HAL
open science

Contributions au théorème central limite et à l'estimation non paramétrique pour les champs de variables aléatoires dépendantes

Lucas Reding

▶ **To cite this version:**

Lucas Reding. Contributions au théorème central limite et à l'estimation non paramétrique pour les champs de variables aléatoires dépendantes. Probabilités [math.PR]. Université de Rouen - Normandie, 2020. Français. NNT : . tel-03128648v1

HAL Id: tel-03128648

https://theses.hal.science/tel-03128648v1

Submitted on 23 Jan 2021 (v1), last revised 2 Feb 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité : Mathématiques

Préparée au sein du Laboratoire de Mathématiques Raphaël SALEM (LMRS)
Université de Rouen Normandie

Contributions au théorème central limite et à l'estimation non paramétrique pour les champs de variables aléatoires dépendantes

Présentée et soutenue par
Lucas REDING

Thèse soutenue publiquement le 2 décembre 2020 devant le jury composé de		
M. Pierre CALKA	Professeur des Universités	Examinateur
Mme. Fabienne COMTE	Professeur des Universités	Rapporteure
M. Christophe CUNY	Maître de conférence (HDR)	Examinateur
M. Jérôme DEDECKER	Professeur des Universités	Examinateur
M. Mohamed EL MACHKOURI	Maître de conférence (HDR)	Codirecteur de thèse
Mme. Sana LOUHICHI	Professeur des Universités	Examinatrice
M. Dalibor VOLNÝ	Professeur des Universités	Codirecteur de thèse

Rapporteur non membre du jury : M. Yizao WANG, Associate Professor, Cincinnati, Ohio, USA

UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE

MIIΣ

LMRS

Remerciements

Bien que ce mémoire de thèse représente l'aboutissement de plusieurs années de travail personnel intense, il ne serait pas ce qu'il est, voire ne serait peut-être même pas du tout, sans le soutien de nombreuses personnes. Je tiens à donc à les remercier et, bien que j'essaie de penser à tous ceux qui ont été là pour moi au cours de toutes ces années, je suis sûr que j'en oublierai certains. Sachez toutefois que la personne que je suis devenue fut, en partie, façonnée par vous. Un grand merci à vous.

Ayant conscience du caractère éreintant de la production d'un rapport détaillé sur un document tel que cette thèse, mes premiers remerciements nominatifs seront pour les rapporteurs de mon mémoire : les professeurs Fabienne Comte et Yizao Wang. Je vous remercie tous les deux pour le travail attentif de relecture ainsi que les remarques que vous avez apportées et je ne peux qu'exprimer mon honneur de savoir que mon travail a été relu par des chercheurs ayant votre expérience et votre expertise.

Dans un deuxième temps, ma reconnaissance s'adresse à mes deux directeurs de thèse auprès desquels j'ai développé ma connaissance des mathématiques et grâce à qui, j'ai pu bénéficier d'opportunités professionnelles et scientifiques ; je pense, en particulier, aux deux voyages de recherche que vous m'avez permis d'effectuer ainsi que les nombreuses conférences auxquelles vous m'avez proposé de participer. Un grand merci à vous deux.
Je souhaite, notamment, exprimer ma gratitude auprès de Dalibor que j'ai connu lors de ma première année de licence à la faculté du Madrillet. Salle 11 (celle dans l'atrium), TD d'Algèbre sur les relations binaires, si je ne me trompe. Merci pour tout ce que tu m'as apporté durant ces 8 années ; en particulier pour toute la variété de sujets dont tu as su m'enseigner les complexités et tous les pièges à éviter. Je te remercie aussi pour tous les conseils quant à la rédaction d'article et toutes les relectures attentives des nombreuses présentations que j'ai eu l'occasion d'exposer. La quantité de connaissances concernant des sujets mathématiques variés que tu exhibes au quotidien ainsi que ton expertise dans le domaine des Théorèmes Centraux Limite me rend humble. J'espère que mes trois ans de thèses ont été aussi agréables pour toi qu'ils l'ont été pour moi. J'ai l'espoir, un jour, de devenir un mathématicien de ta stature.
Mohamed, nous ne nous sommes connus que quelques années plus tard, durant ma troisième année de licence lors d'un TD de Mesure et Intégration. J'admire tes qualités d'enseignant tant au niveau scolaire que doctoral. La maîtrise d'une pléthore de domaines des mathématiques dont tu fais preuve chaque fois que l'on discute ne fait que renforcer ma volonté de suivre ton exemple. Durant ces trois années de thèse, tu m'as apporté une "quantité indénombrable" de conseils et ce fut un plaisir de participer à la co-écriture des deux articles présents dans cette thèse. Je dois te remercier pour les nombreux conseils professionnels que tu m'as fournis et qui, je n'en doute pas, influenceront l'enseignant-chercheur que j'espère devenir.

Je tiens aussi à remercier les autres membres du jury : le professeur Pierre Calka que je connais depuis de nombreuses années et à qui je dois beaucoup, le maître de conférence Christophe Cuny, le professeur Jérôme Dedecker et le professeur Sana Louhichi pour le travail de lecture de ce mémoire ainsi que le temps qu'ils ont consacré à la soutenance de thèse.

Je souhaite aussi remercier personnellement Magda Peligrad et Na Zhang pour l'accueil chaleureux que vous m'avez offert lors de mon voyage aux États-Unis d'Amérique. Bien entendu, ce fut un plaisir de travailler en collaboration avec vous deux et j'espère pouvoir continuer ainsi.

Mes remerciements aussi à Michael Lin et Guy Cohen pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de mon déplacement de deux mois en Israël. Sans leur investissement, le stage aurait été beaucoup plus compliqué particulièrement au vu des différences de mode de vie entre la France et l'Israël. Je suis reconnaissant aussi à Michael pour l'organisation du cours sur les opérateurs et la théorie spectrale auquel j'ai eu l'occasion d'assister et de participer.

Outre les membres du jury, je souhaite remercier les nombreux professeurs qui m'ont accompagné au cours de mon curriculum universitaire. En particulier, je pense à Pierre que je considère être un exemple à suivre tant au niveau mathématique que pédagogique et humain. Je te remercie pour la qualité exceptionnelle des cours auxquels j'ai eu le plaisir d'assister. Je dois reconnaître me servir de temps à autre de ton tapuscrit contenant les notes du cours de probabilités de M1 qui est remarquablement bien construit. En plus de tout ceci, ton investissement dans le poste de directeur du laboratoire pendant tant d'années a été remarquable et ce fut un plaisir d'être un doctorant au LMRS sous ton égide.
Deux autres professeurs que je souhaite remercier nommément sont Olivier Benois et Simon Raulot qui furent mes deux premiers enseignants respectivement du cours d'analyse et de celui d'algèbre lors ma première année de licence. Leur investissement, y compris dans des cours d'introduction, est une des raisons qui m'ont poussé à poursuivre des études de doctorat en mathématiques. Ces deux premiers cours furent le point de départ de tout ce périple puisque c'est grâce à ceux-ci que j'ai redécouvert les mathématiques et qu'elles sont devenues ma passion. Nul doute que la rigueur mathématique de leurs enseignements est la cause de mon grand intérêt pour ce domaine.
Enfin, afin de conclure les remerciements concernant les enseignant-chercheurs, je souhaite exprimer ma reconnaissance envers les différents professeurs de la faculté de mathématiques de Rouen qui ont fait preuve d'un investissement et d'un travail remarquable tout au long de mon cursus universitaire : Antoine, Ahmed, Adel, Gaëlle, Jean-Baptiste, Maxime, Mustapha, Olivier, Patrick, Patricia, Patrizia, Paul, Sorin et encore d'autres.

En plus des enseignants qui sont devenus collègues par la suite, j'ai aussi de nombreux remerciements à porter à toutes les personnes que je n'ai connues qu'en tant que collègue.
Tout d'abord, je tiens à mentionner quelqu'un de particulier parmi les collègues avec qui j'ai développé une relation non seulement professionnelle, mais aussi une relation d'amitié profonde et qui, je l'espère, durera pour de nombreuses années encore. Merci à toi Aurélie ; merci d'avoir supporté mon anxiété récurrente et mes "digressions Bourbakistes" ; merci pour tous ces trajets bien à l'abri dans ton "tank" que tu conduis à merveille dans l'enfer routier qu'est Rouen et encore merci pour ton éthique professionnelle impeccable. C'est un plaisir que de travailler avec toi et j'espère avoir l'occasion dans le futur de continuer ces collaborations pédagogiques.
Merci, aussi, à Jean-Yves et Patrick d'avoir été et d'être des collègues investis et d'un professionnalisme sans faille. En raison de votre investissement, j'ai pu observer des étudiants qui à priori étaient en froid avec les mathématiques s'ouvrir à la beauté, ou tout du moins à l'utilité, de celles-ci. De même qu'avec Aurélie, c'est un plaisir de travailler avec vous et j'espère que la réciproque est vraie.

Je compte bien sûr de nombreux amis parmi le personnel non-enseignant du laboratoire sans qui tout ceci ne serait pas possible. Leur travail dévoué est la mécanique cachée du laboratoire et du département de mathématiques de l'université de Rouen. En tant que chercheur, on oublie souvent la complexité administrative, mais pour y avoir été confronté brièvement à plusieurs reprises au cours de ma thèse, je peux affirmer que leur travail est remarquable.

Bien entendu, les relations que j'entretiens avec certains collègues de l'administration, vont au delà de la simple relation professionnelle et font partie de mes relations d'amitié. Je pense, en particulier, à Edwige grâce à qui les deux séjours universitaires mentionnés ci-dessus ainsi que les nombreux déplacements professionnels que j'ai effectués durant ma thèse n'auraient pu avoir lieu.
Une deuxième personne à qui je pense est bien entendu Sandrine grâce à qui j'ai pu être payé pour les heures d'enseignements que j'ai eu l'occasion d'effectuer au cours de ces trois dernières années et qui a permis le bon déroulement de l'atelier des doctorants que j'ai eu le plaisir d'organiser.
Tout ceci sans mentionner les innombrables services qu'elles m'ont rendus au cours de ces dernières années ainsi que leur amitié et leur soutien moral. Merci.
Il va de soi que je n'oublie pas les autres membres du personnel non-enseignant : Marc, Hamed, Isabelle, Corentin et Saada. À vous aussi, merci pour les services rendus.

Les relations avec les autres doctorants et post-doctorants font partie intégrante de l'accomplissement d'une thèse. Et je peux dire que sur ce point-là j'ai été plutôt chanceux en rencontrant des personnes merveilleuses. Andreas, Adrien, Aurélie, Cécile, Federica, Gauthier, Héléna, Mirella, Thomas, Victor (et probablement d'autres que j'oublie) pour tous les bons moments passés en votre compagnie, je vous remercie.

De nombreux autres professeurs de mes écoles, mon collège, mon lycée et l'ELISA ont ma reconnaissance pour ce qu'ils m'ont apporté. Je souhaite en mentionner deux en particulier : Mr. Moy, mon professeur de mathématiques en première au lycée des Fontenelle qui m'a appris la rigueur de la rédaction mathématique ainsi que Renan Hilbert qui, en tant que professeur de mathématiques à L'ELISA et docteur en mécanique des fluides, m'a initié aux mathématiques du supérieur et fut une source d'inspiration pour la poursuite du doctorat.
Il va de soi que mes remerciements s'étendent à toutes les équipes pédagogiques des différents établissements scolaires que j'ai eu l'occasion de fréquenter. Trop souvent oubliés, ce sont tous ces professeurs qui nous enseigné les compétences les plus basiques mais aussi les plus indispensables à la réussite de tous nos projets. À vous aussi, je vous dis merci.

Un groupe de personnes sans qui tout ceci n'aurait pas été possible non plus sont mes meilleurs amis.
Justine, je te remercie d'avoir été là pour moi y compris dans les périodes plus difficiles de ces 8 dernières années et je te suis très reconnaissant d'avoir supporté mon anxiété parfois envahissante. Tu es une amie fantastique.
Kurt et Julie, je ne puis que vous remercier pour votre amitié pendant ces années. Toutes les discussions, tous vos conseils et toutes ces soirées passées avec vous ont fait qui je suis. Je suis plus qu'heureux de vous compter parmi mes amis proches.
Loïc et Suzanne, un grand merci à vous aussi pour votre soutien moral et pour tous les excellents moments passés en votre compagnie. Je n'ai pas un seul souvenir avec vous que je pourrais regretter. Merci d'avoir été là pendant toutes ces années.

Finalement, mes derniers remerciements sont pour ma famille.
Maman et Papa, écrire cette partie de mes remerciements m'est difficile car il m'est impossible de choisir parmi les innombrables moments de bonheur que furent ces 27 années : lesquels inclure et lesquels laisser de coté. Puisqu'il faut faire un choix, faisons-le. Papa, je te remercie du fond du cœur pour toutes ces soirées que tu as passées à me faire réciter mes leçons depuis mon

premier jour d'école et Maman, je te remercie pour toutes les relectures à la fois stylistique et orthographique des nombreux documents que j'ai écrits pendant tout mon cursus universitaire. Je tiens aussi à vous exprimer toute ma gratitude pour le soutien que vous m'avez apporté au cours de ces 27 années et la patience dont vous avez su faire preuve avec moi. Merci.

Voilà qui finit ces (longs) remerciements, il est impossible de lister tout le monde mais ce qui est sûr c'est que je n'y suis pas arrivé seul. Ces trois dernières années ont été les meilleures de ma vie et c'est en grande partie grâce à vous.

Pour ceux qui poursuivent au delà de ces remerciements, je vous souhaite une très bonne lecture et je vous enjoins, si vous avez la moindre question, à me contacter pour que nous puissions en discuter.

Contributions au théorème central limite et à l'estimation non paramétrique pour les champs de variables aléatoires dépendantes

Résumé

La thèse suivante traite du Théorème Central Limite pour des champs de variables aléatoires dépendantes et de son application à l'estimation non-paramétrique. Dans une première partie, nous établissons des théorèmes centraux limite *quenched* pour des champs satisfaisant une condition projective à la Hannan (1973). Les versions fonctionnelles de ces théorèmes sont également considérées. Dans une seconde partie, nous établissons la normalité asymptotique d'estimateurs à noyau de la densité et de la régression pour des champs fortement mélangeants au sens de Rosenblatt (1956) ou bien des champs faiblement dépendants au sens de Wu (2005). Dans un premier temps, nous établissons les résultats pour l'estimateur à noyau de la régression introduit par Elizbar Nadaraya (1964) et Geoffrey Watson (1964). Puis, dans un second temps, nous étendons ces résultats à une large classe d'estimateurs récursifs introduite par Peter Hall et Prakash Patil (1994).

Mots clés : champs de variables aléatoires, théorème central limite *quenched*, théorème central limite fonctionnel *quenched*, approximation par ortho-martingale, condition projective, estimation non-paramétrique, estimation de la densité, estimation de la régression, estimateur de Nadaraya-Watson, estimateur récursif, normalité asymptotique, données spatiales, mélange fort, m-dépendance, mesure de dépendance physique, dépendance faible, méthode de Lindeberg.

Classification AMS (2020) : 60G60, 60F05, 60F17, 60G42, 60G48, 41A30, 62G05, 62G07, 62G08.

Contributions to the Central Limit Theorem and to Nonparametric Estimation for Dependent Random Fields

Abstract

This thesis deals with the central limit theorem for dependent random fields and its applications to nonparametric statistics. In the first part, we establish some quenched central limit theorems for random fields satisfying a projective condition à la Hannan (1973). Functional versions of these theorems are also considered. In the second part, we prove the asymptotic normality of kernel density and regression estimators for strongly mixing random fields in the sense of Rosenblatt (1956) and for weakly dependent random fields in the sense of Wu (2005). First, we establish the result for the kernel regression estimator introduced by Elizbar Nadaraya (1964) and Geoffrey Watson (1964). Then, we extend these results to a large class of recursive estimators defined by Peter Hall and Prakash Patil (1994).

Key words: random fields, quenched central limit theorem, quenched functional central limit theorem, ortho-martingale approximation, projective condition, nonparametric estimation, density estimation, regression estimation, Nadaraya-Watson estimator, recursive estimator, asymptotic normality, spatial data, strong mixing, m-dependence, physical dependence measure, weak dependence, Linderberg's method.

Table des matières

I. Généralités et résultats historiques **21**

1. Théorie des probabilités **23**
1.1. Des généralités probabilistes . . . 23
1.1.1. Processus et champs de variables aléatoires . . . 23
1.1.2. Convergence en loi des champs . . . 24
1.1.3. Différentes méthodes de preuve de la convergence en loi . . . 25
1.2. Un peu de théorie ergodique . . . 33
1.2.1. Théorèmes ergodiques . . . 33
1.2.2. Un résultat clé concernant les TCL . . . 34
1.3. Processus de Wiener et le principe d'invariance . . . 35
1.3.1. Processus de Wiener . . . 35
1.3.2. Espace de Skorohod, tension et principe d'invariance . . . 37
1.4. Martingales à temps discret . . . 43
1.4.1. Inégalités classiques de la théorie des martingales . . . 44
1.4.2. Filtrations commutantes et ortho-martingales . . . 45
1.5. Conditions de dépendance . . . 48
1.5.1. m-dépendance . . . 48
1.5.2. Mélange fort . . . 50
1.5.3. Dépendance physique au sens de Wu . . . 51
1.5.4. Condition projective du type Hannan . . . 53
1.6. Théorèmes quenched . . . 54

2. Statistique **59**
2.1. Estimateurs non-récursifs à noyau . . . 59
2.1.1. Estimateurs de la densité . . . 59
2.1.2. Estimateurs de la régression . . . 64
2.2. Estimateurs récursifs à noyau . . . 68
2.2.1. Estimateurs de la densité . . . 68
2.2.2. Estimateurs de la régression . . . 75

II. Théorèmes limite quenched **79**

3. Théorèmes centraux limite sous la condition de Hannan **81**
3.1. Champs bi-dimensionnels . . . 81
3.2. Résultats principaux . . . 83
3.3. Preuves des résultats . . . 85
3.3.1. Preuve du théorème 3.2.2 . . . 85
3.3.2. Preuve du corollaire 3.2.3 et du théorème 3.2.4 . . . 88
3.4. Champs d-dimensionnels : $d \geqslant 3$ . . . 92
3.4.1. Preuve du théorème 3.4.2 et de ses corollaires . . . 94

3.5. Exemples . . . 96
3.5.1. Champ linéaire . . . 96
3.5.2. Champ de Volterra . . . 97

4. Théorèmes centraux limite fonctionnels quenched sous la condition de Hannan 99
4.1. Décomposition martingale-cobord multi-dimensionnelle . . . 99
4.2. Résultats principaux . . . 100
4.3. Preuves des résultats . . . 102
4.3.1. Preuve de la proposition 4.2.1 . . . 102
4.3.2. Preuve du théorème 4.2.2 . . . 103
4.4. Extension aux champs d-dimensionnels, $d \geqslant 3$ . . . 103
4.5. Exemples . . . 104
4.5.1. Champ linéaire . . . 104
4.5.2. Champ de Volterra . . . 105
4.6. Extension des résultats aux espaces d'Orlicz . . . 105
4.6.1. Théorème central limite fonctionnel sur des régions cubiques . . . 105
4.6.2. Théorème central limite fonctionnel sur des régions rectangulaires . . . 106
4.7. Preuves des généralisations . . . 107
4.7.1. Preuve du lemme principal et du théorème 4.6.4 . . . 108
4.7.2. Preuve du lemme 4.7.2 . . . 113
4.7.3. Conjectures . . . 115
4.8. Exemples . . . 116
4.8.1. Champ linéaire . . . 116
4.8.2. Champ de Volterra . . . 117

III. Estimateurs à noyau 119

5. Estimateur à noyau de la régression de Nadaraya-Watson pour des données spatiales 121
5.1. Modèle de régression et estimateur de Nadaraya-Watson . . . 121
5.2. Résultats principaux . . . 122
5.2.1. Biais asymptotiques . . . 123
5.2.2. Normalité asymptotique . . . 124
5.3. Illustrations numériques . . . 124
5.4. Lemmes préliminaires . . . 126
5.4.1. Proposition 5.4.5 . . . 130
5.4.2. Variances et covariance asymptotiques . . . 134
5.5. Preuves des théorèmes principaux . . . 140
5.5.1. Preuve du théorème 5.2.1 . . . 140
5.5.2. Preuve du théorème 5.2.2 . . . 140

6. Estimateurs récursifs à noyau pour des données spatiales 149
6.1. Modèle statistique et estimateurs étudiés . . . 149
6.2. Résultats principaux . . . 150
6.2.1. Biais et variance asymptotiques . . . 151
6.2.2. Normalité asymptotique . . . 152
6.3. Lemmes préliminaires . . . 152
6.3.1. Proposition 6.3.7 . . . 156
6.3.2. Proposition 6.3.8 . . . 159

6.4. Preuves des résultats principaux 166
6.4.1. Preuve de la proposition 6.2.2 166
6.4.2. Preuve du théorème 6.2.3 166
6.4.3. Preuve du théorème 6.2.4 179

Bibliographie **181**

Introduction

Préface

L'étude des Théorèmes Centraux Limite (TCL) commence en 1733 avec la démonstration (et publication en 1738) du premier TCL pour des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = \frac{1}{2}$ par Abraham de Moivre [Moi38] (voir aussi [Sch05], [Wal06] et [DP72]). La démonstration originale se base sur la formule de Stirling, laquelle fut démontrée en 1730 par Abraham de Moivre et James Stirling [Moi30]. Plus de 70 ans après, Pierre-Simon Laplace établit la première version du TCL pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées en 1809 dans [Lap09]. Cette démonstration fait appel à la notion de fonction caractéristique (identifiable à la transformée de Fourier de la densité lorsqu'elle existe) sans pour autant la nommer explicitement [1] ni n'utilise la caractérisation de la loi limite au travers du théorème de continuité de Lévy qui fut énoncé et démontré dans sa première version en 1922 par Paul Lévy [Lé22]. Faisant suite à des discussions entre Georg Pólya et Paul Lévy, des versions plus approfondies du théorème de continuité furent énoncées et démontrées par la suite [Pól23]. Une étape importante dans l'étude des TCL, et nous rapprochant de l'objectif de ce mémoire d'étudier les TCL pour des variables aléatoires dépendantes, fut le théorème de Lindeberg-Feller [2][Lin22 ; Fel71] qui traite des suites de variables aléatoires indépendantes mais non nécessairement identiquement distribuées. Pour une étude plus approfondie des TCL dans ce cadre, on pourra se référer à l'ouvrage *Limit distributions for sums of independent random variables* écrit par Boris Gnedenko et Andreï Kolmogorov [GK49] en 1949 (traduction et annotations par Kai-Lai Chung et Joseph Doob [GK68]). Le théorème de Lindeberg-Feller peut être étendu aux cas des tableaux triangulaires dont chaque ligne forme une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes ; par la suite de nombreux auteurs tels que Donald McLeish [McL74] ou Aryeh Dvoretzky [Dvo70] ont démontré des théorèmes centraux limite pour des tableaux triangulaires de variables aléatoires dépendantes. Dans ce mémoire, nous nous limiterons, cependant, aux champs de variables aléatoires. Notons que l'étude de tels champs n'a d'intérêt que si les variables aléatoires les composant dépendent les unes des autres et que l'on contrôle cette dépendance. En effet, si l'on considère un champ de variables aléatoires indépendantes, on peut toujours se ramener au cadre séquentiel en utilisant la dénombrabilité de $\mathbb{Z}^d, d \geqslant 1$. Les premiers résultats concernant les TCL pour les champs apparaissent dans les travaux de Murray Rosenblatt [LCNS72 ; Ros12] qui furent suivis de nombreux développements donnant naissance à un riche sous-domaine de l'étude des TCL. Une étude beaucoup plus complète de l'histoire des TCL a été réalisée par Hans Fischer [Fis10] en 2010.

Beaucoup d'outils et de conditions de dépendances relatifs aux champs de variables aléatoires sont des généralisations directes de ce qui existe déjà dans le cadre séquentiel. Une notion fondamentale que l'on peut aisément étendre aux champs est celle de *stationnarité*. Dès ses premières recherches sur les champs de variables aléatoires, Murray Rosenblatt, s'intéresse spécifiquement aux champs stationnaires ; cette hypothèse permettant de simplifier de nombreux calculs est très souvent considérée afin de démontrer des TCL. Cependant nous établirons des TCL y compris en l'absence, dans un certain sens, de cette hypothèse. D'autres notions telles que le mélange [3], dont Paul Doukhan a réalisé une étude approfondie [Dou12], ou encore la notion de *martingale* (voir Ville [Vil39]) ont été étendues au cadre spatial. Certaines de ces extensions s'effectuent naturellement tandis que d'autres demandent de plus amples réflexions.

1. Ce terme n'apparaît qu'en 1912 (introduit par Henri Poincaré [Poi12]) bien que le concept de transformée de Fourier ait déjà été introduit en 1822 par Joseph Fourier dans [Fou22]

2. Condition nécessaire démontrée par Lindeberg en 1922 [Lin22] et condition suffisante démontrée par Feller en 1935 [Fel35]

3. Dans cette thèse nous nous restreindrons à l'étude du mélange fort

L'extension au cadre spatial des différentes notions de dépendance que nous étudierons au cours de ce mémoire (c'est à dire le mélange fort, la dépendance faible au sens de Wei Biao Wu [Wu05] ainsi que la condition de projective de dépendance de Hannan) s'effectue sans difficultés majeures. De fait, beaucoup de résultats donnant des TCL sont connus sous ces différents modes de dépendance. On pourra notamment citer les travaux de Jerôme Dedecker [Ded98a] pour le mélange fort [4] ; ceux de Mohamed El Machkouri, Dalibor Volný et Wei Biao Wu [EMVW13] pour la dépendance faible au sens de Wu et enfin pour la condition projective de Hannan, l'article précurseur d'Yizao Wang et Michael Woodroofe [WW13] dans lequel les auteurs obtiennent des théorèmes limites sous une condition plus faible que celle de Hannan, suivi des travaux d'Yizao Wang et Dalibor Volny [VW14a] qui donnent le TCL [5] sous la condition projective de Hannan.

Un outil très utile et que nous aurons l'occasion de côtoyer tout au long de ce mémoire est celui de la généralisation des martingales au cadre des champs aléatoires. Dès lors que l'on souhaite étendre ce concept à un temps multidimensionnel (cependant toujours discret), un problème majeur fait surface : comment interpréter la notion de passé lorsque le temps n'est plus uni-dimensionnel ? Il n'existe pas de réponse universelle à cette interrogation et chacune des réponse que l'on peut y donner mène à une généralisation différente de la notion de martingale. Dans ce mémoire nous étudierons une seule de ces extensions : les *ortho-martingales* ; celle-ci fut introduite par en 1969 Renzo Cairoli dans [Cai69].

Dans le cadre de la mécanique statistique, un intérêt pour les théorèmes limites démarrés à partir d'un point, aussi appelés théorème *quenched*[6], s'est fait rapidement ressentir en raison de la nature des objets classiquement étudiés dans ce domaine. On pourra citer notamment le livre de Richard S. Ellis [Ell07] ou encore l'article de Claude Kipnis et Srinivasa Varadhan [KV86]. Par conséquent, de nombreuses versions *quenched* de théorèmes limites ont été établies ces dernières années ; en particulier, on peut mentionner les articles de Yves Derriennic et Michael Lin [DL01], Christophe Cuny et Magda Peligrad [CP12], Dalibor Volný et Michael Woodroofe [VW14b] pour les suites ainsi que celui de Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19] pour les champs. Nous aurons l'occasion au cours de ce mémoire, et plus spécifiquement dans les chapitres 3 et 4 ainsi que dans la section 1.6, d'étudier de manière plus approfondie cette notion de théorème central limite *quenched*.

Dans le cadre des marches aléatoires, le TCL permet de décrire la répartition des écarts entre la moyenne empirique et la moyenne théorique des déplacements élémentaires. Naturellement, la question de l'étude des trajectoires de ces marches aléatoires se pose. Afin de les décrire, il est pratique d'introduire un paramètre réel $0 \leqslant t \leqslant 1$ et d'étudier les sommes partielles jusqu'au terme de rang $[nt]$. Dès lors, les lois limites obtenues dépendront de ce paramètre t et on dira que la suite de variables aléatoires satisfait un *Théorème Central Limite Fonctionnel* (TCLF) s'il y a convergence en loi, dans un espace fonctionnel bien choisi, des sommes partielles renormalisées d'ordre $[nt]$ vers un mouvement Brownien standard lorsque n tend vers $+\infty$; ces TCLF sont aussi appelés *Principe d'Invariance* (PI). Il est nécessaire d'expliquer l'origine des termes *Théorème Central Limite Fonctionnel* et *Principe d'Invariance*. Pour le premier, cela vient du fait que le TCLF est une généralisation du TCL classique lorsque l'on introduit un paramètre

4. Jerôme Dedecker obtient même des résultats dans un cadre bien plus général que le simple α-mélange.
5. En fait, dans l'article de Wang et Volný, les auteurs énoncent et démontrent un principe d'invariance plutôt que directement un TCL.
6. On parle de théorème *annealed* sinon

réel et que l'on considère la convergence en loi dans un *espace fonctionnel*. Pour le terme de PI, celui-ci vient du fait que lorsqu'une suite de variables aléatoires satisfait à un TCLF, alors il y a indépendance entre les lois limites et les lois des variables aléatoires concernées [7]. Si ce fait est établi, il suffit alors de regarder un cas particulier de lois des v.a. étudiées afin de déterminer la loi limite. Dans notre étude, le processus limite sera toujours un mouvement Brownien, éventuellement multi-dimensionnel. Le premier résultat majeur concernant les PI est le Théorème de Donsker établi par Monroe Donsker [Don49] en 1949 dans son mémoire de thèse intitulé *The Invariance Principle for Wiener Functionals* ; par la suite, en 1951 [Don51], il généralisera ce résultat pour celui bien connu d'aujourd'hui et le relia aux résultats trouvés par Paul Erdös et Marc Kac en 1946 [KE46]. Ce théorème traite des variables aléatoires i.i.d. et donne le principe d'invariance pour celles-ci. Comme ce fut le cas pour le TCL, il existe des résultats antérieurs que nous mentionnons ici. Un des premiers résultats notables est celui de Andreï Kolmogorov [Kol33] en 1933 qui énonce le principe d'invariance [8] pour les processus empiriques. Deux autres résultats donnant des principes d'invariance [8] sont ceux de Paul Erdös et Mark Kac [KE46] en 1946 concernant la convergence en loi du maximum des sommes partielles renormalisées suivi d'un second résultat par les mêmes auteurs [EK47] en 1947 et donnant, quant à lui, le principe d'invariance [8] pour certains processus de comptage [9]. Par la suite, de nombreux TCLF furent établis [WW13 ; CDV16 ; Gir18 ; VW14a] et notamment des versions *quenched* [CM14 ; CV13]. Pour les versions *quenched*, une liste plus détaillée est disponible dans un article publié en 2015 par Magda Peligrad [Pel15]. Dans la section 1.3 nous rappellerons les résultats fondamentaux concernant les TCLF dans le cas *annealed* tandis que dans le chapitre 4 nous traiterons des versions *quenched* de ces théorèmes.

Parmi les nombreuses applications des TCL, on trouve l'étude de la normalité asymptotique des estimateurs statistiques ; cette propriété permet, en effet, de construire des intervalles de confiance très utiles en statistique. Une large partie de cette thèse sera consacrée à l'étude de la normalité asymptotique des estimateurs à noyau introduits par Emanuel Parzen [Par62] et Murray Rosenblatt [Ros56b]. Les travaux de ces derniers concernaient essentiellement les estimateurs de la densité pour des données i.i.d ; cependant, de nombreux développements et généralisations de ces objets mathématiques ont été étudiés depuis. En particulier, de nombreux mathématiciens ont prouvé la normalité asymptotique de ces estimateurs dans le cas des données dépendantes [Bos98 ; BMP99] ; en parallèle de ces travaux la question de l'estimation de la régression et de la prédiction est apparue notamment avec l'introduction par Elizbar Nadaraya [Nad64] et Geoffrey Watson [Wat64] de l'estimateur éponyme. De même que pour l'estimateur de la densité de Parzen-Rosenblatt, de nombreux résultats ont été obtenus dans le cadre dépendant pour cet estimateur. On pourra citer les articles d'Herman Bierens [Bie87], Wolfgang Härdle et Philippe Vieu [HV92], Zudi Lu et Ping Cheng [LC97], Peter Robinson [Rob83] ainsi que celui d'Alexandr Tsybakov et Wolfgang Härdle [HT88].

Avec l'avènement de l'informatique, la quantité de données disponibles pour le traitement s'est accrue considérablement ; de plus l'apparition, durant ces dernières années, de la *science des données* [10] ainsi que des *données en masse* [11], ont mené au développement d'estimateurs plus performant en terme de calcul. En effet, les estimateurs non-récursifs tels que l'estimateur de

7. Le principe d'invariance faisait référence, à l'origine, à ce fait là seul (voir [EK47]). Désormais, on lui donne un sens plus fort en requérant qu'un TCLF soit satisfait.
8. Dans le sens historique
9. Dans leur article, Paul Erdös et Mark Kac obtienne une loi de l'arcsinus en tant que loi limite
10. En anglais : *Data Science*
11. En anglais : *Big Data*

Parzen-Rosenblatt ou bien l'estimateur de Nadarya-Watson possèdent l'inconvénient que, dès lors que l'on souhaite tenir compte de nouvelles données, on est obligé de recalculer l'estimateur à partir de l'ensemble de toutes les données disponibles et non pas seulement des nouvelles. Ceci peut s'avérer être extrêmement coûteux en temps de calcul lorsque que l'on traite de larges quantités de données ou lorsque celles-ci sont fournies en continu (données en sortie d'un capteur, etc.). Pour pallier ces problèmes, les *estimateurs récursifs*[12] sont parfaitement adaptés ; en effet chaque étape de calcul ne nécessite que de tenir compte des nouvelles données et non pas de toutes les données disponibles. Il existe une grande variété de ces estimateurs parmi lesquels on pourra citer les suivants : l'estimateur de Hall-Patil [HP94], l'estimateur de Wolverton-Wagner [WW69], l'estimateur de Deheuvels [Deh73], l'estimateur de Wegman-Davies [WD79] ou encore celui introduit par Aboubacar Amiri [Ami10]. Une généralisation récente de ces classes d'estimateurs a été réalisée par Abdelkader Mokkadem, Mariane Pelletier et Yousri Slaoui [MPS09]. Tous les estimateurs précédents sont des versions récursives de l'estimateur à noyau de la densité, cependant il est aussi possible de donner des versions récursives de l'estimateur à noyau de la régression comme l'on fait Ibrahim Ahmad et Pi-Erh Lin [AL76] ou bien Devroye et Wagner [DW80].

Ces dernières décennies ont aussi vu le développement de résultats concernant les estimateurs pour des données spatiales. Les premières avancés sur ce sujet sont le fruit du travail de Lanh Tat Tran [Tra90] suivies des résultats de Zudi Lu et Xing Chen [LC02 ; LC04], de Gérard Biau et Benoît Cadre [BC04], puis ceux de Michel Carbon et al. [CFT07], de Mohamed El Machkouri [EM07 ; EM11 ; EMS10] et enfin ceux de Sophie Dabo-Niang et al. [DNRY11]. Désormais une littérature importante existe sur ce sujet ; l'intérêt d'obtenir des résultats pour des données spatiales est d'étendre le domaine d'application des résultats déjà connus dans le cas des séries temporelles au cas spatial qui représente une part de plus en plus importante des données statistiques traitées en science des données. Un des objectifs de cette thèse est d'obtenir des théorèmes centraux limite pour ces estimateurs en minimisant les hypothèses requises sur les données ainsi que sur les paramètres de ces estimateurs. Au vu du très grand nombre de modes de dépendance qui existe, il va de soi que ce mémoire ne traitera que d'un petit nombre d'entre eux ; de manière plus précise, nous nous concentrerons sur les champs satisfaisant des conditions de mélange fort ou de dépendance physique au sens de Wu [Wu05] que nous préciserons par la suite.

Plan du mémoire

Dans la première partie nous rappellerons les notions et résultats historiques ayant trait aux théorèmes limite pour les champs de variables aléatoires dans les différents contextes nous concernant. Ensuite, dans les chapitres 3 et 4 nous énoncerons et démontrerons des théorèmes centraux limite et des principes d'invariance *quenched* sous la condition projective de Hannan [Han73]. Pour finir, dans les chapitres 5 et 6 nous établirons des généralisations au cadre spatial des résultats concernant les estimateurs de la densité et ceux de la régression, à la fois dans le cas récursif et non-récursif.

Première partie

Dans cette première partie nous définirons les notations, rappellerons les notions basiques nécessaires à la bonne compréhension de la thèse et nous y exposerons l'état de l'art dans les

12. En anglais : *Online estimators*

sujets qui nous concernent. Dans la première sous-partie, nous aborderons des notions liées à la théorie des probabilités et plus particulièrement celles permettant la bonne compréhension des résultats *quenched* énoncés dans les chapitres 3 et 4. Ces notions inclurons la convergence en loi des champs dans des espaces topologiques non-triviaux, la théorie ergodique, celle des ortho-martingales, des théorèmes *quenched*, le principe d'invariance ainsi que les différentes conditions de dépendance utilisées au travers de ce mémoire. Dans la seconde sous-partie, les notions traitées concerneront les estimateurs de la densité et de la régression et en particulier l'état de l'art concernant ceux-ci.

Deuxième partie

Dans cette partie, nous énoncerons et démontrerons les résultats obtenus au cours de cette thèse concernant les théorèmes *quenched* pour des champs de variables aléatoires. Ces démonstrations reposent sur l'utilisation d'approximations par ortho-martingales ainsi que les théorèmes *quenched* obtenus par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19]. Pour être plus précis, on utilisera la décomposition orthogonale que Magda Peligrad et Na Zhang [PZ18a] ont explicitée afin d'approcher les sommes partielles par une ortho-martingale puis on obtiendra des TCL en faisant usage des théorèmes limite démontrés par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19]. Évidemment, pour obtenir une telle approximation, il nous faudra commencer par définir correctement le concept de martingale multi-indicée et pour cela, il sera nécessaire de choisir un ordre sur la grille $\mathbb{Z}^d$. Au cours de ce mémoire nous ferons le choix d'introduire le concept de filtration *commutante* (voir [Kho02]) et à partir de concept nous définirons la notion d'ortho-martingale (voir [Cai69]). Cette construction s'adapte très bien aux approximations. Enfin, nous finirons par donner deux exemples d'applications à des processus très classiques : les champs linéaires et les champs de Volterra. Ces deux exemples étant très classiques à la fois en théorie des probabilités et en statistique, nous aurons aussi l'occasion de les étudier dans la partie III. Certains des résultats obtenus dans cette partie ont fait l'objet d'un article en collaboration entre Na Zhang, Lucas Reding et Magda Peligrad [ZRP19], d'autres sont le résultat de recherches effectuées par Na Zhang et Lucas Reding [RZ20].

Troisième partie

Dans un registre différent, nous nous intéresserons aussi à l'étude des estimateurs de la densité et de la régression et en particulier nous chercherons à obtenir la normalité asymptotique d'une classe d'estimateurs de la densité et de la régression sous certaines conditions de dépendance. Dans le premier chapitre de cette partie, nous étudierons l'estimateur de Nadaraya-Watson pour des champs de variables aléatoires dont la dépendance est décrite par un mélange fort au sens de Rosenblatt [Ros56a] ou bien par la mesure de dépendance physique de Wu [Wu05]. Afin d'obtenir ces résultats de normalité asymptotique, nous utiliserons la méthode de Lindeberg [Lin22] (voir aussi [Ded98a]). Nous conclurons le chapitre en appliquant les théorèmes démontrés aux deux exemples dont on a parlé dans la partie précédente. Dans le deuxième chapitre de cette partie, nous nous intéresserons à une classe d'estimateurs récursifs de la densité et de la régression. Cette classe sera construite à partir de l'estimateur de Hall-Patil [HP94] que nous généraliserons de deux manières différentes : nous l'étendrons au cas des données spatiales ainsi qu'au cas de la régression. De même que pour le cas non-récursif nous démontrerons nos résultats à l'aide de la méthode de Lindeberg. Les résultats concernant l'estimateur de Nadarya-Watson ont été publiés dans un article par Mohamed El Machkouri, Xiequan Fan et Lucas Reding [EMFR20] et ceux traitant des estimateurs récursifs font l'objet d'un article soumis pour publication écrit en collaboration par Mohamed El Machkouri et Lucas Reding [EMR20].

Notations

Notations générales

- On dénotera par $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ les ensembles de nombres usuels.
- Soit $n > 0$ un entier et $x \in \mathbb{R}^n$, on notera par $\lfloor x \rfloor$ le vecteur dont les composantes sont les parties entières des composantes respectives de x.
- Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, alors $\mathcal{B}(X)$ désigne la tribu borélienne associée à $(X, \mathcal{T})$.
- Pour deux entiers a et b tels que $a < b$, on note $[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.
- On notera v.a. (resp. v.a.r.) pour variable aléatoire (resp. variable aléatoire réelle) et i.i.d. pour indépendants et identiquement distribués. Sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires seront supposées à valeurs réelles.
- $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance de la v.a.r. X.
- $\mathbb{V}[X]$ désigne la variance de la v.a.r. X.
- Si X et Y sont des v.a.r. de carrés intégrables, alors $\mathrm{Cov}[X, Y]$ désignera leur covariance.
- On notera $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ la loi normale de moyenne m et de variance σ^2. Si $\sigma^2 = 0$, on notera, par abus de notation, $\mathcal{N}(m, 0)$ pour la loi de Dirac δ_m.
- On notera L^p, $L^p(\mu)$ ou encore $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ les espaces des fonctions p-intégrables. Comme à l'accoutumée, on identifiera les classes d'équivalence de l'ensemble quotient L^p avec un de ses représentants.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction n fois dérivable, $n \in \mathbb{N}$, on notera par $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^k est noté $C^k(\mathbb{R})$ et celui des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées est noté $C_b^0(\mathbb{R})$.
- Si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$, alors on notera $\bigvee_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)$.
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ désigne l'espérance conditionnelle de la v.a.r. X sachant $\mathcal{F}$. Afin de simplifier les notations et de suivre les usages dans le domaine de l'étude du TCL nous omettrons le symbole $p.s.$ pour désigner les relations presque-sûres dès que le contexte sera suffisamment clair. En d'autres termes, on notera par les symboles usuels $(=, \leqslant, <, \cdots)$ à la fois l'égalité classique et celle presque-sûre dès que le contexte s'y prête.
- On note par $\|\cdot\|_p, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$ la norme naturelle de L^p et par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ pour n'importe quel $N \geqslant 2$.
- On note $\xrightarrow{\text{p.s.}}$, $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ et $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ la convergence respectivement presque sûre, en probabilité et en loi.
- On notera l'intégrale d'une fonction f définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$ contre une mesure μ par

$$\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) \ ou \ \int_X f(x) \mu(\mathrm{d}x).$$

Notations spécifiques au mémoire

- Dans tout le mémoire, d désignera un entier strictement positif.
- Si $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$, on note $|\Gamma|$ le cardinal de Γ.

- Les mutli-indices de $\mathbb{Z}^d$ seront notés en gras et on utilisera les notations suivantes :

$$\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d) \quad \text{et} \quad |\boldsymbol{n}| = \prod_{i=1}^{d} n_i,$$

  pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$.
- Si $\boldsymbol{n}$ est un multi-indice de $\mathbb{Z}^d$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ est un élément de $\mathbb{R}^d$, alors $\boldsymbol{nt}$ désignera le d-uplet $(n_1 t_1, \ldots, n_d t_d)$.
- Pour toutes transformations $T_1, \ldots, T_f$ de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et pour tout multi-indice $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$, on note $T^{\boldsymbol{i}} := \prod_{q=1}^{d} T_q^{i_q} := T_1^{i_1} \circ \cdots \circ T_d^{i_d}$.
- Sur $\mathbb{Z}^d$, on considère l'ordre $\leqslant$ défini comme suit : si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^d$, alors $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{v}$ si pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, on a $u_k \leqslant v_k$.
- Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^d$, on note $a \wedge b$ le minimum coordonnée par coordonnée de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.
- La convergence des multi-indices, notée $\boldsymbol{n} \to +\infty$ sera interprétée comme la convergence du minimum de toutes les composantes. En d'autres termes, si $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ est un multi-indice alors la notation $\boldsymbol{n} \to +\infty$ signifie $\min\{n_1, \ldots, n_d\} \to +\infty$.
- Si $X_{\boldsymbol{n}}$ est une variable aléatoire indexée par un mutli-indice $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ alors on notera indistinctement $X_{n_1, \ldots, n_d}$ ou $X_{(n_1, \ldots, n_d)}$ la variable $X_{\boldsymbol{n}}$.
- Si $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de variables aléatoires à valeurs dans un espace vectoriel E, alors on notera par $S_{\boldsymbol{n}}$ la somme partielle d'ordre $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$ des variables $X_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$ où la relation d'ordre est celle définie précédemment. C'est à dire

$$S_{\boldsymbol{n}} := \sum_{\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}}.$$

- On dira qu'un champ $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ de v.a. vérifie un TCL avec une variance asymptotique σ^2 (que l'on explicitera) si la convergence en loi

$$\frac{1}{s_{\boldsymbol{n}}} \left(S_{\boldsymbol{n}} - m_{\boldsymbol{n}} \right) \xrightarrow[\boldsymbol{n} \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

  est satisfaite pour un champ $(s_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d}$ de réels strictement positifs et un champ $(m_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d}$ de réels quelconques.
- Si a_α et b_α sont deux quantités réelles dépendantes d'un paramètre α, alors les relations $a_\alpha \trianglelefteq b_\alpha$ et $a_\alpha \trianglerighteq b_\alpha$ signifient, respectivement, $a_\alpha \leqslant \kappa b_\alpha$ et $a_\alpha \geqslant \kappa b_\alpha$ où κ est une constante indépendante de α.

Première partie

Généralités et résultats historiques

1. Théorie des probabilités

Ce premier chapitre est dédié aux rappels des différentes notions nécessaires à la bonne compréhension du mémoire ainsi qu'à l'introduction des notations que nous utiliserons au cours de celui-ci. En fin de chapitre nous étudierons brièvement les différentes notions de dépendances qui rentreront en jeu dans les chapitres suivants. Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité, les variables aléatoires seront définies sur cet espace de probabilité et pour toute variable aléatoire X, on notera par $\mathbb{P}_X$ sa loi.

1.1. Des généralités probabilistes

1.1.1. Processus et champs de variables aléatoires

Nous allons définir rigoureusement la notion de champ de variables aléatoires qui est l'objet principal de notre étude au cours de ce mémoire. Commençons, toutefois, par définir la notion plus générale de processus aléatoire.

Définition 1.1.1 (Processus stochastique)**.** On appelle processus stochastique toute famille de variables aléatoires indexée par un ensemble quelconque non vide T. T est alors appelé ensemble des indices.

Les variables aléatoires d'un processus stochastique peuvent être définies sur des espaces de probabilité différents ; cependant, et sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires d'un certain processus stochastique seront définies sur le même espace de probabilité dans la suite.
Dans ce mémoire, on parlera de *champ de variables aléatoires* dès lors que l'ensemble T sera muni d'une loi de composition interne (l.c.i.). Une classe de processus stochastiques particulière qui nous intéressera de par sa proximité avec les champs de variables aléatoires est celle des tableaux triangulaires.

Définition 1.1.2 (Tableau triangulaire)**.** Soient $((\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mu_n))_{n\geqslant 1}$ des espaces probabilisés, $(k_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers et $X_{n,i}, n \geqslant 1, i \in [\![1, n]\!]$ des variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $i \in [\![1, k_n]\!]$, la variable aléatoire $X_{n,i}$ est définie sur $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mu_n)$. La famille $(X_{n,i})_{\substack{n\geqslant 1\\ 1\leqslant i\leqslant k_n}}$ est alors appelée tableau triangulaire.

Notons que dans ce cadre les sommes partielles dont on étudie la convergence correspondent aux sommes sur chacune des lignes. Si les variables aléatoires de chaque ligne sont indépendantes, alors il est possible d'obtenir un théorème central limite pour ces tableaux pour peu que la condition de Lindeberg adaptée au cas des tableaux triangulaires (1.1) soit satisfaite.

$$\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{E}\left[X_{n,i}^2\mathbf{1}_{|X_{n,i}|>\varepsilon\sigma_n}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \tag{1.1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et avec $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{V}[X_{n,i}]$.

Dans le cas des tableaux triangulaires de variables aléatoires dépendantes, un résultat notable est le théorème 2.2 de l'article de Dvoretzky [Dvo70], dont nous aurons l'occasion de reparler dans un prochain chapitre, et qui énonce un théorème central limite sous une version conditionnelle de la condition (1.1) et sous un contrôle des moyennes et variances conditionnelles.

L'étude des théorèmes centraux limite fait souvent appel à une propriété de stabilité par translation des lois marginales des processus, aussi appelées *lois fini-dimensionnelles*. Cette propriété est appelée *stationnarité* du processus.

Définition 1.1.3 (Stationnarité d'un processus stochastique)**.** Soit $(X_t)_{t\in I}$ un processus stochastique indexé par un ensemble non vide I muni d'une l.c.i. $+$. On dit que $(X_t)_{t\in I}$ est stationnaire si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $t_1, \dots, t_n \in I$ et pour tout $a \in I$, on a

$$\mathcal{L}((X_{t_1+a}, \cdots, X_{t_n+a})) = \mathcal{L}((X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})).$$

Autrement dit pour tout $a \in I$, $(X_{i+a})_{i\in I} \overset{\mathcal{L}}{=} (X_i)_{i\in I}$.

1.1.2. Convergence en loi des champs

On rappelle la définition, ainsi que quelques propriétés, de la convergence en loi des champs de variables aléatoires à valeurs dans des espaces topologiques généraux.

Définition 1.1.4 (Convergence en loi)**.** Soit $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires à valeurs dans un espace topologique $(Y, \mathcal{T})$. On dit que le champ $(X_n)_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ converge en loi vers une variable aléatoire X si le champ de lois de probabilité $(\mathbb{P}_{X_{\boldsymbol{n}}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ converge étroitement vers la loi $\mathbb{P}_X$.

Rappelons que la convergence des multi-indices est définie comme la convergence du minimum des coordonnées vers $+\infty$ (voir les notations dans l'introduction).

Remarque. La définition précédente dépend, bien évidemment, de la topologie $\mathcal{T}$.

En explicitant la définition de la convergence étroite des mesures, on peut réécrire cette convergence de la manière suivante : on aura convergence en loi d'un champ de v.a. si pour toute fonction $f : (Y, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *continue et bornée*, on a la convergence

$$\mathbb{E}\left[f(X_{\boldsymbol{n}})\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[f(X)\right]. \tag{1.2}$$

On considère désormais que l'espace Y est un espace métrique séparable, complet pour la métrique sous-jacente [1] et localement compact et on prend pour $\mathcal{T}$ la topologie associée à cette distance.

Rappelons que, dans ce cas, il existe deux autres modes usuels de convergence de mesure : la convergence faible et la convergence vague.

La convergence faible correspond à la convergence (1.2) pour toute fonction $f : (Y, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *continue et de limite nulle à l'infini.* [2]
Et, il y a convergence vague si la convergence (1.2) est satisfaite pour toute fonction $f : (Y, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *continue et à support compact.*

1. Ces espaces sont connus sous le nom d'espace polonais [God03] p.67
2. Il existe $y_0 \in Y$, $\lim\limits_{d(y,y_0)\to+\infty} f(y) = 0$.

Dans le cas réel, on a équivalence entre convergence étroite, convergence faible et convergence vague des mesures de probabilités dès lors que la mesure limite est aussi une loi de probabilité. On rappelle alors que cette propriété est aussi vérifiée dans le cadre énoncé-ci dessus (voir Exercise 10.9.2 dans [Sam16]).

Un théorème important de la convergence en loi est le théorème de représentation de Skorohod. Celui-ci assure que pour toute suite de mesures de probabilité qui *converge étroitement* vers une loi de probabilité, il existe une suite de variables aléatoires suivant les dites lois et qui *converge presque sûrement* vers une variable aléatoire dont la loi est la limite des lois de la suite sus-citée.

Théorème (Théorème de représentation de Skorohod)**.** *Supposons que* $(\mu_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ *et* μ *sont des mesures de probabilité sur un espace polonais. Si le champ* $(\mu_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ *converge étroitement vers* μ*, alors il existe un champ* $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ *de variables aléatoires et une variable aléatoire* X *à valeurs dans cet espace polonais et définies sur un espace de probabilité* $(\Omega', \mathcal{F}', \nu)$ *telles que*

$$\mathcal{L}(X_{\boldsymbol{n}}) = \mu_{\boldsymbol{n}}, \quad \mathcal{L}(X) = \mu \quad \text{et} \quad X_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{p.s.} X.$$

Remarque. La démonstration est donnée dans [Bil99] pour $d = 1$; cependant, celle-ci s'étend de manière satisfaisante à n'importe quel $d \geqslant 2$.

1.1.3. Différentes méthodes de preuve de la convergence en loi

Outre l'utilisation directe de la définition de la convergence en loi ou bien les différentes caractérisations de celle-ci au travers du théorème porte-manteau, il existe de nombreuses manières de démontrer la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Ici, nous allons énoncer les principales méthodes qui nous intéresserons au cours de ce mémoire.

L'astuce de Cramér-Wold

Introduit par Harald Cramér et Herman Wold [CW36] en 1936, cette astuce de démonstration facilite grandement les preuves des théorèmes centraux limite multivariés (et plus particulièrement celles des versions fonctionnelles) en réduisant la preuve de convergence en loi d'une suite de vecteurs aléatoires en une preuve de convergence en loi de toutes les combinaisons linéaires des composantes de ces vecteurs. Le théorème de Cramér-Wold énonce, en des termes plus rigoureux, ce concept.

Théorème 1.1.5 (Cramér-Wold, 1936 ; [Bil12] Th 29.4)**.** *Soient* $k \in \mathbb{N}^*$, $((X_1^n, \dots, X_k^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $X = (X_1, \dots, X_k)$ *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*. Alors, on a l'équivalence suivante*

$$(X_1^n, \dots, X_k^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k, \ \sum_{i=1}^k t_i X_i^n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^k t_i X_i.$$

Lemme de Slutsky

Ce théorème, démontré par Evgeny Slutsky [Slu25] en 1925 est aussi appelé théorème de Cramér dans la littérature. Son utilité provient du fait qu'il permet de montrer, entre autres, que la suite des images $(f(X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'un couple de v.a. dont on connaît les convergences en loi par une fonction continue f converge, elle-même, en loi vers l'image $f(c, Y)$ pour peu que c soit une constante.

Lemme 1.1.6 (Slutsky, 1925 ; [Slu25]). *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs aléatoires qui converge en loi vers une v.a. X, et si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs aléatoires qui converge en probabilité vers une constante c, alors la suite de couples $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers le couple (X, c).*

Remarque. Dans cet énoncé, les variables aléatoires X_n et Y_n, $n \in \mathbb{N}$, n'ont pas besoin d'être à valeurs dans le même espace.

La méthode des blocs de Bernstein

Utilisée pour la première fois en 1927 par Serge Bernstein [Ber27], la méthode des blocs consiste à séparer les variables aléatoires en "petits" et "grands" blocs. Les petits blocs servent à séparer les grands blocs afin que ces derniers soient faiblement dépendants. Le TCL est alors obtenu en traitant les grands blocs comme des variables faiblement dépendantes et en montrant que la contribution des petits blocs devient négligeable devant celle des grands blocs. En tout, cette méthode se compose de trois étapes : la séparation en blocs (petits et grands), la preuve d'un TCL pour les grands blocs (au travers, par exemple, de méthodes d'approximation) et enfin la preuve de la négligeabilité des petits blocs devant les grands blocs au fur et à mesure que la taille de ces derniers croît.

Dans son article de 1927, Serge Bernstein établit le lemme fondateur suivant.

Lemme 1.1.7. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées de carrés intégrables. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose la somme partielle S_n de la manière suivante*

$$S_n = \Sigma_n + \sigma_n.$$

Si la suite $(\|\Sigma_n\|_2^{-1}\,\Sigma_n)_n$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite et si $\|\sigma_n\|_2 = o(\|S_n\|_2)$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors on a la convergence en loi de la suite $(\|S_n\|_2^{-1}\,S_n)_n$ vers la loi normale centrée réduite.

Ce lemme justifie, à lui seul, la méthode des blocs de Bernstein. Bien entendu cette méthode peut être étendu au cas des champs aléatoires (voir [CHT96], [CTW97], [Tra90], [HLT01]). Cette méthode de preuve étant populaire, de nombreux résultats ont été obtenus grâce à celle-ci. Pour illustrer notre propos, mentionnons les différents TCL que Serge Bernstein [Ber27] obtient dans son article de 1927 en plus du lemme précédent : Bernstein démontre, notamment, un TCL (Théorème A) pour des variables m_n-dépendantes (c.f. Définition 1.5.1) puis en imposant le contrôle de la variance, il obtient un TCL (Théorème B) pour une classe plus large de variables dépendantes. Un deuxième exemple de théorème dont la preuve repose sur un découpage par blocs à la Bernstein, sont les théorèmes 5.1 et 5.2 dans [Dvo70]. Enfin, le théorème 5.2 de l'article d'Aboubacar Amiri et de Sophie Dabo-Niang [ADN18] traitant des estimateurs à noyau est un autre exemple de TCL démontré à l'aide de cette méthode.

En ce qui nous concerne, nous verrons que certains résultats démontrés par la méthode Bernstein mènent à des conditions non-optimales pour l'obtention de théorèmes centraux limite. Un exemple d'un tel théorème est celui de Gérard Biau et Benoît Cadre [BC04] ayant trait aux estimateurs de la régression dans le cas spatial et nous verrons alors, dans le chapitre 5, que les conditions requises pour obtenir la normalité asymptotique (en particulier l'existence d'un moment exponentiel fini pour les observations) peuvent être réduites grâce à la méthode de Lindeberg.

La méthode de Lindeberg

Dans son article de 1922, Jarl Waldemar Lindeberg [Lin22] établit une méthode de démonstration se basant sur l'utilisation de la formule de Taylor sans pour autant faire appel aux fonctions caractéristiques. La convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a.r. vers une v.a.r. X correspond à la convergence étroite de la suite des lois de probabilité associées à chacun des termes de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En d'autres termes pour obtenir une convergence en loi, il faut et il suffit de montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\mathbb{E}\left[f(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[f(X)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.3}$$

L'idée principale de la méthode de Lindeberg consiste à établir cette propriété asymptotique pour n'importe quelle fonction f aussi régulière que l'on souhaite puis, dans un second temps, d'étendre la propriété (1.3) à toutes les fonctions continues bornées par des arguments de densité. Ci-dessous, nous formalisons ces deux étapes.

Étape 1) On montre la convergence (1.3) pour f aussi régulière que l'on souhaite. Dans un premier temps on commence par faire apparaître une somme télescopique de termes que l'on contrôlera en faisant appel au théorème de Taylor avec une majoration particulière du reste énoncé ci-dessous.

Théorème 1.1.8. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$, X, Y des variables aléatoires réelles admettant des moments d'ordre k finis et f une fonction de classe C^k telle que $M := \max_{0\leqslant i\leqslant k} \left\|f^{(i)}\right\|_\infty < +\infty$. Alors*

$$f(X+Y) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(X)}{i!} Y^i + r_{k-1}(Y),$$

où $|r_{k-1}(Y)| \leqslant \frac{2M}{(k-1)!}|Y|^{k-1} \min\left(1, |Y|\right)$ presque sûrement.

Afin d'achever cette étape, on cherche à montrer la convergence de chacun des termes apparaissant dans la somme télescopique ; pour cela, la majoration du reste que l'on a obtenue dans le théorème précédent nous sera utile.

Étape 2) On étend le résultat précédemment trouvé aux fonctions continues et bornées. Notons que cette étape est identique quelles que soient les conditions de dépendance que l'on a supposées ; par conséquent elle sera omise pour toutes les démonstrations de ce mémoire utilisant la méthode de Lindeberg. Dans un souci de rigueur, nous donnons ci-dessous la preuve de cette étape.

Théorème 1.1.9. *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires centrées, admettant des seconds moments uniformément bornés et dont on a montré la convergence (1.3) en remplaçant X par Y_n et pour n'importe quelle fonction f d'une classe de régularité $C_k^0(\mathbb{R}) := \{f \in C_k(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \text{ est compact}\}, k \in \mathbb{N}$. Alors, pour toute fonction $g \in C_0^b(\mathbb{R})$, on a la convergence*

$$\left|\mathbb{E}\left[g(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[g(Y_n)\right]\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Preuve. Soient g une fonction continue bornée, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $M > 0$, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on a

$$P\left(|X_n| \geqslant M+\varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{(M+\varepsilon)^2} \text{ et } P\left(|X_n| \geqslant M\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{M^2}$$

et

$$P\left(|Y_n| \geqslant M+\varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{(M+\varepsilon)^2} \text{ et } P\left(|Y_n| \geqslant M\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{M^2},$$

où $\sigma^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{E}\left[X_n^2\right], \mathbb{E}\left[Y_n^2\right]\} < +\infty$.

D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P_ε à coefficients réels tel que

$$||g - P_\varepsilon||_\infty < \varepsilon.$$

D'après le lemme d'Urysohn, il existe une fonction h_M de classe C^∞ telle que $\operatorname{supp} h_M \subset [-M-\varepsilon, M+\varepsilon]$, qui vaut 1 sur $[-M, M]$ et vérifiant $|h_M| \leqslant 1$.

On pose $g_M = h_M P_\varepsilon$ et on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\left[g(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[g(Y_n)\right]| &= |\mathbb{E}\left[g(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[g_M(X_n)\right]| \\ &\quad + |\mathbb{E}\left[g_M(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[g_M(Y_n)\right]| \\ &\quad + |\mathbb{E}\left[g_M(Y_n)\right] - \mathbb{E}\left[g(Y_n)\right]|. \end{aligned}$$

On note

$$\begin{cases} I_M = |\mathbb{E}\left[g(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[g_M(X_n)\right]| \\ II_M = |\mathbb{E}\left[g_M(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[g_M(Y_n)\right]| \\ III_M = |\mathbb{E}\left[g_M(Y_n)\right] - \mathbb{E}\left[g(Y_n)\right]|. \end{cases}$$

En raison du fait que les termes I_M et III_M se traitent de la même manière, on ne montrera la négligeabilité que du terme I_M. On a

$$I_M = \left|\mathbb{E}\left[\left(g(X_n) - g_M(X_n)\right)\mathbf{1}_{|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[g(X_n)\mathbf{1}_{|X_n|>M+\varepsilon}\right]\right|.$$

Or, g étant bornée,

$$\left|\mathbb{E}\left[g(X_n)\mathbf{1}_{|X_n|>M+\varepsilon}\right]\right| \leqslant P\left(|X_n| \geqslant M+\varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{M+\varepsilon} \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0.$$

Et

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left[\left(g(X_n) - g_M(X_n)\right)\mathbf{1}_{|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right]\right| &\leqslant \left|\mathbb{E}\left[\left(g(X_n) - P_\varepsilon(X_n)\right)\mathbf{1}_{|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right]\right| \\ &\quad + \left|\mathbb{E}\left[\left(1 - h_M(X_n)\right)P_\varepsilon(X_n)\mathbf{1}_{|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right]\right|. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\left|\mathbb{E}\left[\left(g(X_n) - P_\varepsilon(X_n)\right)\mathbf{1}_{|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right]\right| \leqslant \|g - P_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left[\left(1 - h_M(X_n)\right)P_\varepsilon(X_n)\mathbf{1}_{|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right]\right| &\leqslant 2\left|\mathbb{E}\left[P_\varepsilon(X_n)\mathbf{1}_{M<|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right]\right| \\ &\leqslant 2\mathbb{E}\left[\left(|g(X_n)| + \varepsilon\right)\mathbf{1}_{M<|X_n|\leqslant M+\varepsilon}\right] \\ &\leqslant \frac{2\sigma^2}{M^2}(\|g\|_\infty + \varepsilon) \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

De plus, d'après les hypothèses du théorème, on a

$$II_M = |\mathbb{E}\left[g_M(X_n)\right] - \mathbb{E}\left[g_M(Y_n)\right]| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, il existe $M_0 > 0$, $n_{M_0} \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant n_{M_0}$, on a

$$|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(Y_n)]| \leqslant \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire,

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(Y_n)]| = 0.$$

Ce qui achève la preuve du théorème (1.1.9). □

On pourra trouver une démonstration du TCL classique (i.e. pour des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées) par la méthode de Lindeberg dans l'article de 2009 de Jerôme Depauw [Dep09]. Mentionnons, ci-dessous, quelques résultats importants faisant appel à cette méthode.

Le premier théorème démontré au moyen de cette méthode est celui de Lindeberg [Bil99] ; Patrick Billingsley [3] établit que tout tableau triangulaire de variables aléatoires indépendantes, centrées, de carrés intégrables et satisfaisant la condition de Lindeberg (1.1) vérifie un TCL.

Emmanuel Rio [Rio95] démontre, au travers de la méthode de Lindeberg, qu'un tel résultat reste valide pour des tableaux triangulaires fortement mélangeants, c'est à dire que pour tout tableau triangulaire $(X_{i,n})_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ i\in[\![1,n]\!]}}$ de variables aléatoires réelles centrées , admettant des seconds moments finis et dont les coefficients de mélange fort (c.f. Définition 1.5.3) $\alpha_{1,\infty}^{(n)}(k), n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1,n]\!]$ associés à la suite $(X_{i,n})_{i\in[\![1,n]\!]}$ satisfont à la condition suivante :

$$V_{n,n}^{-3/2} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \alpha_n^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) Q_{X_{i,n}}^2(x) \min\left(\alpha_n^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) Q_{X_{i,n}}(x), \sqrt{V_{n,n}}\right) \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

où $Q_{X_{i,n}}(x) = \inf\{t > 0 : \mathbb{P}(|X_{i,n}| > t) \leqslant x\}$, $S_{i,n} = X_{1,n} + \cdots + X_{i,n}$, $V_{i,n} = \|S_{i,n}\|_2$ et $\alpha_n^{-1}(u) = \inf\{t > 0 : \alpha_{1,\infty}^{(n)}([t]) \leqslant u\}$.

Pour conclure cette section, mentionnons les nombreux travaux de Jerôme Dedecker (par exemple [Ded98a], [Ded98b], [DR00], [DM02]) qui reposent sur la méthode de Lindeberg.

Approximation par martingale

La méthode d'approximation fonctionnelle repose sur le fait suivant : si $(Y_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de v.a. satisfaisant un TCL, on peut montrer que $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ vérifie aussi un TCL si on a la convergence suivante.

$$\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}} \left\| \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{n}} (X_{\boldsymbol{i}} - Y_{\boldsymbol{i}}) \right\|_2 \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{} 0$$

Ce résultat se démontre aisément à l'aide du théorème 25.4 de Billingsley [Bil12].

Ainsi afin d'obtenir un TCL pour un champ, il est possible de l'approximer par un champ dont on sait déjà qu'il satisfait à un théorème central limite, par exemple une ortho-martingale

3. Le théorème de Lindeberg originel, démontré par Jarl Lindeberg [Lin22], concernait seulement les suites de v.a.i.i.d. mais la version de Patrick Billingsley dans [Bil99], étend ce résultat aux tableaux triangulaires.

(c.f. Définition 1.4.8).

Dans son article de 1969 [Gor69], Mikhaïl Gordin fut le premier à avoir utilisé cette méthode dans le cadre séquentiel et pour des systèmes dynamiques. Rappelons qu'un *système dynamique* est un quadruplet $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé et $T : X \to X$ est une application mesurable qui conserve la mesure. Dans un tel système, le processus étudié est de la forme $(f \circ T^i)_{i\in\mathbb{N}}$, où f est une fonction mesurable et T est ergodique. Dans ce cas, Mikhail Gordin obtient la validité du TCL pour ces processus si T est un automorphisme[4], f est de carré intégrable et si la condition suivante est satisfaite.

$$\inf_{g\in R} \limsup_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (f-g)\circ T^i \right\|_2 = 0 \tag{1.4}$$

où $R = \bigcup_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\ \ell<k}} (L^2(\mathcal{F}_k) \ominus L^2(\mathcal{F}_\ell))$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_n = T^{-n}(\mathcal{F}_0)$, $\mathcal{F}_0$ étant une tribu telle que $\mathcal{F}_0 \supset T^{-1}(\mathcal{F}_0)$. On dit d'une telle filtration qu'elle est *stationnaire*.

Dans [Vol93], Dalibor Volný rappelle que la condition (1.4) est satisfaite dès lors qu'il existe une suite d'accroissements de martingale $(m \circ T^i)$, où $m \in L^2(\mathcal{F}_0) \ominus L^2(\mathcal{F}_{-1})$ telle que

$$n^{-\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (f-m)\circ T^i \right\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

L'obtention d'une (ortho)martingale approximante peut s'effectuer de multiples façons. Au cours de cette thèse nous en verrons deux. Premièrement, dans le chapitre 3, nous obtenons cette approximation au travers d'un opérateur de projection et nous en déduisons le TCL en utilisant les résultats de convergence concernant les ortho-martingales établis par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19].

Précisons cette première méthode en explicitant la décomposition orthogonale que nous utiliserons pour obtenir une approximation par martingale dans le cadre séquentiel ; le cadre spatial, nécessitant l'introduction de la notion d'ortho-martingale définie ultérieurement dans ce mémoire, sera alors traité dans le chapitre 3.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit les opérateurs de projection $\mathcal{P}_i$ sur $L^2(\mathcal{F}_i) \ominus L^2(\mathcal{F}_{i-1})$ de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_i(f) = \mathbb{E}\left[f \,|\mathcal{F}_i\right] - \mathbb{E}\left[f \,|\mathcal{F}_{i-1}\right]$$

pour tout $f \in L^2(\mathcal{F})$. Et, à l'aide de ces opérateurs, on obtient la décomposition dite projective (ou orthogonale) suivante (voir [PZ18a]). Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i \left(\sum_{j=i}^{n} X_j \right) - R_n,$$

où $R_n = \mathbb{E}\left[S_n \,|\mathcal{F}_0\right]$.

4. C'est à dire une transformation bijective et bi-mesurable.

En utilisant cette décomposition, on peut construire une martingale qui approxime la somme S_n, ce qui nous permet d'obtenir des théorèmes limites sous certaines conditions sur les variables aléatoires $X_n, n \in \mathbb{Z}$.

La deuxième méthode pour obtenir une approximation consiste à trouver une décomposition martingale-cobord. Dans cette section, on étudie le cas séquentiel puis on traitera le cas spatial dans le chapitre 4. Tout d'abord, rappelons quelques définitions préliminaires. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et soit $T : \Omega \to \Omega$ une transformation bijective, bimesurable, préservant la mesure et ergodique (c.f. Définition 1.2.1), on s'intéresse au processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (f \circ T^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Définition 1.1.10 (Cobord)**.** On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est un cobord si il existe une fonction mesurable $g : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $f = g - g \circ T$. Dans ce cas, la fonction g est appelée fonction de transfert.

On considère alors la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (T^{-n}\mathcal{F}_0)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $\mathcal{F}_0$ est une tribu telle que $\mathcal{F}_0 \subsetneq T^{-1}(\mathcal{F}_0)$.

Définition 1.1.11 (Décomposition martingale-cobord)**.** On dit que la suite $(f \circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ admet une décomposition martingale-cobord, s'il existe une fonction $\mathcal{F}_0$-mesurable m et un cobord $g - g \circ T$ tels que

$$f = m + g - g \circ T \tag{1.5}$$

et

$$\mathbb{E}\left[m \,|\mathcal{F}_{-1}\right] = 0. \tag{1.6}$$

Il existe dans la littérature de nombreuses conditions suffisantes pour l'obtention d'une telle décomposition dont on donnera quelques exemples.

Dans son article de 1969, Mikhail Gordin [Gor69] obtient une décomposition martingale-cobord dès lors que les variables aléatoires $X_n, n \in \mathbb{Z}$ admettent des moments d'ordre $2 + \delta$, $\delta \geqslant 0$ et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|E\left[X_0 \,|\mathcal{F}_{-k}\right]\|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \|X_0 - \mathbb{E}\left[X_0|\mathcal{F}_k\right]\|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} < +\infty. \tag{1.7}$$

En 2006, Dalibor Volný [Vol06] étudie le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en supposant que

$$f \text{ est } \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[f \,\middle|\, \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{-n}\right] = 0. \tag{1.8}$$

Lorsque f satisfait ces conditions, on dit qu'elle est *régulière*. Dans ce cas,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_i(f).$$

Dalibor Volný obtient, alors, la condition nécessaire et suffisante suivante pour obtenir la décomposition (1.5) où $m, g \in L^p$ pour $p \in [1, +\infty[$.

$$\text{Les séries} \quad \sum \mathbb{E}\left[X_k|\mathcal{F}_0\right] \quad \text{et} \quad \sum (X_{-k} - \mathbb{E}\left[X_{-k}|\mathcal{F}_0\right]) \quad \text{convergent dans } L^p.$$

Une décomposition martingale-cobord telle que (1.5) peut aussi s'obtenir au travers de l'utilisation d'un théorème de décomposition ergodique tel que le Théorème 1.3 (Chapitre 2) dans [Kre85]. En effet, si H est un espace de Banach réflexif, alors

$$H = F(U) \oplus \overline{(I-U)H} \tag{1.9}$$

où $F(U)$ désigne l'ensemble des points fixes d'un opérateur U pour peu que cet opérateur soit ergodique en moyenne (c.f. Définition 1.2.2).

En prenant $H = L^2$ et pour U *l'opérateur de Koopman* associé à la transformation T (i.e. pour tout $f \in L^2$, $Uf = f \circ T$), on voit apparaître dans (1.9), l'ensemble $(I-U)H$ des cobords associés à la transformation T. Ceci nous permet d'obtenir, sous certaines conditions sur l'opérateur U une décomposition martingale-cobord.

Grâce à cette décomposition, il est possible d'obtenir des théorèmes limite en se servant de la multitude de résultats disponibles reliant les décompositions martingale-cobords aux TCL. Nous en mentionnons quelques uns.

Commençons par remarquer que dès lors que la fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ dite de transfert dans (1.5) est mesurable, il est possible d'obtenir un TCL pour la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f \circ T^i \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{1.10}$$

où $\sigma = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=1}^{n} f \circ T^i \right\|_2$.
Ceci découle du théorème de Billingsley-Ibragimov, énoncé ci-dessous et de la convergence en probabilité vers 0 de la suite $\left(n^{-1/2}(g - g \circ T^n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème 1.1.12 (Théorème de Billingsley-Ibragimov)**.** *Soit $(m \circ T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire et ergodique*[5] *d'accroissements de martingale telle que $\|m\|_2 = 1$. Alors $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} m \circ T^i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.*

La condition suffisante suivante pour l'obtention d'un TCL fut établie par Mikhail Gordin [Gor73] (voir [Vol93]).

$$f \text{ admet une décomposition martingale-cobord dans } L^1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[|S_n|\right]}{\sqrt{n}} < +\infty. \tag{1.11}$$

Dans son mémoire de thèse Davide Giraudo [Gir15] donne une preuve simple de ce résultat en combinant un résultat de Carl-Gustav Esseen et Svante Janson [EJ85] avec le théorème 3 dans [Vol93] de Dalibor Volný.

Dans l'introduction de leur article [EMG16], Mohamed El Machkouri et Davide Giraudo combinent un des résultats de Mikhail Gordin dans [Gor69] avec le théorème de Billingsley-Ibragimov mentionné ci-dessus afin d'obtenir un TCLF pour des processus stationnaires satisfaisant à la condition projective

$$\sum_{k\geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left[X_{\mathbf{0}} | \mathcal{F}_{-k}\right] \right\| < +\infty,$$

pour $p \geqslant 1$, $X_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \ominus L^p(\Omega, \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.

5. C'est à dire que T est ergodique.

1.2. Un peu de théorie ergodique

Nous avons vu dans ce qui précède que la notion d'ergodicité joue un rôle important dans l'obtention de TCL. Il est important, toutefois, de tempérer cette affirmation comme le montre les récents travaux de Dalibor Volný [Vol19]. Dans ce qui suit, on se place dans un espace de probabilité $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et on considère une transformation T de cet espace qui préserve la mesure.

On rappelle qu'un *ensemble invariant* pour la transformation T est un mesurable $A \in \mathcal{A}$ tel que $T^{-1}(A) = A$ et on note par $\mathcal{I}$ la *tribu invariante* associée à T, c'est à dire

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A} : T^{-1}(A) = A\}.$$

Définition 1.2.1 (Transformation ergodique)**.** La transformation T est dite ergodique par rapport à μ si tout ensemble invariant est de mesure égale à 0 ou 1. Autrement dit, si la tribu invariante associée à T est μ-triviale.

Malgré son utilité, la propriété d'ergodicité d'une transformation peut s'avérer être une condition trop restrictive. Dans le chapitre 4, nous aurons besoin d'une propriété plus faible que cette dernière : l'ergodicité en moyenne [6].

Définition 1.2.2 (Opérateur ergodique en moyenne)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit U un opérateur linéaire sur E de norme inférieure ou égale à 1. On dit que U est ergodique en moyenne si pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i x - y \right\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{1.12}$$

1.2.1. Théorèmes ergodiques

Depuis le théorème ergodique de Birkhoff établi en 1931 et celui de von Neumann démontré en 1932, de nombreux théorèmes ergodiques, dont des versions multi-indicées, ont été démontrés comme par exemple ceux de Zygmund, Fava et Tempel'man mentionnés ci-dessous. Ceux-ci sont particulièrement bien adaptés à l'étude des théorèmes *quenched* et nous en ferons grand usage dans les chapitres 3 et 4. Avant de présenter les théorèmes ergodiques qui nous intéressent, nous commençons par rappeler la définition d'opérateur de Dunford-Schwartz.

Définition 1.2.3 (Opérateur de Dunford-Schwartz)**.** Un opérateur linéaire U est dit de Dunford-Schwartz si c'est une contraction de L^1 dans lui-même et

$$\sup\{\|Uf\|_\infty : f \in L_1 \cap L_\infty, \|f\|_\infty \leqslant 1\} \leqslant 1.$$

Si $U_1, \ldots, U_d$, sont des opérateurs linéaires, on notera $U^{\boldsymbol{i}} = U_1^{i_1} \circ \cdots \circ U_d^{i_d}$ pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$.

Le premier théorème qui nous concerne est celui de Zygmund-Fava (voir [Kre85], p.196). En notant

$$L \ln^{d-1} L = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \;\middle|\; \int_X |f| \max(\ln|f|, 0)^{d-1} \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}, \tag{1.13}$$

la classe de Zygmund, il est possible d'obtenir un théorème ergodique.

6. Au travers du théorème ergodique de von Neumann, l'opérateur de Koopman sur L^2 d'une transformation ergodique est ergodique en moyenne

Théorème 1.2.4 (Zygmund-Fava)**.** *Soient $U_1, \dots, U_d$ des opérateurs de Dunford-Schwartz. Alors $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}} U^{\boldsymbol{i}}h$ existe presque sûrement pour tout $h \in L\ln^{d-1} L$.*
De plus cette limite vaut $A_\infty(T_1)\cdots A_\infty(T_d)h$ avec $A_\infty(T_i) = \lim\limits_{n_i\to+\infty} \frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1} U_j^i h$, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$.

Bien que ce théorème identifie la limite, comme composée de limites des moyennes selon chaque direction, il reste toutefois à identifier ces dernières. Pour cela, on fera appel à des théorèmes tels que celui de Louis Sucheston [Suc67] ou bien encore le lemme 7.1 dans [DMP14]. Ces théorèmes nous permettent alors d'obtenir des limites sous la forme d'espérances conditionnelles sachant la tribu invariante d'une certaine transformation. Et on sera, alors, en mesure de conclure en remarquant que la tribu invariante d'une transformation ergodique est μ-triviale.

Notons que l'on peut caractériser la classe de Zygmund de la manière suivante (voir [Kre85]).

$$L\ln^{d-1} L = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : \forall t > 0, \int_{|f|>t} \frac{|f|}{t}\left(\ln\frac{|f|}{t}\right)^{d-1} d\mu < +\infty \right\}.$$

Le théorème suivant, nous donne une inégalité ergodique maximale. Celle-ci nous sera utile pour relier la condition de dépendance que nous étudierons au chapitre 4 à la queue du maximum des moyennes des processus étudiés ; ce qui nous permettra par la suite d'obtenir une convergence en loi.

Théorème 1.2.5. *Soient $U_1, \dots, U_d$ des opérateurs de Dunford-Schwartz. Alors il existe une constante $C_d > 0$ telle que pour tout $t > 0$ et pour tout $f \in L\ln^{d-1} L$, on a*

$$\mu\left(\sup_{\boldsymbol{m}\in(\mathbb{N}^*)^d} \frac{1}{|\boldsymbol{m}|}\sum_{\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{i}\leqslant\boldsymbol{m}-\boldsymbol{1}} U^{\boldsymbol{i}}|f| > 4t\right) \leqslant C_d \int_{\{|f|>t\}} \frac{|f|}{t}\left(\ln\frac{|f|}{t}\right)^{d-1} d\mu.$$

Finalement, mentionnons le théorème de Tempel'man (voir [Kre85], p.205) qui permet d'obtenir la conclusion du théorème 1.2.4 en n'ayant besoin que de l'existence de moments d'ordre 2 finis. La contrepartie étant qu'alors la convergence existe dans un sens plus faible : elle n'a lieu que pour des régions carrées de $\mathbb{Z}^d$.

Théorème 1.2.6 (Tempel'man)**.** *Si $\tau_1, \dots, \tau_d$ sont des endomorphismes commutants de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ alors la suite $\left(\frac{1}{n^d}\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}}^{n\boldsymbol{1}} f\circ\tau^{\boldsymbol{i}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement pour tout $f \in L^p, 1 \leqslant p < +\infty$ où $S_n(f) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{n\boldsymbol{1}} f\circ\tau^{\boldsymbol{i}}$.*

Remarquons que, ici, l'identification de la limite s'effectue au travers de la remarque qui suit le théorème 2.8 du chapitre 6 dans l'ouvrage de Krengel [Kre85].

1.2.2. Un résultat clé concernant les TCL

Bien que la notion d'ergodicité de transformation joue un rôle important dans l'obtention de TCL pour des systèmes dynamiques, Dalibor Volný a montré en 2015 [Vol15] que pour obtenir un théorème central limite pour certains champs de variables aléatoires de la forme $(f\circ T^{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$, il n'est pas nécessaire d'avoir l'ergodicité de toutes les transformations $T_i, i \in [\![1, d]\!]$; dans un article tout à fait récent [Vol19], l'auteur a aussi prouvé qu'il n'est même pas forcément nécessaire d'avoir l'ergodicité de l'une de ces transformations, mais dans ce cas la loi limite n'est pas nécessairement une loi normale mais peut être un mélange de lois normales.

Théorème 1.2.7 (Volný, [Vol15]). *Soient $T_1, \dots, T_d$ des transformations qui préservent la mesure et qui commutent et $f \in L^2$ tel que $(f \circ T^{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ soit un champ d'accroissement d'orthomartingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ que l'on suppose être complètement commutante* [7]. *Si au moins l'une des transformations $T_i, i \in [\![1, d]\!]$ est ergodique, alors le théorème central limite suivant est satisfait.*

$$\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}} \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} f \circ T^{\boldsymbol{i}} \xrightarrow[\boldsymbol{n} \to +\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{1.14}$$

où $\sigma^2 = \|f\|_2^2$.

1.3. Processus de Wiener et le principe d'invariance

Comme nous avons pu le constater jusqu'à présent, le TCL est satisfait dans un grand nombre de cas ; il existe donc une sorte d'universalité du théorème et son domaine d'applicabilité semble être plutôt large. Les sommes partielles apparaissant dans le TCL nous permettent aussi de décrire des marches aléatoires, il est donc naturel de s'attarder sur les trajectoires de ces dernières et de se demander si elles vérifient un théorème limite dans un sens que l'on explicitera par la suite.

1.3.1. Processus de Wiener

Tout comme la loi limite usuelle du théorème central limite est la loi normale [8], le processus limite classique du théorème central limite fonctionnel est le processus de Wiener, encore appelé mouvement brownien. Commençons par définir un tel processus.

Définition (Mouvement brownien uni-dimensionnel). Un mouvement brownien (aussi appelé processus de Wiener uni-dimensionnel) est un processus stochastique $(B_t)_{t \geqslant 0} = \left((B_t^1, \dots, B_t^N)\right)_{t \geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$ ayant les propriétés suivantes :

(1) pour tout $t \geqslant 0$, B_t suit une loi normale centrée et de variance t ;

(2) la trajectoire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour presque tout $\omega \in \Omega$;

(3) pour tous $s, t \geqslant 0$, $B_{t+s} - B_s$ est indépendant de $\sigma(B_u, u \leqslant s)$ et a même loi que B_t ;

(4) les processus $(B_t^1)_{t \geqslant 0}, \dots, (B_t^N)_{t \geqslant 0}$ sont mutuellement indépendants.

Remarque. Si de plus $B_0 = 0$, on parle de *mouvement brownien standard*. Dans toute la suite, et sauf mention du contraire, les mouvements browniens seront standards et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'espérance de B_t en tout point $t \geqslant 0$ est nulle et la covariance $\mathrm{Cov}[B_t, B_s]$ vaut $\min(t, s)$ pour tous $s, t \geqslant 0$.

7. C'est à dire une filtration commutante (c.f. 1.4.6) et invariante (voir [Vol15]).
8. Il existe cependant de nombreux théorèmes limite donnant une loi limite différente de la loi normale (e.g. le mélange de lois : [Ded98a], les lois stables : [Jak12], ...)

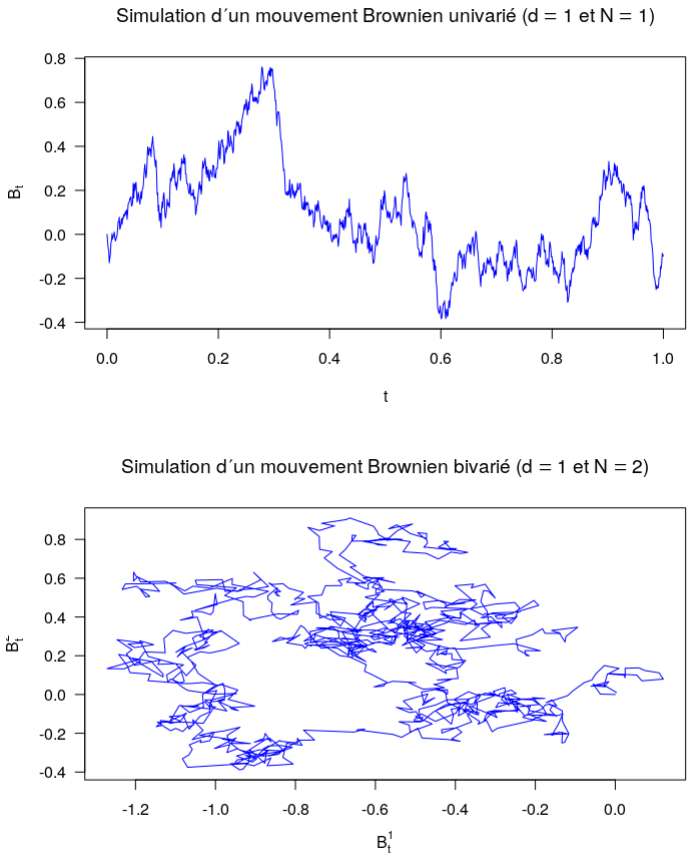


FIGURE 1.1. – Simulation d'un mouvement brownien univarié et bivarié

Un mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$ possède des propriétés de stabilité par rapport aux opérations usuelles. Par exemple

- Un mouvement brownien est *homogène*, c'est à dire que pour tout $s > 0$, le processus $(B_{t+s} - B_s)_{t\geqslant 0}$ est aussi un mouvement brownien qui d'après la propriété (3) est indépendant de $(B_r)_{0\leqslant r\leqslant s}$.
- Un mouvement brownien est *stable par multiplication*, c'est à dire que pour tout $c \neq 0$, le processus $(cB_{\frac{t}{c^2}})_{t\geqslant 0}$ est encore un mouvement brownien.
- Un mouvement brownien est *stable par inversion du temps*, c'est à dire que $(B'_t)_{t>0} := (tB_{\frac{1}{t}})_{t>0}$ est un mouvement brownien. De plus, $(B'_t)_{t>0}$ peut être presque sûrement étendu par continuité en $t = 0$ en posant $B'_0 = 0$.
- Un mouvement brownien univarié ou bivarié est *récurrent* et un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^N, N \geqslant 3$ est *transient*. Autrement dit
  * Si $N \in \{1, 2\}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{t \geqslant 0 : \|B_{t_{x,\varepsilon}} - x\| \leqslant \varepsilon\}$ n'est pas borné.
  * Si $N \geqslant 3$, alors presque sûrement, $\|B_t\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

Au vu des objets étudiés au cours de ce mémoire, il est intéressant de définir le concept de drap brownien, c'est à dire de mouvement brownien à temps continu et multi-dimensionnel. Les propriétés (1), (2) et (4) de la définition 1.3.1 s'étendent de manière naturelle ; cependant la

propriété (3) concernant les accroissements du processus pose plus de problèmes et nécessite de donner un sens à la notion d'*accroissement d'un drap brownien*. Dans toute la suite, nous utiliserons les notations des multi-indices dans $\mathbb{Z}^d$ pour les multi-indices de $(\mathbb{R}^+)^d$ (voir les notations dans l'introduction). On définit alors un *accroissement de drap brownien d-dimensionnel* de la manière suivante.

Définition 1.3.1 (Accroissement d'un champ d-dimensionnel)**.** Si $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d), \boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{R}^+)^d$ sont tels que $s_k < t_k$ pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, alors l'accroissement d'un processus $(X_{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}\in(\mathbb{R}^d)}$ sur le rectangle

$$]\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}] = \prod_{i=1}^{d}]s_i, t_i] \tag{1.15}$$

est la variable aléatoire

$$D_{]\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]}(X) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \sum_{\substack{J\subset[\![1,d]\!] \\ |J|=i}} X^J_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}}, \tag{1.16}$$

où $X^J_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}}$ est la variable aléatoire $X_{u_1,\dots,u_d}$ avec $u_i = s_i$ si $i \in J$ et $u_i = t_i$ sinon.

Remarque. Si le rectangle $[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]$ est dégénéré (i.e. s'il existe des coordonnées identiques entre $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$), on définit l'accroissement $D_{]\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]}(X)$ comme l'accroissement en dimension q (q étant le nombre de coordonnées qui diffèrent entre $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$) sur le rectangle non dégénéré formé par le produit des $]s_i, t_i]$ pour lesquels $s_i \neq t_i$.

On est désormais en mesure de définir correctement le mouvement brownien multi-dimensionnel.

Définition 1.3.2 (Mouvement brownien multi-dimensionnel)**.** On dit qu'un processus $B = (B_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in(\mathbb{R}^+)^d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N, N \geqslant 1$ est un mouvement brownien d-dimensionnel (on dit aussi drap brownien d-dimensionnel ou processus de Wiener d-dimensionnel) si

(1) pour tout $\boldsymbol{t} \in (\mathbb{R}^+)^d$, $B_{\boldsymbol{t}}$ suit une loi normale centrée et de variance $|\boldsymbol{t}|$;

(2) le champ $\boldsymbol{t} \mapsto B_{\boldsymbol{t}}(\omega)$ est continue pour presque tout $\omega \in \Omega$;

(3) les accroissements $D_{]\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]}(B)$ sur des rectangles disjoints sont mutuellement indépendants et ont même loi que $B_{\boldsymbol{s}}$;

(4) les processus $(B^1_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in(\mathbb{R}^+)^d}, \dots, (B^N_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in(\mathbb{R}^+)^d}$ sont mutuellement indépendants.

Remarque. Si $B_{\boldsymbol{t}} = 0$ pour $\boldsymbol{t} \in (\mathbb{R}^+)^d$ tel qu'au moins l'une de ses coordonnées soit nulle, on dit que le drap brownien est standard. Dans toute la suite, et sauf mention du contraire, les draps browniens seront standards et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'espérance de $B_{\boldsymbol{t}}$ en tout point $\boldsymbol{t} \in (\mathbb{R}^+)^d$ est nulle et la covariance $\mathrm{Cov}[B_{\boldsymbol{t}}, B_{\boldsymbol{s}}]$ vaut $\prod_{i=1}^d \min(t_i, s_i)$ pour tous $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in (\mathbb{R}^+)^d$.

1.3.2. Espace de Skorohod, tension et principe d'invariance

Introduit, dans sa forme actuelle [9], par Monroe Donkser [Don49 ; Don51] en 1949, le principe d'invariance [10] permet de décrire partiellement le comportement asymptotique des trajectoires des marches aléatoires. Il vient compléter le TCL qui ne traite seulement que de l'extrémité de ces marches aléatoires. Tout comme pour ce dernier, la convergence qui nous intéresse est

9. Bien que déjà en 1946, Mark Kac [Kac46] mentionne un principe d'invariance qui ne se référait seulement qu'à l'indépendance de la loi limite par rapport aux lois des v.a. étudiées.

10. Aussi appelé théorème central limite fonctionnel.

la convergence étroite des lois de probabilité. Cependant, dans ce nouveau cadre, les variables aléatoires ne sont plus à valeurs réelles mais à valeurs dans un espace de fonctions. Dans ce mémoire nous nous intéresserons à deux manières différentes de définir des principes d'invariance bien qu'il en existe d'autres (voir [Gir15], [RS01], [Lam62]) ; chacune de ces définitions diffèrent en ceci que les variables aléatoires étudiées ne prennent pas leurs valeurs dans le même espace.

Déf 1) : Une première définition consiste à étudier une suite de v.a. à valeurs dans l'espace $C([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. Cet espace sera muni de la topologie associée à la distance uniforme.

Déf 2) : Une deuxième définition se fonde, quant à elle, sur des v.a. à valeurs dans l'espace de Skorohod, c'est à dire l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continues à droite et limitées à gauche (càdlàg). Il est clair que pour pouvoir décrire la convergence en loi des v.a. à valeurs dans cet espace, nous aurons besoin de le munir d'une topologie bien adaptée et non triviale.

Espace et topologie de Skorohod

Commençons par définir l'espace de Skorohod dans le cas uni-dimensionnel ($d = 1$).

Définition 1.3.3 (Espace de Skorohod)**.** On définit l'espace de Skorohod comme suit.

$$D([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ est càdlàg}\}$$

Désormais, nous souhaitons munir cet ensemble d'une topologie adaptée ; l'idée de Anatoliy Skorohod était la suivante : dans le cas de l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme, deux fonctions seront proches seulement si toutes leurs images le sont. Ceci est plutôt restrictif, en effet lorsque l'on travaille avec des fonctions de l'espace de Skorohod, celles-ci peuvent admettre des points de discontinuité (une quantité dénombrable) et par conséquent, pour dire de deux fonctions de $D([0,1])$ qu'elles sont proches, on souhaiterait ne pas tenir compte de ces points problématiques ainsi que de leurs voisinages proches. Pour cela, il faut considérer une topologie permettant aussi une perturbation des abscisses. À contrario, la topologie de la convergence uniforme ne permet pas de considérer des perturbation des ordonnées.

Définition 1.3.4 (Topologie de Skorohod, [Bil99])**.** On note E l'ensemble des bijections continues strictement croissantes de $[0,1]$ dans lui-même. On définit une distance sur $D([0,1])$ de la manière suivante :

$$d_0(u,v) = \inf_{f\in E} \max\left\{\sup_{s<t}\left|\ln\left(\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\right)\right|, \|u - v\circ f\|_\infty\right\}, \tag{1.17}$$

pour tous $u, v \in D([0,1])$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infini.

La topologie de Skorohod est la topologie engendrée par cette métrique d_0.

Présentons maintenant l'extension au cas multi-indexé de l'espace et de la topologie de Skorohod. Cette extension est étudiée dans l'article écrit en 1971 par Georg Neuhaus [Neu71].

On se place dans l'espace $[0,1]^d$ et on note, pour tout $(\rho_1,\dots,\rho_d) \in \{0,1\}^d$ et pour tout $(u_1,\dots,u_d) \in [0,1]^d$,

$$I(\rho,u) = I_1(\rho_1,u_1)\times\cdots\times I_d(\rho_d,u_d) \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1,d]\!],\ I_i(\rho_i,u_i) = \begin{cases} [0,u_i[& \text{si } \rho_i = 0 \\ ]u_i,1] & \text{si } \rho_i = 1. \end{cases}$$

Définition 1.3.5 (ρ-limite)**.** Soient $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$, $\rho \in \{0,1\}^d$ et $t \in [0,1]^d$ tels que $I(\rho,t) \neq \varnothing$, on dit que f admet une ρ-limite en t si pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $I(\rho,t)$ qui converge vers t, la suite $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarque.

- La ρ-limite, si elle existe, est unique.
- Si cette limite existe, on la note $\rho\text{-}\lim\limits_{x\to t} f(x)$.

Dans le cas uni-dimensionnel, la définition de l'espace de Skorohod fait intervenir deux notions de régularité sur des fonctions : le fait d'être limitée partout et le fait d'être continue à droite en tout point. Comme nous l'avons remarqué, il est relativement aisé d'étendre la première notion au cas multi-dimensionnel. Cependant, afin de pouvoir étendre la notion de continuité à droite à ce cas, on va devoir construire une partition de l'ensemble $[0,1]^d$. Pour $\rho \in \{0,1\}^d$ et $t \in [0,1]^d$, on note

$$J(\rho,u) = J_1(\rho_1,u_1)\times\cdots\times J_d(\rho_d,u_d) \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1,d]\!],\ J_i(\rho_i,u_i) = \begin{cases} [0,u_i[& \text{si } \rho_i = 0 \text{ et } u_i < 1 \\ [0,1] & \text{si } \rho_i = 0 \text{ et } u_i = 1 \\ [u_i,1] & \text{si } \rho_i = 1 \text{ et } u_i < 1 \\ \varnothing & \text{si } \rho_i = 1 \text{ et } u_i = 1. \end{cases}$$

En remarquant que quelque soit $u \in [0,1]^d$, la collection $\{J(\rho,u)\}_{\rho\in\{0,1\}^d}$ de sous-ensembles de $[0,1]^d$ forme une partition de cet ensemble, on peut noter σ la fonction qui à tout $t \in [0,1]^d$ associe l'unique ρ tel que $t \in J(\rho,t)$.

Définition 1.3.6 (Espace de Skorohod multi-dimensionnel)**.** En utilisant les notations précédentes, on définit l'espace de Skorohod d-dimensionnel comme suit.

$$D([0,1]^d) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]^d} : \forall \rho \in \{0,1\}^d, \forall t \in [0,1]^d, \rho\text{-}\lim_{x\to t} f(x) \text{ existe et } \sigma(t)\text{-}\lim_{x\to t} f(x) = f(t) \right\}.$$

On étend, désormais, la topologie de Skorohod uni-dimensionnel au cas multi-dimensionnel. Au vu de la définition précédente, ceci s'effectue de manière naturelle.

Définition 1.3.7 (Topologie de Skorohod, [Neu71])**.** On note E l'ensemble des bijections continues strictement croissantes de $[0,1]$ dans lui-même. On définit une distance sur $D([0,1]^d)$ de la manière suivante.

$$d_0(u,v) = \inf_{\substack{f\in E^d \\ f=(f_1,\dots,f_d)}} \max\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant d} \sup_{s<t} \left| \ln\left(\frac{f_i(t)-f_i(s)}{t-s} \right) \right|, \|u - v\circ f\|_\infty \right\}, \tag{1.18}$$

pour tous $u,v \in D([0,1]^d)$.

De même que dans le cas uni-dimensionnel, la topologie de Skorohod est la topologie engendrée par cette métrique d_0.

Tension d'une famille de mesure

Avant d'énoncer le principe d'invariance, nous aurons besoin de la notion de tension d'une famille de mesures de probabilité.

Définition 1.3.8 (Famille de mesures tendue)**.** Soit (X, τ) un espace topologique, on dit qu'une famille A de mesures sur $\mathcal{B}(X)$ est tendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel que pour toute mesure $\mu \in A$, on a

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$$

Remarquons qu'il existe plusieurs caractérisations de la propriété de tension d'une famille de mesures.

Mentionnons, à titre d'exemple, le théorème de Prokhorov [Pro56] et son corollaire pour les mesures de probabilité énoncé par Patrick Billingsley dans [Bil99] ou encore les nombreux autres résultats se trouvant dans l'ouvrage de Patrick Billingsley [Bil99] aux chapitres 7 et 13 (Théorèmes 7.3 et 13.2) pour n'en citer que deux.

Cependant, dans cette thèse nous utiliserons un théorème de Peter Bickel et Michael Wichura (Théorème 3 et condition (3) dans [BW71]). Précisons l'énoncé de ce dernier.

On dit que deux ensembles sont *voisins* si ce sont des boréliens de la forme (1.15) et qu'ils admettent au moins une face en commun et sont contigus.

Théorème 1.3.9 (Bickel et Wichura, [BW71])**.** *On considère un champ $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires ; on suppose que tous les $X_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$ s'annulent sur la frontière de $[0,1]^d$ et qu'il existe deux constantes $\beta > 1$ et $\gamma > 0$ et une mesure finie μ sur $[0,1]^d$ dont les mesures marginales sont absolument continues et telle que pour toute paire (B, C) d'événements voisins dans $[0,1]^d$, on a*

$$\mathbb{E}\left[|D_B(X)|^{\gamma_1}|D_C(X)|^{\gamma_2}\right] \leqslant \mu(B)^{\beta_1}\mu(C)^{\beta_2} \tag{1.19}$$

où $D_B(X)$ et $D_C(X)$ sont définis comme dans la définition 1.3.1 et les constantes $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ satisfont au système suivant :

$$\begin{cases} \gamma_1 & + & \gamma_2 & = & \gamma \\ \beta_1 & + & \beta_2 & = & \beta. \end{cases}$$

Alors la famille de mesure $(\mathbb{P}_{X_{\boldsymbol{n}}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ satisfait la propriété suivante :

$$\lim_{\delta\to 0^+} \limsup_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \mathbb{P}\left(w''_\delta(X_{\boldsymbol{n}}) \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et avec

$$w''_\delta(X_{\boldsymbol{n}}) = \max_{1\leqslant i\leqslant d} \sup\left\{\min(\|X_{u_i} - X_{n_i}\|_\infty, \|X_{v_i} - X_{n_i}\|_\infty); u_i \leqslant n_i \leqslant v_i, u_i - v_i \leqslant \delta\right\}.$$

La conclusion du théorème de Bickel et Wichura nous donne une condition plus faible que la tension telle qu'on l'a définie précédemment (c.f. 1.3.8). Cependant, en appliquant le théorème 13.3 dans [Bil99], nous obtiendrons la tension de la famille de mesure au sens classique. Le théorème 13.3 mentionné dans [Bil99] ne traite que du cas séquentiel ; cependant, il est possible d'étendre la preuve au cas multi-indicé.

Principe d'Invariance

Tout comme pour la section précédente, nous commencerons par définir le principe d'invariance dans le cas uni-dimensionnel pour plus de clarté et nous le définirons par la suite dans le cas multi-dimensionnel. Comme nous l'avons vu précédemment, la notion d'espace polonais nous donne de bonnes propriétés pour étudier la convergence en loi dans ces espaces. Ainsi, il serait pratique d'obtenir cette propriété pour les espaces fonctionnels $C([0,1])$ et $D([0,1])$. C'est ce qui est énoncé ci-dessous.

Proposition 1.3.10. *Les espaces $C([0,1])$ muni de la distance uniforme et $D([0,1])$ muni de la distance d_0 définie par (1.17) sont des espaces métriques complets et séparables.*

Pour définir la notion de principe d'invariance, nous introduisons les deux quantités associées au champ X suivantes :

$$\chi_n^{(1)}(t,\omega) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i(\omega) + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} X_{\lfloor nt \rfloor + 1}(\omega) \quad \text{et} \quad \chi_n^{(2)}(t,\omega) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i,$$

où $(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$.
On s'intéresse, alors, aux applications $\omega \mapsto \chi_n^{(i)}(\cdot,\omega), i \in \{1,2\}$. En particulier on cherche à savoir si ce sont des fonctions aléatoires et on cherche à connaître leurs espaces d'arrivée. La proposition ci-dessous répond à ces deux questions.

Proposition 1.3.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications*

$$f_{1,n} : \begin{cases} \Omega \to C([0,1]) \\ \omega \mapsto \chi_n^{(1)}(\cdot,\omega) \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad f_{2,n} : \begin{cases} \Omega \to D([0,1]) \\ \omega \mapsto \chi_n^{(2)}(\cdot,\omega) \end{cases}$$

sont bien définies et mesurables dès lors que leurs ensembles d'arrivés sont munis de leurs tribus boréliennes respectives.

Nous sommes donc en mesure de définir le principe d'invariance.

Définition (Principe d'Invariance)**.** On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait le principe d'invariance (PI) lorsque l'une des deux conditions suivantes est satisfaite.

- La suite des mesures images $(\mathbb{P} \circ (f_{1,n})^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement dans $C([0,1])$.
- La suite des mesures images $(\mathbb{P} \circ (f_{2,n})^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement dans $D([0,1])$ pour la topologie de Skorohod.

Remarque. En 1956, Andreï Kolmogorov [Kol56], a montré que s'il y a convergence dans l'espace de Skorohod muni de sa topologie éponyme vers une limite dans l'espace des fonctions continues $C([0,1])$ alors la convergence a aussi lieu pour la topologie de la convergence uniforme. En combinant ce fait là au théorème de représentation de Skorohod (c.f. théorème 1.1.2), on déduit que si la limite des mesures images $(\mathbb{P} \circ (f_n^{(2)})^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la loi d'un processus à trajectoire continue (comme par exemple pour le processus de Wiener), alors on peut remplacer la topologie de Skorohod par la topologie de la convergence uniforme pour les PI dans $D([0,1])$.

Pour l'extension au cas multi-dimensionnel, il est important de remarquer que l'équivalent d-dimensionnel de la fonction $\chi_n^{(1)}$ admet une expression difficile à manipuler et par conséquent il est d'usage de n'utiliser que l'équivalent d-dimensionnel de $\chi_n^{(2)}$.

On considère un champ $X = (X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles et on définit alors

$$W_{\boldsymbol{n}}^{(d)} : (\boldsymbol{t},\omega) \in [0,1]^d \times \Omega \mapsto \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}} \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \lfloor \boldsymbol{nt} \rfloor} X_i \qquad \text{et} \qquad \Xi_{\boldsymbol{n}}^{(d)} : \begin{cases} \Omega \to D([0,1]^d) \\ \omega \mapsto W_{\boldsymbol{n}}^{(d)}(\cdot,\omega) \end{cases}$$

De même que précédemment, la fonction $\Xi_{\boldsymbol{n}}^d$ est bien définie et mesurable par rapport aux tribus associées, l'espace $D([0,1]^d)$ est un espace polonais pour la distance définie par (1.18) et le principe d'invariance dans le cas spatial s'énonce comme suit.

Définition 1.3.12 (Principe d'Invariance)**.** On dit que le champ $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ satisfait le principe d'invariance (PI) si la suite des mesures images $(\mathbb{P}\circ(\Xi^d_{\boldsymbol{n}})^{-1})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ converge étroitement dans $D([0,1]^d)$ pour la topologie de Skorohod.

Remarque. De même que pour le cas uni-dimensionnel, le PI est équivalent à la convergence en loi des mesures images dans $D([0,1]^d)$ muni de la norme uniforme.

Différentes méthodes de preuve

Démontrer la convergence étroite de la suite des mesures de probabilité peut s'avérer être un problème délicat. C'est pourquoi plusieurs méthodes de preuve des principes d'invariance ont été développées au fil du temps. Outre une preuve directe du principe d'invariance, on pourra citer les méthodes suivantes.

Convergence des lois finis-dimensionnelles et tension Cette méthode classique pour obtenir un PI se décompose en deux étapes. Dans ce qui suit, on considère une suite $X=(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles et on utilise les notations de la proposition 1.3.11.

Étape 1) Convergence des lois finis-dimensionnelles : Dans cette étape, on considère un k-uplet $(t_1,\dots,t_k)$ d'indices, où k est un entier strictement positif, et on montre la convergence en loi de la suite de k-uplets de v.a. $((X_{\lfloor t_1 n\rfloor},\dots,X_{\lfloor t_k n\rfloor}))_{n\in\mathbb{N}}$ vers les lois marginales correspondantes du processus limite.

Étape 2) Tension de la famille de mesures : Dans cette étape, on démontre la tension de la famille de mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_{f_{i,n}} : n\in\mathbb{N}\}$ pour un certain $i\in\{1,2\}$. Cette propriété peut être obtenue à l'aide, par exemple, des théorèmes que nous avons mentionnés dans la section précédente.

La convergence en loi se déduit, alors, du théorème 7.1 (pour un PI dans $C([0,1])$) ou bien du théorème 13.1 (pour un PI dans $D([0,1])$) dans le livre de Patrick Billingsley [Bil99].

Le premier résultat majeur concernant les principes d'invariance pour des sommes de variables aléatoires est le théorème de Donsker [Don51] qui traite du cas des v.a. i.i.d. et peut se démontrer à l'aide de cette méthode.

Théorème 1.3.13 (Théorème de Donsker, 1951)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d centrées de carré intégrable. On pose pour $t\in[0,1]$,*

$$W_n(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}X_k+(nt-\lfloor nt\rfloor)X_{\lfloor nt\rfloor+1}\right).$$

Alors la suite $(W_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi dans $C([0,1])$ vers un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geqslant 0}$.

Remarquons qu'une version dans l'espace de Skorohod $D([0,1])$ existe aussi.

Parmi les preuves utilisant cette méthode, on peut mentionner celle ayant trait à notre sujet : [DMV07], [VW14a], [WW13], etc.

Approximation dans L^2 par une suite satisfaisant un PI Tout comme pour le TCL, il est possible d'obtenir des principes d'invariance par approximation fonctionnelle. Cette heuristique peut être exprimée comme suit : si $(Y_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de v.a. satisfaisant un PI, on peut montrer que $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ vérifie aussi un PI si on a la convergence suivante.

$$\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{N}|}}\left\|\max_{\mathbf{1}\leqslant\boldsymbol{n}\leqslant\boldsymbol{N}}\left|\sum_{\mathbf{1}\leqslant\boldsymbol{i}\leqslant\boldsymbol{n}}(X_{\boldsymbol{i}}-Y_{\boldsymbol{i}})\right|\right\|_2 \xrightarrow[\boldsymbol{N}\to+\infty]{} 0 \tag{1.20}$$

Précisons un peu plus cette méthode. Il est possible d'utiliser le lemme de la page 88 dans [Bil99] (lemme non numéroté, voir aussi théorème 7.3 du même ouvrage) et en le combinant avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff afin d'obtenir un principe d'invariance dans $C([0,1])$ pour peu que la convergence (1.20) soit satisfaite. Pour le PI dans $D([0,1])$, il faut remplacer le lemme précédent par le théorème 13.2 du même ouvrage [11].

Les ortho-martingales sont souvent utilisées comme approximation fonctionnelle dans cette heuristique du fait qu'elles satisfont à un principe d'invariance. En effet, en combinant la convergence des lois fini-dimensionnelles des ortho-martingales démontrée par Yizao Wang et Michael Woodroofe [WW13] et la propriété de tension de celles-ci établie par Dalibor Volný et Yizao Wang [VW14a], ces derniers obtiennent le principe d'invariance pour les ortho-martingales (voir la convergence (5.3) de la preuve du théorème 5.1 dans [VW14a]).

L'approximation par martingale est d'ailleurs la méthode qu'utilise Mikhaïl Gordin et Magda Peligrad [GP11] pour obtenir un principe d'invariance dans le cas séquentiel ($d = 1$) sous la condition

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{i} Z_0^m\circ T^i\right|\right\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

où $Z_0^m = \frac{1}{m}\mathbb{E}\left[X_1+\cdots+X_m\,|\mathcal{F}_0\right]$, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ en utilisant les notations de la définition 1.1.10 et en supposant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire de v.a.r. centrées et de carrés intégrables telle que X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Remarquons qu'une variation de cette méthode d'approximation par martingale a été utilisée dans l'article de Heyde et Scott [HS73] pour l'obtention d'un principe d'invariance pour la loi du logarithme itéré sous la condition (1.7) pour $\delta = 0$. La différence de méthode réside en ce que l'approximation est réalisée presque-sûrement au lieu d'être en norme L^2.

Parmi les travaux concernant ces approximations pour des champs, on pourra citer l'article de Davide Giraudo [Gir18] dans lequel il donne différentes conditions suffisantes pour obtenir une telle approximation et en déduit un principe d'invariance ainsi que celui de Christophe Cuny, Jerôme Dedecker et Dalibor Volný [CDV16] lequel nous donne une seconde piste pour la preuve du théorème 4.6.4 dans le chapitre 4.

1.4. Martingales à temps discret

Dans cette section, nous nous intéresserons à la théorie des martingales à temps discret et plus particulièrement celles multi-indicées. Nous commençons par rappeler des inégalités pour les martingales uni-dimensionnelles et leurs accroissements qui interviendront dans les parties II

11. Bien que dans [Bil99], ce théorème ne soit énoncé et démontré que pour le cas $d = 1$, sa preuve s'étend au cas $d > 1$ (voir [Neu71]).

et III. Suite à cela, nous nous intéressons aux ortho-martingales et aux inégalités classiques les concernant.

1.4.1. Inégalités classiques de la théorie des martingales

La première inégalité notable est celle dite de Doob.

Théorème 1.4.1 (Inégalité maximale de Doob)**.** *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité suivante*

$$\lambda \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |M_i| \geqslant \lambda\right) \leqslant \mathbb{E}\left[|M_n|\right].$$

Si l'inégalité de Doob peut être vue comme une version maximale de la très classique inégalité de Markov ; l'inégalité suivante peut quant à elle s'interpréter comme une version maximale de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème 1.4.2 (Inégalité de Kolmogorov)**.** *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale L^2, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout entier $n > 0$, on a*

$$\lambda^2 \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |M_i| \geqslant \lambda\right) \leqslant \mathbb{E}\left[M_n^2\right].$$

Ces inégalités de concentration permettent le contrôle du maximum des sommes partielles ce qui s'avère utile pour obtenir la propriété de tension mentionnée dans la section précédente.

Une autre inégalité due à Doob est la suivante.

Théorème 1.4.3 (Inégalité de Doob)**.** *Soit $p > 1$, alors pour tout martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans L^p (i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_n \in L^p$) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\max_{0\leqslant i\leqslant n} |M_i|^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right].$$

L'inégalité de Burkholder (aussi connue sous le nom d'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy) permet le contrôle du suprémum d'une martingale au travers du contrôle de ses accroissements.

Théorème 1.4.4 (Inégalité de Burkholder)**.** *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et $p > 0$, alors il existe deux constantes c_p et C_p positives telles que*

$$c_p \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=0}^{+\infty} (M_i - M_{i-1})^2\right|^{p/2}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{i\in\mathbb{N}} |M_i|^p\right] \leqslant C_p \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=0}^{+\infty} (M_i - M_{i-1})^2\right|^{p/2}\right],$$

où $M_{-1} := 0$.

Remarque. L'inégalité précédente reste valide si on remplace $+\infty$ par $n \in \mathbb{N}$ et $\sup_{i\in\mathbb{N}} |M_i|$ par $\max_{0\leqslant i\leqslant n} |M_i|$.

Enfin mentionnons une inégalité plus générale que celle de Burkholder mais tout aussi classique pour les martingales (voir théorème 2.12, p. 23, Hall et Heyde [HH80] et aussi théorème 6.6.7 Ch. 6, p.322, de la Peña et Giné [PG99]).

Théorème 1.4.5 (Inégalité de Rosenthal)**.** *Soit $p \geqslant 2$. Soit $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$ où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale d'accroissements $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, il existe des constantes $0 < c_p, C_p < \infty$ telles que*

$$\begin{aligned} c_p \left(\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \Big)^{p/2} \Big] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^p] \right) &\leqslant \|M_n\|_p^p \\ &\leqslant C_p \left(\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \Big)^{p/2} \Big] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^p] \right). \end{aligned}$$

1.4.2. Filtrations commutantes et ortho-martingales

Désormais, nous allons traiter la généralisation au cadre spatial des martingales. Comme mentionné précédemment, la difficulté de cette généralisation réside en la définition de la notion de passé. Pour le temps uni-dimensionnel, la notion de passé est relativement évidente, cependant, dans le cadre spatial il n'y a pas de réponse universelle satisfaisante. Plusieurs approches sont possibles et chacune d'entre elles mène à une généralisation différente. Dans cette section nous nous intéresserons plus particulièrement aux ortho-martingales qui furent introduites par Renzo Cairoli en 1969 [Cai69], et qui seront définies au travers des filtrations commutantes (voir [Kho02]) que nous allons présenter dans ce qui suit.

Filtration commutante

Premièrement, nous rappelons qu'une filtration est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Bien évidemment, cette définition pose le souci de définir la croissance dans les familles indicées par $\mathbb{Z}^d$. Ainsi on dira qu'une famille $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est une *filtration* si pour tous $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{j}$, on a $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} \subset F_{\boldsymbol{j}}$ (où on rappelle que $\boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{j} \iff \forall k \in [\![1, d]\!],\ i_k \leqslant j_k$).

Munis de la notion de filtration, nous souhaitons définir la propriété de commutativité pour ces dernières. Dans un souci de simplicité, nous présentons la notion de filtration commutante dans le cas bi-dimensionnel (i.e. $d = 2$) puis nous étendrons les définitions au cas d quelconque.

L'idée derrière les filtrations commutantes est la suivante. Dans le cadre uni-dimensionnel, une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la propriété suivante : si X est une v.a. intégrable, alors la suite de v.a. $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. En d'autres termes la suite de v.a. $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n-1}])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'accroissements de martingale.

On souhaiterait obtenir une propriété similaire dans le cadre spatial. Autrement dit, on souhaiterait vérifier la propriété précédente pour chaque direction. Dans le cas bi-dimensionnel ($d = 2$), cela s'exprime par

- $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i,j}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i-1,j}])_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'accroissements de martingale ;
- $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i,j}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i,j-1}])_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'accroissements de martingale.

Autrement dit, on cherche à avoir

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i,j}]|\mathcal{F}_{i-1,j}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i-1,j}] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i,j}]|\mathcal{F}_{i,j-1}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{i,j-1}].$$

Ceci est vérifié dès lors que la filtration satisfait la condition suivante.

Pour toute variable aléatoire X intégrable et pour tout $(a,b),(u,v)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\middle|\mathcal{F}_{a,b}\right]\middle|\mathcal{F}_{u,v}\right]=\mathbb{E}\left[X\middle|\mathcal{F}_{a\wedge u,b\wedge v}\right]. \tag{1.21}$$

Dans un tel cas, on dit que la famille de tribus $(\mathcal{F}_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2}$ est une *filtration commutante*. Remarquons que Magda Peligrad et Na Zhang [PZ18b] ont déterminé la caractérisation suivante pour les filtrations commutantes.

Pour tous $a,b,u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $a\geqslant u$ et pour tout variable aléatoire X intégrable, on a

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\left|\mathcal{F}_{a,b}\right.\right]\left|\mathcal{F}_{u,v}\right.\right]=\mathbb{E}\left[X\left|\mathcal{F}_{u,b\wedge v}\right.\right].$$

Cette caractérisation est un corollaire de la propriété de Markov satisfaite par la filtration (voir Problème 34.11 dans [Bil12]).

Ci-dessous, deux exemples classiques de filtrations commutantes (voir Peligrad et Zhang [PZ18b]) sont donnés.

- Si $(\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ est un champ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors la famille de tribus $(\mathcal{F}_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{Z}^d}$ définie par $\mathcal{F}_{a,b}=\sigma\left(\varepsilon_{i,j};i\leqslant a,j\leqslant b\right),(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ est une filtration commutante.
- Si $(\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ est un champ de variables aléatoires dont les colonnes (ou lignes) sont indépendantes et identiquement distribuées, alors la famille de tribus $(\mathcal{F}_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{Z}^d}$ définie par $\mathcal{F}_{a,b}=\sigma\left(\varepsilon_{i,j};i\leqslant a,j\leqslant b\right),(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ est une filtration commutante.

Ces modèles sont courants en statistique dès que l'on traite d'observations itérées d'une suite stationnaire de v.a.

La notion de filtration commutante peut bien évidemment être étendue au cas où $d\geqslant 3$ comme nous allons le voir dans la définition suivante.

Définition 1.4.6 (Filtration commutante)**.** On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^d}$ est commutante si pour toute variable aléatoire X intégrable et pour tout $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^d$, on a

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\middle|\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}\right]\middle|\mathcal{F}_{\boldsymbol{u}}\right]=\mathbb{E}\left[X\middle|\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{u}}\right].$$

Ayant défini la notion de filtration commutante, nous sommes en mesure d'introduire un outil qui nous sera très utile au cours de ce mémoire. On considère une filtration commutante $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ et on définit l'*opérateur de projection* par

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{i}}(f)=\left[\prod_{j=1}^{d}\left(\mathbb{E}\left[\cdot\left|\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}\right.\right]-\mathbb{E}\left[\cdot\middle|\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{e}_j}\right]\right)\right](f),\quad \boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d, \tag{1.22}$$

où f est une fonction intégrable et $\boldsymbol{e}_j$ est le multi-indice dont toutes les composantes sont nulles sauf la j-ième qui vaut 1.

Ortho-martingale

Définition 1.4.7 (Accroissement d'ortho-martingale)**.** Soient $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ une filtration commutante et $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.r. On dit que $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ d'accroissements d'ortho-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ si

1. pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}[|X_{\boldsymbol{n}}|] < +\infty$;
2. pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$, $X_{\boldsymbol{n}}$ est $\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}}$-mesurable ;
3. pour tous $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$ tels qu'il existe $k \in [\![1, d]\!]$ satisfaisant $n_k < m_k$, on a $\mathbb{E}[X_{\boldsymbol{m}}|\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}}] = 0$.

On définit, d'une manière similaire, la notion d'ortho-martingale.

Définition 1.4.8 (Ortho-martingale)**.** Soient $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ une filtration commutante et $(M_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.r. On dit que $(M_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ d'accroissements d'ortho-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ si

1. pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}[|M_{\boldsymbol{n}}|] < +\infty$;
2. pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$, $M_{\boldsymbol{n}}$ est $\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}}$-mesurable ;
3. pour tous $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}[M_{\boldsymbol{m}}|\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}}] = M_{\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{n}}$.

Remarque. Lorsque que l'ortho-martingale considérée est indicée par $\mathbb{N}^d$ plutôt que $\mathbb{Z}^d$, on peut définir la notion d'ortho-martingale au travers de ses accroissements. Dans ce cas, on appellera ortho-martingale tout champ de variables aléatoires $(M_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d}$ qui est de la forme

$$M_{\boldsymbol{n}} = M_{\boldsymbol{0}} + \sum_{\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{i}\leqslant\boldsymbol{n}} D_{\boldsymbol{i}}, \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d$$

où $(D_{\boldsymbol{n}})_{n\in\mathbb{N}^d}$ est un champ d'accroissements d'une ortho-martingale.

Il existe une caractérisation intéressante des ortho-martingales que nous énonçons ci-dessous

Théorème 1.4.9. *Soit $(M_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d}$ un champ de variables aléatoires tel que $M_{\boldsymbol{n}} = 0$ dès qu'au moins l'une des coordonnées de $\boldsymbol{n}$ est nulle.*
On note, pour tout $q \in [\![1, d]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\boldsymbol{n}^{(q)} = (n_1, \dots, n_{q-1}, n_{q+1}, \dots n_d) \in \mathbb{N}^{d-1}$,

$$M^{(q)}_{\boldsymbol{n}^{(q)},n} = M_{n_1,\dots,n_{q-1},n,n_{q+1},\dots,n_d} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}^q_{\boldsymbol{n}^{(q)},n} = \sigma\left(M^{(q)}_{\boldsymbol{n}_{(q)},k}, k \leqslant n\right).$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1) $(M_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d}$ est une ortho-martingale.

2) $(M_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d}$ est une martingale dans chaque direction, c'est à dire que pour tout $q \in [\![1, d]\!]$ et pour tout $\boldsymbol{n}^{(q)} = (n_1, \dots, n_{q-1}, n_{q+1}, \dots n_d) \in \mathbb{N}^{d-1}$, $(M^{(q)}_{\boldsymbol{n}^{(q)},n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}^q_{\boldsymbol{n}^{(q)},n})_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Pour tous multi-indices $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d$ tel que $\boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{j}$, on a $\mathbb{E}\left[M_{\boldsymbol{j}}|\,\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}\right] = M_{\boldsymbol{i}}$.

4) Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d$, $\mathcal{P}_{\boldsymbol{n}}(M_n) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \sum_{\substack{\boldsymbol{j}=(j_1,\dots,j_d)\in\{0,1\}^d \\ j_1+\dots+j_d=i}} M_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}$.

L'opérateur de projection $\mathcal{P}_{\boldsymbol{n}}$ étant défini par (1.22).

Une inégalité de moment classique pour les ortho-martingales

Finalement, nous rappelons une inégalité importante concernant les ortho-martingales. Elle généralise au cas multi-indexé l'inégalité de Doob (c.f. théorème 1.4.3). Cette inégalité nous sera très utile pour obtenir des théorèmes limite au travers d'approximations par ortho-martingale

Proposition 1.4.10 (Cairoli, 1969 ; [Cai69])**.** *Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ une ortho-martingale. Pour tout $\lambda \geqslant 0$ et pour tout $p > 1$, il existe une constante C telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^d} |X_{\boldsymbol{m}}|^p\right] \leqslant C \sup_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{m}}|^p\right]. \tag{1.23}$$

Davar Khoshnevasian donne une version plus moderne de cette inégalité dans [Kho02], où il précise en particulier la valeur de la constante C.

Théorème 1.4.11. *Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ une ortho-martingale. Alors, pour tout $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d$ et pour tout $p>1$,*

$$\mathbb{E}\left[\max_{\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{i}\leqslant\boldsymbol{n}}|X_{\boldsymbol{i}}|^p\right]\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^{dp}\mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{n}}|^p\right]. \tag{1.24}$$

1.5. Conditions de dépendance

Dans les parties précédentes nous avons énoncé de nombreux résultats pour le cas indépendant et identiquement distribué. Ce cadre, assez restrictif, a été grandement étudié et une grande quantité de théorèmes donnant la normalité asymptotique des différents objets que nous avons traités précédemment ont été démontrés. Naturellement, on souhaiterait étendre certain de ces résultats au cadre dépendant. Dans cette section, nous présentons les modes de dépendances que nous rencontrerons dans les parties II et III et qui sont les suivants :

- m-dépendance ;
- α-mélange ;
- dépendance physique au sens de Wu ;
- dépendance suivant une condition projective du type Hannan.

Dans toute cette partie, ρ désigne la *distance de Tchebychev* entre deux sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$, c'est à dire que pour tout $A,B\subset\mathbb{Z}^d$,

$$\rho(A,B)=\min_{\substack{\boldsymbol{x}\in A\\ \boldsymbol{y}\in B}}\max_{i\in[\![1,d]\!]}|x_i-y_i|. \tag{1.25}$$

1.5.1. m-dépendance

Dans toute cette section, on considère $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires et m un entier. La première notion de dépendance à laquelle nous nous intéresserons est celle de m-dépendance dont la définition est la suivante.

Définition 1.5.1 (Champ m-dépendant)**.** On dit que $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est m-dépendant si pour tous $\Gamma,\Gamma'\subset\mathbb{Z}^d$ tels que $\rho(\Gamma,\Gamma')\geqslant m$, les tribus $\sigma\left(X_{\boldsymbol{i}},\boldsymbol{i}\in\Gamma\right)$ et $\sigma\left(X_{\boldsymbol{j}},\boldsymbol{j}\in\Gamma'\right)$ sont indépendantes.

De nombreux théorèmes centraux limite ont été obtenus sous cette condition. Notons ici les résultats historiques ; ceux-ci concernent les suites de variables aléatoires m-dépendantes, c'est à dire le cas $d=1$ dans la définition précédente.

En 1948, Wassily Hoeffding et Herbert Robbins [HR48] obtiennent les premiers théorèmes centraux limite pour des suites m-dépendantes à la fois dans le cas stationnaire et dans le cas non-stationnaire. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire de variables aléatoires m-dépendantes satisfaisant

$$\mathbb{E}\left[X_1\right]=0\quad\text{et}\quad\mathbb{E}\left[|X_1|^3\right]<+\infty. \tag{1.26}$$

Alors, en notant

$$A=\mathbb{E}\left[X_1^2\right]+2\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left[X_1X_{i+1}\right],$$

Wassily Hoeffding et Herbert Robbins obtiennent la convergence en loi suivante.

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, A) \tag{1.27}$$

Si on ne suppose plus que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, alors il est nécessaire de renforcer les hypothèses (1.26) en supposant que

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_i|^3\right] < +\infty.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\mathbb{E}\left[X_{i+k+m}^2\right] + 2\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left[X_{i+k+m-j}X_{i+k+m}\right]\right)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément en i vers une constante A, pour obtenir la convergence en loi (1.27).

Un autre résultat fondateur des théorèmes limite sous la condition de m-dépendance est celui de P.H. Diananda [Dia55] en 1955 généralisant le théorème de Lindeberg aux suites m-dépendantes. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. centrées satisfait la condition de Lindeberg (pour la renormalisation $\sigma_n^2 = n$, voir (1.1)) et si, de plus,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[S_n^2\right]}{n} > 0$$

alors

$$\frac{S_n}{\|S_n\|_2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Plus tard, ces théorèmes ont été étendus au cas des champs m-dépendants de v.a. centrées et de carrés intégrables. En 1993, Vladimir Shergin [She20] établit un théorème central limite avec une vitesse de convergence de ce dernier. En supposant l'existence de moments d'ordre $2+\delta, 1 > \delta > 0$, que la convergence

$$\|S_{\boldsymbol{n}}\|^{-(2+\theta)} \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbb{E}\left[|X_i|^{2+\theta}\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{} 0$$

est satisfaite et en appliquant le corollaire 1 dans [She20] pour $k = 2+\delta$, l'auteur obtient la convergence en loi suivante :

$$\frac{S_{\boldsymbol{n}}}{\|S_{\boldsymbol{n}}\|_2} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Enfin, Aleksei Shashkin a obtenu en 2003 [Sha03], un résultat majeur donnant un théorème central limite fonctionnel pour un champ m-dépendant $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires centrées et de carrés intégrables. Pour cela, il suppose satisfaite la condition de Lindeberg multidimensionnelle :

$$\frac{1}{\sigma_{\boldsymbol{n}}^2} \sum_{\boldsymbol{1}\leqslant\boldsymbol{i}\leqslant\boldsymbol{n}} \int_{\mathbb{R}} X_{\boldsymbol{i}}^2 \mathbf{1}_{X_{\boldsymbol{i}}^2 > \varepsilon^2\sigma_{\boldsymbol{n}}^2} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{} 0 \qquad \text{pour tout}\, \varepsilon > 0 \tag{1.28}$$

où $\sigma_n^2 = \sum_{\boldsymbol{1}\leqslant\boldsymbol{i}\leqslant\boldsymbol{n}} \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}}^2\right]$ et $D(S_{\boldsymbol{n}}) = |\boldsymbol{n}|h(\boldsymbol{n})$, avec $h(\boldsymbol{n})$ une fonction à variation lente de $\boldsymbol{n}$ et de limite inférieure en $+\infty$ strictement positive. En plus de la m-dépendance, Aleksei Shashkin impose la condition de dépendance suivante

$$\mathrm{Cov}\left[f((X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\Gamma}), g((X_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\in\Gamma'})\right] \leqslant |f|_{Lip}|g|_{Lip}$$

pour tout $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{Z}^d$ tels que $d(\Gamma, \Gamma') < m$ et $|\Gamma \cup \Gamma'| < +\infty$ et pour toutes fonctions $f : \mathbb{R}^\Gamma \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{\Gamma'} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne et bornées. Alors sous ces conditions, l'auteur obtient le principe d'invariance suivant.

En notant pour tout $n \in (\mathbb{N}^*)^d$, $W_n = \left(\frac{S_{[\boldsymbol{nt}]}}{D(S_{\boldsymbol{n}})}\right)_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d}$, le champ de processus stochastiques $(W_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in(\mathbb{N}^*)^d}$ converge en loi vers un drap brownien pour la topologie de la convergence uniforme.

1.5.2. Mélange fort

Le mélange fort, aussi appelé α-mélange, fut introduit pour la première fois par Murray Rosenblatt en 1956 [Ros56a] ; différentes notions de mélange (mélange β, φ, etc.) ainsi que les relations que ces notions entretiennent les unes par rapport aux autres ont été étudiées en détail dans l'ouvrage *Mixing : Properties and examples* par Paul Doukhan [Dou12]. Afin de définir correctement cette notion, commençons par définir le concept de *coefficient de mélange fort entre deux tribus*.

Définition 1.5.2 (Coefficient de mélange fort entre deux tribus)**.** Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$. Alors le coefficient de mélange fort entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est défini par

$$\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \sup\left\{|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)|\,;\, A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{V}\right\}.$$

Cette quantité peut être considérée comme une mesure de la dépendance entre les tribus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ et elle nous sert à définir les *coefficients de mélange fort associés à un champ de variables aléatoires*. Soit $X = (X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires.

Définition 1.5.3 (Coefficients de mélange fort associé au champ X)**.** Pour $p, q \in \overline{\mathbb{N}^*} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, les coefficients de mélange fort associés au champ X sont les quantités

$$\alpha_{p,q}(n) = \sup\left\{\alpha\left(\mathcal{F}_\Gamma, \mathcal{F}_{\Gamma'}\right); \Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{Z}^d, |\Gamma| \leqslant p, |\Gamma'| \leqslant q, \rho\left(\Gamma, \Gamma'\right) \geqslant n\right\}$$

définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ où on note $\mathcal{F}_\Gamma = \sigma(X_{\boldsymbol{i}}\,;\, \boldsymbol{i} \in \Gamma)$ et on rappelle que ρ est la *distance de Tchebychev* définie pour tous sous-ensembles Γ_1 et Γ_2 de $\mathbb{Z}^d$ par $\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min\{|\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}|, \boldsymbol{i} \in \Gamma_1, \boldsymbol{j} \in \Gamma_2\}$ avec $|\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}| = \max_{1\leqslant s\leqslant d} |i_s - j_s|$ pour tout $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_d)$ et $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$.

On dit que X est *fortement mélangeant* s'il existe $p, q \in \overline{\mathbb{N}^*}$ tels que la suite $(\alpha_{p,q}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

En 1956, après avoir introduit le mélange fort, Murray Rosenblatt [Ros56a] établit le premier théorème central limite sous cette condition pour des suites de variables aléatoires ($d = 1$).

Paul Doukhan, Emmanuel Rio et Pascal Massart démontrent en 1994 [DMR94] un théorème central limite pour les suites stationnaires et fortement mélangeantes de v.a. Pour ce faire, les auteurs utilisent une inégalité de covariance (1.5.4) que l'on donne ci-dessous et démontrée par Rio en 1993 [Rio93] ; cette inégalité de covariance, souvent utilisée pour l'obtention de nombreux résultats de convergence en loi pour des processus fortement mélangeants, nous sera fortement utile dans la partie III.

Proposition 1.5.4 (Inégalité de Rio)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables, on note $Q_X(u) = \inf\{t \geqslant 0 : \mathbb{P}(|X| > t) \leqslant u\}$. On suppose de plus que $Q_X Q_Y$ est intégrable sur $[0, 1]$, alors*

$$|\mathrm{Cov}[X, Y]| \leqslant 2 \int^{2\alpha(\sigma(X),\sigma(Y))} Q_X(u) Q_Y(u) \mathrm{d}u.$$

Paul Doukhan, Emmanuel Rio et Pascal Massart établissent aussi, dans ce même article de 1994, le principe d'invariance pour les suites fortement mélangeantes sous les mêmes hypothèses.

Dans le cas des tableaux triangulaires (c.f. 1.1.2), Aryeh Dvoretzky [Dvo70], énonce un théorème limite pour des tableaux triangulaires uniformément fortement mélangeants, c'est à dire que la convergence des coefficients de mélange fort est réalisée de manière uniforme par rapport aux lignes du tableau triangulaire considéré. Dans la preuve, usage est fait du théorème 5.1 du même article dont nous avons déjà parlé dans la section 1.1.3.

Pour le cas multi-dimensionnel, une avancée très importante concernant ce sujet fut réalisée par Jerôme Dedecker [Ded98a] lorsqu'il démontra le TCL pour des champs fortement mélangeants sous la condition

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in V_0^1} \left| X_k \mathbb{E}_{|\boldsymbol{k}|}\left[X_0\right]\right| \quad \text{est intégrable,}$$

où $V_{\mathbf{0}}^1 = \{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d : \boldsymbol{j} <_{lex} \mathbf{0}\}$ et $\mathbb{E}_{|\boldsymbol{k}|}\left[X_0\right] = \mathbb{E}\left[X_{\mathbf{0}} \left|\sigma\left(X_{\boldsymbol{i}} : \boldsymbol{i} \in V_{\mathbf{0}}^1 \text{ et } |\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}| > |\boldsymbol{k}|\right)\right.\right]$. La relation d'ordre $<_{lex}$ utilisée par Jerôme Dedecker dans l'hypothèse précédente est celle de l'ordre lexicographique classique.

A titre d'exemple de résultat plus récent, mentionnons l'article de Christina Tone et Richard Bradley [BT17] traitant des champs α-mélangeants. Dans celui-ci, le TCL est démontré en supposant un contrôle du mélange fort et des *coefficients de corrélation maximale* définis par

$$\tilde{\rho}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup\left\{\left|\frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}}\right| ; X \in L^2(\mathcal{A}), Y \in L^2(\mathcal{B})\right\}. \tag{1.29}$$

pour toutes sous-tribus $\mathcal{A},\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$.

1.5.3. Dépendance physique au sens de Wu

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un mode de dépendance introduit par Wei Biao Wu [Wu05] en 2005. Ce mode de dépendance repose sur l'étude de l'influence des entrées d'un système physique sur ses sorties. En des termes plus rigoureux, considérons une fonction $G : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ et un champ $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires i.i.d.

Définition 1.5.5 (Champ de Bernoulli [12])**.** On appelle champ de Bernoulli tout champ $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ de la forme

$$X_{\boldsymbol{i}} = G(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d), \quad \boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.30}$$

Remarquons, qu'un champ de Bernoulli est nécessairement stationnaire. Désormais, nous sommes en mesure de définir les coefficients de mesure de dépendance physique au sens de Wu.

Considérons deux champs de variables aléatoires i.i.d. $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\varepsilon'_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ indépendants l'un de l'autre mais identiquement distribués. On note $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ le champ de Bernoulli donné par (1.30) et pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$, on note $X_{\boldsymbol{i}}^*$ la version couplée de $X_{\boldsymbol{i}}$ définie par

$$X_{\boldsymbol{i}}^* = G\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}^* ; \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d\right),$$

12. Si $d = 1$, on parle de suite de Bernoulli

où $\varepsilon_{\boldsymbol{j}}^* = \varepsilon_{\boldsymbol{j}}$ si $\boldsymbol{j} \neq \mathbf{0}$ et $\varepsilon_{\mathbf{0}}^* = \varepsilon_{\mathbf{0}}^{'}$. Remarquons que $X_{\boldsymbol{i}}^*$ est obtenue en remplaçant $\varepsilon_{\mathbf{0}}$ par sa copie indépendante $\varepsilon_{\mathbf{0}}^{'}$ dans l'expression de $X_{\boldsymbol{i}}$.

On définit les *coefficients de mesure de dépendance physique* comme suit.

Définition 1.5.6 (Coefficients de mesure de dépendance physique)**.** Soit $p \in [1, +\infty]$, alors les coefficients de mesure de dépendance physique au sens de Wu associés au champ X sont les quantités

$$\delta_{\boldsymbol{i},p} := \|X_{\boldsymbol{i}} - X_{\boldsymbol{i}}^*\|_p$$

dès que $X_{\boldsymbol{i}}$ est p-intégrable pour $p \geqslant 2$.

La mesure de dépendance physique de Wu peut être vue comme une mesure de la dépendance de la fonction G (définie par (1.30)) à la coordonnée $\mathbf{0}$. Dans un certain sens, elle quantifie le degré de dépendance des sorties en fonction des entrées dans les systèmes physiques et donne un cadre naturel pour énoncer des théorèmes limite dans le cadre stationnaire (voir [EMVW13]). Le contrôle de ces coefficients est donc primordial et s'effectue comme suit.

Définition 1.5.7 (p-stabilité)**.** Pour $p \geqslant 2$, on dit que X est *p-stable* si

$$\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} \delta_{\boldsymbol{i},p} < +\infty.$$

Ce mode de dépendance nous permet d'obtenir des conditions relativement faibles et simples à vérifier (voir les conditions (A3)(ii) dans le chapitre 5) car il est directement relié à la méthode de génération des données. En physique mathématique, de nombreuses versions d'idées similaires (perturbations locales d'une configuration) apparaissent. On pourra citer, par exemple, les travaux de Thomas Liggett [Lig85] ou bien Daniel Stroock et Boguslaw Zegarlinski [SZ92]. Le premier théorème limite concernant ces champs fut énoncé et démontré par Wei Biao Wu lui-même dans son article fondateur [Wu05]. Si l'on suppose qu'une suite de Bernoulli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2-stable, alors la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfait un théorème central limite avec une variance asymptotique égale à

$$\sigma = \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\mathbb{E}\left[X_i \left|\sigma\left(\ldots, X_{-1}, X_0\right)\right.\right] - \mathbb{E}\left[X_i \left|\sigma\left(\ldots, X_{-2}, X_{-1}\right)\right.\right] \right) \right\|_2 . \tag{1.31}$$

Non seulement Wu obtient un TCL dans cet article mais il donne aussi sous les mêmes conditions le principe d'invariance suivant :

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \right)_{t\in[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} (\sigma B_t)_{t\in[0,1]} ,$$

où la convergence a lieu dans l'espace $D([0,1])$ et σ est défini comme dans (1.31).

Enfin, nous rappelons l'état de l'art en matière de TCL pour des champs 2-stables.

Dans [EMVW13], Mohamed El Machkouri, Dalibor Volný et Wei Biao Wu considèrent un champ de Bernoulli $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ qui, en plus d'être 2-stable, vérifie que $X_{\mathbf{0}}$ soit centrée et que

$$\sigma_n := \mathbb{E}\left[S_{\Gamma_n}^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

où $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$ telle que $|\Gamma_n| \to +\infty$ et $|\partial\Gamma_n|/|\Gamma_n| \to 0$. Alors dès que la condition

$$\sigma^2 := \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} X_{\boldsymbol{k}}\right] > 0$$

est vérifiée, le théorème limite suivant est satisfait.

$$\frac{S_{\Gamma_n}}{\sqrt{|\Gamma_n|}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

1.5.4. Condition projective du type Hannan

Finalement, nous présentons la dernière famille de conditions de dépendance que nous étudierons au cours de ce mémoire : les conditions projectives du type Hannan. Tout d'abord, rappelons le cadre dans lequel nous travaillerons. On considère $T_1, \dots, T_d$ des transformations bi-mesurables qui commutent et préservent la mesure, $X_{\boldsymbol{0}}$ une variable aléatoire centrée et de carré intégrable et $\mathcal{F}_{\boldsymbol{0}}$ une tribu. On définit alors, pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$,

$$X_{\boldsymbol{i}} = X_{\boldsymbol{0}} \circ T_1^{i_1} \circ \cdots \circ T_d^{i_d} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} = T^{-\boldsymbol{i}}\mathcal{F}_{\boldsymbol{0}}.$$

On suppose que la famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ forme une filtration commutante.

Définition 1.5.8. On dit que le champ X vérifie la condition projective de Hannan si

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \|\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(X_{\boldsymbol{k}})\|_2 < +\infty. \tag{1.32}$$

Sous cette condition, plusieurs théorèmes ont été obtenus. Premièrement, dans le cas des suites ($d = 1$), Edward Hannan [Han73] étudie le processus $(X_0 \circ T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où T est une transformation bi-mesurable qui préserve la mesure et obtient en 1973 un premier TCL à condition que X_0 soit régulière (c.f. 1.8), que la densité spectrale de X_0 vérifie certaines propriétés et que le processus précédent satisfasse à la condition de Hannan (1.32).

Plus récemment Dalibor Volný établit, dans son article de 1993 [Vol93], un TCL sous la condition de Hannan et en supposant que la transformation T est ergodique et que X_0 est régulière. En 2009, Jerôme Dedecker, Florence Merlevède et Dalibor Volný [DMV07] améliorent ce résultat en obtenant, sans imposer l'ergodicité de la transformation T, la convergence en loi suivante

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[X_0 X_k | \mathcal{I}\right]\right)^{1/2} \varepsilon, \tag{1.33}$$

où $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{I}$ est la tribu invariante de T. De plus, les auteurs démontrent sous les mêmes hypothèses qu'un principe d'invariance est satisfait.

En ce qui concerne les champs ($d > 1$), nous mentionnons le principe d'invariance de Yizao Wang et Michael Woodroofe [WW13] qui fut étendu à une classe plus large de processus par Dalibor Volný et Yizao Wang [VW14a]. Ces derniers déduisent, sous la condition de Hannan (1.32), le PI suivant pour les champs de Bernoulli.

$$\left(\frac{S_{\lfloor \boldsymbol{n}\boldsymbol{t}\rfloor}}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}}\right)_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\mathcal{L}} (\sigma B_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d},$$

où la convergence à lieu dans $D([0,1]^d)$, $(B_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d}$ est un drap brownien standard et $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[D_0^2\right]$, où $D_0 = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_0(X_i)$.

1.6. Théorèmes quenched

Avant de présenter la notion de théorème *quenched*, nous devons introduire la notion de probabilité conditionnelle régulière. La discussion qui suit est basée sur le chapitre 44 du livre de Heinz Bauer [Bau72].

Commençons par établir le cadre dans lequel on souhaite étudier cette notion. On considère un espace de probabilité $(X, \mathcal{A}, P)$ et une sous-tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$. Une *probabilité conditionnelle régulière* sachant $\mathcal{C}$ est une probabilité de transition $\nu : X \times \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que

$$P(A \cap C) = \int_C \nu(x, A) P(\mathrm{d}x)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $C \in \mathcal{C}$.

L'existence d'une telle mesure n'est pas forcément assurée. En l'occurrence, Jean Dieudonné a fourni un contre-exemple en 1948 (voir [Die48] p.42).

Afin de s'assurer de l'existence d'une probabilité conditionnelle régulière dans le contexte qui nous concernera, nous étendons la définition précédente en considérant un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ ainsi qu'une variable aléatoire $Y : X \to E$, dans ce cas on appelle *loi conditionnelle régulière* de Y sachant $\mathcal{C}$ toute probabilité de transition $\nu : X \times \mathcal{E} \to [0,1]$ telle que

$$P(C \cap \{Y \in A\}) = \int_C \nu(x, A) P(\mathrm{d}x)$$

pour tout $A \in \mathcal{E}$ et pour tout $C \in \mathcal{C}$.

Puisque toute mesure de probabilité borélienne sur un espace polonais est intérieurement régulière[13] (voir [AB06] p.438), l'existence d'une version régulière d'une loi conditionnelle est assurée par le théorème suivant.

Théorème 1.6.1 ([Bau72], Théorème 44.3)**.** *Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et à valeurs dans un espace polonais E. Alors pour toute sous-tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$, il existe une loi conditionnelle régulière de Y sachant $\mathcal{G}$. De plus, il y a unicité de cette probabilité conditionnelle régulière à un ensemble μ-négligeable près.*

Désormais, nous remarquons que si $(\ldots, X_{-1}, X_0)$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace polonais E et $\mathcal{F}_0 = \sigma(\ldots, X_{-1}, X_0)$, la probabilité conditionnelle sachant $\mathcal{F}_0$ existe. En effet, il suffit de considérer la représentation canonique $\xi : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$ de $(\ldots, X_{-1}, X_0)$, c'est à dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in E^{\mathbb{N}}$, $\xi_i(x) := x_i$ et $\mathbb{P}_\xi := \mathbb{P}_{(X_0, X_{-1}, \ldots)}$. Alors l'espace de probabilité $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{N}}, \mathbb{P}_\xi)$ et la variable aléatoire ξ définie sur cet espace vérifient les hypothèses du théorème 1.6.1 pour $\mathcal{G} = \left\{ B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{N}} : \exists A \in \mathcal{F}, A = ((X_0, X_{-1}, \ldots))^{-1}(B) \right\}$. On en déduit l'existence d'une version régulière de la probabilité conditionnelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sachant $\mathcal{F}_0$.

Un problème intéressant, avec de nombreuses applications, est celui de l'étude des théorèmes limite pour des processus démarrés à un point fixe. Ce problème est d'autant plus difficile que l'on perd la propriété de stationnarité dès que l'on fixe le point de départ du processus. De plus, l'existence d'un théorème limite n'est pas suffisante pour affirmer la convergence en loi du

13. Pour tout borélien B d'un espace métrique X, $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{compact}\}$.

processus démarré à un point fixé. Ce type de convergence est aussi appelée théorème limite conditionnel presque sûr ou théorème limite *quenched*. La question du TCL *quenched* a déjà été étudiée en détails ces dernières années. Notons les contributions importantes de Yves Derriennic et Michael Lin [DL01], Christophe Cuny et Magda Peligrad [CP12], Christophe Cuny et Dalibor Volný [CV13], Christophe Cuny et Florence Merlevède [CM14], Dalibor Volný et Michael Woodroofe [VW14b], David Barrera et al. [BPP16]. Certains de ces résultats ont été compilés par Magda Peligrad [Pel15].

En suivant l'exemple des suites de variables aléatoires (c.f. 1.1.3), une méthode utile pour obtenir des théorèmes limite pour les champs de v.a.(introduite par Murray Rosenblatt en 1972 [LCNS72]) est celle de l'approximation par martingale dont le développement est toujours d'actualité. Récemment, l'intérêt porte sur les ortho-martingales qui furent définies par Cairoli en 1969 [Cai69] et que nous avons présentées dans la section 1.4.2. Citons quelques résultats récents dans ce domaine par Mikhail Gordin [Gor09], Dalibor Volný et Yizao Wang [VW14a], Dalibor Volný [Vol15], Christophe Cuny et al. [CDV16], Magda Peligrad et Na Zhang [PZ18b], Davide Giraudo [Gir18] et Magda Peligrad et Na Zhang [PZ18a].

Précisons ce qui est entendu par *théorème quenched*. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires centrées et une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, i \leqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On se donne alors $\mathbb{P}^\omega$ une version régulière de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{F}_0)$ pour l'aléa $\omega \in \Omega$ et on dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait un théorème central limite *quenched* dès lors que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \quad \text{sous} \quad \mathbb{P}^\omega.$$

Dans le cas classique (c'est à dire que le TCL est satisfait sous la probabilité $\mathbb{P}$), on dit que le théorème est *annealed*.

Il est important de remarquer que le fait que $\mathbb{P}^\omega$ soit bien définie n'est pas trivial. Ceci vient de la nature de l'espace d'arrivée des variables aléatoires. En effet, puisque $\mathbb{R}$ est un espace polonais, la discussion de la section précédente assure l'existence de cette version régulière de la probabilité conditionnelle sachant $\mathcal{F}_0$.

Dans le cas uni-dimensionnel ($d = 1$), il existe une autre façon de définir les théorèmes *quenched* : celle-ci se fonde sur les chaînes de Markov et justifie l'appellation de *théorème limite démarré à un point* (voir les articles [DL01] et [BPP16]). Pour cela, on construit une chaîne de Markov de manière *canonique* : soit $(S, \mathcal{S})$ un espace d'états que l'on munit d'une mesure de probabilité π, P une probabilité de transition sur $S \times \mathcal{S}$ et on note $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $\xi_i(\omega) = \omega_i$, pour tout $\omega \in S^{\mathbb{N}}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, en d'autres termes ξ est l'identité sur $S^{\mathbb{N}}$. On désigne par $\mathbb{P}_\pi$ (resp. $\mathbb{P}_x$ où $x \in S$) la loi de la chaîne de Markov homogène ξ de mesure initiale π (resp. δ_x) et de probabilité de transition P, c'est à dire que

$$\mathbb{P}_\pi(\xi_0 \in A) = \pi(A), \quad \mathbb{P}_x(\xi_0 \in A) = \delta_x(A),$$

et

$$\mathbb{P}_\pi(\xi_{n+1} \in A|\xi_n = y) = \mathbb{P}_x(\xi_{n+1} \in A|\xi_n = y) = P(y, A)$$

pour tout $A \in \mathcal{S}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in S$.

Les probabilités $\mathbb{P}_x$ correspondent alors aux versions régulières des probabilités conditionnelles sachant $\mathcal{F}_0$ où $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la filtration naturelle associée à la chaîne de Markov. On dit qu'un *théorème central limite démarré à un point* $x \in S$ est satisfait s'il existe des suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{S_n - m_n}{s_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \quad \text{sous } \mathbb{P}_x,$$

où $S_n := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Si cette convergence est satisfaite π-presque sûrement, on dit que le théorème est *quenched*. L'équivalence de ces deux définitions découle du fait que toute suite stationnaire peut s'écrire comme une fonctionnelle d'une chaîne de Markov (voir [WW04]).

Parmi les premiers résultats qui nous intéressent figurent ceux de Mikhail Gordin et Boris Lifšic exposés dans le chapitre IV du livre de Andrej Borodin et Il'dar Ibragimov [BI95] (article original par Mikhail Gordin et Boris Lifšic [GL81] ; voir [DL01]) concernant les chaînes de Markov. En considérant une chaîne de Markov $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ homogène de probabilité de transition P construite canoniquement et dont l'espace d'états $(S, \mathcal{S})$ est muni de la mesure invariante π (i.e. $\pi = \pi P$), alors pour π-presque tout $x \in S$, le théorème *quenched* suivant est satisfait.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}\left(0, \int_S (g^2 - (Pg)^2) \mathrm{d}\pi\right) \qquad \text{sous} \quad \mathbb{P}_x$$

dès lors que f est un cobord dont la fonction de transfert g est de carré intégrable par rapport à la mesure π.

En 2001, Yves Derriennic et Michael Lin [DL01], ont étendu ce résultat en affaiblissant les conditions sur la fonction f.

Plus tard, des théorèmes *quenched* ont été obtenus pour de nombreux autres processus comme ceux satisfaisant la condition projective de Hannan (voir [CV13]) ou encore les fonctionnelles de chaînes de Markov réversibles [CP12].

Pour les versions fonctionnelles du TCL *quenched*, on pourra citer à nouveau l'article d'Yves Derriennic et Michael Lin [DL01] dans lequel est obtenue, en plus d'un TCL, une version fonctionnelle de celui-ci sous les mêmes hypothèses. Un résultat plus récent est celui Christophe Cuny et Dalibor Volný [CV13] donnant le principe d'invariance *quenched* sous la condition de Hannan.

Dans le cas des champs ($d > 1$), les théorèmes limite *quenched* ont rarement été étudiés. Lors de l'écriture de ce mémoire, l'unique résultat donnant un TCL et un principe d'invariance *quenched* pour des champs de variables aléatoires semble être celui de Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19]. Leur article contient un théorème central limite *quenched* pour les ortho-martingales et un principe d'invariance *quenched* démontré par une décomposition martingale-cobord. En explicitant un exemple d'ortho-martingale qui satisfait un TCL annealed mais pas la version *quenched*, les auteurs ont montré que l'existence d'un moment d'ordre deux fini n'est pas suffisante pour obtenir le TCL *quenched*. Néanmoins les auteurs ont donné une condition suffisante sur les moments pour obtenir le TCL *quenched* : $\mathbb{E}\left[X_{\mathbf{0}}^2 \ln^{d-1}(1 + |X_{\mathbf{0}}|)\right] < +\infty$, où $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^d$.

Définissons le cadre dans lequel ont été établis ces résultats. On considère une tribu $\mathcal{F}_{\mathbf{0}}$, des transformations $T_1, \dots, T_d$ bijectives bimesurables qui préservent la mesure et commutent ainsi que $X_{\mathbf{0}}$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_{\mathbf{0}}$-mesurable. On définit alors, pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$,

$$X_{\boldsymbol{i}} = X_{\mathbf{0}} \circ T_1^{i_1} \cdots T_d^{i_d} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} = T^{-\boldsymbol{i}} \mathcal{F}_{\mathbf{0}}.$$

On suppose que la famille de tribus $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ ainsi construite est une filtration commutante et on note $\mathbb{P}^\omega$ une version régulière de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{F}_0)$ pour l'aléa $\omega \in \Omega$. Alors dans leur article de 2019, Peligrad et Volný [PV19] établissent les théorèmes centraux limite ainsi que leurs versions fonctionnelles suivantes.

Théorème 1.6.2. *Supposons que $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est une ortho-martingale de carré intégrable pour $\mathcal{F}$ et qu'au moins l'une des transformations $T_1, \dots, T_d$ est ergodique. Alors, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on a la convergence en loi suivante :*

$$\frac{S_{n\mathbf{1}}}{n^{d/2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^\omega,$$

où $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[X_0^2\right]$ et $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^d$.

Théorème 1.6.3. *Si en plus des hypothèses du théorème précédent, on suppose que $\mathbb{E}\left[X_{\mathbf{0}} \ln^{d-1}(1 + |X_{\mathbf{0}}|)\right] < +\infty$, alors pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on a la convergence en loi suivante :*

$$\frac{S_{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}} \xrightarrow[\boldsymbol{n} \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \textit{sous } \mathbb{P}^\omega.$$

Théorème 1.6.4. *Sous les hypothèses du théorème 1.6.2, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on a la convergence en loi suivante :*

$$\left(\frac{S_{\lfloor n\boldsymbol{t} \rfloor}}{n^{d/2}}\right)_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^d} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} (\sigma B_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^d} \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^\omega,$$

où $(B_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^d}$ est un drap brownien standard et la convergence a lieu dans $D([0,1]^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 1.6.5. *Sous les hypothèses du théorème 1.6.3, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on a la convergence en loi suivante :*

$$\left(\frac{S_{\lfloor \boldsymbol{n}\boldsymbol{t} \rfloor}}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}}\right)_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^d} \xrightarrow[\boldsymbol{n} \to +\infty]{\mathcal{L}} (\sigma B_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^d} \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^\omega,$$

où $(B_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^d}$ est un drap brownien standard et la convergence a lieu dans $D([0,1]^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Ces quatre résultats nous serviront de fondation pour démontrer le TCL et sa version fonctionnelle dans le cas *quenched* pour des processus satisfaisant à la condition projective de Hannan. En effet, dans le chapitre 3 nous généraliserons les deux premiers résultats au moyen d'une approximation par ortho-martingale décrite dans la section 1.1.3 et puis dans le chapitre 4 nous énoncerons des conjectures généralisant les deux derniers résultats. A nouveau, une idée de la preuve de ces conjectures se base sur une approximation dont l'heuristique est décrite dans la section 1.3.2.

2. Statistique

Dans tout ce chapitre N est un entier strictement positif, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et K est un *noyau* (statistique), c'est à dire une fonction intégrable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale vaut 1.

2.1. Estimateurs non-récursifs à noyau

Pour la première partie de ce chapitre, nous étudierons des estimateurs non-récursifs à noyau. Dans un premier temps nous considérerons le cas i.i.d. puis le cas des champs de v.a. dépendantes dont la dépendance est décrite, dans un premier temps, par un mélange fort au sens de Rosenblatt [Ros56a] et, dans un second temps, par une dépendance faible au sens de Wu [Wu05].

2.1.1. Estimateurs de la densité

On commence par l'étude de ce chapitre par l'estimation de la densité. Pour cela considérons $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire de vecteurs aléatoires à valeurs réelles. Supposons que leur loi (commune) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et notons f une densité commune de toutes ces variables.

Cas i.i.d.

Nous énonçons le résultat historique donnant la normalité asymptotique des estimateurs de la densité dans le cas i.i.d. Ce résultat est fondamental puisqu'il fut le premier résultat de normalité asymptotique pour des estimateurs à noyau et les *conditions minimales de fenêtre* y furent introduites. Dans ce qui suit, on considérera que la suite X est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Estimateur de Parzen-Rosenblatt L'estimateur à noyau de la densité de Parzen-Rosenblatt dans le cas non récursif fut introduit par Emanuel Parzen [Par62] en 1962 et Murray Rosenblatt [Ros56b] en 1956. Il est donné en tout point $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n^{PR}(x) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right), \tag{2.1}$$

où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs et K est un noyau.

Remarque. Les $b_n, n \in \mathbb{N}$ sont appelés *paramètres de fenêtre*.

Dans de nombreux articles, les résultats de normalité asymptotique sont étudiés dans le cas multi-varié. Cependant, par souci d'uniformisation, nous n'énoncerons les théorèmes que dans le cas uni-varié.

Deux ensembles de conditions très classiques en estimation par noyau (qui furent introduites par Emanuel Parzen [Par62]) sont les suivants.

Conditions $(\mathcal{K})$**.** *Le noyau K satisfait les hypothèses suivantes.*

$(\mathcal{K}1)$ K est pair.

$(\mathcal{K}2)$ K est borné.

$(\mathcal{K}3)$ $\|y\|\,|K(y)|$ tend vers 0 lorsque $\|y\|$ tend vers $+\infty$.

Conditions $(\widetilde{\mathcal{M}})$**.** *La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les hypothèses suivantes.*

$(\widetilde{\mathcal{M}}1)$ $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$(\widetilde{\mathcal{M}}2)$ $nb_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Emanuel Parzen [Par62] établit dans son article de 1962, le théorème central limite suivant.

Théorème 2.1.1 (Parzen, 1962)**.** *Supposons que K satisfasse les conditions $(\mathcal{K})$ et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfasse les conditions $(\widetilde{\mathcal{M}})$, alors on a la convergence en loi suivante :*

$$\sqrt{nb_n}\left(f_n^{PR}(x) - \mathbb{E}\left[f_n^{PR}(x)\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $\sigma^2 = f(x)\int_{\mathbb{R}} K(x)^2 \mathrm{d}x$.

La preuve de ce résultat repose sur l'utilisation du théorème 1A dans [Par62] dont nous ferons usage dans les chapitres 5 et 6 et que nous donnons ci-après.

Théorème 2.1.2 (Théorème 1A, [Par62])**.** *Si une fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable satisfait aux conditions $(\mathcal{K}2)$ et $(\mathcal{K}3)$ et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs qui converge vers 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que g soit continue en x, on a*

$$h_n^{-1}\int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{y}{h_n}\right) g(x-y)\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)\int_{\mathbb{R}} M(y)\mathrm{d}y.$$

Remarque. Dans le théorème précédent M n'est pas forcément un noyau.

Afin d'établir des intervalles de confiance, il est plus commode de déterminer la convergence en loi de la suite $\left(\sqrt{nb_n}\left(f_n^{PR} - f(x)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une loi normale centrée réduite. Dans le cadre énoncé précédemment, si on suppose de plus que $nb_n^3 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, alors on obtient ce nouveau théorème central limite. Dans la suite, nous essayerons, dès que possible, de donner la normalité asymptotique sous cette forme.

Dans la littérature, les conditions $(\widetilde{\mathcal{M}})$ sont appelées *conditions minimales sur le paramètre de fenêtre.*

Cas dépendant

Désormais, il serait intéressant d'imposer des conditions de dépendance sur les données. D'une part, cela nous permettrait d'étendre les résultats précédents à des données qui ne sont pas indépendantes ce qui est souvent le cas lorsque l'on souhaite utiliser ces estimateurs sur des données réelles. De plus, les données spatiales n'ont de réel intérêt que s'il y a une condition de dépendance, en effet lorsque l'on traite des données spatiales et i.i.d. on peut simplement se ramener au cas séquentiel en listant les observations les unes après les autres, au travers de n'importe quelle bijection de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{N}$, ce qui rendrait la structure de grille inutile. Remarquons que la méthode qui consiste à lister les données au travers d'une bijection nous sera utile dans le cas dépendant ; mais dans ce cas, il faudra choisir attentivement la bijection en tenant compte de la

condition de dépendance.

Une multitude de conditions de dépendance sont envisageables mais nous ne nous intéresserons, ici, qu'à deux en particulier : le mélange fort au sens de Rosenblatt [Ros56a] et la dépendance faible au sens de Wu [Wu05] que nous avons déjà présentés dans les sections précédentes.

Pour pouvoir étudier ces estimateurs dans le cas des données spatiales, il faut généraliser la définition 2.1 à ce cas. En considérant des régions non-vides $\Lambda_n, n \in \mathbb{N}^*$ de la grille $\mathbb{Z}^d$ et un champ stationnaire $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ dont la loi commune est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et admet une fonction inconnue f pour densité par rapport à cette dernière, l'estimateur de Parzen-Rosenblatt pour des données spatiales est donné pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en tout point $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n^{PR}(x) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n^N} \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}^{n} K\left(\frac{x - X_{\boldsymbol{i}}}{b_n}\right), \tag{2.2}$$

où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours une suite décroissante de réels strictement positifs et $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de régions de $\mathbb{Z}^d$ telles que $|\Lambda_n| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans ce qui précède nous avons introduit les *conditions minimales sur le paramètre de fenêtre* comme l'avait fait Emanuel Parzen dans [Par62], notons que puisque nous nous intéressons au cas multi-varié ($N \geqslant 1$), il est nécessaire d'adapter ces conditions. Ainsi nous considérons l'extension des conditions $(\widetilde{\mathcal{M}})$ suivante.

Conditions $(\mathcal{M})$**.** *La suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait les hypothèses suivantes.*

($\mathcal{M}$1) $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

($\mathcal{M}$2) $nb_n^N \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Évidemment les premiers théorèmes limite pour ces estimateurs ont été obtenus dans le cas uni-dimensionnel (i.e. $d = 1$) et dans ce cas $\Lambda_n = [\![1, n]\!]$. Jusqu'à mention du contraire, $d = 1$.

Mélange fort Dans toute cette section, on suppose que les conditions $(\mathcal{K})$ et $(\mathcal{M})$ sont satisfaites. On suppose de plus que le noyau K satisfait la propriété ci-dessous.

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 |K(u)| \mathrm{d}u < +\infty. \tag{2.3}$$

Premièrement, nous nous intéressons au cas du mélange fort. Un des premiers résultats dans cette direction est celui de Denis Bosq [Bos98] (Théorème 2.3) dans lequel l'auteur suppose que les conditions suivantes [1] sont satisfaites.

$$\sup_{s<t} \|f_{s,t} - f \otimes f\|_\infty < +\infty, \tag{2.4}$$

$$\sup_{t_1<t_2<t_3<t_4} \|f_{t_1,t_2,t_3,t_4}\|_\infty < +\infty, \tag{2.5}$$

où f_{t_1,t_2} est une densité du vecteur aléatoire (X_{t_1}, X_{t_2}) et f_{t_1,t_2,t_3,t_4} est une densité du vecteur aléatoire $(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, X_{t_4}), t_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dont on suppose que la loi est absolument

1. La première condition est devenue, par la suite, très classique dans le domaine de l'estimation

continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$. Et en supposant que f est suffisamment régulière et que le paramètre de fenêtre satisfait à l'égalité

$$b_n = \frac{c}{\ln \ln n} n^{-\frac{1}{N+4}}$$

pour un certain $c > 0$ et que les coefficients de mélange satisfont à $\alpha_{\infty,\infty}(k) = O(k^{-\beta})$ où $\beta \geqslant 2$, Denis Bosq obtient le résultat de normalité asymptotique suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$

$$\sqrt{nb_n^N}\left(f_n^{PR}(x) - f(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x))$$

où $\sigma^2(x) = f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u$. Denis Bosq démontre ce théorème en utilisant la méthode de Bernstein et, afin de montrer la normalité asymptotique des grands blocs, il approxime ces derniers par un tableau triangulaire $(W_{n,k_n})_{\substack{n\geqslant 1\\ 1\leqslant k_n\leqslant n}}$ de variables i.d.d. (ligne à ligne) satisfaisant à la condition de Lyapounov :

$$\frac{1}{\sigma_n^3}\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{E}\left[|W_{n,i}|^3\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour $\sigma_n^2 = n\mathbb{V}[W_{n,1}]$.

En 1999, Denis Bosq, Florence Merlevède et Magda Peligrad [BMP99], obtiennent dans le cas uni-varié ($N = 1$) un théorème limite dont le domaine d'applications est plus vaste. En effet les auteurs se débarrassent de l' hypothèse (2.5) et déduisent des deux hypothèses suivantes

$$\sum_{k\geqslant 1} k\alpha_{\infty,\infty}(k) < +\infty \tag{2.6}$$

et

$$b_n \geqslant n^{1/3}\ln n \quad \text{et} \quad b_n = o(n^{-1/5}) \tag{2.7}$$

un théorème central limite pour l'estimateur f_n^{PR} sous des hypothèses de régularité de la densité inconnue f ainsi que du noyau K.

Dans le cas spatial ($d \geqslant 2$) et uni-varié ($N = 1$), Mohamed El Machkouri [EM11] a établi le résultat ci-dessous de normalité asymptotique pour l'estimateur défini par (2.2).

Théorème 2.1.3 (El Machkouri, 2011)**.** *Supposons que $\Lambda_n = [\![1, n]\!]^d$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1. *la loi commune des $X_i, i \in \mathbb{Z}^d$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et on note par f une densité de probabilité de cette loi que l'on suppose continue et strictement positive ;*
2. *pour tout $i \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, la loi du couple (X_0, X_i) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et on note par $f_{0,i}$ une densité de probabilité de cette loi de probabilité ;*
3. *K est à support compact et de carré intégrable ;*
4. *$b_n \to 0$, $n^d b_n \to +\infty$ et $n^d b_n^3 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*
5. *$\sum_{m=1}^{+\infty} m^{2d-1}\alpha_{1,\infty}(m) < +\infty$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{n^d b_n}\left(f_n^{PR}(x) - f(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

où $\sigma^2 = f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u$.

L'auteur obtient ce résultat au moyen de la méthode de Lindeberg. Dans la preuve, il développe aussi de nombreuses astuces de calcul qui nous seront utiles pour les preuves des chapitres 5 et 6.

Dépendance physique au sens de Wu Ce mode de dépendance ayant été introduit en 2005 par Wei Biao Wu [Wu05], il n'existe que peu de résultats pour les estimateurs de Parzen-Rosenblatt dont les données forment une suite ou un champ p-stable. Nous rappelons que Mohamed El Machkouri [EM14] a obtenu, en appliquant la méthode de Lindeberg, le résultat majeur suivant traitant des champs 2-stables uni-variés ($N = 1$).

Théorème 2.1.4 (El Machkouri, 2014)**.** *Sous les conditions suivantes :*

1. *la loi commune des* $X_i, i \in \mathbb{Z}^d$ *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et on note par* f *une densité de probabilité de cette loi. On suppose que* f *est strictement positive, continue et bornée ;*
2. *pour tout* $i \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, *la loi du couple* (X_0, X_i) *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^2$ *et on note par* $f_{0,i}$ *une densité de probabilité de cette loi de probabilité. De plus* $\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ i\in\mathbb{Z}^d}} |f_{0,i}(x,y) - f(x)f(y)| < +\infty$ *;*
3. K *est Lipschitz, de carré intégrable, pair et vérifie* $\int_{\mathbb{R}} |uK(u)|du < +\infty$ *;*
4. $b_n \to 0$, $|\Lambda_n| b_n \to +\infty$ *et* $|\Lambda_n| b_n^3 \to 0$ *as* $n \to +\infty$ *;*
5. $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{i}|^{\frac{5d}{2}} \delta_{\boldsymbol{i},2} < +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{n^d b_n}\left(f_n^{PR}(x) - f(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

où $\sigma^2(x) = f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u$.

Comme le précise l'auteur, si on ne considère que des processus linéaires à la place des champs de Bernoulli généraux, il est possible d'affaiblir l'hypothèse 5 tout en conservant le résultat au coût de la perte des conditions minimales sur le paramètre de fenêtre (voir Hallin et al. [HLT01]).

Il est intéressant de remarquer que pour pouvoir traiter les champs p-stables, il est d'usage d'utiliser une approximation par des champs m_n-dépendants où $(m_n)_n$ est une suite d'entiers bien choisie. On contrôle ensuite cette approximation au travers d'une inégalité de moment telle que celle démontrée par Wei Biao Wu dans [Wu05] (Théorème 1). Pour obtenir cette inégalité, l'un des arguments principaux repose sur l'inégalité de Burkholder 1.4.4 ; par la suite l'inégalité obtenue par Wu fut améliorée dans les travaux de Wei Biao Wu, Dalibor Volný et Mohamed El Machkouri [EMVW13] où l'on commence à voir apparaître la forme actuelle de celle-ci et dans celui de Mohamed El Machkouri [EM14] dans lequel apparaît l'approximation par des champs m_n-dépendants. Nous verrons dans les chapitres 5 et 6 que cette inégalité peut être étendue au cas de la régression pour les estimateurs à noyau de la régression dans le cas non-récursif dans un premier temps (Proposition 5.4.5) puis, dans un second temps, aux estimateurs récursifs (Proposition 6.3.7).

2.1.2. Estimateurs de la régression

Dans de nombreuses situations, les statisticiens cherchent à connaître la relation qui existe entre des prédicteurs et une réponse. Lorsque la forme de la relation est inconnue, il est nécessaire de faire appel à l'estimation non-paramétrique. Cette question, somme toute naturelle, est néanmoins très importante en statistique. Ce domaine des statistiques a été fortement étudié du fait qu'il ouvre la porte à la prédiction et donc à des applications directes et évidentes des objets mathématiques étudiées. On pourra donner comme exemples, des applications en météorologie, en économie ou en physique (voir les travaux de Grzegorz Dudek [Fil+14 ; Dud18 ; Rut+14]). Il existe de nombreux articles concernant les propriétés asymptotiques des estimateurs à noyau de la régression pour les séries temporelles. On pourra citer, notamment, Zudi Lu et Ping Cheng [LC97], Peter Robinson [Rob83], Herman Bierens [Bie87], Wolfgang Härdle et Alexandr Tsybakov [HT88] et bien d'autres références.

Afin de présenter ce concept, nous considérerons le cadre d'étude suivant.

Soit $((Y_i, X_i))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire de couples de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$; tout comme l'estimation de la densité consistait à déterminer au mieux le comportement de la densité sous-jacente des données identiquement distribuées, le but de l'étude de la régression est de déterminer le comportement de la fonction de régression

$$r : x \mapsto \mathbb{E}[Y_0|X_0 = x]. \tag{2.8}$$

Dans la suite, et jusqu'à mention du contraire, on prendra $N = 1$.

Geoffrey Watson remarque, dans [Wat64], que dès lors que (Y_0, X_0) admet une densité de probabilité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, on peut réécrire la fonction r par

$$r(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y f(x, y)\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\mathrm{d}y} \tag{2.9}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que le dénominateur ne s'annule pas. Il est intéressant de remarquer que l'on peut estimer le dénominateur (resp. le numérateur) grâce à l'estimateur f_n^{PR} (resp. φ_n) où

$$f_n^{PR} : x \mapsto \frac{1}{nb_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_n : x \mapsto \frac{1}{nb_n}\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right). \tag{2.10}$$

Cas i.i.d

Tout comme pour les estimateurs de la densité, les premiers résultats traitant des estimateurs de la régression furent énoncés dans le cadre i.i.d. c'est à dire que les couples aléatoires $(Y_i, X_i), i \in \mathbb{N}$ sont supposés indépendants et identiquement distribués. Supposons de plus que la loi des variables de régression est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admette f pour densité inconnue.

Estimateur de Nadaraya-Watson Un outil très souvent mis à profit pour estimer r, est l'estimateur de Nadaraya-Watson qui fut défini par Elizbar Nadaraya [Nad64] et Geoffrey Watson [Wat64] de la manière suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en tout $x \in \mathbb{R}^N$, l'estimateur de Nadaraya-

Watson $r_n(x)$ est donné par

$$r_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right)} & \text{si } \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right) \neq 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.11}$$

où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs et K est un noyau.

De même que pour l'estimateur de Parzen-Rosenblatt, on peut étendre la définition de cet estimateur aux données spatiales de la manière suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en tout $x \in \mathbb{R}*$,

$$r_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} Y_{\boldsymbol{i}} K\left(\frac{x-X_{\boldsymbol{i}}}{b_n}\right)}{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda} K\left(\frac{x-X_{\boldsymbol{i}}}{b_n}\right)} & \text{si } \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} K\left(\frac{x-X_{\boldsymbol{i}}}{b_n}\right) \neq 0 \\ \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} Y_{\boldsymbol{i}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.12}$$

où $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs qui converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et K est un noyau.

Remarque. Dans le cas où $d = 1$, les deux définitions coïncident dès lors que $\Lambda_n = [\![1, n]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans un premier temps, nous énoncerons les résultats obtenus dans le cas uni-dimensionnel (i.e. $d = 1$ et $\Lambda_n = [\![1, n]\!], n \in \mathbb{N}^*$).

Afin d'obtenir la normalité asymptotique de l'estimateur r_n, Elizbar Nadaraya suppose dans [Nad64] les conditions $(\mathcal{K}2)$, $(\mathcal{K}3)$ satisfaites, ainsi que

$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad nb_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{i\in\mathbb{N}} |Y_i| < +\infty.$$

Et il obtient, alors, que pour tout x tel que $f(x) > 0$,

$$\sqrt{nb_n}\left(r_n(x) - \frac{\mathbb{E}[\varphi_n(x)]}{\mathbb{E}[f_n^{PR}(x)]}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

où $\sigma^2(x) = \frac{\mathbb{E}\left[Y_0^2|X_0=x\right]-r^2(x)}{f(x)} \int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u$.
Remarquons que ce résultat est obtenu en faisant usage du théorème 1A dans [Par62] comme c'était le cas pour obtenir la normalité asymptotique de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt (voir théorème 2.1.1).

Cas dépendant

Tout comme pour l'estimateur de la densité de Parzen-Rosenblatt, il existe de nombreux résultats donnant la normalité asymptotique de l'estimateur de la régression sous certaines conditions de dépendance. Commençons par traiter le cas du mélange fort.

Mélange fort Un des premiers résultats traitant de l'estimation par noyau de la régression pour le α-mélange est celui de Peter Robinson [Rob83]. Sous l'hypothèse sur les coefficients de mélange suivante :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} j\alpha_{\infty,\infty}(j) < +\infty.$$

De plus, il requiert des hypothèses plus fortes que $(\mathcal{K}2)$ et $(\mathcal{K}3)$ sur le noyau K. Enfin Robinson ajoute aux *conditions minimales de fenêtre* l'hypothèse : $nb_n^{2\lambda+1} \to 0$ pour un certain $\lambda > 0$ et il exige que les fonctions f et r satisfassent à des conditions de régularité.

Sous ces hypothèses et en supposant que

$$x \mapsto \mathbb{E}\left[Y_0^2 | X_0 = x\right] \quad \text{est continue} \tag{2.13}$$

et Y_0 est bornée, il obtient la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{nb_n}\,(r_n(x) - r(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

où

$$\sigma^2(x) = \frac{\mathbb{E}\left[Y_0^2 | X_0 = x\right] - r^2(x)}{f(x)} \int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u. \tag{2.14}$$

Notons que la condition (2.13) est très classique et que nous serons amenés à la recroiser dans les chapitres 5 et 6.

Pour des données spatiales ($d \geqslant 2$), nous obtenons dans le chapitre 5 un résultat de normalité asymptotique pour l'estimateur défini par (2.12) qui généralise le résultat de Gérard Biau et Benoît Cadre [BC04] ci-dessous tout en réduisant les hypothèses.

Désormais, N est un entier strictement positif quelconque. On considère les hypothèses suivantes.

Conditions $(\mathcal{R})$**.**

- $(X_{\mathbf{0}}, Y_{\mathbf{0}})$ *admet une densité de probabilité notée* g *par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^N$.
- *il existe un réel* $D \geqslant 0$ *tel que les couples* $(X_{\boldsymbol{i}}, X_{\boldsymbol{j}})$ *et* $((X_{\boldsymbol{i}}, Y_{\boldsymbol{i}}), (X_{\boldsymbol{j}}, Y_{\boldsymbol{j}}))$ *admettent des densités de probabilité notées ,respectivement,* $f_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}$ *et* $g_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}$*, dès que* $|\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}| > D$*. De plus, on suppose qu'il existe une constante* $c \geqslant 0$ *telle que*

$$|f_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}(u, v) - f(u)f(v)| \leqslant c$$

  et

$$|g_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}(s, t) - g(s)g(t)| \leqslant c$$

  pour tous $u, v \in \mathbb{R}^N$ *et pour tous* $s, t \in \mathbb{R}^{N+1}$.
- *les fonctions* f *et* r *sont Lipschitziennes, la fonction* $\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2 | X_{\mathbf{0}} = \cdot\right]$ *est continue et strictement positive.*

Conditions $(\mathcal{B})$**.** *La suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait les hypothèses suivantes.*

- $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $|\Lambda_n| b_n^{N+2} \to 0$.
- *il existe* $\delta \in]0, 1/2[$ *tel que* $|\Lambda_n| b_n^{N(1+2d\delta)} \ln(|\Lambda_n|)^{-8d/b} \to 0$.

· *il existe une suite* $(q_n)_n$ *d'entiers strictement positifs telle que*

$$q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \quad q_n(|\Lambda_n| b_n^{N(1+2d\delta)} \ln(|\Lambda_n|)^{-8d/b})^{-\frac{1}{2d}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Conditions $(\mathcal{D})$**.** *Les coefficients de mélange* $(\alpha_{\infty,\infty}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfont à*

· $|\Lambda_n| \sum_{i=q_n}^{+\infty} i^{d-1}\alpha(iq_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *;*

· $b_n^{-N\delta}\ln(|\Lambda_n|)^{2/b} \sum_{i=q_n}^{+\infty} i^{d-1}\alpha_{\infty,\infty}^{\delta}(i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Théorème 2.1.5. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{R})$*,* $(\mathcal{B})$ *et* $(\mathcal{D})$ *et si*

· *les régions* Λ_n *sont rectangulaires ;*

· *il existe deux réels strictement positifs* a *et* b *tels que* $\mathbb{E}\left[e^{a|Y_0|^b}\right] < +\infty$;

· *pour tous* i, j*, et pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$ *tel que* $f(x) > 0$*, on a*

$$\boldsymbol{E}\left[K\left(\frac{x-X_i}{b_n}\right)K\left(\frac{x-X_j}{b_n}\right)\right] = O\left(b_n^{N+1}\right);$$

· K *est Lipschitzien et à support compact ;*

alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) > 0$*, on a la normalité asymptotique*

$$\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}(r_n(x) - r(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

où $\sigma^2(x) = \frac{\mathbb{E}\left[Y_0^2|X_0=x\right]-r^2(x)}{f(x)} \int_{\mathbb{R}^N} K^2(u)\mathrm{d}u.$

Notons que la condition requérant l'existence de moments exponentiels finis pour les données est une hypothèse relativement coûteuse due à l'utilisation de la méthode de Bernstein. Dans notre théorème 5.2.2, nous obtenons la conclusion sans avoir à supposer une telle hypothèse grâce à la mise en œuvre, dans la preuve, de la méthode de Lindeberg. De plus, cette méthode nous permet de n'imposer que les conditions minimales de fenêtre pour l'obtention de la normalité asymptotique au lieu des hypothèses $(\mathcal{B})$ qui sont plus restrictives (voir les commentaires à la suite du corollaire 5.2.3).

Dépendance physique au sens de Wu Tout comme pour le cas de l'estimation de la densité, il existe peu de résultats dans la littérature traitant de l'estimation de la régression pour des données faiblement dépendantes au sens de Wu [Wu05]. Notons toutefois, pour $d = 1$ et $N = 1$, le résultat récent obtenu par Wei Biao Wu, Yinxiao Huang et Yibi Huang [WHH10]. Premièrement, on définit une condition de régularité au voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$.

Conditions $(\mathcal{V}(x))$**.** $f(x) > 0$ *et il existe un voisinage de* x *sur lequel la fonction* $y \mapsto \mathbb{E}\left[|Y_0|^p|X_0 = y\right]$ *est bornée pour un certain* $p > 2$*.*

Dans un second temps, on considère l'hypothèse suivante qui permet le contrôle des coefficients de dépendance physique.

Conditions $(\mathcal{C})$**.** *En posant, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\delta_{i,2}(x) = \|f_{i+1}(x|\sigma(\varepsilon_j, j \leqslant 0)) - f_{i+1}(x|\sigma(\varepsilon_0'; \varepsilon_j, j < 0))\|_2$*, on suppose que* $\frac{b_n}{n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i=1-j}^{n-j}\sup_{x\in\mathbb{R}}\delta_{i,2}(x)\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Dans cette condition, on a repris les notations de la section 1.5.3 et on a noté $f_i(\cdot|\mathcal{G})$ la densité conditionnelle de X_{i+1} sachant la tribu $\mathcal{G}$ [2].

Théorème 2.1.6 (Wu et al., 2010)**.** *Supposons satisfaites les conditions ($\mathcal{M}$), ($\mathcal{K}1$), ($\mathcal{K}2$) et ($\mathcal{C}$) ; de plus, supposons que le support du noyau K est compact. Alors, si r est continue, f est bornée et que l'hypothèse (2.13) est satisfaite, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{V}(x)$ est satisfaite, on a la convergence en loi suivante :*

$$\sqrt{nb_n}\left(r_n(x_0) - \frac{\mathbb{E}[\varphi_n(x)]}{\mathbb{E}[f_n^{PR}(x)]}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x))$$

où $f_n^{PR}(x)$ est donné par (2.1), $\varphi_n(x)$ est donné par (2.10) et $\sigma^2(x)$ est donné par (2.14) dès que $nb_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Corollaire 2.1.7. *Sous les conditions du théorème précèdent, et si on suppose de plus que f et r soient de classe C^2, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\mathcal{V}(x)$,*

$$\sqrt{nb_n}\,(r_n(x) - r(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

où $\sigma^2(x)$ est donné par (2.14).

2.2. Estimateurs récursifs à noyau

De nos jours, l'estimation non-paramétrique à noyau est un domaine populaire et bien établi en statistique mais malgré les performances notables des estimateurs à noyau, le problème des données en masse et celui des données acquises en continu posent de nouveaux problèmes. En effet, les nouveaux outils numériques permettent aux statisticiens de collecter des quantités très importantes de données ce qui entraîne des difficultés pour leur analyse surtout lorsque des estimations instantanées sont requises. En raison du fait que les estimateurs récursifs satisfont à une relation de récurrence, ils possèdent l'avantage de pouvoir être mis à jour en temps constant quelque soit le nombre d'observations que l'on a obtenues précédemment. Ceci les oppose à leurs équivalents non-récursifs qui doivent être recalculés entièrement dès que de nouvelles données sont disponibles et permet de réduire le coût de calcul de l'estimateur. Il existe de nombreux résultats concernant les propriétés asymptotiques des estimateurs récursifs de la densité ainsi que de la régression pour des données i.i.d. et fortement mélangeantes. On pourra citer, par exemple, les travaux d'Aboubacar Amiri [Ami12], Xiaohong Chen, Yinxiao Huang et Wei Biao Wu [CHW13], László Györfi et Elias Masry ([GM87], [GM90]), Elias Masry [Mas86], George Roussas et Lanh Tran [RT92], Li Wang et Han-Ying Liang [WL04] et encore d'autres.

2.2.1. Estimateurs de la densité

Cas i.i.d.

En se plaçant dans le même cadre que dans la section 2.1.1, on donne quelques exemples d'estimateurs récursifs de la densité.

2. C'est à dire la dérivée de la fonction $y \mapsto \mathbb{P}(X_{i+1} \leqslant y|\mathcal{G})$.

Nom de l'estimateur	Expression explicite
Wolverton-Wagner	$f_n^{WW}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)$
Deheuvels	$f_n^{DHV}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n b_i}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)$
Davies-Wegman	$f_n^{DW}(x) = \frac{1}{n\sqrt{b_n}}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{b_i}} K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)$
Amiri ($\ell \in [0,1]$)	$f_n^{\ell}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n {b_i}^{N(1-\ell)}}\sum_{i=1}^n \frac{1}{{b_i}^{N\ell}} K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)$
Hall-Patil	$f_n^{HP}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{b_i^N} K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)$

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de cette section, l'intérêt de ces estimateurs réside dans le fait qu'ils satisfont à une relation de récurrence, ce qui réduit fortement les temps de calcul de l'estimateur (voir Figure 2.1 et Figrue 2.2). Nous nous intéressons, tout d'abord à cette relation de récurrence.

Estimateur	Relation de récurrence
f_n^{WW}	$f_n^{WW}(x) = \frac{n-1}{n} f_{n-1}^{WW}(x) + \frac{1}{nb_n} K\left(\frac{x-X_n}{b_n}\right)$
f_n^{DHV}	$f_n^{DHV}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} b_i}{\sum_{i=1}^n b_i} f_{n-1}^{DHV}(x) + \frac{1}{\sum_{i=1}^n b_i} K\left(\frac{x-X_n}{h_n}\right)$
f_n^{DW}	$f_n^{DW}(x) = \frac{(n-1)}{n}\sqrt{\frac{b_{n-1}}{b_n}} f_{n-1}^{DW}(x) + \frac{1}{nb_n} K\left(\frac{x-X_n}{b_n}\right)$
$f_n^{\ell}, \ell \in [0,1]$	$f_n^{\ell}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{N(1-\ell)}}{\sum_{i=1}^n b_i^{N(1-\ell)}} f_{n-1}^{\ell}(x) + \frac{b_n^{-N\ell}}{\sum_{i=1}^n b_i^{N\ell}} K\left(\frac{x-X_n}{b_n}\right)$
f_n^{HP}	$f_n^{HP}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} f_{n-1}^{HP}(x) + \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}\frac{w_n}{b_n^N} K\left(\frac{x-X_n}{b_n}\right)$

Comparaison du temps de mise à jour des estimateurs Dans ce qui suit, nous effectuons une comparaison numérique du temps de mise à jour des estimateurs f_n^{PR} et f_n^{WW}. Pour cela, nous simulons un flux de données par paquet de 1000 observations, c'est à dire que les données nous sont accessibles que par paquets de 1000 observations. Et nous déterminons les temps de mise à jour de ces deux estimateurs à chaque paquet reçu. Le graphique ci-dessous présente les temps de mise à jour des deux estimateurs pour un paquet de 1000 observations en fonction du nombre de données que l'on a déjà en notre possession.

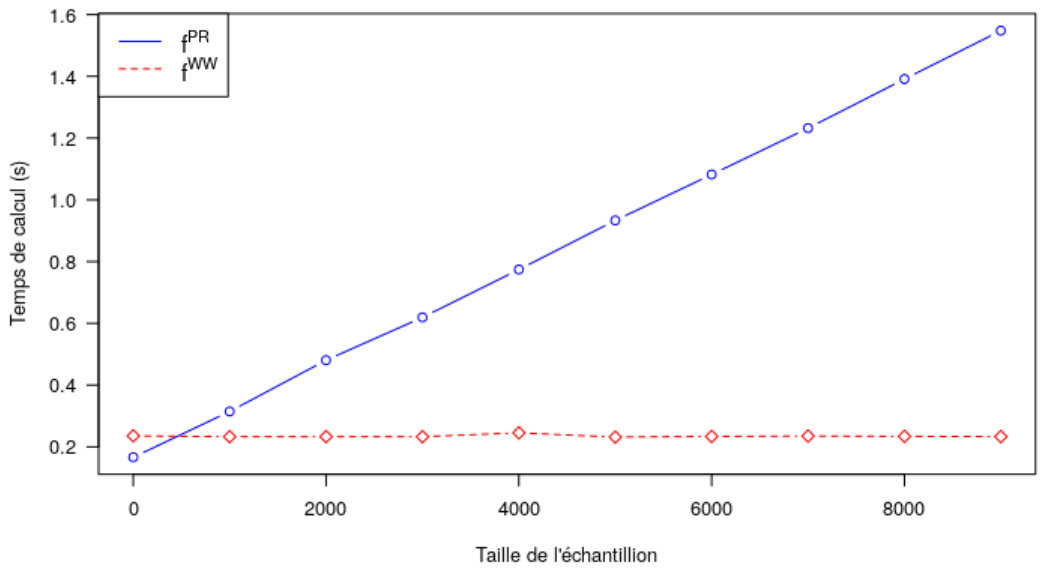
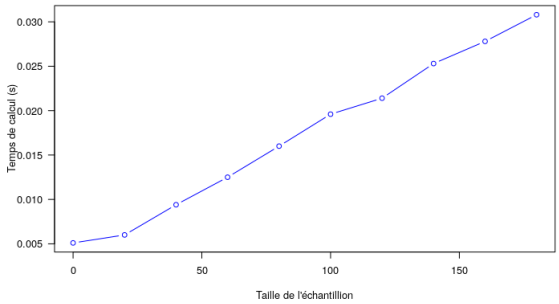


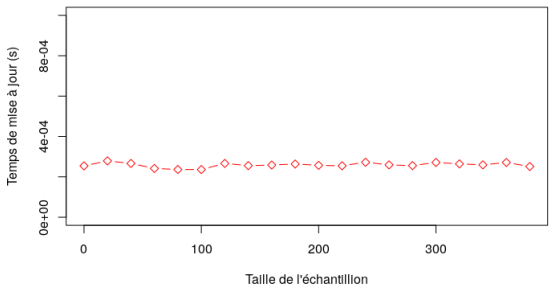
FIGURE 2.1. – Comparaison du temps de calcul pour des mises à jour par paquet de 1000 observations de l'estimateur non-récursif f_n^{PR} et l'estimateur récursif f_n^{WW}

Nous remarquons que l'estimateur récursif possède un temps de mise à jour constant en fonction du nombre de données déjà obtenues, alors que l'estimateur non-récursif possède un temps de calcul affine en fonction des données déjà obtenues. Ceci provient du fait que lors de la mise à jour de l'estimateur non-récursif, on doit recalculer l'estimateur en tenant compte de toutes les observations précédentes alors que dans le cas non-récursif seules les nouvelles données influent sur le temps de mise à jour.

Dans les graphiques ci-dessous, nous considérons cette fois-ci un flux de données en continu, c'est à dire que les observations arrivent séquentiellement et que nous les traitons une à une. De même que précédemment, nous déterminons les temps de mise à jour des estimateurs f_n^{PR} et f_n^{WW}. Les graphiques ci-dessous présentent les temps de mise à jour en continu (une observation seulement à chaque mise à jour) des deux estimateurs en fonction du nombre de données que l'on a déjà en notre possession. Les points du graphiques correspondent aux relevés de temps effectués toutes les 20 observations.



(a) Estimateur non-récursif f_n^{PR}



(b) Estimateur récursif f_n^{WW}

FIGURE 2.2. – Temps de calcul pour des mises à jour en flux continu de l'estimateur non-récursif f_n^{PR} et de l'estimateur récursif f_n^{WW}

Nous attirons tout particulièrement l'attention du lecteur sur la différence d'échelle des axes des ordonnées. À nouveau, nous notons l'avantage en terme de temps de calcul des estimateurs récursifs par rapport à leurs équivalents non-récursifs.

Normalité asymptotique des estimateurs récursifs Pour chacun de ces estimateurs [3], on peut donner des conditions suffisantes afin d'obtenir la normalité asymptotique.

Afin d'étudier la normalité asymptotique de l'estimateur de Wolverton-Wagner, nous introduisons la condition suivante.

Condition 2.2.1. *Il existe* $\beta \in]0,1[$ *et* $0 < C_1 < C_2 < +\infty$ *tels que* $C_1 n^{-\beta} < b_n < C_2 n^{-\beta}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Richard Bradley [Bra83] a établi, en 1983, la normalité asymptotique de cet estimateur sous la condition 2.2.1, c'est à dire

$$\frac{n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^{-1}}}\left(f_n^{WW}(x) - \mathbb{E}\left[f_n^{WW}(x)\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(x)),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ où $\sigma^2(x) = f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)du$. Nous pouvons faire plusieurs remarques sur les travaux de Richard Bradley. Dans un premier temps, il est intéressant de remarquer que la preuve du théorème précédent repose sur le théorème de Dovertzky [Dvo70] que l'on a déjà rencontré dans la section (1.1.3). De plus, précisons que Richard Bradley obtient ce résultat de convergence pour des données satisfaisant à une condition de dépendance (plus spécifiquement l'auteur impose un contrôle des *coefficients de corrélation maximale* définis par (1.29)) ; bien que dans le cas i.i.d. ces conditions soient trivialement vérifiées. Enfin, Richard Bradely obtient aussi un résultat similaire pour les estimateurs de Deheuvels dans ce même article.

En 1973, Paul Deheuvels [Deh73] a obtenu la normalité asymptotique pour les estimateurs éponymes dans le cas i.i.d. Pour ce faire, il suppose que le noyau K est une densité bornée et satisfait à la condition énoncée ci-dessous.

$$\int_{|y|>t} |y|K(y)\mathrm{d}y \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

3. L'estimateur d'Amiri sera traité dans le cas dépendant uniquement puisque Amiri a étudié la normalité asymptotique dans ce cas.

En combinant les théorèmes 1 et 3 (d) dans l'article de H.I. Davies et Edward Wegman [WD79] de 1979, il est possible d'obtenir un théorème central limite pour l'estimateur de Davies-Wegman si l'on suppose les propriétés ($\mathcal{K}2$), ($\mathcal{K}3$), ($\mathcal{M}$) ainsi que la condition

$$\frac{nb_n}{\ln(n)(\ln(\ln(n)))^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

satisfaites. En effet en supposant de plus que la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{h_n}}\sum_{i=1}^n \sqrt{h_i}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^+$ et que f est continue et strictement positive, H.I. Davies et Edward Wegman [WD79] ont établi en 1979, le résultat de normalité asymptotique suivant pour l'estimateur éponyme : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{nb_n}\left(f_n^{DW}(x) - (\ell+1)f(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(x))$$

où $\sigma^2(x) = f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u$.

Enfin, présentons le résultat de normalité asymptotique pour l'estimateur le plus général que nous aborderons dans ce mémoire : l'estimateur de Hall-Patil. Les auteurs considèrent les hypothèses suivantes.

Condition 2.2.2. *Il existe $r \geqslant 1$ tel que $\int_{\mathbb{R}} u^k K(u)\mathrm{d}u = 0$ pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$ et $\int_{\mathbb{R}} u^r K(u)\mathrm{d}u \neq 0$.*

Théorème (Hall et Patil, 1994 ; [HP94])**.** *On suppose que f est r fois dérivable et bornée, que les hypothèses (2.2.2), ($\mathcal{M}1$) et ($\mathcal{K}2$) sont satisfaites et que l'on a les convergences suivantes :*

$$\delta_1(n) := \left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^{-2}\sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{b_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \textit{et} \quad \delta_2(n) := \left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^n w_i b_i^r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors $f_n^{HP}(x)$ est asymptotiquement normal,

$$\mathbb{V}\left[f_n^{HP}(x)\right] = \delta_1(n)f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u + o(\delta_1(n))$$

et

$$\mathbb{E}\left[f_n^{HP}(x)\right] - f(x) = \delta_2(n)f^{(r)}(x)\int_{\mathbb{R}} u^r K(u)\mathrm{d}u + o(\delta_2(n)).$$

Afin d'obtenir ce résultat Peter Hall et Prakash Patil utilisent une approximation par martingale et pour montrer la validité de cette approximation, les auteurs se servent de la formule de Taylor.

Cas dépendant

De nombreux résultats ont été obtenus en ce qui concerne les estimateurs récursifs à noyau de la densité pour des données fortement mélangeantes. Désormais, $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, où $N \geqslant 1$ est un entier.

Estimateur d'Amiri Considérons les conditions de dépendance suivantes sur la suite X satisfaites.

Conditions $(\mathcal{D})$**.**

($\mathcal{D}$1) Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est fortement mélangeant avec :

$$\alpha_{1,1}(k) \leqslant \gamma k^{-\rho}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

pour deux constantes strictement positives γ et ρ.

($\mathcal{D}$2) Pour chaque couple $(s,t), s \neq t$, le vecteur aléatoire (X_s, X_t) admet une densité $f_{s,t}$ telle que :

$$\sup_{|s-t|\geqslant 1} \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2N}} |f_{s,t}(x,y) - f(x)f(y)| < +\infty.$$

La classe d'estimateurs de la densité proposée par Aboubacar Amiri [Ami10] repose sur l'utilisation d'un paramètre contrôlant la forme de celui-ci. Cette classe généralise, notamment, l'estimateur de Wolverton-Wagner ainsi que celui de Deheuvels. Dans sa thèse de doctorat [Ami10], Aboubacar Amiri réalise une étude approfondie de cet estimateur incluant l'obtention de la normalité asymptotique ainsi que la comparaison des performances du dit estimateur par rapport à celui de Parzen-Rosenblatt. Nous renvoyons donc le lecteur à ce mémoire pour plus de résultats. Rappelons que l'obtention de la normalité asymptotique de l'estimateur d'Amiri est conditionnée, dans [Ami10], aux faits suivants. Premièrement, Aboubacar Amiri requiert des hypothèses usuelles sur le noyau K.

Conditions $(\mathcal{K}')$**.**

($\mathcal{K}'$1) $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité, strictement positive, paire et bornée ;

($\mathcal{K}'$2) pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|x\|^N K(x) = 0$;

($\mathcal{K}'$3) pour tout $i, j \in [\![1, N]\!]$, $\int_{\mathbb{R}^N} |v_i v_j| K(v)\mathrm{d}v < +\infty$.

Dans un second temps, l'auteur impose aussi des conditions sur le paramètre de fenêtre.

Conditions $(\mathcal{B}')$**.**

($\mathcal{B}'$1) $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $nb_n^{N+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $nb_n^{N+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

($\mathcal{B}'$2) pour tout $r \in]-\infty, N+2[$,

$$A_{n,r} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{b_n}\right)^r \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta_r < +\infty;$$

($\mathcal{B}'$3) pour toutes suites d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'implication suivante est satisfaite :

$$u_n \sim v_n \Longrightarrow b_{u_n} \sim b_{v_n};$$

($\mathcal{B}'$4) il existe un réel positif $\zeta_0 > 4$ tel que

$$\frac{nb_n^{3N}}{(\ln(n))^{\zeta_0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors sous ces hypothèses et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sqrt{nb_n^N}\left(f_n^\ell(x) - f(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma_\ell^2),$$

où $\sigma_\ell^2 = \frac{\beta_{N(1-2\ell)}}{\beta_{N(1-\ell)}^2} f(x) \int_{\mathbb{R}^N} K^2(t)\mathrm{d}t$.

Ce résultat est obtenu par une méthode de Bernstein avec reste, où les petits blocs et le reste sont contrôlés par des inégalités classiques en théorie des probabilités et la normalité asymptotique des grands blocs est obtenue à l'aide d'une approximation i.i.d. de ceux-ci.

Estimateur de Hall-Patil Afin d'obtenir un théorème central limite pour cet estimateur, Amir Aboubacar et Mohamed El Machkouri [EMA] ont généralisé les coefficients $A_{n,r}$ précédemment introduits comme suit.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, on définit les coefficients

$$A_{n,s,t} = \frac{1}{nw_n^t b_n^s} \sum_{i=1}^n w_i^t b_i^s.$$

Pour déduire la normalité asymptotique de l'estimateur de Hall-Patil, les auteurs requièrent les conditions suivantes.

Condition 2.2.3. *Il existe deux constantes $\beta_{0,1}, \beta_{-N,2} \in \mathbb{R}_+^*$ telles que*

(1) $A_{n,0,1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta_{0,1}$ *;*

(2) $A_{n,-N,2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta_{-N,2}$.

De plus, il existe $\theta \in [0,1]$, tel que

$$b_n^{N(1-\theta)} \sum_{i=1}^n w_i^2 \trianglelefteq nw_n^2 \tag{2.15}$$

En outre, les auteurs imposent aussi un contrôle des coefficients de mélange :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{\theta}} \alpha_{1,\infty}(k) < +\infty. \tag{2.16}$$

Ainsi, sous ces conditions et si on suppose de plus certaines conditions de régularité sur la densité estimée et sur les densités jointes, Amir Aboubacar et Mohamed El Machkouri obtiennent le théorème limite suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) > 0$

$$\sqrt{nb_n^N}\left(f_n(x) - f(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

où $\sigma^2(x) = \frac{\beta_{-N,2}}{\beta_{0,1}^2} f(x) \int_{\mathbb{R}^N} K^2(u)\mathrm{d}u$ pour peu que $nb_n^{N+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et que le noyau K soit une densité de probabilité bornée satisfaisant à la condition

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|u\| K(u)\mathrm{d}u < +\infty. \tag{2.17}$$

Les preuves des théorèmes énoncés au chapitre 6 seront fondées sur des méthodes similaires à celles utilisées par Amir Aboubacar et Mohamed El Machkouri ; en particulier, ces démonstrations se fonderont sur la méthode de Lindeberg.

2.2.2. Estimateurs de la régression

Dans cette section, nous présentons désormais le dernier objet dont nous approfondirons l'étude au cours de la troisième partie de ce mémoire. On rappelle que l'un des objectifs de ce mémoire est d'étendre les résultats de normalité asymptotique de l'estimateur de Nadaraya-Watson au cas récursif (i.e. pour l'estimateur de Hall-Patil) et dépendant (mélange fort et dépendance faible au sens de Wu).

On se place, désormais, dans le cadre de la section 2.1.2 avec N un entier strictement positif quelconque. Deux estimateurs apparaissent dans la littérature. Celui de Ahmad-Lin [AL76] dit estimateur récursif de la régression et défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$r_n^{AL}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i b_i^{-N} K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)}{\sum_{i=1}^n b_i^{-N} K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)} & \text{si } \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right) \neq 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et celui de Devroye-Wagner [DW80] dit estimateur semi-récursif de la régression et défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$r_n^{DW}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right)} & \text{si } \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right) \neq 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous présentons dans ce qui suit des résultats de normalité asymptotique à la fois dans le cas i.i.d. et pour le mélange fort.

Cas i.i.d

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, K est une densité de probabilité telle que $\|u\| K(u) \to 0$ lorsque $\|u\| \to +\infty$ et si les conditions $(\mathcal{K}2)$, $(\mathcal{M})$, $nb_n^{N+4} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et

Condition 2.2.4. $\int_{\mathbb{R}^N} uK(u)\mathrm{d}u = 0$ *et* $\int_{\mathbb{R}^N} \|u\|^2 K(u)\mathrm{d}u < +\infty$

sont satisfaites. Alors, Ibrahim Ahmad et Pi-Erh Lin [AL76] ont montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) > 0$,

$$\sqrt{nb_n^N}\left(r_n^{AL}(x) - r(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x))$$

où $\sigma^2(x)$ est donné par (2.14) dès que les fonctions f et r sont deux fois dérivables et si toutes leurs dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sont bornées.

Cas dépendant

Le premier résultat significatif concernant l'estimateur d'Ahmad-Lin pour le mélange fort est celui de George Roussas et Lanh Tran [RT92], dans lequel sous les hypothèses ci-dessous, les auteurs obtiennent un théorème limite.

Condition 2.2.5 (Hypothèses sur le paramètre de fenêtre)**.**

- $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $nb_n^{N+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- *La suite* $\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{b_n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée.*
- *La suite* $\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_n}{b_i}\right)^{N\lambda}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *vers* $\theta_{\lambda N}$ *pour un certain* $\lambda\in[1,3[$.

Condition 2.2.6 (Hypothèse sur l'espérance conditionnelle)**.**

Les fonctions $x\mapsto\mathbb{E}\left[|Y_0|^p|X_0=x\right]$ *sont continues pour* $p\in\{1,2,2+\delta\}$ *pour un certain* $\delta>0$.

Condition 2.2.7 (Hypothèse sur les coefficients de mélange)**.**

- *Il existe une suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'entiers strictement positifs telle que*

$$c_n\to+\infty,\quad c_nb_n^N\to 0\quad \text{et}\quad b_n^{-(1-\gamma)N}\sum_{i=c_n}^{+\infty}\alpha_{\infty,\infty}^{1-\gamma}(i)\to 0\quad \text{lorsque } n\to+\infty$$

  où $\gamma=\frac{2}{2+\delta}$.
- *Il existe trois suites* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}},(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'entiers strictement positifs tels que*

$$\frac{q_nr_n}{n}\to 0, r_n\alpha(q_n)\to 0, \frac{p_n^2}{nb_n^N}\to 0, b_n^{-(1-\gamma)N}\sum_{i=q_n}^{+\infty}p_i^{1-\gamma}\to 0\quad \text{lorsque } n\to+\infty.$$

Plus précisément, si les conditions sur le noyau K suivantes : $(\mathcal{K}2)$, $(\mathcal{K}2')$, (2.2.4) et les conditions (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) sont satisfaites et si les variables aléatoires $Y_i, i\in\mathbb{N}$ sont uniformément bornées et admettent des moments d'ordre $2+\delta$ et sous des hypothèses de régularité de la densité f ainsi que des différentes densités jointes, Roussas et Tran obtiennent la normalité asymptotique de l'estimateur r_n^{AL} avec une variance asymptotique égale à $\sigma^2(x)$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}^N$ tel que $f(x)>0$ par

$$\sigma^2(x)=\frac{\mathbb{E}\left[Y_0^2|X_0=x\right]-r^2(x)}{f(x)}\theta_N\int_{\mathbb{R}^N}K^2(u)\mathrm{d}u.$$

Remarquons que des conditions similaires à (2.2.6) apparaissent régulièrement lorsque l'on étudie les estimateurs récursifs de la régression dans le cas dépendant.

Dans [Ami10], Aboubacar Amiri a introduit un nouvel estimateur de la régression basé sur l'estimateur f_n^ℓ qu'il a introduit dans le même mémoire. Rappelons alors la définition de cet estimateur.

$$r_n^\ell(x)=\begin{cases}\frac{\varphi_n^\ell(x)}{f_n^\ell(x)} & \text{si } f_n^\ell(x)\neq 0\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i & \text{sinon}\end{cases}$$

où

$$\varphi_n^\ell(x)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{N(1-\ell)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{b_i^{N\ell}}K\left(\frac{x-X_i}{b_i}\right),$$

pour tout $x\in\mathbb{R}^N$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que le couple (Y_0,X_0) est à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ (i.e. $m=1$) et admet une densité de probabilité f^* par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.

Considérons les hypothèses $(\mathcal{K}')$, $(\mathcal{B}'1)$ - $(\mathcal{B}'3)$ et

Conditions.

- *il existe* $\zeta_0 > 4$ *tel que* $\frac{nb_n^N}{(\ln(n))^\chi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *;*
- *il existe* $\chi > 0$ *tel que* $nb_n^{N+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $(\ln n)^{1/\chi} b_n^N \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *;*
- *il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $\mathbb{E}\left[\lambda |Y_0|^\chi\right] < +\infty$ *;*
- *la suite* $((Y_n, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométriquement fortement mélangeante (i.e. les coefficients de mélange fort sont dominés par* $u \mapsto c_1 e^{-c_2 u}, c_1, c_2 > 0$*) ;*
- *pour chaque* $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$*, le vecteur* $((Y_i, X_i), (Y_j, X_j))$ *admet une densité de probabilité* $f_{i,j}$ *satisfaisant*

$$\sup_{|i-j|\geqslant 1} \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} |f_{i,j}(s,u,t,v) - f^*(s,u)f^*(t,v)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v < +\infty;$$

- *les fonctions* f *et* r *sont deux fois continûment différentiables et leurs dérivées partielles d'ordre* 2 *sont bornées ;*
- *la fonction* $x \mapsto \mathbb{E}\left[Y_0^2 | X_0 = x\right] f(x)$ *est continue et bornée.*

Alors, sous ces hypothèses, Aboubacar Amiri déduit la normalité asymptotique de l'estimateur r_n^ℓ suivante. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) > 0$,

$$\sqrt{nb_n^N}\left(r_n^\ell(x) - r(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

où $\sigma^2(x) = \frac{\beta_{N(1-2\ell)}}{\beta^2_{N(1-\ell)}} \frac{\mathbb{E}\left[Y_0^2 | X_0 = x\right] - r^2(x)}{f(x)} \int_{\mathbb{R}} K^2(u)\mathrm{d}u.$

Afin d'obtenir ce résultat, l'auteur raisonne en plusieurs étapes, il commence tout d'abord par un argument de troncature (2.18) et démontre que le reste tend vers 0 presque sûrement.

$$r_n^\ell(x) - r(x) = r_n^\ell(x) - \widetilde{r_n^\ell}(x) + \widetilde{r_n^\ell}(x) - r(x) \tag{2.18}$$

où

$$\widetilde{r_n^\ell}(x) = \frac{\widetilde{\varphi_n^\ell}(x)}{f_n^\ell(x)} \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi_n^\ell}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n b_i^{N(1-\ell)}} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{b_i^{N\ell}} \mathbf{1}_{Y_i \leqslant b_n} K\left(\frac{x - X_i}{b_i}\right).$$

En utilisant l'hypothèse $\mathbb{E}\left[\lambda |Y_0|^\chi\right] < +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et grâce au lemme de Borel-Cantelli, l'auteur obtient la négligeabilité du premier terme du membre de droite de (2.18).

Pour montrer la normalité asymptotique du deuxième terme dans le membre de droite de (2.18), Aboubacar Amiri utilise des arguments similaires à ceux qu'il avait avancés pour montrer la normalité asymptotique de l'estimateur f_n^ℓ que nous avons déjà présenté dans la section 2.2.1.

Deuxième partie

Théorèmes limite quenched

3. Théorèmes centraux limite sous la condition de Hannan

Récemment, Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19] ont montré que le théorème central limite *quenched* est satisfait pour des ortho-martingales stationnaires. Dans ce chapitre, on étudie ce type de résultats pour une classe de processus plus générale que celle des ortho-martingales. On trouve des conditions projectives suffisantes pour obtenir une approximation par ortho-martingale. Plus précisément, les conditions projectives sont du type Hannan. Nous donnerons aussi des résultats concernant les versions fonctionnelles de ces théorèmes *quenched*. Pour finir, nous donnerons des exemples d'applications aux champs de variables aléatoires à la fois linéaires et non linéaires.

Un des résultats principaux de ce chapitre est une extension naturelle du théorème central limite pour les ortho-martingales, démontré par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19], au cadre plus général des champs de variables aléatoires satisfaisant une condition projective similaire à celle proposée par Edward Hannan [Han73]. Nos résultats donnent aussi une version *quenched* du théorème principal de Magda Peligrad et Na Zhang [PZ18b]. Afin de montrer ces résultats nous utiliserons des approximations par ortho-martingale, des décompositions projectives ainsi que des théorèmes ergodiques pour les opérateurs de Dunford-Schwartz.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section suivante, nous présenterons les notations et rappellerons certaines définitions pour les champs bi-dimensionnels. Dans la section 3.2, nous énoncerons nos résultats principaux pour ces champs. Puis, dans la section 3.3 nous démontrerons ces résultats et dans la section 3.4, nous énoncerons et démontrerons les extensions au cas d-dimensionnel, $d \geqslant 3$, des résultats précédemment démontrés. Enfin, dans la section 3.5, nous donnerons deux exemples d'applications de nos théorèmes et corollaires : les champs linéaires et ceux de Volterra dont les innovations sont indépendantes ; remarquons que ce type de champ apparaît régulièrement en économie par exemple.

Les résultats obtenus ci-dessous ont fait l'objet d'une co-publication par Na Zhang, Lucas Reding et Magda Peligrad [ZRP19].

3.1. Champs bi-dimensionnels

A des fins de clarté, et dû en particulier à des difficultés de notations, nous ne traiterons dans cette section que du cas des champs de variables aléatoires 2-dimensionnels. Cependant, par la suite, nous étendrons les résultats aux champs de d-dimensionnels, où $d \geqslant 3$. Commençons par construire un champ stationnaire adapté à une filtration stationnaire. Afin d'obtenir une telle filtration, il est d'usage de considérer un champ stationnaire $(\xi_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de définir la filtration

$$\mathcal{F}_{k,\ell} = \sigma(\xi_{j,u} : j \leqslant k,\ u \leqslant \ell). \tag{3.1}$$

Pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, on définit aussi les tribus suivantes : $\mathcal{F}_{\infty,j} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{n,j}$, $\mathcal{F}_{i,\infty} = \bigvee_{m\in Z} \mathcal{F}_{i,m}$ et $\mathcal{F}_{\infty,\infty} = \bigvee_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{i,j}$.

Pour simplifier les notations, nous désignerons l'espérance conditionnelle sachant la tribu $\mathcal{F}_{a,b}$ de la manière suivante.

$$\mathbb{E}_{a,b}[X] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{a,b}].$$

De plus, on suppose que la filtration est commutante. Rappelons qu'en adoptant les notations définies précédemment, ceci signifie

$$\mathbb{E}_{u,v}[\mathbb{E}_{a,b}[X]] = \mathbb{E}_{a\wedge u,b\wedge v}[X], \tag{3.2}$$

où $a \wedge b$ désigne le minimum entre a et b.

Sans restreindre la généralité, on définit de manière canonique le champ de v.a.$(\boldsymbol{\xi_u})_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^2}$ sur l'espace de probabilité $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ engendrée par les pavés mesurables. Définissons, alors, sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ les opérateurs

$$\Theta^{\boldsymbol{u}}((x_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}) = (x_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}.$$

Deux d'entre eux jouent un rôle important dans notre article : lorsque $\boldsymbol{u} = (1,0)$ et lorsque $\boldsymbol{u} = (0,1)$. En interprétant les indices comme des notations pour les lignes et les colonnes d'une matrice, on les nommera

$$T((x_{u,v})_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}) = (x_{u+1,v})_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}$$

le décalage vertical et

$$S((x_{u,v})_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}) = (x_{u,v+1})_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}$$

le décalage horizontal.

Nous définissons, maintenant, le champ stationnaire $(X_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^2}$ de v.a. de la manière suivante. On considère une fonction mesurable f à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$, et on pose

$$X_{j,k} = f(T^j S^k((\boldsymbol{\xi}_{a,b})_{a\leqslant 0, b\leqslant 0})). \tag{3.3}$$

On suppose que la variable aléatoire $X_{0,0}$ est centrée et de carré intégrable. On remarque que le champ de variables aléatoires $(X_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$.

Soit $\varphi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction de Young, c'est à dire, une fonction convexe satisfaisant

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

On va définir la norme de Luxembourg associée à φ. Pour toute fonction mesurable h de Ω dans $\mathbb{R}$, la norme de Luxembourg de h est définie par (voir relation 9.18 et 9.19 à la page 79 de Krasnosel'skii and Rutitskii, 1961 [KR61])

$$\|h\|_\varphi = \inf\{k \in]0,+\infty[: \mathbb{E}[\varphi(|h|/k)] \leqslant 1\}. \tag{3.4}$$

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$$S_{k,j} = \sum\nolimits_{u,v=1}^{k,j} X_{u,v},\ \mathbb{P}^\omega(\cdot) = \mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_{0,0}](\omega) \text{ pour tout } \omega\in\Omega.$$

Nous noterons par $\mathbb{E}^\omega$ l'espérance correspondant à la mesure de probabilité $\mathbb{P}^\omega$.

Pour une variable aléatoire intégrable X, on définit l'opérateur de projection par

$$P_{\tilde{0},0}(X) := (\mathbb{E}_{0,0} - \mathbb{E}_{-1,0})[X]$$

$$P_{0,\tilde{0}}(X) := (\mathbb{E}_{0,0} - \mathbb{E}_{0,-1})[X].$$

Remarquons que, d'après (3.2) et la définition 1.22 des opérateurs de projection, on a

$$\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X) := P_{\tilde{0},0} \circ P_{0,\tilde{0}}(X) = P_{0,\tilde{0}} \circ P_{\tilde{0},0}(X) = (\mathbb{E}_{0,0} - \mathbb{E}_{0,-1} - \mathbb{E}_{-1,0} + \mathbb{E}_{-1,-1})[X].$$

Rappelons que, pour $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, on définit les projections $\mathcal{P}_{u,v}$ comme suit.

$$\mathcal{P}_{u,v}(\cdot) := (\mathbb{E}_{u,v} - \mathbb{E}_{u,v-1} - \mathbb{E}_{u-1,v} + \mathbb{E}_{u-1,v-1})[\cdot]$$

Pour $(D_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ un champ d'accroissements d' ortho-martingale, on note

$$M_{k,j} = \sum\nolimits_{u,v=1}^{k,j} D_{u,v}.$$

Définition 3.1.1. On dit que le champ $(X_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ défini par (3.3) admet une approximation par ortho-martingale s'il existe un champ d'accroissements d'ortho-martingale $(D_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ tel que

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty} \frac{1}{nm}\mathbb{E}^{\omega}\left[(S_{n,m} - M_{n,m})^2\right] = 0 \text{ pour presque tout } \omega \in \Omega. \tag{3.5}$$

3.2. Résultats principaux

Dans toute cette section et la suivante, on supposera être dans le cadre précédemment énoncé, c'est à dire

Condition A. $(X_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ est défini par (3.3), les filtrations sont commutantes et T ou S est ergodique.

Le théorème suivant est une extension du théorème central limite *quenched* pour les ortho-martingales proposé et démontré par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19] aux champs stationnaires satisfaisant à une condition projective à la Hannan [Han73]. On peut aussi interpréter ce résultat comme une généralisation aux champs de v.a. de la proposition 11 de Christophe Cuny et Magda Peligrad [CP12] (voir aussi l'article de Dalibor Volný et Michael Woodroofe [VW14b]).

Théorème 3.2.1. *On suppose que l'hypothèse A est satisfaite et que, de plus,*

$$\sum_{u,v\geqslant 0} \|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})\|_2 < +\infty. \tag{3.6}$$

Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{n}\bar{S}_{n,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2) \qquad \textit{sous} \qquad \mathbb{P}^{\omega}.$$

où $\bar{S}_{n,n} = S_{n,n} - R_{n,n}$ *avec* $R_{n,n} = \mathbb{E}_{n,0}[S_{n,n}] + \mathbb{E}_{0,n}[S_{n,n}] - \mathbb{E}_{0,0}[S_{n,n}]$ *et*

$$\sigma^2 = \left\| \sum_{u,v\geqslant 0} \mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v}) \right\|_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\bar{S}_{n,n}^2\right]}{n^2}.$$

Dans le résultat du théorème 3.2.1 le recentrage aléatoire $R_{n,n}$ ne peut être évité. En effet, dans le cas uni-dimensionnel ($d = 1$), Dalibor Volný et Michael Woodroofe [VW10] ont construit un contre-exemple au théorème central limite *quenched* non-recentré. On peut remarquer aussi que pour les ortho-martingales, l'existence d'un second moment fini n'est pas suffisant pour obtenir un théorème limite *quenched* lorsque l'on somme sur des régions rectangulaires (voir Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19]). Pour s'assurer d'obtenir une approximation par ortho-martingale satisfaisant des propriétés sur ses moments adaptées, on va donner une condition plus forte que (3.6) dès lors que l'on calculera les sommes partielles sur des rectangles plutôt que des carrés.

Théorème 3.2.2. *Supposons que la condition (3.6) est remplacée par la condition plus forte suivante.*

$$\sum_{u,v\geqslant 0} \|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})\|_{\varphi} < +\infty, \tag{3.7}$$

où $\varphi(x) = x^2 \ln(1+|x|)$ *et* $\|\cdot\|_{\varphi}$ *est défini par (3.4). Alors, pour presque tout* $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{(nm)^{1/2}} \bar{S}_{n,m} \xrightarrow[n\wedge m\to+\infty]{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2) \qquad \textit{sous} \qquad \mathbb{P}^{\omega} \tag{3.8}$$

où $\bar{S}_{n,m} = S_{n,m} - R_{n,m}$ *avec* $R_{n,m} = \mathbb{E}_{n,0}\left[S_{n,m}\right] + \mathbb{E}_{0,m}\left[S_{n,m}\right] - \mathbb{E}_{0,0}\left[S_{n,m}\right]$ *et*

$$\sigma^2 = \left\| \sum_{u,v\geqslant 0} \mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v}) \right\|_2^2 = \lim_{n\wedge m\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\bar{S}_{n,m}^2\right]}{nm}.$$

Le recentrage aléatoire n'est pas nécessaire si l'on impose les conditions de régularité suivantes.

Corollaire 3.2.3. *Supposons que les conditions du théorème 3.2.2 sont satisfaites. Si*

$$\frac{\mathbb{E}_{0,0}\left[\mathbb{E}_{0,m}^2[S_{n,m}]\right]}{nm} \xrightarrow[n\wedge m\to+\infty]{p.s.} 0 \ \textit{ et } \ \frac{\mathbb{E}_{0,0}\left[\mathbb{E}_{n,0}^2[S_{n,m}]\right]}{nm} \xrightarrow[n\wedge m\to+\infty]{p.s.} 0, \tag{3.9}$$

alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{(nm)^{1/2}} S_{n,m} \xrightarrow[n\wedge m\to+\infty]{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2) \ \textit{ sous } \mathbb{P}^{\omega}. \tag{3.10}$$

Si les conditions du théorème 3.2.1 et les conditions de régularité (3.9) sont satisfaites avec $m = n$, *alors pour presque tout* $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{n} S_{n,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2) \ \textit{ sous } \mathbb{P}^{\omega}. \tag{3.11}$$

À des fins d'applications, nous donnons ci dessous une condition suffisante qui permet de satisfaire les hypothèses (3.9).

Théorème 3.2.4. *Supposons que*

$$\sum_{u,v\geqslant 1} \frac{\|\mathbb{E}_{1,1}[X_{u,v}]\|_2}{(uv)^{1/2}} < +\infty. \tag{3.12}$$

(a) Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$ (3.11) est satisfait.
(b) Si de plus la condition (3.7) est satisfaite, alors pour presque tout $\omega \in \Omega$ (3.10) est satisfait.
(c) Si, il existe $q > 2$ tel que

$$\sum_{u,v\geqslant 1} \frac{\|\mathbb{E}_{1,1}[X_{u,v}]\|_q}{(uv)^{1/q}} < +\infty, \tag{3.13}$$

alors le théorème quenched (3.10) est satisfait.

Remarque. Dans le corollaire 3.2.3 et le théorème 3.2.4, σ^2 peut être calculé explicitement $\sigma^2 = \lim_{n\wedge m\to+\infty} \mathbb{E}\left[S_{n,m}^2\right]/nm$ ($\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[S_{n,n}^2\right]/n^2$ respectivement).

Remarque. Le théorème 3.2.4 peut être vu comme une extension aux champs de v.a. de la proposition 12 donnée par Christophe Cuny et Magda Peligrad [CP12].

3.3. Preuves des résultats

Avant de rentrer dans les détails des preuves, donnons l'idée principale utilisée pour démontrer les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2. Grâce aux travaux de Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19] qui ont prouvé un TCL *quenched* pour les ortho-martingales, nous ramènerons la preuve de ces théorèmes à l'existence d'une approximation par ortho-martingale. On démontre le théorème 3.2.2 en premier, puisque la preuve du théorème 3.2.1 est très similaire exception faite des théorèmes ergodiques utilisés.

Notons par $\hat{T}$ et $\hat{S}$ les opérateurs sur L^2 définis par $\hat{T}f = f \circ T$, $\hat{S}f = f \circ S$.

3.3.1. Preuve du théorème 3.2.2

En utilisant la condition (3.7) et l'inégalité triangulaire, on a

$$f_{\mathbf{0}} := \sum_{u,v\geqslant 0} |\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})| < +\infty \text{ p.s.} \tag{3.14}$$

et

$$\|f_{\mathbf{0}}\|_\varphi \leqslant \sum_{u,v\geqslant 0} \|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})\|_\varphi < +\infty. \tag{3.15}$$

Remarquons que d'après (3.14), $\mathcal{P}_{1,1}(S_{n,m})$ converge presque sûrement. Ainsi en notant $D_{1,1}$ la limite ponctuelle presque sûre, on obtient

$$D_{1,1} = \lim_{n\wedge m\to+\infty} \mathcal{P}_{1,1}(S_{n,m}) = \sum_{u,v\geqslant 1} \mathcal{P}_{1,1}(X_{u,v}).$$

De plus, d'après l'inégalité triangulaire et (3.7), on déduit que

$$\sup_{n,m\geqslant 1} |\mathcal{P}_{1,1}(S_{n,m})| \leqslant \sum_{u,v\geqslant 1} |\mathcal{P}_{1,1}(X_{u,v})| \text{ p.s.}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\sum_{u,v\geqslant 1} |\mathcal{P}_{1,1}(X_{u,v})|\right]^2 \leqslant \left[\sum_{u,v\geqslant 1} \|\mathcal{P}_{1,1}(X_{u,v})\|_2\right]^2 < +\infty.$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\mathcal{P}_{1,1}(S_{n,m})$ converge vers $D_{1,1}$ p.s. et dans $L^2(P)$ lorsque $n \wedge m \to +\infty$.

Puisque $\mathbb{E}_{0,1}\left[\mathcal{P}_{1,1}(S_{n,m})\right] = 0$ p.s. et $\mathbb{E}_{1,0}\left[\mathcal{P}_{1,1}(S_{n,m})\right] = 0$ p.s., en définissant pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, $D_{i,j} = \hat{T}^{i-1}\hat{S}^{j-1}D_{1,1}$, on en déduit que $(D_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est un champ d'accroissements d'ortho-martingale. D'après l'expression $D_{1,1}$ ci-dessus,

$$D_{i,j} = \sum_{(u,v)\geqslant(i,j)} \mathcal{P}_{i,j}(X_{u,v}).$$

On utilise la décomposition de $S_{n,m}$ suivante (voir l'article de Magda Peligrad et Na Zhang [PZ18a]).

$$S_{n,m} - R_{n,m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathcal{P}_{i,j}(\sum_{u=i}^{n}\sum_{v=j}^{m} X_{u,v}) \tag{3.16}$$

où

$$R_{n,m} \ = \mathbb{E}_{n,0}\left[S_{n,m}\right] + \mathbb{E}_{0,m}\left[S_{n,m}\right] - \mathbb{E}_{0,0}\left[S_{n,m}\right].$$

Par conséquent

$$\frac{S_{n,m} - R_{n,m} - M_{n,m}}{\sqrt{nm}} = \frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\mathcal{P}_{i,j}(\sum_{u=i}^{n}\sum_{v=j}^{m} X_{u,v}) - D_{i,j}\Big).$$

D'après l'orthogonalité du champ d'accroissements d'ortho-martingale $(\mathcal{P}_{i,j}(\sum_{u=i}^{n}\sum_{v=j}^{m} X_{u,v}) - D_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ et la propriété de commutation de la filtration, on a

$$\frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}\left[(S_{n,m} - R_{n,m} - M_{n,m})^2\right] = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[\Big(\mathcal{P}_{i,j}(\sum_{u=i}^{n}\sum_{v=j}^{m} X_{u,v}) - D_{i,j}\Big)^2\right].$$

En appliquant le théorème 1 donné par Magda Peligrad and Dalibor Volný [PV19], nous savons que le TCL *quenched* est satisfait pour $M_{n,m}/\sqrt{nm}$. Ainsi, d'après le théorème 25.4 du livre de Patrick Billingsley [Bil12], il suffit de montrer que

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty} \frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}\left[(S_{n,m} - R_{n,m} - M_{n,m})^2\right] = 0 \ \text{ p.s.} \tag{3.17}$$

pour obtenir la convergence en loi désirée. On définit les opérateurs

$$Q_1(f) = \mathbb{E}_{0,\infty}[\hat{T}f]; \ Q_2(f) = \mathbb{E}_{\infty,0}[\hat{S}f]$$

Remarquons que Q_1 et Q_2 sont des opérateurs de Dunford-Schwartz qui commutent et on peut alors écrire

$$\mathbb{E}_{0,0}\left[\mathcal{P}_{i,j}(X_{u,v})\right]^2 = Q_1^i Q_2^j(\mathcal{P}_{0,0}(X_{u-i,v-j}))^2.$$

Après un simple calcul

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{0,0}\left[\Big(\mathcal{P}_{i,j}(\sum_{u=i}^{n}\sum_{v=j}^{m} X_{u,v}) - D_{i,j}\Big)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_{0,0}\left[\Big(\sum_{u=n+1}^{+\infty}\sum_{v=j}^{m}\mathcal{P}_{i,j}(X_{u,v}) + \sum_{u=i}^{+\infty}\sum_{v=m+1}^{+\infty}\mathcal{P}_{i,j}(X_{u,v})\Big)^2\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après des inégalités élémentaires, nous avons la borne suivante.

$$\frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}\left[(S_{n,m}-R_{n,m}-M_{n,m})^2\right]=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[\left(\mathcal{P}_{i,j}(\sum_{u=i}^{n}\sum_{v=j}^{m}X_{u,v})-D_{i,j}\right)^2\right]$$
$$\leqslant 2(I_{n,m}+II_{n,m}),$$

où nous avons utilisé les notations

$$I_{n,m}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^j\Big(\sum_{u=n+1-i}^{+\infty}\sum_{v=0}^{+\infty}|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})|\Big)^2$$

et

$$II_{n,m}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^j\Big(\sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{v=m+1-j}^{+\infty}|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})|\Big)^2.$$

On souhaite montrer la négligeabilité presque sûre de chaque terme. Par symétrie, on ne s'occupera que d'un seul de ces termes.
Soit c un entier fixé satisfaisant $0<c<n$. On découpe $I_{n,m}$ en deux parties.

$$\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n-c}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^j\Big(\sum_{u=n+1-i}^{+\infty}\sum_{v=0}^{+\infty}|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})|\Big)^2:=A_{n,m}(c) \tag{3.18}$$

et

$$\frac{1}{nm}\sum_{i=n-c+1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^j\Big(\sum_{u=n+1-i}^{+\infty}\sum_{v=0}^{+\infty}|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})|\Big)^2:=B_{n,m}(c). \tag{3.19}$$

Remarquons que

$$B_{n,m}(c)\leqslant\frac{1}{nm}\sum_{i=n-c+1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^jf_{\mathbf{0}}^2$$
$$=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^jf_{\mathbf{0}}^2-\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n-c}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^jf_{\mathbf{0}}^2,$$

où $f_{\mathbf{0}}$ est donné par (3.14).

Puisque Q_1 et Q_2 sont des opérateurs de Dunford-Schwartz qui commutent et que d'après (3.15) on a $\mathbb{E}\left[f_{\mathbf{0}}^2\ln(1+|f_{\mathbf{0}}|)\right]<+\infty$; alors en utilisant le théorème ergodique 1.2.4 pour les opérateurs de Dunford-Schwartz, on déduit que pour tout c fixé,

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty}\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n-c}\sum_{j=1}^{m}Q_1^iQ_2^jf_{\mathbf{0}}^2=g\text{ p.s.} \tag{3.20}$$

où

$$g=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-c}Q_1^i\left(\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Q_2^j(f_{\mathbf{0}}^2)\right).$$

Au moins l'une des applications S ou T étant ergodique, on supposera sans nuire à la généralité que la transformation S est ergodique. En appliquant le lemme 7.1 de Dedecker et al. [DMP14], on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Q_2^j(f_{\mathbf{0}}^2)=\mathbb{E}\left[f_{\mathbf{0}}^2\right]\text{ p.s. },$$

ce qui implique que g dans (3.20) est constante presque sûrement et $g = \mathbb{E}\left[f_{\mathbf{0}}^2\right]$.
Ainsi, pour tout $c > 0$

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty} B_{n,m}(c) = 0 \text{ p.s.}$$

Afin de montrer la négligeabilité du premier terme de la décomposition de $I_{n,m}$, on remarque que

$$A_{n,m}(c) \leqslant \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n-c}\sum_{j=1}^{m} Q_1^i Q_2^j f_{\mathbf{0}}^2(c) \quad \text{où } f_{\mathbf{0}}(c) = \sum_{u=c}^{+\infty}\sum_{v=0}^{+\infty} |\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})|.$$

De même, d'après le théorème ergodique 1.2.4 et le lemme 7.1 de Jerôme Dedecker et al. [DMP14], pour tout c fixé, on a

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty} \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n-c}\sum_{j=1}^{m} Q_1^i Q_2^j f_{\mathbf{0}}^2(c) = \mathbb{E}\left[f_{\mathbf{0}}^2(c)\right] \text{ p.s.} \tag{3.21}$$

De plus, d'après (3.14), on sait que $\lim_{c\to+\infty} |f_{\mathbf{0}}(c)| = 0$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{c\to+\infty}\lim_{n\wedge m\to+\infty} A_{n,m}(c) \leqslant \lim_{c\to+\infty} \mathbb{E}\left[f_{\mathbf{0}}^2(c)\right] = 0 \text{ p.s.}$$

Le théorème est prouvé. □

La preuve du théorème 3.2.1 est quasiment identique à celle du théorème 3.2.2 à ceci près qu'au lieu de faire appel au théorème 1.2.4, on utilisera le théorème 1.2.6.

3.3.2. Preuve du corollaire 3.2.3 et du théorème 3.2.4

Preuve du corollaire 3.2.3. D'après le théorème 3.2.2 et le théorème 25.4 dans l'ouvrage de Patrick Billingsley [Bil12], il suffit de prouver que les conditions de régularité (3.9) impliquent que

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty} \frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}\left[R_{n,m}^2\right] = 0 \text{ p.s.} \tag{3.22}$$

En utilisant le fait que la filtration est commutante, on trouve que

$$\mathbb{E}_{0,0}\left[R_{n,m}^2\right] = \mathbb{E}_{0,0}\left[\mathbb{E}_{n,0}\left[S_{n,m}\right]^2\right] + \mathbb{E}_{0,0}\left[\mathbb{E}_{0,m}\left[S_{n,m}\right]^2\right] - \mathbb{E}_{0,0}\left[S_{n,m}\right]^2 \tag{3.23}$$

et puisque $\mathbb{E}_{0,0}\left[S_{n,m}\right]^2 \leqslant \mathbb{E}_{0,0}\left[\mathbb{E}_{0,m}\left[S_{n,m}\right]^2\right]$ p.s., on a

$$\frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}\left[R_{n,m}^2\right] \xrightarrow[n\wedge m\to+\infty]{\text{p.s.}} 0 \qquad \text{d'après (3.9).}$$

□

Démontrons le théorème 3.2.4. Avant cela, commençons par établir trois lemmes techniques.

Lemme 3.3.1. *Soit $q \geqslant 2$. L'hypothèse (3.13) implique que*

$$\sum_{u\geqslant 1}\frac{1}{u^{1/q}}\sum_{v\geqslant 0}\|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})\|_q < +\infty. \tag{3.24}$$

Preuve. Dans cette preuve, nous noterons par $C_q > 0$ une constante pouvant dépendre de q dont la valeur nous importe peu et peut changer d'une ligne de calcul à une autre. D'après l'inégalité de Hölder et celle de Rosenthal pour les martingales (voir théorème 1.4.5), on a

$$\sum_{v\geqslant 1}\|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})\|_q = \sum_{v\geqslant 1}\|P_{-u,-\tilde{v}}(X_{0,0})\|_q \leqslant \sum_{n\geqslant 0}(2^n)^{\frac{q-1}{q}}\left(\sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1}\|P_{-u,-\tilde{v}}(X_{0,0})\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant C_q\sum_{n\geqslant 0}(2^n)^{\frac{q-1}{q}}\left\|\sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1}P_{-u,-\tilde{v}}(X_{0,0})\right\|_q \leqslant 2C_q\sum_{n\geqslant 0}(2^n)^{\frac{q-1}{q}}\|\mathbb{E}_{-u,-2^n}[X_{0,0}]\|_q.$$

Puisque la suite $(\|\mathbb{E}_{-u,-n}[X_{0,0}]\|_q)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, on en déduit que

$$(2^n)^{\frac{q-1}{q}}\|\mathbb{E}_{-u,-2^n}[X_{0,0}]\|_q \leqslant 2\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{\|\mathbb{E}_{-u,-k}[X_{0,0}]\|_q}{k^{1/q}}.$$

Donc

$$\sum_{v=1}^{+\infty}\|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})\|_q \leqslant C_q\sum_{k\geqslant 1}\frac{\|\mathbb{E}_{-u,-k}[X_{0,0}]\|_q}{k^{1/q}}. \tag{3.25}$$

Ainsi la relation (3.24) est satisfaite d'après (3.13), (3.25) et la stationnarité.
De plus, pour tout $u \geqslant 0$, on a aussi

$$\sum_{v=1}^{+\infty}\|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})\|_q < +\infty. \tag{3.26}$$

Les entiers m et n jouant des rôles symétriques, pour tout $v \geqslant 0$, on a

$$\sum_{u=1}^{+\infty}\|P_{\tilde{0},0}(X_{u,v})\|_q < +\infty. \tag{3.27}$$

□

Lemme 3.3.2. *L'hypothèse (3.12) implique que*

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty}\frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}[R_{n,m}^2] = 0 \ \ p.s. \tag{3.28}$$

Preuve. On commence par montrer que (3.12) implique la convergence suivante.

$$\frac{\mathbb{E}_{0,0}[S_{n,m}]^2}{nm} \to 0 \text{ p.s. lorsque } n\wedge m \to +\infty$$

On borne ce terme de la manière suivante.

$$\frac{|\mathbb{E}_{0,0}[S_{n,m}]|}{\sqrt{nm}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{m}|\mathbb{E}_{0,0}[X_{u,v}]|$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{u=1}^{c}\sum_{v=1}^{+\infty}\frac{|\mathbb{E}_{0,0}[X_{u,v}]|}{\sqrt{v}} + \sum_{u=c+1}^{+\infty}\sum_{v=1}^{+\infty}\frac{|\mathbb{E}_{0,0}[X_{u,v}]|}{\sqrt{uv}}$$
$$\leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}\sup_{1\leqslant u\leqslant c}\sum_{v=1}^{+\infty}\frac{|\mathbb{E}_{0,0}[X_{u,v}]|}{\sqrt{v}} + \sum_{u=c+1}^{+\infty}\sum_{v=1}^{+\infty}\frac{|\mathbb{E}_{0,0}[X_{u,v}]|}{\sqrt{uv}}$$

Or, (3.12) implique que

$$\sum_{u=1}^{+\infty}\sum_{v=1}^{+\infty}\frac{|\mathbb{E}_{0,0}[X_{u,v}]|}{\sqrt{uv}} < +\infty \text{ p.s.}$$

Donc,

$$\frac{|\mathbb{E}_{0,0}[S_{n,m}]|}{\sqrt{nm}} \to 0 \text{ p.s.} \tag{3.29}$$

en laissant $n \to +\infty$ puis $c \to +\infty$.

D'après (3.23) et la symétrie des rôles de m et de n, le théorème sera démontré si on peut établir que

$$\frac{\mathbb{E}_{0,0}\left[\mathbb{E}^2_{\tilde{0},m}\left[S_{n,m}\right]\right]}{nm} \xrightarrow[n\wedge m\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Par (3.29) ceci est équivalent à

$$\frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}\left[\left(\mathbb{E}_{0,m}\left[S_{n,m}\right]-\mathbb{E}_{0,0}\left[S_{n,m}\right]\right)^2\right] \xrightarrow[n\wedge m\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

On commence par la décomposition suivante du terme général.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{0,0}\left[\left(\mathbb{E}_{0,m}\left[S_{n,m}\right]-\mathbb{E}_{0,0}\left[S_{n,m}\right]\right)^2\right] &= \sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[P_{0,\tilde{j}}\left(\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=j}^{m}X_{u,v}\right)\right]^2\\ &= \sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[\widehat{S}^j\left(P_{0,\tilde{0}}(\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=0}^{m-j}X_{u,v})\right)^2\right]\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{nm}\mathbb{E}_{0,0}\left[\left(\mathbb{E}_{0,m}[S_{n,m}]-\mathbb{E}_{0,0}[S_{n,m}]\right)^2\right] &= \frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[\widehat{S}^j\left(\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=0}^{m-j}P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})\right)^2\right]\\ &\leqslant \frac{2}{mn}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[\widehat{S}^j\left(\sum_{u=1}^{c}\sum_{v=0}^{m-j}|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})|\right)^2\right]\\ &+\frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[\widehat{S}^j\left(\sum_{u=c+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{v=0}^{m-j}|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})|\right)^2\right]\\ &= I_{n,m,c}+II_{n,m,c}.\end{aligned}$$

On définit l'opérateur

$$Q_0(f) = \mathbb{E}_{0,0}[\widehat{S}f],$$

et on traite le premier terme $I_{n,m,c}$. Pour c fixé

$$\begin{aligned}I_{n,m,c} &\leqslant \frac{2c^2}{mn}\sup_{1\leqslant u\leqslant c}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}_{0,0}\left[\widehat{S}^j\left(\sum_{v=0}^{+\infty}|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})|\right)^2\right]\\ &= \frac{2c^2}{mn}\sup_{1\leqslant u\leqslant c}\sum_{j=1}^{m}Q_0^j\left[\left(\sum_{v=0}^{+\infty}|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})|\right)^2\right].\end{aligned}$$

D'après (3.26), la fonction

$$g(u) = \sum_{v=0}^{+\infty}|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})|$$

est de carré intégrable. D'après le théorème ergodique pour les opérateurs de Dunford-Schwartz (voir le théorème 11.4 dans Eisner et al. [Eis+15] ou le corollaire 3.8 dans le chapitre 3 de l'ouvrage d'Ulrich Krengel [Kre85] et le lemme 7.1 dans l'article de Jérôme Dedecker et al. [DMP14],

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Q_0^j\Big(g^2(u)\Big) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \mathbb{E}[g^2(u)|\mathcal{I}_S] \text{ p.s.}$$

où $\mathcal{I}_S$ est la tribu invariante associée à la transformation S et puisque c est fixé,

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty} I_{n,m,c} = 0 \text{ p.s.}$$

Afin de montrer la négligeablilité du second terme, on remarque que

$$II_{n,m,c} \leqslant \frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m} Q_0^j\Big[\Big(\sum_{u=c}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{v=0}^{+\infty}|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})|\Big)^2\Big].$$

On note

$$h(c) = \sum_{u=c}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{v=0}^{+\infty}|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})|.$$

Alors, d'après (3.24), on sait que

$$\sum_{u=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{v=0}^{+\infty}\|P_{0,\tilde{0}}(X_{u,v})\|_2 < +\infty. \tag{3.30}$$

Donc, $\mathbb{E}(h^2(1)) < +\infty$. Comme précédemment, en appliquant le théorème ergodique pour les opérateurs de Dunford-Schwartz (voir le théorème 11.4 dans Eisner et al. [Eis+15] ou le corollaire 3.8 dans le chapitre 3 du livre d'Ulrich Krengel [Kre85]), on obtient

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Q_0^j(h^2(c)) \to \mathbb{E}\left[h^2(c)\,|\mathcal{I}_S\right].$$

Donc, par (3.30)

$$\lim_{c\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Q_0^j(h^2(c)) = 0 \text{ p.s.}$$

□

Lemme 3.3.3. *Soit $q \geqslant 2$. L'hypothèse (3.13) implique*

$$\sum_{u,v\geqslant 0}\|\mathcal{P}_{0,0}(X_{u,v})\|_q < +\infty, \tag{3.31}$$

ce qui implique (3.7) lorsque $q > 2$.

Preuve. En appliquant deux fois l'inégalité de Rosenthal pour les martingales (voir théorème 1.4.5 dans l'annexe), pour tous entiers $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, on a

$$\sum_{k=a}^{b}\sum_{k'=c}^{d}\|\mathcal{P}_{-k,-k'}(X_{0,0})\|_q^q \leqslant C_q\|\sum_{k=a}^{b}\sum_{k'=c}^{d}\mathcal{P}_{-k,-k'}(X_{0,0})\|_q^q. \tag{3.32}$$

De plus, remarquons que pour tous entiers $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, on a

$$\|\sum_{k=a}^{b}\sum_{k'=c}^{d}\mathcal{P}_{-k,-k'}(X_{0,0})\|_q^q \leqslant 4^q\|\mathbb{E}_{-a,-c}[X_{0,0}]\|_q^q. \tag{3.33}$$

Alors, d'après l'inégalité d'Hölder, (3.32) et (3.33), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{u,v\geqslant 1}\|\mathcal{P}_{-u,-v}(X_{0,0})\|_q &\leqslant \sum_{n,m\geqslant 0}(2^n2^m)^{\frac{q-1}{q}}\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k'=2^m}^{2^{m+1}-1}\|\mathcal{P}_{-k,-k'}(X_{0,0})\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leqslant 4C_q\sum_{n,m\geqslant 0}(2^n2^m)^{\frac{q-1}{q}}\|\mathbb{E}_{-2^n,-2^m}[X_{0,0}]\|_q.\end{aligned}$$

Puisque $\|\mathbb{E}_{-2^n,-2^m}[X_{0,0}]\|$ décroît en n et m, on trouve que

$$(2^n2^m)^{\frac{q-1}{q}}\|\mathbb{E}_{-2^n,-2^m}[X_{0,0}]\|_q \leqslant 4\sum_{u=2^{n-1}}^{2^n-1}\sum_{v=2^{m-1}}^{2^m-1}\frac{\|\mathbb{E}_{-u,-v}[X_{0,0}]\|_q}{(uv)^{1/q}}.$$

Par conséquent, d'après les inégalités précédentes, on a prouvé que (3.13) implique

$$\sum_{u,v\geqslant 1}\|\mathcal{P}_{-u,-v}(X_{0,0})\|_q < +\infty.$$

De la même manière, on a

$$\sum_{u=1}^{+\infty}\|\mathcal{P}_{-u,0}(X_{0,0})\|_q < +\infty \text{ et } \sum_{v=1}^{+\infty}\|\mathcal{P}_{0,-v}(X_{0,0})\|_q < +\infty.$$

Et donc par stationnarité (3.31) est satisfaite. □

Preuve du théorème 3.2.4. (a) est un conséquence du théorème 3.2.1 et des lemmes 3.3.2 et 3.3.3, appliqués à $q = 2$.

Pour montrer (b), on utilise à la fois le théorème 3.2.2 et les lemmes 3.3.2.

Finalement (c) est une conséquence de 3.2.2 et des lemmes 3.3.2 et 3.3.3, appliqués à $q > 2$. □

3.4. Champs d-dimensionnels : $d \geqslant 3$

Dans cette partie, nous généralisons nos résultats aux champs des variables aléatoires indicés par $\mathbb{Z}^d$, $d > 2$. Considérons un champ stationnaire $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité canonique $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et on définit les filtrations $\mathcal{F}_{\boldsymbol{u}} = \sigma(\xi_{\boldsymbol{j}} : \boldsymbol{j} \leqslant \boldsymbol{u})$. On dit que la filtration est commutante si $\mathbb{E}_{\boldsymbol{u}}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}}[X]] = \mathbb{E}_{\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a}}[X]$, où le minimum est calculé coordonnée par coordonnée et on note $\mathbb{E}_{\boldsymbol{u}}[X] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\boldsymbol{u}}]$. On définit

$$X_{\boldsymbol{m}} = f((\xi_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\leqslant\boldsymbol{m}}) \text{ et } S_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{1}\leqslant\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{k}}X_{\boldsymbol{u}}. \tag{3.34}$$

La variable aléatoire $X_{\mathbf{0}}$ est supposée centrée et de carré intégrable. On définit aussi les translations canoniques T_i et

$$X_{\boldsymbol{k}} = f(T_1^{k_1} \circ ... \circ T_d^{k_d}(\xi_{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u} \leqslant \mathbf{0}}).$$

Soit d une fonction, on définit

$$D_{\boldsymbol{m}} = d((\xi_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j} \leqslant \boldsymbol{m}}) \text{ et } M_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{k}} D_{\boldsymbol{u}}. \tag{3.35}$$

En supposant son intégrabilité, on dit que $(D_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ d'accroissements d'ortho-martingale si $\mathbb{E}_{\boldsymbol{a}}[D_{\boldsymbol{m}}] = 0$ dès qu'au moins l'une des coordonnées de $\boldsymbol{a}$ est strictement inférieure à la coordonnée correspondante de $\boldsymbol{m}$. Rappelons la définition de l'opérateur de projection en dimension d. En utilisant le fait que la filtration commute, il est utile de définir les projections sur chaque coordonnée $\mathcal{P}_{\boldsymbol{u}}$ de la manière suivante.

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{u}}(X) := P_{\boldsymbol{u}(1)} \circ P_{\boldsymbol{u}(2)} \circ ... \circ P_{\boldsymbol{u}(d)}(X),$$

avec

$$P_{\boldsymbol{u}(j)}(Y) := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{\boldsymbol{u}}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{e}_j}], \tag{3.36}$$

où $\boldsymbol{e}_j$ est le multi-indice dont toutes les composantes sont nulles sauf la j-ième qui vaut 1. Par exemple, si $d = 3$, $P_{\boldsymbol{u}(2)}(Y) = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{u_1,u_2,u_3}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{u_1,u_2-1,u_3}]$.

On dit qu'un champ $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires admet une approximation par ortho-martingale s'il existe un champ d'accroissements d'ortho-martingale $(D_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d}$ tel que pour presque tout $\omega \in \Omega$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}^{\omega}\left[(S_{\boldsymbol{n}} - M_{\boldsymbol{n}})^2\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n} \to +\infty]{} 0, \tag{3.37}$$

où on rappelle que $|\boldsymbol{n}| = n_1 \dots n_d$.

Soit $R_{\boldsymbol{n}}$ le reste de la décomposition de $S_{\boldsymbol{n}}$ tel que

$$S_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{n}} \mathcal{P}_{\boldsymbol{u}}(S_{\boldsymbol{n}}) + R_{\boldsymbol{n}}.$$

Dans ce cadre, on a le théorème suivant.

Théorème 3.4.1. *On suppose que $(X_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d}$ est donné par (3.34), qu'il existe un entier $i \in [\![1, d]\!]$, tel que T_i soit ergodique et que les filtrations commutent. De plus on suppose que*

$$\sum_{\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_2 < +\infty. \tag{3.38}$$

Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$(S_{n,\dots,n} - R_{n,\dots,n})/n^{d/2} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega}.$$

Théorème 3.4.2. *De plus, si on remplace l'hypothèse (3.38) par l'hypothèse plus forte suivante.*

$$\sum_{\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi} < +\infty, \tag{3.39}$$

où $\Phi(x) = x^2(\ln(1 + |x|))^{d-1}$ et $\|\cdot\|_{\Phi}$ est défini par (3.4).
Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}}(S_{\boldsymbol{n}} - R_{\boldsymbol{n}}) \xrightarrow[\boldsymbol{n} \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega}.$$

Corollaire 3.4.3. *On suppose que les hypothèses du théorème 3.4.2 sont satisfaites et pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant d$ on a*

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}_j}[S_{\boldsymbol{n}}]^2\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{p.s.} 0. \tag{3.40}$$

où la j-ième coordonnée de $\boldsymbol{n}_j \in \mathbb{Z}^d$ est nulle et les autres sont égales aux coordonnées respectives de $\boldsymbol{n}$. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$S_{\boldsymbol{n}}/\sqrt{|\boldsymbol{n}|} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega}. \tag{3.41}$$

Si les hypothèses du théorème 3.4.1 et (3.40) sont satisfaites avec $\boldsymbol{n} = (n, n, \ldots, n)$, alors pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{n^{d/2}} S_{n,\ldots,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega}. \tag{3.42}$$

Théorème 3.4.4. *Supposons que $(X_{\boldsymbol{n}})_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est donné par (3.34) et que les filtrations commutent. Supposons , de plus, qu'il existe un entier i, $1 \leqslant i \leqslant d$, tel que T_i soit ergodique et qu'il existe $q \geqslant 2$ satisfaisant*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{1}} \frac{\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}[X_{\boldsymbol{u}}]\|_q}{|\boldsymbol{u}|^{1/q}} < +\infty. \tag{3.43}$$

(a) Si $q = 2$, la convergence quenched (3.42) est satisfaite
(b) Si $q > 2$, la convergence quenched (3.41) est satisfaite.

De la même manière que pour le cas des champs 2-dimensionnels, on commence la preuve du théorème 3.4.2, puisque la preuve du théorème 3.4.1 est identique à la première à ceci près que l'on utilise d'autres théorèmes ergodiques.

3.4.1. Preuve du théorème 3.4.2 et de ses corollaires

Preuve du théorème 3.4.2. La preuve de ce théorème suit les mêmes idées que dans le cas 2-dimensionnel. Clairement, en utilisant la commutativité de la filtration, l'argument d'approximation par ortho-martingale utilisé dans la preuve du théorème 3.2.2 reste inchangé en remplaçant $\mathbb{Z}^2$ par $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geqslant 3$. La définition de l'ortho-martingale est aussi évidente. La seule différence majeure dans la preuve réside dans la preuve de l'existence de la limite dans (3.20) et (3.21) lorsque $\min_{1\leqslant i\leqslant d} n_i \to +\infty$, afin d'appliquer le théorème 1.2.4, il faut supposer que $\mathbb{E}\left[f_{\mathbf{0}}^2 \left(\ln(1+|f_{\mathbf{0}}|)\right)^{d-1}\right] < +\infty$, ce qui résulte de (3.39).

En notant par $\hat{T}_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, les opérateurs définis par $\hat{T}_i f = f \circ T_i$. Alors pour $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$, on pose $Q^{\boldsymbol{i}} = \Pi_{k=1}^d Q_k^{i_k}$ où $(Q_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ sont les opérateurs associés aux translations canoniques $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ définis comme suit.

$$Q_1(f) = \mathbb{E}_{0,\infty,\ldots,\infty}[\hat{T}_1 f], Q_2(f) = \mathbb{E}_{\infty,0,\infty,\ldots,\infty}[\hat{T}_2 f], \ldots, Q_d(f) = \mathbb{E}_{\infty,\ldots,\infty,0}[\hat{T}_d f].$$

Alors, on majore la quantité suivante

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[|S_{\boldsymbol{n}} - R_{\boldsymbol{n}} - M_{\boldsymbol{n}}|^2\right]$$

par la somme de d termes dont le premier terme est de la forme

$$I_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{i}} \left(\sum_{u=n_1+1-i_1}^{+\infty} \sum_{\boldsymbol{v}\geqslant\mathbf{0}} |\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{u,\boldsymbol{v}})|\right)^2 \quad \text{où } \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^{d-1}.$$

Sans perte de généralité, on ne traitera que le premier terme. Soit c un entier fixé tel que $0 < c < n_1$, en décomposant $I_{\boldsymbol{n}}$ en deux parties, on a

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\sum_{i_1=1}^{n_1-c}\sum_{\boldsymbol{i'}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n'}}\boldsymbol{Q^i}\left(\sum_{u=n_1+1-i_1}^{+\infty}\sum_{\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}}|\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(X_{u,\boldsymbol{v}})|\right)^2 := A_{\boldsymbol{n}}(c)$$

et

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\sum_{i_1=n_1-c+1}^{n_1}\sum_{\boldsymbol{i'}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n'}}\boldsymbol{Q^i}\left(\sum_{u=n_1+1-i_1}^{+\infty}\sum_{\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}}|\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(X_{u,\boldsymbol{v}})|\right)^2 := B_{\boldsymbol{n}}(c)$$

où $\boldsymbol{i'} = (i_2, \dots, i_d)$ et $\boldsymbol{n'} = (n_2, \dots, n_d)$. Ensuite, on continue la preuve de la même manière que pour montrer la negligeabilité de $A_{n,m}(c)$ et de $B_{n,m}$ (voir (3.18) et (3.19) dans la preuve du théorème 3.2.2). □

Le théorème 3.4.1 est obtenu de la manière similaire en appliquant le théorème 1.2.6 à la place du théorème 1.2.4.

Preuve du corollaire 3.4.3. La négligeabilité du reste $R_{\boldsymbol{n}}$ peut être montrée de la même manière que la négligeabilité du reste $R_{n,m}$ dans la preuve corollaire 3.2.3. □

Preuve du théorème 3.4.4. De la même façon que pour prouver (3.45) et (3.46) dans la démonstration du théorème 3.2.4, on peut montrer que la condition (3.43) implique ce qui suit.

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{1}}\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{u}|}}\sum_{v\geqslant 0}\|P_{\boldsymbol{0}(d)}(X_{\boldsymbol{u},v})\|_q < +\infty, \tag{3.44}$$

$$\sum_{\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}}\|P_{\boldsymbol{0}}(X_{u,\boldsymbol{v}})\|_q < +\infty \tag{3.45}$$

et

$$\sum_{u\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}}\|P_{\boldsymbol{0}}(X_{u,\boldsymbol{v}})\|_q < +\infty, \tag{3.46}$$

où $\boldsymbol{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^{d-1}$ et $P_{\boldsymbol{0}} = P_{\boldsymbol{0}(2)} \circ P_{\boldsymbol{0}(3)} \circ \cdots \circ P_{\boldsymbol{0}(d)}$ avec $P_{\boldsymbol{0}(j)}$ défini par (3.36).

Afin de démontrer le corollaire, nous aurons besoin dans un premier temps, de démontrer que

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(k)}}[S_{\boldsymbol{n}}]^2\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0, \tag{3.47}$$

où k coordonnées parmi toutes celles de $\boldsymbol{n}^{(k)} \in \mathbb{Z}^d$ correspondent aux coordonnées de $\boldsymbol{n}$ et les $d-k$ autres coordonnées sont nulles, pour tout $0 \leqslant k \leqslant d-1$. Raisonnons par récurrence.

Dans un premier temps, nous établissons que

$$\frac{\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}^2[S_{\boldsymbol{n}}]}{|\boldsymbol{n}|} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0 \text{ et } \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\mathbb{E}_{0,\dots,0,n_d}[S_{\boldsymbol{n}}]^2\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0,$$

ce qui se fait en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.2.4, ainsi que (3.43) et (3.44). En d'autres termes, (3.47) est satisfaite pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons, maintenant, que la propriété soit vraie pour un certain $k < d-1$. Alors elle est toujours vraie pour $k = d-1$ d'après (3.45) et (3.46). Le théorème est donc prouvé. □

3.5. Exemples

Donnons, dans cette section, des exemples d'applications de nos résultats à des champs linéaires et de Volterra. Le but de cette partie est d'obtenir des théorèmes centraux limite *quenched* avec des conditions moins fortes que celles énoncées par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19], où les auteurs ont utilisé une décomposition martingale-cobord. Soit $q > 2$ et supposons que $d \geqslant 2$. Dans de cette partie, nous noterons par $C_q > 0$ une constante qui peut dépendre de q mais dont la valeur nous importe peu et qui peut changer d'une ligne à une autre.

3.5.1. Champ linéaire

Exemple 3.5.1. (Champ linéaire) Soit $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.i.i.d. centrées telles que $\mathbb{E}\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^q\right] < +\infty$. Pour tout $\boldsymbol{k} \geqslant \boldsymbol{0}$, on définit

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{0}} a_{\boldsymbol{j}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}} \ .$$

On suppose que

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geqslant \boldsymbol{1}} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/q}}\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{3.48}$$

La conclusion du théorème 3.4.4 est satisfaite.

Preuve. Puisque

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{1}}[X_{\boldsymbol{k}}] = \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}},$$

par indépendance des $\xi_{\boldsymbol{n}}$ et l'inégalité de Rosenthal (voir théorème 1.4.5), on a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_{\boldsymbol{1}}[X_{\boldsymbol{k}}]\|_q^q &= \Big\|\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}\Big\|_q^q \\
&\leqslant C_q\left[\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2\mathbb{E}[\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}^2]\Big)^{\frac{q}{2}} + \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} \mathbb{E}\left[|a_{\boldsymbol{j}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}|^q\right]\right] \\
&\leqslant C_q\left[\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2\Big)^{\frac{q}{2}}\mathbb{E}\left[\xi_{\boldsymbol{0}}^2\right]^{\frac{q}{2}} + \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} |a_{\boldsymbol{j}}|^q\mathbb{E}\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^q\right]\right].
\end{aligned}$$

Par la décroissance des normes dans ℓ_p, on a

$$\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} |a_{\boldsymbol{j}}|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{E}_{\boldsymbol{1}}(X_{\boldsymbol{k}})\|_q \leqslant C_q\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc la propriété (3.43) est une conséquence de (3.48). D'où le résultat donné par le théorème 3.4.4. □

Remarque. Pour le cas $d = 2$, on peut supposer que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites.

$$\sum_{\boldsymbol{j} \geqslant \boldsymbol{0}} |a_{\boldsymbol{j}}| < +\infty \tag{3.49}$$

et

$$\sum_{\boldsymbol{k} \geqslant \boldsymbol{1}} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/2}} \Big(\sum_{\boldsymbol{j} \geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{3.50}$$

(a) Si on suppose que $\mathbb{E}\left[\xi_{\boldsymbol{0}}^2\right] < +\infty$, alors, d'après le (a) du théorème 3.2.4, la convergence *quenched* (3.11) est satisfaite.
(b) Si on suppose que $\mathbb{E}\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^2 \ln(1 + |\xi_{\boldsymbol{0}}|)\right] < +\infty$, d'après le (b) du théorème 3.2.4, la convergence *quenched* (3.10) est satisfaite.

Remarquons que (3.49) et (3.50) sont vérifiées dans le cas où

$$a_{u,v} = \frac{1}{uv} \frac{1}{h(u)g(v)},$$

avec h, g des fonctions à croissance lente satisfaisant

$$\sum_{u \geqslant 1} \frac{1}{uh(u)} < +\infty \text{ et } \sum_{v \geqslant 1} \frac{1}{vg(v)} < +\infty.$$

De plus, (3.49) n'est pas suffisant pour obtenir la convergence *quenched* dans (a) (voir, pour $d = 1$, les travaux de Dalibor Volný et Michael Woodroofe [VW10]).

3.5.2. Champ de Volterra

Exemple 3.5.2. (Champ de Volterra) Soit $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.i.i.d. centrées telles que $\mathbb{E}\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^q\right] < +\infty$. Pour tout $\boldsymbol{k} \geqslant \boldsymbol{0}$, on définit

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \geqslant (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}} \xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}.$$

où $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$ sont des réels $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}} = 0$ et $\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2 < +\infty$. De plus, on suppose que

$$\sum_{\boldsymbol{k} \geqslant \boldsymbol{1}} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/q}} \Big(\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \geqslant (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}) \\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2 \Big)^{1/2} < +\infty. \tag{3.51}$$

Alors la conclusion du théorème 3.4.4 est satisfaite.

Avant de démontrer cette assertion, nous rappelons le théorème suivant qui est un résultat de découplage pour les U-statistiques, qui peut être trouvée à la page 99, théorème 3.1.1, du livre de Victor de la Peña et Evariste Giné [PG99].

Théorème 3.5.3 (Inégalité de découplage)**.** *Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite finie de n variables aléatoires indépendantes et soit $(X_i^k)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $k = 1, \ldots, m$, m copies indépendantes de ces suites. Pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_m) \in I_n^m$, soit $h_{i_1,\ldots,i_m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $E\left[|h_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})|\right] < +\infty$. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction croissante et convexe telle que $E\left[f\left(|h_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})|\right)\right] < +\infty$ pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_m) \in I_n^m$, où*

$$I_n^m = \{(i_1, \ldots, i_m) : i_j \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i_j \leqslant n, i_j \neq i_k, \text{ si } j \neq k\}.$$

Alors, il existe $C_m > 0$ tel que

$$E\left[f\left(\left|\sum_{I_n^m} h_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})\right|\right)\right] \leqslant E\left[f\left(C_m\left|\sum_{I_n^m} h_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1}^1,\dots,X_{i_m}^m)\right|\right)\right].$$

Preuve du théorème 3.5.2. Remarquons que

$$\mathbb{E}_{\mathbf{1}}\left[X_{\boldsymbol{k}}\right] = \sum_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}.$$

Soit $(\xi'_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\xi''_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ deux copies indépendantes de $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$. D'après l'indépendance et le fait que $a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}} = 0$, en appliquant l'inégalité de découplage ainsi que l'inégalité de Rosenthal (respectivement théorème 3.5.3 et théorème 1.4.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}\left[X_{\boldsymbol{k}}\right]\|_q^q &= \left\|\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}\right\|_q^q \leqslant C_2\left\|\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi'_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi''_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}\right\|_q^q \\
&\leqslant C_q\Bigg[\Bigg(\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2\mathbb{E}\left[\left(\xi'_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi''_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}\right)^2\right]\Bigg)^{\frac{q}{2}} + \sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} |a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}|^q\mathbb{E}\left[|\xi'_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi''_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}|^q\right]\Bigg] \\
&\leqslant C_q\Bigg[\Bigg(\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2\Bigg)^{\frac{q}{2}}\mathbb{E}[\xi_{\mathbf{0}}^2]^q + \sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} |a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}|^q\mathbb{E}\left[|\xi_{\mathbf{0}}|^q\right]^2\Bigg].
\end{aligned}$$

La première inégalité est donnée par le théorème 3.5.3 tandis que la seconde est donnée par le théorème 1.4.5.

De même, d'après la décroissance des normes dans ℓ_p, on a

$$\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}[X_{\boldsymbol{k}}]\|_q \leqslant C_q\Bigg(\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Et on obtient donc les résultats du théorème 3.4.4. □

4. Théorèmes centraux limite fonctionnels quenched sous la condition de Hannan

Dans ce chapitre, nous établissons la validité d'un théorème central limite fonctionnel dans le cadre du chapitre précédent. Suite à cela nous établirons des versions fonctionnelles de ces résultats. Toutefois, nous commençons par étendre la méthode d'approximation par martingale-cobord au cas des champs d-dimensionnels, $d \geqslant 2$.

4.1. Décomposition martingale-cobord multi-dimensionnelle

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.3.2, une méthode classique pour obtenir une approximation par ortho-martingale consiste à faire usage d'une décomposition martingale-cobord.

Afin d'obtenir des théorèmes limite pour les champs, il est nécessaire d'étendre cette méthode à ces derniers. Mohamed El Machkouri et Davide Giraudo [EMG16], donnent une version spatiale de la définition 1.1.11. Établissons tout d'abord le cadre dans lequel on va définir la notion de décomposition martingale-cobord. On considère des transformations $T_1, \ldots, T_d$ qui commutent et qui conservent la mesure et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Ici, nous considérons une filtration commutante $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} = (T^{-\boldsymbol{n}}\mathcal{F}_{\boldsymbol{0}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ où $\mathcal{F}_{\boldsymbol{0}}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 4.1.1 (Décomposition martingale-cobord d-dimensionnelle)**.** On dit que le champ $(f \circ T^{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ admet une décomposition martingale-cobord, s'il existe des fonctions $\mathcal{F}_{\boldsymbol{0}}$-mesurables m_J, $\varnothing \subset J \subsetneq [\![1, d]\!]$ et un cobord $g \circ \prod_{i=1}^{d} (I - T_i)$ tels que

$$f = \sum_{\varnothing \subset J \subsetneq [\![1,d]\!]} m_J \circ \prod_{j\in J} (I - T_j) + g \circ \prod_{i=1}^{d} (I - T_i) \tag{4.1}$$

où les processus $(m_J \circ \prod_{j\in J^c} T_j^{n_j})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{d-|J|}}$ sont des ortho-martingales pour tout sous-ensemble $J \subsetneq [\![1, d]\!]$.

Tout comme pour le cas uni-dimensionnel, le terme $g \circ \prod_{i=1}^{d} (I - T_i)$ est appelée cobord ; cependant, cette décomposition diffère du cas uni-dimensionnel en ceci que les processus $\left(m_J \circ \prod_{j\in J}^{d} (I - T_j) \circ T^{\boldsymbol{n}}\right)_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ ne sont pas nécessairement des ortho-martingales. Toutefois ces termes se comportent comme des martingales dans certaines directions et comme des co-bord unidimensionnel dans chacune des autres. Ces objets, bien que plus compliqués à traiter que les ortho-martingales, sont suffisamment réguliers pour pouvoir obtenir des théorèmes limite.

Mentionnons, ici, des théorèmes importants concernant les décompositions martingale-cobords. Le premier nous permet d'obtenir une décomposition sous certaines conditions et est la généralisation au cas spatial de la décomposition (1.9). Elle fut démontrée par Michael Lin et Guy

Cohen [CL20]. Si $U_1, \dots, U_d$ sont des contractions [1] ergodiques en moyenne (c.f. Définition 1.2.2) d'un espace de Banach H, alors

$$H = \overline{\sum_{i=1}^{d} F(U_i)} \oplus \overline{\prod_{j=1}^{d} (I - U_j)H}. \tag{4.2}$$

Tout comme pour le cas uni-dimensionnel, cette décomposition ergodique permet de déduire une décomposition martingale-cobord approximante.

Un deuxième exemple de condition suffisante pour obtenir une décomposition martingale-cobord d'un champ est celle donnée par Mikhaïl Gordin [Gor09] qui fut le premier à étudier cette décomposition dans le cas multi-dimensionnel. Dans son article, l'auteur considère des transformations $T_1, \dots, T_d$ préservant la mesure et complètement commutantes, c'est à dire que leurs opérateurs de Koopman associés (notés $U_1, \dots, U_d$) ainsi que les opérateurs adjoints de ces derniers commutent entre eux, et il obtient que sous la convergence dans un espace $L^p, p \in [1, +\infty]$ de la moyenne des sommes partielles

$$\sum_{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{n} \leqslant \boldsymbol{N}-\mathbf{1}} (U_1^{n_1} \cdots U_d^{n_d})^* f, \tag{4.3}$$

le processus $(f \circ T^{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d}$ admet une décomposition martingale-cobord, où $f \in L^p$ tel que $\mathbb{E}\left[f | \mathcal{I}_{\{k\}}\right], k \in [\![1, d]\!]$, $\mathcal{I}_S$ étant la tribu invariante (c.f. section 1.2) de la transformation $\prod_{i \in S} T_i$.

Remarquons que Mohamed El Machkouri et Davide Giraudo [EMG16], Davide Giraudo [Gir18] ainsi que Dalibor Volný [Vol18] ont tous obtenu des conditions suffisantes pour obtenir la décomposition martingale-cobord (4.1).

4.2. Résultats principaux

Dans cette partie, nous énonçons et démontrons la version fonctionnelle du théorème central limite *quenched* 3.2.4. Ce résultat, et ceux qui suivent, sont issus d'un article en collaboration entre Na Zhang, Lucas Reding et Magda Peligrad [ZRP19]. Remarquons que pour $d = 1$, le théorème central limite fonctionnel *quenched* fut établi par Christophe Cuny et Dalibor Volný [CV13].

Déterminons le cadre dans lequel nous souhaitons présenter ces résultats. Tout comme pour le chapitre précédent, on commence par énoncer et démontrer les résultats en dimension $d = 2$ puis on les étendra pour un d quelconque par la suite.

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un champ stationnaire $(\xi_{n,m})_{n,m \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires définies sur cet espace. Par la suite, on conservera les notations du chapitre précédent, c'est à dire que pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, on définit les tribus $\mathcal{F}_{\infty,j} = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{n,j}$, $\mathcal{F}_{i,\infty} = \bigvee_{m \in Z} \mathcal{F}_{i,m}$, $\mathcal{F}_{\infty,\infty} = \bigvee_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{i,j}$ ainsi que la famille de tribus définie comme suit

$$\mathcal{F}_{k,\ell} = \sigma(\xi_{j,u} : j \leqslant k,\ u \leqslant \ell),$$

et que l'on suppose être une filtration commutante.

1. Opérateurs linéaires dont la norme est inférieure ou égale à 1.

On définit de manière canonique le champ de v.a.$(\boldsymbol{\xi_u})_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^2}$ sur l'espace de probabilité $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ engendrée par les pavés mesurables et on introduit les opérateurs de décalage T et S (resp. décalage vertical et décalage horizontal) que l'on a été amené à rencontrer dans le chapitre précédent et dont on suppose qu'au moins l'un des deux est ergodique.

Nous définissons, maintenant, le champ stationnaire $(X_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^2}$ de v.a. de la manière suivante. On considère une fonction mesurable f à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$, et on pose

$$X_{j,k} = f(T^j S^k(\boldsymbol{\xi}_{a,b})_{a\leqslant 0, b\leqslant 0}). \tag{4.4}$$

On suppose que la variable aléatoire $X_{0,0}$ est centrée et de carré intégrable. On notera

$$S_{k,j} = \sum\nolimits_{u,v=1}^{k,j} X_{u,v},\ \mathbb{P}^{\omega}(\cdot) = \mathbb{E}\left[\cdot|\mathcal{F}_{0,0}\right](\omega) \text{ pour tout } \omega\in\Omega$$

et nous noterons par $\mathbb{E}^{\omega}$ l'espérance correspondant à la mesure de probabilité $\mathbb{P}^{\omega}$.
Pour $(s,t)\in[0,1]^2$, on définit le processus stochastique

$$W_{n,m}(t,s) = \frac{1}{\sqrt{nm}} S_{\lfloor nt\rfloor,\lfloor ms\rfloor}.$$

On considère alors le drap Brownien standard à 2 dimensions $(W(t,s))_{(t,s)\in[0,1]^2}$ et on s'intéresse à la convergence en loi de $(W_{n,m}(t,s))_{t,s\in[0,1]}$ vers $(W(t,s))_{t,s\in[0,1]}$. dans $D([0,1]^2)$ muni de la topologie associée à norme infinie et lorsque $n\wedge m$ tend vers $+\infty$. Comme il est d'usage, la preuve de ce théorème repose sur deux étapes : premièrement la preuve de la convergence des lois fini-dimensionnelles vers les lois fini-dimensionnelles du drap Brownien standard 2-dimensionnel correspondantes et deuxièmement la preuve de la tension de la famille des lois de probabilité.

On rappelle que le champ de v.a. $(X_{k,\ell})$ défini par (4.4) est régulier si

$$\mathbb{E}\left[X_{0,0}|\mathcal{F}_{0,-\infty}\right] = 0 \text{ p.s. et } \mathbb{E}\left[X_{0,0}|\mathcal{F}_{-\infty,0}\right] = 0 \text{ p.s.} \tag{4.5}$$

Notre premier résultat donne une condition nécessaire pour obtenir la tension de la famille des lois de probabilité.

Proposition 4.2.1. *Supposons que le champ de v.a. est régulier et que, de plus, il existe $q>2$, tel que*

$$\sum_{i,j\geqslant 0} \left\|\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})\right\|_q < +\infty. \tag{4.6}$$

Alors $W_{n,m}(t,s)$ est tendue dans $D([0,1]^2)$ muni de la topologie associé à la norme infinie.

En ayant la tension de la famille des lois des sommes partielles renormalisées, nous obtenons le théorème limite fonctionnel en le combinant avec la convergence des lois fini-dimensionnelles que l'on a démontrée dans le chapitre précédent.

Théorème 4.2.2. *Supposons que les hypothèses (4.6) et (3.12) sont satisfaites. Alors pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, le champ $(W_{n,m}(t,s))_{n,m\geqslant 1}$ vers $\sigma W(t,s)$, converge en loi dans $D([0,1]^2)$ muni de la topologie de la norme infinie lorsque $n\wedge m\to+\infty$ sous $\mathbb{P}^{\omega}$.*

On obtient un corollaire direct à ce théorème.

Corollaire 4.2.3. *Supposons que (3.13) est satisfaite pour un certain $q>2$. Alors la conclusion du théorème 4.2.2 s'applique.*

4.3. Preuves des résultats

4.3.1. Preuve de la proposition 4.2.1

On commence par définir, pour $2 < p < q$, les fonctions

$$\begin{aligned} f^*_{i,j,p} &= \sup_{n,v\geqslant 1} \frac{1}{nv} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{v} \mathbb{E}_{0,0}[|\mathcal{P}_{k-i,\ell-j}(X_{k,\ell})|^p] \\ &= \sup_{n,v\geqslant 1} \frac{1}{nv} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{v} Q_1^k Q_2^\ell(|\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})|^p). \end{aligned}$$

Remarquons que, d'après le corollaire 1.7 du chapitre 6 dans l'ouvrage d'Ulrich Krengel [Kre85] appliqué à la fonction $|\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})|^p$, pour $\lambda > 1$, on obtient

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\left(f^*_{i,j,p}\right)^{1/p} > \lambda\right) \leqslant C\mathbb{E}\left[|\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})|^p \log^+ |\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})|\right] \leqslant C\mathbb{E}\left[|\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})|^q\right].$$

On en déduit que $\left(f^*_{i,j,p}\right)^{1/p}$ est un élément de l'espace faible $L^{p,*}$ défini par

$$L^{p,*} = \{f \text{ fonction mesurable à valeurs réelles définie sur } \Omega : \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mathbb{P}(|f| > \lambda) < +\infty\}.$$

C'est un espace de Banach dont la norme naturelle sera notée par $\|\cdot\|_{p,*}$ et qui est équivalente à la pseudo-norme $(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mathbb{P}(|f| > \lambda))^{1/p}$. On a

$$\left\| \sum_{i,j\geqslant 0} \left(f^*_{i,j,p}\right)^{1/p} \right\|_{p,*} \leqslant \sum_{i,j\geqslant 0} \left\| \left(f^*_{i,j,p}\right)^{1/p} \right\|_{p,*} \leqslant \sum_{i,j\geqslant 0} \|\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})\|_q .$$

Par conséquent, si $\sum_{i,j\geqslant 0} \|\mathcal{P}_{-i,-j}(X_{0,0})\|_q < +\infty$ alors

$$\sum_{i,j\geqslant 0} \left(f^*_{i,j,p}\right)^{1/p} < +\infty \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Afin de démontrer la tension de la famille des lois de probabilité, nous allons vérifier que la condition sur les moments donnée par la relation (3) dans [BW71] par Peter Bickel et Michael Wichura (c.f. 1.3.9) est satisfaite. Pour s'en assurer, notons un accroissement du processus $W_{n,m}(t,s)$ sur le rectangle $A = [t_1, t_2[\times[s_1, s_2[$ par

$$\Delta(A) = \frac{1}{\sqrt{nm}} \left| \sum_{k=\lfloor nt_1 \rfloor}^{\lfloor nt_2 \rfloor - 1} \sum_{\ell=\lfloor ms_1 \rfloor}^{\lfloor ms_2 \rfloor - 1} X_{k,\ell} \right|.$$

On remarque que d'après (4.5), nous avons la décomposition suivante.

$$X_{k,\ell} = \sum_{i,j\geqslant 0} \mathcal{P}_{k-i,\ell-j}(X_{k,\ell}) \text{ p.s.}$$

On considère un aléa ω tel que cette décomposition soit valide pour tous k et ℓ et $\sum_{i,j\geqslant 0} \left(f^*_{i,j,p}(\omega)\right)^{1/p} < +\infty$. Alors, on a

$$\|\Delta(A)\|_{\omega,p} \leqslant \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{i,j\geqslant 0} \left\| \sum_{k=\lfloor nt_1 \rfloor}^{\lfloor nt_2 \rfloor - 1} \sum_{\ell=\lfloor ms_1 \rfloor}^{\lfloor ms_2 \rfloor - 1} \mathcal{P}_{k-i,\ell-j}(X_{k,\ell}) \right\|_{\omega,p},$$

où $\|\cdot\|_{\omega,p}$ désigne la norme naturelle de $L^p(\mathbb{P}^\omega)$. Remarquons que, puisque nous devons déterminer les moments d'ordre p d'une ortho-martingale, nous pouvons faire appel à l'inégalité de Burkholder (voir théorème 3.1 de Fazekas [Faz05]) et on obtient

$$\|\Delta(A)\|_{\omega,p} \leqslant \frac{C_p}{\sqrt{nm}} \sum_{i,j\geqslant 0} \left\| \sum_{k=\lfloor nt_1\rfloor}^{\lfloor nt_2\rfloor -1} \sum_{\ell=\lfloor ms_1\rfloor}^{\lfloor ms_2\rfloor -1} \mathcal{P}^2_{k-i,\ell-j}(X_{k,\ell}) \right\|_{\omega,p/2}^{1/2}.$$

En appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbb{E}^\omega\left[\Delta^p(A)\right] \leqslant C_p\left((t_2-t_1)(s_2-s_1)\right)^{p/2} \left(\sum_{i,j\geqslant 0} \left(f^*_{i,j,p}(\omega)\right)^{1/p} \right)^p.$$

Si B est un voisinage rectangulaire de A, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathbb{E}^\omega\left[\Delta^{p/2}(A)\Delta^{p/2}(B)\right] \leqslant K_{p,\omega}\left(\mu(A)\mu(B)\right)^{p/4},$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2$. Par conséquent la condition donnée par la relation (3) par Peter Bickel et Michael Wichura [BW71] est satisfaite avec $\gamma = p$ et $\beta = p/2$. Puisque $\beta > 1$, la tension de la famille des lois de probabilité est donc une conséquence du théorème 1.3.9 et de la discussion qui s'ensuit. □

4.3.2. Preuve du théorème 4.2.2

La tension est une conséquence de la proposition 4.2.1. La preuve de la convergence des lois fini-dimensionnelles est basée sur l'observation suivante. En utilisant l'approximation par ortho-martingale (3.17) avec la négligeabilité (3.28) de $R_{n,m}$, pour presque tout ω et pour tous nombres rationnels $0 \leqslant s,t \leqslant 1$, on obtient

$$\lim_{n\wedge m\to+\infty} \frac{\left\| S_{\lfloor nt\rfloor,\lfloor ms\rfloor} - M_{\lfloor nt\rfloor,\lfloor ms\rfloor} \right\|_{\omega,2}}{(nm)^{1/2}} = 0.$$

Ainsi, d'après l'astuce de Cramèr-Wold et l'inégalité triangulaire, la convergence des lois fini-dimensionnelles se déduit du cas des ortho-martingales, qui a été démontré par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19]. Le théorème est donc prouvé. □

4.4. Extension aux champs d-dimensionnels, $d \geqslant 3$

Énonçons la généralisation au cas d-dimensionnel, $d > 2$ de ce résultat. Reprenons les notations de la section 3.4 et considérons un champ stationnaire $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles défini sur l'espace de probabilité canonique $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. On définit les tribus $\mathcal{F}_{\boldsymbol{u}} = \sigma(\xi_{\boldsymbol{j}} : \boldsymbol{j} \leqslant \boldsymbol{u})$ et on suppose alors que la famille formée par ces tribus est une filtration commutante. On construit le champ que l'on souhaite étudier de la manière suivante :

$$X_{\boldsymbol{m}} = f((\xi_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\leqslant \boldsymbol{m}}) \quad \text{et} \quad S_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{1}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{k}} X_{\boldsymbol{u}}. \tag{4.7}$$

La variable aléatoire $X_{\boldsymbol{0}}$ est supposée centrée et de carré intégrable. On suppose aussi que $X_{\boldsymbol{0}}$ est régulière, c'est à dire que

$$\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \,|\mathcal{F}_{-\infty \boldsymbol{e}_i}\right] = 0,$$

où $\mathcal{F}_{-\infty \boldsymbol{e}_i} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{n\boldsymbol{e}_i}$ pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ et on définit les translations canoniques T_i de manière usuelle. Donc, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$X_{\boldsymbol{k}} = f(T_1^{k_1} \circ \ldots \circ T_d^{k_d}((\xi_{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{0}})).$$

On suppose qu'au moins l'une des transformations $T_i, i \in [\![1, d]\!]$ est ergodique.

Pour $\boldsymbol{t} \in [0, 1]^d$, on définit le champ aléatoire de processus stochastiques suivant :

$$W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}} S_{\lfloor n_1 t_1 \rfloor, \ldots, \lfloor n_d t_d \rfloor}$$

et on note par $(W(\boldsymbol{t}))_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d}$ le drap Brownien d-dimensionnel standard. Le théorème suivant est une version d-dimensionnel du théorème 4.2.3.

Théorème 4.4.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.4.4 avec $q > 2$, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, le champ aléatoire de processus stochastiques $(W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}))_{\boldsymbol{n}\geqslant \boldsymbol{1}}$ converge en loi vers $\sigma W(\boldsymbol{t})$, lorsque $\min_{1\leqslant i\leqslant d} n_i \to +\infty$ sous $\mathbb{P}^\omega$.*

4.5. Exemples

Dans cette section, nous obtenons des exemples d'applications du théorème fonctionnel précédent à des champs linéaires et de Volterra. Le but de cette partie est d'obtenir des théorèmes fonctionnels *quenched* avec des conditions moins fortes que celles énoncées par Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19], dans lequel les auteurs ont utilisé une décomposition martingale-cobord. Soit $q > 2$ et supposons que $d \geqslant 2$.

4.5.1. Champ linéaire

Exemple 4.5.1. (Champ linéaire) Soit $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in Z^d}$ un champ de v.a.i.i.d. centrées telles que $E\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^q\right] < +\infty$. Pour tout $\boldsymbol{k} \geqslant \boldsymbol{0}$, on définit

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{0}} a_{\boldsymbol{j}} \xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}} \ .$$

On suppose que

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geqslant \boldsymbol{1}} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/q}} \Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{4.8}$$

La conclusion du théorème central limite *quenched* fonctionnel 4.4.1 est satisfaite.

Remarque. Pour le cas $d = 2$, on peut supposer que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites.

$$\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{0}} |a_{\boldsymbol{j}}| < +\infty \tag{4.9}$$

et

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geqslant \boldsymbol{1}} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/2}} \Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant \boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{4.10}$$

Si on suppose que $\mathbb{E}\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^q\right] < +\infty$ pour un certain $q > 2$, alors la convergence *quenched* du théorème 4.2.2 est satisfaite.

Rappelons que (4.9) et (4.10) sont satisfaites si, notamment

$$a_{u,v} = \frac{1}{uv}\frac{1}{h(u)g(v)},$$

avec h, g des fonctions à croissance lente satisfaisant

$$\sum_{u\geqslant 1}\frac{1}{uh(u)} < +\infty \text{ et } \sum_{v\geqslant 1}\frac{1}{vg(v)} < +\infty.$$

4.5.2. Champ de Volterra

Exemple 4.5.2. (Champ de Volterra) Soit $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in Z^d}$ un champ de v.a.i.i.d. centrées telles que $E\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^q\right] < +\infty$. Pour tout $\boldsymbol{k} \geqslant \boldsymbol{0}$, on définit

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}.$$

où $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$ sont des réels $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}} = 0$ et $\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}} a^2_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} < +\infty$. De plus, on suppose que

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geqslant\boldsymbol{1}}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/q}}\Bigg(\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} a^2_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\Bigg)^{1/2} < +\infty. \tag{4.11}$$

Alors la conclusion du théorème central limite *quenched* fonctionnel 4.4.1 est satisfaite.

4.6. Extension des résultats aux espaces d'Orlicz

Dans cette section, nous établissons différents résultats qui généralisent ceux qui précèdent. Ces recherches sont le fruit du travail conjoint de Na Zhang et Lucas Reding [RZ20]. Nous utilisons les notations définies dans la section précédente. Rappelons que dans ce cas le champ $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est défini par (4.7), que la filtration sous-jacente est commutante et qu'au moins une des transformations T_i, $i \in [\![1, d]\!]$ est ergodique.

En plus des notations de la section précédente, on définit pour tout $\boldsymbol{n} \in (\mathbb{N}^*)^d$,

$$\bar{S}_{\boldsymbol{n}} = S_{\boldsymbol{n}} - R_{\boldsymbol{n}} \quad \text{et} \quad R_{\boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant d}\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\cdots,j_i)}}\left[S_{\boldsymbol{n}}\right],$$

où $\boldsymbol{n}^{(j_1,\cdots,j_i)}$ est le multi-indice obtenu en remplaçant par 0 toutes les $j_1, \cdots, j_i$-ième coordonnées du multi-indice $\boldsymbol{n}$ et en laissant les autres inchangées.

4.6.1. Théorème central limite fonctionnel sur des régions cubiques

Le théorème qui suit est une généralisation fonctionnelle du théorème 3.2.1.

Théorème 4.6.1. *Supposons que*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}}\|\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_2 < +\infty, \tag{4.12}$$

Alors pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\left(\frac{1}{n^{d/2}}\bar{S}_{\lfloor n\boldsymbol{t}\rfloor}\right)_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} (\sigma W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega},$$

où $\sigma^2 := \mathbb{E}\left[D_{\mathbf{0}}^2\right]$ avec $D_{\mathbf{0}} = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}\left(X_{\boldsymbol{i}}\right)$, $(W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d}$ est un drap Brownien standard, $k\boldsymbol{t} := (kt_1, \ldots, kt_d)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et la convergence a lieu dans $D([0,1]^d)$ muni de la topologie de la norme infinie.

Le résultat suivant est un corollaire direct du théorème précédent et permet de supprimer le re-centrage $R_{\boldsymbol{n}}$. Ce corollaire correspond aussi à la version fonctionnelle de la deuxième partie du corollaire 3.2.3 (convergence (3.11)).

Corollaire 4.6.2. *Sous les hypothèses du théorème 4.6.1 et si de plus, on a pour tout $i \in [\![1, d]\!]$,*

$$\frac{1}{n^d}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant\boldsymbol{m}\leqslant n\mathbf{1}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{m}^{(i)}}\left[S_{\boldsymbol{m}}\right]^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$$

où $\boldsymbol{m}^{(i)}$ est le multi-indice ayant 0 pour i-ème coordonnée et laissant les autres coordonnées de $\boldsymbol{m}$ inchangées. Alors, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\left(\frac{1}{n^{d/2}}S_{\lfloor n\boldsymbol{t}\rfloor}\right)_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} (\sigma W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega}, \tag{4.13}$$

où $(W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d}$ est un drap Brownien standard et la convergence a lieu dans l'espace de Skorohod $D([0,1]^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Finalement nous établissons l'extension fonctionnelle du théorème 3.2.4 (Partie (a)).

Théorème 4.6.3. *On suppose que*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{1}} \frac{\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_2}{|\boldsymbol{u}|^{\frac{1}{2}}} < +\infty. \tag{4.14}$$

Alors, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la convergence donnée par le corollaire 4.6.2 est satisfaite.

4.6.2. Théorème central limite fonctionnel sur des régions rectangulaires

Nous énonçons l'extension suivante du théorème 3.2.2 ainsi que de la convergence (3.10) dans le corollaire 3.2.3.

Théorème 4.6.4. *On suppose que*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi} < +\infty, \tag{4.15}$$

où $\Phi(x) = x^2(\ln(1+|x|))^{d-1}$. Alors, for $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}}\bar{S}_{\lfloor \boldsymbol{t}\boldsymbol{n}\rfloor}\right)_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\mathcal{L}} (\sigma W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega},$$

où σ^2 est défini comme dans le théorème 4.6.1, $(W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d}$ est un drap Brownien standard et la convergence a lieu dans l'espace de Skorohod $D([0,1]^d)$.

Corollaire 4.6.5. *On suppose que les conditions du théorème précédent sont satisfaites et que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$,*

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{m}\leqslant \boldsymbol{n}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{m}^{(i)}}\left[S_{\boldsymbol{m}}\right]^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Alors, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|}} S_{\lfloor \boldsymbol{tn}\rfloor}\right)_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\mathcal{L}} (\sigma W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d} \quad \textit{sous} \quad \mathbb{P}^{\omega}, \tag{4.16}$$

où $(W_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^d}$ est un drap Brownien standard et la convergence a lieu dans l'espace de Skorohod $D([0,1]^d)$.

Le théorème suivant est la généralisation au cas fonctionnel du théorème 3.2.4 (Partie (b)).

Théorème 4.6.6. *Si les hypothèses (4.15) et (3.43) sont satisfaites pour $q = 2$, la convergence dans 4.6.5 est satisfaite pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.*

Finalement, nous conjecturons l'existence d'une version fonctionnelle du théorème 3.2.4 (Partie (c)).

Théorème 4.6.7 (Conjecture)**.** *Supposons que la condition*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{1}} \frac{\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi}}{|\boldsymbol{u}|^{\frac{1}{2}}} < +\infty. \tag{4.17}$$

est satisfaite. Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la conclusion du corollaire 4.6.6 est satisfaite.

4.7. Preuves des généralisations

Notations

Avant d'établir les résultats précédents, nous commençons par définir certaines notations.

Lorsque $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on notera par $h_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$, la fonction $h \circ T^{\boldsymbol{u}}$.

Pour tout $\boldsymbol{n} \in (\mathbb{N}^*)^d$ et pour toute fonction mesurable $h : \Omega \to \mathbb{R}$, on note

$$S_{\boldsymbol{n}}(h) = \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}} h_{\boldsymbol{i}},$$

et

$$\bar{S}_{\boldsymbol{n}}(h) = S_{\boldsymbol{n}}(h) - R_{\boldsymbol{n}}(h) \quad \text{et} \quad R_{\boldsymbol{n}}(h) = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i-1} \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant d} \mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\cdots,j_i)}}\left[S_{\boldsymbol{n}}(h)\right],$$

où l'on rappelle que $\boldsymbol{n}^{(j_1,\cdots,j_i)}$ est le multi-indice obtenu en remplaçant par 0 toutes les $j_1, \cdots, j_i$-ième coordonnées du multi-indice $\boldsymbol{n}$ et en laissant les autres inchangées.

Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathcal{F}_{\ell}^{(i)} = \bigvee_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d,\, k_i\leqslant l} \mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}.$$

4.7.1. Preuve du lemme principal et du théorème 4.6.4

On commence par démontrer le théorème 4.6.4 puisque c'est le résultat le plus général. De plus, les calculs effectués dans la preuve du théorème 4.6.1 sont un cas particulier des calculs de la preuve du théorème 4.6.4 et seront donc omis.

Avant de monter le théorème principal, on commence par établir un lemme principal.

Lemme principal. *Pour toute fonction $h \in L\ln^{d-1} L$ (c.f. définition 1.13), $\mathcal{F}_{\mathbf{0}}$-mesurable et satisfaisant la condition de Hannan suivante :*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi} < +\infty, \tag{4.18}$$

il existe une fonction intégrable g telle que pour tout $\boldsymbol{N} \in (\mathbb{N}^*)^d$,

$$\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}|\overline{S}_{\boldsymbol{n}}(h)|^2\right]} \leqslant g \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Afin de prouver ce lemme on établit un second lemme intermédiaire.

Lemme 4.7.1. *Pour toute fonction $h \in L\ln^{d-1} L$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$, on a*

$$\left\|\sqrt{(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2)^*}\right\|_1 \leqslant C\,\|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi}\,.$$

Preuve du lemme 4.7.1. Soient $h \in L\ln^{d-1} L$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$ et $t > \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi}$. On note

$$\Omega_t = \left\{\omega \in \Omega : 4\left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2(\omega) > t^2\right\}.$$

En appliquant le corollaire 1.7 du chapitre 6 dans l'ouvrage de Krengel [Kre85], on trouve qu'il existe une constante $C_d > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{\boldsymbol{n}\in(\mathbb{N}^*)^d} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}} \left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}\right)^2 > t^2\right) &\leqslant C_d \int_{\Omega_t} \frac{4\left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2}{t^2}\left(\ln\left(\frac{4\left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2}{t^2}\right)\right)^{d-1} \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leqslant 2^{d-1}C_d \int_{\Omega_t} \frac{\left(2\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2}{t^2}\left(\ln\left(1+\frac{2|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})|}{t}\right)\right)^{d-1} \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leqslant 2^{d-1}C_d t^{-2}\,\|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi}^2\,.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que

$$\|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi} = \inf\left\{t > 0 : \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})|}{t}\right)\right] \leqslant 1\right\}.$$

En effet, en posant $t_0 = \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2\left(\ln\left(1+\frac{|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})|}{t_0}\right)\right)^{d-1}\right] \leqslant t_0^2.$$

Ainsi, puisque $t > t_0$,

$$\int_{\Omega} \frac{\left(2\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2}{t^2}\left(\ln\left(1+\frac{2|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})|}{t}\right)\right)^{d-1} \mathrm{d}\mathbb{P} \leqslant t_0^2 t^{-2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2)^*}\right\|_1 &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{\boldsymbol{n}\in(\mathbb{N}^*)^d} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}} \left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}\right)^2 > t^2\right) \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{t_0} 1\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{\boldsymbol{n}\in(\mathbb{N}^*)^d} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}} \left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}\right)^2 > t^2\right) \mathrm{d}t \\ &\leqslant (2^{d-1}C_d + 1)\left\|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\right\|_{\Phi}.\end{aligned}$$

□

Preuve du lemme principal. On considère une fonction mesurable h satisfaisant aux hypothèses du lemme. Dans un premier temps, on étudie la quantité $\bar{S}_{\boldsymbol{n}}(h)$ en utilisant la décomposition projective suivante (voir l'article de Magda Peligrad et Na Zhang [PZ18a]).

$$S_{\boldsymbol{n}}(h) - R_{\boldsymbol{n}}(h) = \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}} \mathcal{P}_{\boldsymbol{i}}\left(\sum_{\boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{n}} h_{\boldsymbol{u}}\right) = \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}\left(\sum_{\mathbf{0}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}} h_{\boldsymbol{u}}\right)\circ T^{\boldsymbol{i}}.$$

En changeant l'ordre des termes dans la somme, on obtient

$$\bar{S}_{\boldsymbol{n}}(h) = \sum_{\mathbf{0}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{n}-\mathbf{1}} \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}-\boldsymbol{u}} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}.$$

Soient $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N} \in (\mathbb{N}^*)^d$ tel que $\boldsymbol{n} \leqslant \boldsymbol{N}$. Alors, on a

$$|\bar{S}_{\boldsymbol{n}}(h)| \leqslant \sum_{\mathbf{0}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{N}-\mathbf{1}} \max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{k}\leqslant \boldsymbol{N}} \left|\sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{k}} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}\right|.$$

Remarquons que pour tout $\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0}$, la somme partielle $\sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{k}} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}$ est une ortho-martingale. En utilisant l'inégalité de Cairoli pour les ortho-martingales, on a

$$\sum_{\mathbf{0}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{N}-\mathbf{1}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{k}\leqslant \boldsymbol{N}} \left|\sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{k}} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}\right|^2\right] \leqslant 2^{2d} \sum_{\boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{0}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\left(\sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{N}} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\circ T^{\boldsymbol{i}}\right)^2\right].$$

Par orthogonalité, on trouve que

$$\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}} |\bar{S}_{\boldsymbol{n}}(h)|^2\right]} \leqslant 2^d \sum_{\boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{0}} \sqrt{\sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{N}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2\circ T^{\boldsymbol{i}}\right]} \leqslant 2^d\sqrt{|\boldsymbol{N}|} \sum_{\boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{0}} \sqrt{(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2)^*}.$$

Ainsi pour tout $\boldsymbol{N} \in (\mathbb{N}^*)^d$,

$$\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}|\bar{S}_{\boldsymbol{n}}(h)|^2\right]} \leqslant 2^d \sum_{\boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{0}} \sqrt{(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2)^*}. \tag{4.19}$$

Or, d'après le lemme 4.7.1 et l'hypothèse (4.18), il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}} \sqrt{(\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2)^*} \right\|_1 \leqslant C \sum_{\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}} \|\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_\Phi < +\infty.$$

Ce qui achève la preuve du lemme principal. □

Preuve du théorème 4.6.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$X_{\boldsymbol{0}}^{(n)} = \sum_{\boldsymbol{j} \in [\![-n,0]\!]^d} \mathcal{P}_{\boldsymbol{j}}(X_{\boldsymbol{0}})$$

Par régularité de $X_{\boldsymbol{0}}$, la suite de v.a. $(X_{\boldsymbol{0}} - X_{\boldsymbol{0}}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 presque sûrement ; en utilisant (4.19), on obtient la convergence

$$\limsup_{\boldsymbol{N} \to +\infty} \sqrt{\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}} \left[\max_{\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{m} \leqslant \boldsymbol{N}} \frac{1}{|\boldsymbol{m}|} |\overline{S}_{\boldsymbol{m}}(X_{\boldsymbol{0}} - X_{\boldsymbol{0}}^{(n)})|^2 \right]} \leqslant 2^d \sum_{\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}} \sqrt{\left(\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}((X_{\boldsymbol{0}} - X_{\boldsymbol{0}}^{(n)}) \circ T^{\boldsymbol{i}})^2\right)^*}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et donc, d'après la preuve du lemme principal, il existe une constante C telle que

$$\left\| \sqrt{\limsup_{\boldsymbol{N} \to +\infty} \mathbb{E}_{\boldsymbol{0}} \left[\max_{\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{m} \leqslant \boldsymbol{N}} \frac{1}{|\boldsymbol{m}|} |\overline{S}_{\boldsymbol{m}}(X_{\boldsymbol{0}} - X_{\boldsymbol{0}}^{(n)})|^2 \right]} \right\|_1 \leqslant C \sum_{\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}} \left\| \mathcal{P}_{\boldsymbol{0}} \left((X_{\boldsymbol{0}} - X_{\boldsymbol{0}}^{(n)}) \circ T^{\boldsymbol{i}} \right) \right\|_\Phi \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par conséquent, il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \limsup_{\boldsymbol{N} \to +\infty} \mathbb{E}_{\boldsymbol{0}} \left[\max_{\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{m} \leqslant \boldsymbol{N}} \frac{1}{|\boldsymbol{m}|} |\overline{S}_{\boldsymbol{m}}(X_{\boldsymbol{0}} - X_{\boldsymbol{0}}^{(n_k)})|^2 \right] = 0 \quad \text{p.s.} \tag{4.20}$$

De plus, on a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{N}|} \mathbb{E}_{\boldsymbol{0}} \left[\max_{\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} |R_{\boldsymbol{i}}(X_{\boldsymbol{0}}^{(n)})|^2 \right] \xrightarrow[\boldsymbol{N} \to +\infty]{\text{p.s.}} 0. \tag{4.21}$$

En effet, d'après l'inégalité triangulaire, il suffit de montrer que pour tout $\boldsymbol{i} \in [\![-n, 0]\!]^d$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{N}|} \mathbb{E}_{\boldsymbol{0}} \left[\max_{\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{j} \leqslant \boldsymbol{N}} |R_{\boldsymbol{j}}(\mathcal{P}_{\boldsymbol{i}}(X_{\boldsymbol{0}}^{(n)}))|^2 \right] \xrightarrow[\boldsymbol{N} \to +\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Ceci est vrai par application du lemme 4.7.2 énoncé ci-dessous.

Lemme 4.7.2. *Pour tout fonction $\mathcal{F}_{\boldsymbol{0}}$-mesurable h de carré intégrable, la condition*

$$\sum_{\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{1}} \frac{\|\mathbb{E}_{\boldsymbol{1}}[h_{\boldsymbol{u}}]\|_2}{|\boldsymbol{u}|^{1/2}} < +\infty$$

entraîne que

$$\frac{1}{|\boldsymbol{N}|} \mathbb{E}_{\boldsymbol{0}} \left[\max_{\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{n} \leqslant \boldsymbol{N}} |R_{\boldsymbol{n}}(h)|^2 \right] \xrightarrow[\boldsymbol{N} \to +\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

On donnera la démonstration de ce lemme dans la suite du chapitre.

Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, en appliquant la proposition 4.1 de l'article de Dalibor Volny et Yizao Wang [VW14a], on obtient la décomposition martingale-cobord

$$X_{\mathbf{0}}^{(n)} = \sum_{S \subset [\![1,d]\!]} h_S^{(n)} \circ \prod_{j \in S^c} (I - T_j),$$

où $h_S^{(n)} \in \bigcap_{i \in S} \left(L^2 \left(\mathcal{F}_0^{(i)} \right) \ominus L^2 \left(\mathcal{F}_{-1}^{(i)} \right) \right)$ pour tout $S \subset [\![1,d]\!]$ et en adoptant la notation $\prod_{j \in \varnothing} (I - T_j) = \varnothing$. De plus

$$h_{[\![1,d]\!]}^{(n)} = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_{\mathbf{0}} \left(X_{\mathbf{0}}^{(n)} \circ T^{\boldsymbol{i}} \right).$$

D'après la preuve de la remarque 11 de l'article de Magda Peligrad et de Dalibor Volný [PV19] (voir preuve du théorème 7 de cet article), la convergence presque sûre

$$\frac{1}{|\boldsymbol{N}|} \mathbb{E}_{\mathbf{0}} \left[\max_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{m} \leqslant \boldsymbol{N}} \left| S_{\boldsymbol{m}} \left(X_{\mathbf{0}}^{(n)} - m_n \right) \right|^2 \right] \xrightarrow[\boldsymbol{N} \to +\infty]{\text{p.s.}} 0 \tag{4.22}$$

est satisfaite. De plus, en posant $m_n = h_{[\![1,d]\!]}^{(n)}$ et $m = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{i}})$. Ainsi

$$S_{\boldsymbol{N}}(m - m_n) = \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} \left(D_{\boldsymbol{i}} - D_{\boldsymbol{i}^{(n)}} \right),$$

où

$$D_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_{\boldsymbol{i}} \left(X_{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}} \right) \quad \text{et} \quad D_{\boldsymbol{i}}^{(n)} = \sum_{\boldsymbol{j} \in [\![-n,0]\!]^d} \mathcal{P}_{\boldsymbol{i}} \left(X_{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}} \right).$$

Par conséquent, étant donné que $\left(D_{\boldsymbol{i}} - D_{\boldsymbol{i}}^{(n)} \right)_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ d'accroissements d'ortho-martingale et d'après l'inégalité de Cairoli (c.f. proposition 1.4.10), on obtient

$$\mathbb{P}^{\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{N}|}} \max_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} |S_{\boldsymbol{i}}(m - m_n)| > \varepsilon \right) \leqslant \frac{2^{2d}}{\varepsilon^2 |\boldsymbol{N}|} \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}} \left[\left(D_{\boldsymbol{i}} - D_{\boldsymbol{i}}^{(n)} \right)^2 \right].$$

Remarquons que

$$\sqrt{\frac{1}{|\boldsymbol{N}|} \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}} \left[\left(D_{\boldsymbol{i}} - D_{\boldsymbol{i}}^{(n)} \right)^2 \right]} \leqslant \sum_{\boldsymbol{j} \notin [\![-n,0]\!]^d} \sqrt{\frac{1}{|\boldsymbol{N}|} \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}} \left[\left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}} \left(X_{\boldsymbol{j}} \right) \right)^2 \circ T^{\boldsymbol{i}} \right]}.$$

D'après le théorème ergodique 1.2.4 pour les opérateurs de Dunford-Schwartz et le lemme 7.1 de l'article de Jérôme Dedecker et al. [DMP14], on a la convergence suivante :

$$\lim_{\boldsymbol{N} \to +\infty} \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}} \left[\left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}} \left(X_{\boldsymbol{j}} \right) \right)^2 \circ T^{\boldsymbol{i}} \right] = \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{P}_{\mathbf{0}} \left(X_{\boldsymbol{j}} \right) \right)^2 \right] \quad \text{p.s.}$$

pour tout $\boldsymbol{j} \notin [\![-n,0]\!]^d$. Puisque $\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} \left\| \mathcal{P}_{\mathbf{0}} \left(X_{\boldsymbol{j}} \right) \right\|_2 < +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{\boldsymbol{N} \to +\infty} \frac{2^{2d}}{\varepsilon^2 |\boldsymbol{N}|} \sum_{\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{N}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}} \left[\left(D_{\boldsymbol{i}} - D_{\boldsymbol{i}}^{(n)} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{p.s.} \tag{4.23}$$

En combinant (4.20), (4.21),(4.22) et (4.23), on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{\boldsymbol{N}\to+\infty} \mathbb{P}^{\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{N}|}} \max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{m}\leqslant \boldsymbol{N}} |\bar{S}_{\boldsymbol{m}} - S_{\boldsymbol{m}}(m)| \geqslant \varepsilon\right) = 0 \quad \text{p.s.}$$

On conclut en remarquant que puisque le champ $(m \circ T^{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ vérifie un théorème central limite fonctionnel (ceci d'après le théorème 5 de l'article de Magda Peligrad et Dalibor Volný [PV19]), le résultat escompté est obtenu par application du théorème 3.1 dans [Neu71]. □

Preuve du théorème 4.6.1. La preuve de ce théorème est identique à la preuve précédente, exception faite de l'utilisation du théorème du lemme 1.4 du chapitre 6 dans l'ouvrage d'Ulrich Krengel (appliqué à l'opérateur maximal $Mf := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^d} \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant n\mathbf{1}} |f| \circ T^{\boldsymbol{i}}$) à la place du corollaire 1.7 du même chapitre afin d'obtenir les équivalents pour la norme usuelle de L^2 des lemmes intermédiaire et principal que nous énonçons ci-dessous. □

Lemme principal (Version L^2)**.** *Pour toute fonction $h \in L^2(\mathcal{F}_{\mathbf{0}})$ et satisfaisant la condition de Hannan suivante :*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{0}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_2 < +\infty, \tag{4.24}$$

il existe une fonction intégrable g telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n^d} |\overline{S}_{n\mathbf{1}}(h)|^2\right]} \leqslant g \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Lemme (Version L^2 du lemme 4.7.1)**.** *Pour toute fonction $h \in L^2$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$, on a*

$$\left\|\sqrt{(\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})^2)^{\star}}\right\|_1 \leqslant C \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(h_{\boldsymbol{u}})\|_2 ,$$

où $h^{\star} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^d} \sum_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant n\mathbf{1}} |h| \circ T^{\boldsymbol{i}}$, pour toute fonction intégrable h.

La preuve suivante du corollaire 4.6.5 peut être aisément adaptée afin d'obtenir le corollaire 4.6.2 en appliquant le théorème 4.6.1 au lieu du théorème 4.6.4.

Preuve du corollaire 4.6.5. D'après le théorème 4.6.4 et le théorème 3.1 dans [Neu71], il suffit de montrer que

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}} R_{\boldsymbol{i}}^2\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$, rappelons que

$$R_{\boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant d} \mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\cdots,j_i)}}[S_{\boldsymbol{n}}],$$

où $\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_i)}$ est le multi-indice tel que les j_k-ième, $1 \leqslant k \leqslant i$ coordonnées sont nulles et les autres sont égales aux coordonnées correspondantes de $\boldsymbol{n}$.

Par l'inégalité triangulaire, il est suffisant d'établir qu'après renormalisation, l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_{\mathbf{0}}$ du carré de chaque terme de la somme tend vers 0 presque sûrement.

Les termes satisfaisant $i = 1$ vérifient cette propriété d'après les hypothèses du corollaire et tous les autres termes peuvent être traité de manière similaire ; donc, sans perte de généralité, nous prouverons seulement que

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{i}^{(1,2)}}[S_{\boldsymbol{i}}])^2] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbf{0}}[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{i}^{(1,2)}}[S_{\boldsymbol{i}}])^2] = \mathbb{E}_{\mathbf{0}}[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{i}^{(1,2)}}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{i}^{(1)}}[S_{\boldsymbol{i}}]])^2] \leqslant \mathbb{E}_{\mathbf{0}}[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{i}^{(1)}}[S_{\boldsymbol{i}}])^2].$$

Donc

$$\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{i}^{(1,2)}}[S_{\boldsymbol{i}}])^2] \leqslant \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{n}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{i}^{(1)}}[S_{\boldsymbol{i}}])^2] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

□

Avant de continuer avec les preuves des différents théorèmes, nous démontrons le lemme 4.7.2.

4.7.2. Preuve du lemme 4.7.2

Preuve du lemme 4.7.2. On montre que pour tout $i \in [\![1,d]\!]$ et pour tout $(j_1,\dots,j_i) \in [\![1,d]\!]^i$ satisfaisant $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant d$, on a la convergence

$$\frac{1}{|\boldsymbol{N}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_i)}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)]^2\right] \xrightarrow[\boldsymbol{N}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Pour cela, on raisonne par récurrence sur $k = d-i$. Pour $k = 0$ et de la même manière que pour la preuve du lemme 3.3.2, on établit que

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbf{0}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)]^2}{|\boldsymbol{n}|} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

On remarque qu'alors

$$\frac{1}{|\boldsymbol{N}|}\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)]^2 \xrightarrow[\boldsymbol{N}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Désormais, on suppose que la propriété étudiée est satisfaite au rang $k-1 < d-1$. Sans perte de généralité, on établira le résultat seulement pour $(j_1,\dots,j_n) = (1,\dots,n)$; pour cela on démontre que

$$\frac{1}{|\boldsymbol{N}|}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k)}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)] - \mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_2,\dots,j_k)}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)])^2\right] \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

De même que dans la preuve lemme 3.3.2, on obtient la décomposition suivante

$$\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k)}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)] - \mathbb{E}_{\boldsymbol{n}^{(j_2,\dots,j_k)}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)])^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbf{0}}\left[\max_{\mathbf{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}}\left(\sum_{i=1}^{n_1}P^{(1)}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k),i}}(S_{\boldsymbol{n}}(h))\right)^2\right],$$

où $P^{(1)}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(S_{\boldsymbol{n}}(h)) = \mathbb{E}_{i\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k)}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)] - \mathbb{E}_{(i-1)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k)}}[S_{\boldsymbol{n}}(h)]$ et $\boldsymbol{e}_1$ est le multi-indice dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la première qui vaut 1.

Puisque h est $\mathcal{F}_{\boldsymbol{0}}$-mesurable, on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n_1} P^{(1)}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(S_{\boldsymbol{n}}(h))\right| \leqslant \sum_{\boldsymbol{1}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{N}} \max_{1\leqslant k\leqslant N_1} \left|\sum_{i=1}^{k} P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(h_{\boldsymbol{u}})\right|$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Cairoli

$$\sqrt{\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\max_{\boldsymbol{1}\leqslant \boldsymbol{n}\leqslant \boldsymbol{N}}\left(\sum_{i=1}^{\boldsymbol{n}_1} P^{(1)}_{\boldsymbol{n}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(S_{\boldsymbol{n}}(h))\right)^2\right]} \leqslant 2\sum_{\boldsymbol{1}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{N}} \sqrt{\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_1} P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2\right]}.$$

Soit $c>0$, on utilise la décomposition suivante

$$\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{N}|}}\sum_{\boldsymbol{1}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{N}} \sqrt{\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_1} P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2\right]} = \mathrm{I}_{\boldsymbol{N},c} + \mathrm{II}_{\boldsymbol{N},c}$$

où

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{N},c} = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{N}|}}\sum_{1\leqslant u_1\leqslant N_1}\sum_{1\leqslant u_2,\dots u_d\leqslant c} \sqrt{\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_1} P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2\right]}$$

et $\mathrm{II}_{\boldsymbol{N},c}$ est le reste des termes de la somme initiale.

De la même manière que dans la preuve du lemme 3.3.2, on montre que

$$\limsup_{\boldsymbol{N}\to+\infty} \mathrm{I}_{\boldsymbol{N},c} = 0 \quad \text{p.s.}$$

En effet, par orthogonalité

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{N},c} \leqslant \frac{c^d}{\sqrt{|\boldsymbol{N}|}} \sup_{1\leqslant u_2,\dots u_d\leqslant c}\sum_{u_1\geqslant 0} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_1}\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\left(P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},0}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2\circ T_1^i\right]}.$$

Or, d'après le théorème 1.2.4 et le lemme 7.1 de l'article de Jérôme Dedecker et al. [DMP14], on obtient la convergence

$$\lim_{N_1\to+\infty}\frac{1}{N_1}\sum_{1\leqslant i\leqslant N_1}\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\left(P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},0}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2\circ T_1^i\right] = \mathbb{E}\left[\left(P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},0}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2|\mathcal{I}_1\right],$$

où $\mathcal{I}_1$ est la tribu invariante associée à la transformation T_1. Par conséquent

$$\limsup_{\boldsymbol{N}\to+\infty} \mathrm{I}_{\boldsymbol{N},c} = 0 \quad \text{p.s.}$$

Les différentes sommes apparaissant dans le reste $\mathrm{II}_{\boldsymbol{N},c}$, admettent au moins une direction (différente de la première) pour laquelle les indices des termes dans cette direction sont au moins

égaux à $c+1$. Sans perte de généralité supposons que ce soit seulement selon la deuxième coordonnée. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{N}|}} \sum_{1\leqslant u_1\leqslant N_1} \sum_{c+1\leqslant u_2\leqslant N_2} \sum_{1\leqslant u_3\leqslant N_3} \cdots \sum_{1\leqslant u_d\leqslant N_d} \sqrt{\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_1} P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},i}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2\right]}$$
$$\leqslant \sum_{u_2\geqslant c+1} \sum_{u_1\geqslant 0} \sum_{u_3\geqslant 1} \cdots \sum_{u_d\geqslant 1} (u_2\cdots u_d)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} \mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}\left[\left(P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},0}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2 \circ T_1^i\right]}$$

En appliquant à nouveau le théorème 1.2.4 et le lemme 7.1 de l'article de Jérôme Dedecker et al. [DMP14], on obtient

$$\limsup_{\boldsymbol{N}\to+\infty} \mathrm{II}_{\boldsymbol{N},c} \leqslant \sum_{u_2\geqslant c+1} \sum_{u_1\geqslant 0} \sum_{u_2\geqslant 1} \cdots \sum_{u_d\geqslant 1} \frac{\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(P^{(1)}_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\dots,j_k)},0}(h_{\boldsymbol{u}})\right)^2 |\mathcal{I}_1\right]}}{\sqrt{u_2\cdots u_d}}.$$

En se servant du lemme 3.44, on obtient

$$\lim_{c\to+\infty} \limsup_{\boldsymbol{N}\to+\infty} \mathrm{II}_{\boldsymbol{N},c} = 0 \quad \text{p.s.}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Les théorèmes 4.6.6 et 4.6.3 sont des conséquences directes de ce lemme et des résultats précédents.

Preuve du théorème 4.6.6. Ce théorème est conséquence du lemme 4.7.2 et du théorème 4.6.5. □

Preuve du théorème 4.6.3. Le théorème est une conséquence du lemme 4.7.2, de (3.46) (pour $q=2$; voir preuve du corollaire 3.4.4 et lemme 3.3.3) et du théorème 4.6.1. □

4.7.3. Conjectures

Si la conjecture dans l'annexe est vérifiée, alors le lemme suivant est valide.

Lemme 4.7.3 (Conjecture)**.** *La condition (4.17) entraîne que* $\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}} \|\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_\Phi < \infty$.

Preuve. Soient $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^d$ tels que $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$. Alors en appliquant l'inégalité de Burkholder pour les espaces de Orlicz (voir la conjecture dans l'annexe), il existe $C>0$ tel que

$$\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \|\mathcal{P}_{\boldsymbol{0}}(X_{\boldsymbol{k}})\|_\Phi^2 \leqslant C \left\|\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \mathcal{P}_{-\boldsymbol{k}}(X_{\boldsymbol{0}})\right\|_\Phi^2 \leqslant 2^{2d} C \|\mathbb{E}_{-\boldsymbol{a}} f[X_{\boldsymbol{0}}]\|_\Phi^2. \tag{4.25}$$

Alors, d'après l'inégalité de Hölder ainsi que (4.25), on trouve que

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{1}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi} \leqslant \sum_{\boldsymbol{n}\geqslant\mathbf{0}} 2^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} \left(\sum_{\boldsymbol{k}=2^{\boldsymbol{n}}}^{2^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}-\mathbf{1}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{k}})\|_{\Phi}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant 2^d C \sum_{\boldsymbol{n}\geqslant\mathbf{0}} 2^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} \|\mathbb{E}_{-2^{\boldsymbol{n}}}[X_{\mathbf{0}}]\|_{\Phi},$$

où $2^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} = 2^{\frac{n_1}{2}} \times \cdots \times 2^{\frac{n_d}{2}}$). Puisque $\|\mathbb{E}_{-2^{\boldsymbol{n}}}[X_{\mathbf{0}}]\|$ est décroissante suivant toutes les coordonnées de $\boldsymbol{n}$, nous en déduisons que pour tout $\boldsymbol{n}$ tel que $n_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, on a

$$2^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} \|\mathbb{E}_{-2^{\boldsymbol{n}}}[X_{\mathbf{0}}]\|_{\Phi} \leqslant 2^d \sum_{\boldsymbol{u}=2^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}^{2^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}} \frac{\|\mathbb{E}_{\mathbf{0}}[X_{\boldsymbol{u}}]\|_{\Phi}}{|\boldsymbol{u}|^{1/2}}.$$

De même, si $\boldsymbol{n} \in (\mathbb{N})^d$ admet des coordonnées $(j_1, \ldots, j_k)$ nulles et les autres non nulles, où $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant d, k \in [\![1, d]\!]$, alors

$$2^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} \|\mathbb{E}_{-2^{\boldsymbol{n}}}[X_{\mathbf{0}}]\|_{\Phi} \leqslant 2^d \sum_{\boldsymbol{u}=2^{\boldsymbol{n}^{(j_1,\ldots,j_k)}}}^{2^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}} \frac{\|\mathbb{E}[X_{\boldsymbol{k}}]\|_{\Phi}}{|\boldsymbol{u}|^{1/2}}.$$

Donc, d'après les inégalités ci-dessus, nous avons montré que (4.17) entraîne

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{1}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{u}})\|_{\Phi} < +\infty.$$

De manière similaire, nous avons pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ et pour tout $(j_1, \ldots, j_i) \in [\![1, d]\!]^i$ tel que $j_1 < \cdots < j_i$, on a

$$\sum_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\ldots,j_i)}\geqslant\mathbf{1}^{(j_1,\ldots,j_i)}} \|\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(X_{\boldsymbol{u}^{(j_1,\ldots,j_i)}})\|_{\Phi} < +\infty.$$

Donc (4.15) est satisfaite. □

Sous cette même conjecture, nous pouvons obtenir la preuve suivante du théorème 4.6.7.

Preuve du théorème 4.6.7. Le théorème est conséquence du théorème 4.6.4 ainsi que des lemmes 4.7.2 et 4.7.3. □

4.8. Exemples

Dans cette section, nous appliquons nos résultats aux deux exemples classiques que nous avons déjà rencontrés dans ce mémoire. L'utilisation de nos théorèmes permet d'améliorer les résultats obtenus dans le chapitre 3 (voir aussi [ZRP19]) en réduisant les conditions imposées sur les moments.

4.8.1. Champ linéaire

Exemple 4.8.1 (Conjecture). (Champ linéaire) Soit $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires réelles i.i.d. centrées et telles que $E\left[|\xi_{\mathbf{0}}|^2 (\log(1 + |\xi_{\mathbf{0}}|))^{d-1}\right] < +\infty$. Pour tout $\boldsymbol{k} \geqslant \mathbf{0}$, on note

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant\mathbf{0}} a_{\boldsymbol{j}} \xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}.$$

Supposons que la condition suivante est satisfaite

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geqslant\boldsymbol{1}} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/2}} \Big(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{4.26}$$

Alors la convergence du TCL fonctionnel *quenched* 4.6.7 est satisfaite.

Le TCL fonctionnel *quenched* obtenu plus tôt dans le chapitre 3 par Na Zhang et al. (voir aussi Remarque 6.2 (c) dans [ZRP19]) requiert l'existence du q-ième moment des innovations, alors que nous ne requérons simplement que la variable $\xi_{\boldsymbol{0}}$ satisfasse une condition d'Orlicz afin d'obtenir la convergence *quenched*. De plus, nous imposons des hypothèses moins restrictives sur les coefficients $a_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u} \in Z^d$ que dans l'exemple 4.5.1.

Preuve de l'exemple 4.8.1. D'après l'indépendance des $\xi_{\boldsymbol{n}}$, on a

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{1}}\left[X_{\boldsymbol{u}}\right] = \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant\boldsymbol{u}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}.$$

Alors, d'après l'inégalité de Burkholder pour les espaces de Orlicz (voir la conjecture située dans l'annexe), on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}_{\boldsymbol{1}}\left[X_{\boldsymbol{u}}\right]\|_{\Phi}^2 &= \left\| \sum_{\boldsymbol{j}\geqslant\boldsymbol{u}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}} \right\|_{\Phi}^2 \\ &\leqslant C \left(\sum_{\boldsymbol{j}\geqslant\boldsymbol{u}-\boldsymbol{1}} a_{\boldsymbol{j}}^2 \|\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}\|_{\Phi}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Par stationnarité et puisque $\|\xi_{\boldsymbol{0}}\|_{\Phi} < +\infty$, on obtient, en utilisant l'hypothèse (4.26), que la condition (4.17) est satisfaite. Ce qui termine la preuve. □

4.8.2. Champ de Volterra

Exemple 4.8.2 (Conjecture). (Champ de Volterra) Soit $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires réelles i.i.d. centrées et telles que $\mathbb{E}\left[|\xi_{\boldsymbol{0}}|^2 \left(\log(1+|\xi_{\boldsymbol{0}}|)\right)^{d-1}\right] < +\infty$. Pour tout $\boldsymbol{k} \geqslant \boldsymbol{0}$, on définit

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}.$$

où $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$ sont des coefficients réels tels que $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}} = 0$ et $\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2 < \infty$.
De plus, on suppose que

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geqslant\boldsymbol{1}} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1/2}} \Big(\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}) \\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2 \Big)^{1/2} \leqslant 1, \tag{4.27}$$

Alors la convergence *quenched* du théorème 4.6.7 est satisfaite.

Ceci est une généralisation du théorème central limite *quenched* 4.5.2. Ici, nous ne requérons qu'une condition à la Orlicz sur la variable $\xi_{\boldsymbol{0}}$ et nous réduisons la condition (4.11) donnée par Na Zhang et al. en la remplaçant par la condition (4.27).

Preuve. On remarque

$$\mathbb{E}_{\mathbf{1}}\left[X_{\boldsymbol{k}}\right] = \sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{k}-\mathbf{1}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}$$

Soit $(\xi'_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\xi''_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$ deux copies indépendantes de $(\xi_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}$. D'après l'inégalité de découplage (voir le théorème 3.1.1 dans le livre de De la Peña and Giné [PG99], p.99) et l'inégalité de Jensen, on obtient pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Phi\left(\left|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}\left[X_{\boldsymbol{k}}\right]\right|/t\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{1}{t}\left|\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{k}-\mathbf{1}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}\right|\right)\right] \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{C}{t}\left|\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{k}-\mathbf{1}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi'_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi''_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}\right|\right)\right].\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}\left[X_{\boldsymbol{k}}\right]\right\|_{\Phi} \leqslant C\left\|\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{k}-\mathbf{1}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\xi'_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\xi''_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}\right\|_{\Phi}.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Burkholder pour les espaces de Orlicz (voir la conjecture 4.8.3 dans l'annexe), on obtient

$$\left\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}\left[X_{\boldsymbol{k}}\right]\right\|_{\Phi} \leqslant C\left(\sum_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant(\boldsymbol{k}-\mathbf{1},\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}}} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}^2\left\|\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{u}}\right\|_{\Phi}\left\|\xi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v}}\right\|_{\Phi}\right)^{1/2}$$

Par stationnarité et puisque $\|\xi_{\mathbf{0}}\|_{\Phi} < +\infty$, on obtient, d'après l'hypothèse (4.27), que

$$\sum_{\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{0}} \frac{\left\|\mathbb{E}_{\mathbf{1}}[X_{\boldsymbol{u}}]\right\|_{\Phi}}{|\boldsymbol{u}|^{1/2}} < +\infty.$$

D'où le résultat. □

Annexe

Nous conjecturons une généralisation de l'inégalité de Burkholder pour les espaces d'Orlicz.

Théorème 4.8.3 (Conjecture)**.** *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale d'accroissement $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, alors il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$c\left(\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|_{\Phi}^2\right)^{1/2} \leqslant \|M_n\|_{\Phi} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|_{\Phi}^2\right)^{1/2}.$$

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier tout particulièrement Dalibor Volný pour les remarques importantes qu'il a apportées durant la rédaction de ce travail en collaboration avec Na Zhang.

Troisième partie

Estimateurs à noyau

5. Estimateur à noyau de la régression de Nadaraya-Watson pour des données spatiales

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau de la régression de Nadaraya-Watson pour des données spatiales acquises dans une région finie de la grille $\mathbb{Z}^d$. Les résultats présentés et démontrés dans ce chapitre ont été publiés dans l'article de Mohamed El Machkouri, Xiequan Fan et Lucas Reding [EMFR20] et concernent les champs fortement mélangeants au sens de Rosenblatt [Ros56a] et les champs faiblement dépendants au sens de Wu [Wu05]. Nous ne requérons que les conditions minimales sur le paramètre de fenêtre ainsi que des conditions simples sur les coefficients de dépendance.

5.1. Modèle de régression et estimateur de Nadaraya-Watson

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la normalité asymptotique de cet estimateur dans le cadre de données spatiales dépendantes. On considère N un entier strictement positif et $((Y_{\boldsymbol{i}}, X_{\boldsymbol{i}}))_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons que la loi commune μ des variables aléatoires $X_i, i \in \mathbb{Z}^d$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. On note par f une densité (inconnue) de μ. Soit Λ_n une région finie de $\mathbb{Z}^d$ et soit $(\eta_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ centrées et dont les carrés de leurs normes euclidiennes sont intégrables, que l'on suppose indépendant du champ $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$. Le modèle de régression est caractérisé par la relation $Y_{\boldsymbol{i}} = R(X_{\boldsymbol{i}}, \eta_{\boldsymbol{i}})$ pour tout $\boldsymbol{i} \in \Lambda_n$ où R est une fonctionnelle inconnue. Dans notre cadre, il est important de remarquer qu'aucune régularité n'est requise sur la région $|\Lambda_n|$ qui peut donc être très générale. La fonction de régression r est définie en tout point $x \in \mathbb{R}^N$ par

$$r(x) = \begin{cases} \mathbb{E}\left[R(x, \eta_0)\right] & \text{si } \ f(x) \neq 0 \\ \mathbb{E}\left[Y_0\right] & \text{sinon,} \end{cases}$$

et rappelons que l'estimateur de Nadarya-Watson r_n de r est défini en tout point x de $\mathbb{R}^N$ par

$$r_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} Y_{\boldsymbol{i}} \mathrm{K}\left(\frac{x-X_{\boldsymbol{i}}}{b_n}\right)}{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \mathrm{K}\left(\frac{x-X_{\boldsymbol{i}}}{b_n}\right)} & \text{si } \ \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \mathrm{K}\left(\frac{x-X_{\boldsymbol{i}}}{b_n}\right) \neq 0 \\ \dfrac{1}{|\Lambda_n|} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} Y_{\boldsymbol{i}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $|\Lambda_n|$ est le cardinal de l'ensemble Λ_n, $\mathrm{K} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est un noyau de probabilité et le paramètre de fenêtre b_n est un nombre strictement positif qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour les suites de v.a. (i.e. pour $d = 1$), le problème auquel nous nous proposons de répondre a été étudié en détails. On pourra citer, notamment, Zudi Lu et Ping Cheng [LC97], Lias Masry et Jianqing Fan [MF97], Peter Robinson [Rob83], George Roussas [Rou88] et bien d'autres références. Dans le cas spatial (i.e. pour $d \geqslant 2$), de nombreuses contributions pour le cas des champs fortement mélangeants furent apportées par Gérard Biau et Benoît Cadre [BC04], Michel Carbon

et al. [CFT07], Sophie Dabo-Niang et al. [DNRY11], Sophie Dabo-Niang et Anne-Françoise Yao [DNY07], Mohamed El Machkouri [EM07], Mohamed El Machkouri et Radu Stoica [EMS10], Marc Hallin et al. [HLT04] et Zudi Lu et Xing Chen [LC02 ; LC04]. Le but principal de ce chapitre est de donner des conditions suffisantes simples pour obtenir la normalité asymptotique de l'estimateur de Nadaraya-Watson dans le cadre du mélange fort et de la dépendance faible au sens de Wu. À notre connaissance, les résultats présentés dans la section suivante sont les premiers donnant un théorème central limite (théorème 5.2.2) pour l'estimateur de Nadaraya-Watson sous les *conditions minimales sur le paramètre de fenêtre* et pour des données spatiales dépendantes. En particulier, nos résultats améliorent de plusieurs manières le théorème central limite pour l'estimateur de Nadarya-Watson dans le cas spatial établi par Gérard Biau et Benoît Cadre [BC04] (voir les commentaires qui suivent le corollaire 5.2.3 ci-dessous).
Ce chapitre est organisé comme suit. Nos résultats principaux sont énoncés dans la partie 5.2 alors que les preuves des résultats principaux et des lemmes intermédiaires sont présentées dans les parties 5.4 et 5.5. Enfin, dans la partie 5.3, nous donnerons une illustration du théorème central limite obtenu dans la partie 5.2.

5.2. Résultats principaux

Soit m un entier strictement positif. On va établir les résultats pour des champs fortement mélangeants ainsi que pour des champs de Bernoulli de la forme

$$X_{\boldsymbol{i}} = G\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}\,;\, \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d\right), \quad \boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d, \tag{5.1}$$

où $G : (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction et $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Tout comme dans les chapitres précédents, nous illustrons notre propos en donnant deux exemples de champs de Bernoulli ainsi que des conditions suffisantes pour qu'ils soient p-stables.

— *Champ linéaire* : Soit $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ tel que $\varepsilon_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \geqslant 2$. Le champ linéaire X défini pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$ par

$$X_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d} A_s \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}$$

où $A_{\boldsymbol{s}} = (a_{\boldsymbol{s},k_1,k_2})_{\substack{1\leqslant k_1\leqslant N\\ 1\leqslant k_2\leqslant m}}$ est une matrice de taille $N\times m$ telle que $\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k_1=1}^N\sum_{k_2=1}^m a^2_{\boldsymbol{s},k_1,k_2} < +\infty$ est de la forme (5.1) avec G une application linéaire. Pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\delta_{\boldsymbol{i},p} \leqslant \|\varepsilon_{\boldsymbol{0}} - \varepsilon'_{\boldsymbol{0}}\|_p \times \sqrt{\sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^m a^2_{\boldsymbol{i},k_1,k_2}}.$$

Alors, X est p-stable dès que $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\sqrt{\sum_{k_1=1}^N\sum_{k_2=1}^m a^2_{\boldsymbol{i},k_1,k_2}} < +\infty$. Clairement, si H est une fonction lipschitzienne et sous l'hypothèse précédente, le processus sous-jacent $Y_{\boldsymbol{i}} = \mathrm{H}(X_{\boldsymbol{i}})$ est aussi p-stable.

— *Champ de Volterra* : Une autre classe de champs non linéaires de variables aléatoires est celle des champs de Volterra qui jouent un rôle important en théorie des systèmes non-linéaires. Soit $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$ et

$$X_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{u}} \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{v}},$$

où $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$ sont des coefficients réels vérifiant $a_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} = 0$ si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ et $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de v.a.i.i.d. tel que $\varepsilon_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \geqslant 2$. D'après l'inégalité de Burkholder, il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\delta_{\boldsymbol{i},p} \leqslant C_p \|\varepsilon_{\boldsymbol{0}} - \varepsilon_{\boldsymbol{0}}^{'}\|_p \|\varepsilon_{\boldsymbol{0}}\|_p \times \sqrt{\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d} (a_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{i}} + a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{s}})^2}$$

Donc, X est p-stable dès que $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \sqrt{\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d} (a_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{i}} + a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{s}})^2} < +\infty$.

Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres strictement positifs qui converge vers zéro. On définit $\mathrm{K}_n(x, v) = \mathrm{K}\left(\frac{x-v}{b_n}\right)$ pour tout $(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et pour tout entier $n \geqslant 1$. Si $x \in \mathbb{R}^N$ et $f_n(x) \neq 0$ alors $r_n(x) = \varphi_n(x)/f_n(x)$, où

$$\varphi_n(x) = \frac{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} Y_{\boldsymbol{i}} \mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{i}})}{|\Lambda_n| b_n^N} \quad \text{et} \quad f_n(x) = \frac{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{i}})}{|\Lambda_n| b_n^N}.$$

Rappelons que f_n est l'estimateur à noyau de la densité f de X_0 de Parzen-Rosenblatt (2.2). De même, si φ est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ par $\varphi(x) = r(x)f(x)$ alors φ_n est un estimateur de φ. Dans la suite, on considère les hypothèses suivantes.

(A1) $b_n \to 0$, $|\Lambda_n| b_n^N \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et K est pair, lipschitz et vérifie $|\mathrm{K}|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}^N} |\mathrm{K}(t)| < +\infty$, $\lim_{\|t\|\to+\infty} \|t\| \, |\mathrm{K}(t)| = 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\mathrm{K}(t)| \mathrm{d}t < +\infty$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \|t\|^2 |\mathrm{K}(t)| \mathrm{d}t < +\infty$ où nous rappelons que $\|\,.\,\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$.

(A2) Il existe $\kappa > 0$ tel que $|f_{0,i}(x, y) - f(x)f(y)| \leqslant \kappa$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$, où $f_{\boldsymbol{0},\boldsymbol{i}}$ est la densité jointe de $(X_{\boldsymbol{0}}, X_{\boldsymbol{i}})$.

(A3) Il existe $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{0}}|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et l'une de ces conditions est satisfaite :

(i) $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{(2d-1)\theta+6d-2}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(n) < +\infty$;

(ii) $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (5.1) et $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{i}|^{\frac{d((3N+2)\theta^2+(10N+8)\theta+8N)}{2\theta(\theta+2)N}} \delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} < +\infty$.

(A4) Il existe $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{0}}|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et la fonction $x \mapsto \mathbb{E}\left[\Psi_p\left(|Y_{\boldsymbol{0}}|\right) | X_{\boldsymbol{0}} = x\right]$ est continue pour $p \in \{1, 2, 2+\theta\}$ où $\Psi_p(t) = t^p$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, les fonctions f et φ sont deux fois différentiables et leurs dérivées partielles d'ordre 2 sont bornées.

Les hypothèses $(A1)$, $(A2)$ et $(A4)$ sont des conditions classiques dans le domaine de l'estimation non-paramétrique (voir [CFT07], [LC02]). De plus, remarquons qu'en prenant $\theta = +\infty$ alors $(A3)(i)$ et $(A3)(ii)$ se réduisent aux conditions obtenues, respectivement, dans [EM11] et dans [EM14] où la normalité asymptotique de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt est établie.

5.2.1. Biais asymptotiques

Dans un premier temps, on montre que φ_n et f_n sont des estimateurs asymptotiquement non-biaisés de φ et f respectivement.

Théorème 5.2.1. *Supposons que f et φ sont deux fois différentiables et leurs dérivées partielles d'ordre 2 sont bornées et supposons que $\int_{\mathbb{R}^N} \|t\|^2 |\mathrm{K}(t)| \mathrm{d}t < +\infty$. Alors*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\mathbb{E}\left[f_n(x)\right] - f(x)| = O\left(b_n^2\right) \quad \textit{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right] - \varphi(x)| = O\left(b_n^2\right).$$

Par conséquent, si $|\Lambda_n| b_n^{N+4} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{|\Lambda_n| b_n^N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\mathbb{E}\left[f_n(x)\right] - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{|\Lambda_n| b_n^N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right] - \varphi(x)| = 0.$$

5.2.2. Normalité asymptotique

Notre résultat principal est le théorème central limite pour l'estimateur de Nadaraya-Watson suivant.

Théorème 5.2.2. *Si (A1), (A2), (A3) et (A4) sont satisfaites, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) > 0$,*

$$\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}\left(r_n(x) - \frac{\mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right]}{\mathbb{E}\left[f_n(x)\right]}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(x)\right),$$

où $\sigma^2(x) = \frac{V(x)}{f(x)} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t$ et $V(x) = \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2 | X_0 = x\right] - r^2(x)$.

D'après le théorème 5.2.1, si l'hypothèse $|\Lambda_n| b_n^{N+4} \to 0$ est satisfaite, alors on peut contrôler le biais de l'estimateur et on obtient immédiatement le corollaire suivant (preuve laissée au lecteur).

Corollaire 5.2.3. *Si (A1), (A2), (A3) et (A4) sont satisfaites et $|\Lambda_n| b_n^{N+4} \to 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) > 0$,*

$$\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}\left(r_n(x) - r(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(x)\right),$$

où la variance asymptotique $\sigma^2(x)$ est donnée dans le théorème 5.2.2.

À notre connaissance, le théorème 5.2.2 est le premier théorème central limite pour l'estimateur de Nadaraya-Watson sous les conditions minimales de fenêtre et pour des données spatiales. En particulier, nous améliorons de plusieurs manières le théorème 2.2 dans [BC04] pour des champs fortement mélangeants dans lequel les auteurs ont considéré plusieurs conditions sur le paramètre de fenêtre et les coefficients de mélange qui relient ces différents paramètres entre eux. Plus précisément, en utilisant nos notations, le théorème 2.2 dans [BC04] donne la normalité asymptotique de l'estimateur de Nadaraya-Watson si $\mathbb{E}\left[\exp\left(|Y_{\mathbf{0}}|^\tau\right)\right] < +\infty$ pour un certain τ, si les régions Λ_n sont rectangulaires et vérifient $|\Lambda_n| b_n^{N+2} \to 0$ et $|\Lambda_n| b_n^{N(1+2\delta d)} \log(|\Lambda_n|)^{-8d/\tau} \to +\infty$ pour un certain $0 < \delta < 1/2$ et s'il existe $q_n \to +\infty$ tel que $q_n^{2d} = o\left(b_n^{N(1+2\delta d)} \log(|\Lambda_n|)^{-8d/\tau}\right)$, $|\Lambda_n| \sum_{n\geqslant 1} n^{d-1} \alpha_{1,\infty}(nq_n) \to 0$ et $b_n^{-N\delta} \left(\log(|\Lambda_n|)\right)^{2/\tau} \sum_{n\geqslant q_n} n^{d-1} \alpha_{1,\infty}^{\delta}(n) \to 0$. En particulier, les auteurs requièrent que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{d-1} \alpha_{1,\infty}^{\delta}(n) < +\infty$. Afin de comparer avec nos résultats, on peut remarquer que si $\delta = \theta/(2+\theta) \in]0, 1/2[$ et $\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|^{2+\theta}\right]$ où $0 < \theta < 2$ alors $(A3)(i)$ se réécrit $\sum_{n\geqslant 1} n^{d(3-\delta)-1} \alpha_{1,\infty}^{\delta}(n) < +\infty$. Cependant, notre résultat principal reste valide même si l'on ne suppose pas que Y_0 admette des moments exponentiels, pour des régions Λ_n plus générales et sous les conditions minimales de fenêtre ($b_n \to 0$ et $|\Lambda_n| b_n^N \to +\infty$).

5.3. Illustrations numériques

Afin d'illustrer la normalité asymptotique de l'estimateur de Nadaraya-Watson obtenue au travers du théorème 5.2.3, nous allons étudier deux modèles où les prédicteurs seront donnés par un champ autorégressif $\left(X_{i,j}^{(\mathrm{AR})}\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ et un champ de Volterra $\left(X_{i,j}^{(\mathrm{Vol})}\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ respectivement (voir le modèle 1 et le modèle 2 en-dessous). Dans le premier modèle, le champ autoregressif $\left(X_{i,j}^{(\mathrm{AR})}\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ est défini par

$$X_{i,j}^{(\mathrm{AR})} = 0{,}7 X_{i-1,j}^{(\mathrm{AR})} + 0{,}15 X_{i,j-1}^{(\mathrm{AR})} + \varepsilon_{i,j}, \tag{5.2}$$

où $(\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ est un champ de v.a.r.i.i.d. ($N = 1$) de loi normale centrée et réduite. D'après [Kul92], la solution stationnaire du modèle (5.2) est le champ linéaire donné par

$$X_{i,j}^{(\mathrm{AR})} = \sum_{s_1\geqslant 0}\sum_{s_2\geqslant 0}\binom{s_1+s_2}{s_1}(0{,}7)^{s_1}(0{,}15)^{s_2}\varepsilon_{i-s_1,j-s_2}. \tag{5.3}$$

Donc, on considère un entier strictement positif n_1 et on simule les variables aléatoires $\varepsilon_{i,j}$ pour (i,j) sur la grille $[0,2n_1]^2\cap\mathbb{Z}^2$ afin d'obtenir les données $X_{i,j}^{(\mathrm{AR})}$ pour $(i,j)\in[n_1+1,2n_1]^2\cap\mathbb{Z}^2$ selon le modèle (5.2) et la relation (5.3). Dans le second modèle, afin d'étudier un cas non-linéaire, on définit

$$X_{i,j}^{(\mathrm{Vol})} = \sum_{s_1\geqslant 0}\sum_{s_2\geqslant 0}\sum_{t_1>s_1}\sum_{t_2>s_2}\binom{s_1+s_2}{s_1}\binom{t_1-s_1+t_2-s_2}{t_1-s_1}(0{,}7)^{s_1+t_1}(0{,}15)^{s_2+t_2}\varepsilon_{i-s_1,j-s_2}\varepsilon_{i-t_1,j-t_2}.$$

Puisque

$$X_{i,j}^{(\mathrm{Vol})} = \sum_{s_1\geqslant 0}\sum_{s_2\geqslant 0}\binom{s_1+s_2}{s_1}(0{,}7)^{2s_1}(0{,}15)^{2s_2}\varepsilon_{i-s_1,j-s_2}\beta_{i-s_1,j-s_2} \tag{5.4}$$

où

$$\beta_{i,j} = \sum_{t_1>0}\sum_{t_2>0}\binom{t_1+t_2}{t_1}(0{,}7)^{t_1}(0{,}15)^{t_2}\varepsilon_{i-t_1,j-t_2}, \tag{5.5}$$

on se fixe un entier strictement positif n_2 et on simule les variables aléatoires $\varepsilon_{i,j}$ pour (i,j) sur la grille $[0,4n_2]^2\cap\mathbb{Z}^2$ afin d'obtenir les données $\beta_{i,j}$ pour $(i,j)\in[2n_2+1,4n_2]^2\cap\mathbb{Z}^2$ selon le modèle (5.5) et d'après l'algorithme précédent calculant $(X_{i,j}^{(\mathrm{AR})})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$. En démarrant avec les données $\varepsilon_{i,j}\beta_{i,j}$ pour $(i,j)\in[2n_2+1,4n_2]^2$, on simule de la même manière les données $X_{i,j}^{(\mathrm{Vol})}$ pour $(i,j)\in[3n_2+1,4n_2]^2$ en utilisant la relation (5.4). On construit deux jeux de données

$$Y_{i,j}^{(\mathrm{AR})} = \sin\left(X_{i,j}^{(\mathrm{AR})}\right)+\eta_{i,j},\quad (i,j)\in[n_1+1,2n_1]^2 \qquad \text{(Modèle 1)}$$

et

$$Y_{i,j}^{(\mathrm{Vol})} = \sin\left(X_{i,j}^{(\mathrm{Vol})}\right)+\eta_{i,j},\quad (i,j)\in[3n_2+1,4n_2]^2 \qquad \text{(Modèle 2)},$$

où $(\eta_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ est un champ de v.a.r.i.i.d. de loi normale centrée réduite et est indépendant du champ $(\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$. Suite à cela, on simule 500 instances de $\sqrt{2\sqrt{\pi}\hat{f}_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0)n_1^2b_{n_1}}\,r_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0)$ et $\sqrt{2\sqrt{\pi}\hat{f}_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0)n_2^2b_{n_2}}\,r_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0)$ où

$$\hat{f}_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0) = \frac{1}{n_1^2b_{n_1}}\sum_{(i,j)\in[n_1+1,2n_1]^2}\mathrm{K}\left(\frac{X_{i,j}^{(\mathrm{AR})}}{b_{n_1}}\right),\qquad \hat{f}_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0) = \frac{1}{n_2^2b_{n_2}}\sum_{(i,j)\in[n_2+1,2n_2]^2}\mathrm{K}\left(\frac{X_{i,j}^{(\mathrm{Vol})}}{b_{n_2}}\right),$$

$$r_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0) = \frac{\sum_{(i,j)\in[n_1+1,2n_1]^2}Y_{i,j}^{(\mathrm{AR})}\,\mathrm{K}\left(\frac{X_{i,j}^{(\mathrm{AR})}}{b_{n_1}}\right)}{n_1^2b_{n_1}\hat{f}_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0)},\qquad r_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0) = \frac{\sum_{(i,j)\in[3n_2+1,4n_2]^2}Y_{i,j}^{(\mathrm{Vol})}\,\mathrm{K}\left(\frac{X_{i,j}^{(\mathrm{Vol})}}{b_{n_2}}\right)}{n_2^2b_{n_2}\hat{f}_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0)},$$

le noyau K est Gaussien et les paramètres de fenêtre b_{n_1} et b_{n_2} sont choisis par validation croisée. Dans l'histogramme 5.1 on a représenté

$$\sqrt{2\sqrt{\pi}\hat{f}_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0)n_1^2b_{n_1}}\,r_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0)\quad\text{and}\quad\sqrt{2\sqrt{\pi}\hat{f}_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0)n_2^2b_{n_2}}\,r_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0)$$

où $n_1,n_2\in\{10,30\}$ ainsi qu'une densité de la loi normale centrée réduite.

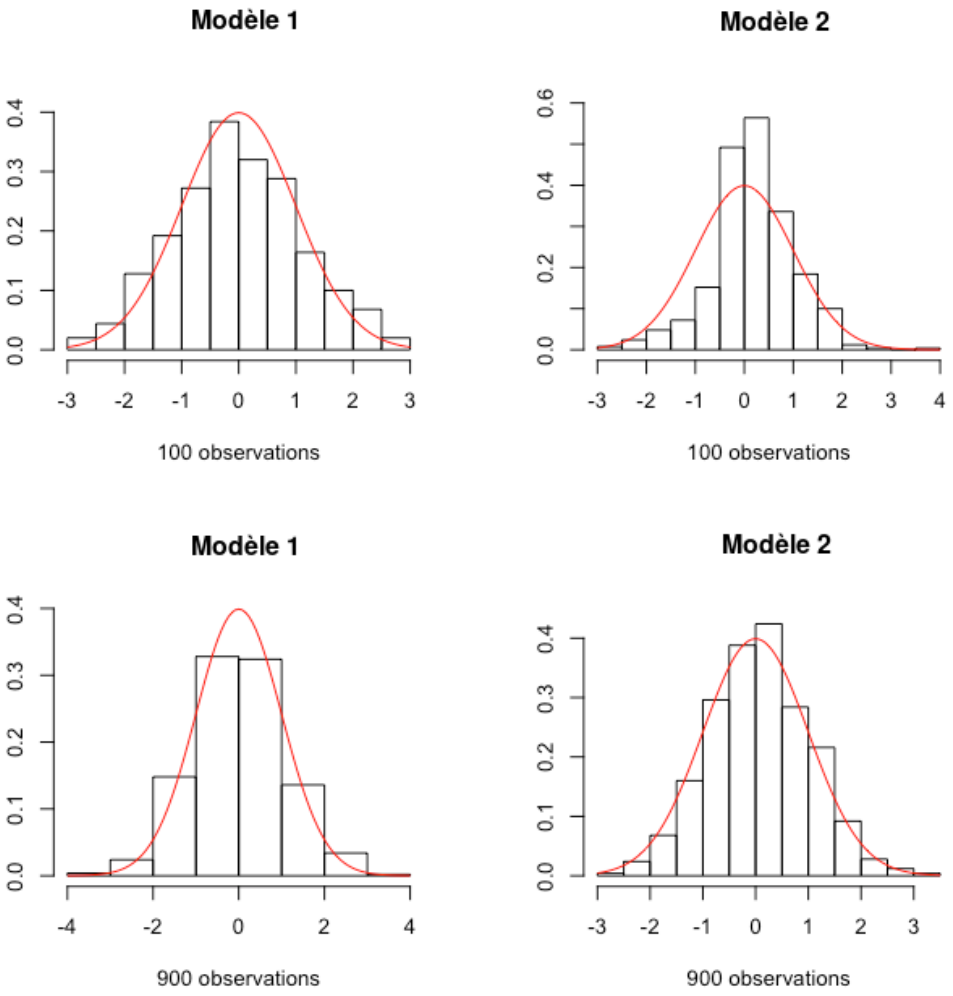


FIGURE 5.1. – Histogramme de $\sqrt{2\sqrt{\pi}\hat{f}_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0)n_1^2 b_{n_1} r_{n_1}^{(\mathrm{AR})}(0)}$ (Modèle 1) et $\sqrt{2\sqrt{\pi}\hat{f}_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0)n_2^2 b_{n_2} r_{n_2}^{(\mathrm{Vol})}(0)}$ (Modèle 2) ainsi qu'une densité de la loi normale centrée réduite.

5.4. Lemmes préliminaires

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit aussi $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier supérieur ou égale à x.

On aura besoin des lemmes techniques suivants.

Lemme 5.4.1. *On suppose que (A1), (A2) et (A4) sont satisfaites et on considère $x \in \mathbb{R}^N$. Si $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $x \mapsto \mathbb{E}\left[\Phi_1(Y_0)|X_0 = x\right]$ est continue et les conditions $\sup_{t\in\mathbb{R}^N} |\Phi_2(\mathrm{K}(t))| < +\infty$, $\lim_{\|t\|\to+\infty} \|t\| \, |\Phi_2(\mathrm{K}(t))| = 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_2(\mathrm{K}(t))| \, \mathrm{d}t < +\infty$ sont vérifiées alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\Phi_1(Y_0)\Phi_2\left(\mathrm{K}_n(x, X_0)\right)\right]}{b_n^N} = \mathbb{E}\left[\Phi_1(Y_0)|X_0 = x\right] f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_2\left(\mathrm{K}(v)\right) dv.$$

De plus, on a aussi $\sup_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ j\neq 0}} \mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x,X_j)|\right] \trianglelefteq b_n^{2N}$.

Preuve. Soient $x\in\mathbb{R}^N$ et n un entier strictement positif. Clairement, on a

$$\mathbb{E}\left[\Phi_1(Y_{\mathbf{0}})\Phi_2\left(\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\right)\right] = b_n^N \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{E}\left[\Phi_1\left(Y_{\mathbf{0}}\right) \mid X_{\mathbf{0}} = x - vb_n\right] \Phi_2\left(\mathrm{K}(v)\right) f(x-vb_n)\mathrm{d}v.$$

D'après le théorème 1A dans [Par62], on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{E}\left[\Phi_1\left(Y_{\mathbf{0}}\right) \mid X_{\mathbf{0}} = x - vb_n\right] \Phi_2\left(\mathrm{K}(v)\right) f(x-vb_n)\mathrm{d}v \\ = \mathbb{E}\left[\Phi_1\left(Y_{\mathbf{0}}\right) \mid X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_2\left(\mathrm{K}(v)\right)\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\Phi_1\left(Y_{\mathbf{0}}\right)\Phi_2\left(\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\right)\right]}{b_n^N} = \mathbb{E}\left[\Phi_1\left(Y_{\mathbf{0}}\right) \mid X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_2\left(\mathrm{K}(v)\right)\mathrm{d}v. \tag{5.6}$$

D'autre part, d'après les hypothèses (A1) et (A2) et en utilisant (5.6), on obtient

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{j}})|\right] \leqslant \kappa\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\mathrm{K}_n(x,u)|\,\mathrm{d}u\right)^2 + \left(\mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})|\right]\right)^2 \trianglelefteq b_n^{2N}.$$

Le lemme 5.4.1 est prouvé. □

Lemme 5.4.2. *Si* $(A3)$ *est satisfaite, alors il existe une suite* $(m_n)_{n\geqslant 1}$ *de réels strictement positifs vérifiant*

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} = 0$$

et

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}} \sum_{|i|>m_n} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}\left(|\boldsymbol{i}|\right) = 0 & \textit{si } (A3)(i) \textit{ est satisfaite} \\ \lim_{n\to+\infty} b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n} |\boldsymbol{i}|^d \delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} = 0 & \textit{si } (A3)(ii) \textit{ est satisfaite.} \end{cases}$$

Remarquons que dès lors que $|\Lambda_n| b_n^N \to +\infty$, *on a* $m_n^d = o\left(|\Lambda_n|\right)$.

Preuve. Dans un premier temps, on suppose que $(A3)(i)$ est satisfaite. Alors, on a $\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{i}|^{\frac{d(4+\theta)}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{i}|) < +\infty$ pour un certain $\theta > 0$. Soit $\gamma > (4+\theta)/(2+\theta)$ fixé et soit $(m_n)_{n\geqslant 1}$ défini par

$$m_n = \max\left\{v_n, \left\lceil b_n^{\frac{-\theta N}{d(4+\theta)}} \left(\sum_{|i|>v_n} |i|^{\frac{d(4+\theta)}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|i|)\right)^{\frac{1}{d\gamma}}\right\rceil\right\} \quad \text{et} \quad v_n = \lfloor b_n^{\frac{-\theta N}{2d(4+\theta)}} \rfloor.$$

Puisque $v_n \to +\infty$, on a $m_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. De plus,

$$m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} \trianglelefteq \max\left\{b_n^{\frac{\theta N}{2(4+\theta)}}, \left(\sum_{|\boldsymbol{i}|>v_n} |\boldsymbol{i}|^{\frac{d(4+\theta)}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{i}|)\right)^{\frac{1}{\gamma}} + b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $v_n \leqslant m_n$, on a

$$m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} \geqslant \Big(\sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n} |\boldsymbol{i}|^{\frac{d(4+\theta)}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{i}|) \Big)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}} \sum_{|i|>m_n} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|i|) &\leqslant \Big(m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} \Big)^{-\frac{4+\theta}{2+\theta}} \sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n} |\boldsymbol{i}|^{\frac{d(4+\theta)}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{i}|) \\ &\leqslant \Big(\sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n} |\boldsymbol{i}|^{\frac{d(4+\theta)}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{i}|) \Big)^{\frac{\gamma(2+\theta)-4-\theta}{\gamma(2+\theta)}}. \end{aligned}$$

Comme $\gamma > (4+\theta)/(2+\theta)$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}} \sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{i}|) = 0$.

De la même manière, on suppose que $(A3)(ii)$ est vérifiée et on définit

$$\tilde{m}_n = \max\left\{ v_n, \left\lceil b_n^{\frac{-\theta N}{d(4+\theta)}} \Big(\sum_{|\boldsymbol{i}|>v_n} |\boldsymbol{i}|^{\frac{d((3N+2)\theta^2+(10N+8)\theta+8N)}{2\theta(2+\theta)N}} \delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \Big)^{\frac{1}{d\gamma}} \right\rceil \right\}$$

avec $\gamma > \frac{((N+2)\theta+2N)(\theta+4)}{2\theta(\theta+2)N}$.

Alors, en utilisant les mêmes arguments, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{m}_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{i}|>\tilde{m}_n} |\boldsymbol{i}|^d \delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} = 0.$$

La preuve est laissée au lecteur. Le lemme 5.4.2 est prouvé. □

Pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$, pour tout entier strictement positif n et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on note

$$\Delta_{\boldsymbol{i}} = \frac{\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{i}}) - \mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]}{\sqrt{b_n^N}} \quad \text{et} \quad \Theta_{\boldsymbol{i}} = \frac{Y_{\boldsymbol{i}}\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{i}}) - \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]}{\sqrt{b_n^N}}. \tag{5.7}$$

Lemme 5.4.3. *Supposons que (A1), (A2) et (A4) sont satisfaites. S'il existe $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|^{2+\theta}\right] < +\infty$, alors* $\max\{\|\Delta_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2, \|\Theta_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2\} \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}$.

Preuve. Soit $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|Y_0|^{2+\theta}\right] < +\infty$, on a

$$\|\Delta_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2 \leqslant \frac{2\,\|\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\|_{2+\theta}^2}{b_n^N} + \frac{2\left(\mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]\right)^2}{b_n^N}$$

et

$$\|\Theta_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2 \leqslant \frac{2\,\|Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\|_{2+\theta}^2}{b_n^N} + \frac{2\left(\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]\right)^2}{b_n^N}.$$

Rappelons que $|\mathrm{K}|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}^N} |\mathrm{K}(t)| < +\infty$ et en utilisant le lemme 5.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] &\trianglelefteq b_n^N, & \left|\mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]\right| &\trianglelefteq b_n^N, \\ \mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] &\trianglelefteq b_n^N \quad \text{and} & \left|\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]\right| &\trianglelefteq b_n^N. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $\max\{\|\Delta_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2, \|\Theta_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2\} \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}$. Le lemme 5.4.3 est prouvé. □

Lemme 5.4.4. *On suppose que (A1), (A2) et (A4) sont satisfaites. Alors,* $\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \mathbb{E}\left[|\Delta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}|\right] \trianglelefteq b_n^N$. *De plus, si* $\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|^{2+\theta}\right] < +\infty$ *pour un certain* $\theta > 0$ *alors*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \mathbb{E}\left[|\Theta_{\mathbf{0}}\Theta_{\boldsymbol{j}}|\right] \trianglelefteq b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} \quad \textit{et} \quad \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \mathbb{E}\left[|\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}|\right] \trianglelefteq b_n^{\frac{\theta N}{2+\theta}}.$$

Preuve. Soit $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d, \boldsymbol{j} \neq \mathbf{0}$, alors

$$\mathbb{E}\left[|\Delta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}|\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] + 3\left(\mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})|\right]\right)^2}{b_n^N}.$$

En appliquant le lemme 5.4.1, on obtient

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \mathbb{E}\left[|\Delta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}|\right] \trianglelefteq b_n^N.$$

Soit $L \geqslant 1$. On a

$$\mathbb{E}\left[|\Theta_{\mathbf{0}}\Theta_{\boldsymbol{j}}|\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] + 3\left(\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})|\right]\right)^2}{b_n^N} \tag{5.8}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] =& \mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|\leqslant L}\,\mathbb{1}_{|Y_{\boldsymbol{j}}|\leqslant L}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|\leqslant L}\,\mathbb{1}_{|Y_{\boldsymbol{j}}|> L}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|> L}\,\mathbb{1}_{|Y_{\boldsymbol{j}}|\leqslant L}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|> L}\,\mathbb{1}_{|Y_{\boldsymbol{j}}|> L}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right].
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] \leqslant& L^2\mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right] \\
&+ \sqrt{\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2\mathrm{K}_n^2(x, X_0)\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[Y_0^2\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|> L}\mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right]} \\
&+ \sqrt{\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|> L}\mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[Y_0^2\mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right]} \\
&+ \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|> L}\mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right].
\end{aligned}$$

Soit $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|^{2+\theta}\right] < +\infty$; d'après le lemme 5.4.1, on obtient

$$\frac{\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}Y_{\boldsymbol{j}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{j}})|\right]}{b_n^N} \trianglelefteq L^2 b_n^N + L^{-\theta/2} + L^{-\theta} \trianglelefteq L^2 b_n^N + L^{-\theta/2}. \tag{5.9}$$

On choisit, alors $L = b_n^{-\frac{2N}{4+\theta}}$ et en utilisant (5.8), (5.9) et le lemme 5.4.1, on a

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \mathbb{E}\left[|\Theta_{\mathbf{0}}\Theta_{\boldsymbol{j}}|\right] \trianglelefteq b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}.$$

Remarquons que

$$\mathbb{E}\left[|\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}|\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{j}})|\right] + 3\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})|\right]\mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})|\right]}{b_n^N}.$$

Donc, si $L' \geqslant 1$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}|\right] \leqslant \frac{L'\mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{j}})|\right]}{b_n^N} + \frac{\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|>L'}|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{j}})|\right]}{b_n^N} \\ + \frac{3\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})|\right]\mathbb{E}\left[|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})|\right]}{b_n^N}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|\,\mathbb{1}_{|Y_{\mathbf{0}}|>L'}|\mathrm{K}_n(x,X_{\mathbf{0}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{j}})|\right] \leqslant L'^{-\theta/2}\sqrt{\mathbb{E}\left[|Y_{\mathbf{0}}|^{2+\theta}\mathrm{K}_n^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]}.$$

En utilisant le lemme 5.4.1 et choisissant $L' = b_n^{-\frac{2N}{2+\theta}}$, on déduit que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}}\mathbb{E}\left[|\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}|\right] \lessdot L'b_n^N + L'^{-\theta/2} + b_n^N \lessdot b_n^{\frac{\theta N}{2+\theta}}.$$

Le lemme 5.4.4 est prouvé. □

5.4.1. Proposition 5.4.5

La proposition suivante est un outil très important dans l'étude de la normalité asymptotique de l'estimateur de Nadaraya-Watson (théorème 5.2.2) dès que le champ de v.a. $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (5.1).

Proposition 5.4.5. *Soient n et M deux entiers strictement positifs et soit $x \in \mathbb{R}^N$. Si Λ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $\|\Phi(Y_{\mathbf{0}})\|_{2+\theta} < +\infty$ pour un certain $\theta \in]0,+\infty]$ alors pour toute famille $(c_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\Lambda}$ de réels et pour tout $(p,q) \in [2,+\infty[\times]0,+\infty]$ tel que $p+q \leqslant 2+\theta$, on a*

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{i}}W_{\boldsymbol{i},n}\right\|_p \leqslant 8pM^d|\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)\sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda}c_{\boldsymbol{i}}^2}\,b_n^{\frac{-q}{p+q}}\sum_{|\boldsymbol{i}|>M}\delta_{\boldsymbol{i},p}^{\frac{q}{p+q}},$$

où

$$W_{\boldsymbol{i},n} := \Phi(Y_{\boldsymbol{i}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}) - \mathbb{E}\left[\Phi(Y_i)\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}})\,|\,\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}\right], \tag{5.10}$$

$$C(p,q) = 2^{\frac{2p+q}{p+q}}\|\Phi(Y_{\mathbf{0}})\|_{p+q}\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}}^{\frac{q}{p+q}} + |\mathrm{K}|_\infty^{\frac{q}{p+q}}\left\|\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|\Phi(R(x,\eta_{\mathbf{0}})) - \Phi(R(y,\eta_{\mathbf{0}}))|}{\|x-y\|}\right\|_p.$$

et

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M} = \sigma\left(\eta_{\boldsymbol{i}},\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}\,;|\boldsymbol{s}|\leqslant M\right) \quad \text{et} \quad \|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|\mathrm{K}(x)-\mathrm{K}(y)|}{\|x-y\|}.$$

Preuve. Soient M et n deux entiers strictement positifs et soient $x \in \mathbb{R}^N$ et $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$. Rappelons que $Y_{\boldsymbol{i}} = R(X_{\boldsymbol{i}}, \eta_{\boldsymbol{i}})$. On suit la méthode de démonstration de la proposition 1 dans [EMVW13]. Soit $2 \leqslant p < 2+\theta$, on note par H_n la fonction mesurable telle que $W_{\boldsymbol{i},n} = \mathrm{H}_n(\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},\infty})$ avec $\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},\infty} = \sigma\left(\eta_{\boldsymbol{i}}, \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}\,; \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d\right)$. Alors, le coefficient de mesure de dépendance physique $\delta_{\boldsymbol{i},p}^{(n)}$ associé à $W_{\boldsymbol{i},n}$ est défini par $\delta_{\boldsymbol{i},p}^{(n)} = \|W_{\boldsymbol{i},n} - W_{\boldsymbol{i},n}^*\|_p$, où $W_{\boldsymbol{i},n}^* = \mathrm{H}_n(\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},\infty}^*)$, $\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},\infty}^* = \sigma\left(\eta_{\boldsymbol{i}}, \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}^*\,; \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d\right)$ et $\varepsilon_{\boldsymbol{j}}^* = \varepsilon_{\boldsymbol{j}}$ si $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{0}$ et $\varepsilon_{\boldsymbol{0}}^* = \varepsilon_{\boldsymbol{0}}^{'}$. En d'autres termes, on construit $W_{\boldsymbol{i},n}^*$ en remplaçant $\varepsilon_{\boldsymbol{0}}$ par sa copie $\varepsilon_{\boldsymbol{0}}^{'}$ dans $W_{\boldsymbol{i},n}$ (voir [Wu05]). Soit τ une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}^d$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. On définit l'opérateur de projection P_ℓ par $P_\ell f = \mathbb{E}\left[f|\mathcal{F}_\ell\right] - \mathbb{E}\left[f|\mathcal{F}_{\ell-1}\right]$ pour toute fonction intégrable f, où $\mathcal{F}_\ell = \sigma\left(\varepsilon_{\tau(s)}; s \leqslant \ell\right)$. Par conséquent, d'après la stationnarité, on a

$$\|P_\ell W_{\boldsymbol{i},n}\|_p = \left\|\mathbb{E}\left[W_{\boldsymbol{0},n}|T^{\boldsymbol{i}}\mathcal{F}_\ell\right] - \mathbb{E}\left[W_{\boldsymbol{0},n}|T^{\boldsymbol{i}}\mathcal{F}_{\ell-1}\right]\right\|_p,$$

où $T^{\boldsymbol{i}}\mathcal{F}_\ell = \sigma\left(\varepsilon_{\tau(s)-\boldsymbol{i}}; s \leqslant \ell\right)$. En se rappelant que $W_{\boldsymbol{0},n} = \mathrm{H}_n\left(\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}\right)$, on obtient

$$\|P_\ell W_{i,n}\|_p = \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{H}_n\left(\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}\right)|\,T^{\boldsymbol{i}}\mathcal{F}_\ell\right] - \mathbb{E}\left[\mathrm{H}_n\left(\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}^{(\boldsymbol{i},\ell)}\right)|\,T^{\boldsymbol{i}}\mathcal{F}_\ell\right]\right\|_p \leqslant \left\|\mathrm{H}_n\left(\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}\right) - \mathrm{H}_n\left(\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}^{(\boldsymbol{i},\ell)}\right)\right\|_p,$$

où $\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}^{(\boldsymbol{i},\ell)} = \sigma\left(\eta, \varepsilon_{\tau(\ell)-\boldsymbol{i}}^{'}, \varepsilon_{-\boldsymbol{s}}\,; \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\boldsymbol{i} - \tau(\ell)\}\right)$. Ce qui signifie que $\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}^{(\boldsymbol{i},\ell)}$ est construit en remplaçant $\varepsilon_{\tau(\ell)-\boldsymbol{i}}$ par sa copie $\varepsilon_{\tau(\ell)-\boldsymbol{i}}^{'}$ dans $\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}$. Par conséquent, en utilisant à nouveau la stationnarité du champ de v.a. et en remarquant que

$$\begin{aligned}
T^{\tau(\ell)-\boldsymbol{i}}\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty} &= \sigma\left(\eta_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell)}, \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell)-\boldsymbol{s}}\,; \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d\right) = \mathcal{H}_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell),\infty},\\
T^{\tau(\ell)-\boldsymbol{i}}\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}^{(\boldsymbol{i},\ell)} &= \sigma\left(\eta_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell)}, \varepsilon_{\boldsymbol{0}}^{'}, \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell)-\boldsymbol{s}}\,; \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\boldsymbol{i} - \tau(\ell)\}\right) = \mathcal{H}_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell),\infty}^*,
\end{aligned}$$

on déduit la majoration suivante :

$$\|P_\ell W_{\boldsymbol{i},n}\|_p \leqslant \left\|\mathrm{H}_n\left(T^{\tau(\ell)-\boldsymbol{i}}\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}\right) - \mathrm{H}_n\left(T^{\tau(\ell)-\boldsymbol{i}}\mathcal{H}_{\boldsymbol{0},\infty}^{(\boldsymbol{i},\ell)}\right)\right\|_p = \left\|W_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell),n} - W_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell),n}^*\right\|_p = \delta_{\boldsymbol{i}-\tau(\ell),p}^{(n)}. \tag{5.11}$$

De plus, puisque $W_{\boldsymbol{i},n} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} P_\ell W_{\boldsymbol{i},n}$, on a

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{j}} W_{\boldsymbol{j},n}\right\|_p = \left\|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{j}} P_\ell W_{\boldsymbol{j},n}\right\|_p.$$

Comme $\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{j}} P_\ell W_{\boldsymbol{j},n}\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements de martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$, l'inégalité de Burkholder (voir [Ded01], remarque 6, page 85 ; ou théorème 1.4.4) nous donne

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{j}} W_{\boldsymbol{j},n}\right\|_p \leqslant \left(2p\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left\|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{j}} P_\ell W_{\boldsymbol{j},n}\right\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(2p\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda}|c_{\boldsymbol{j}}|\,\|P_\ell W_{\boldsymbol{j},n}\|_p\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.12}$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous savons que

$$\left(\sum_{j\in\Lambda}|c_j|\,\|P_\ell W_{j,n}\|_p\right)^2 \leqslant \sum_{i\in\Lambda} c_i^2\,\|P_\ell W_{i,n}\|_p \times \sum_{j\in\Lambda}\|P_\ell W_{j,n}\|_p. \tag{5.13}$$

En utilisant (5.11), on a $\sup_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\|P_\ell W_{\boldsymbol{j},n}\|_p \leqslant \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\delta_{\boldsymbol{j},p}^{(n)}$. Donc, d'après (5.12) et (5.13), on a

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{j}} W_{\boldsymbol{j},n}\right\|_p \leqslant \left(2p\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\delta_{\boldsymbol{j},p}^{(n)}\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda}c_{\boldsymbol{i}}^2\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\|P_\ell W_{\boldsymbol{i},n}\|_p\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même, d'après (5.11) et le fait que τ est une bijection, on déduit que $\sup_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\|P_\ell W_{\boldsymbol{i},n}\|_p \leqslant \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\delta_{\boldsymbol{j},p}^{(n)}$. Alors, on obtient

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{j}} W_{\boldsymbol{j},n}\right\|_p \leqslant \left(2p\sum_{j\in\Lambda}c_{\boldsymbol{j}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\delta_{\boldsymbol{j},p}^{(n)}. \tag{5.14}$$

Puisque

$$\mathbb{E}\left[\Phi(Y_{\boldsymbol{i}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}})|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}\right]^* = \mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\boldsymbol{i}}^*,\eta_{\boldsymbol{i}}))\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*)|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}^*\right],$$

où $\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}^* = \sigma\left(\eta_{\boldsymbol{i}},\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}^*\,;\,|\boldsymbol{s}|\leqslant M\right)$, on a

$$W_{\boldsymbol{i},n}^* = \Phi(R(X_{\boldsymbol{i}}^*,\eta_{\boldsymbol{i}}))\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*) - \mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\boldsymbol{i}}^*,\eta_{\boldsymbol{i}}))\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*)|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}^*\right].$$

De plus,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(Y_{\boldsymbol{i}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}})|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(Y_{\boldsymbol{i}})\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}})|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}\vee\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}^*\right]$$

et

$$\mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\boldsymbol{i}}^*,\eta_{\boldsymbol{i}}))\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*)|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}^*\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\boldsymbol{i}}^*,\eta_{i}))\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*)|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}^*\vee\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},M}\right].$$

Par conséquent,

$$\delta_{\boldsymbol{i},p}^{(n)} = \left\|W_{\boldsymbol{i},n} - W_{\boldsymbol{i},n}^*\right\|_p \leqslant 2\left\|\Phi(R(X_{\boldsymbol{i}},\eta_i))\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}) - \Phi(R(X_{\boldsymbol{i}}^*,\eta_i))\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*)\right\|_p. \tag{5.15}$$

Soit $L>0$. D'après (5.15), on trouve que

$$\begin{aligned}\delta_{\boldsymbol{i},p}^{(n)} &\leqslant 2\left\|\Phi(R(X_{\boldsymbol{i}},\eta_{\boldsymbol{i}}))\left(\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}) - \mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*)\right) - \left(\Phi(R(X_{\boldsymbol{i}}^*,\eta_{\boldsymbol{i}})) - \Phi(R(X_{\boldsymbol{i}},\eta_{\boldsymbol{i}}))\right)\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{i}}^*)\right\|_p \\ &\leqslant 2L\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}}\frac{\delta_{\boldsymbol{i},p}}{b_n} \\ &\qquad + 4|\mathrm{K}|_\infty L^{-q/p}\|\Phi(Y_{\boldsymbol{0}})\|_{p+q}^{\frac{p+q}{p}} \\ &\qquad\qquad + 2|\mathrm{K}|_\infty\left\|\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|\Phi(R(x,\eta_{\boldsymbol{0}})) - \Phi(R(y,\eta_{\boldsymbol{0}}))|}{\|x-y\|}\right\|_p\delta_{\boldsymbol{i},p}.\end{aligned}$$

En optimisant cette dernière inégalité en L, on obtient

$$\delta_{\boldsymbol{i},p}^{(n)} \leqslant 2|\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_n^{\frac{-q}{p+q}}\delta_{\boldsymbol{i},p}^{\frac{q}{p+q}}, \tag{5.16}$$

où

$$C(p,q) = 2^{\frac{2p+q}{p+q}}\|\Phi(Y_{\boldsymbol{0}})\|_{p+q}\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}}^{\frac{q}{p+q}} + |\mathrm{K}|_\infty^{\frac{q}{p+q}}\left\|\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|\Phi(R(x,\eta_{\boldsymbol{0}})) - \Phi(R(y,\eta_{\boldsymbol{0}}))|}{\|x-y\|}\right\|_p.$$

D'après la stationnarité, on a $\delta_{\boldsymbol{i},p}^{(n)} = \left\| W_{\boldsymbol{i},n} - W_{\boldsymbol{i},n}^{*} \right\|_p \leqslant 2 \left\| W_{\mathbf{0},n} \right\|_p$. Soit $\ell \geqslant 0$ un entier. On note par Γ_ℓ l'ensemble des $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$ tels que $|\boldsymbol{j}| = \ell$ et on définit

$$a_\ell := \sum_{j=0}^{\ell} |\Gamma_j| = (2\ell+1)^d.$$

Si $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ sont des éléments distincts de $\mathbb{Z}^d$, la notation $\boldsymbol{u} <_{\text{lex}} \boldsymbol{v}$ signifiera $u_1 < v_1$ ou bien pour un certain $k \in [\![2, d]\!]$, $u_k < v_k$ et $u_s = v_s$ pour $1 \leqslant s < k$ (ordre lexicographique). Soit $\tau_0 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}^d$ la bijection définie par

— $\tau_0(1) = \mathbf{0}$,

— $\tau_0(s) \in \Gamma_\ell$ si $a_{\ell-1} < s \leqslant a_\ell$ et $\ell > 0$,

— $\tau_0(s) <_{\text{lex}} \tau_0(t)$ si $a_{\ell-1} < s < t \leqslant a_\ell$ et $\ell > 0$.

Soit $\mathcal{G}_M = \sigma\left(\eta_{\mathbf{0}}, \varepsilon_{\tau_{\mathbf{0}}(s)}\,; 1 \leqslant s \leqslant M\right)$ et on rappelle que $\mathcal{H}_{\mathbf{0},M} = \sigma\left(\eta_{\mathbf{0}}, \varepsilon_{-\boldsymbol{s}}\,; |\boldsymbol{s}| \leqslant M\right)$. Puisque $1 \leqslant s \leqslant a_M$ si et seulement si $|\tau_{\mathbf{0}}(s)| \leqslant M$, on déduit que $\mathcal{G}_{a_M} = \mathcal{H}_{\mathbf{0},M}$. Par conséquent,

$$W_{\mathbf{0},n} = \sum_{\ell > a_M} D_\ell \quad \text{où} \quad D_\ell = \mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\mathbf{0}}, \eta_{\mathbf{0}}))\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})|\mathcal{G}_\ell\right] - \mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\mathbf{0}}, \eta_{\mathbf{0}}))\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})|\mathcal{G}_{\ell-1}\right].$$

Comme $(D_\ell)_{\ell \geqslant 1}$ est une suite d'accroissements de martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_\ell)_{\ell \geqslant 1}$, on applique l'inégalité de Burkholder ([Ded01], remarque 6, page 85v) et on obtient

$$\left\| W_{\mathbf{0},n} \right\|_p \leqslant \left(2p \sum_{\ell > a_M} \left\| D_\ell \right\|_p^2 \right)^{1/2}. \tag{5.17}$$

Soit $L > 0$. On note $X_{\mathbf{0},\ell}^{'} = G\left(\eta_{\mathbf{0}}, \varepsilon_{\tau_{\mathbf{0}}(\ell)}^{'}, \varepsilon_{-\boldsymbol{s}}\,; \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell)\}\right)$, on a

$$\mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\mathbf{0}}, \eta_{\mathbf{0}}))\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})|\mathcal{G}_{\ell-1}\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(R(X_{\mathbf{0},\ell}^{'}, \eta_{\mathbf{0}}))\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0},\ell}^{'})|\mathcal{G}_\ell\right].$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\| D_\ell \right\|_p &\leqslant \left\| \Phi(R(X_{\mathbf{0}}, \eta_{\mathbf{0}}))\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}}) - \Phi(R(X_{\mathbf{0},\ell}^{'}, \eta_{\mathbf{0}}))\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0},\ell}^{'}) \right\|_p \\
&= \Big\| \Phi(R(X_{\mathbf{0}}, \eta_{\mathbf{0}}))\left(\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}}) - \mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0},\ell}^{'})\right) - \Big(\Phi(R(X_{\mathbf{0},\ell}^{'}, \eta_{\mathbf{0}})) \\
&\qquad - \Phi(R(X_{\mathbf{0}}, \eta_{\mathbf{0}}))\Big)\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0},\ell}^{'}) \Big\|_p \\
&\leqslant \frac{L \left\| \mathrm{K} \right\|_{\text{Lip}}}{b_n} \left\| X_{\mathbf{0}} - X_{0,\ell}^{'} \right\|_p \\
&\qquad + 2|\mathrm{K}|_\infty L^{-q/p} \left\| \Phi(Y_{\mathbf{0}}) \right\|_{p+q}^{\frac{p+q}{p}} \\
&\qquad\qquad + |\mathrm{K}|_\infty \left\| \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ x \neq y}} \frac{|\Phi(R(x, \eta_{\mathbf{0}})) - \Phi(R(y, \eta_{\mathbf{0}}))|}{\|x - y\|} \right\|_p \left\| X_{\mathbf{0}} - X_{\mathbf{0},\ell}^{'} \right\|_p.
\end{aligned}$$

En optimisant en L, on déduit que

$$\left\| D_\ell \right\|_p \leqslant |\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) b_n^{\frac{-q}{p+q}} \left\| X_{\mathbf{0}} - X_{\mathbf{0},\ell}^{'} \right\|_p^{\frac{q}{p+q}}.$$

De plus, par stationnarité, on a

$$\begin{aligned}\left\|X_{\mathbf{0}}-X'_{\mathbf{0},\ell}\right\|_p &= \left\|G\left(\varepsilon_{-\boldsymbol{s}}\,;\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d\right)-G\left(\varepsilon'_{\tau_{\mathbf{0}}(\ell)},\varepsilon_{-\boldsymbol{s}}\,;\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell)\}\right)\right\|_p\\ &= \left\|G\left(\varepsilon_{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell)-\boldsymbol{s}}\,;\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d\right)-G\left(\varepsilon'_{\mathbf{0}},\varepsilon_{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell)-\boldsymbol{s}}\,;\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell)\}\right)\right\|_p\\ &= \left\|X_{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell)}-X^*_{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell)}\right\|_p\\ &= \delta_{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell),p}.\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\|D_\ell\|_p \leqslant |\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) b_n^{\frac{-q}{p+q}} \delta_{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell),p}^{\frac{q}{p+q}}. \tag{5.18}$$

En utilisant (5.17) et (5.18), on établit que

$$\|W_{\mathbf{0},n}\|_p \leqslant |\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}} \sqrt{2p}C(p,q) b_n^{\frac{-q}{p+q}} \sum_{\ell>a_M} \delta_{-\tau_{\mathbf{0}}(\ell),p}^{\frac{q}{p+q}} \leqslant |\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}} \sqrt{2p}C(p,q) b_n^{\frac{-q}{p+q}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>M} \delta_{\boldsymbol{j},p}^{\frac{q}{p+q}} \tag{5.19}$$

et

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \delta_{i,p}^{(n)} \leqslant 2\,\|W_{\mathbf{0},n}\|_p \leqslant 2\sqrt{2p}|\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) b_n^{\frac{-q}{p+q}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>M} \delta_{\boldsymbol{j},p}^{\frac{q}{p+q}}. \tag{5.20}$$

Donc, d'après (5.16) et (5.20), on trouve que

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \delta_{\boldsymbol{i},p}^{(n)} \leqslant 2\sqrt{2p}|\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) b_n^{\frac{-q}{p+q}} (M^d+1) \sum_{|\boldsymbol{j}|>M} \delta_{\boldsymbol{j},p}^{\frac{q}{p+q}}. \tag{5.21}$$

Finalement, en utilisant (5.14) et (5.21), on obtient

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{i}} W_{\boldsymbol{i},n}\right\|_p \leqslant 8pM^d|\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{i}}^2\right)^{\frac{1}{2}} b_n^{\frac{-q}{p+q}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>M} \delta_{\boldsymbol{j},p}^{\frac{q}{p+q}}.$$

La proposition 5.4.5 est démontrée. □

5.4.2. Variances et covariance asymptotiques

Proposition 5.4.6. *Supposons que (A1) – (A4) sont satisfaites. Pour tout $x\in\mathbb{R}^N$ tels que $f(x)>0$, on a*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}\left[f_n(x)\right] &= f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t,\\ \lim_{n\to+\infty} |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}\left[\varphi_n(x)\right] &= \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2|X_{\mathbf{0}}=x\right] f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t,\\ \lim_{n\to+\infty} |\Lambda_n| b_n^N Cov\left[\varphi_n(x),f_n(x)\right] &= r(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Preuve. Soient $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) > 0$. Alors,

$$|\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}[f_n(x)] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\sum_{i\in\Lambda_n} \Delta_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\Delta_{\mathbf{0}}^2\right] + \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} |\Lambda_n \cap (\Lambda_n - \boldsymbol{j})| \, \mathbb{E}[\Delta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}].$$

Par conséquent,

$$\left| |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}[f_n(x)] - \mathbb{E}\left[\Delta_{\mathbf{0}}^2\right] \right| \leqslant \sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} |\mathbb{E}[\Delta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}]|, \tag{5.22}$$

où

$$\mathbb{E}\left[\Delta_{\mathbf{0}}^2\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right] - (\mathbb{E}[\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})])^2}{b_n^N}.$$

En appliquant les lemmes 5.4.1 et 5.4.4, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\Delta_{\mathbf{0}}^2\right] = f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(v)\mathrm{d}v \tag{5.23}$$

et

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} |\mathbb{E}[\Delta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}]| \trianglelefteq b_n^N \leqslant b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}, \tag{5.24}$$

où $\theta > 0$ est donné par (A3). De la même manière, on a

$$|\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}[\varphi_n(x)] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \Theta_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}^2\right] + \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} |\Lambda_n \cap (\Lambda_n - \boldsymbol{j})| \, \mathbb{E}[\Theta_{\mathbf{0}}\Theta_{\boldsymbol{j}}].$$

Donc, on déduit que

$$\left| |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}[\varphi_n(x)] - \mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}^2\right] \right| \leqslant \sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} |\mathbb{E}[\Theta_{\mathbf{0}}\Theta_{\boldsymbol{j}}]|, \tag{5.25}$$

où

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}^2\right] = \frac{\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2\mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right] - (\mathbb{E}[Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})])^2}{b_n^N}.$$

En utilisant le lemme 5.4.1 à nouveau, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}^2\right] = \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2 \mid X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(v)\mathrm{d}v. \tag{5.26}$$

D' après le lemme 5.4.4, on a aussi

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} |\mathbb{E}[\Theta_{\mathbf{0}}\Theta_j]| \trianglelefteq b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}. \tag{5.27}$$

D'après des arguments similaires, on écrit

$$|\Lambda_n| b_n^N \mathrm{Cov}(\varphi_n(x), f_n(x)) = \mathbb{E}[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\mathbf{0}}] + \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} |\Lambda_n \cap (\Lambda_n - \boldsymbol{j})| \, \mathbb{E}[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}].$$

Par conséquent,

$$\left|\left|\Lambda_n\right| b_n^N \operatorname{Cov}\left(\varphi_n(x), f_n(x)\right) - \mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\mathbf{0}}\right]\right| \leqslant \sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \left|\mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}\right]\right|, \tag{5.28}$$

où, en appliquant le lemme 5.4.1, on a

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\mathbf{0}}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right] - \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]\mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]}{b_n^N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} r(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{K}^2(v)\mathrm{d}v. \tag{5.29}$$

D'après le lemme 5.4.4, on a aussi

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \left|\mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \trianglelefteq b_n^{\frac{\theta N}{2+\theta}} \leqslant b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}. \tag{5.30}$$

Si $(A3)(i)$ est satisfaite, on désigne par Ξ le champ Δ ou le champ Θ. D'après l'inégalité de Rio (c.f. Proposition 1.5.4), pour $j \neq 0$, on a

$$\left|\mathbb{E}\left[\Xi_{\mathbf{0}}\Xi_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \leqslant 2\int_0^{2\alpha_{1,\infty}(|\boldsymbol{j}|)} Q_{\Xi_{\mathbf{0}}}^2(u)\mathrm{d}u \quad \text{où } Q_{\Xi_{\mathbf{0}}}(u) = \inf\left\{t \geqslant 0 \,\middle|\, \mathbb{P}\left(|\Xi_{\mathbf{0}}| > t\right) \leqslant u\right\}.$$

D'après le lemme 5.4.3 et en remarquant que $Q_{\Xi_{\mathbf{0}}}(u) \leqslant u^{-\frac{1}{2+\theta}}\left\|\Xi_{\mathbf{0}}\right\|_{2+\theta}$, on obtient

$$\left|\mathbb{E}\left[\Xi_{\mathbf{0}}\Xi_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \trianglelefteq \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{j}|)\left\|\Xi_{\mathbf{0}}\right\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{j}|). \tag{5.31}$$

En utilisant (5.24), (5.27) et (5.31) et par application du lemme 5.4.2, on déduit que

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \left|\mathbb{E}\left[\Xi_{\mathbf{0}}\Xi_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \trianglelefteq m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} + b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{j}|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \tag{5.32}$$

où m_n est donné par le lemme 5.4.2. D'après (5.22), (5.23), (5.25), (5.26) et (5.32), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\Lambda_n\right| b_n^N \mathbb{V}\left[f_n(x)\right] = f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\Lambda_n\right| b_n^N \mathbb{V}\left[\varphi_n(x)\right] = \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2 \,\middle|\, X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t.$$

D'après l'inégalité de Rio, on a

$$\left|\mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \leqslant 2\int_0^{2\alpha_{1,\infty}(|\boldsymbol{j}|)} Q_{\Theta_{\mathbf{0}}}(u)Q_{\Delta_{\boldsymbol{j}}}(u)\mathrm{d}u$$

et en appliquant le lemme 5.4.3, on déduit que

$$Q_{\Theta_{\mathbf{0}}}(u) \leqslant u^{-\frac{1}{2+\theta}}\left\|\Theta_{\mathbf{0}}\right\|_{2+\theta} \leqslant u^{-\frac{1}{2+\theta}} b_n^{-\frac{\theta N}{2(2+\theta)}} \quad \text{et} \quad Q_{\Delta_{\boldsymbol{j}}}(u) \leqslant u^{-\frac{1}{2+\theta}}\left\|\Delta_{\mathbf{0}}\right\|_{2+\theta} \leqslant u^{-\frac{1}{2+\theta}} b_n^{-\frac{\theta N}{2(2+\theta)}}$$

pour tout $u \in]0, 1[$. Par conséquent, on a

$$\left|\mathbb{E}\left[\Theta_{\mathbf{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{j}|). \tag{5.33}$$

D'après (5.30) et (5.33), on trouve que

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}} |\mathbb{E}\left[\Theta_{\boldsymbol{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}\right]| \trianglelefteq m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} + b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{j}|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \tag{5.34}$$

où m_n est donné par le lemme 5.4.2. Finalement, en utilisant (5.28), (5.29) et (5.34), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} |\Lambda_n| b_n^N \mathrm{Cov}\left[\varphi_n(x), f_n(x)\right] = r(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t.$$

Dans le reste de la preuve, on suppose que $(A3)(ii)$ est satisfaite. En se rappelant que Ξ désigne le champ Δ ou bien le champ Θ, on définit $\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}} = \mathbb{E}\left[\Xi_{\boldsymbol{i}}|\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},m_n}\right]$ pour tout $\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d$. Remarquons que $(\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ $2m_n$-dépendant (c'est à dire que si $|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}|>2m_n$ alors $\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}$ et $\overline{\Xi}_{\boldsymbol{j}}$ sont indépendants) et

$$\left|\mathbb{E}\left[\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\Xi_{\boldsymbol{i}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right)^2\right]\right| \leqslant \left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\left(\Xi_{\boldsymbol{i}}-\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right)\right\|_2^2 + 2\left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right\|_2\left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\left(\Xi_{\boldsymbol{i}}-\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right)\right\|_2. \tag{5.35}$$

En faisant usage de la proposition 5.4.5 et le lemme 5.4.2, on obtient

$$|\Lambda_n|^{-1/2}\left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\left(\Xi_{\boldsymbol{i}}-\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right)\right\|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n} |\boldsymbol{j}|^d \delta_{\boldsymbol{j},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{5.36}$$

D'autre part, puisque $(\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est $2m_n$-dépendant, on a

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}^2\right] + \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\boldsymbol{0}\}\\ |\boldsymbol{j}|\leqslant 2m_n}} |\Lambda_n\cap(\Lambda_n-\boldsymbol{j})|\,\mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{j}}\right]$$

et par conséquent

$$\left|\frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}^2\right]\right| \leqslant (2m_n+1)^d \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}}\left|\mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{j}}\right]\right|. \tag{5.37}$$

De plus, en utilisant (5.19), le lemme 5.4.2 et en remarquant que $\|\Xi_{\boldsymbol{0}}\|_2 \trianglelefteq 1$, on a aussi

$$\left|\mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}^2\right] - \mathbb{E}\left[\Xi_{\boldsymbol{0}}^2\right]\right| \leqslant 2\|\Xi_{\boldsymbol{0}}\|_2\left\|\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}-\Xi_{\boldsymbol{0}}\right\|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n} \delta_{\boldsymbol{j},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, d'après (5.23) et (5.26), on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}^2\right] = \xi(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t, \tag{5.38}$$

où $\xi(x)=1$ si $\Xi=\Delta$ et $\xi(x)=\mathbb{E}\left[Y_{\boldsymbol{0}}^2|X_{\boldsymbol{0}}=x\right]$ si $\Xi=\Theta$. De la même manière, en utilisant (5.19), on obtient

$$m_n^d \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}}\left|\left|\mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{j}}\right]\right| - \left|\mathbb{E}\left[\Xi_{\boldsymbol{0}}\Xi_{\boldsymbol{j}}\right]\right|\right| \leqslant 2m_n^d\|\Xi_{\boldsymbol{0}}\|_2\left\|\overline{\Xi}_{\boldsymbol{0}}-\Xi_{\boldsymbol{0}}\right\|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n} |\boldsymbol{j}|^d \delta_{\boldsymbol{j},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En appliquant le lemme 5.4.4, on trouve que $\sup_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq 0}} |\mathbb{E}\left[\Xi_{\mathbf{0}}\Xi_{\boldsymbol{j}}\right]| \leqslant b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}$ et par conséquent, d'après le lemme 5.4.2, on a

$$m_n^d \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \left|\mathbb{E}\left[\overline{\Xi}_{\mathbf{0}}\overline{\Xi}_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \leqslant m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} + b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n} |\boldsymbol{j}|^d \delta_{\boldsymbol{j},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{5.39}$$

En utilisant (5.37), (5.38) et (5.39), on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \overline{\Xi}_{\boldsymbol{i}}\right)^2\right] = \xi(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t. \tag{5.40}$$

On utilise (5.35), (5.36) et (5.40), et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \Xi_{\boldsymbol{i}}\right)^2\right] = \xi(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t.$$

Donc, on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}\left[f_n(x)\right] = f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{V}\left[\varphi_n(x)\right] = \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2 | X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t.$$

Pour conclure, il suffit de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} |\Lambda_n| b_n^N \mathrm{Cov}\left[\varphi_n(x), f_n(x)\right] = r(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t$$

si $(A3)(ii)$ est satisfaite. Si on définit

$$\overline{f}_n(x) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n^N} \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{i}}) | \mathcal{H}_{\boldsymbol{i},m_n}\right] \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}_n(x) = \frac{1}{|\Lambda_n| b_n^N} \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \mathbb{E}\left[Y_{\boldsymbol{i}}\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{i}}) | \mathcal{H}_{\boldsymbol{i},m_n}\right]$$

alors

$$|\Lambda_n| b_n^N \mathrm{Cov}\left[\varphi_n(x), f_n(x)\right] = C_1 + C_2 + C_3 + C_4,$$

où

$$\begin{aligned}
C_1 &= |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{E}\left[\left(\varphi_n(x) - \overline{\varphi}_n(x)\right)\left(f_n(x) - \overline{f}_n(x)\right)\right]\\
C_2 &= |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{E}\left[\left(\varphi_n(x) - \overline{\varphi}_n(x)\right)\left(\overline{f}_n(x) - \mathbb{E}\left[\overline{f}_n(x)\right]\right)\right]\\
C_3 &= |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{E}\left[\left(\overline{\varphi}_n(x) - \mathbb{E}\left[\overline{\varphi}_n(x)\right]\right)\left(f_n(x) - \overline{f}_n(x)\right)\right]\\
C_4 &= |\Lambda_n| b_n^N \mathbb{E}\left[\left(\overline{\varphi}_n(x) - \mathbb{E}\left[\overline{\varphi}_n(x)\right]\right)\left(\overline{f}_n(x) - \mathbb{E}\left[\overline{f}_n(x)\right]\right)\right].
\end{aligned}$$

D'après la proposition 5.4.5, on a

$$|C_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n|}} \left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} (\Theta_{\boldsymbol{i}} - \overline{\Theta}_{\boldsymbol{i}})\right\|_2 \times \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n|}} \left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} (\Delta_{\boldsymbol{i}} - \overline{\Delta}_{\boldsymbol{i}})\right\|_2 \leqslant \left(b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n} |\boldsymbol{i}|^d \delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}}\right)^2 = o(1).$$

Par (5.40), on trouve que $|\Lambda_n|^{-1/2}\left|\left|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda_n}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{j}}\right|\right|_2 \trianglelefteq 1$ et $|\Lambda_n|^{-1/2}\left|\left|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda_n}\overline{\Theta}_{\boldsymbol{j}}\right|\right|_2 \trianglelefteq 1$. Donc,

$$|C_2| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\left|\left|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}(\Theta_{\boldsymbol{i}}-\overline{\Theta}_{\boldsymbol{i}})\right|\right|_2 \times \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\left|\left|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda_n}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{j}}\right|\right|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}}\sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n}|\boldsymbol{i}|^d\delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} = o(1)$$

et

$$|C_3| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\left|\left|\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}(\Delta_{\boldsymbol{i}}-\overline{\Delta}_{\boldsymbol{i}})\right|\right|_2 \times \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\left|\left|\sum_{\boldsymbol{j}\in\Lambda_n}\overline{\Theta}_{\boldsymbol{j}}\right|\right|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}}\sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n}|\boldsymbol{i}|^d\delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} = o(1).$$

Finalement, puisque

$$C_4 = \mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{0}}\right] + \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\boldsymbol{0}\}\\ |j|\leqslant 2m_n}}|\Lambda_n\cap(\Lambda_n-\boldsymbol{j})|\mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{j}}\right],$$

on obtient

$$\left|C_4 - \mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{0}}\right]\right| \leqslant (2m_n+1)^d\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}}\left|\mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{j}}\right]\right|. \tag{5.41}$$

En utilisant (5.19) et puisque $\|\Delta_{\boldsymbol{0}}\|_2 \trianglelefteq 1$ et $\|\Theta_{\boldsymbol{0}}\|_2 \trianglelefteq 1$, on a aussi

$$\left|\mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{0}}\right] - \mathbb{E}\left[\Theta_{\boldsymbol{0}}\Delta_{\boldsymbol{0}}\right]\right| \leqslant \|\Theta_{\boldsymbol{0}}\|_2\left|\left|\overline{\Delta}_{\boldsymbol{0}}-\Delta_{\boldsymbol{0}}\right|\right|_2 + \|\Delta_{\boldsymbol{0}}\|_2\left|\left|\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}-\Theta_{\boldsymbol{0}}\right|\right|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}}\sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n}\delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} = o(1).$$

De plus, en appliquant le lemme 5.4.1, on a

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{\boldsymbol{0}}\Delta_{\boldsymbol{0}}\right] = \frac{1}{b_n^N}\left(\mathbb{E}\left[Y_{\boldsymbol{0}}\mathrm{K}_n^2(x,X_{\boldsymbol{0}})\right] - \mathbb{E}\left[\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{0}})\right]\mathbb{E}\left[Y_0\mathrm{K}_n(x,X_{\boldsymbol{0}})\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} r(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t$$

et par conséquent, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{0}}\right] = r(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t. \tag{5.42}$$

D'après (5.19) et le lemme 5.4.2, on a

$$\begin{aligned} m_n^d\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}}\left|\left|\mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_j\right]\right| - \left|\mathbb{E}\left[\Theta_{\boldsymbol{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}\right]\right|\right| &\leqslant m_n^d\left(\|\Theta_{\boldsymbol{0}}\|_2\left|\left|\overline{\Delta}_{\boldsymbol{0}}-\Delta_{\boldsymbol{0}}\right|\right|_2 + \|\Delta_{\boldsymbol{0}}\|_2\left|\left|\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}-\Theta_{\boldsymbol{0}}\right|\right|_2\right)\\ &\trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}}\sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n}|\boldsymbol{j}|^d\delta_{\boldsymbol{j},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} = o(1). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 5.4.4, on a $\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}}\left|\mathbb{E}\left[\Theta_{\boldsymbol{0}}\Delta_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \trianglelefteq b_n^{\frac{\theta N}{2+\theta}} \leqslant b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}$ et par conséquent, d'après le lemme 5.4.2, on a

$$m_n^d\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}}\left|\mathbb{E}\left[\overline{\Theta}_{\boldsymbol{0}}\overline{\Delta}_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \trianglelefteq m_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} + b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}}\sum_{|\boldsymbol{j}|>m_n}|\boldsymbol{j}|^d\delta_{\boldsymbol{j},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{5.43}$$

En utilisant (5.41), (5.42) et (5.43), on déduit que

$$C_4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} r(x)f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t.$$

La proposition 5.4.6 est établie. □

5.5. Preuves des théorèmes principaux

Dans cette partie, nous donnons les preuves des théorèmes 5.2.1 et 5.2.2.

5.5.1. Preuve du théorème 5.2.1

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Puisque K est pair et vérifie $\int_{\mathbb{R}^N} \|v\|^2 |\mathrm{K}(v)| \mathrm{d}v < +\infty$ et que f et φ sont deux fois différentiables de dérivées partielles d'ordre 2 bornées, d'après la formule de Taylor, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left|\mathbb{E}\left[f_n(x)\right] - f(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(x - vb_n) - f(x)\right) \mathrm{K}(v)\mathrm{d}v\right| \leqslant b_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} \|v\|^2 |\mathrm{K}(v)|\mathrm{d}v$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left|\mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right] - \varphi(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varphi(x - vb_n) - \varphi(x)\right) \mathrm{K}(v)\mathrm{d}v\right| \leqslant b_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} \|v\|^2 |\mathrm{K}(v)|\mathrm{d}v.$$

Le théorème 5.2.1 est prouvé. □

5.5.2. Preuve du théorème 5.2.2

Soient $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) > 0$. Alors

$$r_n(x) - \frac{\mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right]}{\mathbb{E}\left[f_n(x)\right]} = \frac{\left(\varphi_n(x) - \mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right]\right)\mathbb{E}\left[f_n(x)\right] - \left(f_n(x) - \mathbb{E}\left[f_n(x)\right]\right)\mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right]}{f_n(x)\mathbb{E}\left[f_n(x)\right]}.$$

D'après la proposition 5.4.6 et le théorème 5.2.1, on déduit que $f_n(x)$ tend en probabilité vers $f(x)$ quand $n \to +\infty$. De plus, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\varphi_n(x)]}{\mathbb{E}[f_n(x)]} = r(x)$. Donc, en utilisant le lemme de Slutsky et les hypothèses (A1) – (A4), il suffit de prouver que

$$\lambda_1\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}\left(\varphi_n(x) - \mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right]\right) + \lambda_2\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}\left(f_n(x) - \mathbb{E}\left[f_n(x)\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \rho^2(x)\right),$$

où $\rho^2(x) = \left(\lambda_1^2\mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}^2 | X_{\mathbf{0}} = x\right] + 2\lambda_1\lambda_2 r(x) + \lambda_2^2\right) \times f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t$ pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda_1\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}\left(\varphi_n(x) - \mathbb{E}\left[\varphi_n(x)\right]\right) + \lambda_2\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}\left(f_n(x) - \mathbb{E}\left[f_n(x)\right]\right) = |\Lambda_n|^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} U_{\boldsymbol{i}},$$

où

$$U_{\boldsymbol{i}} = \lambda_1\Theta_{\boldsymbol{i}} + \lambda_2\Delta_{\boldsymbol{i}} = \frac{\left(\lambda_1 Y_{\boldsymbol{i}} + \lambda_2\right)\mathrm{K}_n(x, X_{\boldsymbol{i}}) - \mathbb{E}\left[\left(\lambda_1 Y_{\mathbf{0}} + \lambda_2\right)\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]}{\sqrt{b_n^N}}$$

avec $\Theta_{\boldsymbol{i}}$ et $\Delta_{\boldsymbol{i}}$ définis par (5.7). Afin d'obtenir la normalité asymptotique de r_n quand $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (5.1), on va utiliser une approximation par un champ $2m_n$-dépendant. On rappelle que $\mathcal{H}_{\boldsymbol{i},m_n} = \sigma\left(\eta_{\boldsymbol{i}}, \varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}; |\boldsymbol{s}| \leqslant m_n\right)$ et on définit

$$\overline{\Delta}_{\boldsymbol{i}} = \mathbb{E}\left[\Delta_{\boldsymbol{i}} | \mathcal{H}_{\boldsymbol{i},m_n}\right], \quad \overline{\Theta}_{\boldsymbol{i}} = \mathbb{E}\left[\Theta_{\boldsymbol{i}} | \mathcal{H}_{\boldsymbol{i},m_n}\right] \quad \text{et} \quad \overline{U}_{\boldsymbol{i}} = \lambda_1\overline{\Theta}_{\boldsymbol{i}} + \lambda_2\overline{\Delta}_{\boldsymbol{i}} = \mathbb{E}\left[U_i | \mathcal{H}_{\boldsymbol{i},m_n}\right].$$

Par construction, $(\overline{U}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est $2m_n$-dépendant. Donc, si $(A3)(ii)$ est satisfaite, en appliquant la proposition 5.4.5 avec $\Phi(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$|\Lambda_n|^{-1/2} \left\| \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \left(U_{\boldsymbol{i}} - \overline{U}_{\boldsymbol{i}}\right) \right\|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{i}|>m_n} |\boldsymbol{i}|^d \delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{(d'après le lemme 5.4.2).}$$

Par conséquent, lorsque $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (5.1) il suffit d'établir la normalité asymptotique de $|\Lambda_n|^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} \overline{U}_{\boldsymbol{i}}$. Dans le reste de la preuve, on notera

$$Z_{\boldsymbol{i}} = \begin{cases} U_{\boldsymbol{i}} & \text{si } (X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \text{ est fortement mélangeant} \\ \overline{U}_i & \text{si } (X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \text{ est de la forme (5.1)} \end{cases}$$

et

$$M_n = \begin{cases} m_n & \text{si } (X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \text{ est fortement mélangeant} \\ 2m_n & \text{si } (X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \text{ est de la forme (5.1).} \end{cases}$$

Lemme 5.5.1. $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right] = \rho^2(x)$.

Preuve. On a

$$\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] = \frac{\mathbb{E}\left[(\lambda_1 Y_{\mathbf{0}} + \lambda_2)^2 \mathrm{K}_n^2(x, X_{\mathbf{0}})\right] - \left(\mathbb{E}\left[(\lambda_1 Y_{\mathbf{0}} + \lambda_2)\mathrm{K}_n(x, X_{\mathbf{0}})\right]\right)^2}{b_n^N}.$$

En appliquant le lemme 5.4.1, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] = \mathbb{E}\left[(\lambda_1 Y_{\mathbf{0}} + \lambda_2)^2 \mid X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t = \rho^2(x).$$

De plus, d'après la proposition 5.4.5 et le lemme 5.4.2 et en utilisant $\|U_{\mathbf{0}}\|_2 \trianglelefteq 1$, on trouve que

$$\left|\mathbb{E}\left[\overline{U}_{\mathbf{0}}^2\right] - \mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right]\right| \leqslant 2\|U_{\mathbf{0}}\|_2 \left\|U_{\mathbf{0}} - \overline{U}_{\mathbf{0}}\right\|_2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{i}|>M_n} |\boldsymbol{i}|^d \delta_{\boldsymbol{i},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\overline{U}_{\mathbf{0}}^2\right] = \rho^2(x)$. Le lemme 5.5.1 est prouvé. □

Soit $(\xi_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de v.a.i.i.d. de lois normales indépendant du champ $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\eta_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$. On suppose que $\mathbb{E}[\xi_{\mathbf{0}}] = 0$ et $\mathbb{E}[\xi_{\mathbf{0}}^2] = \mathbb{E}[Z_{\mathbf{0}}^2]$. Pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$, on définit

$$T_{\boldsymbol{i}} = \frac{Z_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}} \quad \text{et} \quad \gamma_{\boldsymbol{i}} = \frac{\xi_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}.$$

Soit g l'unique fonction définie sur $[\![1, |\Lambda_n|]\!]$ à valeurs dans Λ_n telle que $g(k) <_{\text{lex}} g(\ell)$ pour $1 \leqslant k < \ell \leqslant |\Lambda_n|$, où $<_{\text{lex}}$ est l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^d$. Pour tout entier $k \in [\![1, |\Lambda_n|]\!]$, on définit

$$S_{g(k)}(T) = \sum_{s=1}^{k} T_{g(s)} \quad \text{et} \quad S_{g(k)}^c(\gamma) = \sum_{s=k}^{|\Lambda_n|} \gamma_{g(s)}$$

avec la convention $S_{g(0)}(T) = S_{g(|\Lambda_n|+1)}^c(\gamma) = 0$. Soit ψ une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant |\Lambda_n|$, on note $\psi_{k,\ell} = \psi\left(S_{g(k)}(T) + S_{g(\ell)}^c(\gamma)\right)$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction

quatre fois dérivable telle que $\max_{0\leqslant i\leqslant 4}\|h^{(i)}\|_\infty \leqslant 1$. Il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty}|L_n| = 0$, où

$$L_n := \mathbb{E}\left[h\Big(\sum_{i\in\Lambda_n}\frac{Z_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\Big)\right] - \mathbb{E}\left[h\Big(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n}\frac{\xi_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\Big)\right].$$

En suivant la méthode de Lindeberg [Lin22] (voir aussi [Ded98a]), on a

$$\begin{aligned} L_n &= \mathbb{E}\left[h_{|\Lambda_n|,|\Lambda_n|+1} - h_{0,1}\right] = \sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[h_{k,k+1} - h_{k-1,k}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\Big(\mathbb{E}\left[h_{k,k+1} - h_{k-1,k+1}\right] - \mathbb{E}\left[h_{k-1,k} - h_{k-1,k+1}\right]\Big). \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Taylor (c.f. théorème 1.1.8), on obtient

$$L_n = \sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\Big(\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h'_{k-1,k+1} + \frac{1}{2}T^2_{g(k)}h''_{k-1,k+1} + v_k\right] - \mathbb{E}\left[\gamma_{g(k)}h'_{k-1,k+1} + \frac{1}{2}\gamma^2_{g(k)}h''_{k-1,k+1} + w_k\right]\Big),$$

où $|v_k| \leqslant T^2_{g(k)}\left(1\wedge|T_{g(k)}|\right)$ and $|w_k| \leqslant \gamma^2_{g(k)}\left(1\wedge|\gamma_{g(k)}|\right)$. Comme $\gamma^2_{g(k)}$ et $h''_{k-1,k+1}$ sont indépendants, on a $\mathbb{E}\left[\gamma_{g(k)}h'_{k-1,k+1}\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[\gamma^2_{g(k)}\right] = \frac{\mathbb{E}[Z_0^2]}{|\Lambda_n|}$, et donc

$$L_n = \sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\Big(\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h'_{k-1,k+1}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(T^2_{g(k)} - \frac{\mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right]}{|\Lambda_n|}\right)h''_{k-1,k+1}\right] + \mathbb{E}\left[v_k - w_k\right]\Big).$$

Puisque $\xi_{\mathbf{0}}$ est une v.a. de loi normale de moyenne nulle et de variance $\mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right]$ et que l'on a $\mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right] \leqslant \mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right]$, alors

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[|w_k|\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|\xi_{\mathbf{0}}|^3\right]}{\sqrt{|\Lambda_n|}} \trianglelefteq \frac{\left(\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right]\right)^{3/2}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}.$$

D'après le lemme 5.4.1, on a $\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] \trianglelefteq 1$ et donc, on obtient $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[|w_k|\right] = 0$. Soit $d_n := \left(|\Lambda_n|b_n^N\right)^{\frac{-\theta}{2(\theta+1)}}$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[|v_k|\right] \leqslant d_n\mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right] + \mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\,\mathbb{1}_{|Z_{\mathbf{0}}|>d_n\sqrt{|\Lambda_n|}}\right] \leqslant d_n\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] + \frac{\mathbb{E}\left[|U_{\mathbf{0}}|^{2+\theta}\right]}{d_n^\theta|\Lambda_n|^{\theta/2}}.$$

En appliquant le lemme 5.4.3, on a

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[|v_k|\right] \trianglelefteq d_n + \frac{1}{d_n^\theta\left(|\Lambda_n|b_n^N\right)^{\theta/2}} = 2d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\Big(\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h'_{k-1,k+1}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\frac{Z^2_{g(k)} - \mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right]}{2|\Lambda_n|}\right)h''_{k-1,k+1}\right]\Big) = 0. \tag{5.44}$$

Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant |\Lambda_n|$, on définit

$$\mathrm{E}_k^{(n)} = \left\{j\in\Lambda_n \,|\, j <_{\mathrm{lex}} g(k) \text{ and } |\boldsymbol{j} - g(k)| > M_n\right\} \quad \text{et} \quad S^{(M_n)}_{g(k)}(T) = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathrm{E}_k^{(n)}} T_{\boldsymbol{i}}.$$

Pour tout $1 \leqslant k < \ell \leqslant |\Lambda_n|$ et pour toute fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit aussi $\psi_{k-1,\ell}^{(M_n)} = \psi\left(S_{g(k)}^{(M_n)}(T) + S_{g(\ell)}^{c}(\gamma)\right)$. D'après la formule de Taylor (c.f. théorème 1.1.8), on a

$$T_{g(k)}h'_{k-1,k+1} = T_{g(k)}h_{k-1,k+1}^{'(M_n)} + T_{g(k)}\left(S_{g(k-1)}(T) - S_{g(k)}^{(M_n)}(T)\right)h_{k-1,k+1}^{''(M_n)} + v'_k$$

où

$$|v'_k| \leqslant 2\left|T_{g(k)}\left(S_{g(k-1)}(T) - S_{g(k)}^{(M_n)}(T)\right)\left(1 \wedge |S_{g(k-1)}(T) - S_{g(k)}^{(M_n)}(T)|\right)\right|.$$

Pour obtenir (5.44), on montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h_{k-1,k+1}^{'(M_n)}\right] = 0, \tag{5.45}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[T_{g(k)}\left(S_{g(k-1)}(T) - S_{g(k)}^{(M_n)}(T)\right)h_{k-1,k+1}^{''(M_n)}\right] = 0 \tag{5.46}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[|v'_k|\right] = 0, \tag{5.47}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right]\right)h''_{k-1,k+1}\right] = 0. \tag{5.48}$$

Premièrement, nous allons établir (5.45). Puisque γ est indépendant de T, alors $\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h'\left(S_{g(k+1)}^{c}(\gamma)\right)\right] = 0$. Par conséquent, si π est une bijection de $[\![1, |\mathrm{E}_k^{(n)}|]\!]$ dans $\mathrm{E}_k^{(n)}$ telle que $|\pi(i) - g(k)| \leqslant |\pi(i-1) - g(k)|$ alors

$$\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h_{k-1,k+1}^{'(M_n)}\right] = \mathbb{E}\left[T_{g(k)}\left(h_{k-1,k+1}^{'(M_n)} - h'\left(S_{g(k+1)}^{c}(\gamma)\right)\right)\right] = \sum_{i=1}^{|\mathrm{E}_k^{(n)}|}\mathrm{Cov}\left(T_{g(k)}, \beta_i - \beta_{i-1}\right),$$

où $\beta_i = h'\left(S_{\pi(i)}(T) + S_{g(k+1)}^{c}(\gamma)\right)$ et $S_{\pi(0)}(T) = 0$. Si $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant, en appliquant l'inégalité de Rio (c.f. Proposition 1.5.4) et en rappelant que $|\pi(i) - g(k)| \leqslant |\pi(i-1) - g(k)|$, on a

$$\left|\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h_{k-1,k+1}^{'(M_n)}\right]\right| \leqslant 2\sum_{i=1}^{|\mathrm{E}_k^{(n)}|}\int_0^{2\alpha_{1,\infty}(|\pi(i)-g(k)|)} Q_{T_{g(k)}}(u)Q_{\beta_i-\beta_{i-1}}(u)\mathrm{d}u.$$

Pour tout $u \in]0,1[$, en remarquant que h' est lipschitzienne, on a

$$Q_{T_{g(k)}}(u) \leqslant \frac{u^{-\frac{1}{2+\theta}}\|Z_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}}{\sqrt{|\Lambda_n|}} \quad \text{et} \quad Q_{\beta_i-\beta_{i-1}}(u) \leqslant \frac{u^{-\frac{1}{2+\theta}}\|Z_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}.$$

De plus, d'après le lemme 5.4.3, on a $\|Z_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2 \leqslant \|U_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}$ et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\left|\mathbb{E}\left[T_{g(k)}h_{k-1,k+1}^{'(M_n)}\right]\right| \trianglelefteq \frac{b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\sum_{i=1}^{|\mathrm{E}_k^{(n)}|}\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}\left(|\pi(i) - g(k)|\right) \leqslant b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}\sum_{|\boldsymbol{i}|>M_n}\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}\left(|\boldsymbol{i}|\right).$$

D'après le lemme 5.4.2, on déduit (5.45).

Le lemme qui suit est un corollaire direct du lemme 5.4.4 (la preuve est laissée au lecteur).

Lemme 5.5.2. $\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}} \mathbb{E}\left[|U_{\boldsymbol{0}}U_{\boldsymbol{j}}|\right] \trianglelefteq b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}$.

Puisque $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est supposé être fortement mélangeant, on a $Z_{\boldsymbol{i}} = U_{\boldsymbol{i}}$ pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$. D'après le lemme 5.4.2 et le lemme 5.4.4, on a

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \mathbb{E}\left[|v'_k|\right] \leqslant 2\mathbb{E}\left[|Z_{\boldsymbol{0}}|\left(\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}}} |Z_i|\right)\left(1 \wedge \sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{|Z_{\boldsymbol{i}}|}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right)\right] \leqslant 2\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}}} \mathbb{E}\left[|U_{\boldsymbol{0}}U_{\boldsymbol{i}}|\right] \trianglelefteq M_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \left|\mathbb{E}\left[T_{g(k)}\left(S_{g(k-1)}(T) - S_{g(k)}^{(M_n)}(T)\right) h_{k-1,k+1}^{''(M_n)}\right]\right| \leqslant \sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}}} \mathbb{E}\left[|U_{\boldsymbol{0}}U_{\boldsymbol{i}}|\right] \trianglelefteq M_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, on obtient (5.46) et (5.47).

Il suffit, désormais, de prouver (5.48). Soit $\beta \geqslant 1$ un entier. Dans la suite, pour tout $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$, on notera $\mathbb{E}_\beta[Z_{\boldsymbol{j}}]$ pour l'espérance conditionnelle de $Z_{\boldsymbol{j}}$ sachant $\sigma\left(Z_{\boldsymbol{i}}\,;\, \boldsymbol{i} <_{\text{lex}} \boldsymbol{j} \text{ et } |\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}| \geqslant \beta\right)$. Alors,

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \left|\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}\left[Z_{\boldsymbol{0}}^2\right]\right) h''_{k-1,k+1}\right]\right| \leqslant I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \left|\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{g(k)}^2]\right) h''_{k-1,k+1}\right]\right| \text{ et } I_2 = \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \left|\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}_\beta[Z_{g(k)}^2] - \mathbb{E}\left[Z_{\boldsymbol{0}}^2\right]\right) h''_{k-1,k+1}\right]\right|.$$

Le résultat suivant peut être trouvé dans [McL75].

Lemme 5.5.3. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux tribus et soit X une variable aléatoire $\mathcal{U}$-mesurable. Si $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant +\infty$, alors*

$$\|\mathbb{E}\left[X|\mathcal{V}\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\|_p \leqslant 2(2^{1/p}+1)\left(\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V})\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|X\|_r.$$

Supposons que $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant. En appliquant le lemme 5.5.3 avec $p = 1$ et $r = (2+\theta)/2$ et en gardant à l'esprit que $\|Z_{\boldsymbol{0}}\|_{2+\theta}^2 = \|U_{\boldsymbol{0}}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}$, on a

$$I_2 \leqslant \left\|\mathbb{E}_\beta[Z_{\boldsymbol{0}}^2] - \mathbb{E}\left[Z_{\boldsymbol{0}}^2\right]\right\|_1 \leqslant 6\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta)\,\|Z_{\boldsymbol{0}}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq 6b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta).$$

Choisissons

$$\beta = \left\lceil b_n^{-\frac{\theta N}{(2d-1)\theta+6d-2}}\right\rceil. \tag{5.49}$$

Par conséquent, en utilisant (A3)(i), on obtient

$$I_2 \trianglelefteq \beta^{\frac{(2d-1)\theta+6d-2}{2+\theta}}\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, remarquons que $\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{g(k)}^2]\right) h_{k-1,k+1}^{''(\beta)}\right] = 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{g(k)}^2]\right) h''_{k-1,k+1}\right] = \mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{g(k)}^2]\right)\left(h''_{k-1,k+1} - h_{k-1,k+1}^{''(\beta)}\right)\right].$$

Donc, on déduit que

$$I_1 \leqslant \mathbb{E}\left[\left(2 \wedge \left|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant\beta \\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}} \frac{Z_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right|\right)\left(Z_{\mathbf{0}}^2 + \mathbb{E}_\beta[Z_{\mathbf{0}}^2]\right)\right].$$

Si $L > 0$, alors

$$I_1 \leqslant \frac{L}{\sqrt{|\Lambda_n|}} \sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant\beta \\ \boldsymbol{i}\neq\mathbf{0}}} \mathbb{E}\left[|Z_{\mathbf{0}} Z_{\boldsymbol{i}}|\right] + 2\mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2 \mathbb{1}_{|Z_{\mathbf{0}}|>L}\right] + 2\left\|\mathbb{E}_\beta\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right]\right\|_1 + \left\|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant\beta \\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}} \frac{Z_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right\|_2 \mathbb{E}\left[Z_{\mathbf{0}}^2\right].$$

Rappelons que $Z_{\boldsymbol{i}} = U_{\boldsymbol{i}}$ pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$. Puisque $\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] \trianglelefteq 1$ et $\|U_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}$, on déduit du le lemme 5.5.2 que

$$I_1 \trianglelefteq \frac{\beta^d L b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}} + L^{-\theta} b_n^{-\frac{\theta N}{2}} + \beta^{\frac{(2d-1)\theta+6d-2}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta) + \left\|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant\beta \\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}} \frac{Z_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right\|_2.$$

Choisissons

$$L = \frac{|\Lambda_n|^{\frac{1}{2(1+\theta)}}}{\beta^{\frac{d}{1+\theta}} b_n^{\frac{\theta(\theta+6)N}{2(1+\theta)(4+\theta)}}} \tag{5.50}$$

et on obtient

$$I_1 \trianglelefteq \left(|\Lambda_n| b_n^N\right)^{\frac{-\theta}{2(1+\theta)}} \times b_n^{\frac{\theta^2(2+\theta)(d-1)N}{(1+\theta)(4+\theta)((2d-1)\theta+6d-2)}} + \beta^{\frac{(2d-1)\theta+6d-2}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta) + \left\|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant\beta \\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}} \frac{U_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right\|_2.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant\beta \\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}} \frac{U_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right\|_2^2 &\leqslant \frac{(2\beta+1)^d \mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right]}{|\Lambda_n|} + \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \left|[-\beta,\beta]^d \cap \left([-\beta,\beta]^d - \boldsymbol{j}\right)\right| \left|\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}} U_{\boldsymbol{j}}\right]\right| \\ &\trianglelefteq \frac{\beta^d}{|\Lambda_n|}\left(\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] + \sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \left|\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}} U_{\boldsymbol{j}}\right]\right|\right).\end{aligned}$$

En utilisant (5.32) et (5.34), on a $\sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}} \left|\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}} U_{\boldsymbol{j}}\right]\right| = o(1)$. Par conséquent, on obtient

$$\left\|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant\beta \\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}} \frac{U_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right\|_2^2 \trianglelefteq \frac{\beta^d}{|\Lambda_n|} \trianglelefteq \frac{1}{|\Lambda_n| b_n^{\frac{d\theta N}{(2d-1)\theta+6d-2}}} \leqslant \frac{1}{|\Lambda_n| b_n^N}.$$

Donc, on déduit que

$$I_1 \trianglelefteq \left(|\Lambda_n| b_n^N\right)^{\frac{-\theta}{2(1+\theta)}} \times b_n^{\frac{\theta^2(2+\theta)(d-1)N}{(1+\theta)(4+\theta)((2d-1)\theta+6d-2)}} + \beta^{\frac{(2d-1)\theta+6d-2}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta) + \frac{1}{\sqrt{|\Lambda_n| b_n^N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Finalement, si $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant, alors (5.48) est satisfaite. Pour achever la preuve du théorème 5.2.2, il suffit de montrer (5.45), (5.46), (5.47) et (5.48) lorsque $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (5.1). Supposons donc que c'est le cas et que $(A3)(ii)$ est satisfaite. Alors $(Z_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} = (\overline{U}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est M_n-dépendant. Par conséquent $\mathbb{E}\left[T_{g(k)} h_{k-1,k+1}^{'(M_n)}\right] = 0$ et donc, on a (5.45).

Lemme 5.5.4. $\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}} \mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\boldsymbol{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}|\right] = o\left(M_n^{-d}\right)$.

Preuve. On a

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}} \left|\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\boldsymbol{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}|\right] - \mathbb{E}\left[|U_{\boldsymbol{0}}U_{\boldsymbol{j}}|\right]\right| \leqslant 2\left\|U_{\boldsymbol{0}}\right\|_2 \left\|U_{\boldsymbol{0}} - \overline{U}_{\boldsymbol{0}}\right\|_2.$$

En utilisant (5.19), le lemme 5.4.2 et le lemme 5.5.2 et en gardant à l'esprit que $\|U_{\boldsymbol{0}}\|_2 \trianglelefteq 1$, on obtient

$$M_n^d \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}} \mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\boldsymbol{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}|\right] \trianglelefteq M_n^d b_n^{\frac{\theta N}{4+\theta}} + b_n^{-\frac{\theta(N+2)+2N}{2(2+\theta)}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>M_n} |\boldsymbol{j}|^d \delta_{\boldsymbol{j},2}^{\frac{\theta}{2+\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Le lemme 5.5.4 est prouvé. □

On applique le lemme 5.5.4, on a

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \mathbb{E}\left[|v_k'|\right] \leqslant 2\mathbb{E}\left[|Z_{\boldsymbol{0}}| \left(\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}}} |Z_{\boldsymbol{i}}|\right)\left(1 \wedge \sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{|Z_{\boldsymbol{i}}|}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right)\right] \leqslant 2 \sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}}} \mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\boldsymbol{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{i}}|\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \left|\mathbb{E}\left[T_{g(k)}\left(S_{g(k-1)}(T) - S_{g(k)}^{(M_n)}(T)\right) h_{k-1,k+1}^{''(M_n)}\right]\right| \leqslant \sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}\neq 0}} \mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\boldsymbol{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{i}}|\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, on a (5.46) et (5.47). De plus, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}\left[Z_0^2\right]\right) h_{k-1,k+1}^{''(M_n)}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\overline{U}_{g(k)}^2 - \mathbb{E}\left[\overline{U}_0^2\right]\right) h_{k-1,k+1}^{''(M_n)}\right] = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \left|\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2 - \mathbb{E}[Z_{\boldsymbol{0}}^2]\right) h_{k-1,k+1}''\right]\right| &= \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|} \left|\mathbb{E}\left[\left(\overline{U}_{g(k)}^2 - \mathbb{E}\left[\overline{U}_{\boldsymbol{0}}^2\right]\right)\left(h_{k-1,k+1}'' - h_{k-1,k+1}^{''(M_n)}\right)\right]\right| \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\left(2 \wedge \left|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\boldsymbol{0}}} \frac{\overline{U}_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right|\right)\left(\overline{U}_{\boldsymbol{0}}^2 + \mathbb{E}\left[\overline{U}_{\boldsymbol{0}}^2\right]\right)\right].\end{aligned}$$

Comme précédemment, si $L' > 0$, alors en utilisant $\left\|\overline{U}_{\mathbf{0}}\right\|_{2+\theta}^2 \leqslant \|U_{\mathbf{0}}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq b_n^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}$, on obtient

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\left|\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2-\mathbb{E}[Z_{\mathbf{0}}^2]\right)h''_{k-1,k+1}\right]\right| \trianglelefteq \frac{M_n^d L' \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\mathbf{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}|\right]}{\sqrt{|\Lambda_n|}} + L'^{-\theta} b_n^{-\frac{\theta N}{2}} + \mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right]\left\|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}}\frac{\overline{U}_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right\|_2 .$$

En appliquant le lemme 5.5.4 et puisque $\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] \trianglelefteq 1$, on a

$$\left\|\sum_{\substack{|\boldsymbol{i}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{i}<_{\text{lex}}\mathbf{0}}}\frac{\overline{U}_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}\right\|_2^2 \leqslant \frac{(2M_n+1)^d\,\mathbb{E}\left[\overline{U}_{\mathbf{0}}^2\right]}{|\Lambda_n|} + \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{|\boldsymbol{j}|\leqslant M_n\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}}\left|[-M_n,M_n]^d\cap\left([-M_n,M_n]^d-\boldsymbol{j}\right)\right|\left|\mathbb{E}\left[\overline{U}_{\mathbf{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}\right]\right|$$

$$\trianglelefteq \frac{M_n^d}{|\Lambda_n|}\left(\mathbb{E}\left[U_{\mathbf{0}}^2\right] + M_n^d \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}}\mathbb{E}\left[\left|\overline{U}_{\mathbf{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}\right|\right]\right) \trianglelefteq \frac{M_n^d}{|\Lambda_n|}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\left|\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2-\mathbb{E}[Z_{\mathbf{0}}^2]\right)h''_{k-1,k+1}\right]\right| \trianglelefteq \frac{M_n^d L' \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\mathbf{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}|\right]}{\sqrt{|\Lambda_n|}} + L'^{-\theta} b_n^{-\frac{\theta N}{2}} + \frac{M_n^{d/2}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}.$$

Pour

$$L' = \frac{|\Lambda_n|^{\frac{1}{2(1+\theta)}}}{\left(M_n^d \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\mathbf{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}|\right]\right)^{\frac{1}{1+\theta}} b_n^{\frac{\theta N}{2(1+\theta)}}},$$

on a

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{k=1}^{|\Lambda_n|}\left|\mathbb{E}\left[\left(Z_{g(k)}^2-\mathbb{E}[Z_{\mathbf{0}}^2]\right)h''_{k-1,k+1}\right]\right| \trianglelefteq \frac{\left(M_n^d \sup_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\\ \boldsymbol{j}\neq\mathbf{0}}}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{\mathbf{0}}\overline{U}_{\boldsymbol{j}}|\right]\right)^{\frac{\theta}{1+\theta}}}{(|\Lambda_n| b_n^N)^{\frac{\theta}{2(1+\theta)}}} + \frac{M_n^{d/2}}{\sqrt{|\Lambda_n|}}.$$

Finalement, en appliquant le lemme 5.5.4 et comme $M_n^d = o(|\Lambda_n|)$ (voir le lemme 5.4.2) on déduit (5.48). Le théorème 5.2.2 est prouvé. □

6. Estimateurs récursifs à noyau pour des données spatiales

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la normalité asymptotique d'une classe d'estimateurs récursifs à noyau pour des données spatiales dépendantes. Notre résultat principal fournit des conditions suffisantes pour obtenir la normalité asymptotique d'une version multi-indicée de l'estimateur récursif introduit par Peter Hall et Prakash Patil [HP94]. Les résultats sont présentés et démontrés pour des champs fortement mélangeants au sens de Rosenblatt [Ros56a] et pour des champs faiblement dépendants au sens de Wu [Wu05]. Ceux-ci font l'objet d'un article soumis pour publication et écrit en collaboration par Mohamed El Machkouri et Lucas Reding [EMR20].

6.1. Modèle statistique et estimateurs étudiés

Afin d'énoncer et démontrer les différents théorèmes limite pour les estimateurs récursifs qui nous intéressent, nous effectuerons notre étude dans un cadre similaire à celui du chapitre précédent. Ainsi, on considère N un entier strictement positif et $((Y_{\boldsymbol{i}}, X_{\boldsymbol{i}}))_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons la loi commune μ des variables aléatoires $X_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d$ être absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ et notons par f une densité (inconnue) de μ.
Soit $(\eta_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ centrées et dont les carrés de leurs normes euclidiennes sont intégrables. On suppose que le champ $(\eta_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendant du champ $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$.

Soient $\Lambda_0 = \varnothing$, $s_0 = \mathbf{0}\in\mathbb{Z}^d$ et $\Lambda_n = \{s_1, ..., s_n\}\subset\mathbb{Z}^d$ pour tout $n\geqslant 1$. On considère $(w_{s_n})_{n\geqslant 1}$ et $(b_{s_n})_{n\geqslant 1}$ deux suites décroissantes de réels strictement positifs qui convergent vers 0 et telles que $(w_{s_n} b_{s_n}^{-N})_{n\geqslant 1}$ est croissante, $\sum_{n\geqslant 1} w_{s_n} = +\infty$ et $nb_{s_n}^N \to +\infty$.

On considère, aussi, un noyau $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ tel que K est lipschitzien, $\sup_{x\in\mathbb{R}^N} K(x) < +\infty$, $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|x\|K(x) = 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \|u\|^2 K(u)\mathrm{d}u < +\infty$ où $\|\,.\,\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ et $\int_{\mathbb{R}^N} u_i K(u)\mathrm{d}u = 0$ pour tout $i\in[\![1, N]\!]$. Soit $\Phi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $\mathbb{E}\left[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})\right] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ pour un certain $\theta > 0$ et supposons que la fonction $u\mapsto \mathbb{E}[\Phi(Y_{\mathbf{0}})^2 | X_{\mathbf{0}} = u]$ est continue. On peut remarquer que la condition $\mathbb{E}\left[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})\right] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ est satisfaite lorsque la fonction $u\mapsto \mathbb{E}[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} | X_{\mathbf{0}} = u]$ est continue (voir le lemme 6.3.2 en dessous).

Le modèle de régression est caractérisé par la relation $Y_{s_i} = R(X_{s_i}, \eta_{s_i})$ pour tout $i\in[\![1, n]\!]$ où R est une fonctionnelle inconnue. La fonction de régression étudiée r est définie en tout point $x\in\mathbb{R}^N$ par

$$r(x) = \begin{cases} \mathbb{E}\left[R(x, \eta_{\mathbf{0}})\right] & \text{si } \ f(x)\neq 0 \\ \mathbb{E}\left[Y_{\mathbf{0}}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on note $f_\Phi(x) = r_\Phi(x) f(x)$ où $r_\Phi(x) = \mathbb{E}\left[\Phi(Y_{\mathbf{0}}) | X_{\mathbf{0}} = x\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(R(x, \eta_{\mathbf{0}}))\right]$ si $f(x) \neq 0$ et $r_\Phi(x) = \mathbb{E}\left[\Phi(Y_{\mathbf{0}})\right]$ sinon, et on considère l'estimateur $f_{n,\Phi}$ de f_Φ défini par

$$f_{n,\Phi}(x) = (\sum_{i=1}^{n} w_{s_i})^{-1} \sum_{j=1}^{n} w_{s_j} b_{s_j}^{-N} \Phi(Y_{s_j}) K_{s_j}(x, X_{s_j}) \tag{6.1}$$

où $K_{s_j}(x, v) = K((x - v)/b_{s_j})$ pour tout $v \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On peut remarquer que si $\Phi(u) = 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ alors $f_{n,\Phi}$ est la version spatiale $f_{n,\mathbf{1}}$ de l'estimateur à noyau de la densité f introduit par Hall et Patil [HP94] défini par

$$f_{n,\mathbf{1}}(x) = (\sum_{i=1}^{n} w_{s_i})^{-1} \sum_{j=1}^{n} w_{s_j} b_{s_j}^{-N} K_{s_j}(x, X_{s_j}). \tag{6.2}$$

De plus, pour des poids $w_{s_n}, n \geqslant 1$ bien choisis, l'estimateur précédent se réécrit comme l'un des estimateurs définis dans [Ami10], [Ami12], [Deh73] ou encore [WW69]. En particulier, on peut vérifier que $f_{n,\Phi}$ satisfait à l'équation de récursion suivante :

$$f_{n,\Phi}(x) = (1 - \rho_n) f_{n-1,\Phi}(x) + \rho_n b_{s_n}^{-N} \Phi(Y_{s_n}) K_{s_n}(x, X_{s_n}) \quad \text{où} \quad \rho_n = \frac{w_{s_n}}{\sum_{i=1}^{n} w_{s_i}}.$$

Dans ce chapitre, on considère l'estimateur semi-récursif à noyau de la régression $r_{n,\Phi}$ de r_Φ défini en tout $x \in \mathbb{R}^N$ par

$$r_{n,\Phi}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_{n,\Phi}(x)}{f_{n,\mathbf{1}}(x)} & \text{si } \sum_{j=1}^{n} w_{s_j} b_{s_j}^{-N} K_{s_j}(x, X_{s_j}) \neq 0 \\ n^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_{s_i} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.3}$$

Cet estimateur généralise l'estimateur de Ahmad-Lin et celui de Devroye-Wagner pour les séries temporelles et que l'on a déjà rencontrés. Il généralise aussi les estimateurs semi-récursifs d'Amiri [Ami12].

Soit m un entier strictement positif. On va établir la normalité asymptotique de ces différents estimateurs pour des champs fortement mélangeants ainsi que pour des champs de Bernoulli de la forme

$$X_{\boldsymbol{i}} = G\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{s}}\,;\, \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d\right), \quad i \in \mathbb{Z}^d, \tag{6.4}$$

où $G : (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction et $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de v.a.i.i.d.

6.2. Résultats principaux

Dans la suite, pour tout $j \in \{2, 4\}$, on définit

$$\nu_j(\theta) = \mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty < +\infty} + \frac{\theta}{j + \theta} \mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty = +\infty}. \tag{6.5}$$

Pour tout entier strictement positif n et pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on note $A_{n,p,q} = (n b_{s_n}^p w_{s_n}^q)^{-1} \sum_{i=1}^{n} b_{s_i}^p w_{s_i}^q$ et on considère les hypothèses suivantes.

(H1) Il existe $(\beta_{0,1}, \beta_{-N,2}) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ tel que $\lim_{n\to+\infty} A_{n,0,1} = \beta_{0,1}$ et $\lim_{n\to+\infty} A_{n,-N,2} = \beta_{-N,2}$.

(H2) Il existe $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] < +\infty$, $\mathbb{E}\left[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})\right] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ et $1-\nu_2(\theta) < \tau \leqslant 1$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} n b_{s_n}^{N\left(1+\frac{d\nu_2(\theta)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}\right)} = +\infty \quad \text{et} \quad b_{s_n}^{N(1-\tau)} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 \trianglelefteq n w_{s_n}^2$$

et l'une des conditions suivantes est satisfaite.

(i) $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant et $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\nu_2(\theta)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}} \alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|) < +\infty$.

(ii) $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de Bernoulli et $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d(N+2\nu_2(\theta)+2N(\nu_4(\theta)+\tau-1))}{2N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)} < +\infty$.

(H3) (i) La fonction $u \mapsto \mathbb{E}\left[\Phi(Y_0)^2 | X_{\mathbf{0}} = u\right]$ est continue.

(ii) f_Φ est deux fois différentiable et ses dérivées partielles d'ordre 2 sont bornées.

(iii) Pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, la loi de probabilité de $(X_{\mathbf{0}}, X_{\boldsymbol{k}})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et il existe $c > 0$ tel que $\sup_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} |f_{\mathbf{0},\boldsymbol{k}}(x,y) - f(x)f(y)| \leqslant c$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ où $f_{\mathbf{0},\boldsymbol{k}}$ est la densité jointe de $(X_{\mathbf{0}}, X_{\boldsymbol{k}})$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Les conditions (H1) et (H3) sont classiques dans le cadre des estimateurs récursifs à noyau (voir [Ami12], [Mas86], [MML14], [WD79] et bien d'autres). L'hypothèse (H2) impose une condition plus forte sur le paramètre de fenêtre b_{s_n} que les conditions minimales du paramètre de fenêtre. Cependant, ce fait semble être inhérent au cadre récursif puisque l'on retrouve très souvent des conditions de la forme $n b_n^{1+\varepsilon} \to +\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$ dans les articles ayant trait aux données dépendantes (voir [Ami12], [EMA], [Mas86], [MML14] or [RT92]). Dans la suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$\sigma_\Phi^2(x) := \frac{\beta_{-N,2}}{\beta_{0,1}^2} \mathbb{E}\left[\Phi(Y_{\mathbf{0}})^2 | X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x) \int_{\mathbb{R}^N} K^2(t)\mathrm{d}t. \tag{6.6}$$

6.2.1. Biais et variance asymptotiques

Notre premier résultat donne la variance asymptotique de l'estimateur $f_{n,\Phi}$ défini par (6.1).

Proposition 6.2.1. *Supposons que (H1) et (H3) sont satisfaites et qu'il existe $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}] < +\infty$ et $\mathbb{E}[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})] \trianglelefteq b_{s_n}^N$. S'il existe $\tau \in]1-\nu_4(\theta), 1]$ tel que $b_{s_n}^{N(1-\tau)} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 \trianglelefteq n w_{s_n}^2$ et l'une de ces conditions est satisfaite.*

(i) $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeante et $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\nu_2(\theta)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}} \alpha_{1,1}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|) < +\infty$.

(ii) $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4) et $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d(N+2\nu_2(\theta)+2N(\nu_4(\theta)+\tau-1))}{2N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)} < +\infty$,

où $\nu_2(\theta)$ et $\nu_4(\theta)$ sont donnés par (6.5) alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} |n b_{s_n}^N \mathbb{V}[f_{n,\Phi}(x)] - \sigma_\Phi^2(x)| = 0 \tag{6.7}$$

où $\sigma_\Phi^2(x)$ est défini par (6.6).

On obtient aussi la convergence vers 0 de l'erreur quadratique moyenne de $f_{n,\Phi}$.

Proposition 6.2.2. *On suppose que f_Φ est deux fois différentiable et que ses dérivées partielles d'ordre 2 sont bornées. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)] - f_\Phi(x)| \trianglelefteq (\sum_{i=1}^n w_{s_i})^{-1} \sum_{i=1}^n w_{s_i} b_{s_i}^2 = o(1)$. Donc, si $A_{n,2,1} \trianglelefteq 1$ alors $|\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)] - f_\Phi(x)| \trianglelefteq b_{s_n}^2$ et, sous les hypothèses de la proposition 6.2.1, on obtient $\mathbb{E}[(f_{n,\Phi}(x) - f_\Phi(x))^2] \trianglelefteq n^{-\frac{4}{4+N}}$ lorsque $b_{s_n} = n^{-\frac{1}{4+N}}$.*

6.2.2. Normalité asymptotique

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème central limite suivant.

Théorème 6.2.3. *Si les conditions* (H1), (H2) *et* (H3) *sont satisfaites alors pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\sqrt{nb_{s_n}^N}\left(f_{n,\Phi}(x) - \mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\Phi^2(x))$$

où $\sigma_\Phi^2(x)$ *est défini par* (6.6).

On peut remarquer que le théorème 6.2.3 est une extension du théorème 1 dans [EMA] dans lequel le cas des séries temporelles fortement mélangeantes est étudié. En effet, en utilisant nos notations, si $d = 1$ et $\Phi \equiv 1$ alors $f_{n,\Phi}$ se réécrit comme l'estimateur récursif à noyau de la densité $f_{n,\mathbf{1}}$ défini par Peter Hall et Prakash Patil [HP94]. Dans ce cas, on a $\nu_2(\theta) = \nu_4(\theta) = 1$ et (H2)(ii) est satisfaite dès que $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_{s_n}^{N\left(1+\frac{d\nu_2(\theta)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} nb_{s_n}^{N(1+\tau)} = +\infty$ et $\sum_{k>0} k^{1/\tau}\alpha_{1,\infty}(k) < +\infty$ qui sont exactement les conditions imposées dans le théorème 1 dans [EMA]. En appliquant le théorème 6.2.3, on obtient la normalité asymptotique de l'estimateur récursif $r_{n,\Phi}$ défini par (6.3).

Théorème 6.2.4. *Si les conditions* (H1), (H2) *et* (H3) *sont satisfaites et si* f *est lipschitzienne, deux fois différentiable et de dérivées partielles d'ordre* 2 *bornées alors pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$ *tel que* $f(x) > 0$,

$$\sqrt{nb_{s_n}^N}\left(r_{n,\Phi}(x) - \frac{\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)]}{\mathbb{E}[f_n(x)]}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \tilde{\sigma}_\Phi^2(x)\right),$$

où $\tilde{\sigma}_\Phi^2(x) = \frac{V(x)\beta_{-N,2}}{f(x)\beta_{0,1}^2}\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{K}^2(t)\mathrm{d}t$ *et* $V(x) = \mathbb{E}[\Phi(Y_\mathbf{0})^2|X_\mathbf{0} = x] - r_\Phi^2(x)$.

Le théorème 6.2.4 est aussi une extension du théorème 2.1 dans [RT92] dans lequel la normalité asymptotique des estimateurs semi-récursifs à noyau de la régression pour les séries temporelles (i.e. $d = 1$) définis par Ibrahim Ahmad et Pi-Erh Lin [AL76] est obtenue sous des hypothèses plus restrictives sur le paramètre de fenêtre et en supposant un mélange fort. En combinant le théorème 6.2.4 et la proposition 6.2.2, la condition $nb_{s_n}^{N+4} \to 0$ est suffisante pour le contrôle du biais de l'estimateur et nous donne le corollaire suivant.

Corollaire 6.2.5. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3). Si* f *est lipschitzienne, deux fois différentiable et de dérivées partielles d'ordre* 2 *bornées, si* $nb_{s_n}^{N+4} \to 0$ *et* $A_{n,2,1} \trianglelefteq 1$, *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$ *tel que* $f(x) > 0$, *on a*

$$\sqrt{nb_{s_n}^N}\left(r_{n,\Phi}(x) - r_\Phi(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \tilde{\sigma}_\Phi^2(x)\right),$$

où $\tilde{\sigma}_\Phi^2(x)$ *est défini dans le théorème 6.2.4.*

6.3. Lemmes préliminaires

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit aussi $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier supérieur ou égal à x.

Lemme 6.3.1. *Soit* $(a_\boldsymbol{k})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *une famille de réels telle que* a_{s_n} *tend vers* $a \in \mathbb{R}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$. *Si* $\lim_{n\to+\infty} A_{n,-N,2} = \beta_{-N,2} \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n \frac{w_{s_i}^2 a_{s_i}}{b_{s_i}^N} = a\beta_{-N,2}.$$

Ce résultat découle de l'application du lemme de Toepliz (voir [Mas86]). La preuve est laissée au lecteur. □

Lemme 6.3.2. *On considère $x \in \mathbb{R}^N$. Si $\Psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $x \mapsto \mathbb{E}\left[\Psi_1(Y_{\mathbf{0}})|X_{\mathbf{0}} = x\right]$ soit continue et les conditions $\sup_{t\in\mathbb{R}^N} |\Psi_2(\mathrm{K}(t))| < +\infty$, $\lim_{\|t\|\to+\infty} \|t\| \, |\Psi_2(\mathrm{K}(t))| = 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_2(\mathrm{K}(t))| \, \mathrm{d}t < +\infty$ soient vérifiées alors*

$$\lim_{n\to+\infty} b_{s_n}^{-N} \mathbb{E}\left[\Psi_1(Y_{\mathbf{0}})\Psi_2\left(K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})\right)\right] = \mathbb{E}\left[\Psi_1(Y_{\mathbf{0}})|X_{\mathbf{0}} = x\right] f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_2\left(K(v)\right) dv.$$

La preuve de ce lemme est identique à la première partie de la preuve du lemme 5.4.1.

Pour tout $\ell \in \{1, 2\}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit

$$\Delta_{s_i}^{(\ell)} = \frac{\Phi_\ell(Y_{s_i})K_{s_i}(x, X_{s_i}) - \mathbb{E}\left[\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})\right]}{b_{s_i}^{N/2}} \quad \text{et} \quad \overline{\Delta}_{s_i}^{(\ell)} = \mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(\ell)}|\mathcal{H}_{i,m_n}] \tag{6.8}$$

où $\mathcal{H}_{i,m_n} = \sigma(\eta_{s_i}, \varepsilon_{s_i-k}; |\boldsymbol{k}| \leqslant m_n)$ et $\Phi_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.

Lemme 6.3.3. *Soient $\ell \in \{1, 2\}$ et $\theta > 0$ tels que $\mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ alors $\mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^p K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ pour tout $0 < p < 2 + \theta$. De plus, si (H3)(iii) alors*

$$\sup_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} (b_{s_i} b_{s_j})^{-N} \mathbb{E}[K_{s_i}(x, X_{s_i})K_{s_j}(x, X_{s_j})] \trianglelefteq 1.$$

Preuve du lemme 6.3.3. Soit $0 < p < 2 + \theta$ et on note $q = 2 + \theta - p$. Alors

$$\mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^p K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})] \leqslant \mathbb{E}[K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})] + \mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})].$$

En utilisant le fait que $\mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^r K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ pour $r \in \{0, 2+\theta\}$, on obtient $\mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^p K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})] \trianglelefteq b_{s_n}^N$. D'autre part, d'après (H3)(iii), pour tous entiers $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_{s_i}(x, X_{s_i})K_{s_j}(x, X_{s_j})] &\trianglelefteq \int_{\mathbb{R}^N} K_{s_i}(x, u)\mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}^N} K_{s_j}(x, v)\mathrm{d}v + \mathbb{E}[K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})]\mathbb{E}[K_{s_j}(x, X_{\mathbf{0}})] \\ &\trianglelefteq (b_{s_i} b_{s_j})^N. \end{aligned}$$

Le lemme 6.3.3 est établi. □

Lemme 6.3.4. *Soit $(p, q) \in \{1, 2\}^2$ fixé, on suppose qu'il existe $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})|\right] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ pour tout $\ell \in \{p, q\}$ alors pour tous entiers positifs i et j tel que $i \neq j$,*

$$\sup_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} (b_{s_i} b_{s_j})^{\frac{-N\gamma}{2}} \mathbb{E}[|\Delta_{s_i}^{(p)} \Delta_{s_j}^{(q)}|] \trianglelefteq 1 \quad \text{où} \quad \gamma = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \max\left(\|\Phi_p\|_\infty, \|\Phi_q\|_\infty\right) < +\infty \\ \frac{\theta}{4+\theta} & \text{si} \quad \min\left(\|\Phi_p\|_\infty, \|\Phi_q\|_\infty\right) = +\infty \\ \frac{\theta}{2+\theta} & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.9}$$

Preuve du lemme 6.3.4. Soient i et j deux entiers strictement positifs tels que $i \neq j$ et $(p,q) \in \{1,2\}^2$ fixé. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}(b_{s_i}b_{s_j})^{\frac{N}{2}}\mathbb{E}[|\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}|] &\leqslant \mathbb{E}[|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})|K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})] \\ &+ 3\mathbb{E}[|\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})|K_{s_i}(x,X_{\mathbf{0}})]\mathbb{E}[|\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|K_{s_j}(x,X_{\mathbf{0}})].\end{aligned}$$

De plus, si $L > 1$ est une constante positive alors

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})|\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})\,\mathbb{1}_{|\Phi_p(Y_{s_i})|\leqslant L}\,\mathbb{1}_{|\Phi_q(Y_{s_j})|\leqslant L}K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})|\right] \\ &\quad+ \mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})\,\mathbb{1}_{|\Phi_p(Y_{s_i})|\leqslant L}\,\mathbb{1}_{|\Phi_q(Y_{s_j})|> L}K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})|\right] \\ &\quad+ \mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})\,\mathbb{1}_{|\Phi_p(Y_{s_i})|> L}\,\mathbb{1}_{|\Phi_q(Y_{s_j})|\leqslant L}K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})|\right] \\ &\quad+ \mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})\,\mathbb{1}_{|\Phi_p(Y_{s_i})|> L}\,\mathbb{1}_{|\Phi_q(Y_{s_j})|> L}K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})|\right].\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})\right|\right] \\ &\quad\leqslant (L\wedge\|\Phi_p\|_\infty)\,(L\wedge\|\Phi_q\|_\infty)\,\mathbb{E}\left[\left|K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})\right|\right] \\ &\quad+ \sqrt{\mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})|^2K_{s_i}^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[|\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|^2\,\mathbb{1}_{|\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|>L}K_{s_j}^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]} \\ &\quad+ \sqrt{\mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})|^2\,\mathbb{1}_{|\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})|>L}K_{s_i}^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[|\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|^2K_{s_j}^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]} \\ &\quad+ \sqrt{\mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})|^2\,\mathbb{1}_{|\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})|>L}K_{s_i}^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[|\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|^2\,\mathbb{1}_{|\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|>L}K_{s_j}^2(x,X_{\mathbf{0}})\right]}.\end{aligned}$$

Soit $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[|\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] < +\infty$.
On rappelle que $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}K_{s_n}(x,X_{\mathbf{0}})\right] \trianglelefteq b_{s_n}^N$ pour tout $\ell \in \{p,q\}$ et on utilise le lemme 6.3.3, on obtient alors

$$\mathbb{E}[|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})|K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})] \trianglelefteq (L\wedge\|\Phi_p\|_\infty)\,(L\wedge\|\Phi_q\|_\infty)\,(b_{s_i}b_{s_j})^N + L^{-\theta/2}(b_{s_i}b_{s_j})^{N/2}. \tag{6.10}$$

En optimisant en L l'équation (6.10), on trouve que

$$\frac{\mathbb{E}\left[\left|\Phi_p(Y_{s_i})\Phi_q(Y_{s_j})K_{s_i}(x,X_{s_i})K_{s_j}(x,X_{s_j})\right|\right]}{b_{s_i}^{N/2}b_{s_j}^{N/2}} \tag{6.11}$$

$$\trianglelefteq \begin{cases} \|\Phi_p\|_\infty^{\frac{\theta}{2+\theta}}\left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{N\theta}{2(2+\theta)}} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty < +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty = +\infty \\ \|\Phi_q\|_\infty^{\frac{\theta}{2+\theta}}\left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{N\theta}{2(2+\theta)}} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty = +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty < +\infty \\ \|\Phi_p\|_\infty\,\|\Phi_q\|_\infty\left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{N/2} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty < +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty < +\infty \\ \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{N\theta}{2(4+\theta)}} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty = +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty = +\infty. \end{cases} \tag{6.12}$$

En combinant (6.10), (6.11) et le lemme 6.3.3, on obtient

$$\mathbb{E}[|\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}|] \trianglelefteq \begin{cases} \|\Phi_p\|_\infty^{\frac{\theta}{2+\theta}} \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{N\theta}{2(2+\theta)}} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty < +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty = +\infty \\ \|\Phi_q\|_\infty^{\frac{\theta}{2+\theta}} \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{N\theta}{2(2+\theta)}} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty = +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty < +\infty \\ \|\Phi_p\|_\infty \|\Phi_q\|_\infty \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{N/2} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty < +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty < +\infty \\ \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{N\theta}{2(4+\theta)}} & \text{si} \quad \|\Phi_p\|_\infty = +\infty \text{ et } \|\Phi_q\|_\infty = +\infty. \end{cases}$$

Le lemme 6.3.4 est prouvé. □

Lemme 6.3.5. *Soit $(\Xi_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ une famille de réels positifs. Si $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\ell_2}{\ell_1}} \Xi_{\boldsymbol{k}} < +\infty$ pour des constantes strictement positives ℓ_1 et ℓ_2 fixées, alors il existe une suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs satisfaisant*

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} m_n^d b_{s_n}^{\ell_1} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_{s_n}^{-\ell_2} \sum_{|\boldsymbol{k}|>m_n} \Xi_{\boldsymbol{k}} = 0.$$

On remarque que si $\ell_1 \leqslant N$ et $nb_{s_n}^N \to +\infty$ alors $m_n^d = o\,(n)$.

Preuve du lemme 6.3.5. Soient ℓ_1, ℓ_2 et r des positives constantes telles que $r > \ell_2/\ell_1$ et soit $(m_n)_{n\geqslant 1}$ une suite définie par

$$m_n = \max\left\{ v_n, \left\lceil b_{s_n}^{-\ell_1/d} \left(\sum_{|\boldsymbol{k}|>v_n} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\ell_2}{\ell_1}} \Xi_{\boldsymbol{k}} \right)^{\frac{1}{dr}} \right\rceil \right\} \quad \text{et} \quad v_n = \lfloor [b_{s_n}^{-\ell_1/(2d)} \rfloor,$$

pour tout $n \geqslant 1$.
Étant donné que $v_n \to +\infty$, on a $m_n \to +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. De plus,

$$m_n^d b_{s_n}^{\ell_1} \trianglelefteq \max\left\{ b_{s_n}^{\ell_1/2}, \left(\sum_{|\boldsymbol{k}|>v_n} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\ell_2}{\ell_1}} \Xi_{\boldsymbol{k}} \right)^{\frac{1}{r}} + b_{s_n}^{\ell_1} \right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $v_n \leqslant m_n$, on a

$$m_n^d b_{s_n}^{\ell_1} \geqslant \left(\sum_{|\boldsymbol{k}|>m_n} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\ell_2}{\ell_1}} \Xi_{\boldsymbol{k}} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

En raison du fait que $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\ell_2}{\ell_1}} \Xi_{\boldsymbol{k}} < +\infty$ et $r > \ell_2/\ell_1$, on obtient

$$b_{s_n}^{-\ell_2} \sum_{|\boldsymbol{k}|>m_n} \Xi_{\boldsymbol{k}} \leqslant \left(m_n^d b_{s_n}^{\ell_1}\right)^{-\frac{\ell_2}{\ell_1}} \sum_{|\boldsymbol{k}|>m_n} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\ell_2}{\ell_1}} \Xi_{\boldsymbol{k}} \leqslant \left(\sum_{|\boldsymbol{k}|>m_n} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\ell_2}{\ell_1}} \Xi_{\boldsymbol{k}} \right)^{1-\frac{\ell_2}{\ell_1 r}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Le lemme 6.3.5 est prouvé. □

Lemme 6.3.6. *On considère $\ell \in \{1,2\}$ fixé et $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta} K_{s_n}(x, X_{\mathbf{0}})\right] \trianglelefteq b_{s_n}^N$. Alors $\|\Delta_{s_i}^{(\ell)}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq b_{s_i}^{\frac{-N\theta}{2+\theta}}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ où $\Delta_{s_i}^{(\ell)}$ est donné par (6.8).*

Preuve du lemme 6.3.6. Soient $\theta > 0$ et $\ell \in \{1,2\}$ tel que $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] < +\infty$ et soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\|\Delta_{s_i}^{(\ell)}\|_{2+\theta}^2 \leqslant \frac{2\,\|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x,X_{\mathbf{0}})\|_{2+\theta}^2}{b_{s_i}^N} + \frac{2\left(\mathbb{E}\left[\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x,X_{\mathbf{0}})\right]\right)^2}{b_{s_i}^N}.$$

Rappelons que $|K|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}^N}|K(t)| < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}K_{s_n}(x,X_{\mathbf{0}})\right] \trianglelefteq b_{s_n}^N$, alors $\mathbb{E}\left[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x,X_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}\right] \trianglelefteq b_{s_i}^N$. De plus, d'après le lemme 6.3.3, on a $|\mathbb{E}\left[\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x,X_{\mathbf{0}})\right]| \trianglelefteq b_{s_i}^N$ et donc $\|\Delta_{s_i}^{(\ell)}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq b_{s_i}^{-\frac{\theta N}{2+\theta}}$.
Le lemme 6.3.6 est prouvé. □

6.3.1. Proposition 6.3.7

Proposition 6.3.7. *Soient M un entier strictement positif et $x \in \mathbb{R}^N$. Si $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4) et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $\|\Phi(Y_{\mathbf{0}})\|_{2+\theta} < +\infty$ pour un certain $\theta \in]0,+\infty]$ alors pour tout entier n strictement positif, pour toute famille $(c_{\boldsymbol{k}})_{k\in\Lambda_n}$ de réels et pour tout $(p,q) \in [2,+\infty[\times]0,+\infty]$ tel que $p+q \leqslant 2+\theta$, on a*

$$\left\|\sum_{i=1}^n c_{s_i}W_i\right\|_p \leqslant 8pM^d|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)\left(\sum_{i=1}^n c_{s_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} b_{s_n}^{\frac{-q}{p+q}} \sum_{|\boldsymbol{j}|>M} \delta_{\boldsymbol{j},p}^{\frac{q}{p+q}},$$

où

$$W_i := \Phi(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i}) - \mathbb{E}\left[\Phi(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i})\,|\,\mathcal{H}_{i,M}\right], \tag{6.13}$$

$$C(p,q) = 2^{\frac{2p+q}{p+q}}\|\Phi(Y_{\mathbf{0}})\|_{p+q}\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}}^{\frac{q}{p+q}} + |K|_\infty^{\frac{q}{p+q}}\left\|\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|\Phi(R(x,\eta_{\mathbf{0}})) - \Phi(R(y,\eta_{\mathbf{0}}))|}{\|x-y\|}\right\|_p$$

et

$$\mathcal{H}_{i,M} = \sigma\left(\eta_{s_i}, \varepsilon_{s_i-\boldsymbol{k}}\,;|\boldsymbol{k}| \leqslant M\right) \quad \text{et} \quad \|K\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|K(x)-K(y)|}{\|x-y\|}.$$

Preuve de la proposition 6.3.7. Soient M un entier strictement positif et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $i \in [\![1,n]\!]$ fixé. On rappelle que $Y_{s_i} = R(X_{s_i},\eta_{s_i})$ et on définit $W_i = \Phi(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i}) - \mathbb{E}\left[\Phi(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i})\,|\,\mathcal{H}_{i,M}\right]$ où $\mathcal{H}_{i,M} = \sigma\left(\eta_{s_i},\varepsilon_{s_i-\boldsymbol{k}}\,;|\boldsymbol{k}| \leqslant M\right)$. On suit la méthode de preuve de la proposition 1 dans [EMVW13]. Soit $2 \leqslant p < 2+\theta$ et on note par H_i la fonction mesurable telle que $W_i = H_i(\mathcal{H}_{i,\infty})$ avec $\mathcal{H}_{i,\infty} = \sigma\left(\eta_{s_i},\varepsilon_{s_i-\boldsymbol{k}}\,;\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\right)$. Soient τ une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}^d$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. On définit l'opérateur de projection P_ℓ par $P_\ell f = \mathbb{E}\left[f|\mathcal{F}_\ell\right] - \mathbb{E}\left[f|\mathcal{F}_{\ell-1}\right]$ pour toute fonction intégrable f, où $\mathcal{F}_\ell = \sigma\left(\varepsilon_{\tau(j)}; j \leqslant \ell\right)$. On peut remarquer que l'opérateur P_ℓ dépend de la bijection τ. Puisque $\mathbb{E}\left[W_i|\mathcal{F}_{\ell-1}\right] = \mathbb{E}[H_i(\mathcal{H}_{i,\infty}^{(\ell)})|\mathcal{F}_\ell]$ avec $\mathcal{H}_{i,\infty}^{(\ell)} = \sigma\left(\eta_{s_i},\varepsilon'_{\tau(\ell)},\varepsilon_{s_i-\boldsymbol{k}}\,;\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{s_i-\tau(\ell)\}\right)$, on a

$$\|P_\ell W_i\|_p = \|\mathbb{E}\left[H_i(\mathcal{H}_{i,\infty})|\mathcal{F}_\ell\right] - \mathbb{E}[H_i(\mathcal{H}_{i,\infty}^{(\ell)})|\mathcal{F}_\ell]\|_p \leqslant \|\mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{i,\infty}) - \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{i,\infty}^{(\ell)})\|_p \tag{6.14}$$

Maintenant, en notant $\mathcal{H}_{i,M}^{(\ell)} = \sigma\left(\eta_{s_i}, \varepsilon'_{\tau(\ell)}, \varepsilon_{s_i-\boldsymbol{k}}\,;\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{s_i-\tau(\ell)\} \text{ et } |\boldsymbol{k}|\leqslant M\right)$, on a

$$\begin{aligned}
H_i(\mathcal{H}_{i,\infty}) &= \Phi(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i}) - \mathbb{E}[\Phi(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i})|\,\mathcal{H}_{i,M}\vee\mathcal{H}_{i,M}^{(\ell)}],\\
H_i(\mathcal{H}_{i,\infty}^{(\ell)}) &= \Phi(Y'_{i,\tau(\ell)})K_{s_i}(x,X'_{i,\tau(\ell)}) - \mathbb{E}[\Phi(Y'_{i,\tau(\ell)})K_{s_i}(x,X'_{i,\tau(\ell)})|\,\mathcal{H}_{i,M}^{(\ell)}\vee\mathcal{H}_{i,M}]
\end{aligned}$$

où $X'_{i,\tau(\ell)} = G(\varepsilon'_{\tau(\ell)}, \varepsilon_{s_i-\boldsymbol{k}}\,;\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{s_i-\tau(\ell)\})$ et $Y'_{i,\tau(\ell)} = R(X'_{i,\tau(\ell)},\eta_{s_i})$. On en déduit que

$$\|P_\ell W_i\|_p \leqslant 2\|\Phi(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i}) - \Phi(Y'_{i,\tau(\ell)})K_{s_i}(x,X'_{i,\tau(\ell)})\|_p.$$

Donc, pour tout $L>1$, on obtient la majoration suivante.

$$\begin{aligned}
\|P_\ell W_i\|_p \;\leqslant\; & \frac{2L\,\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}}}{b_{s_i}}\|X_{s_i}-X'_{i,\tau(\ell)}\|_p\\
&+\frac{4|\mathrm{K}|_\infty}{L^{q/p}}\,\|\Phi(Y_{\mathbf{0}})\|_{p+q}^{\frac{p+q}{p}}\\
&+2|\mathrm{K}|_\infty\left\|\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|\Phi(R(x,\eta_{\mathbf{0}}))-\Phi(R(y,\eta_{\mathbf{0}}))|}{\|x-y\|}\right\|_p\|X_{s_i}-X'_{i,\tau(\ell)}\|_p
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\|X_{s_i}-X'_{i,\tau(\ell)}\|_p &= \|G(\varepsilon_{s_i-\boldsymbol{t}};\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d) - G(\varepsilon'_{\tau(\ell)},\varepsilon_{s_i-\boldsymbol{t}};\,\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{s_i-\tau(\ell)\})\|_p\\
&= \|G(\varepsilon_{s_i-\tau(\ell)-\boldsymbol{t}};\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d) - G(\varepsilon'_0,\varepsilon_{s_i-\tau(\ell)-\boldsymbol{t}};\,\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{s_i-\tau(\ell)\})\|_p\\
&= \|X_{s_i-\tau(\ell)} - X^*_{s_i-\tau(\ell)}\|_p\\
&= \delta_{s_i-\tau(\ell),p}.
\end{aligned}$$

En optimisant cette dernière inégalité en L, on obtient la majoration suivante.

$$\|P_\ell W_i\|_p \leqslant 2|\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_{s_i}^{\frac{-q}{p+q}}\delta_{s_i-\tau(\ell),p}^{\frac{q}{p+q}}, \tag{6.15}$$

où

$$C(p,q) = 2^{\frac{2p+q}{p+q}}\,\|\Phi(Y_{\mathbf{0}})\|_{p+q}\,\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}}^{\frac{q}{p+q}} + |\mathrm{K}|_\infty^{\frac{q}{p+q}}\left\|\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\\ x\neq y}}\frac{|\Phi(R(x,\eta_{\mathbf{0}}))-\Phi(R(y,\eta_{\mathbf{0}}))|}{\|x-y\|}\right\|_p.$$

Maintenant, on va déterminer une autre majoration de $\|P_\ell W_i\|_p$. Soient $\ell\geqslant 0$ et $i\geqslant 1$ deux entiers. On note par $\Gamma_{i,\ell}$ l'ensemble de tous les $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d$ tels que $|s_i-\boldsymbol{k}|=\ell$ et on définit

$$a_\ell := \sum_{j=0}^{\ell}|\Gamma_{i,j}| = (2\ell+1)^d.$$

On considère la bijection $\tau_i:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Z}^d$ définie par $\tau_i(1)=s_i$, $\tau_i(u)\in\Gamma_{i,\ell}$ si $a_{\ell-1}<u\leqslant a_\ell$ et $\ell>0$, et $\tau_i(u)<_{\mathrm{lex}}\tau_i(v)$ si $a_{\ell-1}<u<v\leqslant a_\ell$ et $\ell>0$. On pose $\mathcal{G}_{i,M}=\sigma\left(\eta_{s_i},\varepsilon_{\tau_i(j)}\,;1\leqslant j\leqslant M\right)$ et on rappelle que $\mathcal{H}_{i,M}=\sigma\left(\eta_{s_i},\varepsilon_{s_i-\boldsymbol{k}}\,;|\boldsymbol{k}|\leqslant M\right)$. Comme $1\leqslant j\leqslant a_M$ si et seulement si $|s_i-\tau_i(j)|\leqslant M$, on a $\mathcal{G}_{i,a_M}=\mathcal{H}_{i,M}$. Par conséquent,

$$W_i = \sum_{\ell>a_M}D_{i,\ell}\quad\text{où}\quad D_{i,\ell}=\mathbb{E}\left[\Phi(Y_{s_i})\mathrm{K}_{s_i}(x,X_{s_i})|\mathcal{G}_{i,\ell}\right]-\mathbb{E}\left[\Phi(Y_{s_i})\mathrm{K}_{s_i}(x,X_{s_i})|\mathcal{G}_{i,\ell-1}\right].$$

Puisque $(D_{i,\ell})_{\ell\geqslant 1}$ est une suite d'accroissements de martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_{i,\ell})_{\ell\geqslant 1}$, on applique l'inégalité de Burkholder ([Ded01], remarque 6, page 85 ; ou théorème 1.4.4) et on déduit que

$$\|W_i\|_p \leqslant \left(2p \sum_{\ell>a_M} \|D_{i,\ell}\|_p^2\right)^{1/2}. \tag{6.16}$$

Puisque $X'_{i,\tau_i(\ell)} = G(\varepsilon'_{\tau_i(\ell)}, \varepsilon_{s_i-\boldsymbol{t}}\,; \boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{s_i-\tau_i(\ell)\})$ et $Y'_{i,\tau_i(\ell)} = R(X'_{i,\tau_i(\ell)}, \eta_{s_i})$, on a $\mathbb{E}\left[\Phi(Y_{s_i})\mathrm{K}_{s_i}(x, X_{s_i})|\mathcal{G}_{i,\ell-1}\right] = \left[\Phi(Y'_{i,\tau_i(\ell)})\mathrm{K}_{s_i}(x, X'_{i,\tau_i(\ell)})|\mathcal{G}_{i,\ell}\right]$ et

$$\|D_{i,\ell}\|_p \leqslant \|\Phi(Y_{s_i})\mathrm{K}_{s_i}(x, X_{s_i}) - \Phi(Y'_{i,\tau_i(\ell)})\mathrm{K}_{s_i}(x, X'_{i,\tau_i(\ell)})\|_p.$$

De la même manière que précédemment, pour tout $L>1$, on obtient

$$\begin{aligned}\|D_{i,\ell}\|_p \leqslant\ & \frac{L\,\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{Lip}}}{b_{s_i}}\|X_{s_i} - X'_{i,\tau_i(\ell)}\|_p \\ & + \frac{2|\mathrm{K}|_\infty}{L^{q/p}}\,\|\Phi(Y_{\mathbf{0}})\|_{p+q}^{\frac{p+q}{p}} \\ & + |\mathrm{K}|_\infty \left\| \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \\ x\neq y}} \frac{|\Phi(R(x,\eta_{\mathbf{0}})) - \Phi(R(y,\eta_{\mathbf{0}}))|}{\|x-y\|} \right\|_p \|X_{s_i} - X'_{i,\tau_i(\ell)}\|_p\end{aligned}$$

avec $\|X_{s_i} - X'_{i,\tau_i(\ell)}\|_p = \delta_{s_i-\tau_i(\ell),p}$. En optimisant cette inégalité en L et en remarquant que $s_i - \tau_i(\ell) = -\tau_0(\ell)$, on trouve que

$$\|D_{i,\ell}\|_p \leqslant |K|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) b_{s_i}^{-\frac{q}{p+q}} \delta_{-\tau_0(\ell),p}^{\frac{q}{p+q}}.$$

Par conséquent , on déduit que

$$\|P_\ell W_i\|_p \leqslant 2\|W_i\|_p \leqslant 2\sqrt{2p}|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) b_{s_i}^{-\frac{q}{p+q}} \sum_{\ell>a_M} \delta_{-\tau_0(\ell),p}^{\frac{q}{p+q}} \leqslant 2\sqrt{2p}|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}} C(p,q) b_{s_n}^{-\frac{q}{p+q}} \sum_{|\boldsymbol{k}|>M} \delta_{k,p}^{\frac{q}{p+q}}. \tag{6.17}$$

Puisque $(\sum_{i=1}^n c_{s_i} P_\ell W_i)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements de martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$, en appliquant l'inégalité de Burkholder (voir [Ded01], remarque 6, page 85 ; ou théorème 1.4.4), on obtient

$$\left\|\sum_{i=1}^n c_{s_i} W_i\right\|_p \leqslant \left(2p \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left\|\sum_{i=1}^n c_{s_i} P_\ell W_i\right\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(2p \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i=1}^n |c_{s_i}|\,\|P_\ell W_i\|_p\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.18}$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n |c_{s_i}|\,\|P_\ell W_i\|_p\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n c_{s_i}^2\,\|P_\ell W_i\|_p \times \sum_{j=1}^n \|P_\ell W_j\|_p. \tag{6.19}$$

Désormais, comme P_ℓ est définie au travers de la bijection τ et en utilisant (6.15) et (6.17), on a

$$\begin{aligned}
\sup_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{n}\|P_\ell W_i\|_p &\leqslant \sup_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |s_i-\tau(\ell)|\leqslant M}}\|P_\ell W_i\|_p+\sup_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |s_i-\tau(\ell)|>M}}\|P_\ell W_i\|_p\\
&\leqslant 2\sqrt{2p}M^d|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_{s_n}^{-\frac{q}{p+q}}\sum_{|\boldsymbol{k}|>M}\delta_{\boldsymbol{k},p}^{\frac{q}{p+q}}\\
&\quad+2|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_{s_n}^{-\frac{q}{p+q}}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |s_i-\tau(\ell)|>M}}\delta_{s_i-\tau(\ell),p}^{\frac{q}{p+q}}\\
&\leqslant 2\left(M^d\sqrt{2p}+1\right)|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_{s_n}^{-\frac{q}{p+q}}\sum_{|\boldsymbol{k}|>M}\delta_{\boldsymbol{k},p}^{\frac{q}{p+q}}.
\end{aligned}$$

De même, on a aussi

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\|P_\ell W_i\|_p &\leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}\\ |s_i-\tau(\ell)|\leqslant M}}\|P_\ell W_i\|_p+\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}\\ |s_i-\tau(\ell)|>M}}\|P_\ell W_i\|_p\\
&\leqslant 2\sqrt{2p}M^d|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_{s_n}^{-\frac{q}{p+q}}\sum_{|\boldsymbol{k}|>M}\delta_{\boldsymbol{k},p}^{\frac{q}{p+q}}\\
&\quad+2|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_{s_i}^{-\frac{q}{p+q}}\sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}\\ |s_i-\tau(\ell)|>M}}\delta_{s_i-\tau(\ell),p}^{\frac{q}{p+q}}\\
&\leqslant 2\left(M^d\sqrt{2p}+1\right)|K|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)b_{s_n}^{-\frac{q}{p+q}}\sum_{|\boldsymbol{k}|>M}\delta_{\boldsymbol{k},p}^{\frac{q}{p+q}}.
\end{aligned}$$

En combinant (6.18) et (6.19)avec les deux bornes précédentes, on obtient

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}c_{s_i}W_i\right\|_p\leqslant 8pM^d|\mathrm{K}|_\infty^{\frac{p}{p+q}}C(p,q)\left(\sum_{i=1}^{n}c_{s_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}b_{s_n}^{\frac{-q}{p+q}}\sum_{|\boldsymbol{k}|>M}\delta_{\boldsymbol{k},p}^{\frac{q}{p+q}}.$$

La proposition 6.3.7 est prouvée. □

6.3.2. Proposition 6.3.8

On considère une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs et on note, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $\ell\in\{1,2\}$,

$$f_n^{(\ell)}(x)=f_{n,\Phi_\ell}(x)=(\sum_{i=1}^{n}w_{s_i})^{-1}\sum_{i=1}^{n}w_{s_i}b_{s_i}^{-N}\Phi_\ell(Y_{s_i})K_{s_i}(x,X_{s_i})\quad\text{et}\quad\overline{f}_n^{(\ell)}(x)=\mathbb{E}[f_n^{(\ell)}(x)|\mathcal{H}_{i,m_n}]\tag{6.20}$$

où $\Phi_\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction mesurable et $\mathcal{H}_{i,m_n}=\sigma(\eta_{s_i},\varepsilon_{s_i-k};|\boldsymbol{k}|\leqslant m_n)$. On peut remarquer que la proposition 6.2.1 est un cas particulier du résultat suivant.

Proposition 6.3.8. *On suppose qu'il existe $\theta>0$ tel que $\mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}]<+\infty$ et $\mathbb{E}[|\Phi_\ell(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}K_{s_n}(x,X_{\mathbf{0}})]\trianglelefteq b_{s_n}^N$ pour tout $\ell\in\{1,2\}$. Soient $x\in\mathbb{R}^N$ et $(p,q)\in\{1,2\}^2$ tels que la fonction $u\mapsto\mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|X_{\mathbf{0}}=u]$ est continue. On suppose, aussi, que les conditions (H1) et (H3)(iii) sont satisfaites et qu'il existe $\tau\in]1-\gamma,1]$ tel que $b_{s_n}^{N(1-\tau)}\sum_{i=1}^{n}w_{s_i}^2\trianglelefteq nw_{s_n}^2$. Enfin on suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

(i) $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *est fortement mélangeant et* $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\tilde{\gamma}}{\gamma+\tau-1}} \alpha_{1,1}^{\tilde{\gamma}}(|\boldsymbol{k}|) < +\infty$.

(ii) $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *est de la forme* (6.4) *et* $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d(N+2\tilde{\gamma}+2N(\gamma+\tau-1))}{2N(\gamma+\tau-1)}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}} < +\infty$.

où

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} 1 & si \quad \max\left(\|\Phi_p\|_\infty, \|\Phi_q\|_\infty\right) < +\infty \\ \frac{\theta}{2+\theta} & sinon \end{cases} \tag{6.21}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} nb_{s_n}^N \operatorname{Cov}\left[f_n^{(p)}(x), f_n^{(q)}(x)\right] = \frac{\beta_{-N,2}}{\beta_{0,1}^2}\mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|X_{\mathbf{0}} = x]f(x)\int_{\mathbb{R}^N} K^2(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve de la proposition 6.3.8. Soient $x \in \mathbb{R}^N$ et $(p,q) \in \{1,2\}^2$ fixé. En utilisant les notations (6.8) et (6.20), on a

$$\begin{aligned} nb_{s_n}^N \operatorname{Cov}\left[f_n^{(p)}(x), f_n^{(q)}(x)\right] &= nb_{s_n}^N \left(\sum_{i=1}^n w_{s_i}\right)^{-2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2}\Delta_{s_i}^{(p)}\right)\left(\sum_{i=1}^n w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2}\Delta_{s_i}^{(q)}\right)\right] \\ &= nb_{s_n}^N (\sum_{i=1}^n w_{s_i})^{-2}\left(\sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N}\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_i}^{(q)}] + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{-N/2}\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} &\left|nb_{s_n}^N \operatorname{Cov}\left[f_n^{(p)}(x), f_n^{(q)}(x)\right] - \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N}\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_i}^{(q)}]\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{-N/2}|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]|. \end{aligned} \tag{6.22}$$

De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_i}^{(q)}] = b_{s_i}^{-N}\left(\mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}^2(x,X_{\mathbf{0}})] - \mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x,X_{\mathbf{0}})]\mathbb{E}[\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x,X_{\mathbf{0}})]\right).$$

D'après les lemmes 6.3.2 et 6.3.3, on obtient

$$\lim_{i\to+\infty}\left|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_i}^{(q)}] - \mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|X_{\mathbf{0}} = x]f(x)\int_{\mathbb{R}^N} K^2(t)\mathrm{d}t\right| = 0.$$

Donc, en appliquant le lemme 6.3.1 et en faisant usage de l'hypothèse (H1), on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n b_{s_i}^{-N}w_{s_i}^2\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_i}^{(q)}] = \frac{\beta_{-N,2}}{\beta_{0,1}^2}\mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|X_{\mathbf{0}} = x]f(x)\int_{\mathbb{R}^N} K^2(t)\mathrm{d}t. \tag{6.23}$$

Désormais, on montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n,-N,2}^{-2} b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{-N/2}|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| = 0. \tag{6.24}$$

D'après le lemme 6.3.4, on a $|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| \trianglelefteq (b_{s_i}b_{s_j})^{N\gamma/2}$ pour tout $i \neq j$. De plus, puisque $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\tilde{\gamma}}{\gamma+\tau-1}} \alpha_{1,1}^{\tilde{\gamma}}(|\boldsymbol{k}|) < +\infty$, en utilisant le lemme 6.3.5, il existe une suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs tels que

$$\lim_{n\to+\infty} m_n^d b_{s_n}^{N(\gamma+\tau-1)} = \lim_{n\to+\infty} b_{s_n}^{-N\tilde{\gamma}} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \alpha_{1,1}^{\tilde{\gamma}}(|\boldsymbol{k}|) = 0. \tag{6.25}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
\frac{b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{-N/2}|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| &= \frac{2b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{-N/2}|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| \\
&\trianglelefteq E_{1,n} + E_{2,n}
\end{aligned}$$

où

$$E_{1,n} = \frac{b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|<m_n}} w_{s_i}w_{s_j}\left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{-N(1-\gamma)/2}$$

et

$$E_{2,n} = \frac{b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\geqslant m_n}} w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{-N/2}|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]|.$$

Puisque $\gamma \leqslant 1$ et d'après l'inégalité classique $2ab \leqslant a^2 + b^2$, on a

$$\begin{aligned}
E_{1,n} \leqslant \frac{b_{s_n}^{N\gamma}}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|<m_n}} w_{s_i}w_{s_j} &\leqslant \frac{b_{s_n}^{N\gamma}}{2nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|<m_n}} \left(w_{s_i}^2 + w_{s_j}^2\right) \\
&\trianglelefteq \frac{m_n^d b_{s_n}^{N\gamma}}{nw_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i}^2 \\
&\trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{N(\gamma+\tau-1)} \times \frac{b_{s_n}^{N(1-\tau)}}{nw_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i}^2.
\end{aligned}$$

Par (6.25) et le fait que $b_{s_n}^{N(1-\tau)} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 \trianglelefteq nw_{s_n}^2$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} E_{1,n} = 0$. Maintenant, il s'agit de contrôler le terme $E_{2,n}$ lorsque $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant. D'après l'inégalité de Rio (c.f. théorème 1.5.4), on a pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| \leqslant 2\int_0^{2\alpha_{1,1}(|s_i-s_j|)} Q_{\Delta_{s_i}^{(p)}}(u)Q_{\Delta_{s_j}^{(q)}}(u)\mathrm{d}u$$

où $Q_{\Delta_{s_\ell}^{(p)}}(u) = \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, \mathbb{P}(|\Delta_{s_\ell}^{(p)}| > \varepsilon) \leqslant u\}$ pour tout $u \in [0,1]$ et pour tout $\ell \in \{i,j\}$.

Dans un premier temps, on suppose que $\|\Phi_p\|_\infty = +\infty$ ou $\|\Phi_q\|_\infty = +\infty$. Dans ce cas, en utilisant le lemme 6.3.6, et puisque $\tilde{\gamma} = \theta/(2+\theta)$, on a $\|\Delta_{s_r}^{(\ell)}\|_{2+\theta} \trianglelefteq b_{s_r}^{-N\tilde{\gamma}/2}$ pour tout $\ell \in \{p,q\}$ et pour tout $r \in [\![1,n]\!]$. Donc, en remarquant que $Q_{\Delta_{s_r}^{(\ell)}}(u) \trianglelefteq u^{-\frac{1}{2+\theta}} b_{s_r}^{-N\tilde{\gamma}/2}$, on obtient

$$|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| \trianglelefteq 2\left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{-N\tilde{\gamma}}{2}} \int_0^{2\alpha_{1,1}(|s_i-s_j|)} u^{\frac{-2}{2+\theta}}\mathrm{d}u \trianglelefteq \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{\frac{-N\tilde{\gamma}}{2}} \alpha_{1,1}^{\tilde{\gamma}}(|s_i-s_j|).$$

Par conséquent

$$E_{2,n} \trianglelefteq \frac{b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ |s_i-s_j|>m_n}} w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{\frac{-N(\tilde\gamma+1)}{2}}\alpha_{1,1}^{\tilde\gamma}(|s_i-s_j|).$$

En utilisant, à nouveau, l'inégalité $2ab \leqslant a^2+b^2$, on déduit que

$$\begin{aligned} E_{2,n} &\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ |s_i-s_j|>m_n}} \left(w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N(\tilde\gamma+1)} + w_{s_j}^2 b_{s_j}^{-N(\tilde\gamma+1)}\right)\alpha_{1,1}^{\tilde\gamma}(|s_i-s_j|)\\ &\trianglelefteq \left(\frac{b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n \frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N}\right) b_{s_n}^{-N\tilde\gamma} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ |s_i-s_j|>m_n}} \alpha_{1,1}^{\tilde\gamma}(|s_i-s_j|). \end{aligned}$$

D'après (H1) et (6.25), on trouve que

$$E_{2,n} \trianglelefteq b_{s_n}^{-N\tilde\gamma} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \alpha_{1,1}^{\tilde\gamma}(|\boldsymbol{k}|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et finalement, on a (6.24).

Désormais, on s'occupe du cas où $\|\Phi_p\|_\infty < +\infty$ et $\|\Phi_q\|_\infty < +\infty$. Dans ce cas, on a $\tilde\gamma = 1$. Donc $|\Delta_{s_r}^{(\ell)}| \trianglelefteq b_{s_r}^{-N\tilde\gamma/2}$ pour tout $\ell \in \{p,q\}$ et pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$. Ainsi, puisque $Q_{\Delta_{s_r}^{(\ell)}}(u) \trianglelefteq b_{s_r}^{-N\tilde\gamma/2}$, on obtient $|\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| \trianglelefteq \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{-N\tilde\gamma/2}\alpha_{1,1}^{\tilde\gamma}(|s_i-s_j|)$. De la même manière que précédemment, on trouve que

$$E_{2,n} \trianglelefteq b_{s_n}^{-N\tilde\gamma} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \alpha_{1,1}^{\tilde\gamma}(|\boldsymbol{k}|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et par conséquent la convergence (6.24) est établie.

Finalement, en utilisant (6.22), (6.23) et (6.24), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} nb_{s_n}^N \mathrm{Cov}\left[f_n^{(p)}(x), f_n^{(q)}(x)\right] = \frac{\beta_{-N,2}}{\beta_{0,1}^2}\mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}})\Phi_q(Y_{\mathbf{0}})|X_{\mathbf{0}}=x]f(x)\int_{\mathbb{R}^N} K^2(t)\mathrm{d}t.$$

Désormais, on suppose que $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4). En remarquant que $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}|\boldsymbol{k}|^{\frac{d(N+2\tilde\gamma+2N(\gamma+\tau-1))}{2N(\gamma+\tau-1)}}\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde\gamma} < +\infty$ revient à dire que $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}|\boldsymbol{k}|^{\frac{d(N+2\tilde\gamma)}{2N(\gamma+\tau-1)}}|\boldsymbol{k}|^d\delta_{k,2}^{\tilde\gamma} < +\infty$ et en utilisant le lemme 6.3.5, il existe une suite $(m_n)_{n\geqslant}$ d'entiers strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} m_n^d b_{s_n}^{N(\gamma+\tau-1)} = \lim_{n\to+\infty} b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde\gamma\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde\gamma} = 0.$$

D'après (6.8) et (6.20), on a $nb_{s_n}^N\mathrm{Cov}\left[f_n^{(p)}(x), f_n^{(q)}(x)\right] = C_{1,n}+C_{2,n}+C_{3,n}+C_{4,n}$ où

$$\begin{aligned} C_{1,n} &= nb_{s_n}^N\mathrm{Cov}[f_n^{(p)}(x)-\overline{f}_n^{(p)}(x), f_n^{(q)}(x)-\overline{f}_n^{(q)}(x)]\\ C_{2,n} &= nb_{s_n}^N\mathrm{Cov}[f_n^{(p)}(x)-\overline{f}_n^{(p)}(x), \overline{f}_n^{(q)}(x)]\\ C_{3,n} &= nb_{s_n}^N\mathrm{Cov}[\overline{f}_n^{(p)}(x), f_n^{(q)}(x)-\overline{f}_n^{(q)}(x)]\\ C_{4,n} &= nb_{s_n}^N\mathrm{Cov}[\overline{f}_n^{(p)}(x), \overline{f}_n^{(q)}(x)]. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on suppose que $\|\Phi_p\|_\infty = +\infty$ ou $\|\Phi_q\|_\infty = +\infty$. On rappelle que, dans ce cas, $\tilde{\gamma} = \theta/(2+\theta)$. De plus, on a

$$|C_{1,n}| \leqslant \left\| \frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n} w_{s_n}} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} (\Delta_{s_i}^{(p)} - \overline{\Delta}_{s_i}^{(p)}) \right\|_2 \left\| \frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n} w_{s_n}} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} (\Delta_{s_i}^{(q)} - \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}) \right\|_2 .$$

En utilisant (H1) et la proposition 6.3.7, on obtient pour tout $\ell \in \{p, q\}$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n} w_{s_n}} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} (\Delta_{s_i}^{(\ell)} - \overline{\Delta}_{s_i}^{(\ell)}) \right\|_2 &\trianglelefteq m_n^d \left(\frac{b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N} \right)^{1/2} b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}| > m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}} \\ &\trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}| > m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Par conséquent, on trouve que

$$|C_{1,n}| \trianglelefteq \left(b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}| > m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}} \right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

De même, on a

$$|C_{2,n}| \leqslant \left\| \frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n} w_{s_n}} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} (\Delta_{s_i}^{(p)} - \overline{\Delta}_{s_i}^{(p)}) \right\|_2 \left\| \frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n} w_{s_n}} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)} \right\|_2 . \to$$

D'après (6.26), on sait que

$$\left\| \frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n} w_{s_n}} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} (\Delta_{s_i}^{(p)} - \overline{\Delta}_{s_i}^{(p)}) \right\|_2 \trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}| > m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}}.$$

De plus, puisque $\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}$ et $\overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}$ sont indépendants dès que $|s_i - s_j| > 2m_n$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n} w_{s_n}} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)} \right\|_2^2 &= \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} \|\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\|_2^2 \\ &\quad + \frac{2 b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{n w_{s_n}^2} \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ |s_i - s_j| \leqslant 2m_n}} w_{s_i} w_{s_j} b_{s_i}^{-N/2} b_{s_j}^{-N/2} \mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)} \overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}] \end{aligned}$$

et, puisque $\|\Delta_{s_i}^{(q)}\|_2 \trianglelefteq 1$ (d'après le lemme 6.3.3) et par l'hypothèse (H1), on a aussi

$$\frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} \|\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\|_2^2 \leqslant \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} \|\Delta_{s_i}^{(q)}\|_2^2 \trianglelefteq 1.$$

On pose $W_i^{(\ell)} = \Phi_\ell(Y_{s_i})K_{s_i}(x, X_{s_i}) - \mathbb{E}[\Phi_\ell(Y_{s_i})K_{s_i}(x, X_{s_i})|\mathcal{H}_{i,m_n}]$ où $\mathcal{H}_{i,m_n} = \sigma(\eta_{s_i}, \varepsilon_{s_i-k}; |\boldsymbol{k}| \leqslant m_n)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $\ell \in \{p, q\}$ et en remarquant que $\Delta_{s_i}^{(\ell)} - \overline{\Delta}_{s_i}^{(\ell)} = b_{s_i}^{-N/2} W_i^{(\ell)}$, on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}] - \mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(q)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| &\leqslant b_{s_j}^{-N/2}\|\Delta_{s_i}^{(q)}\|_2\|W_j^{(q)}\|_2 + b_{s_i}^{-N/2}\|\Delta_{s_j}^{(q)}\|_2\|W_i^{(q)}\|_2 \\ &\trianglelefteq b_{s_n}^{-N/2}\left(\|W_j^{(q)}\|_2 + \|W_i^{(q)}\|_2\right) \end{aligned}$$

En utilisant (6.17), on obtient

$$|\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}] - \mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(q)}\Delta_{s_j}^{(q)}]| \trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}}. \tag{6.27}$$

Par conséquent, d'après le lemme 6.3.4, on trouve que pour tout $i \neq j$,

$$|\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}]| \trianglelefteq \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{N\gamma/2} + b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}}.$$

Comme $\gamma \leqslant 1$, en appliquant l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$, on déduit que

$$\begin{aligned} &\frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} w_{s_i}w_{s_j}b_{s_i}^{-N/2}b_{s_j}^{-N/2}|\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}]| \\ &\leqslant \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} w_{s_i}w_{s_j}(b_{s_i}b_{s_j})^{-N/2}\left(\left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{N\gamma/2} + b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}}\right) \\ &\leqslant \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{2nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} \frac{w_{s_i}^2 + w_{s_j}^2}{b_{s_n}^{N(1-\gamma)}} \\ &\qquad + \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{2nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} \left(w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} + w_{s_j}^2 b_{s_j}^{-N}\right) b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H1) et le fait que $b_{s_n}^{N(1-\tau)} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 \trianglelefteq nw_{s_n}^2$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} w_{s_i}w_{s_j}b_{s_i}^{-N/2}b_{s_j}^{-N/2}|\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}]| \\ &\qquad \trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{N(\gamma+\tau-1)} + b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Par conséquent, on déduit que

$$\left\|\frac{b_{s_n}^{N/2} A_{n,0,1}^{-1}}{\sqrt{n}w_{s_n}} \sum_{i=1}^n w_{s_i} b_{s_i}^{-N/2} \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}\right\|_2 \trianglelefteq 1 \quad \text{et} \quad |C_{2,n}| \trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

De même, on peut remarquer que

$$|C_{3,n}| \trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{k,2}^{\tilde{\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Afin de contrôler le dernier terme, on remarque que

$$C_{4,n} = \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} \mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(p)} \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}] + \frac{2A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} w_{s_i} w_{s_j} (b_{s_i} b_{s_j})^{-N/2} \mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(p)} \overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}].$$

On montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} \mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(p)} \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}] = \frac{\beta_{-N,2}}{\beta_{0,1}^2} \mathbb{E}[\Phi_p(Y_{\mathbf{0}}) \Phi_q(Y_{\mathbf{0}}) | X_{\mathbf{0}} = x] f(x) \int_{\mathbb{R}^N} K^2(t) \mathrm{d}t \tag{6.29}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} w_{s_i} w_{s_j} (b_{s_i} b_{s_j})^{-N/2} \mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(p)} \overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}] = 0. \tag{6.30}$$

D'après (6.17) et en employant des arguments similaires à ceux utilisés pour prouver (6.27), on déduit que

$$|\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(p)} \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}] - \mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)} \Delta_{s_i}^{(q)}]| \trianglelefteq b_{s_n}^{-N/2} \left(\|W_i^{(p)}\|_2 + \|W_i^{(q)}\|_2 \right) \trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}}.$$

D'après l'hypothèse (H1), on trouve que

$$\frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} |\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(p)} \overline{\Delta}_{s_i}^{(q)}] - \mathbb{E}[\Delta_{s_i}^{(p)} \Delta_{s_i}^{(q)}]| \trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En utilisant (6.23), on obtient (6.29). En raisonnant de la même manière que pour montrer (6.28), on trouve que

$$\begin{aligned} &\frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{n w_{s_n}^2} \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ |s_i-s_j|\leqslant 2m_n}} w_{s_i} w_{s_j} (b_{s_i} b_{s_j})^{-N/2} |\mathbb{E}[\overline{\Delta}_{s_i}^{(p)} \overline{\Delta}_{s_j}^{(q)}]| \\ &\qquad \trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{N(\gamma+\tau-1)} + b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\tilde{\gamma}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\tilde{\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc, la convergence (6.30) est satisfaite.

Finalement, si $\|\Phi_p\|_\infty < +\infty$ et $\|\Phi_q\|_\infty < +\infty$ alors $\tilde{\gamma} = 1$ et la preuve suit exactement les mêmes étapes que précédemment. La proposition 6.3.8 est démontrée. □

6.4. Preuves des résultats principaux

6.4.1. Preuve de la proposition 6.2.2

Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et n entier strictement positif. On a

$$\mathbb{E}\left[(f_{n,\Phi}(x) - f_\Phi(x))^2\right] = \mathbb{V}\left(f_{n,\Phi}(x)\right) + \left(\mathbb{E}\left[f_{n,\Phi}(x)\right] - f_\Phi(x)\right)^2.$$

De plus,

$$|\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)] - f_\Phi(x)| = \left|\left(\sum_{i=1}^n w_{s_i}\right)^{-1} \sum_{i=1}^n w_{s_i} \int_{\mathbb{R}^N} K(v)\left(f_\Phi(x - vb_{s_i}) - f_\Phi(x)\right) \mathrm{d}v\right|.$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, on obtient

$$|\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)] - f_\Phi(x)| \trianglelefteq \left(\sum_{i=1}^n w_{s_i}\right)^{-1} \sum_{i=1}^n w_{s_i} b_{s_i}^2.$$

En utilisant (H1) et $A_{n,2,1} \trianglelefteq 1$, on déduit que $|\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)] - f_\Phi(x)| \trianglelefteq A_{n,0,1}^{-1} A_{n,2,1} b_{s_n}^2 \trianglelefteq b_{s_n}^2$. Finalement, d'après la proposition 6.2.1, on a $\mathbb{V}\left[f_{n,\Phi}(x)\right] \trianglelefteq \left(nb_{s_n}^N\right)^{-1}$ et pour $b_{s_n} = n^{\frac{-1}{4+N}}$, on obtient $\mathbb{E}[(f_{n,\Phi}(x) - f_\Phi(x))^2] \trianglelefteq n^{\frac{-4}{4+N}}$. La proposition 6.2.2 est démontrée. □

6.4.2. Preuve du théorème 6.2.3

Soient n un entier strictement positif et $x \in \mathbb{R}^N$ fixé. On a

$$\sqrt{nb_{s_n}^N}\left(f_{n,\Phi}(x) - \mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)]\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_{s_i}$$

où

$$U_{s_i} = \frac{b_{s_n}^{N/2} w_{s_i} \Delta_{s_i}}{b_{s_i}^{N/2} w_{s_n} A_{n,0,1}} \quad \text{et} \quad \Delta_{s_i} = \frac{\Phi(Y_{s_i}) K_{s_i}(x, X_{s_i}) - \mathbb{E}\left[\Phi(Y_{\mathbf{0}}) K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})\right]}{b_{s_i}^{N/2}}. \tag{6.31}$$

Dans la suite, $(m_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite construite grâce au lemme 6.3.5 qui satisfait $m_n^d b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et telle que l'une des deux assertions suivantes soit vraie.

- $b_{s_n}^{-N\nu_2(\theta)} \sum_{|\boldsymbol{k}|>m_n} \alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant.
- $b_{s_n}^{-\left(\nu_2(\theta)+\frac{N}{2}\right)} \sum_{|\boldsymbol{k}|>m_n} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4),

où $\nu_2(\theta) = \mathbb{1}_{\{\|\Phi\|_\infty<+\infty\}} + \frac{\theta}{2+\theta}\mathbb{1}_{\{\|\Phi\|_\infty=+\infty\}}$.

De plus, si $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4), on pose

$$\overline{\Delta}_{s_i} = \mathbb{E}[\Delta_{s_i}|\mathcal{H}_{i,m_n}] \quad \text{et} \quad \overline{U}_{s_i} = \mathbb{E}[U_{s_i}|\mathcal{H}_{i,m_n}] \quad \text{où} \quad \mathcal{H}_{i,m_n} = \sigma(\eta_{s_i}, \varepsilon_{s_i-k}; |\boldsymbol{k}| \leqslant m_n).$$

Remarquons que $\overline{U}_{s_i}$ et $\overline{U}_{s_j}$ sont indépendantes dès que $|s_i - s_j| > 2m_n$. En utilisant (H2) et la proposition 6.3.7, on déduit

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|\sum_{i=1}^n \left(U_{s_i} - \overline{U}_{s_i}\right)\right\|_2 \trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\nu_2(\theta)+\frac{N}{2}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} |\boldsymbol{k}|^d \delta_{\boldsymbol{k}}^{\nu_2(\theta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{6.32}$$

Dans la suite, on note

$$(Z_{s_i}, M_n) = \begin{cases} (U_{s_i}, m_n) & \text{si } (X_{\boldsymbol{i}})_{i\in\mathbb{Z}^d} \text{ est fortement mélangeant} \\ (\overline{U}_{s_i}, 2m_n) & \text{si } (X_{\boldsymbol{i}})_{i\in\mathbb{Z}^d} \text{ est de la forme (6.4)} \end{cases}$$

et il suffit de démontrer la normalité asymptotique des sommes partielles $n^{-1/2}\sum_{i=1}^n Z_{s_i}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Soit $(\xi_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ indépendant de $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\eta_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ de v.a. indépendantes de lois normales telles que $\mathbb{E}[\xi_{\boldsymbol{k}}] = 0$ et $\mathbb{E}[\xi_{\boldsymbol{k}}^2] = \mathbb{E}[Z_{\boldsymbol{k}}^2]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on définit $T_{s_i} = n^{-1/2}Z_{s_i}$ et $\Xi_{s_i} = n^{-1/2}\xi_{s_i}$. On peut remarquer que $\sum_{i=1}^n \Xi_{s_i}$ est une variable aléatoire de loi normale centrée. Si $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant alors $Z_{s_i} = U_{s_i}$ et

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \Xi_{s_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[U_{s_i}^2] = \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{n w_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n \frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N} \times \frac{\mathbb{E}[\Phi(Y_{\mathbf{0}})^2 K_{s_i}^2(x, X_{\mathbf{0}})] - (\mathbb{E}[\Phi(Y_{\mathbf{0}})K_{s_i}(x, X_{\mathbf{0}})])^2}{b_{s_i}^N}.$$

En appliquant le lemme 6.3.1, le lemme 6.3.2 ainsi que le lemme 6.3.3 et d'après (6.6) et l'hypothèse (H1), on obtient

$$\lim_{n\to++\infty} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \Xi_{s_i}\right) = \sigma_\Phi^2(x). \tag{6.33}$$

Si $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4) alors $Z_{s_i} = \overline{U}_{s_i}$ et en utilisant (6.17), on obtient

$$|\mathbb{E}[U_{s_i}^2] - \mathbb{E}[\overline{U}_{s_i}^2]| \leqslant 2\,\|U_{s_i}\|_2 \left\|U_{s_i} - \overline{U}_{s_i}\right\|_2 \trianglelefteq \frac{b_{s_n}^N w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \times b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}.$$

D'après (H1), on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\mathbb{E}[U_{s_i}^2] - \mathbb{E}[\overline{U}_{s_i}^2]| &\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^N \sum_{i=1}^n b_{s_i}^{-N} w_{s_i}^2}{n w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \times b_{s_n}^{-\left(\nu_2(\theta)+\frac{N}{2}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)} \\ &\trianglelefteq b_{s_n}^{-\left(\nu_2(\theta)+\frac{N}{2}\right)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>m_n}} \delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc, on obtient aussi la convergence (6.33) lorsque $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4). Soit ψ une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, on pose

$$\psi_{i,j} = \psi\left(\sum_{\ell=1}^i T_{s_\ell} + \sum_{\ell=j}^n \Xi_{s_\ell}\right).$$

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 telle que $\max_{0\leqslant i\leqslant 3} \|h^{(i)}\|_\infty \leqslant 1$. D'après (6.33), il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} |L_n| = 0$, où

$$L_n := \mathbb{E}\left[h\left(\sum_{i=1}^n T_{s_i}\right)\right] - \mathbb{E}\left[h\left(\sum_{i=1}^n \Xi_{s_i}\right)\right].$$

En utilisant la méthode de Lindeberg [Lin22] (voir aussi [Ded98a]), on a

$$L_n = \mathbb{E}[h_{n,n+1} - h_{0,1}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[h_{i,i+1} - h_{i-1,i}] = \sum_{i=1}^n \Big(\mathbb{E}[h_{i,i+1} - h_{i-1,i+1}] - \mathbb{E}[h_{i-1,i} - h_{i-1,i+1}]\Big).$$

D'après la formule de Taylor (c.f. théorème 1.1.8), on obtient

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[T_{s_i} h'_{i-1,i+1} + \frac{1}{2} T_{s_i}^2 h''_{i-1,i+1} + \beta_i \right] - \mathbb{E}\left[\Xi_i h'_{i-1,i+1} + \frac{1}{2} \Xi_{s_i}^2 h''_{i-1,i+1} + \rho_i \right] \right),$$

où $|\beta_i| \leqslant T_{s_i}^2 (1 \wedge |T_{s_i}|)$ et $|\rho_i| \leqslant \Xi_{s_i}^2 (1 \wedge |\Xi_{s_i}|)$. Puisque Ξ_i^2 et $h''_{i-1,i+1}$ sont indépendants, $\mathbb{E}[\Xi_{s_i} h'_{i-1,i+1}] = 0$ et $\mathbb{E}[\Xi_{s_i}^2] = n^{-1}\mathbb{E}[Z_{s_i}^2]$, on obtient

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}[T_{s_i} h'_{i-1,i+1}] + \frac{1}{2} \mathbb{E}\Big[\left(T_{s_i}^2 - n^{-1}\mathbb{E}[Z_{s_i}^2] \right) h''_{i-1,i+1} \Big] + \mathbb{E}[\beta_i - \rho_i] \right).$$

Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire ξ_{s_i} suit une loi normale centrée et de variance $\mathbb{E}[Z_{s_i}^2]$, on a

$$\mathbb{E}[|\xi_{s_i}|^3] = \sqrt{8/\pi} \left(\mathbb{E}[Z_{s_i}^2] \right)^{3/2} \leqslant \sqrt{8/\pi} \left(\mathbb{E}[U_{s_i}^2] \right)^{3/2}.$$

De plus, comme $(w_{s_n} b_{s_n}^{-N})_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante, on obtient

$$\left(\mathbb{E}[U_{s_i}^2] \right)^{3/2} = \frac{b_{s_n}^N w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \left(\frac{b_{s_n}^N w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^2] \right)^{3/2} \trianglelefteq \frac{b_{s_n}^N w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \left(b_{s_i}^N b_{s_n}^{-N} \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^2] \right)^{3/2}.$$

En utilisant l'hypothèse (H1) et le fait que $\mathbb{E}\left[\Delta_{s_i}^2\right] < +\infty$ (c.f. lemme 6.3.3), on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\rho_i|] \trianglelefteq \frac{1}{\sqrt{n b_{s_n}^N}} \times \frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{w_{s_n}^2 n} \sum_{i=1}^{n} w_{s_i}^2 b_{s_i}^{-N} \left(\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^2] \right)^{3/2} \trianglelefteq \left(n b_{s_n}^N \right)^{-1/2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'autre part, si $\|\Phi\|_\infty < +\infty$ alors $|U_{s_i}| \trianglelefteq b_{s_n}^{-N/2}$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\beta_i|] \leqslant \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|Z_{s_i}|^3] \leqslant \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|U_{s_i}|^3] \leqslant \frac{1}{\sqrt{n b_{s_n}^N}} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[U_{s_i}^2] \trianglelefteq \left(n b_{s_n}^N \right)^{-1/2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Puisque $(w_{s_n} b_{s_n}^{-N})_{n \geqslant 1}$ est croissante, si $\|\Phi\|_\infty = +\infty$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|U_{s_i}|^{2+\theta}] &= \left(\frac{b_{s_n}^{N/2} w_{s_i}}{b_{s_i}^{N/2} w_{s_n} A_{n,0,1}} \right)^2 \left(\frac{b_{s_n}^{N/2} w_{s_i}}{b_{s_i}^{N/2} w_{s_n} A_{n,0,1}} \right)^\theta \mathbb{E}[|\Delta_{s_i}|^{2+\theta}] \\ &\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^N w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \left(b_{s_i}^{\frac{N}{2}} b_{s_n}^{-\frac{N}{2}} \right)^\theta b_{s_i}^{-\frac{N\theta}{2}} \\ &= b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2}} \frac{b_{s_n}^N w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Par conséquent, si $d_n := \left(n b_{s_n}^N \right)^{\frac{-\theta}{2(\theta+1)}}$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\beta_i|] \leqslant \frac{1}{d_n^\theta n^{\theta/2}} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|U_{s_i}|^{2+\theta}] + \frac{d_n}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[U_{s_i}^2] \trianglelefteq d_n^{-\theta} \left(n b_{s_n}^N \right)^{-\theta/2} \times \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{w_{s_n}^2 n} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N} + d_n.$$

En utilisant (H1), on trouve que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\beta_i|] \trianglelefteq \frac{1}{d_n^\theta \left(n b_{s_n}^N \right)^{\theta/2}} + d_n = 2 d_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Désormais, on doit prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}[T_{s_i}h'_{i-1,i+1}]+(2n)^{-1}\,\mathbb{E}[(Z_{s_i}^2-\mathbb{E}[Z_{s_i}^2])h''_{i-1,i+1}]\right)=0. \tag{6.35}$$

Pour tout $1\leqslant i<j\leqslant n$ et pour toute fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit aussi

$$\psi_{i-1,j}^{(M_n)}=\psi\left(\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}T_{s_\ell}+\sum_{\ell=j}^{n}\Xi_{s_\ell}\right).$$

D'après la formule de Taylor (c.f. 1.1.8), on a

$$T_{s_i}h'_{i-1,i+1}=T_{s_i}h_{i-1,i+1}^{'(M_n)}+T_{s_i}\left(\sum_{\ell=1}^{i-1}T_{s_\ell}-\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}T_{s_\ell}\right)h_{i-1,i+1}^{''(M_n)}+\beta'_i$$

où

$$|\beta'_i|\leqslant 2\left|T_{s_i}\left(\sum_{\ell=1}^{i-1}T_{s_\ell}-\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}T_{s_\ell}\right)\left(1\wedge\left|\sum_{\ell=1}^{i-1}T_{s_\ell}-\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}T_{s_\ell}\right|\right)\right|. \tag{6.36}$$

Afin de montrer (6.35), on doit prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[T_{s_i}h_{i-1,i+1}^{'(M_n)}]=0, \tag{6.37}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[T_{s_i}\left(\sum_{\ell=1}^{i-1}T_{s_\ell}-\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}T_{s_\ell}\right)h_{i-1,i+1}^{''(M_n)}\right]=0 \tag{6.38}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|\beta'_i|]=0, \tag{6.39}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(Z_{s_i}^2-\mathbb{E}\left[Z_{s_i}^2\right]\right)h''_{i-1,i+1}\right]=0. \tag{6.40}$$

Dans un premier temps, on suppose que $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant. Nous allons montrer la convergence (6.37). Puisque Ξ est indépendant de T, alors $\mathbb{E}\left[T_{s_i}h'\left(\sum_{r=i+1}^{n}\Xi_{s_r}\right)\right]=0$. Donc, si on définit $\mathrm{E}_i^{(n)}=\{1\leqslant j<i\mid |s_j-s_i|>M_n\}$ et si on considère π une bijection de $[1,|\mathrm{E}_i^{(n)}|]\cap\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{E}_i^{(n)}$ telle que $|s_{\pi(\ell)}-s_i|\leqslant|s_{\pi(\ell-1)}-s_i|$ alors

$$\mathbb{E}[T_{s_i}h_{i-1,i+1}^{'(M_n)}]=\mathbb{E}\left[T_{s_i}\left(h_{i-1,i+1}^{'(M_n)}-h'\left(\sum_{r=i+1}^{n}\Xi_{s_r}\right)\right)\right]=\sum_{\ell=1}^{|\mathrm{E}_i^{(n)}|}\mathrm{Cov}\left[T_{s_i},t_\ell-t_{\ell-1}\right],$$

où $t_\ell=h'\left(\sum_{r=1}^{\ell}T_{s_{\pi(r)}}+\sum_{r=i+1}^{n}\Xi_{s_r}\right)$ et $\sum_{r=1}^{0}T_{s_{\pi(r)}}=0$. Puisque $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant, d'après l'inégalité de Rio (c.f. théorème 1.5.4)et puisque $|s_{\pi(\ell)}-s_i|\leqslant|s_{\pi(\ell-1)}-s_i|$, on obtient

$$|\mathbb{E}[T_{s_i}h_{i-1,i+1}^{'(M_n)}]|\leqslant 2\sum_{\ell=1}^{|\mathrm{E}_i^{(n)}|}\int_0^{2\alpha_{1,\infty}\left(|s_{\pi(\ell)}-s_i|\right)}Q_{T_{s_i}}(u)Q_{t_\ell-t_{\ell-1}}(u)\mathrm{d}u.$$

On suppose que $\|\Phi\|_\infty < +\infty$ et on se donne $u \in]0,1[$ fixé. Comme h' est lipschitzienne et $|U_{s_i}| \trianglelefteq b_{s_n}^{-N/2}$, on a $\max\left\{Q_{T_{s_i}}(u), Q_{t_\ell - t_{\ell-1}}(u)\right\} \trianglelefteq (nb_{s_n}^N)^{-1/2}$ et on déduit que

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbb{E}[T_{s_i} h'^{(M_n)}_{i-1,i+1}]| \trianglelefteq \frac{1}{nb_{s_n}^N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{|\mathrm{E}_i^{(n)}|} \alpha_{1,\infty}\left(|s_{\pi(\ell)} - s_i|\right) \leqslant b_{s_n}^{-N} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>M_n}} \alpha_{1,\infty}(|\boldsymbol{k}|).$$

En appliquant le lemme 6.3.6, si $\|\Phi\|_\infty = +\infty$ alors

$$Q_{T_{s_i}}(u) \leqslant \frac{u^{-\frac{1}{2+\theta}} \|U_{s_i}\|_{2+\theta}}{\sqrt{n}} \trianglelefteq \frac{u^{-\frac{1}{2+\theta}}}{\sqrt{n} b_{s_n}^{\frac{N\theta}{2(2+\theta)}}} \times \frac{b_{s_n}^{N/2} w_{s_i}}{b_{s_i}^{N/2} w_{s_n} A_{n,0,1}}$$

et

$$Q_{t_\ell - t_{\ell-1}}(u) \leqslant \frac{u^{-\frac{1}{2+\theta}} \|U_{s_{\pi(\ell)}}\|_{2+\theta}}{\sqrt{n}} \trianglelefteq \frac{u^{-\frac{1}{2+\theta}}}{\sqrt{n} b_{s_n}^{\frac{N\theta}{2(2+\theta)}}} \times \frac{b_{s_n}^{N/2} w_{s_{\pi(\ell)}}}{b_{s_{\pi(\ell)}}^{N/2} w_{s_n} A_{n,0,1}}.$$

Par conséquent, d'après l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\mathbb{E}[T_{s_i} h'^{(M_n)}_{i-1,i+1}]| &\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}}}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{|E_i^{(n)}|} \frac{b_{s_n}^N w_{s_i} w_{s_{\pi(\ell)}}}{b_{s_i}^{N/2} b_{s_{\pi(\ell)}}^{N/2} w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}\left(|s_{\pi(\ell)} - s_i|\right) \\
&\trianglelefteq b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}} \times \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{|E_i^{(n)}|} \left(\frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N} + \frac{w_{s_{\pi(\ell)}}^2}{b_{s_{\pi(\ell)}}^N}\right) \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}\left(|s_{\pi(\ell)} - s_i|\right) \\
&= b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}} \times \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ |s_j - s_i|>M_n}}^{i-1} \left(\frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N} + \frac{w_{s_j}^2}{b_{s_j}^N}\right) \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|s_j - s_i|) \\
&\leqslant b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}} \times \frac{2A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N} \times \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>M_n}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{k}|).
\end{aligned}$$

D'après (H1), on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbb{E}[T_{s_i} h'^{(M_n)}_{i-1,i+1}]| \trianglelefteq b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>M_n}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(|\boldsymbol{k}|).$$

Finalement, on a montré que

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbb{E}[T_{s_i} h'^{(M_n)}_{i-1,i+1}]| \trianglelefteq b_{s_n}^{-N\nu_2(\theta)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d \\ |\boldsymbol{k}|>M_n}} \alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

où $\nu_2(\theta) = \mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty<+\infty} + \frac{\theta}{2+\theta}\mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty=+\infty}$.
Donc, la convergence (6.37) est satisfaite.

Lemme 6.4.1. $\sup_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|] \trianglelefteq w_{s_i} w_{s_j} w_{s_n}^{-2} b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}$
où $\nu_4(\theta) = \mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty<+\infty} + \frac{\theta}{4+\theta}\mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty=+\infty}$.

Preuve du lemme 6.4.1. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. D'après le lemme 6.3.4, on a $\mathbb{E}[|\Delta_{s_i}\Delta_{s_j}|] \trianglelefteq \left(b_{s_i}b_{s_j}\right)^{N\nu_4(\theta)/2}$. D'après (6.31), on a

$$\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|] = \frac{b_{s_n}^N w_{s_i}w_{s_j}\mathbb{E}[|\Delta_{s_i}\Delta_{s_j}|]}{(b_{s_i}b_{s_j})^{\frac{N}{2}} w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2} \trianglelefteq \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N w_{s_i}w_{s_j}}{w_{s_n}^2 (b_{s_i}b_{s_j})^{N(1-\nu_4(\theta))/2}}.$$

Or $\nu_4(\theta) \leqslant 1$ et $b_{s_n} \downarrow 0$ donc, d'après (H1), on trouve que $\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|] \trianglelefteq w_{s_i}w_{s_j}w_{s_n}^{-2}b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}$. Le lemme 6.4.1 est démontré. □

Comme $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant, on a $Z_{s_i} = U_{s_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus, en utilisant (6.36), on déduit que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[|\beta_i'|\right] \leqslant 2\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\frac{|Z_{s_i}|}{\sqrt{n}}\left(\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{|Z_{s_j}|}{\sqrt{n}}\right)\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|] \tag{6.41}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\left|\mathbb{E}\left[T_{s_i}\left(\sum_{\ell=1}^{i-1}T_{s_\ell} - \sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}T_{s_\ell}\right)h_{i-1,i+1}^{''(M_n)}\right]\right| &\leqslant \sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left[\frac{|Z_{s_i}|}{\sqrt{n}}\left(\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{|Z_{s_j}|}{\sqrt{n}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|].\end{aligned} \tag{6.42}$$

D'après le lemme 6.4.1 et l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|] \trianglelefteq \frac{M_n^d b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 + \frac{b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}w_{s_j}^2.$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}w_{s_j}^2 = \sum_{j=1}^{n-1}w_{s_j}^2\sum_{\substack{i=j+1\\|s_i-s_j|\leqslant M_n}}^{n}1 \leqslant M_n^d\sum_{i=1}^n w_{s_i}^2.$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse (H1), on trouve que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}\left[|U_{s_i}U_{s_j}|\right] \trianglelefteq \frac{M_n^d b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n w_{s_i}^2 &= M_n^d b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)} \times \frac{b_{s_n}^{N(1-\tau)}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n w_{s_i}^2\\ &\trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned} \tag{6.43}$$

En combinant (6.41), (6.42) et (6.43), on obtient les convergences (6.38) et (6.39).

Désormais, il suffit de montrer (6.40). Soit $\beta \geqslant 1$ un entier strictement positif. Dans la suite,

pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la notation $\mathbb{E}_\beta[Z_{s_j}]$ désigne l'espérance conditionnelle de Z_{s_j} sachant la tribu $\sigma\left(Z_{s_\ell}\,;\,\ell<j \text{ et } |s_\ell - s_j| \geqslant \beta\right)$. Alors,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mathbb{E}[(Z_{s_i}^2 - \mathbb{E}[Z_{s_i}^2])h''_{i-1,i+1}]| \leqslant I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mathbb{E}[\left(Z_{s_i}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{s_i}^2]\right) h''_{i-1,i+1}]| \text{ et } I_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mathbb{E}[(\mathbb{E}_\beta[Z_{s_i}^2] - \mathbb{E}[Z_{s_i}^2])h''_{i-1,i+1}]|.$$

Comme $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est fortement mélangeant, on a $Z_{s_i} = U_{s_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Si $\|\Phi\|_\infty = +\infty$ alors en appliquant le lemme 5.5.3 avec $p=1$ et $r=(2+\theta)/2$, on obtient

$$I_2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|\mathbb{E}_\beta[U_{s_i}^2] - \mathbb{E}[U_{s_i}^2]\|_1 \leqslant \frac{6\alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta)}{n}\sum_{i=1}^{n} \|U_{s_i}\|_{2+\theta}^2.$$

D'après le lemme 6.3.6, on a

$$\|U_{s_i}\|_{2+\theta}^2 \trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}} b_{s_n}^N w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2}.$$

Par conséquent, d'après (H1), on obtient

$$I_2 \trianglelefteq b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta) \times \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N} \trianglelefteq b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2+\theta}} \alpha_{1,\infty}^{\frac{\theta}{2+\theta}}(\beta).$$

De même, si $\|\Phi\|_\infty < +\infty$ alors $|U_{s_i}| \trianglelefteq b_{s_n}^{-N/2}$ et comme $(w_{s_n} b_{s_n}^{-N})_{n\geqslant 1}$ est croissante, on a

$$I_2 \leqslant 6\alpha_{1,\infty}(\beta) \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|U_{s_i}\|_\infty^2 \trianglelefteq b_{s_n}^{-N}\alpha_{1,\infty}(\beta).$$

Finalement, étant donné que $\nu_2(\theta) = \mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty<+\infty} + \frac{\theta}{2+\theta}\mathbb{1}_{\|\Phi\|_\infty=+\infty}$, on déduit que

$$I_2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|\mathbb{E}_\beta[U_{s_i}^2] - \mathbb{E}[U_{s_i}^2]\|_1 \trianglelefteq b_{s_n}^{-N\nu_2(\theta)}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\beta). \tag{6.44}$$

On pose, alors,

$$\beta = \left\lceil b_{s_n}^{\frac{-N\nu_2(\theta)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}} \right\rceil. \tag{6.45}$$

Ainsi, puisque $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{k}|^{\frac{d\nu_2(\theta)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}} \alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|) < +\infty$ est équivalent à $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell^{\frac{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}} \alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\ell) < +\infty$, on obtient

$$I_2 \trianglelefteq \beta^{\frac{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}} \alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, en remarquant que $\mathbb{E}[(Z_{s_i}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{s_i}^2])h''^{(\beta)}_{i-1,i+1}] = 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{s_i}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{s_i}^2]\right) h''_{i-1,i+1}\right] = \mathbb{E}\left[\left(Z_{s_i}^2 - \mathbb{E}_\beta[Z_{s_i}^2]\right)(h''_{i-1,i+1} - h''^{(\beta)}_{i-1,i+1})\right].$$

Donc, on déduit que

$$I_1 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(2\wedge\left|\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{Z_{s_j}}{\sqrt{n}}\right|\right)\left(Z_{s_i}^2+\mathbb{E}_\beta[Z_{s_i}^2]\right)\right].$$

Si $\|\Phi\|_\infty=+\infty$ et $L>0$, alors

$$\begin{aligned}I_1 &\leqslant \frac{L}{n^{3/2}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\mathbb{E}[|Z_{s_j}||Z_{s_i}|\,\mathbb{1}_{|Z_{s_i}|\leqslant L}]+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Z_{s_i}^2\,\mathbb{1}_{|Z_{s_i}|>L}]\\&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(2\wedge\left|\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{Z_{s_j}}{\sqrt{n}}\right|\right)\left(\mathbb{E}_\beta[Z_{s_i}^2]-\mathbb{E}\left[Z_{s_i}^2\right]\right)\right]\\&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(2\wedge\left|\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{Z_{s_j}}{\sqrt{n}}\right|\right)\right]\mathbb{E}[Z_{s_i}^2].\end{aligned}$$

Étant donné que $Z_{s_i}=U_{s_i}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on trouve que

$$\begin{aligned}I_1 &\leqslant \frac{L}{n^{3/2}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|]+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[U_{s_i}^2\,\mathbb{1}_{|U_{s_i}|>L}]+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\mathbb{E}_\beta[U_{s_i}^2]-\mathbb{E}[U_{s_i}^2]\|_1\\&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{U_{s_j}}{\sqrt{n}}\right\|_2\mathbb{E}[U_{s_i}^2].\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve de (6.43) et lemme 5.5.3, on conclut que

$$I_1 \trianglelefteq \frac{\beta^d L b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}}{\sqrt{n}}+\frac{L^{-\theta}}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|U_{s_i}|^{2+\theta}]+b_{s_n}^{-N\nu_2(\theta)}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\beta)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[U_{s_i}^2]\left\|\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{U_{s_j}}{\sqrt{n}}\right\|_2.$$

En combinant (6.34), (6.45) et l'hypothèse (H1), on obtient

$$I_1 \trianglelefteq \frac{\beta^d L b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}}{\sqrt{n}}+L^{-\theta}b_{s_n}^{\frac{-N\theta}{2}}+\beta^{\frac{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\beta)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[U_{s_i}^2]\left\|\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{U_{s_j}}{\sqrt{n}}\right\|_2.$$

De plus,

$$\left\|\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{U_{s_j}}{\sqrt{n}}\right\|_2^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\mathbb{E}[U_{s_j}^2]+\sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell}}^{i-1}\mathbb{E}[U_{s_j}U_{s_\ell}]\right).$$

Si $\|\Phi\|_\infty = +\infty$ alors en faisant usage de (H1) et (6.34), pour $L' = \left(\beta^{-d} n b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2}}\right)^{\frac{1}{2+\theta}}$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\mathbb{E}[U_{s_j}^2] \leqslant \frac{\beta^d L'^2}{n} + \frac{L'^{-\theta}}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[|U_{s_j}|^{2+\theta}] \trianglelefteq \frac{\beta^d L'^2}{n} + L'^{-\theta} b_{s_n}^{-\frac{N\theta}{2}} = 2\left(\frac{\beta^d}{n b_{s_n}^N}\right)^{\frac{\theta}{2+\theta}}.$$

Si $\|\Phi\|_\infty < +\infty$ alors $|U_{s_i}| \trianglelefteq b_{s_n}^{-N/2}$ et par conséquent

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\mathbb{E}[U_{s_j}^2] \trianglelefteq \frac{\beta^d}{n b_{s_n}^N}.$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\mathbb{E}[U_{s_j}^2] \trianglelefteq \left(\frac{\beta^d}{n b_{s_n}^N}\right)^{\nu_2(\theta)} \trianglelefteq \left(n b_{s_n}^{N\left(1+\frac{d\nu_2(\theta)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}\right)}\right)^{-\nu_2(\theta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \quad (6.46)$$

De plus, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell}}^{i-1}|\mathbb{E}[U_{s_j}U_{s_\ell}]| \trianglelefteq \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2}\sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell}}^{i-1}\frac{w_{s_j}w_{s_\ell}|\mathbb{E}[\Delta_{s_j}\Delta_{s_\ell}]|}{(b_{s_j}b_{s_\ell})^{N/2}}$$

$$\trianglelefteq \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2}\left(\sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell,\,|s_\ell-s_j|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{w_{s_j}w_{s_\ell}}{\left(b_{s_j}b_{s_\ell}\right)^{\frac{N(1-\nu_4(\theta))}{2}}} + \sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell,\,|s_\ell-s_j|>M_n}}^{i-1}\frac{w_{s_j}w_{s_\ell}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|s_j-s_\ell|)}{\left(b_{s_j}b_{s_\ell}\right)^{\frac{N(1+\nu_2(\theta))}{2}}}\right)$$

$$\trianglelefteq \frac{A_{n,0,1}^{-2} b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2}\left(\sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell,\,|s_\ell-s_j|\leqslant M_n}}^{i-1}\left(\frac{w_{s_j}^2}{b_{s_j}^{N(1-\nu_4(\theta))}} + \frac{w_{s_\ell}^2}{b_{s_\ell}^{N(1-\nu_4(\theta))}}\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell,\,|s_\ell-s_j|>M_n}}^{i-1}\left(\frac{w_{s_j}^2}{b_{s_j}^{N(1+\nu_2(\theta))}} + \frac{w_{s_\ell}^2}{b_{s_\ell}^{N(1+\nu_2(\theta))}}\right)\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|s_j-s_\ell|)\right).$$

Puisque $\nu_4(\theta) \leqslant 1$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{j,\ell=1\\\max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\j\neq\ell}}^{i-1}|\mathbb{E}[U_{s_j}U_{s_\ell}]| \trianglelefteq \frac{M_n^d b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}}{n w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2}\sum_{i=1}^{n} w_{s_i}^2$$

$$+ \left(\frac{b_{s_n}^N}{n w_{s_n}^2 A_{n,0,1}^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{w_{s_j}^2}{b_{s_j}^N}\right)\times\frac{1}{b_{s_n}^{N\nu_2(\theta)}}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>M_n}}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|).$$

D'après les hypothèses (H1) et (H2), on déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{j,\ell=1\\ \max\{|s_j-s_i|,|s_\ell-s_i|\}\leqslant\beta\\ j\neq\ell}}^{i-1}|\mathbb{E}[U_{s_j}U_{s_\ell}]| \trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}+b_{s_n}^{-N\nu_2(\theta)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\ |\boldsymbol{k}|>M_n}}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|).$$

Par conséquent, en notant

$$\varepsilon_n^2=\left(nb_{s_n}^{N\left(1+\frac{d\nu_2(\theta)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}\right)}\right)^{-\nu_2(\theta)}+m_n^d b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}+b_{s_n}^{-N\nu_2(\theta)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\ |\boldsymbol{k}|>m_n}}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(|\boldsymbol{k}|)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[U_{s_i}^2]\left\|\sum_{\substack{j=1\\ |s_j-s_i|\leqslant\beta}}^{i-1}\frac{U_{s_j}}{\sqrt{n}}\right\|_2\trianglelefteq\underbrace{\frac{A_{n,0,1}^{-2}b_{s_n}^N}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^n\frac{w_{s_i}^2\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^2]}{b_{s_i}^N}}_{\trianglelefteq 1}\times\varepsilon_n\trianglelefteq\varepsilon_n$$

et finalement,

$$I_1\trianglelefteq\frac{\beta^d L b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}}{\sqrt{n}}+L^{-\theta}b_{s_n}^{\frac{-N\theta}{2}}+\beta^{\frac{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\beta)+\varepsilon_n.$$

En optimisant en L, on trouve que

$$I_1\trianglelefteq\frac{\beta^{\frac{d\theta}{1+\theta}}b_{s_n}^{\frac{N\theta(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{1+\theta}}}{\left(nb_{s_n}^N\right)^{\frac{\theta}{2(1+\theta)}}}+\beta^{\frac{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\beta)+\varepsilon_n.$$

Puisque, $\beta^d\trianglelefteq b_{s_n}^{\frac{-dN\nu_2(\theta)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}}$, on déduit que

$$I_1\trianglelefteq\left(nb_{s_n}^N\right)^{\frac{-\theta}{2(1+\theta)}}b_{s_n}^{\frac{N\theta(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)^2}{(1+\theta)(d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1))}}+\beta^{\frac{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{\nu_4(\theta)+\tau-1}}\alpha_{1,\infty}^{\nu_2(\theta)}(\beta)+\varepsilon_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Et donc, on obtient (6.40).

Désormais, on suppose que $(X_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est de la forme (6.4). De même que précédemment, on doit montrer les convergences (6.37), (6.38), (6.39) ainsi que (6.40). Or, on a $Z_{s_i}=\overline{U}_{s_i}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. De plus, $\overline{U}_{s_i}$ et $\overline{U}_{s_j}$ sont indépendantes dès que $|s_i-s_j|>M_n$ où $M_n=2m_n$. Ainsi, (6.37) est satisfaite car

$$\mathbb{E}[T_{s_i}h_{i-1,i+1}^{'(M_n)}]=n^{-1/2}\mathbb{E}\left[\overline{U}_{s_i}\left(\sum_{\substack{\ell=1\\ |s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}\overline{U}_{s_\ell}+\sum_{\ell=j}^n\xi_{s_\ell}\right)\right]=0.$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de (6.41) et (6.42), on a

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|\beta_i'|] \leqslant \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|]$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[T_{s_i}\left(\sum_{\ell=1}^{i-1}T_{s_\ell}-\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}T_{s_\ell}\right)h_{i-1,i+1}^{''(M_n)}\right]\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|].$$

Lemme 6.4.2. *Pour tout entier strictement positif n,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n\\i\neq j}}^{n}\mathbb{E}[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|] \trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}+b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>m_n}}|\boldsymbol{k}|^d\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Preuve du lemme 6.4.2. Pour tout $1\leqslant i,j\leqslant n$ tel que $i\neq j$, on a

$$|\mathbb{E}[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|]-\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|]| \leqslant \|U_{s_j}\|_2\|U_{s_i}-\overline{U}_{s_i}\|_2+\|U_{s_i}\|_2\|U_{s_j}-\overline{U}_{s_j}\|_2$$

et pour tout $1\leqslant \ell\leqslant n$, en utilisant (6.17), on a

$$\|U_{s_\ell}\|_2=\frac{b_{s_n}^{N/2}w_{s_\ell}\|\Delta_{s_\ell}\|_2}{b_{s_\ell}^{N/2}w_{s_n}A_{n,0,1}} \trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{N/2}w_{s_\ell}}{b_{s_\ell}^{N/2}w_{s_n}A_{n,0,1}}$$

et

$$\|U_{s_\ell}-\overline{U}_{s_\ell}\|_2=\frac{b_{s_n}^{N/2}w_{s_\ell}\|\Delta_{s_\ell}-\overline{\Delta}_{s_\ell}\|_2}{b_{s_\ell}^{N/2}w_{s_n}A_{n,0,1}} \trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{N/2}w_{s_\ell}b_{s_n}^{-(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta))}}{b_{s_\ell}^{N/2}w_{s_n}A_{n,0,1}}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>M_n}}\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}.$$

Par conséquent , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n\\i\neq j}}^{n}|\mathbb{E}[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|]-\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|]| &\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{N}A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n\\i\neq j}}^{n}\frac{w_{s_i}w_{s_j}}{b_{s_i}^{N/2}b_{s_j}^{N/2}}\\
&\quad\times b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>M_n}}\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}\\
&\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{N}A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n}}^{n}\left(\frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N}+\frac{w_{s_j}^2}{b_{s_j}^N}\right)\\
&\quad\times b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>M_n}}\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}\\
&\leqslant 2M_n^d\left(\frac{b_{s_n}^{N}A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{s_i}^2}{b_{s_i}^N}\right)b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>M_n}}\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}.
\end{aligned}$$

D'après (H1), on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_j-s_i|\leqslant M_n\\i\neq j}}^{i-1}|\mathbb{E}[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|]-\mathbb{E}[|U_{s_i}U_{s_j}|]| &\trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>m_n}}\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}\\ &\leqslant b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>m_n}}|\boldsymbol{k}|^d\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}.\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 6.4.1, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_i-s_j|\leqslant M_n\\i\neq j}}^{n}\mathbb{E}\Big[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|\Big] &\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_i-s_j|\leqslant M_n\\i\neq j}}^{n}\frac{w_{s_i}w_{s_j}}{w_{s_n}^2}+b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>m_n}}|\boldsymbol{k}|^d\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}\\ &\trianglelefteq \frac{b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_i-s_j|\leqslant M_n}}^{n}(w_{s_i}^2+w_{s_j}^2)+b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>m_n}}|\boldsymbol{k}|^d\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}\\ &\trianglelefteq \frac{m_n^d b_{s_n}^{N\nu_4(\theta)}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^{n}w_{s_i}^2+b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>m_n}}|\boldsymbol{k}|^d\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}.\end{aligned}$$

D'après (H2), on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_i-s_j|\leqslant M_n\\i\neq j}}^{n}\mathbb{E}\Big[|\overline{U}_{s_i}\overline{U}_{s_j}|\Big]\trianglelefteq m_n^d b_{s_n}^{N(\nu_4(\theta)+\tau-1)}+b_{s_n}^{-\left(\frac{N}{2}+\nu_2(\theta)\right)}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\\|\boldsymbol{k}|>m_n}}|\boldsymbol{k}|^d\delta_{\boldsymbol{k},2}^{\nu_2(\theta)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Le lemme 6.4.2 est prouvé. □

Par conséquent, on obtient les convergences (6.38) et (6.39). Afin de conclure la preuve du théorème, il suffit de montrer que (6.40) est satisfaite. Soit $L>0$ fixé. Étant donné que $\overline{U}_{s_i}$ et $\overline{U}_{s_j}$ sont indépendantes si $|s_i-s_j|>M_n$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{s_i}^2-\mathbb{E}\left[Z_{s_i}^2\right]\right)h_{i-1,i+1}^{''(M_n)}\right]=\mathbb{E}\left[\left(\overline{U}_{s_i}^2-\mathbb{E}\left[\overline{U}_{s_i}^2\right]\right)h''\left(\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|>M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}+\sum_{\ell=i+1}^{n}\frac{\xi_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right)\right]=0.$$

Donc, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[\left(Z_{s_i}^2-\mathbb{E}\left[Z_{s_i}^2\right]\right)h''_{i-1,i+1}\right]\right|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[\left(\overline{U}_{s_i}^2-\mathbb{E}\left[\overline{U}_{s_i}^2\right]\right)\left(h''_{i-1,i+1}-h''^{(M_n)}_{i-1,i+1}\right)\right]\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(2\wedge\left|\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right|\right)\left(\overline{U}_{s_i}^2+\mathbb{E}\left[\overline{U}_{s_i}^2\right]\right)\right]$$

$$\leqslant\frac{L}{n^{3/2}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{s_\ell}\overline{U}_{s_i}|\right]+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\overline{U}_{s_i}^2\mathbb{1}_{|\overline{U}_{s_i}|>L}\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[2\wedge\left|\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right|\right]\mathbb{E}\left[\overline{U}_{s_i}^2\right]$$

$$\leqslant\frac{L}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{n}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{s_\ell}\overline{U}_{s_i}|\right]+\frac{2L^{-\theta}}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|U_{s_i}|^{2+\theta}\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right\|_2\mathbb{E}\left[U_{s_i}^2\right].$$

De plus,

$$\left\|\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right\|_2^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}[\overline{U}_{s_\ell}^2]+\sum_{\substack{\ell,j=1\\\max(|s_\ell-s_i|,|s_j-s_i|)\leqslant M_n\\\ell\neq j}}^{i-1}\mathbb{E}[\overline{U}_{s_\ell}\overline{U}_{s_j}]\right).$$

En remarquant que $\mathbb{E}[\overline{U}_{s_\ell}^2]\leqslant\mathbb{E}[U_{s_\ell}^2]$ et en utilisant (6.46), on a

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\mathbb{E}[\overline{U}_{s_\ell}^2]\trianglelefteq\left(nb_{s_n}^{N\left(1+\frac{d\nu_2(\theta)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}{d\nu_2(\theta)+(d-1)(\nu_4(\theta)+\tau-1)}\right)}\right)^{-\nu_2(\theta)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

D'après le lemme 6.4.2 et en puisque $\overline{U}_{s_\ell}$ et $\overline{U}_{s_j}$ sont indépendantes si $|s_\ell-s_j|>M_n$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{\ell,j=1\\\max(|s_\ell-s_i|,|s_j-s_i|)\leqslant M_n\\\ell\neq j}}^{i-1}|\mathbb{E}[\overline{U}_{s_\ell}\overline{U}_{s_j}]|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\|s_\ell-s_j|\leqslant M_n\\\ell\neq j}}^{n}|\mathbb{E}[\overline{U}_{s_\ell}\overline{U}_{s_j}]|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\left\|\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right\|_2=0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right\|_2\mathbb{E}\left[U_{s_i}^2\right]\leqslant\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{b_{s_n}^N A_{n,0,1}^{-2}}{nw_{s_n}^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{s_i}^2\mathbb{E}[\Delta_{s_i}^2]}{b_{s_i}^N}}_{\trianglelefteq 1}\times\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\left\|\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{i-1}\frac{\overline{U}_{s_\ell}}{\sqrt{n}}\right\|_2=0.$$

En utilisant (6.34) et l'hypothèse (H1), on trouve que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}[(Z_{s_i}^2-\mathbb{E}[Z_{s_i}^2])h''_{i-1,i+1}]\right| \trianglelefteq \frac{L}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{n}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{s_\ell}\overline{U}_{s_i}|\right]+L^{-\theta}b_{s_n}^{\frac{-N\theta}{2}}+o(1).$$

On optimise en L et on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}[(Z_{s_i}^2-\mathbb{E}[Z_{s_i}^2])h''_{i-1,i+1}]\right| \trianglelefteq (nb_{s_n}^N)^{\frac{-\theta}{2(1+\theta)}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\|s_\ell-s_i|\leqslant M_n}}^{n}\mathbb{E}\left[|\overline{U}_{s_\ell}\overline{U}_{s_i}|\right]\right)^{\frac{\theta}{1+\theta}}+o(1).$$

D'après le lemme 6.4.2, on a la convergence (6.40). La preuve du théorème 6.2.3 est achevée. □

6.4.3. Preuve du théorème 6.2.4

Soient n un entier strictement positif et $x\in\mathbb{R}^N$ tel que $f(x)>0$. Alors,

$$r_{n,\Phi}(x)-\frac{\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)]}{\mathbb{E}[f_n(x)]}=\frac{(f_{n,\Phi}(x)-\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)])\mathbb{E}[f_n(x)]-(f_n(x)-\mathbb{E}[f_n(x)])\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)]}{f_n(x)\mathbb{E}[f_n(x)]}.$$

D'après la proposition 6.2.1 et 6.2.2, on déduit que $f_n(x)$ tend en probabilité vers $f(x)$ et $\frac{\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)]}{\mathbb{E}[f_n(x)]}$ tend vers $r_\Phi(x)$ lorsque $n\to+\infty$. Donc, par application du lemme de Slutsky, il suffit de prouver que

$$\lambda_1\sqrt{nb_{s_n}^N}(f_{n,\Phi}(x)-\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)])+\lambda_2\sqrt{nb_{s_n}^N}(f_n(x)-\mathbb{E}[f_n(x)])\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\rho_{\lambda_1,\lambda_2}^2(x))$$

où $\rho_{\lambda_1,\lambda_2}^2(x)=\beta_{-N,2}\beta_{0,1}^{-2}(\lambda_1^2\mathbb{E}[\Phi(Y_{\mathbf{0}})^2|X_{\mathbf{0}}=x]+2\lambda_1\lambda_2 r_\Phi(x)+\lambda_2^2)f(x)\int_{\mathbb{R}^N}K^2(t)\mathrm{d}t$ pour tout $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ fixé. Alors,

$$\lambda_1\sqrt{nb_{s_n}^N}\,(f_{n,\Phi}(x)-\mathbb{E}[f_{n,\Phi}(x)])+\lambda_2\sqrt{nb_{s_n}^N}\,(f_n(x)-\mathbb{E}[f_n(x)])=\sqrt{nb_{s_n}^N}\left(f_{n,\overline{\Phi}}(x)-\mathbb{E}[f_{n,\overline{\Phi}}(x)]\right)$$

où $\overline{\Phi}(x)=\lambda_1\Phi(x)+\lambda_2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Comme la fonction $u\mapsto\mathbb{E}[\Phi(Y_{\mathbf{0}})^2|X_{\mathbf{0}}=u]$ est continue, on peut remarquer que la fonction
$u\mapsto\mathbb{E}[\overline{\Phi}(Y_{\mathbf{0}})^2|X_{\mathbf{0}}=u]$ l'est aussi. Cependant, puisque $\mathbb{E}[|\Phi(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}K_{s_n}(x,X_{\mathbf{0}})]\trianglelefteq b_{s_n}^N$, on a $\mathbb{E}[|\overline{\Phi}(Y_{\mathbf{0}})|^{2+\theta}K_{s_n}(x,X_{\mathbf{0}})]\trianglelefteq b_{s_n}^N$. Par conséquent, en appliquant le théorème 6.2.3, on obtient le résultat. Le théorème 6.2.4 est démontré. □

Bibliographie

[AB06] Charalambos Aliprantis et Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide*. Springer Science & Business Media, 2006.

[ADN18] Aboubacar Amiri et Sophie Dabo-Niang. "Density estimation over spatio-temporal data streams". Dans : *Econometrics and Statistics* 5 (2018), p. 148-170.

[AL76] Ibrahim Ahmad et Pi-Erh Lin. "Nonparametric sequential estimation of a multiple regression function". Dans : *Bull. Math. Statist* 17.1-2 (1976), p. 63-75.

[Ami10] Aboubacar Amiri. "Estimateurs fonctionnels récursifs et leurs applications à la prévision". Thèse de doct. 2010.

[Ami12] Aboubacar Amiri. "Recursive regression estimators with application to nonparametric prediction". Dans : *J. Nonparametr. Stat.* 24.1 (2012), p. 169-186.

[Bau72] Heinz Bauer. "Probability theory and elements of measure theory". Dans : *Holt* (1972).

[BC04] Gérard Biau et Benoît Cadre. "Nonparametric spatial prediction". Dans : *Statistical Inference for Stochastic Processes* 7.3 (2004), p. 327-349.

[Ber27] Serge Bernstein. "Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes". Dans : *Mathematische Annalen* 97.1 (1927), p. 1-59.

[BI95] Andrej Borodin et Il'dar Abdulovich Ibragimov. *Limit theorems for functionals of random walks*. T. 195. American Mathematical Soc., 1995.

[Bie87] Herman Bierens. "Kernel estimators of regression functions". Dans : *Advances in econometrics : Fifth world congress*. T. 1. 1987, p. 99-144.

[Bil12] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. T. 939. John Wiley & Sons, 2012.

[Bil99] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley, 1999.

[BMP99] Denis Bosq, Florence Merlevède et Magda Peligrad. "Asymptotic normality for density kernel estimators in discrete and continuous time". Dans : *J. Multivariate Anal.* 68 (1999), p. 78-95.

[Bos98] Denis Bosq. *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes-Estimation and Prediction-2nde Edition*. Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, New York, 1998.

[BPP16] David Barrera, Costel Peligrad et Magda Peligrad. "On the functional CLT for stationary Markov chains started at a point". Dans : *Stochastic Processes and their Applications* 126 (2016), p. 1885-1900.

[Bra83] Richard Bradley. "Asymptotic normality of some kernel-type estimators of probability density". Dans : *Statistics & probability letters* 1.6 (1983), p. 295-300.

[BT17] Richard Bradley et Cristina Tone. "A central limit theorem for non-stationary strongly mixing random fields". Dans : *Journal of Theoretical Probability* 30.2 (2017), p. 655-674.

[BW71] Peter Bickel et Michael Wichura. “Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications”. Dans : *Ann. Math. Statist* 42 (1971), p. 1656-1670.

[Cai69] Renzo Cairoli. “Un théorème de convergence pour martingales à indices multiples”. Dans : *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB* 269 (1969), A587-A589.

[CDV16] Christophe Cuny, Jerome Dedecker et Dalibor Volnỳ. “A functional CLT for fields of commuting transformations via martingale approximation”. Dans : *Journal of Mathematical Sciences* 219.5 (2016), p. 765-781.

[CFT07] Michel Carbon, Christian Francq et Lanh Tat Tran. “Kernel regression estimation for random fields”. Dans : *Journal of Statistical Planning and Inference* 137.3 (2007), p. 778-798.

[CHT96] Michel Carbon, Marc Hallin et Lanh Tat Tran. “Kernel density estimation for random fields : the L_1 theory”. Dans : *Journal of nonparametric Statistics* 6 (1996), p. 157-170.

[CHW13] Xiaohong Chen, Yinxiao Huang et Wei Biao Wu. “Recursive Nonparametric Estimation For Time Series”. Dans : *IEEE Trans. Inform. Theory* 60 (2013), p. 1301-1312.

[CL20] Guy Cohen et Michael Lin. “Joint and double coboundaries of commuting contractions”. Dans : *arXiv preprint arXiv :2001.06795* (2020).

[CM14] Christophe Cuny et Florence Merlevède. “On martingale approximations and the quenched weak invariance principle”. Dans : *The Annals of Probability* 42.2 (2014), p. 760-793.

[CP12] Christophe Cuny et Magda Peligrad. “Central limit theorem started at a point for stationary processes and additive functionals of reversible Markov chains”. Dans : *Journal of Theoretical Probability* 25.1 (2012), p. 171-188.

[CTW97] Michel Carbon, Lanh Tat Tran et Wei Biao Wu. “Kernel density estimation for random fields”. Dans : *Statist. Probab. Lett.* 36 (1997), p. 115-125.

[CV13] Christophe Cuny et Dalibor Volný. “A quenched invariance principle for stationary processes”. Dans : *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat* 10 (2013), 107–115.

[CW36] Harald Cramér et Herman Wold. “Some theorems on distribution functions”. Dans : *Journal of the London Mathematical Society* 1.4 (1936), p. 290-294.

[Ded01] Jerôme Dedecker. “Exponential inequalities and functional central limit theorems for random fields”. Dans : *ESAIM : Probability and Statistics* 5 (2001), p. 77-104.

[Ded98a] Jerôme Dedecker. “A central limit theorem for stationary random fields”. Dans : *Probab. Theory Relat. Fields* 110 (1998), p. 397-426.

[Ded98b] Jerôme Dedecker. “Principes d’invariance pour les champs aléatoires stationnaires”. Thèse de doct. Université Paris XI Orsay, 1998.

[Deh73] Paul Deheuvels. “Sur l’estimation séquentielle de la densité”. Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 276 (1973), A1119-A1121.

[Dep09] Jérôme Depauw. “Une preuve elementaire du theoreme limite central”. Dans : *Revue de mathématiques spéciales* 120.1 (2009), p. 33.

[Dia55] P.H. Diananda. “The central limit theorem for m-dependent variables”. Dans : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 51. 1. Cambridge University Press. 1955, p. 92-95.

[Die48] Jean Dieudonné. “Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym (III)”. Dans : *Annales de l’Université de Grenoble*. T. 23. 1948, p. 25-53.

[DL01] Yves Derriennic et Michael Lin. “The central limit thorem for Markov chains with normal transition operators started at a point”. Dans : *Probab. Theory Relat. Fields* 119 (2001), 508–528.

[DM02] Jérôme Dedecker et Florence Merlevède. “Necessary and sufficient conditions for the conditional central limit theorem”. Dans : *Annals of Probability* 30.3 (2002), p. 1044-1081.

[DMP14] Jérôme Dedecker, Florence Merlevède et Magda Peligrad. “A quenched weak invariance principle”. Dans : *Annales de l’I.H.P. Probabilités et statistiques* 50 (2014), p. 872-898.

[DMR94] Paul Doukhan, Pascal Massart et Emmanuel Rio. “The functional central limit theorem for strongly mixing processes”. Dans : *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*. T. 30. 1. 1994, p. 63-82.

[DMV07] Jérôme Dedecker, Florence Merlevède et Dalibor Volnỳ. “On the weak invariance principle for non-adapted sequences under projective criteria”. Dans : *Journal of Theoretical Probability* 20.4 (2007), p. 971-1004.

[DNRY11] Sophie Dabo-Niang, Mustapha Rachdi et Anne-Françoise Yao. “Kernel regression estimation for spatial functional random variables”. Dans : *Far East J. Theor. Stat.* 37.2 (2011), p. 77-113.

[DNY07] Sophie Dabo-Niang et Anne-Françoise Yao. “Kernel regression estimation for continuous spatial processes”. Dans : *Math. Methods Statist.* 16.4 (2007), p. 298-317.

[Don49] Monroe Donsker. “The Invariance Principle for Wiener Functionals”. Thèse de doct. University of Minnesota, 1949.

[Don51] Monroe Donsker. “An invariance principle for certain probability limit theorems”. Dans : *Mem. Amer. Math. Soc.* 6 (1951), p. 1-12.

[Dou12] Paul Doukhan. *Mixing : properties and examples*. T. 85. Springer Science & Business Media, 2012.

[DP72] R.H. Daw et Egon Pearson. “Studies in the History of Probability and Statistics. XXX. Abraham De Moivre’s 1733 derivation of the normal curve : A bibliographical note”. Dans : *Biometrika* 59.3 (1972), p. 677-680.

[DR00] Jérôme Dedecker et Emmanuel Rio. “On the functional central limit theorem for stationary processes”. Dans : *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 36 (2000), p. 1-34.

[Dud18] Grzegorz Dudek. “Probabilistic forecasting of electricity prices using kernel regression”. Dans : *2018 15th International Conference on the European Energy Market (EEM)*. IEEE. 2018, p. 1-5.

[Dvo70] Aryeh Dvoretzky. “Asymptotic normality for sums of dependent random variables”. Dans : *Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability* 2 (1970), p. 513-535.

[DW80] Luc Devroye et Terry Wagner. “Distribution-free consistency results in nonparametric discrimination and regression function estimation”. Dans : *The Annals of Statistics* (1980), p. 231-239.

[Eis+15] Tanja Eisner et al. *Operator theoretic aspects of ergodic theory.* Springer, Cham., 2015.

[EJ85] Carl-Gustav Esseen et Svante Janson. “On moment conditions for normed sums of independent variables and martingale differences”. Dans : *Stochastic processes and their applications* 19.1 (1985), p. 173-182.

[EK47] Paul Erdös et Marc Kac. “On the number of positive sums of independent random variables”. Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 53.10 (1947), p. 1011-1020.

[Ell07] Richard Ellis. *Entropy, large deviations, and statistical mechanics.* Springer, 2007.

[EM07] Mohamed El Machkouri. “Nonparametric regression estimation for random fields in a fixed-design”. Dans : *Statistical inference for stochastic processes* 10.1 (2007), p. 29-47.

[EM11] Mohamed El Machkouri. “Asymptotic normality of the Parzen–Rosenblatt density estimator for strongly mixing random fields”. Dans : *Statistical Inference for Stochastic Processes* 14.1 (2011), p. 73-84.

[EM14] Mohamed El Machkouri. “Kernel density estimation for stationary random fields”. Dans : *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 11.1 (2014), p. 259-279.

[EMA] Mohamed El Machkouri et Amir Aboubacar. “Recursive kernel density estimation for time series”. Soumis pour publication (2020).

[EMFR20] Mohamed El Machkouri, Xiequan Fan et Lucas Reding. “On the Nadaraya–Watson kernel regression estimator for irregularly spaced spatial data”. Dans : *Journal of Statistical Planning and Inference* 205 (2020), p. 92-114.

[EMG16] Mohamed El Machkouri et Davide Giraudo. “Orthomartingale-coboundary decomposition for stationary random fields”. Dans : *Stochastics and Dynamics* 16.05 (2016), p. 1650017.

[EMR20] Mohamed El Machkouri et Lucas Reding. “On a class of recursive estimators for spatial dependent observations”. Dans : *Submitted for publication* (2020).

[EMS10] Mohamed El Machkouri et Radu Stoica. “Asymptotic normality of kernel estimates in a regression model for random fields”. Dans : *Journal of Nonparametric Statistics* 22.8 (2010), p. 955-971. issn : 1048-5252.

[EMVW13] Mohamed El Machkouri, Dalibor Volnỳ et Wei Biao Wu. “A central limit theorem for stationary random fields”. Dans : *Stochastic Processes and their Applications* 123.1 (2013), p. 1-14.

[Faz05] István Fazekas. “Burkholder’s inequality for multiindex martingales”. Dans : *Ann. Math. Inform.* 32 (2005), 45–51.

[Fel35] William Feller. “Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung”. Dans : *Mathematische Zeitschrift* 40 (1935), p. 521-559.

[Fel71] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications.* T. 2. Wiley, New York, 1971.

[Fil+14] Dimitar Filev et al. *Intelligent Systems' 2014 : Proceedings of the 7th IEEE International Conference Intelligent Systems IS'2014, September 24-26, 2014, Warsaw, Poland, Volume 2 : Tools, Architectures, Systems, Applications.* T. 323. Springer, 2014.

[Fis10] Hans Fischer. *A history of the central limit theorem : From classical to modern probability theory.* Springer Science & Business Media, 2010.

[Fou22] Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur.* Libraires pour les Mathématiques, l'Architecture Hydraulique et la Marine, 1822. Chap. III.

[Gir15] Davide Giraudo. "Théorèmes limites de la théorie des probabilités dans les systèmes dynamiques". Thèse de doct. 2015.

[Gir18] Davide Giraudo. "Invariance principle via orthomartingale approximation". Dans : *Stochastics and Dynamics* 18.06 (2018), p. 1850043.

[GK49] Boris Gnedenko et Andreï Kolmogorov. "Limit distributions for sums of independent random variables". Dans : *Am. Math. Soc.* T. 62. 1949, p. 50-52.

[GK68] Boris Gnedenko et Andreï Kolmogorov. *Limit distributions for sums of independent random variables.* revised. Translated from the Russian, annotated, and revised by Kai Lai Chung. With appendices by Joseph Doob and P.L. Hsu. MR :0233400. Addison-Wesley, 1968, p. ix+293.

[GL81] Mikhail Gordin et Boris Lifšic. "A remark about a Markov process with normal transition operator". Dans : *Third Vilnius Conference on Probability and Statistics.* T. 1. Akad. Nauk Litovsk. 1981, p. 147-148.

[GM87] László Györfi et Elias Masry. "Strong consistency and rates for recursive probability density estimators of stationary processes". Dans : *J. Multivariate Anal.* 22 (1987), p. 79-93.

[GM90] László Györfi et Elias Masry. "The L_1 and L_2 strong consistency of recursive kernel density estimation from dependent samples". Dans : *IEEE Trans. Inform. Theory.* 36 (1990), p. 531-539.

[God03] Roger Godement. *Analyse Mathmatique IV/Mathematical Analysis IV : Intgration Et Thorie Spectrale, Analyse Harmonique, Le Jardin Des Dlices Modulaires/Integration and Spectral Theory, Harmonic Analysis, the Garden.* T. 4. Springer Science & Business Media, 2003.

[Gor09] Mikhail Gordin. "Martingale-coboundary representation for a class of stationary random fields". Dans : *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* 364 (2009), p. 88-108.

[Gor69] Mikhail Gordin. "The central limit theorem for stationary processes". Dans : *Soviet Math.Dokl.* (1969), p. 1174-1176.

[Gor73] M. I. Gordin. Abstracts of communications, International conference on probability theory, Vilnius. 1973.

[GP11] Mikhail Gordin et Magda Peligrad. "On the functional central limit theorem via martingale approximation". Dans : *Bernoulli* 17.1 (2011), p. 424-440.

[Han73] Edward Hannan. "Central limit theorems for time series regression". Dans : *Probability theory and related fields* 26.2 (1973), p. 157-170.

[HH80] Peter Hall et Christopher Heyde. *Martingale limit theory and its applications.* Academic press Publishers. Harcourt Brace Jovanovich. New-York–London, 1980.

[HLT01] Marc Hallin, Zudi Lu et Lanh Tat Tran. "Density estimation for spatial linear processes". Dans : *Bernoulli* 7 (2001), p. 657-668.

[HLT04] Marc Hallin, Zudi Lu et Lanh Tat Tran. "Local linear spatial regression". Dans : *Ann. Statist.* 32.6 (2004), p. 2469-2500.

[HP94] Peter Hall et Prakash Patil. "On the efficiency of on-line density estimators". Dans : *IEEE Transactions on Information Theory* 40.5 (1994), p. 1504-1512.

[HR48] Wassily Hoeffding et Herbert Robbins. "The central limit theorem for dependent random variables". Dans : *Duke Mathematical Journal* 15.3 (1948), p. 773-780.

[HS73] Christopher Heyde et D.J. Scott. "Invariance principles for the law of the iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments". Dans : *The Annals of Probability* (1973), p. 428-436.

[HT88] Wolfgang Härdle et Aleksandr Tsybakov. "Robust nonparametric regression with simultaneous scale curve estimation". Dans : *The annals of statistics* 16.1 (1988), p. 120-135.

[HV92] Wolfgang Härdle et Philippe Vieu. "Kernel regression smoothing of time series". Dans : *Journal of Time Series Analysis* 13.3 (1992), p. 209-232.

[Jak12] Adam Jakubowski. "Principle of conditioning revisited". Dans : *Demonstratio Math.* 45.2 (2012), p. 325-336.

[Kac46] Marc Kac. "On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in calculus of probability". Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 59.3 (1946), p. 401-414.

[KE46] Marc Kac et Paul Erdös. "On certain limit theorems of the theory of probability". Dans : *Bull. Amer. Math. Soc* 52 (1946), p. 292-302.

[Kho02] Davar Khoshnevisan. *Multiparameter processes : an introduction to random fields.* Springer Science & Business Media, 2002.

[Kol33] Andreï Kolmogorov. "Sulla determinazione empírica di uma legge di distribuzione". Dans : (1933).

[Kol56] Andrei Kolmogorov. "On Skorokhod convergence". Dans : *Theory of Probability & Its Applications* 1.2 (1956), p. 215-222.

[KR61] MA Krasnosel'skii et Ja B Rutickii. "Convex functions and Orlicz spaces, Translated from the first Russian edition by Leo F". Dans : *Boron, P. Noordhoff Ltd., Groningen* 2.3 (1961).

[Kre85] Ulrich Krengel. *Ergodic theorems.* de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, 1985.

[Kul92] Pandurang Kulkarni. "Estimation of parameters of a two-dimensional spatial autoregressive model with regression". Dans : *Statist. Probab. Lett.* 15.2 (1992), p. 157-162.

[KV86] Claude Kipnis et Srinivasa Varadhan. "Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions". Dans : *Communications in Mathematical Physics* 104.1 (1986), p. 1-19.

[Lam62] John Lamperti. "On convergence of stochastic processes". Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 104.3 (1962), p. 430-435.

[Lap09] Pierre-Simon Laplace. "Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités". Dans : *Mémoires de la Classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France* (1809), p. 353-415.

[LC02] Zudi Lu et Xing Chen. "Spatial nonparametric regression estimation : Non-isotropic case". Dans : *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English series* 18 (2002), p. 641-656.

[LC04] Zudi Lu et Xing Chen. "Spatial kernel regression estimation : weak consistency". Dans : *Statistics & probability letters* 68.2 (2004), p. 125-136.

[LC97] Zudi Lu et Ping Cheng. "Distribution-free strong consistency for nonparametric kernel regression involving nonlinear time series". Dans : *Journal of Statistical Planning and Inference* 65.1 (1997), p. 67-86.

[LCNS72] Lucien Le Cam, Jerzy Neyman et Elizabeth L Scott. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability : Held at the Statistical Laboratory, University of California, June 21-July 18, 1970.* Univ of California Press, 1972.

[Lig85] Thomas Liggett. *Interacting particle systems.* Springer-Verlag, 1985.

[Lin22] Jarl Lindeberg. "Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Dans : *Mathematische Zeitschrift* 15.1 (1922), p. 211-225.

[Lé22] Paul Lévy. "Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques". Dans : *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris* 175 (1922), p. 854-856.

[Mas86] Elias Masry. "Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes". Dans : *IEEE Trans. Inform. Theory* 32.2 (1986), p. 254-267.

[McL74] Don McLeish. "Dependent central limit theorems and invariance principles". Dans : *Ann. Probability* 2 (1974), p. 620-628.

[McL75] Don McLeish. "A maximal inequality and dependent strong laws". Dans : *Ann. Probab.* 3.5 (1975), p. 829-839.

[MF97] Elias Masry et Jianqing Fan. "Local polynomial estimation of regression functions for mixing processes". Dans : *Scandinavian Journal of Statistics* 24.2 (1997), p. 165-179.

[MML14] Kenza Mezhoud, Zaher Mohdeb et Sana Louhichi. "Recursive kernel estimation of the density under η-weak dependence". Dans : *J. Korean Statist. Soc.* 43.3 (2014), p. 403-414.

[Moi30] Abraham de Moivre. *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis.* 1730.

[Moi38] Abraham de Moivre. *The Doctrine of Chances : A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play.* 1738.

[MPS09] Abdelkader Mokkadem, Mariane Pelletier et Yousri Slaoui. "The stochastic approximation method for the estimation of a multivariate probability density". Dans : *Journal of Statistical Planning and Inference* 139.7 (2009), p. 2459-2478.

[Nad64] Elizbar Nadaraya. "On estimating regression". Dans : *Theory of Probability & Its Applications* 9.1 (1964), p. 141-142.

[Neu71] Georg Neuhaus. "On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter". Dans : *The Annals of Mathematical Statistics* 42.4 (1971), p. 1285-1295.

[Par62] Emanuel Parzen. "On estimation of a probability density function and mode". Dans : *The annals of mathematical statistics* 33.3 (1962), p. 1065-1076.

[Pel15] Magda Peligrad. "Quenched Invariance Principles via Martingale Approximation". Dans : *Asymptotic Laws and Methods in Stochastics*. Springer, 2015, p. 149-165.

[PG99] Victor De la Pena et Evarist Giné. *Decoupling : From Dependence to Independence*. Springer Science & Business Media, 1999.

[Poi12] Henri Poincaré. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1912.

[Pól23] Georg Pólya. "Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung". Dans : *Mathematische Zeitschrift* 18 (1923), p. 96-108.

[Pro56] Yuri Prokhorov. "Convergences of random processes and limit theorems in probability theory". Dans : *Theory of probability and applications* 1 (1956), p. 157-214.

[PV19] Magda Peligrad et Dalibor Volnỳ. "Quenched invariance principles for orthomartingale-like sequences". Dans : *Journal of Theoretical Probability* (2019), p. 1-28.

[PZ18a] Magda Peligrad et Na Zhang. *Martingale approximation for random fields*. T. 28. 2018, p. 9.

[PZ18b] Magda Peligrad et Na Zhang. "On the normal approximation for random fields via martingale methods". Dans : *Stochastic Processes and their Applications* 128.4 (2018), p. 1333-1346.

[Rio93] Emmanuel Rio. "Covariance inequalities for strongly mixing processes". Dans : *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 29.4 (1993), p. 587-597.

[Rio95] Emmanuel Rio. "About the Lindeberg method for strongly mixing sequences". Dans : *ESAIM* 1 (1995), p. 35-61.

[Rob83] Peter Robinson. "Nonparametric estimators for time series". Dans : *Journal of Time Series Analysis* 4.3 (1983), p. 185-207.

[Ros12] Murray Rosenblatt. *Stationary sequences and random fields*. Springer Science & Business Media, 2012.

[Ros56a] Murray Rosenblatt. "A central limit theorem and a strong mixing condition". Dans : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 42.1 (1956), p. 43.

[Ros56b] Murray Rosenblatt. "Remarks on some nonparametric estimates of a density function". Dans : *The Annals of Mathematical Statistics* (1956), p. 832-837.

[Rou88] George Roussas. "Nonparametric estimation in mixing sequences of random variables". Dans : *Journal of Statistical Planning and Inference* 18.2 (1988), p. 135-149.

[RS01] Alfredas Račkauskas et Charles Suquet. "Invariance principles for adaptive self-normalized partial sums processes". Dans : *Stoch. Proc. and their Applicat.* 95 (2001), p. 63-81.

[RT92] George Roussas et Lanh Tat Tran. "Asymptotic normality of the recursive kernel regression estimate under dependence conditions". Dans : *Ann. Stat* 20 (1992), p. 98-120.

[Rut+14] Leszek Rutkowski et al. *Artificial Intelligence and Soft Computing : 13th International Conference, ICAISC 2014, Zakopane, Poland, June 1-5, 2014, Proceedings.* T. 8468. Springer, 2014.

[RZ20] Lucas Reding et Na Zhang. "On the Quenched Functional Central Limit Theorem for Stationary Random Fields Under Projective Criteria". Preprint. 2020.

[Sam16] Gennady Samorodnitsky. *Stochastic processes and long range dependence.* T. 26. Springer, 2016.

[Sch05] Ivo Schneider. "Abraham de Moivre, The doctrine of chances (1718, 1738, 1756)". Dans : *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (déc. 2005), p. 105-120.

[Sha03] Aleksei Shashkin. "Invariance principle for a (BL, θ)-dependent random field". Dans : *Russian Mathematical Surveys* 58.3 (2003), p. 617.

[She20] Vladimir Shergin. "The central limit theorem for finitely dependent random variables". Dans : *Prob. Theory and Math. Stat. Proc. Of the Fifth Vilnius Conference.* T. 2. 2020, p. 424-431.

[Slu25] Evgeny Slutsky. "Uber stochastische asymptoten und grenzwerte". Dans : *Metron* 5.3 (1925), p. 3-89.

[Suc67] Louis Sucheston. "On the ergodic theorem for positive operators I". Dans : *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 8.1 (1967), p. 1-11.

[SZ92] Daniel Stroock et Bogusław Zegarlinski. "The logarithmic Sobolev inequality for discrete spin systems on a lattice". Dans : *Comm. Math. Phys.* 149 (1) (1992), p. 175-193.

[Tra90] Lanh Tat Tran. "Kernel density estimation on random fields". Dans : *J. Multivariate Anal.* 34 (1990), p. 37-53.

[Vil39] Jean Ville. "Etude critique de la notion de collectif". Dans : *Bull. Amer. Math. Soc* 45.11 (1939), p. 824.

[Vol06] Dalibor Volnỳ. "Martingale approximation of non-stationary stochastic processes". Dans : *Stochastics and Dynamics* 6.02 (2006), p. 173-183.

[Vol15] Dalibor Volnỳ. "A central limit theorem for fields of martingale differences". Dans : *Comptes Rendus Mathematique Acad. Sci., Paris* 353.12 (2015), p. 1159-1163.

[Vol18] Dalibor Volný. "Martingale-coboundary representation for stationary random fields". Dans : *Stoch. Dyn.* 18.2 (2018), p. 1850011, 18.

[Vol19] Dalibor Volnỳ. "On limit theorems for fields of martingale differences". Dans : *Stochastic Processes and their Applications* 129.3 (2019), p. 841-859.

[Vol93] Dalibor Volný. "Approximating martingales and the central limit theorem for strictly stationary processes". Dans : *Stochastic Processes and Their Applications* 44 (1993), p. 41-74.

[VW10] Dalibor Volnỳ et Michael Woodroofe. "An example of non-quenched convergence in the conditional central limit theorem for partial sums of a linear process". Dans : *Dependence in probability, analysis and number theory* (2010), p. 317-322.

[VW14a] Dalibor Volnỳ et Yizao Wang. "An invariance principle for stationary random fields under Hannan's condition". Dans : *Stochastic Processes and their Applications* 124.12 (2014), p. 4012-4029.

[VW14b] Dalibor Volnỳ et Michael Woodroofe. “Quenched central limit theorems for sums of stationary processes”. Dans : *Statistics & Probability Letters* 85 (2014), p. 161-167.

[Wal06] Helen Walker. “de Moivre, On The Law Of Normal Probability”. Dans : 2006.

[Wat64] Geoffrey Watson. “Smooth regression analysis”. Dans : *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics, Series A* (1964), p. 359-372.

[WD79] Edward Wegman et H.I. Davies. “Remarks on some recursive estimators of a probability density”. Dans : *The Annals of Statistics* (1979), p. 316-327.

[WHH10] Wei Biao Wu, Yinxiao Huang et Yibi Huang. “Kernel estimation for time series : An asymptotic theory”. Dans : *Stochastic Processes and their Applications* 120.12 (2010), p. 2412-2431.

[WL04] Li Wang et Han-Ying Liang. “Strong uniform convergence of the recursive regression estimator under φ-mixing conditions”. Dans : *Metrika* 59 (2004), p. 245-261.

[Wu05] Wei Biao Wu. “Nonlinear system theory : Another look at dependence”. Dans : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 102.40 (2005), p. 14150-14154.

[WW04] Wei Biao Wu et Michael Woodroofe. “Martingale approximations for sums of stationary processes”. Dans : *The Annals of Probability* 32.2 (2004), p. 1674-1690.

[WW13] Yizao Wang et Michael Woodroofe. “A new condition for the invariance principle for stationary random fields”. Dans : *Statist. Sinica* 23.4 (2013), p. 1673-1696.

[WW69] C. T. Wolverton et Terry Wagner. “Recursive estimates of probability densities”. Dans : *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.* 5 (1969), p. 307-308.

[ZRP19] Na Zhang, Lucas Reding et Magda Peligrad. “On the Quenched Central Limit Theorem for Stationary Random Fields Under Projective Criteria”. Dans : *Journal of Theoretical Probability* (2019), p. 1-29.