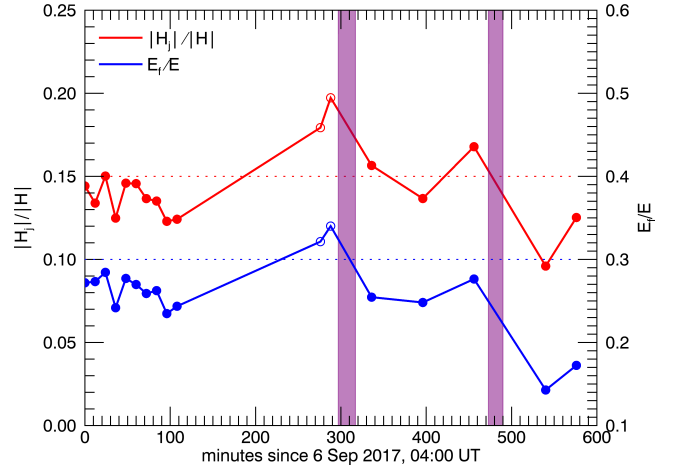


Fig. 7. Evolution of the ratios $|H_j|/|H|$ and E_f/E in AR 12673 for ten hours around the two X-class flares of 6 September 2017. The purple bands denote the time intervals of the X2.2 and the X9.3 flares, with onset times at 08:57 UT and 11:53 UT, respectively. Filled points correspond to the W12 method and open points to the W04 method.

We note in Fig. 7 that free energy, from the peak of $\sim 34\%$ of the total energy before the first flare, drops to $\sim 25\%$ between the two flares, and finally to $\sim 15\%$ after the second. Differently than the helicity ratio, therefore, the energy ratio cannot be used to set a threshold above which flares occur.

4. Discussion

We reported the detailed study of the helicity and energy properties of AR 12673 at the time around its two consecutive X-class flares of 6 September 2017. All involved quantities were accurately computed for the whole period of intense activity. This was done for the first time in such detail. The computations followed a recent finite volume method, and the careful modelling of the 3D magnetic field of the AR.

In the latter, the coronal magnetic field was extrapolated with two different versions of an optimization-based NLFF method. In the newer version of the method, an observationally derived empirical weighting that employs the HMI uncertainty estimate was used for the first time on such methods. This version is the most accurate, as deduced by a parameter that distinguishes extrapolations that lead to reliable helicity values from those that do not, but not in all the cases examined. The older version performed better in two snapshots immediately before the first X-class flare. The best-performing NLFF fields from the two methods were compiled into the final dataset we used.

In a very recent work ([Thalmann et al. 2019](#)), the authors suggested that the threshold in the parameter E_{div}/E should be lower than the threshold we used, 5% instead of 8%, for an NLFF field to be used in helicity studies. We expect to see differences of about 4–5% to the derived helicities with such an NLFF field, as follows from [Valori et al. \(2016\)](#), and our results are therefore probably not affected by this change.

The modelling of the magnetic field enabled us to follow the evolution of the relative magnetic helicity and its two components, the non-potential and the volume-threading component, in AR 12673. The negative sign of all helicity components confirmed the findings of other authors. The values of relative helicity that we estimated are similar in magnitude to those reported by [Vemareddy \(2019\)](#); they reach up to $-5 \times 10^{43} \text{ Mx}^2$. They are three orders of magnitude higher than those of [Yan et al. \(2018\)](#),

however, although both cited works used the flux-integration method to compute the helicity. Compared to Liu et al. (2018), our helicity values are again much higher, but these authors approximated helicity only with its twist, and so the difference is reasonable. The change in helicity during the first flare that we found was also much smaller than theirs.

Additionally, we examined the evolution of the various energy budgets in AR 12673. The evolution pattern of the free energy that we derived seems to agree with the results of Mitra et al. (2018), although a direct comparison is not possible because the authors only provide the ratio E_f/E_p . The field energy that we derive, which is as high as 2.5×10^{33} erg, also compares well with that of Vemareddy (2019), which was computed as the sum of the accumulated energy in the system.

The focus of this work was examining the behaviour of the helicity ratio $|H_j|/|H|$ during the two flares. This first observational determination of the evolution of this ratio in an AR seems to confirm the findings of Pariat et al. (2017): the helicity ratio increases before major flares, and it relaxes afterwards. Moreover, the much smaller current-carrying part of helicity, that is, the fact that $|H_j|/|H| < 1$, is in agreement with previous results (Moraitis et al. 2014). The examination of the energy ratio E_f/E is also compatible with the results of Pariat et al. (2017) and Zuccarello et al. (2018). This ratio is also related to AR eruptivity, but to a lesser extent than $|H_j|/|H|$, and without the capability of providing a threshold above which flares occur, unlike the helicity ratio.

In order to establish these results, the evolution of the helicity ratio needs to be examined in a large number of ARs, with different characteristics regarding their evolutionary stage and/or their eruptivity, and with the highest possible cadence. A step in this direction is made with the work of Thalmann et al. (in prep.). We provide the first observational support here that the helicity ratio $|H_j|/|H|$ is related to solar eruptivity.

Acknowledgements. E. Pariat, L. Linan, and K. Moraitis acknowledge the support of the French Agence Nationale pour la Recherche through the HELISOL project, contract n° ANR-15-CE31-0001. X. Sun is partially supported by NSF award 1848250. This work was supported by the Programme National PNST of CNRS/INSU that is co-funded by CNES and CEA.

References

- Augusto, C. R. A., Navia, C. E., de Oliveira, M. N., et al. 2019, *PASP*, **131**, 024401
- Berger, M. A. 1999, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **41**, B167
- Berger, M. A., & Field, G. B. 1984, *J. Fluid. Mech.*, **147**, 133
- Chertok, I. M., Belov, A. V., & Abunin, A. A. 2018, *Space Weather*, **16**, 1549
- Finn, J., & Antonsen, T. 1985, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **9**, 111
- Green, L. M., Török, T., Vršnak, B., Manchester, W., & Veronig, A. 2018, *Space Sci. Rev.*, **214**, 46
- Hou, Y. J., Zhang, J., Li, T., Yang, S. H., & Li, X. H. 2018, *A&A*, **619**, A100
- Inoue, S., Shiota, D., Bamba, Y., & Park, S.-H. 2018, *ApJ*, **867**, 83
- James, A. W., Valori, G., Green, L. M., et al. 2018, *ApJ*, **855**, L16
- Linan, L., Pariat, É., Moraitis, K., Valori, G., & Leake, J. 2018, *ApJ*, **865**, 52
- Liu, L., Cheng, X., Wang, Y., et al. 2018, *ApJ*, **867**, L5
- Mitra, P. K., Joshi, B., Prasad, A., Veronig, A. M., & Bhattacharyya, R. 2018, *ApJ*, **869**, 69
- Moraitis, K., Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Archontis, V. 2014, *Sol. Phys.*, **289**, 4453
- Morosan, D. E., Carley, E. P., Hayes, L. A., et al. 2019, *Nat. Astron.*, **3**, 452
- Nindos, A., & Andrews, M. D. 2004, *ApJ*, **616**, L175
- Pariat, É., Valori, G., Démoulin, P., & Dalmasse, K. 2015, *A&A*, **580**, A128
- Pariat, É., Leake, J. E., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, **601**, A125
- Pesnell, W. D., Thompson, B. J., & Chamberlin, P. C. 2012, *Sol. Phys.*, **275**, 3
- Rust, D. M. 1994, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 241
- Scherer, P. H., Schou, J., Bush, R. I., et al. 2012, *Sol. Phys.*, **275**, 207
- Sun, X., & Norton, A. A. 2017, *Res. Notes Am. Astron. Soc.*, **1**, 24
- Taylor, J. B. 1974, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1139
- Thalmann, J. K., Linan, L., Pariat, E., & Valori, G. 2019, *ApJ*, **880**, L6
- Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Raouafi, N.-E. 2012, *ApJ*, **759**, L4
- Tziotziou, K., Moraitis, K., Georgoulis, M. K., & Archontis, V. 2014, *A&A*, **570**, L1
- Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, É. 2012, *Sol. Phys.*, **278**, 347
- Valori, G., Démoulin, P., Pariat, É., & Masson, S. 2013, *A&A*, **553**, A38
- Valori, G., Pariat, É., Anfinogentov, S., et al. 2016, *Space Sci. Rev.*, **201**, 147
- Vemareddy, P. 2019, *ApJ*, **872**, 182
- Verma, M. 2018, *A&A*, **612**, A101
- Veronig, A. M., Podladchikova, T., Dissauer, K., et al. 2018, *ApJ*, **868**, 107
- Wang, H., Yurchyshyn, V., Liu, C., et al. 2018, *Res. Notes Am. Astron. Soc.*, **2**, 8
- Wheatland, M. S., Sturrock, P. A., & Roumeliotis, G. 2000, *ApJ*, **540**, 1150
- Wiegelmann, T. 2004, *Sol. Phys.*, **219**, 87
- Wiegelmann, T., Inhester, B., & Sakurai, T. 2006, *Sol. Phys.*, **233**, 215
- Wiegelmann, T., Thalmann, J. K., Inhester, B., et al. 2012, *Sol. Phys.*, **281**, 37
- Yan, X. L., Wang, J. C., Pan, G. M., et al. 2018, *ApJ*, **856**, 79
- Yang, S., Zhang, J., Zhu, X., & Song, Q. 2017, *ApJ*, **849**, L21
- Zuccarello, F. P., Pariat, E., Valori, G., & Linan, L. 2018, *ApJ*, **863**, 41

4.3.3 Influence de la morphologie de la région active [Thalmann, Moraitis, Linan, Pariat, Valori, & Dalmasse \(2019b\)](#)

4.3.3.1 Résumé

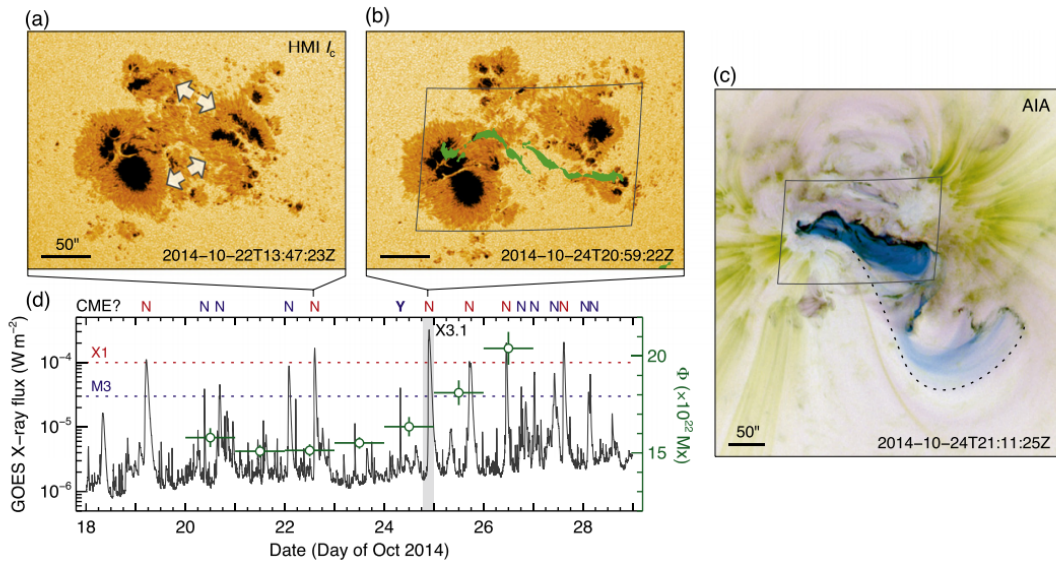


FIGURE 4.13 – Vue d’ensemble de la région active NOAA 12192. **Panneaux (a) et (b)** : Intensité du continuum mesuré par HMI avant deux éruptions de classe X. Les flèches en (a) indiquent deux régions où une séparation importante des taches solaires a eu lieu. **Panneau (c)** : composition d’images prises par l’instrument AIA durant le flare de classe X3.1. **Panneau (d)** : évolution du flux en rayonnement X. Durant toute l’évolution de la région active, 15 flares ont eu lieu, mais un seul a été accompagné par une éjection de masse coronale. Adaptée de [Sun et al. \(2015\)](#).

[Pariat et al. \(2017\)](#) ont montré que le ratio d’hélicité, η_H (cf. Eq. 4.1), est sensible à la morphologie du champ magnétique et permet de distinguer les simulations éruptives des simulations non éruptives. Dans leur étude, le rapport entre l’hélicité magnétique non potentielle et l’hélicité magnétique relative atteint des valeurs supérieures à 0.45 dans les premiers instants uniquement pour les simulations éruptives. Cependant, jusqu’à présent aucune étude à partir de données observées ne confirmait que l’évolution du ratio d’hélicité est impactée par la morphologie de la région active. [Moraitis et al. \(2019b\)](#) et [Thalmann et al. \(2019a\)](#) n’ont en effet traité qu’une région active à la fois.

Ainsi, pour la première fois, dans [Thalmann et al. \(2019b\)](#) nous avons comparé l’évolution du critère d’éruptivité η_H dans deux régions actives présentant un profil éruptif distinct. La première région, NOAA 11158 (cf. Fig. 4.13), déjà analysée par [Thalmann et al. \(2019a\)](#) produit deux flares accompagnés de CMEs entre le 12 et le 15 février 2011. Au contraire, la deuxième région analysée, NOAA 12192, engendre deux éruptions de classe X et M le 22 octobre 2014, mais sans éjection de matière (flare confiné, cf. Sect. 1.1.4).

Pour les deux régions actives, le champ magnétique est modélisé en 3D par la méthode d’optimisation (cf. Sect. 2.3.1.3). Les deux extrapolations possèdent un très bon niveau de solénoïdalité ($E_{div}/E_v < 1\%$) inégalé jusqu’à présent pour les études d’hélicité dans des régions observées ([Moraitis et al. 2019b](#); [Thalmann et al. 2019a](#); [James et al. 2018](#)). Les résultats obtenus sont donc très robustes et consistants ([Thalmann et al. 2019a](#)). Les différentes énergies et hélicités impliquées dans l’étude sont toutes normalisées par le flux magnétique non signé $\phi = (1/2) \int_S |B_z| dS$, pour permettre la comparaison entre les deux régions actives.

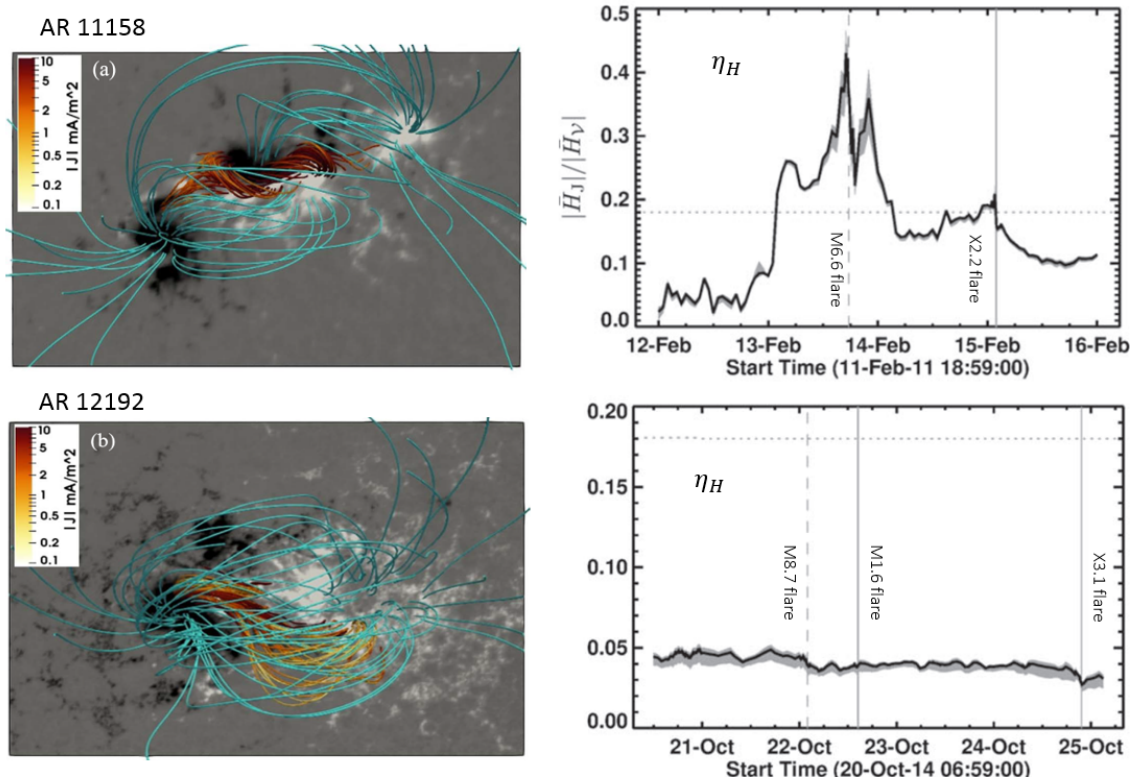


FIGURE 4.14 – **Haut** : région active NOAA 11158. **Bas** : région active NOAA 12192. **Gauche** : morphologie du champ magnétique au niveau des deux régions actives. Les lignes de champ magnétique sont colorées selon l'intensité de la densité de courants électriques. **Droite** : évolutions du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1). Les traits verticaux en pointillés et pleins représentent les éruptions de classes M et X respectivement. Adaptée de [Thalmann et al. \(2019b\)](#).

Tout d'abord, nous avons montré qu'en ordre de grandeur, le ratio $\eta_H = H_j/H_r$ (cf. Eq. 4.1) est plus faible durant toute l'évolution de la région NOAA 12192 que pendant celle de la région NOAA 11158 (cf. Fig. 4.14). Ce résultat est en accord avec celui de [Pariat et al. \(2017\)](#) qui ont montré que η_H atteint des valeurs supérieures dans des simulations MHD éruptives par rapport à des simulations MHD stables. Les faibles valeurs du ratio dans la région NOAA 12192 peuvent s'expliquer par un flux magnétique important, engendrant une forte hélicité magnétique relative. Notons ici qu'une grande valeur de l'hélicité relative n'est donc pas une condition suffisante pour une CME comme suggérée dans des études précédentes (cf. Sect. 4.1.1).

De plus, le critère d'éruptivité η_H montre des maximums locaux au moment des éruptions pour la région active avec CMEs (cf. Fig. 4.14). Le ratio augmente fortement avant les éruptions et diminue juste après. Au contraire pour les flares confinés de la région 12182, aucune dynamique particulière n'est observée durant tout l'intervalle temporel. Ainsi le ratio η_H est une bonne approximation du potentiel éruptif d'une région active, mais n'indique pas si une éruption prochaine impliquera le réarrangement du champ magnétique de manière confinée ou éruptive. Autre résultat notable, la valeur du maximum local n'est pas proportionnelle à l'intensité de l'éruption. Pour la région 11158, nous trouvons des valeurs > 0.4 avant l'éruption de classe M et > 0.17 avant l'éruption de classe C. Cependant, le lien entre l'intensité de l'éruption et l'hélicité nécessite des études dédiées (cf. Sect. 4.1.2).

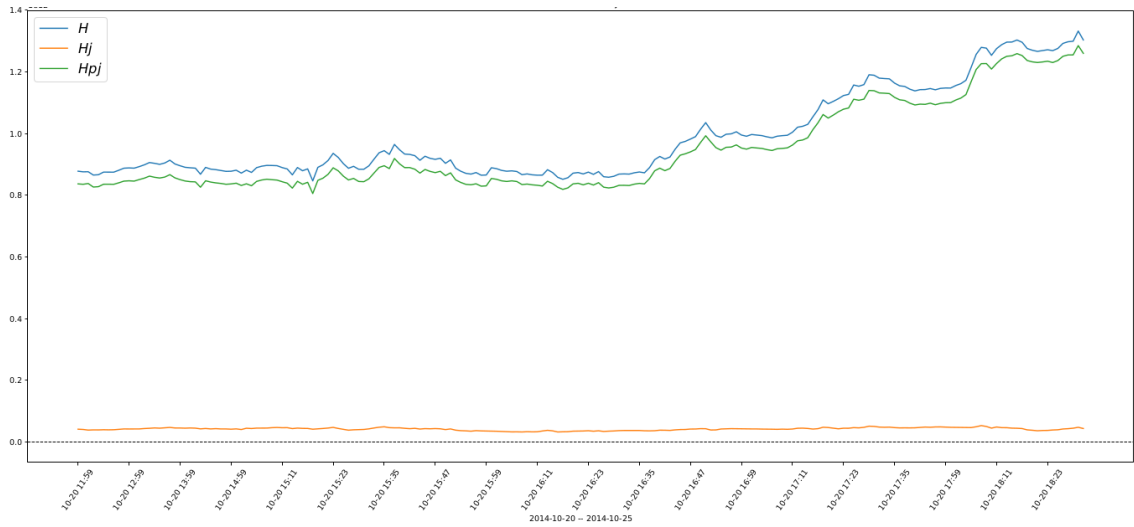


FIGURE 4.15 – Évolution des hélicités relative (H_r , en bleu), non potentielle (H_j , en orange) et mêlée (H_{pj} , vert) au niveau de la région active NOAA 12192. Les hélicités sont calculées à partir de mon implémentation de la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1.4). Un total de 198 extrapolations ont été traitées pour obtenir ces courbes.

4.3.3.2 Ma contribution

Comme dans Moraitis et al. (2019b), l'ensemble des résultats ont bénéficié d'une validation croisée par plusieurs méthodes d'intégration directe volumique (IDV) différentes (cf. Sect. 4.3.2.2). Trois méthodes, correspondant à trois choix de jauges, ont été utilisées. Elles sont nommées dans Thalmann et al. (2019b) : " FV_{De_GV} ", " FV_{De_KM} " et " FV_{Coul_JT} ". J'ai été chargé du calcul des hélicités par la méthode notée " FV_{De_GV} " qui est celle que j'ai également utilisée dans Moraitis et al. (2019b) et Thalmann et al. (2019a). La méthode " FV_{De_KM} " fait référence à celle décrite dans Moraitis et al. (2014) dont nous avons déjà parlé section (4.3.2.2). La dernière méthode " FV_{Coul_JT} " n'utilise pas la jauge de Devore (cf. Sect. 3.3.1.3), mais est basée sur la jauge de Coulomb telle que $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$ (cf. Sect. 3.3.1.2, avec \mathbf{A} et \mathbf{A}_p les potentiels vecteurs). Les trois méthodes diffèrent dans la manière dont l'équation de Laplace pour la solution du champ potentiel est résolue numériquement, ainsi que dans le calcul numérique des intégrales et dérivées impliquées. D'après Valori et al. (2016) et Thalmann et al. (2019b), si le champ magnétique est suffisamment solénoïdal, les trois méthodes doivent donner des résultats similaires ou du moins très proches.

Comme pour mes précédents travaux j'ai dû adapter mon implémentation numérique afin qu'il puisse traiter les données magnétiques issues des extrapolations sans force non linéaire. Néanmoins, cela a demandé un développement supplémentaire pour faire face aux nombres importants d'extrapolations. C'est en effet un total de 311 reconstructions 3D dont il a fallu calculer les hélicités magnétiques (cf. Fig. 4.15). Cela a cependant été rendu possible en faisant s'exécuter le code d'IDV sur un des nœuds de la grappe de calcul de l'observatoire qui dispose des ressources nécessaires au traitement d'importantes quantités de données (cf. Sect. 3.3.1.4).

Ma méthode, " FV_{De_GV} ", a fourni des résultats très proches de ceux obtenus par les méthodes " FV_{Coul_JT} ", " FV_{De_KM} ". L'écart de mesure entre les différentes méthodes est présenté systématiquement sous forme de zone ombrée sur l'ensemble des figures de Thalmann et al. (2019b). Dans la figure (4.14), on remarque, notamment pour la région active NOAA 11158, que l'écart entre les mesures du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1) est faiblement distinct. Cela confirme donc la justesse et la robustesse de notre étude.

Pour finir, comme dans les études précédentes (Moraitis et al. 2019b; Thalmann et al. 2019a),

j'ai contribué aux différentes discussions lors de la conception de l'article et j'ai également participé à l'écriture et la relecture de l'étude.

4.3.4 Perspectives

Dans [Thalmann et al. \(2019a\)](#), [Thalmann et al. \(2019b\)](#) et [Moraitis et al. \(2019b\)](#), nous avons montré que le rapport entre l'hélicité non potentielle et l'hélicité relative, c.-à-d. η_H (cf. Eq. 4.1), est un bon indicateur du potentiel éruptif d'une région active. En effet, dans toutes les régions actives étudiées, η_H présentent des maximums locaux aux moments des éruptions. Cela semble indiquer la présence d'un seuil, η_{Hcrit} , dont le dépassement entraîne l'éruption (par exemple $\eta_{Hcrit} = 0.18$ pour la région active 11158 et $\eta_{Hcrit} = 0.15$ pour la région active 12673). Nos travaux à partir de données observationnelles viennent confirmer ce qui avait été jusqu'à là uniquement observé dans des simulations MHD numériques (e.g. [Pariat et al. 2017](#); [Zuccarello et al. 2009](#)). Nous avons également montré que le ratio η_H ne permet pas de distinguer des flares confinés des éruptions engendrant une CME.

Ces résultats nécessitent cependant d'être confirmés sur un ensemble plus vaste de régions actives avec différentes caractéristiques magnétiques; [Moraitis et al. \(2019b\)](#); [Thalmann et al. \(2019a,b\)](#) englobent en effet que trois différentes régions actives. Durant ma thèse, j'ai essayé de modéliser d'autres régions actives à partir de la méthode magnéto frictionnelle (cf. Sect. 2.3.1.1). Aucune cependant n'était assez solénoïdale pour me permettre d'y extraire la moindre conclusion (cf. Sect. 2.3.1.2).

Indépendamment de mes travaux, η_H est également calculé dans [James et al. \(2018\)](#) à partir d'une extrapolation non linéaire sans force obtenue par la méthode magnéto frictionnelle (cf. Fig. 2.3.1.1). La dynamique de η_H au niveau de la région active NOAA 12673 a également été mesurée par [Price et al. \(2019\)](#). L'approche est cependant différente de celle présentée dans [Moraitis et al. \(2019b\)](#). En effet, pour estimer les hélicités, [Price et al. \(2019\)](#) ont utilisé une simulation magnéto frictionnelle de la région active et non des extrapolations. La méthode numérique utilisée pour la simulation est décrite dans [Pomoell et al. \(2019\)](#). Comme dans nos travaux, [Price et al. \(2019\)](#) ont montré que η_H permettait de signaler l'éruptivité de la région active. En effet, l'éruption de classe X de cette région active a lieu quand η_H atteint sa valeur maximum. [Price et al. \(2019\)](#) suggèrent que ce critère ne doit pas être considéré isolément, mais en combinaison avec l'énergie magnétique libre par exemple.

Rappelons que les futures études doivent s'assurer que le champ magnétique est assez solénoïdal pour que l'évolution des hélicités et de η_H ne dépendent pas de la jauge des potentiels vecteurs employée. En effet, nous avons confirmé dans [Thalmann et al. \(2019a\)](#) qu'il faut nécessairement contrôler finement la qualité des extrapolations en matière de solénoïdalité avant d'y extraire une quelconque physique basée sur l'hélicité magnétique. Et que même les résultats d'extrapolation hautement qualitative doivent être pris avec précaution. Quantitativement, nous suggérons que les études sur l'hélicité font sens uniquement quand $E_{div}/E_v \geq 0.05$ dans le domaine d'étude. Cette condition est plus contraignante que la condition, $E_{div}/E_v \geq 0.10$, proposée par [Valori et al. \(2016\)](#) à partir de simulations numériques. Une valeur de 0.05 entraîne une déviation d'environ 4 – 5% sur le calcul de l'hélicité magnétique relative ([Valori et al. 2016](#)).

Les précautions prises, le critère d'éruptivité η_H pourrait servir à prédire les éruptions solaires de façon fiable dans le cadre de la météorologie de l'espace (cf. Sect. 1.2.2). Jusqu'à présent, aucune grandeur n'avait été révélée aussi efficace pour signaler l'éruptivité d'une région active ([Guennou et al. 2017](#); [Barnes et al. 2016](#)). Le ratio η_H est donc une quantité prometteuse. Pour autant, les raisons qui expliquent la dynamique spéciale du ratio ainsi que son lien avec le déclenchement d'une instabilité restent encore à déterminer. Pour mieux comprendre le comportement de η_H , il faut connaître davantage les propriétés des hélicités qui le composent (l'hélicité

magnétique non potentielle et l'hélicité magnétique mêlée). Le chapitre suivant (cf. Chap. 5) est entièrement dédié à cette problématique. Nous verrons que les hélicités non potentielle et mêlée étaient encore très peu étudiées et sous-estimées jusqu'à présent.

L'étude des propriétés de ces deux hélicités est également nécessaire pour déterminer comment mesurer le ratio $\eta_H = H_j / (H_j + H_{pj})$. Par exemple, nous avons vu que puisque l'hélicité relative est quasi conservée dans l'atmosphère solaire, il est possible d'obtenir une approximation de son accumulation dans la couronne en intégrant son flux à travers la photosphère. Peut-on utiliser la même méthode pour estimer les hélicités non potentielle et mêlée ? Autrement dit, est-ce qu'elles sont également conservées dans l'atmosphère solaire ?

Dans la section (5.2.3), je montrerai en étudiant leurs variations temporelles, que ni l'hélicité non potentielle ni l'hélicité mêlée n'est une grandeur conservée même en MHD idéale (cf. Sect. 5.2.3). Il est donc impossible d'utiliser des méthodes basées sur l'intégration de leurs flux photosphérique (cf. Sect. 3.3.2) pour les estimer dans la couronne solaire. À l'heure actuelle, il faut nécessairement passer par des reconstructions du champ magnétique coronal.



Magnetic Helicity Budget of Solar Active Regions Prolific of Eruptive and Confined Flares

Julia K. Thalmann¹, K. Moraitis², L. Linan², E. Pariat², G. Valori³, and K. Dalmasse⁴

¹University of Graz, Institute of Physics/IGAM, Universitätsplatz 5, A-8010 Graz, Austria

²LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, F-92195 Meudon, France

³Mullard Space Science Laboratory, University College London, Holmbury St. Mary, Dorking, Surrey RH5 6NT, UK

⁴IRAP, Université de Toulouse, CNRS, CNES, UPS, F-31028 Toulouse, France

Received 2019 August 26; revised 2019 September 30; accepted 2019 October 14; published 2019 December 11

Abstract

We compare the coronal magnetic energy and helicity of two solar active regions (ARs), prolific in major eruptive (AR 11158) and confined (AR 12192) flaring, and analyze the potential of deduced proxies to forecast upcoming flares. Based on nonlinear force-free (NLFF) coronal magnetic field models with a high degree of solenoidality, and applying three different computational methods to investigate the coronal magnetic helicity, we are able to draw conclusions with a high level of confidence. Based on real observations of two solar ARs we checked trends regarding the potential eruptivity of the active-region corona, as suggested earlier in works that were based on numerical simulations, or solar observations. Our results support that the ratio of current-carrying to total helicity, $|H_J|/|H_V|$, shows a strong ability to indicate the eruptive potential of a solar AR. However, $|H_J|/|H_V|$ does not seem to be indicative for the magnitude or type of an upcoming flare (confined or eruptive). Interpreted in the context of earlier observational studies, our findings furthermore support that the total relative helicity normalized to the magnetic flux at the NLFF model's lower boundary, H_V/ϕ^2 , represents no indicator for the eruptivity.

Unified Astronomy Thesaurus concepts: Solar corona (1483); Solar flares (1496); Solar coronal mass ejections (310); Solar active region magnetic fields (1975)

1. Introduction

Magnetic helicity is uniquely related to the geometrical complexity of the underlying magnetic system, determined by the twist and writhe of individual magnetic field lines, as well as their mutual entanglement. Magnetic helicity is a signed scalar quantity that is (almost) conserved in (resistive) ideal MHD (Berger 1984; Pariat et al. 2015). Its time evolution reflects the dynamic evolution of the respective magnetic system. For practical cases, such as the solar corona, a gauge-invariant form of the magnetic helicity has been introduced to allow a physically meaningful estimation (Berger & Field 1984; Finn & Antonsen 1984), in the form

$$H_V = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) d\mathcal{V}, \quad (1)$$

where the reference field \mathbf{B}_0 shares the normal component of the studied field \mathbf{B} on the volume's boundary, $\partial\mathcal{V}$. Usually a potential (current-free) field is used as a reference field. Here, \mathbf{A} and \mathbf{A}_0 are the vector potentials of \mathbf{B} and \mathbf{B}_0 , respectively, where $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ and $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$.

Because H_V in Equation (1) is computed with respect to a reference field it is called “relative helicity.” Valori et al. (2012) demonstrated the validity and physical meaningfulness to compute (and track in time) the relative magnetic helicity in finite volumes in order to characterize (the evolution of) a magnetic system.

Following Berger (1999), Equation (1) may be written as $H_V = H_J + H_{PJ}$, with

$$H_J = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) d\mathcal{V}, \quad (2)$$

$$H_{PJ} = 2 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}_0 \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) d\mathcal{V}, \quad (3)$$

where, H_J is the magnetic helicity of the current-carrying part of the magnetic field, and H_{PJ} is the volume-threading helicity between \mathbf{B}_0 and the current-carrying field. Because \mathbf{B} and \mathbf{B}_0 are designed such that they share the same normal distribution on $\partial\mathcal{V}$, not only H_V , but also both H_J and H_{PJ} are independently gauge invariant.

In contrast to H_V , however, H_J and H_{PJ} are not conserved in ideal MHD, as shown recently by Linan et al. (2018), who provided the first analytical derivation of the time variation of these helicities. From their analytical study and their analysis of different numerical experiments, they revealed the existence and key role of a gauge-invariant transfer term between H_J and H_{PJ} , that enables the exchange between the different contributions to H_V .

The properties of H_J and H_{PJ} have been investigated in only a few works so far. Moraitis et al. (2014) studied them, based on three-dimensional MHD models of the emergence of a twisted magnetic flux tube, that resulted in the formation of a small active region (AR) in the model corona. Two experiments have been analyzed, a “noneruptive” and an “eruptive” one. In the eruptive case, part of the model magnetic structure is ejected from the simulation volume at least once during the simulation time span, while in the noneruptive case the magnetic field remains confined within the model volume. It was found that at least H_J showed pronounced fluctuations around the onset of the model mass ejection in the eruptive simulations.

Pariat et al. (2017) presented a study based on seven different three-dimensional visco-resistive MHD simulations of the emergence of a twisted model flux rope into a stratified model atmosphere, that resulted in either a stable (noneruptive) or an unstable (eruptive) coronal configuration. While the basic setup in all of these simulations was identical, only the strength and direction of the background (surrounding) magnetic field

was modified to obtain the different solutions. They concluded that, for the analyzed set of numerical experiments H_V clearly discriminated between stable and unstable simulations, in contrast to, e.g., total, potential, and free magnetic energy, as well as magnetic flux. A generally higher H_V in the stable simulations, however, disqualified H_V as a useful quantity to predict eruptive behavior, at least in cases where the self and mutual helicities are of opposite sign (see also, e.g., Phillips et al. 2005).

In contrast, significantly greater values of H_J during the pre-eruptive phase, and especially during the time of strong flux emergence, were noticed from the unstable simulations studied in Pariat et al. (2017). Even more powerful, the ratio of the current-carrying to total helicity, $|H_J|/|H_V|$, turned out to represent a fruitful proxy for eruptivity, with values $\gtrsim 0.45$ prior to the model eruptions, in contrast to the corresponding value for the stable (noneruptive) configuration. As noted by the authors, the threshold $|H_J|/|H_V| \simeq 0.45$ is not to be regarded as a universal one, but rather depends on the properties of the particular analyzed case.

In another recent study, Zuccarello et al. (2018) investigated the helicity-based eruptivity threshold using three-dimensional line-tied MHD simulations, in which eruptivity was imposed by controlled motions, driven on the lower boundary of the simulation domain. These motions were designed such as to mimic the long-term evolution of solar ARs, including shearing motions and magnetic diffusion on large scales. Starting from the same initial field configuration that contained a flux rope, the different numerical simulations were based on different types of boundary motions that led to the eruptive evolution. The authors noted a value of $|H_J|/|H_V| \simeq 0.3$ at the onset times of torus instability, for all simulations, i.e., independently of how the system was destabilized.

As a side result, analyzing a simulation of the generation of a solar coronal jet, Linan et al. (2018) also found that the jet was triggered for large values of the ratio $|H_J|/|H_V|$, though the focus of the study was primarily on the analysis of the properties of H_J and H_{PJ} .

So far, only few works attempted to investigate the decomposed helicity for observational cases. In James et al. (2018), a nonlinear force-free (NLFF) model of AR 11504 one hour prior to a filament eruption was used to calculate the contributions to the total helicity. They found $|H_J|/|H_V| = 0.17$, underlying that the thresholds for eruptivity given in Pariat et al. (2017) and Zuccarello et al. (2018) are valid with regards to the particular analyzed simulations only.

Moraitis et al. (2014) was the first to attempt the monitoring of the long-term evolution of the individual contributors to magnetic helicity for two solar ARs (11072 and 11158, prolific in confined and eruptive flaring, respectively). The time evolution of H_J showed a clear correspondence to rapid flux emergence and the formation of a filament and a X2.2 flare in AR 11158, despite the rather low time cadence of the underlying NLFF models (four hours). The corresponding analysis of AR 11072 was hampered by a nonsatisfactory level of solenoidality of the underlying NLFF solutions.

Just recently, two studies dealt with the long-term evolution of the magnetic energy and helicity budgets in solar ARs that hosted major flares, based on helicity computations of unprecedented accuracy, within the application to observed data. Moraitis et al. (2019) analyzed the helicity and energy budgets of AR 12673, in the course of two major flares (a

preceding confined and a following eruptive X-flare). They found distinct local maxima in time evolution of $|H_J|/|H_V|$ allowing them to suggest an approximate threshold of $|H_J|/|H_V| \simeq 0.15$ for the eruptivity in that AR. Their results are in line with that of Thalmann et al. (2019) who analyzed the coronal evolution of AR 11158. Though the primary focus of the latter study was on the sensitivity of the magnetic helicity computation with respect to the solenoidal property of the underlying NLFF solution (for more details see also Section 2.3.1 in the present study), an approximate characteristic preflare level of $|H_J|/|H_V| \simeq 0.2$ can be identified in their Figure 4(d).

In our work, we go further and provide the first study of the (decomposed) magnetic helicity budget in two solar ARs of different respective flare profile (prolific in either major confined or major eruptive flares) and evolutionary stage (well-developed versus fast evolving with rapid flux emergence). For this purpose, we study AR 11158 during 2011 February and AR 12192 during 2014 October, respectively. We analyze the coronal magnetic helicities and energies in the course of confined and eruptive flaring, to study their potential to discriminate the two types of flaring timely before their occurrence. Importantly, we base our analysis on optimized NLFF time series, with highly satisfactory force-free and solenoidal properties, to allow helicity computations of unprecedented accuracy. Moreover, we incorporate the results of three different helicity computation methods, in order to explore the possible spread of values obtained.

2. Methods

2.1. AR Selection

We aim to compare the coronal magnetic energy and helicity of two solar ARs, prolific in major (*GOES* class M5.0 and larger) eruptive and confined flares. AR 11158, produced the first X-class flares of solar cycle 24. All major flares of this AR, as observed during disk passage in 2011 February, were associated with coronal mass ejections (CMEs). In contrast, AR 12192 showed a flare profile that clearly deviates from known flare-CME statistics (e.g., Yashiro et al. 2006) in that, during its disk passage in 2014 October, it produced six confined X-class flares, but none were associated with a CME.

2.2. Data

The magnetic characteristics were studied based on photospheric vector magnetic field data (Hoeksema et al. 2014), derived from *Solar Dynamics Observatory* (*SDO*; Pesnell et al. 2012) Helioseismic and Magnetic Imager (HMI; Schou et al. 2012) polarization measurements. In particular, the HMI SHARP_CEA_720S data series was used which contains a Lambert cylindrical equal-area projected magnetic field vector, decomposed into B_r , B_ϕ , and B_θ at each remapped grid point, within automatically identified active-region patches (Bobra et al. 2014). These spherical components relate to the heliographic magnetic field components, as defined in Gary & Hagyard (1990), as $(B_x, B_y, B_z) = (B_\phi, -B_\theta, B_r)$, where x , y , and z denote the solar positive-westward, positive northward, and vertical direction, respectively. The native resolution of the photospheric field data is 0.03 CEA-degree, corresponding to ≈ 360 km pixel $^{-1}$ at disk center.

Within large sunspot umbrae, unreasonable magnetic field values with high errors are sometimes present in HMI data

products. The center of the negative-polarity sunspot in AR 12192 represents such a case, with a patch of abnormally weak B_z (i.e., B_r). In order to compensate for the artificial magnetic profile within the sunspot umbra, we use the irregularly sampled but known and accurately measured magnetic field values to interpolate smoothly over the grid of erroneous measurements, using bilinear interpolation.

2.3. Modeling

2.3.1. Magnetic Field Modeling

For NLFF modeling, we binned the photospheric data by a factor of four, to a resolution of $\approx 2'' \text{ pixel}^{-1}$, while almost preserving the magnetic flux. The adopted computational domains are of the extent of $148 \times 92 \times 128 \text{ pixel}^3$ and $276 \times 200 \times 128 \text{ pixel}^3$, to model the force-free corona of AR 11158 and 12192, respectively. The NLFF equilibria are computed using the method of Wiegmann & Inhester (2010). In this way, we obtain the quasi-static evolution of the solar corona in and around AR 11158 from 2011 February 11 19:00 UT to February 15 23:59 UT, and for AR 12192 from 2014 October 20 06:59 UT to October 25 11:59 UT. Around the time of intense flares (equal or larger *GOES* class M5.0), we use the native time cadence of 12 minutes and use a 1 hr cadence otherwise.

Two controlling parameters are frequently used to quantify the consistency of the obtained NLFF solutions. The current-weighted angle between the modeled magnetic field and electric current density, θ_j (Schrijver et al. 2006), and the volume-averaged fractional flux, $\langle |f_i| \rangle$ (Wheatland et al. 2000), which is a measure of local deviations from solenoidality within the model volume. As a rule of thumb, the smaller the corresponding values are, the more force- and divergence-free an NLFF solution is. For a perfectly force-free and solenoidal NLFF solution, $\theta_j = 0$ and $\langle |f_i| \rangle = 0$.

For the NLFF time series of AR 11158, we find median values of $\theta_j = 15.6 \pm 2.7$ and $\langle |f_i| \rangle \times 10^4 = 2.23 \pm 0.98$. The corresponding estimates for AR 12192 are $\theta_j = 5.62 \pm 0.16$ and $\langle |f_i| \rangle \times 10^4 = 3.46 \pm 0.25$, underlying the high quality of the NLFF fields for subsequent reliable helicity computation (see Thalmann et al. 2019 for a dedicated study).

Also Valori et al. (2016) highlighted that, in order to guarantee a reliable computation of magnetic helicity, the input magnetic field has to fulfill certain requirements concerning its divergence-freeness, i.e., how well $\nabla \cdot \mathbf{B}$ is satisfied. It was shown that if the ratio $E_{\text{div}}/E \gtrsim 0.1$, the error in the computation of H_V may grow considerably (see their Section 7 and Figure 8(b)). The expression E_{div} is based on the decomposition of the magnetic energy within \mathcal{V} by Valori et al. (2013), in the form

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} B^2 d\mathcal{V} = E_0 + E_j \\ &= E_{0,s} + E_{j,s} + E_{0,ns} + E_{j,ns} + E_{\text{mix}}, \end{aligned} \quad (4)$$

with E_0 and E_j being the energies of the potential and current-carrying magnetic field, respectively. E_0 is used to compute an upper limit for the free energy as $E_F = E - E_0$. $E_{0,s}$ and $E_{j,s}$ are the energies of the potential and current-carrying solenoidal magnetic field components. $E_{0,ns}$ and $E_{j,ns}$ are those of the corresponding nonsolenoidal components. All terms are positive-defined, except for E_{mix} , which corresponds to all cross terms (see

Equation (8) in Valori et al. 2013 for the detailed expressions). For a perfectly solenoidal field, one finds $E_{0,s} = E_0$, $E_{j,s} = E_j$, and $E_{0,ns} = E_{j,ns} = E_{\text{mix}} = 0$. Based on Equation (4), the divergence-based energy contribution is defined as $E_{\text{div}} = E_{0,ns} + E_{j,ns} + |E_{\text{mix}}|$.

Recently, an extension to the work of Valori et al. (2016) who investigated the corresponding effect based on an idealized model, was presented by Thalmann et al. (2019) who considered the dependency of helicity computations on the field's solenoidal property in NLFF time series based on solar observations. It was shown that helicity computations may be meaningful and trustworthy only if $E_{\text{div}}/E \lesssim 0.05$ and $\langle |f_i| \rangle \times 10^4 \lesssim 5$ for the underlying coronal magnetic field model. In the present work, both NLFF time series have a median value of $E_{\text{div}}/E \lesssim 0.01$, and thus, we may safely assume a correspondingly small error in the helicity computations. Note that these values, together with that of $\langle |f_i| \rangle$ listed above, are considerably better than in earlier works (e.g., Moraitis et al. 2014; James et al. 2018; Moraitis et al. 2019).

2.3.2. Magnetic Helicity Computation

The 3D cubes containing the NLFF magnetic field are used as input to three different finite-volume (FV) helicity computation methods. In brief, the method of Thalmann et al. (2011) to compute the relative helicity, solves systems of partial differential equations to obtain the vector potentials \mathbf{A} and \mathbf{A}_0 , employing the Coulomb gauge, $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 = 0$ ("FV_{Coul_IT}" hereafter; see also Section 2.1 of Valori et al. 2016, for details). The methods of Valori et al. (2012) and Moraitis et al. (2014) are based on an integral formulation for the vector potentials within a finite volume and employ a DeVore gauge, $A_z = A_{p,z} = 0$ (see also Section 2.2 of Valori et al. 2016). The two methods differ in the way in which the Laplace equation for the potential field solution is solved numerically, as well as the numerical calculation of the involved integrals and derivatives. The method of Valori et al. (2012) is referred to as "FV_{Dev_GV}," hereafter. We consider two realizations of the method of Moraitis et al. (2014), one where the rectangle integration rule is used ("FV_{Dev_KM}"), and one where the weighted trapezoidal rule is used ("FV_{Dev_KM}^w") to compute the involved integrals. All methods define the reference field as $\mathbf{B}_0 = \nabla\varphi$, with φ being the scalar potential, subject to the constraint $\nabla_n\varphi = \mathbf{B}_n$ on $\partial\mathcal{V}$, and solve the corresponding Laplace equation for φ with different methods.

The methods have been tested in the framework of an extended proof-of-concept study on FV helicity computation methods (Valori et al. 2016), where it has been shown that for various test setups the methods deliver helicity values in line with each other, differing by a few percent only, given a sufficiently low level of $\nabla \cdot \mathbf{B}$ in the underlying magnetic test case.

2.4. Analyzed Quantities

We apply the different FV helicity computation methods to the two time series of NLFF extrapolations for AR 11158 and AR 12192, and correspondingly obtain four, possibly differing, results for each time instant for the extensive quantities H_V and its contributors, H_{Pj} and H_j , as well as for E_0 , and thus E_F , since the different FV helicity computation methods derive \mathbf{B}_0 in a different numerical way. For each time instance, we compute the mean values \bar{E}_0 , \bar{E}_F , \bar{H}_V , \bar{H}_j , and \bar{H}_{Pj} , and consider this to be the most representative approximation of the real values.

In order to make the computed quantities of the two different ARs better comparable, we also calculate intensive quantities. We define the normalized helicity as \bar{H}_V/ϕ^2 , where $\phi = \frac{1}{2} \int_{S(z=0)} |B_z| dS$, i.e., half of the total unsigned magnetic flux, ϕ , across the NLFF lower boundary. Often employed proxies to quantify the nonpotentiality and eruptivity of the considered magnetic configuration are the form of the free energy ratio, \bar{E}_F/E , where E is the total magnetic energy of the input NLFF fields, and the helicity ratio, $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$.

All mean values are presented and interpreted in context with the spread of the four values obtained for the individual physical quantities, where we define the spread to be bounded by the two estimates which deviate the most from the respective mean value.

3. Results

3.1. Coronal Magnetic Field Structure

In agreement with previous works, we find the coronal magnetic field above AR 11158 on February 14 at $\sim 21:00$ UT in the form of a low-lying magnetic flux rope aligned with the main polarity inversion line and surrounded by the large-scale field associated with the strong westernmost positive and easternmost negative polarity patches of the AR (Figure 1(a)). Similar model results have been presented and discussed in, e.g., Jing et al. (2012), Sun et al. (2012), and Inoue et al. (2013).

The coronal magnetic field configuration above AR 12192 on October 24 at $\sim 19:00$ UT appears in the form of a low-lying weakly twisted flux rope above the main polarity inversion line of the AR (Figure 1(b)), bridged by the large-scale magnetic field associated with the surrounding dispersed magnetic field. Similar model results have been presented in, e.g., Jing et al. (2015), Sun et al. (2015), and Inoue et al. (2016).

3.2. Extensive Quantities: Magnetic Flux, Free Magnetic Energy, and Helicities

3.2.1. AR 11158

Upon emergence, AR 11158 exhibited a considerable increase in the total unsigned flux (Figure 2(a); black line), starting from late February 12, which corresponds to the time when a pronounced filament was emerging, as analyzed in detail by, e.g., Sun et al. (2012). Parts of the filament erupted during two eruptive flares, an M6.6 flare (SOL2011-02-13T17:38) and an X2.2 flare (SOL2011-02-15T01:56).

The corresponding evolution of the mean free magnetic energy, \bar{E}_F , is shown in Figure 2(c). The spread of the energy values deduced from the different FV methods is shown as the gray shaded area, and is bounded by the results from the FV_{DeV_KM}/FV_{Coul_JT} method at higher/lower energies. Two distinct episodes can be distinguished. First, a considerable increase of \bar{E}_F , co-temporal with the strong flux emergence, resulting in a free magnetic energy of $\approx 0.8 \times 10^{32}$ erg early on February 13. Second, notable decreases of \bar{E}_F are observed around the two major eruptive flares (the M6.6 and X2.2 flare, marked by a vertical dashed and solid line, respectively). The trends just discussed compare well with results previously published in the literature (e.g., Sun et al. 2012; Tziotziou et al. 2013; Jing et al. 2015).

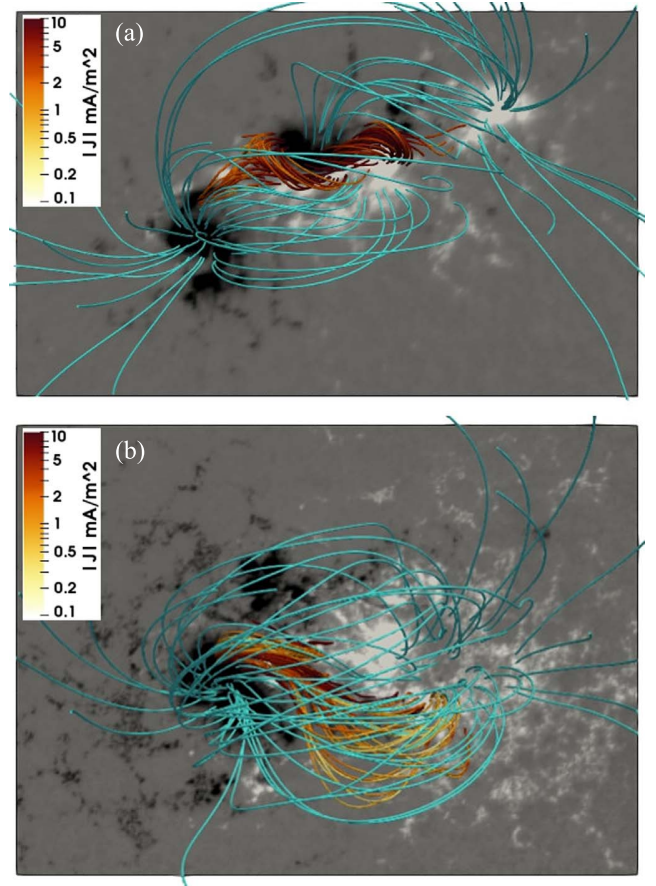


Figure 1. NLFF magnetic field of (a) AR 11158 on 2011 February 14 at 21:00 UT and (b) AR 12192 on 2014 October 24 at 19:00 UT. Field lines outlining the large-scale magnetic field are turquoise. Sample field lines in the centers of the respective ARs are color-coded according to the magnitude of the total current density, $|J|$. The grayscale background shows the vertical magnetic field component at a photospheric level, saturated at ± 1 kG.

The time evolution of the mean magnetic helicity, \bar{H}_V (Figure 2(e)), also reflects the emergence of the magnetic flux rope, with \bar{H}_V increasing from $\approx 0.1 \times 10^{42}$ Mx^2 to $\approx 3 \times 10^{42}$ Mx^2 . The response to the occurring eruptive flares is reflected by a response similar to that of \bar{E}_F , with a (smaller) larger decrease during the (M6.6) X2.2 flare. These trends are in overall agreement with the results presented by Jing et al. (2012, 2015).

The individual contributions of the current-carrying (\bar{H}_J) and volume-threading (\bar{H}_{PJ}) helicities are shown in Figure 2(g) (dotted and solid curves, respectively). Throughout the considered time period, both, \bar{H}_J and \bar{H}_{PJ} are positive, with \bar{H}_{PJ} being the dominated contributor to \bar{H}_V at most time instances (being a factor of 2–10 larger than \bar{H}_J).

3.2.2. AR 12192

AR 12192, the largest solar AR observed during the past ~ 24 yr, exhibited a more or less constant and unusually high unsigned magnetic flux ($\approx 2 \times 10^{23}$ Mx) during disk passage (see also, e.g., Table 1 of Sun et al. 2015). The little variation resulted from the slow time evolution of the well-developed AR, in absence of strong flux emergence (Figure 2(b)).

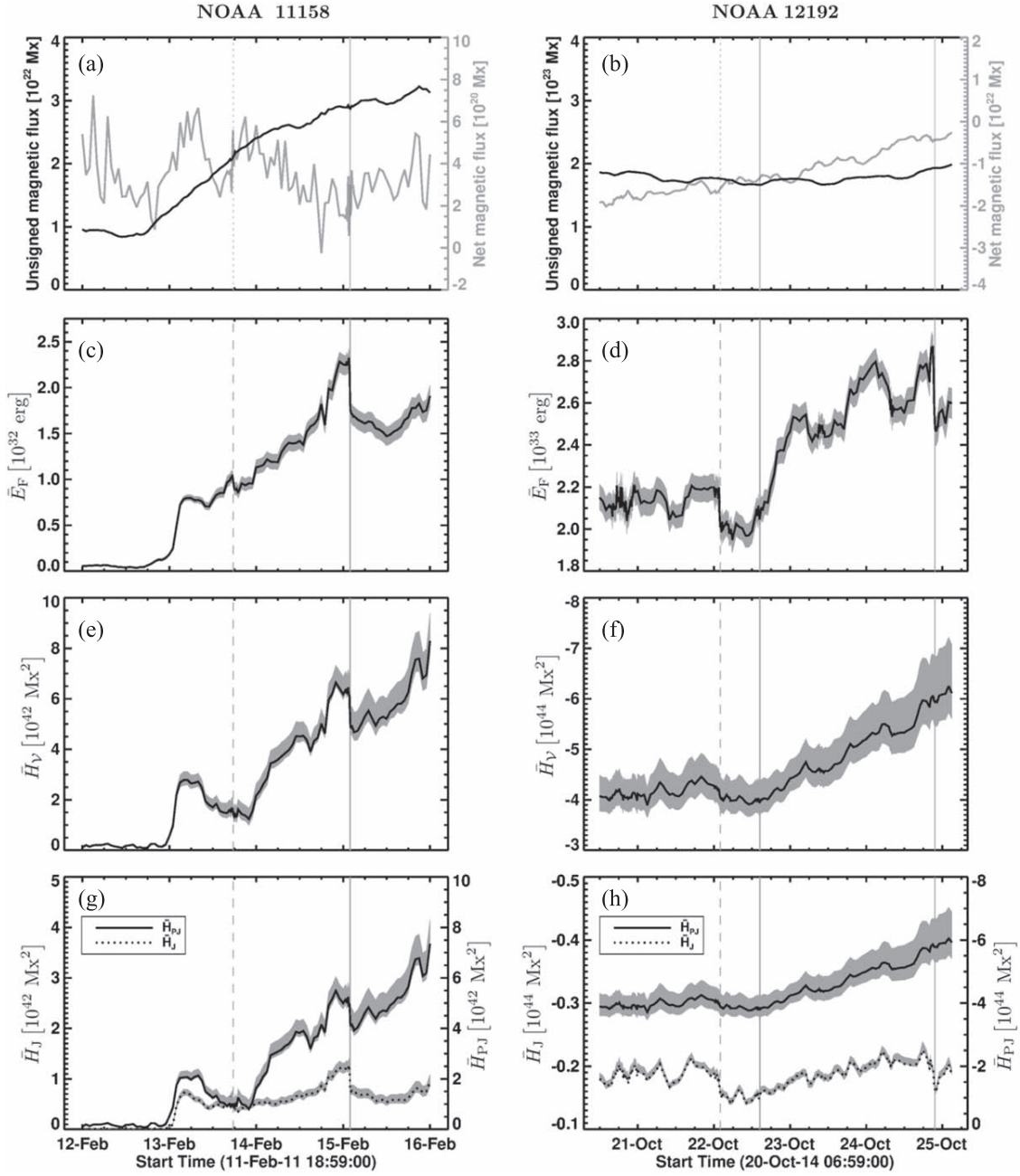


Figure 2. Time evolution of different extensive quantities for AR 11158 (left column) and AR 12192 (right column). The net magnetic flux (gray curve) and total unsigned flux (ϕ ; black curve) are shown in (a) and (b), the mean free magnetic energy, \bar{E}_F , in (c) and (d), and the mean magnetic helicity, \bar{H}_V , in (e) and (f), respectively. The contributions of the current-carrying (\bar{H}_J ; dotted line) and volume-threading (\bar{H}_{PJ} ; solid line) helicity are shown in (g) and (h), respectively. Black curves in (c)–(f) represent the mean values of the quantities computed with the different FV methods. The shaded areas represent the spreads of the respective quantities, bounded by those which lie farthest away from the mean value. Vertical dashed and solid lines mark the *GOES* peak time of M- and X-class flares, respectively.

The corresponding evolution of \bar{E}_F (Figure 2(d)) is characterized by distinct variations around three major confined flares (SOL2014-10-22T01:59M8.7, 2014-10-22T14:28X1.6, and 2014-10-24T21:41X3.1), with the spread of solutions being bound by that of the FV_{DeV_KM} and FV_{Coul_JT} method at higher and lower energies, respectively. Despite the similar trend, we find \bar{E}_F by a factor of ten higher than Jing et al. (2015), and in the approximate range $(2\text{--}3) \times 10^{33}$ erg. Given the unusually high unsigned magnetic flux, we regard our numbers as highly plausible, however. This is further substantiated by an

estimated mean free magnetic energy of $\approx 15\%$, which for an AR with a well defined flux rope is highly realistic (see Section 3.3.2 and Figure 3(b)).

\bar{H}_V was negative increasing from about -4×10^{44} Mx² to -6×10^{44} Mx² during the considered time period (see Figure 2(f) and note the reversed y-axis labeling). The time evolution of \bar{H}_V shows hardly any sensitivity toward the occurrence of the major confined flares. The spread of the solutions of the individual methods is bounded by the values derived from the FV_{Coul_JT} (FV_{DeV_GV}) method at higher

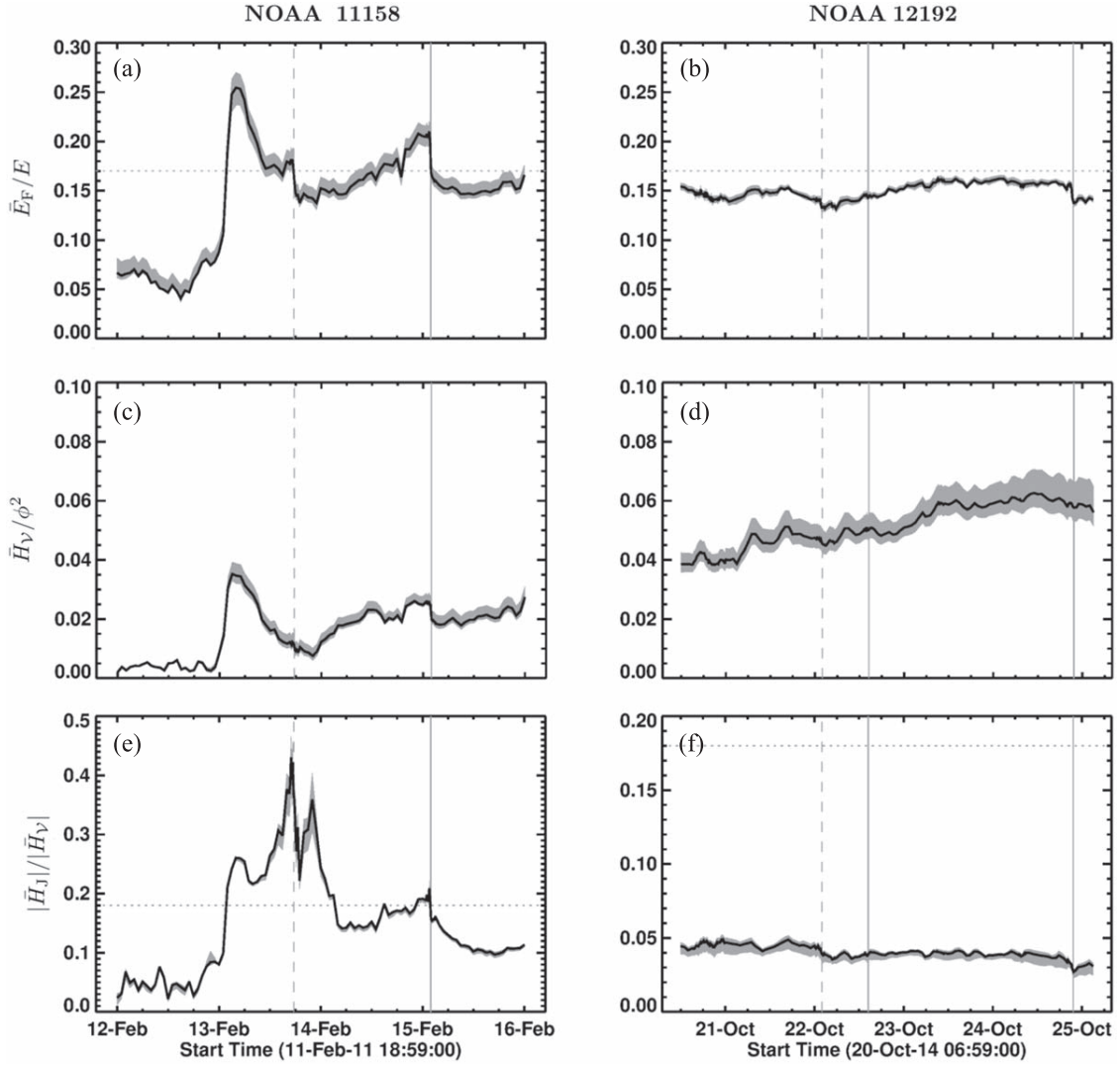


Figure 3. Time evolution of different intensive quantities for AR 11158 (left panels) and AR 12192 (right panels). The magnetic energy ratio, \bar{E}_F/E , is shown in (a) and (b), the respective normalized helicity, \bar{H}_V/ϕ^2 , in (c) and (d), and the helicity ratio, $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$, in (e) and (f), respectively. Black curves represent the mean values of the quantities computed with the different FV methods. The shaded areas represent the spreads of the respective quantities, bounded by those which lie farthest away from the mean value. Vertical dashed and solid lines mark the GOES peak time of M- and X-class flares, respectively.

(lower) values. Similar as for \bar{E}_F before, also our estimates of \bar{H}_V are larger by a factor of 10 than those presented in Jing et al. (2015), still showing a similar trend. Yet again, our results are compatible with the strong magnetic flux in AR 12192, substantially higher than that of “typical” ARs (a few 10^{22} Mx; see, e.g., Figure 4 of Toriumi et al. 2017). Also, our results are highly reliable, given the low value of E_{div}/E in the underlying NLFF models (see Section 2.3.1).

\bar{H}_V is dominated by the contribution of \bar{H}_{PJ} at all times (Figure 2(h); solid line), with \bar{H}_J being smaller by a factor of ~ 25 (Figure 2(h); dotted line). The spread of solutions for H_{PJ} is bounded by that of $FV_{\text{Coul_JT}}$ and $FV_{\text{DeV_GV}}$ at high and low helicities. That of H_J is bound by $FV_{\text{DeV_KM}}$ and $FV_{\text{DeV_GV}}$, respectively.

3.3. Intensive Quantities: Normalized Helicity and Eruptivity Proxies

The goal of our study is to compare ARs that hosted almost exclusively major confined (AR 12192) or eruptive flares

(AR 11158), during their disk passage. The analysis of the extensive quantities \bar{E}_F , \bar{H}_V , \bar{H}_J , and \bar{H}_{PJ} , above (see Section 3.2), revealed some differences between the two ARs. Well-developed and slowly evolving AR 12192 hosted a total unsigned magnetic flux, ϕ , and free magnetic energy, \bar{E}_F , and a helicity of the current-carrying field, \bar{H}_J , about 10 times larger than the newly formed and rapidly evolving AR 11158. Only the decomposition of \bar{H}_V into \bar{H}_J and \bar{H}_{PJ} revealed that \bar{H}_V in AR 12192 exceeded that of AR 11158 by a factor of 100, due to the contribution of the volume-threading helicity, \bar{H}_{PJ} . In order to more easily compare the two different ARs, we analyze intensive quantities in the following.

3.3.1. AR 11158

The energy ratio shows increasing trends prior to the eruptive flares and values $\bar{E}_F/E \gtrsim 0.17$ (Figure 3(a); see horizontal dashed line for reference). Highest values are obtained for the time period related to the strong flux emergence, with $\bar{E}_F/E \simeq 0.25$. Prior to the presence of strong

magnetic fluxes (before late February 12), it is considerably smaller ($\bar{E}_F/E \lesssim 0.1$). The spread of values of \bar{E}_F/E is bounded by the solutions of FV_{DeV_KM} and FV_{Coul_JT} at its higher and lower bounds, respectively.

Peak values of $\bar{H}_V/\phi^2 \gtrsim 0.05$ are also found around the time of strong flux emergence (early on February 13), while it is $\lesssim 0.04$ at most other times (Figure 3(c)). The spread of solutions is bound by the results obtained with the FV_{DeV_KM} and FV_{Coul_JT} at higher and lower values, respectively.

$|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ shows an (increasing) decreasing trend (before) after the major eruptive flares, with preflare values $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V| \gtrsim 0.17$ (Figure 3(e); see horizontal dashed line for reference). Note also the little spread of the results based on the different methods. The spread of solutions is bound by the results obtained with the FV_{DeV_KM} and FV_{Coul_JT} at higher and lower values, respectively.

3.3.2. AR 12192

The energy ratio shows no clear trends prior to the occurrence of the major confined flares, and values $\bar{E}_F/E \lesssim 0.17$ at all times (Figure 3(b); see the horizontal dashed line for reference). Correspondingly, no common characteristic preflare level in context with the major flares can be identified. The spread of values is bounded by the solutions of $FV_{DeV_KM}^w$ and FV_{Coul_JT} at its higher and lower bounds, respectively.

\bar{H}_V/ϕ^2 shows a smooth and slowly increasing trend, with values $\bar{H}_V/\phi^2 \gtrsim 0.05$ at most times (Figure 3(d)). The spread is bounded by the solutions of FV_{Coul_JT} (FV_{DeV_GV}) at high (low) values.

Very little variation of $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ is found around the time of the major confined flares, including no significant increase, or a characteristic preflare value (Figure 3(f)). The spread is bounded by the solutions of FV_{Coul_JT} (FV_{DeV_GV}) at low (high) values.

4. Discussion and Summary

We aimed to compare the coronal magnetic energy and helicity of two solar ARs, prolific in major eruptive (AR 11158) and confined (AR 12192) flares, and analyze the potential of proxies for eruptivity (\bar{E}_F/E , $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$) to hint at the upcoming flares. AR 11158 was rapidly evolving and produced the first major flares of solar cycle 24, all associated with CMEs. In contrast, well-developed and slowly evolving AR 12192 produced six major confined X-class flares (i.e., no associated CMEs).

Our results are based on the application of three different numerical approaches to compute the relative helicity (Thalmann et al. 2011; Valori et al. 2012; Moraitis et al. 2014). Compared to previous works, we based our energy and helicity computations on time series of NLFF model solutions with unprecedented quality regarding their fulfillment of the solenoidal condition ($|\mathbf{f}_i| \times 10^4 \lesssim 4$ and $E_{div}/E \lesssim 0.01$), supporting the high reliability of our main findings:

- (i) For both ARs, \bar{H}_V and \bar{E}_F exhibit a similar time evolution (Figures 2(c)–(f)). Timely centered around the emergence of strong magnetic flux, as well as the occurrence of major flares, we detect significant changes only for CME-productive AR 11158.
- (ii) For the analyzed ARs, \bar{H}_V was dominated by the contribution of \bar{H}_{PJ} (Figures 2(g) and (h)). Noteworthy, while the absolute value of H_{PJ} exceeds that of H_J by a factor of 2–10 in AR 11158, it is about ~ 25 times larger

in AR 12192, probably due to the unusually large unsigned magnetic flux ($\phi \propto 10^{23}$ Mx).

- (iii) On average, \bar{H}_V/ϕ^2 is larger for AR 12192 ($\gtrsim 0.05$; Figure 3(d)), compared to that of AR 11158 ($\lesssim 0.04$; Figure 3(c)). The noteworthy exception is the period of strong flux emergence early on February 13, with peak values $\bar{H}_V/\phi^2 \gtrsim 0.13$ for AR 11158.
- (iv) While the eruptivity proxy, $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$, increases strongly before major eruptive flares in AR 11158, only little variation is found for AR 12192 (Figures 3(e) and (f), respectively). A corresponding statement holds for \bar{E}_F/E (Figures 3(a) and (b), respectively). For both, \bar{E}_F/E and $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$, characteristic preflare values in AR 11158 are $\gtrsim 0.17$.
- (v) $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ does not scale with the size of the flares in NOAA 11158. We find values of $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V| \gtrsim 0.4$ ($\gtrsim 0.17$) prior to the eruptive M6.6 (X2.2) flare, respectively (see Figure 3(e)).
- (vi) A pronounced response of $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ on the occurrence of flares is only seen for the major eruptive flares (i.e., for AR 11158; see Figure 3(e)).

In summary, our findings substantiate the suggestion of Pariat et al. (2017) that the helicity ratio $|H_J|/|H_V|$ shows a strong ability to indicate the eruptive potential of a magnetic system, and that peak values are to be expected prior to eruptive flaring. Our results also support the findings of Zuccarello et al. (2018) and Linan et al. (2018) in that a close correlation may exist between large values of the helicity ratio and eruptivity. In our work, these findings are based on real solar observations of two different ARs, whereas the aforementioned studies were based on numerical simulations.

The analysis of Pariat et al. (2017) was based on numerical simulations of a solar-like AR, that involved distinct reorganizations of the model coronal magnetic field. More precisely, a flux rope rises from the convection zone to reconnect with the magnetic field in the low atmosphere above, to form a secondary twisted flux rope. This secondary flux rope is either stable (in the noneruptive simulations; Linan et al. 2013) or unstable (in the eruptive simulations; Linan et al. 2014). We may therefore compare our helicity analysis of AR 12192 and 11158 with the corresponding analysis of the stable and unstable simulations, respectively, by Pariat et al. (2017).

Pariat et al. (2017) suggested that $|H_J|/|H_V|$ is (smaller) larger in (non) eruptive cases, based on numerical simulations, composed of a model flux rope emerging into an overlying arcade field (non) favorable for magnetic reconnection. For a given dipole strength of the overlying field arcade, they found $|H_V|$ to be (larger) smaller for the (non) eruptive case (compare, e.g., violet dashed-dotted and red dashed lines in their Figure 5(a)), if the orientation of the upper part of the poloidal field of the flux rope was oriented parallel (antiparallel) with respect to the overlying arcade field.

Similarly, in our work, we find (smaller) larger values of $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ for (non) eruptive AR (12192) 11158. We assume that the smaller $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ in AR 12192 can be attributed to the substantially higher unsigned magnetic flux, ϕ , and thus a much larger $|\bar{H}_V|$.

Noteworthy, $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ in our study appears indicative only for the upcoming major eruptive flares in AR 11158, but not for the major confined flares in AR 12192. This indicates that $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$ is a good proxy for the eruptive potential of an AR,

but cannot be expected to serve as an indicator whether an upcoming flare will involve the rearrangement of the magnetic field in a confined (noneruptive) or eruptive manner. This speculation is supported by the recent work of Moraitis et al. (2019) who studied the magnetic helicity of AR 12673, around two consecutive major X-class flares (a preceding confined and a following eruptive one, about three hours later). They found values of $|H_J|/|H_V|$ comparable with that of AR 11158 in our study, with even higher values prior to the major confined flare.

Our observation based analysis represents an extension of the work by James et al. (2018) and Moraitis et al. (2019), who suggested values of $|H_J|/|H_V| \gtrsim 0.15$ to be characteristic for the immediate preflare magnetic field, based on NLFF modeling of the solar corona above selected ARs. Based on our long-term analysis of AR 11158, we find values of $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V| \gtrsim 0.17$ prior to the major eruptive flares. In addition, we notice that the preflare magnitude of $|H_J|/|H_V|$ appears unrelated to the intensity of the eruptive flares.

In the statistical survey of the magnetic helicity injection in (345) 48 (non-) X-class flare productive ARs by LaBonte et al. (2007), H_V was approximated by the accumulated photospheric helicity flux during specified observing intervals. From their Figure 8, a significant spread of H_V is noticeable for a given AR magnetic flux, and the corresponding AR may not necessarily produce an X-flare. Since literally all X-class flares are eruptive (e.g., Yashiro et al. 2006), this finding is equivalent to the argument that the normalized helicity, H_V/ϕ^2 , is not indicative for eruptivity. In our work, we find values for \bar{H}_V/ϕ^2 for noneruptive AR 12192 in the same range as those of eruptive AR 12673 (Moraitis et al. 2019). Thus, in line with the statistical work of LaBonte et al. (2007), we suggest that \bar{H}_V/ϕ^2 does not serve as a discriminant factor for the eruptive potential of a solar AR.

For completeness, we note distinct local maxima in the time profile of \bar{E}_F/E prior to eruptive flare occurrences in AR 11158, though small compared to the corresponding variations for AR 12192, and with much less pronounced differences than for the respective time profiles of $|\bar{H}_J|/|\bar{H}_V|$. Therefore, we agree with earlier works (e.g., Pariat et al. 2017; Moraitis et al. 2019) that though E_F (and thus E_F/E) is tightly linked to the potential eruptivity of an AR, it does not represent a sufficient condition for an eruption to occur.

Last, we note that all of the analyzed extensive quantities (and possibly also the intensive ones) may depend, in general, on the extension of the analyzed volume and the spatial resolution of the vector magnetogram data. In the present work, for convenience, we binned the photospheric vector magnetic field data by a factor of four, prior to magnetic field modeling and subsequent magnetic helicity computation. A first attempt to quantify corresponding differences has been presented by DeRosa et al. (2015), who applied different existing NLFF modeling techniques to a sequence of vector magnetograms with different spatial resolutions, constructed from polarimetric inversion of polarization spectra that were binned by factors ranging from 2 to 16. Their results suggested that, even given a sufficient fulfillment of the solenoidal property, the magnetic helicity computed from the model magnetic fields of different spatial resolution (using the method of Valori et al. 2012), for a given NLFF method, may vary substantially.

We expect further substantiation and clarification of the aspects discussed above from anticipated future studies, based

on the analysis of the helicity budgets of a large number of solar ARs, that will correspondingly allow more robust statements.

We thank the anonymous referee for careful consideration of this manuscript and helpful comments. J.K.T. was supported by the Austrian Science Fund (FWF): P31413-N27. E.P., K.M., and L.L. acknowledge support of the French Agence Nationale pour la Recherche through the HELISOL project ANR-15-CE31-0001. G.V. acknowledges support of the Leverhulme Trust Research Project grant 2014-051. K.D. gratefully acknowledges the support of the french Centre National d'Études Spatiales. *SDO* data are courtesy of the NASA/*SDO* AIA and HMI science teams. This article profited from discussions during the meetings of the ISSI International Team Magnetic Helicity in Astrophysical Plasmas.

ORCID iDs

Julia K. Thalmann  <https://orcid.org/0000-0001-8985-2549>

E. Pariat  <https://orcid.org/0000-0002-2900-0608>

G. Valori  <https://orcid.org/0000-0001-7809-0067>

K. Dalmasse  <https://orcid.org/0000-0001-8929-4006>

References

- Berger, M. A. 1984, *GApFD*, **30**, 79
 Berger, M. A. 1999, *PPCF*, **41**, B167
 Berger, M. A., & Field, G. B. 1984, *JFM*, **147**, 133
 Bobra, M. G., Sun, X., Hoeksema, J. T., et al. 2014, *SoPh*, **289**, 3549
 DeRosa, M. L., Wheatland, M. S., Leka, K. D., et al. 2015, *ApJ*, **811**, 107
 Finn, J., & Antonsen, T. J. 1984, *CoPPC*, **9**, 111
 Gary, G. A., & Hagyard, M. J. 1990, *SoPh*, **126**, 21
 Hoeksema, J. T., Liu, Y., Hayashi, K., et al. 2014, *SoPh*, **289**, 3483
 Inoue, S., Hayashi, K., & Kusano, K. 2016, *ApJ*, **818**, 168
 Inoue, S., Hayashi, K., Shiota, D., Magara, T., & Choe, G. S. 2013, *ApJ*, **770**, 79
 James, A. W., Valori, G., Green, L. M., et al. 2018, *ApJL*, **855**, L16
 Jing, J., Park, S.-H., Liu, C., et al. 2012, *ApJL*, **752**, L9
 Jing, J., Xu, Y., Lee, J., et al. 2015, *RAA*, **15**, 1537
 LaBonte, B. J., Georgoulis, M. K., & Rust, D. M. 2007, *ApJ*, **671**, 955
 Linan, L., Pariat, É., Moraitis, K., Valori, G., & Leake, J. 2018, *ApJ*, **865**, 52
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Antiochos, S. K. 2014, *ApJ*, **787**, 46
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Török, T. 2013, *ApJ*, **778**, 99
 Moraitis, K., Sun, X., Pariat, E., & Linan, L. 2019, *A&A*, **628**, A50
 Moraitis, K., Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Archontis, V. 2014, *SoPh*, **289**, 4453
 Pariat, E., Leake, J. E., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, **601**, A125
 Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Dalmasse, K. 2015, *A&A*, **580**, A128
 Pesnell, W. D., Thompson, B. J., & Chamberlin, P. C. 2012, *SoPh*, **275**, 3
 Phillips, A. D., MacNeice, P. J., & Antiochos, S. K. 2005, *ApJL*, **624**, L129
 Schou, J., Scherrer, P. H., Bush, R. I., et al. 2012, *SoPh*, **275**, 229
 Schrijver, C. J., De Rosa, M. L., Metcalf, T. R., et al. 2006, *SoPh*, **235**, 161
 Sun, X., Bobra, M. G., Hoeksema, J. T., et al. 2015, *ApJL*, **804**, L28
 Sun, X., Hoeksema, J. T., Liu, Y., et al. 2012, *ApJ*, **748**, 77
 Thalmann, J. K., Inhester, B., & Wiegmann, T. 2011, *SoPh*, **272**, 243
 Thalmann, J. K., Linan, L., Pariat, E., & Valori, G. 2019, *ApJL*, **880**, L6
 Toriumi, S., Schrijver, C. J., Harra, L. K., Hudson, H., & Nagashima, K. 2017, *ApJ*, **834**, 56
 Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Liu, Y. 2013, *ApJ*, **772**, 115
 Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, E. 2012, *SoPh*, **278**, 347
 Valori, G., Démoulin, P., Pariat, E., & Masson, S. 2013, *A&A*, **553**, A38
 Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016, *SSRv*, **201**, 147
 Wheatland, M. S., Sturrock, P. A., & Roumeliotis, G. 2000, *ApJ*, **540**, 1150
 Wiegmann, T., & Inhester, B. 2010, *A&A*, **516**, A107
 Yashiro, S., Akiyama, S., Gopalswamy, N., & Howard, R. A. 2006, *ApJL*, **650**, L143
 Zuccarello, F. P., Pariat, E., Valori, G., & Linan, L. 2018, *ApJ*, **863**, 41

Chapitre 5

Évolution, transfert et variation d'hélicités

Sommaire

5.1 Propriétés des hélicités relative, non potentielle et mêlée : état de l'art	178
5.2 Variations temporelles des hélicités mêlée et non potentielle . . .	179
5.2.1 Approche analytique	179
5.2.1.1 Formulations des variations temporelles	179
5.2.1.2 Impact du choix de jauge	182
5.2.1.3 Time variations of the non-potential and volume-threading magnetic helicities : Linan, Pariat, Moraitis, Valori, & Leake (2018)	184
5.2.2 Transfert et flux d'hélicités	186
5.2.2.1 Méthode numérique de calcul des variations temporelles	186
5.2.2.2 Exemple d'analyse	187
5.2.2.3 Injection et éjection d'hélicités magnétiques	189
5.2.2.4 Transfert d'hélicités	191
5.2.3 Perspectives	193
5.3 Étude croisée des flux d'hélicités et d'énergies	214
5.3.1 Variation temporelle des énergies	215
5.3.2 Energy and helicity fluxes in line-tied eruptive simulations : Linan, Pariat, Aulanier, Moraitis, & Valori (2020)	217
5.3.3 Perspectives	218

Dans le chapitre précédent, j'ai décrit en quoi le rapport de l'hélicité magnétique non potentielle sur l'hélicité magnétique relative, c.-à-d. $\eta_H = H_j/H_r$ (cf. Eq. 4.1), est une quantité prometteuse pour la prédiction des éruptions solaires. En particulier, dans les régions actives étudiées, ce ratio présente des maximums locaux juste avant les éruptions solaires (cf. Sect. 4.3.2). Cela suggère l'existence d'un seuil au-delà duquel l'éruption se déclenche. Ainsi cette grandeur fournit plus d'informations sur l'éruptivité d'un système magnétique que l'hélicité relative seule (cf. Sect. 4.1.1). Nous avons également noté que le critère d'éruptivité η_H est particulièrement adapté à l'étude d'un tube de flux magnétique torsadé confiné par un champ potentiel (cf. Sect. 4.2.2). Cette configuration est à la base du déclenchement de l'instabilité de Torus qui est l'un des processus physiques phares pour décrire la perte d'équilibre d'un système magnétique (cf. Sect. 1.3.2.2). Néanmoins, aucune preuve analytique n'existe entre le rapport

d'hélicité et le déclenchement d'une instabilité. Une telle théorie, si elle existe, nécessite en amont, une connaissance accrue des propriétés des différents types d'hélicités magnétiques.

Dans ce chapitre, je commencerai par une rapide présentation des questions que je me suis posées sur les propriétés des hélicités non potentielle et mêlée (cf. Sect. 5.1). J'introduirai ensuite mon étude analytique et numérique des variations temporelles de ces hélicités (cf. Sect. 5.2). Pour finir, nous verrons que la dynamique des flux des hélicités non potentielle et mêlée présente un certain nombre de différences et de similitudes avec les flux des énergies potentielle et libre (cf. Sect. 5.3).

5.1 Propriétés des hélicités relative, non potentielle et mêlée : état de l'art

Initialement, l'intérêt du critère d'éruptivité η_H (cf. Eq. 4.1) fut mis en évidence par [Pariat et al. \(2017\)](#) qui ont montré que cette quantité permet de distinguer les simulations stables et les simulations éruptives (cf. Sect. 4.2.1). [Pariat et al. \(2017\)](#) n'apportent cependant aucune justification précise sur les raisons du comportement singulier du critère d'éruptivité. La raison est simple, les propriétés des hélicités qui le composent (cf. Sect. 3.1.4), c.-à-d. l'hélicité non potentielle, H_j (cf. Eq. 3.18), et l'hélicité mêlée, H_{pj} (cf. Eq. 3.18), sont encore très méconnues. La seule étude notoire sur la dynamique de H_j et H_{pj} remonte à [Moraitis et al. \(2014\)](#). Jusqu'à présent, l'ensemble des travaux basés sur les méthodes de mesure présentées section (3.3) s'intéressait directement à leur somme, c.-à-d. à l'hélicité magnétique relative ($H_r = H_j + H_{pj}$, Eq. 3.17), sans déterminer comment cette dernière se répartit entre l'hélicité non potentielle et l'hélicité mêlée. En particulier, rien n'avait encore été fait pour véritablement comprendre pourquoi η_H a cette dynamique particulière. Finalement, l'hélicité non potentielle, H_j , et l'hélicité mêlée, H_{pj} , faisaient juste partie d'une décomposition de l'hélicité relative ([Berger 2003](#)), dont l'intérêt n'avait jusqu'à présent jamais été véritablement étudié (cf. Sect. 3.1.4).

Les hélicités mêlée et non potentielle étaient tellement méconnues qu'il a fallu dès le début de ma thèse leur trouver un nom. Leurs noms furent initialement proposés en anglais : "volume-threading magnetic helicity" pour H_{pj} et "non-potential helicity" pour H_j . La traduction française de "volume-threading helicity" en hélicité mêlée n'a été proposée que quelque temps seulement avant la rédaction ce manuscrit. Leur nom fait encore l'objet de débats puisque les hélicités relative et mêlée peuvent aussi être qualifiées de "non potentielle". En effet, elles dépendent également du champ magnétique porteur de courants électriques, \mathbf{B}_j (cf. Eq. 3.18). La notation "hélicité mêlée" et "hélicité non potentielle" permet cependant de les distinguer des hélicités mixte et mutuelle avec lesquelles elles sont souvent confondues (cf. Sect. 1.4.3).

Quoi qu'il en soit, avant ma thèse nous ne savions quasiment rien de la dynamique des hélicités mêlée et non potentielle. Une grande partie de ma thèse consista donc à remédier à cela en apportant pour la première fois des analyses numériques, analytiques et observationnelles dédiées à l'évolution de ces deux grandeurs. Parmi les différentes problématiques auxquelles j'ai tenté de répondre, les principales sont les suivantes :

- Comment évoluent ces quantités ?
- Sont-elles des grandeurs conservées en MHD idéale comme c'est le cas pour l'hélicité magnétique relative ?
- Leur évolution est-elle dominée par des processus surfaciques ou volumiques (tels que la dissipation) ?
- Comment ces deux quantités interagissent entre elles ?
- Quelle hélicité domine l'évolution de l'hélicité magnétique relative ? Par exemple, est-ce que l'une des deux composantes (non potentielle et mêlée) domine systématiquement le

flux d'hélicité relative ? Est-ce seulement lors de certains processus spécifiques (e.g. lors des éruptions) ?

La première idée est de suivre les évolutions temporelles des hélicités non potentielle et mêlée en les calculant par intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1) à partir de leur définition volumique (cf. Eq. 3.18) comme cela était fait pour l'hélicité magnétique relative jusqu'à présent. À cela, j'ai ajouté de nouveaux outils d'analyses de leurs dynamiques nécessitant le calcul de leurs variations temporelles (cf. Sect 5.2.1.2). J'ai ainsi pu extraire de nombreux résultats notamment sur les échanges entre ces deux quantités (cf. Sect. 5.2.2.4) me permettant d'expliquer en partie l'évolution du critère d'éruptivité η_H .

5.2 Variations temporelles des hélicités mêlée et non potentielle

Mon travail sur les propriétés des hélicités non potentielle et mêlée a d'abord été analytique (cf. Sect. 5.2.1). J'ai en particulier obtenu l'expression de leurs variations temporelles valable aussi bien en MHD idéale qu'en MHD résistive.

Une fois le formalisme posé, je m'en suis servi pour suivre la dynamique des hélicités non potentielle et mêlée dans diverses simulations numériques (cf. Sect. 5.2.1.1). J'ai ainsi pu obtenir un ensemble de résultats qui ouvrent de nouvelles perspectives afin de mieux appréhender l'évolution des hélicités non potentielle et mêlée dans la couronne solaire (cf. Sect. 5.2.1.3).

5.2.1 Approche analytique

L'hélicité magnétique est une grandeur particulièrement intéressante puisqu'elle est conservée en MHD idéale (cf. Sect. 3.2.1). En effet, en l'absence de dissipation et sous une certaine jauge, sa variation temporelle, dH_r/dt peut s'écrire comme la somme de termes purement surfaciques (cf. Eq. 3.28). Grâce à cette propriété et en utilisant des données observationnelles provenant de la photosphère uniquement, l'accumulation de l'hélicité relative dans la couronne solaire a pu être mesurée (cf. Sect. 4.1.1 et [Nindos et al. 2003](#); [Pariat et al. 2005](#); [Liu & Schuck 2012](#); [LaBonte et al. 2007](#); [Bi et al. 2018](#)). En MHD non idéale, l'expression analytique sa variation temporelle est également connue et a permis de quantifier dans des simulations numériques l'influence de la dissipation sur l'évolution de l'hélicité relative ([Pariat et al. 2015](#), cf. Sect. 3.2.2.2). L'équation (3.26) est donc un outil clé pour comprendre la dynamique et les propriétés de l'hélicité magnétique relative. Il est donc particulièrement pertinent d'établir le même type de décomposition pour les variations temporelles de l'hélicité mêlée, H_{pj} , et de l'hélicité non potentielle, H_j , si l'on veut être en mesure d'expliquer leurs dynamiques.

Dans cette section, je présenterai une formulation analytique des variations temporelles de H_j et H_{pj} (cf. Sect. 5.2.1.1) ainsi que l'impact du choix de jauge sur ces dernières (cf. Sect. 5.2.1.2). L'étude analytique de ces variations est au cœur de mon article ([Linan et al. 2018](#)) dont les résultats sont résumés dans la sous-section (5.2.1.3).

5.2.1.1 Formulations des variations temporelles

Pour obtenir les variations temporelles des hélicités non potentielle et mêlée, c.-à-d. dH_j/dt et dH_{pj}/dt , j'ai suivi des étapes similaires à celles utilisées par [Pariat et al. \(2015\)](#) pour obtenir l'expression analytique de dH_r/dt . En effet, [Pariat et al. \(2015\)](#) ont montré que leur décomposition de dH_r/dt était particulièrement pertinente et utile pour quantifier la conservation de l'hélicité relative (cf. Sect. 3.2.2.2). Mon objectif était donc de proposer une expression

analytique de dH_j/dt et dH_{pj}/dt qui puisse également être utiliser facilement pour l'étude la conservation des hélicités non potentielle et mêlée.

J'ai également cherché à exprimer les variations temporelles en la somme d'un maximum de contributions surfaciques. En effet, si les variations temporelles de H_j et H_{pj} s'expriment uniquement comme la somme de termes surfaciques, cela signifie que l'hélicité non potentielle et l'hélicité mêlée sont des quantités conservées dans le modèle MHD utilisé pour obtenir ces variations.

Dans [Linan et al. \(2018\)](#), j'ai montré comment obtenir uniquement la décomposition dH_j/dt . Les différentes étapes permettant d'accéder à la décomposition de la variation temporelle de l'hélicité mêlée n'ont pas été détaillées dans [Linan et al. \(2018\)](#), mais elles sont présentées ci-dessous.

Dans un volume fixé, V , la variation temporelle de l'hélicité mêlée s'écrit :

$$\frac{dH_{pj}}{dt} = 2 \int_V \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV + 2 \int_V \mathbf{A}_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV. \quad (5.1)$$

À ce stade, il existe plusieurs façons d'entamer les développements et les simplifications. L'idée cependant est de faire apparaître le plus possible des termes surfaciques. Pour cela, j'ai utilisé le théorème de flux-divergence sur la première intégrale surfacique :

$$\frac{dH_{pj}}{dt} = 2 \int_V \mathbf{A}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV + \int_V (2\mathbf{A} - 4\mathbf{A}_p) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV + 2 \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.2)$$

En utilisant le potentiel scalaire ϕ du champ potentiel \mathbf{B}_p , ainsi que le théorème de flux divergence, le second terme du membre de droite de l'équation (5.2) se décompose en :

$$\int_V (2\mathbf{A} - 4\mathbf{A}_p) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV = 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) dV - 2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.3)$$

Pour traiter l'autre intégrale volumique de l'équation (5.2), j'ai utilisé la loi de Faraday : $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$. Ici, l'expression du champ électrique dépend du choix sur le modèle MHD considéré. Pour pouvoir quantifier une éventuelle dissipation de l'hélicité mêlée liée à des processus non idéaux tels que la reconnexion magnétique, on se placera dans la suite en MHD résistive avec $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \nabla \times \mathbf{B}$ (cf. Append. A.1). Dans ce cas particulier (voir [Linan et al. 2018](#), pour le cas général), le premier terme volumique de l'équation (5.2) peut s'écrire :

$$2 \int_V \mathbf{A}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV = 2 \int_V (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{A}_p dV + 2 \int_V (\eta \Delta \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}_p dV. \quad (5.4)$$

Le deuxième terme de droite peut se développer en utilisant le théorème de Gauss tel que :

$$2 \int_V (\eta \Delta \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}_p dV = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV - 2 \int_S \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.5)$$

De même le premier terme du membre de droite de l'équation (5.4) devient :

$$2 \int_V (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{A}_p dV = 2 \int_V ((\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p) dV - 2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.6)$$

En regroupant l'ensemble de ces termes, la variation temporelle de l'hélicité mutuelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dH_{pj}}{dt} &= \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Bp, var}} + \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Transf}} + F_{Vn, Ap} + F_{Bn, Ap} \\ &+ F_{Aj, Ap} + F_{\phi, Ap} + F_{\text{Non-ideal, Aj}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec la notation :

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p \, dV \quad (5.8)$$

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Transf}} = 2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p \, dV \quad (5.9)$$

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Bp, var}} = 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) \, dV \quad (5.10)$$

$$F_{Vn, Ap} = -2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.11)$$

$$F_{Bn, Ap} = 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.12)$$

$$F_{Aj, Ap} = 2 \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S} \quad (5.13)$$

$$F_{\phi, Ap} = -2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.14)$$

$$F_{\text{Non-ideal, Ap}} = -2 \int_S \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S} \quad (5.15)$$

C'est la première fois qu'une telle décomposition est obtenue pour la variation temporelle de l'hélicité magnétique mêlée. D'autres manières de développer les termes intermédiaires ont été envisagées, mais elles conduisaient à une expression finale de dH_{pj}/dt plus compliquée ou moins pertinente. Notons également qu'il reste des intégrales volumiques qui ne peuvent pas être réduites en des contributions surfaciques uniquement.

De la même manière, j'ai établi la variation temporelle de l'hélicité non potentielle ([Linan et al. 2018](#)) :

$$\begin{aligned} \frac{dH_j}{dt} &= \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Bp, var}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} + F_{Vn, Aj} + F_{Bn, Aj} \\ &+ F_{Aj, Aj} + F_{\phi, Aj} + F_{\text{Non-ideal, Aj}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

avec

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_j \, dV \quad (5.17)$$

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} = -2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p \, dV \quad (5.18)$$

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Bp, var}} = 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_j \, dV \quad (5.19)$$

$$F_{Vn, Aj} = -2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.20)$$

$$F_{Bn, A_j} = 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{B} \cdot dS \quad (5.21)$$

$$F_{A_j, A_j} = \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot dS \quad (5.22)$$

$$F_{\phi, A_j} = -2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot dS \quad (5.23)$$

$$F_{\text{Non-ideal}, A_j} = -2 \int_S \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_j \cdot dS \quad (5.24)$$

Là encore, c'est la première fois qu'une telle décomposition est obtenue pour la variation temporelle de l'hélicité non potentielle. Volontairement, les deux décompositions (cf. Eqs. 5.7 et 5.16), se ressemblent et sont également semblables à celle obtenue pour l'hélicité magnétique relative (cf. Eq. 3.26). Cela permet de facilement vérifier analytiquement la relation :

$$\frac{dH_r}{dt} = \frac{dH_{pj}}{dt} + \frac{dH_j}{dt}. \quad (5.25)$$

Comme mentionné précédemment, avoir partitionné dH_j/dt et dH_{pj}/dt de la sorte permet de faire ressortir l'influence de différents processus physiques sur l'évolution des hélicités. On remarque ainsi que la dynamique de H_j et celle de H_{pj} sont directement reliées aux mouvements locaux du plasma photosphérique (de par les termes F_{Bn} et F_{Vn}), aux variations du champ magnétique potentiel (de par le terme F_{ϕ}), aux modifications structurelles du champ magnétique au sein du volume (de par les termes "Transf", "Bp", "var" et "Diss").

Il faut cependant être prudent sur le champ d'application de ces équations. Dans les simulations numériques (e.g. Linan et al. 2018, 2020), si le champ magnétique est connu dans tout le domaine (ainsi que la résistivité et le champ de vitesses), il est possible d'en déduire l'ensemble des vecteurs présents dans les équations (5.7) et (5.16) et donc de calculer les différentes intégrales (cf. Sect. 5.2.2.1).

Au contraire, à partir de données observationnelles, c.-à-d. le champ magnétique photosphérique (cf. Sect. 2.1), seuls les termes surfaciques peuvent être calculés. Les termes volumiques nécessitent une reconstruction 3D du champ magnétique dans le domaine d'étude (cf. Sect. 2.3). Pour l'hélicité magnétique relative, les termes volumiques dans la jauge de Coulomb pour \mathbf{A} sont nuls en MHD idéale. Pour les hélicités mêlée et non potentielle, la situation est différente. La MHD idéale permet également de supprimer les termes non idéaux tandis que la jauge de Coulomb pour \mathbf{A} et \mathbf{A}_p ¹ supprime les contributions de $dH_j/dt|_{\text{Bp, var}}$ et $dH_{pj}/dt|_{\text{Bp, var}}$. Malgré cela, il reste toujours un terme volumique qui ne dépend pas du choix de jauge et dont seul le signe change entre dH_j/dt et dH_{pj}/dt : le terme dit de transfert $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$. **J'ai donc montré analytiquement que contrairement à l'hélicité magnétique relative, l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle ne sont pas des grandeurs conservées en MHD idéale.** Leurs variations temporelles ne peuvent pas se réduire à la somme de contributions surfaciques. Il s'agit là d'un résultat majeur sur la dynamique des hélicités magnétiques H_j et H_{pj} .

5.2.1.2 Impact du choix de jauge

Dans l'expression analytique des variations temporelles des hélicités mêlée et non potentielle la majorité des intégrales dépendent de la jauge des potentiels vecteurs \mathbf{A}_j et \mathbf{A}_p . C'est le cas par exemple de toutes les contributions surfaciques (cf. Fig. 5.1). Par conséquent, ces termes ne sont pas invariants de jauge. Il est donc possible de choisir un jeu de jauge qui simplifie les

1. En pratique il est difficile de fixer ces deux conditions en même temps sans être dans le cas où $\mathbf{B} = \mathbf{B}_p$.

expressions analytiques. De même, une jauge spécifique peut être nécessaire afin de faciliter le calcul numérique des différents termes. Dans [Linan et al. \(2018\)](#), une sous-section est dédiée aux simplifications possibles. Néanmoins, les hélicités mêlée et non potentielle sont des grandeurs invariantes de jauge. Leurs variations temporelles, c.-à-d. les sommes de toutes les intégrales surfaciques et volumiques, doivent l'être aussi.

Lors du calcul des vecteurs potentiels, \mathbf{A}_j et \mathbf{A}_p , par la méthode de [Valori et al. \(2012\)](#) que j'utilisais, différents choix de jauge sont possibles (cf. Sect. 3.3.1.3). En fonction du choix que je fais pour \mathbf{A}_j et \mathbf{A}_p , je peux donc calculer les variations temporelles dans différentes jauges (cf. Sect. 3.3.1.3). J'ai donc pu tester dans plusieurs simulations numériques l'influence du choix jauge sur l'intensité des variations temporelles, dH_j/dt et dH_{pj}/dt . Dans la figure (5.1), je présente en particulier dH_j/dt calculé avec les conditions :

- $\mathbf{A}(z_2) = \mathbf{A}_p(z_2)$ (notée " DeVore top ");
- $\mathbf{A}(z_2) = \mathbf{A}_p(z_2)$ et $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$ (notée " DeVore-Coulomb top ");
- $\mathbf{A}(z_1) = \mathbf{A}_p(z_1)$ et $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$ (notée " DeVore-Coulomb bot ");
- $\mathbf{A}(z_2) \neq \mathbf{A}_p(z_2)$ et $\mathbf{A}(z_1) \neq \mathbf{A}_p(z_1)$ (notée " DeVore bot "),

avec z_1 l'altitude de la frontière inférieure du domaine, et z_2 celle de la frontière supérieure. Je suis arrivé à la conclusion que ces intensités ne varient que très peu d'une jauge à l'autre et que donc dH_j/dt et dH_{pj}/dt exprimés de la sorte sont bien invariantes de jauge.

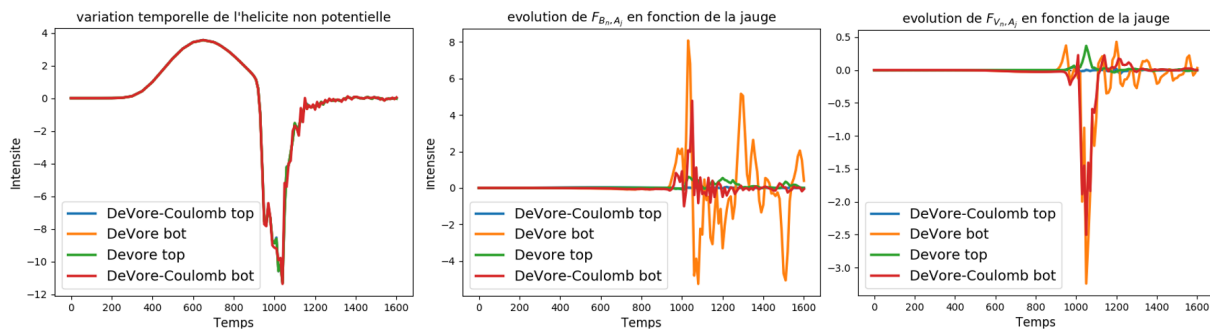


FIGURE 5.1 – Impact du choix de jauge sur l'évolution de la variation temporelle dH_j/dt ainsi que deux intégrales qui la composent. Les courbes sont obtenues à l'aide des données de la simulation d'un jet coronal ([Pariat et al. 2009](#)) et représentent des choix de jauges différents. **Gauche** : évolution de dH_j/dt (cf. Eq. 5.16). **Milieu** : intensité du terme $F_{Bn,Aj}$ (cf. Eq. 5.21). **Droite** : intensité du terme $F_{Vn,Aj}$ (cf. Eq. 5.20).

Pour autant, les intensités des intégrales surfaciques calculées indépendamment varient fortement selon la jauge. Il ne fait donc pas sens d'étudier leurs évolutions temporelles. Une autre jauge donnerait une évolution complètement différente (cf. Fig 5.1). Il est alors plus pertinent de regrouper les termes qui dépendent de la jauge pour en créer de nouveaux qui eux sont invariants de jauge. J'ai donc introduit analytiquement de nouvelles quantités telles que :

$$\frac{dH_j}{dt} = \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Own}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} \quad (5.26)$$

$$\frac{dH_{pj}}{dt} = \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Own}} + \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} - \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} \quad (5.27)$$

avec

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV \quad (5.28)$$

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Own}} = \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Bp, var}} + F_{\text{Non-ideal, Ap}} + F_{Vn, Ap} + F_{Bn, Ap} + F_{Aj, Ap} + F_{\phi, Ap} \quad (5.29)$$

Ici le terme de dissipation, $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$, le terme de transfert, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ et le terme d'injection "Own", $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$, sont invariants de jauge. L'étude de leurs intensités et de leurs évolutions ne dépend donc pas de la jauge utilisée.

De même, la variation temporelle de l'hélicité non potentielle se décompose en trois termes invariants de jauge :

$$\frac{dH_j}{dt} = \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Own}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}}. \quad (5.30)$$

avec

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Own}} = \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Bp, var}} + F_{\text{Non-ideal, Aj}} + F_{\phi, Aj} + F_{Vn, Aj} + F_{Bn, Aj} + F_{Aj, Aj} \quad (5.31)$$

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_j dV. \quad (5.32)$$

Sous ces formes, on retrouve un terme résistif lié à la dissipation du champ magnétique dans le volume. Ce terme est nul en MHD idéale puisque la résistivité est supposée égale à zéro. Les décompositions (5.29) et (5.31) sont également composées de termes d'injection "Own" qui dépendent principalement des échanges entre le domaine d'étude et l'environnement extérieur. Puisque les contributions volumiques, $dH_{pj}/dt|_{\text{Bp, var}}$ et $dH_j/dt|_{\text{Bp, var}}$ s'annulent dans la jauge de Coulomb pour \mathbf{A}_j et \mathbf{A}_p , les termes d'injection "Own" correspondent dans cette jauge précise, aux flux d'hélicités à travers les frontières. Les décompositions en termes invariants de jauge de dH_j/dt et dH_{pj}/dt sont également composées de la contribution volumique dit de transfert dont seul le signe change entre les deux décompositions (puisque $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}} = -dH_j/dt|_{\text{Transf}}$). Cette contribution, mise en évidence pour la première fois dans [Linan et al. \(2018\)](#), est particulièrement intéressante, car elle traduit la transformation d'une forme d'hélicité à l'autre, sans modifier la quantité globale d'hélicité magnétique relative dans le domaine. Le terme de transfert peut être vu comme une analogie en termes d'hélicité de l'effet joule qui permet la conversion de l'énergie électrique en énergie thermique sans impacter le bilan global d'énergie.

5.2.1.3 Time variations of the non-potential and volume-threading magnetic helicities : [Linan, Pariat, Moraitis, Valori, & Leake \(2018\)](#)

Dans [Linan et al. \(2018\)](#), j'ai pour la première fois établi un formalisme analytique pour la variation temporelle de l'hélicité mêlée ainsi que pour celle de l'hélicité non potentielle. Les expressions trouvées sont générales dans le sens où elles ne dépendent pas des jauges des potentiels vecteurs utilisés ni du choix du modèle MHD voulu. Les équations sont particulièrement pertinentes dans le cas de la MHD résistive qui est le paradigme souvent employé dans les simulations numériques d'éruptions solaires (cf. Sect. 5.2.1). En parallèle de l'approche analytique, j'ai développé un code numérique permettant de calculer l'ensemble des termes présentés ci-dessus (cf. Sect. 5.2.2.1). Ce code fonctionne pour diverses simulations numériques ayant des

tailles différentes, des discrétisations différentes, etc.

Dans Linan et al. (2018), trois simulations MHD ont été utilisées pour vérifier numériquement la justesse des équations, et cela dans plusieurs jauges différentes. Les écarts observés entre la théorie et l'approche numérique sont liés à la qualité des simulations et aux approximations de ma méthode de calcul. Pour des résultats les plus pertinents possible, il faut donc opter pour des simulations numériques avec une cadence spatiale et une cadence temporelle suffisamment petites. Cela permet de réduire l'impact de la discrétisation des données sur le calcul des hélicités d'une part, et sur le calcul des intégrales surfaciques et volumiques d'autre part (Valori et al. 2016; Linan et al. 2018; Thalmann et al. 2019a; Linan et al. 2020).

Le calcul analytique des variations temporelles de l'hélicité mêlée et de l'hélicité non potentielle était une étape indispensable pour mieux comprendre les propriétés de ces deux types d'hélicités. Au regard des équations mis en évidence, j'ai montré que **l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle ne sont pas des grandeurs conservées même en MHD idéale**. En effet, leurs variations temporelles dépendent d'un terme volumique (le terme de transfert, Eqs. 5.18 et 5.9) qui à priori n'est pas nul. Dans la suite (cf. Sect. 5.2.2), nous verrons que ce terme, en plus d'être non négligeable, joue un rôle crucial dans l'évolution des hélicités mêlée et non potentielle.

La non-conservation des hélicités non potentielle et mêlée pose également un problème pour leurs mesures dans l'atmosphère solaire. Nous avons vu dans la section (3.3.2) que puisque l'hélicité magnétique relative est conservée, l'intégration de son flux photosphérique fournit une bonne approximation de sa valeur dans la couronne solaire. Au contraire, pour les hélicités non potentielle et mêlée, l'intégration de leurs flux photosphériques ne donne aucune information sur leurs valeurs. En effet, sans être injectées ou éjectées dans l'atmosphère solaire, H_j et H_{pj} , peuvent diminuer ou augmenter à cause du transfert d'une hélicité à l'autre, traduisant des changements 3D de la morphologie du champ magnétique dans le volume.

Puisqu'il est impossible d'utiliser la méthode d'intégration des flux (cf. Sect. 3.3.2), l'estimation de H_j et celle de H_{pj} dans l'atmosphère solaire doivent se faire de manières différentes. D'après la section (3.3), deux choix s'offrent à nous. La première approche consiste à les calculer en utilisant leurs définitions classiques (cf. Eq. 3.18). Il s'agit de la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1). L'autre possibilité est d'utiliser leurs formulations par ligne de champ magnétique (cf. Sect. 3.3.3). Néanmoins, ces deux méthodes nécessitent la connaissance exacte de la distribution 3D du champ magnétique dans l'ensemble de la région active. Comme il est impossible de mesurer directement le champ magnétique coronal (cf. Chap. 2), **l'estimation des hélicités non potentielle et mêlée doit nécessairement passer par une reconstruction du champ magnétique coronal**. Les reconstructions reposent sur les méthodes d'extrapolation du champ magnétique sans force non linéaire (cf. Sect. 2.3). Une fois le champ magnétique reconstruit, les différentes hélicités peuvent être alors estimées par intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1).

Cependant, ces méthodes sont particulièrement dures à mettre en place dans la mesure où l'estimation des hélicités est fortement impactée par la qualité de l'extrapolation telle que la présence d'un degré fini de divergence du champ magnétique (Valori et al. 2012, 2016; Thalmann et al. 2019a). C'est pour cette raison que très peu d'études des hélicités mêlée et non potentielle au niveau de régions actives ont été faites jusqu'à présent (cf. Sects. 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.3, Thalmann et al. 2019a,b; Moraitis et al. 2019b).

Dans Linan et al. (2018), j'ai également montré que la majorité des termes intervenants dans les calculs des flux d'hélicités dépendent de la jauge. Et par conséquent, ils ne peuvent pas être étudiés tels quels. Dans ce sens, j'ai donc regroupé les différentes intégrales pour créer de nouvelles quantités invariantes de jauge (cf. Sect. 5.2.1.2). Les variations temporelles s'écrivent donc comme la somme d'un terme "Own" lié à l'injection à travers les frontières et de deux contributions volumiques composées d'un terme quantifiant la dissipation d'hélicité

et d'un terme relié aux échanges entre les deux hélicités. Cette décomposition en un terme de dissipation, de transfert et d'injection permet de mieux comprendre l'évolution des hélicités dans un volume fini. Un exemple de lecture de l'évolution de ces quantités est proposé dans la sous-section suivante (cf. Sect. 5.2.2.2). Notons que si les deux contributions volumiques sont négligeables face aux termes d'injection, alors le problème se ramène à l'étude de flux d'hélicités comme il est traditionnellement fait pour l'hélicité relative. Dans ce cas, la variation temporelle en MHD idéale s'écrit comme la somme de contributions surfaciques.

5.2.2 Transfert et flux d'hélicités

La décomposition en termes de grandeurs invariantes de jauge des variations temporelles de l'hélicité mêlée et de l'hélicité non potentielle apporte un nouvel outil pour expliquer la dynamique des différentes hélicités. Cette nouvelle expertise est au cœur de mes travaux menés dans Linan et al. (2018) et Linan et al. (2020).

Ci-dessous, j'introduirai tout d'abord la méthode numérique que j'ai développée pour calculer les variations temporelles à partir de données magnétiques issues de simulations MHD (cf. Sect. 5.2.2.1) ainsi qu'une application directe de cette méthode dans une simulation d'émergence d'un tube de flux torsadé (cf. Sect. 5.2.2.2).

Puis je présenterai les principales caractéristiques des flux d'hélicités (cf. Sect. 5.2.2.3) et du transfert d'hélicités (cf. Sect. 5.2.2.4) que j'ai mis en évidence à partir des données magnétiques issues de différentes simulations numériques.

5.2.2.1 Méthode numérique de calcul des variations temporelles

Durant ma thèse, j'ai développé une méthode numérique permettant, à partir d'un champ magnétique et d'un champ de vitesses connus dans l'ensemble du volume d'étude, d'estimer les quantités dH_x/dt , $dH_x/dt|_{Transf}$, $dH_x/dt|_{Own}$ et $dH_x/dt|_{Diss}$ (avec x qui correspond à j ou pj). La méthode présentée ci-après a été implémentée numériquement dans le langage de programmation Python. De plus, j'ai utilisé des fonctions de "multithreading" (Malakhov 2016) qui permettent le traitement sur un même processeur de plusieurs instants t en simultané. En fonction du nombre de "thread" (c.-à-d. du nombre d'instantanés traités simultanément), le gain de temps par rapport à un traitement à la chaîne est considérable. Toujours dans l'optique de gagner en performance et en temps de calcul, j'ai également développé des scripts en "shell" pour que l'exécution des différentes procédures se fasse sur les nœuds de calcul de l'Observatoire de Paris (cf. Sect. 2.3.1.2).

Les différentes étapes de la méthode sont les suivantes :

- Le champ magnétique potentiel est obtenu en résolvant l'équation de Poisson (3.46). La résolution se fait grâce au solveur de la librairie «Intel Mathematical Kernel Library».
- À partir des champs magnétiques, les potentiels vecteurs, \mathbf{A} et \mathbf{A}_p sont calculés en utilisant la méthode de Valori et al. (2012) basée sur l'utilisation de la jauge de DeVore ($\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_{pz} = 0$ le long de la surface du domaine) qui est décrite dans la section (3.3.1.3). Lors de cette étape, il est possible de fixer la jauge des deux potentiels vecteurs (cf. Sects. 3.3.1.3 et 5.2.1.2).
- Le champ magnétique porteur de courants électriques, \mathbf{B}_j est simplement obtenu par la différence entre le champ magnétique, \mathbf{B} , et le champ magnétique potentiel, \mathbf{B}_p , c.-à-d. $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$. Le vecteur potentiel, \mathbf{A}_j est également obtenu par la différence $\mathbf{A}_j = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p$.
- Chaque intégrale présente dans les équations (5.7) et (5.16), est ensuite rigoureusement calculée numériquement. Les dérivées spatiales et temporelles sont calculées à partir de la méthode des différences finies d'ordre 2 (Champagnat 2010). Les intégrales surfaciques

sont calculées comme la somme des contributions des six frontières du domaine. Cela permet de tenir compte de l'éjection d'hélicités à travers la frontière supérieure par exemple.

- Les variations $dH_x(t)/dt$ ainsi que les termes invariants de jauges, $dH_x(t)/dt|_{Transf}$, $dH_x(t)/dt|_{Own}$ et $dH_x(t)/dt|_{Diss}$ peuvent ensuite être estimés en sommant l'ensemble des intégrales qui les composent.
- Les étapes ci-dessus sont répétées à chaque instant t de la simulation étudiée.

J'ai présenté ici une façon de mesurer la variation temporelle des hélicités H_j et H_{pj} . Mais une autre possibilité consiste à les calculer en passant par l'écart entre l'hélicité prise entre deux instants successifs :

$$\frac{\Delta H_x(t)}{\Delta t} = \frac{H_x(t + \Delta t) - H_x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (5.33)$$

avec Δt l'intervalle entre deux instants. Cette deuxième façon de faire nécessite cependant de connaître les valeurs des hélicités non potentielle et mêlée qui peuvent être obtenues par intégration directe volumique par exemple (cf. Sect. 3.3.1).

En théorie, sauf erreurs dans les formulations analytiques, les deux manières de calculer les variations temporelles sont équivalentes. J'ai vérifié cette équivalence en mesurant l'évolution de l'écart entre $\Delta H_x(t)/\Delta t$ et $dH_x(t)/dt$ calculé à partir des données de trois simulations MHD différentes (cf. Figs. 4, 5 et 6 dans Linan et al. 2018). J'ai montré que cet écart est en moyenne très faible, ce qui confirme la justesse des décompositions analytiques proposées pour $dH_x(t)/dt$. Néanmoins, l'équivalence est, au même titre que la mesure des hélicités (cf. Sect. 2.4.2.2), sensible à la qualité des données. En particulier, l'intervalle de temps entre deux instants des simulations doit être suffisamment petit pour permettre un calcul précis des dérivées temporelles apparaissant dans divers termes (cf. Eqs. 5.7 et 5.16).

Le travail analytique étant confirmé, j'ai ainsi pu me servir du calcul des variations temporelles pour expliquer les évolutions des hélicités non potentielle et mêlée dans diverses simulations numériques MHD.

5.2.2.2 Exemple d'analyse

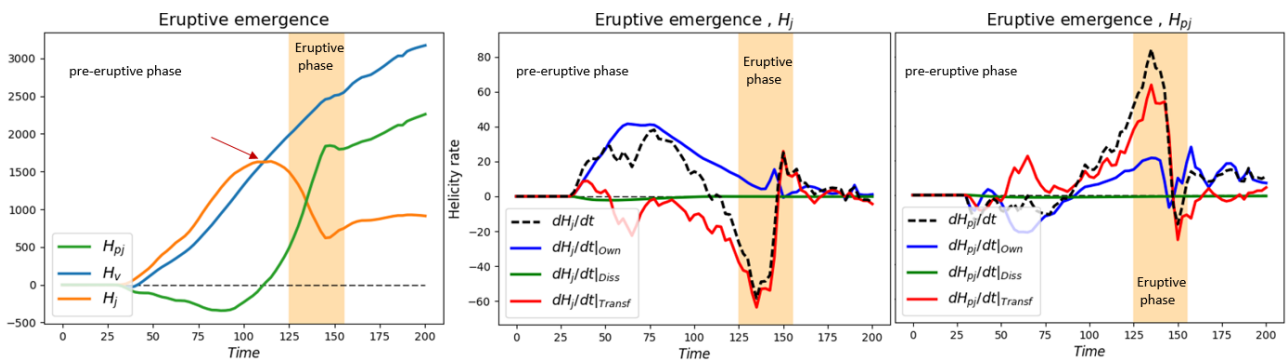


FIGURE 5.2 – **Gauche** : évolution des hélicités relative, H_v (cf. Eq. 3.9), non potentielle, H_j (cf. Eq. 3.18), mêlée, H_p (cf. Eq. 3.18). La flèche rouge indique une diminution de l'hélicité non potentielle qui a pour une origine un transfert de H_j vers H_{pj} . **Milieu** : évolution des termes de transfert, $dH_j/dt|_{Transf}$ (cf. Eq. 5.18), d'injection, $dH_j/dt|_{Own}$ (cf. Eq. 5.31) et de dissipation, $dH_j/dt|_{Diss}$ (cf. Eq. 5.32). **Droite** : évolution des termes de transfert, $-dH_j/dt|_{Transf}$ (cf. Eq. 5.18), d'injection, $dH_{pj}/dt|_{Own}$ (cf. Eq. 5.29) et de dissipation, $dH_{pj}/dt|_{Diss}$ (cf. Eq. 5.28). La bande jauge correspond à la phase éruptive.

Les principaux résultats de [Linan et al. \(2018\)](#) et [Linan et al. \(2020\)](#) sont obtenus en suivant l'évolution temporelle des termes invariants de jauges (cf. Eqs. 5.31 et 5.31) dans différentes simulations MHD. Un exemple de courbes, qui m'a servi à interpréter l'évolution des hélicités non potentielle et mêlée, est présenté figure (5.2).

Cette figure est obtenue à partir des données magnétiques d'une simulation numérique 3D modélisant l'émergence d'un tube de flux magnétique torsadé dans une atmosphère stratifiée suivie par son éruption ([Leake et al. 2013, 2014](#)). Le domaine d'étude est initialement composé d'un champ magnétique potentiel sous la forme d'arcades magnétiques dont l'orientation est telle que de la reconnexion magnétique entre le tube de flux émergeant et le champ magnétique potentiel est possible (cf. Fig. 2 dans [Linan et al. 2018](#)). Cette simulation est proche de celle analysée dans [Linan et al. \(2018\)](#). En effet, les deux simulations ont la même configuration magnétique avec pour seule différence l'intensité du champ magnétique des arcades, qui est initialement plus intense dans la simulation servant d'exemple dans ce manuscrit que dans celle étudiée dans [Linan et al. \(2018\)](#). La dynamique des énergies et des hélicités entre les deux simulations est globalement similaire ([Pariat et al. 2017](#)). De plus, cette simulation fait partie des différentes configurations étudiées par le groupe de travail sur l'hélicité magnétique dans lequel je suis membre et dont les résultats ne sont pas encore publiés (cf. Sect. 3.4.1.2).

L'évolution temporelle des hélicités relative, mêlée et non potentielle est représentée figure 5.2. Les hélicités ont été calculées à chaque instant en utilisant la méthode d'intégration directe volumique (cf. Sect. 3.3.1) basée sur les travaux de [Valori et al. \(2012\)](#). L'évolution des termes invariants de jauge (cf. Eqs. 5.29 et 5.31), est présentée figure (5.2). La figure du milieu (respectivement de droite) présente l'évolution du terme de dissipation en vert, $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ (resp. $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$), du terme de transfert en rouge, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ (resp. $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$), et le terme d'injection en bleu, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ (resp. $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$), intervenant dans la décomposition de la variation temporelle de l'hélicité non potentielle (resp. l'hélicité mêlée). Chaque terme est calculé à l'aide de méthode décrite dans la section précédente (cf. Sect. 5.2.2.1). La courbe noire représente la somme de ces termes. Notons ici que si le terme de transfert, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ est positif, alors une partie de l'hélicité mêlée est transformée en hélicité non potentielle sans modifier la quantité globale d'hélicité magnétique relative dans le volume. Par symétrie, $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$ est négatif dans ce cas. De même, quand le terme d'injection, e.g. $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$, est positif cela signifie que de l'hélicité est injectée dans le domaine. Au contraire, un terme d'injection négatif peut signifier, soit une éjection de l'hélicité associée hors du domaine, notamment par la frontière supérieure, soit une injection négative d'hélicité.

Voici certains résultats que permet l'étude des courbes des termes invariants de jauge :

- La dissipation de H_j et H_{pj} est complètement négligeable malgré la présence de reconnexion magnétique. Notons cependant que les termes de dissipation sont directement proportionnels à la résistivité. Fixer numériquement une résistivité plus élevée augmenterait ces termes (e.g. [Linan et al. 2020](#)). Comme expliqué dans la section précédente, une dissipation négligeable ne suffit pas pour conclure que l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle sont conservées. En effet, il faut aussi tenir compte de l'intensité du terme volumique de transfert qui lui n'est pas négligeable.
- Jusqu'à environ $t \approx 100$, l'hélicité relative du système augmente principalement, car de l'hélicité magnétique non potentielle est injectée dans le domaine. Les variations temporelles sont en effet dominées par le terme $dH_j/dt|_{\text{Own}}$.
- À partir de $t = 100$, l'hélicité non potentielle diminue non pas parce qu'elle est éjectée hors du domaine, mais parce qu'elle est transformée en hélicité mêlée. Ainsi de par la présence d'un important transfert, l'hélicité mêlée croît rapidement. Par définition du transfert d'hélicités, son changement d'intensité ou de dynamique n'impacte pas l'évolution de l'hélicité relative. Par conséquent, l'hélicité magnétique relative continue de croître à cause des flux résiduels positifs de H_j et H_{pj} (c.-à-d. $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ et $H_j/dt|_{\text{Own}}$).

- Vers le milieu de la phase éruptive, l'intensité du terme de transfert dH_j/dt_{Transf} diminue drastiquement avant de changer de signe et de rester proche de zéro jusqu'à la fin de la simulation. Cette brusque variation de l'intensité du transfert peut être le signe du changement de configuration magnétique du système au moment de l'éruption. On remarque également que le terme d'injection, dH_{pj}/dt_{Own} , de l'hélicité mêlée subit également une perte rapide d'intensité durant l'éruption. Même s'il reste globalement positif, on peut alors supposer que cette variation est due à l'éjection de la structure magnétique hors du volume. Quoi qu'il en soit, le changement d'évolution de l'hélicité mêlée et de l'hélicité non potentielle vers $t = 150$ s'explique principalement par le brusque changement de signe du terme de transfert. L'hélicité magnétique relative n'étant pas impacté par les échanges entre les deux composantes d'hélicité, elle ne présente pas de variation à $t = 150$.

Finalement, l'évolution des hélicités mêlée et non potentielle s'explique naturellement à l'aide des décompositions de leurs variations temporelles présentées équations (5.29) et (5.31). Il en ressort des constats qui ne sont pas toujours intuitifs. Par exemple, la décroissance de l'hélicité non potentielle observée à $t = 100$ n'est pas liée à une éjection à travers les frontières. J'ai donc montré que les décompositions en termes invariants de jauge fournissent un nouvel outil clé dans l'étude des propriétés des différentes hélicités (cf. Sect. 5.2.1.2). Ainsi Linan et al. (2018) et Linan et al. (2020) présentent le même type de figures que celles décrites ici et en tirent de nombreux résultats présentés dans les sections suivantes.

5.2.2.3 Injection et éjection d'hélicités magnétiques

J'ai suivi l'évolution des termes invariants de jauge, équation (5.29) et équation (5.31), dans diverses simulations numériques (e.g. Pariat et al. 2009; Leake et al. 2013, 2014; Zuccarello et al. 2015). Les simulations diffèrent entre autres par le mouvement des lignes de champ magnétique le long de la surface inférieure (assimilable à la photosphère). Dans les simulations de Leake et al. (2013, 2014), du champ magnétique émerge au niveau de la photosphère, tandis que dans les autres simulations les changements de configuration magnétique sont dus à des forçages photosphériques (e.g. Pariat et al. 2009). J'ai étudié en particulier les données magnétiques produites par quatre simulations MHD paramétriques d'éruptions solaires initialement présentées par Zuccarello et al. (2015). Seuls les mouvements appliqués au niveau photosphérique sont différents d'une simulation à l'autre (cf. Fig. 1 dans Linan et al. 2020). En fonction du forçage photosphérique utilisé, l'éruption a lieu plus ou moins rapidement, mais la dynamique des hélicités est la même dans les quatre configurations : l'hélicité mêlée décroît tout le long de la simulation, et l'hélicité non potentielle croît avant l'éruption et décroît après (cf. Fig. 2 dans Linan et al. 2020).

Puisque dans l'ensemble des simulations étudiées le mouvement photosphérique du champ magnétique est différent, l'injection d'hélicités mêlée et non potentielle dans le domaine d'étude devrait donc être également différente d'une simulation à l'autre. Cette injection peut être quantifiée à l'aide des termes "Own" présents dans les variations temporelles de H_j et H_{pj} (cf. Eqs. 5.31 et 5.29).

En comparant les simulations, le premier constat est que l'évolution des termes d'injection et leurs intensités varient en effet fortement d'une simulation à l'autre. Par exemple dans les simulations d'émergence de Leake et al. (2013, 2014), l'hélicité relative est injectée dans le domaine principalement sous la forme d'hélicité non potentielle, tandis que dans la simulation d'un jet coronal (Pariat et al. 2009), l'hélicité relative est entièrement injectée sous forme d'hélicité mêlée. De même, l'intensité des termes d'injection dans les simulations de Zuccarello et al. (2015) dépend fortement du forçage photosphérique (cf. Fig. 5 dans Linan et al. 2020). Ces différents comportements s'expliquent bien au cas par cas (Linan et al. 2018, 2020).

Lorsqu'il n'y a pas d'émergence du champ magnétique ni d'annulations du flux magnétique au niveau photosphérique, la distribution du champ magnétique normal à la surface est conservée. Par conséquent, le champ magnétique porteur de courants électriques n'est pas directement injecté dans le domaine, mais résulte plutôt de la torsion qui s'accumule à l'intérieur de celui-ci. Dans ce cas, l'injection d'hélicité non potentielle est quasi nulle (e.g. Fig 6 dans [Linan et al. 2018](#)). Au contraire lors de l'émergence d'un tube de flux porteur de courants électriques, l'hélicité non potentielle est injectée dans le domaine d'étude.

Dans [Linan et al. \(2020\)](#), à partir des simulations de [Zuccarello et al. \(2015\)](#), j'ai montré que la dispersion du champ magnétique à la périphérie d'une région active n'influe pas sur l'injection d'hélicité non potentielle. Cette dernière est reliée principalement aux cisaillements du champ magnétique et à l'annulation du flux magnétique le long de la ligne d'inversion entre les deux polarités. Ce sont par ailleurs ces mêmes processus physiques responsables de la transition d'un champ magnétique porteur de courants fortement cisailé et initialement présent dans la simulation vers un tube de flux torsadé (cf. Fig. 2 dans [Zuccarello et al. 2018](#)).

L'injection d'hélicité mêlée est, quant à elle, plus difficile à interpréter puisqu'elle dépend de contribution croisée entre le champ magnétique non potentiel et le champ magnétique potentiel. Ainsi même en présence uniquement de mouvements photosphériques de torsion, de l'hélicité mêlée peut être injectée dans le domaine. En fait, l'injection d'hélicité mêlée, que ce soit par son signe ou par son intensité, est très sensible aux mouvements imposés au niveau photosphérique ([Linan et al. 2020](#)). Elle peut être aussi bien liée à la dispersion du champ magnétique potentiel qu'au mouvement de cisaillement proche d'une ligne d'inversion (cf. Fig. 9 dans [Linan et al. 2020](#)). Dans [Linan et al. \(2018\)](#), j'ai également montré que l'émergence d'un tube de flux magnétique participe également à l'injection d'hélicité mêlée dans le volume. Puisque les contributions à l'injection d'hélicité mêlée sont multiples et que cette dernière peut être positive ou négative, il est à mon avis difficile de conclure sur l'évolution d'un système éruptif uniquement en regardant son injection en hélicité mêlée.

Dans les simulations de [Pariat et al. \(2009\)](#) et de [Leake et al. \(2014\)](#), l'éruption entraîne une éjection de la structure magnétique à travers la frontière supérieure du volume d'étude. À ce moment-là, de l'hélicité magnétique est alors également éjectée hors du domaine. L'étude des flux de H_j et H_{pj} a également révélé que l'hélicité relative est éjectée principalement sous la forme d'hélicité mêlée.

Pour finir, un des principaux résultats de [Linan et al. \(2018\)](#), qui a ensuite été confirmé par [Linan et al. \(2020\)](#), est que l'évolution des hélicités mêlée et non potentielle dans un volume fini n'est pas entièrement² explicable à l'aide de leurs flux à travers les frontières. En effet, les termes d'injection seuls ne permettent pas d'expliquer le comportement observé, tel qu'une décroissance brusque de l'hélicité non potentielle avant l'éruption (cf. Fig. 5.2). De plus, dans plusieurs des simulations étudiées, il y a une période où l'hélicité mêlée diminue alors que son terme d'injection, dH_{pj}/dt_{Own} est positif. C'est le cas par exemple, dans la simulation nommée "Convergence" de [Zuccarello et al. \(2015\)](#), où malgré une injection positive et quasi nulle, l'hélicité mêlée diminue tout le long de la simulation (cf. Figs. 2 et 5 dans [Linan et al. 2020](#)). L'hélicité mêlée peut donc diminuer globalement dans le volume alors qu'elle est continuellement injectée à travers les frontières.

J'ai montré que cette dynamique particulière s'explique à l'aide du terme de transfert, dH_j/dt_{Transf} . En effet, dans cette simulation, l'hélicité mêlée est en permanence transformée en hélicité non potentielle. L'injection de H_{pj} n'est pas suffisante pour compenser cette transformation. Ainsi, pour comprendre l'évolution des hélicités non potentielle et mêlée, il faut, certes étudier leurs flux, mais également étudier la dynamique du terme volumique de transfert (cf. Sect. 5.2.2.4).

2. et dans certains cas pas du tout explicable.

5.2.2.4 Transfert d'hélicités

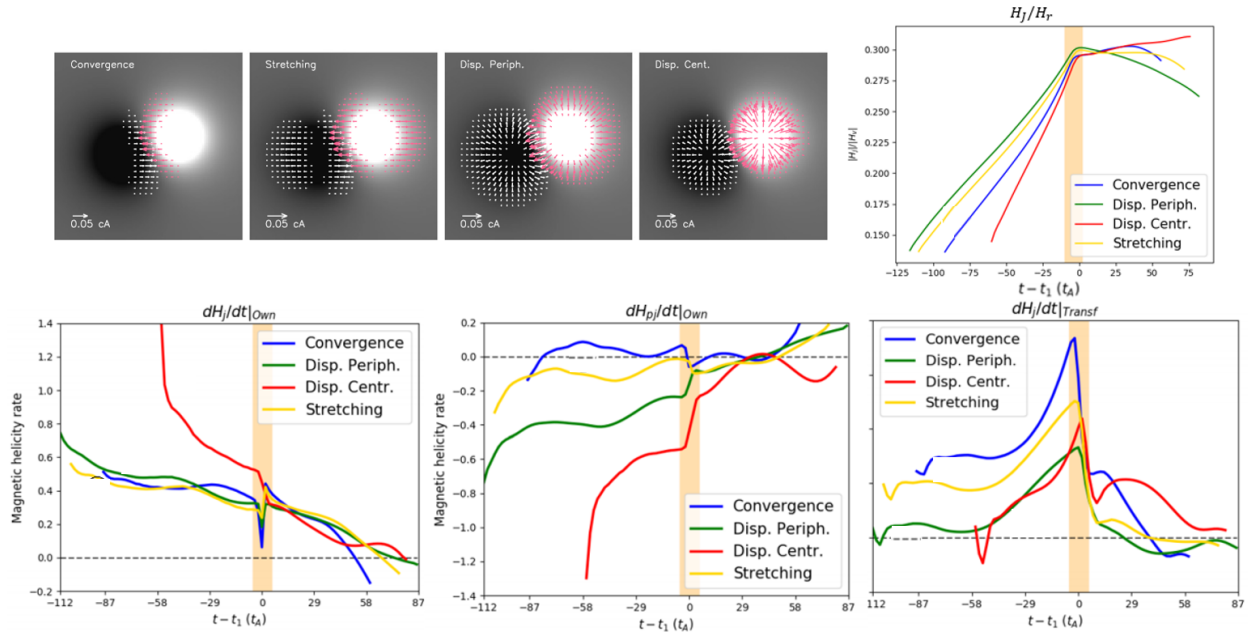


FIGURE 5.3 – **Haut gauche** : magnétogramme des quatre simulations de Zuccarello et al. (2015). Les flèches blanches et rouges indiquent la distribution des mouvements imposés au niveau des deux polarités (cf. fig. 4.7 et Zuccarello et al. 2018). En accord avec le champ de vitesse imposé, les simulations sont nommées, de gauche à droite : "Convergence", "Stretching", "Dispersion Peripheral" et "Dispersion. Central" (Zuccarello et al. 2018; Linan et al. 2020). **Haut droit** : évolutions du critère d'éruptivité, η_H (cf. Eq. 4.1), dans les quatre simulations : "Convergence" (courbe bleue), "Stretching" (courbe jaune), "Dispersion Peripheral" (courbe verte) et "Dispersion Central" (courbe rouge). L'axe des abscisses est le temps modifié $t - t_1$ où t_1 est l'instant du déclenchement de l'éruption qui varie selon la simulation. La bande jaune correspond à la phase éruptive. **Bas gauche** : évolution du terme d'injection, $dH_j/dt|_{Own}$ (cf. Eq. 5.31). **Bas milieu** : évolution du terme d'injection, $dH_{pj}/dt|_{Own}$ (cf. Eq. 5.29). **Bas droit** : évolution du terme de transfert, $dH_j/dt|_{Transf}$ (cf. Eq. 5.18).

Pour décrire l'évolution des hélicités, en plus des termes d'injection, il faut également tenir compte de la dynamique du terme volumique de transfert défini par :

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{Transf} = - \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{Transf} = -2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV = -2 \int_V \mathbf{E}_{ideal} \cdot \mathbf{B}_p dV, \quad (5.34)$$

avec $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ideal} + \mathbf{R}$ (où \mathbf{R} est une contribution non idéale, c.-à-d. nulle en MHD idéale). Le terme de transfert fait donc le lien entre le champ magnétique potentiel et le champ électrique du domaine. Mis en évidence pour la première fois dans Linan et al. (2018), son existence n'était pas pressentie puisque par définition il n'impacte pas la quantité globale d'hélicité relative dans le domaine. Il traduit uniquement le passage d'une forme d'hélicité à l'autre.

De plus, il s'agit d'un terme volumique qui, s'il n'est pas négligeable, impose la non-conservation des hélicités mêlée et non potentielle. En fait, il est possible de décomposer davantage le terme de transfert. Plusieurs décompositions ont été envisagées. Cependant, aucune ne fait apparaître uniquement une contribution surfacique. J'ai donc préféré exprimer le transfert sous la forme (5.34) qui a pour avantage d'être invariante de jauge et de s'écrire comme une unique intégrale ne faisant pas intervenir de potentiel vecteur ou scalaire.

Dans [Linan et al. \(2018\)](#) et [Linan et al. \(2020\)](#), j'ai montré que le terme de transfert joue un rôle clé dans l'évolution des hélicités mêlée et non potentielle. En effet, dans toutes les simulations numériques étudiées (cf. Sect. 5.2.2.3), il y a toujours une période où le transfert domine en intensité les termes d'injection, dH_{pj}/dt_{Own} et dH_j/dt_{Own} . Cela confirme donc que se limiter à l'étude de l'injection photosphérique d'hélicités mêlée et non potentielle ne permet pas de caractériser leurs évolutions dans le domaine puisque la contribution volumique liée au transfert n'est absolument pas négligeable. J'ai donc confirmé numériquement que, contrairement à l'hélicité magnétique relative, l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle ne sont pas des grandeurs conservées.

Dans certains cas, le transfert peut gouverner entièrement la dynamique de H_j et/ou H_{pj} . C'est le cas par exemple dans la simulation d'un jet coronal ([Pariat et al. 2009](#)) où l'évolution de l'hélicité non potentielle provient entièrement de ses échanges avec l'hélicité mêlée (cf. Fig. 11 dans [Linan et al. 2018](#)). Un échange qui est tantôt positif tantôt négatif. Dans cette simulation, l'injection de l'hélicité non potentielle est complètement négligeable. Quand le transfert est positif (de H_{pj} vers H_j), l'hélicité non potentielle augmente alors que, réciproquement, quand le transfert est négatif, l'hélicité non potentielle décroît. Cet exemple montre bien l'importance du transfert et la nécessité d'en tenir compte.

Le transfert d'hélicités permet en particulier d'expliquer certains changements d'évolutions symétriques entre l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle. C'est le cas dans deux des simulations analysées où l'on observe une augmentation soudaine de l'hélicité non potentielle accompagnée par une décroissance de l'hélicité mêlée (cf. Fig. 5.2). Pendant ce temps, l'évolution d'hélicité magnétique relative ne présente pas de changement notable. Cette dynamique est le signe direct de la présence d'un transfert d'hélicités qui n'influe pas, par définition, sur la dynamique de l'hélicité relative.

Dans toutes les simulations éruptives étudiées qui pourtant présentent des configurations magnétiques bien différentes ([Pariat et al. 2009](#); [Leake et al. 2014](#); [Zuccarello et al. 2015](#)), le transfert d'hélicités suit des dynamiques similaires. Avant l'éruption, c'est à dire pendant la formation du tube de flux magnétique ou pendant l'accumulation d'énergie libre dans le système, les échanges d'hélicité se font de l'hélicité mêlée vers l'hélicité non potentielle. Ce qui a pour conséquence d'augmenter l'hélicité non potentielle du système. De plus juste au début de l'éruption, l'intensité du terme de transfert subit une brusque variation. Le changement d'intensité observée est la conséquence d'une rapide modification de la configuration magnétique du système. Cette variation soudaine peut entraîner un changement de signe du transfert qui va désormais de l'hélicité non potentielle vers l'hélicité mêlée (e.g. Fig. 11 dans [Linan et al. 2018](#)). Il est important de rappeler que même si le transfert d'hélicités témoigne du changement de la configuration magnétique, il n'est pas pour autant lié à la reconnexion magnétique. En effet, du transfert existe même en régime idéal. Notons également qu'au contraire les flux d'hélicités ne présentent pas de variation en début d'éruption. Les termes d'injection subissent éventuellement un changement d'intensité et de signe plus tard quand la structure magnétique sort du volume d'étude (e.g. Fig. 11 dans [Linan et al. 2018](#)).

Si le terme de transfert joue un rôle important dans l'évolution des hélicités non potentielle et mêlée et ne peut pas être négligé, il n'est pas toujours la contribution dominante. En comparant les simulations d'éruptions présentées dans [Zuccarello et al. \(2015\)](#), j'ai montré que la dynamique des hélicités non potentielle et mêlée ne s'explique pas par les mêmes processus physiques selon la situation. Une dynamique qui, avant l'éruption, est pourtant identique d'une simulation à l'autre : l'hélicité mêlée décroît avant l'éruption, et l'hélicité non potentielle croît (e.g. Fig. 2 dans [Linan et al. 2020](#)). En particulier, l'évolution de H_{pj} et H_j s'expliquent de trois manières différentes selon la simulation analysées (cf. Fig. 5.3) :

- Dans deux simulations, nommées "Stretching" et "Convergence" sur la figure (5.3), la variation temporelle de l'hélicité mêlée est dominée par son transfert en hélicité non

potentielle. L'injection de H_{pj} est faible et ne permet pas de compenser son important transfert. Il en résulte la diminution de l'hélicité non potentielle.

- Dans une autre simulation, nommée "Dispersion Peripheral" sur la figure (5.3), la diminution de l'hélicité mêlée est principalement due à son injection à travers les frontières. Le terme de transfert ne domine plus en intensité la variation temporelle de H_{pj} . L'intensité de l'injection d'hélicité non potentielle est similaire aux deux simulations précédentes.
- Dans la dernière simulation, nommée "Dispersion Central" sur la figure (5.3), la dynamique est proche de la simulation précédente, mais l'injection d'hélicité non potentielle est beaucoup plus importante quand dans les trois autres cas.

Ainsi, les termes qui dominent l'évolution de dH_j/dt et dH_{pj}/dt dépendent fortement de la simulation même si les hélicités suivent la même tendance générale. Il s'agit là d'un des principaux résultats de [Linan et al. \(2020\)](#).

J'ai donc montré de façon générale qu'il faut être extrêmement prudent sur les causes expliquant l'évolution des hélicités. Par exemple, une augmentation de l'hélicité non potentielle peut être due à un échange de H_{pj} vers H_j ou, due à son injection à travers la photosphère. On comprend alors la nécessité de prendre en compte toutes les contributions volumiques et surfaciques afin d'analyser l'évolution des hélicités dans un système magnétique, pour ne pas tirer de conclusion active sur sa dynamique. **Un système soumis à d'importants flux d'hélicités peut avoir au final la même dynamique qu'un système dominé par les échanges entre l'hélicité mêlée et l'hélicité non potentielle.**

De plus, le terme de transfert peut jouer un rôle important dans la dynamique du rapport de l'hélicité non potentielle sur l'hélicité relative, η_H (cf. Eq. 4.1), dont le potentiel comme marqueur de l'éruptivité a été discuté section (4.2.2). En effet, puisque le transfert d'hélicités ne modifie pas la quantité totale d'hélicité relative du volume, l'hélicité non potentielle peut changer de dynamique sans impacter celle de l'hélicité relative. Le ratio $\eta_H = H_j/H_r$ peut donc diminuer ou augmenter sans que la quantité d'hélicité relative change dans le volume.

D'autre part, la particularité des quatre simulations de [Zuccarello et al. \(2015\)](#) est que l'éruption a lieu quand le ratio η_H atteint la même valeur (η_{Hcrit} , cf. Sect. 4.2.2). En mettant en évidence trois manières distinctes d'augmenter η_H , j'ai montré que la façon d'atteindre la valeur critique importe moins que le fait de réellement l'atteindre (cf. Fig. 5.3). Néanmoins, les trois façons d'augmenter le critère d'éruptivité η_H ne sont pas équivalentes. La simulation avec les injections d'hélicités non potentielle et mêlée les plus intenses (mais un transfert plus faible) atteint l'éruption plus rapidement que les autres simulations. Davantage d'études sont cependant nécessaires pour identifier le rôle du transfert d'hélicités dans l'évolution de η_H au niveau d'une région active.

5.2.3 Perspectives

Comme mentionné précédemment, la décomposition des variations temporelles en quantités invariantes de jauge est un nouvel outil pour comprendre l'évolution des hélicités mêlée et non potentielle ainsi que leur somme l'hélicité magnétique relative. C'est pourquoi l'expertise décrite ci-dessus a été et va être répétée sur une plus grande gamme de simulations numériques. En tout, j'ai analysé jusqu'à présent dix configurations magnétiques différentes :

- Trois simulations d'émergence depuis la région sub photosphérique d'un tube de flux magnétique torsadé. Deux simulations sont éruptives ([Leake et al. 2014](#)) et la troisième est stable ([Leake et al. 2013](#)).
- Une simulation de la génération et de l'éruption d'un jet coronal ([Pariat et al. 2009](#)).
- Une simulation MHD quasi idéal de turbulence ([Brandenburg & Scannapieco 2020](#)).
- Quatre simulations modélisant l'éruption d'un tube de flux torsadé, créé par des mouvements du champ magnétique au niveau de la photosphère ([Zuccarello et al. 2015, 2018](#)).

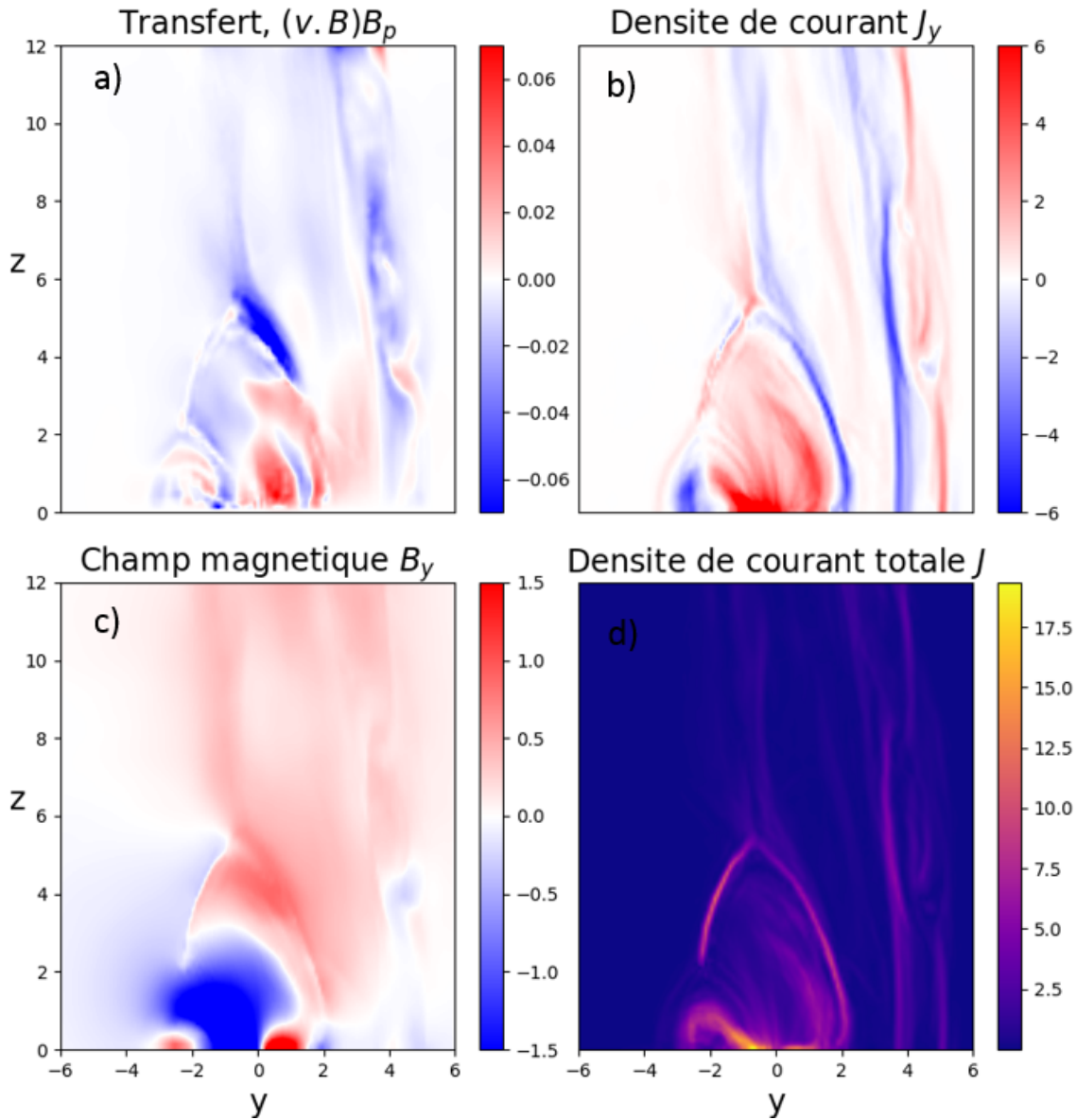


FIGURE 5.4 – Différentes coupes 2D à x fixé au milieu du domaine dans la simulation d'un jet coronal (Pariat et al. 2009). Les grandeurs sont non-dimensionnées. **Panneau (a)** : densité de transfert, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})B_p$. **Panneau (b)** : densité de courants électriques dans la direction y telle que $\mathbf{J} = \nabla \mathbf{B}$. **Panneau (c)** : champ magnétique dans la direction y . **Panneau (d)** : intensité du courant électrique $\sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$.

Les quatre simulations partagent la même configuration magnétique initiale (un champ magnétique porteur de courants électriques fortement cisailé entouré par un champ magnétique potentiel), mais ont des forçages photosphériques différents.

- Simulation de la phase commune des quatre simulations éruptives de Zuccarello et al. (2015, 2018). Le champ magnétique initialement potentiel évolue vers un champ magnétique porteur de courants électriques grâce aux rotations imposées des deux polarités magnétiques (cf. Fig. 1 dans Zuccarello et al. 2018).

Certaines des configurations magnétiques ci-dessus font partie des simulations étudiées dans le cadre du groupe de travail sur l'hélicité dont je suis membre (cf. Sect. 3.4.1.2). C'est le cas de la simulation d'émergence décrite section 5.2.2.2 ainsi que la simulation de turbulence magnétohydrodynamique (Brandenburg & Scannapieco 2020) dont les résultats ne sont pas encore publiés au moment de la rédaction du manuscrit. Notons également que des membres

du groupe de travail (e.g. G. Valori, K. Moraitis et E. Pariat) ont par ailleurs confirmé la justesse de l'implémentation numérique décrite section (5.2.2.1). En effet, en utilisant les mêmes données magnétiques que moi, ils ont calculés avec leurs propres méthodes numériques l'ensemble des termes qui composent les variations temporelles des hélicités non potentielle et mêlée (cf. Eqs. 5.16 et 5.7). Les méthodes employées utilisent des approximations numériques différentes pour le calcul des dérivées et des intégrales ainsi que un choix de jauge différent pour les potentiels vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{A}_p . Malgré ces différences, les valeurs trouvées par l'ensemble des méthodes sont similaires à celles que j'obtiens avec mon implémentation numérique. Cela confirme que les résultats exposés dans les sections précédentes (ainsi que dans Linan et al. 2018, 2020) ne dépendent pas de la méthode de calcul utilisée pour les obtenir.

De par son rôle phare dans l'évolution des hélicités, le terme de transfert doit être davantage étudié. En multipliant les simulations analysées, cela permettra de mieux comprendre dans quelles situations ce terme domine et de confirmer les premières tendances observées telles que sa brusque variation au moment d'une éruption. L'inconvénient du transfert d'hélicités est qu'il s'agit d'une quantité globale qui fournit une valeur à un instant et un volume donnés. Ainsi cela ne permet pas de véritablement saisir ce qui se passe à l'intérieur du volume. Pour remédier à cela, on peut s'intéresser à la densité de transfert : $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_p$ dont le calcul ne nécessite pas de potentiel vecteur (cf. Fig. 5.4). L'idée ici serait de comparer spatialement la densité de transfert avec des coupes 2D d'autres quantités telles que la densité de la force de Lorentz (Barczynski et al. 2019). Un suivi temporel de l'évolution de la densité de transfert pourrait également nous renseigner sur les changements de configuration magnétique d'un système donné. De plus, cela s'ajouterait aux récentes études visant à avoir une meilleure appréhension de la distribution volumique de l'hélicité à l'aide de l'hélicité par ligne de champ (Moraitis et al. 2019a) ou par décomposition spectrale de l'hélicité (Prior et al. 2020).




Puisque le transfert d'hélicités peut impacter l'évolution du critère d'éruptivité η_H (cf. Sect. 5.2.2.4), il serait particulier pertinent de quantifier son impact lors du développement d'une région active observée. Néanmoins puisque le terme de transfert est volumique, de telles études devront passer par une reconstruction 3D du champ magnétique (cf. Chap. 2). Les modèles d'extrapolations existants offrent la possibilité d'extraire le champ de vitesses, le champ magnétique et le champ magnétique potentiel. Il est donc envisageable de suivre, de façon plus générale, l'ensemble des termes intervenant dans les variations temporelles des hélicités mêlée et non potentielle. Jusqu'à présent, les études basées sur des données observationnelles se sont intéressées à l'évolution de η_H sans être dédiées aux raisons de cette évolution (cf. Sect. 4.3).

Sans recourir à des extrapolations, l'étude de l'hélicité mêlée et non potentielle d'une région active se limitera aux calculs de leurs termes de flux, ce qui n'en demeure pas moins intéressant. Par exemple, Moon et al. (2002) et Smyrli et al. (2010) ont remarqué un changement brusque du flux d'hélicité magnétique relative au niveau de différentes régions actives juste avant une éruption (cf. Sect. 4.1.3). On peut alors se demander si cela se retrouve dans les flux d'hélicités mêlée et non potentielle. Notons cependant que cela n'est pas suggéré dans les simulations numériques d'éruptions solaires (e.g. Linan et al. 2018, 2020). Une autre perspective consiste à s'interroger sur le lien entre le type d'éruption produite par une région active et les flux de H_j et H_{pj} . Cela serait similaire aux travaux de Abramenko (2005) montrant un lien entre la capacité à produire une éruption majeure d'une région active et son spectre de puissance magnétique. D'autre part, l'étude des flux d'hélicités peut également passer par de nouvelles expressions analytiques comme celles proposées par Hawkes & Yeates (2019) et Pipin et al. (2019) qui ont récemment estimé l'injection d'hélicité magnétique relative dans l'atmosphère solaire durant un cycle solaire entier.

Ces futurs travaux doivent de façon plus générale être accompagnés par davantage d'études sur les propriétés mathématiques des hélicités magnétiques (Oberti & Ricca 2018) et de leurs interprétations physiques (Yeates & Hornig 2013, 2014; Russell et al. 2015; Aly 2017).



Time Variations of the Nonpotential and Volume-threading Magnetic Helicities

L. Linan¹, É. Pariat¹ , K. Moraitis¹, G. Valori² , and J. Leake³ 

¹ LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, F-92195 Meudon, France; luis.linan@obspm.fr

² Mullard Space Science Laboratory, University College London, Holmbury St. Mary, Dorking, Surrey, RH5 6NT, UK

³ NASA Goddard Space Flight Center, 8800 Greenbelt Road, Greenbelt, MD, 22071, USA

Received 2018 July 3; revised 2018 August 14; accepted 2018 August 14; published 2018 September 20

Abstract

Relative magnetic helicity is a gauge-invariant quantity suitable for the study of the magnetic helicity content of heliospheric plasmas. Relative magnetic helicity can be decomposed uniquely into two gauge-invariant quantities, the magnetic helicity of the nonpotential component of the field and a complementary volume-threading helicity. Recent analysis of numerical experiments simulating the generation of solar eruptions have shown that the ratio of the nonpotential helicity to the total relative helicity is a clear marker of the eruptivity of the magnetic system, and that the high value of that quantity could be a sufficient condition for the onset of the instability generating the eruptions. The present study introduces the first analytical examination of the time variations of these nonpotential and volume-threading helicities. The validity of the analytical formulae derived are confirmed with analysis of 3D magnetohydrodynamics (MHD) simulations of solar coronal dynamics. Both the analytical investigation and the numerical application show that, unlike magnetic helicity, the nonpotential and the volume-threading helicities are not conserved quantities, even in the ideal MHD regime. A term corresponding to the transformation between the nonpotential and volume-threading helicities frequently dominates their dynamics. This finding has an important consequence for their estimation in the solar corona: unlike with relative helicity, their volume coronal evolution cannot be ascertained by the flux of these quantities through the volume's boundaries. Only techniques extrapolating the 3D coronal field will enable both the proper study of the nonpotential and volume-threading helicities and the observational analysis of helicity-based solar-eruptivity proxies.

Key words: magnetic fields – Sun: corona – Sun: flares – Sun: photosphere

1. Introduction

Magnetic helicity was originally introduced by Elsässer (1956) as a volume integral related to the 3D distribution of the magnetic field. Moffatt (1969) provided a physical interpretation of this integral, showing that it was intimately related to the Gauss linking number and hence that magnetic helicity quantitatively describes the level of entanglement of magnetic field lines in a magnetized plasma. Magnetic helicity is of particular interest within the ideal magnetohydrodynamic (MHD) paradigm, as it is a strictly conserved quantity (Woltjer 1958); creation or dissipation of helicity is forbidden, and helicity can only be transported. From observations of the dynamics of plasmas in tokamak experiments, Taylor (1974) conjectured that even in nonideal MHD the dissipation of magnetic helicity should be relatively weak. Pariat et al. (2015) recently presented numerical evidence that magnetic helicity is indeed very well conserved, even when strong nonideal effects such as those associated with solar eruptions develop. Thanks to this conservation property, physical quantities based on magnetic helicity are increasingly studied in natural plasmas where the MHD paradigm applies, e.g., in solar/stellar interiors and atmosphere, as well as solar/stellar winds (Miesch et al. 2016; Valori et al. 2016; Brandenburg et al. 2017).

In the solar context, the conservation of magnetic helicity provides a natural explanation for the existence of ejecta transporting away excess magnetic helicity that cannot indefinitely accumulate in the solar atmosphere; coronal mass ejections (CMEs) and magnetic clouds and their underlying twisted magnetic structures (e.g., Burlaga 1995; Démoulin 2008) appear to be the necessary consequence of magnetic helicity conservation (Rust 1994; Low 1996).

Magnetic helicity and its conservation are a topic of study when trying to link solar eruptions, CMEs, and their interplanetary counterparts (Dasso et al. 2003, 2005; Luoni et al. 2005; Mandrini et al. 2005; Dasso 2009; Hu et al. 2014; Démoulin et al. 2016; Patsourakos et al. 2016; Patsourakos & Georgoulis 2017). Magnetic helicity conservation is also invoked as an essential element that impacts the dynamics of magnetic reconnection (e.g., Linton et al. 2001; Linton & Antiochos 2002; Del Sordo et al. 2010), solar/stellar dynamos (e.g., Brandenburg & Subramanian 2005; Candelaresi 2012), the formation of solar filaments (e.g., Antiochos 2013; Knizhnik et al. 2015; Zhao et al. 2015), and the generation of solar eruptions (e.g., Kusano et al. 2004; Longcope & Beveridge 2007; Priest et al. 2016). Because of this hypothesis, important efforts to estimate the magnetic helicity in the solar corona have been carried out over the past decades (Démoulin 2007; Démoulin & Pariat 2009; Valori et al. 2016).

Because of the physical requirement of gauge transformation invariance, Elsässer's magnetic helicity can generally not be used to study natural plasmas. Berger & Field (1984) and Finn & Antonsen (1985) introduced a gauge-invariant quantity related to magnetic helicity that can be practically used with natural plasmas: the relative magnetic helicity. The direct estimation of relative helicity requires knowledge of the full distribution in the 3D volume studied, while state-of-the-art solar observations only provide measurements on a 2D surface, the solar photosphere. Estimation of relative helicity by volume integration is thus model dependent and requires 3D extrapolation of the magnetic field. A few methods estimating relative magnetic helicity (Rudenko & Myshyakov 2011;

Thalmann et al. 2011; Valori et al. 2012; Yang et al. 2013) by such volume integration have been recently developed and benchmarked (see review by Valori et al. 2016), enabling their use to study observed solar active regions (Valori et al. 2013; Moraitis et al. 2014; Guo et al. 2017; Polito et al. 2017; Temmer et al. 2017; James et al. 2018).

Because of the inherent observational difficulty of measuring helicity from volume integration, alternative methods have been developed (e.g. Démoulin et al. 2006; Longcope et al. 2007; Kazachenko et al. 2009, 2010, 2012; Guo et al. 2010, 2013, 2017; Georgoulis et al. 2012) that rely on an implicit model of the solar coronal field. However, the historically most commonly used method to evaluate magnetic helicity relies on the calculation of the flux of helicity through the solar photosphere and the time integration of this flux to obtain the helicity that accumulates into the corona. This approach was originally developed by Chae (2001) and has received further improvements (Pariat et al. 2005; Chae 2007; Liu & Schuck 2012, 2013; Dalmasse et al. 2014, 2018). This method does not make any specific assumption about the coronal magnetic field. It does, however, heavily rely on the helicity conservation principle since it assumes that the time-accumulated boundary flux of helicity is a good approximation of the volume helicity, with the coronal helicity dissipation being null and its ejection through eruptions negligible, at least during the formation phase of active regions.

Relative helicity is not the only magnetic-helicity-based quantity that has been studied. Berger (1985) used a formulation of magnetic helicity and relative magnetic helicity where the magnetic field is decomposed into poloidal and toroidal components. Consistent with this approach, Low (2006) introduced the primitive helicity in a two-flux description in which the field is represented by Euler potentials. These examples of the linear decomposition of a magnetic field into the sum of untwisted fields respect the requirement of gauge independence and easily allow the establishment of the helicity transport equation in Lagrangian variables (Webb et al. 2010, 2011).

Berger (2003) also showed that magnetic helicity can be decomposed into two gauge-invariant quantities, the current-carrying magnetic helicity and the volume-threading helicity. To our knowledge, Moraitis et al. (2014) were the first to estimate and follow these quantities. In the numerical simulations of the formation of an active region that they analyzed, the current-carrying helicity exhibited large fluctuations around the onset of eruptions. Recently, Pariat et al. (2017) analyzed the properties of these magnetic helicities in seven parametric simulations of flux emergence (Leake et al. 2013, 2014), during which solar-like active regions are formed, both noneruptive and eruptive. Pariat et al. (2017) observed that the ratio of the current-carrying helicity to the relative helicity was an excellent marker of the eruptive state of the system: only the simulations that would eventually erupt presented high values of that ratio, and only at times before the eruption. Noneruptive simulations, as well as the eruptive simulations after the eruption, displayed low values of the ratio. Zuccarello et al. (2018) further studied this ratio on different numerical experiments (Zuccarello et al. 2015). In four line-tied boundary-driven numerical simulations of solar coronal eruptions (and a noneruptive control case) for which the eruption/instability time was precisely estimated they showed that the eruptions were taking place for the same value of the helicity ratio, within the helicity measurement precision. Other physical

quantities such as magnetic energies did not present the same behavior. They concluded that the eruption process could be related to a threshold in the helicity ratio and that this quantity not only is related to the eruptivity of the system but may also be directly associated with the eruption driver.

From these recent promising results stems the need to better understand the contribution entering into the relative helicity decomposition. This is the goal of the present study, which aims to provide an analytical formulation for the time variation of both the current-carrying helicity and the volume-threading helicity. Only the study of their time variations allows us to ascertain whether these quantities are independently conserved in ideal MHD, in the same way as was done for magnetic helicity.

Additionally, if relative helicity can be studied and tracked from its flux through the photosphere, it is mostly thanks to its conservation property. Can the same be applied to the terms of the relative helicity decomposition? Can the flux of the current-carrying helicity be solely used to study its accumulation in the solar corona? Or are 3D extrapolation and modeling of the solar corona necessary steps to analyze the decomposition of magnetic helicity in solar active regions?

In this paper, we first present the time variation of the terms in the helicity decomposition (see Section 2). Using data from three different simulations of solar-like phenomena (active region formation via flux emergence with or without eruption, and a boundary-driven solar jet), we verify our analytical derivations and study carefully the dynamics of the current-carrying and volume-threading helicities in the different phases of the simulations: magnetic energy buildup and impulsive energy release (see Section 3). In the conclusion (see Section 4), we discuss the impact of the nonconservation of these helicities for their estimations in solar observations.

2. Magnetic Helicity

2.1. Relative Magnetic Helicity

A scalar description of the geometrical properties of magnetic field lines is provided by magnetic helicity, which is defined as follows:

$$H_m = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV = \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV, \quad (1)$$

with \mathbf{A} the vector potential of the studied magnetic field, \mathbf{B} , which is prescribed in the fixed volume V bounded by the surface S . This definition is, however, unpractical for the study of most natural plasmas. Indeed, under the gauge transformation, $\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$, with ψ an arbitrary function; H_m is invariant if and only if V is a magnetically bounded volume, i.e., if $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_S = 0$, \mathbf{n} being the outward-pointing unit vector normal on S . This condition is not satisfied when considering the solar corona, as important magnetic fluxes are threading through the solar photosphere. This led to the introduction of the concept of relative magnetic helicity by Berger & Field (1984), in which a gauge-invariant magnetic helicity is computed introducing a reference field. The most commonly used reference magnetic field is the potential field, \mathbf{B}_p , the unique current-free field having the same distribution of flux \mathbf{B}

through the surface S . It satisfies

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B}_p = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p)|_S = 0. \end{cases} \quad (2)$$

The potential field can thus be defined by a scalar function ϕ such as $\nabla\phi = \mathbf{B}_p$. The scalar potential is computed as the solution of the Laplace equation:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})|_S. \end{cases} \quad (3)$$

The definition of relative magnetic helicity that we use throughout the paper is the one given by Finn & Antonsen (1985):

$$H_v = \int_V (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV. \quad (4)$$

This choice enables H_v to be independently invariant to the gauge transformations of both \mathbf{A} and \mathbf{A}_p . Relative magnetic helicity can be divided into two terms (Berger 2003):

$$H_v = H_j + H_{pj}, \quad (5)$$

$$H_j = \int_V (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV, \quad (6)$$

$$H_{pj} = 2 \int_V \mathbf{A}_p \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV. \quad (7)$$

Considering the nonpotential magnetic field, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$, the vector \mathbf{A}_j , defined as $\mathbf{A}_j = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p$, is a vector potential of \mathbf{B}_j since it verifies

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}_j &= \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \mathbf{A}_p \\ &= \mathbf{B} - \mathbf{B}_p = \mathbf{B}_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Thus, H_j and H_{pj} can be expressed as

$$H_j = \int_V \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{B}_j dV, \quad (9)$$

$$H_{pj} = 2 \int_V \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_j dV. \quad (10)$$

The term H_j thus corresponds to the classical magnetic helicity (Equation (6)) of the nonpotential magnetic field \mathbf{B}_j , for which S is a flux surface by construction, while H_{pj} can be associated with a volume-threading helicity between \mathbf{B}_p and \mathbf{B}_j . Since the decomposition of \mathbf{B} into \mathbf{B}_p and \mathbf{B}_j is unique, the decomposition of H_v in H_j and H_{pj} is also unique. This decomposition is further relevant since both H_j and H_{pj} are gauge invariant.

Studying the time evolution of the relative magnetic helicity, Pariat et al. (2015) established the following equation:

$$\begin{aligned} \frac{dH_v}{dt} &= \frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Diss}} + \frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Bp,var}} \\ &+ F_{Vn} + F_{Bn} + F_{AAp} + F_\phi, \end{aligned} \quad (11)$$

with

$$\frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Diss}} = -2 \int_V (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (12)$$

$$\frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Bp,var}} = 2 \int_V \frac{\partial\phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_p dV, \quad (13)$$

$$F_{Vn} = -2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{v} \cdot dS, \quad (14)$$

$$F_{Bn} = 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \cdot dS, \quad (15)$$

$$F_{AAp} = \int_S (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \times \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot dS, \quad (16)$$

$$F_\phi = -2 \int_S \frac{\partial\phi}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot dS, \quad (17)$$

where \mathbf{R} is the nonideal MHD contribution to the electric field, such that $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{R}$. Equation (11) assumes that the dynamics follow ideal MHD at the boundary of the domain, i.e., $\mathbf{R}|_S = 0$. Without that hypothesis, one would have a nonideal term such as

$$\begin{aligned} \frac{dH_v}{dt} &= \frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Non-ideal}} + \frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Bp,var}} \\ &+ F_{Vn} + F_{Bn} + F_{AAp} + F_\phi, \end{aligned} \quad (18)$$

with

$$\frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Non-ideal}} = -2 \int_V (\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{A} dV \quad (19)$$

$$= \frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Diss}} + F_{\text{Non-ideal}} \quad (20)$$

and

$$F_{\text{Non-ideal}} = -2 \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{A}) \cdot dS. \quad (21)$$

This surface term is usually neglected in observation, but it can be important in specific simulations, where it must then be explicitly calculated. We also note that if the nonideal term of \mathbf{E} derives from a scalar potential, i.e., if there is a function Θ with $\mathbf{R} = \nabla\Theta$, one would have

$$\frac{dH_v}{dt} \Big|_{\text{Non-ideal}} = 0. \quad (22)$$

The helicity time variation (Equation (18)) contains both volume and flux contributions and cannot, in general, be expressed as a function of boundary values alone. In an active solar-like case, Pariat et al. (2015) showed that the dissipation term $dH_v/dt|_{\text{Diss}}$ is very small, even though strong nonideal effects are present. They also stated that imposing the Coulomb gauge on \mathbf{A}_p makes $dH_v/dt|_{\text{Bp,var}}$ null, and hence relative magnetic helicity is a conserved quantity in ideal MHD, i.e., its variations in a volume are only due to flux transfers through the boundaries.

2.2. Time Variations of the Nonpotential Magnetic Helicity

Following Pariat et al. (2015), we aim to determine the time variation of the current-carrying helicity, H_j . Assuming that the volume V is fixed, we differentiate H_j in time:

$$\begin{aligned} \frac{dH_j}{dt} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV \\ &+ \int_V \mathbf{A}_j \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV. \end{aligned} \quad (23)$$

Using the Gauss divergence theorem for the first term and after a combination with the second integral, we find

$$\begin{aligned} \frac{dH_j}{dt} &= 2 \int_V \mathbf{A}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV - 2 \int_V \mathbf{A}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV \\ &\quad + \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot dS. \end{aligned} \quad (24)$$

We choose to keep this form for the flux term and to treat the volume terms separately. We note that only the sum of these terms is properly defined physically, i.e., is gauge invariant: the three terms are not independently gauge invariant. Using the scalar potential ϕ of \mathbf{B}_p and the Gauss divergence theorem, we can decompose the second term of Equation (24):

$$\begin{aligned} -2 \int_V \mathbf{A}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV &= -2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot dS \\ &\quad + 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_j dV. \end{aligned} \quad (25)$$

We then use the Faraday law: $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$. The first volume term of Equation (24) can be written as

$$\begin{aligned} 2 \int_V \mathbf{A}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV &= 2 \int_S \mathbf{A}_j \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{R}) dV \\ &= 2 \int_V (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{A}_j dV \\ &\quad - 2 \int_V (\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{A}_j dV. \end{aligned} \quad (26)$$

As a last step in the decomposition, we use the Gauss divergence theorem on the ideal term with

$$\begin{aligned} 2 \int_V (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{A}_j dV &= -2 \int_V ((\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p) dV \\ &\quad - 2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{v} \cdot dS \\ &\quad + 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{B} \cdot dS. \end{aligned} \quad (27)$$

Finally, the variation of the magnetic helicity of the nonpotential magnetic field can be decomposed as

$$\begin{aligned} \frac{dH_j}{dt} &= \frac{dH_j}{dt} \Big|_{\text{Non-ideal}} + \frac{dH_j}{dt} \Big|_{\text{Bp,var}} + \frac{dH_j}{dt} \Big|_{\text{Ttransf}} \\ &\quad + F_{Vn,Aj} + F_{Bn,Aj} + F_{Aj,Aj} + F_{\phi,Aj}, \end{aligned} \quad (28)$$

with

$$\frac{dH_j}{dt} \Big|_{\text{Non-ideal}} = -2 \int_V \nabla \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_j dV, \quad (29)$$

$$\frac{dH_j}{dt} \Big|_{\text{Ttransf}} = -2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV, \quad (30)$$

$$\frac{dH_j}{dt} \Big|_{\text{Bp,var}} = 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_j dV, \quad (31)$$

$$F_{Vn,Aj} = -2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{v} \cdot dS, \quad (32)$$

$$F_{Bn,Aj} = 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{B} \cdot dS, \quad (33)$$

$$F_{Aj,Aj} = \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot dS, \quad (34)$$

$$F_{\phi,Aj} = -2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot dS. \quad (35)$$

The decomposition obtained possesses similarities to the time variation of the relative helicity. Apart from $dH_j/dt|_{\text{Ttransf}}$, all the terms that appear in the time variation of H_j (Equation (28)) have their equivalent in the decomposition of dH/dt (Equation (18)). We find a flux $F_{Vn,Aj}$ related to the normal component of the velocity, v_n , and $F_{Bn,Aj}$ related to the normal component of the field, B_n . The volume term $dH_j/dt|_{\text{Bp,var}}$ related to the time variation of the magnetic field \mathbf{B}_p also appears. The difference with the terms of the time variation of the relative helicity is the dependence on \mathbf{A}_j instead of \mathbf{A} .

Unlike H_v , even in ideal MHD the time variation of H_j contains both volume and flux contributions. The term $dH_j/dt|_{\text{Ttransf}}$ in Equation (30) is generally not null in ideal MHD (see Section 2.4 for more discussion about this term). Theoretically, H_j is not a conserved quantity of ideal MHD, unlike the classical magnetic helicity H_m and the relative magnetic helicity H_v written in specific gauge conditions.

The majority of terms depend on the difference \mathbf{A}_j between the two vector potentials \mathbf{A} and \mathbf{A}_p . Therefore, by imposing specific relations between these, it is possible to eliminate some of the contributions to the time variation of H_j (see Section 2.5).

Moreover, since the individual terms are not gauge invariant, only their sum has true physical relevance. The intensity of the flux terms depends on the gauge selected.

2.3. Time Variation of the Volume-threading Helicity

Now considering H_{pj} , following similar steps to those for H_j , we can derive the general equation of its time variation:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{pj}}{dt} &= \frac{dH_{pj}}{dt} \Big|_{\text{Non-ideal}} + \frac{dH_{pj}}{dt} \Big|_{\text{Bp,var}} + \frac{dH_{pj}}{dt} \Big|_{\text{Ttransf}} \\ &\quad + F_{Vn,Ap} + F_{Bn,Ap} + F_{Aj,Ap} + F_{\phi,Ap}, \end{aligned} \quad (36)$$

with

$$\frac{dH_{pj}}{dt} \Big|_{\text{Non-ideal}} = -2 \int_V \nabla \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_p dV, \quad (37)$$

$$\frac{dH_{pj}}{dt} \Big|_{\text{Ttransf}} = 2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV, \quad (38)$$

$$\frac{dH_{pj}}{dt} \Big|_{\text{Bp,var}} = 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) dV, \quad (39)$$

$$F_{Vn,Ap} = -2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{v} \cdot dS, \quad (40)$$

$$F_{Bn,Ap} = 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{B} \cdot dS, \quad (41)$$

$$F_{Aj,Ap} = 2 \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot dS, \quad (42)$$

$$F_{\phi,Ap} = -2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) \cdot dS. \quad (43)$$

As with H_j , the time variation of H_{pj} cannot be expressed solely through boundary fluxes, and thus H_{pj} is not a conserved quantity even in ideal MHD when $\mathbf{R} = 0$, unlike H_v , and this is due to the transfer term of Equation (38).

2.4. Helicity Exchange

2.4.1. Helicity Exchange between H_j and H_{pj}

As expected, by summing the time variations of the nonpotential and the volume-threading magnetic helicities (Equations (28) and (36)), we obtain the time variation of the relative magnetic helicity (Equation (18)):

$$\frac{dH_v}{dt} = \frac{dH_j}{dt} + \frac{dH_{pj}}{dt}. \quad (44)$$

Each term in Equation (18) has indeed its counterpart in the decomposition of H_j and H_{pj} , e.g., the sum of $F_{Vn,Ap}$ and $F_{Vn,Aj}$ gives F_{Vn} .

However, the time variations of H_{pj} and H_j each possess a volume contribution that is not present in dH_v/dt . These terms, $dH_x/dt|_{\text{Transf}}$, with x being either j or pj , allow the transfer of helicity between H_{pj} and H_j . They correspond to oppositely signed quantities, i.e.,

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} = - \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Transf}}. \quad (45)$$

The helicity transfer term is a volume quantity that allows the transformation of one form of helicity into the other. This transformation occurs within the full domain of study. Our analysis of several numerical experiments (see Section 3) shows that this quantity actually reaches high values compared to the other terms and can dominate the evolution of both H_j and H_{pj} .

It is thus essential to have a precise understanding of the term $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$. A study of this term permits us to quantify the exchange between the helicities H_j and H_{pj} in the volume, an exchange that does not affect the relative helicity, H_v . It is particularly worth noting that $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ is a gauge-invariant quantity. It indeed only depends on \mathbf{v} , \mathbf{B} , and \mathbf{B}_p and does not have any vector potential contribution.

There are several possible decompositions for $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$. However, despite several different attempts, we could not find a way to express this term solely as a flux contribution, i.e., as an integral on the boundary. For example, we can write

$$\begin{aligned} -2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV &= -2 \int_V ((\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \phi) dV \\ &= -2 \int_S \phi (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad + 2 \int_V \phi \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV. \end{aligned} \quad (46)$$

A volume integral contribution remains, however. We have numerically tested this decomposition (in a similar manner to that performed in Section 3) and concluded that it presents no advantage over its $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p$ form.

2.4.2. Helicity Exchange with the Surrounding Environment

In the specific case of the resistive MHD, the nonideal contribution to the electric field can be explicitly written as $\mathbf{R} = \eta \nabla \times \mathbf{B}$, with η corresponding to the magnetic resistivity. Using the Gauss-divergence theorem, the nonideal term in Equation (28) can be decomposed into a surface term and a

dissipation term:

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Non-ideal}} = -2 \int_V \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}_j dV \quad (47)$$

$$= \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + F_{\text{Non-ideal,Aj}}, \quad (48)$$

with

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_j dV, \quad (49)$$

$$F_{\text{Non-ideal,Aj}} = -2 \int_S \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{S}. \quad (50)$$

The dissipation term, $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$, as well as the transfer term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, is gauge invariant. By defining $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ as

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Own}} &= \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Bp,var}} + F_{\text{Non-ideal,Aj}} \\ &\quad + F_{\phi,Aj} + F_{Vn,Aj} + F_{Bn,Aj} + F_{Aj,Aj}, \end{aligned} \quad (51)$$

we obtain an equation for the time variation of H_j that is formed solely of gauge-invariant terms:

$$\frac{dH_j}{dt} = \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Own}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}}. \quad (52)$$

Similarly, we can construct a time variation of H_{pj} with gauge-invariant terms only:

$$\frac{dH_{pj}}{dt} = \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Own}} + \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} - \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}}, \quad (53)$$

with

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Own}} &= \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Bp,var}} + F_{\text{Non-ideal,Ap}} \\ &\quad + F_{Vn,Ap} + F_{Bn,Ap} + F_{Aj,Ap} + F_{\phi,Ap}, \end{aligned} \quad (55)$$

and

$$F_{\text{Non-ideal,Aj}} = -2 \int_S \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S}. \quad (56)$$

The ‘‘Own’’ terms correspond to the proper helicity variation of either H_j or H_{pj} . They do not, strictly speaking, correspond to a flux through the boundary since a volume contribution is also present for both H_j and H_{pj} : $dH_x/dt|_{\text{Bp,var}}$. These volume contributions are, however, gauge dependent. A particular choice of gauges (the Coulomb gauge for \mathbf{A} and \mathbf{A}_p) can nonetheless make them null. Written with this choice of gauges, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ then only appear as pure boundary flux contributions, which would correspond to a transfer of helicities between the studied domain and its surrounding environment. Like $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, both ‘‘Own’’ terms are independently gauge-invariant quantities. Equations (52) and (53) thus only involve independently gauge-invariant terms. Their analysis is thus of particular interest, as will be shown in our study of the helicity evolution in different numerical experiments (see Section 3).

2.5. Specific Gauge Conditions

While the variation of H_j and H_{pj} can be generally described by Equations (6) and (7) for any gauge, the choice of some specific additional constraints on the gauge allows us to simplify the expression of their time variations and possibly their computation.

A first possible additional constraint is to use the Coulomb gauge for the vector potential of the potential field, \mathbf{A}_p , i.e.,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0. \quad (57)$$

In this gauge, the volume contributions related to the variation of the potential field become

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Bp, var, cond (57)}} = - \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Bp, var, cond (57)}} \quad (58)$$

$$= -2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} dV. \quad (59)$$

While condition (57) leads to a cancellation of $dH_v/dt|_{\text{Bp, var}}$ for the relative helicity (e.g., Pariat et al. 2015), this it is not the case for the evolution of its components H_j and H_{pj} .

Another possible additional constraint that can be imposed is to link the vector potentials \mathbf{A} and \mathbf{A}_p on the boundary, i.e.,

$$\mathbf{A}|_S - \mathbf{A}_p|_S = \mathbf{A}_j|_S = 0. \quad (60)$$

This condition ensures the nullity of $F_{\mathbf{A}\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_p}$ and all the fluxes of the form F_{α, \mathbf{A}_j} (with $\alpha \in \{\text{Vn}, \text{Bn}, \text{Aj}, \phi, \text{Nonideal}\}$) in Equation (51). Under such a condition, the time variation of the nonpotential magnetic helicity can be described only as a volume variation, consisting of the sum of the transfer term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, and the term $dH_j/dt|_{\text{Bp, var}}$. There is no contribution of helicity due to any fluxes through the boundary.

Another possible constraint is to eliminate the normal component of \mathbf{A}_p on the boundary:

$$\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}|_S = 0. \quad (61)$$

This choice, combined with the previous one in Equation (60), leads to the elimination of the term F_{ϕ, \mathbf{A}_p} .

Combining these conditions and assuming that the evolution follows the ideal MHD evolution, i.e., supposing

$$\begin{cases} \mathbf{R} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0 \\ \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}|_S = 0 \\ \mathbf{A}|_S - \mathbf{A}_p|_S = 0 \end{cases} \quad (62)$$

as is frequently assumed when studying the flux of relative magnetic helicity (e.g., Démoulin & Pariat 2009), we obtain the following form of the time variations of H_j and H_{pj} :

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{cond. (62)}} = 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} dV - 2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV \quad (63)$$

and

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{cond. (62)}} \\ &= 2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p dV - 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} dV \\ &+ 2 \int_S ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (64)$$

With these specific conditions H_j does not exchange with the outside environment (no surface fluxes). The flux of the total relative helicity, H_v , is uniquely due to the flux of H_{pj} through the boundaries. H_{pj} can additionally undergo variations in the volume. These volume variations are actually helicity exchanges with H_j (see Equations (30) and (38)). The time evolution of H_j is indeed only related to volume conversion from H_{pj} .

While condition (62) appears particularly strong, it is de facto a usual assumption in observational methods analyzing the flux of helicity through the solar photosphere. Our analysis highlights the internal exchange in the volume between the two helicities. It indicates that the traditional helicity flux method cannot be used to evaluate the current-carrying component, H_j , in observations. This point will be further highlighted in our analysis of numerical simulations of the dynamics of the solar corona (see the following section) and in the conclusion (see Section 4).

3. Numerical Tests

In order to quantify the transfer of helicity and to numerically validate the time variations of the two helicities (see Equations (28) and (36)), we analyze the magnetic field of three different numerical simulations produced by two different 3D MHD codes.

3.1. Test Cases

3.1.1. Jet Simulation

The first test case is a 3D MHD numerical simulation of the generation of a solar coronal jet (Pariat et al. 2009). The initial magnetic field in this numerical experiment is formed by a 3D null point (see Figure 1). The volume contains two different magnetic connectivity domains: open and closed. The simulation lasts between $t = 0$ and $t = 1600$ in the system's nondimensional units. In the pre-eruptive phase $t \in [0, 920]$, the energy and the helicity are accumulated by line-tied twisting motions of the central magnetic polarity. These motions preserve the distribution of the vertical magnetic field component, B_z , at the bottom boundary. Thanks to topological constraints, magnetic reconnection is inhibited during that phase (see discussion in Section 2 of Pariat et al. 2009), and the dynamics of the system can thus be considered quasi-ideal MHD before $t \sim 920$.

At around $t \sim 920$, magnetic reconnection between closed and open field lines induces the formation of a jet. The period after $t \sim 920$ is designated as the nonideal phase, in opposition to the pre-jet phase. During this nonideal MHD evolution, with intense magnetic reconnection, free magnetic energy is dissipated and released by the jet. The helicity is transferred outside through the domain boundaries by a nonlinear Alfvénic wave constituting the jet (see Pariat et al. 2016, for the physics of the driving mechanism of the jet). The jet lasts between $t \sim 920$ and $t \sim 1200$. After $t \sim 1200$, the jet plasma has left

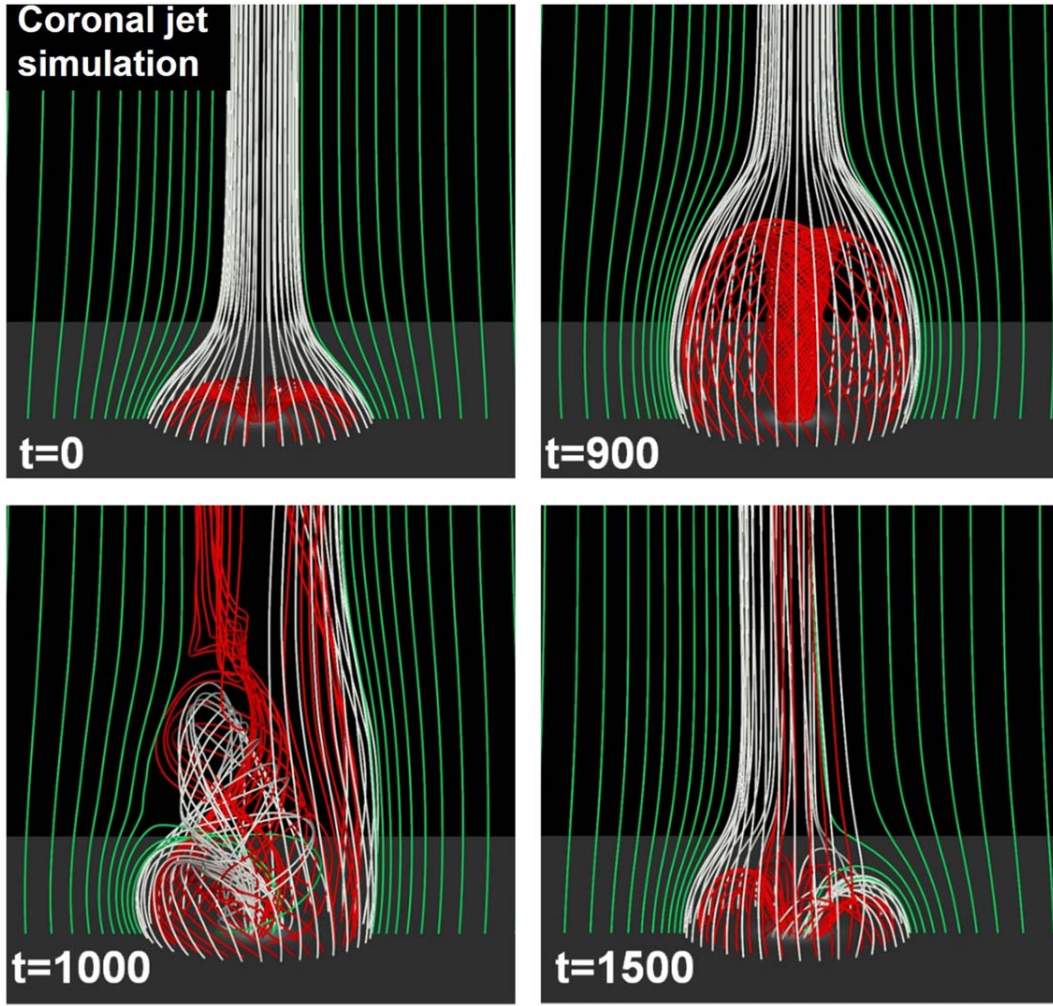


Figure 1. Snapshots of the magnetic field evolution during the generation of a coronal jet. The red field lines are initially closed. The green and white field lines are initially open. At $t = 900$ the system is in its pre-eruption stage. At $t = 1000$ the system is erupting. Helicity is ejected upward along newly opened reconnected field lines. At $t = 1500$ the system is slowly relaxing to its final stage.

the domain and no high-velocity upflows are present in the studied domain. The system slowly relaxes toward its initial potential state, thanks to low-intensity reconnections. A low-amplitude, large-scale standing wave remains in the domain (Pariat et al. 2015). At the end of the simulation, very few twisted field lines remain.

Physical quantities are outputted with a cadence of $\Delta t = 50$ for $t \in [0, 700]$ and $\Delta t = 10$ for $t \in [700, 1600]$, the higher cadence allowing a better analysis of the nonideal phase. The output data grid corresponds to a sample of the simulation computation grid. The volume analyzed in the present study is a 3D mesh of 129^3 points, whose range is $x \in [-6, 6]$, $y \in [-6, 6]$, and $z \in [0, 12]$, hence corresponding to the central domain of the simulation of Pariat et al. (2009). The data used for the present analysis correspond to the full 3D velocity and magnetic vector fields.

The magnetic field presents a finite level of nonsolenoidality ($\Delta \cdot \mathbf{B} \neq 0$), unavoidably induced by the discretized data set, that limits the precision of the helicity computation (see Section 7 of Valori et al. 2016). To quantify the impact of this effect, following Valori et al. (2016), we determine the nonsolenoidal energy E_{ns} introduced by Valori et al. (2013). This energy corresponds to the sum of artifact additional contributions, due

to finite nonsolenoidality of \mathbf{B} , to the Thompson decomposition of energy. As mentioned in Pariat et al. (2015), the ratio E_{ns}/E of the nonsolenoidal energy to the total magnetic energy is lower than 0.1%: it highlights the excellent solenoidality of the magnetic field data. Since the nonsolenoidality is the largest source of errors in helicity calculation (Valori et al. 2016), such a small value supports the excellent precision on the helicity computation.

3.1.2. Flux Emergence Simulations

The next two tests employed in our study are based on the 3D visco-resistive MHD numerical experiments of Leake et al. (2013, 2014). The two simulations considered here present the emergence of the same twisted magnetic flux rope from the upper convection zone into the stratified solar atmosphere (see Figure 2). In the coronal domain, a constant value for the resistivity is assumed, $\eta = 0.01$. These simulations have also been analyzed by Valori et al. (2016), Guennou et al. (2017), and Pariat et al. (2017).

For our present analysis, the flux rope emerges at the bottom boundary, the minimum temperature region emulating the solar photosphere, and forms a solar-like bipolar active region. The

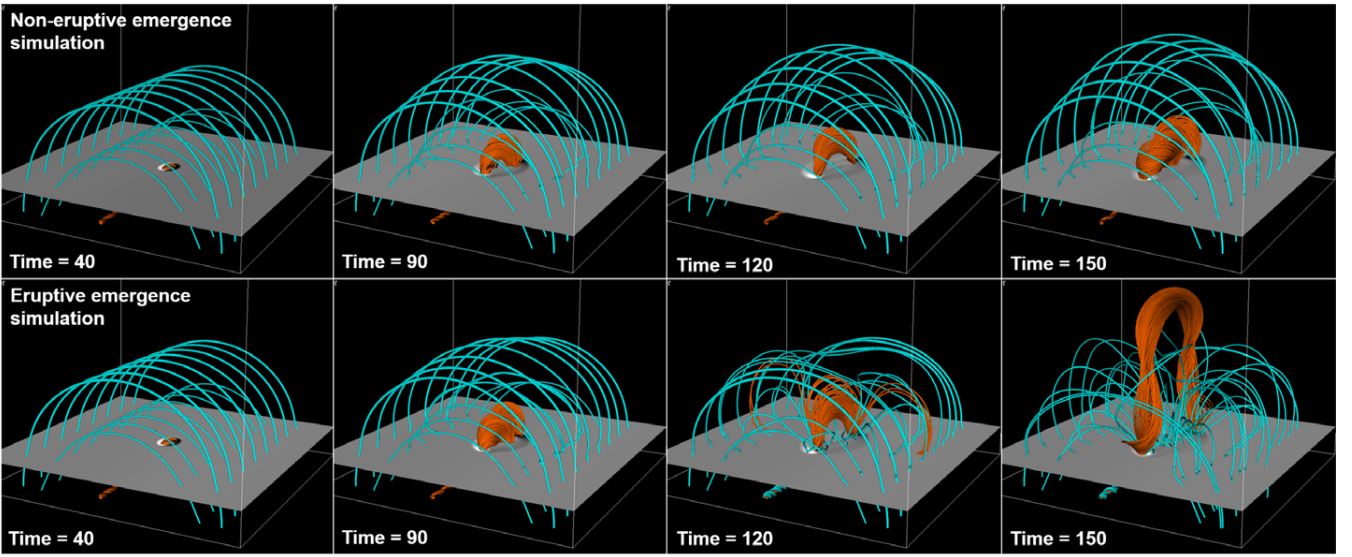


Figure 2. Snapshots comparing the evolution of the magnetic field in the eruptive (bottom row) and noneruptive (top row) flux emergence simulations. The orange (cyan) field lines initially belong to the emerging flux rope (arcade). The grayscale 2D surface displays the distribution of the magnetic field at the simulated photospheric level. Only the coronal domain, above that boundary, is considered in the present study.

simulations last between $t = 0$ and $t = 200$ in the nondimensional units of the system (see Leake et al. 2013, for more details). The flux rope pierces through the photospheric boundary at $t = 30$. Before that time, the flux rope is moving through the convection zone, a domain not considered in our study.

The same initial twisted magnetic flux rope emerges into a potential coronal field presenting an arcade structure of different intensity and orientation. In Leake et al. (2013) the magnetic arcade is parallel with the top magnetic field of the emerging flux rope. In this setup, the emerging flux rope remains contained within the coronal domain and stabilizes itself. No impulsive ejection of magnetic structure is observed. In the present paper, we analyze the particular simulation obtained with a medium intensity field arcade (MD case in Leake et al. 2013), and we designate it as “noneruptive emergence” throughout this paper.⁴

The second flux emergence simulation that we analyze has an opposite direction of the arcade field compared to the first simulation (MD case in Leake et al. 2014). We refer to this simulation as “eruptive emergence.”⁵ In this geometry, magnetic reconnections between the emerging flux rope and the surrounding arcade field are favored. The emergence of the flux rope eventually induces an eruption: a secondary flux rope is formed, following the emergence, that eventually becomes unstable and is impulsively ejected upward toward the top boundary. The eruption develops between $t \sim 120$ and $t \sim 150$, a period during which the axis of the flux rope presents a high upward velocity before eventually leaving the numerical domain. During the post-eruptive phase, the system relaxes toward a stable configuration.

The original simulations are performed on a 3D irregular Cartesian mesh. Only the coronal domain of the magnetic and velocity field data is extracted and is remapped onto a 3D uniform Cartesian grid using trilinear interpolation. The analyzed-volume range is $x \in [-100, 100]$, $y \in [-100, 100]$,

and $z \in [0.36, 150]$ in the nondimensional units of Leake et al. (2013, 2014). While the domain analyzed is the same as in Valori et al. (2016) and Pariat et al. (2017), the interpolation is performed on a grid with a higher resolution. The number of pixels is 1.5 times larger in each direction compared to the previous helicity analyses. The grid is composed of 311 mesh points along both the horizontal directions, x and y , and 232 along the vertical direction, z .

As with the jet simulation, the divergence of \mathbf{B} is not exactly null, and the energy decomposition presents a finite value of E_{ns} . The value of the ratio E_{ns}/E is lower than 1.5% once the flux rope starts to emerge. Thus, the level of nonsolenoidality remains low, ensuring a good reliability in our calculation of the helicity, as follows from the tests performed in Valori et al. (2016).

3.2. Volume Helicity Estimation

The output of the different simulations are datacubes, on a uniform cuboid Cartesian grid, of the magnetic field \mathbf{B} , the plasma-velocity field \mathbf{v} , and the plasma thermodynamical quantities (not used here). From the 3D magnetic field, the different magnetic helicities, H_v , H_j , and H_{pj} , can be directly computed at each time step.

In the present study, we adopt the method of Valori et al. (2012): at each time step of the simulations, from $\mathbf{B}(t)$ we compute its respective potential magnetic field, $\mathbf{B}_p(t)$, from its scalar potential, $\phi(t)$, which is obtained from a numerical solution of the Laplace Equation (3).

Then, the respective potential vectors $\mathbf{A}(t)$ and $\mathbf{A}_p(t)$ can be computed with a few 1D integrations (see Equation (14) of Valori et al. 2012). This method assumes that the potential vectors satisfy the DeVore gauge (DeVore 2000), in which their vertical component is null at every instant and every point in the domain, i.e.,

$$A_z(x, y, z, t) = A_{p,z}(x, y, z, t) = 0. \quad (65)$$

This condition does not uniquely define the vector potential. Following Pariat et al. (2015, 2017) for the jet and the

⁴ This simulation was denoted “No Erupt MD” in Pariat et al. (2017).

⁵ It was denoted “Erupt MD” in Pariat et al. (2017).

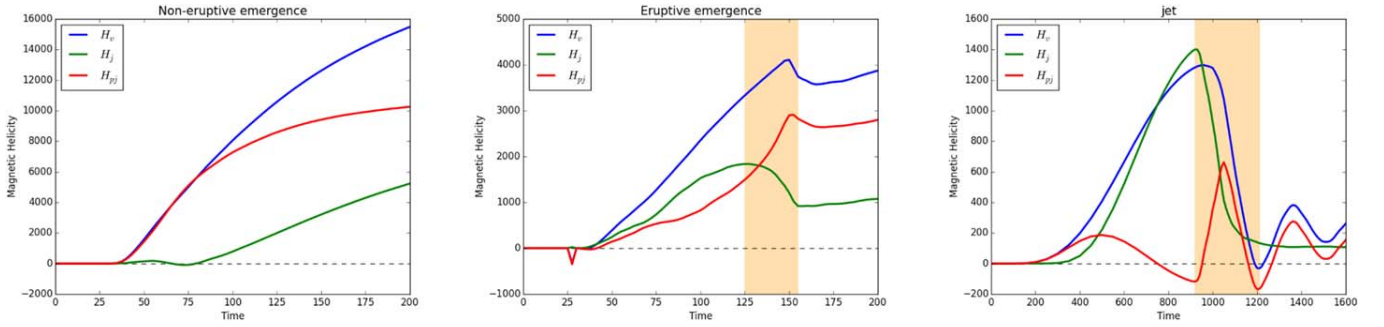


Figure 3. Time evolution of the different magnetic helicities: the relative magnetic helicity (blue lines; Equation (4)), the volume-threading helicity (red lines; Equation (7)) and the nonpotential magnetic helicity (green lines; Equation (6)), for the different simulations studied: from left to right, the noneruptive emergence simulation, the eruptive emergence, and the simulation of the generation of a solar coronal jet. For the eruptive emergence and the jet simulations the yellow vertical band corresponds to the eruptive phases.

emerging flux simulations, respectively, our numerical computation of A_p enforces the Coulomb gauge ($\nabla \cdot A_p = 0$). Following Pariat et al. (2015), this gauge choice is referred to as the DeVore–Coulomb gauge. Additionally, the 1D integration starts at the top boundary of the domain (at height z_{top}), where we enforce the relation

$$A(x, y, z = z_{\text{top}}, t)_{\perp} = A_p(x, y, z = z_{\text{top}}, t)_{\perp}. \quad (66)$$

Finally, the helicities are obtained from this volume integration method using Equations (4), (6), and (7). As mentioned earlier, the resulting helicity shows a residual gauge dependence due to the finite level of solenoidality of \mathbf{B} unavoidably induced by the discretized data set. In our simulations, the errors introduced are minimal and do not affect the helicity estimations, thanks to the low value of E_{ns} (see Section 3).

In Figure 3, we plot the time evolution of the three helicities of our study for the different simulations. We note that for the noneruptive flux emergence simulation, the relative helicity of the system is dominated by the H_{pj} component. For the eruptive flux emergence simulation, the helicity is dominated by H_j before the onset of the eruption (before $t \sim 120$), and then by H_{pj} once the system is relaxing after the eruption. This property has been studied in Pariat et al. (2017) and Zuccarello et al. (2018), who showed that the ratio H_j/H_v was a very good marker of the eruptivity of these simulations.

We observe for the jet simulation that while in the very beginning of the energizing the relative helicity is mostly constituted by H_{pj} (for $t < 400$), the system becomes dominated by H_j between $t \sim 400$ and $t \sim 900$, up until the onset of the jet. After the jet formation, H_j decreases substantially and the system is on average dominated by H_{pj} . This simulation thus seems to confirm the results of Pariat et al. (2017) and Zuccarello et al. (2018); the ratio H_j/H_v appears closely related to the eruptivity in the system; this ratio is low at the start of the energizing, where the system is departing from a potential configuration, becomes high before the onset of the eruptive behavior, and drops to a low value after the eruption, when the system relaxes to a stable state.

3.3. Time Variation Estimations

One goal of the present study is to verify numerically our analytical derivation of the time variations of the nonpotential and volume-threading helicities (Equations (6) and (7)). From three successive outputs of the studied MHD system,

corresponding to three instants separated by a time interval Δt , we directly compute their helicity variation rate for the instant t :

$$\frac{\Delta H_x(t)}{\Delta t} = \frac{H_x(t + \Delta t) - H_x(t - \Delta t)}{2\Delta t}, \quad (67)$$

with x standing for either j or pj .

Along with the estimation of the helicities in the volume and their time differentiation ($\Delta H_j/\Delta t$ and $\Delta H_{\text{pj}}/\Delta t$; see Section 3.2), we also evaluate their instantaneous time variation, dH_j/dt and dH_{pj}/dt from Equations (28) and (36).

Our analysis is performed within the resistive MHD paradigm. Besides the resistive term, any other nonideal contributions are not treated by the numerical solvers in the simulations. For our numerical computation of the helicity variations terms, the nonideal effects are thus limited to the inclusion of the dissipation term in Equations (49), (54), (50), and (56).

In the particular case of the jet simulation, the ideal MHD equations are solved, and the resistivity, η , is not specified. Pariat et al. (2015) demonstrated that the helicity dissipation is extremely low for that simulation. Consequently, in the following, for the jet simulation we assume that $\eta = 0$.

The estimation of the latter quantities requires, in addition to the 3D magnetic field, \mathbf{B} , the knowledge of the velocity field, \mathbf{v} , at the boundary of the domain. Moreover, using the magnetic field, the potential magnetic field and the vector potentials are obtained from the volume estimation procedure (see Section 3.2). The different terms that appear in the instantaneous time variation (Equations (28) and (36)) are estimated independently, even though, as already noted in Section 2.4, most of them are not independently gauge invariant. For the quantities that correspond to fluxes, the determination of the surface integrals is calculated systematically as the sum of the contributions from the six boundaries.

It should be noted that for the emergence simulations, for $t \in [25, 30]$, when the top of the flux rope starts to pierce through the photospheric-like layer, the bottom boundary of the data set we analyze, some quantities involve small values, which introduce numerical errors in our helicity estimations. For example, this can be observed in Figure 3(c) as a small peak in the evolution of H_{pj} at $t = 27$ for the eruptive emergence. This numerical artifact leads to fluctuations in the estimation of most terms of the instantaneous time variation, even though the helicities have very small values. To correct

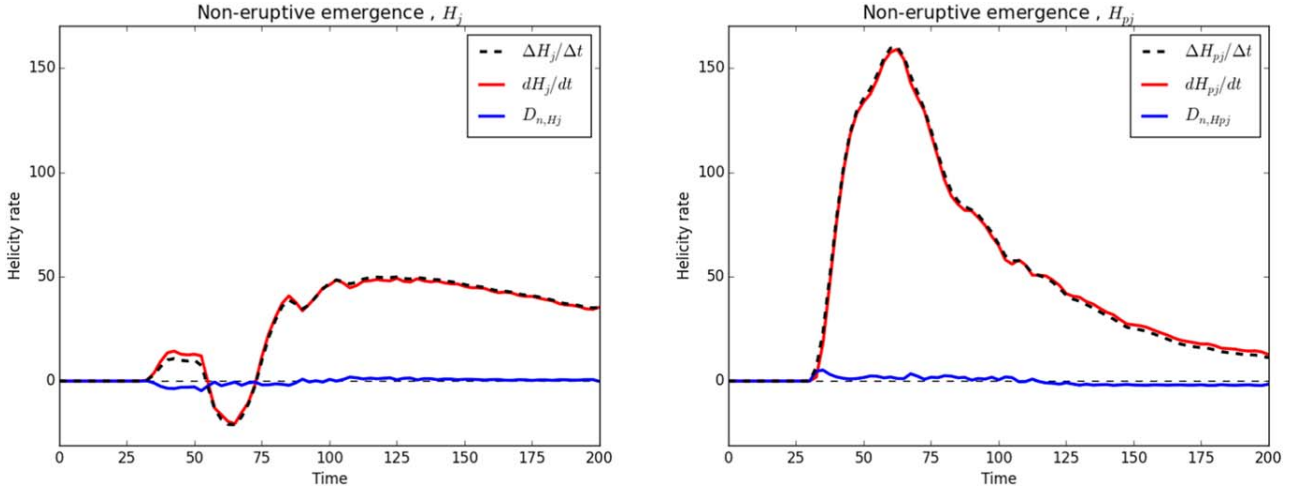


Figure 4. Time evolution of the helicity variation rates, $\Delta H_j/\Delta t$ and $\Delta H_{pj}/\Delta t$ (dashed black curves; Equation (67)), the instantaneous time variations, dH_j/dt and dH_{pj}/dt (solid red curves; Equations (28) and (36)), and the differences of these quantities, $D_{n,j}$ and $D_{n,pj}$ (solid blue curves; Equation (68)), for the noneruptive flux emergence. The left and right panels present the evolution of the nonpotential helicity, H_j , and volume-threading helicity, H_{pj} , respectively.

this problem, we thus set all helicity terms equal to zero for $t < 27$.

3.4. Numerical Validation

In order to validate the analytical derivation of the time variation of the terms in the helicity decomposition (Equations (28) and (36)), we will compare the estimation of the time derivative of the helicity rates obtained from the volume integration method ($\Delta H_j/\Delta t$ and $\Delta H_{pj}/\Delta t$; Equation (67)) with the estimation of the instantaneous time variation (dH_j/dt and dH_{pj}/dt ; Equations (28) and (36)), as discussed in Section 3.3.

Since the numerical evaluation of both the instantaneous time variation of a quantity and its time differentiation involves many operations, some numerical errors are always expected when comparing them. Studying the evolution of relative magnetic helicity, Pariat et al. (2015) found that for the jet simulation, during the quasi-ideal phase, before the onset of the jet, a relative error of about 0.001 exists between the instantaneous rate and the differentiation of the volume quantity. Here, although using different routines, we obtain the same result for H_v as Pariat et al. (2015). This previous test suggests that both results are numerically correct and that these routines can be used for the calculation of the terms in our analytical time variations of H_j and H_{pj} (Equations (28) and (36)).

As noted in the previous section, since the simulations are de facto solving the resistive MHD equation, the additional nonideal contributions are not considered with this paradigm. In order to numerically validate our analytical formula and quantify the correspondence between the left- and right-hand terms of Equations (28) and (36), we evaluate the differences:

$$D_{n,x} = \frac{\Delta H_x}{\Delta t} - \frac{dH_x}{dt} \quad (68)$$

where x corresponds to either j or pj .

Figures 4–6 present the evolution of the time derivative of the volume helicities, the instantaneous variation rate, and their difference. In Figure 6 we note that during the quasi-ideal phase, before the onset of the jet, $D_{n,x}$ remains extremely small, similarly to what has been obtained for the relative helicity H_v .

The mean ratio of $|D_{n,j}|$ to $|dH_j/dt|$ is lower than 3%, and less than 7% for the ratio of $|D_{n,pj}|$ to $|dH_{pj}/dt|$ during that phase. Dissipation being null in ideal MHD, this very low value is coherent with the theory and shows that numerical errors are also very low. The low values of $|D_{n,x}|$ confirm the validity of Equations (28) and (36) about the helicity time variations, which constitute the central result of this study.

During the nonideal phase of the jet simulation, strong nonideal effects are present with intense magnetic reconnections. While the D_n differences present larger values than during the quasi-ideal phase, mostly through the form of fluctuating peaks, their intensity is very weak in comparison with the values of dH_x/dt . During the eruption phase, the mean ratio of $|D_{n,j}|$ to $|dH_j/dt|$ is also about 12%, and 6% for that ratio of $|D_{n,pj}|$ to $|dH_{pj}/dt|$. Equations (28) and (36) are thus valid to a very high degree of accuracy.

As mentioned in Section 3.3, for the flux emergence simulations, we are able to calculate nonideal effects related to the resistivity. Thus, $D_{n,x}$, presented in Figures 4 and 5 for the eruptive and the noneruptive simulations, respectively, is almost entirely associated with numerical errors.

The difference between $\Delta H_x/\Delta t$ and dH_x/dt remains relatively low with respect to the values reached by these quantities. There is an exception, however, during the very initial phase of the flux emergence, for both the eruptive and noneruptive cases, during which the curves of $\Delta H_j/\Delta t$ appear distinct from the ones of dH_j/dt . For $t \in [25, 60]$, we note a high value of $D_{n,j}$ for H_j . This effect is more particularly pronounced for the time variation of H_j . During this period, the mean ratio of $|D_{n,j}|$ to $|dH_j/dt|$ is 14% for both simulations.

We hypothesize that this value of $D_{n,x}$ during that period is due to a temporal undersampling due to relatively low-cadence data available. This phase indeed corresponds to the moment when the flux rope emerges into the coronal domain though the model photosphere, when the bottom boundary in our calculation thus exhibits relatively fast changes.

Neglecting this initial phase, one observes that the values of $D_{n,x}$ remain overall significantly smaller than the values of dH_x/dt . The mean ratios of $|D_{n,j}|$ to $|dH_j/dt|$ and $|D_{n,pj}|$ to $|dH_{pj}/dt|$ are lower than 9% for the eruptive emergence and lower than 5% for the noneruptive simulation.

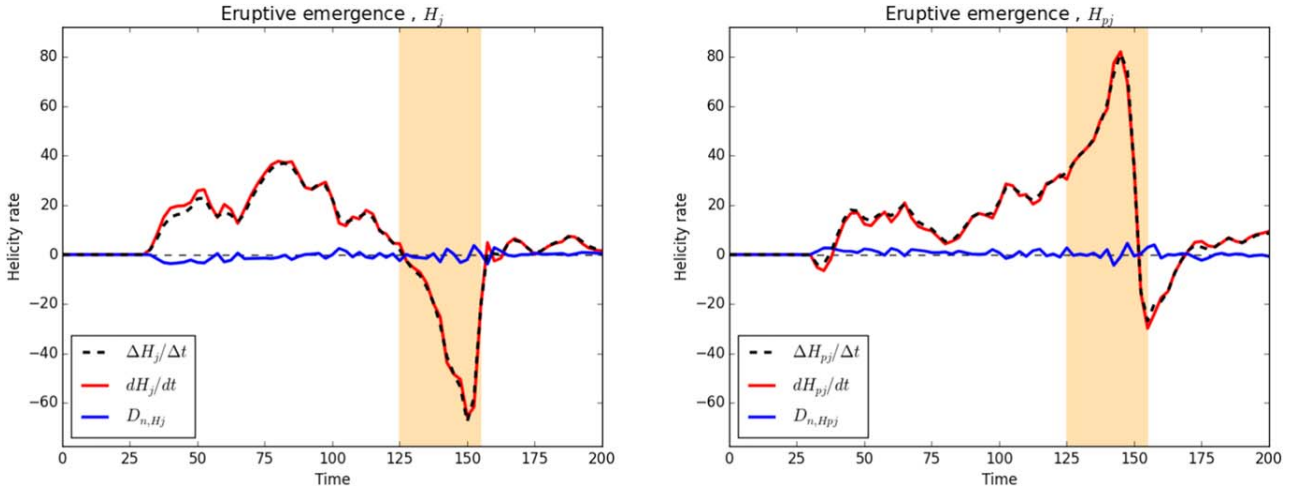


Figure 5. Same as Figure 4, but for the eruptive flux emergence simulation. The yellow bands correspond to the eruptive phase.

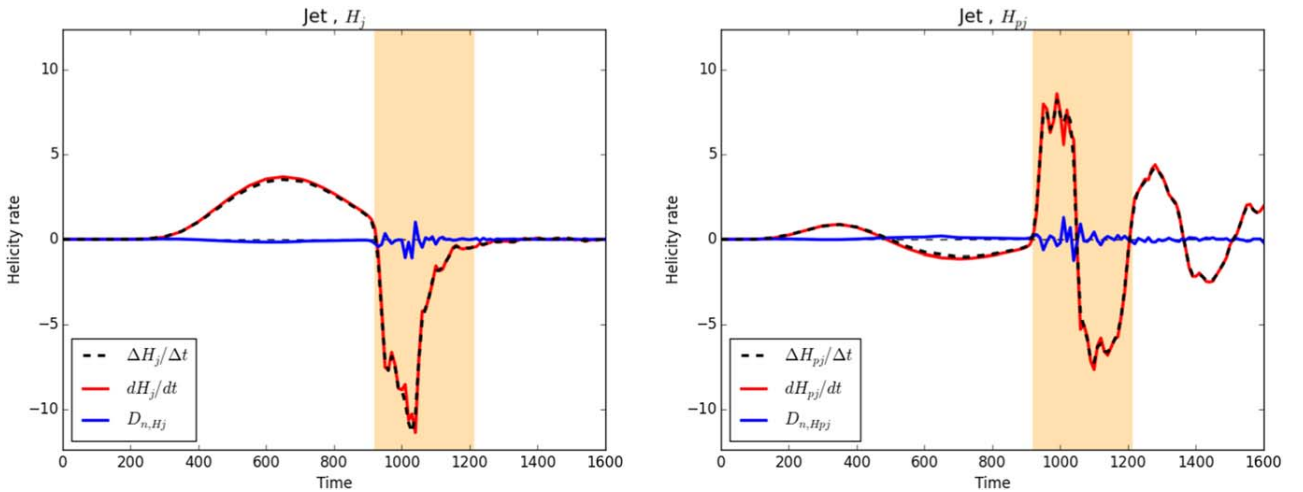


Figure 6. Same as Figure 4, but for the coronal jet simulation. The yellow bands correspond to the eruptive phase.

From the analysis of these three numerical simulations, we conclude that our estimation of dH_x/dt enables a consistent evaluation of the helicity and that Equations (28) and (36) for the time variation of H_j and H_{pj} are satisfactorily numerically verified.

3.5. Helicity Fluxes

In Figures 7 and 8, we compare the different terms that compose the instantaneous time variation of H_j (Equation (28)) and H_{pj} (Equation (36)), respectively. As described in Section 2.4, only the transfer term, the dissipation term, and the sum of the fluxes, $dH_x/dt|_{\text{Own}}$, are gauge invariant. The fluxes, $F_{\alpha,Ap}$ and $F_{\alpha,Aj}$ (with $\alpha \in \{Vn, Bn, Aj, \phi, \text{Nonideal}\}$), are gauge dependent. Therefore, computed with different gauges, the curves in Figures 7 and 8 might be noticeably different, e.g., as shown in the Appendix. As the individual terms nonetheless inform on the dynamics of the helicity variations within the adopted gauge, we briefly present their evolution here.

In Figures 7 and 8, $dH_x/dt|_{\text{Transf}}$, which is a volume contribution, is not small compared to the other fluxes. It

confirms that H_{pj} and H_j are not conserved quantities. In other words, their time variations cannot be written as only the sum of surface contributions. We also see in Figure 7 that for the three simulations the curves of $\Delta H_j/\Delta t$ are frequently overlaid by $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$. The transfer term seems to be essential to understand the evolution of helicities, in particular, for the jet simulation (see Figure 7, right panel), where the other terms are negligible compared to $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$. This term will thus be studied in more detail in Section 3.6.

Unlike the jet simulation, the flux emergence simulations do not possess a quasi-ideal phase, and a finite level of nonideality is present as soon as the emerging flux rope enters in the coronal domain. This can be seen with non-null values of $dH_x/dt|_{\text{Diss}}$ and F_{Nonideal} presented in Figures 7 and 8 during the whole simulation. As expected, the intensity of these terms is very low. In other words, nonideal effects seem to have only a small impact on the temporal evolution of helicities.

A difference between the emergence simulations and the jet simulation is the mechanism by which magnetic energy and helicity accumulate in the system. In the jet simulation, helicity is inputted at the boundary by a purely rotational motion of a

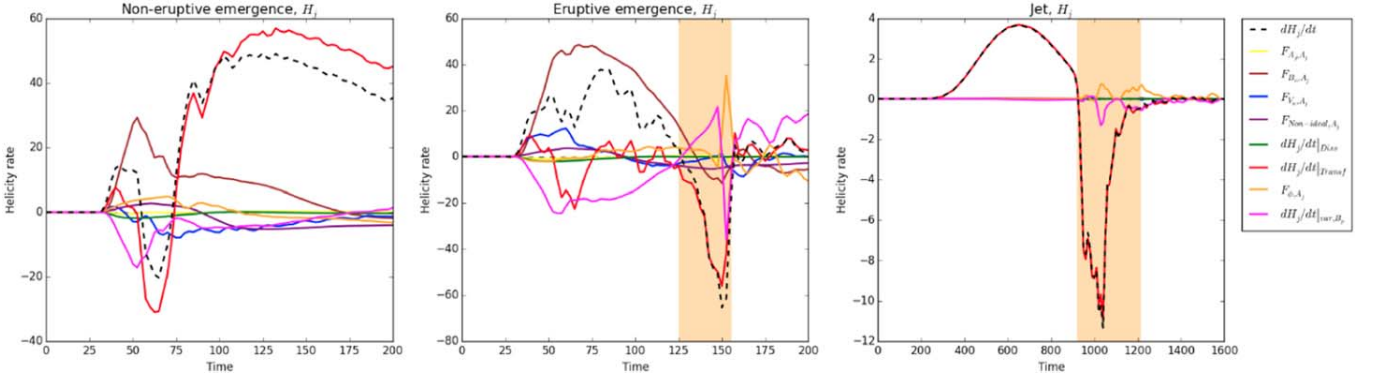


Figure 7. Time evolution of the nonpotential helicity variation rate (dashed black line; dH_j/dt ; Equation (28)) and the different terms constituting the instantaneous time variation of H_j (Equation (28)): F_{A_j, A_j} (yellow line; Equation (34)), F_{B_n, A_j} (brown line; Equation (33)), F_{V_n, A_j} (blue line; Equation (32)), $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ (red line; Equation (30)), F_{ϕ, A_j} (orange line; Equation (35)), $dH_j/dt|_{\text{Bp, var}}$ (magenta line; Equation (31)), F_{Nonideal, A_j} (purple line; Equation (56)), and $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ (green line; Equation (49)). From left to right: the noneruptive emergence simulation, the eruptive emergence simulation, and the simulation of the generation of a solar coronal jet. The yellow bands are the same as in Figure 3.

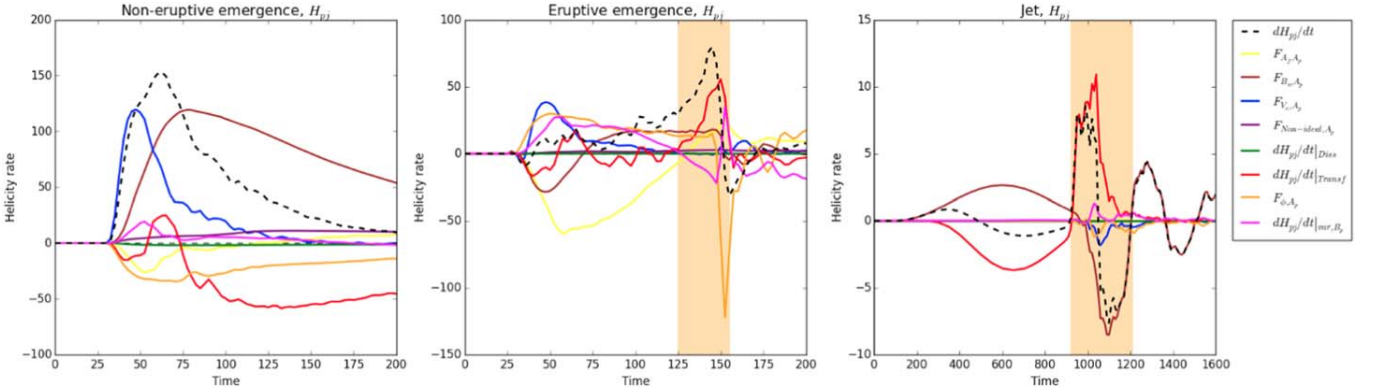


Figure 8. Time evolution of the volume-threading helicity variation rate (dashed black line; dH_{pj}/dt ; Equation (36)) and the different terms constituting the instantaneous time variation of H_{pj} (Equation (36)): F_{A_j, A_p} (yellow line; Equation (42)), F_{B_n, A_p} (brown line; Equation (41)), F_{V_n, A_p} (blue line; Equation (40)), $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$ (red line; Equation (38)), F_{ϕ, A_p} (orange line; Equation (43)), $dH_{pj}/dt|_{\text{Bp, var}}$ (magenta line; Equation (39)), F_{Nonideal, A_p} (purple line; Equation (56)), and $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$ (green line; Equation (54)). From left to right: the noneruptive emergence simulation, the eruptive emergence simulation, and the simulation of the generation of a solar coronal jet. The yellow bands are the same as in Figure 3.

symmetric field distribution that leaves the potential field unchanged. Here symmetry and flow geometry account for lots of cancellation. Because of this, all the surface terms F_{α, A_j} are almost null in the right panel of Figure 7. Only F_{ϕ, A_j} displays a weak variation during the jet, indicating the sudden load change of the reference magnetic field B_p caused by the reconnections.

On the contrary, for the emergence simulations, A_j changes during the passage of the flux rope through the bottom boundary. This leads to significant contributions of the different flux terms during the pre-eruptive phase, as displayed by the evolution of the terms F_{V_n, A_j} and F_{B_n, A_j} . During the eruption, for the eruptive emergence simulation as with the jet case, the scalar potential ϕ changes abruptly, and therefore so do $dH_j/dt|_{\text{Bp, var}}$ and F_{ϕ, A_j} . It is a consequence of the boundary modification conditions for the Laplace equation due to the transit of eruption through the surface.

The flux F_{α, A_p} presented in Equation (36) depends not on A_j but on the vector potential A_p . For the emergence simulations, A_p changes significantly in emergence phase, yielding the dominant role of F_{B_n, A_p} and F_{V_n, A_p} .

3.6. Transfer between H_j and H_{pj}

Figures 9–11 show the time variation of H_j and H_{pj} in the gauge-invariant form of Equations (52) and (53) for the noneruptive flux emergence, the eruptive flux emergence, and the jet simulations, respectively. For the emergence simulations, the dissipation $dH_x/dt|_{\text{Diss}}$, which is explicitly calculated, is completely negligible compared to the two other terms. As mentioned in Section 3.5, nonideal terms are not null, but their intensity is very low. In the case of the relative magnetic helicity, a weak dissipation was sufficient to conclude that H_v is very well conserved (Pariat et al. 2015). This is not the case for H_j and H_{pj} because of the transfer term. Overall, in Figures 9–11 we observe that the volume transfer terms, $dH_x/dt|_{\text{Transf}}$, tend to have important values and frequently dominate the helicity variations. This is the key result of the analysis of these numerical simulations. As discussed earlier (see Section 2.4), these terms are pure volume terms. The presence of the transfer thus confirms that H_j and H_{pj} are not conserved quantities, unlike relative magnetic helicity, which is very well conserved for these simulations. Additionally, we observe that the dynamics of the helicity decomposition is often

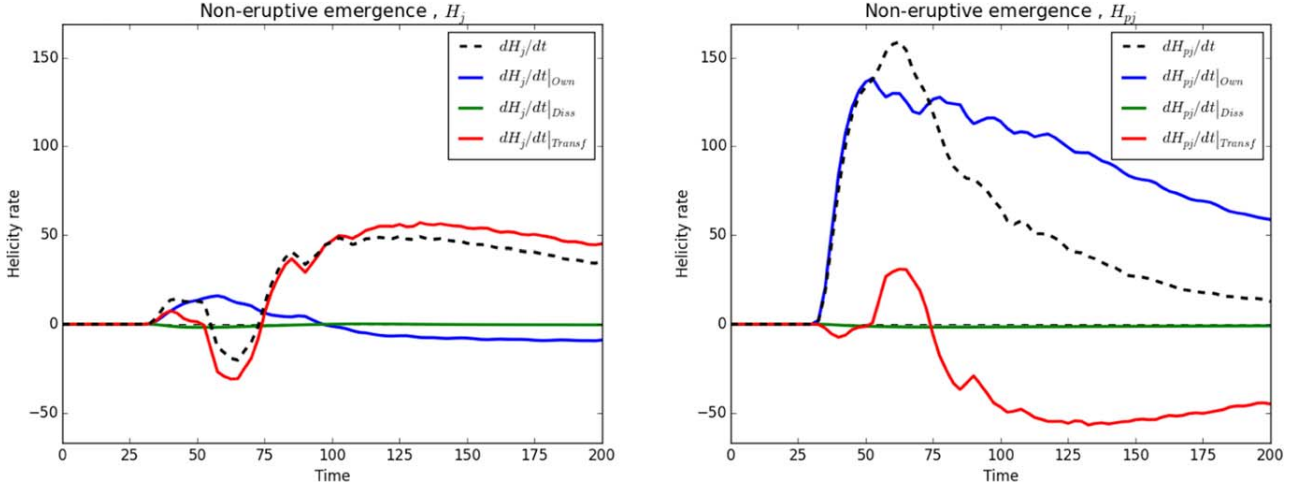


Figure 9. Time evolution of the helicity variation rates, dH_j/dt and dH_{pj}/dt (dashed black curves; Equations (28) and (36)), of the helicity transfer rates, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$ (solid red curves; Equations (30) and (38)), of the “Own” rates, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ (solid blue curves; Equation (51) and (55)), and of the dissipation rates, $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$ (solid green curves; Equations (49) and (54)) for the noneruptive emergence simulation. The left and right panels present the evolution of the nonpotential helicity, H_j , and volume-threading helicity, H_{pj} , respectively.

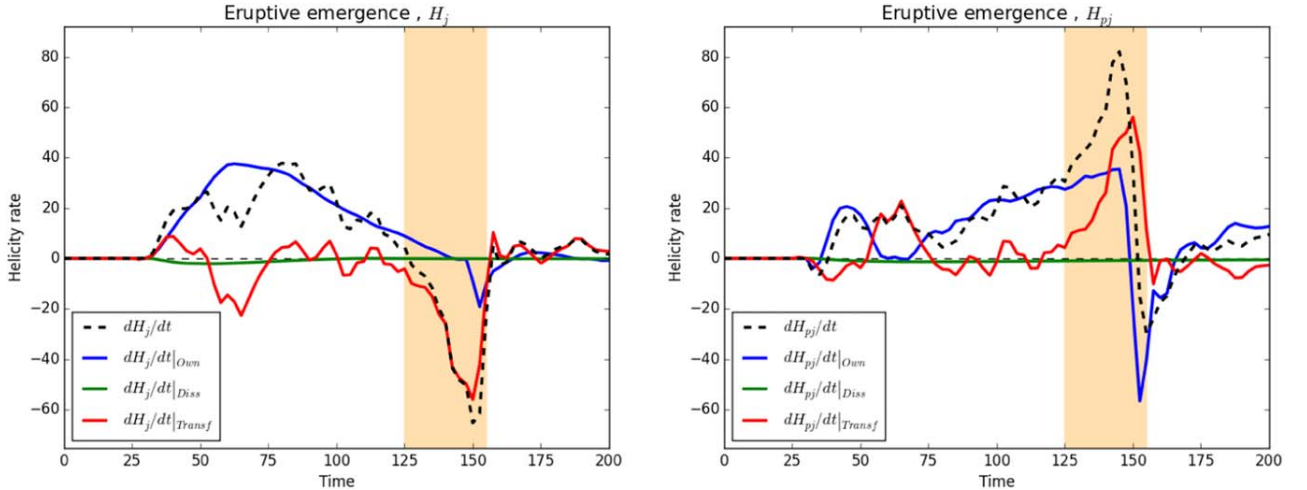


Figure 10. Same as Figure 9, but for the eruptive flux emergence simulation. The yellow bands correspond to the eruptive phase.

dominated by the exchange between H_j and H_{pj} , rather than their own fluxes through the volume boundaries. This is particularly true for H_j , for which the $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ term is usually unimportant in two out of three cases. These results have important consequences for the estimation of H_j in the solar context, as will be discussed in Section 4.

Figures 9–11, along with Figure 3, allow us to follow the dynamics of the exchange between H_j and H_{pj} in the volume, as well as their exchange with the environment, in the different simulations. The noneruptive emergence case is the most straightforward to analyze. In the left panel of Figure 3, we distinguish two main behaviors: before $t \sim 80$, H_v is increasing along with H_{pj} , and after $t \sim 80$, H_j starts to grow. The intensity of H_{pj} is still increasing but is tending to a constant value. For $t \in [25, 80]$, corresponding to the emergence of the flux rope, we note in Figure 9 that $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ is the predominant flux (in particular owing to $F_{Vn,Ap}$ and $F_{Bn,Ap}$ in this gauge; Figure 8). During this period, H_j fluctuates weakly because of the exchange with H_{pj} (see left panel of Figure 3). Figure 9 (left panel) allows an additional understanding of

Figure 3: after $t \sim 80$, H_j is increasing not because of its flux through the surface but only as a result of the transfer term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$. While $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ (see Figure 9, right panel) is still dominating the variation of H_{pj} , a large portion of it is directly transferred to H_j , thanks to the significant negative values of $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$. These oppositely signed terms partly balance each other and explain why the rise of H_{pj} is slower than before $t \sim 80$ (see Figure 3, left panel). We also note that $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ is negligible during most of the simulation (left panel of Figure 9): the low fluctuations of this term may be related to the helicity measurement error $D_{n,j}$ (see Figure 4), which is relatively important before $t \sim 80$ (see Section 3.4).

The situation is more complicated for the eruptive emergence simulation. Indeed, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ presents a significant intensity during the whole simulation (see Figure 10). The “Own” terms could be due not only to emergence flows but also to the pervasive reconnection between the emerging flux and the coronal arcade fields. This reconnection starts as soon as the flux emerges through the photosphere. Thus, $dH_x/dt|_{\text{Own}}$ is more important than in the noneruptive simulation, where

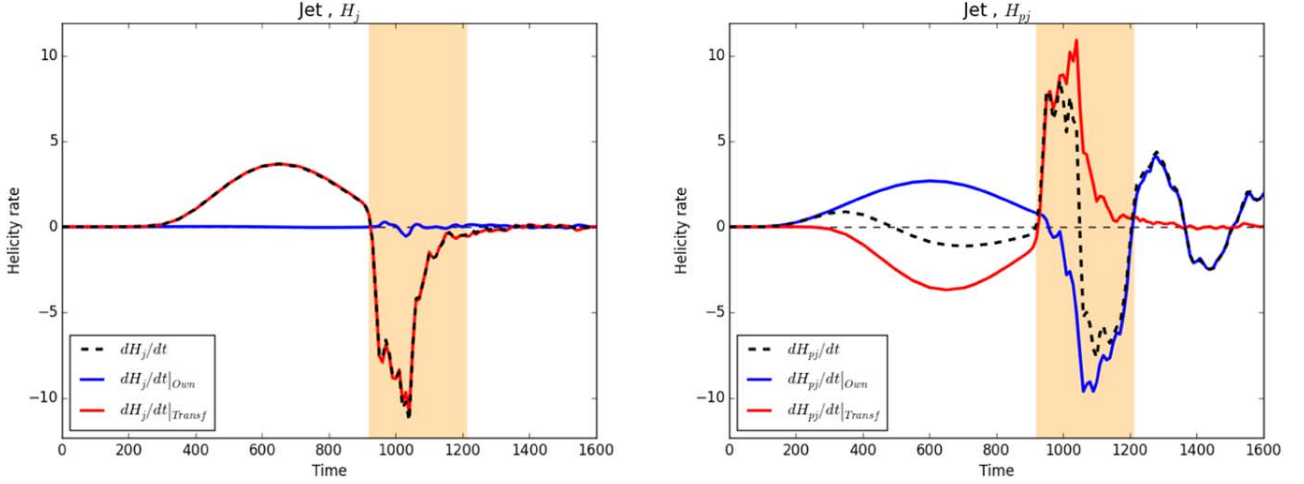


Figure 11. Same as Figure 9, but without the dissipation rates, $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ (Equation (49)) and $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$ (Equation (54)). For this simulation, these terms are assumed to be null. The yellow bands correspond to the jet eruption phase.

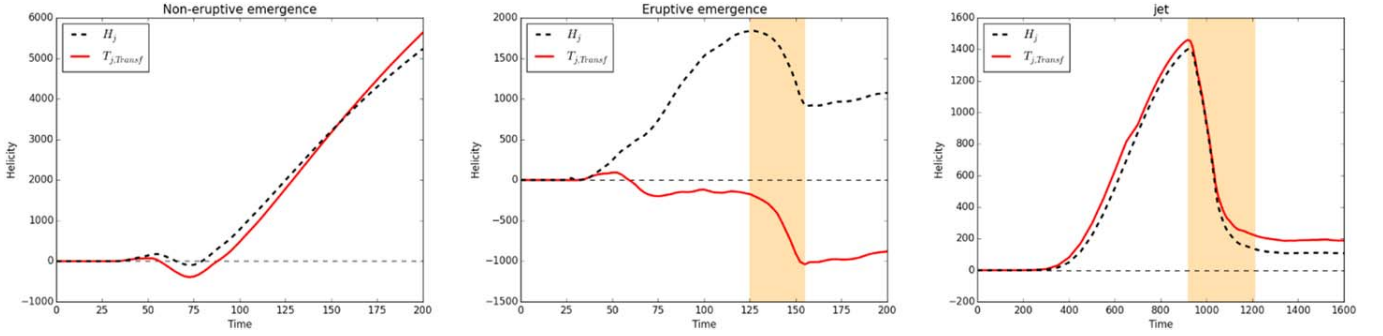


Figure 12. Time evolution of the nonpotential helicity H_j (dashed line; Equation (6)) and the time integral of the transfer rate $T_{j,\text{Transf}}$ (red lines; Equation (69)) for the nonruptive emergence simulation (left panel), the eruptive emergence simulation (middle panel), and the simulation of the generation of a solar coronal jet (right panel). The yellow vertical bands are the same as in Figure 3.

there is less reconnection early on and where the ‘‘Own’’ terms are likely due to the surface flows.

In Figure 10, after $t \sim 75$, the $dH_x/dt|_{\text{Own}}$ terms are higher than the transfer term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$. The transfer term is weaker and hovers around zero during most of the pre-eruptive phase. Suddenly, after $t \sim 150$, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ becomes negative and dominant. While H_j decreases (see Figure 3, middle panel), H_{pj} increases quickly because of the conversion of H_j . Consequently, H_v still increases. However, after $t \sim 150$, H_{pj} decreases because of the ejection of the magnetic structure through the top boundary (and consequently a decrease of H_v is observed). We observe in Figure 10, as indicated by the dominant values of $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ during the eruption phase, that the nonpotential helicity H_j is not directly expelled through the system boundaries: during the eruption phase, it is first transformed into H_{pj} . This quantity is then ejected outside, around $t \sim 150$, as seen by a negative peak of $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$. Overall, Figure 10 explains why the decrease of H_{pj} and H_v shows a delay with the decrease of H_j during the eruption (as seen in Figure 3, middle panel).

In the jet simulation, the energy and helicity do not increase in the volume by the emergence of a magnetic structure, but by the boundary shearing motions. During the whole ideal phase, before $t \sim 920$, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ is negligible. The injection of helicity from the external domain is primarily provided by the flux of H_{pj} (thanks to $F_{\text{Bn,Ap}}$ in the gauge used in this paper; see

Figure 8): only H_v and H_{pj} increase before $t \sim 350$ (see Figure 3, right panel). While initially $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ dominates $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, very rapidly the situation changes: $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ becomes the dominant term and dH_{pj}/dt becomes negative after $t \sim 500$ (see Figure 11, right panel), H_{pj} decreases to the benefit of H_j . In Figure 3, we see that H_v is increasing along with H_j , and that H_{pj} decreases. Without the analysis of Figure 11, one could imagine, when observing the right panel of Figure 3, that H_v is increasing directly owing to the injection of H_j . However, the situation is more complex. Because of the injection of currents, the increase of H_v is still due to an injection of H_{pj} through the boundary; however, a conversion from H_{pj} to H_j is occurring simultaneously at an even higher rate, as shown by the dominant values of $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ (see Figure 11). Hence, in Figure 3 (right panel), H_{pj} decreases and both H_j and H_v increase. At the moment of the jet, after $t \sim 920$, we find again the same behavior as during the eruptive emergence simulation: a fast transfer of H_j to H_{pj} directly followed by ejection of H_{pj} through the boundaries, as indicated by the succession of a positive peak of $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$ followed by a negative peak of $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ (see Figure 11, right panel). This conversion seems to be a marker of the beginning of eruptive activity.

Overall, the analysis of the evolution of the terms of the helicity decomposition in the three simulations shows that the flux H_j from outside of the system, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$, is either

positive or negligible compared to the transfer term. In that respect, while the increase of the nonpotential helicity can be due to its own flux, the decrease of H_j seems to be mainly related to its conversion to H_{pj} . Moreover, this transfer (probably related to the ongoing magnetic reconnections) appears as the first phase of an eruption.

As discussed before, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ frequently dominates the variation of H_j , during either the non-/pre-eruptive or eruptive phases. To highlight its impact on the evolution of H_j , Figure 12 presents the time integral, $T_{j,\text{Transf}}$, of the transfer term:

$$\begin{aligned} T_{j,\text{Transf}} &= \int^t \frac{dH_j}{dt'} \Big|_{\text{Transf}} dt' \\ &= -2 \int^t \int_V ((\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p) dV dt'. \end{aligned} \quad (69)$$

As can be seen in the right panel of Figure 12, for the jet simulation, the behaviors of $T_{j,\text{Transf}}$ and H_j are very similar: the curves overlap with only a small deviation toward the end of the simulation. The same is also true for the noneruptive emergence simulation (see Figure 12, left panel). This result is the direct consequence of the relatively low value of $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ for these two simulations (see Figures 9 and 11, left and right panels). The evolution of H_j in these two cases is directly related to its conversion from H_{pj} . In the eruptive emergence simulation in Figure 10, the term $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ is not negligible compared to the transfer term. Consequently, in the middle panel of Figure 12, $T_{j,\text{Transf}}$ does not overlap with H_j . In other words, H_j cannot be computed by only considering the integral of the transfer term, which is what was expected if one only looks at the jet and noneruptive simulations. However, $T_{j,\text{Transf}}$ also allows us to locate the eruption, as can be done with H_j . The instant $t \sim 125$, where H_j decreases, exactly coincides with the main drop of the transfer term. This confirms that H_j losses are linked to a conversion toward H_{pj} .

4. Conclusion

The present work focused on the analytical and numerical study of time variations of the terms in the decomposition of relative magnetic helicity, H_v , into the sum of the current-carrying helicity, H_j , and the volume-threading helicity, H_{pj} . After having introduced the different quantities, we analytically derived their time derivatives (see Section 2). We obtained the generalized equations for the time variation of H_j (see Equation (28)) and H_{pj} (see Equation (36)). We considered special cases and gauge choices that can simplify the calculation of these formulae (see Section 2.5).

The key outcome of our analytical derivation was to reveal a gauge-invariant quantity that controls the transfer of helicity between H_j and H_{pj} , themselves gauge invariant ($dH_j/dt|_{\text{Transf}}$; see Equation (30)). Since this quantity is expressed with a volume term, we deduce that neither H_j nor H_{pj} is a conserved quantity in resistive or ideal MHD. While relative magnetic helicity can be built as an invariant quantity in ideal MHD, helicity can nonetheless be exchanged between H_j and H_{pj} , and the latter quantities evolve even by ideal MHD motions.

The time evolution of H_v , H_j , and H_{pj} and the terms entering in their time derivatives were then studied in three 3D MHD numerical simulations of solar coronal events (see Section 3.1): the generation of a coronal jet (Pariat et al. 2009), the formation of a stable active region by flux emergence (Leake et al. 2013), and the formation of an

eruptive active region (Leake et al. 2014). These simulations present a sample of boundary forcing (line-tied vs. flux emergence), as well as dynamics, e.g., ideal evolution, magnetic reconnection, and eruptions.

The analysis of these numerical experiments allowed us first to confirm numerically the time variation equations of H_j and H_{pj} that were derived analytically (see Section 3.2). This confirms, evidently in some cases, that H_j and H_{pj} are not individually invariants of ideal MHD.

In particular, we observed that in many cases the transfer term $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ was dominating the dynamics of H_j (see Section 3.6). We observed that the evolution of H_j is frequently uniquely controlled by the term $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, which means that this quantity does not evolve as a result of boundary fluxes but builds up through the transformation of H_{pj} . This dynamics was observed both during the energy buildup phases of the evolution of the system and during the eruption/ejection phases. During the energy injection phases, for both the jet and the stable emergence simulations, boundary fluxes first increase H_{pj} , and part of it is then transformed into H_j . During the eruption phases (in the jet and eruptive emergence simulations), H_j is first transformed into H_{pj} , and it is the latter that is expelled from the domain by boundary fluxes.

This finding has an important impact on our ability to estimate H_j and H_{pj} in observed solar active regions. As discussed in Section 1, the most common way to estimate relative magnetic helicity is by time integration of its flux through the solar photosphere. Since relative magnetic helicity is largely conserved, its photospheric flux dominates the evolution of the relative helicity in the coronal domain. From numerical simulations, it was shown that indeed the time-integrated boundary fluxes closely match the amount of helicity in the system (Yang et al. 2013; Pariat et al. 2015, 2017). Lim et al. (2007) also confirmed from observational data that the helicity flux accumulation indeed gives a proper estimation of the coronal helicity with a $\sim 15\%$ relative error. However, such a flux-integration approach is doomed to fail when applied to H_j and H_{pj} . Indeed, the volume transfer term, which drives the evolution of H_j and H_{pj} , is independent of the boundary fluxes. In the jet simulation, for example, the time integration of the term $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ is an order of magnitude smaller than the amount of H_j in the system. The analysis of H_j and H_{pj} in observations thus has to rely on the volume integration approach (Valori et al. 2016). In this method, the 3D coronal magnetic field must be reconstructed from the 2D photospheric measurements, thanks to extrapolation techniques (Wiegmann & Sakurai 2012; Wiegmann et al. 2014). Because of the inherent nature of H_j , which describes nonpotential fields, potential magnetic field reconstruction cannot estimate this quantity. Similarly, we believe that linear force-free extrapolation will only provide too crude an approximation of H_j . The linear force-free approximation can be used to estimate relative helicity solely thanks to the boundary distribution of the normal component of the magnetic field (Berger 1985; Lim et al. 2007). The impact of this approximation on the estimation of H_j and H_{pj} remains to be studied, but it can be conjectured that, since the linear approximation effectively distributes current in the entire volume, it is inaccurate for systems, like the corona, where currents are spatially localized. These quantities being highly nonlinear, non-force-free extrapolations will probably be a unique way to properly approach an estimation of H_j and H_{pj} , similarly to the study of James et al. (2018), who provided the first estimation of H_j/H_v in observed data.

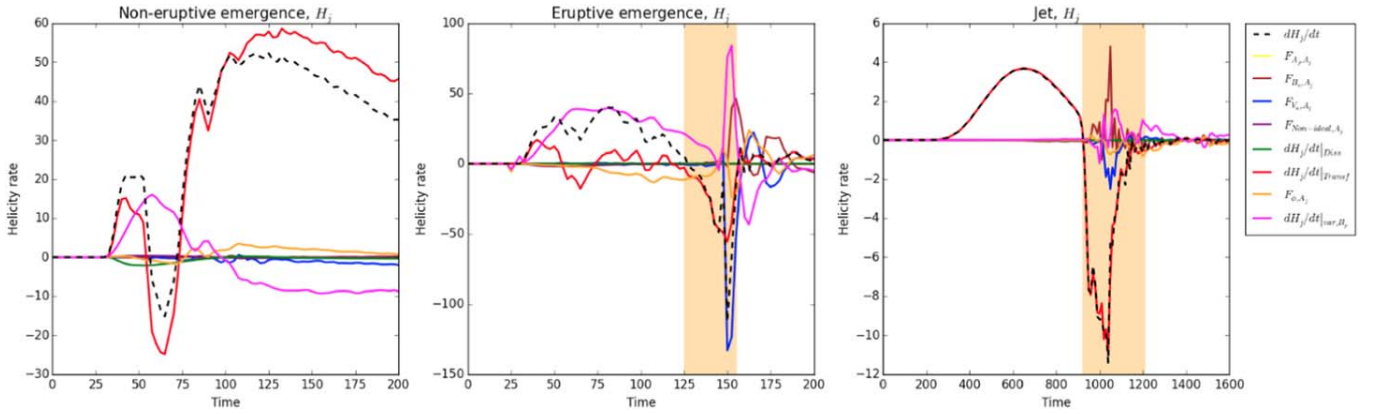


Figure 13. Same as Figure 7, but using condition (70) instead of condition (66).

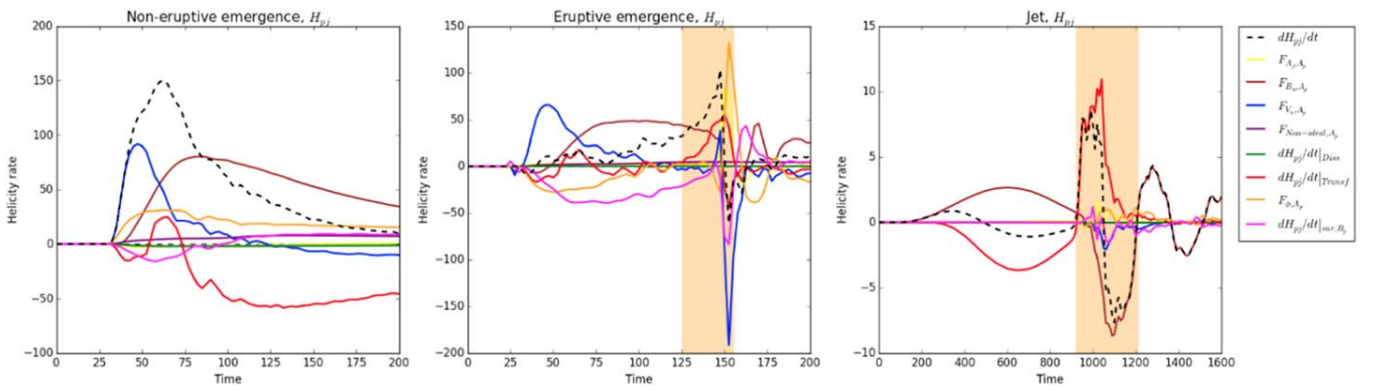


Figure 14. Same as Figure 8, but using condition (70) instead of condition (66).

Pariat et al. (2017) and Zuccarello et al. (2018) have shown that the helicity ratio H_j/H_v seems to be tightly related to the eruption process. This paper presents an additional evidence through the analysis of the coronal jet simulation of Pariat et al. (2009). We show here that the jet is indeed triggered when the helicity ratio H_j/H_v attains a very high value. The value of this ratio drops significantly after the generation of the jet. If, as hinted by these studies, H_j is a key element for the eruptivity of solar active regions, the present study demonstrates the need for the development of quality 3D magnetic reconstructions of the solar magnetic field in order to measure H_j and H_{pj} in observed solar active regions. The *Solar Orbiter* mission and its PHI instrument, which will provide the first remote magnetic field observations complementing those from the Earth environment, may provide a unique opportunity to improve vector magnetic field measurements. Finally, the present work has highlighted yet another interesting behavior of magnetic helicity. The nonpotential helicity H_j evolution seems to be mostly driven by the volume transformation from H_{pj} rather than from its own flux. Further investigations on different magnetic field simulations are required to capture the dynamics of this quantity. More generally, magnetic helicity needs to be further understood through fundamental studies on its mathematical properties (Oberti & Ricca 2018), on its physical interpretation (Yeates & Hornig 2013, 2014; Russell et al. 2015; Aly 2018), and on its proper measurement in the solar corona (Dalmasse et al. 2013, 2014, 2018; Valori et al. 2016; Guo et al. 2017; Moraitis et al. 2018).

The authors thank the anonymous reviewer for careful reading of the manuscript. L.L., E.P., and K.M. acknowledge

the support of the French Agence Nationale pour la Recherche through the HELISOL project, contract No. ANR-15-CE31-0001. G.V. acknowledges the support of the Leverhume Trust, Research Project Grant 2014-051. J.L. is supported by NASA's LWS and HGI programs. The authors acknowledge access to the HPC resources of CINES under the allocations 2017-046331 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

Appendix Helicity Variation Decomposition with a Different Gauge Choice

In the core part of this study, in our application of the helicity estimation to numerical experiments (see Section 3), we used the practical DeVore–Coulomb gauge for \mathbf{A} and \mathbf{A}_p , with the additional constraint that they have the same distribution at the top boundary (see condition (66)). This choice induces that all the fluxes F_{α, A_j} (with $\alpha \in \{Vn, Bn, Aj, \phi\}$) in Equation (28) are null at the top boundary. To determine the impact of this choice, we perform the helicity calculations with a different condition:

$$\mathbf{A}(x, y, z = z_{\text{bot}}, t)_{\perp} = \mathbf{A}_p(x, y, z = z_{\text{bot}}, t)_{\perp}, \quad (70)$$

i.e., with \mathbf{A} and \mathbf{A}_p having the same distribution at the bottom boundary, at $z = z_{\text{bot}}$, instead of the top boundary.

All the helicity evaluations performed in Section 3 are recomputed with this new gauge choice. We only present here the results in which the gauge choice has a significant impact. As expected, all the gauge-independent quantities are not affected by the switch between conditions (66) and (70). Only the figures

presenting gauge-dependent quantities are significantly affected, those representing the different terms in the helicity time variations of Equations (28) and (36). These terms, computed with condition (70), are presented in Figures 13 and 14. These figures should be compared with Figures 7 and 8 (see Section 3.5).




As expected, the curves in Figure 13 (Figure 14) are markedly different from the curves in Figure 7 (Figure 8). Indeed, the fluxes in Equations (28) and (36) are gauge dependent (see Section 2.4.2). Only the term $dH_x/dt|_{\text{Transf}}$ is gauge invariant and is strictly identical. We also note that $\Delta H_j/\Delta t$ and $\Delta H_{pj}/\Delta t$ are almost identical, the marginal difference (<4%) being due to the intrinsic precision on the estimation of the helicities due to the finite nonsolenoidality of the data sets (see Sections 3.1).

For the jet simulation (right panel of Figure 13), the differences appear mainly during the nonideal phase (after $t \sim 900$). During that phase, a jet and a nonlinear magnetic wave are passing through the top boundary. Hence, the magnetic and the velocity fields vary significantly at the top boundary. Since with condition (66) $F_{Bn,Aj}$ and $F_{Vn,Aj}$ are constantly null at the top boundary, these quantities presented very weak values in Figure 7 (right panel) during the passage of the jet. The top constraint being lifted with condition (70), $F_{Bn,Aj}$ and $F_{Vn,Aj}$ show significantly large values in Figure 13 around $t \sim 1000$. The different boundary fluxes nonetheless cancel each other, and the gauge-independent quantity $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ remains very low (as in Figure 11), significantly smaller than $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$.

For the noneruptive and eruptive emergence simulations, before $t \sim 120$, with condition (70) the contributions of $F_{Vn,Aj}$ and $F_{Bn,Aj}$ have completely disappeared (see Figure 13). These quantities depend mostly on the change of the velocity and magnetic fields at the bottom boundary while the flux tube was emerging. With the vector potential A_j being forced to be null at this boundary, the fluxes are null as well. The quantity dH_j/dt evolves almost only thanks to the volume terms: the transfer term and $dH_j/dt|_{Bp,var}$. With this particular gauge choice H_j does not exchange with the outside during the pre-eruptive phase, for both the eruptive and the noneruptive simulations.

During the eruptive phase of the eruptive emergence simulation (middle panels of Figures 13 and 14), we see that $F_{Vn,Ax}$, with x being either j or pj , is the main contribution of the helicity fluxes. The computations of $D_{n,x}$ (Equation (68)) and $dH_x/dt|_{\text{Own}}$ (not shown here) inform us that this peak of $F_{Vn,Aj}$ is likely due to numerical errors: the time step is not sufficiently small to capture the sudden change of the velocity field at the top boundary. At that particular time the computation method and the specific choice of gauge can markedly influence the precision of the helicity flux estimation. These results had already been noted by Pariat et al. (2015, 2017).

ORCID iDs

É. Pariat  <https://orcid.org/0000-0002-2900-0608>
 G. Valori  <https://orcid.org/0000-0001-7809-0067>
 J. Leake  <https://orcid.org/0000-0002-6936-9995>

References

Aly, J.-J. 2018, *FIDyR*, 50, 011408
 Antiochos, S. K. 2013, *ApJ*, 772, 72
 Berger, M. A. 1985, *ApJS*, 59, 433

- Berger, M. A. 2003, in *Advances in Nonlinear Dynamical Systems*, ed. A. Ferriz-Mas & Manuel Núñez (Boca Raton, FL: CRC Press), 345
 Berger, M. A., & Field, G. B. 1984, *JFM*, 147, 133
 Brandenburg, A., Petrie, G. J. D., & Singh, N. K. 2017, *ApJ*, 836, 21
 Brandenburg, A., & Subramanian, K. 2005, *PhR*, 417, 1
 Burlaga, L. F. 1995, in *Int. Ser. in Astronomy and Astrophysics*, Vol. 3, *Interplanetary Magnetohydrodynamics* (Oxford: Oxford Univ. Press)
 Candelaresi, S. 2012, PhD thesis, Stockholm Univ. (<http://www.maths.dundee.ac.uk/scandelaresi/publications/theseses/PhDthesis.pdf>)
 Chae, J. 2001, *ApJL*, 560, L95
 Chae, J. 2007, *AdSpR*, 39, 1700
 Dalmasse, K., Pariat, E., Démoulin, P., & Aulanier, G. 2014, *SoPh*, 289, 107
 Dalmasse, K., Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Green, L. M. 2013, *A&A*, 555, L6
 Dalmasse, K., Pariat, E., Valori, G., Jing, J., & Démoulin, P. 2018, *ApJ*, 852, 141
 Dasso, S. 2009, in *IAU Symp. Vol. 257, Universal Heliophysical Processes* (Cambridge: Cambridge Univ. Press), 379
 Dasso, S., Mandrini, C. H., Démoulin, P., & Farrugia, C. J. 2003, *JGRA*, 108, 1362
 Dasso, S., Mandrini, C. H., Démoulin, P., Luoni, M. L., & Gulisano, A. M. 2005, *AdSpR*, 35, 711
 Del Sordo, F., Candelaresi, S., & Brandenburg, A. 2010, *PhRvE*, 81, 036401
 Démoulin, P. 2007, *AdSpR*, 39, 1674
 Démoulin, P. 2008, *AnGeo*, 26, 3113
 Démoulin, P., Janvier, M., & Dasso, S. 2016, *SoPh*, 291, 531
 Démoulin, P., & Pariat, E. 2009, *AdSpR*, 43, 1013
 Démoulin, P., Pariat, E., & Berger, M. A. 2006, *SoPh*, 233, 3
 DeVore, C. R. 2000, *ApJ*, 539, 944
 Elsässer, W. M. 1956, *RvMP*, 28, 135
 Finn, J. H., & Antonsen, T. M. J. 1985, *CoPPC*, 9, 111
 Georgoulis, M. K., Tziotziou, K., & Raouafi, N.-E. 2012, *ApJ*, 759, 1
 Guennou, C., Pariat, E., Leake, J. E., & Vilmer, N. 2017, *JSWSC*, 7, A17
 Guo, Y., Ding, M.-D., Cheng, X., Zhao, J., & Pariat, E. 2013, *ApJ*, 779, 157
 Guo, Y., Ding, M.-D., Schmieder, B., et al. 2010, *ApJL*, 725, L38
 Guo, Y., Pariat, E., Valori, G., et al. 2017, *ApJ*, 840, 40
 Hu, Q., Qiu, J., Dasgupta, B., Khare, A., & Webb, G. M. 2014, *ApJ*, 793, 53
 James, A. W., Valori, G., Green, L. M., et al. 2018, arXiv:1802.07965
 Kazachenko, M. D., Canfield, R. C., Longcope, D. W., et al. 2009, *ApJ*, 704, 1146
 Kazachenko, M. D., Canfield, R. C., Longcope, D. W., & Qiu, J. 2010, *ApJ*, 722, 1539
 Kazachenko, M. D., Canfield, R. C., Longcope, D. W., & Qiu, J. 2012, *SoPh*, 277, 165
 Knizhnik, K. J., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2015, *ApJ*, 809, 137
 Kusano, K., Maeshiro, T., Yokoyama, T., & Sakurai, T. 2004, *ApJ*, 610, 537
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Antiochos, S. K. 2014, *ApJ*, 787, 46
 Leake, J. E., Linton, M. G., & Török, T. 2013, *ApJ*, 778, 99
 Lim, E.-K., Jeong, H., Chae, J., & Moon, Y.-J. 2007, *ApJ*, 656, 1167
 Linton, M. G., & Antiochos, S. K. 2002, *ApJ*, 581, 703
 Linton, M. G., Dahlburg, R. B., & Antiochos, S. K. 2001, *ApJ*, 553, 905
 Liu, Y., & Schuck, P. W. 2012, *ApJ*, 761, 105
 Liu, Y., & Schuck, P. W. 2013, *SoPh*, 283, 283
 Longcope, D. W., & Beveridge, C. 2007, *ApJ*, 669, 621
 Longcope, D. W., Ravindra, B., & Barnes, G. 2007, *ApJ*, 668, 571
 Low, B. C. 1996, *SoPh*, 167, 217
 Low, B. C. 2006, *ApJ*, 646, 1288
 Luoni, M. L., Mandrini, C. H., Dasso, S., van Driel-Gesztelyi, L. L., & Démoulin, P. 2005, *JATP*, 67, 1734
 Mandrini, C. H., Pohjolainen, S., Dasso, S., et al. 2005, *A&A*, 434, 725
 Miesch, M. S., Zhang, M., & Augustson, K. C. 2016, *ApJL*, 824, L15
 Moffatt, H. K. 1969, *JFM*, 35, 117
 Moraitis, K., Pariat, E., Savcheva, A., & Valori, G. 2018, *SoPh*, 293, 92
 Moraitis, K., Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Archontis, V. 2014, *SoPh*, 289, 4453
 Oberti, C., & Ricca, R. L. 2018, *FIDyR*, 50, 011413
 Pariat, E., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2009, *ApJ*, 691, 61
 Pariat, E., Dalmasse, K., DeVore, C. R., Antiochos, S. K., & Karpen, J. T. 2016, *A&A*, 596, A36
 Pariat, E., Démoulin, P., & Berger, M. A. 2005, *A&A*, 439, 1191
 Pariat, E., Leake, J. E., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, 601, A125
 Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Dalmasse, K. 2015, *A&A*, 580, A128
 Patsourakos, S., & Georgoulis, M. K. 2017, *SoPh*, 292, 89
 Patsourakos, S., Georgoulis, M. K., Vourlidas, A., et al. 2016, *ApJ*, 817, 14
 Polito, V., Del Zanna, G., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, 601, A39

- Priest, E. R., Longcope, D. W., & Janvier, M. 2016, *SoPh*, **291**, 2017
- Rudenko, G. V., & Myshyakov, I. I. 2011, *SoPh*, **270**, 165
- Russell, A. J. B., Yeates, A. R., Hornig, G., & Wilmot-Smith, A. L. 2015, *PhPI*, **22**, 032106
- Rust, D. M. 1994, *GeoRL*, **21**, 241
- Taylor, J. B. 1974, *PhRvL*, **33**, 1139
- Temmer, M., Thalmann, J. K., Dissauer, K., et al. 2017, *SoPh*, **292**, 93
- Thalmann, J. K., Inhester, B., & Wiegelmann, T. 2011, *SoPh*, **272**, 243
- Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, E. 2012, *SoPh*, **278**, 347
- Valori, G., Démoulin, P., Pariat, E., & Masson, S. 2013, *A&A*, **553**, 38
- Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016, *SSRv*, **201**, 147
- Webb, G. M., Hu, Q., Dasgupta, B., & Zank, G. P. 2010, *JGRA*, **115**, A10112
- Webb, G. M., Hu, Q., Dasgupta, B., & Zank, G. P. 2011, *JGRA*, **116**, A11102
- Wiegelmann, T., & Sakurai, T. 2012, *LRSP*, **9**, 5
- Wiegelmann, T., Thalmann, J. K., & Solanki, S. K. 2014, *A&ARv*, **22**, 78
- Woltjer, L. 1958, *PNAS*, **44**, 489
- Yang, S., Büchner, J., Santos, J. C., & Zhang, H. Q. 2013, *SoPh*, **283**, 369
- Yeates, A. R., & Hornig, G. 2013, *PhPI*, **20**, 012102
- Yeates, A. R., & Hornig, G. 2014, *JPhCS*, **544**, 012002
- Zhao, L., DeVore, C. R., Antiochos, S. K., & Zurbuchen, T. H. 2015, *ApJ*, **805**, 61
- Zuccarello, F. P., Aulanier, G., & Gilchrist, S. A. 2015, *ApJ*, **814**, 126
- Zuccarello, F. P., Pariat, E., Valori, G., & Linan, L. 2018, *ApJ*, **863**, 41

5.3 Étude croisée des flux d'hélicités et d'énergies

La conservation de l'hélicité magnétique relative et de l'énergie magnétique totale en régime quasi idéal rend ces deux quantités particulièrement pertinentes dans l'étude des éruptions solaires (cf. Sect. 3.2.3). L'intérêt de l'hélicité magnétique relative réside en partie dans sa décomposition en hélicité mêlée et en hélicité non potentielle qui permet de construire le critère d'éruptivité η_H (cf. Sect. 4.2.1 et Éq. 4.1). D'une façon similaire, l'énergie magnétique se décompose en énergie libre et en énergie potentielle (cf. Sect. 1.3.1.2). L'énergie libre représente l'énergie qui peut être convertie en énergie thermique et cinétique durant une éruption (Aulanier et al. 2009; Karpen et al. 2012; Aschwanden et al. 2017). Tandis que l'énergie potentielle est le niveau d'énergie minimale d'un champ magnétique dans la couronne solaire (Priest 2014).

L'étude des hélicités et des énergies d'une région active fournit donc un ensemble d'informations complémentaires sur les propriétés magnétiques de cette dernière. Néanmoins, au même titre qu'il existe que très peu d'études sur les hélicités non potentielle et mêlée, il n'y a pas beaucoup de travaux comparant directement leurs dynamiques avec celles des énergies libre et potentielle.

Des rares travaux existants sont ressorties un certain nombre de similitudes entre l'évolution des hélicités et celle des énergies. Par exemple, Tziotziou et al. (2012, 2013) ont suggéré l'existence d'une relation simple entre l'énergie libre et l'hélicité relative (cf. Sect. 4.1.2). Pour leur part, Thalmann et al. (2019a,b) et Moraitis et al. (2019b) ont montré que l'évolution des hélicités présentait des dynamiques communes avec celle de leurs contreparties en termes d'énergie (l'hélicité relative et l'énergie totale, l'hélicité non potentielle et l'énergie libre, l'hélicité mêlée et l'énergie potentielle). Ainsi, Moraitis et al. (2019b) ont montré que le rapport de l'énergie libre sur l'énergie totale suit une dynamique proche de celui de l'hélicité non potentielle sur l'hélicité relative. Ces similitudes se retrouvent également quand on s'intéresse à l'évolution des hélicités et des énergies dans des simulations numériques (Pariat et al. 2015, 2017; Linan et al. 2018; Zuccarello et al. 2018; Linan et al. 2020). Dans les simulations d'éruptions présentées par Zuccarello et al. (2015) par exemple, l'augmentation/diminution de l'hélicité non potentielle est également accompagnée par une augmentation/diminution de l'énergie non potentielle (cf. Fig. 2 dans Linan et al. 2020).

Il faut cependant nuancer en rappelant que les hélicités et les énergies restent des quantités distinctes avec leurs propres sensibilités et que par conséquent des différences d'évolutions sont fréquentes. Zuccarello et al. (2018) ont par exemple montré que même si le rapport de l'énergie libre sur l'énergie totale a un comportement similaire (maximum local au moment de l'éruption) avec celui du ratio d'hélicité non potentielle sur l'hélicité relative, η_H (cf. Eq. 4.1), le ratio d'énergie ne peut pas servir de prédicteur à l'éruption puisque la valeur de son maximum local dépend de la simulation utilisée.

Un de mes objectifs dans Linan et al. (2020) est de revenir sur les similitudes et les différences entre l'évolution des énergies et des hélicités. Pour cela je m'intéresse plus particulièrement à leurs variations temporelles (cf. Sect. 5.3.1) avec pour but d'observer si les énergies et les hélicités réagissent aux mêmes processus physiques. Quatre simulations éruptives avec des forçages photosphériques différents ont été analysées. J'ai ainsi pu observer comment les différents forçages influent sur la dynamique des énergies et voir s'ils influent de la même manière sur celle des hélicités (cf. Sect. 5.3.2).

5.3.1 Variation temporelle des énergies

Par définition, la dérivée de l'énergie totale, E_v , dans un volume, V , fixé s'écrit :

$$\frac{dE_v}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_v \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV. \quad (5.35)$$

En MHD résistive la loi de Faraday, $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ permet de réécrire l'intégrale volumique sous la forme :

$$\begin{aligned} 2 \int_v \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV &= -\frac{1}{4\pi} \int_v \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_v \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV - \frac{1}{4\pi} \int_v \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})) dV. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Le premier terme de l'équation (5.36) se décompose en utilisant le théorème de flux-divergence :

$$\frac{1}{4\pi} \int_v \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \int_v (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times \mathbf{B} dV. \quad (5.37)$$

Et pour finir, la contribution surfacique peut se décomposer en deux :

$$\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.38)$$

La variation temporelle de l'énergie magnétique peut finalement s'écrire :

$$\frac{dE_v}{dt} = \left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{var}} + F_{\text{Bn,E}} + F_{\text{Vn,E}} \quad (5.39)$$

avec

$$\left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -\frac{1}{4\pi} \eta \int_v \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) dV \quad (5.40)$$

$$\left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{var}} = \frac{1}{4\pi} \int_v (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times \mathbf{B} dV \quad (5.41)$$

$$F_{\text{Bn,E}} = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.42)$$

$$F_{\text{Vn,E}} = -\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.43)$$

Comme pour les variations temporelles des hélicités, on retrouve deux termes de flux qui dépendent du cisaillement, $F_{\text{Vn,E}}$ et de l'émergence du champ magnétique $F_{\text{Bn,E}}$. Ils proviennent de l'intégrale surfacique du vecteur de Poynting (cf. Eq. 5.37). Ce sont ces termes qui sont traditionnellement utilisés pour mesurer l'injection d'énergie dans l'atmosphère solaire au niveau de la région active (Bi et al. 2018; Liu & Schuck 2012). L'avantage de la décomposition proposée dans Linan et al. (2020) est de tenir compte en plus de la contribution volumique liée à la dissipation $dE_v/dt|_{\text{Diss}}$. Il est particulièrement intéressant de voir comment la dynamique de l'énergie totale est impactée par les contributions volumiques.

La grande différence avec les variations temporelles des hélicités est que tous les termes trouvés ne dépendent ni de la jauge du potentiel vecteur \mathbf{A} ni de celle de \mathbf{A}_p . Puisque les termes

sont invariants de jauge, il est donc possible de les analyser séparément. Un regroupement n'est pas nécessaire.

De la même manière que pour l'énergie totale, il est possible d'obtenir la variation temporelle de l'énergie potentielle, E_p :

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{B}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{B}_p \cdot \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} dV \\ &= F_{\phi, B_p}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

avec

$$F_{\phi, B_p} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{B}_p \cdot dS, \quad (5.45)$$

et ϕ le potentiel scalaire de \mathbf{B}_p tel que $\nabla \phi = \mathbf{B}_p$. La variation de l'énergie potentielle dépend uniquement de la variation du champ potentiel aux surfaces du domaine. Par conséquent, l'énergie potentielle est une grandeur conservée.

Ce n'est pas le cas pour l'énergie non potentielle dont la variation temporelle s'écrit :

$$\frac{dE_j}{dt} = \left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{\text{var}} + F_{B_n, E_j} + F_{V_n, E_j} + F_{\phi, B_j} \quad (5.46)$$

avec

$$\left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -\frac{1}{4\pi} \eta \int_{\mathbf{v}} \mathbf{B}_j \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) dV \quad (5.47)$$

$$\left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{\text{var}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times \mathbf{B} dV \quad (5.48)$$

$$F_{B_n, E_j} = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_j) \mathbf{B} \cdot dS \quad (5.49)$$

$$F_{V_n, E_j} = -\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_j) \mathbf{v} \cdot dS \quad (5.50)$$

$$F_{\phi, B_j} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{B}_j \cdot dS \quad (5.51)$$

Ici encore chaque terme est invariant de jauge et peut donc être suivi individuellement. Notons également que la décomposition présentée ci-dessus est très proche de celle trouvée pour l'énergie totale. Comme mentionnée précédemment, la grande force de ces expressions, est d'être valable dans un cadre plus général que celles proposées jusqu'à maintenant (Kusano et al. 2002; Bi et al. 2018; Liu & Schuck 2012). Néanmoins, elles nécessitent de connaître le champ magnétique dans tout le volume ce qui est possible dans les simulations numériques, mais nécessite des modélisations du champ magnétique coronal au niveau de région active observée. On comprend alors pourquoi les études observationnelles actuelles se limitent aux calculs du vecteur de Poynting ou reposent sur des extrapolations 3D du champ magnétique pour en déduire l'énergie totale.

Analytiquement, les premières différences avec les variations temporelles de l'hélicité apparaissent. Tout d'abord, il n'existe pas de terme de transfert entre l'énergie potentielle et l'énergie libre. Par conséquent, la variation d'une de ces quantités implique également la variation de

l'énergie totale du système. Plus en détail dans la comparaison entre hélicité et énergie, on remarque que la variation de l'énergie potentielle dépend uniquement de l'évolution du champ magnétique potentiel tandis que celle de l'hélicité mêlée dépend également du champ magnétique porteur de courants électriques. Ainsi si l'on fixe les mouvements du champ potentiel aux frontières, l'énergie potentielle ne varie plus tandis que l'hélicité mêlée peut évoluer par notamment son transfert avec l'hélicité non potentielle. L'existence du terme de transfert d'hélicités est donc un élément clé pour expliquer les différences d'évolution entre hélicités et énergies.

5.3.2 Energy and helicity fluxes in line-tied eruptive simulations : Linan, Pariat, Aulanier, Moraitis, & Valori (2020)

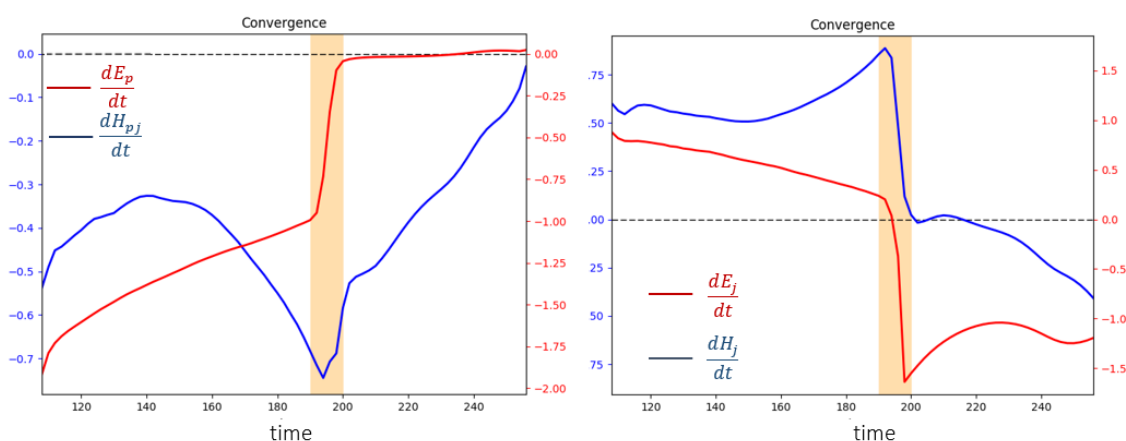


FIGURE 5.5 – **Gauche** : comparaison entre l'évolution de dE_p/dt (cf. Éq. 5.44, en rouge) et celle de $dH_{H_{pj}}/dt$ (cf. Éq. 5.7, en bleu) dans la simulation "Convergence" de Zuccarello et al. (2015). **Gauche** : comparaison entre l'évolution de dE_j/dt (cf. Éq. 5.46, en rouge) et celle de dH_j/dt (cf. Éq. 5.16, en bleu). La bande jaune correspond à la phase éruptive. Les variations temporelles d'énergies ont le même signe que celles des hélicités. Cela implique une dynamique proche entre les énergies libre et potentielle et les hélicités non potentielle et mêlée. Dans les premiers instants, dH_j/dt évolue quasi linéairement avec dE_j/dt . À partir de $t \sim 160$, dH_j/dt augmente fortement tandis que dE_j/dt continue de décroître linéairement. L'augmentation de dH_j/dt s'explique par une augmentation de l'intensité du terme de transfert, $dH_j/dt|_{Transf}$ (cf. Eq. 5.18 et Fig. 5.3).

En comparant les variations temporelles des hélicités dans quatre simulations MHD d'éruption qui se différencient les unes par rapport aux autres par leurs forçages photosphériques (Zuccarello et al. 2015), j'ai montré dans Linan et al. (2020) que même si l'évolution des hélicités était similaire d'une simulation à l'autre, les mécanismes physiques qui les impliquent varient (cf. Sect. 5.2.2.4). Je me suis donc également demandé si la dynamique des flux d'énergies varie fortement entre les simulations (cf. Fig. 5.5).

Tout d'abord, j'ai montré que l'énergie potentielle et l'énergie libre dépendent dans les simulations étudiées majoritairement d'un seul terme de flux avant l'éruption. Pour l'énergie potentielle il s'agit évidemment de F_{ϕ, B_z} (cf. Eq. 5.45), qui présente une évolution similaire entre toutes les simulations exceptées une simulation caractérisée par une grande dispersion du centre des polarités, c.-à-d. de la région où le champ magnétique est le plus intense (cf. Fig. 1 dans Linan et al. 2020). Dans les autres cas, modifier le cisaillement le long de la ligne d'inversion et/ou la dispersion à la périphérie des polarités n'impacte pas l'évolution de l'énergie magnétique potentielle. Il s'agit d'une différence avec le terme d'injection d'hélicité mêlée, $dH_{pj}/dt_{\text{O}_{wn}}$, dont

l'intensité et le signe varient fortement d'une simulation à l'autre. Cela confirme qu'il n'y a pas de liens directs entre la dynamique de l'énergie potentielle et celle de l'hélicité mêlée.

La variation d'énergie libre quant à elle, est dominée avant l'éruption par le flux d'émergence, F_{Bn,E_j} (cf. Eq. 5.49), dont seule l'intensité varie d'une simulation à l'autre, mais non l'allure. J'ai également montré que F_{Bn,E_j} , et donc l'énergie libre dépendent fortement du cisaillement au niveau de la ligne d'inversion comme le terme d'émergence de l'hélicité non potentielle, F_{Bn,A_j} (cf. Eq. 5.21). Augmenter l'une des deux quantités entraîne l'augmentation de l'autre. Néanmoins l'injection d'hélicité non potentielle, c.-à-d. son terme "Own", ne dépend pas uniquement de F_{Bn,A_j} . Il n'est donc pas possible de conclure que l'injection d'hélicité non potentielle est liée à l'injection d'énergie libre. En suivant en fonction du temps, dH_j/dt_{Own} et, en le comparant à F_{Bn,E_j} j'ai cependant trouvé qu'ils ont le même signe et qu'ils diminuent avant l'éruption tous les deux. J'ai également montré que F_{Bn,E_j} est beaucoup plus sensible aux différents forçages photosphériques que le terme d'injection de l'hélicité non potentielle. Ainsi, il pourrait donc avoir un lien entre l'injection d'énergie libre et celle d'hélicité non potentielle, mais les deux grandeurs n'ont pas la même sensibilité aux processus physiques qui les engendrent.

Finalement, est-il possible de distinguer les simulations en s'intéressant uniquement aux flux d'énergies? La réponse à cette question est négative. La dynamique des flux d'énergies ne permet pas de distinguer les différentes simulations contrairement à celle des flux d'hélicités. Les différents forçages photosphériques influent seulement sur la magnitude des flux d'énergies et non sur leurs signes ou sur leurs importances relatives par rapport aux autres flux. Au contraire, la dynamique des hélicités est plus complexe et varie fortement d'une simulation à l'autre. En effet, certaines sont dominées par le transfert d'hélicités, d'autres sont gouvernées par les flux à travers la surface (cf. Sect. 5.2.2.4). On en conclut donc que malgré des similitudes notamment entre l'injection d'hélicité non potentielle et celle d'énergie libre, les variations temporelles d'énergies et des hélicités réagissent différemment aux mécanismes physiques ayant lieu durant la simulation.

5.3.3 Perspectives

Dans Linan et al. (2020), j'ai introduit les variations temporelles de l'énergie totale, potentielle et libre sans aucune hypothèse faite sur la jauge des potentiels vecteurs. Dans les futurs travaux, si toutes les données sont accessibles, l'étude des flux d'énergies doit se faire grâce aux expressions trouvées dans Linan et al. (2020) et non se limiter à la mesure du vecteur de Poynting comme il est fait traditionnellement (Liu & Schuck 2012; Bi et al. 2018). En particulier, dans les variations temporelles des énergies j'ai mis en évidence des termes volumiques permettant de quantifier la dissipation des énergies libre et totale.

Un des résultats majeurs de l'étude est que la dynamique des énergies et des hélicités dépend de mécanismes physiques différents même s'ils suivent des tendances générales similaires. La raison principale est que l'évolution de l'énergie libre et celle de l'énergie potentielle sont indépendantes tandis que celles des hélicités non potentielle et mêlée sont corrélées. Puisque l'hélicité relative et l'énergie totale ainsi que leurs décompositions ont des propriétés distinctes, leurs analyses doivent être complémentaires lors de l'étude de l'éruptivité des régions actives.

J'ai cependant suggéré un lien entre l'injection d'énergie libre et l'injection d'hélicité non potentielle. En effet, dans les simulations étudiées, ces deux quantités partagent la même dynamique. Néanmoins, il reste à savoir si cela est propre aux configurations magnétiques analysées ou si cela peut se retrouver dans davantage de situations. Pour cela, une possibilité consiste à créer des cartes photosphériques 2D de la densité des termes d'injection d'hélicités et d'énergies (cf. Fig 5.6 et la partie discussion de Linan et al. 2020). L'idée est de repérer visuellement quels processus physiques (cisaillement, dispersion du champ magnétique) sont responsables de l'injection d'hélicités et de les comparer avec ceux responsables de l'injection d'énergies. J'ai par

exemple montré, à l'aide d'une carte de la densité de flux d'énergie potentielle, que l'évolution de cette dernière est plus impactée par la dispersion du champ magnétique au centre d'une polarité que par l'annulation du flux magnétique le long de la ligne d'inversion. Il s'agit cependant que des prémisses d'éventuelles futures recherches qui viendraient compléter la cartographie de la densité de flux d'hélicité relative permise par des méthodes basées sur la connectivité des lignes de champ (Dalmasse et al. 2014, 2013b, 2018).

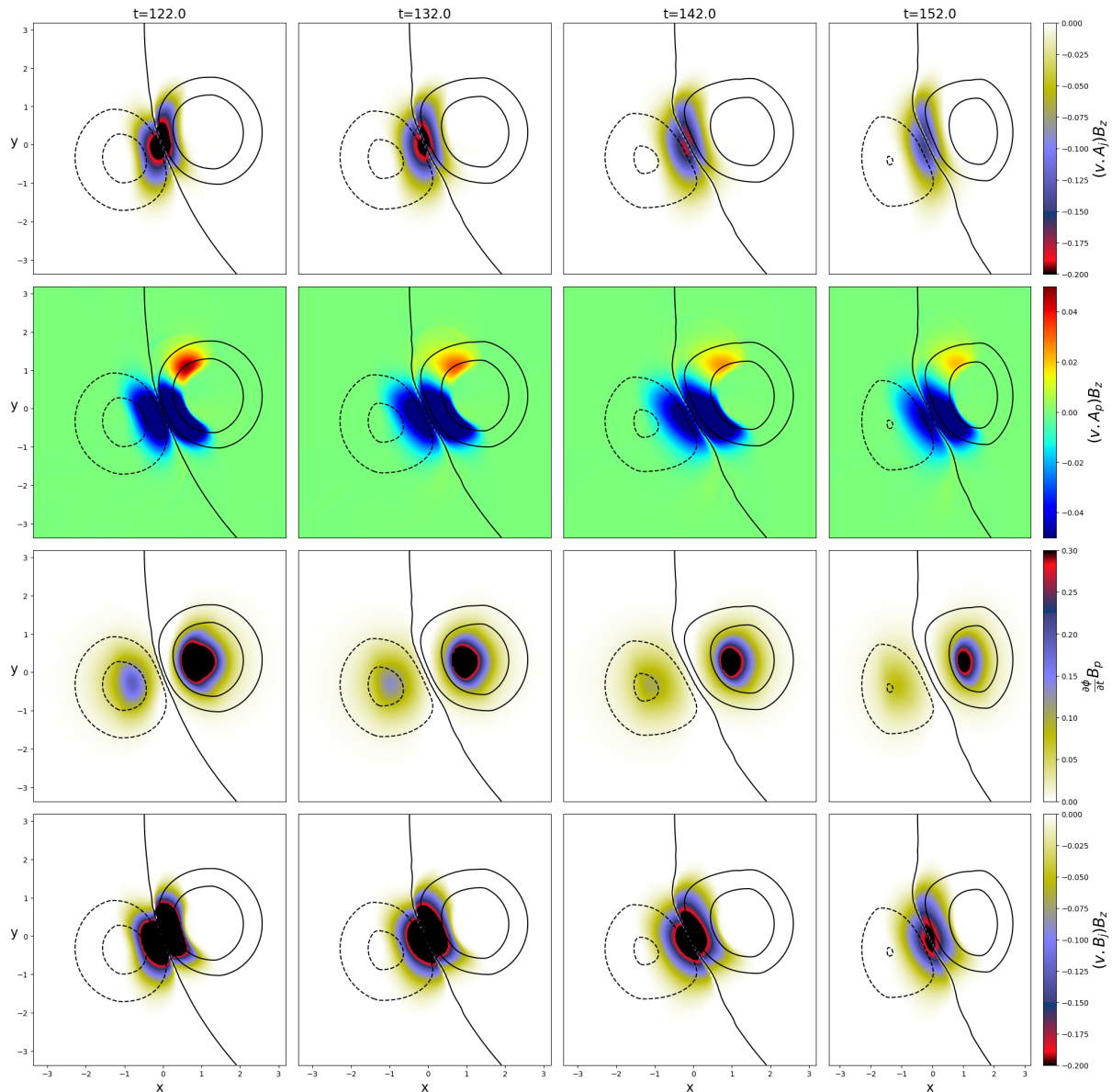


FIGURE 5.6 – Cartes photosphériques 2D de la densité de divers termes d'injection d'hélicités et d'énergies en fonction du temps dans la simulation "Convergence" présentée par Zuccarello et al. (2015). **Première ligne** : évolution de $(\mathbf{v}\mathbf{A}_j)\mathbf{B}_z$ intégrant de $F_{Bn,Aj}$ (cf. Eq. 5.21). **Deuxième ligne** : évolution de $(\mathbf{v}\mathbf{A}_p)\mathbf{B}_z$ intégrant de $F_{Bn,Ap}$ (cf. Eq. 5.12). **Troisième ligne** : évolution de $(\partial\phi/\partial t)\mathbf{B}_p$ intégrant de $F_{\phi,Bp}$ (cf. Eq. 5.44). **Quatrième ligne** : évolution de $(\partial\phi/\partial t)\mathbf{B}_p$ intégrant de $F_{\phi,Bp}$ (cf. Eq. 5.50).

Rappelons cependant que la qualité des estimations des énergies et des hélicités à partir de données observationnelles dépend de la précision de la mesure du champ magnétique. En particulier, la mesure de la composante tangentielle du champ magnétique reste encore imprécise (cf. Sect. 2.1). Cependant, l'étude des flux d'hélicités et des flux d'énergie d'une région active

sera facilitée par des mesures de champ magnétique plus précises, qui seront possibles grâce au nouveau champ de vue offert par la mission *Solar Orbiter* et son instrument PHI (cf. Sect. 6).

Energy and helicity fluxes in line-tied eruptive simulations

L. Linan¹, É. Pariat¹, G. Aulanier¹, K. Moraitis¹, and G. Valori²

¹ LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
e-mail: luis.linan@obspm.fr

² Mullard Space Science Laboratory, University College London, Holmbury St. Mary, Dorking, Surrey RH5 6NT, UK

Received 22 January 2020 / Accepted 26 February 2020

ABSTRACT

Context. Conservation properties of magnetic helicity and energy in the quasi-ideal and low- β solar corona make these two quantities relevant for the study of solar active regions and eruptions.

Aims. Based on a decomposition of the magnetic field into potential and nonpotential components, magnetic energy and relative helicity can both also be decomposed into two quantities: potential and free energies, and volume-threading and current-carrying helicities. In this study, we perform a coupled analysis of their behaviors in a set of parametric 3D magnetohydrodynamic (MHD) simulations of solar-like eruptions.

Methods. We present the general formulations for the time-varying components of energy and helicity in resistive MHD. We calculated them numerically with a specific gauge, and compared their behaviors in the numerical simulations, which differ from one another by their imposed boundary-driving motions. Thus, we investigated the impact of different active regions surface flows on the development of the energy and helicity-related quantities.

Results. Despite general similarities in their overall behaviors, helicities and energies display different evolutions that cannot be explained in a unique framework. While the energy fluxes are similar in all simulations, the physical mechanisms that govern the evolution of the helicities are markedly distinct from one simulation to another: the evolution of volume-threading helicity can be governed by boundary fluxes or helicity transfer, depending on the simulation.

Conclusions. The eruption takes place for the same value of the ratio of the current-carrying helicity to the total helicity in all simulations. However, our study highlights that this threshold can be reached in different ways, with different helicity-related processes dominating for different photospheric flows. This means that the details of the pre-eruptive dynamics do not influence the eruption-onset helicity-related threshold. Nevertheless, the helicity-flux dynamics may be more or less efficient in changing the time required to reach the onset of the eruption.

Key words. magnetic fields – Sun: photosphere – Sun: corona – Sun: flares – magnetohydrodynamics (MHD) – Sun: activity

1. Introduction

Magnetic helicity is a volume-integrated ideal magnetohydrodynamic (MHD) invariant describing the level of twist and entanglement of the magnetic field lines. Initially introduced by [Elsasser \(1956\)](#), magnetic helicity is a conserved quantity within the ideal MHD paradigm ([Woltjer 1958](#)). However, the strict definition of Elsasser is gauge invariant only for magnetically bounded system, a condition that is not satisfied in most cases, such as the solar atmosphere. This led to the introduction by [Berger & Field \(1984\)](#) and [Finn & Antonsen \(1985\)](#) of the relative magnetic helicity, a gauge-invariant quantity suitable for use in solar physics and more generally for natural plasmas.

Using a numerical simulation, [Pariat et al. \(2015\)](#) confirmed the hypothesis introduced by [Taylor \(1974\)](#) that even in presence of nonideal processes, the dissipation of magnetic helicity is negligible. Relative magnetic helicity cannot be dissipated or created within the corona, therefore it can only be transported or annihilated. This conservation property has several major consequences, one of which might be that coronal mass ejections (CMEs) are the consequence of the evacuation of an excess of helicity ([Rust 1994](#); [Low 1996](#)).

In recent years, magnetic helicity has been at the heart of many studies dealing with various topics such as the generation

of solar eruptions (e.g., [Kusano et al. 2004](#); [Longcope & Beveridge 2007](#); [Priest et al. 2016](#)), magnetic reconnection (e.g., [Linton et al. 2001](#); [Linton & Antiochos 2002](#); [Del Sordo et al. 2010](#)), solar filaments (e.g., [Antiochos 2013](#); [Knizhnik et al. 2015](#); [Zhao et al. 2015](#)), and solar and stellar dynamos (e.g., [Brandenburg & Subramanian 2005](#); [Simon 2012](#)).

Magnetic energy is another relevant quantity in MHD with which eruptivity in the solar corona is studied because most of solar events are driven magnetically (e.g., [Schrijver & Zwaan 2008](#)). From the point of view of the energetic budget, magnetic energy is the only source of energy that can generate the powerful events that are observed in the solar atmosphere, such as coronal mass ejections, flares, and solar jets ([Forbes 2000](#)). Magnetic energy can be decomposed into a current-carrying energy, known as free energy, and a potential energy (cf. Sect. 3.1). Solar flares and CMEs are characterized by a rapid change of the coronal magnetic field that does not change the radial component of the photospheric field. Because the potential field is determined by the radial magnetic field at the photosphere, only the free energy can therefore be converted into kinetic and thermal energies during fast coronal events ([Aulanier et al. 2009](#); [Karpen et al. 2012](#)). The potential energy thus represents the lowest energy state of the magnetic field in the solar corona (e.g., [Priest 2014](#)).

An analysis of magnetic energies combined with a study of magnetic helicities appears a powerful tool for characterizing active regions and their evolutions toward eruptive events. However, measuring these quantities from observational data remains challenging. One possibility is to estimate the accumulation of magnetic helicity and energy in the solar corona by integrating their fluxes across the solar photosphere over time (Kusano et al. 2002; Nindos et al. 2003; Yamamoto et al. 2005; Yamamoto & Sakurai 2009). This method cannot trace the coronal evolution and requires high-cadence time-series magnetograms as well as the velocity fields on the photosphere. Because no direct observation of the photospheric velocity is available, it is obtained by inferring the magnetic field on the solar surface. Despite the progress made in deducing the velocity field (Kusano et al. 2002; Welsch et al. 2004; Longcope 2004) as well as further improvement on flux estimations (Pariat et al. 2005; Chae 2007; Liu & Schuck 2012, 2013; Dalmasse et al. 2014, 2018), the computation of magnetic energy and helicity fluxes remains very sensitive to the method that is used and to the quality of the observations. A different approach is to compute energy and helicity in coronal volumes. Because magnetic energy and helicity are volume integrals, properly computing them with this method requires the full 3D knowledge of the magnetic field in the volume that is studied. Currently, only 2D measurement on the solar surface are provided, therefore a 3D extrapolation of the magnetic field is a necessary step. The diverse methods based on the volume-integration approach for estimating the magnetic relative helicity were benchmarked in Valori et al. (2016). Different solar active regions have previously been investigated (Valori et al. 2013; Moraitis et al. 2014, 2019; Guo et al. 2017; Polito et al. 2017; Temmer et al. 2017; James et al. 2018; Thalmann et al. 2019).

In parallel, the properties of both helicity and energy are still being studied in solar-like parametric simulations. Berger (2003) introduced the decomposition of the relative magnetic helicity into two gauge-invariant components: a current-carrying helicity related to the current-carrying magnetic field, and a complementary volume-threading helicity. Pariat et al. (2017) followed and estimated these quantities in a set of seven simulations of the formation of solar active regions (Leake et al. 2013, 2014). The different simulations led to either stable or eruptive configurations. The authors found that it is possible to distinguish the two configurations by studying the ratio of the current-carrying helicity to the relative helicity. The ratio before the eruption indeed presents high values only in the eruptive case. To better understand the properties of the relative helicity decomposition, Linan et al. (2018) provided the first analytical formulae of the time-variation of nonpotential and volume-threading helicity. They also computed and followed them in two simulations of Leake et al. (2013, 2014) and in a simulation of the generation of a coronal jet (Pariat et al. 2005). They found that the current-carrying helicity does indeed not evolve as a result of boundary fluxes, but builds up through its exchange with the volume-threading helicity. The evolutions of the current-carrying and the volume-threading helicities are partially controlled by a transfer term that reflects the exchange between these two types of helicity. This exchange term dominates the dynamics of the current-carrying helicity at different instants of the simulations. This means that this helicity does not only evolve as a result of boundary fluxes. The eruption phases of these simulation follow the same dynamics: the current-carrying helicity is first transformed into the volume-threading helicity, and then the latter is ejected from the domain by boundary fluxes. Moreover, the transfer term is expressed as a volume integral: consequently, these two

helicities are not classically conserved quantities in the sense that they cannot be independently expressed as a flux through the boundaries, even in ideal MHD, unlike the relative magnetic helicity. This finding strengthens the knowledge of the properties of nonpotential and volume-threading helicity that was first studied by Moraitis et al. (2014).

Zuccarello et al. (2015) presented 3D parametric resistive MHD simulations of solar coronal eruptions. Simulations are distinguished by the different motions (line-tied) applied on the photosphere with similar but distinct flux cancellation drivers. Their eruptions were driven by the torus instability (Aulanier et al. 2009; Démoulin & Aulanier 2010) and occurred at a precise time identified by a series of relaxation runs. Recently, these models were used to investigate the increase in the downward component of the Lorentz force density around a polarity-inversion line in comparison with the photospheric observation (Barczynski et al. 2019). From these simulation, Zuccarello et al. (2018) studied the impact of the different boundary driving flows on the helicity and energy injection. They found that the helicity ratio of the current-carrying helicity to the relative helicity is clearly associated with the eruption trigger because the eruptions within the different runs took place exactly when the ratio reached the very same threshold value.

Recently, the first preliminary observational tests confirmed the idea that the helicity ratio is a good predictor of eruptivity. Based on 3D extrapolation and using different nonlinear force-free models, the time evolution of the helicity ratio has been investigated in three active regions: AR 12673 in Moraitis et al. (2019), the most active of the cycle 24; and AR 11158 and AR 12192 in Thalmann et al. (2019), two extensively studied active regions that generated eruptive and confined flares. However, complementary studies are still needed to understand how the different magnetic topologies observed in the solar corona are linked to the dynamics of the helicity ratio.

In the present study, we apply the helicity decomposition to the analysis of the simulations of Zuccarello et al. (2015, 2018) to investigate the time-variations of the different types of magnetic energy and helicity. In particular, we are interested in the way that the different boundary motion influence the helicity and energy dynamics. Zuccarello et al. (2018) showed that the different boundary motions lead to different efficiency in injecting helicity and energy in the domain. In the present work, we aim to explain the physical processes that are responsible for these differences: are they related to boundary fluxes, dissipation, or volume evolution? We also examine whether the transfer term between the two helicity components plays a major role in the helicity budgets, as has been observed in Linan et al. (2018).

Additionally, we study the dynamics of the helicities in comparison with the dynamics of their energy counterparts, for instance, current-carrying helicity and free energy, and volume-threading helicity and potential energy. Our goal is to highlight the differences and the similarities in the helicity and energy buildup. This study aims to improve our knowledge on magnetic helicities and energies, and it is a necessary step to better understand the full topological and energetic complexity of solar active regions.

Our paper is divided into different sections that are organized as follows. First, we present the time-variation of nonpotential and volume-threading helicities (see Sect. 2). In the same way, we then introduce the different components of the magnetic energy and also their time-variation written for the specific case of resistive MHD (see Sect. 3). After presenting the simulations (see Sect. 4), we present the time evolution of the different quantities (see Sect. 5). Using our set of simulations, we investigate

the role of the transfer term between the helicity components in their evolutions (see Sect. 6). While we investigate the difference in helicity dynamics in Sect. 7, we focus on the similarities between magnetic energy and helicity fluxes in Sect. 8. In the conclusion, we discuss the effect of the different boundary-driving motions on the energy and helicity injection and on the eruptivity helicity ratio.

2. Nonpotential and volume-threading helicities

In the fixed volume V bounded by the surface S , the magnetic helicity is defined as

$$H_m = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV, \quad (1)$$

with \mathbf{A} the vector potential of the studied magnetic field \mathbf{B} , i.e. $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. In practice, this scalar description of the geometrical properties of magnetic field lines is general only if the magnetic field is tangential to the surface, that is, if V is a magnetically bounded volume. The magnetic helicity is gauge invariant if and only if this condition is respected. For the study of natural plasmas, especially in solar physics, the magnetic field does not satisfy this condition, the solar photosphere being subject to significant flux. Berger & Field (1984) introduced the relative magnetic helicity, a gauge-invariant quantity, based on a reference field. Throughout the paper, we use the potential reference field \mathbf{B}_p that has the same normal distribution of \mathbf{B} throughout the surface S and satisfies

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B}_p = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p)|_S = 0, \end{cases} \quad (2)$$

where \mathbf{n} is the outward-pointing unit vector normal on S . The potential field can thus be defined by a scalar function, such as $\nabla \phi = \mathbf{B}_p$, and ϕ is the solution of the Laplace equation,

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_S = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})|_S. \end{cases} \quad (3)$$

When \mathbf{A}_p is the vector potential of the potential field $\mathbf{B}_p = \nabla \times \mathbf{A}_p$, the relative magnetic helicity provided by Finn & Antonsen (1985) is defined as

$$H_v = \int_V (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) \, dV. \quad (4)$$

In this form, the relative magnetic helicity is independently invariant to gauge transformation of both \mathbf{A} and \mathbf{A}_p . The difference between the potential field and the magnetic field can be written as a nonpotential magnetic field, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B} - \mathbf{B}_p$, associated with the vector \mathbf{A}_j , defined as $\mathbf{A}_j = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p$, such as $\nabla \times \mathbf{A}_j = \mathbf{B}_j$. When we use this unique decomposition of \mathbf{B} and following the work of Berger (2003), Eq. (4) can be divided into two gauge-invariant quantities:

$$H_v = H_j + H_{pj} \quad (5)$$

$$H_j = \int_V \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{B}_j \, dV \quad (6)$$

$$H_{pj} = 2 \int_V \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_j \, dV, \quad (7)$$

where H_j is the current-carrying magnetic helicity associated with only the current-carrying component of the magnetic field \mathbf{B}_j , and H_{pj} is the volume-threading helicity involving both \mathbf{B}_j and \mathbf{B}_p .

By construction, both H_j and H_{pj} are gauge invariant because by virtue of Eq. (3), \mathbf{B}_j has a vanishing normal component on the surface.

In resistive MHD, where $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \nabla \times \mathbf{B}$ (η being the resistivity, which is here assumed to be constant), Linan et al. (2018) established the following equation for the time evolution of the current-carrying magnetic helicity H_j :

$$\begin{aligned} \frac{dH_j}{dt} = & \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{B_p, \text{var}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} \\ & + F_{Vn, Aj} + F_{Bn, Aj} + F_{Aj, Aj} + F_{\phi, Aj} + F_{\text{Non-ideal}, Aj} \end{aligned} \quad (8)$$

with

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_V \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_j \, dV \quad (9)$$

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} = -2 \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p \, dV \quad (10)$$

$$\left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{B_p, \text{var}} = 2 \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_j \, dV \quad (11)$$

$$F_{Vn, Aj} = -2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

$$F_{Bn, Aj} = 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_j) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (13)$$

$$F_{Aj, Aj} = \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{S} \quad (14)$$

$$F_{\phi, Aj} = -2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{S} \quad (15)$$

$$F_{\text{Non-ideal}, Aj} = -2 \int_S \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{S}. \quad (16)$$

From this decomposition, Linan et al. (2018) obtained an equation for the time-variation that is composed only of gauge-invariant terms:

$$\frac{dH_j}{dt} = \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Own}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}}, \quad (17)$$

with

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Own}} = & \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{B_p, \text{var}} + F_{\text{Non-ideal}, Aj} \\ & + F_{\phi, Aj} + F_{Vn, Aj} + F_{Bn, Aj} + F_{Aj, Aj}. \end{aligned} \quad (18)$$

All these terms initially provided by Linan et al. (2018) are recalled here because we analyze them and comment on them in the next sections.

Similarly, the time evolution of the volume-threading magnetic helicity H_{pj} can be decomposed as

$$\begin{aligned} \frac{dH_{pj}}{dt} = & \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{B_p, \text{var}} + \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Transf}} + F_{\text{Non-ideal}, Ap} \\ & + F_{Vn, Ap} + F_{Bn, Ap} + F_{Aj, Ap} + F_{\phi, Ap} \end{aligned} \quad (19)$$

with

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -2 \int_{\mathcal{V}} \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p \, dV \quad (20)$$

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Transf}} = 2 \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_p \, dV \quad (21)$$

$$\left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{B_p, \text{var}} = 2 \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) \, dV \quad (22)$$

$$F_{Vn, Ap} = -2 \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (23)$$

$$F_{Bn, Ap} = 2 \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_p) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (24)$$

$$F_{Aj, Ap} = 2 \int_S \mathbf{A}_j \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S} \quad (25)$$

$$F_{\phi, Ap} = -2 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_j) \cdot d\mathbf{S} \quad (26)$$

$$F_{\text{Non-ideal}, Ap} = -2 \int_S \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S}. \quad (27)$$

The time-variation of H_{pj} can also be constructed with gauge-invariant terms only:

$$\frac{dH_{pj}}{dt} = \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Own}} + \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Diss}} - \left. \frac{dH_j}{dt} \right|_{\text{Transf}} \quad (28)$$

with

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{\text{Own}} &= \left. \frac{dH_{pj}}{dt} \right|_{B_p, \text{var}} + F_{\text{Non-ideal}, Ap} \\ &+ F_{Vn, Ap} + F_{Bn, Ap} + F_{Aj, Ap} + F_{\phi, Ap}. \end{aligned} \quad (29)$$

These decompositions were obtained without any particular hypothesis on the gauge that is used. In particular, we are free to use the Coulomb gauge for \mathbf{A} and \mathbf{A}_p . With this choice, the volume terms $dH_j/dt|_{B_p, \text{var}}$ and $dH_{pj}/dt|_{B_p, \text{var}}$ both vanish. Thus $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ only contain boundary-flux contributions. The transfer term $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ expresses the exchange between the helicities H_j and H_{pj} without any consequence on the evolution of the total relative helicity H_V . Furthermore, this quantity being a volume term, the time-variations of H_j and H_{pj} cannot be expressed solely through boundary fluxes. Therefore H_j and H_{pj} are not conserved quantities in resistive or ideal MHD.

3. Magnetic energy

3.1. Free and potential energies

With the decomposition of the magnetic field into current-carrying and potential components, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_j$, the total magnetic energy E_v can be also decomposed as

$$\begin{aligned} E_v &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^2 \, dV \\ &= E_p + E_j + \frac{1}{4\pi} \int_S \phi \mathbf{B}_j \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \phi \nabla \cdot \mathbf{B}_j \, dV, \end{aligned} \quad (30)$$

with

$$E_p = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_p^2 \, dV \quad E_j = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_j^2 \, dV. \quad (31)$$

In this decomposition, E_j is the energy of the current-carrying magnetic field, also known as free energy, and E_p the energy of the solenoidal magnetic field. Because the potential field shares the same surface distribution as the total magnetic field, the surface integral vanishes in Eq. (30). Numerically, the discretization of the mesh grid unavoidably induces a finite level of non-solenoidality ($\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$), and consequently, the last term in Eq. (30) is not exactly null (cf. Valori et al. 2013). However, considering a solenoidal field, Eq. (30) can be simplified into

$$E_v = E_j + E_p. \quad (32)$$

This decomposition is similar to the decomposition of the helicity obtained in Eq. (5). However, here, the potential energy E_p , unlike the volume-threading helicity, only depends on the potential field without a dependence on the nonpotential field.

3.2. Time-variation of the total magnetic energy

We aim to determine the time-variation of the total magnetic energy E_v in a fixed volume V ,

$$\frac{dE_v}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dV. \quad (33)$$

In the resistive MHD, we use the Faraday law, $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$, and we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dV &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \, dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, dV \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})) \, dV. \end{aligned} \quad (34)$$

Using the Gauss divergence theorem, we can decompose the first term of Eq. (34):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, dV &= \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \, dV. \end{aligned} \quad (35)$$

Here, the surface term corresponds to the surface integral of the poynting vector and can be divided into two terms:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= -\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (36)$$

Finally, assuming for simplicity that the resistivity is constant in space, the variation of the total magnetic energy can be decomposed as

$$\frac{dE_v}{dt} = \left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{Diss}} + \left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{var}} + F_{Bn, E} + F_{Vn, E}, \quad (37)$$

with

$$\left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{Diss}} = -\frac{1}{4\pi} \eta \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) \, dV \quad (38)$$

$$\left. \frac{dE_v}{dt} \right|_{\text{var}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \, dV \quad (39)$$

$$F_{Bn, E} = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (40)$$

$$F_{Vn, E} = -\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (41)$$

We performed a similar time variation for E_v as Linan et al. (2018) did for helicities as we summarized in Sect. 2. We find two fluxes: $F_{Vn,E}$ a shearing term associated with horizontal motion, and an emerging term $F_{Bn,E}$ that is related to the emergence. Longcope et al. (2007) decomposed the shearing term at the photospheric level into two contributions by differentiating the motion between the different flux patches and the spin motion of isolated flux patches. As with H_j and H_{pj} , the time-variation of E_v cannot be expressed through boundary fluxes, and thus E_v is not a conserved quantity. Even in ideal MHD, when $dE_v/dt|_{\text{Diss}}$ is null, a volume term $dE_v/dt|_{\text{var}}$ survives. Unlike dH_j/dt and dH_{pj}/dt , the time-variation of the total energy E_v depends on neither \mathbf{A} nor \mathbf{A}_p : each term of Eq. (37) is gauge invariant.

3.3. Time-variation of the potential and free magnetic energies

Similarly to the analysis of dE_v/dt in the previous section, it is possible to obtain the time-variation of E_p . Using the scalar potential ϕ of \mathbf{B}_p such as $\nabla\phi = \mathbf{B}_p$ and the Gauss divergence theorem, we write

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B}_p \cdot \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} dV \\ &= F_{\phi, B_z} + \frac{dE_p}{dt}|_{\text{ns}}, \end{aligned} \quad (42)$$

with

$$F_{\phi, B_z} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S} \quad (43)$$

$$\frac{dE_p}{dt}|_{\text{ns}} = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}_p) dV. \quad (44)$$

For a purely solenoidal potential field, $dE_p/dt|_{\text{ns}}$ is null and thus the time-variation of E_p is written in a simple way as a single surface term depending on the variation of the potential field. A decrease in potential energy can therefore be associated in particular with a cancelation at the polarity-inversion line (PIL) or a dispersion of the potential magnetic field. Unlike E_v , E_p is a conserved quantity in resistive MHD.

For the study of the evolution of nonpotential energy E_j , the easiest way is to consider only the difference between the decompositions obtained from Eqs. (37) and (42):

$$\frac{dE_j}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{dE_p}{dt}. \quad (45)$$

Still, this identity is truly accurate only in the case of purely solenoidal magnetic fields, that is, $\nabla \cdot \mathbf{B}_j = 0$ and when $\mathbf{B}_j|_S = 0$ (cf. Sect. 3.1). Hereafter, we therefore introduce a generic formulation where terms that explicitly account for nonsolenoidal errors are retained,

$$\begin{aligned} \frac{dE_j}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial t} dV \\ &= \frac{dE_v}{dt} + \frac{dE_p}{dt} - \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (46)$$

The last two terms on the right are very similar to dE_p/dt and dE_v/dt . They can thus be decomposed in the same way,

$$-\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} dV = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (47)$$

and

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV &= \frac{1}{4\pi} \eta \int_V \mathbf{B}_p \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) dV \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_p) dV \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_p) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_p) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

By definition, the curl of the potential field is null, and thus the second volume integral on the right-hand side formally vanishes. Finally, by grouping all the terms, the time-variation of the non-potential magnetic energy can be written as

$$\begin{aligned} \frac{dE_j}{dt} &= \frac{dE_j}{dt}|_{\text{Diss}} + \frac{dE_j}{dt}|_{\text{var}} + F_{Bn, Ej} + F_{Vn, Ej} \\ &\quad + \frac{dE_j}{dt}|_{\text{ns}} + F_{\phi, Bj}, \end{aligned} \quad (48)$$

with

$$\frac{dE_j}{dt}|_{\text{Diss}} = -\frac{1}{4\pi} \eta \int_V \mathbf{B}_j \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) dV \quad (49)$$

$$\frac{dE_j}{dt}|_{\text{var}} = \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV \quad (50)$$

$$F_{Bn, Ej} = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_j) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (51)$$

$$F_{Vn, Ej} = -\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_j) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (52)$$

$$F_{\phi, Bj} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{B}_j \cdot d\mathbf{S} \quad (53)$$

$$\frac{dE_j}{dt}|_{\text{ns}} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}_j) dV. \quad (54)$$

As expected, the decomposition we obtain is similar to the one obtained with dE_v/dt (see Eq. (37)). The dissipation term $dE_j/dt|_{\text{ns}}$ is null if the magnetic field is solenoidal. However, we compute it in order to quantify the effect of purely numerical errors.

4. Line-tied eruptive simulations

In order to comparatively analyze the evolution of helicities and energies and to study the time-variation of the energy, we used magnetic field data produced by parametric 3D MHD simulations of eruptive events of the solar corona that were initially presented in Zuccarello et al. (2015).

For this set of simulations, the OHM-MPI code (Aulanier et al. 2005) solves MHD equations in the system's nondimensional units for a volume covering the domain $x \in [-10, 10]$, $y \in [-10, 10]$ and $z \in [0, 30]$. The employed mesh is nonuniform and the smallest cell is centered at $x = y = z = 0$. In order to facilitate the computation of the energies and helicities, our study was performed on a subdomain excluding the $z = 0$ plane, interpolated into a uniform Cartesian grid composed of 333 cells in the x and y direction, and 500 cells in the z directions. The resulting analyzed volume is $x \in [-10, 10]$, $y \in [-10, 10]$ and $z \in [0.006, 30]$. As a result of the interpolation on a uniform

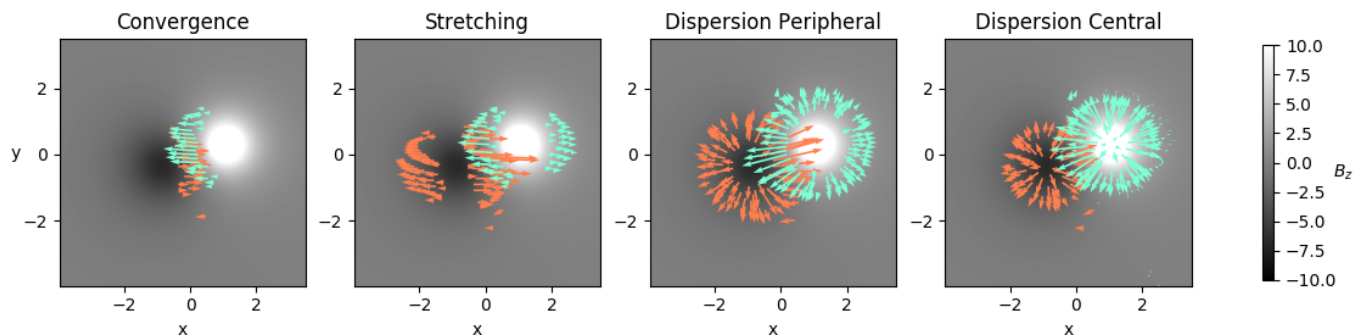


Fig. 1. Applied boundary-driving motions for the four different numerical experiments. White represents the positive polarity ($B_z(z = 0.006) > 0$) and black the negative polarity ($B_z(z = 0.006) < 0$). Orange and cyan arrows indicate the distribution of the velocity flows we applied to the negative and positive polarity, respectively.

grid (whose cell sizes are 0.06, to be compared to the original grid, whose cell sizes range from 0.006 to 0.32), the magnetic field we obtained has a lower solenoidality than the initial grid. This reduces the accuracy of the magnetic helicity and energy computations (Valori et al. 2016).

The system is delimited by a set of boundaries subject to “open” boundary conditions (except at $z = 0$). In the analyzed datasets, the bottom boundary is at $z = 0.006$, one mesh point above the surface corresponding to the photospheric level where line-tied boundary conditions were imposed in the original numerical experiments. All the physical MHD quantities, such as the magnetic field, can leave the simulation domain through lateral and top boundaries during the evolution of the system.

Four parametric simulations were performed, all starting with a common phase that is referred to as the “shearing phase” in Zuccarello et al. (2015, 2018). Initially, the magnetic field is potential and generated by two unbalanced and asymmetric sub-photospheric polarities. During the shearing phase, asymmetric vortices centered around the local maxima of $|B_z(z = 0)|$ slowly evolve the initial potential magnetic field into a current-carrying magnetic field. This shearing flow motion induces a magnetic shear close to the PIL and at the end of this phase, creates a current-carrying magnetic field arcade surrounded by a quasi-potential background field. During this entire phase, the distribution of B_z at the bottom boundary remains unchanged. This phase lasts from the time $t = 10t_A$ until $t = 100t_A$ in the system time coordinate, where t_A is the reference Alfvén time used in Zuccarello et al. (2015).

Then the four parametric simulations differ by the motion pattern that is imposed at the bottom boundary (cf. Fig. 1). We refer to this phase as the “pre-eruption” phase. In a first motion profile, labeled “convergence” (Fig. 1, left panel), the velocity flows only follow the horizontal direction x and are only applied close to the PIL. This creates a cancellation of the magnetic flux around the PIL but only slightly affects the periphery of the active regions. Unlike the previous case, for the run labeled “stretching” (Fig. 1, middle left panel), these horizontal motions are also applied at the periphery of the active region. For the other two runs, labeled “dispersion peripheral” and “dispersion central” (Fig. 1, middle right and right panels), the motions spread in all directions from the center. The only difference is in the portion of the active region that is subjected to these motions. In the dispersion peripheral run, only the periphery of the active region is concerned, while in dispersion central, the dispersion also occurs in the center of the polarity where the magnetic field is strongest.

The four runs all present a cancellation of magnetic flux at the PIL that is permitted by a finite photospheric diffusion. The sheared-arcade configuration at the end of the shearing phase evolves into a bald-patch topology, and the magnetic reconnection process leads to the formation of a flux rope. The system then evolves until it reaches the instant where it becomes unstable and erupts (cf. Aulanier et al. 2009, for a description of the eruption process). The onset of the eruption, that is, the time t_1 of the onset of the instability, is accurately determined by a series of relaxation runs for each simulation (Zuccarello et al. 2015). It occurs at $t_1 = 196, 214, 220$ and $164t_A$ for the convergence, stretching, dispersion peripheral, and dispersion central runs, respectively.

To ensure the numerical stability of the code, a finite resistivity η and a pseudo-viscosity ν are necessary (Zuccarello et al. 2015). During the common shearing phase until $t < 100t_A$ and during the pre-eruption phase, the coronal diffusivity is $\eta_{\text{cor}} = 4, 8 \times 10^{-4}$ and the pseudo-viscosity is fixed to $\nu' = 25$. After the eruption, during a phase referred to as eruption phase, η_{cor} is $2, 1 \times 10^{-3}$ and ν' is 41, 7. To allow later flux cancellation at the PIL, a photospheric resistivity $\eta_{\text{phot}} = \eta_{\text{cor}} = 4, 8 \times 10^{-4}$ is imposed only during the pre-eruption phase. The photospheric resistivity is set to zero in the shearing phase and before the eruption. The change in resistivity follows a ramp-down time profile during the time $t_1 - 5t_A < t < t_1 + 5t_A$. This transitional period is called “eruption onset phase” and is represented as the yellow band in all the figures. We note that the time t_1 corresponds to the middle of the ramp-down time profile, therefore the boundary flows are null only at $t > t_1 + 5t_A$. In this paper, we removed the first mesh point in the z -direction, which corresponds to the bottom boundary level. We therefore have a uniform resistivity throughout the domain in order to facilitate the calculation of the so-called “nonideal” terms.

5. Energy and helicity evolutions

In this section we first introduce the method for numerically computing the energies and helicities in our set of simulations. Then, we discuss the computation of the time-variations.

5.1. Energy and helicity estimations

In order to compute the different helicities and energies at each time t_A , we used the method of Valori et al. (2012). The datacubes of the magnetic field \mathbf{B} , of the plasma-velocity field \mathbf{v} , and of the plasma thermodynamic quantities allowed us to compute all the quantities that appear in Eqs. (8), (19), (48), and (42).

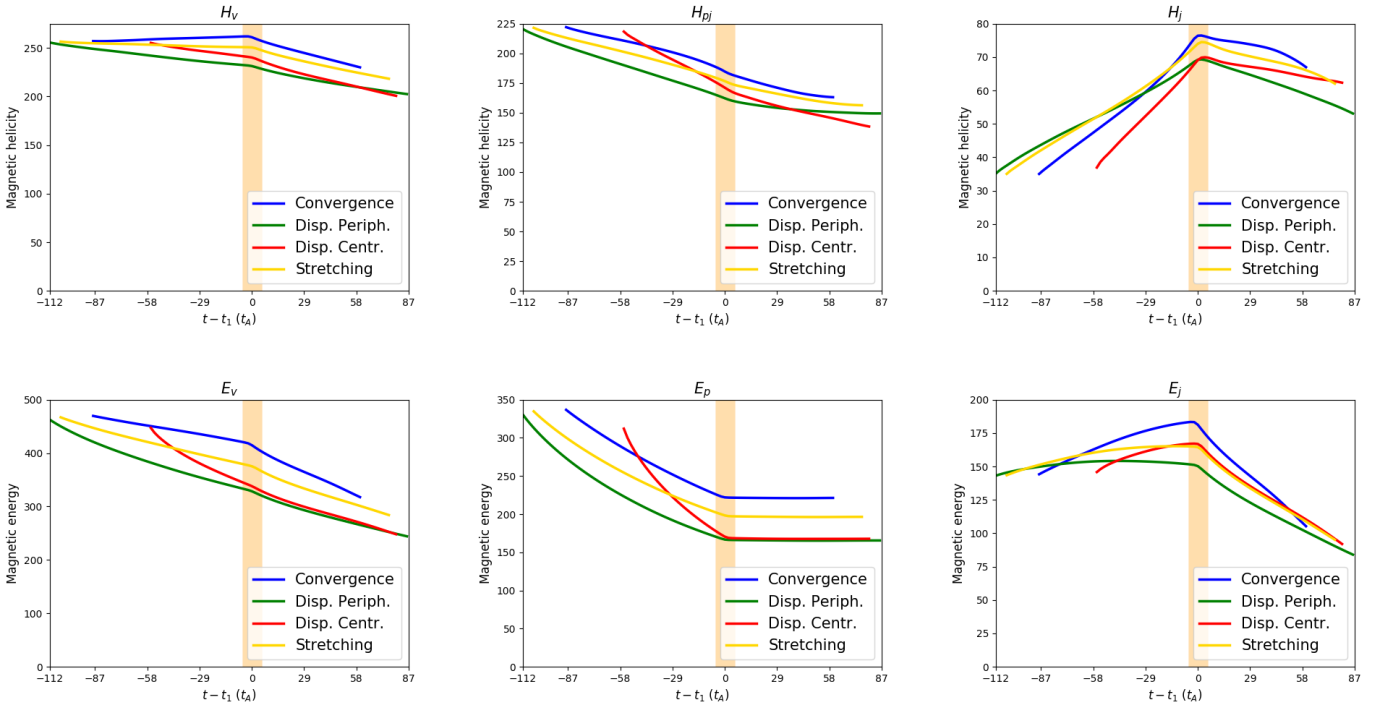


Fig. 2. Evolution of the different magnetic helicities (*top panels*), from left to right: relative magnetic helicity (H_v , Eq. (4)), volume-threading helicity (H_{pj} , Eq. (7)), and current-carrying helicity (H_j , Eq. (6)). Time evolution of the different magnetic energies (*bottom panel*), from left to right: total magnetic energy (E_v , Eq. (32)), potential energy (E_p , Eq. (31)), and free energy (E_j , Eq. (31)). The different simulations are dispersion central (red line), dispersion peripheral (green line), stretching (yellow line) and convergence (blue line). The yellow vertical band corresponds to the onset phase of the eruption.

First the scalar potential $\phi(t)$ of the potential magnetic field $\mathbf{B}_p(t)$ was obtained from a numerical solution of the Laplace Eq. (3). The numerical methods we employed to solve this equation required a uniform grid and thus led to the interpolation of the initial grid, as mentioned in Sect. 4. The potential vectors $\mathbf{A}(t)$ and $\mathbf{A}_p(t)$ were computed according to Eq. (14) in Valori et al. (2012) and follow the DeVore-Coulomb gauge defined in Pariat et al. (2015):

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0 \quad (55)$$

$$A_z(x, y, z, t) = A_{p,z}(x, y, z, t) = 0. \quad (56)$$

This choice of gauge was complemented by the following relationship inherent in the integration method:

$$A(x, y, z = z_{\text{top}}, t)_{\perp} = A_p(x, y, z = z_{\text{top}}, t)_{\perp}, \quad (57)$$

where \perp means the normal component. It corresponds to the 1D integration of magnetic fields starting at the top boundary of the domain at height z_{top} . Finally, we obtained the helicities and energies from Eqs. (5) and (30). In Fig. 2 we plot the time evolution of these quantities for the different runs. In order to facilitate the comparison between the different runs, the time is plotted with a modified time variable $t - t_1$ in each figure, where t_1 is the onset time defined in Sect. (4) and is different for each of the four simulations.

Unlike Zuccarello et al. (2018), we are interested here in the evolution of the quantities after the common shearing phase, including the eruption phase (which was not studied by Zuccarello et al. 2018). We also recall that the domain studied here is slightly different from the one studied in Zuccarello et al. (2018) (cf. Sect. 4). Figure 2 shows that the dynamics of energies and helicities are qualitatively similar from one simulation to the

other during the three different phases. The different boundary-forcing mainly affects the magnitude of the different quantities, but not the quality of their dynamical behaviors.

We also note that the dynamic of helicities and energies changes during the eruption. For the current-carrying helicity, H_j , and the free energy, E_j , we observe an overall increase during the pre-eruption phase, followed by a decrease during the eruption phase. The quantities related to the potential magnetic fields, E_p and H_{pj} , both decrease in the pre-eruption phase. In the eruption phase E_p remains constant while H_{pj} continues to decrease, although at a lower rate than in the pre-eruption phase.

Because both H_j and H_{pj} decrease, the relative helicity H_v also decreases in the eruption phase. The total energy, E_v , has a dynamics similar to H_v : the system loses energy throughout the simulation, but at a different rate before and after the eruption.

Overall, the behavior of the helicities is similar to their energy counterparts, for example, H_v to E_v , H_j to E_j , H_{pj} to E_p . This is particularly visible for the current-carrying helicity and the free energy: when H_j increases (decreases), E_j also increases (decreases). In the next sections we focus more on the reasons of these trends by studying the fluxes of the different quantities.

5.2. Time-variation estimation

After all the vectors were calculated, we computed the instantaneous time-variations of energies and helicities obtained from Eqs. (8), (19), (48), and (42). The surface integrals were calculated systematically as the sum of the contributions from the six boundaries. A study focusing on the contribution of the lower boundary alone is conducted in Sect. 9.3.

Linan et al. (2018) validated the time-variations equations established for the volume-threading helicity, H_{pj} , and the current-carrying helicity, H_j . The accuracy of the computation

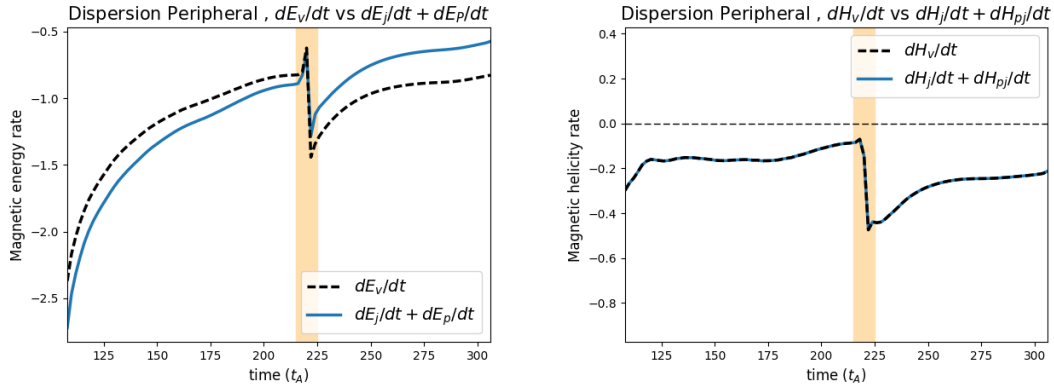


Fig. 3. *Left panel:* time evolution of the instantaneous time-variation, dE_v/dt (dashed black curves, Eq. (37)), and of the sum, $dE_j/dt + dE_p/dt$ (continuous blue curves, Eqs. (8) and (19)) for the dispersion peripheral run. *Right panel:* time evolution of the instantaneous time-variation, dH_v/dt (dashed black curves, Eq. (23) in Pariat et al. 2015), and of the sum, $dH_j/dt + dH_{pj}/dt$ (continuous blue curves, Eqs. (8) and (19)) for the dispersion peripheral run. The yellow bands correspond to the eruption onset phase.

is related to difference factors such as the discretization and the remapping of the data, spatial and temporal, as well as to nonexplicit numerical diffusive terms that are not accounted for in our analytical resistive MHD model. In our study, we present a complementary test by comparing the time-variation of the relative helicity, dH_v/dt computed from Eq. (23) in Pariat et al. (2015), with the sum of the time-variations of nonpotential and volume-threading helicities, $dH_j/dt + dH_{pj}/dt$ from (8) to (19). In this way, both sides are computed with the same temporal accuracy.

The result of this comparison is presented in the right panel of Fig. 3. In this figure we plot dH_v/dt and $dH_j/dt + dH_{pj}/dt$ for the dispersion peripheral simulation. For the other runs, the difference is on the same order of magnitude and varies in a similar way. We therefore do not plot this here. The difference is very low, with an average deviation smaller than 0.1%. This confirms the robustness of our calculation method as well as the validity of our analytical equations.

In the same way, we compare in Fig. 3 (left panel) the time-variation of the total magnetic energy, dE_v/dt , computed from Eq. (37), with the sum of the time-variations of free and potential energies, $dE_j/dt + dE_p/dt$, from Eqs. (42) to (48). Here, the difference is not negligible, with an average relative difference of 27%. The cause of this difference is likely mainly the non-solenoidality of the magnetic field. As mentioned Sect. 3, with a finite level of non-solenoidality, the equality of Eq. (45) is not fully accurate because $E_v \neq E_{j,s} + E_p$ (see Sect. 3.1).

In order to estimate the artificial non-solenoidal energy contributions, Valori et al. (2013) introduced the following decomposition:

$$E_v = E_{j,s} + E_{p,s} + E_{p,ns} + E_{j,ns} + E_{mix}, \quad (58)$$

where $E_{j,s}$ and $E_{p,s}$ are the energies of the current-carrying and potential solenoidal magnetic field. $E_{j,ns}$ and $E_{p,ns}$ are the non-solenoidal components, whereas E_{mix} corresponds to all the remaining cross terms. For a solenoidal field we have $E_{j,ns} = E_{p,ns} = E_{mix} = 0$, $E_{j,ns} = E_j$, $E_{p,ns} = E_p$, and therefore $dE_j/dt + dE_p/dt = dE_v/dt$.

The finite non-solenoidality ($\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$) affects the precision of the helicity and energy computations, as studied by Valori et al. (2016). Following Valori et al. (2013, 2016), Thalmann et al. (2019), we used the energy criteria E_{div}/E_v to quantify the non-solenoidality effect. The divergence-based energy is defined as

$$E_{div} = E_{p,ns} + E_{j,ns} + |E_{mix}|. \quad (59)$$

For the four simulation analyzed in this paper we find an average of $E_{div}/E_v \approx 2\%$. According to Valori et al. (2016), this value for the average of non-solenoidality leads to a precision of $\leq 6\%$ for our helicity computations, which is much lower than the 27% discrepancy found in Fig. 3. One possible cause of non-solenoidality is our interpolation of the original data from a highly nonuniform mesh onto a uniform grid, which can increase the nondivergence of the magnetic field. Different tests have been made to degrade and also improve the interpolation to give a rough estimate of the effect. Finer interpolations, however, have required considering only a fraction of the whole numerical domain to keep the number of grid points manageable. The outcome of these tests is that neither presented results that differed significantly from our baseline interpolation. In particular, E_{div}/E_v always remained on the order of 2%, which means that this error therefore seems intrinsic to the numerical models. The level of interpolation chosen in our study therefore is a good compromise between the required computed power and the quality of our data. In addition, it is worth noting that various terms in our equations depend on time variations, so that the accuracy of our flux computations can also be limited by a relative coarseness of the time outputs of the available data. Testing for this would require recalculating the simulations with a higher cadence for its outputs, which is beyond the scope of this paper.

6. Helicity transfer

As mentioned in the introduction (see Sect. 1), Linan et al. (2018) showed for two different eruptive simulations that the exchange between H_{pj} and H_j is controlled by the gauge-invariant transfer term $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ (see Eq. (10)), which therefore plays a key role in evolving these helicities. In order to confirm these different results in the particular case of our lined simulations, we plot in Fig. 4 the gauge-invariant terms of dH_j/dt (see Eq. (17)), and dH_{pj}/dt (see Eq. (28)) for the convergence and the dispersion peripheral runs.

In the convergence case (see Fig. 4, top left panel), the conversion of helicity from H_{pj} to H_j and the boundary flux have similar amplitudes during the pre-eruption phase. Both contributions are positive, thus H_j increases (e.g., dH_j/dt is positive). The transfer term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, dominates the evolution of H_j when it is close in time to the eruption. Meanwhile, H_{pj} decreases mainly because of the strong helicity transfer (cf. Fig. 4, top right panel), that is, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ is the dominating term of dH_{pj}/dt . In

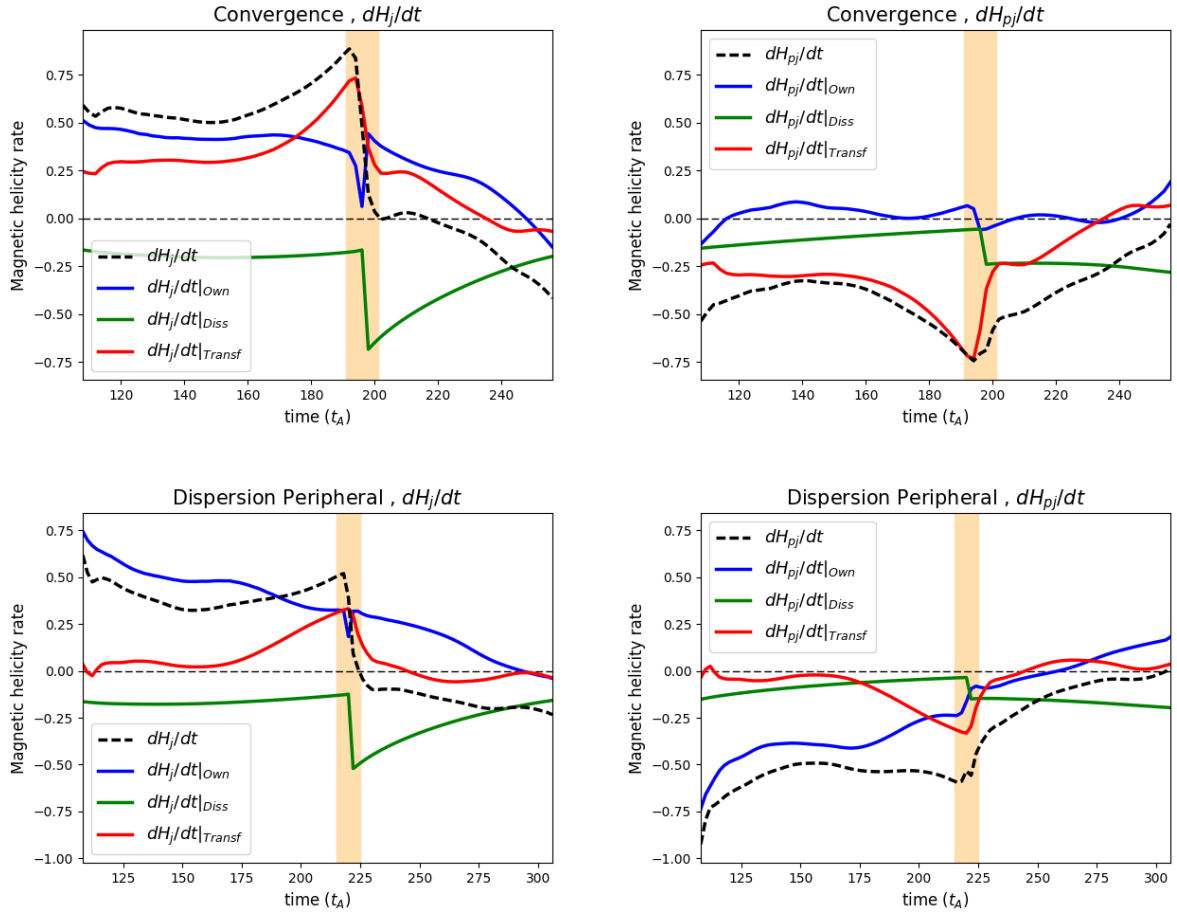


Fig. 4. Time evolution of the helicity variation rates, dH_j/dt and dH_{pj}/dt (dashed black curves; Eqs. (8) and (19)), of the helicity transfer term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$ (solid red curves; Eqs. (10) and (21)), of the own terms, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ (solid blue curves; Eqs. (18) and (29)), and of the dissipation terms, $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$ (solid green curves; Eqs. (9) and (20)) for the convergence simulation (*top panels*) and for the dispersion peripheral simulation (*bottom panels*). *Left and right panels*: evolution of the current carrying helicity, H_j , and volume-threading helicity H_{pj} , respectively.

comparison, the flux of H_{pj} related to the own term, $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$, is very low. This means that the injection of H_{pj} is not enough to compensate for its conversion to H_j .

Moreover, as with the flux emergence simulations presented in Linan et al. (2018), the eruption is accompanied by a sharp decrease of the transfer term. However, unlike in Linan et al. (2018), the sign of $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ does not change here during the onset phase of the eruption. During the eruption phase, the dissipation terms, $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$, dominate the variation of the helicities. This is related to the increase in resistivity η imposed in the numerical experiment during that period.

In the dispersion peripheral simulation (see Fig. 4, bottom panels), the variations of H_j and H_{pj} during the pre-eruption phase are noticeably dominated by the boundary fluxes, $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$. The transfer terms are significantly less intense than the injection of H_j and H_{pj} , except close to the eruption. During the eruption phase, the dynamics is mostly dominated by the resistive dissipation terms, $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$.

We thus observe that while the trends of H_j and H_{pj} are similar for the convergence and the dispersion peripheral simulations, as discussed in Sect. 5, these variations are in fact due to noticeably different dynamics of the helicity fluxes. For instance, the decrease of H_{pj} in the pre-eruption phase is due to an intense conversion of helicity (high values of $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$)

for the dispersion peripheral simulation, whereas in the convergence run, a similar evolution of H_{pj} is explained by an intense negative boundary flux, $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ during that period.

Finally, as has been noted in Linan et al. (2018), for both the simulations analyzed here but also for the two others, the transfer terms cannot be neglected. We confirm that the estimations of boundary fluxes are not sufficient to follow the dynamics of H_j and H_{pj} . However, unlike with the flux emergence and solar jet simulations studied in Linan et al. (2018), the precise mechanism of the buildup of H_j and H_{pj} does depend on the simulations during the pre-eruption phase. Studying this dependence is the goal of the next section.

7. Distinguishing between simulations in terms of helicity dynamics

In the previous section, we described that the magnitude of the different gauge-invariant helicity variation terms could be significantly different in the dispersion peripheral and in the convergence simulations. This demonstrates that even if the general trends of H_{pj} and H_j are similar (see Sect. 5), their dynamics can be significantly different.

In order to estimate the effect of the different boundary driver, Fig. 5 displays the different gauge-invariant variation terms for the four different numerical simulations: the boundary fluxes

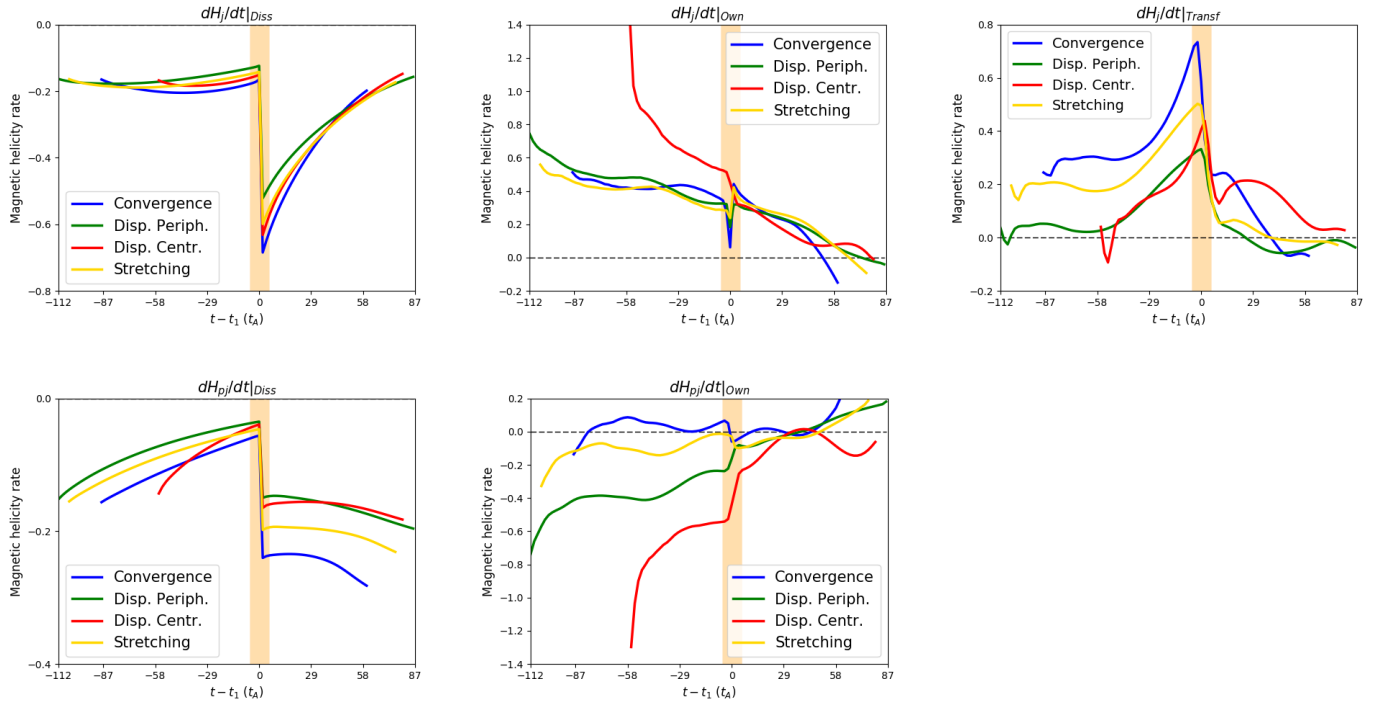


Fig. 5. Time evolution of the different gauge invariant terms of dH_j/dt (top panels), from left to right: dissipation term ($dH_j/dt|_{\text{Diss}}$, Eq. (9)), own term ($dH_j/dt|_{\text{Own}}$, Eq. (18)), and helicity transfer term ($dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, Eq. (10)). Time evolution of the different gauge invariant terms of dH_{pj}/dt (bottom panels), from left to right: dissipation term ($dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$, Eq. (20)), and own term ($dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$, Eq. (29)). Each curve color corresponds to a particular simulation: dispersion central (red line), dispersion peripheral (green line), stretching (yellow line), and convergence (blue line). The yellow band corresponds to the onset phase of the eruption.

$dH_j/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$; the transfer term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$; and the dissipations terms $dH_j/dt|_{\text{Diss}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Diss}}$.

The dissipations terms (cf. Fig. 5, left panels) are not significantly different from one simulation to the other. The sudden increase in absolute values of the dissipations terms, observed during the eruption onset phase, is related to the imposed numerical increase in resistivity. The variations in magnitude, particularly in the pre-eruption phase, are minor compared to the variations in other gauge-invariant terms.

The boundary flux term $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ is also very similar from one simulation to another, except for the dispersion central run, for which more nonpotential helicity is markedly injected during the pre-eruption phase (see Fig. 5, middle top panel). Unlike $dH_j/dt|_{\text{Own}}$, the boundary flux of H_{pj} , $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$, is strongly sensitive to the boundary-driving pattern (see Fig. 5, bottom left panel). The sign and magnitude of $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ depend on the simulation. For the dispersion simulations, there is a significant injection of negative H_{pj} , whereas in the convergence and stretching case, the flux is significantly weaker, if not of the opposite sign.

Finally, Fig. 5 (top right panel) shows that the helicity transfer rate, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, is higher for the convergence and stretching simulations than for the dispersion cases in the pre-eruption phase. Unlike with the other cases where the transfer term is almost constant during an early period, in the dispersion central run $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ increases from the first moments of the simulation.

In summary, we observed that during the pre-eruption phase, the increase of H_j and reciprocally the decrease of H_{pj} (cf. Fig. 5) are not explained by the same physical process in the different simulations. We observe three significantly different dynamics:

- The convergence and stretching simulations present a similar dynamics for their fluxes of helicity. They are characterized

by a relatively weak boundary flux of H_{pj} counterbalanced by a strong transfer from H_{pj} to H_j . The own term of H_j is positive, involving an injection of current-carrying helicity. Its magnitude is almost identical in these two runs.

- For the dispersion peripheral run, H_{pj} decreases mostly because of the boundary flux, unlike with the previous cases. In comparison to the boundary flux, the transfer from H_{pj} to H_j is less important. The flux of H_j is similar to the convergence and stretching runs.
- The dispersion central shares some similarities with the dispersion peripheral run regarding the variations of H_{pj} . However, this simulation is characterized by a high boundary flux of H_j that is distinct and significantly higher than the three other cases.

Finally, simulations with the largest injection of helicities due to their own terms (whether H_j or H_{pj}) have the lowest magnitude of the transfer term. Inversely, a strong exchange between H_j and H_{pj} is accompanied by lower fluxes through the surfaces. Both lead to a similar trend for the relative helicity H_v . This shows that the boundary fluxes of H_j or H_{pj} as well as the volume term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$, are directly related to the morphology and the evolution of the magnetic field at the bottom boundary. In Sect. 9.3 we discuss that a specific boundary-driven pattern may influence the different physical mechanisms of the evolution of the magnetic helicities.

8. Distinguishing between simulations in terms of energy dynamics

As shown in Sect. 5, the evolutions of H_j and E_j are very similar. Likewise, H_{pj} and E_{pj} evolve in the same way during the pre-eruption phase. The main difference appears after the eruption, where H_{pj} still decreases while E_{pj} remains constant. However,

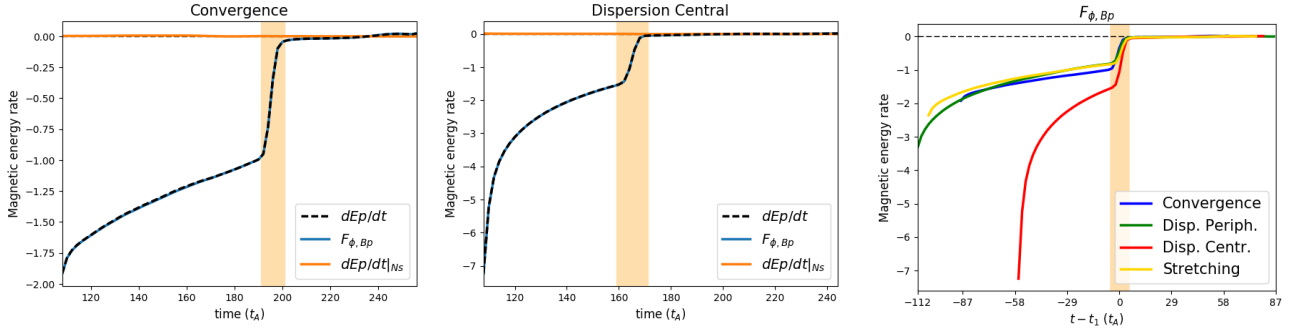


Fig. 6. *Left and middle panel:* time evolution of the potential energy variation term (dashed black line; dE_p/dt ; Eq. (42)) and the different terms constituting the instantaneous time-variation of E_p (Eq. (42)): F_{ϕ,B_z} (blue line; Eq. (43)), and $dE_p/dt|_{Ns}$ (orange line; Eq. (44)). *Left and middle panels:* evolution for the convergence and dispersion central simulation, respectively. *Right panel:* time evolution of F_{ϕ,B_z} for the four simulations dispersion central (red line), dispersion peripheral (green line), stretching (yellow line), and convergence (blue line). The yellow band corresponds to the onset phase of the eruption.

the similar overall behaviors of H_{pj} and H_j hide very different physical mechanisms, depending on the simulation, as shown in the previous section. We identified three types of evolution for the dynamics of the helicities. In this section we focus on the following questions: how do E_{pj} and E_j evolve? Does the dynamics of the energy fluxes also distinguish between the different simulations, as the helicity dynamics do?

For this purpose, we present in Fig. 6 all the flux that appear in the decomposition of dE_p/dt (see Eq. (42)) for the convergence (Fig. 6, left panel) and the dispersion central simulations (Fig. 6, middle panel). In both simulations, the nonideal term is almost null because of a very low non-solenoidality of the potential field, for instance, $\nabla \cdot B_p \approx 0$. The evolution of the potential energy therefore depends only on F_{ϕ,B_z} , which results from the evolution of the magnetic field at the boundaries. During the pre-eruption phase, the magnitude of F_{ϕ,B_z} as the relative change of the magnetic field at the boundary becomes weaker. Then, during the eruption onset phase, F_{ϕ,B_z} decreases strongly before becoming null during the eruption phase. The magnetic field is indeed kept fixed at the bottom boundary during that period.

From comparing F_{ϕ,B_z} in the different simulations, we note that F_{ϕ,B_z} presents the same evolution for all simulations except for the dispersion central (see Fig. 6, right panel). This indicates that except for the dispersion central simulation, the differences in boundary-driven motions do not affect the injection of the potential energy (cf. the discussion in Sect. 9.3). However, this run has the same functional form as the other, is only more efficient, and therefore quicker, in achieving the eruption.

Regarding E_p , only the dispersion central run presents a different behavior. The same conclusion was obtained for the fluxes of H_j , for instance, $dH_j/dt|_{O_{wn}}$ (see Fig. 5, middle top panel), but not for $dH_{pj}/dt|_{O_{wn}}$ (cf. Fig. 5). First, F_{ϕ,B_z} is negative for the entire simulation, while the sign $dH_{pj}/dt|_{O_{wn}}$ depends on the simulation. This confirms that there is no direct link between the dynamics of E_p and the injection of H_{pj} .

In Fig. 7 we observe the different terms of dE_j/dt (Eq. (48)) for the four simulations. Unlike dH_j/dt and dH_{pj}/dt , the trends and dominant terms of dE_j/dt are similar in the simulations. Only the magnitude of each term may differ. Before the eruption, dE_j/dt is dominated by the emergence term F_{Bn,E_j} despite a significant magnitude of the dissipation term, $dE_j/dt|_{Diss}$. Then, during the eruption, F_{Bn,E_j} becomes null as a result of the interruption of the boundary-driving flows. During the eruption phase, dE_j/dt is negative and dominated by $dE_j/dt|_{Diss}$. The free energy mainly decreases because it is dissipated and not ejected out of the volume.

The dissipation term, $dE_j/dt|_{Diss}$ does not vary much between the simulations (see Fig. 8, bottom right panel). Similarly, the differences of F_{Vn,E_j} and $dE_j/dt|_{Var}$ are small between the runs during the pre-eruption phase. Only F_{Bn,E_j} (see Fig. 7, top left panel) presents significant differences in the simulations that affect the evolution of the free energy, E_j . The dispersion central simulation presents a distinctive trend. The magnitude of F_{Bn,E_j} starts very high and then decreases to values similar to the other runs during the onset phase of the eruption.

Unlike the evolution of the helicities, H_j and H_{pj} , only the dispersion central simulation stands out from the other runs. This simulation is characterized by a higher decrease of the potential field (see Fig. 6, right panel) and by a higher initial injection of E_j caused by F_{Bn,E_j} (see Fig. 8, top left panel). Before the eruption, another difference with the helicities is that the variations of the trend of E_j and E_p are purely related to the boundary fluxes. Finally, one key outcome of our study is that the dynamics of the energy fluxes do not distinguish between the simulations, unlike the helicity fluxes.

This shows that even if volume helicities and energies follow similar trends (cf. Fig. 2), the physical mechanisms that drive their dynamics are very different. First, the evolution of free energy, E_j , and potential energy, E_p , are independent, while the current-carrying helicity, H_j , evolves in a correlated way with the volume-threading helicity, H_{pj} . Additionally, different boundary forcing only affects the magnitude of the energy fluxes. The dynamics of the helicity is more complex and varies drastically from one simulation to another. One group of simulations (dispersion central and peripheral) is dominated by the flux through the surfaces, while a second group (convergence and stretching) is controlled by volume exchange within the domain. We conclude that energy, helicity, and their decompositions have distinct properties whose analysis should be complementary for the study of the eruptivity of active regions.

9. Discussion

9.1. Summary

In Sect. 2 we introduced the formulation of the magnetic relative helicity, H_v , as well as the formulation of its decomposition into the current-carrying helicity, H_j , and the volume-threading helicity, H_{pj} . We also recalled the analytical equations of their time-variations obtained in Linan et al. (2018). Similarly, we introduced the decomposition of magnetic energy, E_v , into the sum of the potential energy, E_p , and the free energy, E_j . Then,

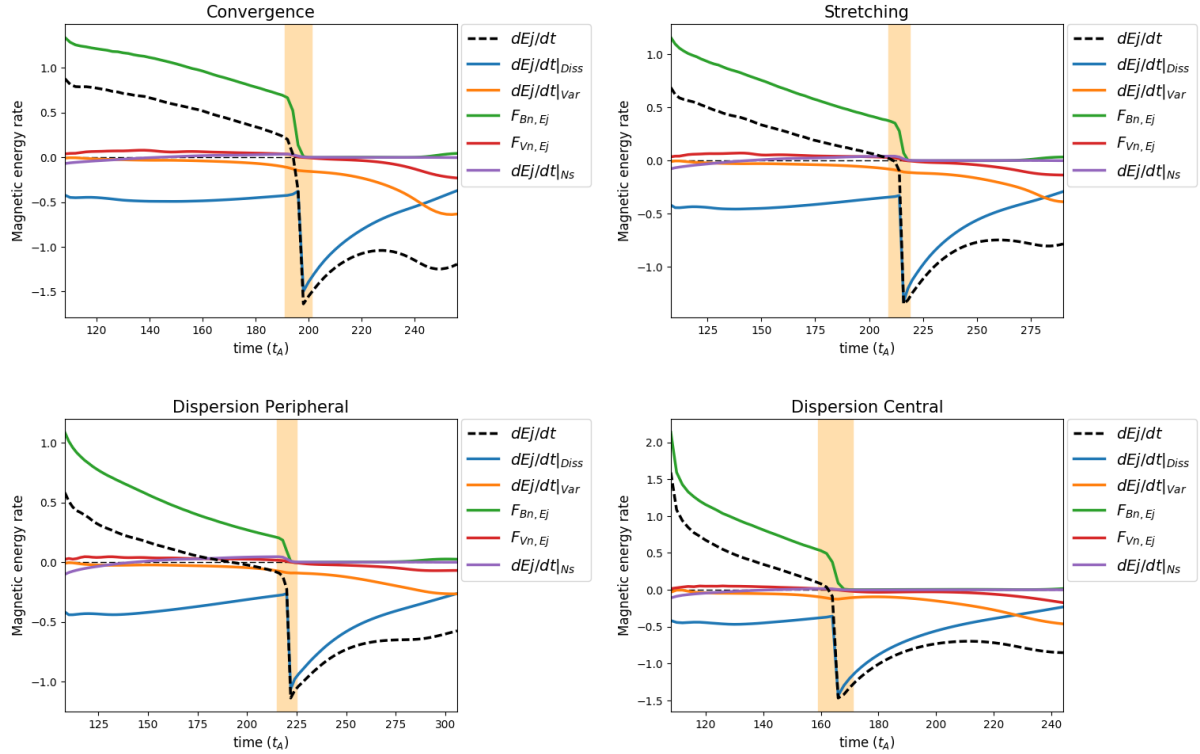


Fig. 7. Time evolution of the free-energy variation rate (dashed black line; dE_j/dt ; Eq. (48)) and the different terms constituting the instantaneous time-variation of E_j (Eq. (48)): $dE_j/dt|_{\text{Diss}}$ (blue line; Eq. (49)), $dE_j/dt|_{\text{Var}}$ (orange line; Eq. (50)), $F_{Bn,Ej}$ (green line; Eq. (51)), $F_{Vn,Ej}$ (red line; Eq. (52)), and $dE_j/dt|_{\text{Ns}}$ (purple line; Eq. (54)). Each panel corresponds to a different simulation: convergence (*top left*), stretching (*top right*), dispersion peripheral (*bottom left*), and dispersion central (*bottom right*). The yellow band corresponds to the onset phase of the eruption.

we obtained the time-variation of E_v (see Eq. (37)), E_p (see Eq. (42)), and E_j (see Eq. (48)) by analytically deriving their time derivative (see Sect. 3). These formulae are valid for any gauge choices and in the presence of finite level of non-solenoidality for the magnetic field.

Our numerical study of time-variations of energies and helicities is based on a series of four eruptive numerical MHD simulations of solar active regions (see Sect. 4) that have been investigated in Zuccarello et al. (2015). The evolution of each simulation is characterized by different boundary forcing (line-tied) until the eruption (see Sect. 4). After the same shearing phase, four driving photospheric flows were considered: convergence, stretching, and peripheral and central dispersion flows. In this study we were particularly interested in the fluxes of energies and helicities during the flux rope formation, during the eruption onset phase, when the torus instability occurs, and during a short time interval after the eruption onset, called the eruption phase.

Initially, the magnetic energy, E_v , decreases as a result of the decrease in the potential magnetic field, E_p , despite the increase in free energy, E_j . At the same time, the decrease in volume-threading helicity, H_{pj} , compensates for the injection of the current-carrying helicity, H_j , which leads to a quasi-constant evolution of the relative helicity H_v (see Sect. 5). The relative helicity was mostly injected during the earlier shearing phase.

The fluxes of free and potential energies, E_j and E_p (see Sect. 8) showed that the effectiveness of the buildup of free energy within the domain is purely related to the magnitude of one surface term. Similarly, the evolution of potential energy is fully linked with its boundary fluxes.

We also used these simulations to investigate the importance of the exchange between H_j and H_{pj} , which was previously highlighted by Linan et al. (2018). The exchange of helicity

between H_j and H_{pj} is controlled by a gauge-invariant term, $dH_j/dt|_{\text{Transf}}$ (cf. Eq. (10)). As in Linan et al. (2018), we observed that this term plays a key role in the dynamics of both H_j and H_{pj} , in particular during the buildup phases where the transfer terms, $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$, dominate the evolution of dH_{pj}/dt for the runs convergence and stretching. In the dispersion simulations, the evolutions of dH_j/dt and dH_{pj}/dt are dominated by their boundary fluxes, $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$ (cf. Eqs. (18) and (29)), even though the magnitude of the transfer term remains significant. This means that neither H_j nor H_{pj} evolve as a result of boundary fluxes alone. This conclusion is consistent with the results of Linan et al. (2018) that were obtained for different numerical experiments. Specifically, H_j and H_{pj} cannot be estimated in observed active solar active regions by time integration of its flux through the solar photosphere, but rather with a volume-integration method (Valori et al. 2016). This approach requires a 3D reconstruction of the coronal magnetic field from the 2D photospheric measurement with coronal field extrapolation techniques (Wiegmann & Sakurai 2012; Wiegmann et al. 2014). A more detailed discussion of the effect of the transfer term on the estimation of H_j and H_{pj} can be found in the conclusion of Linan et al. (2018).

The key outcome of the study is the observation that the dynamics of the transfer and fluxes of H_j and H_{pj} depend on the simulation and thus on the imposed driving motions, even though the variations in H_j and H_{pj} seemed relatively independent of the simulation setup (see Sect. 6). Despite the four boundary forcings, the different simulations remain very similar in terms of the magnetic field topology. Nonetheless, the dominant terms of dH_j/dt and dH_{pj}/dt are not the same from one simulation to another.

We highlighted three distinct types of dynamics of the evolution of the helicities in the simulations. In the convergence and

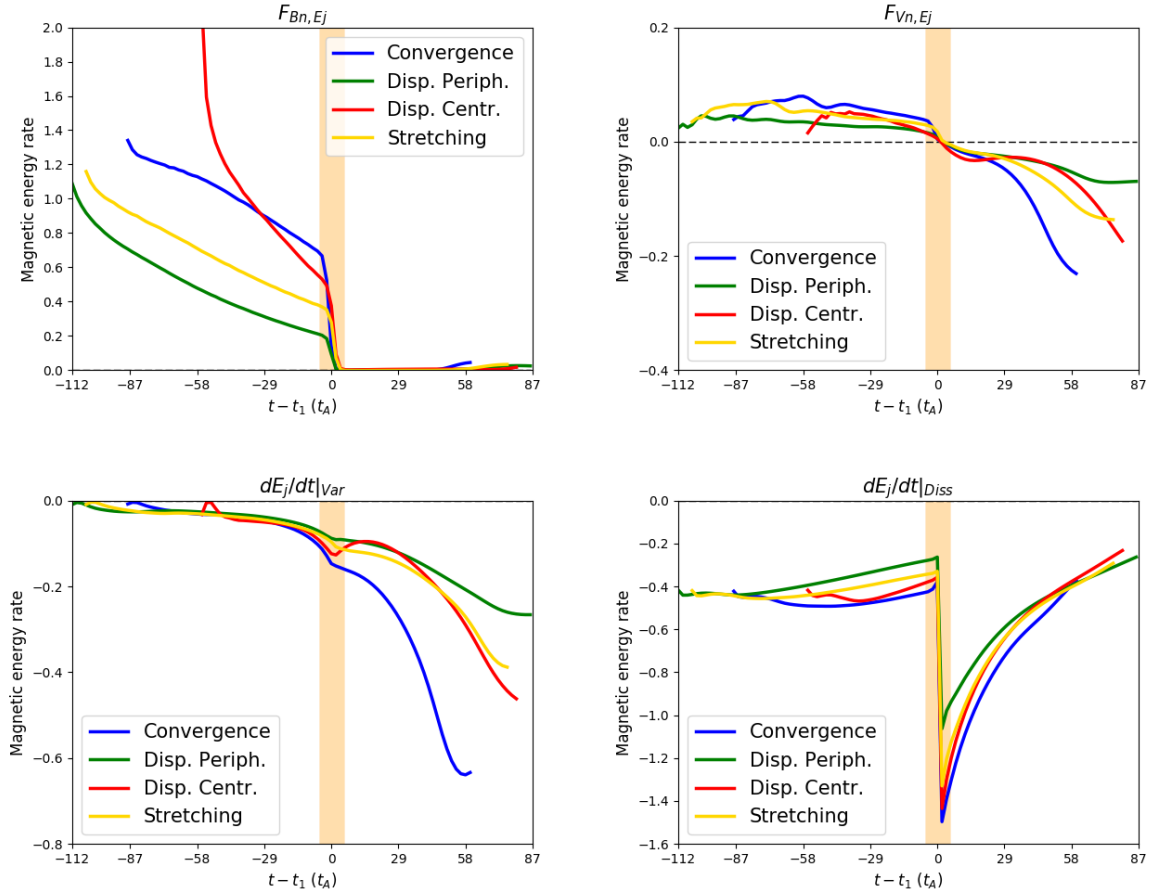


Fig. 8. Time evolution of the different gauge-invariant terms of dE_j/dt : $F_{Bn,Ej}$ (top right panel, Eq. (51)), $F_{Vn,Ej}$ (top left panel, Eq. (52)), $dE_j/dt|_{Var}$ (bottom left panel, Eq. (50)), and $dE_j/dt|_{Diss}$ (bottom right panel, Eq. (49)). The different colors present one simulation: dispersion central (red line), dispersion peripheral (green line), stretching (yellow line), and convergence (blue line). The yellow band corresponds to the onset phase of the eruption.

stretching simulations, H_{pj} does not evolve as a result of boundary fluxes, but because of its conversion into H_j . The opposite is observed during the two dispersion simulations, for which the evolution of H_{pj} is mainly related to its fluxes through the boundary, with a weak transfer term. The dispersion central simulation stands out from the others because its boundary flux of the current-carrying helicity, H_j , is significantly higher.

Thus we were able to process several photospheric forcings to approach the diversity of active regions that are observed at the solar photosphere. We have come to the conclusion that the evolution of helicity during the formation of a flux rope is a complex process whose origin can be related to fluxes through the surface as well as to volume contributions.

9.2. Buildup of the helicity ratio

Zuccarello et al. (2018) have shown that the trigger of the eruptions is related to a threshold in the helicity ratio H_j/H_v : this ratio reaches the same value, $|H_j/H_v|_{\text{thresh}}$, for all simulations at the onset of the eruptions. In our runs, this threshold is 0.29 ± 0.01 . However, as discussed in Sect. 7 of Zuccarello et al. (2018), the exact value of this threshold needs to be taken with care because relative helicity is not simply an additive quantity. We investigated how this helicity ratio is built up and eventually reached by studying the specific dynamics of H_j and H_{pj} (see Sects. 6 and 7). Despite the different boundary forcings, the simulations are very similar, so that it might have been thought that the fluxes of H_j

and H_{pj} would also be similar. However, the key outcome of our study is that the terms that dominate the evolution of dH_j/dt or dH_{pj}/dt sensitively depend on the simulation even if the overall trends are the same (H_j increases and H_{pj} decreases, see Sect. 5).

Three very distinct ways to reach the helicity eruptivity threshold were found. We observed that the eruption was triggered at a specific value of H_j/H_v independently of the dynamics of H_j and H_{pj} to reach this threshold. Our work suggests that active regions could reach an eruptive state, either through strong increases of helicity fluxes or through magnetic configurations that induce strong helicity transfer.

The different ways to reach the helicity eruptivity threshold are not all equally effective. The eruption occurs more or less quickly after the end of the shearing phase. The dispersion central run is the most rapid simulation. Then we find the stretching and convergence runs, and last the dispersion peripheral case. The dispersion central simulation stands out from the others because it presents higher helicity fluxes (due to $dH_j/dt|_{\text{Own}}$ and $dH_{pj}/dt|_{\text{Own}}$) and energy fluxes (due to $F_{\phi,Bz}$ and $F_{Bn,Ej}$) than the other cases.

Finally, using a set of resistive MHD simulations, we provided new knowledge of the energy and helicity properties. In particular, our analytical and numerical work emphasizes recent studies (Pariat et al. 2017; Zuccarello et al. 2018; Moraitis et al. 2019; Thalmann et al. 2019) that demonstrated how promising the helicity ratio is as a marker of eruptivity. Further studies are still needed, whether to analytically establish the link between

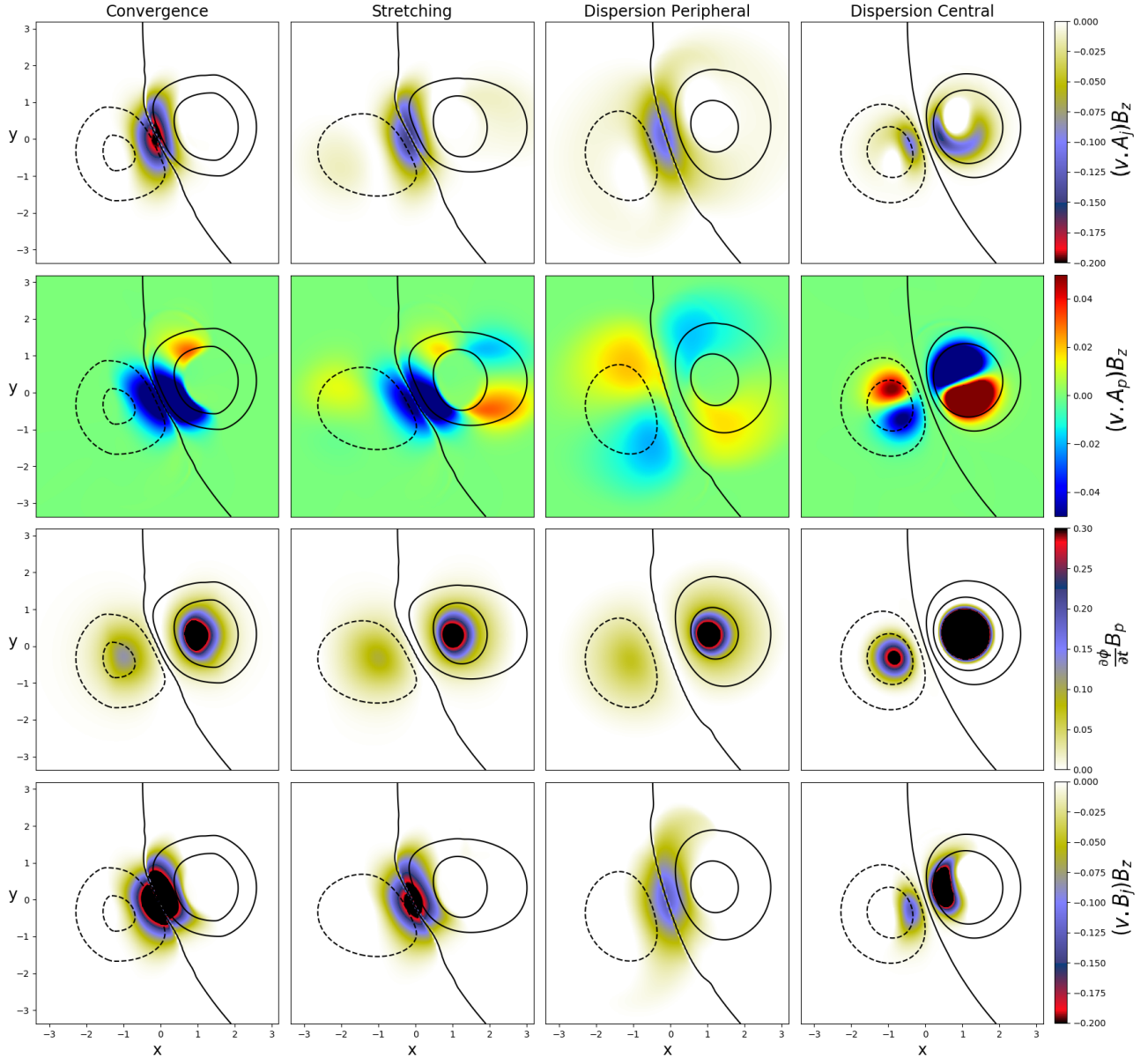


Fig. 9. From top to bottom: dimensionless magnitude of $(v \cdot A_j)B_z$, $(v \cdot A_p)B_z$, $(\partial\phi/\partial t)(B_p)$, and $(v \cdot B_j)B_z$ viewed in the (x, y) plane at $z = 0.006$, at the relative time of $t - t_1 = -58$. Isocontours of $|B_z|$ (dashed line for negative values, solid line for positive values) correspond to values of $|B_z| = -4.5, -2.0, 0, 2.0,$ and 4.5 . Each column in the panels presents one simulation, from left to right: convergence, stretching, dispersion peripheral, and dispersion central.

the helicity ratio and torus instability or to properly estimate it from data that are measured in the solar atmosphere.

From direct observational data, the evolution of the ratio H_j/H_v was also analyzed in three active regions with different eruptive profiles. Moraitis et al. (2019) investigated the most active region of cycle 24 (AR 12673), while Thalmann et al. (2019) focused on an eruptive and a confined flare (AR 11158 and AR 12192). These recent observational analyses seem to qualitatively confirm that the H_j/H_v ratio is tightly related to the eruptivity of solar active regions.

9.3. Effect of the different flows on the helicity and energy injections

A key result of our study is that the specific driving flows that are applied at the bottom boundary are of significant importance on the dynamics of magnetic helicities and energies. They influ-

ence the magnitude and the sign of the own terms for the helicity as well as those of the main fluxes of dE_j/dt and dE_p/dt . Moreover, as mentioned in the previous section, even if the way to reach the helicity eruptivity threshold matters less than reaching the threshold, the spatial velocity and magnetic distributions at the boundary affect the time that is required to reach the threshold.

To reach an understanding of the effect of the line-tied forcing, we here briefly discuss the distribution of different quantities at the bottom boundary. A more complete study is beyond the scope of the present paper but will be performed, however.

Our goal is to present quantities that might eventually be obtained from observed photospheric magnetograms. Figure 9 shows four quantities that are related to the energy and helicity fluxes in a $(x - y)$ view at $z = 0.006$ for all simulations at the same modified time to the eruption ($t_1 - t_A = -58$): $(v \cdot A_j)B_z$, the integrand of $F_{V_n A_j}$, for the injection of H_j (see the first row

in Fig. 9); $(v \cdot A_j)B_z$, the integrand of $F_{Vn,Ap}$, for the injection of H_{pj} (see the second row in Fig. 9); $(\partial\phi/\partial t)B_p$, the integrand of $F_{\phi,Bp}$ (see the third row in Fig. 9); and $(v \cdot B_j)B_z$, the integrand of $F_{Bn,Ej}$ (see the fourth row in Fig. 9). The modified time was taken arbitrarily in the pre-eruption phase.

We recall that the injections of H_j or H_{pj} related to their own terms cannot be simply reduced to $F_{Vn,Aj}$ and $F_{Vn,Ap}$. Other terms such as $dH_{pj}/dt|_{\text{Transf}}$ must be considered. The second issue is that neither $F_{Vn,Aj}$ nor $F_{Vn,Ap}$ are gauge-invariant quantities. They are still good indicators of the spatial distribution of the helicity injection, however, because the same gauge was used for all four runs. Moreover, the emergence term of the relative helicity is one quantity that has traditionally been investigated at the solar photosphere (Liu & Schuck 2012; Bi et al. 2018). The distributions of $F_{Vn,Aj}$ and $F_{Bn,Ej}$ are very similar (see the first and last row in Fig. 9). This reveals that the injection of free energy appears to be directly connected to the injection of current-carrying helicity.

The area where $F_{Vn,Aj}$ and $F_{Bn,Ej}$ are intense is along the PIL, except for the dispersion central simulation. In the convergence and stretching runs, the shear is favored because the angle between the velocity and the magnetic field at the PIL is high. For the dispersion peripheral case, the velocity is perpendicular to the PIL. Thus the free energy increases more slowly than in the other cases, and more time is needed to build up the flux rope. We also note a low contribution of $F_{Vn,Aj}$ related to the dispersion of the magnetic field at the periphery of the polarities in the stretching and dispersion peripheral runs.

As highlighted in Sect. 7, the dynamics in the dispersion central simulation stands out from the others. Unlike the other cases, the intense regions of $F_{Vn,Aj}$ and $F_{Bn,Ej}$ are located close to the center of the polarities. The difference between this simulation and the other three appears clearly for $F_{\phi,Bp}$ (see the third row in Fig. 9). In Sect. 8 we observed that $F_{\phi,Bp}$ was distinctly higher for the dispersion central than in the other cases. The magnitude of $F_{\phi,Bp}$ is higher for the dispersion central simulation because the center of the polarity, where the magnetic field is the most intense, is displaced. The positive polarity, which possess a higher magnetic flux than the negative polarity, contributes more to $F_{\phi,Bp}$. The three other cases are very similar because the regions subjected to the flow do not influence $F_{\phi,Bp}$.

The distribution of the $F_{Vn,Ap}$ term (see the second row in Fig. 9) is markedly different from the other quantities presented in Fig. 9. Two different behaviors appear. For the convergence and stretching runs, like $F_{Vn,Aj}$, the shear along the PIL is the main contribution of $(v \cdot A_j)B_z$. For the dispersion runs, $F_{Vn,Ap}$ is distributed in a symmetric quadrupole at the location where the flow is applied. This leads to an almost null total flux, $F_{Vn,Ap}$.

Finally, the best way to reach the helicity threshold for these parametric simulations is to facilitate the dispersion of the intense magnetic field. For instance, in the dispersion central case, this corresponds to distributing the flow from the center of each polarity. For the other cases with lower dispersion, the efficient ways to build up the energies and helicities are mostly linked with flux-cancellation converging motions that contain a shearing-flow component parallel to the PIL. The convergence and stretching runs have more intense contributions there.

The observations made above offer only a limited insight on the effect of the different flows on the evolution of energy and helicity. We saw that even if the four simulations look similar overall, some differences related to the applied motions clearly appear in the dynamic of the helicity and energy. New investigations are required to provide a better understanding of the energy and helicity dynamics. Our study especially provides new infor-

mation for interpreting the injection of helicity and energy in observed active regions.

With HMI vector magnetic field data, the evolution of energy and helicity flux has previously been studied in different active regions (Liu & Schuck 2012). This is commonly based on the decomposition of the flux into two components: a shear component provided by photospheric tangential flow, and a vertical component linked with normal flows due to emergence (Bi et al. 2018). At the same time, new methods for properly measuring helicities in the solar corona are still being developed (Dalmasse et al. 2013, 2014, 2018; Valori et al. 2016; Guo et al. 2017; Moraitis et al. 2018; Gosain & Brandenburg 2019). For instance, new analytic expressions for the helicity transport allow us to estimate the injection of relative magnetic helicity into the solar atmosphere over an entire solar cycle (Hawkes & Yeates 2019; Pipin et al. 2019). However, the quality of the helicity and energy estimations from observational data greatly depends on the accuracy of the magnetic field measurements. In particular, it is still difficult to measure the tangential component of the magnetic field. The instrumentation on board the new Solar Orbiter mission, for example, the PHI magnetogram, will help us to make significant progress on the magnetic field measurement and consequently on the helicity and energy computations. Future results that will benefit from our study will provide new insight for a better understanding of the solar coronal activity.

Acknowledgements. The authors thank the anonymous reviewer for careful reading of the manuscript and helpful comments. L.L., E.P., K.M. acknowledge support of the French Agence Nationale pour la Recherche through the HELISOL project ANR-15-CE31-0001. L.L., E.P. acknowledge the support of the french Programme National Soleil-Terre. GV acknowledges the support from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under grant agreement No 824135 and of the STFC grant number ST/T000317/1. The numerical simulation used in this work was performed on the HPC center MesoPSL financed by the project Equip@Meso (reference ANR-10-EQPX-29-01) and the Region Ile-de-France. This article profited from discussions during the meetings of the ISSI International Team Magnetic Helicity in Astrophysical Plasmas.

References

- Antiochos, S. K. 2013, *ApJ*, 772, 72
Aulanier, G., Démoulin, P., & Grappin, R. 2005, *A&A*, 430, 1067
Aulanier, G., Török, T., Démoulin, P., & DeLuca, E. E. 2009, *ApJ*, 708, 314
Barczynski, K., Aulanier, G., Masson, S., & Wheatland, M. S. 2019, *ApJ*, 877, 67
Berger, M. 2003, *Fluid Mech. Astrophys. Geophys.*, 20030424, 23
Berger, M. A., & Field, G. B. 1984, *J. Fluid Mech.*, 147, 133
Bi, Y., Liu, Y. D., Liu, Y., et al. 2018, *ApJ*, 865, 139
Brandenburg, A., & Subramanian, K. 2005, *Phys. Rep.*, 417, 1
Chae, J. 2007, *Adv. Space Res.*, 39, 1700
Dalmasse, K., Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Green, L. 2013, *A&A*, 555, L6
Dalmasse, K., Pariat, E., Démoulin, P., & Aulanier, G. 2014, *Sol. Phys.*, 289, 107
Dalmasse, K., Pariat, E., Valori, G., Jing, J., & Démoulin, P. 2018, *ApJ*, 852, 141
Del Sordo, F., Candelaresi, S., & Brandenburg, A. 2010, *Phys. Rev. E*, 81, 036401
Démoulin, P., & Aulanier, G. 2010, *ApJ*, 718, 1388
Elsasser, W. M. 1956, *Rev. Mod. Phys.*, 28, 135
Finn, J. M., & Antonsen, Jr., T. 1985, *Plasma Phys. Control. Fusion*, 9, 111
Forbes, T. G. 2000, *J. Geophys. Res.*, 105, 23153
Gosain, S., & Brandenburg, A. 2019, *ApJ*, 882, 80
Guo, Y., Pariat, E., Valori, G., et al. 2017, *ApJ*, 840, 40
Hawkes, G., & Yeates, A. R. 2019, *A&A*, 631, A138
James, A. W., Valori, G., Green, L. M., et al. 2018, *ApJ*, 855, L16
Karpen, J. T., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2012, *ApJ*, 760, 81
Knizhnik, K. J., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2015, *ApJ*, 809, 137
Kusano, K., Maeshiro, T., Yokoyama, T., & Sakurai, T. 2002, *ApJ*, 577, 501
Kusano, K., Maeshiro, T., Yokoyama, T., & Sakurai, T. 2004, *ApJ*, 610, 537
Leake, J. E., Linton, M. G., & Török, T. 2013, *ApJ*, 778, 99

- Leake, J. E., Linton, M. G., & Antiochos, S. K. 2014, *ApJ*, 787, 46
- Linan, L., Pariat, É., Moraitis, K., Valori, G., & Leake, J. 2018, *ApJ*, 865, 52
- Linton, M., & Antiochos, S. 2002, *ApJ*, 581, 703
- Linton, M., Dahlburg, R., & Antiochos, S. 2001, *ApJ*, 553, 905
- Liu, Y., & Schuck, P. 2012, *ApJ*, 761, 105
- Liu, Y., & Schuck, P. 2013, *Sol. Phys.*, 283, 283
- Longcope, D. 2004, *ApJ*, 612, 1181
- Longcope, D., & Beveridge, C. 2007, *ApJ*, 669, 621
- Longcope, D., Ravindra, B., & Barnes, G. 2007, *ApJ*, 668, 571
- Low, B. 1996, *Sol. Phys.*, 167, 217
- Moraitis, K., Tziotziou, K., Georgoulis, M., & Archontis, V. 2014, *Sol. Phys.*, 289, 4453
- Moraitis, K., Pariat, É., Savcheva, A., & Valori, G. 2018, *Sol. Phys.*, 293, 92
- Moraitis, K., Sun, X., Pariat, É., & Linan, L. 2019, *A&A*, 628, A50
- Nindos, A., Zhang, J., & Zhang, H. 2003, *ApJ*, 594, 1033
- Pariat, E., Démoulin, P., & Berger, M. 2005, *A&A*, 439, 1191
- Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Dalmasse, K. 2015, *A&A*, 580, A128
- Pariat, E., Leake, J., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, 601, A125
- Pipin, V. V., Pevtsov, A. A., Liu, Y., & Kosovichev, A. G. 2019, *ApJ*, 877, L36
- Polito, V., Del Zanna, G., Valori, G., et al. 2017, *A&A*, 601, A39
- Priest, E. 2014, *Magnetohydrodynamics of the Sun* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Priest, E. R., Longcope, D., & Janvier, M. 2016, *Sol. Phys.*, 291, 2017
- Rust, D. 1994, *Geophys. Res. Lett.*, 21, 241
- Schrijver, C. J., & Zwaan, C. 2008, *Solar and Stellar Magnetic Activity* (Cambridge: Cambridge University Press), 34
- Simon, C. 2012, PhD Thesis
- Taylor, J. B. 1974, *Phys. Rev. Lett.*, 33, 1139
- Temmer, M., Thalmann, J. K., Dissauer, K., et al. 2017, *Sol. Phys.*, 292, 93
- Thalmann, J. K., Moraitis, K., Linan, L., et al. 2019, *ApJ*, 887, 64
- Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, E. 2012, *Sol. Phys.*, 278, 347
- Valori, G., Demoulin, P., Pariat, E., & Masson, S. 2013, *A&A*, 553, A38
- Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016, *Space Sci. Rev.*, 201, 147
- Welsch, B., Fisher, G., Abbett, W., & Regnier, S. 2004, *ApJ*, 610, 1148
- Wiegmann, T., & Sakurai, T. 2012, *Liv. Rev. Sol. Phys.*, 9, 5
- Wiegmann, T., Thalmann, J. K., & Solanki, S. K. 2014, *A&ARv*, 22, 78
- Woltjer, L. 1958, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 44, 833
- Yamamoto, T. T., & Sakurai, T. 2009, *ApJ*, 698, 928
- Yamamoto, T. T., Kusano, K., Maeshiro, T., Yokoyama, T., & Sakurai, T. 2005, *ApJ*, 624, 1072
- Zhao, L., DeVore, C., Antiochos, S., & Zurbuchen, T. 2015, *ApJ*, 805, 61
- Zuccarello, F., Aulanier, G., & Gilchrist, S. 2015, *ApJ*, 814, 126
- Zuccarello, F. P., Pariat, E., Valori, G., & Linan, L. 2018, *ApJ*, 863, 41

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Les phénomènes les plus violents de l'activité solaire, les éruptions et les éjections de masse coronales s'expliquent par la présence d'intenses champs magnétiques dans l'atmosphère solaire (cf. Sect. 1.1.4). Comprendre la dynamique des éruptions solaires, et plus particulièrement les mécanismes impliqués dans le déclenchement de ces événements brusques et violents, nécessite de caractériser les propriétés des champs magnétiques, au sein des régions actives.

Dans cette optique, mon travail de thèse s'est concentré sur l'étude de l'hélicité magnétique relative qui est une grandeur reliée à la géométrie des lignes de champ magnétique (cf. Sect. 1.4.1). En particulier, je me suis intéressé à une de ses décompositions en hélicité magnétique non potentielle liée au champ magnétique porteur de courant et en hélicité mêlée qui contient le reste de l'information (cf. Sect. 3.1.4). Les hélicités relative, non potentielle et mêlée étaient jusqu'à présent des grandeurs sous-estimées et très peu étudiées.

Mon travail de thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet ANR jeune chercheur, HELISOL, en recherche fondamentale sur la physique de l'héliosphère et plus particulièrement sur les relations Soleil-Terre ; sur lesquelles repose la météorologie de l'espace. Cette nouvelle discipline appliquée s'intéresse principalement à l'impact de l'activité solaire sur notre environnement terrestre. Le projet HeliSol, en se concentrant sur l'étude de l'hélicité magnétique dans l'atmosphère solaire, vise au développement d'outils nouveaux afin de permettre entre autres une meilleure prévision des éruptions solaires.

Dans un premier volet de ma thèse (cf. Chap. 4), je me suis intéressé au lien entre les hélicités magnétiques et l'éruptivité d'une région active. Mon objectif principal était de déterminer dans quelle mesure l'évolution et le déclenchement d'une éruption solaire sont reliés à la quantité d'hélicité magnétique coronale au niveau de la région d'activité. Jusqu'à présent les études théoriques, numériques et observationnelles sur le sujet donnaient des résultats variés et contradictoires. Si certaines semblaient indiquer que l'hélicité magnétique relative est une condition nécessaire pour déclencher une éruption, d'autres au contraire suggéraient que le degré de cisaillement et de torsion des lignes de champ magnétique ne joue aucun rôle lors des phénomènes actifs de l'atmosphère solaire (cf. Sect. 4.1). La raison expliquant la diversité des conclusions est que jusqu'à très récemment les méthodes d'estimation de l'hélicité magnétique étaient relativement imprécises et n'imposaient pas les contraintes aux limites nécessaires. Mes travaux de thèse ont bénéficié du développement récent de nouveaux outils fiables permettant une estimation correcte de l'hélicité magnétique. Je me suis en particulier familiarisé avec une des méthodes de mesure par intégration directe volumique des hélicités magnétiques (cf. Sect. 3.3.1.4). J'ai en particulier amélioré une implémentation numérique de cette méthode afin de permettre l'étude de dizaines de configurations magnétiques différentes. À partir d'estimations correctes des hélicités magnétiques, j'ai pu ainsi proposer des réponses fiables à la problématique de l'éruptivité en lien avec les hélicités magnétiques (Zuccarello et al. 2018; Linan et al. 2018, 2020).

Tout d’abord, en utilisant les données magnétiques issues de quatre simulations numériques MHD d’éruption d’un tube de flux torsadé, j’ai confirmé le fait que l’hélicité magnétique relative seule n’est pas un marqueur de l’éruptivité d’un système magnétique. J’ai au contraire montré que le rapport de l’hélicité magnétique non potentielle sur l’hélicité magnétique relative, $\eta_H = H_j/H_r$ (cf. Eq. 4.1), définit un critère déterministe, renseignant sur le caractère éruptif des simulations numériques (cf. Sect. 4.2.1 Zuccarello et al. 2018). En effet dans les quatre simulations MHD, qui diffèrent de par le forçage photosphérique imposé, l’éruption a lieu systématiquement quand le ratio d’hélicité, η_H , atteint la même valeur. Ce comportement est unique. En effet, toutes les autres quantités suivies telles que les différentes énergies ne présentent pas de valeur seuil au moment de l’éruption.

Il subsiste cependant un certain nombre d’inconnues et de questions. La première étant : le critère nouvellement défini peut-il signaler l’éruptivité d’une région active ? Jusqu’à présent, les propriétés du ratio d’hélicité avaient été mises en évidence uniquement à partir de simulations numériques. Pour répondre à la question précédente, j’ai donc suivi la dynamique du ratio au niveau de trois différentes régions actives, couvrant un total de six éruptions solaires (cf. Sect. 4.3 et Moraitis et al. 2019b; Thalmann et al. 2019a,b). Cela a nécessité des reconstructions 3D du champ magnétique coronal, obtenues à partir de carte 2D de la distribution du champ magnétique photosphérique (mesuré par HMI/SDO, cf. Chap. 2). En utilisant le champ magnétique reconstruit, j’ai en effet pu estimer les différentes hélicités ainsi que le ratio d’hélicité durant toute l’évolution d’une éruption solaire. J’ai alors montré que le critère d’éruptivité qui a été introduit atteint des maximums locaux aux moments des éruptions. Il est de même possible de définir des valeurs seuils du ratio d’hélicité dont le dépassement conduit systématiquement au déclenchement d’une éruption (cf. Sect. 4.3.2). Puisque l’estimation des hélicités magnétiques dépend de la taille de la région active et de son flux magnétique, la valeur du seuil varie d’une région à l’autre. En comparant l’évolution du ratio d’hélicité avant deux types différents d’éruptions, j’ai en particulier montré qu’il était un bon marqueur du potentiel éruptif d’une région active, mais qu’il ne peut pas servir d’indicateur pour savoir si une éruption prochaine impliquera le réarrangement du champ magnétique de manière confinée ou éruptive (cf. Sect. 4.3.3 et Thalmann et al. 2019b). Mes travaux basés sur des données magnétiques observationnelles confirment néanmoins les résultats des simulations MHD obtenus précédemment.

Le rapport de l’hélicité non potentielle sur l’hélicité relative est une quantité prometteuse dont la dynamique singulière nécessiterait d’être observée dans davantage de configurations magnétiques/régions actives. Cependant, ce n’est pas chose aisée. En effet, dans mes travaux de thèse j’ai démontré analytiquement et numériquement que le seul moyen d’estimer ce ratio d’hélicité est d’utiliser des modèles 3D du champ magnétique coronal déterminés à partir des données photosphériques 2D observées (cf. Sect. 5.2.3 et Linan et al. 2018). Or, les méthodes de reconstructions actuelles ne sont évidemment pas parfaites. Entre autres, le champ magnétique reconstruit avec certaines méthodes possède un degré fini de solénoïdalité. J’ai alors observé que si le champ magnétique n’est pas suffisamment solénoïdal il est impossible d’obtenir une estimation correcte de l’hélicité magnétique (cf. Sect. 4.3.1 Thalmann et al. 2019a). En utilisant une énergie magnétique reliée à la divergence du champ magnétique, j’ai pu proposer un critère qui, une fois respecté, garantit que la reconstruction est assez qualitative pour permettre un suivi des hélicités magnétiques. Ce critère est plus contraignant que ce qui avait jusqu’à présent été proposé à partir de simulations numériques (cf. Sect. 2.4). Il est indispensable que les futures études du ratio d’hélicité vérifient le respect de ce critère.

Les reconstructions 3D du champ magnétique coronal pourraient également être améliorées. En effet, les méthodes existantes reposent sur un ensemble de problèmes mal posés (cf. Sect. 2.3). De même, des progrès sur la mesure du champ magnétique photosphérique (cf. Sect. 2.1) pourraient permettre de meilleures reconstructions et donc une meilleure estimation des hélicités magnétiques. Dans ce domaine, des avancées majeures pourraient provenir de la mission

de l'ESA : Solar Orbiter (SolO) qui a été lancé en février de cette année et dont les premières données sont attendues à partir de 2022. SolO en proposant à la fois des données d'imagerie et des mesures in situ, offre une opportunité unique d'améliorer nos connaissances sur la physique des relations Soleil-Terre. SolO a également la particularité d'avoir une orbite sortant du plan de l'écliptique. Ainsi pour la première fois, grâce au spectropolarimètre PHI, des mesures du champ magnétique photosphérique seront obtenues hors de l'axe Terre-Soleil. Couplé aux mesures d'autres instruments solaires tels que HMI/SDO ou terrestre, cela va permettre de supprimer l'ambiguïté de 180° du champ magnétique transverse (cf. Sect. 2.2.1). Il en ressortira donc des magnétogrammes vectoriels significativement plus précis qui seront ensuite utilisés par les algorithmes de reconstructions 3D.

Si de solides études statistiques observationnelles confirment bien le lien entre le ratio d'hélicité et le potentiel éruptif, mes travaux auront alors fourni un élément capital pour répondre à la problématique du déclenchement des éruptions. Ce ratio est par nature une quantité MHD. Ainsi puisqu'il permet de caractériser l'éruptivité d'une région active, cela signifie que déclenchement d'une éruption est relié à une instabilité globale à grande échelle (l'échelle MHD) et non à des instabilités locales au niveau des nappes de courant électrique (cf. Sect. 1.3.2.2). Mes travaux permettent donc de conclure sur la famille d'instabilité à l'origine des éruptions solaires. De plus, le critère d'éruptivité proposé est construit comme le rapport entre l'hélicité du champ magnétique porteur de courants électriques et l'hélicité du champ magnétique totale. Sa composition semble donc le relie indirectement à l'instabilité de Torus qui est basée sur une perte d'équilibre entre un tube de flux magnétique porteur de courants électriques et le champ magnétique potentiel environnant. Néanmoins, il n'existe à l'heure actuelle aucune preuve théorique reliant formellement l'instabilité de Torus et le critère mis en évidence. De façon générale, une meilleure compréhension du lien existant entre l'éruptivité et les hélicités magnétiques pourra passer des études théoriques visant à construire des modèles MHD d'instabilités qui reposent sur les propriétés fondamentales de l'hélicité.

Cela nous emmène donc au deuxième grand volet de ma thèse (cf. Chap. 5), qui a été dédié à l'étude des propriétés des hélicités composant le critère d'éruptivité : l'hélicité magnétique non potentielle et l'hélicité mêlée. Avant ma thèse, ces grandeurs étaient très méconnues et leurs importances sous-estimées (cf. Sect. 5.1). Seuls quelques travaux les étudiaient indirectement. Pour combler l'absence de connaissance sur ces deux quantités, j'ai tout d'abord entrepris une démarche théorique. J'ai ainsi introduit pour la première fois des expressions analytiques pour la variation temporelle des hélicités non potentielle et mêlée (cf. Sect. 5.2 Linan et al. 2018). Les expressions trouvées sont valides dans l'ensemble des modèles MHD possibles et ne sont basées sur aucune approximation particulière. Mon analyse théorique a révélé que contrairement à l'hélicité magnétique relative, les hélicités non potentielle et mêlée ne sont pas conservées en MHD idéale. Leurs variations temporelles dépendent en effet d'un terme dit de transfert qui dépend de l'ensemble du volume d'étude et qui traduit la transformation d'une forme d'hélicité à l'autre (cf. Sect. 5.2.2). Autrement dit, dans l'atmosphère solaire, les variations des hélicités non potentielle et mêlée peuvent être dues à la réorganisation du champ magnétique coronal et non uniquement aux mouvements locaux du plasma au niveau photosphérique. En regroupant judicieusement les termes apparaissant dans la variation temporelle de l'hélicité non potentielle, j'ai proposé trois quantités invariantes de jauge : la première permet de quantifier la dissipation d'hélicité, la deuxième est le terme de transfert et la dernière est reliée aux flux à travers les frontières (cf. Sect. 5.2.1.2 et Linan et al. 2018). J'ai également introduit un regroupement similaire pour l'hélicité mêlée. Ces nouvelles quantités, dont la valeur ne dépend pas du choix de jauge, rendent compte de l'intégralité des processus à l'origine des variations d'hélicités non potentielle et mêlée.

J'ai par la suite développé une méthode numérique permettant de calculer l'ensemble de

ces nouvelles quantités à partir de données magnétiques issues de simulations numériques (cf. Sect. 5.2.2.1). Mon implémentation numérique repose sur des algorithmes récents et robustes permettant le traitement en parallèle d'une grande quantité de données dans un temps limité. Il est également facilement transportable à d'autres configurations matérielles. J'ai appliqué la méthode ainsi développée à une dizaine de simulations numériques MHD couvrant une grande gamme de configurations magnétiques différentes (cf. Sect. 5.2.3). Les configurations étudiées reflétaient divers processus de l'activité solaire tels que l'émergence d'un tube de flux torsadé ou la génération d'un jet coronal. J'ai ainsi montré que le terme de transfert ne peut être négligé face aux flux d'hélicités. Au contraire, il joue un rôle crucial dans l'évolution des hélicités non potentielle et mêlée (cf. Sect. 5.2.2). Il permet entre autres d'expliquer des comportements singuliers de l'hélicité non potentielle tels que sa décroissance avant l'éruption dans les simulations numériques analysées. La méthode que j'ai développée est donc un outil puissant pour comprendre la dynamique des hélicités non potentielle et mêlée. Dans le futur, elle pourra servir à analyser davantage de configurations magnétiques pour aider à la caractérisation des propriétés géométriques du champ magnétique au moment d'une éruption.

J'ai par ailleurs étendu ma méthode numérique afin de calculer les variations temporelles de l'énergie du champ magnétique porteur de courants et de l'énergie du champ magnétique potentiel (cf. Sect. 5.3 et Linan et al. 2020). J'ai ainsi pu montrer que les origines physiques des variations d'hélicités et d'énergies magnétiques sont bien distinctes. Dans les simulations MHD étudiées, les mouvements appliqués au niveau photosphérique n'impactent pas de la même façon l'évolution des flux d'hélicités. J'ai cependant trouvé des similitudes qui mériteraient d'être confirmées ou démontrées théoriquement. L'injection d'hélicité non potentielle suit une dynamique similaire à celle de l'énergie du champ magnétique porteur de courants électriques. Bien que liées, les énergies et les hélicités offrent néanmoins des informations distinctes et complémentaires sur l'évolution d'un système magnétique (cf. Sect. 5.3.3).

Mes travaux analytiques et numériques apportent également un nouvel éclairage sur la dynamique du critère d'éruptivité susmentionné. En appliquant ma méthode numérique aux simulations où le ratio d'hélicité présente un seuil au moment de l'éruption, j'ai montré que selon la simulation le seuil n'est pas atteint de la même manière (cf. Sect. 5.2.2.4 et Linan et al. 2020). Tandis que dans un groupe de simulation le ratio d'hélicité augmente principalement grâce aux flux d'hélicités photosphériques, dans un autre groupe de simulation il se développe via le transfert d'une forme d'hélicité à l'autre. Les deux groupes n'atteignent cependant pas le seuil à la même vitesse. Ainsi, l'éruptivité d'une région active dépend uniquement du dépassement de la valeur seuil du ratio d'hélicité tandis que le temps nécessaire avant l'éruption est relié aux processus physiques qui font évoluer les hélicités. Là encore, des études plus théoriques sont nécessaires pour confirmer ce résultat.

Pour finir, l'ensemble de mes travaux de thèse participe aux recherches sur les relations Soleil-Terre en soutien à la météorologie de l'espace (cf. Sect. 1.2). Je me suis en particulier concentré sur la problématique de la prévision des éruptions solaires. Jusqu'à présent, les méthodes statistiques de prévision reposaient sur des approches empiriques utilisant au mieux des critères nécessaires et non suffisants. Elles ne parvenaient pas à prédire de façon fiable le déclenchement d'une éruption solaire (cf. Sect. 1.2.2). Durant ma thèse, j'ai confirmé et renforcé l'idée que le ratio de l'hélicité non potentielle sur l'hélicité relative est un critère déterministe, indiquant l'éruptivité d'une région active. Il pourrait donc être particulièrement utile dans le cadre de la prévision des éruptions. Nonobstant, j'ai montré que dans l'immédiat il ne peut pas être appliqué aux méthodes de prévisions actuelles. En effet, à cause de la présence du terme volumique de transfert au rôle non négligeable, l'intégration du flux photosphérique d'hélicité non potentielle ne fournit pas une estimation correcte de l'hélicité non potentielle contenue dans la couronne (cf. Sect. 3.3.2). Par conséquent, le seul moyen d'estimer l'hélicité non potentielle et donc le

ratio d'hélicité est de procéder à des reconstructions 3D du champ magnétique coronal (cf. Sect. 2.3). Or, d'après mon expérience (cf. Sect. 2.3.1.2), les reconstructions 3D sont des processus qui demandent une minutie et une attention rigoureuses qui rendent une potentielle automatisation difficile. À l'heure actuelle, il est à mon avis impossible de procéder automatiquement à une reconstruction suffisamment qualitative de toutes les régions actives afin de déterminer si elles vont engendrer ou non des éruptions. La mesure automatique du ratio d'hélicité nécessiterait une amélioration drastique sur le plan théorique et numérique des méthodes de reconstructions existantes. Une autre possibilité est de concevoir d'autres méthodes de mesure, qui nécessiteront probablement une reformulation du critère d'éruptivité (cf. Sect. 3.3.3). Quoiqu'il en soit, mes travaux de thèse apportent les bases théoriques nécessaires au développement de nouveaux outils qui, je l'espère, fourniront des prévisions performantes des éruptions solaires.

Bibliographie

- Abbett, W., Fisher, G., & Fan, Y. 2000, *The Astrophysical Journal*, 540, 548
- Abramenko, V. 2005, *The Astrophysical Journal*, 629, 1141
- Adams, J. C., Brainerd, W. S., Martin, J. T., Smith, B. T., & Wagener, J. L. 1992, *fortran 90 Handbook*, Vol. 32 (McGraw-Hill New York)
- Ahrens, J., Geveci, B., & Law, C. 2005, *The visualization handbook*, 717
- Akasofu, S.-I. 1981, *Space Science Reviews*, 28, 121
- Al-Haddad, N., Poedts, S., Roussev, I., et al. 2019, *The Astrophysical Journal*, 870, 100
- Alexakis, A., Mininni, P. D., & Pouquet, A. 2006, *The Astrophysical Journal*, 640, 335
- Alissandrakis, C. 1981, *Astronomy and Astrophysics*, 100, 197
- Aly, J. 1989, *Solar Physics*, 120, 19
- Aly, J.-J. 2017, *Fluid Dynamics Research*, 50, 011408
- Amari, T. & Aly, J. 1992, *Astronomy and Astrophysics*, 265, 791
- Amari, T., Aly, J., Luciani, J., Boulmezaoud, T., & Mikic, Z. 1997, *Solar physics*, 174, 129
- Amari, T., Luciani, J., Aly, J., Mikic, Z., & Linker, J. 2003a, *The Astrophysical Journal*, 585, 1073
- Amari, T., Luciani, J., Aly, J., & Tagger, M. 1996, *The Astrophysical Journal Letters*, 466, L39
- Amari, T., Luciani, J. F., Aly, J. J., Mikic, Z., & Linker, J. 2003b, *The Astrophysical Journal*, 595, 1231
- Antiochos, S. K. 1987, *The Astrophysical Journal*, 312, 886
- Antiochos, S. K. 1998, *The Astrophysical Journal Letters*, 502, L181
- Antiochos, S. K. & DeVore, C. R. 1999, *GEOPHYSICAL MONOGRAPH-AMERICAN GEOPHYSICAL UNION*, 111, 187
- Archontis, V. & Hood, A. W. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 514, A56
- Asai, A., Ishii, T. T., Kurokawa, H., Yokoyama, T., & Shimojo, M. 2003, *The Astrophysical Journal*, 586, 624
- Aschwanden, M. 2006, *Physics of the solar corona : an introduction with problems and solutions* (Springer Science & Business Media)

- Aschwanden, M. J., Caspi, A., Cohen, C. M., et al. 2017, *The Astrophysical Journal*, 836, 17
- Aschwanden, M. J. & Freeland, S. L. 2012, *The Astrophysical Journal*, 754, 112
- Aulanier, G. 2013, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 8, 184
- Aulanier, G. & Démoulin, P. 1998, *Astronomy and Astrophysics*, 329, 1125
- Aulanier, G., Démoulin, P., Schrijver, C., et al. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 549, A66
- Aulanier, G., Janvier, M., & Schmieder, B. 2012, *Astronomy & Astrophysics*, 543, A110
- Aulanier, G. & Schmieder, B. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 386, 1106
- Aulanier, G., Török, T., Démoulin, P., & DeLuca, E. E. 2009, *The Astrophysical Journal*, 708, 314
- Babcock, H. 1961, *The Astrophysical Journal*, 133, 572
- Baker, D., van Driel-Gesztelyi, L., Mandrini, C. H., Démoulin, P., & Murray, M. 2009, *The Astrophysical Journal*, 705, 926
- Balsara, D. S. & Kim, J. 2004, *The Astrophysical Journal*, 602, 1079
- Barczynski, K., Aulanier, G., Masson, S., & Wheatland, M. S. 2019, *The Astrophysical Journal*, 877, 67
- Bareford, M., Hood, A., & Browning, P. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 550, A40
- Barlow, W. H. 1849, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 61
- Barnes, G., Leka, K., Schrijver, C., et al. 2016, *The Astrophysical Journal*, 829, 89
- Bateman, G. 1978, *MHD instabilities*, ed. G. Bateman
- Beckers, J. M. 1971, in *Symposium-International Astronomical Union*, Vol. 43, Cambridge University Press, 3–23
- Berger, M. 1988, *Astronomy and Astrophysics*, 201, 355
- Berger, M. 2003, *Series : The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics*, 20030424, 23
- Berger, M. A. 1984, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 30, 79
- Berger, M. A. 1985, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 59, 433
- Berger, M. A. 1986
- Berger, M. A. 1999, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 41, B167
- Berger, M. A. & Field, G. B. 1984, *Journal of Fluid Mechanics*, 147, 133
- Berger, M. A. & Prior, C. 2006, *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39, 8321
- Berger, M. A. & Ruzmaikin, A. 2000, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 105, 10481
- Bhattacharjee, A. & Dewar, R. L. 1982, *The Physics of Fluids*, 25, 887

- Bi, Y., Jiang, Y., Yang, J., et al. 2016, *Nature communications*, 7, 1
- Bi, Y., Jiang, Y., Yang, J., et al. 2015, *The Astrophysical Journal*, 805, 48
- Bi, Y., Liu, Y. D., Liu, Y., et al. 2018, *The Astrophysical Journal*, 865, 139
- Bi, Y., Yang, J., Jiang, Y., et al. 2017, *The Astrophysical Journal Letters*, 849, L35
- Blackman, E. G. & Brandenburg, A. 2002, *The Astrophysical Journal*, 579, 359
- Bleybel, A., Amari, T., van Driel-Gesztelyi, L., & Leka, K. 1999, in *Magnetic Fields and Solar Processes*, Vol. 448, 709
- Bobra, M. G. & Couvidat, S. 2015, *The Astrophysical Journal*, 798, 135
- Bobra, M. G. & Ilonidis, S. 2016, *The Astrophysical Journal*, 821, 127
- Bobra, M. G., Sun, X., Hoeksema, J. T., et al. 2014, *Solar Physics*, 289, 3549
- Bommier, V. 2013, *Physics Research International*, 2013
- Bommier, V., Degl'Innocenti, E. L., Landolfi, M., & Molodij, G. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 464, 323
- Bong, S.-C., Cho, K.-S., & Yurchyshyn, V. 2014, *Journal of The Korean Astronomical Society*, 47, 311
- Borrero, J., Tomczyk, S., Kubo, M., et al. 2011, *Solar Physics*, 273, 267
- Bothmer, V. & Daglis, I. A. 2007, *Space weather : physics and effects* (Springer Science & Business Media)
- Bowman, K. P. 2006, *An Introduction to Programming with IDL : Interactive data language* (Elsevier)
- Brackbill, J. U. & Barnes, D. C. 1980, *Journal of Computational Physics*, 35, 426
- Brandenburg, A., Candelaresi, S., & Chatterjee, P. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 398, 1414
- Brandenburg, A., Petrie, G. J., & Singh, N. K. 2017, *The Astrophysical Journal*, 836, 21
- Brandenburg, A. & Scannapieco, E. 2020, *The Astrophysical Journal*, 889, 55
- Brandenburg, A., Sokoloff, D., & Subramanian, K. 2012, *Space science reviews*, 169, 123
- Brandenburg, A. & Subramanian, K. 2005, *Astronomische Nachrichten : Astronomical Notes*, 326, 400
- Browning, P. 1988, *Journal of plasma physics*, 40, 263
- Burlaga, L., Sittler, E., Mariani, F., & Schwenn, a. R. 1981, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 86, 6673
- Caldwell, B., McCarron, E., & Jonas, S. 2017, *Space Weather*, 15, 1222
- Cameron, R., Dikpati, M., & Brandenburg, A. 2017, *Space Science Reviews*, 210, 367

- Cameron, R. & Schüssler, M. 2015, *Science*, 347, 1333
- Canfield, R. C., de La Beaujardiere, J.-F., Fan, Y., et al. 1993, *The Astrophysical Journal*, 411, 362
- Canou, A. & Amari, T. 2010, *The Astrophysical Journal*, 715, 1566
- Canou, A., Amari, T., Bommier, V., et al. 2009, *The Astrophysical Journal Letters*, 693, L27
- Cantarella, J., DeTurck, D., Gluck, H., & Teytel, M. 2000, *Physics of plasmas*, 7, 2766
- Carcedo, L., Brown, D., Hood, A., Neukirch, T., & Wiegmann, T. 2003, *Solar Physics*, 218, 29
- Carmichael, H. 1964, in *AAS NASA Symposium on the Physics of Solar Flares : Proceedings of a Symposium Held at the Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, October 28-30, 1963*, Vol. 50, National Aeronautics and Space Administration, 451
- Carrington, R. C. 1858, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 19, 1
- Casini, R., White, S., & Judge, P. 2017, *Space Science Reviews*, 210, 145
- Cassak, P., Shay, M., & Drake, J. 2009, *Physics of Plasmas*, 16, 120702
- Cattaneo, F., Chiueh, T., & Hughes, D. W. 1990, *Journal of Fluid Mechanics*, 219, 1
- Cattaneo, F. & Hughes, D. 1988, *Journal of Fluid Mechanics*, 196, 323
- Chae, J. 2001, *The Astrophysical Journal Letters*, 560, L95
- Chae, J., Moon, Y.-J., & Park, Y.-D. 2004, *Solar Physics*, 223, 39
- Champagnat, N. 2010
- Chandra, R., Pariat, E., Schmieder, B., Mandrini, C. H., & Uddin, W. 2010, *Solar Physics*, 261, 127
- Chandra, R., Schmieder, B., Aulanier, G., & Malherbe, J. 2009, *Solar Physics*, 258, 53
- Chandrasekhar, S. & Chandrasekhar, S. 1957, *An introduction to the study of stellar structure*, Vol. 2 (Courier Corporation)
- Chapman, S. 1962, *Archive for History of Exact Sciences*, 2, 41
- Charbonneau, P. 2010, *Living Reviews in Solar Physics*, 7, 3
- Charbonneau, P. 2014, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 52, 251
- Charbonneau, P. & MacGregor, K. 1997, *The Astrophysical Journal*, 486, 502
- Chen, P. 2011, *Living Reviews in Solar Physics*, 8, 1
- Cheung, M., Rempel, M., Schüssler, M., et al. 2010, *The Astrophysical Journal*, 720, 233
- Cheung, M. C. & Isobe, H. 2014, *Living Reviews in Solar Physics*, 11, 3
- Cho, K.-S., Park, S.-H., Marubashi, K., et al. 2013, *Solar Physics*, 284, 105

- Choudhuri, A. R. 1989, *Solar physics*, 123, 217
- Choudhuri, A. R. 2003, *Solar Physics*, 215, 31
- Choudhuri, A. R. et al. 1998, *The physics of fluids and plasmas : an introduction for astrophysicists* (Cambridge University Press)
- Christe, S., Krucker, S., Glesener, L., et al. 2017, arXiv preprint arXiv :1701.00792
- Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D., & Thompson, M. 1991, *The Astrophysical Journal*, 378, 413
- Cowling, T. G. 1976
- Cuperman, S., Li, J., & Semel, M. 1993, *Astronomy and Astrophysics*, 268, 749
- Dalda, A. S. 2017, *The Astrophysical Journal*, 851, 111
- Dalmasse, K., Chandra, R., Schmieder, B., & Aulanier, G. 2013a, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 8, 227
- Dalmasse, K., Pariat, E., Démoulin, P., & Aulanier, G. 2014, *Solar Physics*, 289, 107
- Dalmasse, K., Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Green, L. 2013b, *Astronomy & Astrophysics*, 555, L6
- Dalmasse, K., Pariat, E., Valori, G., Jing, J., & Démoulin, P. 2018, *The Astrophysical Journal*, 852, 141
- Dame, B. 1966, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 19, 307
- Dasso, S., Mandrini, C., Démoulin, P., & Farrugia, C. 2003, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 108
- Davidson, W. 1940, *Edison Electric Institute Bulletin*, 8, 365
- Del Sordo, F., Candelaresi, S., & Brandenburg, A. 2010, *Physical Review E*, 81, 036401
- Démoulin, P. 2010in , *American Institute of Physics*, 329–334
- Démoulin, P. & Aulanier, G. 2010, *The Astrophysical Journal*, 718, 1388
- Démoulin, P. & Berger, M. 2003, *Solar Physics*, 215, 203
- Demoulin, P., Henoux, J.-C., Priest, E., & Mandrini, C. 1996, *Astronomy and Astrophysics*, 308, 643
- Démoulin, P., Janvier, M., & Dasso, S. 2016, *Solar Physics*, 291, 531
- Démoulin, P., Mandrini, C. H., van Driel-Gesztelyi, L., et al. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 382, 650
- Démoulin, P. & Pariat, E. 2009, *Advances in Space Research*, 43, 1013
- Démoulin, P., Pariat, E., & Berger, M. 2006, *Solar Physics*, 233, 3
- Dennis, B. R. & Schwartz, R. A. 1989in , *Cambridge University Press*, 75–94

- DeRosa, M., Wheatland, M., Leka, K., et al. 2015, *The Astrophysical Journal*, 811, 107
- DeRosa, M. L., Schrijver, C. J., Barnes, G., et al. 2009, *The Astrophysical Journal*, 696, 1780
- DeVore, C. R. 2000, *The Astrophysical Journal*, 539, 944
- Dorch, S. & Nordlund, A. 1998, *Astronomy and Astrophysics*, 338, 329
- D'silva, S. & Choudhuri, A. 1993, *Astronomy and Astrophysics*, 272, 621
- Dudík, J., Polito, V., Janvier, M., et al. 2016, *The Astrophysical Journal*, 823, 41
- Dun, J., Kurokawa, H., Ishii, T., Liu, Y., & Zhang, H. 2007, *The Astrophysical Journal*, 657, 577
- Dungey, J. W. 1961, *Physical Review Letters*, 6, 47
- Elsasser, W. M. 1956, *Reviews of Modern Physics*, 28, 135
- Emonet, T. & Moreno-Insertis, F. 1998, *The Astrophysical Journal*, 492, 804
- Evans, L. C. 2010, *Partial differential equations*, Vol. 19 (American Mathematical Soc.)
- Falconer, D., Barghouty, A. F., Khazanov, I., & Moore, R. 2011, *Space Weather*, 9, 1
- Falconer, D. A., Moore, R. L., Barghouty, A. F., & Khazanov, I. 2014, *Space Weather*, 12, 306
- Fan, Y. 2009a, *Living Reviews in Solar Physics*, 6, 4
- Fan, Y. 2009b, *Living Reviews in Solar Physics*, 6, 4
- Feng, H., Wu, D., & Chao, J. 2007, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 112
- Feng, H., Wu, D., Lin, C., et al. 2008, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 113
- Finn, J. M. & Antonsen Jr, T. 1985, *Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion*, 9, 111
- Florios, K., Kontogiannis, I., Park, S.-H., et al. 2018, *Solar Physics*, 293, 28
- Forbes, T. & Isenberg, P. 1991, *The Astrophysical Journal*, 373, 294
- Forbes, T., Linker, J., Chen, J., et al. 2006, in *Coronal Mass Ejections* (Springer), 251–302
- Freeland, S. L. & Handy, B. 1998, *Solar Physics*, 182, 497
- Frisch, U., Pouquet, A., Léorat, J., & Mazure, A. 1975, *Journal of Fluid Mechanics*, 68, 769
- Fuentes, M. L., Démoulin, P., Mandrini, C., Pevtsov, A., & van Driel-Gesztelyi, L. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 397, 305
- Fuhrmann, M., Seehafer, N., & Valori, G. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 476, 349
- Fuhrmann, M., Seehafer, N., Valori, G., & Wiegmann, T. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 526, A70
- Galsgaard, K. & Pontin, D. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 534, A2

- Galtier, S. 2013, Magnéto-hydrodynamique : des plasmas de laboratoire à l'astrophysique : cours & exercices corrigés : licence 3 et master physique fondamentale & écoles d'ingénieurs (Vuibert)
- Gao, Y. 2018, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 18, 028
- Gary, G., Moore, R., Hagyard, M., & Haisch, B. M. 1987, *The Astrophysical Journal*, 314, 782
- Gary, G. A. 2001, *Solar Physics*, 203, 71
- Gary, G. A. & Demoulin, P. 1995, *The Astrophysical Journal*, 445, 982
- Gary, G. A. & Hagyard, M. 1990, *Solar physics*, 126, 21
- Georgoulis, M., Rust, D., Pevtsov, A., Bernasconi, P., & Kuzanyan, K. 2009, *The Astrophysical Journal Letters*, 705, L48
- Georgoulis, M. K. 2005, *The Astrophysical Journal Letters*, 629, L69
- Georgoulis, M. K. & LaBonte, B. J. 2007, *The Astrophysical Journal*, 671, 1034
- Georgoulis, M. K., LaBonte, B. J., & Metcalf, T. R. 2004, *The Astrophysical Journal*, 602, 446
- Georgoulis, M. K., Tziotziou, K., & Raouafi, N.-E. 2012, *The Astrophysical Journal*, 759, 1
- Gilchrist, S., Wheatland, M., & Leka, K. 2012, *Solar Physics*, 276, 133
- Gilman, P. A. 2018, *The Astrophysical Journal*, 853, 65
- Gopalswamy, N., Yashiro, S., Krucker, S., Stenborg, G., & Howard, R. A. 2004, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 109
- Gosling, J. T. 1990, *Physics of magnetic flux ropes*, 58, 343
- Grad, H. & Rubin, H. 1958, *Journal of Nuclear Energy (1954)*, 7, 284
- Green, L., Mandrini, C., Démoulin, P., et al. 2002, *Solar Physics*, 208, 43
- Green, L. M., Török, T., Vršnak, B., Manchester, W., & Veronig, A. 2018, *Space Science Reviews*, 214, 46
- Guennou, C., Pariat, E., Leake, J. E., & Vilmer, N. 2017, *Journal of Space Weather and Space Climate*, 7, A17
- Gulisano, A., Dasso, S., Mandrini, C., & Démoulin, P. 2005, *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics*, 67, 1761
- Guo, Y., Cheng, X., & Ding, M. 2017a, *Science China Earth Sciences*, 60, 1408
- Guo, Y., Ding, M., Cheng, X., Zhao, J., & Pariat, E. 2013, *The Astrophysical Journal*, 779, 157
- Guo, Y., Ding, M., Liu, Y., et al. 2012, *The Astrophysical Journal*, 760, 47
- Guo, Y., Ding, M., Schmieder, B., et al. 2010a, *The Astrophysical Journal Letters*, 725, L38
- Guo, Y., Ding, M., Wiegmann, T., & Li, H. 2008, *The Astrophysical Journal*, 679, 1629
- Guo, Y., Pariat, E., Valori, G., et al. 2017b, *The Astrophysical Journal*, 840, 40

- Guo, Y., Schmieder, B., Bommier, V., & Gosain, S. 2010b, *Solar Physics*, 262, 35
- Guo, Y., Xia, C., Keppens, R., Ding, M., & Chen, P. 2019, *The Astrophysical Journal Letters*, 870, L21
- Hale, G. E. 1908, *The astrophysical journal*, 28, 315
- Hale, G. E., Ellerman, F., Nicholson, S. B., & Joy, A. H. 1919, *The Astrophysical Journal*, 49, 153
- Hale, G. E. & Nicholson, S. B. 1925, *The Astrophysical Journal*, 62, 270
- Hapgood, M. & Thomson, A. 2010, *Space weather : its impact on Earth and implications for business*
- Hartkorn, K. & Wang, H. 2004, *Solar Physics*, 225, 311
- Hawkes, G. & Berger, M. 2018, *Solar physics*, 293, 109
- Hawkes, G. & Yeates, A. 2019, *Astronomy & Astrophysics*, 631, A138
- Hesse, M. & Schindler, K. 1988, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 93, 5559
- Heyvaerts, J. & Priest, E. 1984, *Astronomy and astrophysics*, 137, 63
- Hirayama, T. 1974, *Solar Physics*, 34, 323
- Hirshman, S. P. & Whitson, J. 1983, *The Physics of fluids*, 26, 3553
- Hoeksema, J. T., Liu, Y., Hayashi, K., et al. 2014, *Solar Physics*, 289, 3483
- Hong, J.-C., Jiang, Y.-C., Yang, J.-Y., et al. 2013, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 13, 253
- Hou, Y., Zhang, J., Li, T., Yang, S., & Li, X. 2018, *Astronomy & Astrophysics*, 619, A100
- Hu, Q., Qiu, J., Dasgupta, B., Khare, A., & Webb, G. 2014, *The Astrophysical Journal*, 793, 53
- Hu, Q., Qiu, J., & Krucker, S. 2015, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 120, 5266
- Hudson, S., Dewar, R., Dennis, G., et al. 2012, *Physics of Plasmas*, 19, 112502
- Humboldt, A. v. 1978
- Hussain, A., Browning, P., & Hood, A. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 600, A5
- Inhester, B., Feng, L., & Wiegmann, T. 2007, in *Solar Image Analysis and Visualization* (Springer), 169–183
- Inhester, B. & Wiegmann, T. 2006, *Solar Physics*, 235, 201
- Iniesta, J. D. T. & Cobo, B. R. 1996, *Solar Physics*, 164, 169
- Inoue, S., Shiota, D., Bamba, Y., & Park, S.-H. 2018, *The Astrophysical Journal*, 867, 83
- Inoue, S., Shiota, D., Yamamoto, T., et al. 2012, *The Astrophysical Journal*, 760, 17

- Jacobs, C., Poedts, S., & van der Holst, B. 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 450, 793
- James, A. W., Valori, G., Green, L. M., et al. 2018, *The Astrophysical Journal Letters*, 855, L16
- Janvier, M., Aulanier, G., Pariat, E., & Demoulin, P. 2013a, *Astronomy & Astrophysics*, 555, A77
- Janvier, M., Dasso, S., Démoulin, P., Masías-Meza, J., & Lugaz, N. 2015, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 120, 3328
- Janvier, M., Démoulin, P., & Dasso, S. 2013b, *Astronomy & Astrophysics*, 556, A50
- Janvier, M., Savcheva, A., Pariat, E., et al. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 591, A141
- Jefferies, J., Lites, B. W., & Skumanich, A. 1989, *The Astrophysical Journal*, 343, 920
- Jian, L., Russell, C., Luhmann, J., & Skoug, R. 2006, *Solar Physics*, 239, 393
- Jiang, C. & Feng, X. 2013, *The Astrophysical Journal*, 769, 144
- Jing, J., Liu, C., Lee, J., et al. 2018, *The Astrophysical Journal*, 864, 138
- Jing, J., Tan, C., Yuan, Y., et al. 2010, *The Astrophysical Journal*, 713, 440
- Jing, J., Xu, Y., Lee, J., et al. 2015, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 15, 1537
- Jouve, L., Brun, A., Arlt, R., et al. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 483, 949
- Jouve, L., Proctor, M. R., & Lesur, G. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 519, A68
- Karimabadi, H., Krauss-Varban, D., Huba, J., & Vu, H. 2004, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 109
- Karpen, J. T., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2012, *The Astrophysical Journal*, 760, 81
- Karpen, J. T., Antiochos, S. K., DeVore, C. R., & Golub, L. 1998, *The Astrophysical Journal*, 495, 491
- Kim, R.-S., Park, S.-H., Jang, S., Cho, K.-S., & Lee, B. 2017, *Solar Physics*, 292, 66
- Kitchatinov, L. 2020, *The Astrophysical Journal*, 893, 131
- Kliem, B., Lin, J., Forbes, T., Priest, E., & Török, T. 2014, *The Astrophysical Journal*, 789, 46
- Kliem, B., Su, Y., Van Ballegooijen, A., & DeLuca, E. 2013, *The Astrophysical Journal*, 779, 129
- Kliem, B. & Török, T. 2006, *Physical Review Letters*, 96, 255002
- Klimchuk, J. & Sturrock, P. 1992, *The Astrophysical Journal*, 385, 344
- Knipp, D. J. 2015, *Space Weather*, 13, 727
- Knipp, D. J. & Gannon, J. L. 2019, *Space Weather*, 17, 794
- Knizhnik, K. J., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2015, *The Astrophysical Journal*, 809, 137

- Kopp, R. & Pneuman, G. 1976, *Solar Physics*, 50, 85
- Krall, J., Chen, J., Santoro, R., et al. 1998, *The Astrophysical Journal*, 500, 992
- Kulsrud, R. M. 2020, *Plasma physics for astrophysics* (Princeton University Press)
- Kumar, P., Karpen, J., Antiochos, S. K., Wyper, P. F., & DeVore, C. R. 2019, AGUFM, 2019, SH44A
- Kuperus, M. & Raadu, M. 1974, *Astronomy and Astrophysics*, 31, 189
- Kusano, K., Maeshiro, T., Yokoyama, T., & Sakurai, T. 2002, *The Astrophysical Journal*, 577, 501
- Kusano, K., Maeshiro, T., Yokoyama, T., & Sakurai, T. 2004, *The Astrophysical Journal*, 610, 537
- Kusano, K., Suzuki, Y., & Nishikawa, K. 1995, *The Astrophysical Journal*, 441, 942
- Kusano, K., Yokoyama, T., Maeshiro, T., & Sakurai, T. 2003, *Advances in Space Research*, 32, 1931
- LaBonte, B., Georgoulis, M., & Rust, D. 2007, *The Astrophysical Journal*, 671, 955
- Landolfi, M. & Degl'Innocenti, E. L. 1982, *Solar Physics*, 78, 355
- Landsman, W. 1993, in *Astronomical Data Analysis Software and Systems II*, Vol. 52, 246
- Laurence, P. & Avellaneda, M. 1991, *Journal of mathematical physics*, 32, 1240
- Leake, J. E., Linton, M. G., & Antiochos, S. K. 2014, *The Astrophysical Journal*, 787, 46
- Leake, J. E., Linton, M. G., & Török, T. 2013, *The Astrophysical Journal*, 778, 99
- Leese, J. A., Novak, C. S., & Clark, B. B. 1971, *J. Applied Meteorology*, 10, 118
- Leighton, R. B. 1964, *The Astrophysical Journal*, 140, 1547
- Leka, K., Barnes, G., Crouch, A., et al. 2009, *Solar Physics*, 260, 83
- Leka, K., Canfield, R. C., McClymont, A., et al. 1993, *The Astrophysical Journal*, 411, 370
- Lemen, J. R., Akin, D. J., Boerner, P. F., et al. 2011, in *The solar dynamics observatory* (Springer), 17–40
- Lepping, R. & Wu, C.-C. 2010
- Li, X., Zheng, Y., Wang, X., & Wang, L. 2020, *The Astrophysical Journal*, 891, 10
- Lim, E.-K. & Chae, J. 2009, *The Astrophysical Journal*, 692, 104
- Lim, E.-K., Jeong, H., Chae, J., & Moon, Y.-J. 2007, *The Astrophysical Journal*, 656, 1167
- Lin, J. & Forbes, T. 2000, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 105, 2375
- Linan, L., Pariat, É., Aulanier, G., Moraitis, K., & Valori, G. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 636, A41

- Linan, L., Pariat, É., Moraitis, K., Valori, G., & Leake, J. 2018, *The Astrophysical Journal*, 865, 52
- Linker, J. A. & Mikic, Z. 1995, *The Astrophysical Journal*, 438, L45
- Linton, M. & Antiochos, S. 2002, *The Astrophysical Journal*, 581, 703
- Linton, M., Dahlburg, R., & Antiochos, S. 2001, *The Astrophysical Journal*, 553, 905
- Lites, B., Akin, D., Card, G., et al. 2013, *Solar Physics*, 283, 579
- Lites, B. W. 2000, *Reviews of Geophysics*, 38, 1
- Liu, C., Xu, Y., Cao, W., et al. 2016a, *Nature communications*, 7, 1
- Liu, J., Wang, Y., & Erdélyi, R. 2019, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6, 44
- Liu, L., Cheng, X., Wang, Y., et al. 2018a, *The Astrophysical Journal Letters*, 867, L5
- Liu, L., Wang, Y., Wang, J., et al. 2016b, *The Astrophysical Journal*, 826, 119
- Liu, L., Wang, Y., Zhou, Z., et al. 2018b, *The Astrophysical Journal*, 858, 121
- Liu, Y. 2019, 234
- Liu, Y., Hoeksema, J., Bobra, M., et al. 2014, *The Astrophysical Journal*, 785, 13
- Liu, Y. & Schuck, P. 2012, *The Astrophysical Journal*, 761, 105
- Liu, Y. & Schuck, P. 2013, *Solar Physics*, 283, 283
- Liu, Y., Zhao, J., & Schuck, P. 2013, *Solar Physics*, 287, 279
- Longcope, D. 2004, *The Astrophysical Journal*, 612, 1181
- Longcope, D., Fisher, G., & Arendt, S. 1996, *The Astrophysical Journal*, 464, 999
- Longcope, D., Fisher, G., & Pevtsov, A. 1998, *The Astrophysical Journal*, 507, 417
- Longcope, D. & Malanushenko, A. 2008, *The Astrophysical Journal*, 674, 1130
- Longcope, D., Ravindra, B., & Barnes, G. 2007, *The Astrophysical Journal*, 668, 571
- Longcope, D. & Welsch, B. 2000, *The Astrophysical Journal*, 545, 1089
- Longcope, D. W. 2005, *Living Reviews in Solar Physics*, 2, 7
- Low, B. 1996, *Solar Physics*, 167, 217
- Low, B. 2006, *The Astrophysical Journal*, 646, 1288
- Low, B. 2011, *Physics of Plasmas*, 18, 052901
- Low, B. & Lou, Y. 1990, *The Astrophysical Journal*, 352, 343
- Low, B. & Wolfson, R. 1988, *The Astrophysical Journal*, 324, 574
- Lowder, C. & Yeates, A. 2017, *The Astrophysical Journal*, 846, 106

- Luoni, M., Mandrini, C., Dasso, S., van Driel-Gesztelyi, L., & Démoulin, P. 2005, *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics*, 67, 1734
- Luoni, M. L., Démoulin, P., Mandrini, C. H., & van Driel-Gesztelyi, L. 2011, *Solar Physics*, 270, 45
- Luoni, M. L., Mandrini, C. H., Cristiani, G. D., & Démoulin, P. 2007, *Advances in Space Research*, 39, 1382
- Lynch, B., Gruesbeck, J., Zurbuchen, T., & Antiochos, S. 2005, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 110
- Mackay, D. H., Green, L., & Van Ballegooijen, A. 2011, *The Astrophysical Journal*, 729, 97
- MacNeice, P., Antiochos, S., Phillips, A., et al. 2004, *The Astrophysical Journal*, 614, 1028
- Magara, T. 2009, *The Astrophysical Journal*, 702, 386
- Magara, T. & Tsuneta, S. 2008, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 60, 1181
- Malakhov, A. 2016, in *Proceedings of the Python in Science Conferences*
- Malapaka, S. K. & Müller, W.-C. 2013, *The Astrophysical Journal*, 778, 21
- Malherbe, J.-M. 2017
- Manchester IV, W. 2001, *The Astrophysical Journal*, 547, 503
- Mandrini, C. H., Démoulin, P., Schmieder, B., et al. 2006, *Solar Physics*, 238, 293
- Mandrini, C. H., Démoulin, P., Van Driel-Gesztelyi, L., Van Driel-Gesztelyi, L., & Fuentes, M. L. 2004, *Astrophysics and Space Science*, 290, 319
- Mandrini, C. H., Pohjolainen, S., Dasso, S., et al. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 434, 725
- Marquardt, D. W. 1963, *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11, 431
- Martin, S., Bilimoria, R., & Tracadas, P. 1994, *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, Vol. 433 ed RJ Rutten and CJ Schrijver
- Masson, S., Pariat, E., Aulanier, G., & Schrijver, C. 2009, *The Astrophysical Journal*, 700, 559
- Masson, S., Pariat, É., Valori, G., et al. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 604, A76
- Matthews, P., Hughes, D., & Proctor, M. 1995, *The Astrophysical Journal*, 448, 938
- McCauley, P. I., Su, Y., Schanche, N., et al. 2015, *Solar Physics*, 290, 1703
- McIntosh, P. S. 1990, *Solar Physics*, 125, 251
- McNally, C. P. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters*, 413, L76
- Mein, P., Uitenbroek, H., Mein, N., Bommier, V., & Faurobert, M. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 591, A64
- Metcalf, T. R., DeRosa, M. L., Schrijver, C. J., et al. 2008, *Solar Physics*, 247, 269
- Metcalf, T. R., Leka, K., Barnes, G., et al. 2006, *Solar Physics*, 237, 267

- Mitra, P. K., Joshi, B., Prasad, A., Veronig, A. M., & Bhattacharyya, R. 2018, *The Astrophysical Journal*, 869, 69
- Moffatt, H. K. 1969, *Journal of Fluid Mechanics*, 35, 117–129
- Moon, Y.-J., Chae, J., Wang, H., Choe, G., & Park, Y. 2002, *The Astrophysical Journal*, 580, 528
- Moon, Y.-J., Wang, H., Spirock, T. J., Goode, P., & Park, Y. 2003, *Solar Physics*, 217, 79
- Moore, R. L., Sterling, A. C., Hudson, H. S., & Lemen, J. R. 2001, *The Astrophysical Journal*, 552, 833
- Moraitis, K., Pariat, É., Savcheva, A., & Valori, G. 2018, *Solar Physics*, 293, 92
- Moraitis, K., Pariat, E., Valori, G., & Dalmasse, K. 2019a, *Astronomy & Astrophysics*, 624, A51
- Moraitis, K., Sun, X., Pariat, E., & Linan, L. 2019b, arXiv preprint arXiv :1907.06365
- Moraitis, K., Tziotziou, K., Georgoulis, M., & Archontis, V. 2014, *Solar Physics*, 289, 4453
- Moreno-Insertis, F. 1992, in *Sunspots : Theory and observations* (Springer), 385–410
- Moreno-Insertis, F. 1997, *Memorie della Societa Astronomica Italiana*, 68, 429
- Moreno-Insertis, F. & Emonet, T. 1996, *The Astrophysical Journal Letters*, 472, L53
- Morley, S. 2020, *Space Weather*, 18
- Moschou, S., Sokolov, I., Cohen, O., et al. 2019, arXiv preprint arXiv :1911.08660
- Muhamad, J., Kusano, K., Inoue, S., & Bamba, Y. 2018, *The Astrophysical Journal*, 863, 162
- Müller, W.-C., Malapaka, S. K., & Busse, A. 2012, *Physical Review E*, 85, 015302
- Muñoz Barrutia, A., Blu, T., & Unser, M. 2000, in *Proceedings of the Tenth European Signal Processing Conference (EUSIPCO'00) No. CONF, EURASIP, 1997–2000*
- Murray, M., Hood, A., Moreno-Insertis, F., Galsgaard, K., & Archontis, V. 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 460, 909
- Murray, S. A., Bingham, S., Sharpe, M., & Jackson, D. R. 2017, *Space Weather*, 15, 577
- Nakagawa, Y. 1974, *The Astrophysical Journal*, 190, 437
- Nakagawa, Y. & Raadu, M. 1972, *Solar Physics*, 25, 127
- Nandy, D. 2005, in *APS Meeting Abstracts*
- Nandy, D. 2006, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 111
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2012, *The Astrophysical Journal*, 762, 73
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2013, in *Solar Origins of Space Weather and Space Climate* (Springer), 5–22

- Nindos, A. & Andrews, M. D. 2004, *The Astrophysical Journal*, 616, L175
- Nindos, A., Patsourakos, S., & Wiegelmann, T. 2012, *The Astrophysical Journal Letters*, 748, L6
- Nindos, A. & Zhang, H. 2002, *The Astrophysical Journal Letters*, 573, L133
- Nindos, A., Zhang, J., & Zhang, H. 2003, *The Astrophysical Journal*, 594, 1033
- November, L. J. & Simon, G. W. 1988, Precise proper-motion measurement of solar granulation, Tech. rep., AIR FORCE GEOPHYSICS LAB HANSCOM AFB MA
- Oberti, C. & Ricca, R. L. 2018, *Fluid Dynamics Research*, 50, 011413
- Ocker, S. K. & Petrie, G. 2016, *The Astrophysical Journal*, 832, 162
- Odenwald, S. F. & Green, J. L. 2007, *Space Weather*, 5, 1
- Office, C. 2015, National risk register of civil emergencies
- Ouyang, Y., Zhou, Y., Chen, P., & Fang, C. 2017, *The Astrophysical Journal*, 835, 94
- Pariat, E., Antiochos, S., & DeVore, C. 2010, *The Astrophysical Journal*, 714, 1762
- Pariat, E., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2009, *The Astrophysical Journal*, 691, 61
- Pariat, E., Aulanier, G., Schmieder, B., et al. 2004, *The Astrophysical Journal*, 614, 1099
- Pariat, E., Démoulin, P., & Berger, M. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 439, 1191
- Pariat, E., Leake, J., Valori, G., et al. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 601, A125
- Pariat, E., Valori, G., Démoulin, P., & Dalmasse, K. 2015, *Astronomy and Astrophysics*, 580, A128
- Park, E., Moon, Y.-J., Shin, S., et al. 2018a, *The Astrophysical Journal*, 869, 91
- Park, S.-h., Chae, J., & Wang, H. 2010, *The Astrophysical Journal*, 718, 43
- Park, S.-H., Cho, K.-S., Bong, S.-C., et al. 2012, *The Astrophysical Journal*, 750, 48
- Park, S.-H., Guerra, J. A., Gallagher, P. T., Georgoulis, M. K., & Bloomfield, D. S. 2018b, *Solar Physics*, 293, 114
- Park, S.-H., Leka, K., Kusano, K., et al. 2020, arXiv preprint arXiv :2001.02808
- Parker, E. 1966, *The Astrophysical Journal*, 145, 811
- Parker, E. 1984, *The Astrophysical Journal*, 281, 839
- Parker, E. N. 1955, *The Astrophysical Journal*, 122, 293
- Parker, E. N. 1957, *Journal of Geophysical Research*, 62, 509
- Parker, E. N. 1977, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 15, 45
- Parnell, C., Neukirch, T., Smith, J., & Priest, E. 1997, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 84, 245

- Pesnell, W. D., Thompson, B. J., & Chamberlin, P. 2011, in *The Solar Dynamics Observatory* (Springer), 3–15
- Petschek, H. E. 1964, *NASA Special Publication*, 50, 425
- Pevtsov, A., Canfield, R. C., Sakurai, T., & Hagino, M. 2008, *The Astrophysical Journal*, 677, 719
- Pevtsov, A. A. 2000, *The Astrophysical Journal*, 531, 553
- Pevtsov, A. A. 2002, in *Multi-Wavelength Observations of Coronal Structure and Dynamics*, Vol. 13 (Pergamon Dordrecht), 125–134
- Pevtsov, A. A., Balasubramaniam, K., & Rogers, J. W. 2003, *The Astrophysical Journal*, 595, 500
- Pevtsov, A. A., Berger, M. A., Nindos, A., Norton, A. A., & van Driel-Gesztelyi, L. 2014, *Space Science Reviews*, 186, 285
- Pevtsov, A. A., Canfield, R. C., & Metcalf, T. R. 1995, *The Astrophysical Journal*, 440, L109
- Phillips, A., MacNeice, P., & Antiochos, S. 2005, *The Astrophysical Journal Letters*, 624, L129
- Pick, M. c.-a., Maia, D., Kerdraon, A., et al. 1998, *Solar Physics*, 181, 455
- Pinto, R. & Brun, A. S. 2013, *The Astrophysical Journal*, 772, 55
- Pipin, V. V. 2020, arXiv preprint arXiv :2006.01982
- Pipin, V. V., Pevtsov, A. A., Liu, Y., & Kosovichev, A. G. 2019, *The Astrophysical Journal Letters*, 877, L36
- Poinot, M. 2010, *Computing in Science & Engineering*, 12, 84
- Poisson, M., Fuentes, M. L., Mandrini, C., Démoulin, P., & MacCormack, C. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 633, A151
- Poisson, M., Mandrini, C. H., Démoulin, P., & Fuentes, M. L. 2015, *Solar Physics*, 290, 727
- Polito, V., Del Zanna, G., Valori, G., et al. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 601, A39
- Pomoell, J., Lumme, E., & Kilpua, E. 2019, *Solar physics*, 294, 41
- Pontin, D., Candelaresi, S., Russell, A., & Hornig, G. 2016, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 58, 054008
- Pontin, D. I. & Hornig, G. 2015, *The Astrophysical Journal*, 805, 47
- Pouquet, A., Frisch, U., & Léorat, J. 1976, *Journal of Fluid Mechanics*, 77, 321
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., & Vetterling, W. T. 1992, *Numerical recipes in Fortran 77 : volume 1*, volume 1 of *Fortran numerical recipes : the art of scientific computing* (Cambridge university press)
- Price, D., Pomoell, J., Lumme, E., & Kilpua, E. 2019, *Astronomy & Astrophysics*, 628, A114
- Priest, E. 2014, *Magnetohydrodynamics of the Sun* (Cambridge University Press)

- Priest, E. & Démoulin, P. 1995, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 100, 23443
- Priest, E. & Forbes, T. 2007, *Magnetic Reconnection*, by Eric Priest, Terry Forbes, Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2007
- Priest, E. R., Longcope, D., & Janvier, M. 2016, *Solar Physics*, 291, 2017
- Prior, C. & Berger, M. 2012, *Solar Physics*, 278, 323
- Prior, C., Hawkes, G., & Berger, M. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 635, A95
- Prior, C. & Yeates, A. 2014, *The Astrophysical Journal*, 787, 100
- Qahwaji, R. & Colak, T. 2007, *Solar Physics*, 241, 195
- Qiu, J. & Gary, D. E. 2003, *The Astrophysical Journal*, 599, 615
- Qiu, J., Hu, Q., Howard, T. A., & Yurchyshyn, V. B. 2007, *The Astrophysical Journal*, 659, 758
- Raadu, M., Schmieder, B., Mein, N., & Gesztelyi, L. 1988, *Astronomy and Astrophysics*, 197, 289
- Rachkovsky, D. 1962, *Izvestiya Ordena Trudovogo Krasnogo Znameni Krymskoj Astrofizicheskoy Observatorii*, 28, 259
- Ravindra, B., Venkatakrishnan, P., & Tiwari, S. K. 2011, in *Advances in Geosciences : Volume 27 : Solar Terrestrial (ST)* (World Scientific), 153–164
- Rax, J.-M. 2005, *Physique des plasmas : Cours et applications* (Dunod)
- Regnier, S. & Amari, T. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 425, 345
- Regnier, S., Priest, E., & Hood, A. W. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 491, 297
- Reid, H. A., Vilmer, N., Aulanier, G., & Pariat, E. 2012, *Astronomy & Astrophysics*, 547, A52
- Roberts, B. & Webb, A. 1978, *Solar Physics*, 56, 5
- Roberts, P. H. 1972, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272, 663
- Romano, P. & Zuccarello, F. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 535, A1
- Roudier, T., Rieutord, M., Malherbe, J., & Vigneau, J. 1999, *Astronomy and Astrophysics*, 349, 301
- Roumeliotis, G. 1996, *The Astrophysical Journal*, 473, 1095
- Rudenko, G. & Anfinogentov, S. 2014, *Solar Physics*, 289, 1499
- Rudenko, G. & Myshyakov, I. 2011, *Solar Physics*, 270, 165
- Ruffenach, A., Lavraud, B., Farrugia, C. J., et al. 2015, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 120, 43
- Russell, A. J., Yeates, A. R., Hornig, G., & Wilmot-Smith, A. L. 2015, *Physics of Plasmas*, 22, 032106

- Rust, D. 1994, *Geophysical Research Letters*, 21, 241
- Rust, D. & Kumar, A. 1994, *Solar physics*, 155, 69
- Ruzmaikin, A., Martin, S., & Hu, Q. 2003, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 108
- Sadykov, V., Kosovichev, A., & Kitiashvili, I. N. 2018
- Sakurai, T. 1981, *Solar physics*, 69, 343
- Sakurai, T. 1989, *Space Science Reviews*, 51, 11
- Sankarasubramanian, K. & Rimmele, T. 2002, *The Astrophysical Journal*, 576, 1048
- Savcheva, A., McKillop, S., McCauley, P., Hanson, E., & DeLuca, E. 2014, *Solar Physics*, 289, 3297
- Savcheva, A., Pariat, E., McKillop, S., et al. 2016, *The Astrophysical Journal*, 817, 43
- Savcheva, A., Pariat, E., McKillop, S., et al. 2015, *The Astrophysical Journal*, 810, 96
- Savcheva, A., Van Ballegooijen, A., & DeLuca, E. 2011, *The Astrophysical Journal*, 744, 78
- Scherrer, P. H., Schou, J., Bush, R., et al. 2012, *Solar Physics*, 275, 207
- Schmieder, B. & Aulanier, G. 2018, *Electric Currents in Geospace and Beyond*, Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series, 235, 391
- Schmieder, B., Démoulin, P., & Aulanier, G. 2013, *Advances in Space Research*, 51, 1967
- Schmieder, B., Démoulin, P., Aulanier, G., & Golub, L. 1996, *The Astrophysical Journal*, 467, 881
- Schmieder, B., Forbes, T., Malherbe, J., & Machado, M. 1987, *The Astrophysical Journal*, 317, 956
- Schmieder, B. & Shibata, K. 1995, *Sol. Phys*, 156, 245
- Schou, J., Scherrer, P., Bush, R., et al. 2012, *Solar Physics*, 275, 229
- Schrijver, C., DeRosa, M., Metcalf, T., et al. 2008a, *The Astrophysical Journal*, 675, 1637
- Schrijver, C. J. 2009, *Advances in Space Research*, 43, 739
- Schrijver, C. J., Derosa, M. L., Metcalf, T. R., et al. 2006, *Solar Physics*, 235, 161
- Schrijver, C. J., DeRosa, M. L., Metcalf, T. R., et al. 2005, *The Astrophysical Journal*, 628, 501
- Schrijver, C. J., Elmore, C., Kliem, B., Török, T., et al. 2008b, *The Astrophysical Journal*, 674, 586
- Schuck, P. 2005, *The Astrophysical Journal Letters*, 632, L53
- Schuck, P. 2006, *The Astrophysical Journal*, 646, 1358
- Schuck, P. W. 2008, *The Astrophysical Journal*, 683, 1134

- Schuck, P. W. & Antiochos, S. K. 2019, *The Astrophysical Journal*, 882, 151
- Schüssler, M. 1979, *Astronomy and Astrophysics*, 71, 79
- Schwabe, H. 1844, *Astronomische Nachrichten*, 21, 233
- Seehafer, N. 1978, *Solar Physics*, 58, 215
- Shen, Y., Liu, Y., Su, J., & Ibrahim, A. 2011, *The Astrophysical Journal Letters*, 735, L43
- Shibata, K. 1998, *Astrophysics and Space Science*, 264, 129
- Shibata, K. & Magara, T. 2011, *Living Reviews in Solar Physics*, 8, 6
- Shibata, K., Tajima, T., Steinolfson, R., & Matsumoto, R. 1989, *The Astrophysical Journal*, 345, 584
- Siscoe, G. 2000, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 62, 1223
- Smiet, C. B., Candelaresi, S., & Bouwmeester, D. 2017, *Physics of Plasmas*, 24, 072110
- Smyrli, A., Zuccarello, F., Romano, P., et al. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 521, A56
- Socas-Navarro, H. 2001, in *Advanced solar polarimetry—theory, observation, and instrumentation*, Vol. 236, 487
- Socas-Navarro, H. 2015, *Astrophysics Source Code Library*
- Spruit, H. 1974, *Solar Physics*, 34, 277
- Spruit, H. C. 1981, *Astronomy and Astrophysics*, 98, 155
- Spruit, H. C., Van Ballegooijen, A., et al. 1987, *Solar Physics*, 110, 115
- Srinivasan, R. 1995, RFC1832 : XDR : External Data Representation Standard
- Steinhilber, F., Beer, J., & Fröhlich, C. 2009, *Geophysical Research Letters*, 36
- Stenflo, J. 1978, *Reports on Progress in Physics*, 41, 865
- Stenflo, J. O. 2013, *Solar magnetic fields : polarized radiation diagnostics*, Vol. 189 (Springer Science & Business Media)
- Sterling, A. C., Harra, L. K., & Moore, R. L. 2007a, *The Astrophysical Journal*, 669, 1359
- Sterling, A. C., Moore, R. L., Berger, T. E., et al. 2007b, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 59, S823
- Stern, B. A. 2000, in *Space 2000*, 1011–1015
- Stix, M. 2012, *The sun : an introduction* (Springer Science & Business Media)
- Sturrock, P. 1966, *Nature*, 211, 695
- Sturrock, P., Kaufman, P., Moore, R., & Smith, D. 1984, *Solar physics*, 94, 341
- Su, J.-T. & Zhang, H.-Q. 2004, *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 4, 365
- Sun, X. 2013, arXiv preprint arXiv :1309.2392

- Sun, X., Bobra, M. G., Hoeksema, J. T., et al. 2015, *The Astrophysical Journal Letters*, 804, L28
- Sun, X., Hoeksema, J. T., Liu, Y., et al. 2012, *The Astrophysical Journal*, 748, 77
- Sun, X. & Norton, A. A. 2017, arXiv preprint arXiv :1711.08383
- Sun, X., Schuck, P. W., & Fisher, G. H. 2019, 234
- Suryanarayana, G. S. & Balakrishna, K. M. 2017, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 17, 7
- Svestka, Z. 1976, Dordrecht, Holland
- Swarztrauber, P. N. & Sweet, R. A. 1979, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 5, 352
- Sweet, P. 1958, in *IAU Symp. 6*, Vol. 123, Kluwer Academic Publishers
- Tadesse, T., Wiegelmann, T., & Inhester, B. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 508, 421
- Tadesse, T., Wiegelmann, T., Inhester, B., & Pevtsov, A. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 527, A30
- Taylor, J. B. 1974, *Physical Review Letters*, 33, 1139
- Temmer, M., Thalmann, J. K., Dissauer, K., et al. 2017, *Solar physics*, 292, 93
- Temmer, M., Veronig, A., Kontar, E., Krucker, S., & Vršnak, B. 2010, *The Astrophysical Journal*, 712, 1410
- Thalmann, J., Inhester, B., & Wiegelmann, T. 2011, *Solar Physics*, 272, 243
- Thalmann, J. K., Linan, L., Pariat, E., & Valori, G. 2019a, *The Astrophysical Journal Letters*, 880, L6
- Thalmann, J. K., Moraitis, K., Linan, L., et al. 2019b, *The Astrophysical Journal*, 887, 64
- Thompson, B., Plunkett, S., Gurman, J., et al. 1998, *Geophysical Research Letters*, 25, 2465
- Tian, L. & Alexander, D. 2008, *The Astrophysical Journal*, 673, 532
- Titov, V. & Démoulin, P. 1999, *Astronomy and Astrophysics*, 351, 707
- Titov, V., Priest, E., & Demoulin, P. 1993, *Astronomy and Astrophysics*, 276, 564
- Tobias, S. 2002, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 360, 2741
- Toriumi, S., Iida, Y., Kusano, K., Bamba, Y., & Imada, S. 2014, *Solar Physics*, 289, 3351
- Toriumi, S. & Wang, H. 2019, *Living reviews in solar physics*, 16, 3
- Toriumi, S. & Yokoyama, T. 2010, *The Astrophysical Journal*, 714, 505
- Toriumi, S. & Yokoyama, T. 2011, *The Astrophysical Journal*, 735, 126
- Török, T. & Kliem, B. 2005, *The Astrophysical Journal Letters*, 630, L97

- Török, T., Kliem, B., & Titov, V. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 413, L27
- Tricot, J. 1949, *Traduction et notes*
- Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Liu, Y. 2013, *The Astrophysical Journal*, 772, 115
- Tziotziou, K., Georgoulis, M. K., & Raouafi, N.-E. 2012, *The Astrophysical Journal Letters*, 759, L4
- Tziotziou, K., Tsiropoula, G., Georgoulis, M., & Kontogiannis, I. 2014, *Astronomy & Astrophysics*, 564, A86
- Unno, W. 1956, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 8, 108
- Uzdensky, D. A. & Loureiro, N. F. 2016, *Physical review letters*, 116, 105003
- Valori, G. 2016, *Magnetic field extrapolations*
- Valori, G., Démoulin, P., & Pariat, E. 2012, *Solar Physics*, 278, 347
- Valori, G., Démoulin, P., Pariat, E., & Masson, S. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 553, A38
- Valori, G., Kliem, B., & Fuhrmann, M. 2007, *Solar Physics*, 245, 263
- Valori, G., Kliem, B., & Keppens, R. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 433, 335
- Valori, G., Kliem, B., Török, T., & Titov, V. S. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 519, A44
- Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016, *Space Science Reviews*, 201, 147
- Valori, G., Pariat, E., Démoulin, P., et al. 2020, *Astronomy & Astrophysics*
- van Driel-Gesztelyi, L. & Green, L. M. 2015, *Living Reviews in Solar Physics*, 12, 1
- Van Tend, W. & Kuperus, M. 1978, *Solar Physics*, 59, 115
- Vemareddy, P. 2015, *The Astrophysical Journal*, 806, 245
- Vemareddy, P. 2019, *The Astrophysical Journal*, 872, 182
- Vemareddy, P., Ambastha, A., Maurya, R., & Chae, J. 2012, *The Astrophysical Journal*, 761, 86
- Vemareddy, P., Cheng, X., & Ravindra, B. 2016, *The Astrophysical Journal*, 829, 24
- Vemareddy, P. & Démoulin, P. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 597, A104
- Vršnak, B. 2008, *Ann. Geophys*, 26, 3089
- Walker, A. P. & Brown, D. S. 2016, in *SDO 2016 : Unraveling the Sun's Complexity*
- Wang, E., Zhang, Q., Shen, B., et al. 2014a, in *High-Performance Computing on the Intel® Xeon Phi™* (Springer), 167–188
- Wang, H. & Liu, C. 2015, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 15, 145
- Wang, R., Liu, Y. D., Yang, Z., & Hu, H. 2014b, *The Astrophysical Journal*, 791, 84
- Wang, T. & Abramenko, V. 2000, *Astronomy and Astrophysics*, 357, 1056

- Wang, Y. 2018, *shin*, 78
- Wang, Y.-M. 2013, *The Astrophysical Journal Letters*, 775, L46
- Warnecke, J. & Peter, H. 2019, arXiv preprint arXiv :1910.06896
- Warren, H. P., O'Brien, C. M., & Sheeley Jr, N. R. 2011, *The Astrophysical Journal*, 742, 92
- Welsch, B., Abbett, W., DeRosa, M., et al. 2007, *The Astrophysical Journal*, 670, 1434
- Welsch, B., Fisher, G., Abbett, W., & Regnier, S. 2004, *The Astrophysical Journal*, 610, 1148
- Wheatland, M. 2006, *Solar Physics*, 238, 29
- Wheatland, M. 2007, *Solar Physics*, 245, 251
- Wheatland, M., Sturrock, P., & Roumeliotis, G. 2000, *The Astrophysical Journal*, 540, 1150
- Wiegelmann, T. 2004, *Solar Physics*, 219, 87
- Wiegelmann, T. & Inhester, B. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 516, A107
- Wiegelmann, T., Inhester, B., & Sakurai, T. 2006, *Solar Physics*, 233, 215
- Wiegelmann, T. & Sakurai, T. 2012, *Living Reviews in Solar Physics*, 9, 5
- Willson, R. C., Gulkis, S., Janssen, M., Hudson, H., & Chapman, G. 1981, *Science*, 211, 700
- Wimmer-Schweingruber, R., Crooker, N., Balogh, A., et al. 2006, in *Coronal Mass Ejections* (Springer), 177–216
- Wissink, J., Hughes, D., Matthews, P., & Proctor, M. 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318, 501
- Woltjer, L. 1958, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 44, 489
- Wu, S., Chang, H., & Hagyard, M. 1985, in *NASA Conference Publication*, Vol. 2374, 17–48
- Wu, S., Sun, M., Chang, H., Hagyard, M., & Gary, G. 1990, *The Astrophysical Journal*, 362, 698
- Yamada, M. 1999, *GEOPHYSICAL MONOGRAPH-AMERICAN GEOPHYSICAL UNION*, 111, 129
- Yamamoto, T. T., Kusano, K., Maeshiro, T., Yokoyama, T., & Sakurai, T. 2005, *The Astrophysical Journal*, 624, 1072
- Yamamoto, T. T. & Sakurai, T. 2009, *The Astrophysical Journal*, 698, 928
- Yan, X., Wang, J., Pan, G., et al. 2018, *The Astrophysical Journal*, 856, 79
- Yan, Y. & Sakurai, T. 2000, *Solar Physics*, 195, 89
- Yang, K. E., Wheatland, M. S., & Gilchrist, S. A. 2020, *The Astrophysical Journal*, 894, 151
- Yang, S., Büchner, J., Santos, J. C., & Zhang, H. 2013a, *Solar Physics*, 283, 369

- Yang, S., Büchner, J., Santos, J. C., & Zhang, H. 2013b, arXiv preprint arXiv :1304.3526
- Yang, S., Pipin, V., Sokoloff, D., Kuzanyan, K., & Zhang, H. 2019, arXiv preprint arXiv :1912.11285
- Yang, S., Zhang, H., & Büchner, J. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 502, 333
- Yang, S., Zhang, J., Zhu, X., & Song, Q. 2017, *The Astrophysical Journal Letters*, 849, L21
- Yang, W., Sturrock, P., & Antiochos, S. 1986, *The Astrophysical Journal*, 309, 383
- Ye, Y., Korsós, M., & Erdélyi, R. 2018, *Advances in Space Research*, 61, 673
- Yeates, A. & Hornig, G. 2013, *Physics of Plasmas*, 20, 012102
- Yeates, A. & Hornig, G. 2014in , IOP Publishing, 012002
- Yeates, A. & Hornig, G. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 594, A98
- Yeates, A. R. 2020, in *Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory* (Springer), 117–143
- Yeates, A. R. & Page, M. H. 2018, *Journal of Plasma Physics*, 84
- Yoo, A. B., Jette, M. A., & Grondona, M. 2003, in *Workshop on Job Scheduling Strategies for Parallel Processing*, Springer, 44–60
- Yu, D., Huang, X., Wang, H., et al. 2010, *The Astrophysical Journal*, 710, 869
- Zhang, H. & Yang, S. 2013, *The Astrophysical Journal*, 763, 105
- Zhang, J., Li, L., & Song, Q. 2007, *The Astrophysical Journal Letters*, 662, L35
- Zhang, M. & Flyer, N. 2008, *The Astrophysical Journal*, 683, 1160
- Zhang, M., Flyer, N., & Low, B. C. 2006, *The Astrophysical Journal*, 644, 575
- Zhang, M., Flyer, N., & Low, B. C. 2012a, *The Astrophysical Journal*, 755, 78
- Zhang, Y., Kitai, R., & Takizawa, K. 2012b, *The Astrophysical Journal*, 751, 85
- Zhao, J., Gilchrist, S. A., Aulanier, G., et al. 2016, *The Astrophysical Journal*, 823, 62
- Zhao, L., DeVore, C., Antiochos, S., & Zurbuchen, T. 2015, *The Astrophysical Journal*, 805, 61
- Zou, P., Jiang, C., Wei, F., et al. 2020, arXiv preprint arXiv :2001.04633
- Zuccarello, F., Aulanier, G., & Gilchrist, S. 2015, *The Astrophysical Journal*, 814, 126
- Zuccarello, F., Romano, P., Farnik, F., et al. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 493, 629
- Zuccarello, F. P., Pariat, E., Valori, G., & Linan, L. 2018, *The Astrophysical Journal*, 863, 41
- Zurbuchen, T. H. & Richardson, I. G. 2006, in *Coronal mass ejections* (Springer), 31–43

Annexe A

Éléments de magnétohydrodynamique

Notre étude de l’atmosphère solaire se fait dans le paradigme de la magnétohydrodynamique (MHD), adapté aux grandes échelles spatio-temporelles relativement aux échelles caractéristiques des particules du plasma solaire. Il s’agit d’une description monofluide du plasma évoluant dans un milieu magnétisé et dont l’inertie est due aux ions et la mobilité aux électrons.

La MHD repose en premier lieu sur l’hypothèse de quasi-neutralité. Dans le cadre des éruptions solaires, la longueur caractéristique des structures étudiées ($> 10 - 100\text{km}$) est bien plus grande que la longueur de Debye ($\lambda \approx 10^{-8}\text{m}$ au niveau de photosphère et $\lambda \approx 10^{-3}\text{m}$ pour la couronne). Par conséquent, il n’y a pas de charge libre à l’échelle de notre étude.

Pour que le plasma puisse être traité comme un fluide, il doit être également suffisamment collisionnel. Pour cela l’échelle spatiale doit être supérieure au libre parcours moyen (c.-à-d. la distance entre deux collisions). Or dans la couronne solaire, le libre parcours moyen est relativement grand, environ 100km (pour une densité de 10^{15}m^{-3} et une température de 10^6K). Néanmoins, l’hypothèse fluide reste applicable à des échelles légèrement inférieures au libre parcours moyen, en considérant que l’interaction entre les particules et les champs électriques et magnétiques joue le rôle de pseudo-collision.

Aux deux hypothèses précédentes se rajoute la condition suivante : le plasma doit être non relativiste. Dans l’atmosphère solaire, l’ensemble des vitesses caractéristiques (e.g. la vitesse du son, la vitesse thermique, la vitesse d’Alfvén) est inférieur à la vitesse de la lumière. La condition est donc relativement bien respectée.

La MHD est donc une approximation valide pour l’étude de la dynamique des régions actives. Dans ce chapitre, je présenterai succinctement les principes fondamentaux de la MHD. Davantage d’informations sont disponibles dans les ouvrages dédiés (e.g. [Rax 2005](#); [Galtier 2013](#); [Malherbe 2017](#); [Kulsrud 2020](#)).

A.1 Les équations de la magnétohydrodynamique

En MHD, l’évolution du plasma est dictée par un ensemble d’équations satisfait par les variables du modèle, $[P, \rho, \mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Ici, P est la pression du plasma, ρ sa densité volumique et \mathbf{v} sa vitesse. \mathbf{B} correspond au champ magnétique.

Le système d'équation est composé des équations fluides suivantes :

$$\text{conservation de la masse} : \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (\text{A.1})$$

$$\text{équation d'Euler} : \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\rho \nabla \phi_{grav} - \nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \text{conservation d'énergie} : \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left((U + P) \mathbf{v} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} + \mathbf{q} \right) + \mathbf{H} \\ + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

avec $U = U + \rho \mathbf{v}^2/2 + \rho \phi_{grav}$. Ci-dessus (cf. Eqs. A.2 et A.3), ϕ_{grav} représentent le potentiel gravitationnel et \mathbf{F} est la somme des forces non considérées explicitement, qui peuvent s'exercer sur le plasma. \mathbf{q} et \mathbf{H} correspondent au flux de chaleur et au chauffage extérieur. \mathbf{J} est la densité de courant électrique et \mathbf{E} le champ électrique. La pression P et la densité volumique d'énergie interne U sont les solutions des équations d'états pour un gaz parfait ionisé :

$$P = \frac{2\rho k_B T}{m} \quad (\text{A.4})$$

$$U = \frac{P}{\gamma - 1}, \quad (\text{A.5})$$

avec m la masse (telle que $m = m_e + m_i \approx m_i$), γ l'exposant adiabatique, T la température et k_B la constante de Boltzmann.

Les équations précédentes sont complétées par les équations de Maxwell :

$$\text{équation de Gauss} : \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{équation de Thomson} : \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{équation de Faraday} : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.8})$$

$$\text{équation d'Ampère} : \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (\text{A.9})$$

À la différence des problèmes d'électrodynamique des milieux continus, le champ magnétique est une variable permettant d'accéder au champ électrique et à ses sources.

Pour finir, la densité de courant électrique \mathbf{J} est définie par la loi d'Ohm généralisée :

$$\mathbf{J} + \frac{\omega_{ce}}{\nu} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.10})$$

avec, ω_{ce} est la fréquence de cyclotron, ν la fréquence de collision et où σ est la conductivité dite de Spitzer. Lorsque le fluide est fortement collisionnel ($\omega_{ce} \ll \nu$) alors la loi d'Ohm devient :

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.11})$$

C'est le modèle de MHD résistive. Au contraire si le fluide est faiblement collisionnel ($\nu \rightarrow 0$) mais que le rapport ω_{ce}/ν reste fini, est dans le cas de la MHD idéale telle que :

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Le champ électrique dans le repère en mouvement avec le fluide est nul.

A.2 Paramètre β

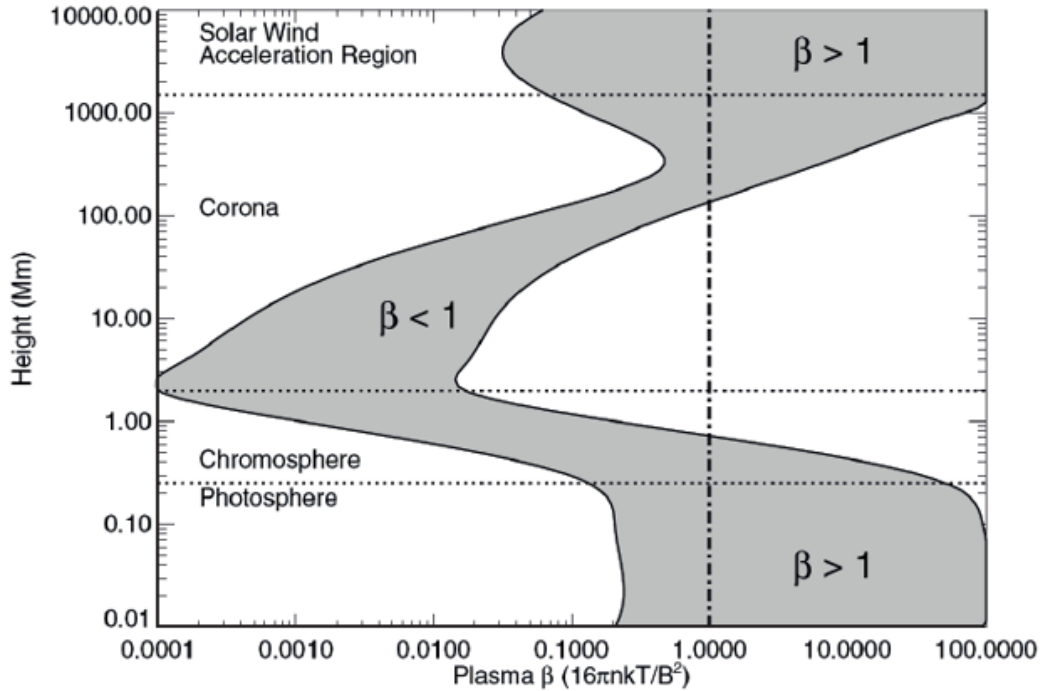


FIGURE A.1 – Valeur du β en fonction de l'altitude dans l'atmosphère solaire entre deux champs magnétiques de magnitude 100 G et 2500G. Les lignes pointillées marquent les différentes couches de l'atmosphère solaire (Aschwanden 2006).

En négligeant l'effet de la gravitation et la présence de force extérieure ($F = 0$), l'évolution du plasma résulte de l'action de deux forces (cf. Eq. A.2) : la force de Lorentz $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ et la force de pression ∇P . La force de Lorentz peut se réécrire sous la forme :

$$\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2. \quad (\text{A.13})$$

Ainsi, la force de Lorentz est la somme du gradient d'une pression magnétique :

$$P_B = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}, \quad (\text{A.14})$$

et d'une tension magnétique¹ :

$$\mathbf{T}_B = \frac{(B \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (\text{A.15})$$

Pour connaître l'influence relative de la force de pression et des forces de Lorentz sur la dynamique du plasma, c.-à-d. leurs influences relatives dans l'équation d'Euler (cf. Eq. A.2),

1. La tension magnétique peut s'écrire en fonction de la pression magnétique : $\mathbf{T}_B = 2P_B/R\mathbf{n}$ (avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normale à la ligne de champ et R le rayon de courbure des lignes de champ).

on introduit le paramètre β dont l'expression est :

$$\beta \approx \frac{\text{énergie interne du plasma}}{\text{énergie magnétique du champ}} \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{2\mu_0 P}{\mathbf{B}^2}. \quad (\text{A.17})$$

Dans l'atmosphère solaire, la valeur du paramètre β varie fortement entre la photosphère et la haute couronne (cf. Fig. A.1). En effet, au niveau photosphérique le champ magnétique d'une région active vaut environ $10 - 1000\text{G}$. La pression du plasma étant de $P \approx 8 \times 10^3\text{Pa}$, le paramètre β est alors compris entre ~ 2 et $\sim 2 \times 10^4$ en fonction de l'intensité du champ magnétique (Gary 2001). Au contraire dans la couronne solaire, à une altitude de $\sim 100\text{Mm}$ au dessus de la photosphère le champ magnétique est de $\sim 10\text{G}$ tandis que la pression est très faible, $P \approx 10^{-2}$. Par conséquent, le paramètre β ne vaut que $\beta \sim 0.01$.

En fonction de la valeur de β deux régimes existent :

- Si $\beta < 1$, la dynamique du plasma est gouvernée par les forces de Lorentz comme par exemple dans la couronne solaire. L'énergie est majoritairement sous forme magnétique.
- Si $\beta > 1$, la dynamique du plasma est gouvernée par la force de pression. L'énergie est majoritairement sous forme cinétique. C'est le cas au niveau de la photosphère et dans les couches internes du Soleil.

Nous verrons section (A.4.2) que le couplage matière-champ magnétique est renforcé par le respect de deux théorèmes majeurs dans le cas de la MHD idéale (cf. Sect. A.4).

A.3 Nombre de Reynolds

Les régimes d'évolutions en MHD sont également classifiés selon la valeur d'un paramètre, R_M , appelé nombre de Reynolds magnétique. Il permet de quantifier l'importance de la diffusion du champ magnétique par rapport à sa convection par la matière.

En insérant les équations d'Ampère (cf. Eq. A.9 et de Faraday (cf. Eq. A.8) dans la loi d'Ohm (cf. Eq. A.11) on obtient l'équation d'induction résistive du champ magnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (\text{A.18})$$

avec $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ la résistivité. Le transport du champ magnétique dépend donc d'un terme de convection $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ et du terme de diffusion $\eta \Delta \mathbf{B}$.

Le comportement du plasma est alors caractérisé par le rapport entre ces deux contributions définissant le nombre de Reynolds magnétique :

$$R_M = \frac{[\text{Convection du champ magnétique}]}{[\text{Diffusion du champ magnétique}]} = \frac{v_0 L_0}{\eta}, \quad (\text{A.19})$$

avec v_0 la vitesse caractéristique du plasma et L_0 son échelle spatiale.

Lorsque $R_M < 1$, la dynamique du plasma est gouvernée par la diffusion magnétique. On parle alors de MHD résistive. Au contraire lorsque la conductivité $\sigma \rightarrow \text{inf}$ alors la résistivité $\eta \rightarrow 0$ et $R_M \rightarrow \text{inf}$. La convection du champ magnétique domine. On est alors dans le cadre de la MHD dite idéale qui est caractérisée par la relation (A.12).

A.4 La magnétohydrodynamique idéale

Considérons un tube de flux magnétique typique de l'atmosphère solaire. Son diamètre est $\sim 100\text{km}$ et sa vitesse caractéristique de $\sim 1\text{km s}^{-1}$. Si l'on considère une résistivité comprise entre $\eta \approx 3 \times 10^3 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ au niveau de la photosphère et $\eta \approx 1 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ pour la couronne (Regnier et al. 2008) alors le nombre de Reynolds magnétique vaut entre $R_M \approx 10^4$ et $R_M \approx 10^8$. La MHD idéale est donc une bonne approximation aux échelles des structures magnétiques de l'atmosphère solaire.

Ci-après, nous verrons que la MHD impose des contraintes supplémentaires sur la dynamique du champ magnétique et du plasma (cf. Sect. A.4.2). Pour cela je commencerai par introduire la notion de ligne de champ (cf. Sect. A.4.1). Nous verrons également qu'en MHD idéale le champ magnétique doit se relaxer vers un état sans force linéaire (cf. Sect. A.4.3).

A.4.1 Lignes de champ magnétique

Avant de continuer, il est important d'introduire la notion de ligne de champ magnétique ou ligne de force. Les lignes de champ magnétique décrivent l'ensemble des courbes qui sont en tout point tangentes au vecteur champ magnétique, \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.20})$$

avec $d\mathbf{l}$ un vecteur infinitésimal de déplacement de coordonnées (dx, dy, dz) . En coordonnées cartésiennes, la formulation ci-dessus (cf. Eq. A.20) est équivalente à l'équation paramétrique :

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}. \quad (\text{A.21})$$

A.4.2 Théorèmes d'Alfvén

En magnétohydrodynamique idéale ($R_m \gg 1$) le champ magnétique est caractérisé par deux principaux théorèmes. Considérons une courbe fermée, $C(t)$ qui délimite une surface orientée $S(t)$. La courbe est plongée dans le plasma et est entraînée par l'écoulement de celui-ci. La variation du flux magnétique $\phi(t)$ durant un temps infinitésimal dt peut s'écrire :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$= \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{A.23})$$

La première intégrale peut se reformuler à l'aide de la circulation du champ électrique, $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ le long de la courbe C . La deuxième peut également être formulée à l'aide du champ électrique grâce au théorème de Maxwell-Faraday (cf. Eq. A.8). L'équation (A.22) devient alors :

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_{S(t)} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{C(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{A.24})$$

Or d'après le théorème de Stokes, ces deux termes sont égaux. La variation du flux est donc nulle :

$$\frac{d\phi(\mathbf{B}, C)}{dt} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème du flux ou premier théorème d'Alfvén et traduit un couplage entre le plasma et le champ magnétique. Ce couplage est renforcé par le deuxième théorème d'Alfvén, appelé théorème du gel, dont l'énoncé est le suivant : durant une évolution MHD idéale, les particules de plasma restent toujours sur la même ligne de champ. Autrement dit, le champ magnétique et le plasma peuvent être considérés comme gelés l'un à l'autre.

Les deux théorèmes d'Alfvén impliquent un certain nombre de contraintes topologiques. Par exemple, les lignes de champ magnétique ne peuvent pas se rompre. Par définition du théorème du gel, si deux particules de plasma sont connectées par une même ligne de champ magnétique alors elles le resteront indéfiniment, quel que soit l'écoulement du plasma. La connectivité des lignes de champ magnétique est donc conservée.

D'autre part, le plasma et le champ magnétique partagent une évolution commune. En fonction du paramètre, β il existe deux régimes possibles. Si $\beta \gg 1$ alors le champ magnétique est convecté par le plasma. Au contraire, si $\beta \ll 1$ alors leurs dynamiques sont gouvernées par le champ magnétique. Le plasma est convecté par le champ magnétique.

A.4.3 Relaxation du champ magnétique

Pour un fluide parfaitement conducteur de résistivité η nulle l'équation d'induction (cf. Eq. A.18) de la MHD devient :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.26})$$

Considérons un volume V délimité par une surface S dans lequel évolue un champ magnétique \mathbf{B} . On cherche ici à déterminer l'état final du système magnétique après relaxation du champ magnétique. On supposera que cet état est un état de minimum d'énergie magnétique.

En utilisant l'équation d'induction de la MHD idéale (cf. Eq. A.26) ainsi que le théorème de Green-Ostrogradski, la variation temporelle de l'énergie magnétique (E , cf. Eq. 1.1) s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \quad (\text{A.27})$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times \mathbf{B} dV + \frac{1}{\mu_0} \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} dS \quad (\text{A.29})$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{v}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV + \frac{1}{\mu_0} \int_S (\mathbf{B}_n(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{v}_n(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})) dS \quad (\text{A.30})$$

Le terme surfacique s'annule si la vitesse est nulle à la surface. Le terme volumique lui s'annule si le plasma est immobile $\mathbf{v} = 0$. En supposant que le plasma est mobile, c.-à-d. $\mathbf{v} \neq 0$ alors l'énergie magnétique est également stationnaire si

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Le champ magnétique et le plasma évoluent de façon quasi statique à travers une succession d'équilibre donnée par l'équation (cf. Eq. A.31). L'état d'énergie minimale correspond donc un champ magnétique sans force non linéaire de la forme :

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \alpha(x, y, z)\mathbf{B}, \quad (\text{A.32})$$

avec α un coefficient de cisaillement (en m^{-1}). Le champ magnétique et les courants électriques sont donc alignés. La divergence de l'équation (A.32) s'écrit :

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\alpha = 0. \quad (\text{A.33})$$

Par conséquent, le cisaillement peut varier d'une ligne de champ magnétique à une autre, mais doit rester constant le long d'une même ligne de champ.

Remarquons également que d'après l'équation (A.13), la force de Lorentz $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ peut s'écrire comme la somme de la pression et de la tension magnétique. Ainsi, l'équation (A.32) implique :

$$\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2. \quad (\text{A.34})$$

Dans la couronne solaire, il y a donc un équilibre entre la tension et la pression magnétique le long des lignes de champ magnétique.

A.5 La théorie de la reconnexion magnétique

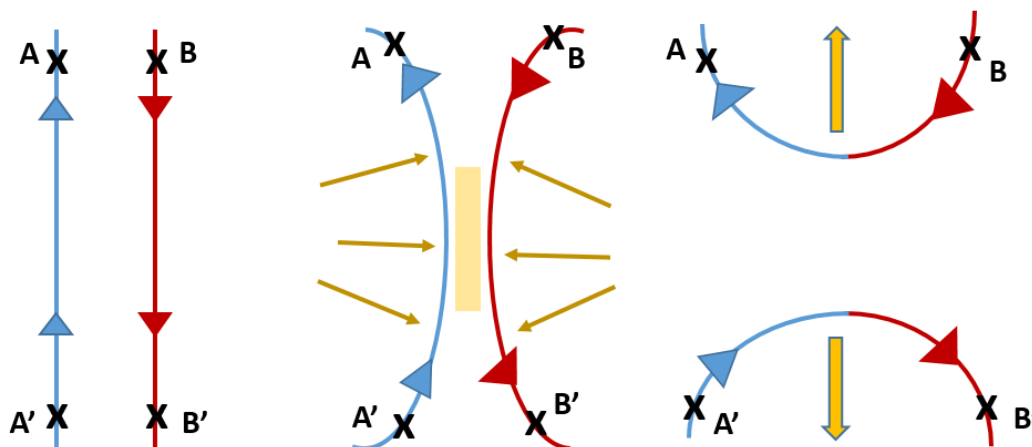


FIGURE A.2 – Illustration de la reconnexion magnétique. **Gauche** : champ magnétique initialement anti-parallèle. Le point A est connecté magnétiquement au point A'. De même pour le point B et le point B'. **Milieu** : poussées par le plasma les lignes de champ magnétique se rapprochent et forment une zone de diffusion au centre. **Droite** : changement de configuration magnétique. Le point A est maintenant relié au point B' et le point A' au point B'. Le plasma est accéléré par la force de tension magnétique (flèches orange).

D'après l'équation (A.27), en MHD idéale l'énergie magnétique ne peut pas être dissipée. Pour permettre une dissipation de l'énergie magnétique, il faut tenir compte du terme résistif dans l'équation d'induction (cf. Eq. A.18) qui a une importance uniquement que si le nombre de Reynolds est $R_M \leq 1$. On sort alors du cadre de la MHD idéale pour se placer en MHD résistive. Le nombre de Reynolds étant proportionnel à l'échelle spatiale caractéristique, la dissipation d'énergie n'est efficace qu'à très petites échelles (de l'ordre du mètre pour un plasma coronal).

En détail, l'équation d'induction en MHD résistivité s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}\mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{J}) \quad (\text{A.35})$$

$$= \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \eta \times \mathbf{J} - \eta \nabla \times \mathbf{J}. \quad (\text{A.36})$$

Il y a donc deux possibilités pour que le terme résistif ne soit pas négligeable localement. La première est la création de régions pour lesquelles la résistivité est très intense. La deuxième possibilité est de créer des régions la variation spatiale de la densité de courants électriques est très intense. Les régions étendues contenant des courants électriques très intenses sont appelées nappes de courant.

En MHD résistive, les théorèmes d'Alfvén ne s'appliquent plus. L'évolution du champ magnétique est alors indépendante de celle du plasma. À petite échelle et de façon très localisée (e.g. au niveau des nappes de courant), le théorème du gel peut être rompu et la connectivité des lignes de champ magnétique modifiée. Ce processus est connu sous le nom de reconnexion magnétique et est essentiel à la libération d'énergie magnétique lors des éruptions solaires ([Parker 1957](#); [Sweet 1958](#); [Petschek 1964](#); [Hesse & Schindler 1988](#)).

Historiquement, les premiers modèles théoriques de reconnexion magnétiques décrivent des configurations magnétiques 2D faisant intervenir un changement de connectivité entre deux lignes de champ magnétique antiparallèles (cf. [Fig. A.2](#) et [Parker 1957](#); [Sweet 1958](#); [Petschek 1964](#)). Par la suite, les modèles ont été étendus en 3D. [Hesse & Schindler \(1988\)](#) ont montré par exemple que théoriquement la reconnexion magnétique a lieu au niveau de région très localisée où le champ électrique est parallèle au champ magnétique. D'après la loi d'OHM (cf. [Eq. A.11](#)), le champ électrique parallèle résulte naturellement de la présence de courants électriques. Ainsi les nappes de courant où la densité de courant est par définition très intense sont des sites préférentiels pour la reconnexion magnétique.

Annexe B

Extrapolation d'un champ magnétique sans force linéaire

Avant le développement de méthode robustes d'extrapolation sans force non linéaire (cf. Sect. 2.3), les reconstructions 3D reposaient sur l'hypothèse d'un champ magnétique sans force linéaire (LFFF, "linear force free field"). Ci-après je présenterai la méthode d'extrapolation LFFF (cf. Sect. B.1 ainsi que la méthode d'estimation de l'hélicité qui en découle (cf. Sect. B.2).

B.1 Méthode

Un paramètre de cisaillement α (en m^{-1}), tel que $\mathbf{J} = \alpha\mathbf{B}$ définit le système d'équations :

$$\begin{cases} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \alpha\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \cdot \nabla\alpha = 0 \end{cases} . \quad (\text{B.1})$$

Une possibilité pour satisfaire $\mathbf{B} \cdot \nabla\alpha = 0$ est d'assumer α constant. Cette solution définit un champ dit sans force linéaire. En prenant le rotationnel de l'équation $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha\mathbf{B}$, cela ramène à chercher la solution de l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta\mathbf{B} + \alpha^2\mathbf{B} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Il existe actuellement de nombreuses méthodes pour résoudre cette équation (Sakurai 1981; Wiegelmann & Sakurai 2012). En particulier, Nakagawa & Raadu (1972) et Alissandrakis (1981) ont proposé une méthode de résolution basée sur la transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform, FFT). En supposant que le champ magnétique décroît dans la direction verticale en loi exponentielle, les solutions de l'équation (B.2) s'écrivent sous la forme de solutions séparables :

$$B_i(x, y, z) = \sum_{n_x=1}^{N_x} \sum_{n_y=1}^{N_y} \tilde{B}_{n_x, n_y} F_i(x, y) e^{-\frac{z}{l}}, \quad (\text{B.3})$$

avec $i = (x, y, z)$, l la hauteur d'échelle sur laquelle l'harmonique (n_x, n_y) du champ magnétique décroît et \tilde{B}_{n_x, n_y} est l'amplitude de Fourier associée à la composante verticale du champ magnétique. Il existait également une solution en $\exp(z/l)$ qui aboutissait cependant à une énergie magnétique infinie. Dans la base de Fourier, Aulanier & Démoulin (1998) ont montré que les

solutions pour $F_i(x, y)$ sont :

$$\begin{aligned} F_x(x, y) = & - \frac{\alpha k_y}{k_y^2 + k_x^2} \sin(k_x x + \phi_x) \sin\left(k_y y + \phi_y + \frac{\pi}{2}\right) \\ & - \frac{l k_x}{k_y^2 + k_x^2} \sin(k_x x + \phi_x) \sin\left(k_y y + \phi_y + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} F_y(x, y) = & - \frac{\alpha k_x}{k_y^2 + k_x^2} \sin(k_x x + \phi_x) \sin\left(k_y y + \phi_y + \frac{\pi}{2}\right) \\ & + \frac{l k_y}{k_y^2 + k_x^2} \sin(k_x x + \phi_x) \sin\left(k_y y + \phi_y + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$F_z(x, y) = \sin(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y) \quad (\text{B.6})$$

$$l = (k_y^2 + k_x^2 - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.7})$$

où $(k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}, k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y})$ correspondent aux fréquences spatiales du champ magnétique selon les directions x et y (avec L_x et L_y les extensions horizontales du domaine).

De plus, pour que l'énergie magnétique ne soit pas infinie, l doit être un réel. Dans le cas contraire, les solutions trouvées oscillent en gardant une amplitude constante avec l'altitude. Pour que l soit un réel, la valeur du cisaillement est bornée tel que :

$$|\alpha| \leq \sqrt{k_y^2 + k_x^2}. \quad (\text{B.8})$$

Remarquons également que dans le cas où le flux magnétique est équilibré ($\mathbf{B}_z(0, 0) = 0$), la périodicité du domaine dans la base de Fourier implique que $|\alpha|$ est forcément plus petite que la valeur pour les premières harmoniques :

$$|\alpha| \leq \alpha_{max} = \min\left(\frac{2\pi}{L_x}, \frac{2\pi}{L_y}\right). \quad (\text{B.9})$$

Au contraire, le flux magnétique n'est pas équilibré, il est possible de créer un domaine de taille $2L_x, 2L_y$ à partir d'une combinaison du magnétogramme originel et de trois images miroirs obtenues à partir du point de réflexion $(0, 0)$. Cette nouvelle surface est flux équilibré. La borne supérieure est légèrement modifiée :

$$|\alpha| \leq \alpha_{max} = \min\left(\pi \left(\frac{m^2}{L_x^2}, \frac{n^2}{L_y^2}\right)^{1/2}\right), \quad (\text{B.10})$$

avec $m, n=1, 2, \dots$ (Seehafer 1978). Pour $L_x = L_y$, la différence entre les deux valeurs maximales est d'un facteur $\sqrt{2}/2$ ou $\sqrt{5}/2$ si le magnétogramme est flux équilibré. Remarquons cependant que la limite sur α_{max} et donc sur le courant \mathbf{j} n'est pas physique. Elle dérive uniquement de la taille du domaine d'extrapolation dans la direction x et y ; et non de la structure du champ magnétique.

Une fois le formaliste établi, il faut maintenant choisir le meilleur paramètre de cisaillement α . Là encore, plusieurs méthodes coexistent. Par exemple, Pevtsov et al. (1995) ont montré que le paramètre α peut être obtenu en minimisant la différence entre les composantes x et y du champ sans force, \mathbf{B}_{LFFF} , avec le champ magnétique horizontal observé, \mathbf{B}_{mgm} . Autrement,

cela revient à minimiser le terme R , tel que :

$$R(\alpha, B_{seuil} = \sum_{|B_z| > B_{seuil}} ((B_{x,LFFF} - B_{x,mgm})^2 + (B_{y,LFFF} - B_{y,mgm})^2)^{1/2}, \quad (\text{B.11})$$

avec B_{seuil} une intensité minimum en dessous de laquelle le champ magnétique ne peut pas être mesuré précisément (Pevtsov et al. 1995). Pour chaque α respectant $|\alpha| \leq \alpha_{max}$, seul le calcul du champ magnétique sans force linéaire à l'altitude $z = 0$ est nécessaire. Cette méthode est simple et facile à implémenter. Cependant cette méthode ne permet pas réellement de se rendre compte du cisaillement du champ magnétique en 3D. Pour cela, il faut comparer le champ magnétique extrapolé avec les boucles coronales observées en EUV/SXR (Green et al. 2002; Carcedo et al. 2003).

Tout d'abord, une première extrapolation avec une certaine valeur de α est nécessaire. Ensuite, il faut visualiser les lignes de champ avec le même angle de projection que l'angle de vue de la région active observée. Le magnétogramme photosphérique utilisé pour l'extrapolation est notamment co-aligné avec l'image EUV/SXR. On calcule alors la distance projetée sur le plan du ciel entre une ligne de champ magnétique extrapolée et une boucle coronale. On réitère ensuite le processus avec une autre valeur de α jusqu'à ce que l'on obtienne la meilleure correspondance possible, i.e une distance plus faible (Green et al. 2002). Cette technique reste quand même dépendante de la perception humaine. De plus, les boucles coronales ne sont pas toujours entièrement visibles, il faut donc parfois utiliser des méthodes de reconnaissance automatique (Inhester et al. 2007).

B.2 Hélicité magnétique relative d'un champ magnétique sans force linéaire

En utilisant les résultats de Berger (1985), Démoulin et al. (2002) ont montré que l'hélicité magnétique relative de la couronne solaire dépend du cisaillement tel que :

$$H_r = 2\alpha \sum_{n_x=1}^{N_x} \sum_{n_y=1}^{N_y} \frac{|\tilde{B}_{n_x, n_y}^2|}{l(k_x^2 + k_y^2)}. \quad (\text{B.12})$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle ne dépend pas de la jauge utilisée pour \mathbf{A} et \mathbf{A}_p . De plus pour des très petites valeurs de α (i.e $\ll 2\pi/L$), l ne dépend plus que des fréquences spatiales, $l \approx \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, et l'hélicité magnétique relative devient proportionnelle au paramètre α . Dans le cas opposé où $\alpha \rightarrow 2\pi/L$, l'hélicité magnétique est infinie. L'équation (B.12) n'est pas adaptée au calcul de l'hélicité magnétique. Pour remédier à cela, Démoulin et al. (2002) ont introduit une forme linéaire de l'hélicité magnétique relative :

$$H_{r,lin} = 2\alpha \sum_{n_x=1}^{N_x} \sum_{n_y=1}^{N_y} \frac{|\tilde{B}_{n_x, n_y}^2|}{(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{B.13})$$

L'extrapolation du champ magnétique sans force linéaire possède de nombreux avantages. Tout d'abord, l'hélicité magnétique possède une formulation analytique qui dépend uniquement de quantités observées à partir d'un magnétogramme vectoriel. L'implémentation numérique de l'équation (B.13) est donc facile et rapide. D'autre part, sous certaines hypothèses, l'extrapolation sans force linéaire est un problème bien posé. Une solution existe et est unique.

Pour finir seul le champ magnétique le long de la ligne de visée est nécessaire. Il existe donc à l'heure actuelle une grande base de données exploitables obtenue par SOHO/MDI où plus récemment, avec une meilleure cadence temporelle et une meilleure résolution, par SDO/HMI. Cette méthode d'extrapolation a donc naturellement abouti à de nombreux travaux (Pariat et al. 2004; Luoni et al. 2007; Démoulin et al. 2006; Baker et al. 2009; Georgoulis & LaBonte 2007; Georgoulis et al. 2012).

Néanmoins, l'hélicité magnétique relative mesurée en supposant l'hypothèse LFFF est relativement imprécise et n'est pas toujours équivalente à celle obtenue par d'autres méthodes. Par exemple, Lim et al. (2007) ont comparé les valeurs d'hélicités obtenues par l'équation (B.13) avec celle obtenue en intégrant le flux d'hélicité magnétique relative (cf. Sect. 3.3.2) pour la région active NOAA 10696. Les valeurs trouvées à partir de l'expression linéaire sont plus faibles que celle du flux d'hélicité. L'écart est de l'ordre de 15% entre les deux méthodes.

Démoulin et al. (2002) ont également montré que l'estimation de l'hélicité magnétique est sous-évaluée aux grandes échelles spatiales et sur-évaluée aux petites échelles spatiales. Cela découle de la propriété de cascade inverse de l'hélicité magnétique lorsque le champ magnétique se relaxe vers un champ sans force linéaire. Par construction, l'hypothèse du champ magnétique sans force linéaire implique que les petites (respectivement grandes) boucles coronales sont plus (respectivement moins) cisailées que les boucles coronales véritablement observées. Par conséquent, l'hélicité magnétique est trop faible (respectivement trop élevée) aux petites échelles (respectivement grandes échelles). Même si Démoulin et al. (2002) ont supposé que ces deux effets se compensent, la sous-estimation de l'hélicité magnétique des petites boucles coronales peut expliquer les valeurs plus faibles observées systématiquement comparées à la méthode des flux d'hélicité.

Néanmoins, le principal problème lors de l'estimation de l'hélicité magnétique coronale par l'équation (B.13) provient de l'hypothèse LFFF elle-même. Dans une simulation numérique modélisant un tube de flux torsadé porteur de courants électriques entouré par un champ potentiel, Valori et al. (2010) ont en effet montré que la topologie du tube de flux n'était pas respectée par le champ magnétique reconstruit par la méthode d'extrapolation LFFF (cf. Fig. 2.5). De même à partir d'une région active observée grâce à Yokoh/SXT, Bleybel et al. (1999) ont trouvé que la courbure de la boucle coronale observée n'était pas correctement reproduite par un champ sans force linéaire. Puisque le champ magnétique reconstruit n'est pas correct, l'hélicité magnétique ne l'est pas également. C'est pour cette raison qu'on préfère désormais utiliser des extrapolations sans force non linéaire qui donne un champ magnétique présentant davantage de ressemblance avec le champ magnétique attendu (cf. Fig. 2.5 et Sect. 2.3).

Annexe C

Liste de publications et communications

C.1 Articles dans revues à comité de lecture

- Zuccarello F. P., Pariat E., Valori G., and **Linan L.**, 2018, *Threshold of Non-potential Magnetic Helicity Ratios at the Onset of Solar Eruptions*, ApJ, 863, 41, [ADS link](#)
- **Linan L.**, Pariat E., Moraitis K., Valori G., and Leake J., 2018, *Time Variations of the Nonpotential and Volume-threading Magnetic Helicities*, ApJ, 865, 52, [ADS link](#)
- Thalmann J. K., **Linan L.**, Pariat E., and Valori G., 2019, *On the Reliability of Magnetic Energy and Helicity Computations Based on Nonlinear Force-free Coronal Magnetic Field Models*, ApJ, 880, L6, [ADS link](#)
- Moraitis K., Sun X., Pariat E., and **Linan L.**, 2019, *Magnetic helicity and eruptivity in active region 12673*, A&A, 628, A50, [ADS link](#)
- Thalmann J. K., Moraitis K., **Linan L.**, Pariat E., Valori G., and Dalmasse K., 2019, *Magnetic Helicity Budget of Solar Active Regions Prolific of Eruptive and Confined Flares*, ApJ, 887, 64, [ADS link](#)
- **Linan L.**, Pariat E., Aulanier G., Moraitis K., and Valori G., 2020, *Energy and helicity fluxes in line-tied eruptive simulations*, A&A, 636, A41, [ADS link](#) ,
- Valori G., Pariat E., Demoulin P., Moraitis K., Yeates A., and **Linan L.**, 2020, *Additivity of relative magnetic helicity in finite volumes*, A&A, sous presse.

C.2 Contributions orales

- *Time variations of the non-potential and volume-threading magnetic helicities*, ISSI meeting : “Magnetic Helicity in Astrophysical Plasmas”, 17-21 December 2018, Bern, Switzerland
- *Magnetic helicity : properties and potential impact on solar eruption prediction*, Elbereth, 20 february 2019 , Institut d’Astrophysique de Paris, Paris, France
- *Time variations of the non-potential and volume-threading magnetic helicities*, Solar Helicities in Theory and Observations : Implications for Space Weather and Dynamo Theory, 4 March 2019, Nordita, Stockholm, Sweden
- *Magnetic helicity : properties and potential impact on solar eruption prediction*, Journée des thèses du LESIA, LESIA, 7 April 2009, Observatoire de Meudon, France
- *Properties of relative magnetic helicity and its decomposition in the solar atmosphere* , Journées 2019 de la Société Française d’Astronomie & d’Astrophysique (SF2A), 16 may 2019, Nice, France
- *Magnetic helicity : properties and potential impact on solar eruption prediction*, PLAS@PAR Young Researchers day : 3rd Young Researcher Conference on Plasma Physics and applications, Sorbonne University, École Polytechnique and the Société Française de Physique (Plasma Division), 21 June 2019, École Polytechnique, Palaiseau, France ,
- *Time variations of the non-potential and volume-threading magnetic helicities*, FReS-WeD 2019 : Toward Future Research on Space Weather Drivers, 3 July 2019, San Juan, Argentina
- *Comparative study of the evolution of energies and helicities in line-tied simulations*, ISSI meeting : “Magnetic Helicity in Astrophysical Plasmas”, 19 August 2019, Bern, Switzerland

Table des figures

1.1	Diagrammes papillon du champ magnétique et des taches solaires	13
1.2	Observation du Soleil par le satellite SDO	14
1.3	Exemple d'évolution d'un magnétogramme durant une éruption solaire	15
1.4	Exemple d'éruption solaire vue par le satellite Hinode	16
1.5	Exemples de structures torsadées dans l'atmosphère solaire	17
1.6	Exemples de signatures observationnelles d'éruption solaire	18
1.7	Variations des paramètres du vent solaire au passage d'une ICME	19
1.8	Exemples de l'impact de l'activité solaire sur les technologies/infrastructures humaines	20
1.9	Décomposition du champ magnétique en champ potentiel et porteur de courants électriques	23
1.10	Modèle standard d'une éruption solaire et son extension en 3D	26
1.11	Différence d'échelle spatiale dans les simulations numériques	27
1.12	Torsion, cisaillement et entortillement des lignes de champ magnétique	30
1.13	Dynamo $\alpha - \Omega$	33
1.14	Distribution en latitude du flux magnétique et du flux d'hélicité photosphérique	34
1.15	Modèle d'ascension d'un tube de flux magnétique dans la zone de convection	38
2.1	Extrapolation sans force non linéaire de la région active NOAA 11504	44
2.2	Exemple de magnétogramme vectoriel	45
2.3	Magnétogrammes d'une même région active issus de deux codes d'inversion des profils de Stokes	47
2.4	Exemples de magnétogrammes observés et modélisés après prétraitement	50
2.5	Exemples d'extrapolations potentielles, sans force linéaire et sans force non linéaire	52
2.6	Observations de la région active NOAA 12441	55
2.7	Évolution des paramètres de contrôle durant l'exécution d'un code d'extrapola- tion NLFFF	56
2.8	Exemple d'une reconstruction 3D du champ magnétique coronal obtenue par la méthode magnéto frictionnelle	57
2.9	Influence de la méthode d'extrapolation sur la reconstruction 3D d'un champ magnétique	59
2.10	Exemple d'application du théorème de Thomson-Valori	63
2.11	Influence de la divergence du champ magnétique sur la mesure de l'hélicité ma- gnétique relative	64
3.1	Définition de l'hélicité magnétique relative	70
3.2	Évolution de la densité spectrale d'énergie et d'hélicité magnétique dans une simulation de dynamo turbulente	75
3.3	Conservation d'hélicité magnétique relative dans une simulation MHD d'un jet coronal	77

3.4	Schéma d'un nuage magnétique sous force de tube de flux torsadé	80
3.5	Tableau récapitulatif de quatre méthodes de mesure et de représentation de l'hélicité magnétique	83
3.6	Comparaison de la valeur de l'hélicité magnétique relative calculée à partir de différents codes d'IDV	87
3.7	Évolution de la variation temporelle et de l'accumulation de l'hélicité magnétique au niveau d'une région active	92
3.8	Schéma d'un tube de flux magnétique élémentaire	94
3.9	Hélicité par ligne de champ magnétique dans la simulation numérique d'un jet coronal	95
3.10	Densité de flux d'hélicité au niveau d'une région active	96
3.11	Exemple d'hélicitogramme obtenu à partir de G_A	97
3.12	Schéma de la division d'un volume, V , en deux sous-volumes, V^a et V^b partageant une frontière commune Σ	99
3.13	Exemple de partition de l'hélicité relative entre deux volumes	101
4.1	Hélicité magnétique d'un échantillon de régions actives dont certaines produisent des CMEs	119
4.2	Évolution de l'hélicité relative dans des simulations numériques MHD	121
4.3	Diagramme énergie libre-hélicité magnétique	122
4.4	Variation du flux d'hélicité magnétique durant quatre éruptions solaires différentes	124
4.5	Évolution des lignes de champ magnétique dans une simulation d'émergence et d'éruption d'un tube de flux torsadé	126
4.6	Évolution du flux d'hélicité relative normalisé par le flux magnétique dans des simulations MHD stables et des simulations MHD d'éruptions	127
4.7	Seuil du critère d'éruptivité dans des simulations numériques MHD	129
4.8	Exemple d'interpolation d'un maillage non uniforme	131
4.9	Dynamique du critère d'éruptivité dans une simulation d'un jet coronal	132
4.10	Comparaison de la dynamique du critère d'éruptivité entre deux extrapolations NLFFF d'une même région active	146
4.11	Évolution de la région active NOAA 12673 vue par l'instrument AIA à la longueur d'onde 304 Å durant un flare de classe X	154
4.12	Évolution du critère d'éruptivité au niveau de la région active NOAA 12673	155
4.13	Signatures observationnelles d'une éruption de classe X	164
4.14	Comparaison de la dynamique du critère d'éruptivité entre deux régions actives	165
4.15	Évolution des hélicités relative, non potentielle et mêlée au niveau de la région active NOAA 12192	166
5.1	Impact du choix de jauge sur l'intensité de deux termes de flux d'hélicité non potentielle	183
5.2	Exemple d'analyse de l'injection et du transfert des hélicités non potentielle et mêlée dans une simulation MHD	187
5.3	Comparaisons de l'évolution des termes d'injection et de transfert d'hélicités entre quatre simulations MHD	191
5.4	Densité de transfert d'hélicités dans une simulation MHD d'un jet coronal	194
5.5	Comparaisons entre les variations temporelles des énergies libre et potentielle et celles des hélicités non potentielle et mêlée	217
5.6	Cartes photosphériques de diverses densités de flux d'hélicités et d'énergies dans une simulation MHD d'éruption	219

A.1	Valeur du paramètre β en fonction de l'altitude dans l'atmosphère solaire	267
A.2	Illustration de la reconnexion magnétique	271

Les phénomènes spectaculaires que sont les éruptions solaires peuvent impacter les infrastructures humaines. L'évolution technologique de notre société nous rend de plus en plus sensibles à l'activité solaire, ainsi sa prévision devient un enjeu économique croissant. Ma thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet de l'Agence Nationale de la Recherche, HeliSol, visant à établir des critères déterministes permettant des prédictions fiables des éruptions solaires. Je me suis intéressé durant ma thèse à une quantité prometteuse liée à la géométrie du champ magnétique : l'hélicité magnétique. Malgré quelques précédents résultats théoriques, analytiques et observationnels, la plaçant au cœur de divers processus liés à l'activité solaire, l'hélicité magnétique reste encore aujourd'hui mal comprise. Mon travail s'est porté en particulier sur l'étude des propriétés d'une décomposition de l'hélicité magnétique : l'hélicité magnétique non potentielle (liée au champ magnétique porteur de courants électriques) et l'hélicité mêlée (contenant le reste de l'information).

Tout d'abord, je me suis concentré sur le lien entre l'éruptivité d'un système magnétique et ses hélicités. Via des simulations numériques magnétohydrodynamiques (MHD), j'ai montré que le ratio entre l'hélicité non potentielle et l'hélicité totale possède une valeur seuil au-delà de laquelle une instabilité à l'origine de l'éruption se déclenche systématiquement. Les données magnétiques, issues d'observations, m'ont permis de confirmer le ratio d'hélicité comme marqueur significatif de l'éruptivité de différentes régions actives. Ces analyses reposent sur la production de reconstructions 3D du champ magnétique coronale générées à partir des mesures observationnelles de la distribution 2D du champ magnétique au niveau de la "surface" du Soleil. Comme j'ai pu le démontrer néanmoins, le ratio ne peut être correctement déterminé si le champ magnétique reconstruit ne respecte pas la propriété solénoïdale.

J'ai également utilisé des approches analytiques et numériques pour étudier les propriétés des hélicités qui composent le ratio susmentionné. J'ai ainsi proposé un formalisme théorique pour quantifier la non additivité de l'hélicité magnétique. J'ai aussi introduit pour la première fois une expression analytique pour la variation temporelle des hélicités non potentielle et mêlée. Cela m'a permis de montrer que, contrairement à l'hélicité totale, les hélicités non potentielle et mêlée ne sont pas des grandeurs conservées. Leurs évolutions sont dictées d'une part par les flux traversant les frontières, mais également par un transfert d'une forme d'hélicité à l'autre. J'ai de plus démontré, par application des simulations numériques, que ce transfert d'hélicité a un rôle majeur dans la dynamique des hélicités magnétiques durant une éruption solaire.

En conclusion, le ratio d'hélicité magnétique mis en évidence pourrait participer au développement de nouveaux outils destinés à la prédiction des éruptions solaires. Plus généralement, mes travaux permettent de mieux appréhender l'évolution des configurations magnétiques responsables des événements actifs de la couronne solaire. Ces recherches peuvent en outre être la base de futures études théoriques sur le lien entre hélicités magnétiques et déclenchement d'éruptions.

MOTS CLÉS

Soleil, Champ magnétique, Hélicité magnétique, Magnétohydrodynamique, Éruption solaire, Atmosphère solaire

ABSTRACT

The spectacular phenomena that are solar eruptions can impact human infrastructures. As we become more and more sensitive to solar activity because of the technological evolution of our society, solar forecasting is a growing economic stake. My thesis is part of the HeliSol research project of the Agence Nationale de la Recherche. The project aims to establish deterministic criteria allowing reliable predictions of solar eruptions. My thesis focuses on a promising quantity related to the geometry of the magnetic field : magnetic helicity. Despite some previous theoretical, analytical, and observational results, placing it at the core of various processes related to solar activity, magnetic helicity still remains largely unfathomed. More precisely, my work is focused on the study of the properties of a decomposition of magnetic helicity : the non-potential magnetic helicity (linked to the magnetic field carrying electric currents) and the volume-threading magnetic helicity (containing the rest of the information).

First, I focused on the link between the eruptivity of a magnetic system and its helicities. Using magnetohydrodynamic (MHD) numerical simulations, I showed that the ratio between non-potential helicity and total helicity has a threshold beyond which an eruption systematically occurs. Magnetic data obtained from observations allowed me to confirm that the helicity ratio is a significant marker of the eruptivity of different active regions. These analyses are based on the production of 3D reconstructions of the coronal magnetic field generated from observational measurements of the 2D distribution of the magnetic field at the level of the Sun's "surface". Nevertheless, as I could demonstrate, the ratio cannot be correctly determined when the reconstructed magnetic field does not respect the solenoidal property.

I used analytical and numerical approaches to study the properties of the helicities that constitutes the above-mentioned ratio. I proposed a theoretical formalism to quantify the non-additivity of magnetic helicity. I also derived for the first time an analytical expression for the temporal variation of non-potential and volume-threading helicities. This allowed me to show that, unlike total helicity, non-potential and volume-threading helicities are not conserved. Their evolution is dictated not only by fluxes across boundaries, but also by a transfer from one form of helicity to another. With the help of numerical simulations, I also demonstrated that this helicity transfer has a major role in the dynamics of magnetic helicities during solar eruptions.

In conclusion, the highlighted magnetic helicity ratio could be used to develop new prediction tools for solar eruptions. More generally, my work provides a better understanding of the evolution of the magnetic configurations responsible for the active events of the solar corona. These researches could also serve as the basis for future theoretical studies on the link between magnetic helicities and the trigger of solar eruptions.

KEYWORDS

Sun, Magnetic field, Magnetic helicity, Magnetohydrodynamics, Solar eruption, Solar atmosphere