



**HAL**  
open science

# Convection forcée radiativement : du régime de Rayleigh-Bénard au régime ultime

Simon Lepot

► **To cite this version:**

Simon Lepot. Convection forcée radiativement : du régime de Rayleigh-Bénard au régime ultime. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris Saclay (COmUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLS590 . tel-03124402

**HAL Id: tel-03124402**

**<https://theses.hal.science/tel-03124402>**

Submitted on 28 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2018SACLS590

# Convection forcée radiativement : du régime de Rayleigh-Bénard au régime ultime

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay  
préparée à l'université Paris-Sud  
au sein du SPEC, CEA Saclay.

École doctorale n°564 Physique en Ile-de-France (EDPIF)  
Spécialité de doctorat: Physique

Thèse présentée et soutenue à Gif-sur-Yvette, le 11 décembre 2018 , par

**Simon Lepot**

Composition du Jury :

**Francesca Chillà**

Professeur, Ecole Normale Supérieure Lyon  
(Laboratoire de Physique, Non linéaire et hydrodynamique)

*Président*

**Michael Le Bars**

Directeur de recherche, CNRS  
(Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors-Equilibre, Marseille)

*Rapporteur*

**Thierry Alboussière**

Directeur de recherche, CNRS, Université Claude Bernard, Lyon  
(Laboratoire de Géologie de Lyon, Terres, Planètes, Environnement)

*Rapporteur*

**Pierre-Philippe Cortet**

Chargé de recherche, CNRS, Université Paris-Saclay  
(Laboratoire Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques, Orsay)

*Examineur*

**Sébastien Aumaître**

Ingénieur chercheur, CEA  
(Service Physique de l'Etat Condensé, IRAMIS, CEA)

*Directeur de thèse*

**Basile Gallet**

Ingénieur chercheur, CEA  
(Service Physique de l'Etat Condensé, IRAMIS, CEA)

*Co-Directeur de thèse*



# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Convection en laboratoire. . . . .	5
1.1.1	Convection de Rayleigh-Bénard . . . . .	5
1.1.2	Mise en équation et approximation de Boussinesq. . . . .	5
1.1.3	Calcul et soustraction de la solution statique . . . . .	6
1.1.4	Adimensionnement . . . . .	7
1.2	Lois d'échelle . . . . .	8
1.2.1	$\gamma = 1/2$ . . . . .	8
1.2.2	$\gamma = 1/3$ . . . . .	8
1.2.3	$\gamma = 2/7$ . . . . .	9
1.3	Lois d'échelle mesurées dans les expériences. . . . .	12
1.4	Lois d'échelle observées dans les simulations numériques. . . . .	13
1.5	S'affranchir des couches limites. . . . .	15
1.6	Convection radiative. . . . .	18
1.6.1	Motivations. . . . .	20
<b>2</b>	<b>Convection engendrée par des sources et puits volumiques de chaleur : stabilité linéaire.</b>	<b>24</b>
2.1	Étude analytique . . . . .	24
2.1.1	Approximation de Boussinesq . . . . .	25
2.1.2	Conditions aux limites . . . . .	26
2.1.3	Calcul et soustraction de la solution statique . . . . .	26
2.1.4	Adimensionnement . . . . .	27
2.1.5	Analyse de la stabilité linéaire - faibles perturbations . . . . .	27
2.2	Cas de la source de chaleur exponentielle . . . . .	29
2.2.1	Adimensionnement . . . . .	30
2.2.2	Interprétation . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Étude numérique de la convection forcée radiativement</b>	<b>34</b>
3.1	Equations du problème . . . . .	35
3.2	Description du code utilisé . . . . .	37
3.3	Configurations étudiées . . . . .	38

3.4	Efficacité du transfert thermique . . . . .	39
3.4.1	Cas numéro 1 : $l \ll \delta$ et configuration de Rayleigh Bénard. . . . .	40
3.4.2	Cas numéro 2 : $l \gg \delta$ , chauffage volumique de l'écoulement turbulent. . . . .	40
3.5	Structure de l'Écoulement - champs instantanés issus des simulations . . . . .	43
3.6	Influence de la longueur d'absorption . . . . .	48
3.6.1	Modélisation . . . . .	48
3.6.2	Rôle des couches limites de stagnation et température maximale . . . . .	52
3.7	Conclusion . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Réalisation expérimentale de la convection par chauffage radiatif</b>	<b>55</b>
4.1	Dispositif expérimental . . . . .	55
4.1.1	Méthode de chauffage . . . . .	55
4.1.2	Caractéristiques de la cuve . . . . .	56
4.1.3	Méthodes de mesure . . . . .	58
4.2	Paramètres de contrôle et nombres sans dimension . . . . .	65
4.2.1	Données brutes. Séries temporelles . . . . .	67
4.3	Précautions à prendre et déroulé d'une expérience . . . . .	67
4.4	Résultats . . . . .	72
4.4.1	Nusselt versus Rayleigh . . . . .	72
4.4.2	Dépendance en longueur d'absorption . . . . .	72
4.4.3	Profils de température . . . . .	73
4.5	Modèle de rouleau de convection chauffé radiativement . . . . .	76
4.6	Discussion : dépendance en nombre de Prandtl . . . . .	80
4.7	Conclusion . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Épilogue : quelle est l'efficacité maximale d'une convection engendrée par des sources et puits de chaleur?</b>	<b>83</b>
5.1	Retour à un chauffage sinusoïdal en $z$ . . . . .	84
5.2	Solution exacte à grand nombre de Rayleigh . . . . .	85
5.3	Validation numérique . . . . .	86
5.4	Discussion . . . . .	90
	<b>Conclusion</b>	<b>92</b>

# Chapter 1

## Introduction

La convection thermique désigne le transfert de chaleur par un fluide en mouvement. Elle constitue avec la conduction et le rayonnement l'une des trois manières d'échanger de la chaleur. Plus particulièrement, la convection est dite "naturelle" lorsque le mouvement du fluide est induit par un gradient de température. En effet, la masse volumique d'un fluide dépend de sa température, si bien que des gradients de température impliquent des différences de masse volumique au sein du fluide. Par des forces de flottaison (poids et poussé d'Archimède) le fluide peut alors se mettre en mouvement. Ces mouvements s'appellent des mouvements de convection. Ils sont omniprésents dans notre environnement, comme en témoignent ces quelques exemples :

- Dans la vie courante : les mouvements à l'intérieur d'une casserole qui chauffe, d'une habitation chauffée (l'efficacité du chauffage par le sol), la montée de la fumée...
- Dans nos technologies : la portance d'une montgolfière, l'électricité générée par des centrales à tours solaires...
- Partout dans l'atmosphère : vent, grands courants d'altitude élevée, formation des nuages (cumulus)...
- Dans l'océan : sous forme de convection horizontale, l'eau étant chauffée à l'équateur et refroidie aux pôles, la convection est (avec le vent) un des facteurs responsable des grands courants marins comme le Gulfstream (de concert avec les différences de densité dues à la salinité, d'où le nom de circulation thermohaline).
- En géologie, la convection est omniprésente : la tectonique des plaques résulte des mouvements convectifs du manteau terrestre. Le champ magnétique de la terre est créé par des mouvements de métal liquide dans le noyau externe de la terre, qui sont (au moins en partie) des mouvements convectifs.

- En astrophysique : les étoiles comportent une zone de convection stellaire qui transfère la chaleur produite au coeur de l'étoile vers la périphérie.

Les mouvements de convection thermique sont donc l'objet d'études détaillées depuis le début du 20e siècle. Dans ce manuscrit, on s'intéressera particulièrement à une forme de convection qui sera appelée parfois "convection radiative". La source de chaleur est partiellement volumique et la chaleur est injectée dans le fluide et non par un contact fluide / paroi. Les motivations et grandes lignes de cette étude seront amenées dans une première partie introductive. Puis on étudiera la stabilité linéaire de tels systèmes, lorsque le système est proche de son état d'équilibre diffusif. Ensuite on s'intéressera à la question centrale de ce manuscrit : l'efficacité de cette forme de convection en terme de transfert de chaleur, question déjà intensivement étudiée dans la littérature pour des cas de convections plus "classiques". On présentera d'abord une étude numérique, puis expérimentale de ce type de convection, avec la réalisation en laboratoire d'une expérience de convection radiative. On conclura avec une curiosité théorique sur le plan de l'efficacité du transfert de chaleur, avec une géométrie de chauffage (quelque peu artificielle) qui conduit à une extrêmement grande efficacité du transfert thermique, au-delà de ce qu'autorisent les bornes théoriques rigoureuses dans le cas classique d'un chauffage en paroi.

## 1.1 Convection en laboratoire.

### 1.1.1 Convection de Rayleigh-Bénard

La convection de Rayleigh-Bénard est le système convectif le plus étudié dans la littérature. Ce problème a été introduit par Rayleigh en 1916 (Rayleigh, 1916), à la suite d'observations dans une géométrie similaire par Bénard en 1900 (Benard, 1900). On s'intéresse à un fluide contenu dans une boîte de hauteur  $H$ . Le fluide est refroidi par le haut par une plaque au contact du fluide maintenue à une température donnée froide et chauffé par le bas par une plaque maintenue à une température donnée chaude comme présenté dans le schéma de principe (Figure 1.1).

### 1.1.2 Mise en équation et approximation de Boussinesq.

On utilise l'approximation de Boussinesq, où toutes les propriétés du fluide, dont la viscosité  $\nu$ , la diffusivité thermique  $\kappa$ , et la densité  $\rho$  sont constantes et uniformes, sauf dans le terme de poussée d'Archimède où la densité varie linéairement avec la température :

$$\rho(T) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (1.1)$$

On écrit alors les équations de Navier-Stokes et de la chaleur :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{u} + \frac{\rho(T)}{\rho_0} \vec{g} \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T \quad (1.2b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.2c)$$

avec  $\vec{u} = (u, v, w)$  le champ de vitesse dans le fluide,  $P$  le champ de pression et  $g$  la gravité. La troisième équation traduit l'incompressibilité (dans le cadre des approximations de Boussinesq). La température des plaques étant maintenue fixe, on a les conditions aux limites thermiques suivantes :

$$T = T_c \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (1.3)$$

$$T = T_f \quad \text{en} \quad z = H \quad (1.4)$$

avec  $T_c$  la température de la plaque chaude,  $T_f$  la température de la plaque froide. On définit  $\Delta T = T_c - T_f$  la différence de température imposée entre les plaques. La notation n'est pas à confondre avec le Laplacien de la température, mais cette notation est couramment utilisée dans la littérature, si bien que nous ferons de même dans ce manuscrit.



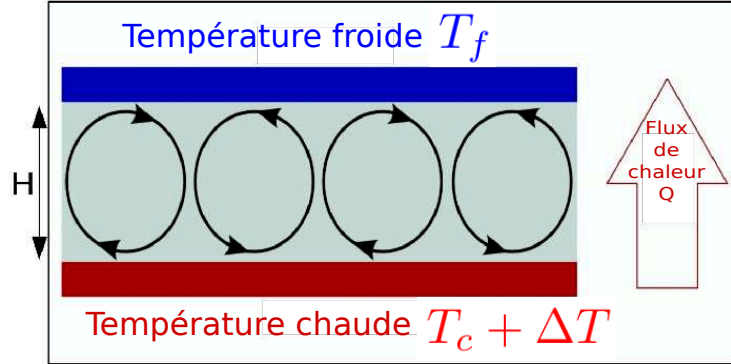


Figure 1.1: Schéma de principe présentant la convection de Rayleigh-Bénard.

### 1.1.3 Calcul et soustraction de la solution statique

On cherche une solution diffusive stationnaire du système d'équations 1.2 :

$$\vec{u}_s = \vec{0}, \quad \text{solution statique} \quad (1.5a)$$

$$0 = \kappa \Delta T_s \quad (1.5b)$$

$$T_s(z) = T_c + (T_f - T_c) \frac{z}{H} \quad (1.5c)$$

Le champ de pression hydrostatique  $P_s$  compense la poussée d'Archimède.

On introduit alors de nouvelles variables représentant les écarts à la solution statique :

$$T = T_s + \theta \quad P = P_s + p \quad (1.6)$$

En utilisant ces variables dans le système 1.2, on obtient un nouveau système d'équations pour la déviation par rapport à la solution statique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} - \alpha \theta \vec{g} \quad (1.7b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = \kappa \Delta \theta - w \frac{dT_s}{dz} \quad (1.7c)$$

### 1.1.4 Adimensionnement

On choisit les grandeurs adimensionnées suivantes, représentées avec un  $\tilde{\cdot}$  :

$$z = L\tilde{z}, \quad t = \frac{H^2}{\kappa}\tilde{t}, \quad \theta = \Delta T\tilde{\theta}, \quad \vec{u} = \frac{\kappa}{H}\vec{\tilde{u}} \quad (1.8)$$

et on les introduit dans les équations 1.7. On obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \quad (1.9a)$$

$$\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\tilde{u}} = Pr [-\vec{\nabla} \tilde{p} + \Delta \vec{\tilde{u}} + Ra \tilde{\theta} \vec{e}_z] \quad (1.9b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} + \vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\theta} = \Delta \tilde{\theta} + w \quad (1.9c)$$

avec les conditions aux limites :

$$\tilde{\theta} = \theta = 0 \quad \text{en } z = 0; 1 \quad (1.10)$$

Il apparaît dans ces équations deux nombres sans dimension :

$$\text{le nombre de Prandtl :} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (1.11a)$$

$$\text{le nombre de Rayleigh :} \quad Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa} \quad (1.11b)$$

On s'intéressera dans ce qui suit à la capacité de l'écoulement convectif à transporter la chaleur depuis la plaque chaude jusqu'à la plaque froide. En effet, la convection augmente le flux vertical de chaleur par rapport à une situation purement diffusive. On définit donc le flux vertical de chaleur :

$$Q = \overline{\lambda \partial_z T}|_{z=0}, \quad (1.12)$$

où la barre représente une moyenne temporelle et sur les directions horizontales. On divise  $Q$  par le flux transféré par la solution purement diffusive,  $\lambda \Delta T / H$ , pour former le nombre de Nusselt:

$$Nu = \frac{QH}{\lambda \Delta T}. \quad (1.13)$$

L'objectif est alors de déterminer le comportement du flux de chaleur adimensionné  $Nu$  en fonction des paramètres de contrôle du système,  $Ra$  et  $Pr$ .

## 1.2 Lois d'échelle

On s'intéresse au comportement du nombre de Nusselt dans le régime asymptotique de très haut nombre de Rayleigh. On cherche alors une loi d'échelle, c'est-à-dire que l'on suppose une loi du type  $Nu \sim Ra^\gamma Pr^\zeta$ , et l'on recherche alors les exposants  $\gamma$  et  $\zeta$ . On va ici présenter les différentes valeurs de  $\gamma$  et  $\zeta$  envisageables théoriquement, à l'aide d'arguments principalement dimensionnels.

### 1.2.1 $\gamma = 1/2$

La loi d'échelle la plus simple que l'on puisse imaginer correspond à considérer l'écoulement pleinement turbulent. On lui applique alors les lois régissant la turbulence développée, et en particulier la loi zéro de la turbulence. Cette dernière dicte que la relation entre les grandeurs macroscopiques doit être indépendante des diffusivités du fluide (diffusivité thermique et viscosité). Les seuls exposants permettant de rendre le flux de chaleur  $Q$  indépendant de  $\nu$  et  $\kappa$  sont  $\gamma = \zeta = 1/2$ . On obtient donc une première loi d'échelle :

$$Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2} \quad (1.14)$$

Cette loi d'échelle, initialement prédite par Spiegel et Kraichnan (Kraichnan, 1962), a un caractère particulier, car il est démontrable qu'elle est la loi possédant le plus grand exposant  $\gamma$  possible (Doering, 1996; Howard, 1963). En d'autres termes, elle correspond au transfert de chaleur le plus efficace possible. Pour cette raison, et parce que ce régime correspond à un écoulement pleinement turbulent, il est parfois appelé "régime ultime" dans la littérature de mécanique des fluides, tandis qu'il est plutôt appelé "régime de longueur de mélange" dans la littérature astrophysique (Spiegel, 1963).

### 1.2.2 $\gamma = 1/3$

Cependant, les expériences de convection de Rayleigh-Bénard conduisent à un exposant plus faible que  $\gamma = 1/2$ , car il existe un phénomène plus limitant pour le transfert de chaleur que la pleine turbulence : les couches limites.

Proche des parois, le fluide est quasi-immobile du fait des conditions de non glissement. Il va donc se former des couches limites, au niveau desquelles le fluide bouge peu: le transfert de chaleur est majoritairement diffusif, bien moins efficace que le transfert convectif. Une illustration du phénomène est présentée en figure 1.2. Dans le coeur du fluide, la chaleur est très bien mélangée par un écoulement pleinement turbulent. Il y a besoin de très faibles gradients de température pour transférer une quantité de chaleur donnée (on considèrera ce gradient nul pour nos arguments dimensionnels). Dans les couches limites à l'inverse, un fort gradient de température est nécessaire à transférer diffusivement ce même flux de chaleur.

Notre raisonnement dimensionnel consiste à dire que le flux de chaleur ne dépend pas de la taille  $H$  du système. En effet, nous supposons que le processus physique limitant se déroule dans les couches limites, et nous allons montrer que ces couches limites ont une épaisseur indépendante de  $H$ .

D'abord, la taille  $\delta$  des couches limites est donné par une condition de stabilité marginale. Le nombre de Rayleigh construit sur  $\delta$  est donc toujours de l'ordre du nombre de Rayleigh critique de la convection, ce qui donne :

$$\delta \sim \frac{H}{Ra^{1/3}} \quad (1.15)$$

Comme le nombre de Rayleigh est en  $H^3$ , on a bien des tailles de couches limites indépendantes de  $H$ . On peut ensuite dire que l'ensemble du flux de chaleur  $Q$  doit passer diffusivement à travers la couche limite, ce qui conduit à :

$$Q \sim \lambda \frac{\Delta T}{\delta} \quad (1.16)$$

ou encore

$$\frac{Q}{\lambda \Delta T} \sim \frac{1}{\delta}. \quad (1.17)$$

En remplaçant l'expression de  $\delta$ , il vient :

$$\frac{Q}{\lambda \Delta T} \sim \frac{Ra^{1/3}}{H} \quad (1.18)$$

Et donc finalement :

$$Nu \sim Ra^{1/3} \quad (1.19)$$

Ce scaling correspond bien à un flux de chaleur indépendant de la taille du système. On notera qu'il n'y a pas de dépendance en nombre de Prandtl. Dans la suite, on appellera ce régime le régime de Malkus (Malkus, 1954).

### 1.2.3 $\gamma = 2/7$

Si les valeurs de  $\gamma$  mesurées expérimentalement sont de l'ordre de  $1/3$ , elles sont souvent plus proches de  $2/7$ . Un raffinement du modèle de couches limites permet d'expliquer cette valeur (Shraiman & Siggia, 1990).

### Bilan d'énergie

On repart des équations dimensionnées du système :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} + \alpha g T \vec{z} \quad (1.20)$$

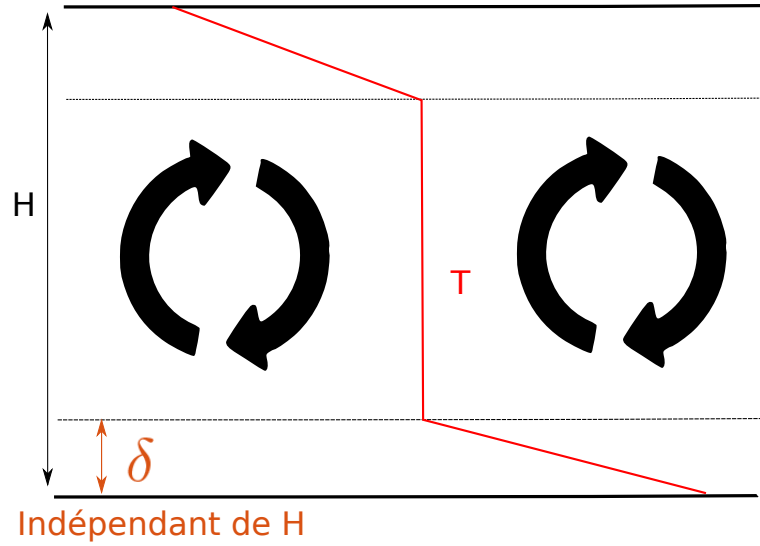


Figure 1.2: Dans le régime de Malkus, l'intérieur turbulent est bien mélangé, avec une température homogène. Les gradients de températures se concentrent alors au niveau de couches limites marginalement stables près des plaques chaude et froide.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T \quad (1.21)$$

On prend la moyenne volumique et temporelle  $\langle \cdot \rangle$  pour faire apparaître la dissipation visqueuse

$$0 = -\nu \langle |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \rangle + \alpha g \langle wT \rangle \quad (1.22)$$

pour obtenir  $\alpha g \langle wT \rangle$ , on calcule  $\int_0^z \overline{1 \cdot 2 \overline{1}} dz$  avec  $\overline{\cdot}$  la moyenne temporelle et horizontale :

$$w\overline{T} = \kappa(\partial_z \overline{T} - \partial_z \overline{T}|_0) \quad (1.23)$$

En intégrant sur toute la hauteur il vient :

$$\langle wT \rangle H = K(\Delta T - H\partial_z \overline{T}|_0) \quad (1.24)$$

or le nombre de Nusselt s'écrit en fonction du flux en 0  $Nu = \frac{H}{\Delta T} \partial_z \overline{T}|_0$ , donc on obtient :

$$\boxed{\nu \langle |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \rangle = \frac{\alpha g \kappa}{H} \Delta T (Nu - 1)} \quad (1.25)$$

Pour calculer la dissipation visqueuse, on doit estimer l'épaisseur des couches limites.

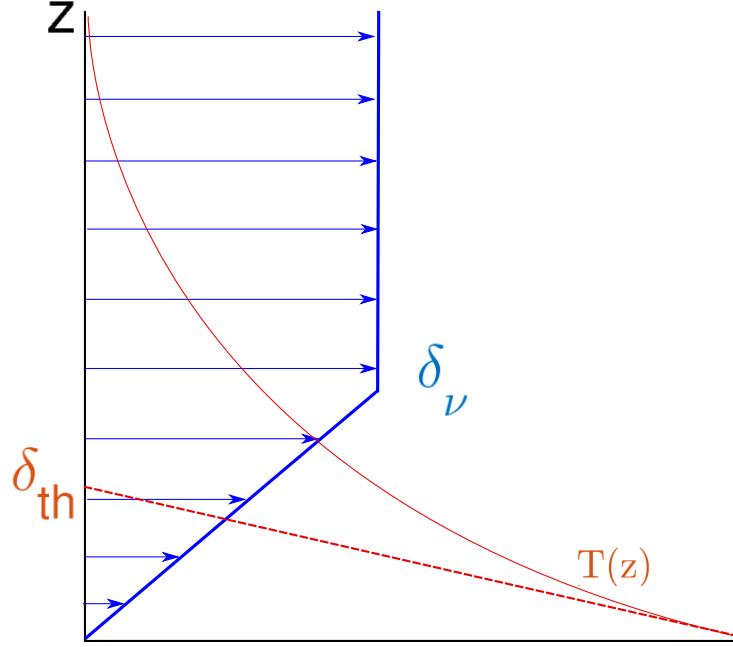


Figure 1.3: Vision schématique illustrant les couches limites thermique  $\delta_{th}$  et visqueuse  $\delta_\nu$ . Dans le cas étudié, on a  $\delta_\nu \gg \delta_{th}$ .

### Raisonnement dans les couches limites

On considère une couche limite visqueuse  $\delta_\nu$  plus grande que la couche limite thermique  $\delta_{th}$ , ce qui se justifie lorsque  $Pr > 1$ .

La vitesse a un profil approximativement linéaire dans la couche limite visqueuse :  $u \simeq \frac{z}{\tau} \gg w$  avec  $\tau$  l'inverse du taux de cisaillement. La taille de la sous-couche limite visqueuse dans un écoulement turbulent est donnée par :

$$\delta_\nu \sim \frac{\nu}{U} \quad (1.26)$$

avec  $U$  la vitesse caractéristique en haut de la couche limite visqueuse donnée par  $U = \frac{\delta_\nu}{\tau}$ . Ainsi,

$$\boxed{\delta_\nu \sim \sqrt{\nu\tau}} \quad (1.27)$$

Dans la couche limite thermique, on peut écrire

$$u\partial_x T \sim \kappa\partial_{zz} T \quad (1.28)$$

et, en supposant un domaine carré d'extension horizontale  $H$  :

$$\frac{\delta_{th}}{\tau} \frac{T}{H} \sim \kappa \frac{T}{\delta_{th}^2} \implies \boxed{\delta_{th} \sim (\kappa\tau L)^{\frac{1}{3}}} \quad (1.29)$$

De plus, comme tout le gradient de température est dans la couche limite thermique on peut écrire :

$$Nu = \frac{H}{\Delta T} \partial_z \bar{T}|_0 \sim \frac{H}{\delta_{th}}. \quad (1.30)$$

On calcule enfin la dissipation visqueuse. En supposant que toute la dissipation visqueuse a lieu dans la couche limite on obtient :

$$\nu \langle |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \rangle \sim \nu \frac{\delta_\nu}{\tau^2} \sim \left(\frac{\nu}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (1.31a)$$

$$\nu \langle |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \rangle \sim \left(\frac{\nu \kappa L}{\delta_{th}^3}\right)^{\frac{3}{2}} \sim \left(\frac{\nu \kappa L Nu^3}{H^3}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (1.31b)$$

En remplaçant dans 1.25, il vient :

$$Nu \sim Ra^{\frac{2}{7}} Pr^{\frac{-1}{7}} \quad (1.32)$$

L'exposant en nombre de Rayleigh étant très proche du scaling 1/3, on trouve cette fois-ci une dépendance en Prandtl, mais très faible.

### 1.3 Lois d'échelle mesurées dans les expériences.

Dans cette partie essentiellement bibliographique, on présente les principaux résultats trouvés expérimentalement dans une expérience de Rayleigh-Bénard. Les résultats pour cette expérience classique provenant de différents groupes sont présentés en figure 1.4, extraite de l'article de Funfschilling et al. Tous les résultats trouvés pour la loi Nusselt versus Rayleigh donne un exposant de l'ordre  $\gamma \approx 1/3$ . Le groupe de Grenoble présente dans l'article de Chavanne et al. des résultats légèrement différents des autres, cohérents entre eux. Grâce à des expériences effectuées dans l'hélium liquide à très faible viscosité, ils peuvent atteindre un très grand nombre de Rayleigh. Ils observent une transition aux alentours de  $Ra = 10^{12}$  vers un régime de convection qui a l'air plus efficace que le régime de  $\gamma \approx 1/3$ , se rapprochant de  $\gamma \simeq 0.38$  (Chavanne et al., 1997, 2001), sans toutefois atteindre la valeur  $\gamma = 0.5$  prédite pour un régime de convection gouverné par la turbulence. Ce régime se termine cependant environ une décade et demie plus loin, entre  $Ra = 10^{13}$  et  $Ra = 10^{14}$ , pour revenir à un régime similaire aux résultats des autres groupes. La cause de cette observation par le groupe de Grenoble n'a pas été déterminée précisément, cette observation n'ayant pu être reproduite par les autres groupes expérimentaux (Ahlers et al., 2009; Niemela et al., 2000).

On peut donc affirmer qu'une expérience de Rayleigh-Bénard classique donne un exposant de l'ordre de  $\gamma \simeq 1/3$ . Les expériences indiquent donc que ce sont les couches limites qui fixent le transfert de chaleur, comme expliqué dans le paragraphe sur les prédictions théoriques de ces exposants (section 1.2.2).

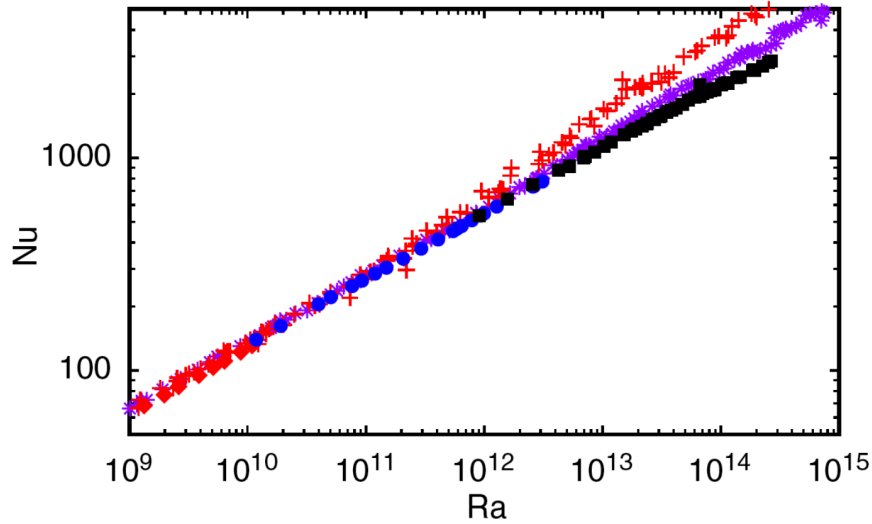


Figure 1.4: Le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes expériences de convection de Rayleigh-Bénard. Les croix en rouge viennent de Chavanne et al., les étoiles en violet de Niemela et al., les losanges en noir et les cercles en bleu de Funfschilling et al.

## 1.4 Lois d'échelle observées dans les simulations numériques.

Beaucoup de simulations numériques directes (ou DNS pour "direct numerical simulations") ont été effectuées dans la configuration de Rayleigh-Bénard. On en présente seulement quelques résultats en figure 1.5. Certaines études ont simulé cette convection jusqu'à  $Ra = 10^{14}$ : elles indiquent clairement un exposant  $\gamma = 1/3$ , mais la bonne convergence de ces résultats numériques a été remise en question. En effet, les simulations mieux résolues de Stevens et al. (Stevens et al., 2010) ont conduit à une valeur différente du préfacteur et à un excellent accord avec les données expérimentales. Ces simulations atteignent  $Ra$  de l'ordre de  $10^{11}$  et ne permettent donc pas de trancher le débat à plus haut nombre de Rayleigh, là où les expériences divergent.



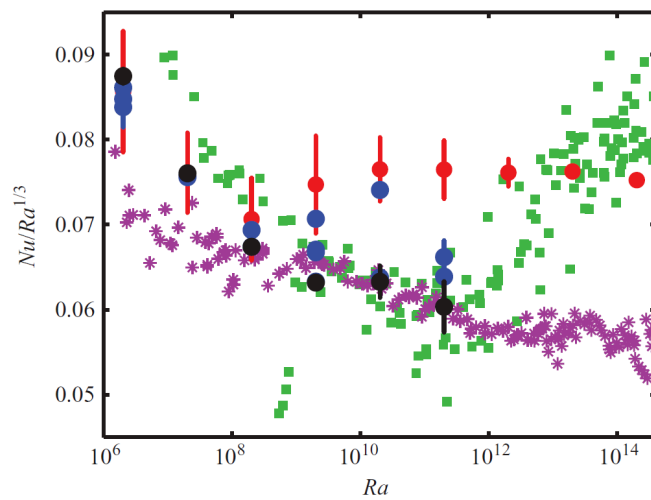


Figure 1.5: Le nombre de Nusselt compensé par le nombre de Rayleigh à la puissance  $1/3$  pour  $Pr = 0.7$ . La figure est extraite de C. R. Doering. Les croix violettes sont les données expérimentales de Niemela et al. (2000) et les carrés verts sont les données expérimentales de Chavanne et al. (2001). Les résultats de DNS de Verzicco et Camussi (2003) et Amati et al. (2005) sont indiqués en rouge. Les résultats de Stevens, Verzicco et Lohse, avec les plus grandes résolutions, sont représentés par les points noirs, les points bleus représentant des données à plus faible résolution.

## 1.5 S’affranchir des couches limites.

On a montré grâce aux modèles théoriques et aux résultats expérimentaux et numériques qu’il semble actuellement impossible d’atteindre un régime de convection ayant une efficacité de transfert de la chaleur supérieure à  $Nu \sim Ra^{1/3}$  dans une expérience de Rayleigh-Bénard classique. Ceci est dû aux couches limites thermiques et visqueuses qui se forment au contact des parois solides aux bords du fluide. La recherche d’un régime plus efficace de convection (qui est l’un des objectifs de cette thèse) a déjà été étudiée expérimentalement en essayant de s’affranchir de ces limitations de couches limites, principalement par le groupe de recherche de de F. Chilla et B. Castaing à l’Ecole Normale Supérieure de Lyon. Le premier dispositif expérimental qu’ils ont envisagé a été d’utiliser une cellule de convection de forme modifiée, n’ayant artificiellement pas de plaques au contact du fluide autour de la zone étudiée. Comme présenté dans le schéma en figure 1.6, extrait de leur article de 2006 (Gibert , 2006), la zone de convection est située à l’intérieur d’un canal vertical plus étroit, délimité par des zones extérieures plus larges où la convection est empêchée grâce à une structure en nid d’abeilles. La température est fixée en haut et le flux de chaleur imposé en bas. Les résultats obtenus sont intéressants: ils obsefvent un régime de convection plus efficace que le régime  $Nu \sim Ra^{1/3}$ , proche même du régime ultime de convection  $Nu \sim Ra^{1/2}$  pleinement gouverné par la turbulence, mais ceci uniquement si les nombres de Nusselt et de Rayleigh sont construits sur une longueur caractéristique interne à l’écoulement, et non sur la hauteur  $H$  de la cuve. Cette longueur caractéristique  $L$  est mesurée a posteriori sur l’expérience, à partir de corrélations temporelles entre deux capteurs de température, et semble dépend des “vrais” paramètres de contrôle du système. En construisant les nombres de Nusselt et de Rayleigh sur cette nouvelle longueur caractéristique, une loi d’échelle  $Nu \sim Ra^{1/2}$  est obtenue, aux incertitudes expérimentales près. La limite de cette approche est qu’elle manque un peu de pouvoir prédictif, puisque la longueur caractéristique doit être mesurée. Cependant, ces études mettent en evidence l’efficacité accrue de la convection lorsque l’on s’affranchit des couches limites aux bords du fluide.

L’autre dispositif intéressant consiste à modifier les parois hautes et basses du fluide pour réduire l’influence des couches limites en introduisant des rugosités de surface. Le première expérience est décrite dans l’article (Xie et al., 2017). On discutera ici les résultats du groupe de Lyon, qui ont étudié en détail les dispositifs de convection avec plaques rugueuses. Le schéma de la figure 1.7 est extrait de (Roche et al., 2001). Il a été constaté que l’ajout des rugosités de paroi permet en effet d’améliorer le transfert de chaleur en enlevant la limitation des couches limites au contact paroi / fluide (Shen et al., 1996; Toppaladoddi & Wettlaufer, 2018; Tisserand et al., 2011; Ulloa et al., 2018; Wei et al., 2014). Le système se comporte comme si les conditions aux limites étaient des conditions de contact fluide / fluide d’une certaine manière. Il a alors été observé que l’écoulement atteignait une forme de régime ultime, où la loi  $Nu \sim Ra^{1/2}$  a été observée (Rusaouen et al., 2018). Dans l’article (Du et al., 1998), les auteurs décrivent

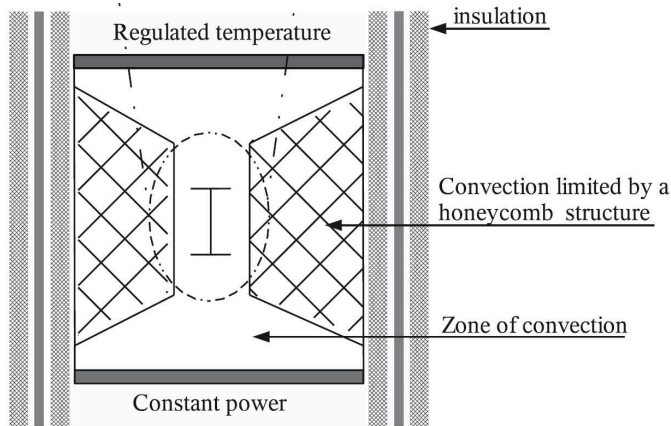


Figure 1.6: Schéma de l'expérience de convection dans un canal vertical effectuée au laboratoire de l'ENS Lyon. L'efficacité du transfert dans la zone de convection étudiée entre les structures en nid d'abeille est bien améliorée par rapport au setup de Rayleigh-Benard.

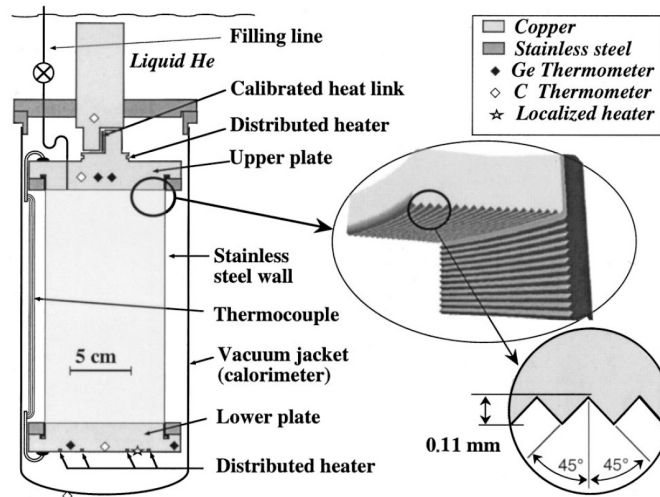


Figure 1.7: Schéma de l'expérience de convection avec des parois haute et basse rugueuses effectuée au laboratoire de l'ENS Lyon.

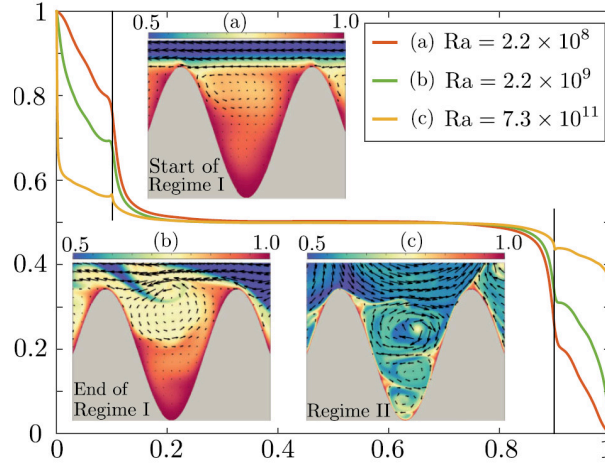


Figure 1.8: Simulations numériques d'écoulements de convection avec des parois rugueuses. Zoom sur les rugosités, la couleur représente la température adimensionnée. Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, on voit l'apparition de zones de convection à l'intérieur des rugosités.

qualitativement l'écoulement. Ils montrent que l'efficacité améliorée du transport de chaleur est due à une augmentation du nombre de panaches de chaleur qui se décolent plus facilement de la couche limite du bas, grâce à des écoulements tourbillonnaires engendrés à l'intérieur des zones de rugosité mêmes.

Mais il semble faire consensus que ce régime "ultime" de convection observé n'est que local en nombre de Rayleigh. A partir d'un certain nombre de Rayleigh, les écoulements convectifs tourbillonnaires à l'intérieur des rugosités eux-mêmes deviennent limitant au transfert de chaleur, comme illustré en figure 1.8. Cela a été observé numériquement dans l'article (Zhu et al., 2017) (d'où est extraite la figure précédente) et expérimentalement dans l'article (Rusaouen et al., 2018). On a alors retour à un régime de convection similaire à celui observé avec des plaques lisses avec un préfacteur corrigé. On obtient la courbe Nusselt versus Rayleigh présentée en figure 1.9.

Il n'existe donc pas de montage expérimental améliorant l'efficacité du transfert de chaleur jusqu'à obtenir une observation claire d'un régime ultime de convection asymptotiquement en nombre de Rayleigh.

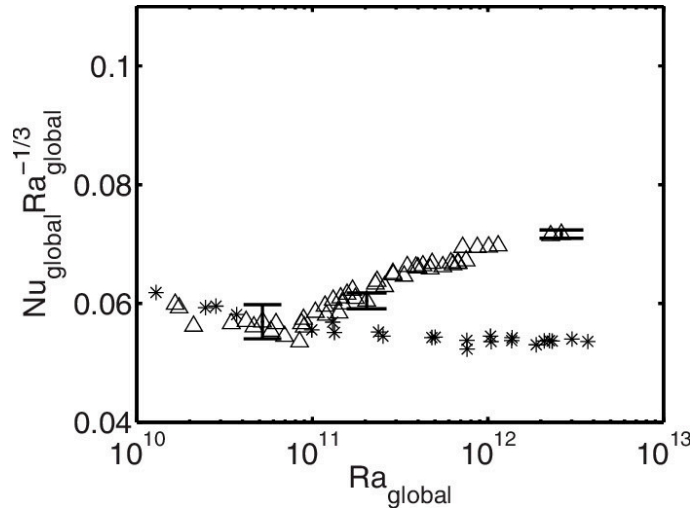


Figure 1.9: Loi Nusselt versus Rayleigh pour le cas d'écoulements de convection avec des parois rugueuses. Le nombre de Nusselt est compensé par le nombre de Rayleigh à la puissance 1/3, pour comparer avec le régime de convection de Rayleigh-Bénard, dans le cas de parois lisses. La figure et les résultats viennent de (Rusaouen et al., 2018).

## 1.6 Convection radiative.

Dans cette partie, on présente l'idée générale derrière ce travail de thèse autour de la convection radiative. On expliquera d'abord le principe de fonctionnement, avant de présenter les motivations et les écoulements naturels engendrés par ce type de convection.

Nous présentons en figure 1.10 un schéma de principe de la convection forcée radiativement: un fluide est éclairé par un flux lumineux dirigé (ici) de bas en haut. Le fluide absorbe la lumière et la convertit en chaleur. Le flux de lumière, et donc la source de chaleur, décroissent ainsi avec la hauteur dans la cuve: on chauffe le fluide préférentiellement dans la partie basse de la cuve, ce qui conduit à une stratification en densité instable. Lorsque le flux lumineux est suffisamment intense, on s'attend ainsi à engendrer un écoulement convectif. La différence principale entre ce dispositif et une expérience de Rayleigh-Bénard est donc cette injection de fluide partiellement en volume: la chaleur ne doit pas nécessairement traverser une couche limite diffusive avant d'atteindre le coeur de l'écoulement, pleinement turbulent. On s'intéresse dans ce qui suit à une telle convection forcée radiativement, mais aussi – par extension – à tout écoulement convectif pour lequel les sources de chaleur sont partiellement volumiques. On détaille dans ce qui suit nos motivations pour étudier cette convection, tant sur le plan fondamental que sur le plan des applications aux écoulements naturels.

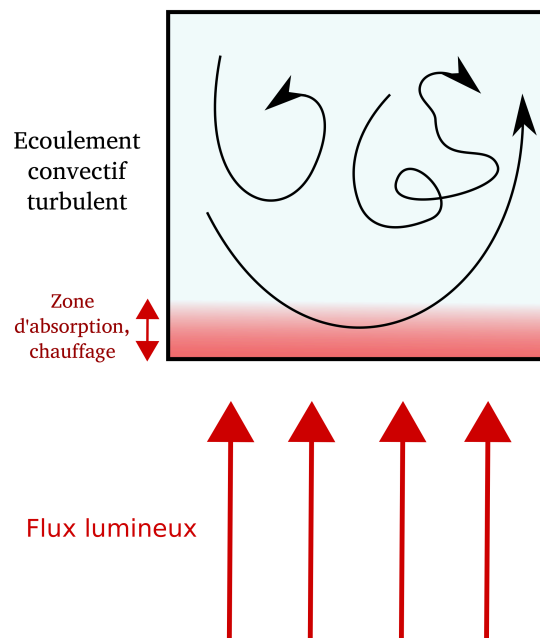


Figure 1.10: Schéma de principe de la convection forcée radiativement.

### 1.6.1 Motivations.

L'étude de systèmes de convection forcée radiativement a deux motivations principales :

- La première motivation est fondamentale. Comme présenté dans les parties précédentes de cette introduction, l'efficacité du transfert de chaleur dans les expériences de convection est limitée par les couches limites aux interfaces fluides / parois. Il s'y forme de très forts gradients de température, alors que le cœur du fluide, où la turbulence est très efficace à mélanger le fluide, est à température quasiment uniforme. En injectant la chaleur à l'intérieur du fluide directement, l'idée est qu'elle n'aura pas à diffuser à travers ces couches limites. Le transfert de chaleur sera alors amélioré. Cette géométrie de convection à forçage radiatif constitue donc une tentative d'obtenir clairement un régime ultime de convection. On va donc particulièrement étudier la loi du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour une source de chaleur partiellement volumique. Mais on pense également pouvoir retrouver une configuration similaire à celle de Rayleigh-Bénard, lorsque la source de chaleur chauffe le bas du fluide sur une taille typique très petite devant la taille du système. En modifiant l'extension spatiale du chauffage, on espère ainsi passer d'une situation de type Rayleigh-Bénard à une situation de chauffage partiellement volumique.
- La deuxième motivation est celle d'étudier les écoulements naturels. De très nombreux écoulements naturels sont en effet dus à un forçage convectif. Parmi ceux-ci un nombre non négligeable a une source de chaleur qui est partiellement volumique, ou tout du moins qui n'est pas due à un transfert de chaleur entre un solide (paroi) et le fluide lui-même. On va en présenter quelques exemples :
  - Dans les étoiles, et le soleil particulièrement, la chaleur est engendrée au voisinage du cœur. Suivant la masse de l'étoile, il existe une structure composée de zones où la chaleur est transférée par des radiations, et de zones où elle est transférée par convection. En effet, les réactions nucléaires au centre de l'étoile sont plus ou moins énergétiques, et les couches externes plus ou moins opaques au rayonnement en fonction de la masse d'étoile. Pour les étoiles très peu massives et très massives, le cœur se trouve dans la zone où le transfert de chaleur se fait de manière convective (Christensen-Dalsgaard et al., 1996; Featherstone & Hindman, 2016; Garaud, 2002; Shaviv & Salpeter, 1973; Spiegel, 1971; Spiegel et al., 1992). On a alors une source de chaleur intense directement au cœur d'une zone convective, c'est une situation "proche" de la convection à forçage radiatif que nous allons étudier. Pour les étoiles de masse intermédiaire, la zone centrale de l'étoile autour du noyau est une zone de transfert de chaleur radiatif, qui transmet la chaleur à la zone convective, qui constitue la région périphérique de l'étoile. C'est

## Heat Transfer of Stars

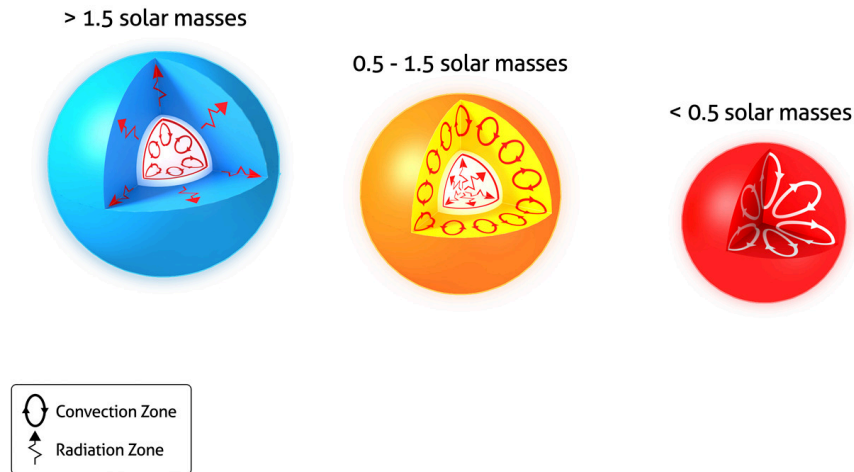


Figure 1.11: Schéma structurel des zones radiative et convective à l'intérieur d'une étoile, en fonction de la masse de celle-ci.

illustré schématiquement en figure 1.11. Le modèle de convection utilisé pour le comportement de ces objets célestes radiatifs est appelé la "mixing length theory" et est très similaire au régime "ultime" de convection. Ce type de modèles peut être intégré sur des temps très longs, de l'ordre de la durée de vie d'une étoile. Une expérience de laboratoire permettrait de paramétrer ces modèles sans avoir recours uniquement à des données d'observations, plus rares, et d'améliorer le pouvoir prédictif de ceux-ci.

- Dans les grands lacs gelés, il existe une situation similaire. Un écoulement de convection est forcé par le soleil. La lumière du soleil pénètre sur une distance donnée dans l'eau, qui absorbe les radiations, et chauffe de manière partiellement volumique sur une couche au voisinage de la surface, dont la taille typique dépend de la longueur d'onde. On a bien un système de convection même si le chauffage se fait par le haut, car à des températures comprises entre 0 et 4 degrés Celsius, la courbe d'expansion thermique de l'eau est inversée et l'eau plus chaude au voisinage de la surface est plus lourde, donc elle tombe et convecte. On a une situation quelque peu équivalente à un chauffage par le bas pour des températures de l'eau plus élevées. Dans ces lacs, on cherche à quantifier les phénomènes de mélange. La prise en compte de l'étendue spatiale de la source de chaleur influe sur le taux de mélange à l'intérieur du lac (Bengtsson, 1996; Farmer, 1975; Jonas et al.,



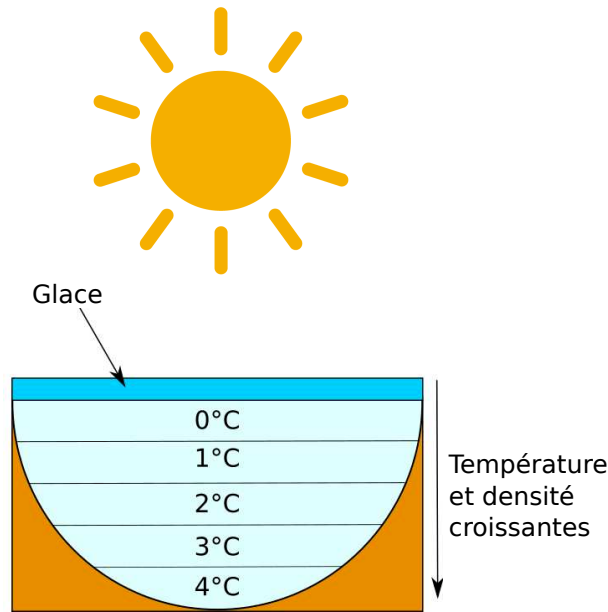


Figure 1.12: Schéma de la convection au sein d'un lac gelé. Comme les températures sont inférieures à 4 degrés Celsius, la courbe d'expansion thermique de l'eau est inversée, et la convection a lieu malgré le chauffage par le haut.

2003; Mironov et al., 2002).

- Dans l'atmosphère, le chauffage par rayonnement joue aussi un rôle important. Les rayons du Soleil chauffent le sol, qui émet du rayonnement de type corps-noir dans l'infrarouge pour évacuer la chaleur. Ce rayonnement est absorbé par l'atmosphère ( $CO_2$ , vapeur d'eau). Chaque couche d'atmosphère absorbe une partie de ces infrarouges, et émet à son tour du rayonnement de type corps-noir (Garratt, 1994). Cela amène à un équilibre radiatif qui détermine le profil de température dans l'atmosphère (Tomkins et al., 1998). Cependant, ce profil de température est instable pour la partie basse de l'atmosphère et entraîne un écoulement de convection. Cet écoulement de convection permet de rétablir le gradient adiabatique moyen dans la partie basse de l'atmosphère, la troposphère. Ceci est équivalent au cœur d'un écoulement de Rayleigh-Bénard, bien mélangé par la turbulence, au champ de température quasiment uniforme (Deardoff, 1974; Kondratyev, 1972). Cette modélisation est bien cohérente avec les données dans le cœur de la troposphère, mais décrit mal les couches limites atmosphériques. En effet, les modèles de couches limites atmosphériques ont besoin de paramétrisation pour les flux convectifs pour décrire correctement les profils de température observés. La configuration la plus simple pour étudier ce problème est un

système de convection à température fixée à la surface sous l'atmosphère et un refroidissement radiatif (dans l'infrarouge) volumique. Dans certains cas, il faut ajouter à ce modèle un chauffage radiatif infrarouge au voisinage du sol: la partie basse de l'atmosphère est donc soumise en même temps à un chauffage et un refroidissement volumiques. Les expériences décrites dans ce manuscrit pourraient constituer un modèle de laboratoire simple pour comprendre ces deux phénomènes.

On a donc deux motivations importantes pour étudier les phénomènes de convection où les sources de chaleur sont partiellement volumiques. En premier lieu on s'intéressera à l'étude de stabilité linéaire du système chauffé partiellement en volume. Ensuite on présentera des résultats provenant de simulations numériques. On considèrera un système très similaire au cas de la figure 1.10 : un fluide contenu dans une boîte isolée thermiquement, chauffé exponentiellement avec la hauteur en volume, et refroidi de manière homogène en volume (on démontrera l'équivalence avec le cas non refroidi). On s'intéressera d'abord aux deux cas extrêmes : très faible longueur d'absorption et très grande longueur d'absorption, comparée aux tailles de couches limites du système. Pour chaque cas, on étudiera la relation Nusselt en fonction de Rayleigh, caractérisant l'efficacité du transfert de chaleur. On montrera que dans le cas à très faible longueur d'absorption, le système est équivalent à un système de Rayleigh-Bénard, en effet toute la chaleur est injectée dans les couches limites, à travers lesquelles elle doit diffuser. Pour le cas à grande longueur d'absorption, on montrera que l'on atteint une efficacité du transfert de chaleur caractéristique du régime ultime. On s'intéressera donc ensuite à la transition entre ces deux régimes extrêmes, en étudiant la dépendance en longueur d'absorption dans la relation constitutive Nusselt en fonction de Rayleigh. Cette dépendance sera illustrée par un modèle simple, qui sera vérifié en faisant un rescaling de toutes les courbes Nusselt - Rayleigh pour chaque valeur de longueur d'absorption. Puis on présentera ce qui a représenté le plus gros de ce travail de thèse, les résultats expérimentaux correspondants. On présentera d'abord le dispositif expérimental que l'on a utilisé permettant de réaliser une expérience de convection à chauffage radiatif. Pour cela, on chauffe un liquide coloré avec une lampe à forte puissance. On présentera les méthodes de mesure utilisées pour accéder aux grandeurs permettant d'extraire les nombres adimensionnés de Nusselt et Rayleigh (la différence de température typique dans le fluide et le flux imposé au système) et les méthodes expérimentales permettant de s'affranchir des couches limites en haut et en bas du fluide. La présentation des résultats expérimentaux suivra le même plan que celle des résultats numériques : d'abord les cas extrêmes de valeurs de longueur d'absorption seront décrits, puis on étudiera les cas de longueurs d'absorption intermédiaires, en validant la dépendance prévue par des modèles simples. Un point fort de ce travail de thèse est la cohérence entre les résultats numériques et expérimentaux.

# Chapter 2

## Convection engendrée par des sources et puits volumiques de chaleur : stabilité linéaire.

Historiquement, Lord Rayleigh a introduit le système dit de Rayleigh-Bénard dans le but d'étudier sa stabilité linéaire. Pour les nouvelles géométries de chauffage considérées dans cette thèse, il semble donc naturel de commencer par déterminer les critères pour lesquels la couche de fluide se déstabilise. De plus, et paradoxalement, l'analyse de stabilité linéaire joue également un rôle déterminant dans le comportement à très haut nombre de Rayleigh du dispositif de Rayleigh-Bénard. En effet, les couches limites sont marginalement stables, avec un nombre de Rayleigh construit sur l'épaisseur de couche limite de l'ordre du nombre de Rayleigh critique. C'est parce que ce nombre de Rayleigh critique est indépendant du nombre de Prandtl que la loi d'échelle du régime de Malkus,  $Nu \sim Ra^{1/3}$ , ne fait pas intervenir le nombre de Prandtl. On calculera donc ici le seuil de stabilité linéaire dans deux configurations principales : une configuration où le terme de chauffage/refroidissement est sinusoidal dans la direction verticale, en une configuration où le chauffage décroît exponentiellement avec la hauteur dans la cuve.

### 2.1 Étude analytique

On s'intéresse à un fluide contenu dans une boîte bi-dimensionnelle de hauteur  $H$ . Une source fournit au fluide une quantité de chaleur par unité de temps et de volume constante et inhomogène  $Q(z) = Q_0 \sin(2\pi \frac{z}{H})$ , avec  $z \in [0, H]$  (Figure 2.1). Le fluide est donc chauffé dans la moitié basse de la boîte et refroidi dans la moitié haute.

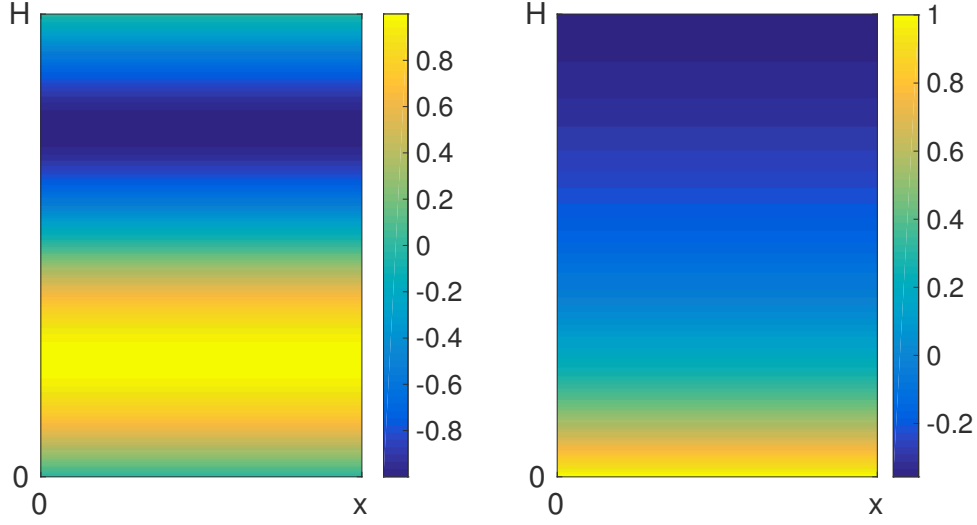


Figure 2.1: Distribution volumique de chauffage et refroidissement normalisé dans les cas sinusoïdal et exponentiel.

### 2.1.1 Approximation de Boussinesq

On utilise l'approximation de Boussinesq, où toutes les propriétés du fluide, dont la viscosité  $\nu$ , la diffusivité thermique  $\kappa$ , et la densité  $\rho$  sont constantes et uniformes, sauf dans le terme de poussée d'Archimède où la densité varie linéairement avec la température :

$$\rho(T) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (2.1)$$

On écrit alors les équations de Navier-Stokes et de la chaleur :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{u} + \frac{\rho(T)}{\rho_0} \vec{g} \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T + \frac{Q_0}{\rho_0 c_p} \sin(2\pi \frac{z}{H}) \quad (2.2b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2c)$$

avec  $\vec{u} = (u, w)$  le champ de vitesse dans le fluide,  $P$  le champ de pression,  $c_p$  la capacité calorifique à pression constante et  $g$  la gravité. La troisième équation traduit l'incompressibilité (dans le cadre des approximations de Boussinesq).

## 2.1.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur la vitesse étudiées sont :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, L \quad (2.3a)$$

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{à} \quad z = 0, H \quad (2.3b)$$

Les conditions aux limites free-slip permettent (le plus probablement) de s'affranchir de l'influence des couches limites visqueuses. Les conditions aux limites sur la température sont :

$$T = 0 \quad \text{à} \quad z = 0, H \quad \text{Parois parfaitement conductrices} \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, L \quad \text{Parois parfaitement isolantes} \quad (2.3d)$$

## 2.1.3 Calcul et soustraction de la solution statique

On cherche une solution diffusive stationnaire du système d'équations 2.2 :

$$\vec{u}_s = \vec{0} \quad \text{solution statique} \quad (2.4a)$$

$$0 = \kappa \Delta T_s + \frac{Q_0}{\rho_0 c_p} \sin(2\pi \frac{z}{H}) \quad (2.4b)$$

$$T_s(z) = T_s^0 \sin(2\pi \frac{z}{H}) \quad \text{avec} \quad T_s^0 = \frac{Q_0 H^2}{4\pi^2 \kappa \rho_0 c_p} \quad (2.4c)$$

$$P_s(z) = P_0 - \rho_0 g z (1 + \alpha T_0) - \frac{H}{2\pi} \rho_0 \alpha g T_s^0 \cos(2\pi \frac{z}{H}) \quad (2.4d)$$

Le champ de pression statique compense la poussée d'Archimède.

On introduit alors les variables perturbatives :

$$T = T_s + \theta \quad P = P_s + p \quad (2.5)$$

En utilisant ces variables dans le système 2.2, on obtient un nouveau système d'équations pour la perturbation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} + \alpha \theta \vec{g} \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = \kappa \Delta \theta - w \frac{dT_s}{dz} \quad (2.6c)$$

Le terme de source de chaleur explicite est remplacé par le terme d'advection de la température de l'état diffusif.

Avec les conditions aux limites :

$$\theta = 0 \quad \text{à} \quad z = 0, H \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, L \quad (2.7)$$

### 2.1.4 Adimensionnement

On prend  $L = H$  et on choisit les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$z = H\tilde{z}, \quad t = \frac{H^2}{\kappa}\tilde{t}, \quad \theta = \frac{\nu\kappa}{\alpha g H^3}\tilde{\theta}, \quad p = \frac{\nu\rho_0\kappa}{H^2}\tilde{p}, \quad \vec{u} = \frac{\kappa}{H}\vec{\tilde{u}} \quad (2.8)$$

que l'on introduit dans les équations 2.6, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial \tilde{t}} + \vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\nabla} \vec{\tilde{u}} = Pr [-\vec{\nabla} \tilde{p} + \Delta \vec{\tilde{u}} + \tilde{\theta} \vec{e}_z] \quad (2.9b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} + \vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\theta} = \Delta \tilde{\theta} - Ra_Q \tilde{w} \cos(2\pi \tilde{z}) \quad (2.9c)$$

Il apparaît deux nombres sans dimension :

$$\text{le nombre de Prandtl :} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.10a)$$

$$\text{le nombre de Rayleigh construit sur le flux :} \quad Ra_Q = \frac{Q_0 \alpha g H^5}{2\pi \nu \kappa^2 \rho_0 c_p} \quad (2.10b)$$

On construit le nombre de Rayleigh sur le flux dans cette configuration parce que les conditions aux limites forcent  $\Delta T = 0$ .

On oubliera dorénavant les tilde sur les grandeurs adimensionnées pour simplifier les notations.

### 2.1.5 Analyse de la stabilité linéaire - faibles perturbations

On cherche à étudier le seuil de stabilité du système. On se place donc dans un état de faibles perturbations. On néglige alors dans le système d'équations 2.9 les termes d'advection non linéaires  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$  et  $\vec{u} \cdot \nabla \theta$ .

Étudier la stabilité d'une perturbation consiste à trouver la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle cette perturbation commencera à croître exponentiellement, c'est à dire le seuil pour lequel le taux de croissance change de signe, ou encore par continuité le seuil pour lequel le taux de croissance est nul. Ceci est équivalent à étudier la

stabilité de l'état stationnaire. Par simplicité de la démarche, en supposant que l'on est confronté à une bifurcation stationnaire, on annule donc aussi les dérivées temporelles dans 2.9.

On a alors le système d'équations linéarisées :

$$0 = -\vec{\nabla}p + \Delta\vec{u} + \theta\vec{e}_z \quad (2.11a)$$

$$0 = \Delta\theta - Ra_Q w \cos(2\pi z) \quad (2.11b)$$

On constate comme souvent en convection que la valeur de Rayleigh critique est indépendante du nombre de Prandtl.

Au prix de dérivées d'ordres supérieurs, on prend le rotationnel de l'équation 2.11a pour éliminer la pression et se ramener à un système de deux équations pour deux champs inconnus. En projetant sur l'axe  $\vec{e}_y$ , on obtient :

$$\partial_x\theta = -\partial_x\Delta w + \partial_z\Delta u \quad (2.12a)$$

$$0 = \Delta\theta - Ra_Q w \cos(2\pi z) \quad (2.12b)$$

Le problème étant invariant par translation dans la direction selon  $x$  les différents modes de Fourier selon  $x$  sont découplés dans les équations linéaires. On considère alors un mode :

$$\theta(x, z) = \underline{\theta}(z) \exp(ikx) \quad \text{et} \quad \vec{u}(x, z) = \underline{\vec{u}}(z) \exp(ikx) \quad (2.13)$$

L'incompressibilité nous permet d'écrire :

$$\partial_x u = -d_z w \implies \underline{u} = \frac{i}{k} \partial_z \underline{w} \quad (2.14)$$

En remplaçant dans les équations et en oubliant les underline, il vient

$$ik\theta = -ik(d_{zz} - k^2)w + (d_{zz} - k^2)d_{zz}w \quad (2.15a)$$

$$Ra_Q \cos(2\pi z)w = (d_{zz} - k^2)\theta \quad (2.15b)$$

On a donc un problème aux valeurs propres généralisées que l'on peut réécrire en une équation :

$$(d_z^{(6)} - 3k^2 d_z^{(4)} + 3k^4 d_z^{(2)} - k^6)w = Ra_Q k^2 \cos(2\pi z)w \quad (2.16)$$

Cette équation de dérivées d'ordre six demande six conditions au limites. Les deux premières sont les conditions de non-pénétration,  $w = 0$ , en  $z = 0, 1$ . Les troisième et quatrième sont les conditions sur la température en  $z = 0, 1$ : perturbation de flux nulle, ou perturbation de température nulle. Les cinquième et sixième sont définies

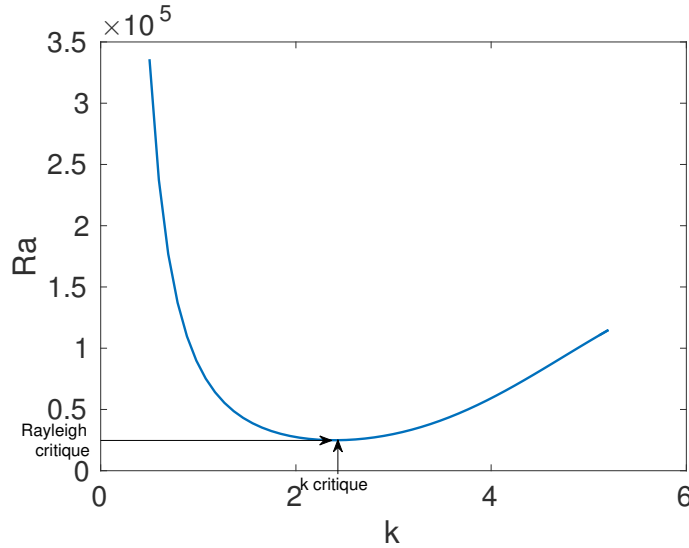


Figure 2.2: Nombre de Rayleigh critique  $Ra_Q$  du premier mode instable en fonction du nombre du d'onde horizontal pour des parois haute et basse free-slip et parfaitement conductrices, et un chauffage volumique sinusoïdal en  $z$ .

par le choix de parois parfaitement glissantes (free-slip) ou non-glissantes (no-slip). On a donc assez de conditions aux limites et, pour chaque valeur de  $k$ , on utilise une décomposition en différences finies pour résoudre l'équation aux valeurs propres en  $Ra_Q$ .

Pour chaque vecteur d'onde  $k$ , il existe un spectre discret de nombres de Rayleigh solutions du problème aux valeurs propres généralisées, qui diffèrent par leurs structures verticales. On cherche le premier mode instable. La valeur de nombre de Rayleigh critique correspond alors à :

$$Ra_{Q,c} = \inf_{k>0} Ra_{Q,c(k)} = \inf_{k>0} \min(Ra_Q \mid (2.16) \text{ a une solution non triviale}) \quad (2.17)$$

Le nombre de Rayleigh critique pour cette configuration est de 1303, correspondant à un vecteur d'onde  $k = 2.22$ .

## 2.2 Cas de la source de chaleur exponentielle

Pour faire l'analyse de stabilité linéaire dans un cas beaucoup plus proche de l'expérience à venir, on va adopter une démarche identique en choisissant une source de chaleur  $Q(z)$  et des conditions aux limites différentes. On choisit la source suivante :

$$Q(z) = Q_0 \left[ \frac{H}{l} \exp(-z/l) + \exp(-H/l) - 1 \right] \quad (2.18)$$



Cette source de chaleur correspond physiquement à une source de chaleur exponentielle avec la hauteur dans le système, plus un terme de refroidissement homogène, pour donner une source de moyenne volumique nulle. Ce choix de  $Q$  sera expliqué avec détails plus tard dans ce manuscrit lors de la description de l'expérience, nous l'admettrons choisie ainsi arbitrairement pour le moment.

Les conditions aux limites étudiées seront :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, H \quad (2.19a)$$

$$w = 0 \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{à} \quad z = 0, H \quad (2.19b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{à} \quad z = 0, H \quad \text{Parois parfaitement isolantes} \quad (2.19c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, H \quad \text{Parois parfaitement isolantes} \quad (2.19d)$$

On a simplement changé les parois haute et basse pour des parois parfaitement isolantes (flux de chaleur sortant ou entrant nuls). Les équations (2.4) permettant de trouver la solution purement diffusive restent inchangées, on peut les résoudre de nouveau avec le nouveau  $Q(z)$ , et les nouvelles conditions aux limites.

On trouve donc un nouveau profil de température statique  $T_s(z)$  :

$$T_s(z) = -\frac{Q_0}{\rho_0 c_p} \left( Hl \exp(-z/l) + \frac{(\exp(-H/l) - 1)z^2}{2} + Hz \right) \quad (2.20)$$

On représente en figure 2.3 les deux profils  $Q(z)$  et  $T_s(z)$  normalisés.

## 2.2.1 Adimensionnement

Toujours par analogie avec l'étude du cas à chauffage sinusoïdal, on adimensionne les équations du système. On choisit les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$\vec{x} = H\tilde{x}, \quad t = \frac{H^2}{\kappa}\tilde{t}, \quad T = \frac{\nu\kappa}{\alpha g H^3}\tilde{T}, \quad p = \frac{\nu\rho_0\kappa}{H^2}\tilde{p}, \quad \vec{u} = \frac{\kappa}{H}\vec{\tilde{u}}, \quad l = H\tilde{l}. \quad (2.21)$$

Et, en oubliant les  $\tilde{\cdot}$ , on obtient les équations suivantes pour les grandeurs adimensionnées :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = Pr \left( -\vec{\nabla}p + \Delta\vec{u} + T\vec{e}_z \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}T = \Delta T + Ra_Q \left( \frac{1}{l} \exp\left(-\frac{z}{l}\right) + \exp(-1/l) - 1 \right). \quad (2.23)$$

Il apparaît deux nombres sans dimension :

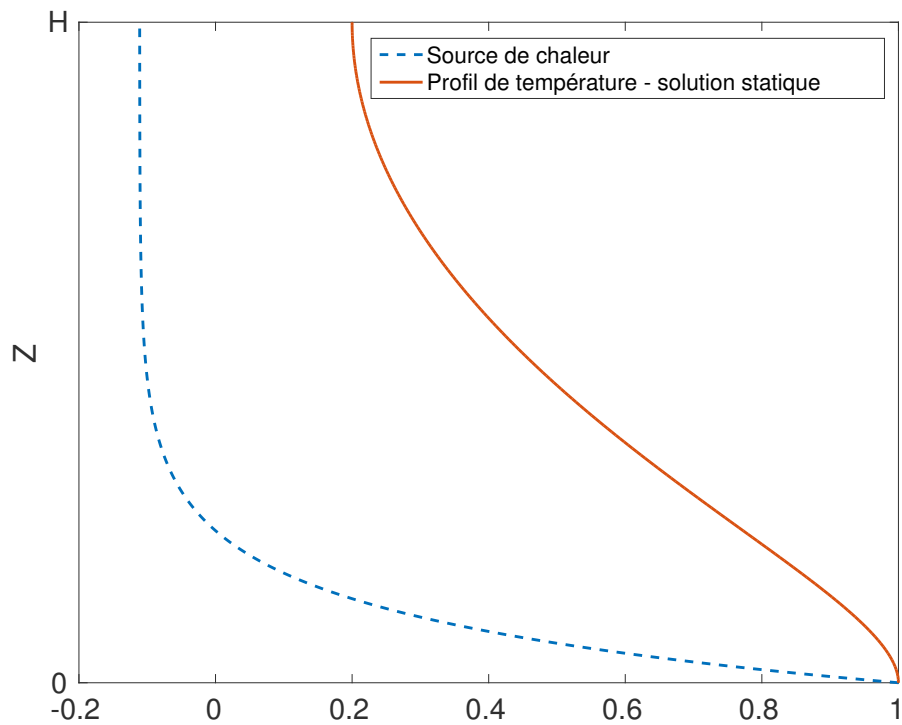


Figure 2.3: Profil de la source de chaleur  $Q(z)$  imposée au système et profil de température de la solution statique purement diffusive  $T_s(z)$  correspondante pour  $l = 0.1$ . Les deux profils sont adimensionnés par leur maximum et l'origine des températures est choisi arbitrairement, l'ensemble des conditions aux limites étant sur la dérivée de celle-ci.

$$\text{le nombre de Prandtl : } Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.24)$$

$$\text{le nombre de Rayleigh construit sur le flux : } Ra_Q = \frac{Q_0 \alpha g H^5}{\nu \kappa^2 \rho_0 c_p} \quad (2.25)$$

L'équation (2.16) a alors aussi son analogue en développant le calcul exactement de la même manière que pour le cas sinusoïdal

$$(d_z^{(6)} - 3k^2 d_z^{(4)} + 3k^4 d_z^{(2)} - k^6)w = Ra_Q k^2 w \left[ -\exp\left(-\frac{z}{l}\right) + (\exp(-1/l) - 1)z + 1 \right] \quad (2.26)$$

On résout alors ce problème aux valeurs propres. Pour une valeur de  $l$  donnée, on cherche le nombre de Rayleigh critique minimal en  $k$ . Un résultat typique est présenté en figure 2.4. On voit apparaître un phénomène bien connu dans la littérature: lorsque les parois sont isolantes, le nombre d'onde le plus instable (celui correspondant au plus petit nombre de Rayleigh critique) est la limite  $k \rightarrow 0$ . En effet, le système tend à créer un écoulement constitué d'un seul rouleau, sur l'ensemble de la boîte, aussi large soit-elle. On définit pour chaque  $l$  la limite  $Ra_c(l) = Ra_c(k \rightarrow 0)|_l$  et on peut donc extraire une courbe de stabilité en fonction de la longueur d'absorption typique. Les résultats sont présentés en figure 2.5.

## 2.2.2 Interprétation

On constate que pour des longueurs d'absorption petites devant la taille du système, le nombre de Rayleigh critique dépend faiblement de  $l$ . En effet, dans cette limite on retrouve le cas d'un chauffage dû à un flux fixé au niveau de la paroi inférieure, combiné à un refroidissement interne homogène dans le domaine. A une symétrie de Boussinesq près ( $z \rightarrow -z$ ,  $T \rightarrow -T$ ), on retrouve le cas d'un chauffage interne uniforme en volume, avec un flux de refroidissement imposé à la paroi supérieure. Ce cas est décrit par Goluskin (Goluskin, 2016), qui trouve un seuil  $Ra_Q = 1440$ . Cette valeur est tracée sur la figure 2.5 et correspond bien au seuil que nous obtenons dans la limite  $l/H \rightarrow 0$ . Dans la limite opposée de  $l/H$  grand, le chauffage devient quasiment homogène dans le domaine. Comme le refroidissement est également homogène, chauffage et refroidissement internes se compensent presque dans la cuve et ne créent donc que des gradients de température faibles. Il faut donc imposer un flux plus fort pour franchir le seuil de la convection. Si du point de vue de la stabilité linéaire la limite  $l/H \rightarrow 0$  est donc la configuration qui engendre le plus facilement un écoulement convectif, nous verrons dans la suite que ce n'est pas celui qui conduit au transport de chaleur le plus efficace. En effet, pour ce qui est des hauts nombres de Rayleigh, nous montrerons qu'une valeur de  $l$  finie permet de court-circuiter les couches limites du système en injectant la chaleur directement dans l'écoulement turbulent.

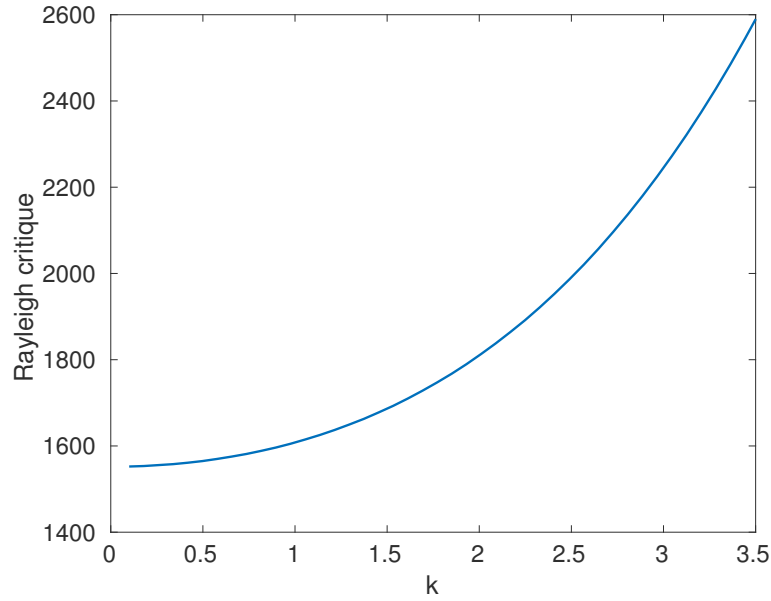


Figure 2.4: Nombre de Rayleigh critique  $Ra_Q$  du premier mode instable en fonction du nombre d'onde horizontal pour des parois haute et basse free-slip et parfaitement isolantes.  $l = 0.1$

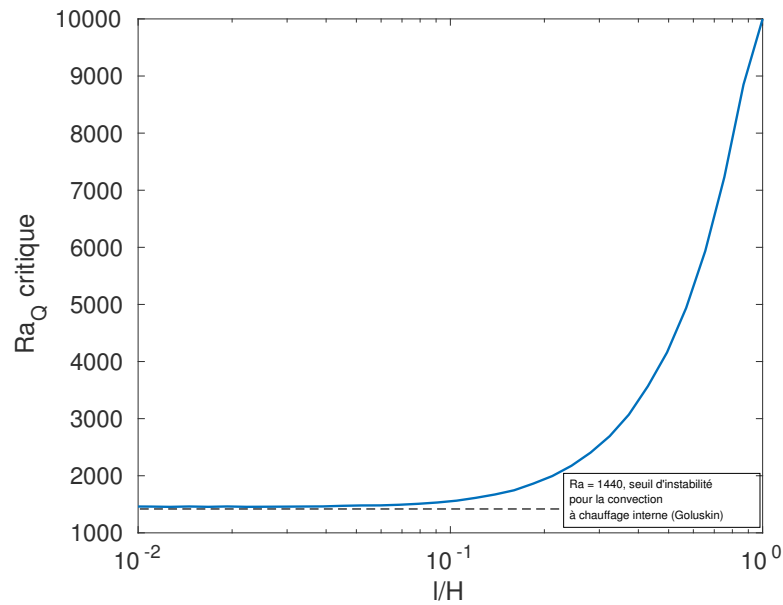


Figure 2.5: Nombre de Rayleigh critique  $Ra_Q$  du premier mode instable avec  $k \rightarrow 0$  en fonction de la longueur d'absorption adimensionnée.

## Chapter 3

# Étude numérique de la convection forcée radiativement

Après avoir étudié le système de convection forcée avec une source partiellement volumique dans son approximation linéaire, on consacrera le reste de ce manuscrit à l'étude de ce système dans le cas non-linéaire. Pour les écoulements naturels que nous cherchons à étudier, il est assez rare que le système évolue dans un régime de paramètres proches du seuil de stabilité. Les grandeurs perturbatives ne sont pas infiniment petites. Il n'est alors pas pertinent de faire une linéarisation des équations du système. On va d'abord étudier la convection forcée radiativement d'un point de vue numérique. Cela nous permettra de faire des diagnostics. Au cours de la thèse, hormis leur intérêt propre, ces simulations ont été extrêmement utiles dans l'élaboration du dispositif expérimental, fournissant des ordres de grandeur prédictifs des mesures à venir, et une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu.

On commencera par présenter des simulations numériques directes à deux dimensions. Celles-ci sont peu coûteuses en temps de calcul. Il est donc facile de parcourir l'espace de paramètres. On étudiera la relation constitutive nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, caractéristique de l'efficacité de transfert de chaleur par convection, dans deux cas extrêmes : lorsque la source de chaleur est localisée très proche de la paroi basse du fluide, et lorsque celle-ci est bien plus étendue à l'intérieur du fluide. On fera ensuite le lien entre ces deux cas extrêmes en étudiant les cas intermédiaires d'extension spatiale de la source de chaleur.

Il existe cependant nécessairement des différences entre le système à deux dimensions et le système réel. La cascade d'énergie dans l'espace spectrale est inversée à 2D, les grandes échelles sont donc sur-représentées. Les lois de dissipation d'énergie sont aussi notablement différentes à deux dimensions. On présentera donc des résultats plus partiels pour des simulations numériques directes effectuées à trois dimensions.

### 3.1 Equations du problème

On considère l'évolution d'un fluide dans un domaine cubique d'arête  $H$ , avec des parois isolantes à la chaleur, dans l'approximation de Boussinesq.

La situation étudiée est celle d'un chauffage exponentiel en hauteur dans la cuve. Les équations dimensionnées du problème sont :

- L'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} + \alpha g T \vec{e}_z \quad (3.1)$$

- L'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T + \frac{Q(z)}{\rho_0 C} \quad (3.2)$$

où  $Q(z) = \frac{P}{l} \exp\left(-\frac{z}{l}\right)$  la source de chaleur volumique inhomogène, avec  $z \in [0, H]$ .  $P$  est le flux de chaleur injecté dans le système,  $\nu$  la viscosité du fluide,  $\alpha$  le coefficient d'expansion thermique,  $H$  la hauteur du domaine,  $\kappa$  la diffusivité thermique,  $\rho_0$  la masse volumique,  $\lambda$  la conductivité thermique,  $C$  la capacité calorifique du fluide, et  $l$  la longueur typique sur laquelle la source chauffe le fluide.

On choisit les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$\vec{x} = H \tilde{x}, \quad t = \frac{H^2}{\kappa} \tilde{t}, \quad T = \frac{\nu \kappa}{\alpha g H^3} \tilde{T}, \quad p = \frac{\nu \rho_0 \kappa}{H^2} \tilde{p}, \quad \vec{u} = \frac{\kappa}{H} \tilde{u}, \quad l = H \tilde{l}, \quad P = \tilde{P} \frac{\nu \kappa \lambda}{\alpha g H^4}. \quad (3.3)$$

Les nombres adimensionnés de Nusselt et Rayleigh servant à caractériser le système sont définis en terme des grandeurs dimensionnées par :

$$Nu = \frac{PH}{\lambda \Delta T} \quad \text{et} \quad Ra = \frac{\alpha g H^3 \Delta T}{\nu \kappa}, \quad (3.4)$$

où  $\Delta T = \bar{T}(z=0) - \bar{T}(z=H)$ , avec  $\bar{\cdot}$  la moyenne temporelle et horizontale. Ces nombres ont des expressions très simples en termes de nos grandeurs adimensionnées :

$$Nu = \frac{\tilde{P}}{\Delta \tilde{T}}, \quad \text{et} \quad Ra = \Delta \tilde{T}. \quad (3.5)$$

En substituant et en retirant les  $\tilde{\cdot}$ , on obtient le système d'équations adimensionnées :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = Pr \left( -\vec{\nabla} p + \Delta \vec{u} + T \vec{e}_z \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \Delta T + \frac{P}{l} \exp\left(-\frac{z}{l}\right). \quad (3.7)$$

Les conditions aux limites sont :

- Parois isolantes à la chaleur partout.
- Parois no-slip en haut et en bas pour reproduire une situation d'existence de couches limites visqueuses.
- Parois latérales free-slip pour faciliter la simulation numérique (décomposition en base de Fourier).

Ces équations ne comportent pas de terme de refroidissement. L'ensemble de la température à l'intérieur du fluide va dériver de manière homogène linéairement en temps, c'est une situation exactement identique à l'expérience que nous décrirons dans le prochain chapitre.

Mais pour les simulations, on cherche à avoir une équation pour un champ statistiquement stationnaire. On va donc définir un nouveau champ de température, dont les statistiques seront stationnaires. On calcule la moyenne volumique de l'équation de la chaleur. En notant  $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{x,y,z} = \int_x \int_y \int_z \cdot dx dy dz$  on a :

$$\frac{d\langle T \rangle}{dt} = -\langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \rangle + \langle \Delta T \rangle + P \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{l}\right) \right). \quad (3.8)$$

Dans l'approximation où  $l \ll 1$ , on peut simplifier l'expression :

$$\frac{d\langle T \rangle}{dt} = -\langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \rangle + \langle \Delta T \rangle + P. \quad (3.9)$$

Les termes d'advection et de diffusion vont avoir une contribution nulle à la température moyenne :

$$\langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \rangle = \int \vec{\nabla} \cdot (T \vec{u}) d\vec{x} = [T \vec{u} \cdot \vec{n}]_{\text{bords}} = 0 \quad (3.10)$$

avec  $\vec{n}$  le vecteur normal à la paroi dirigé vers l'extérieur. Nous avons utilisé ici la condition d'imperméabilité des parois, ainsi que le fait que l'écoulement est incompressible. On obtient de plus:

$$\langle \Delta T \rangle = [\vec{\nabla} T \cdot \vec{n}]_{\text{bords}} = 0, \quad (3.11)$$

car les parois sont isolantes. Il reste donc:

$$\frac{d\langle T \rangle}{dt} = P. \quad (3.12)$$

Cela correspond à une dérive temporelle linéaire de la température moyenne dans le système. On construit alors un nouveau champ  $\theta$  de moyenne spatiale indépendante du temps en retirant au champ de température  $T$  la dérive temporelle de sa moyenne spatiale :

$$\theta = T - \langle T \rangle = T - Pt. \quad (3.13)$$

On a alors bien un champ de moyenne volumique stationnaire  $\frac{d\langle\theta\rangle}{dt} = 0$  et tel que  $\overline{\theta_{bas}} - \overline{\theta_{haut}} = \overline{T_{bas}} - \overline{T_{haut}} = \Delta T$  avec  $\overline{\cdot}$  la moyenne horizontale et temporelle. Les nombres de Nusselt et de Rayleigh seront donc les mêmes s'ils sont construits avec le champ  $T$  ou le champ  $\theta$ .

Lorsque l'on substitue le champ  $T$  par le champ  $\theta$  dans l'équation (3.7), on obtient la nouvelle équation de la chaleur que l'on utilisera dans les simulations numériques :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\theta = \Delta\theta + \frac{1}{l} P \exp\left(-\frac{z}{l}\right) - P. \quad (3.14)$$

Il y a un terme constant et négatif de plus dans le membre de droite de l'équation. Physiquement, cela est équivalent à l'ajout d'un refroidissement volumique homogène compensant exactement la dérive temporelle due à l'injection de chaleur par la source exponentielle.

L'équation (3.6) pour la vitesse devient :

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = Pr \left( -\vec{\nabla}p + \Delta\vec{u} + \theta\vec{z} + Pt\vec{z} \right). \quad (3.15)$$

Le terme  $Pt\vec{e}_z$  n'étant pas dépendant de l'espace, on peut l'intégrer dans un gradient de pression hydrostatique. On a donc finalement le système d'équations utilisé pour ces simulations :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\theta = \Delta\theta + \frac{1}{l} P \exp\left(-\frac{z}{l}\right) - P \quad (3.16)$$

et

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = Pr \left( -\vec{\nabla}p' + \Delta\vec{u} + \theta\vec{e}_z \right). \quad (3.17)$$

avec  $p' = p - Ptz$  le nouveau champ de pression. L'objectif des simulations est de déterminer  $\Delta T$  en régime stationnaire pour en déduire les nombres de Nusselt et Rayleigh.

## 3.2 Description du code utilisé

On a besoin de bien décrire les conditions aux limites en haut et en bas du système. On utilise un code pseudo-spectral basé sur une décomposition sur la base de Chebyshev selon l'axe  $z$  pour pouvoir bien décrire des conditions aux limites no-slip. Au niveau des bords verticaux, on estime que la condition aux limites de vitesse a un rôle négligeable sur la relation Nusselt versus Rayleigh. On considère donc des conditions aux limites free-slip pour ces parois et on utilise une décomposition sur la base de Fourier pour avoir des transformations spectrales plus rapides. Le code utilisé est "Dedalus". C'est un code en Python développé par K.J. Burns et al pour résoudre différentes équations différentielles aux dérivées partielles, plus particulièrement pour la mécanique des fluides. On utilise un time-stepper implicite/explicite d'ordre 2, en 2 étapes, avec



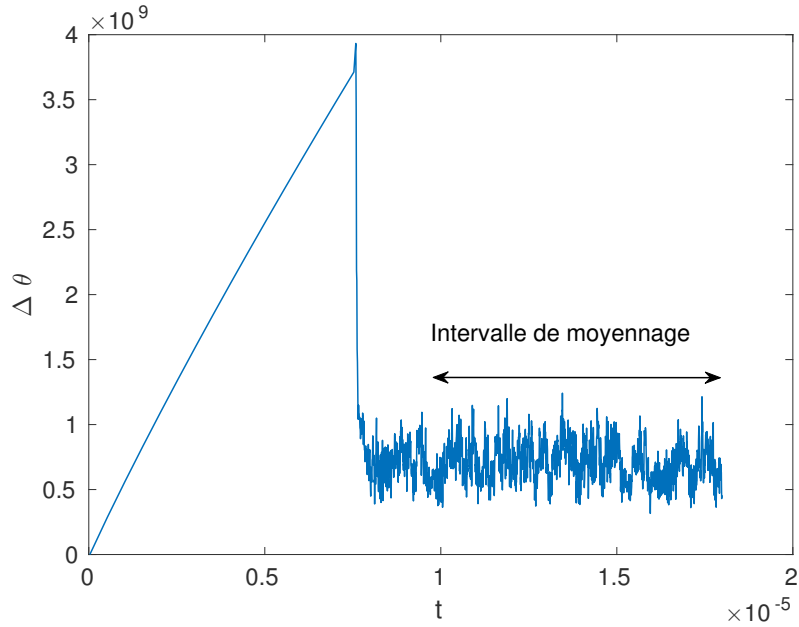


Figure 3.1: Evolution temporelle typique d'une simulation numérique. En ordonnée la différence de température entre le haut et le bas du fluide adimensionnée et en abscisse le temps adimensionné.

un schéma DIRK+ERK (diagonally implicit + explicit Runge-Kutta) (Ascher et al., 1995). Nous présenterons des simulations 2D et 3D. Dans le premier cas, les résolutions utilisées sont typiquement de  $512^3$ , tandis qu'à trois dimensions on se limite à  $256^3$  au maximum.

La figure (3.1) présente une série temporelle typique pour la différence de température  $\Delta T$ . On attend la stationnarité statistique, puis on moyenne temporellement sur cet intervalle pour extraire la différence de température  $\Delta T = \Delta\theta = \bar{\theta}|_{z=0} - \bar{\theta}|_{z=H}$  et donc les nombres de Rayleigh et de Nusselt du système.

### 3.3 Configurations étudiées

On va d'abord s'intéresser à deux cas extrêmes :

- Cas numéro 1 :  $l \ll \delta$ . C'est le cas où la longueur d'absorption de la chaleur est très petite devant les tailles de couches limites du système. L'ensemble de la chaleur est injectée dans les couches limites en bas du fluide et doit être transférée à l'intérieur du fluide par diffusion. On s'attend alors à trouver un régime de transfert de chaleur limité par la diffusion dans les couches limites (et donc un exposant  $\frac{1}{3}$  dans la loi d'échelle Nusselt vs Rayleigh).

Lorsque  $\frac{l}{H} \rightarrow 0$ , la fonction de chauffage exponentielle en hauteur tend vers un Dirac en  $z = 0$  :

$$Q(z) = Q_0 \frac{H}{l} \exp\left(-\frac{z}{l}\right) \sim Q_0 H \delta(z) \text{ quand } l \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

Lorsque que l'on substitue cette source de chaleur dans l'équation (3.14), on obtient:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = \Delta \theta + P \delta(z) - P \quad (3.19)$$

Le terme de source de chaleur ne joue un rôle que proche de  $z = 0$  où on trouve en intégrant selon  $z$  sur une hauteur infiniment faible :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_0 = -P \quad (3.20)$$

Cette source de chaleur est donc équivalente à un flux de chaleur vertical vers le haut imposé à travers le fond du domaine.

On comparera donc les résultats  $l \ll \delta$  à ceux de la configuration dite "de Rayleigh Bénard" dans la suite : un flux de chaleur imposé en  $z = 0$  et un refroidissement uniforme en volume

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = \Delta \theta - P \quad (3.21)$$

avec comme conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_0 = -P \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_1 = 0 \quad (3.22)$$

- Cas numéro 2 :  $l \gg \delta$ . C'est le cas où la longueur d'absorption de la chaleur est très grande devant les tailles de couches limites du système. La chaleur est majoritairement injectée dans l'écoulement turbulent à l'intérieur du fluide. On s'attend à un régime décrit par la turbulence à l'intérieur du fluide, comme l'est le "régime ultime" de la convection. On obtiendrait alors un exposant  $\frac{1}{2}$  pour la loi d'échelle Nusselt versus Rayleigh.

On s'intéressera ensuite à des valeurs intermédiaires de  $l$ . Que se passe-t-il lorsque  $l$  varie d'un cas à l'autre ? Comment se passe la transition entre les deux cas extrêmes précédents ?

### 3.4 Efficacité du transfert thermique

On présente ici les résultats en terme de lois d'échelle  $Nu \sim Ra^\gamma$ , caractérisant l'efficacité du transfert thermique à travers le fluide. Dans les figures qui suivront les symboles représentent les points extraits des simulations, les lignes sont les fits correspondant, et les exposants  $\gamma$  de la loi d'échelle sont marqués à côté du fit.

### 3.4.1 Cas numéro 1 : $l \ll \delta$ et configuration de Rayleigh Bénard.

Sur la figure (3.2), on peut voir les points correspondant au cas numéro 1, lorsque la chaleur est injectée dans les couches limites. Trois cas décrits dans la légende y sont représentés : configuration de Rayleigh-Bénard à 2D et 3D, et cas d'une très petite longueur d'absorption à 2D. L'accord entre les trois cas est bon pour l'exposant de la loi d'échelle. On peut donc confirmer l'équivalence entre le cas de flux fixé en bas et le cas de faible longueur d'absorption.

L'exposant trouvé dans chacun des cas est entre 0.28 et 0.29. C'est un exposant caractéristique d'un régime de convection limité par les couches limites (Castaing et al., 2006; Johnston & Doering, 2009). On s'attendait à cet exposant sachant que dans tous ces cas la chaleur est injectée dans les couches limites et doit diffuser à travers ces dernières pour atteindre l'intérieur du fluide.

### 3.4.2 Cas numéro 2 : $l \gg \delta$ , chauffage volumique de l'écoulement turbulent.

Dans la figure (3.3), on peut voir les points correspondants au cas numéro 2, lorsque la chaleur est injectée majoritairement au cœur du fluide, et non dans les couches limites. Ces dernières ne limitent plus le transfert de chaleur.

On observe alors, dans les cas 2D et 3D, un exposant de l'ordre de 0.5, caractéristique du régime de convection pleinement turbulente, appelé "régime ultime" dans la littérature.

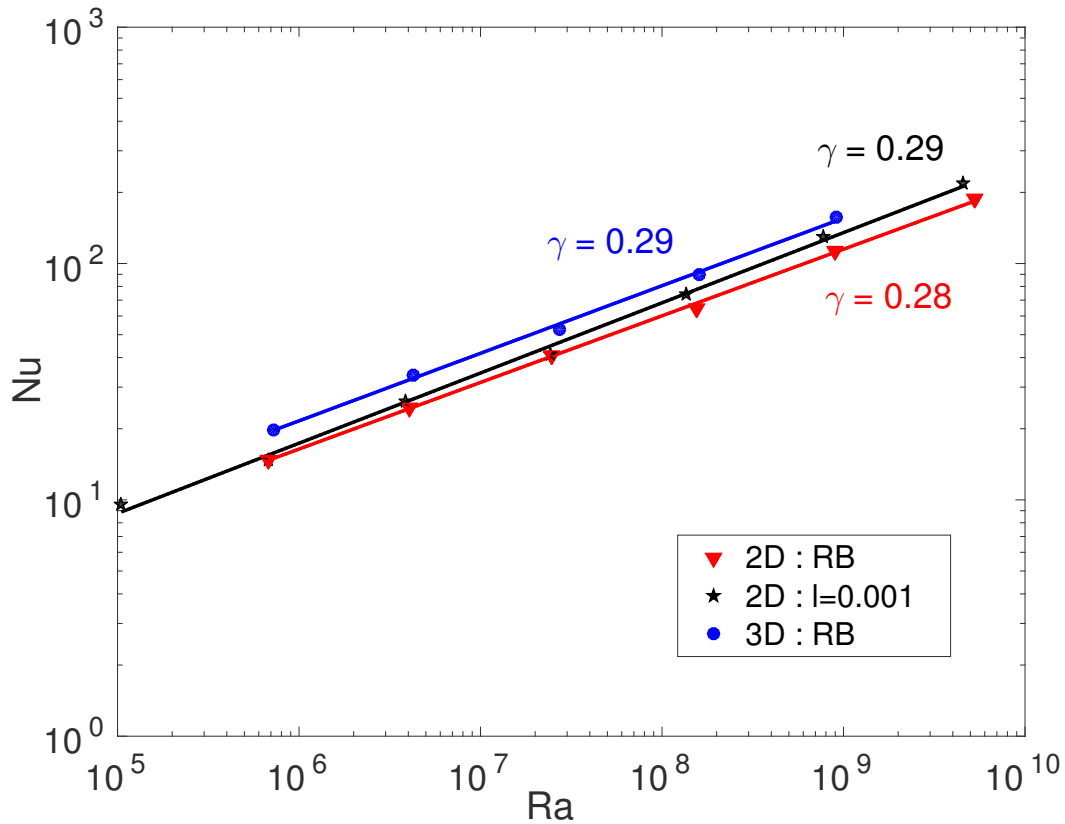


Figure 3.2: **Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour les petites longueurs d'absorption.** ▼ représente les points de simulation 2D dans le "cas Rayleigh-Benard", flux de chaleur fixé en bas, ★ les points 2D à faible longueur d'absorption, et ● les points 3D dans le "cas Rayleigh-Bénard".  $Pr = 1$  pour les simulations 2D et  $Pr = 7$  pour les 3D. Les lignes pleines sont des fits en loi de puissance avec  $\gamma$  les exposants de ces fits.

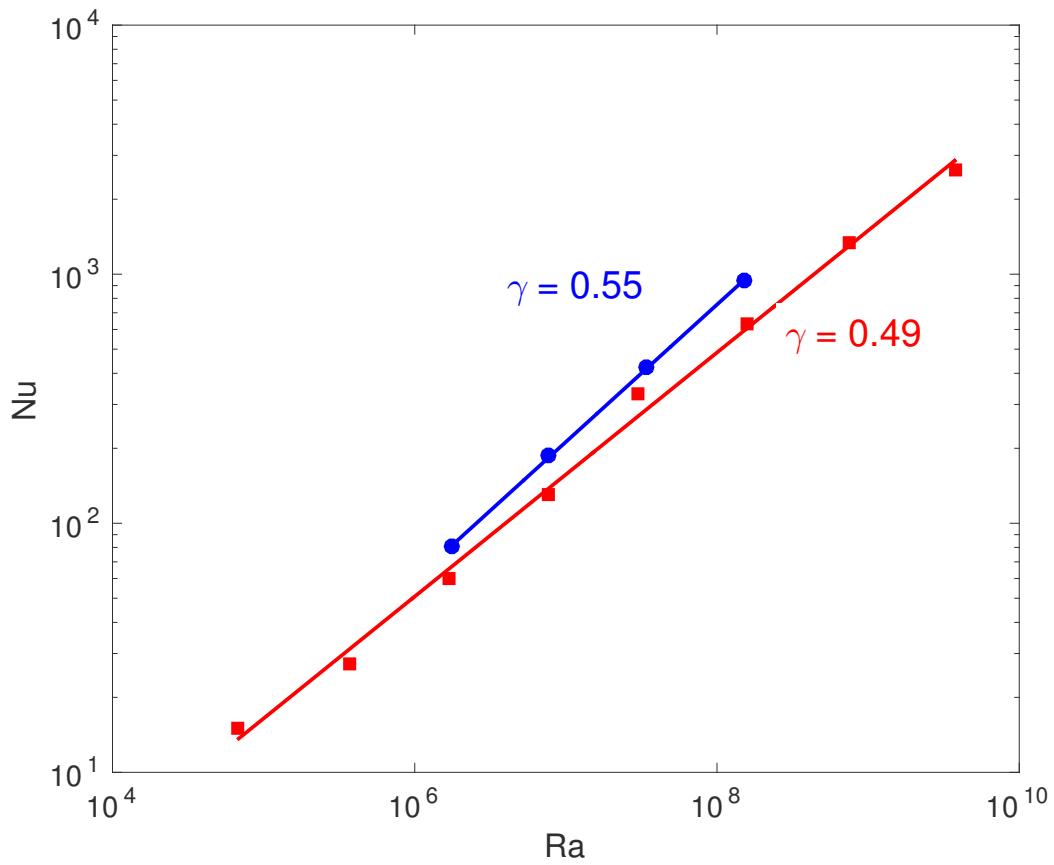


Figure 3.3: Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour les grandes longueurs d'absorption :  $l = 0.05$ . ■ représente les points 2D,  $Pr = 1$  et ● les points 3D,  $Pr = 7$ .

### 3.5 Structure de l'Écoulement - champs instantanés issus des simulations

On va présenter des champs instantanés de température issus des simulations pour comprendre les phénomènes mis en jeu. Ce sont des instantanés représentant la température adimensionnée à un instant donné pour deux valeurs de longueurs d'absorption :  $l = 10^{-3}$ , petite devant les tailles de couches limites, et  $l = 0.2$ , grande devant les tailles de couches limites du système, et pour deux valeurs de flux de chaleur imposé différentes, en figures (3.4, 3.5, 3.6, 3.7).

Sur ces instantanés, on peut voir plusieurs choses :

- Les écoulements moyens sont toujours constitués d'un seul rouleau de convection (pour des simulations de rapport d'aspect 1. On observe des écoulements moyens similaires à tout nombre de Rayleigh.
- Les couches limites thermiques sont les distances sur lesquelles la température évolue fortement. Il en existe seulement en bas du fluide, là où la source de chaleur est la plus forte.
- Les couches limites thermiques sont fortement dépendantes de la longueur d'absorption de la chaleur  $l$ . Pour des faibles valeurs de  $l$  (0.001 dans les figures mises ici), la couche limite thermique semble répartie sur tout le fond de la cuve et être relativement petite. Cependant, les températures les plus élevées sont atteintes au niveau de points de stagnation du fluide près de la paroi inférieure. Pour les plus grandes longueurs d'absorption (0.2 ici), il semble ne subsister que ces fortes températures au niveau des points de stagnation. Ce type de couches limites près d'un point de stagnation est moins connu dans la littérature. Elles ont été étudiées entre autres par Childress dans l'article (Childress, 1979). Elles apparaissent pour n'importe quel problème de diffuseur – même passif – dans un écoulement. L'épaisseur couche limite suivra une loi d'échelle en nombre de Péclet et non de Reynolds. En effet, le scaling de la couche limite est donné par l'équilibre entre le terme de diffusion de la température et celui d'advection :  $\kappa \Delta T \sim \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$ , à l'inverse des couches limites visqueuses, donc la taille est donnée par l'équilibre  $\nu \Delta \vec{v} \sim \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$ . On aura donc bien ici des scalings construits sur le nombre de Péclet.

A trois dimensions, on remarque qualitativement les mêmes phénomènes dans les figures (3.8) et (3.9). On voit donc que l'écoulement a une dépendance en longueur d'absorption, un nouveau paramètre de contrôle par rapport au dispositif standard de Rayleigh-Bénard. On cherche quantitativement le rôle de ce nouveau paramètre.

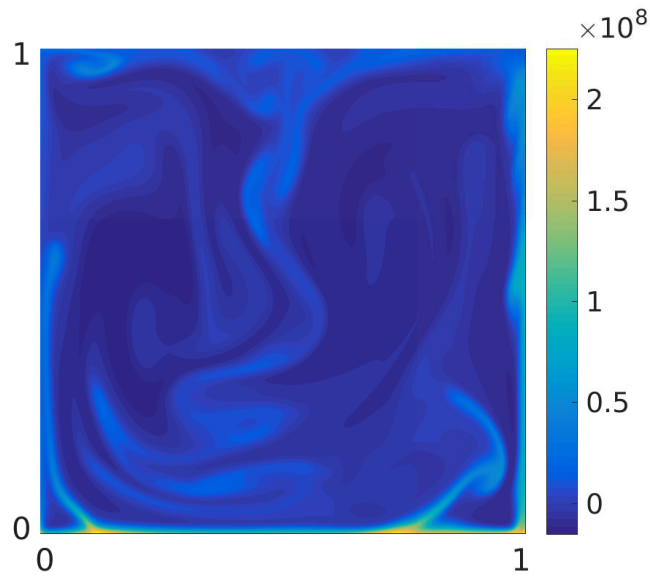


Figure 3.4: Champ de température adimensionnée instantané pour une longueur d'absorption adimensionnée  $l = 0.001$  et un flux de chaleur imposé adimensionné  $Q = 10^{10}$ . Simulation 2D, résolution 256x256,  $Pr = 1$ .

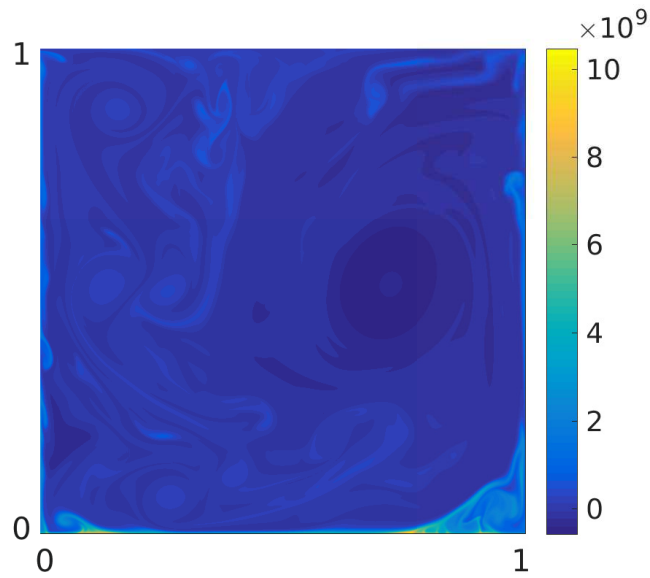


Figure 3.5: Champ de température adimensionnée instantané pour une longueur d'absorption adimensionnée  $l = 0.001$  et un flux de chaleur imposé adimensionné  $Q = 10^{12}$ . Simulation 2D, résolution 512x512,  $Pr = 1$ .

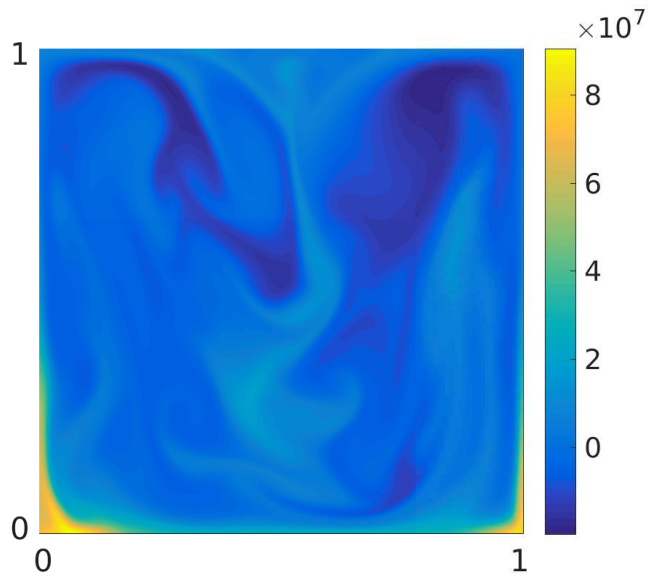


Figure 3.6: Champ de température adimensionnée instantané pour une longueur d'absorption adimensionnée  $l = 0.2$  et un flux de chaleur imposé adimensionné  $P = 10^{10}$ . Simulation 2D, résolution  $256 \times 256$ ,  $Pr = 1$ .

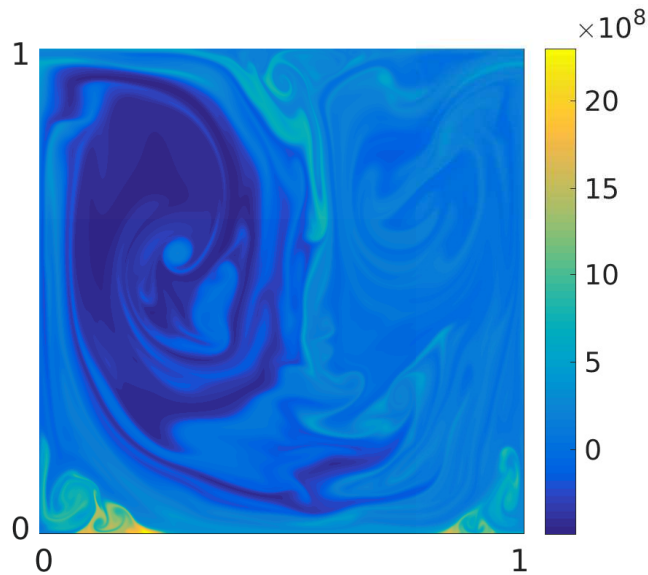


Figure 3.7: Champ de température adimensionnée instantané pour une longueur d'absorption adimensionnée  $l = 0.2$  et un flux de chaleur imposé adimensionné  $P = 10^{12}$ . Simulation 2D, résolution  $512 \times 512$ ,  $Pr = 1$ .



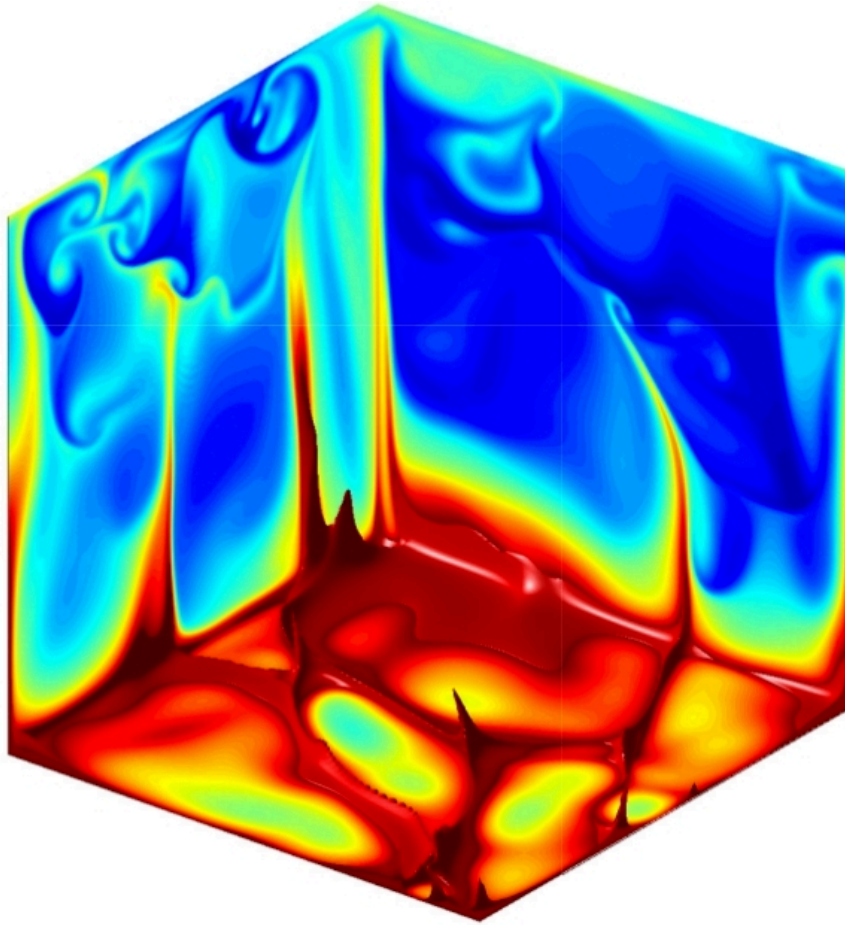


Figure 3.8: Champ de température adimensionnée instantané pour une grande longueur d'absorption ( $l = 0.05$ ) à trois dimensions. On représente une surface isotherme et les champs de température sur les parois.  $Pr = 7$ .

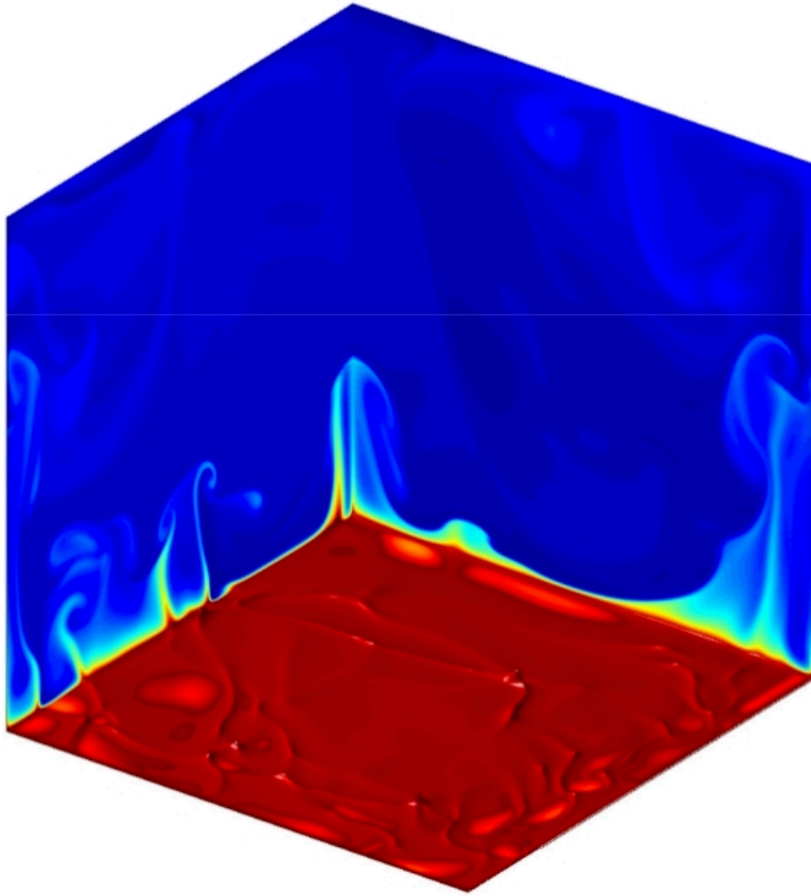


Figure 3.9: Champ de température adimensionnée instantané pour une petite longueur d'absorption ( $l = 10^{-4}$ ) à trois dimensions. On représente une surface isotherme et les champs de température sur les parois.  $Pr = 7$ .

## 3.6 Influence de la longueur d'absorption

On fait plusieurs simulations avec différentes longueurs d'absorption et on obtient les résultats présentés en figure (3.10). On voit donc qu'il y a une dépendance quantitative avec le nouveau paramètre de contrôle. On cherche à comprendre cette dépendance à l'aide de modèles simples.

### 3.6.1 Modélisation

Bien que la grande majorité de la chaleur soit injectée directement dans l'écoulement turbulent, il existe toujours une couche limite de taille  $\delta \ll H$  au voisinage de la paroi inférieure. On considère que la température est uniforme dans le cœur du fluide, hors de la couche limite. La différence de température  $\Delta T$  typique observée dans le système sera donc entre la couche limite et l'intérieur du fluide.

La quantité de chaleur absorbée par la couche limite doit être transférée par diffusion à l'intérieur du fluide donc :

$$P \frac{\delta}{l} \sim \lambda \frac{\Delta T}{\delta}. \quad (3.23)$$

On a besoin de connaître la taille de la couche limite  $\delta$  pour aller plus loin.

#### Tailles de couches limites thermiques

On a ici formation de couches limites thermiques. Pour comprendre leur scaling, on s'intéresse au système modèle où un diffuseur quelconque (dans notre cas ce sera la température) est injecté par une paroi dans un écoulement grande échelle. Proche de la paroi, l'écoulement ne sera que selon la direction parallèle à la paroi. La figure (3.11) illustre cette configuration. Dans ce cas, il s'établira une couche limite thermique (c'est-à-dire une couche sur laquelle la température varie fortement) dont la taille sera donnée par l'équilibre entre l'advection, qui tend à emporter le diffuseur selon la direction horizontale selon les lignes de courant, et la diffusion, qui tend à emporter le diffuseur vers des zones à faible concentration - le centre de la cuve en l'occurrence. L'épaisseur de couche limite sera fixée par l'équilibre :

$$U \partial_x T \sim \kappa \partial_{zz} T \quad (3.24)$$

$$U \frac{T}{H} \sim \kappa \frac{T}{\delta^2} \quad (3.25)$$

et donc

$$\delta \sim \frac{H}{\sqrt{Pe}}. \quad (3.26)$$

avec  $Pe$  le nombre de Péclet défini par  $Pe = \frac{UH}{\kappa}$ . Ces couches limites sont dues à la vitesse normale nulle proche de la paroi. Ce raisonnement est bon pour un écoulement

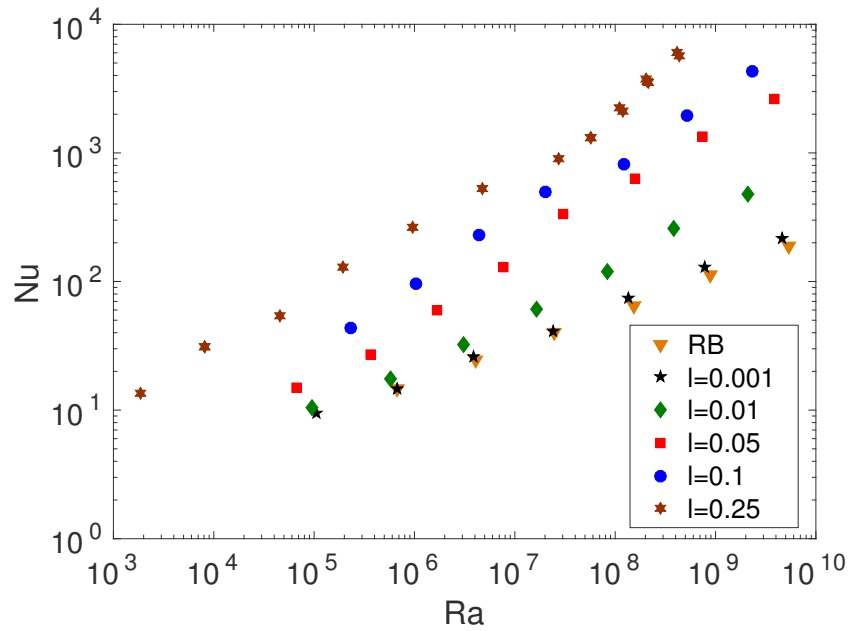


Figure 3.10: Coubes Nusselt versus Rayleigh pour différentes valeurs de longueur d'absorption. Simulations 2D,  $Pr = 1$ .

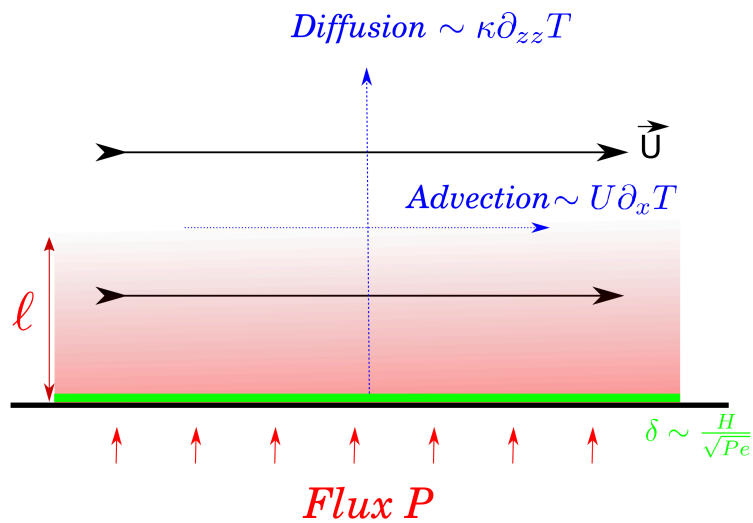


Figure 3.11: Schéma illustrant la couche limite en  $\delta \sim \frac{H}{\sqrt{Pe}}$  près du bord inférieur.

sur une surface grande dans la direction horizontale. Lorsque l'on regarde plus précisément les instantanés de température, on voit qu'il se forme des couches limites thermiques plus grandes (potentiellement plus limitantes) dans les coins de l'écoulement. Ces couches limites sont dues à l'existence d'un point de stagnation - vitesse complètement nulle - dans un coin de la cuve. La figure (3.12) illustre cette configuration. Pour trouver l'épaisseur  $\delta_{\text{stagnation}}$  de cette couche limite, on recolle les deux couches limites en  $\frac{H}{\sqrt{Pe}}$  qui se forment sur les parois horizontale et verticale.

On note toujours  $U$  la vitesse typique au sein du fluide et au voisinage de ces couches limites de paroi. Le flux horizontal de masse dans les couches limites de paroi est proportionnel à  $U\delta$ . Au voisinage du point de stagnation, la vitesse est de l'ordre de  $U\delta_{\text{stagnation}}/H$  et le flux de masse proportionnel à  $U\delta_{\text{stagnation}}^2/H$ . La conservation du flux de masse donne donc accès à  $\delta_{\text{stagnation}}$  :

$$U\delta \sim U \frac{\delta_{\text{stagnation}}^2}{H} \quad (3.27)$$

$$\delta_{\text{stagnation}} \sim \frac{H}{\sqrt[4]{Pe}}. \quad (3.28)$$

Ce qui sera intéressant dans notre cas est que ces deux types de couches limites donneront lieu au même scaling dans la loi constitutive Nusselt - Rayleigh.

Considérons dans un premier temps la couche limite de bord uniquement. La taille de la couche limite  $\delta$  s'exprime donc  $\delta \sim \frac{H}{\sqrt{Pe}}$ . La vitesse typique est  $U \sim \sqrt{g\alpha\Delta TH}$ , alors  $\delta \sim \frac{H\kappa}{\sqrt[4]{g\alpha\Delta TH}}$ .

En remplaçant dans (3.23) il vient

$$\frac{PH^2}{\lambda\Delta T} \sim \sqrt{\left(\frac{g\alpha\Delta TH^3}{\kappa^2}\right)} \quad (3.29)$$

ou encore

$$Nu \sim \left(\frac{l}{H}\right) Ra^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{2}}. \quad (3.30)$$

On a obtenu la dépendance en  $l$  dans la loi constitutive Nusselt-Rayleigh.

Ce régime est valable à très haut nombre de Rayleigh. On l'observera tant que la zone d'absorption est beaucoup plus grande que la couche limite. On quitte donc ce régime lorsque  $l \sim \delta \sim \frac{H\kappa}{\sqrt[4]{g\alpha\Delta TH}}$  où il y aura une transition vers un autre régime. Les coordonnées de ce point de transition dans l'espace  $(Ra, Nu)$  sont donc :

$$Ra_{tr} \sim \left(\frac{l}{H}\right)^{-4} \frac{1}{Pr} \quad (3.31)$$

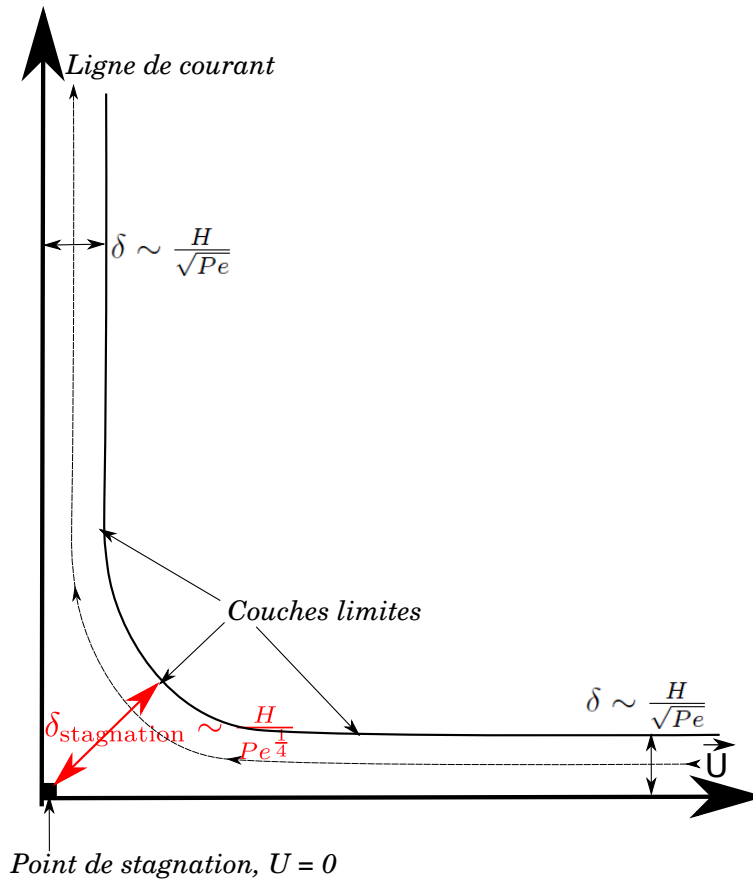


Figure 3.12: Raccord des couches limites au voisinage des parois horizontale et verticale par l'intermédiaire d'une couche limite d'épaisseur  $\delta_{\text{stagnation}} \sim \frac{H}{\sqrt[4]{Pe}}$  au voisinage du point de stagnation.

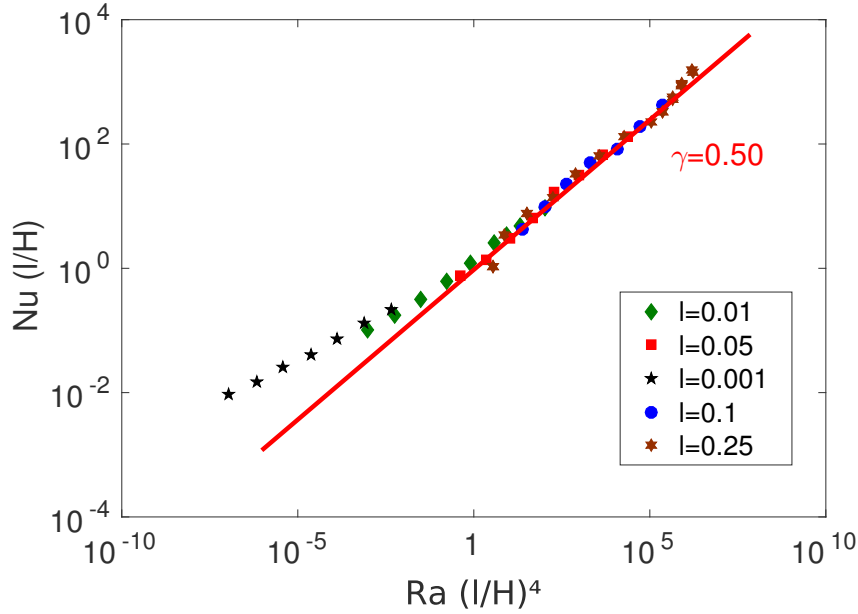


Figure 3.13:  $Nu$  et  $Ra$  divisés par leurs valeurs de transition. Le régime “ultime” de convection pleinement turbulente est situé sur le côté droit du graphique : les couches limites  $y$  sont petites car les vitesses sont plus grandes à haut nombre de Rayleigh. La transition vers ce régime a lieu pour une abscisse et une ordonnée de l’ordre de 1. Les symboles sont les mêmes que sur la figure (3.10)

et en reportant dans (3.30)

$$Nu_{tr} \sim \frac{H}{l}. \quad (3.32)$$

Pour tester ce modèle, on trace le rescaling  $\left(\frac{Nu}{Nu_{tr}}\right)$  vs  $\left(\frac{Ra}{Ra_{tr}}\right)$  en figure (3.13). Le rescaling est bon, les courbes se superposent bien sur une courbe maîtresse, le point de transition entre les régimes est bien situé au point de coordonnées (1, 1), et la loi d’échelle dans le régime de grands Rayleigh (et donc petites tailles de couches limites) est bien respectée avec un exposant  $\gamma \approx 0.5$ . On confirme donc la dépendance en  $\frac{l}{H}$  de la loi Nusselt - Rayleigh.

### 3.6.2 Rôle des couches limites de stagnation et température maximale

Il s’avère que l’on obtient le même scaling pour les courbes Nusselt en fonction de Rayleigh si on fait le même type de raisonnement avec des couches limites dues aux points de stagnation : la température est beaucoup plus grande dans les couches limites de stagnation, mais ces dernières occupent une faible fraction  $\delta_{\text{stagnation}}/L$  de la surface

de la paroi inférieure, avec  $L = H$  pour notre domaine cubique. On note alors  $T_{max}$  et  $T_{fluide}$  respectivement la température maximale à l'intérieur de la couche limite de stagnation et la température hors de la couche limite de stagnation, au sein du fluide. La chaleur injectée dans la couche limite de stagnation,  $P\delta_{stagnation}^2/lH$ , est diffusée dans le fluide, donc :

$$P \frac{\delta_{stagnation}^2}{lH} \sim \lambda \frac{T_{max} - T_{fluide}}{\delta_{stagnation}} \quad (3.33)$$

Comme les couches limites de stagnation occupent une faible fraction  $\delta_{stagnation}/L$  de la surface de la paroi inférieure, la moyenne horizontale conduit à :  $\Delta T \sim \frac{\delta_{stagnation}}{H} (T_{max} - T_{fluide})$

En réinjectant la taille de ces structures,  $\delta_{stagnation} \sim \frac{H}{\sqrt[4]{Pe}}$ , on obtient :

$$\frac{P\delta_{stagnation}^4}{lH} \sim \lambda H \Delta T \quad (3.34)$$

$$\frac{PH^4}{lH} \sim \lambda L Pe \Delta T \quad (3.35)$$

et donc

$$Nu \sim Pr^{\frac{1}{2}} Ra^{\frac{1}{2}} \frac{l}{H} \quad (3.36)$$

Les deux types de couches limites conduisent donc à la même loi Nusselt versus Rayleigh. En revanche la température est plus élevée dans les couches limites de coin qui pilotent donc la température maximale atteignable dans cette configuration. On définit le nombre de Rayleigh  $Ra_{max}$  construit sur la température maximale, qui est atteinte dans les couches limites de stagnation :

$$Ra_{max} = \frac{g\alpha(T_{max} - T_{fluide})H^3}{\kappa\nu} \quad (3.37)$$

Ce nombre de Rayleigh maximal s'exprime en fonction du nombre de Rayleigh standard comme :

$$Ra_{max} \sim Ra^{9/8} Pr^{1/8} \quad (3.38)$$

La détermination précise de  $Ra_{max}$  demande des simulations très longues pour obtenir une bonne convergence et déceler cet exposant 9/8. Les simulations dont nous disposons actuellement ne permettent pas une confirmation claire de cet exposant.

## 3.7 Conclusion

Au cours de cette étude numérique, on a donc pu comprendre beaucoup de phénomènes mis en jeu. On constate qu'il est possible d'atteindre le régime "ultime" de convection, caractérisé par la relation  $Nu \sim Pr^{\frac{1}{2}} Ra^{\frac{1}{2}}$ , en injectant la chaleur partiellement à



l'intérieur du fluide et non dans les couches limites. La dépendance de cette relation en  $l/H$ , la longueur typique sur laquelle la chaleur est injectée - nouvelle grandeur adimensionnée du système, a pu être établie. Il existe une transition nette entre deux régimes. Le premier, à faible longueur d'absorption devant les tailles de couches limites, a toutes les caractéristiques du régime observé dans une expérience de Rayleigh-Bénard, il est donc indépendant de  $l/H$ . Le deuxième régime, à grande longueur d'absorption, voit apparaître une dépendance en cette longueur d'absorption dans la relation constitutive, et on montre, grâce à un rescaling des courbes faites à différents  $l/H$  que le nombre de Nusselt est linéaire en  $l/H$ . La relation asymptotique dans ce régime est donc  $Nu \sim Pr^{\frac{1}{2}} Ra^{\frac{1}{2}} \frac{l}{H}$ . Un modèle simple de couches limites vient confirmer cette relation. La dépendance en Prandtl n'a pas été vérifiée par ces simulations. Malgré le fait que cette dépendance soit parfois discutée dans ce manuscrit, elle n'a pas été intensivement étudiée au cours de cette thèse, car le dispositif expérimental ne permettait pas de le faire varier. C'est un travail intéressant à faire pour la suite.

On s'est limité à des simulations à deux dimensions pour l'étude de la dépendance en  $l/H$ , beaucoup moins coûteuses numériquement. Quelques simulations ont été effectuées à trois dimensions pour confirmer les premiers résultats dans les cas extrêmes.

On peut alors se demander si ce chauffage radiatif idéalisé, ou encore le fait de retirer la dérive temporelle de la température moyenne sont des idées qui pourraient effectivement être réalisables dans une expérience du monde réel. Dans le chapitre suivant, on décrira une réalisation pratique en laboratoire de la convection par chauffage radiatif.

# Chapter 4

## Réalisation expérimentale de la convection par chauffage radiatif

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la convection par chauffage radiatif en laboratoire. On décrira d'abord le dispositif expérimental développé au cours de cette thèse, en insistant sur la méthode de forçage en volume. On présentera ensuite les méthodes de mesure utilisées. Enfin, on décrira les résultats, en se focalisant sur les différentes lois obtenues reliant le nombre de Nusselt au nombre de Rayleigh. Ces mesures conduiront à un raffinement du modèle théorique de la convection forcée radiativement.

### 4.1 Dispositif expérimental

#### 4.1.1 Méthode de chauffage

##### Principe du chauffage radiatif

On cherche à avoir un chauffage partiellement volumique, qui s'appliquera sur une couche de taille typique bien contrôlée. Pour ce faire, on a utilisé un mélange constitué d'eau et d'encre que l'on chauffe avec une lampe. L'encre va absorber la lumière exponentiellement en fonction de la distance au fond de la cuve, en respectant la loi de Beer-Lambert. L'énergie lumineuse absorbée est dissipée rapidement sous forme de chaleur, réalisant effectivement une source de chaleur volumique.

La loi de Beer-Lambert nous dit que le flux transmis à une distance  $z$  du fond de la cuve (le point d'entrée du faisceau lumineux dans le milieu absorbant) s'écrit :

$$P \exp(-z\epsilon c) \tag{4.1}$$

avec  $z$  la distance au fond de la cuve,  $\epsilon$  le coefficient d'absorption molaire de l'encre en  $m^2.mol^{-1}$ ,  $P$  le flux radiatif émis par la lampe en  $W/m^2$  et  $c$  la concentration en encre, en  $mol.m^{-3}$ .

La quantité de lumière absorbée dans la tranche de fluide infinitésimale située à la hauteur  $z$  est donc :

$$A(z) = -\frac{dP \exp(-z\epsilon c)}{dz} = \epsilon c P \exp(-z\epsilon c) \quad (4.2)$$

la source de chaleur volumique sera alors proportionnelle à la quantité de lumière absorbée et on l'écrira pour la suite de ce chapitre :

$$Q(z) = \frac{P}{l} \exp\left(-\frac{z}{l}\right) \quad (4.3)$$

avec  $l = \frac{1}{\epsilon c}$  la longueur typique d'absorption de la lumière à partir du fond de la cuve. On pourra donc choisir la taille de la couche où la lumière est absorbée en changeant la concentration d'encre dans le mélange eau / encre.

### Choix et caractérisation du fluide absorbant et de la lampe.

Après le test de différentes encres commerciales, l'encre de Chine est apparue comme la seule ayant un spectre d'absorption plat. Pour déterminer cette caractéristique, nous avons effectué des mesures d'absorption de la puissance lumineuse en fonction de la distance au fond de la cuve. Cette courbe est présentée en figure 4.1 pour l'encre de Chine *Lefranc Bourgeois*. On a la confirmation que le spectre d'absorption est bien plat en longueur d'onde car la courbe est une exponentielle. Lorsque le spectre d'absorption n'est pas plat, les différentes longueurs d'ondes ont des coefficients d'absorption molaire différents  $\epsilon_j$ , elles sont absorbées sur des distances typiques  $l_j$  différentes, et la courbe d'absorption est une somme d'exponentielles de longueurs caractéristiques différentes  $Q(z) = \sum_j \frac{P_j}{l_j} \exp\left(-\frac{z}{l_j}\right)$ .

La lampe utilisée pour chauffer est une lampe de cinéma "Filmgear Daylight Par 2,5k" aux halogénures métalliques HMI de 2500W. Le rendement lumineux est d'environ 10%, c'est-à-dire que la puissance effectivement récupérée sous forme de chaleur dans la cuve est au maximum de 250W.

#### 4.1.2 Caractéristiques de la cuve

Un schéma de principe de la cuve est présenté en figure 4.2. La cuve est choisie cylindrique, pour respecter la symétrie de la lampe. C'est aussi la configuration la plus classique d'étude de la convection thermique. Les dimensions sont 20 centimètres de diamètre et 20 centimètres de hauteur. On remplira la cuve avec des hauteurs de fluide  $H$  variables.

Les parois latérales sont en Delrin, un matériau qui résiste bien à la température, tout en étant plutôt isolant thermiquement. Les conductivités thermiques des principaux matériaux utilisés pour cette expérience sont :

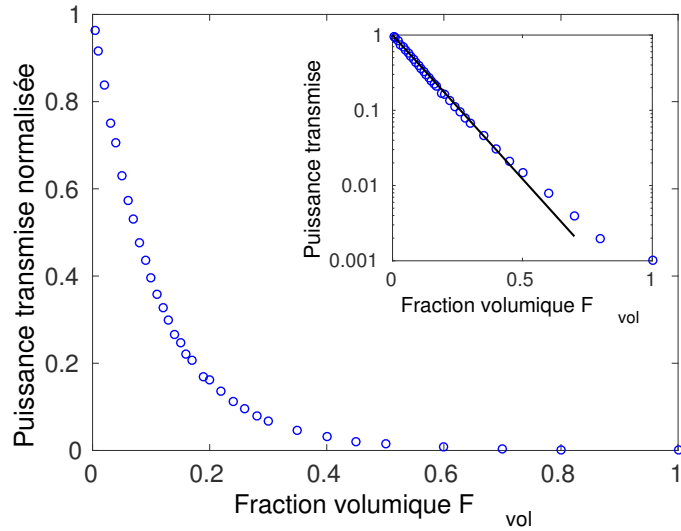


Figure 4.1: Puissance transmise en fonction de la quantité d'encre ajoutée dans la cuve. On constate que l'absorption est bien exponentielle en fonction de la concentration d'encre.

Matériau	Conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
Delrin	0.27
Saphir	40
Eau	0.6

Pour la paroi du bas, on cherche à avoir des conditions aux limites isolantes, mais il faut laisser passer la lumière de la lampe à travers la paroi. On va donc utiliser une technique d'isolation bien connue : le double vitrage. On laisse une couche d'air entre deux plaques transparentes horizontales. Cette couche d'air sera stratifiée stable tant que la température dans la pièce est égale ou inférieure à la température en bas de la cuve. Ce sera le cas pour les fenêtres temporelles utilisées pour extraire les nombres de Nusselt et Rayleigh, la température en bas de la cuve étant la température maximale dans la cuve. De l'air qui ne convecte pas étant un excellent isolant, on minimise donc les fuites thermiques par le fond de la cuve.

En haut du fluide on va laisser une surface libre et refermer la cuve par un couvercle isolant thermique. Les fuites thermiques se feront principalement par évaporation mais restent négligeables devant le flux de forçage. Une manière simple d'estimer ces échanges thermiques entre la cuve et l'extérieur par diffusion et par évaporation est d'éteindre la source de chauffage à instant donné de l'expérience. En mesurant la décroissance de la température au cours du temps sans source de chaleur, on a une mesure précise de la quantité de chaleur échangée par le fluide au cours du temps et donc de la somme des fuites thermiques. La valeur absolue de ces fuites thermiques

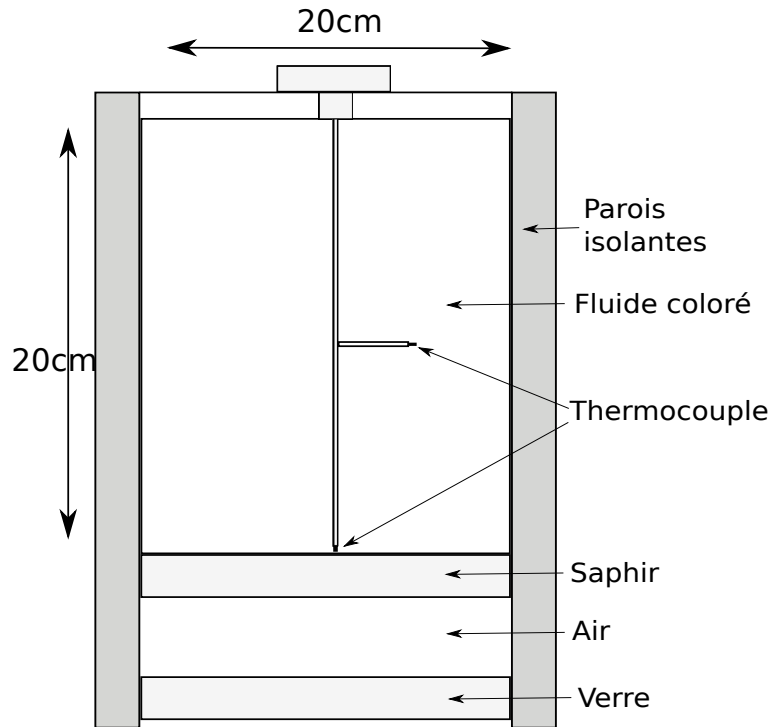


Figure 4.2: Schéma de principe de la cuve.

dépend de la température dans la pièce et dans la cuve : en pratique pour notre expérience, la puissance perdue par fuites thermiques ne dépassera pas quelques pourcents de la puissance injectée par la lampe dans le fluide.

### 4.1.3 Méthodes de mesure

On va présenter ici les méthodes utilisées pour mesurer les grandeurs nécessaires. Il y a deux grandeurs dont on a besoin pour construire les nombres de Nusselt et Rayleigh : la différence de température entre le fond et le milieu de la couche de fluide, notée  $\Delta T$  dans ce chapitre, et le flux de chaleur surfacique  $P$ . On aura alors toutes les grandeurs nécessaires à extraire les nombres de Nusselt et Rayleigh :

$$Nu = \frac{PH}{\lambda\Delta T} \quad \text{et} \quad Ra = \frac{\alpha g H^3 \Delta T}{\nu \kappa} \quad (4.4)$$

avec  $\nu$  la viscosité du fluide,  $\alpha$  le coefficient d'expansion thermique,  $H$  la hauteur de fluide,  $\kappa$  la diffusivité thermique, et  $\lambda$  la conductivité thermique.

#### Différence de température

Pour mesurer les températures, on utilise des thermocouples maintenus à des positions fixes par de fines céramiques entrant dans la cuve. Il est important de souligner la

difficulté liée à la mesure de température au fond de la cuve. En effet le thermomètre y est exposé à la lumière directe de lampe. Comme il absorbe cette lumière, il va donc chauffer lui-même et transmettre cette chaleur au fluide environnant. Il y a donc un biais sur la mesure de température exposé à la lumière. En météo, il est bien connu que l'on n'estime pas la température en plein soleil ! Ce biais ne peut pas être calibré facilement puisqu'il va dépendre aussi de la vitesse local autour du thermomètre (plus le fluide est rapide moins le biais est important).

Afin de réduire cet effet nous avons choisi des capteurs de température ayant une très petite surface et ayant une faible inertie thermique de manière à réduire l'impact du rayonnement et à maintenir le capteur à la température de son environnement. Notre choix s'est porté sur des thermocouples de type K (Chomel-Alumel) de très petite taille (diamètre des conducteurs de 0,076 mm), à réponse rapide, et nous permettant une précision du 10ème de degré.

Enfin, nous utilisons comme paroi inférieure de la cuve une fenêtre de saphir. Celle-ci est un bien meilleur conducteur thermique que le verre de silice. Le thermocouple en contact avec le saphir évacuera donc très facilement la chaleur qu'il reçoit par rayonnement vers celui-ci. Il mesurera donc de façon fiable la température au fond de la cuve.

## Fonctionnement d'un thermocouple

On va décrire ici brièvement le fonctionnement d'un thermocouple. Un thermocouple est un appareil qui utilise l'effet Seebeck pour mesurer la température. L'effet Seebeck, découvert en 1821, nous dit que lorsque deux métaux forment un circuit électrique ouvert, il se forme une différence de potentiel  $dV$  si il existe une différence de température  $dT$  entre les deux soudures entre les métaux. La différence de potentiel dépend de la température et du  $dT$  comme  $dV = S_{ab}(T).dT$  avec  $S_{ab}$  le coefficient de Seebeck des métaux  $a$  et  $b$ , comme illustré en figure 4.3. En contrôlant la température à l'une des soudures  $T_{ref}$ , on peut donc avoir une mesure de la température à l'autre soudure  $T_c$ . En plaçant cette soudure à un endroit choisi dans le fluide, on a donc une mesure de température. Le montage est schématisé en figure 4.4 (par J-C Denis). On place un Voltmètre entre sortie de montage pour mesurer la différence de température créée entre les deux métaux. La soudure placée à l'endroit de mesure s'appelle traditionnellement "soudure chaude", et les jonctions aux bornes du voltmètre les "soudures froides" ou "soudures de référence". Il existe de nombreux types de thermocouples, adaptés à différentes situations suivant leur précision et la gamme de température de fonctionnement.

Le thermocouple utilisé pour notre expérience est un thermocouple de type K, c'est à dire que les deux métaux sont le chromel (alliage de nickel et chrome) et l'alumel (alliage de nickel et aluminium).

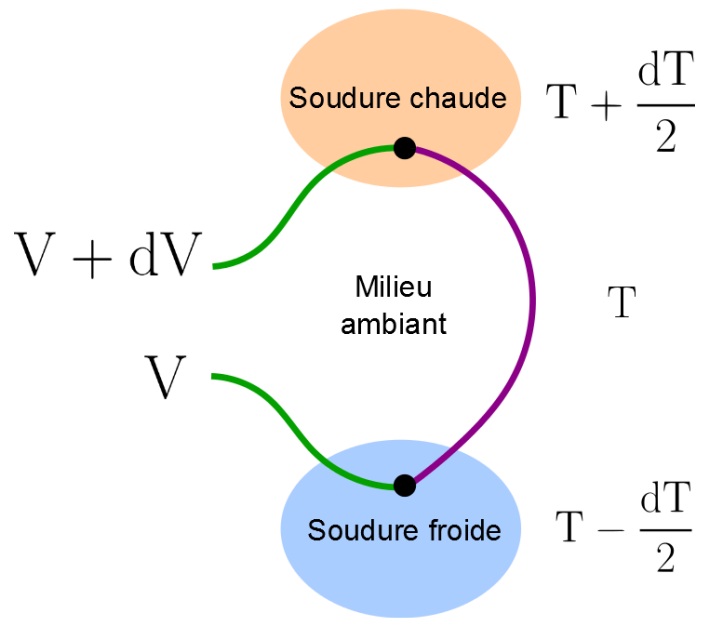


Figure 4.3: Schéma de principe de l'effet Seebeck.

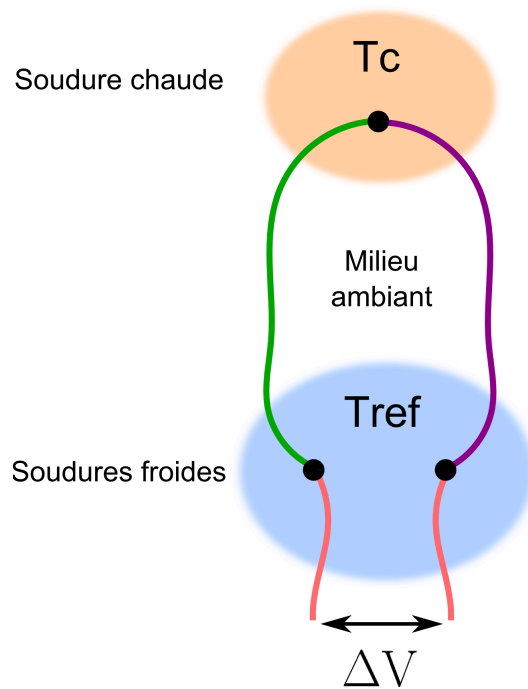


Figure 4.4: Schéma de montage d'un thermocouple.

## Méthode de la dérive – refroidissement séculaire

Maintenant que nous avons présenté le dispositif de chauffage et de mesure, une question importante se pose : comment refroidir le système, sans créer à nouveau des couches limitantes pour le transfert thermique? En effet, la configuration typique d'étude de la convection par chauffage interne consiste à utiliser une plaque froide pour refroidir le fluide. Mais alors, la couche limite au voisinage de cette plaque limite le flux de chaleur, et on obtient des résultats similaires à un dispositif de Rayleigh-Bénard. Pour illustrer ce propos, on présente en figure 4.5 une table de résultats extraite de la review de D. Goluskin, résumant les différents exposants trouvés pour la loi d'échelle Nusselt en fonction de Rayleigh, dans cette configuration de chauffage interne homogène et de refroidissement par contact avec une paroi supérieure froide, à température fixée. (Fiedler & Wille, 1970; Kulacki & Emara, 1977; Kulacki & Nagle, 1975; Lee et al., 2006; McKenzie et al., 1974; Olwi & Kulacki, 1995; Ralph & Roberts, 1974) On constate dans tous les cas que l'exposant de la loi  $Nu \sim Ra^\gamma$  est de l'ordre de  $\gamma \simeq 0.3$ .

Dans le but de court-circuiter cette couche limite froide, on doit trouver un moyen pour refroidir le fluide en volume. La méthode retenue, appelée "méthode de la dérive" dans la suite, consiste en fait à ne pas refroidir le fluide. On va montrer que la situation instationnaire dans laquelle le fluide est chauffé radiativement sans être refroidi est équivalente à un fluide chauffé radiativement et refroidi uniformément en volume, au prix d'un simple changement de variables. En effet, isolons la moyenne spatiale  $T_d(t)$  du champ de température, et notons  $\theta(x, y, z, t)$  la déviation par rapport à cette moyenne. On écrit donc  $T(\vec{x}, t) = \theta(\vec{x}, t) + T_d(t)$ , avec :

- $T_d = T_d(t) = \langle T \rangle_{x,y,z}$  la moyenne spatiale sur tout le volume du champ de température. Cette composante "dérivante" du champ, uniforme, va croître linéairement en temps du fait de l'apport continu de chaleur par le flux lumineux. En mesurant cette dérive au cours du temps, on va avoir une très bonne mesure du flux de chaleur imposé au système. En effet, il n'y a pas de source de chaleur et les bords sont isolants, donc toute la chaleur injectée au système va servir à augmenter la température moyenne à l'intérieur de la cuve.
- $\theta = \theta(x, y, z, t) = T - \langle T \rangle_{x,y,z}(t)$  le champ "de convection" qui nous intéressera pour estimer le nombre de Rayleigh et de Nusselt. Ce champ (dont la moyenne spatiale est par définition nulle à tout instant) va avoir une évolution gouvernée par l'équation qui régit la convection, où viendra s'ajouter un terme constant et homogène, négatif, qui annule la moyenne volumique de la source. Il atteint donc à temps long un état statistiquement stationnaire.

Démontrons ces résultats à partir des équations du système. L'équation de la chaleur dimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T + \frac{P}{\rho_0 C l} \exp\left(\frac{-z}{l}\right) \quad (4.5)$$



	$Pr$	$R$	$\delta\bar{T}$ fit	$N$ fit
Laboratory experiments				
Fiedler & Wille [43]	6–7	$10^4 - 10^7$	$1.90R^{-0.228}$	$0.177Ra^{0.295}$
Ralph & Roberts [108]	6–7	$2.3 \cdot 10^5 - 6.0 \cdot 10^9$	$2.62R^{-0.25}$	$0.110Ra^{0.33}$
Kulacki & Nagle [86]	6.2–6.6	$1.5 \cdot 10^5 - 2.5 \cdot 10^9$	$3.28R^{-0.239}$	$0.0845Ra^{0.314}$
Kulacki & Emara [83]	2.7–6.9	$1.89 \cdot 10^3 - 2.17 \cdot 10^{12}$	$2.53R^{-0.227}$	$0.123Ra^{0.294}$
Ralph <i>et al.</i> [107]	6–7	$10^9 - 7 \cdot 10^9$	$aR^{-0.24}$	$cRa^{0.32}$
Lee <i>et al.</i> [88]	0.71–0.74	$9.9 \cdot 10^9 - 3.3 \cdot 10^{11}$	$2.84R^{-0.247}$	$0.0996Ra^{0.328}$
Simulations (2D DNS)				
Mckenzie <i>et al.</i> [95] (free-slip, steady)	$\infty$	$1.2 \cdot 10^4 - 7.0 \cdot 10^5$	$aR^{-0.26}$	$cRa^{0.35}$
Emara & Kulacki [39] (free-slip top)	6.5	$5 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^8$	$1.07R^{-0.182}$	$0.397Ra^{0.222}$
Emara & Kulacki [39] (no-slip)	6.5	$5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^8$	$2.38R^{-0.223}$	$0.134Ra^{0.287}$
Olwi [98] (no-slip, steady)	6.5	$10^4 - 10^8$	$3.07R^{-0.255}$	$0.0876Ra^{0.342}$

Figure 4.5: Résumé des lois d'échelle trouvées expérimentalement et en DNS(2D) pour une configuration de chauffage homogène volumique et température fixée à la paroi haute du fluide. La paroi basse est isolante.  $R$  et  $Ra$  représentent le nombre de Rayleigh,  $\delta\bar{T}$  la moyenne horizontale et temporelle de la température,  $N$  le nombre de Nusselt.

avec  $T$  le champ de température total,  $\vec{u}$  le champ de vitesse,  $\kappa$  la conductivité thermique du fluide,  $P$  la puissance de la lampe,  $l$  la longueur typique d'absorption. Si l'on moyenne spatialement cette équation avec les conditions aux limites isolantes et de non-pénétration sur tous les bords de la cuve, on obtient :

$$\frac{d \langle T \rangle}{dt} = \frac{P}{\rho_0 C H} \quad (4.6)$$

avec  $\langle T \rangle = \langle T \rangle_{x,y,z}(t)$  la moyenne spatiale du champ de température. En intégrant au cours du temps, il vient :

$$\langle T \rangle = \frac{P}{\rho_0 C H} t + T_0 \quad (4.7)$$

On a donc bien une moyenne spatiale de la température qui évolue linéairement en temps. En mesurant la pente de cette dérive, on a une mesure très précise du flux de chaleur  $P$  fourni au système.

Si l'on définit un nouveau champ de température où l'on retire cette dérive linéaire temporelle  $\theta(x, y, z, t) = T - \langle T \rangle_{x,y,z}(t)$  et que l'on substitue dans l'équation de la chaleur, on obtient une équation d'évolution pour ce nouveau champ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = \kappa \Delta \theta + \frac{P}{l} \left[ \exp\left(\frac{-z}{l}\right) - \frac{l}{H} \right]. \quad (4.8)$$

Cette équation d'évolution comporte un terme supplémentaire par rapport à l'équation de la chaleur, négatif, uniforme, et constant. Physiquement ce terme représente un refroidissement homogène. On va donc s'intéresser par la suite au champ  $\theta$ , et l'expérience sera exactement équivalente à une situation de convection avec une source de chauffage exponentielle et un refroidissement uniforme. En particulier, la différence de température  $\Delta T$  entre le fond et le centre de la cuve est à tout instant égale à  $\Delta \theta$ , différence entre les valeurs du champ  $\theta$  évalué aux deux mêmes points.

En figure 4.6, on voit l'évolution temporelle de deux sondes de température à l'intérieur du fluide. On a bien une dérive linéaire des températures en temps, permettant d'extraire le flux de chaleur, et un  $\Delta T$  stationnaire entre les deux températures. On peut donc bien construire un nombre de Rayleigh et un nombre de Nusselt.

### Caméra thermique

On ajoute une caméra thermique au dessus de la cuve pour filmer le champ de température à la surface du fluide. La caméra thermique que nous utilisons est le modèle A655sc de la marque FLIR. Le détecteur est à microbolomètre non refroidi à l'oxyde de Vanadium (VOx). La résolution spatiale est de 640x480 pixels. La précision en température est de l'ordre de  $\pm 30mK$ . La fréquence d'acquisition est au maximum de 50Hz, mais on utilisera une fréquence beaucoup plus lente, de l'ordre de 1Hz. La caméra

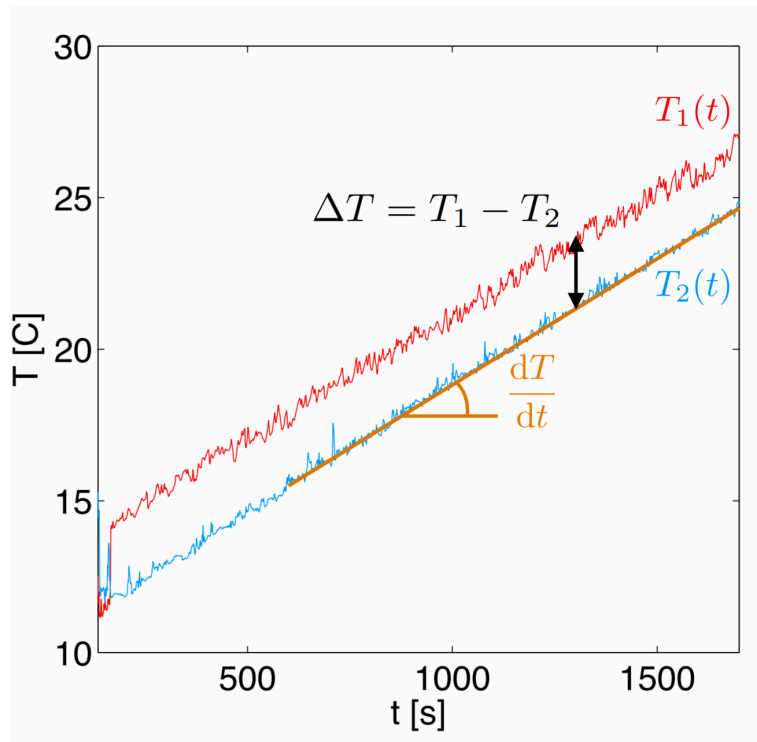


Figure 4.6: Évolution temporelle de deux sondes de température à l'intérieur de la cuve, une sonde (1) située au fond de la cuve et (2) située dans le coeur du fluide.

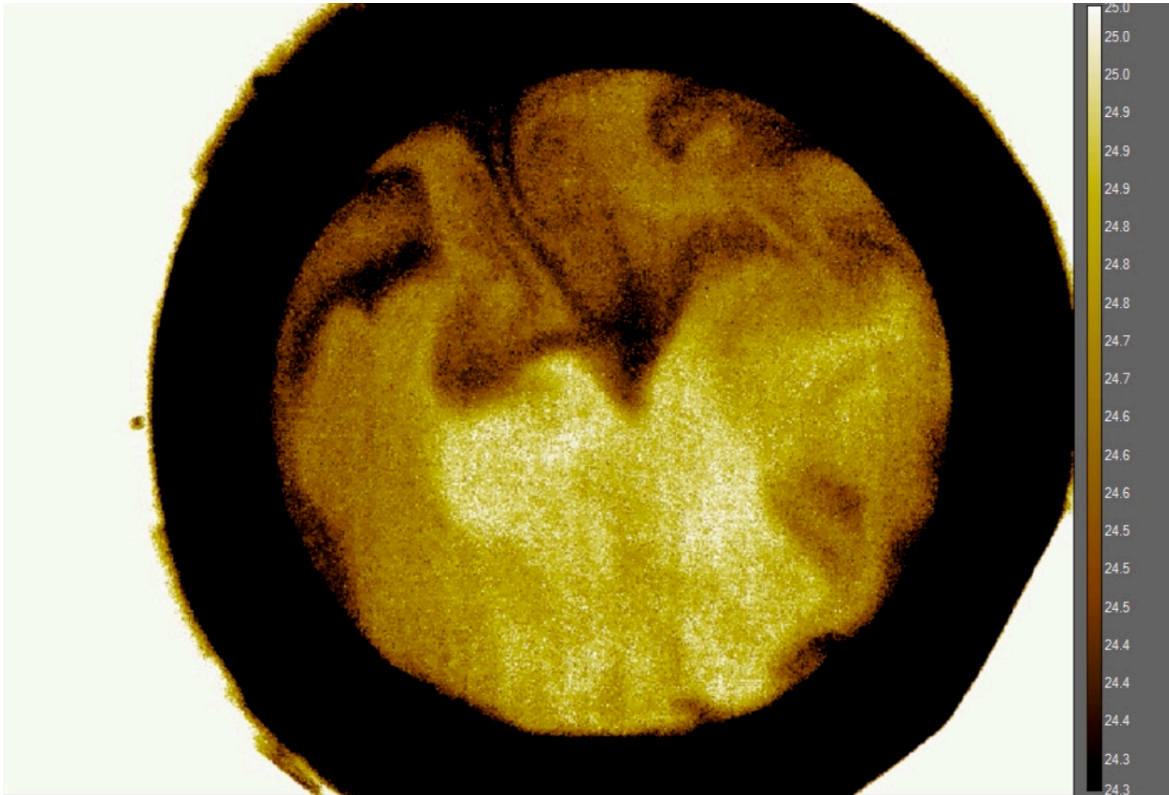


Figure 4.7: Instantané typique de la caméra thermique située au dessus du fluide.

thermique nous permet d'avoir une deuxième mesure de température, à comparer avec les valeurs typiques données par les thermocouples. Elle nous a permis de vérifier que l'écoulement moyen est bien un grand rouleau à l'échelle de la cuve. Ce rouleau garde toujours le même axe et le même sens de rotation pour différents runs expérimentaux. Ceci est probablement dû à une légère non-horizontalité de la cellule. En figure 4.7, on présente un instantané du champ de température à la surface de l'écoulement, sur lequel on voit le fluide chaud (ascendant, en bas à droite de l'image), et le fluide froid (descendant, en haut à gauche). Bien évidemment, ce caractère ascendant du fluide chaud est plus clairement visible sur un film de la surface que sur une seule image instantannée.

## 4.2 Paramètres de contrôle et nombres sans dimension

On caractérisera une configuration expérimentale à l'aide de quatre nombres adimensionnés. Il y en a un de plus que dans la configuration de Rayleigh-Bénard, car il existe un paramètre de plus : la longueur typique d'absorption de la lumière dans la cuve,  $l$ .

Les quatres nombres sont alors :

- Le nombre de Prandtl,  $Pr = \nu/\kappa$ . Il est fixé pour l'eau au voisinage de 20°C à la valeur  $Pr = 7$ .
- le nombre de Rayleigh,  $Ra = \frac{\alpha g H^3 \Delta T}{\nu \kappa}$ . Ce n'est pas un paramètre de contrôle dans notre expérience, puisque l'on fixe le flux radiatif imposé et non la différence typique de température. Il pourrait donc paraître préférable de construire un nombre de Rayleigh basé sur le flux de chaleur au lieu de la différence de température. Cependant, on préfère construire un nombre de Rayleigh standard basé sur la différence de température mesurée, pour pouvoir plus facilement comparer nos résultats à la bibliographie existante, en particulier pour le cas standard de Rayleigh-Bénard.
- le nombre de Nusselt :  $Nu = \frac{PH}{\lambda \Delta T}$ . Il mesure le rapport entre le flux radiatif imposé, et le flux diffusif typique associé à la différence de température  $\Delta T$  qui s'établit dans la cuve.
- la longueur d'absorption adimensionnée  $l/H$ . C'est le paramètre additionnel de notre étude, qui nous permet de passer continuellement d'un chauffage au voisinage immédiat de la paroi à un chauffage partiellement volumique. On gardera ce paramètre de contrôle constant pour chaque courbe Nusselt-Rayleigh.

Pour déterminer de façon précise la loi asymptotique Nusselt-Rayleigh, on a besoin de parcourir une grande plage de valeurs de ces nombres en échelle logarithmique. Il n'est pas facile ni adapté de faire grandement varier le flux de chaleur imposé au système. D'abord pour des raisons pratiques, car il n'est pas facile de faire varier grandement la tension d'entrée de la lampe aux halogénures métalliques. On pourrait filtrer la lumière en entrée, mais cela alourdirait le dispositif expérimental. De plus et surtout, pour l'expérience, on doit se placer dans des conditions où les fuites thermiques, proportionnelles à la différence de température  $T_{fluide} - T_{extérieur}$ , sont faibles devant le flux de chaleur imposé. Si l'on veut parcourir au moins une décade en nombre de Nusselt en variant le flux lumineux, on aura beaucoup de mal à remplir cette condition, en particulier pour les flux faibles.

A la place, on va donc plutôt faire varier le paramètre  $H$ . On réalisera donc la même expérience avec différents niveaux de remplissage de la cuve. Cela a pour intérêt d'être très efficace, car le nombre de Rayleigh dépend très fortement de  $H$  (en  $H^3$ ), une variation d'un facteur 10 permettant de parcourir environ 3 décades en Rayleigh. Cela demande de supposer que les dimensions latérales (ou le rapport d'aspect) ne jouent pas de rôle sur la loi constitutive Nusselt-Rayleigh. Cela est bien vérifié pour une expérience de Rayleigh-Bénard (?) et semble être vérifié aussi dans notre cas, comme le montrera l'accord à venir entre expériences et simulations numériques. On fait bien attention à garder le paramètre de contrôle adimensionné  $l/H$  constant lorsque l'on varie la hauteur de fluide  $H$ .

### 4.2.1 Données brutes. Séries temporelles

On présente en figure 4.6 des séries temporelles pour les deux sondes situées au fond de la cuve (sonde numéro 1) et dans l'intérieur du fluide (sonde numéro 2), à mi-hauteur ( $z = H/2$ ). Les 2 sondes sont centrées horizontalement. Comme prévu, on observe une dérive commune des deux signaux de température. Superposé à cette dérive s'installe une différence de température  $T_1(t) - T_2(t)$  stationnaire au voisinage de la température ambiante.

Pour extraire la différence de température  $\Delta T$ , on moyenne temporellement  $T_1(t) - T_2(t)$  sur une fenêtre où la température du fluide est proche de la température de la pièce. C'est le moment de l'expérience où les fuites thermiques entre la cuve et l'extérieur sont minimales. On prend une fenêtre de  $+2$  degrés /  $-2$  degrés autour de la température ambiante mais les résultats sont robustes au choix arbitraire de cette fenêtre.

Pour extraire le flux de chaleur imposé au système, on prend la pente moyenne de la dérive temporelle de la sonde numéro 2. On obtient la dérive en degrés par seconde  $\frac{dT}{dt}$ . On redimensionne pour obtenir un flux de chaleur  $P$  en Watt par unité de surface :

$$P = \rho H c_p \frac{dT}{dt} \quad (4.9)$$

On peut ainsi construire les nombres de Nusselt et Rayleigh.

## 4.3 Précautions à prendre et déroulé d'une expérience

Un schéma du dispositif expérimental est présenté en figure 4.8, ainsi qu'une photo en figure 4.9. Outre la lampe et la cuve remplie du mélange eau-encre, on note l'existence d'un étage d'écrantage thermique. En effet, il faut s'assurer qu'il y a une bonne isolation thermique entre la lampe et la cuve ; on ne voudrait pas que de l'air chauffé directement par la lampe atteigne la cuve et chauffe le fluide contenu dans celle-ci par conduction. Pour que l'ensemble du chauffage se fasse via les radiations, on place un étage intermédiaire entre la lampe et la cuve constitué d'une plaque de métal horizontale à l'intérieur de laquelle circule de l'eau maintenue à une température froide, de l'ordre de  $16^\circ\text{C}$ . La plaque de métal est trouée pour laisser passer la lumière de la lampe. Sur le trou, on place un récipient en verre contenant de l'eau elle aussi maintenue à  $16^\circ\text{C}$ . Ce récipient et l'eau qu'il contient jouent un autre rôle très important dans l'expérience : ils retirent toutes les longueurs d'onde qui sont absorbées par l'eau sans encre (infrarouges, ultraviolets). C'est nécessaire car les infrarouges sont absorbés sur une taille typique très faible, de l'ordre du micron, ce qui viendrait polluer notre chauffage exponentiel en hauteur. Ainsi seules les longueurs d'onde du visible contribuent au chauffage du fluide, et nous avons un très bon contrôle sur ces longueurs

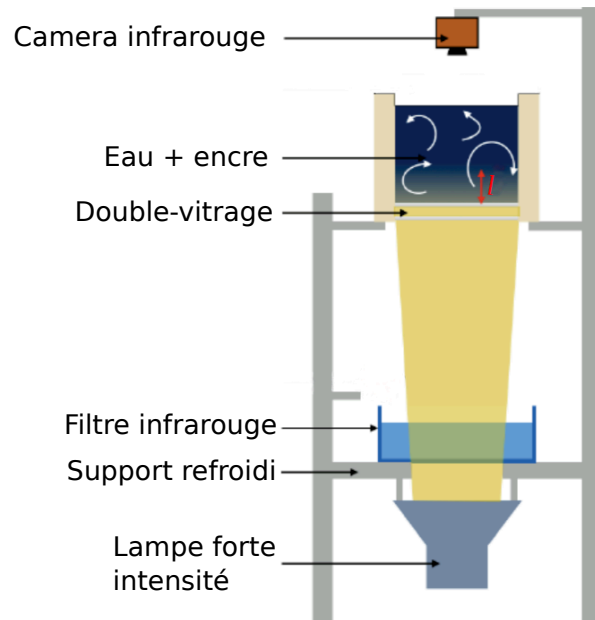


Figure 4.8: Schéma de l'expérience.

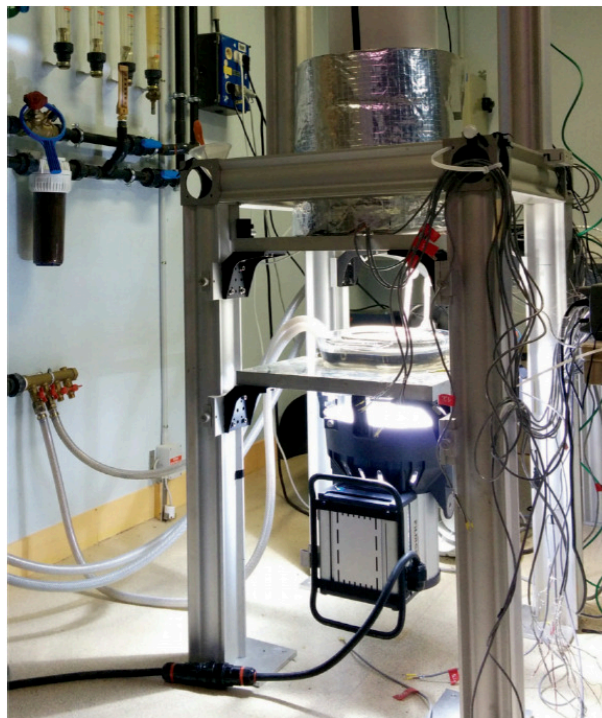


Figure 4.9: Photo de l'expérience.

d'onde. Sur le côté de l'expérience, on positionne des ventilateurs pour créer une circulation d'air et chasser l'air chaud hors de la pièce. Le déroulé d'une expérience est le suivant :

- On commence par préparer le fluide nécessaire. On a besoin de préparer une solution eau et encre correspondant à la longueur d'absorption voulue pour la mesure. Pour cela, on a calibré l'absorptivité molaire de l'encre de Chine utilisée en effectuant une courbe de puissance transmise à travers la cuve à différentes concentrations en plaçant un luxmètre à la sortie de la cuve. On a donc la correspondance entre la longueur d'absorption typique du mélange voulue et la concentration en encre nécessaire. On effectue la dilution.
- On va verse dans la cuve une quantité de mélange eau-encre dans la cuve jusqu'à obtenir la hauteur  $H$  de fluide voulue, en fonction de la gamme de nombre de Rayleigh visée.
- Avant de démarrer l'expérience proprement dite, on commence par refroidir le fluide jusqu'à une température entre 8 et 12°C. Ceci permet d'avoir un régime établi lorsque la température de la cuve atteint la température de la pièce du fait du chauffage radiatif. On a utilisé différentes méthodes pour refroidir le fluide initialement, une méthode efficace étant de verser de l'azote liquide doucement dans la cuve.
- On place ensuite le couvercle et les deux sondes de température dans la cuve comme représenté dans la figure 4.2 pour mesurer  $\Delta T$ . Avec ce dispositif, il faut choisir entre mesurer  $\Delta T$  ou faire des observations à la caméra thermique.
- On allume la lampe et l'écoulement de convection se met en place.
- On laisse les températures dériver jusqu'à environ 35°C, température à laquelle la température moyenne du fluide est bien supérieure à la température ambiante, et les fuites thermiques commencent à être notables.
- On choisit une fenêtre de moyennage au voisinage de la température ambiante, où la pente de la dérive temporelle est quasi-constante. Cela garantit que les fuites thermiques par les parois de la cuve sont négligeables. En pratique, cela correspond à une fenêtre de 4°C autour de la température ambiante.



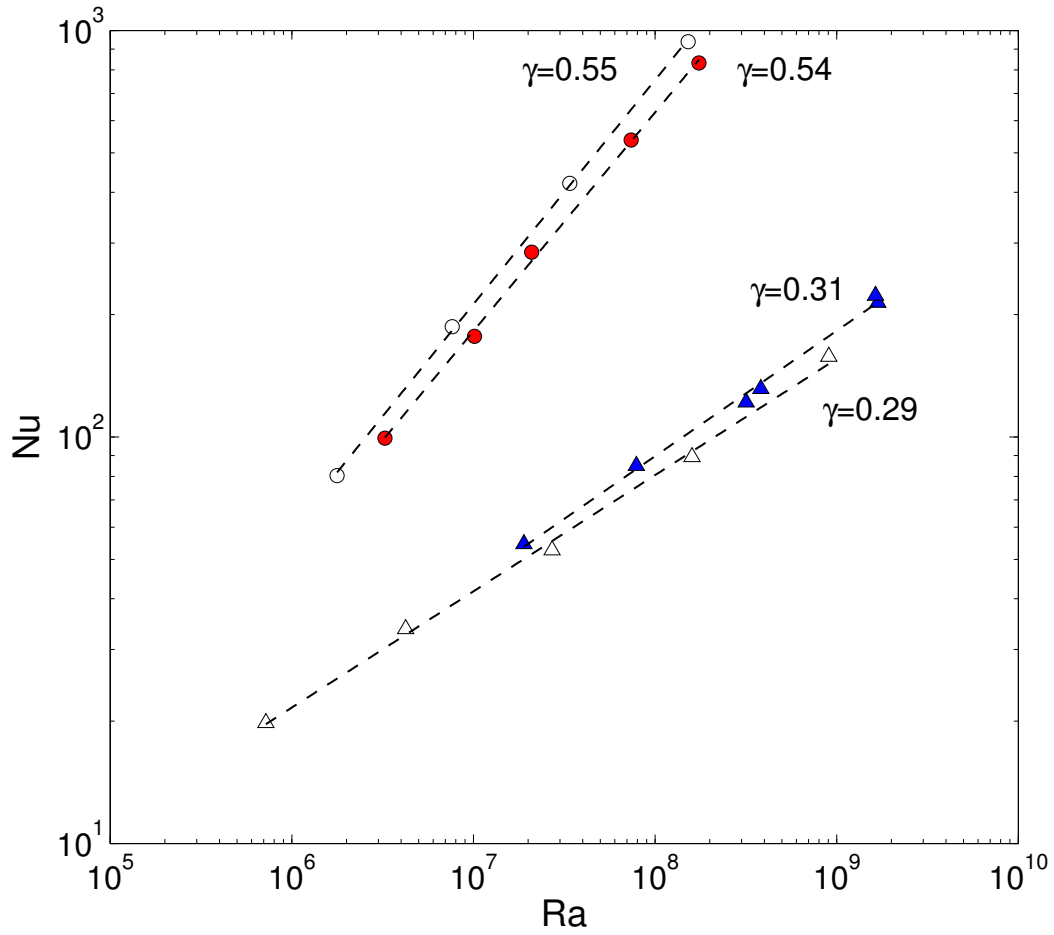


Figure 4.10: Courbes Nusselt versus Rayleigh pour les deux cas extrêmes, petite longueur d'absorption ( $l/H < 10^{-4}$ ) pour les triangles (cas Rayleigh-Benard) et grande longueur d'absorption ( $l/H = 0.05$ ) pour les cercles. En symboles pleins sont représentés les points expérimentaux et en symboles creux les DNS 3D correspondantes. Les valeurs de  $\gamma$  sont les exposants des fits en loi de puissance correspondants.

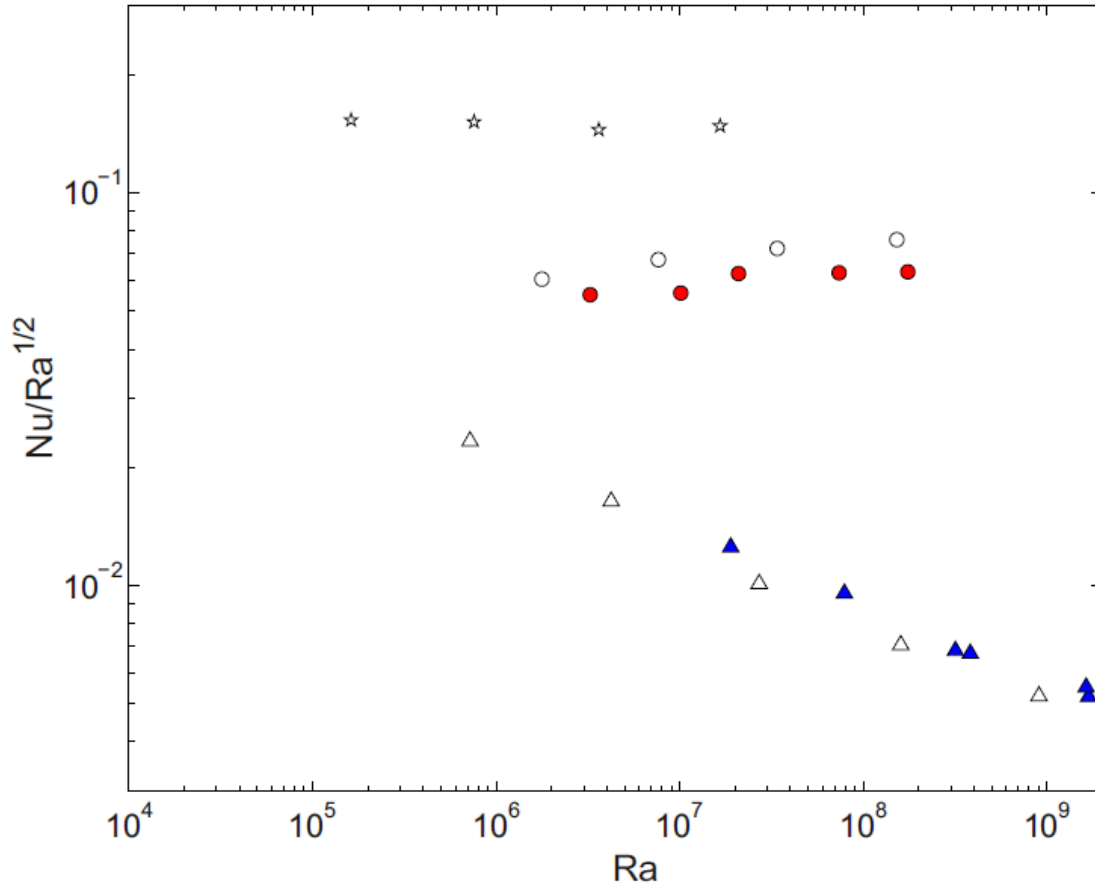


Figure 4.11: Nombre de Nusselt compensé par  $Ra^{1/2}$  en fonction du nombre de Rayleigh. Les données obtenues pour  $l/H = 0.05$  forment un plateau à haut Rayleigh. Ce plateau est encore plus net sur une série de simulations numériques effectuées pour  $l/H = 0.1$  et  $Pr = 1$ , indiquées par des étoiles.

## 4.4 Résultats

### 4.4.1 Nusselt versus Rayleigh

On présente en figure 4.10 les courbes Nusselt-Rayleigh pour les deux cas extrêmes qui nous intéressent : longueur d'absorption beaucoup plus grande que les tailles de couches limites et longueur d'absorption beaucoup plus petite que les tailles de couches limites. Dans le cas à faible longueur d'absorption, on trouve une loi de puissance avec un exposant de 0.31, cohérent avec les valeurs trouvées dans la littérature pour des expériences de Rayleigh-Bénard pures, lorsque la chaleur est intégralement injectée dans les couches limites. Dans le cas à grande longueur d'absorption, la chaleur n'est majoritairement pas injectée dans les couches limites, on trouve un exposant de 0.54. Cette valeur est très proche de la prédiction du "régime ultime", 0.5. Outre les incertitudes expérimentales, on pense le fait qu'elle y soit légèrement supérieure dû à des effets de viscosité finie. En effet, lors de simulation à un nombre de Prandtl plus faible,  $Pr = 1$ , cet exposant se rapproche du 0.5 attendu. Ce phénomène est visible sur la figure 4.11, où l'on représente le nombre de Nusselt divisé par  $Ra^{1/2}$ . Les points de mesure dans le cas à grande longueur d'absorption sont bien alignés sur une droite horizontale, confirmant l'exposant de régime ultime 1/2 observé.

Ces résultats viennent donc confirmer clairement le fait qu'un chauffage radiatif partiellement en volume, sur une taille typique grande devant les tailles de couches limites, permet un transfert de chaleur plus efficace, gouverné par la turbulence, en accord avec la prédiction d'un "régime ultime de convection". Comme pour les résultats de simulation numérique 2D, on se demande dans la partie suivante comment se fait la transition entre ces deux cas extrêmes (de Rayleigh-Bénard vers le régime ultime), et ce qu'il se passe pour des longueurs d'absorption intermédiaires.

### 4.4.2 Dépendance en longueur d'absorption

On a donc réalisé de nouvelles mesures pour des longueurs d'absorption comprises entre les valeurs extrêmes présentées précédemment. Les mesures ont été réalisées par Vincent Bouillaut lors de son stage de Master 2 au laboratoire, et les résultats sont présentés en figure 4.12. Ces résultats expérimentaux sont cohérents avec les résultats trouvés en DNS 2D dans le chapitre précédent. On voit qu'il existe une dépendance en  $l/H$ , le nouveau paramètre du système, pour la relation Nusselt-Rayleigh. Cette dépendance a été interprétée dans le modèle présenté précédemment. Il prédit deux régimes différents suivant la taille de la couche limite (comparée à  $l$ ). Ces deux régimes ont des scalings différents et leur transition dans l'espace Nusselt-Rayleigh a été calculée au chapitre 3.

On peut donc de manière identique vérifier ce modèle avec les données expérimentales. C'est ce que l'on fait en figure 4.13 en traçant le rescaling des données. Le rescaling est bon, les courbes se superposent bien sur une courbe maîtresse, le point de transition

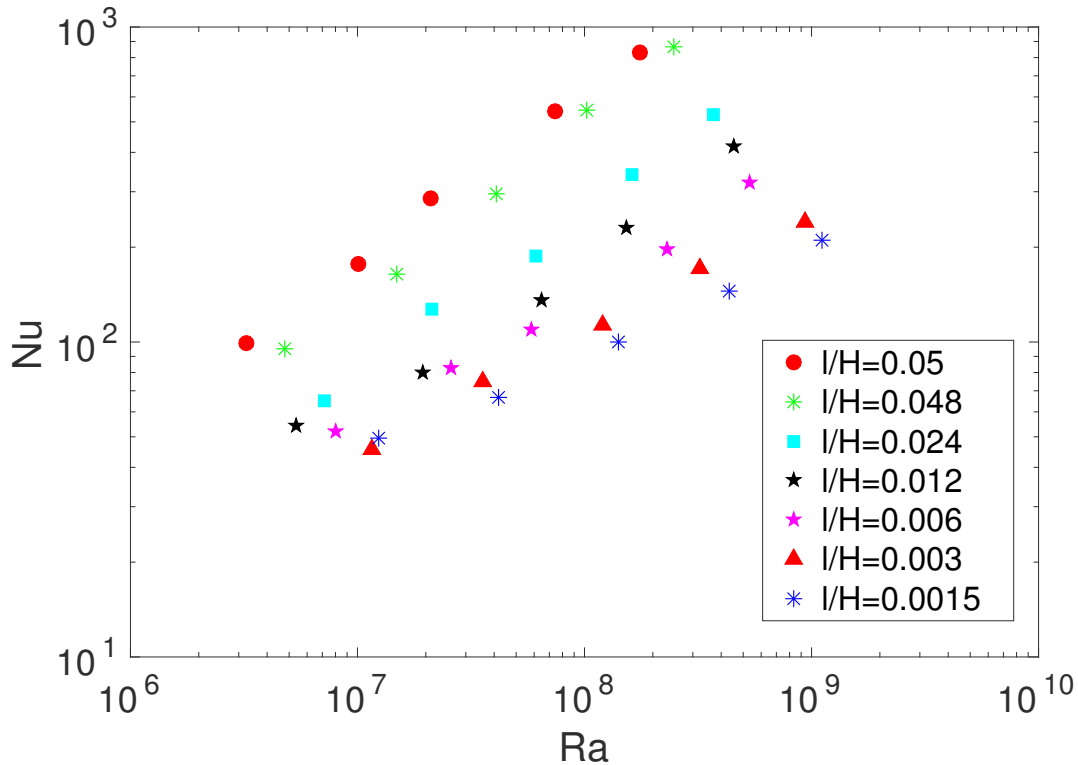


Figure 4.12: Courbes Nusselt versus Rayleigh pour différentes valeurs de longueurs d'absorption  $l$ . Les valeurs de  $l$  adimensionnées sont spécifiées dans la légende.

entre les régimes est bien situé au point de coordonnées  $(1, 1)$ , et la loi d'échelle dans le régime de grand Rayleigh (et donc petites tailles de couches limites) est bien respectée avec un exposant  $\gamma \approx 0.5$ . On confirme donc la dépendance en  $\frac{l}{H}$  de la loi Nusselt - Rayleigh dans le régime ultime :  $Nu \sim \frac{l}{H} Ra^{1/2}$ .

### 4.4.3 Profils de température

Bien que le modèle issu des simulations 2D semble conduire à un bon rescaling sur la figure 4.13, il est intéressant de constater que les hypothèses du modèle ne sont, en fait, pas vérifiées par le système 3D. En effet, le modèle suppose que toute la différence de température est contenue dans une fine couche limite au fond du domaine. Considérons alors les profils de température moyennée horizontalement pour des DNS 3D, représentés sur la figure 4.14. Dans le cas limite de Rayleigh-Bénard,  $l/H \rightarrow 0$ , les gradients de température sont effectivement contenus uniquement dans une couche limite. Cependant, pour  $l/H = 0.05$ , le profil de température est très différent : il présente deux différences de températures, qui s'établissent sur deux tailles typiques bien distinctes. Nous avons schématisé ce profil en figure 4.15: une première différence

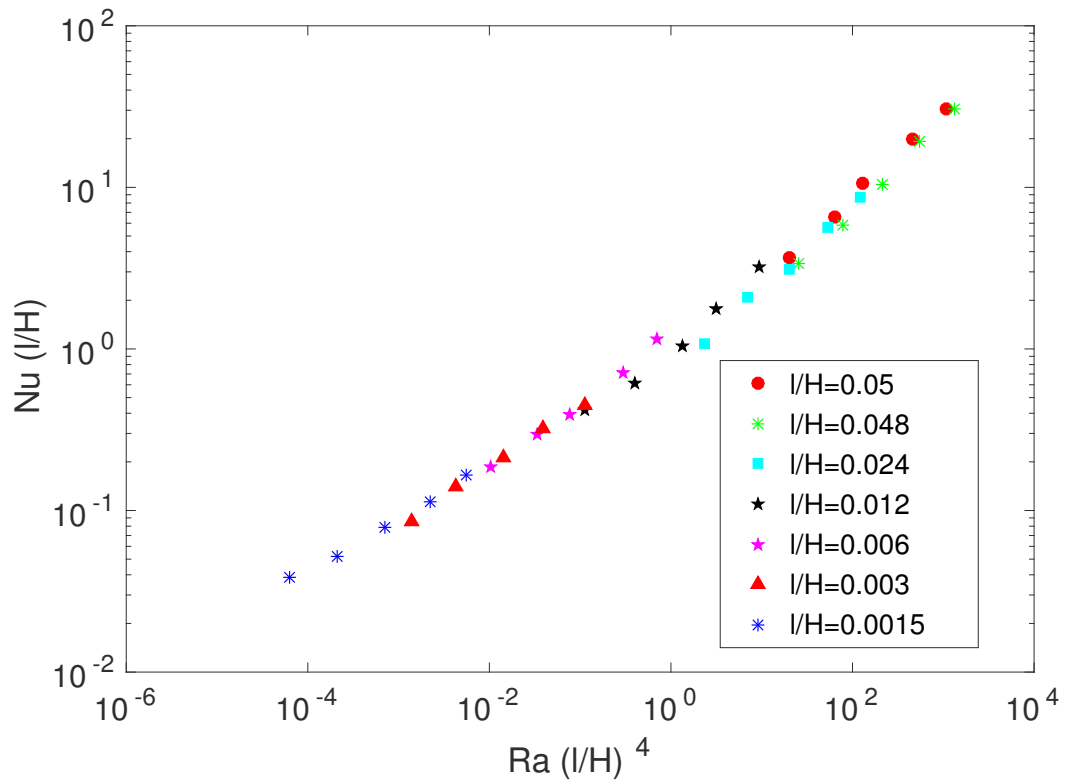


Figure 4.13: Rescaling des courbes Nusselt versus Rayleigh. Le régime de convection pleinement turbulente est situé sur le côté droit du graphique : les couches limites y sont petites car les vitesses sont plus grandes à haut nombre de Rayleigh. La transition vers ce régime a lieu pour une abscisse et une ordonnée de l'ordre de 1.

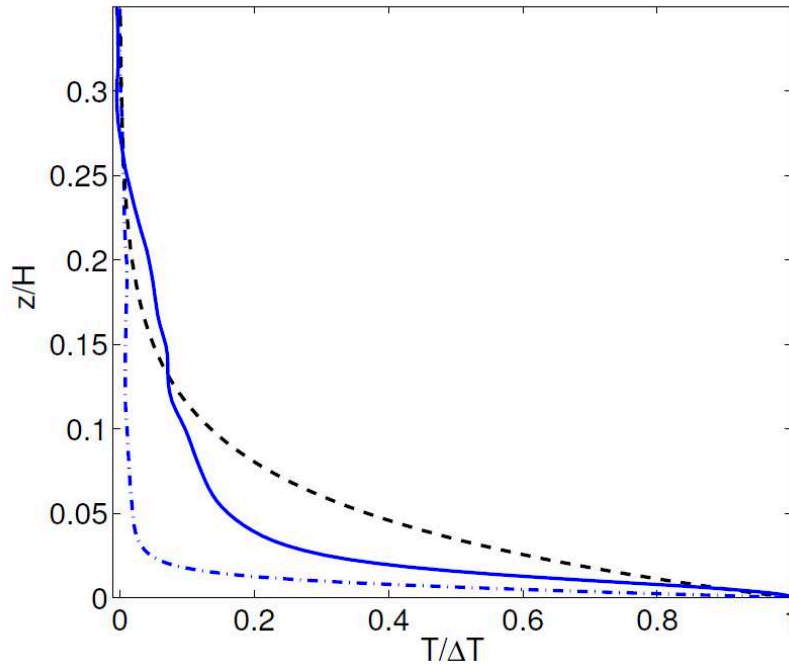


Figure 4.14: Profils de température moyennée horizontalement, normalisés par  $\Delta T$ , obtenus en simulations numériques 3D. ligne pleine :  $l/H = 0.05$ ; ligne pointillée-tirée:  $l/H \rightarrow 0$ . La ligne tiretée noire représente la forme de la fonction de chauffage volumique.

de température  $(\Delta T)_l$  se forme sur la taille typique  $l$  d'absorption, tandis qu'une seconde différence de température  $(\Delta T)_{BL}$  se forme sur une taille typique de couche limite,  $\delta \ll l$ . On va donc maintenant présenter un nouveau modèle qui capture correctement cette structure du profil de température.

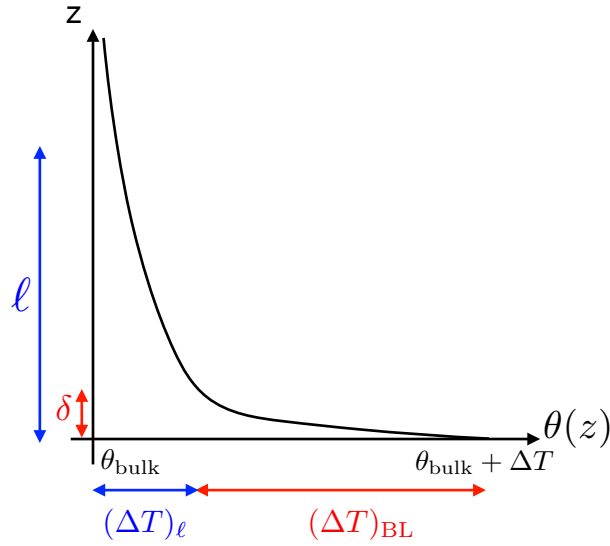


Figure 4.15: L'analyse des simulations de convection 3D présentées au chapitre 3 révèle la structure schématisée ici pour le profil vertical de température : il existe une différence de température  $(\Delta T)_l$  à l'intérieur de la couche d'absorption et une différence de température  $(\Delta T)_{BL}$  à l'intérieur d'une couche limite de taille  $\delta \ll l$ .

## 4.5 Modèle de rouleau de convection chauffé radiativement

Le nouveau modèle que l'on va présenter dans cette partie est illustré par la figure 4.16. On considère que le mouvement de convection forme un rouleau, turbulent. On étudie une particule de fluide qui suit approximativement une ligne de champ de l'écoulement moyen. Proche de la paroi à gauche du système, la particule de fluide est à la température de l'intérieur du fluide. Elle est advectée vers le bas par le rouleau de convection et entre dans la zone de chauffage en bas du système. Elle traverse alors la cuve horizontalement, dans la zone de chauffage. Elle va alors être chauffée et sa température va augmenter de la température de l'intérieur du fluide  $T_{bulk}$  à une température  $T_{bulk} + \Delta T$ , que l'on cherche à déterminer, lorsqu'elle atteint le coin en bas à droite. Tant que la particule est proche du fond de la cuve, on a  $z \ll \delta \ll l$ , et l'équation 4.8 devient approximativement :

$$\frac{D\theta}{Dt} \simeq \frac{P}{\rho Cl} \quad (4.10)$$

où  $\frac{D}{Dt}$  est la dérivée totale. Pour un rouleau de rapport d'aspect 1, le temps mis par la particule de fluide pour aller du coin en bas à gauche au coin en bas à droite est  $\Delta t \sim H/U$ , où  $U$  est la vitesse typique du rouleau de convection. On suppose que

la vitesse est donnée par la vitesse de chute libre d'une particule de fluide :

$$U \sim \sqrt{\alpha g \Delta T H} \quad (4.11)$$

Alors l'augmentation de température au cours de cette trajectoire sera :

$$\Delta T \sim \frac{P}{\rho C l} \Delta t \sim \frac{P H}{\rho C l U} \sim \frac{P H}{\rho C l \sqrt{\alpha g \Delta T H}} \quad (4.12)$$

Et donc le nombre de Nusselt sera :

$$Nu \sim \frac{l}{H} Pr^{1/2} Ra^{1/2} \quad (4.13)$$

Le particule de fluide chauffée va ensuite monter dans la cuve. Elle sort de la zone de chauffage et se mélange avec le coeur du fluide. Lorsque cette particule de fluide reviendra dans la zone de chauffage, elle sera à la température de l'intérieur du fluide. On note que la loi d'échelle (4.13) est identique à celle obtenue au chapitre précédent, (3.30). La différence principale entre les deux modèles est qu'ici, toute particule passant à une hauteur  $z \lesssim l$  du fond de la cuve sera chauffée de manière significative, d'où un profil vertical de température qui s'étend sur une hauteur  $l$ .

### Point de transition

Pour vérifier la compatibilité entre la prédiction 4.13 et les données expérimentales, on s'intéresse de nouveau à la transition entre les deux régimes asymptotiques. Pour les faibles longueurs d'absorption ou les petits nombres de Rayleigh, on s'attend à retrouver le régime de Rayleigh-Benard. Un argument de couche limite marginalement stable donne la loi  $Nu \sim Ra^{1/3}$ , c'est à dire pas de dépendance en nombre de Prandtl  $Pr$ . Pour les grands nombres de Rayleigh,  $l$  est plus grand que les tailles de couches limites. La chaleur est injectée dans l'intérieur du fluide turbulent et le régime 4.13 s'installe. On note  $(Ra_{tr}, Nu_{tr})$  les coordonnées du point de transition entre ces deux régimes dans l'espace  $(Ra, Nu)$ . Alors à l'intersection entre les deux régimes :

$$Nu_{tr} \sim Ra_{tr}^{1/3} \sim \frac{l}{H} Pr^{1/2} Ra_{tr}^{1/2} \quad (4.14)$$

ce qui donne :

$$Ra_{tr} \sim Pr^{-3} \left( \frac{l}{H} \right)^{-6} \quad Nu_{tr} \sim Pr^{-1} \left( \frac{l}{H} \right)^{-2} \quad (4.15)$$

Pour vérifier les prédictions de ce modèle, on trace en figure 4.17 les nombres de Rayleigh et Nusselt mis à l'échelle avec leurs valeurs respectives à la transition,  $\frac{Ra}{Ra_{tr}}$  et  $\frac{Nu}{Nu_{tr}}$ . Les données se rassemblent bien sur une courbe maîtresse. Cela confirme la dépendance de  $Nu$  en  $l/H$  et  $Ra$  dans les deux régimes.



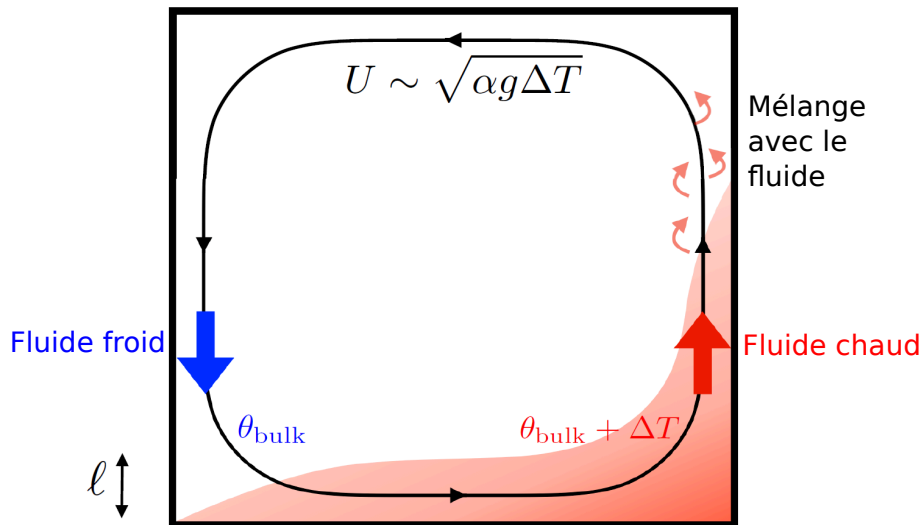


Figure 4.16: Modèle d'un rouleau de convection chauffé de manière radiative. La ligne noire est une ligne de courant de l'écoulement moyen. Près du coin en bas à gauche, une particule de fluide froide à la température de l'intérieur du fluide entre dans la zone de chauffage. Elle chauffe au fur et à mesure de son trajet le long de la paroi du bas, augmentant sa température de  $\Delta T$  en un temps  $H/U$ . La particule de fluide atteint sa température maximale lorsqu'elle passe près du coin en bas à droite. Elle commence alors à monter et suit le mouvement moyen tout en se mélangeant avec le coeur du fluide.

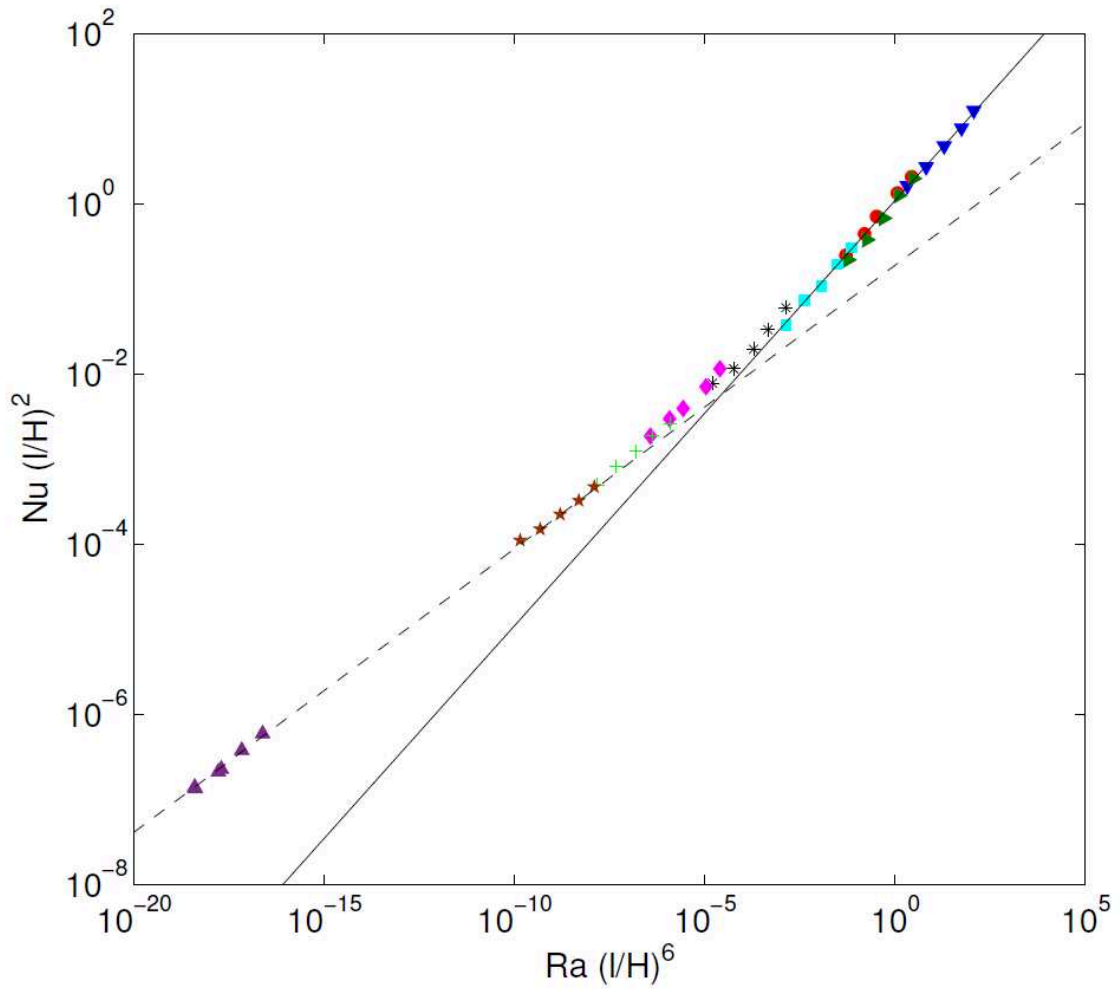


Figure 4.17: Nombres de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, mis à l'échelle avec leurs valeurs au point de transition, pour différentes valeurs de la longueur d'absorption. Les données indiquent une transition claire entre un exposant 1/3 (ligne pointillée) et un exposant 1/2 (ligne continue). Les symboles sont :  $\triangle$ :  $l = 5 \cdot 10^{-6}$  m;  $*$ :  $l/H = 0.0015$ ;  $+$ :  $l/H = 0.0030$ ;  $\diamond$ :  $l/H = 0.0060$ ;  $*$ :  $l/H = 0.012$ ;  $\square$ :  $l/H = 0.024$ ;  $\triangleright$ :  $l/H = 0.048$ ;  $\circ$ :  $l/H = 0.05$ ;  $\nabla$ :  $l/H = 0.096$ .

## 4.6 Discussion : dépendance en nombre de Prandtl

La dépendance en nombre de Prandtl  $Pr$  ne peut pas être vérifiée avec le dispositif expérimental actuel. Cependant, on souhaite insister sur le fait que les couches limites influent sur la dépendance en Prandtl du nombre de Nusselt. La loi d'échelle la plus générale que l'on puisse écrire avec l'ensemble des nombres sans dimensions est de la forme :

$$Nu = const. \left( \frac{l}{H} \right)^\beta Ra^\gamma Pr^\chi \quad (4.16)$$

On va montrer que les couches limites peuvent engendrer un changement persistant de l'exposant  $\chi$  à haut nombre de Rayleigh, tout en laissant les valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$  inchangées.

Proche de la paroi du bas il existe une couche limite visqueuse pour que le champ de vitesse satisfasse la condition aux limites de non-glissement. La vitesse est donc plus faible pour une particule de fluide qui se déplace dans cette couche limite. Sa phase de chauffage dans le modèle précédent est donc plus longue, et sa température sera plus élevée qu'une particule de fluide située dans la zone de chauffage mais hors de la couche limite visqueuse. Il existe donc aussi une couche limite thermique, ce qui nous donne le profil de température moyenné horizontalement et temporellement dessiné en figure 4.15. On s'attend à un saut de température  $(\Delta T)_l$  sur la taille typique  $l$ , et un autre  $(\Delta T)_{BL}$  sur la couche limite, où la diffusion est le processus dominant. Dans une couche limite de taille  $\delta \ll l$ , la chaleur injectée est  $Q(z=0)\delta = P\delta/l$ . Ce flux de chaleur est transféré à l'extérieur de la couche limite par diffusion, ce qui donne l'équilibre :

$$P \frac{\delta}{l} \sim \frac{\lambda(\Delta T)_{BL}}{\delta} \quad (4.17)$$

On a donc  $(\Delta T)_{BL}$  en fonction de la taille de couche limite  $\delta$ . La différence de température totale est la somme de  $(\Delta T)_{BL}$  et de  $(\Delta T)_l$ , que l'on a estimé en 4.12. On a donc :

$$\Delta T = (\Delta T)_l + (\Delta T)_{BL} = c_0 \frac{PH^2}{\lambda l} Pr^{-1/2} Ra^{-1/2} + c_1 \frac{PH^2}{\lambda l} \frac{\delta^2}{H^2} \quad (4.18)$$

où les  $c_i$  sont des constantes sans dimension. On va ensuite s'intéresser à la taille de couche limite  $\delta$ . On différencie les cas de grand et de petit nombre de Prandtl.

### Fluides à bas nombre de Prandtl

On note  $\delta_\nu$  la taille de couche limite visqueuse. L'estimation classique est :

$$\delta_\nu \sim \frac{H}{\sqrt{Re}} \quad (4.19)$$

où le nombre de Reynolds est défini  $Re = UH/\nu$ . On peut remplacer avec la vitesse de chute libre, et il vient :

$$\delta_\nu \sim HPr^{1/4}Ra^{-1/4} \quad (4.20)$$

Dans un fluide à bas nombre de Prandtl, la couche limite thermique a la même taille, car la température est très bien mélangée dans l'intérieur du fluide. On remplace dans 4.18 et on obtient :

$$\Delta T = c_0 \frac{PH^2}{\lambda} Pr^{-1/2} Ra^{-1/2} + c_2 \frac{PH^2}{\lambda} Pr^{+1/2} Ra^{-1/2} \quad (4.21)$$

Pour les fluides à bas nombre de Prandtl, le second terme est plus petit que le premier d'un facteur  $Pr$ , il sera négligeable pour  $Pr \ll 1$ . La correction due à la couche limite est donc ici négligeable.

### Fluides à grand nombre de Prandtl

Si le nombre de Prandtl est grand, la couche limite thermique sera bien plus petite que la couche limite visqueuse  $\delta_\nu$ . Le champ de vitesse au voisinage de la paroi inférieure peut être modélisé par un cisaillement constant, le cisaillement étant  $S \sim \frac{U}{\delta_\nu}$ . Avec un raisonnement analogue à (Shraiman & Siggia, 1990), la taille de la couche limite thermique  $\delta$  sera alors :

$$\delta \sim \left(\frac{\kappa H}{S}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{\kappa H \delta_\nu}{U}\right)^{1/3} \sim HPr^{-1/12} Ra^{-1/4} \quad (4.22)$$

On remplace dans l'équation 4.18, il vient :

$$\Delta T = c_0 \frac{PH^2}{\lambda} Pr^{-1/2} Ra^{-1/2} + c_3 \frac{PH^2}{\lambda} Pr^{-1/6} Ra^{-1/2} \quad (4.23)$$

La correction provenant de la couche limite a donc ici une contribution prépondérante pour des grands nombres de Prandtl  $Pr \gg 1$ . Dans cette limite, la loi d'échelle devient :

$$Nu = \frac{PH}{\lambda \Delta T} \sim \frac{l}{H} Pr^{1/6} Ra^{1/2} \quad (4.24)$$

C'est donc un changement persistant pour l'exposant  $\chi$ , au sens où la loi d'échelle est modifiée pour un nombre de Rayleigh arbitrairement grand.

## 4.7 Conclusion

Cette partie a rendu compte de la grande majorité du travail effectué au cours du thèse. Le résultat le plus important est l'observation expérimentale claire de la signature du régime ultime de convection, avec la loi d'échelle  $Nu \sim Ra^{1/2}$ . Cette observation a

été réalisée en construisant une expérience de convection dont la source de chaleur est radiative, partiellement volumique, localisée proche de la paroi basse du fluide. Pour cela, on a éclairé un liquide coloré avec une lampe à forte puissance. La lumière est absorbée exponentiellement par le fluide à son entrée dans la cuve, réalisant une source de chaleur interne au fluide sur une taille typique contrôlée par la concentration en encre. Lorsque cette taille typique est grande devant les tailles des couches limites, la chaleur est en bonne partie injectée directement dans le cœur de l'écoulement turbulent, et son transfert par convection n'est pas limité par les couches limites diffusives, comme dans le régime décrit par Malkus. En conséquence, on observe un établissement du régime ultime pour des nombres de Rayleigh modérément élevés. Cela donne une réalité physique aux arguments théoriques et numériques idéalisés des chapitres précédents.

On a caractérisé ce régime plus avant en étudiant la dépendance du nombre de Nusselt en longueur d'absorption  $l$ , le nouveau paramètre introduit dans ce système de convection. Il existe une transition nette entre deux régimes, le régime de type Rayleigh-Bénard et le régime ultime, lorsque  $l$  devient plus grand que les tailles de couches limites. Pour les deux régimes, on a quantifié la dépendance en  $l$ . On propose un modèle qui l'explique, cohérent aussi bien avec les simulations numériques qu'avec les données expérimentales.

Outre une étude plus poussée des caractéristiques de ce régime, par exemple par l'étude du champ de vitesse, la dépendance qui reste à établir pour caractériser entièrement ce régime est la dépendance en nombre de Prandtl. Cela constitue un vrai challenge expérimental, surtout pour les régimes de très bas nombre de Prandtl, qui est le plus pertinent pour nombre d'écoulements naturels, en particulier dans les cas des objets astrophysiques. Une étude numérique paraît plus prometteuse pour étudier l'influence de  $Pr$  sur plusieurs décades, et atteindre le régime de bas nombre de Prandtl.

## Chapter 5

# Épilogue : quelle est l'efficacité maximale d'une convection engendrée par des sources et puits de chaleur?

Nous avons mis en évidence dans cette thèse le fait qu'un chauffage partiellement volumique, couplé à un refroidissement uniforme en volume, permet d'atteindre le régime de longueur de mélange ou régime "ultime" de la convection thermique turbulente. Ce régime joue un rôle particulier dans le système de Rayleigh-Bénard, car on peut montrer qu'il correspond à un transport maximal de chaleur sous des contraintes simples telles que l'incompressibilité et la conservation de l'énergie. Cette idée a été émise initialement par Malkus, qui s'est demandé si la convection turbulente ne s'arrangeait pas pour maximiser le transport de chaleur tout en respectant ces contraintes physiques simples. Le problème variationnel correspondant fut résolu par L.N. Howard en 1963 (Howard, 1963), qui montra que le maximum en question réalise  $Nu \simeq cste \times Ra^{1/2}$  : dans la configuration de Rayleigh-Bénard, le nombre de Nusselt ne peut pas croître plus rapidement que la racine carrée du nombre de Rayleigh. Cependant, comme nous l'avons précisé en introduction, les données expérimentales obtenues dans les dispositifs de Rayleigh-Bénard pointent en fait vers une loi  $Nu \sim Ra^{1/3}$ , au lieu de cet exposant  $1/2$ . La convection turbulente de Rayleigh-Bénard ne semble donc pas maximiser le flux de chaleur. A l'inverse, nous avons montré que notre dispositif de convection chauffée radiativement conduit spontanément à ce régime en  $Nu \sim Ra^{1/2}$ . La question est donc : pour la nouvelle configuration introduite dans cette thèse, le régime  $Nu \sim Ra^{1/2}$  correspond-il au flux de chaleur maximal que le fluide peut transmettre? De façon surprenante, nous allons montrer qu'il n'en est rien. En effet, nous allons maintenant expliciter une solution exacte du système de convection chauffée et refroidie en volume qui réalise un régime de convection encore plus efficace que le régime ultime, avec une loi d'échelle  $Nu \sim Ra$ . Si, pour un expérimentateur, ce résultat peut sembler n'être

qu'une curiosité théorique, il montre clairement que le régime de longueur de mélange  $Nu \sim Ra^{1/2}$  ne correspond pas à une efficacité maximale du transfert de chaleur.

## 5.1 Retour à un chauffage sinusoïdal en $z$

On s'intéresse à un fluide contenu dans une boîte bi-dimensionnelle carrée de hauteur  $H$ . Une source fournit au fluide une quantité de chaleur par unité de temps et de volume constante et inhomogène  $Q(z) = Q_0 \sin(2\pi \frac{z}{H})$ . Le fluide est donc chauffé dans la moitié basse de la boîte et refroidi dans la moitié haute.

Le système est exactement identique au système étudié pour l'analyse de stabilité linéaire. On part donc des équations 2.2 :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{u} + \alpha g T \vec{e}_z \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T + \frac{Q(z)}{\rho_0 C} \quad (5.1c)$$

On choisit les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$z = H\tilde{z}, \quad t = \frac{H^2}{\kappa} \tilde{t}, \quad T = \frac{\nu \kappa}{\alpha g H^3} \tilde{T}, \quad p = \frac{\nu \rho_0 \kappa}{H^2} \tilde{p}, \quad \vec{u} = \frac{\kappa}{H} \vec{\tilde{u}} \quad (5.2)$$

On les substitue dans le système d'équations 5.1 et l'on obtient le système d'équations adimensionnées suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \quad (5.3a)$$

$$\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\tilde{u}} = Pr [-\vec{\nabla} \tilde{p} + \Delta \vec{\tilde{u}} + \tilde{T} \vec{e}_z] \quad (5.3b)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\nabla} \tilde{T} = \Delta \tilde{T} + 2\pi Ra_Q \sin(2\pi \tilde{z}) \quad (5.3c)$$

Il y apparait deux nombres sans dimension :

$$\text{le nombre de Prandtl :} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (5.4a)$$

$$\text{le nombre de Rayleigh construit sur le flux :} \quad Ra_Q = \frac{Q_0 \alpha g H^5}{2\pi \nu \kappa^2 \rho_0 c_p} \quad (5.4b)$$

On construit le nombre de Rayleigh sur le flux dans cette configuration parce que les conditions aux limites imposent une différence de température nulle entre les parois

haute et basse,  $\Delta T = 0$ . On oubliera dorénavant les tilde sur les grandeurs adimensionnées pour simplifier les notations. Dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel, on peut écrire sans perte de généralité le champ de vitesse comme le rotationnel d'une fonction scalaire  $\Psi$  telle que :

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times (\Psi \vec{e}_y) = (-\partial_z \Psi, 0, \partial_x \Psi) \quad (5.5)$$

En prenant le rotationnel de 5.3 pour éliminer le gradient de pression et en projetant sur l'axe  $\vec{e}_y$ , le système d'équations 5.3 devient alors

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta \Psi) = Pr [\Delta^2 \Psi + \partial_x T] \quad (5.6a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(\Psi, T) = \Delta T + 2\pi Ra_Q \sin(2\pi z) \quad (5.6b)$$

avec  $J$  le crochet de poisson défini comme  $J(A, B) = \partial_x A \partial_z B - \partial_x B \partial_z A$

## 5.2 Solution exacte à grand nombre de Rayleigh

On cherche à étudier une solution stationnaire du système à grands nombres de Rayleigh avec les conditions aux limites correspondantes au système free-slip, parois haute et en basse parfaitement conductrices fixées à la même température, et parois latérales parfaitement isolantes :

$$u = \partial_z \Psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, 1 \quad (5.7a)$$

$$w = \partial_x \Psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{à} \quad z = 0, 1 \quad (5.7b)$$

$$T = 0 \quad \text{à} \quad z = 0, 1 \quad (5.7c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, 1 \quad (5.7d)$$

On cherche une solution stationnaire à haut nombre de Rayleigh. On va donc annuler les dérivées temporelles.

Il est aussi justifiable (et sera justifié quantitativement a posteriori) de négliger le terme de diffusion thermique pour les régimes de haut Rayleigh, le phénomène de diffusion étant négligeable devant l'advection pour transporter la chaleur dans le fluide.

On obtient alors le système d'équations :

$$J(\Psi, \Delta \Psi) = Pr [\Delta^2 \Psi + \partial_x T] \quad (5.8a)$$

$$J(\Psi, T) = 2\pi Ra_Q \sin(2\pi z) \quad (5.8b)$$



Ce système d'équations et de conditions aux limites admet une solution analytique exacte de la forme :

$$\Psi(x, z) = \Psi_m \sin(\pi x) \sin(\pi z), \quad T = T_m \cos(\pi x) \sin(\pi z) \quad (5.9)$$

On a alors  $\Delta\Psi = -2\pi^2\Psi$  et chacun des termes donne :

$$J(\Psi, \Delta\Psi) = -2\pi^2\Psi^2 + 2\pi^2\Psi^2 = 0 \quad (5.10a)$$

$$\Delta^2\Psi = -2\pi^2\Delta\Psi = 4\pi^4\Psi \quad (5.10b)$$

$$\partial_x T = -\pi T_m \sin(\pi x) \sin(\pi z) \quad (5.10c)$$

$$\begin{aligned} J(\Psi, T) &= \pi^2 \Psi_m T_m \cos^2(\pi x) \sin(\pi z) \cos(\pi z) + \pi^2 \Psi_m T_m \sin^2(\pi x) \sin(\pi z) \cos(\pi z) \\ &= \frac{\pi^2 \Psi_m T_m}{2} \sin(2\pi z) \end{aligned} \quad (5.10d)$$

En substituant dans le système 5.8, on obtient les équations permettant de déterminer les amplitudes :

$$0 = 4\pi^4 \Psi_m - \pi T_m \quad (5.11a)$$

$$\frac{\pi^2 \Psi_m T_m}{2} = 2\pi Ra_Q \quad (5.11b)$$

La solution obtenue à grand nombre de Rayleigh est donc :

$$T(x, z) = 4\pi Ra_Q^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \sin(\pi z) \quad (5.12a)$$

$$\Psi(x, z) = \frac{Ra_Q^{\frac{1}{2}}}{\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi z) \quad (5.12b)$$

On peut justifier a posteriori l'hypothèse formulée sur l'ordre de grandeur des termes de l'équation 5.6b à grand nombre de Rayleigh :

$$\Delta T \propto \sqrt{Ra_Q} \ll J(\Psi, T) \propto Ra_Q, \quad 2\pi Ra_Q \sin(2\pi z) \propto Ra_Q \quad (5.13)$$

### 5.3 Validation numérique

Pour valider et illustrer les résultats analytiques, on cherche à résoudre numériquement le système d'équations :

$$\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta\Psi) = Pr [\Delta^2\Psi + \partial_x T] \quad (5.14a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(\Psi, T) = \Delta T + 2\pi Ra_Q \sin(2\pi z) \quad (5.14b)$$

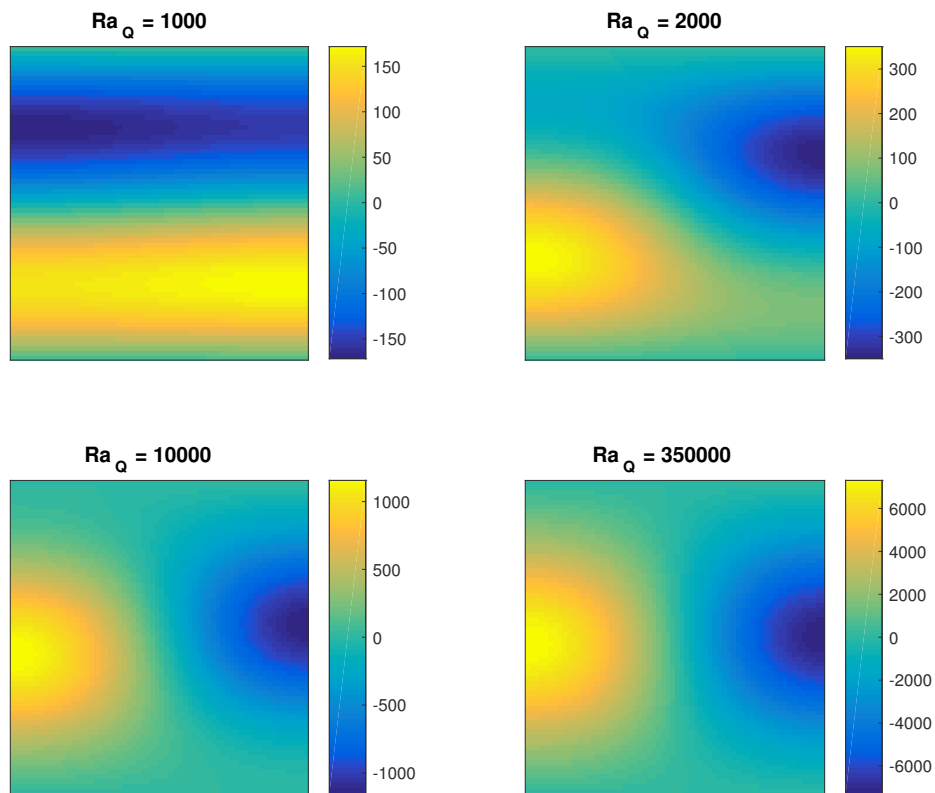


Figure 5.1: Champ de température dans l'état stationnaire

Pour résoudre ce problème, on a écrit un code basé sur une méthode pseudo-spectrale pour la résolution spatiale à chaque pas de temps, avec un algorithme Runge-Kutta d'ordre 4 pour la propagation temporelle.

Les champs sont décomposés sur la base discrète des sinus et cosinus comme suit :

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{p,q=0}^n \tilde{\psi}(p, q, t) \sin(p\pi x) \sin(q\pi z) \quad (5.15a)$$

$$T(x, y, t) = \sum_{p,q=0}^n \tilde{T}(p, q, t) \cos(p\pi x) \sin(q\pi z) \quad (5.15b)$$

Ceci permet d'assurer le respect des conditions aux limites du problème.

La première observation surprenante issue de ces simulations numériques est que le système évolue vers un état indépendant du temps à temps long, et ce pour toutes les valeurs de  $Ra_Q$  considérées. La figure 5.1 montre le champ de température dans cet état stationnaire pour différents  $Ra_Q$ . On voit que la structure du champ de température ressemble de plus en plus à la solution théorique 5.12 au fur et à mesure que l'on augmente  $Ra_Q$ . Pour comparer quantitativement les solutions numériques et analytiques, on trace sur la figure 5.2 le maximum spatial des champs  $T(\vec{x})$  et  $\Psi(\vec{x})$  dans l'état stationnaire ainsi que les amplitudes  $T_m$  et  $\psi_m$  de la solution théorique. L'accord est excellent à partir de  $Ra = 10^4$  : la solution théorique que nous avons calculée est effectivement la solution réalisée par le système, et ce pour des nombres de Rayleigh arbitrairement grands.

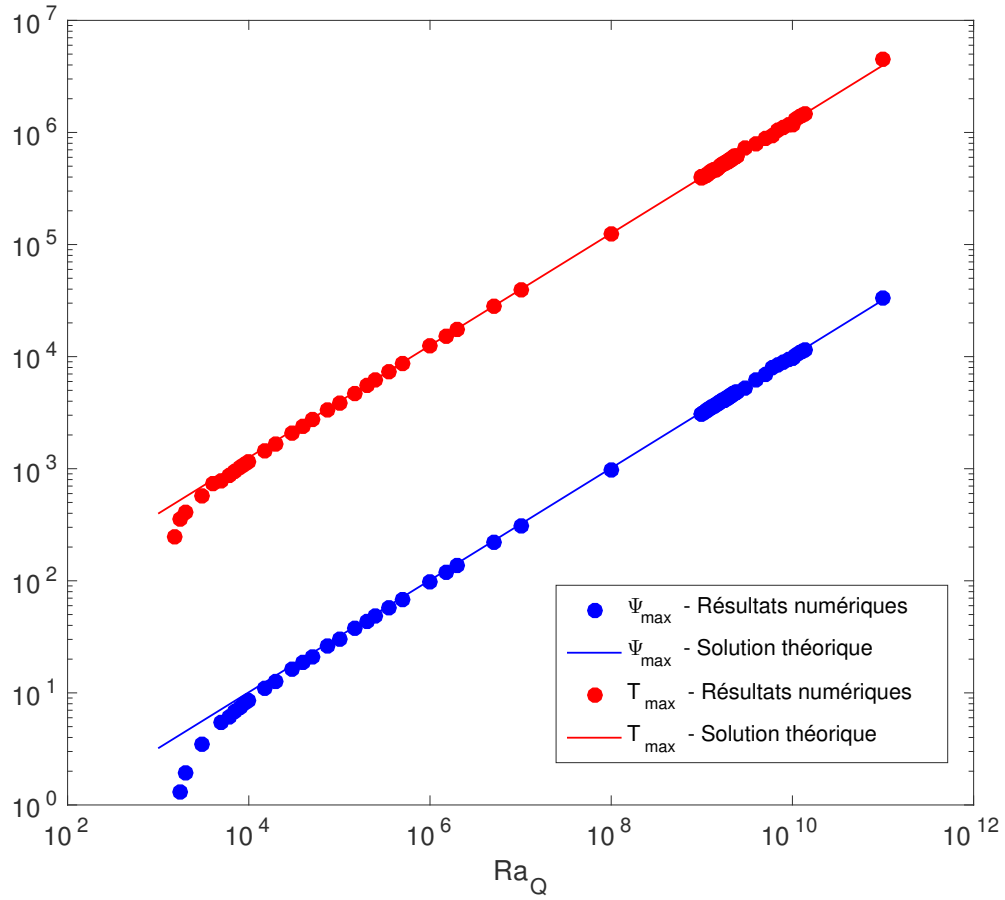


Figure 5.2: Les points discrets représentent les résultats des simulations numériques. En rouge, le maximum spatial de  $T(\vec{x})$ , et en bleu le maximum de  $\Psi(\vec{x})$ . Les droites continues représentent les amplitude  $T_m = 4\pi Ra_Q^{1/2}$  et  $\psi_m = Ra_Q^{1/2}/\pi^2$  de la solution analytique, valide asymptotiquement à haut  $Ra_Q$ .

## 5.4 Discussion

Le système considéré dans ce chapitre présente quelques caractéristiques remarquables. D'abord c'est un système de convection pour lequel on peut calculer une solution asymptotique exacte à haut nombre de Rayleigh. De plus, et de façon quelque peu surprenante, cette solution est stable et est effectivement celle réalisée par le système à haut nombre de Rayleigh. Le système considéré est évidemment très idéalisé : il est bidimensionnel, et on voit difficilement comment imposer cette forme sinusoidale de la source de chaleur. Cependant, dans ce cadre académique, il est intéressant d'avoir un écoulement modèle solution d'équations connues. Cela permet par exemple de tester des raisonnements en termes de bornes sur un écoulement bien contrôlé analytiquement, comme nous allons maintenant le faire.

En effet, cherchons à écrire la relation constitutive Nusselt versus Rayleigh. Du fait des conditions aux limites de température nulle aux deux bords, on définit ces nombres sans dimension à l'aide d'une différence de température typique à l'intérieur du fluide : on utilisera la déviation standard spatiale du champ de température adimensionné, notée  $T_{rms} = \sqrt{\langle T(\vec{x})^2 \rangle}$ , avec  $\langle . \rangle$  la moyenne volumique. On définit alors les nombres de Nusselt et de Rayleigh basés sur cette échelle caractéristique de température :

$$Ra_{T_{rms}} = T_{rms} \quad \text{et} \quad Nu = \frac{Ra_Q}{T_{rms}} \quad (5.16)$$

On peut alors récrire la solution du problème 5.12 en termes de  $Ra_{T_{rms}}$  et  $Nu$  :

$$T(x, z) = 4\pi Ra_{T_{rms}}^{\frac{1}{2}} Nu^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \sin(\pi z) \quad (5.17a)$$

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{\pi^2} Ra_{T_{rms}}^{\frac{1}{2}} Nu^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x) \sin(\pi z) \quad (5.17b)$$

On calcule ensuite la déviation standard spatiale du champ 5.17a, ce qui conduit à :

$$Ra_{T_{rms}} \sim Ra_{T_{rms}}^{\frac{1}{2}} Nu^{\frac{1}{2}} \quad (5.18)$$

et finalement :

$$Nu \sim Ra_{T_{rms}} \quad (5.19)$$

On a donc un écoulement au transfert de chaleur extrêmement efficace, plus efficace encore que le régime "ultime" de convection! De plus, cet exposant 1 dans la loi  $Nu$  vs  $Ra$  est supérieur à la borne supérieure théorique d'efficacité du transfert thermique pour un écoulement de Rayleigh-Bénard, calculée par Howard (Howard , 1963), qui donne  $Nu \sim Ra^{\frac{1}{2}}$ . Bien évidemment, il n'y a ici aucune incohérence, puisque la borne théorique n'est strictement valide que dans la géométrie de Rayleigh-Bénard, et non pour notre forçage sinusoidal volumique. Il serait intéressant de voir si une telle loi de puissance,  $Nu \sim Ra_{T_{rms}}$ , peut effectivement être réalisée en laboratoire. Néanmoins, ce type de solutions "laminaires" à hauts nombres de Reynolds est en général peu robuste

à la prise en compte d'une troisième dimension spatiale, ou de conditions aux limites plus réalistes. Dans notre expérience, pour laquelle le chauffage est exponentiel et non sinusoidal, l'écoulement dépend fortement du temps, il est pleinement turbulent, et il réalise alors  $Nu \sim Ra_{T_{rms}}^{1/2}$ .

# Conclusion

Ce travail de thèse a eu pour objectif de voir s'il était possible de s'affranchir de la limitation du transfert de chaleur due aux couches limites dans un système de convection. De très nombreux travaux expérimentaux et numériques avaient déjà été effectués avec cet objectif : en inventant de nouveaux dispositifs (rugosités aux interfaces fluide / parois, convection dans un canal vertical...) ou en cherchant à atteindre des nombres de Rayleigh toujours plus grands (fluides très peu visqueux, simulations plus performantes...).

Nous avons choisi de modifier la source de chaleur. Au lieu d'utiliser un chauffage par contact entre le fluide et les parois, on rend la source volumique et localisée sur le bas du fluide. L'ensemble de ce manuscrit a donc été l'étude numérique, théorique, et expérimentale de ce système de convection, à source partiellement volumique, dite "radiative".

Numériquement, on a utilisé le code pseudo-spectral "Dedalus" pour simuler ce système de convection. Expérimentalement, la réalisation de ce système a été un challenge passionnant. Le principe retenu est simple : on chauffe un liquide coloré avec des radiations du visible (une lampe à forte puissance). On contrôle alors très bien l'étendue spatiale de la source de chaleur à l'intérieur du fluide grâce à la concentration en colorant. Le refroidissement volumique du système, impératif, a nécessité le développement d'une méthode, appelée "méthode de la dérive" dans le manuscrit. Cette méthode, consistant à laisser le fluide se réchauffer entièrement, puis à soustraire la dérive temporelle de la moyenne spatiale de la température, permet aussi une mesure très précise du flux de chaleur imposé au système.

L'étendue spatiale de la source volumique de chaleur est d'une importance cruciale dans ce système. Elle est à comparer avec les tailles de couches limites formées aux parois.

## Source de chaleur très localisée proche de la paroi basse

On observe dans ces conditions le régime de Malkus, observé dans une expérience de Rayleigh-Bénard plus classique. Caractérisé par une loi d'échelle proche de  $Nu \sim Ra^{1/3}$ , ce régime porte la signature des couches limites. En effet, l'ensemble de la chaleur doit diffuser à travers celles-ci, processus peu efficace en terme de transfert de

chaleur. Lorsque la source de chaleur est très localisée proche de la paroi, toute la chaleur est injectée dans les couches limites et l'on se retrouve dans cette situation. Dans ce cas, le nouveau paramètre introduit dans cette configuration, la longueur d'absorption typique de la chaleur, n'a pas d'influence quantitative sur le nombre de Nusselt.

## Source de chaleur étendue sur une taille typique plus grande que les couches limites

On observe dans ces conditions la réalisation du régime ultime de convection, prédit par Spiegel et Kraichnan vers 1962. Ce régime est appelé “ultime” pour plusieurs raisons : d'une part il correspond à la loi zéro de la turbulence, c'est-à-dire que les quantités physiques à grande échelle sont indépendantes des coefficients diffusifs moléculaires (c'est la définition que nous avons retenue tout au long de cette thèse). D'autre part, selon la croyance générale il constituerait le régime asymptotique atteint à très haut nombre de Rayleigh. Enfin, il correspond à l'efficacité maximale prédite théoriquement pour le transfert de chaleur par convection dans une géométrie de Rayleigh-Bénard. Lorsque la source de chaleur a une extension spatiale typique plus grande que les tailles de couches limites, la chaleur est majoritairement injectée dans le coeur pleinement turbulent du fluide et on observe cette loi d'échelle. Dans ce cas, le nombre de Nusselt a une dépendance linéaire en la longueur d'absorption typique de la chaleur.

## Cas intermédiaires

On observe pour des longueurs d'absorption de la chaleur intermédiaires la transition entre ces deux régimes, avec des coordonnées du point de transition ( $Nu_{transition}$ ,  $Ra_{transition}$ ) déterminées théoriquement grâce un modèle simple, et vérifiées par une superposition des points expérimentaux et numériques sur une même courbe maîtresse avec rupture de pente au point de transition (en coordonnées logarithmiques).

## Ouverture et application aux écoulements naturels

Ce système de convection représente un modèle simple pour de nombreux écoulements naturels, évoqués dans l'introduction, où la source de chaleur est partiellement volumique.

Pour l'extrapoler à l'étude des objets astrophysiques, où le régime de longueur de mélange est déjà utilisé (par exemple dans les modèles 1D d'évolution stellaire) il sera nécessaire de faire une étude détaillée de la dépendance en nombre de Prandtl. En effet, la plupart des objets astrophysiques ont un nombre de Prandtl très faible. Cette étude promet d'être complexe expérimentalement, mais envisageable numériquement. Cette étude est d'autant plus intéressante qu'il existe une controverse théorique sur la dépendance en nombre de Prandtl dans le régime ultime.



Pour l'étude de la convection forcée par le soleil dans les grands lacs gelés, notre expérience est pertinente en elle-même, car le nombre de Prandtl et les gammes de paramètres de contrôle sont cohérents. Quelques ordres de grandeur le montrent. Si l'on introduit le nombre de Rayleigh basé sur le flux incident de chaleur  $Ra_P = Nu.Ra = \alpha g P H^4 / \lambda \kappa \nu$ , les données de cette thèse indiquent que le régime ultime prend place pour  $Ra_P(\ell/H)^8 > 3.10^{-7}$ . On peut comparer ce seuil avec une valeur typique de  $Ra_P$  dans un grand lac gelé au printemps (Mironov et al., 2002; Ulloa et al., 2018): avec un flux incident  $P \approx 100 W.m^{-2}$ , une longueur d'absorption typique  $\ell \approx 1m$  et une couche de mélange de profondeur  $H$  comprise entre 4 et 40 mètres, on obtient des valeurs de  $Ra_P(\ell/H)^8$  entre  $10^5$  et  $10^9$ , tout à fait dans la gamme de paramètres où le régime ultime s'installe. Le chauffage radiatif partiellement volumique – par opposition à un chauffage à flux fixé en paroi – est donc un ingrédient déterminant de la structure en température de ces lacs.

Enfin, outre l'extension des résultats de cette thèse au régime de bas  $Pr$ , une autre direction prometteuse de recherche consiste à complexifier notre système modèle en ajoutant progressivement les autres ingrédients physiques des écoulements naturels, tels que la rotation ou le champ magnétique.

La plupart des résultats de ce manuscrit ont donné lieu à la publication d'un article (Lepot et al., 2018), qui est joint en annexe à la fin.

# Bibliography

- G. Alhers, S. Grossmann, D. Lhose, Heat transfer and large-scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection, *Rev. Mod. Phys.* **81**, (2009).
- U.M. Ascher, S.J. Ruuth, R.J. Spiteri, Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations, *Applied Numerical Mathematics*, **25**, 151-167 (1997).
- J. Aubert, S. Labrosse, C. Poitou, Modelling the Palaeo-evolution of the geodynamo, *Geophys. J. Int.*, **179**, 3 (2009).
- H. Benard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Rev. Gen. Sci. Pures Appl.*, **11**, 1261-1271 (1900).
- L. Bengtsson, Mixing in ice-covered lakes, *Hydrobiologia* **322**, 91-97 (1996).
- B. Castaing, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X-Z. Wu, S. Zaleski, G. Zanetti *J. Fluid Mech.*, **204**, 1-30 (2006).
- X. Chavanne et al., Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection, *Phys. Rev. Lett.* **79**, (1997).
- X. Chavanne et al., Turbulent Rayleigh-Bénard convection in gaseous and liquid He, *Phys. Fluids* **13**, (2001).
- S. Childress, Alpha-effect in flux ropes and sheets, *Physics of the earth and Planetary interiors* **20**, 2-4 (1979).
- J. Christensen-Dalsgaard et al., The current state of solar modeling, *Science* **272**, 5266 (1996).
- A. Davaille, F. Girard, M. Le Bars, How to anchor hotspots in a convecting mantle? *Earth Planet. Sc. Lett.* **203**, 621-634 (2002).
- J.W. Deardoff, Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer, *Boundary Layer Meteorology* **7**, 1, 81-106 (1974).

- C.R. Doering, P. Constantin, Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows. III. Convection, *Phys. Rev. E* **53**, 5957 (1996).
- Y.-B. Du and P. Tong, Enhanced heat transport in turbulent convection over a rough surface, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 987 (1998).
- D. Farmer, Penetrative convection in the absence of mixing, *Quart. J. R. Met. Soc.* **101**, 869-891 (1975).
- N.A. Featherstone, B.W.Hindman, The spectral amplitude of stellar convection and its scaling in the high-Rayleigh-number regime, *ApJ* **818**, 1 (2016).
- H.E. Fiedler, R. Wille, Turbulente freie convektion tn einer horizontalen flussigkeitsschicht mit volumen-warmequelle, *International heat transfer conference* **4** (1970).
- P. Garaud, Dynamics of the solar tachocline - I. An incompressible study, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **329**, 1-17 (2002).
- J.R. Garratt, Review: the atmospheric boundary layer, *Earth. Sci. Rev.* **37**, 89-134 (1994).
- M. Gibert et al., High-Rayleigh-Number convection in a vertical channel, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 084501 (2006).
- D. Goluskin, Internally heated convection and Rayleigh-Bénard convection, *Springer*, (2016).
- S. Grossmann, D. Lhose, Scaling in thermal convection: a unifying theory, *J. Fluid Mech.*, **407**, 27-56 (2000).
- D. Gubbins, D. Alfe, G. Masters, G.D. Price, M.J. Millan, Can the Earth's dynamo run on heat alone?, *Geophys. J. Int.* **155**, 2 (2003).
- X. He et al., Transition to the ultimate state of turbulent Rayleigh-Bénard convection, *Phys. Rev. Lett.* **108**, (2012).
- M. Herant, W. Benz, S. Colgate, Postcollapse hydrodynamics of SN 1987A: two-dimensional simulations of the early evolution, *ApJ* **395**, (1992).
- L.N. Howard, Heat transport by turbulent convection, *J. Fluid Mech.* **17**, 405-432 (1963).
- H.-T. Janka, E. Müller, Neutrino heating, convection, and the mechanism of type-II supernova explosion, *Astron. Astrophys.* **306**, (1996).

- H. Johnston, C.R. Doering, Comparison of turbulent thermal convection between conditions of constant temperature and constant flux, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 064501 (2009).
- T. Jonas, A. Terzhevik, D. Mironov, A. Wüest, Radiatively driven convection in an ice-covered lake investigated using temperature microstructure technique, *J. Geophys. Res.* **108**, (2003).
- R. Kazeroni, B.K. Krueger, J. Guilet, T. Foglizzo, D. Pomarède, The non-linear onset of neutrino-driven convection in two- and three-dimensional core-collapse supernovae, *MNRAS*, **480**, 261-280 (2016).
- K.Y. Kondratyev, On the October 1970 - March 1972 complex atmospheric energetics experiment (CAENEX) results, *Abridged report to the joint organizing committee of GARP*, (1972).
- R.H. Kraichnan, Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number, *Phys. Fluids* **5**, (1962).
- F.A. Kulacki, R.J. Goldstein, Thermal convection in a horizontal fluid layer with uniform volumetric energy sources, *J. Fluid Mech.*, **55**, 271-287 (1972).
- F.A. Kulacki, A.A. Emara, Steady and transient thermal convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, *J. Fluid Mech.*, **83**, 375-395 (1977).
- F.A. Kulacki, M.E. Nagle, Natural convection in a horizontal fluid layer with volumetric energy sources, *J. Heat Transfer*, **97**, (1975)
- M. Landeau, J. Aubert, Equatorially asymmetric convection inducing a hemispherical magnetic field in rotating spheres and implications for the past Martian dynamo, *Phys. Earth Planet. Inter.* **185**, (2011).
- S.D. Lee, J.K. Lee, K.Y. Suh, Boundary condition dependent natural convection in a rectangular pool with internal heat sources, *J. Heat Transfer*, **129**, 679-682 (2006).
- S. Lepot, S. Aumaître, B. Gallet, Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection, *Proc. Nat. Acad. Sci. U S A*, **115**, 36 (2018).
- A. Limare et al., Microwave-heating laboratory experiments for planetary mantle convection *J. Fluid Mech.* **777**, 50-67 (2015).
- W.V.R. Malkus, The heat transport and spectrum of thermal turbulence, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **225**, 196-212 (1954).
- D.P. McKenzie, J.M. Roberts, N.O. Weiss, Convection in the earth's mantle: towards a numerical simulation, *J. Fluid Mech.* **62**, (1974).

- D. Mironov, A. Terzhevik, G. Kirillin, T. Jonas, J. Malm, D. Farmer, Radiatively driven convection in ice-covered lakes: Observations, scaling, and a mixed-layer model, *J. Geophys. Res.* **107**, (2002).
- J.J. Niemela, L. Skrbek, K.R. Sreenivasan, R.J. Donnelly, Turbulent convection at very high Rayleigh numbers, *Nature* **404**, 837-840 (2000).
- I.A. Olwi, F.A. Kulacki, Numerical simulation of the transient convection process in a volumetrically heated fluid layer, *ASME*, (1995).
- D. Radice et al., Neutrino-driven convection in core-collapse supernovae: high-resolution simulations, *ApJ* **820**, (2016).
- J.C. Ralph, D.N. Roberts, Free convection heat transfer measurements in horizontal liquid layers with internal heat generation, *AERE* (1974)
- Lord Rayleigh, On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **32:192**, 529-546 (1916)
- P.E. Roche, B. Castaing, B. Chabaud, B Hebral, *Phys. Rev. E* **63** 045303 (2001)
- P.-E. Roche et al., On the triggering of the ultimate regime of convection, *New. J. Phys.* **12**, (2010).
- E. Rusaouën, O. Liot, B. Castaing, J. Salort, F. Chillá, Thermal transfer in Rayleigh-Bénard cell with smooth or rough boundaries, *J. Fluid Mech.* **837**, 443-460 (2018).
- G. Shaviv, E.E. Salpeter, Convective overshooting in stellar interior models, *ApJ*, **184**, 191-200 (1973).
- Y. Shen, P. Tong, K.-Q. Xia, Turbulent convection over rough surfaces, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 908 (1996).
- B.I. Shraiman, E.D. Siggia, Heat transport in high-Rayleigh-number convection, *Phys. Rev. A* **42**, 6 (1990).
- E.A. Spiegel, A generalization of the mixing-length theory of thermal convection, *ApJ* **138**, 216 (1963).
- E.A. Spiegel, Convection in stars I. Basic Boussinesq convection, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **9**, 323-352 (1971).
- E.A. Spiegel, J.-P. Zahn, The solar tachocline, *Astron. Astrophys.* **265**, 106-114 (1992).
- E.A. Spiegel, J.-P. Zahn, The solar tachocline, *Astron. Astrophys.* **265**, 106-114 (1992).

- R. Stevens, R. Verzicco, D. Lohse, Radial boundary layer structure and Nusselt number in Rayleigh–Bénard convection, *J. Fluid Mech.* **643**, 495-507 (2010).
- S. Toppaladoddi, J.S. Wettlaufer, Penetrative convection at high Rayleigh numbers, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 043501 (2018).
- J.-C. Tisserand et al., Comparison between rough and smooth plates within the same Rayleigh–Bénard cell, *Phys. Fluids* **23**, (2011).
- A.M. Tomkins, G.C. Craig, Radiative-convective equilibrium in a three-dimensional cloud-ensemble model, *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **124**, 2073-2097 (1998).
- H.N. Ulloa, A. Wüest, D. Bouffard, Mechanical energy budget and mixing efficiency for a radiatively heated ice-covered waterbody, *J. Fluid Mech.* **852**, R1 (2018).
- P. Wei et al., Heat transport properties of plates with smooth and rough surfaces in turbulent thermal convection, *J. Fluid Mech.* **740**, 28-46 (2014).
- S. Toppaladoddi, S. Succi, J.S. Wettlaufer, Roughness as a route to the ultimate regime of thermal convection, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 074503 (2017).
- X-Z. Wu, A. Libchaber, Scaling relations in thermal turbulence : the aspect-ratio dependence, *Phys. Rev. A* **45** 842 (1992).
- Y.-C. Xie, K.-Q. Xia, Turbulent convection over rough plates with varying roughness geometries, *J. Fluid Mech.* **825**, 573-599 (2017).
- X. Zhu et al., Roughness-facilitated local  $1/2$  scaling does not imply the onset of the ultimate regime of thermal convection, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 154501 (2017).





# Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection

Simon Lepot<sup>a,1</sup>, Sébastien Aumaître<sup>a,b,1</sup>, and Basile Gallet<sup>a,1,2</sup>

<sup>a</sup>Service de Physique de l'Etat Condensé, Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA Saclay), CNRS UMR 3680, Université Paris-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France; and <sup>b</sup>Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, UMR CNRS 5672, 69007 Lyon, France

Edited by Isaac M. Held, Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, National Oceanic and Atmospheric Administration, Princeton, NJ, and approved July 31, 2018 (received for review April 23, 2018)

The absorption of light or radiation drives turbulent convection inside stars, supernovae, frozen lakes, and Earth's mantle. In these contexts, the goal of laboratory and numerical studies is to determine the relation between the internal temperature gradients and the heat flux transported by the turbulent flow. This is the constitutive law of turbulent convection, to be input into large-scale models of such natural flows. However, in contrast with the radiative heating of natural flows, laboratory experiments have focused on convection driven by heating and cooling plates; the heat transport is then severely restricted by boundary layers near the plates, which prevents the realization of the mixing length scaling law used in evolution models of geophysical and astrophysical flows. There is therefore an important discrepancy between the scaling laws measured in laboratory experiments and those used, e.g., in stellar evolution models. Here we provide experimental and numerical evidence that radiatively driven convection spontaneously achieves the mixing length scaling regime, also known as the "ultimate" regime of thermal convection. This constitutes a clear observation of this regime of turbulent convection. Our study therefore bridges the gap between models of natural flows and laboratory experiments. It opens an experimental avenue for a priori determinations of the constitutive laws to be implemented into models of geophysical and astrophysical flows, as opposed to empirical fits of these constitutive laws to the scarce observational data.

thermal convection | turbulence | geophysical and astrophysical fluid dynamics

Thermal convection drives natural flows in the atmosphere, in the oceans, and in the interior of planets and stars. The resulting turbulence controls the convective heat transport, the typical wind speed in the atmosphere, the ability of planets and stars to produce magnetic fields, and the triggering of supernova explosions inside collapsing stellar cores. The cornerstone setup to study thermal convection is the Rayleigh–Bénard one (RB), in which fluid is heated from below by a hot plate and cooled from above by a cold one. One then relates the convective heat transport enhancement to the temperature difference between the plates: One seeks a power-law relation  $Nu \approx Ra^\gamma$ , where the Nusselt number  $Nu$  represents the dimensionless heat flux and the Rayleigh number  $Ra$  characterizes the internal temperature gradients (1–4). The goal is to determine the scaling laws that govern the fully turbulent regime: These are the “constitutive laws” of thermal convection, to be implemented, e.g., into simpler evolution models of astrophysical objects.

However, despite decades of investigations of the RB setup, the asymptotic regime of turbulent heat transport remains strongly debated and an outstanding challenge of nonlinear physics and turbulence research (5–10). Indeed, although the interior flow is strongly turbulent and transports heat very efficiently, this heat first has to be diffused across the boundary layers near the top and bottom plates. The temperature gradient is then confined to these lazy boundary layers (1); standard

dimensional analysis arguments give a heat transport exponent  $\gamma = 1/3$ , while the measured values are typically  $\gamma \approx 0.3 \pm 0.03$ . These measurements are in stark contrast with the prediction of a much more efficient mixing length scaling regime of thermal convection—the so-called “ultimate” regime—where the heat flux is controlled by turbulence only (2–4). In this fully turbulent regime, viscosity and diffusivity become irrelevant. One can then introduce either a mixing length over which blobs of convecting fluid typically rise and fall, or directly “turbulent” values of viscosity and thermal diffusivity. Regardless of the details of the model, the key point is that these newly introduced quantities are independent of the molecular diffusion coefficients  $\kappa$  and  $\nu$  (but possibly depend on their ratio  $Pr$ ; see *Discussion*), and so is the heat flux; simple dimensional analysis then leads to  $\gamma = 1/2$ . In the following, we simply refer to the value  $\gamma = 1/2$  as the mixing length or ultimate scaling regime of thermal convection. The reader should keep in mind that it is the value of  $\gamma$  that we investigate in the present study, more than the well-foundedness of the mixing length assumptions, which are known to be questionable in many respects (4). When extrapolated to the extreme parameter values of geophysical and astrophysical flows, the difference between the  $\gamma = 1/3$  boundary layer regime and the  $\gamma = 1/2$  mixing length regime translates into variations by orders of magnitude of the dimensionless heat flux or temperature gradients.

There is a considerable controversy over the possible experimental detection of the mixing length regime in the RB setup

## Significance

Turbulent convection is ubiquitous in geophysical and astrophysical contexts: It drives winds in the atmosphere and currents in the ocean, it generates magnetic fields inside planets and stars, and it triggers supernova explosions inside collapsing stellar cores. In many such natural flows, convection is driven by the absorption of incoming radiation (light or neutrinos). We designed an experiment to reproduce such radiatively driven convection in the laboratory. In contrast with convection driven by heating and cooling plates, our radiative heating setup achieves the “ultimate” regime of turbulent convection, which is the one relevant to many natural flows. Such experiments can yield the constitutive laws of turbulent convection, to be implemented into geophysical and astrophysical models.

Author contributions: S.L., S.A., and B.G. designed research, performed research, analyzed data, and wrote the paper.

The authors declare no conflict of interest.

This article is a PNAS Direct Submission.

Published under the PNAS license.

<sup>1</sup>S.L., S.A., and B.G. contributed equally to this work.

<sup>2</sup>To whom correspondence should be addressed. Email: basile.gallet@cea.fr.

This article contains supporting information online at [www.pnas.org/lookup/suppl/doi:10.1073/pnas.1806823115/-DCSupplemental](http://www.pnas.org/lookup/suppl/doi:10.1073/pnas.1806823115/-DCSupplemental).



(5–10): Most experiments report an increase in the exponent  $\gamma$  at the highest achievable Rayleigh numbers, but a clear ultimate regime with  $\gamma = 1/2$  has yet to be observed in both experiments and direct numerical simulations (DNS). Insightful strategies have therefore been designed to minimize the role of the boundaries (11–15). For instance, the use of rough plates disrupts the boundary layer structure and enhances the heat transport significantly, with  $\gamma \simeq 0.5$  over some finite range of Rayleigh number. However, recent studies have shown that this effect is significant at moderate Rayleigh numbers only, while, for strong imposed temperature gradients and fixed geometry, the system settles back into the boundary layer controlled regime (16–18). Global rotation offers another way to alter the boundary layer dynamics and increase the exponent  $\gamma$  (19, 20), albeit for an intermediate range of  $Ra$  only, and with a heat flux that is smaller than its nonrotating counterpart (21).

A clear observation of the mixing length regime is all the more desirable in that it is the scaling law currently used in astrophysical contexts. As an example, stellar evolution models are to be integrated over the lifespan of a star, which makes DNS of the fluid dynamics prohibitively expensive and requires a parametrization of the convective effects (4, 22–24). Such parametrizations are based on the mixing length scaling law, and, in the absence of experimental data to back it up, one needs to fit the details of the convective model to the scarce observational data, which strongly restricts the predictive power of the whole approach. There is therefore an important research gap between laboratory experiments of turbulent convection, on the one side, and parametrizations of geophysical and astrophysical convection on the other.

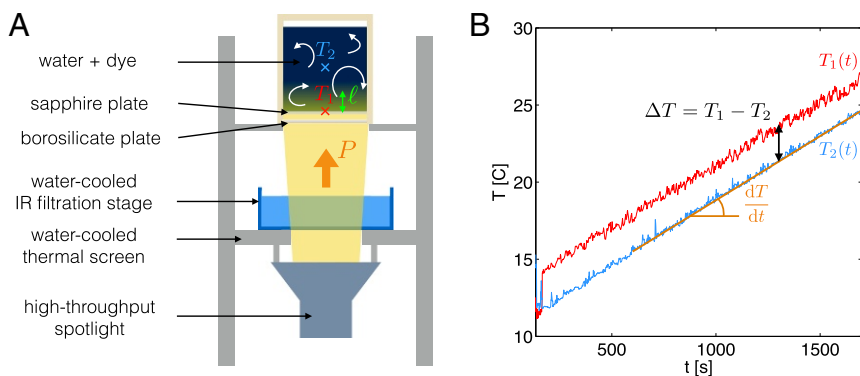
The present study bridges this gap by proposing an innovative experimental strategy leading to the mixing length regime of thermal convection. It is based on the following observation: In contrast with RB convection, many natural flows are driven by a flux of light or radiation, instead of heating and cooling plates. A first example is the mixing of frozen lakes in the spring, due to solar heating of the near-surface water (25–27). A second example is stellar interiors (28) and the sun in particular, inside of which heat radiated by the core is transferred through the radiative zone before entering the convective one (29–31). A related third example is convection in Earth’s mantle, which may be internally driven by radioactive decay (32, 33). Finally, the powering of supernova explosions by neutrino absorption in the collapsing stellar core provides an additional astrophysical example (34–36).

In this article, we report on an experimental setup showing that radiative heating spontaneously achieves the mixing length regime of thermal convection. Indeed, radiative heating differs drastically from the RB setup, with important consequences for the transported heat flux: Heat is input directly inside an absorption layer of finite extension  $\ell$ . When this absorption length is

thicker than the boundary layers, radiative heating allows us to bypass the boundary layers and heat up the bulk turbulent flow directly.

The combination of radiation and convection is also ubiquitous in atmospheric physics. Solar radiation heats up the ground, which, in turn, emits black-body radiation in the infrared. This outgoing radiation is absorbed by CO<sub>2</sub> and water vapor, each layer of atmosphere absorbing part of the IR flux and emitting its own black-body radiation. Solving this problem leads to the radiative equilibrium solution for the atmospheric temperature profile. However, the lower part of this radiative profile is strongly unstable to convective motion. The effect of such convection is to restore the mean adiabatic lapse rate in the lower part of the atmosphere (the troposphere). This is the equivalent of saying that, in the bulk of turbulent Boussinesq convection, the temperature field is well mixed and approximately independent of height. While this crude modeling of convection is well satisfied by the atmospheric data in the bulk of the troposphere, it fails in the atmospheric boundary layer (ABL). Models of the ABL indeed require parametrizations of the turbulent convective fluxes to reproduce the observed temperature profiles (37). The simplest configuration to study this problem corresponds to a constant temperature surface below an atmosphere subject to volumic (IR) cooling (38). Although this is the most generic situation in the ABL, occasionally, the hot ground can induce IR heating in the first few hundred meters of atmosphere, in which case the fluid is subject to both volumic heating and cooling (39, 40). The experiment described further could provide a simple laboratory model for these two situations.

Fig. 1A provides a sketch of the experimental setup: A high-throughput projector shines at a cylindrical cell which has a transparent bottom plate. The cell contains a homogeneous mixture of water and dye. Dye absorbs the incoming light over a typical height  $\ell$ . Through Beer–Lambert law (41), this leads to a source of heat that decays exponentially away from the bottom boundary over a height  $\ell$ : The local heating rate is proportional to  $\exp(-z/\ell)$ , with  $z$  as the vertical coordinate measured upward from the bottom plate. By changing the concentration of the dye, we can tune the thickness  $\ell$  of the heating region. For large dye concentration, we heat up the fluid in the immediate vicinity of the bottom plate, in a similar fashion to the RB setup. By contrast, for low dye concentration, we heat up the bulk turbulent flow directly, therefore bypassing the boundary layers. We can thus produce both RB-type heating and bulk radiative heating within the same experimental device. As described in *SI Appendix*, the practical implementation of radiative heating requires extreme care: First, the choice of the dye is critical, as it must have a uniform absorbance over the visible spectrum. Second, the powerful spotlight has an efficiency of roughly 20%, with most of the input electrical power being turned into heat. Special



**Fig. 1.** (A) Radiatively driven convection in the laboratory. A powerful spotlight shines at an experimental cell containing a mixture of water and dye. The light is absorbed over a height  $\ell$  inversely proportional to the dye concentration. We measure the internal temperature gradients using two thermocouples:  $T_1$  touches the bottom sapphire plate while  $T_2$  is at middepth. (B) Examples of time series. The two temperature signals increase linearly with time, while a quasi-stationary temperature gradient  $\Delta T = T_1 - T_2$  is rapidly established. The slope  $dT/dt$  gives direct access to the transported heat flux.

attention must be paid to avoiding parasitic heating of the fluid, through a combination of water-cooled thermal screens and IR filtration stages.

Another key aspect of the experiment is to avoid boundary layers at the cooling side. Traditionally, studies of internally heated convection consider cooling at a solid isothermal boundary (42). The resulting boundary layers near the cold plate then control the heat transport efficiency and lead to scaling laws similar to those of standard RB convection (43). The approach developed herein deviates from standard experiments: We run the experiment in quasi-stationary state, the fluid being radiatively heated without a cooling mechanism. The resulting temperature field increases linearly with time. On top of this linear drift, the turbulent flow develops some stationary internal temperature gradients. At the mathematical level, this drifting situation is exactly equivalent to the fluid being radiatively heated and uniformly cooled at a rate equal and opposite to the heating power (see *SI Appendix*); the stationary internal temperature gradients measured experimentally are those of a fluid that is both internally heated and internally cooled, therefore bypassing both the heating and cooling boundary layers. This drift method is therefore a useful experimental tool to bypass the cooling boundary layers, but it also corresponds to practical situations: frozen lakes radiatively heating up in the spring and collapsing stellar cores heated by a flux of neutrinos. In a similar fashion, the secular cooling of planet interiors is routinely modeled as a uniform heating term in theoretical studies of planetary convection (44–46).

## Results

We characterize the temperature field using two precision thermocouples, one touching the bottom sapphire plate and the second one at midheight, both being centered horizontally. Fig. 1*B* presents the typical time series recorded during an experimental run. The common drift of the two sensors gives access to the heat flux  $P$  transferred from the projector to the fluid:  $P = \rho CH dT/dt$ , where  $C$  is the specific heat capacity of water,  $\rho$  is the density,  $H$  is the fluid depth, and  $dT/dt$  denotes the slope of the drift. The latter is constant in the range 17 °C to 27 °C, which indicates that thermal losses are negligible. On top of this drift is a temperature difference  $\Delta T$  between the two sensors, corresponding to internal temperature gradients. This temperature difference is stationary over the range 17 °C to 27 °C, which corresponds to typically 100 turnover times of the convective flow. We average  $\Delta T$  over time to compute the Rayleigh and Nusselt numbers, defined as

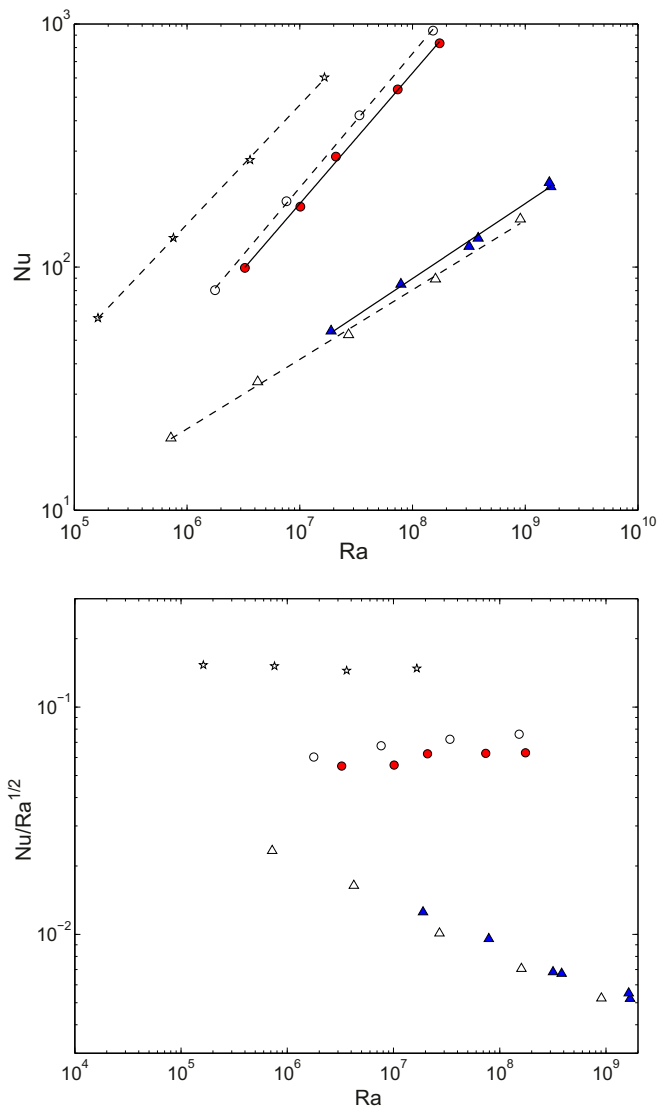
$$Ra = \frac{\alpha g \langle \Delta T \rangle H^3}{\kappa \nu}, \quad Nu = \frac{PH}{\lambda \langle \Delta T \rangle}, \quad [1]$$

where  $\alpha$  denotes the thermal expansion coefficient of water,  $g$  is the acceleration of gravity,  $\lambda$  is the thermal conductivity,  $\kappa$  is the thermal diffusivity,  $\nu$  is the kinematic viscosity, and  $\langle \cdot \rangle$  is the time average. An alternate choice could have been to define a Rayleigh number based on the heat flux,  $Ra_P = \alpha g P H^4 / \nu \kappa \lambda$ , which is a natural control parameter of the experiment. However, we prefer to stick to the standard  $Ra$  and  $Nu$  to make the comparison with RB studies more straightforward. The scaling laws discussed here are easily translated in terms of  $Ra_P$  using the relation  $Ra_P = Ra \times Nu$ .

Fig. 2 reports the experimental curves  $Nu$  versus  $Ra$  for two limiting cases. Case I corresponds to  $\ell = 5 \mu\text{m}$ , i.e., heating located in the immediate vicinity of the bottom plate, with  $\ell/H \leq 10^{-4}$ . Case II corresponds to  $\ell/H = 0.05$ , with significant heating directly inside the bulk turbulent flow, away from the boundary layers. As expected, the curve  $Nu$  vs  $Ra$  obtained in case I is very similar to the RB situation. The data displays a clear power law, and a fit gives the exponent  $\gamma = 0.31$ . This value is compati-

ble with standard studies of RB convection and corresponds to a heat flux strongly restricted by the boundary layer near the bottom plate (1, 6). By contrast, the data of case II show significantly larger values of the Nusselt number. More importantly, the power-law exponent is now  $\gamma = 0.54$ ; radiative heating allows us to bypass the boundary layers and obtain a clear signature of the mixing length—or ultimate—scaling regime.

To confirm the experimental data, we have performed DNS of radiatively driven convection. The domain is a 3D cube with stress-free sidewalls and no-slip boundary conditions at the top and bottom boundaries. We first fix the Prandtl number to the value of water at 20 °C,  $Pr = 7$ . To simulate case I above, the



**Fig. 2.** (Top) Nusselt number as a function of the Rayleigh number. Triangle ( $\Delta$ ) denotes case I, which corresponds to the RB limit. Filled blue triangles are experimental data with  $\ell/H \leq 10^{-4}$ , while empty triangles are DNS with a fixed flux bottom boundary condition. Circle ( $\bullet$ ) denotes case II,  $\ell/H = 0.05$ . Filled red circles are experimental data, while empty circles are DNS. Star ( $\star$ ) denotes additional DNS performed with  $\ell/H = 0.1$  and  $Pr = 1$ . The lines are power-law fits to each curve. For case I, the fitted exponent is  $\gamma = 0.31$  for experiments (solid line) and  $\gamma = 0.29$  for DNS (dashed line). For case II, the fitted exponent is 0.54 for experiments (solid line) and 0.55 for DNS (dashed line). The additional  $Pr = 1$  DNS give  $\gamma = 0.49$ . (Bottom) The compensated Nusselt number: It varies by less than 20% for the case II data, and by less than 5% for the additional  $Pr = 1$  DNS.

sidewalls and top boundaries are thermally insulating, while we impose a fixed flux boundary condition at the bottom. This corresponds to radiative heating in the limit  $\ell/H \rightarrow 0$ . To simulate case II, all of the boundaries are thermally insulating, and the fluid is internally heated through a source term that decays exponentially with height. In both cases, cooling is ensured by a uniform sink term modeling the drift in the experimental situation (see *SI Appendix* for a proof of this exact equivalence). We extract the Rayleigh and Nusselt numbers once the simulations reach a statistically steady state. The corresponding data points are shown in Fig. 2; the agreement with the experimental data is excellent. Indeed, the numerical values of the exponent  $\gamma$  are 0.29 in case I and 0.55 in case II, confirming the experimental values with a precision of a few percent. The slight departure of the case II exponent from 0.5 may originate from a small finite-Rayleigh-number viscous correction. To test this hypothesis, we have performed additional DNS using  $Pr = 1$  and  $\ell/H = 0.1$ . The corresponding values of the Nusselt number are shown in Fig. 2, and a power-law fit leads to the exponent  $\gamma = 0.49$ , even closer to the 0.5 theoretical value. To further illustrate this point, in Fig. 2, *Bottom*, we show the compensated Nusselt number  $Nu/Ra^{1/2}$  as a function of the Rayleigh number. As expected, for the RB case, this compensated Nusselt number decreases rapidly with increasing Rayleigh number. By contrast, for the case II data, this quantity is almost constant, with less than 20% variation over two decades in  $Ra$ . The additional DNS performed with  $Pr = 1$  exhibit even smaller variations, the compensated Nusselt number being constant within 5% over two decades in Rayleigh number.

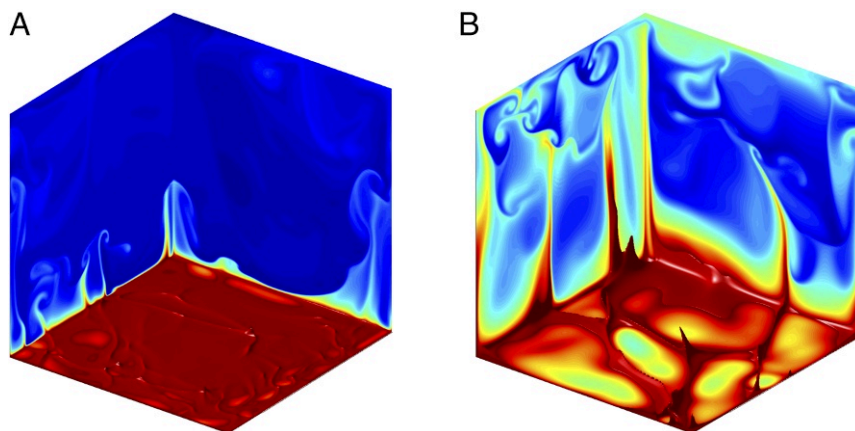
## Discussion

Another open question concerning the ultimate regime of thermal convection is the behavior of the Nusselt number with respect to the Prandtl number. For RB convection, Kraichnan predicted that  $Nu$  should scale as  $Pr^{1/2}$  for small Prandtl number, and as  $Pr^{-1/4}$  for “moderate” Prandtl numbers. The  $Pr^{1/2}$  scaling is the most fashionable one among astrophysicists. It is the one obtained when one asks for the heat flux to be independent of viscosity first, and then of thermal diffusivity (4). However, depending on how one takes the double limit  $(\nu, \kappa) \rightarrow (0, 0)$ , it may very well be that the heat flux retains some dependence on the ratio  $Pr = \nu/\kappa$ ; see the moderate Prandtl number scaling of Kraichnan (3), or ref. 47 for an analytical example of a flow that retains a dependence on the ratio of two dissipative coefficients as they go to zero. Some insight may also be obtained from rigorous upper bound theory: For RB convection, the best upper bound on the Nusselt number scales as  $Ra^{1/2}$  and is inde-

pendent of the Prandtl number (48, 49). The fact that these bounds cannot capture any  $Pr^{1/2}$  dependence may be an indication that the Nusselt number is, in fact, independent of  $Pr$ , at least over some range of  $Pr$ . Coming back to the radiatively heated setup, we ran a few additional DNS at  $Pr = 1$ ,  $Pr = 7$ , and  $Pr = 20$ , with constant  $\ell/H$ ; the corresponding points fall onto the same  $Nu \approx Ra^{1/2}$  curve, indicating that the Nusselt number seems to be independent of  $Pr$  in this intermediate range of  $Pr$ , which includes some of the natural flows mentioned at the outset. The extensive description of the parameter space goes beyond the scope of the present article, and we defer it to a future publication.

Fig. 3 presents snapshots of the temperature field in the high-Rayleigh-number DNS. For case I, most of the temperature gradients are contained in a very thin boundary layer. These temperature gradients are strong, because only diffusion acts to evacuate the heat away from the heating region, where there is little or no advection. The high temperature values only seldom penetrate the bulk of the domain through the emission of narrow plumes of warm fluid. By contrast, in case II, the high-temperature regions extend significantly farther from the bottom plate, and penetrate the bulk turbulent flow through taller and wider thermal plumes. The horizontally averaged temperature profiles for these two snapshots are provided in *SI Appendix, Fig. S1*; for case I, the temperature is homogeneous in the bulk, with a sharp boundary layer near the bottom wall. For case II, the temperature decreases less rapidly with height, but we can still identify a small thermal boundary layer near the bottom wall. Defining its thickness  $\delta_{th}$  as the height at which the mean temperature profile drops by  $\langle \Delta T \rangle / 2$ , the DNS data give  $\delta_{th}/H \simeq 0.015 \ll \ell/H$ . This inequality indicates that heat is input mostly into the bulk turbulent flow, which results in  $\Delta T$  being weaker than in case I; the Nusselt number is much larger and the overall efficiency of the heat transport is greatly enhanced.

We conclude by stressing once again that the current theory of stellar evolution strongly relies on the mixing length scaling regime of turbulent convection (22, 23, 50); the simplest implementations of mixing length theory consist in fitting the mixing length to the scarce observational data, which limits the predictive power of the whole approach. Instead, one would like to determine the constitutive laws of turbulent convection a priori, based on experimental and numerical studies in idealized geometries. A prerequisite is that such experiments should achieve the mixing length regime of thermal convection. While the mixing length regime has yet to be clearly observed in the standard RB system, our radiative experiment provides a clear observation of this scaling regime. The present study therefore puts the mixing length scaling theory on a firmer footing by reconciling



**Fig. 3.** Temperature field from DNS. We represent the temperature field at the boundaries, together with the isosurface of half-maximum temperature, for case I and case II DNS performed at the same heating power. The colorscale ranges from blue, for the minimum temperature inside the domain, to red, for the maximum one. (A) Case I: The temperature gradients are located very near the bottom boundary, with narrow plumes seldom penetrating the bulk of the fluid domain. (B) Case II: The region of warm fluid extends more in the vertical direction, with taller and wider plumes penetrating the bulk turbulent region.

it with laboratory experiments. It paves the way for the a priori experimental determination of the convective parametrizations to be input into stellar evolution models, potentially including nonlocality and/or overshooting at an internal boundary (23, 24).

**ACKNOWLEDGMENTS.** The authors thank J. Guilet, T. Foglizzo, C. R. Doering, D. Goluskin, and V. Bouillaut for insightful discussions, and V. Padilla for building part of the experimental setup. This research is supported by the European Research Council under Grant Agreement FLAVE 757239, and by Agence Nationale de la Recherche Grant ANR-10-LABX-0039.

- Malkus WVR (1954) The heat transport and spectrum of thermal turbulence. *Proc R Soc Lond A* 225:196–212.
- Spiegel EA (1963) A generalization of the mixing-length theory of thermal convection. *Astrophys J* 138:216.
- Kraichnan RH (1962) Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Phys Fluids* 5:1374.
- Spiegel EA (1971) Convection in stars I. Basic Boussinesq convection. *Annu Rev Astron Astrophys* 9:323–352.
- Chavanne X, et al. (1997) Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett* 79:3648–3651.
- Niemela JJ, Skrbek L, Sreenivasan KR, Donnelly RJ (2000) Turbulent convection at very high Rayleigh numbers. *Nature* 404:837–840.
- Chavanne X, et al. (2001) Turbulent Rayleigh-Bénard convection in gaseous and liquid He. *Phys Fluids* 13:1300.
- Alhars G, Grossmann S, Lohse D (2009) Heat transfer and large-scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Rev Mod Phys* 81:503.
- Roche P-E, et al. (2010) On the triggering of the ultimate regime of convection. *New J Phys* 12:085014.
- He X, et al. (2012) Transition to the ultimate state of turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett* 108:024502.
- Shen Y, Tong P, Xia K-Q (1996) Turbulent convection over rough surfaces. *Phys Rev Lett* 76 908–911.
- Gibert M, et al. (2006) High-Rayleigh-Number convection in a vertical channel. *Phys Rev Lett* 96:084501.
- Tisserand J-C, et al. (2011) Comparison between rough and smooth plates within the same Rayleigh-Bénard cell. *Phys Fluids* 23:015105.
- Wei P, et al. (2014) Heat transport properties of plates with smooth and rough surfaces in turbulent thermal convection. *J Fluid Mech* 740:28–46.
- Xie Y-C, Xia K-Q (2017) Turbulent convection over rough plates with varying roughness geometries. *J Fluid Mech* 825:573–599.
- Toppaladoddi S, Succi S, Wettlaufer JS (2017) Roughness as a route to the ultimate regime of thermal convection. *Phys Rev Lett* 118:074503.
- Zhu X, et al. (2017) Roughness-facilitated local  $1/2$  scaling does not imply the onset of the ultimate regime of thermal convection. *Phys Rev Lett* 119 154501.
- Rusouën E, Liot O, Castaing B, Salort J, Chillá F (2018) Thermal transfer in Rayleigh-Bénard cell with smooth or rough boundaries. *J Fluid Mech* 837:443–460.
- Julien K, Legg S, McWilliams J, Werne J (1996) Rapidly rotating turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J Fluid Mech* 322 243–273.
- Julien K, Knobloch E, Rubio AM, Vasil GM (2012) Heat transport in low-Rossby-number Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett* 109:254503.
- King E, Stellmach S, Noir J, Hansen U, Aurnou J (2009) Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature* 457:301–304.
- Vitense E (1953) Die wasserstoffkonvektionszone der sonne. *Z Astrophysik* 32: 135–164.
- Miller Bertolami MM, et al. (2016) On the relevance of bubbles and potential flows for stellar convection. *MNRAS* 457:4441–4453.
- Shaviv G, Salpeter EE (1973) Convective overshooting in stellar interior models. *Astrophys J* 184:191–200.
- Farmer D (1975) Penetrative convection in the absence of mixing. *Quart J R Met Soc* 101:869–891.
- Bengtsson L (1996) Mixing in ice-covered lakes. *Hydrobiologia* 322:91–97.
- Jonas T, Terzhevik A, Mironov D, Wüest A (2003) Radiatively driven convection in an ice-covered lake investigated using temperature microstructure technique. *J Geophys Res* 108:3183.
- Featherstone NA, Hindman BW (2016) The spectral amplitude of stellar convection and its scaling in the high-Rayleigh-number regime. *Astrophys J* 818:32.
- Spiegel EA, Zahn J-P (1992) The solar tachocline. *Astron Astrophys* 265:106–114.
- Garaud P (2002) Dynamics of the solar tachocline - I. An incompressible study. *Mon Not R Astron Soc* 329:1–17.
- Christensen-Dalsgaard J (1996) The current state of solar modeling. *Science* 272:1286–1292.
- Davaille A, Girard F, Le Bars M (2002) How to anchor hotspots in a convecting mantle? *Earth Planet Sci Lett* 203:621–634.
- Limare A, et al. (2015) Microwave-heating laboratory experiments for planetary mantle convection. *J Fluid Mech* 777:50–67.
- Herant M, Benz W, Colgate S (1992) Postcollapse hydrodynamics of SN 1987A: Two-dimensional simulations of the early evolution. *Astrophys J* 395:642.
- Janka H-T, Müller E (1996) Neutrino heating, convection, and the mechanism of type-II supernova explosion. *Astron Astrophys* 306:167.
- Radice D, et al. (2016) Neutrino-driven convection in core-collapse supernovae: High-resolution simulations. *Astrophys J* 820:76.
- Garratt JR (1994) Review: The atmospheric boundary layer. *Earth Sci Rev* 37:89–134.
- Tomkins AM, Craig GC (1998) Radiative-convective equilibrium in a three-dimensional cloud-ensemble model. *Q J R Meteorol Soc* 124:2073–2097.
- Dearhoff JW (1974) Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer. *Boundary Layer Meteorol* 7:81–106.
- Kondratyev KY (1972) On the October 1970-March 1972 complex atmospheric energetics experiment (CAENEX) results, abridged report to the joint organizing committee of GARP (World Meteorol Org, Geneva).
- Bouguer P (1729) *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière* (Claude Jombert, Paris), pp 16–22.
- Kulacki FA, Goldstein RJ (1972) Thermal convection in a horizontal fluid layer with uniform volumetric energy sources. *J Fluid Mech* 55:271–287.
- Goluskin D (2016) *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection* (Springer, New York).
- Gubbins D, Alfe D, Masters G, Price GD, Millan MJ (2003) Can the Earth's dynamo run on heat alone? *Geophys J Int* 155:609–622.
- Aubert J, Labrosse S, Poitou C (2009) Modelling the palaeo-evolution of the geodynamo. *Geophys J Int* 179:1414–1428.
- Landeau M, Aubert J (2011) Equatorially asymmetric convection inducing a hemispherical magnetic field in rotating spheres and implications for the past Martian dynamo. *Phys Earth Planet Inter* 185:61–73.
- Gallet B, Young WR (2013) A two-dimensional vortex condensate at high Reynolds number. *J Fluid Mech* 715 359–388.
- Howard LN (1963) Heat transport by turbulent convection. *J Fluid Mech* 17:405–432.
- Doering CR, Constantin P (1996) Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows. III. Convection. *Phys Rev E* 53:5957–5981.
- Barker AJ, Dempsey AM, Lithwick Y (2014) Theory and simulations of rotating convection. *Astrophys J* 791:13.





**Titre :** Convection forcée radiativement : du régime de Rayleigh-Bénard au régime ultime.

**Mots clés :** Convection thermique, turbulence, dynamique des fluides astrophysiques.

**Résumé :** Dans ce manuscrit nous nous intéressons au phénomène de convection forcée par une source radiative de chaleur. Les forçages radiatifs sont source de mouvements convectifs pour nombre d'écoulements naturels : dans les étoiles, les supernovae, les lacs gelés, le manteau terrestre. La source de chaleur y est partiellement volumique, c'est-à-dire que la chaleur est en partie injectée directement dans l'écoulement turbulent, et non par conduction thermique entre fluide et paroi solide. Nous nous intéressons particulièrement à une source de chaleur exponentielle avec la hauteur dans le fluide, que nous étudions d'abord du point de vue numérique, puis dans le cadre d'une expérience de laboratoire. Nous observons numériquement et expérimentalement que l'efficacité de la

convection thermique (en termes de flux de chaleur adimensionné) dépend fortement de l'extension spatiale de la source de chaleur, avec une transition entre deux régimes distincts. Lorsque la chaleur est injectée sur une taille typique plus petite que les couches limites du système, nous trouvons une situation exactement analogue à la convection de Rayleigh-Bénard; la chaleur doit diffuser à travers les couches limites, ce qui restreint le processus de transfert de chaleur. Lorsque la chaleur est injectée sur une taille typique grande devant les couches limites, cette limitation n'est plus. On observe un transfert de chaleur beaucoup plus efficace, prédit dans les années 60 par Spiegel et Kraichnan et parfois qualifié de "régime ultime" de la convection turbulente.

**Title :** Radiatively driven convection : from the Rayleigh-Bénard regime to the ultimate regime.

**Keywords :** Thermal convection, turbulence, Astrophysical fluid dynamics

**Abstract :** In this manuscript, we study convection driven by radiative heating. Radiative heating occurs in natural flows inside stars, supernovae, frozen lakes, and the Earth's mantle. The heat source is partially volumic, which means that heat is directly injected in the turbulent flow itself, in contrast with the more classical Rayleigh-Bénard convection, where heat is injected through thermal conduction between the fluid and a solid plate. We focus on the case where the heat source decreases exponentially with the height inside the fluid. We study this problem numerically in the first part of the manuscript, before describing an experimental setup that realizes this type of heat source in the second part. We observe numerically and experimentally

that the efficiency of thermal convection (in terms of dimensionless heat flux) depends strongly on the spatial extension of the heat source, with a clear-cut transition between two regimes. When the heat is injected on a typical height smaller than the boundary layer thickness, we recover the classical Rayleigh-Bénard régime of convection; the injected heat must diffuse through the boundary layers, which limits the overall heat transfer efficiency. When the heat is injected on a typical length larger than the boundary layer thickness, this limitation does not apply anymore, and we observe a much more efficient regime of heat transfer, predicted in the 60s by Spiegel and Kraichnan, and sometimes referred to as the « ultimate » regime of thermal convection.

