



HAL
open science

Géométrie et Mécanique des Origamis

Théo Jules

► **To cite this version:**

Théo Jules. Géométrie et Mécanique des Origamis. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Lyon, 2020. Français. NNT : 2020LYSEN060 . tel-03128874

HAL Id: tel-03128874

<https://theses.hal.science/tel-03128874>

Submitted on 2 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2020LYSEN060

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée par

l'École Normale Supérieure de Lyon

École Doctorale N°52

Physique et Astrophysique de Lyon (PHAST)

Spécialité de doctorat : PHYSIQUE

Soutenue publiquement le 12/10/2020, par :

Théo JULES

Géométrie et mécanique des origamis.

Devant le jury composé de :

ROMAN Benoit, DR CNRS , ESPCI

VANDENBERGHE Nicolas, Professeur des Universités, IRPHÉ

TANGUY Anne, Professeur des Universités, LaMCoS

RUBINSTEIN Shmuel, Professeur, Harvard University

AUDOLY Basile, DR CNRS, École Polytechnique

RAMANANARIVO Sophie, Maître de conférences, École Polytechnique

Rapporteur

Rapporteur

Examinatrice

Examineur

Examineur

Examinatrice

ADDA-BEDIA Mokhtar, DR CNRS, ENS de Lyon

LECHENAULT Frédéric, CR CNRS, ENS Paris

Directeur de thèse

Co-directeur de thèse

Résumé

Les origamis sont des structures tridimensionnelles obtenues en pliant une feuille mince suivant un motif prédéfini de pliures. Le nombre infini de motifs imaginables rend le potentiel d'innovation uniquement limité par notre compréhension de leurs propriétés mécaniques. Cette thèse vise à expliquer comment, pour une feuille plastique, ces propriétés proviennent de la compétition entre l'élasticité du matériau et les conditions cinétiques imposées au système. Pour mieux comprendre cet équilibre, cette thèse commence par présenter le comportement mécanique complet d'un pli unique, le constituant fondamental des origamis. Dans un premier chapitre, ses déformations élastiques sont décrites selon un modèle théorique validé par un simple test de force-déformation et une simulation en méthode des éléments finis. Puis, dans un second chapitre, ses comportements plastique et viscoélastique sont analysés par une extension du modèle élastique et des expériences de relaxation sous contraintes. Enfin, la dernière partie de cette thèse s'articule autour de l'étude mécanique de deux motifs de pliures. Le premier, un motif nommé « accordéon courbé », met en avant la variété de formes produites par les origamis grâce aux relations entre élasticité et géométrie. Le second motif quant à lui est utilisé pour créer des soufflets cylindriques en origamis bistables. Un montage spécifique basé sur ces soufflets permet de concevoir un système mécanique de mémoire binaire.

Summary

Origamis are three-dimensional structures obtained by folding a thin sheet following a pre-imprinted pattern of creases. The infinite number of imaginable patterns make the potential for innovation only limited by our understanding of their mechanical properties. This thesis aims to explain how, for a plastic sheet, these properties originate from the competition between the material elasticity and the kinetics conditions imposed on the system. To better understand this equilibrium, the thesis begins by focusing the study on the mechanical response of a single crease, the fundamental components of origamis. In the first chapter, its elastic deformations are captured by a theoretical model supported by simple load-deformation tests and simulations with finite element methods. Then, in the second chapter, the plastic and viscoelastic behavior are analyzed through both an extension of the elastic model and relaxation experiments under controlled strain. Finally, the third part of the thesis is structured around the mechanical study of two patterns of creases. The first one, named “Curved accordion”, showcases the unique shapes obtained by the complex relations between elasticity and geometry. The second pattern generates bistable cylindrical bellows in origami that we use as bases to create an elastic system with binary memory.

Remerciements

Après plus de trois ans de travail, débutant dans une petite salle du troisième étage du 24 rue Lhomond pour finir avec des centaines d'expériences et de simulations sur les plis, ma thèse fut un long voyage enrichissant, autant d'un point de vue scientifique que personnel. Ce type d'aventure ne se passe bien que grâce au soutien de nombreuses personnes que je tiens à remercier.

Mes premiers remerciements reviennent à mes deux directeurs de thèse, Mokhtar Adda-Bedia et Frédéric Lèchenault, qui forment un duo extrêmement complémentaire. Mokhtar, j'ai énormément apprécié non seulement ta disponibilité, malgré les 400 km qui nous séparaient, mais aussi ta vision et ta rigueur de physicien expérimenté. Fred, ta curiosité pour la physique est contagieuse. Je repense encore à la genèse du projet sur la déformation des membranes, à partir d'une grande membrane circulaire en latex et d'une simple perceuse que tu avais rapportée au hasard. Bien que j'éprouve une relation d'amour/haine avec ta méthode de critique, que ce soit pour le développement expérimental ou pour l'écriture d'articles, cette méthode forme l'indépendance, et je te remercie pour cela.

Mes remerciements vont ensuite aux membres de mon jury, Shmuel Rubinsten, Basile Audoly, Anne Tanguy, Sophie Ramananarivo, et plus particulièrement aux deux rapporteurs Nicolas Vandenberghe et Benoit Roman, qui ont tous deux accepté de lire et juger ma thèse. Merci pour vos retours qui ont permis d'enrichir l'ouvrage.

De nombreuses personnes ont permis de faire fructifier les divers projets secondaires que j'ai entamés durant mon doctorat. Ainsi, je tiens à remercier Baudouin Saintyves, non seulement pour m'avoir conseillé de rencontrer Mokhtar et Frédéric, mais aussi pour le succès de mon stage expérimental à Harvard. Merci à Ignacio Andrade-Silva et Marcelo A. Dias pour les discussions sur la théorie du pli ainsi que sur les méthodes de modélisation de pliure, point de départ pour la simulation des accordéons courbés en origami. Merci à Austin Reid pour les discussions sur les soufflets en origami. Merci à Dominic Vella de m'avoir invité à passer deux mois à Oxford, bien que ce voyage fut écourté par un certain virus, ainsi que pour les conversations théoriques et expérimentales sur le g-cone. Merci à Bruno Andreotti pour sa sympathie et son grand apport théorique et expérimental sur le projet de membranes tournantes.

Je souhaite remercier François Pétrélis, avec qui j'ai travaillé en tant que chargé de TD et qui m'a permis d'avoir un premier aperçu des activités d'un enseignant.

Je tiens aussi à remercier les laboratoires de l'ENS de Lyon ainsi que de l'ENS Paris pour m'avoir accueilli durant ma thèse, et plus particulièrement le personnel administratif Laurence Mauduit, Nadine Clervaux, Nora Sadaoui, Annie Ribaudeau et Benoît Paulet. De nombreuses personnes se sont continuellement succédé dans cette salle L273 de laboratoire de l'ENS Paris. Je remercie les autres membres permanents de l'équipe Sébastien Moulinet, Étienne Rolley et Kristina Davitt. Merci aux doctorants que j'ai côtoyés, Hugo Perrin pour nos quelques discussions scientifiques et politiques/philosophiques, Nariaki Sakai et sa joie de vivre, Samuel Poincloux, sa riche expérience qu'il a partagée au début de ma thèse et les rares matchs de volley, ainsi que Adèle Douin avec qui, je l'espère, nous allons étendre une collaboration.

Enfin, au-delà du cercle scientifique je tiens à remercier Thomas, Jonathan et Valentin pour les nombreuses sessions de jeux et les sorties dans Paris. Un énorme merci à Clément, pour la collocation durant la majorité de ma thèse, les voyages à vélo et, plus généralement, son amitié depuis maintenant plus de 15 ans. Mes derniers remerciements vont à mes meilleurs soutiens, mes parents ainsi que mon frère.

Table des matières

Résumé	iii
Summary	v
Remerciements	vii
Introduction	1
0.1 Brève histoire des origamis	1
0.1.1 Apparition des origamis	1
0.1.2 Origamis contemporains	2
0.2 Applications modernes pour le design et l'éducation	3
0.3 Motivations sous-jacentes à l'étude des origamis	4
0.3.1 Compactage de grandes surfaces avec des plis	4
0.3.2 Exploitation des structures	7
0.4 L'origami : un objet géométrique	11
0.4.1 Terminologie	11
0.4.2 Modèle géométrique.	12
0.4.3 Limitations des modèles	13
0.5 Notre travail	14
I Réponse élastique du pli unique	15
1 Réponse élastique du pliage unique	17
1.1 L'élasticité dans les origamis	18
1.1.1 Élasticité de la pliure	18
1.1.2 Élasticité des faces	20
1.1.3 Compétition entre l'élasticité des faces et des pliures	24
1.2 Dispositif expérimental sur le pli unique.	25
1.2.1 Matériel expérimental	25
1.2.2 Extraction de la forme déformée du pli	27
1.2.3 Création du pli et domaine élastique	29

1.3	Modèle du pli élastique.	31
1.3.1	Modèle discret	31
1.3.2	Modèle étendu	34
1.4	Confrontation avec l'expérience	36
1.4.1	Méthode de résolution numérique	36
1.4.2	Forme du pli au repos	38
1.4.3	Résolution numérique de l'élastica sous précontraintes	38
1.4.4	Extension à des systèmes asymétriques ou à deux pliures	42
1.5	Le pli élastique en méthode des éléments finis	43
1.5.1	Introduction à l'analyse en éléments finis.	43
1.5.2	Application au pli unique	44
1.5.3	Comparaison entre la MEF et la résolution numérique de l'équation analytique.	48
1.6	Quelle est la rigidité d'un pli élastique?	49
1.6.1	Longueurs caractéristiques du pli	49
1.6.2	Rigidité d'une pliure.	52
1.6.3	Relation entre rigidité et épaisseur	54
1.7	Conclusion	54
II Comportements non élastique du pli unique		57
2	Comportements non élastique du pliage unique	59
2.1	Propriétés physiques des polymères	59
2.1.1	Morphologie des polymères	59
2.1.2	Le Mylar	63
2.2	Notions de viscoélasticité	65
2.2.1	Modélisation phénoménologique	65
2.2.2	Relaxation de systèmes vitreux.	70
2.2.3	Changement de la métrique	73
2.3	Suivi in situ de l'angle au repos.	74
2.3.1	Les effets non élastiques changent l'état de référence	74
2.3.2	Cartographie de l'espace force-déformation.	76
2.3.3	Prédiction de l'évolution de l'angle au repos	78
2.4	Relaxation d'un pli unique	82
2.4.1	Préparation du pli pour la relaxation	82
2.4.2	Dynamique de relaxation du pli unique	83
2.4.3	Relaxation non-monotone	87
2.5	Conclusion	90

III	L'élasticité contrôle la géométrie des origamis	93
3	Relation entre élasticité et géométrie dans les origamis	95
3.1	Accordéons courbés en origami	96
3.1.1	Contrôler la forme d'un origami par sa structure	96
3.1.2	Création du pliage	97
3.1.3	Courbure apparente	101
3.1.4	Modes de déformation	103
3.1.5	Conclusion	107
3.2	L'origami comme système mémoire	109
3.2.1	Introduction	109
3.2.2	Le soufflet cylindrique unique	109
3.2.3	Soufflets comme système mémoire	115
3.2.4	Conclusion	120
	Conclusions et perspectives	121
A	Appendice A : Le g-cone	125
A.1	Introduction	125
A.2	Expérience	126
A.3	Modèle énergétique	127
A.3.1	Contributions énergétiques	128
A.3.2	Comparaison entre les déformations	130
A.4	Résultats et discussion	131
B	Appendice B : Instabilité d'une membrane élastique en rotation rapide	133
B.1	Introduction	133
B.2	Système expérimental	134
B.2.1	Montage expérimental	134
B.2.2	Analyse d'image	136
B.3	Résultats et observations	137
B.3.1	Existence des lobes et signal périodique	137
B.3.2	Profil de déformation maximale	138
B.3.3	Variations de la vitesse du moteur	139
B.4	Perspectives	140
C	Appendice C : Numérisation d'objets en trois dimensions par balayage en lumière structurée	141
C.1	Introduction	141
C.2	Principe de l'analyse	141
C.3	Scan avec David3D	142

D	Appendice D : Articles écrits et résumés	145
D.1	Articles publiés	145
D.2	<i>Articles en révision</i>	146
	Bibliographie	147

Introduction

0.1 Brève histoire des origamis

0.1.1 Apparition des origamis

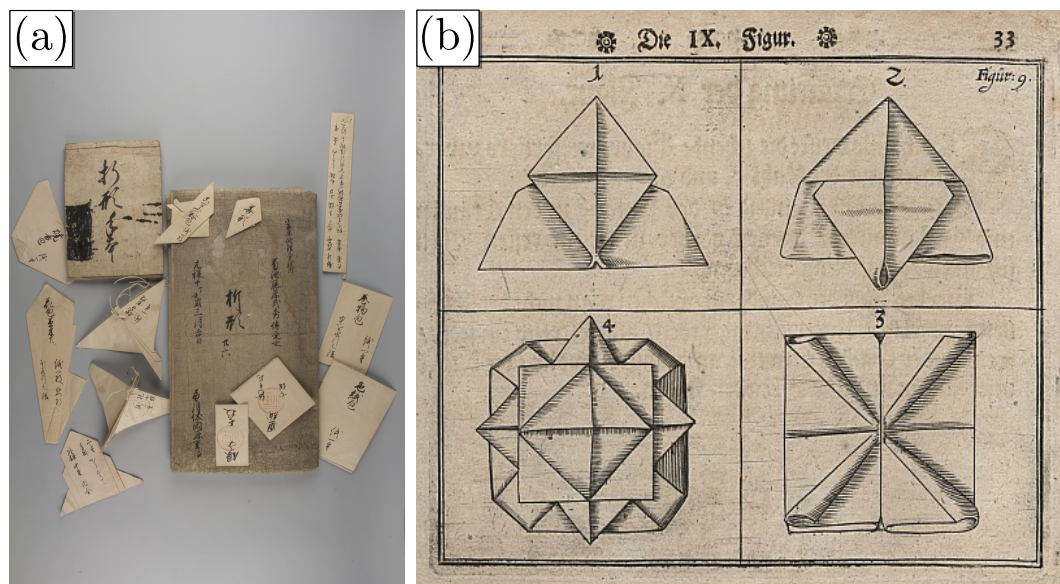


Fig. 1 (a) Exemples d'origamis traditionnels japonais datés de 1697 (conservés au Metropolitan Museum of Art à New York, image issue du [site du musée](#)). (b) Techniques de pliage des serviettes en Europe lors de la Renaissance (image de la [Deutsche Fotothek](#)).

L'origami est originellement l'art nippon de pliage du papier comme son étymologie l'atteste. Il est composé des mots japonais *oru* signifiant «plier» et *kami* signifiant «papier». Traditionnellement, les structures en origami sont acquises par pliage d'une feuille en papier rectangulaire, souvent colorée. Plus généralement, un origami désigne un objet obtenu principalement par pliage d'un matériau. Cette section propose une brève histoire de l'origami, basée sur les travaux de David Lister [164], éminent historien membre fondateur de la British Origami Society.

Bien que le mot origami soit d'origine japonaise, il est raisonnable de supposer que le pliage du papier est contemporain à l'invention du papier en Chine au I^{er} siècle. L'arrivée du papier au pays du soleil levant ne s'est faite qu'avec l'introduction du

bouddhisme au VI^e siècle. Puis, les échanges entre l'Asie et l'Europe, par la route de la soie, ont permis aux méthodes de production du papier de se propager jusqu'au monde arabe et à l'Europe vers le Xe siècle. Cependant, il n'existe aucune preuve concrète d'usage récréatif du pliage du papier avant le XVII^e siècle et les poèmes courts du romancier Ihara Saikaku faisant état de papillons en origamis. Les plus anciennes collections d'origamis découvertes sont datées de la même époque (voir la figure 1 (a)).

L'apparition du concept de pliage en Europe ne vient pas du papier, mais des plis en tissu ou en cuir utilisés pour décorer les vêtements (voir la figure 1 (b)). Les techniques de pliage de serviettes imitant les formes de fruits ou d'animaux, en vogue chez les princes et les aristocrates au XVI^e siècle, se rapprochent de celles employées pour le pliage d'origamis. Toutefois, leur attractivité se limitait à la haute société.

Ce fut un éducateur allemand, Friedrich Fröbel, qui déclencha un essor populaire et international de l'intérêt pour les origamis au début du XIX^e siècle. Il présenta les méthodes de pliages comme d'excellents outils pédagogiques pour les enseignements géométriques et mathématiques aux enfants. Ces méthodes seront exportées au Japon dans les années 1880, période correspondant au début de l'utilisation du terme origami pour décrire l'usage ludique du pliage du papier.

0.1.2 Origamis contemporains



FIG. 2 Photographie de l'origamiste Akira Yoshizawa entouré de ses créations (photographie de Robin Macey, extraite du site [amusingplanet](http://amusingplanet.com)).

Bien que l'origami soit ancien et de notoriété mondiale, sa codification est contemporaine. Le célèbre origamiste japonais Akira Yoshizawa (voir la figure 2), auteur de plus de 50 000 modèles d'origamis, a introduit le système de notation par flèches et pointillés pour définir les pliures montagnes et vallées. Il a aussi développé de multiples

nouvelles techniques de pliage, pavant le chemin à la riche diversité de structures en origamis que nous connaissons de nos jours.

D'un point de vue scientifique, ce fut dans les années 1970 que de nombreux origamistes, souvent des mathématiciens, comme Shuzo Fujimoto ou Jun Maekawa, utilisèrent des techniques telles que la torsion des pliures, le pavage du motif ou la représentation de systèmes moléculaires par les origamis pour mettre en évidence la relation entre géométrie et structure. Ce travail fut étendue par Robert Lang qui développa dans les années 1990 des algorithmes [121] pour aider à la réalisation de motifs en définissant les règles entre réseau de pliures et propriétés locales de la structure pliée [120]. Ainsi, les origamis modernes osent la création d'insectes avec plusieurs pattes ou antennes, toujours en pliant une simple feuille de papier carré (voir la figure 3 (d)).

0.2 Applications modernes pour le design et l'éducation

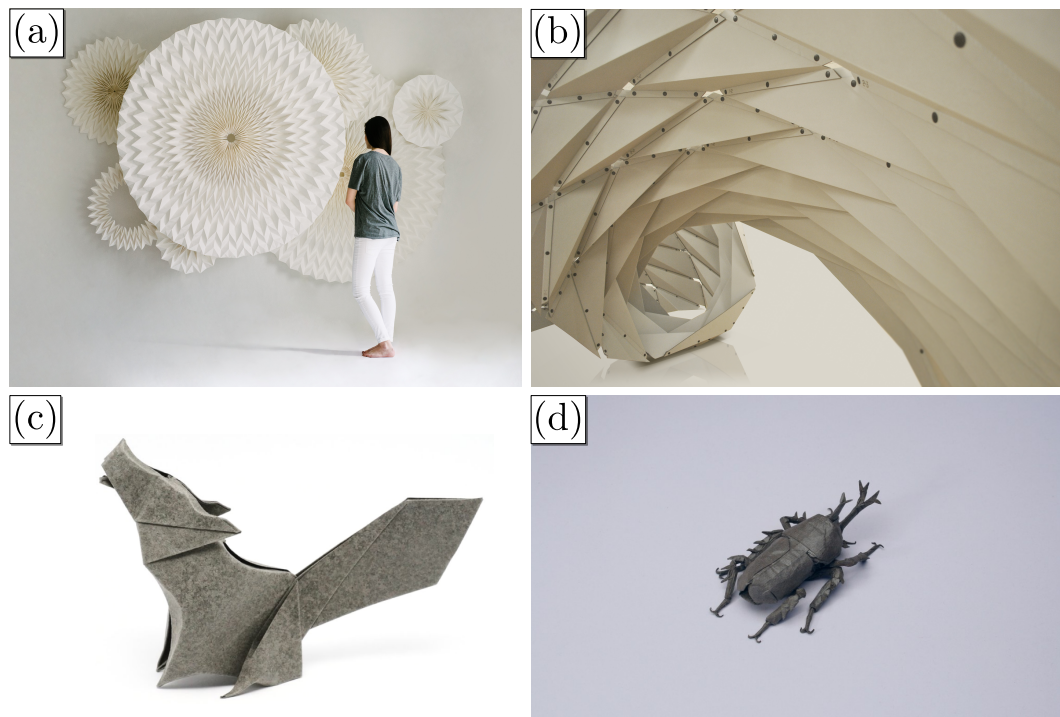


FIG. 3 Exemples d'arts et de designs en origamis. (a) Circular pleats d'Anne Rudanovski, 2014. (b) Ruga Swan de Jiangmei Wu. (c) Loup de Jo Nakashima. (d) Allomyrina Dichotoma K de Robert Lang.

J'ai eu la chance, durant ma thèse, de participer à la 7ème rencontre internationale sur les Origamis en Science, Mathématiques et Éducation (OSME7) qui m'a fait découvrir l'ampleur des recherches et des applications possibles pour les origamis que ce soit dans les domaines scientifiques et industriels, mais aussi dans l'éducation et le design artistique.

La géométrie est une section des mathématiques instruite à travers le monde durant

l'enfance pour ses nombreux bénéfices sur le développement scientifique et intellectuel, ainsi que la variété d'applications directes dans la vie réelle. L'usage d'origamis favorise une meilleure visualisation dans l'espace des concepts géométriques par construction sur un objet physique réel [9, 7, 177] et permet une instruction plus pédagogique des éléments de base de la géométrie euclidienne théorique comme les bissectrices ou les règles de trigonométrie [98]. Aussi, la liberté offerte par le choix des pliures et la facilité de produire un exemple concret en papier sont deux propriétés qui permettent aux origamis d'être un terrain de jeu idéal pour des projets de recherches de design en architecture ou d'optimisation de structures en ingénierie [167, 25]. C'est en outre un medium parfait pour l'expression artistique individuelle [165].

Nous allons maintenant discuter d'un intérêt plus général que peuvent engendrer les origamis, au-delà du pliage de sculptures attrayantes et de leur utilisation comme outil d'éducation.

0.3 Motivations sous-jacentes à l'étude des origamis

Les applications scientifiques de l'étude des origamis se séparent en deux grandes catégories : la capacité à comprimer dans des volumes réduits de larges surfaces qui peuvent être dépliées à posteriori, ainsi que la vaste diversité des structures tridimensionnelles qu'il est possible de plier.

0.3.1 Compactage de grandes surfaces avec des plis

Afin d'illustrer les propriétés de compactage des origamis, prenons un exemple simple : un courrier. Après avoir écrit une lettre sur une feuille A4, dont la grande superficie supporte la rédaction d'un texte long, celle-ci est pliée pour tenir dans une enveloppe et faciliter le transport. Arrivée au destinataire, la lettre peut être naturellement dépliée pour lire son contenu. Ici, le pliage permet de minimiser le coût de déplacement tout en maximisant la quantité d'informations transmises. Ces propriétés sont issues de l'utilisation de feuilles minces.

Type de déformations offerts par une feuille minces

La feuille en papier fait partie d'un ensemble de systèmes appelés structures minces. Cette dénomination reflète la séparation d'échelles entre les dimensions caractéristiques selon au moins deux directions. Pour une feuille d'épaisseur e et de longueur l , cela se traduit par $e \ll l$. Typiquement, une feuille A4 a pour dimension $l \approx 200$ mm

et $e = 0.1$ mm, ce qui correspond bien à une feuille mince.

Lors de la compression de feuilles minces, celles-ci manifestent des modes de déformations spécifiques, impliquant généralement la formation de plis [43, 149, 49, 150]. Pour ces systèmes, la flexion et les déformations isométriques sont énergétiquement favorisées. En conséquence, si les contraintes externes qui sont imposées à une feuille mince sont compatibles avec ce genre de déformation, la forme obtenue sera ondulée. Ce comportement est observé pour une feuille très mince flottant sur une surface courbée [94] ou poussée dans un cylindre vide [36, 34, 126].

Apparition spontanée de pliures

La formation des ondulations s'accompagne couramment d'une augmentation des contraintes internes locales. Suivant la rhéologie du matériau, et si l'amplitude des contraintes est assez élevée, les déformations peuvent devenir irréversible et créer une pliure [21, 55]. Cela se produit quand une pliure est générée à la main, en appliquant une force locale importante, mais aussi lorsque la feuille de papier est froissée puis mise en boule [5, 187, 193]. Dans cette dernière configuration, la structure finale est composée de nombreuses pliures réparties aléatoirement et dont la longueur totale reflète l'endommagement du matériau [81]. Toutefois, en plus des pliures, ce système comprend d'autres éléments structurels comme les rides élastiques d'étirement [59] ou des dislocations coniques [5, 35], et met en jeu de la friction interne. La boule en papier est donc un origami facile à produire, mais désordonné et complexe à étudier. D'autres motifs d'origamis, plus réguliers, peuvent émerger naturellement pour certaines déformations de feuilles minces. C'est le cas du motif Miura-ori lors de la compression biaxiale d'une feuille élastique mince supportée par un substrat mou [132, 11] ou du motif triangulaire de Yoshimura lors du rétrécissement de la hauteur d'un cylindre mince [205].

Origamis dans la nature

Des réseaux de pliures peuvent être produits simplement en suivant certaines conditions mécaniques spécifiques. De nombreux systèmes naturels exploitent ces comportements afin de créer des structures larges, pliables et dépliables. Les ailes des insectes [76, 28, 88, 202, 71] en sont un exemple typique. Pour les animaux comme les oiseaux ou les chauves-souris, les ailes ont une composition interne complexe de muscles et tendons qui contrôlent minutieusement des membranes minces flexibles pour faciliter la prise au vent et le rangement après atterrissage. Ce n'est pas le cas pour des invertébrés comme les insectes, qui ne dispose que de muscles thoraciques. Ils sont toutefois confrontés au même problème : lors du vol, les ailes doivent être

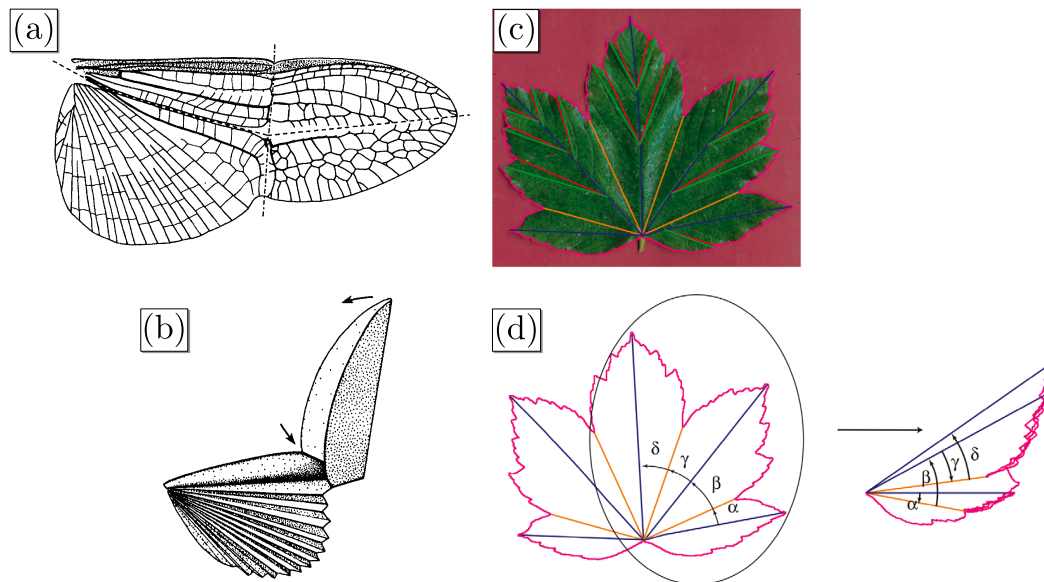


FIG. 4 Systèmes similaires aux origamis présents dans la nature. (a) Schéma d'une aile de cafard et (b) pliage de l'aile (extraits de [88]). (c) Feuille d'érable et (d) pliage suivant les veines principales (extraits de [47]).

déployées pour maximiser le volume d'air déplacé lors d'un battement rapide afin que la force résultante supporte le poids de l'insecte et lui permette des mouvements et changements de direction fulgurants. Au contraire, lorsque l'insecte est posé sur ses pattes, les ailes deviennent un inconvénient pour le déplacement en raison de leurs grandes surfaces et doivent être rangées sous une éventuelle carapace pour les préserver. Ces propriétés sont obtenues par l'usage d'un simple motif de pliures (voir la figure 4 (a) et (b)).

Un autre système naturel exploitant les pliures est la feuille d'arbre [47, 108]. Encore une fois, nous avons un dispositif qui a besoin d'avoir une surface maximale, ici afin de recevoir un maximum de rayons du soleil et favoriser la photosynthèse, mais qui doit être comprimé dans un volume réduit, le bourgeon. La structure de la feuille est telle que les veines qui la composent sont des endroits plus rigides qui vont agir comme des lignes de pliures quand la feuille est compactée (voir la figure 4 (c) et (d)). La similitude avec les modèles d'origami permet d'établir des relations géométriques simples entre les structures pliées et déployées, donnant un éclairage sur la morphogénèse des feuilles.

Applications scientifiques et industrielles

De nombreux comportements physiques ou naturels observés lors de la compression de feuille mince peuvent être repris dans la science ou l'industrie. Un exemple célèbre est le motif de Miura-ori développé dans les années 1980 par Koryo Miura pour permettre à des panneaux solaires d'être pliés et rangés dans une fusée avant d'être déployés

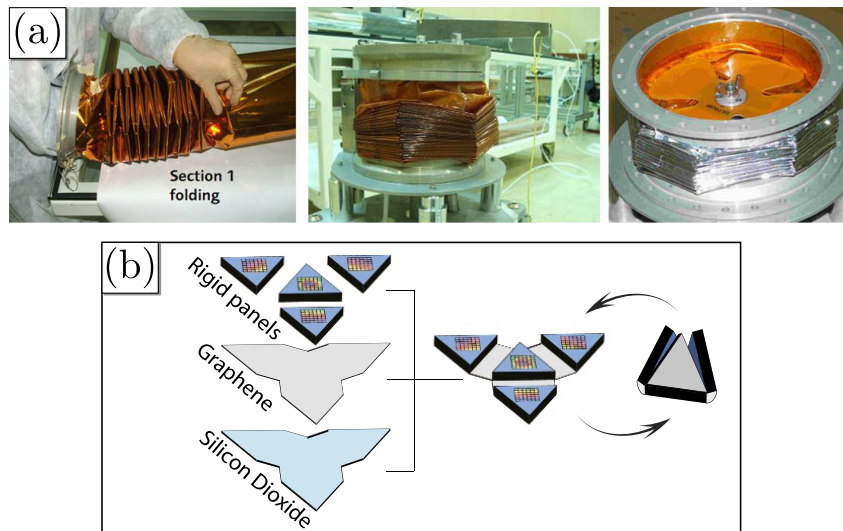


FIG. 5 Exemples d'applications des origamis à plusieurs échelles. (a) Photos d'un bôme déployable et rigidifiable (images de [83]). (b) Origami en graphène de taille micronique (extraits de [135]).

dans l'espace [137]. Ce type d'application spatiale pour les motifs d'origamis reste un sujet de recherche actif [78, 83, 173, 10].

Un énorme avantage à l'usage des origamis est que les lois géométriques qui gouvernent la relation entre pliures et structure ne dépendent pas de l'échelle de longueur considérée. Ainsi, les origamis sont employés à des tailles microscopiques par pliure de feuilles de graphène [135], mais aussi pour le développement médical d'endoprothèses vasculaires [115] ou même le pliage de brins d'ADN. [90]

Plus moderne, la robotique est un autre domaine largement influencé par les origamis, avec, par exemple, la création de drones avec des ailes rétractables [66].

0.3.2 Exploitation des structures

La seconde grande qualité des origamis est le nombre infini de motifs de pliure qu'il est possible d'imaginer. La diversité des structures et des formes qui sont produites est stupéfiante. Une simple recherche internet montre des cocotes, des fleurs, des cygnes, des renards, des dragons, etc. Plus fascinant encore, la structure de l'origami lui octroie des propriétés physiques différentes de la feuille initiale. L'avion en papier est un exemple emblématique de ces deux éléments. Non seulement la forme de l'avion est plus aérodynamique que la feuille plane originelle, lui permettant de planer plus loin, mais en plus il existe de nombreux modèles différents d'avions en papier.

Cette richesse de formes et de comportements montrent que le pliage de feuilles minces en origamis est une méthode intéressante dans le but de développer des métamatériaux.

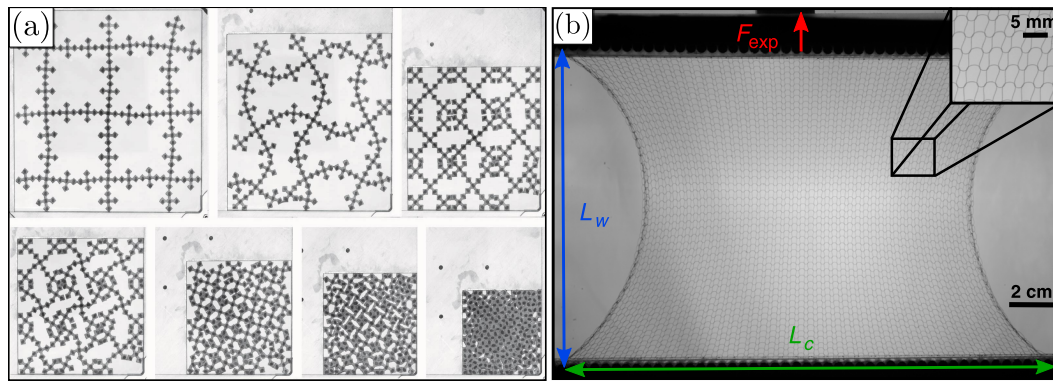


FIG. 6 Divers types de métamatériaux. (a) Métamatériau présentant plusieurs modes de déformation en compression (extrait de [46]). (b) Photo d'un tricot en extension (extrait de [153]).

Notion de métamatériau

Un métamatériau est un matériau comportant des propriétés physiques non ou rarement présentes à l'état naturel. Habituellement, ces propriétés sont issues de la composition microscopique du matériau. Le bois ne se déforme pas de la même manière que le métal. Cependant pour un métamatériau, le comportement macroscopique provient d'une structuration mésoscopique contrôlée. Les changements envisageables pour ce type de structure étant plus ouverts et simples à effectuer qu'une modification de l'arrangement moléculaire, l'intérêt des métamatériaux pour l'industrie est évident. Un temps limité aux systèmes électromagnétiques et optiques [174, 147], le concept de métamatériau s'est récemment étendu aux systèmes mécaniques grâce aux développements technologiques. Les techniques d'impression 3D et de découpe au laser ou au jet d'eau facilitent l'exploration des nombreuses structures réalisables [197, 45, 46] (figure 6 (a)). La robotique donne aussi une importante liberté dans les réponses mécaniques potentielles du système [29]. Mais les métamatériaux ne sont pas limités à des technologies modernes. Même un objet ancien comme le tricot transforme un fil inextensible en un tissu qui autorise de grandes déformations [153] (figure 6 (b)). Pour plus d'informations, deux publications récentes de K. Bertoldi et al. [23] et M. Kadic et al. [106] donnent un compte-rendu complet des différentes études de métamatériaux conçus avec des systèmes flexibles.

La majorité de ces systèmes exploitent les perspectives accordées par l'augmentation de dimension des structures élastiques fines. Pour revenir à l'exemple précédent, un fil, assimilable à un objet unidimension, est transformé en un tricot à deux voire trois dimensions [152]. Par la formation de structures tridimensionnelles à partir d'une simple feuille mince, les origamis sont idéaux pour concevoir des métamatériaux.

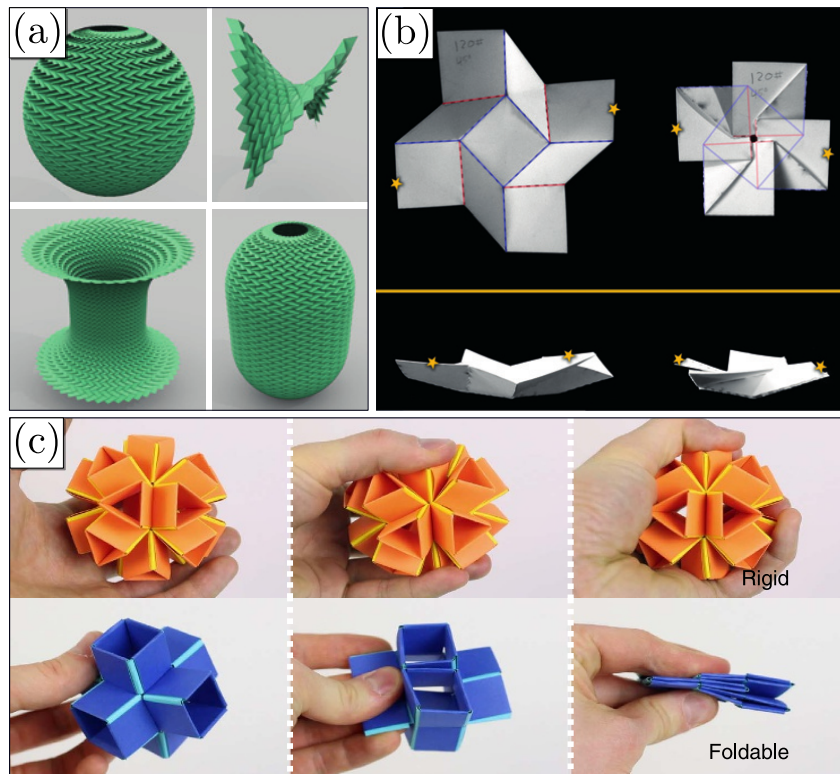


Fig. 7 Origamis en tant que métamatériaux. (a) Exemples de formes complexes produites par des origamis (adapté de [65]). (b) Les deux états stables d'un origami *square twist* (extrait de [179]). (c) Deux origamis de réponse en compression opposée, un pliable et l'autre rigide (extrait de [144]).

Les origamis comme métamatériaux

L'origami comme métamatériau s'analyse sous deux angles différents, mais complémentaires, la forme structurelle de l'objet produit et sa réponse mécanique à des contraintes externes.

Nous avons vu de nombreuses formes pour les origamis. Toutefois, une question importante demeure : est-il possible d'associer un motif de pliures à n'importe quelle forme souhaitée ? Théoriquement, les angles à chaque pliure permettent d'avoisiner de façon discrète n'importe quelle forme ou courbure [65, 141] (voir figure 7 (a)). Bien que, conceptuellement, l'augmentation du nombre de plis permette de s'approcher des formes continues, l'épaisseur du matériau devient rapidement une limite pratique.

En parallèle, la variété des comportements mécaniques exhibée par les origamis est également substantielle. Encore une fois, prenons en exemple le motif Miura-ori [137] qui, au-delà de l'intérêt que nous avons déjà mentionné pour la réduction de la taille des larges surfaces, produit un origami auxétique [172, 198, 131]. Un matériau est dit auxétique lorsqu'il a un coefficient de Poisson négatif, c'est-à-dire que son extension selon une direction entraîne aussi une extension dans la direction transverse. Pour la majorité des matériaux, un certain degré de conservation du volume garantit que le coefficient de Poisson est positif. Alors, une expansion dans une direction est liée à une compression dans les directions transverses. Cependant, les structures tridimen-

sionnelles d'origami ne disposent pas de cette limitation, car elles sont constituées de surfaces minces. Ainsi, l'étirement de l'origami cause l'ouverture des toutes les pliures, et donc une élongation dans deux directions transverses. Par ailleurs, ces caractéristiques ne sont pas uniques au Miura-ori et d'autres motifs présentent aussi un comportement auxétique [203].

La structuration des pliures change la répartition des contraintes internes dans l'origami. En sélectionnant le motif adéquat, comme le motif de Ron Resch, l'origami acquiert une plus grande rigidité que la feuille dont il est issu suivant certaines directions [131]. Un autre comportement régulièrement observé dans les origamis est la présence de plusieurs configurations stables pour des motifs allant du simple sommet jouant le rôle de point d'intersection des pliures [123, 194, 8], à des structures plus complexes de type Kresling ou Yoshimura pour des origamis cylindriques [160, 204], en passant par des origamis plus traditionnels comme le *square twist* en figure 7 (b). Or, dans la plupart des cas, les multiples états stables ne correspondent pas à la même configuration. En tirant profit de leurs différences, la réponse mécanique d'un origami peut être modulée en changeant localement les pliures ou les sommets dans une configuration alternative [178, 155].

Kirigamis

Plier des origamis n'est pas la seule technique permettant de changer les propriétés d'une feuille mince. En effet, le kirigami, l'art du coupage du papier, permet aussi une modification fondamentale de la forme et du comportement de la feuille.

D'un point de vue traditionnel il est important de faire la distinction entre les origamis, où la transformation de la feuille se fait uniquement à l'aide de plis, et les kirigamis, pour lesquels les actions de découpes sont autorisées. En pratique, ils exploitent tous les deux les possibilités offertes par la modification d'une feuille mince en structure complexe à trois dimensions. Pendant que les origamis se concentrent sur les pliures pour définir une discontinuité angulaire dans un système continu, les kirigamis profitent de la création de discontinuités matérielles par découpe pour permettre au système d'atteindre des configurations pour lesquelles la déformation s'effectue principalement par flexion de régions minces. En conséquence, les kirigamis peuvent se déformer sur de grandes longueurs [157, 58, 24] et ont une rigidité apparente relativement faible [139] (voir figure 8 (a)). De plus, le contrôle des propriétés se fait simplement par la structuration des coupures, laissant un champ d'exploration des configurations tellement vaste qu'il nécessite l'utilisation d'algorithmes d'apprentissage machine [91]. Toutes ces propriétés trouvent des applications dans la médecine et la recherche médicale [139], les nanocomposites conducteurs [24], ou encore les batteries en lithium-ion [181]. Un exemple très récent et captivant est l'exploitation du flambement local des structures kirigamis afin d'améliorer l'adhérence des semelles, par un moyen similaire aux griffes des animaux [13] (voir figure 8 (b)).

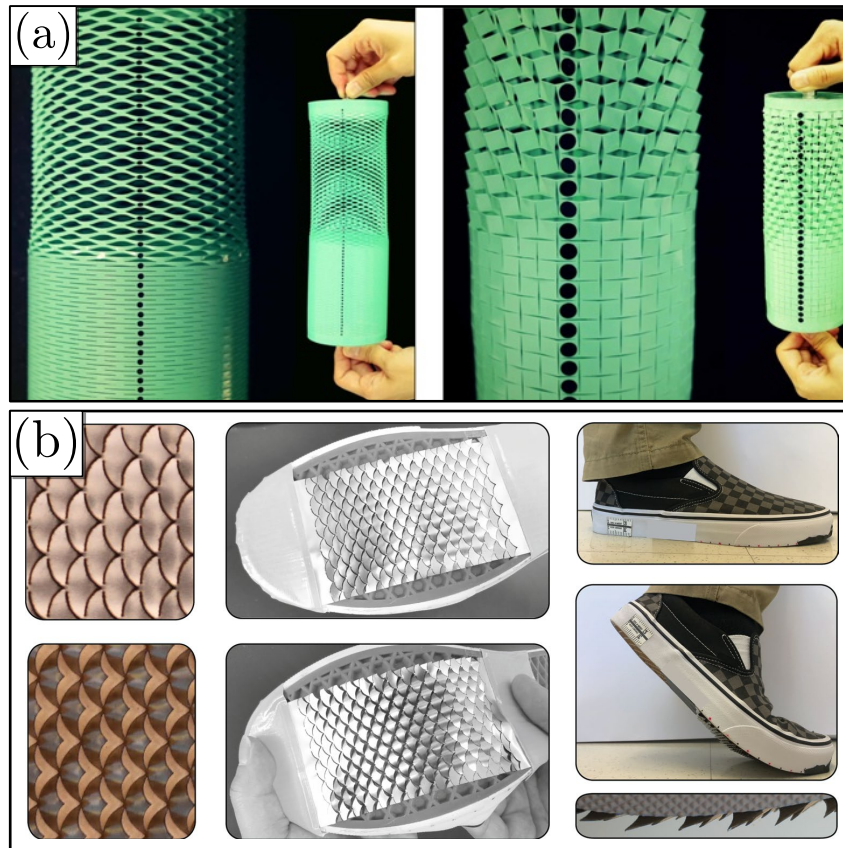


FIG. 8 Exemples de kirigamis. (a) Déformation de deux coques cylindriques en kirigami (extraits de [157]). (b) Kirigamis en métal attachés à la semelle d'une chaussure pour augmenter la friction (extraits de [13]).

Bien que les méthodes de production des origamis et des kirigamis ne reposent pas sur les mêmes techniques, ils restent des systèmes proches qui disposent d'une richesse insoupçonnée de formes et de comportements.

0.4 L'origami : un objet géométrique

0.4.1 Terminologie

Après ce tour complet des différentes perspectives offertes par les structures en origami, il convient de déterminer plus rigoureusement les relations entre pliures et formes que nous avons constamment mentionnées. Pour cela, définissons la terminologie spécifique à la modélisation géométrique que nous allons utiliser. Une *pliure*, ou *pli*, est une ligne sur la feuille mince considérée. Cette définition géométrique sera amenée à évoluer lorsque nous considérerons la réponse mécanique du pli. À chaque pliure est assignée une direction : une pliure *vallée* produit un creux alors qu'une pliure *montagne* crée une bosse. Le *motif* de pliure représente l'ensemble des pliures dessinées sur la feuille mince. Les points d'intersection des pliures sont nommés les *sommets* pendant

que les surfaces délimitées par les pliures sont les *faces*.

0.4.2 Modèle géométrique

La méthode la plus simple pour représenter les origamis est l'approche géométrique. Dans la modélisation géométrique, les pliures sont assimilées à des charnières définissant une discontinuité angulaire locale entre des faces rigides d'épaisseur nulle. Le processus de pliage correspond alors à une transformation isométrique entre la feuille plane et la structure finale. L'isométrie garantit que les distances entre points matériels, à comprendre les chemins les plus courts le long de la surface de la feuille, ne changent pas durant la transformation. Ces contraintes cinétiques restreignent considérablement l'espace des configurations des motifs pliables et fournissent des axiomes et des limitations géométriques à respecter pour le pliage d'un origami [100, 4, 105, 77].

L'étude des origamis devient cinématique, et chaque pliure est un degré de liberté pour le système. Un grand avantage est que la forme complète de l'origami est donnée par un nombre fini de variables, ce qui rend raisonnable une simulation numérique des pliages [186]. De plus, la présence des sommets induit des relations entre les différentes pliures et diminue le nombre de degrés de liberté global de l'origami [97, 98]. Si ce nombre reste supérieur à 0, l'origami peut être déformé en modifiant les angles des pliures sans déformations des faces. Nous parlons alors d'origami *pliable à faces rigides* (rigid-foldable). La compréhension de ces origamis est importante pour leurs applications sur des systèmes réels disposant de panneaux rigides et de charnières. Ainsi, des études géométriques sur des motifs périodiques comme le Miura-Ori [172] et le Tachi-Miura [203], comportant uniquement des sommets de degré 4, c'est-à-dire le point de rencontre entre 4 pliures, ont montré que ces motifs produisent des origamis avec un seul degré de liberté global.

Une autre qualification importante pour l'origami est *pliable à plat* (flat-foldable). Elle décrit des origamis ayant une configuration pour laquelle toutes les faces reposent dans le même plan. Cette caractéristique est idéale dans une optique de compression, mais rajoute des conditions cinétiques entre les pliures pour obtenir un origami réalisable [18, 184]. Le motif Miura-ori est aussi pliable à plat. Toutes ces propriétés expliquent l'immense intérêt que porte la recherche scientifique pour les origamis, et plus particulièrement pour le motif Miura-ori.

Application de Gauss

Une technique pour analyser plus systématiquement les origamis pliables rigides est d'employer la géométrie sphérique fournie par une application de Gauss. À chaque

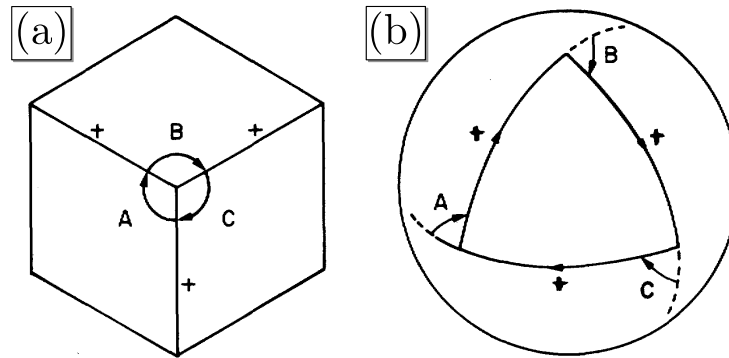


FIG. 9 (a) Contour du sommet d'un cube et (b) chemin correspondante sur la sphère unité. (extrait de [97]).

point de la surface du système est associé une coordonnée sur la sphère unité coïncidant avec la direction du vecteur normal unitaire. Pour un origami rigide, les faces sont planes donc correspondent à un point unique de la sphère. La pliure crée une rotation locale du vecteur normal, ce qui trace un arc sur la sphère unité. Pour un contour fermé, la surface orientée et délimitée par ces arcs donne la courbure de Gauss. Celle-ci doit être nulle pour une transformation isométrique, donc pour le pliage d'un origami pliable à faces rigides [97]. Ainsi, la forme et les conditions d'existence des origamis peuvent être déduites géométriquement [136, 206, 196].

0.4.3 Limitations des modèles

L'approche purement géométrique présentée entraîne de nombreuses limitations. Tout d'abord, il restreint l'espace des configurations atteignables plus que nécessaire pour des origamis réels. Prenons pour exemple l'origami *square twist* affiché en figure 7 (b). Bien que cet origami ne soit pas pliable à faces rigides, il est physiquement possible de lui faire rejoindre sa seconde configuration d'équilibre stable. L'élasticité du système fait apparaître de nouveaux degrés de liberté cachés [179, 39]. En conséquence la déformation élastique d'un origami ne respecte pas le nombre de degré de liberté géométrique. Ainsi, l'actionnement local d'un origami avec un seul degré de liberté théorique ne se propage pas dans tout le système et la déformation reste locale [82].

0.5 Notre travail

La caractérisation des comportements non géométriques, à savoir élastiques et rhéologiques, est fondamentale pour progresser sur une modélisation plus fidèle des origamis. Dans ce travail de thèse, nous allons graduellement augmenter le degré de complexité des propriétés considérées afin de décrire tous ces comportements. Pour ce faire, nous commencerons par nous concentrer sur un système simple, mais qui est l'élément de base de tout origami, le pliage unique composé d'une pliure et de deux faces. Son investigation se déroulera en deux étapes. Tout d'abord, nous l'envisagerons comme un système purement élastique et sa modélisation analytique, que nous validerons par une expérience et une simulation numérique, renseigne sur la rigidité du pli à partir des propriétés mécaniques du matériau qui le compose. Puis, nous étudierons les comportements non élastiques qui apparaissent lorsque des contraintes importantes sont imposées au pliage. Ils se divisent en un effet plastique, qui va changer la configuration de référence de la pliure, et en un effet viscoélastique, qui engendre un phénomène de relaxation. Finalement, nous reviendrons à des origamis plus complexes présentant un réseau de plusieurs plis. Nous étudierons comment la compétition entre les pliures et les faces, entre géométrie et élasticité, génère une large variété de formes locales et globales pour la structure en origami. De plus, nous mettrons en évidence que de nombreuses propriétés exotiques découlent de l'exploitation judicieuse des motifs de pliures, avec une utilisation des origamis cylindriques en tant que système mécanique avec mémoire.

Réponse élastique du pli unique

Réponse élastique du pliage unique

Ce chapitre présente extensivement la réponse mécanique purement élastique d'un pliage unique. Il établit un modèle du pli en se basant sur les propriétés mécaniques du matériau et la forme de la configuration au repos qui redéfinit la notion de la pliure au moyen de deux caractéristiques internes, à savoir une extension spatiale et l'angle qu'elle prescrit entre les faces au repos.

Ce modèle permet de prédire correctement la déformation du pli en connaissant la contrainte imposée, comme le confirment l'expérience et la simulation par la méthode des éléments finis. Il sert aussi de base d'analyse pour définir la limite de séparation entre pliure et faces dans le cas d'un pliage continu ainsi que pour obtenir la rigidité du pli à partir de sa largeur et de l'élasticité du matériau.

1.1 L'élasticité dans les origamis

L'approche géométrique de la déformation des origamis suppose que les faces sont rigides et indéformables tandis que les pliures agissent telles des charnières définissant des discontinuités angulaires entre les faces. Ces hypothèses idéalisées ne permettent pas de capturer la grande variété de comportements physiques observés pour des origamis pliés à partir de matériaux souples. En effet, la flexibilité ouvre la porte à de nouvelles configurations d'équilibre et transforme l'étude des degrés de liberté en une minimisation de l'énergie mécanique totale. La complexité provient alors des détails de la modélisation élastique des deux éléments constitutifs des pliages, les pliures et les faces.

1.1.1 Élasticité de la pliure

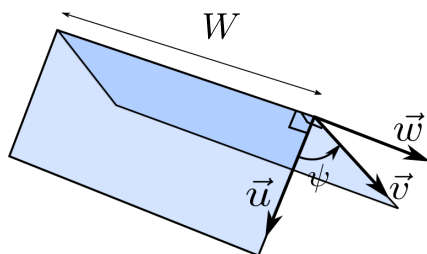


Fig. 1.1 Schéma d'un pli unique rectiligne (adapté de [32]).

Intéressons-nous en premier lieu aux pliures. Bien que la discontinuité angulaire au pli du modèle géométrique puisse être implémentée physiquement par l'utilisation de charnières [40, 129], dans le cas général où l'origami est plié à partir d'une feuille mince, le pli est composé du même matériau élastique que les faces. En conséquence, la déformation angulaire locale liée aux changements de configurations est couplée à une réponse mécanique du pli.

En conservant l'hypothèse que la pliure est un élément singulier assurant une discontinuité entre des faces, nous pouvons modéliser son énergie mécanique [32] d'une manière identique à l'approche de l'élasticité linéaire de Landau et Lifshitz [119]. En effet, l'énergie du système est invariante par changement de référentiel. Nous utilisons cette propriété pour lier l'énergie mécanique linéairement avec les invariants du système.

Energie de la pliure élastique

Prenons une pliure unique de largeur W et définissons trois vecteurs unitaires $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ tels que \underline{w} est tangent à la ligne de pli, $\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, et $(\underline{u}, \underline{w})$ (resp. $(\underline{v}, \underline{w})$) définit

la première (resp. seconde) face, comme indiqué sur la figure 1.1. L'énergie du pli est un scalaire indépendant du référentiel et donc, au premier ordre, une combinaison linéaire des invariants résultants de la géométrie du système. Les seules quantités non nulles étant $\underline{u} \cdot \underline{v}$ et $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$ [32], nous pouvons définir l'énergie élastique de la pliure par

$$E_{pliure} = W(\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) + \mu(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}), \quad (1.1)$$

avec λ et μ des constantes réelles du pli. Les définitions des vecteurs \underline{u} , \underline{v} et \underline{w} permettent d'écrire

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \cos(\Psi), \quad (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = \sin(\Psi), \quad (1.2)$$

avec Ψ l'angle aigu interne entre les faces. Nous introduisons l'angle au repos $\Psi_0 \in [0, \pi]$ et la rigidité de la pliure κ tels que :

$$\lambda = -\kappa \cos(\Psi_0), \quad \mu = -\kappa \sin(\Psi_0). \quad (1.3)$$

Réinjecter les équations (1.2) et (1.3) dans l'expression de l'énergie (1.1) permet de la réexprimer en fonction de la déformation angulaire

$$E_{pliure} = -W\kappa \cos(\Psi - \Psi_0). \quad (1.4)$$

Pour de petites déformations $\Psi \approx \Psi_0$, un développement au second ordre donne l'énergie élastique linéaire de la pliure

$$E_{pliure} = \frac{W\kappa}{2}(\Psi - \Psi_0)^2, \quad (1.5)$$

définie à une constante près. En dérivant l'équation (1.5) par rapport à l'ouverture angulaire, nous en déduisons le moment résistant du pli

$$M(\Psi) = \frac{dE_{pliure}}{d\Psi} = W\kappa(\Psi - \Psi_0). \quad (1.6)$$

Dans cette approximation, la pliure se comporte mécaniquement de la même manière qu'une charnière élastique de rigidité κ et d'angle au repos Ψ_0 , défini comme l'angle du pli sans chargement.

Conséquences pour l'origami

En considérant ce modèle de pliure élastique, revenons à la modélisation de la réponse mécanique de l'origami. Dans le but d'augmenter la complexité du modèle géométrique progressivement, nous gardons la condition de faces rigides. De cette manière, nous conservons un faible nombre de degrés de liberté pour le système, correspondant aux

angles définis par les plis, tout en ajoutant une composante physique avec la raideur de la pliure. Malgré sa simplicité, cette modélisation permet de donner une description mécanique plus précise de la réaction des origamis à des contraintes externes [198, 131], mais aussi de prédire la bistabilité de certains motifs pliables à faces rigides [92, 72, 203].

En pratique néanmoins, vérifier les hypothèses énoncées nécessite de porter une attention particulière à la création de l'origami, comme l'utilisation de différents matériaux pour la pliure et les faces [92, 72]. De plus, la compréhension de la réponse élastique de l'origami requiert, à priori, la connaissance de l'angle au repos pour chaque pliure qui le compose. Cela pose des limites expérimentales résultant des comportements non élastiques des matériaux [21, 69, 73, 55], qui restent toutefois indispensables à la formation du pli. Nous étudierons cela plus en profondeur dans le chapitre II.

1.1.2 Élasticité des faces

Une autre façon d'apporter de la complexité dans les origamis est de prendre en compte l'élasticité des faces. Nonobstant le cas des faces épaisses, qui exige une modélisation spécifique à lui seul [40, 185], le pliage d'origami part d'une mince feuille élastique. La finesse du système permet de considérer les faces comme des plaques élastiques minces, un archétype de structure élancée disposant d'une description connue depuis le début du 20ème siècle [189, 119, 130]. Nous pouvons exploiter la richesse de cette bibliographie pour l'appliquer aux origamis. Nous allons commencer par analyser les modes de déformation d'une plaque mince élastique sous des contraintes externes.

Définition d'une plaque élastique

Considérons une plaque élastique mince d'épaisseur e et de longueur caractéristique L dans un repère cartésien orthonormé $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ d'origine O . L'adjectif mince qualifie une épaisseur petite devant la longueur caractéristique $e \ll L$. Son plan moyen, parallèle aux faces libres et situé à la moitié de l'épaisseur, appartient au plan xOy et a pour vecteur normal \underline{e}_z . La plaque est constituée d'un matériau élastique homogène isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . En ne considérant que les petites déformations, les contraintes et les déformations sont liées par la loi de Hooke généralisée

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (1.7)$$

pour laquelle $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes et $\underline{\epsilon}$ celui des déformations. Les indices i, j indiquent les directions x, y et z associées au repère orthonormé précédemment défini. Nous nous plaçons dans le cadre de la convention de sommation d'Einstein des

indices répétés pour laquelle $\epsilon_{kk} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$. Pour un milieu élastique hookéen, l'énergie élastique stockée dans un volume V de matériau est

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV. \quad (1.8)$$

Nous considérons les hypothèses de Kirchoff qui stipulent qu'une section de la plaque perpendiculaire au plan moyen reste plane après déformation. De plus, la condition de bords libres, l'équilibre mécanique interne et la faible épaisseur du système permettent, en première approximation, de négliger la contribution des cisaillements verticaux et de la contrainte normale

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0. \quad (1.9)$$

En substituant (1.9) dans l'équation (1.7), nous obtenons la déformation normale au plan moyen

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}). \quad (1.10)$$

Les équations (1.9) et (1.10) permettent de ne plus considérer que les composantes selon les axes e_x et e_y . Ainsi, le système est effectivement réduit à deux dimensions et la déformation du plan moyen est suffisante pour caractériser la configuration complète de la plaque.

Éirement contre flexion

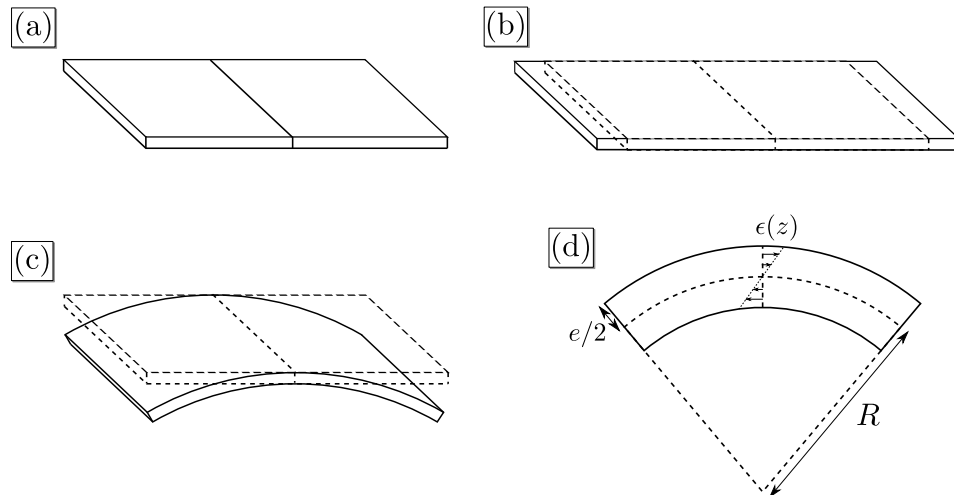


FIG. 1.2 Schémas des déformations typiques pour (a) une plaque élastique plate au repos. (b) Traction uniaxiale de la plaque. (c) Flexion de la plaque et (d) profil de déformation correspondant le long de l'épaisseur.

Lorsque des contraintes cinétiques sont imposées à une plaque mince, celle-ci peut suivre plusieurs modes de déformations.

Tout d'abord, la plaque peut s'étirer dans une déformation qui va changer la distance matérielle entre les points du plan moyen. Comme exemple, considérons un étirement homogène uniaxial selon l'axe \underline{e}_x , pour lequel les déformations restent dans le plan moyen (voir la figure 1.2 (b)). Les composantes du tenseur des déformations correspondant se lisent

$$\epsilon_{xx} = \epsilon \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yy} = 0. \quad (1.11)$$

L'énergie élastique associée à cette déformation est appelée énergie membranaire E_{mb} [12]. Nous l'estimons en injectant les équations (1.7), (1.10) et (1.11) dans la relation énergétique (1.8)

$$E_{mb} \propto EeL^2\epsilon^2. \quad (1.12)$$

Une énergie similaire est obtenue pour un cisaillement pur ($\epsilon_{xy} = \epsilon$ et $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$).

Enfin, la plaque peut se courber selon une déformation nommé la flexion (voir la figure 1.2 (c)). Dans le cas d'une flexion pure, le plan moyen subit une déformation isométrique de type cylindrique et acquiert une courbure de rayon R . Par projection dans le plan de courbure, la longueur de l'arc correspondant au plan moyen est égale à la longueur de référence avant déformation. Le plan moyen ne subit ni compression ni extension. De plus, les hypothèses de Kirchoff exigent que tout plan de la plaque en z , initialement parallèle au plan moyen, se courbe aussi avec un rayon de courbure $R + z$. Nous en déduisons la relation linéaire entre la position dans l'épaisseur et la déformation locale

$$\epsilon_{ij}(z) \propto \frac{z}{R}. \quad (1.13)$$

La plaque est en extension du côté convexe et en compression du côté concave. De la même manière que pour l'extension, nous estimons l'énergie élastique de flexion

$$E_f \propto \frac{Ee^3}{12} L^2 \frac{1}{R^2}. \quad (1.14)$$

En comparant les énergies (1.12) et (1.14), nous remarquons une différence par rapport à la dépendance en l'épaisseur de la plaque. Dans le cadre de l'approximation de plaques minces, et donc de petite épaisseur e , l'énergie de flexion en e^3 est bien plus petite que l'énergie membranaire en e . Par conséquent, lorsque cela est autorisé par la géométrie, une plaque mince sous contraintes préfère fléchir que s'étirer. Nous observons ce phénomène lorsque nous cherchons à déformer une feuille de papier. Il est en effet plus simple d'en faire un cylindre que de l'étirer. Cependant, les équations énoncées dans cette partie ne sont que des approximations. Dans la suite, nous allons rentrer plus en détails sur la relation entre la géométrie de la plaque déformée et les énergies élastiques correspondantes.

Relation entre flexion et courbure

L'équation (1.14) indique que l'énergie de flexion est quadratique en la courbure du plan moyen. Des calculs plus détaillés (voir [12]) donnent l'expression exacte au premier ordre de l'énergie élastique de flexion de la plaque

$$E_f = \frac{B}{2} \int_S \left(\left(\frac{K_I + K_{II}}{2} \right)^2 - 2(1 - \nu)K_I K_{II} \right) ddS, \quad (1.15)$$

suivant K_I et K_{II} les courbures principales, et

$$B = \frac{Ee^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.16)$$

le module de flexion de la plaque. L'intégration est opérée sur l'ensemble de la surface S du plan moyen. Cette énergie est dominante uniquement si la déformation est une flexion pure. Le cas échéant, chaque point de la surface a une direction de courbure nulle. Par conséquent, la courbure de Gauss $K_I K_{II}$ est nulle et l'énergie élastique locale ne dépend que du carré de la courbure moyenne $\left(\frac{K_I + K_{II}}{2} \right)^2$.

Bistabilité des origamis élastiques

La prise en compte de la souplesse des faces change complètement la vision que nous avons de l'origami en tant qu'objet d'étude.

D'un côté, le matériau n'autorise pas de discontinuité dans les faces. Nous ne pouvons plus parler de degré de liberté, et nous devons uniquement nous concentrer sur la minimisation de l'énergie élastique pour des contraintes imposées. Il est intéressant de noter que même dans le cas de faces flexibles, des modèles simplifiés de barres et charnières élastiques, correspondant donc à un nombre fini de degrés de liberté, donnent des prédictions raisonnables des propriétés mécaniques des origamis [74]. D'un autre côté, les modèles ne sont plus restreints aux motifs pliables à faces rigides puisque la déformation des faces permet de satisfaire n'importe quel chargement. Les nouvelles configurations qui en résultent permettent à des origamis bistables bloqués cinétiquement par la géométrie de devenir déployables [179, 160, 123].

Nous venons de voir comment décrire deux situations asymptotiques pour lesquelles un choix de flexibilité pour les faces ou pour les pliures permet une plus grande variété de comportements mécaniques pour les origamis. Mais, quand devons-nous utiliser l'un ou l'autre de ces modèles ?

1.1.3 Compétition entre l'élasticité des faces et des pliures

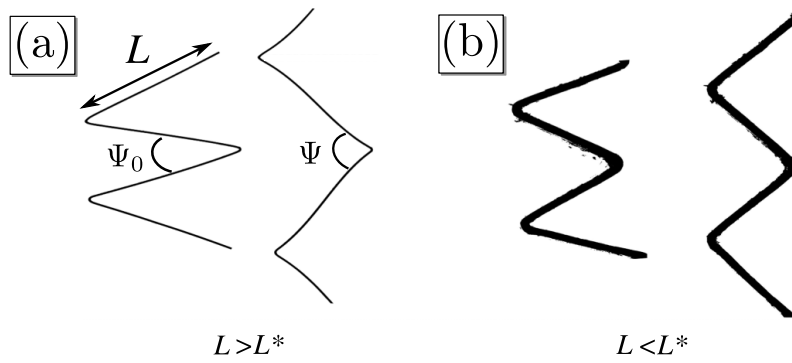


FIG. 1.3 Forme d'un origami en accordéon au repos et en déformation pour différentes longueurs de faces. (a) $L > L^*$, le système privilégie la flexion des faces. (b) $L < L^*$, le système privilégie l'ouverture des pliures (adaptés de [124]).

Cette question peut être reformulée d'une autre façon : Quels sont les types de déformations privilégiés par l'origami afin de minimiser son énergie interne et d'être dans un état équilibre stable. Dans le cas où les transformations isométriques sont autorisées, cela revient à comparer le coût énergétique pour l'ouverture des plis élastiques (1.5) à celui de flexion des faces (1.15). En procédant à un simple calcul d'ordre de grandeur [124], la comparaison fait naturellement ressortir une échelle de longueur L^* , nommée la «longueur origami», à partir du module de flexion B et de la rigidité de la pliure κ

$$L^* = \frac{B}{\kappa}. \quad (1.17)$$

Le rapport entre la longueur caractéristique de la face L et L^* indique si la déformation de l'origami s'effectue principalement par flexion des faces ($L > L^*$) ou par ouverture et fermeture des pliures ($L < L^*$). La figure 1.3 donne un exemple des deux configurations dans le cas de pliures en accordéon. Nous remarquons que si les pliures sont rigides, elles sont accommodées par une déformation des faces en S typique d'une déformation de structure élancée sous contraintes externes [149].

La compétition avec l'élasticité des faces ne se limite pas uniquement à la flexion. La géométrie peut induire des déformations non isométriques. Dans ce cas, les contraintes et l'énergie se localisent dans des singularités [201] comme les rides d'étirement [200] ou les cônes développables [35]. Nous rentrerons plus en détails sur cette observation dans la section 3.1 du chapitre III lorsque nous étudierons la forme structurelle de l'origami produit par le motif d'«accordéon courbé».

Cette introduction présente les effets de l'élasticité sur la mécanique des plis. Pour les faces, nous pouvons puiser dans les nombreux travaux sur la déformation de plaques minces pour diverses contraintes externes et ainsi prédire leurs comportements. En ce qui concerne les pliures, au premier ordre, leur réponse élastique à une déformation est analogue à celle d'une charnière purement élastique, d'angle au repos Ψ_0 et de

rigidité κ .

Un sujet que nous n'avons pas encore abordé est la valeur de cette rigidité. Bien que Hanna et al. [92] affirment qu'elle est reliée à l'élasticité du matériau qui la compose, nous n'avons trouvé aucune preuve expérimentale rigoureuse le confirmant dans la bibliographie. Ainsi, dans ce premier chapitre, nous modélisons un pliage unique élastique tout en tenant compte de la continuité du matériau et obtenons la relation entre les propriétés élastiques du matériau et celles de la pliure.

1.2 Dispositif expérimental sur le pli unique.

L'origami le plus simple qu'il est possible d'imaginer est un pliage unique, que nous appellerons aussi par abus de langage pli unique, rectiligne obtenu en pliant un rectangle en deux à la moitié de sa longueur. Il a l'avantage de ne compter qu'un petit nombre d'éléments, un pli qui sépare deux faces, d'être symétrique par rapport à la ligne de pliure et invariant par translation selon la direction de la pliure. Bien que le pliage unique ne permette pas de capturer toute la complexité des origamis, étant donné qu'il ne produit pas d'interactions entre plusieurs pliures, il permet de développer de simples tests uniaxiaux pour comprendre les propriétés mécaniques du pli. Le pli unique est donc le système modèle choisi pour étudier la rigidité de la pliure.

1.2.1 Matériel expérimental

Choix du matériau pour la feuille

Les caractéristiques de la pliure vont dépendre du matériau qui compose la feuille utilisée. Cette dépendance est facilement observable : après avoir découpé et plié en deux un rectangle dans deux feuilles minces, une en papier et l'autre en plastique, la force nécessaire pour marquer le pli est différente suivant le matériau. De plus, le pli en plastique demande plus d'effort pour être ouvert que celui en papier. Aussi, si des contraintes cinétiques sont imposées, par exemple en essayant de rapprocher les deux extrémités du pliage, l'angle à la pliure change beaucoup plus pour le pli en papier que pour celui en plastique. Il y a donc des différences notables de comportement mécanique selon le matériau considéré. Son choix est primordial pour l'étude qui suit. De plus, la création d'une pliure requiert une transformation locale irréversible de la structure du système. Cela peut être accompli de plusieurs manières.

Dans le cas d'une feuille en papier, plier s'accompagne d'un endommagement des fibres de cellulose qui la compose. C'est pour cette raison que le déchirement d'une feuille de papier le long d'une pliure est facilité et que la pliure est très localisée, quasiment une discontinuité. Le papier est un matériau idéal pour créer des origamis complexes en ne considérant que la géométrie avec faces rigides car l'endommagement des fibres

affaiblit fortement la réponse mécanique de la pliure. Cette réponse est donc difficile à mesurer en plus d'être dominée par des phénomènes non élastique. Pour une pliure dans une feuille de papier, il est simple de changer l'angle au repos Ψ_0 . Enfin, les propriétés mécaniques du papier sont très sensibles à l'humidité ambiante [2]. En tant que matériau modèle pour l'élasticité de la pliure, le papier est donc un très mauvais choix.

Une autre méthode peut être l'utilisation des déformations irréversibles locales. Les polymères thermoplastiques apparaissent comme des candidats tout désignés pour cela. Ils sont ductiles, même à température ambiante et leur seuil de plasticité suffisamment élevé permet de disposer d'un large régime élastique, contrairement aux métaux. Leur rigidité élevée permet de négliger les effets de la gravité jusqu'à des longueurs caractéristiques assez élevées, que nous justifierons qualitativement plus tard. Pour nos expériences, nous utilisons des feuilles en polytéréphtalate d'éthylène, plus communément nommé mylar. Ses propriétés physiques et mécaniques seront détaillées au début du chapitre II. Leur épaisseurs varieront suivant les expériences, entre 100 et 500 μm , leur coefficient de Poisson sera approché à $\nu = 0.4$, en accord avec les valeurs tabulées [113], et nous obtiendrons leur module d'Young directement avec l'expérience.

Obtention d'une feuille initialement plate

Le premier problème expérimental rencontré est que le mylar disponible ne se présentait qu'en rouleau. Or, un origami part d'une feuille plate. En utilisant les propriétés thermoplastiques du mylar, nous avons recuit les feuilles initialement courbées entre deux plaques de métal lourdes dans un four à une température entre 90 et 110°C, au dessus la température de transition vitreuse [67], pendant une durée de 30 minutes à 1h suivant les échantillons. Après les avoir laissées refroidir à température ambiante, les feuilles plastiques sont complètement plates au repos.

La découpe à des dimensions précises s'effectue directement à la main ou avec l'aide d'une découpeuse laser.

Appareil de mesure et fixation du pli

La machine de traction utilisée pour nos expériences de déformation est un Instron modèle 5965. Il comprend un grand bâti composé d'une grande base immobile reliée à une partie mobile qui se translate uniaxialement grâce à un moteur alimentant des vis sans fins. L'appareil permet un contrôle du déplacement de la section mobile à une précision submicronique. Une jauge piézo-électrique fixée sur la partie mobile mesure

précisément la force selon l'axe de déplacement autorisé par l'Instron. Bien que ces jauges sont typiquement précises à 10^{-4} de la valeur maximale mesurable (valeur fabricant), ce qui pour notre jauge de 50 N donne une précision de 5 mN. Néanmoins, divers tests effectués indiquent que la jauge reste précise jusqu'au mN.

L'enregistrement des données s'effectue au travers d'un logiciel dédié Bluehill qui contrôle les déplacements de la partie mobile, la vitesse d'acquisition de données et enregistre la force mesurée par la jauge au cours du temps. Le logiciel dispose d'une boucle de rétrocontrôle intégrée qui permet d'arrêter les phases de translation lorsqu'une force limite est atteinte. Il peut également produire, en sortie, une tension analogique proportionnelle aux valeurs de forces et positions mesurées. Ainsi, nous pouvons récupérer les données directement sur une carte d'acquisition et, avec l'aide d'une interface comme le logiciel Labview, faire correspondre des points de mesures en force et en position avec des photos du système.

La fixation du pli à la machine de traction se fait via des mors qui compressent la feuille aux extrémités entre deux plaques pour assurer des conditions d'encastements. Nous avons testé deux types de surface pour les plaques, complètement plane ou à picots. L'effet du choix de la surface sur les données collectées ne nous étant pas apparu flagrant, nous présenterons nos résultats pour les deux surfaces indistinctement.

1.2.2 Extraction de la forme déformée du pli

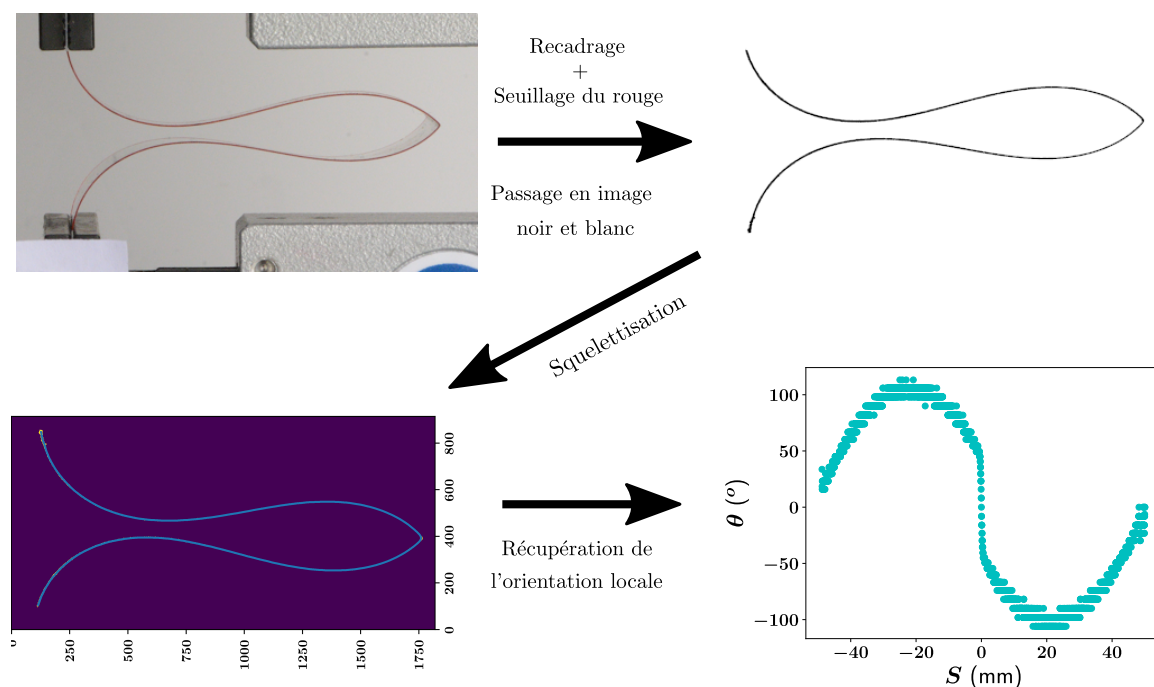


FIG. 1.4 Protocole typique d'analyse d'image, en partant de l'image prise par l'appareil photo et arrivant à l'orientation locale $\theta(S)$.

Prise de photo et mise à l'échelle

Une fois notre échantillon attaché et prêt pour l'expérience, il nous faut trouver une technique de mesure des déformations locales, l'appareil de traction se limitant à des mesures macroscopiques de déplacements entre les mors. Pour cela, nous prenons des photos d'un des côtés du pli avec un Nikon D800. Ce côté reste dans le plan focal durant toute l'expérience et la translation selon un axe e_x de la partie mobile du bâti correspond à l'axe vertical de la photo grâce à un alignement précis de l'appareil photo.

La propriété d'invariance du pli suivant la largeur décrite plus tôt nous autorise à extrapoler la forme globale uniquement à partir de la déformation en deux dimensions. Pour distinguer le bord du pli du reste de l'image, celui-ci est colorié en rouge et photographié sur un fond blanc placé derrière l'expérience. L'utilisation de la couleur rouge au lieu d'un simple contraste noir/blanc permet d'ignorer certaines variations de la luminosité entre les images. Pour obtenir un bon contraste, un projecteur éclairant le pli est positionné juste à côté de l'appareil photo.

Pour définir l'échelle de l'image, avant chaque expérience un maillage carré de dimensions connues est photographié. Un simple seuillage noir/blanc est suivi d'un référencement de la position du centre de chaque carré dans l'image. La distance entre deux carrés consécutifs est comparée à leur distance réelle pour ainsi récupérer la conversion pixel-mètre locale et vérifier que les aberrations géométriques de la lentille sont négligeables. Nous mesurons une variation maximale de 2% de l'échelle moyenne. En conséquence, nous considérons que l'échelle pour toute l'image correspond à l'échelle moyenne mesurée.

Algorithme d'analyse d'image

Les couleurs de l'image attribuent à chaque pixel une intensité de couleur rouge I_r , verte I_v et bleue I_b . Nous identifions le bord rouge grâce un seuillage de l'intensité

$$I_a = \frac{3I_r}{I_r + I_v + I_b + 1} \quad (1.18)$$

pour chaque pixel. Pour I_s , une valeur seuil, si $I_a > I_s$, le pixel devient noir alors que dans le cas contraire, le pixel devient blanc. I_s est choisie empiriquement pour chaque expérience, avec une valeur typique de 1.3 et elle est conservée pour toutes les images. Une analyse de la taille des ensembles de pixels noirs connectés permet d'isoler le plus grand amas correspondant au côté du pli.

Comme nous le verrons dans la section 1.3, la donnée intéressante pour la déformation est l'orientation angulaire locale. Elle correspond à la dérivée des coordonnées fournie par une photo. Pour affiner la forme du pli à partir de l'image, nous utilisons un

algorithme de squelettisation qui réduit l'épaisseur du côté du pli à un pixel noir [208]. Les pixels restants sont connectés de proche en proche pour récupérer l'abscisse curviligne S . L'orientation $\theta(S)$ correspond à l'angle entre deux pixels blancs consécutifs et la verticale. Les pixels étant connectés suivant un maillage carré, nous ne trouvons que des angles multiples de 45° . Pour mieux analyser la forme, nous effectuons une moyenne glissante des valeurs d'angles sur 5 pixels. Après une remise à l'échelle finale, nous obtenons l'angle local par rapport à l'horizontale $\theta(S)$ selon l'abscisse curviligne S .

1.2.3 Création du pli et domaine élastique

Généralités sur la création d'un pli

La création d'une pliure nécessite une transformation irréversible locale de l'état de référence du système que nous considérons. Les propriétés générées par le pliage sont importantes dans le comportement physique de l'objet final.

Partons d'une simple feuille rectangulaire en mylar. Le pliage s'effectue en imposant des contraintes locales importantes à l'endroit où nous souhaitons former une pliure. Une méthode que l'on peut effectuer manuellement consiste à superposer les parties de la feuille qui seront les faces. Ainsi, la concentration des contraintes autour de la ligne séparant les faces permet de dépasser le seuil de plasticité du matériau localement et de changer la configuration au repos du système, créant les pliures [21, 55]. Notons que la formation de la pliure engendre des frustrations internes dans l'épaisseur au repos [55].

Pour trouver la valeur finale de l'angle au repos, plusieurs paramètres rentrent en jeu : l'épaisseur de la feuille e , sa dimension typique L , la force que nous appliquons F ainsi que la durée t_w pour laquelle nous l'appliquons.

En ce qui concerne les trois premiers, K. Farain [73] a observé expérimentalement que l'unique paramètre $\frac{F}{eL}$ permet de regrouper les données et caractériser l'angle au repos. Pour t_w , plus la pliure est laissée longtemps sous chargement, plus l'angle au repos obtenu est aigu jusqu'à une valeur minimale $\Psi_{0, \min} \approx 50^\circ$ spécifique au matériau [73, 55]. Nous avons effectivement observé cette limitation durant nos expériences, bien que pour un angle au repos légèrement plus faible. Toutefois, les observations de K. Farain confirment que pour une même préparation, c'est-à-dire une même force F pendant un même temps t_w , deux pliures formées pour deux feuilles de caractéristiques identiques ont les mêmes propriétés. La création de pliures reproductibles est possible, ce qui est crucial pour une expérience scientifique.

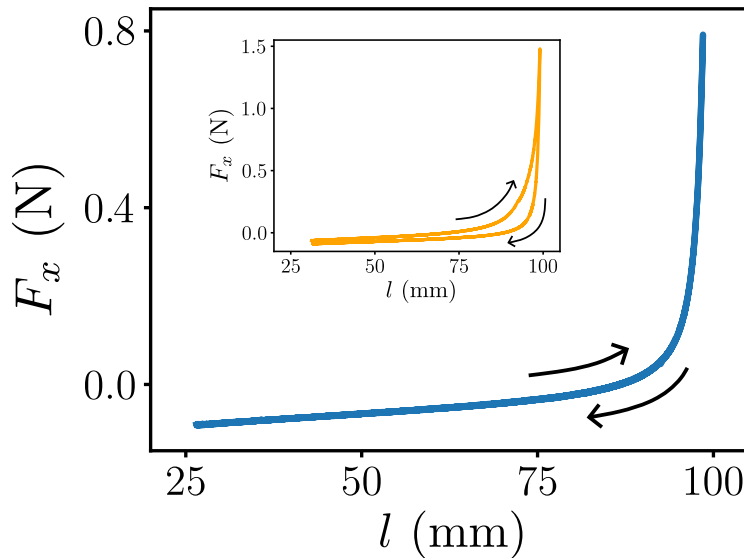


FIG. 1.5 Réponse mécanique d'une feuille de mylar pliée pendant le premier cycle de pliage-dépliage. l est la distance entre les mors et F_x est la force externe appliquée. La figure principale correspond à un pli recuit et l'encart au même pli avant recuit. Les flèches indiquent la direction de déplacement du mors mobile.

Création de notre pli expérimental

En suivant ces indications, le pli unique en mylar que nous utilisons dans nos expériences est d'abord formé à la main, pour définir sa position dans la feuille, et laissé ensuite sous un poids pendant un laps de temps prédéfini. Cela nous assure qu'un pli raisonnablement similaire peut être créé si besoin en suivant le même protocole. Les valeurs précises de temps d'attente et de poids dépendent du type d'expérience que nous avons effectué, et nous les préciserons à chaque fois.

Une des difficultés rencontrées avec ce protocole est l'omniprésence d'effets non élastiques pour la pliure formée. En effet, nous observons que la courbe de force-déformation pour un cycle de traction présente un important cycle d'hystérésis. Ce comportement montre que nous sommes en présence de déformations non élastiques. Il a deux origines.

Premièrement, l'angle au repos obtenu par la méthode décrite est aigu. Lors de l'extension, plus cet angle est aigu, plus les contraintes vont se concentrer rapidement au niveau de la pliure et dépasser le seuil de plasticité.

Deuxièmement, les frustrations internes résultant de la plasticité changent localement la rhéologie du matériau et diminuent le domaine d'élasticité.

Pour résoudre ces deux problèmes, nous effectuons un recuit du pli avant l'expérience afin de relaxer les contraintes internes. Le recuit suit le même protocole que le recuit initial des feuilles de mylar courbées mais nous utilisons, en plus, un moule pour que l'angle au repos du pli soit aux alentours de 90° après refroidissement. Le cycle de traction-compression devient réversible pour des étirements modérés et le pli répond dans un régime élastique.

1.3 Modèle du pli élastique

1.3.1 Modèle discret

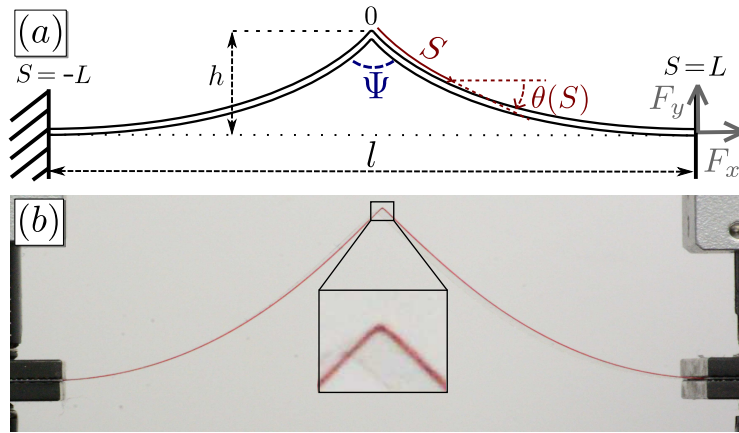


FIG. 1.6 (a) Schéma et (b) image du montage expérimental d'un pli unique. Un agrandissement de l'image près de la pliure met en évidence l'absence de discontinuité à la pliure.

Séparation entre pliure et faces

Pour une première modélisation de la déformation d'un pli unique élastique, nous couplons les modèles de faces flexibles et de pliure comme charnière élastique. Nous partons d'un pli de longueur totale $2L$, de largeur W et d'épaisseur e . Comme annoncée dans notre explication de la méthode d'analyse des images, la paramétrisation de la déformation locale se fait selon l'abscisse curviligne S , pour laquelle $S = 0$ représente le centre du pli. Nous définissons l'orientation locale $\theta(S)$ comme l'angle entre le vecteur tangent et l'horizontal (voir la figure 1.6). Les mors imposent des conditions d'encastrement à chaque extrémité

$$\theta(-L) = \theta(L) = 0. \quad (1.19)$$

Les mors sont alignés selon l'axe \underline{e}_x et séparés par une distance l . La pliure dispose d'un angle d'ouverture

$$\Psi = \pi + \theta(0^+) - \theta(0^-) \quad (1.20)$$

et sa rigidité génère une énergie linéaire $U_{pliure}(\Psi)$. En ce qui concerne la flexion des faces, la courbure locale est définie par

$$\theta'(S) = \frac{d\theta}{dS}. \quad (1.21)$$

L'invariance suivant la largeur rend la courbure secondaire nulle. La géométrie permet des déformations isométriques, donc le pli va privilégier la flexion. Nous ne considérons

que l'énergie élastique de flexion linéaire locale (1.15) qui donne, quand elle est adaptée à notre système

$$U_{flexion} = \frac{BW}{2} \theta'(S)^2. \quad (1.22)$$

Équation de déformation et conditions aux limites

Trouver l'équilibre élastique revient à minimiser l'énergie élastique globale du système comprenant faces et pliure pour les contraintes cinétiques imposées. Pour cela, nous utilisons le Lagrangien du système qui s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\theta\} = & \frac{BW}{2} \left(\int_{-L}^{0^-} + \int_{0^+}^L \right) \theta'(S)^2 dS - F_x \left(\int_{-L}^{0^-} + \int_{0^+}^L \right) \cos \theta(S) dS \\ & - F_y \left(\int_{-L}^{0^-} + \int_{0^+}^L \right) \sin \theta(S) dS + WU_{pliure}(\Psi). \end{aligned} \quad (1.23)$$

où F_x et F_y sont des multiplicateurs de Lagrange, homogènes à des forces, qui imposent l'alignement des extrémités. Leur présence permet de limiter notre recherche à l'espace des configurations satisfaisant l'alignement des mors. La discontinuité à la pliure sépare les contributions des coordonnées positives et négatives. En utilisant l'équation (1.20) qui donne la relation entre l'angle de la pliure et les conditions aux limites, la dérivation de cette fonctionnelle donne

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}\{\theta\} = & \delta \mathcal{L}\{\theta + \delta\theta\} - \delta \mathcal{L}\{\theta\} \\ = & BW \left(\int_{-L}^{0^-} + \int_{0^+}^L \right) \theta' \delta\theta' dS + F_x \left(\int_{-L}^{0^-} + \int_{0^+}^L \right) \sin(\theta) \delta\theta dS \\ & - F_y \left(\int_{-L}^{0^-} + \int_{0^+}^L \right) \cos(\theta) \delta\theta dS + W \frac{dU_{pliure}}{d\Psi} (\delta\theta(0^+) - \delta\theta(0^-)). \end{aligned}$$

L'intégration par partie du premier terme simplifie l'équation en

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \left(\int_{-L}^{0^-} + \int_{0^+}^L \right) (-BW\theta'' + F_x \sin(\theta) - F_y \cos(\theta)) \delta\theta(S) dS \\ & + BW ([\theta'(S)\delta\theta(S)]_{-L}^{0^-} + [\theta'(S)\delta\theta(S)]_{0^+}^L) + W \frac{dU_{pliure}}{d\Psi} (\delta\theta(0^+) - \delta\theta(0^-)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nous nous plaçons au minimum global qui vérifie $\delta \mathcal{L} = 0$ pour n'importe quel changement infinitésimal de la fonction $\theta(S)$. Il en résulte l'équation différentielle régissant la déformation des faces

$$\theta''(S) - \frac{F_x}{BW} \sin \theta(S) + \frac{F_y}{BW} \cos \theta(S) = 0. \quad (1.25)$$

couplée aux conditions aux limites

$$B ([\theta'(S)\delta\theta(S)]_{-L}^{0^-} + [\theta'(S)\delta\theta(S)]_{0^+}^L) + \frac{dU_{pliure}}{d\Psi} (\delta\theta(0^+) - \delta\theta(0^-)) = 0. \quad (1.26)$$

Il est intéressant de noter que l'équation (1.25) est l'équation de l'élastica d'Euler [70], applicable dans le cas où la flexion d'une plaque mince se fait selon une seule direction [149]. Les faces se comportent comme des plaques minces élastiques, pour lesquelles l'encastrement et la pliure imposent les conditions aux limites (1.26). En y ajoutant les fixations aux mors (1.19), ces conditions deviennent

$$\frac{1}{B} \frac{dU_{pliure}}{d\Psi} = \theta'(0^+) = \theta'(0^-). \quad (1.27)$$

Le pliage considéré est symétrique par rapport au centre de la pliure. Cela se traduit, pour θ et ses dérivées successives, par

$$\theta(S) = -\theta(-S), \quad \theta'(S) = \theta'(-S) \quad \text{et} \quad \theta''(S) = -\theta''(-S). \quad (1.28)$$

L'application de cette symétrie à l'équation (1.25) requiert $F_y = 0$. Par élimination, F_x correspond à la force externe selon l'axe e_x requise pour maintenir la distance l (voir la figure 1.6 (a)). Les conditions aux bords permettent d'intégrer l'équation (1.25) entre $S = 0^+$ et $S = L$, et d'obtenir l'équation d'équilibre des moments pour le système

$$\frac{dU_{pliure}}{d\Psi} = \frac{F_x h}{W} + B\theta'(L), \quad (1.29)$$

avec $h = \int_L^0 \sin \theta(S) dS > 0$, la hauteur du pli. Nous observons que le moment généré par la pliure compense la somme du moment macroscopique, défini comme la force externe multipliée par la hauteur du pli, et du moment au bord nécessaire pour maintenir le pliage encasté. Dans la limite de grande extension du pli, telle que supposée dans [124], les faces sont quasiment plates et $\theta'(L) \approx 0$. Avec cette hypothèse, le moment macroscopique est effectivement le moment à la pliure.

Bien que la modélisation avec une pliure élastique discrète introduise l'énergie de la pliure dans le système et établisse une équation de déformation pour les faces, elle ne donne aucun renseignement sur la valeur de la rigidité du pli. Afin de l'obtenir, nous allons développer un nouveau modèle ne considérant plus la pliure comme une discontinuité angulaire, mais comme une section du pliage de largeur non nulle.

1.3.2 Modèle étendu

Prise en compte de la configuration de référence

Contrairement à l'hypothèse selon laquelle la pliure est une discontinuité, la création d'un pli dans un polymère vitreux, ici le mylar, coïncide avec la formation d'une zone plastique pour laquelle la configuration locale de référence du système n'est plus plate [21]. Une nouvelle zone de forte variation angulaire apparaît dans la plaque : la pliure. L'extension spatiale de cette zone, pleinement visible dans la figure 1.6 (b), assure la continuité de la fonction $\theta(s)$ et de ses dérivées sur l'entièreté du pli.

Définissons le nouvel état de référence $\theta_0(S)$ du pli comme sa forme au repos en l'absence de quelconques `coDefAngPli` entrainées externes. La déformation élastique locale doit être redéfinie pour tenir compte des modifications apportées à la configuration de référence. En s'inspirant de la théorie élastique non euclidienne [68], nous supposons que l'énergie élastique locale pour une feuille mince est donnée par

$$U_{pli} = \frac{BW}{2} (\theta'(S) - \theta'_0(S))^2 . \quad (1.30)$$

Cette expression tient compte des précontraintes originaires du changement de la configuration de référence.

La forme de l'énergie locale est analogue à l'énergie d'un ressort linéaire élastique unidimensionnel $U_{ressort} = \frac{k}{2} (x - x_0)^2$, avec k la rigidité du ressort et x_0 la position du ressort à l'équilibre. Précédemment, nous considérons que ce ressort avait une position de référence $x_0 = 0$, correspondant à une plaque complètement plate au repos. La plasticité qui engendre la création du pli change la forme au repos, et donc x_0 . Pour $\theta = \theta_0$, le pli est au repos et cela correspond bien à une absence d'énergie élastique conservée par le pliage.

Elastica sous précontrainte

Lors de la déformation du pliage, la contribution énergétique de la pliure est directement incluse dans la flexion au travers de l'état de référence θ_0 . En utilisant l'énergie locale de flexion avec précontraintes (1.30) et les conditions d'alignement des mors, nous définissons le Lagrangien du pli élastique continu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{BW}{2} \int_{-L}^L (\theta'(L) - \theta'_0(L))^2 dL \\ & - F_x \int_{-L}^L \cos \theta(S) dS - F_y \int_{-L}^L \sin \theta(S) dS . \end{aligned} \quad (1.31)$$

En utilisant la même méthode que pour la pliure discrète, la minimisation de la fonctionnelle conduit à l'équation de déformation

$$\theta''(S) - \theta_0''(S) - \frac{F_x}{BW} \sin \theta(S) + \frac{F_y}{BW} \cos \theta(S) = 0 \quad (1.32)$$

ainsi qu'aux conditions aux bords

$$[(\theta'(S) - \theta_0'(S))\delta\theta(S)]_{-L}^L = 0. \quad (1.33)$$

Les bords encastés $\theta(-L) = \theta(L) = 0$ vérifient bien les conditions aux limites. Revenons plus en détails sur l'équation (1.32) qui décrit la forme du pli. Elle est très similaire à l'équation de l'Élastica d'Euler (1.25), mais ajoute le terme $\theta_0''(S)$ décrivant la forme au repos. De plus, elle n'est pas séparée en deux par le centre de la pliure en $S = 0$, étant donné que $\theta(S)$ n'est plus discontinu.

Adimensionnement

En normalisant toutes les longueurs par celle d'une face L , nous obtenons les paramètres adimensionnés pour le système

$$s = \frac{S}{L}, \quad s_0 = \frac{S_0}{L}, \quad \epsilon_x = \frac{l}{2L}, \quad \epsilon_y = \frac{h}{L}, \quad \alpha = \frac{F_x L^2}{BW} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{F_y L^2}{BW}. \quad (1.34)$$

L'adimensionnement de l'équation de forme du pliage encasté (1.32) par ces paramètres donne

$$\theta''(s) - \theta_0''(s) - \alpha \sin \theta(s) + \beta \cos \theta(s) = 0, \quad (1.35)$$

avec l'apostrophe indiquant cette fois la dérivée par rapport à s , $\theta'(s) = d\theta/ds$. Si nous avons un pli symétrique, comme dans le cas du pli discret, nécessairement $\beta = 0$ et l'équation de forme s'écrit

$$\theta''(s) - \theta_0''(s) - \alpha \sin \theta(s) = 0. \quad (1.36)$$

Une force caractéristique

$$F_c = \frac{BW}{L^2}, \quad (1.37)$$

correspondant à la charge critique de flambage d'une plaque élastique apparaît lors de la normalisation.

Elasticité contre gravité

Il est intéressant de comparer cette force à celle exercée par la gravité

$$F_g = \rho g L W e, \quad (1.38)$$

pour vérifier que l'effet du poids est négligeable dans notre expérience.

En conservant la largeur W et l'épaisseur e , la comparaison entre les deux forces donne une valeur adimensionnée

$$\epsilon_g = \frac{\rho g L^3 e}{B}, \quad (1.39)$$

qui pour notre expérience vaut $\epsilon_g \approx 0.1$. Cela montre qu'au premier ordre, il est légitime de ne pas tenir compte de la gravité dans notre modèle.

La déformation d'un pli unique élastique est donc décrite par une équation d'élastica avec précontraintes, équation différentielle non linéaire du second ordre. La présence du pli n'est plus une singularité dans le système, mais la continuité logique du changement de l'état de référence par déformation plastique.

La complexité introduite par les fonctions non linéaires sinus et cosinus rend impossibles les méthodes de résolution analytiques. Nous optons donc pour une méthode de résolution numérique.

1.4 Confrontation avec l'expérience

1.4.1 Méthode de résolution numérique

Comme nous le voyons pour la forme de déformation du pliage unique élastique, les lois physiques sont souvent représentées par des équations différentielles. Bien que de nombreuses méthodes mathématiques permettent une résolution analytique, celles-ci ne s'étendent pas à toutes les équations différentielles. C'est le cas de notre équation d'élastica sous précontrainte (1.35), qui nécessite alors une résolution numérique.

Partons d'une équation différentielle ordinaire,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.40)$$

avec f une fonction quelconque, pour laquelle les conditions aux limites $y(x_0) = y_0$ sont connues. En supposant que la fonction f est continue, nous pouvons intégrer l'équation (1.40) et obtenir sa formulation faible

$$y(X) = y_0 + \int_{x_0}^X f(x, y) dx. \quad (1.41)$$

La méthode la plus simple pour résoudre numériquement cette équation est la méthode d'Euler consistant à diviser l'intervalle d'intégration X en n sous-intervalle de taille h_i , $i \in [0, 1, \dots, n - 1]$. Dans chaque sous-intervalle, la fonction f est simplifiée par son premier terme du développement de sa série de Taylor,

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i). \quad (1.42)$$

f reste donc constante sur tout le sous-intervalle. Grâce à un calcul pas-à-pas, nous obtenons au final une solution approchée de l'équation différentielle, remplissant l'objectif de départ. Cependant, l'erreur d'approximation de la méthode d'Euler est proportionnelle à la taille du pas $|h|$ [89]. Une valeur approchée à n chiffres significatifs requiert un calcul sur 10^n pas de temps. Or, pour de nombreuses équations différentielles, la solution est très sensible aux conditions initiales. L'approximation doit donc être la plus précise possible, ce qui requiert des temps de calcul excessivement longs que d'autres méthodes, dont la méthode de Runge-Kutta que nous allons présenter, permettent de diminuer.

Afin d'augmenter la précision de la valeur approchée d'une fonction développable en un point donné, des éléments d'ordres supérieurs dans la série de Taylor sont ajoutés. En utilisant un principe analogue, Runge a proposé en 1895 [166] une nouvelle méthode de résolution des équations différentielles ordinaires en pas-à-pas, formalisée et généralisée par Kutta en 1901 [116]. La méthode de Runge-Kutta (RK) utilise des ordres supérieurs en h pour approcher la valeur intégrale de la fonction (1.41). Pour cela, la fonction f est estimée en plusieurs points d'un intervalle h tel que, pour une RK d'ordre 4

$$k_1 = f(x_0, y_0) \quad (1.43)$$

$$k_2 = f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1) \quad (1.44)$$

$$k_3 = f(x_0 + c_2 h, y_0 + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \quad (1.45)$$

$$k_4 = f(x_0 + c_2 h, y_0 + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \quad (1.46)$$

$$y_1 = y_0 + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4) \quad (1.47)$$

avec les coefficients réels a_{ij}, b_i, c_i satisfaisant des conditions détaillées dans le Chapitre II.1 de [89]. Avec cette méthode de calcul, l'erreur est estimée à h^4 pour un ordre 4, bien plus petite que celle obtenue pour le même intervalle avec la méthode d'Euler. De plus, RK n'ajoute que le calcul de trois valeurs pour chaque sous-intervalle, gardant un nombre total de calculs du même ordre de grandeur.

Pour résoudre numériquement l'élastica sous précontraintes (1.35), nous utiliserons la méthode de Dormand-Prince [64], adaptée de la RK d'ordre 4 pour donner une approximation encore plus précise, mais reposant sur le même principe.

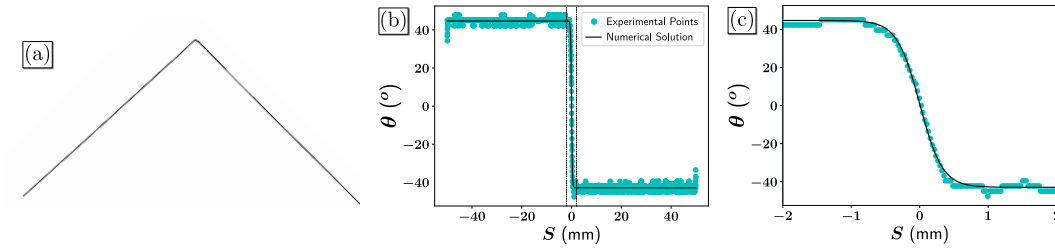


FIG. 1.7 Profil d'un pli en mylar au repos d'épaisseur $130\mu\text{m}$ et de dimensions 100×30 mm. (a) Image en noir et blanc du côté du pli. (b) Évolution de l'orientation locale θ selon la position sur le pli S . Le trait noir est un ajustement numérique de l'équation 1.48 sur les données expérimentales, représentées par des cercles bleus, avec $\Psi_0 = 92.4^\circ$ et $S_0 = 330 \mu\text{m}$. (c) Aggrandissement sur une zone autour de la pliure.

1.4.2 Forme du pli au repos

Avant de pouvoir résoudre l'équation (1.35), il nous reste à définir la forme au repos $\theta_0(S)$. Pour l'obtenir, nous utilisons la méthode présentée plus tôt sur une photo du pli au repos avant l'expérience. Nous observons en figure 1.7 (b) que la forme a une allure de sigmoïde, définissant une variation continue d'angle entre les deux extrémités. Pour notre analyse, la symétrie entre les deux côtés du centre du pli incite à considérer une fonction symétrique pour la forme au repos. Par conséquent, nous ajustons la courbe expérimentale par la fonction

$$\theta_0(S) = \frac{\Psi_0 - \pi}{2} \tanh\left(\frac{S}{S_0}\right). \quad (1.48)$$

Il en ressort deux caractéristiques intrinsèques pour le pli. L'angle au repos Ψ_0 définit l'angle entre les faces sans contraintes externes qui était déjà présent dans le cas d'une pliure discrète en tant que valeur de la discontinuité angulaire. Ici cependant, nous devons ajouter une longueur caractéristique S_0 délimitant la largeur de la zone plastique qui a changé de configuration de référence lors du pliage. Cette longueur, de taille relativement proche de l'épaisseur ($2S_0 \approx 5e$ [21]), sera cruciale dans la définition de la rigidité de la pliure.

1.4.3 Résolution numérique de l'élastica sous précontraintes

Paramètres d'ajustement

Maintenant que nous avons l'expression du pli au repos (1.48) revenons à la résolution numérique de l'équation gouvernant la forme du pli déformé (1.35). Pour la résoudre, nous avons besoin de connaître les valeurs des coefficients α et β ainsi que des conditions initiales $\theta(-1)$ et $\theta'(-1)$. Plusieurs éléments posent alors problème.

Tout d'abord, nous n'avons pas de mesure de la force F_y . Dans notre modèle de pli

symétrique, cela n'a pas d'importance, car nous aurons toujours $F_y = 0$. Cependant, des approximations expérimentales, comme des mors imparfaitement alignés ou une pliure mal centrée, peuvent engendrer un petit F_y . Nous définissons par ailleurs $s = s_p$ comme étant la position de la pliure pour les mêmes raisons.

Ensuite, le recuit pour former le pli peut changer les propriétés élastiques du matériau, donc le module de flexion B .

Enfin, les conditions d'encastrement peuvent poser problème en raison de la perspective de la photo et de la proximité du bord du pli avec les mors. L'extrémité de la forme que nous récupérons expérimentalement n'est pas le point exact où se situe la fixation par les mors. Nous confirmons cela par une mesure de la longueur totale du pli en intégrant selon l'abscisse curviligne expérimentale. La valeur obtenue est légèrement inférieure ($< 5\%$) par rapport à la valeur attendue. Cet écart est trop importante pour être simplement expliqué par la parallaxe.

Finalement, la résolution de l'équation différentielle requiert un ensemble de paramètres

$$P = (\alpha, \beta, \theta(-1), \theta'(-1), s_p) \quad (1.49)$$

à définir pour une déformation donnée.

Ajustement aux courbes expérimentales

Pour obtenir la valeur des paramètres d'ajustement, nous disposons de la forme expérimentale complète du pli déformé. Nécessairement, un ensemble de paramètres P permet de produire une forme unique pour le pli. Réciproquement, si une forme d'équilibre du pli existe, alors elle ne peut être produite que par un ensemble P unique. Nous utilisons cette propriété pour récupérer les paramètres de l'expérience à partir de la forme expérimentale. En premier lieu, nous interpolons celle-ci pour obtenir des points régulièrement espacés. Pour éviter que le processus ne soit trop long, nous limitons la partition de la forme du pli à moins de 500 sous intervalles. Les coordonnées curvilignes de ces points sont celles utilisées pour la résolution numérique de l'équation (1.35). Ensuite, nous employons une méthode des moindres carrés qui minimise l'écart entre la déformation extraite de l'image expérimentale et celle déduite de la résolution numérique avec l'ensemble de paramètres P . La minimisation se fait selon P par un algorithme d'optimisation inclus dans le module *Scipy* au moyen des méthodes *SLSQP* [112] ou *Powell* [154], choisies empiriquement pour obtenir une minimisation dans un temps raisonnable (environ 5-10 minutes par image).

La figure 1.8 montre le résultat de cette méthode pour un même pliage en compression ($F_x < 0$) et en étirement ($F_x > 0$). Les formes reconstituées numériquement sont cohérentes avec les formes expérimentales. Plus intéressant encore, les paramètres d'ajustement trouvés par minimisation ne donnent effectivement que de petites cor-

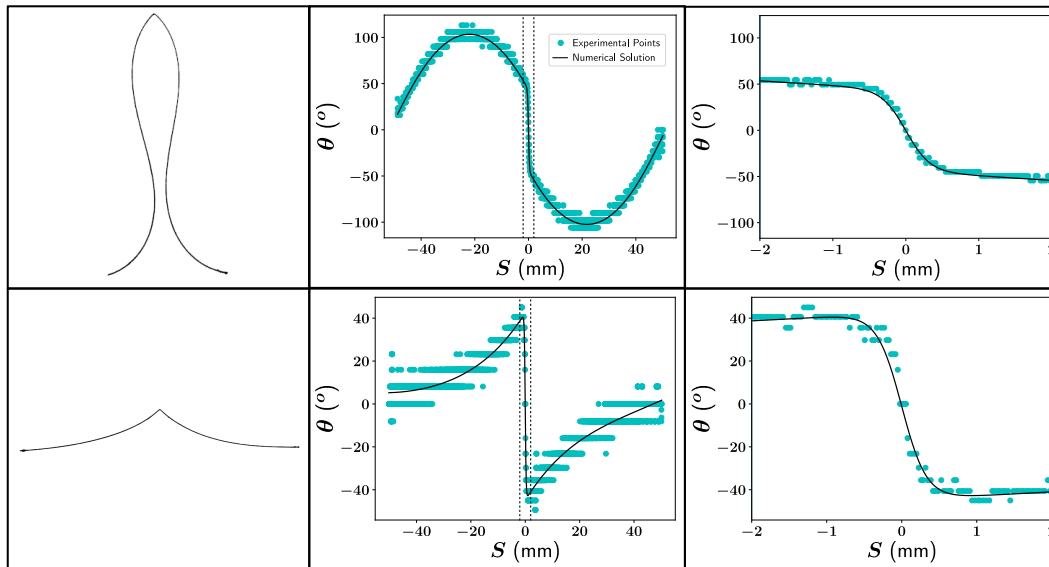


FIG. 1.8 Profils expérimentaux et numériques de l'orientation locale pour deux configurations typiques en déformation, une en compression (haut) et une en extension (bas). Le pli étudié est celui présenté au repos dans la figure 1.7. La première colonne représente les images noir et blanc tirées de l'expérience. La seconde colonne donne l'évolution de l'angle local θ selon la coordonnée curviligne S pour l'expérience (points bleus) et la résolution numérique (traits pleins noirs). La dernière colonne donne un agrandissement autour de la pliure. Le pli en compression est mesuré pour $F_x = -0.142$ N et $l = 21.8$ mm, et le pli étiré pour $F_x = 0.075$ N et $l = 94.9$ mm. La légende est valable pour les colonnes deux et trois. Les solutions numériques proviennent de la résolution de l'équation (1.35) avec $P = (-10.8, 0.46, 0.29, 5.00, -0.007)$ pour le pli comprimé et $P = (5.69, 0.23, 0.09, 0.033, 0)$ pour le pli étiré.

rections dues aux imperfections avec $s_p \approx 0$, $\theta(\pm 1) \approx 0$, $|\beta| \ll \alpha$ et $|\beta| \ll 1$ pour l'ensemble des déformations analysées.

L'étude effectuée peut s'étendre à une optimisation sur la forme de la pliure, en minimisant l'écart non plus selon θ , mais selon les coordonnées $x(S)$ et $y(S)$. Pour cela, nous intégrons la solution numérique de l'équation différentielle et la comparons ensuite à la forme directement extraite de la photo. Bien que l'ajustement corresponde mieux à la forme observée (voir la figure 1.9), les valeurs initiales de l'ensemble P à définir pour démarrer la minimisation doivent être plus proches de la valeur finale optimisée afin d'éviter les minima locaux.

Obtention du module de flexion du matériau

Au-delà du bon ajustement entre courbes expérimentales et numériques, une autre méthode pour confirmer la validité de notre modèle est de s'intéresser à l'évolution du paramètre d'ajustement α en fonction des mesures expérimentales correspondantes. En effet, les paramètres d'adimensionnement (1.34) donnent la relation entre α , la force mesurée F_x , la longueur d'une face L et le module de flexion B . Or, pour un même

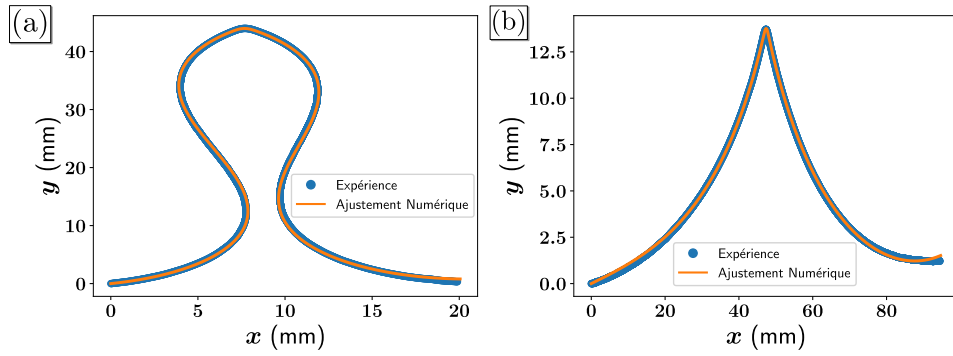


FIG. 1.9 Profils expérimentaux (cercles bleus) et numériques (ligne orange) des deux configurations de la figure 1.8. (a) Pli en compression avec un ajustement corrigé $P = (-10.9, 1.0, 0.29, 5.03, -0.007)$. (b) Pli en extension avec un ajustement corrigé $P = (5.55, 0.235, 0.09, 0.028, 0)$.

pli, les paramètres élastiques ne changent pas durant l'expérience. Par conséquent, la rigidité B doit être la même pour n'importe quelle configuration de déformation.

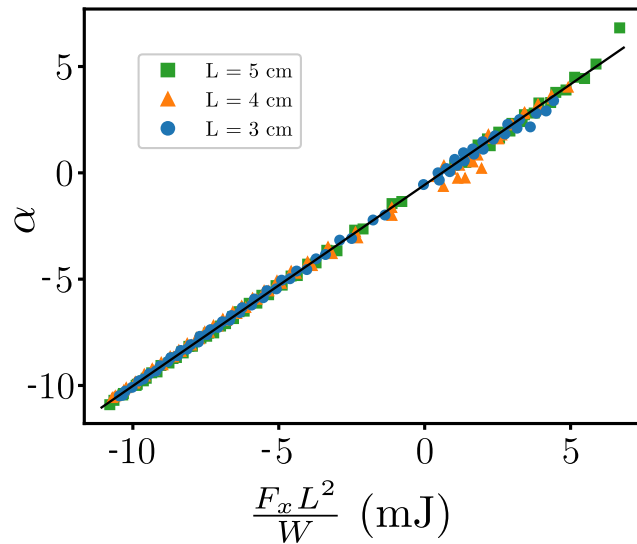


FIG. 1.10 Relation entre le paramètre adimensionné α et $F_x L^2 / W$ mesuré par la machine de traction. La valeur $B = 1.07$ mJ est inférée de l'inverse de la pente de la régression linéaire représentée en trait plein.

Les résultats, montrés en figure 1.10, confirment que les ajustements considérés capturent bien une unique rigidité B . En utilisant l'expression de la rigidité (1.16) pour remonter au module d'Young du matériau. Pour notre pli, nous trouvons $E = 4.9$ GPa, proche des valeurs tabulées pour le mylar [52].

Notre modèle considérant la contribution du pli uniquement au travers d'une modification de la configuration de référence et de l'élasticité locale, en tenant compte de cette précontrainte, permet une bonne prédiction de la déformation du pli dans le cadre d'un pli encastré aux deux extrémités.

1.4.4 Extension à des systèmes asymétriques ou à deux pliures

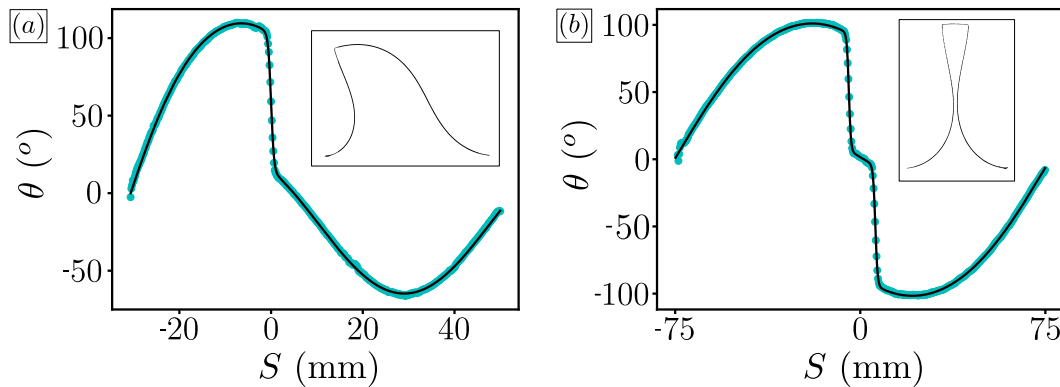


FIG. 1.11 Profils expérimentaux (points bleus) et numériques (traits pleins noirs) de pliages uniques plus complexes. (a) Pli unique asymétrique de dimensions $80 \times 30 \times 0.13$ mm avec $\Psi_0 = 92^\circ$. L'optimisation donne $\alpha = -11.0$, $\beta = 5.7$, $\theta(-1) = -0.12$ et $\theta'(-1) = 6.23$. (b) Pliage symétrique de dimensions $150 \times 30 \times 0.120$ mm, avec deux pliures à 70 mm de chaque bord et d'angle au repos $\Psi_0 = 93^\circ$ et 91° . L'optimisation donne $\alpha = -6.82$, $\theta(-1) = 0.02$ et $\theta'(-1) = 4.03$. En encart : Image des échantillons en noir et blanc.

Bien que nous utilisons la forme de référence (1.48), trouvée pour le pli au repos, la modélisation élastique des déformations décrite dans cette section ne requiert qu'une fonction θ_0 comme configuration de référence et n'est donc pas limitée au pli unique. Par exemple, nous pouvons considérer le cas d'un pli asymétrique. Pour cela, nous fixons le pli aux mors de façon à ce que les longueurs des faces soient différentes. En gardant la position de la pliure à $S = 0$, les conditions aux limites se trouvent maintenant à des distances différentes. Malgré cela, la même méthode d'optimisation numérique permet d'obtenir la forme pendant la déformation, comme le montre la figure 1.11 (a). Il est intéressant de noter que, comme attendu en l'absence de symétrie, le second multiplicateur de Lagrange, qui correspond à la force F_y , n'est plus négligeable par rapport à F_x .

Nous pouvons aussi considérer la déformation d'un origami avec deux pliures disposées symétriquement par rapport au centre, comme visible sur la figure 1.11 (b). Dans ce cas, la configuration de référence est juste la somme de deux plis uniques, avec un centre décalé pour chaque pli. En procédant toujours de la même manière, tout en rajoutant un nouveau paramètre pour la position du centre de la seconde pliure, la résolution numérique reproduit fidèlement la forme expérimentale.

Tous ces exemples confirment le bien fondé du choix de notre modèle tant que seul des plis élastiques sont considérés. Cependant, il est limité à des systèmes simplifiables en deux dimensions qui ont une invariance par translation suivant la troisième, ce qui n'est pas le cas pour la grande majorité des origamis. Pour ces cas là, nous allons opter pour une autre méthode, l'analyse par méthode des éléments finis. Dans la prochaine section, nous expliquons notre technique pour former des pliures par la méthode des éléments finis et nous vérifions, dans le cas d'un pliage unique, sa compatibilité avec le modèle.

1.5 Le pli élastique en méthode des éléments finis

Comme nous le verrons dans le chapitre *II*, contrôler expérimentalement l'angle au repos dans un origami complexe est une tâche ardue. La méthode la plus sûre reste de le recuire, comme nous l'avons fait pour le pli unique. Cette approche se limite cependant aux systèmes extrêmement simples puisqu'elle nécessite la présence d'un moule en négatif. Si le recuit n'est pas une solution utilisable, la nécessité d'atteindre des contraintes au-delà du seuil plastique rend la modification d'un angle au repos pour une pliure donnée, sans modifier celles adjacentes, complexe. À tout cela doit s'ajouter la rhéologie du matériau qui limite le domaine d'élasticité. Développer un protocole expérimental qui restreint la réponse mécanique d'un origami à une réponse élastique, tout en contrôlant les caractéristiques de chaque pliure, est extrêmement compliqué. Les modèles mécaniques élastiques ne permettront qu'une description qualitative.

Une solution pour résoudre ce problème est de simuler numériquement les déformations de l'origami. Pour cela, nous allons employer la Méthode des Éléments Finis (MEF) pour approcher la réponse physique d'un système à des contraintes imposées. Nous allons voir à quoi correspond exactement la MEF et pourquoi elle est intéressante pour notre système.

1.5.1 Introduction à l'analyse en éléments finis

Le travail du physicien est de comprendre les mécanismes sous-jacents aux phénomènes physiques observés. Pour cela, un système complexe est simplifié pour n'en garder que l'essentiel et le rendre plus compréhensible. En appliquant des lois de physique générales, nous en déduisons le comportement physique du système. Prenons un exemple déjà énoncé dans cette thèse, la déformation d'une plaque mince. En partant d'une loi générale d'élasticité (1.7), qui est déjà une approximation linéaire de la relation entre contraintes et déformations, nous avons émis des suppositions, les hypothèses de Kirchoff, pour diminuer la dimension du système, donc sa complexité. Il faut faire attention toutefois, ces simplifications ne sont pas anodines. Bien qu'elles permettent d'établir des équations continues solubles répondant aux lois physiques, elles restreignent dans le même temps l'éventail de phénoménologies explicables et donnent des interprétations erronées dans le cas où les hypothèses se révéleraient fausses.

Les méthodes numériques reposent aussi sur des simplifications du système afin d'obtenir des solutions. Cependant, l'exploitation de l'outil informatique permet d'être beaucoup moins limité par la quantité de calculs nécessaires à l'obtention de la solution. Ainsi, au lieu d'émettre des hypothèses simplificatrices, le système garde un degré de complexité supérieur, mais il est fragmenté en éléments discrets. La force de l'informatique est de générer une discrétisation suffisamment petite pour se rappro-

cher de la description continue. Dans l'exemple précédent, cela revient à garder les lois données par l'équation générale (1.7), mais ne calculer les valeurs de contraintes et déformations qu'à certains points du système. Cela permet des simplifications même dans des situations où les méthodes analytiques ne l'autorisent pas. La précision se base alors sur la quantité de calculs.

Une méthode habituelle de résolution numérique est la MEF. C'est une méthode variationnelle de résolution d'équations différentielles partielles associées à des conditions aux limites. Le système étudié est préalablement divisé en plusieurs sous-éléments connectés par des noeuds. Ces noeuds représentent les degrés de liberté du système. Le calcul des grandeurs physiques ne s'opère que sur les noeuds qui servent de base d'interpolation à la valeur locale dans chaque sous-élément. Cela signifie que, même si la quantité physique calculée est continue dans tout le système, ses dérivées ne le sont pas forcément. Pour ne nécessiter que la continuité d'un minimum d'ordre de dérivations, seulement les formes faibles des équations différentielles partielles sont considérées. Elles correspondent à leur intégrale première suivant les coordonnées du système. En discrétisant cette intégrale, l'état du système est trouvé par minimisation d'une fonction, comme une énergie globale, en optimisant sur les valeurs affectées aux noeuds. La minimisation peut se ramener à des équations matricielles linéaires

$$\underline{KD} = \underline{R} \quad (1.50)$$

où \underline{D} est un vecteur d'inconnues correspondant à des grandeurs physiques aux noeuds, \underline{R} représente les efforts appliqués et \underline{K} la matrice de rigidité, reliant les grandeurs physiques entre elles selon les lois physiques. À cette étape, la résolution ne requiert plus que de lourds calculs, les tailles des matrices étant élevées.

Pour plus de détails sur la méthode et la résolution, nous invitons le lecteur à consulter la riche bibliographie sur le sujet [163, 122]

Bien que nous prenons la mécanique comme exemple, la généralité de la MEF permet de l'appliquer à de multiples domaines de la physique tels que la conduction thermique et électrique ou l'hydrodynamique par exemple. Nous allons exploiter ces capacités pour simuler la formation d'un pli et sa réponse mécanique.

1.5.2 Application au pli unique

Etat de l'art des simulations d'origamis

Simuler la déformation d'un origami afin de prédire sa forme pliée n'est pas une idée novatrice. Dans une approche géométrique, cela permet d'effectuer de l'ingénierie inversée en calculant le motif satisfaisant des objectifs structurels imposés par l'utilisateur, tout en contrôlant si l'origami est effectivement pliable à faces rigides [121, 184]. Des modélisations plus complexes et réalistes pour simuler les pliages en MEF sont fondées sur des barres et des charnières, toutes deux élastiques, afin d'estimer la ré-

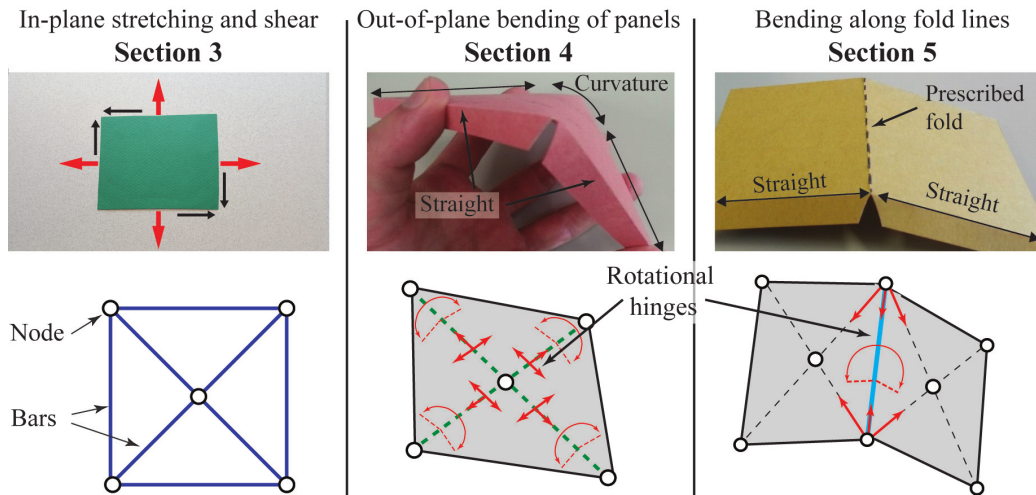


FIG. 1.12 Types de déformations autorisés par le modèle de barres et charnières élastiques. La première ligne utilise un modèle en papier et la seconde ligne montre les positions des barres et charnières correspondant (extrait de [74]).

ponse mécanique du pliage.

Plus précisément, chaque sommet du motif est associé à un noeud et chaque pli à une barre. Un noeud supplémentaire est placé au centre de chaque face et connecté aux sommets qui l'entourent par des barres supplémentaires. Ainsi, une face quadrilatère se trouve modélisée par 5 noeuds et 8 barres (voir la figure 1.12). Toutes les barres sont des charnières et autorisent une rotation autour de leur axe. Ce modèle simple et efficace permet de capturer de nombreux comportements mécaniques comme le cisaillement et la flexion des faces. Il permet une bonne estimation de la réponse mécanique des origamis pour un coût de calcul réduit [74].

Cependant, cette méthode de simulation, avec barres et charnières, se base sur la discontinuité angulaire des pliures, qui n'existe pas dans un système réel. Cela nécessite de définir la rigidité de chaque charnière et le nombre limité de noeuds ne permet pas de capturer les phénomènes de localisation des contraintes dans les feuilles élastiques minces.

Nous allons présenter une nouvelle méthode pour simuler numériquement la formation et la réponse élastique des plis en MEF, qui ne présente aucune de ces limitations.

Notre méthode

Pour toutes nos simulations en MEF, nous avons utilisé le logiciel COMSOL Multiphysics.

La création du pli démarre par la modélisation d'une plaque élastique de dimensions $L \times W$ et d'épaisseur e . Pour modéliser la pliure, nous nous inspirons des observations effectuées sur la forme au repos du pli. Elle est caractérisée par un angle au repos Ψ_0 et une longueur caractéristique S_0 . Dans la plaque élastique, nous définissons une région de largeur $2S_0$ au centre qui correspond au pli. L'ensemble de la structure est

considérée dans le cadre d'un modèle de coque élastique en trois dimensions. Il ne reste plus qu'à trouver une méthode pour changer l'angle au repos.

Comme nous l'avons vu plus tôt dans la sous-section 1.1.2, la flexion, et donc la formation de la pliure, s'accompagne de la compression de la plaque d'un côté du plan moyen et de son extension du côté opposé. Pour imiter cet effet, nous assignons un coefficient de dilatation thermique $\alpha_T = \pm 1$ à la tranche de pliure, le signe dépendant de sa direction, montagne ou vallée, et $\alpha_T = 0$ pour le reste du pli qui correspond aux faces. En appliquant un gradient de température le long de l'épaisseur, la partie chaude se dilate pendant que la partie froide ne change pas. Il en résulte une flexion du système à la pliure, telle que schématisée dans la figure 1.13 (a).

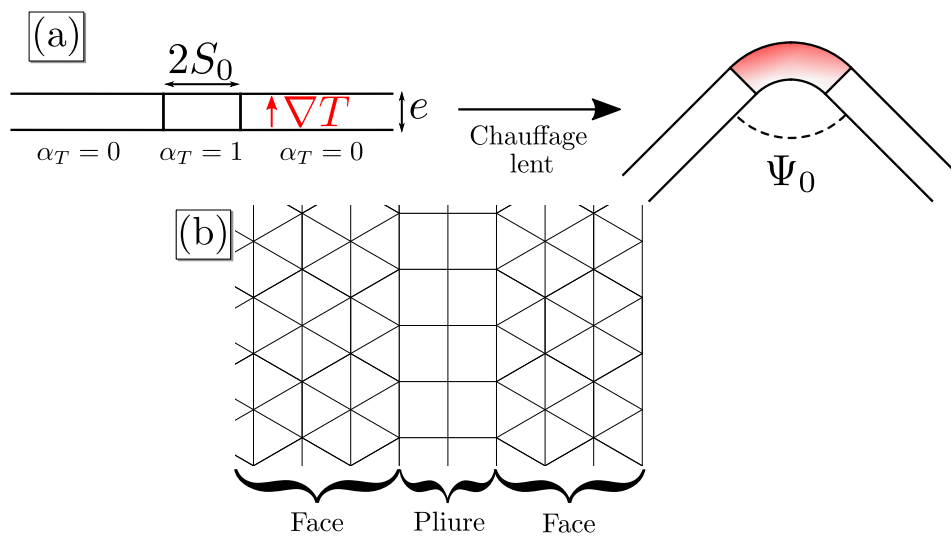


FIG. 1.13 (a) Schéma de formation de la pliure par dilatation thermique d'une zone de largeur $2S_0$. (b) Maillage typique autour de la pliure.

Paramètres de la simulation

Avant d'analyser le comportement mécanique du pli ainsi produit, nous allons détailler les paramètres utilisés dans notre simulation.

Commençons par le choix de l'archétype mécanique de l'objet simulé et des équations d'équilibre associées. La création d'un origami débute en prenant une feuille mince et, après pliage, produit une structure tri-dimensionnelle complexe. En conséquence, nous avons choisi d'utiliser le modèle de coque (ou *shell*) de COMSOL. La plaque étudiée est créée selon une géométrie en deux dimensions, l'épaisseur étant comprise dans les équations du modèle.

En ce qui concerne la discrétisation du système, nous avons opté pour un maillage différent entre les faces et les pliures. Pour les faces, le maillage est triangulaire libre et défini pour une taille *extremely fine*. Pour les pliures, le maillage est rectangulaire, en s'assurant de la présence d'une ligne de noeuds au centre des plis. De plus, les noeuds

aux bords des plis correspondent à des sommets du maillage triangulaire des faces. Le maillage complet est schématisé en figure 1.13 (b).

Après avoir défini les caractéristiques de l'objet à simuler, il est nécessaire de préciser la méthode de résolution et les paramètres associés. Nous avons conservé une majorité de ceux sélectionnés par défaut par COMSOL. Ainsi, l'algorithme employé est le *MUMPS* avec un seuil de pivot de 0.1, la tolérance relative est à 0.001. La méthode de résolution non linéaire pour les éléments couplés est définie sur automatique. Les deux éléments que nous avons modifiés sont le nombre maximal d'itérations, qui est fixé à 250 afin de laisser plus de temps de calculs pour arriver aux solutions, et pris en compte les non linéarités géométriques.

En tant que système mécanique, il est aussi crucial de définir les conditions aux limites pour le système. Celles-ci dépendront entièrement de l'origami à analyser, et nous les précisons pour chaque nouveau type de simulation.

Enfin, lors de la chauffe, nous augmentons la température très progressivement pour permettre à la MEF de trouver plus facilement les configurations d'équilibre voisines.

Contrôle de l'angle au repos du pli simulé

Pour vérifier l'angle obtenu avec cette méthode, et permettre la convergence de la solution, des conditions aux limites sont imposées aux bords parallèles à la pliure. Bien que les deux restent libres de tourner autour de leur axe, un bord est fixé pour ne pas bouger et le second bord n'est autorisé à se translater que selon une seule direction. La forme à température finale est semblable à celle obtenue expérimentalement au repos et sa projection peut aussi être ajustée par la sigmoïde (1.48). Après plusieurs tests modifiant l'épaisseur e et la taille du pli S_0 , nous avons obtenu une relation empirique entre les paramètres du système et la température à imposer pour obtenir un angle au repos Ψ_0 voulu

$$\pi - \Psi_0 = A\alpha_T \frac{S_0}{e} \Delta T, \quad (1.51)$$

où ΔT est la différence de température entre le haut et le bas de la plaque, et $A = 2.8$ un préfacteur constant. La forme de cette relation est prévisible, puisqu'elle ne dépend que de la géométrie du pli.

En effet, à cause du gradient de température, le bord bas de la pliure garde sa longueur $2S_0$ pendant que le bord haut s'allonge et prend une longueur L_h telle que

$$L_h = (1 + \alpha_T \Delta T) 2S_0. \quad (1.52)$$

Cette longueur est reliée géométriquement à l'angle d'ouverture de la pliure par la relation

$$\pi - \Psi_0 = \frac{L_h - 2S_0}{e}. \quad (1.53)$$

En remplaçant L_h par son expression (1.52), nous obtenons

$$\pi - \Psi_0 = 2\alpha_T \frac{S_0}{e} \Delta T, \quad (1.54)$$

une expression qui se révèle proche de celle obtenue empiriquement par des simulations (1.51). Seule la valeur du préfacteur A change, la différence provenant d'effets tridimensionnels négligés par une simple analyse géométrique en deux dimensions.

1.5.3 Comparaison entre la MEF et la résolution numérique de l'équation analytique.

Pour vérifier que la réponse mécanique de ce pli simule effectivement l'élasticité d'un pli réel, nous effectuons un test de traction avec la MEF et des paramètres similaires à ceux de notre expérience de pli unique. Pour cela, en plus des conditions aux limites déjà décrites, nous imposons un angle tangent nul à chaque bord du pli, équivalent à une condition d'encastrement, et une force $F_x = 0$ uniaxiale au bord pouvant se translater.

Après avoir chauffé la pliure afin de l'amener à un angle au repos choisi, F_x est modifiée pour simuler un chargement externe. Les formes d'équilibres correspondantes sont enregistrées. Nous en extrayons la courbe de force-déplacement $F_x = f(l)$, telle que mesurée dans notre expérience, et nous la normalisons suivant (1.34).

Dans le même temps, nous résolvons numériquement l'équation d'élastica avec pré-contrainte dans le cas idéal symétrique (1.36) pour les paramètres matériaux et de pliures employés dans la MEF. Le pli est encasté rigoureusement à chaque extrémité, donc $\theta(-1) = \theta(1) = 0$. En prenant les chargements F_x utilisés dans la MEF, nous disposons de toutes les informations nécessaires pour calculer la forme du pli. Toutefois, la résolution numérique nous astreint à ne considérer que les conditions initiales $\theta(1)$ et $\theta'(-1)$. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une méthode de tir cherchant à ajuster la valeur de $\theta'(-1)$ de sorte que la solution vérifie la seconde condition d'encastrement $\theta(1) = 0$. La minimisation ne se fait plus suivant une méthode des moindres carrés sur toute la forme, mais uniquement sur l'orientation à l'extrémité du pli, et nous ne recherchons plus un ensemble P de paramètres mais un seul, la courbure initiale $\theta'(-1)$. Cette méthode ne repose plus sur une forme mesurée, mais sur le cas idéal d'un pli unique symétrique parfaitement encasté.

Après l'intégration des solutions de l'optimisation, nous obtenons les longueurs adimensionnées ϵ_x entre les deux extrémités correspondant à chaque chargement α , et

ainsi disposer de la courbe de force-déplacement adimensionné.

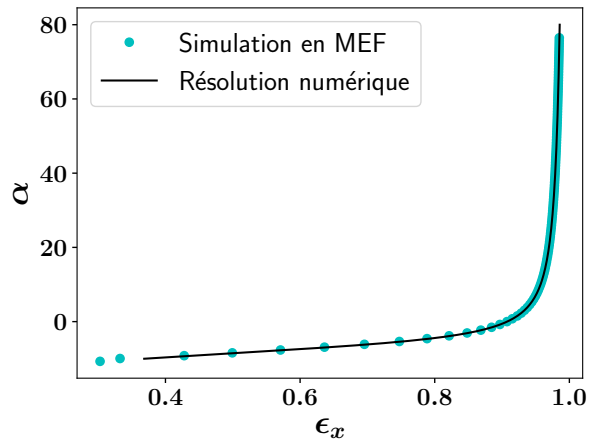


FIG. 1.14 Courbe de force-déplacement normalisée pour un pli unique d'épaisseur $e = 130 \mu\text{m}$, de dimension $100 \times 30 \text{ mm}$, de coefficient de Poisson $\nu = 0.4$, de module d'Young $E = 5 \text{ GPa}$, de largeur de pliure $S_0 = 2.6e$ et d'angle au repos $\Psi_0 = 92.5^\circ$, pour une résolution en méthode des éléments finis (cercles pleins cyan) et pour une résolution numérique de l'équation (1.35) (trait noir).

Les deux courbes du modèle élastique et de la MEF donnent la même réponse pour le pli (voir la figure 1.14). Nous rappelons qu'ici, il n'y a pas de paramètre d'ajustement entre les deux courbes, tout est contrôlé par les caractéristiques mécaniques du matériau et celles de la pliure. Donc, il est clair que le comportement de notre modèle est en accord avec celui de notre technique de création de plis en MEF.

La MEF est donc un outil extrêmement puissant pour analyser les origamis. Non seulement elle peut former des pliures élastiques avec un angle au repos et une largeur caractéristique facilement modifiables, mais aussi elle ne souffre ni des imperfections expérimentales ni des restrictions du modèle en deux dimensions.

1.6 Quelle est la rigidité d'un pli élastique ?

1.6.1 Longueurs caractéristiques du pli

Déformations et contraintes locales

Un des principaux avantages de la résolution numérique est une description précise des déformations locales du système. Ainsi, la solution numérique de l'équation (1.35), et donc de l'équation dimensionnée associée (1.32), donne les valeurs locales de $\theta(S)$ et $\theta'(S)$ tout le long du pli. Avant d'étudier plus en détails les contraintes locales qui en résultent, nous introduisons la déformation angulaire locale $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Sa dérivée $\Delta\theta'$ correspond au moment interne local, défini comme la variation de courbure locale par rapport à la forme au repos. Son évolution dans le pli suivant le chargement externe

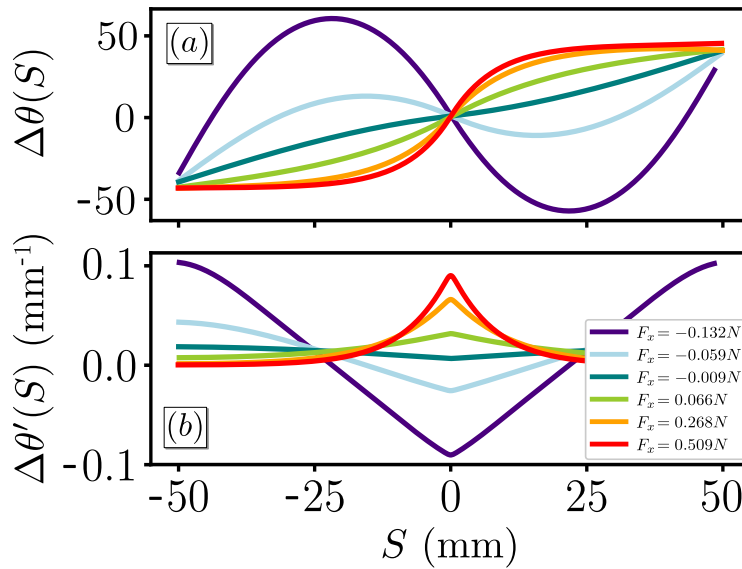


FIG. 1.15 Déformation $\Delta\theta(S)$ et moment $\Delta\theta'(S)$ locaux à l'intérieur du pli. Ces courbes sont obtenues à partir des profils calculés numériquement pour plusieurs valeurs de F_x .

est crucial pour comprendre les zones dans lesquelles les contraintes se concentrent. La déformation angulaire $\Delta\theta$ et le moment local $\Delta\theta'$ sont tous les deux affichés dans la figure 1.15 pour plusieurs valeurs de chargement externe.

Mettre le pli en extension ($F_x > 0$) ou en compression ($F_x < 0$) produit des déformations notablement différentes.

Dans le premier cas, la géométrie force les faces à une quasi planéité. Les contraintes vont alors se concentrer au seul endroit qui n'est pas plat dans l'état de référence, la pliure. Sa petite taille par rapport à la longueur des faces entraîne une grande variation de la force F_x pour des petites variations de la distance entre les mors l .

Au contraire, en compression, les faces sont libres de se fléchir et stocker de l'énergie élastique. Elles prennent alors une forme en S, couramment observée pour des déformations de plaques élastiques limitées par la géométrie [149], pour répartir les contraintes dans le système. Toutefois, la condition d'encastrement crée une autre zone de concentration des contraintes aux extrémités. Il est important d'être prudent expérimentalement si nous utilisons des matériaux plastiques, car si les forces internes deviennent suffisamment intenses, il y a risque de plastification aux bords et création de nouvelles pliures.

Une autre configuration intéressante est le cas pour lequel les forces externes appliquées sont nulles $F_x = 0$. Dans cette configuration, le moment au centre de la pliure est positif $\Delta\theta'(0) > 0$, ce qui indique que la pliure n'est pas au repos. Bien que le chargement externe soit absent, garder les conditions d'encastrement entraîne l'application d'un moment aux bords du pli compensé par l'ouverture de la pliure. Comme le pli est fermé en cas de forte compression, la continuité du système nous indique qu'il existe une valeur de F_x négative pour laquelle le pli est au repos. Le signe de F_x n'est

pas une information suffisante pour définir si la pliure est au repos ou non.

Séparation entre pliure et face

Intéressons-nous maintenant au comportement asymptotique de l'équation de déformation (1.32) dans le cadre du modèle symétrique pour $F_y = 0$. Les deux termes sources de l'équation différentielle sont $\theta_0''(s)$ et $\frac{F_x}{BW} \sin(\theta(S))$. Ils dépendent tous les deux de la position à l'intérieur du pli comme indiqué dans l'encart de la figure 1.16. Le premier terme incorpore les modifications plastiques de la forme de référence à cause du pliage. Loin de la pliure, ce terme est négligeable par rapport au second. Dans cette limite, nous obtenons comme équation de forme l'élastica (1.25) déjà obtenue pour la déformation d'une plaque mince et des faces dans le cas d'une pliure discrète. Par opposition, proche du centre de la pliure, nous pouvons négliger le terme des contributions externes. L'équation (1.32) se simplifie en

$$\theta''(S) - \theta_0''(S) = \Delta\theta''(S) = 0. \quad (1.55)$$

La forme au repos θ_0 , telle que définie par l'équation (1.48), est une fonction C^∞ . Nous pouvons donc intégrer deux fois l'équation (1.55) pour obtenir l'expression de la déformation angulaire locale à la pliure

$$\Delta\theta(S) = MS, \quad (1.56)$$

avec M l'unique constante d'intégration, la symétrie imposant $\theta(0) = 0$. Cette constante représente la valeur du moment local, constant dans toute la pliure.

La transition entre les deux régions, la pliure et les faces, se fait à une longueur L_c telle que les deux termes sources de l'équation (1.32) sont égaux

$$\theta_0''(L_c) = \left| \frac{F_x}{BW} \right| \sin \theta(L_c). \quad (1.57)$$

Étonnamment, L_c dépend grandement du chargement F_x . Pour $F_x = 0$, $L_c \rightarrow \infty$ est le moment interne en constant sur tout le pli. Par conséquent, L_c est un mauvais candidat pour la longueur caractéristique de la pliure, vu qu'il varie durant l'expérience. S_0 est la seule longueur restante pour décrire la pliure. Cependant, cette longueur est trop petite et se situe encore dans une zone où la courbure local varie fortement, comme nous le constatons dans la figure 1.17 (a).

Nous proposons de définir l'extension spatiale de la pliure S_c comme la position pour laquelle la courbure locale est nulle ($\theta'(\pm S_c) = 0$) dans la configuration sans charge-

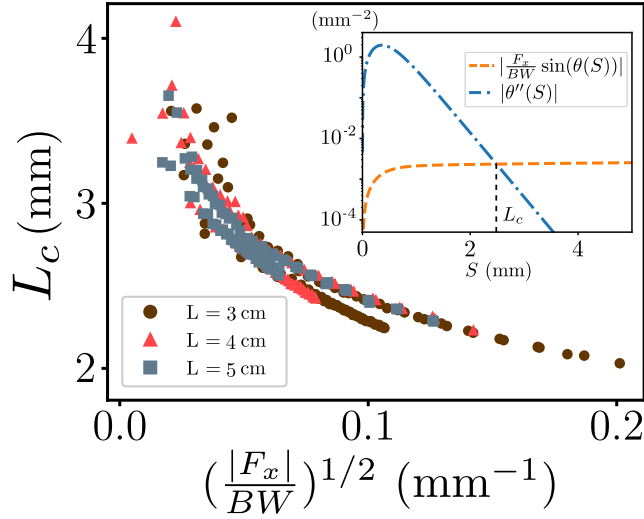


FIG. 1.16 Longueur critique L_c , telle que définie par l'équation (1.57), en fonction de $(|F_x|/BW)^{1/2}$ pour différentes valeurs de F_x . En encart : Courbe lin-log de la valeur absolue des deux termes sources de l'équation (1.32) proche de la pliure pour $\beta = 0$ et $F_x = -0.092$ N.

ment externe ($F_x = 0$ N), pour les conditions aux limites spécifiques à l'expérience, à savoir les deux bords encastés. En supposant une petite pliure $S_0 \ll L$, nous obtenons

$$S_c = \frac{S_0}{2} \log\left(\frac{4L}{S_0}\right). \quad (1.58)$$

L'équation (1.58) montre que S_c/S_0 dispose d'une évolution logarithmique faible en L/S_0 telle que $S_0 < S_c \ll L$. Asymptotiquement, lorsque la taille des faces devient très grande, nous atteignons $S_c/L \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$ pour lequel la pliure devient discrète. Bien que S_c soit définie par la configuration de référence spécifique à l'expérience, la figure 1.17 (a) montre qu'il définit une claire démarcation entre la pliure, la zone de forte courbure, et la face.

1.6.2 Rigidité d'une pliure

Nous avons analysé le comportement mécanique local du pli continu et défini la pliure comme la région pour laquelle $|S| < S_c$. En utilisant l'équation (1.20) et la symétrie du pliage unique, l'angle d'ouverture du pli est défini par

$$\Psi = \pi + 2\theta(S_c) \quad (1.59)$$

avec l'angle au repos correspondant

$$\Psi_0 = \pi + 2\theta_0(S_c). \quad (1.60)$$

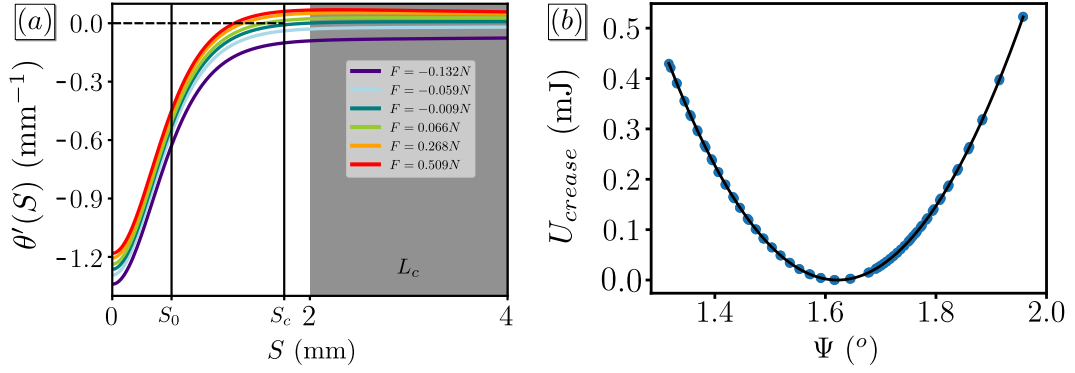


FIG. 1.17 (a) Courbure locale $\theta'(S)$ près de la pliure pour différents chargements. Les deux longueurs caractéristiques S_0 et S_c sont indiquées et la région ombrée indique les valeurs atteintes par L_c . (b) Énergie de flexion à la pliure U_{pliure} , telle que définie par l'équation (1.61), en fonction de l'ouverture de la pliure Ψ , telle que définie par l'équation (1.59). Ces deux quantités sont calculées à partir des résolutions numériques et chaque point bleu correspond à une photo. Le trait plein noir correspond à un ajustement quadratique $U_{pliure} = \kappa W (\Psi - \Psi_0)^2 / 2$ avec $\Psi_0 = \pi + 2\theta_0(S_c) = 92.9^\circ = 1.62 \text{ rad}$ et $\kappa = 308 \text{ mJ m}^{-1} \text{ rad}^{-2}$.

Puisque $S_c > S_0$, notre nouvelle définition de Ψ_0 est très proche de celle définie dans l'équation (1.48). L'énergie élastique totale stockée dans la pliure est donnée par

$$U_{pliure} = \frac{BW}{2} \int_{-S_c}^{S_c} \Delta\theta'(S)^2 dS. \quad (1.61)$$

La figure 1.17 (b) montre que la fonction U_{pliure} est effectivement quadratique avec l'angle d'ouverture du pli, comme attendue pour une pliure élastique.

Comme $S_c < L_c$, nous pouvons utiliser l'équation (1.55) pour définir le moment au bord de la pliure

$$\Delta\theta'(S_c) = \frac{\Delta\theta(S_c)}{S_c} = \frac{\Psi - \Psi_0}{2S_c}. \quad (1.62)$$

En substituant cette expression dans l'équation (1.61), nous obtenons la relation entre l'ouverture de la pliure et son énergie élastique

$$U_{pliure} = \frac{BW}{4S_c} (\Psi - \Psi_0)^2. \quad (1.63)$$

Par identification avec l'énergie d'une pliure élastique (1.5), la rigidité de la charnière élastique κ , caractérisant la résistance de la pliure à la déformation, vaut

$$\kappa = \frac{B}{2S_c}. \quad (1.64)$$

L'élasticité de la pliure est donc bien proportionnelle à celle du matériau d'origine. La longueur origami L^* définie dans [124] est $2S_c$ pour un pli unique élastique. La relation que nous avons obtenue est cohérente avec celle obtenue récemment par Walker et Seffen [195] dans un travail parallèle.

Ce modèle ne donne pas de solution miracle permettant de contrôler facilement la rigidité du pli. Bien que la diminution de S_0 produise cet effet, l'épaisseur finie du matériau impose une taille minimale pour la pliure [21]. Si nous cherchons à l'affaiblir, plusieurs méthodes sont disponibles. Tout d'abord nous pouvons modifier localement l'épaisseur, et donc changer B au niveau de la pliure. Mais aussi, nous pouvons perforer le pli localement pour diminuer sa largeur effective. Cependant, cela s'accompagne dans les deux cas d'une diminution du seuil de plasticité et, par conséquent, du moment maximal qui peut être produit par la pliure. Si ce seuil devient extrêmement bas, nous obtenons un pli pour lequel les faces restent toujours droites pendant la déformation, qui n'est alors plus élastique, mais plastique.

Dans le cas classique où les origamis sont pliés à la main à partir d'une feuille plastique transparente, tant que les faces ont une longueur grande devant l'épaisseur, les pliures sont considérées comme rigides comparées aux déformations en flexion des faces.

1.6.3 Relation entre rigidité et épaisseur

Si la taille de la pliure est petite devant celle des faces ($S_0 \ll L$), la rigidité du pli est, au premier ordre, proportionnelle à l'inverse de la taille caractéristique de la pliure $\kappa \propto \frac{B}{S_0}$. Comme la longueur S_0 est habituellement elle-même proportionnelle à l'épaisseur de la feuille e [21], et en ajoutant l'expression du module de flexion (1.16), nous obtenons une loi d'échelle entre e et κ

$$\kappa \propto e^2. \quad (1.65)$$

Génériquement, la rigidité d'un pli est proportionnelle au carré de l'épaisseur de la feuille.

1.7 Conclusion

L'apport de l'élasticité dans la réponse mécanique d'un pliage se fait au niveau des pliures et des faces. Cependant, dans un matériau réel, la pliure ne représente pas une discontinuité dans le système. Au lieu de séparer pliure et faces pour un pli unique, nous avons adapté la réponse élastique locale en fonction d'une nouvelle configuration de référence au repos caractérisée par une longueur typique de pliure et un angle au repos. Ces deux éléments sont suffisants pour comprendre quantitativement les déformations locales du système et permettent de définir la rigidité d'un objet asymptotique correspondant au pli à partir des caractéristiques mécaniques du matériau et des dimensions de la pliure.

Le principe d'une région de pliure avec un changement local de la configuration de référence peut s'appliquer à des méthodes en éléments finis par exploitation des propriétés multiphysiques de ces dernières afin de simuler avec succès le comportement mécanique d'un pliage. Et bien que la modélisation analytique soit limitée à deux

dimensions, ce n'est pas le cas des MEF qui permettent donc la création d'origamis complexes pour lesquels nous pouvons contrôler précisément la rigidité et l'angle au repos de chaque pli.

La réponse élastique n'est pas le seul comportement mécanique observé lorsqu'un pli est mis sous contraintes, surtout lorsque celles-ci deviennent importantes comme nous l'avons constaté avec l'hystérésis obtenue durant un cycle de traction. Même pour simplement créer une pliure, la feuille requiert des déformations irréversibles de la configuration de référence au repos. Il est indispensable de comprendre l'origine de ces déformations afin de bien encadrer le domaine pour lequel la modélisation élastique est valable, et d'analyser la dépendance temporelle, et donc le vieillissement, des pliages.

Comportements non
élastique du pli
unique

Comportements non élastique du pliage unique

Ce chapitre introduit les comportements mécaniques non élastiques du pliage unique, nécessaires pour produire des déformations irréversibles et ainsi créer la pliure. Après la présentation des caractéristiques du matériau utilisé, le mylar, et du modèle de viscoélasticité sur lequel nous allons baser notre étude, nous utiliserons le modèle élastique développé dans le chapitre précédent pour cartographier l'espace de force-déplacement du pli unique en fonction des caractéristiques de la configuration au repos. Nous verrons que la carte qui en résulte permet un suivi in situ des variations de l'angle au repos, dues aux comportements plastiques du matériau, grâce à une interpolation des observables expérimentales, la force et le déplacement. Enfin, l'étude de l'évolution temporelle du système, ici par la relaxation de la force, nous renseignera sur les temps caractéristiques intrinsèques au pli venant de la rhéologie complexe du matériau.

2.1 Propriétés physiques des polymères

La réponse élastique linéaire est définie par deux constantes spécifiques au matériau, par exemple le module d'Young et le coefficient de Poisson. Cela n'est plus suffisant lorsque nous considérons les comportements non élastiques qui dépendent de la structure précise du matériau. Il est donc primordial de décrire en détails le matériau polymérique que nous utilisons dans nos expériences, le mylar. Pour cela, commençons par présenter les caractéristiques des polymères.

2.1.1 Morphologie des polymères

La présentation des polymères qui va suivre est principalement basée sur deux livres [162, 41] qui font le lien entre structure moléculaire des polymères et propriétés mécaniques du matériau.

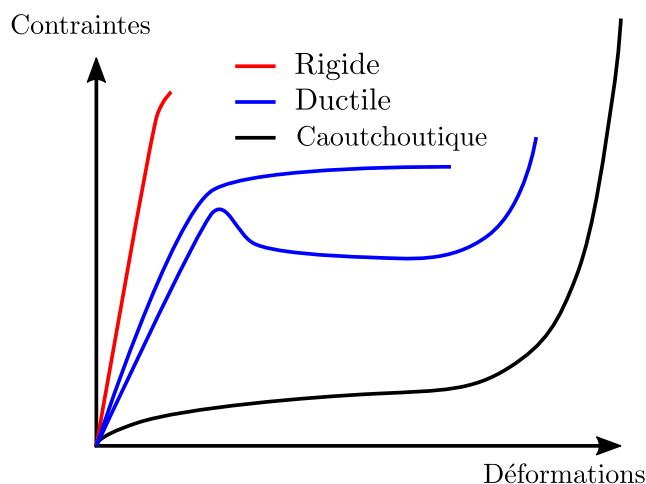


FIG. 2.1 Comportement mécanique typique pour plusieurs catégories de polymères. En rouge, un polymère thermodurcissable rigide et fragile. En bleu, un polymère thermoplastique ductile, avec deux comportements typiques. En noir, un élastomère caoutchoutique.

Types de polymères

Un polymère est une macromolécule composée d'une chaîne de groupements moléculaires semblables, nommés monomères, connectés entre eux par des liaisons covalentes. Les propriétés physiques des polymères dépendent de leur structure. Cela inclut la composition atomique des monomères utilisés, la distribution du nombre moyen de monomères par chaîne de polymère, la concentration en polymères dans le milieu, la fréquence des branches connectant les chaînes entre elles ainsi que l'orientation géométrique des monomères.

Dans un cadre thermomécanique, les polymères sont habituellement classifiés en trois groupes : thermodurcissables, élastomères et thermoplastiques. Chacun disposant d'une réponse à la déformation spécifique, schématisée dans la figure 2.1.

Les élastomères sont des polymères à faible réticulation, c'est-à-dire disposant d'un nombre limité de branches entre les chaînes. Les matériaux qui en résultent sont facilement déformables, leur extensions pouvant atteindre jusqu'à plusieurs fois leur dimensions initiales. De plus, ces déformations sont entièrement réversibles. Les ballons de baudruche ou le caoutchouc naturel sont des exemples d'élastomères.

Au contraire, les polymères thermodurcissables disposent d'une forte réticulation qui restreint grandement les mouvements entre les chaînes. Ils produisent un matériau extrêmement rigide, mais fragile, c'est-à-dire dont l'extension avant rupture est faible. Ce type de polymère est habituellement utilisé comme résine ou colle, par exemple le polyépoxyde. Une caractéristique commune aux élastomères et aux polymères thermodurcissables est qu'ils ne peuvent pas être transformés et vont uniquement se dégrader avec le temps ou à hautes températures.

Les polymères thermoplastiques sont le troisième type de polymères. La qualification « thermoplastique » indique qu'à haute température, ils adoptent un comportement semblable à un fluide, et donc s'écoulent. Au contraire à basse température, ils de-

viennent rigides. Ces propriétés permettent de transformer facilement la forme des matériaux thermoplastiques par moulage ou extrusion. Par conséquent, les polymères thermoplastiques, incluant le mylar que nous utilisons, sont ceux principalement utilisés dans l'industrie.

Conformation et pelote statistique

Avant de parler de structure, il est important d'introduire la notion de conformation. La conformation est l'arrangement spatial des atomes et groupements moléculaires à l'intérieur du polymère. Elle se modifie par rotation des molécules autour de leurs liaisons covalentes. Le changement d'une conformation à une autre ne requiert ni la création ni la destruction de liaisons covalentes. En conséquence, l'énergie nécessaire pour altérer une conformation est faible comparée à l'énergie nécessaire pour casser des liaisons. L'agitation thermique est suffisante pour passer d'une conformation à une autre.

Les polymères sont composés de nombreux monomères reliés en une longue chaîne d'atomes. Chaque monomère peut avoir plusieurs conformations possibles. En ajoutant la relative simplicité pour la changer, bien que le polymère ait une structure moléculaire bien définie, sa forme géométrique varie suivant un large éventail de conformations globales. Par conséquent, un polymère est habituellement modélisé comme une pelote statistique disposant d'une distribution de conformations. La taille moyenne du polymère est alors celle favorisée par l'entropie et correspondante au plus grand nombre de conformations.

Cette modélisation capture certaines propriétés mécaniques observées. Par exemple, plaçons-nous dans le cas où la température est suffisamment élevée pour faciliter les changements de configurations. En cas de chargement externe, les contraintes entraînent des déformations qui changent nécessairement la taille du polymère, ce qui réduit le nombre de conformations possibles. Cela entraîne une réponse entropique du système qui cherche à le ramener dans un état au repos maximisant le nombre de conformations. Cette élasticité entropique, typique des élastomères, produit un matériau relativement mou.

Cristallinité des polymères

Généralement, la composition du monomère, que ce soit avec des cycles aromatiques ou des atomes d'oxygène, permet la création de liaisons faibles entre plusieurs polymères. Ces liaisons entraînent la formation de régions cristallines caractérisées par un ordre régulier à longue distance entre plusieurs chaînes, sur des longueurs de plusieurs centaines à plusieurs milliers de monomères. Ces régions sont nommées

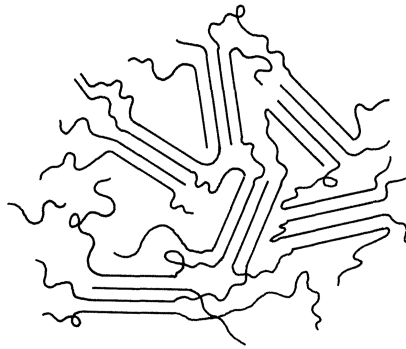


FIG. 2.2 Différence de conformations entre les régions amorphes, représentées par les lignes courbées, et les cristallites, représentées par les lignes parallèles, dans un polymère semi-cristallin (extrait de [162]).

cristallites. Au contraire de l'état amorphe, la déformation d'une chaîne dans l'état cristallin s'accompagne d'un changement de nombreuses liaisons faibles couplées, ce qui demande beaucoup d'énergie et rend le système rigide. Aussi, comme pour les métaux cristallins, les cristallites sous fortes contraintes peuvent subir des événements plastiques irréversibles de type dislocation [16].

Dans un polymère thermoplastique, les cristallites cohabitent avec des régions amorphes (voir la figure 2.2). Le terme « semi-cristallin » est utilisé pour caractériser cette morphologie. Le taux de cristallinité représente la proportion du matériau dans l'état cristallin. Il varie typiquement de 10 à 80 % suivant le type de polymère et la méthode de fabrication, et il a une grande influence sur les propriétés physiques du matériau qui en résulte [158].

Transition vitreuse et fusion

La caractéristique principale d'un polymère thermoplastique est de couler à haute température. Dans un système vitreux, la température de transition vitreuse T_v correspond à la température de transition entre l'état solide et l'état liquide des régions amorphes. Cependant, un polymère est aussi composé de régions cristallines. Il est nécessaire de définir une seconde température critique de fusion $T_f > T_v$ pour laquelle les cristallites passent aussi à l'état liquide. Ces deux températures indiquent que le comportement mécanique d'un polymère thermoplastique dépend de la température. Il est catégorisé suivant quatre plages de température.

Pour $T \ll T_v$, la faible agitation thermique limite les changements de conformations des différents polymères. La difficulté du mouvement des polymères conduit à un matériau rigide et fragile.

Pour $T < T_v$, bien que les mouvements des polymères soient toujours limités, la proximité à T_v autorise certaines déformations (changement de configuration, glissement des chaînes). Cela se traduit par l'apparition d'un seuil de contrainte critique, que

nous appelons seuil de plasticité, au-delà duquel des changements irréversibles sont opérés. Le matériau est ductile.

Pour $T_v < T < T_f$, les régions cristallines sont rigides, pendant que les régions amorphes se comportent comme un liquide, la mobilité étant permise par la hausse de la température. C'est le domaine de travail principal des polymères semi-cristallins car il combine les bénéfices des deux régions. Les cristallites maintiennent une certaine solidité dans le matériau, évitant qu'il ne devienne complètement liquide, et les régions amorphes permettent de grandes déformations réversibles. À ces températures, la réponse mécanique est typiquement caoutchoutique.

Pour $T_f < T$, les régions amorphes et cristallines fondent et le matériau est complètement liquide.

Si nous voulons exploiter ces propriétés pour nos plis, nous sommes face à une contradiction. En effet, nous souhaitons des déformations irréversibles pour former la pliure, mais aussi une large région de déformation en accord avec la modélisation élastique, plus simple à décrire. Un polymère thermoplastique dans sa région ductile semble un bon compromis.

2.1.2 Le Mylar

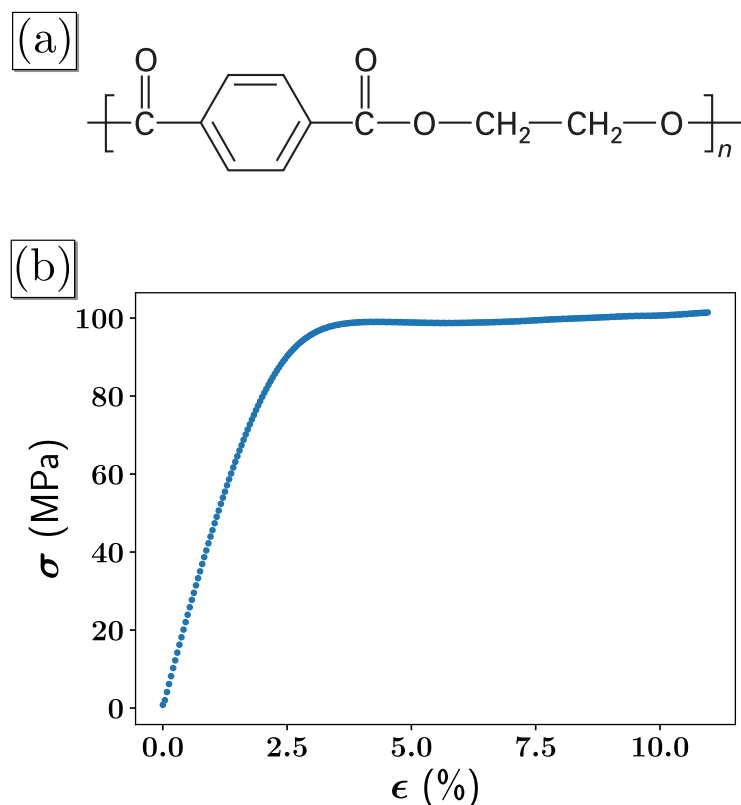


FIG. 2.3 (a) Structure du polytéréphtalate d'éthylène (PET) (extrait de [52]). (b) Réponse mécanique du mylar utilisé pour nos expériences.

Le matériau que nous avons utilisé pour nos plis est le mylar, nom de marque breveté par l'entreprise E. I. du Pont de Nemours & Co, raccourci à DuPont, pour nommer

les films en polytéréphtalate d'éthylène à orientation biaxiale (BoPET). Le BoPET est composé de polytéréphtalate d'éthylène (PET), polymère thermoplastique dont la structure moléculaire est détaillée en figure 2.3 (a). Ce polymère est très intéressant industriellement, car il est directement produit à partir du pétrole, et est facilement recyclable. Le PET est le matériau utilisé pour fabriquer des bouteilles de boissons en plastique ou des fibres textiles, mieux connues sous le nom de polyester. De plus, le PET dispose d'une bonne imperméabilité à l'oxygène [142], ce qui en fait un excellent matériau de conservation alimentaire.

Phases cristallines et amorphes

La composition du monomère du PET comprend deux atomes d'oxygène et un cycle aromatique. Ils favorisent la création de nombreuses liaisons pontales faibles (liaisons H, interactions dipôle-dipôle, etc...). Ainsi, le PET dispose d'une structure cristalline connue et documentée [48]. En ce qui concerne les régions amorphes, deux conformations sont possibles pour chaque monomère suivant l'orientation au niveau du pont éthyl (-CH₂-CH₂-). Nous avons bien un matériau avec les caractéristiques spécifiques d'un polymère semi-cristallin tel que nous l'avons décrit. La mesure de son taux de cristallinité donne des valeurs typiques de l'ordre de 0 à 60 % [80, 95, 17] en fonction de la méthode de fabrication.

L'orientation biaxiale est un processus utilisé pour de nombreux polymères [52] et dont l'objectif est de maximiser la rigidité du matériau (jusqu'à 5 fois) en augmentant le taux de cristallinité grâce à de fortes contraintes orientées à une température T telle que $T_v < T < T_f$. Pour le PET, $T_v \approx 80^\circ\text{C}$ [67] et $T_f \approx 250^\circ\text{C}$ [52]. Dans le chapitre I, nous avons employé un recuit à $80\text{-}100^\circ\text{C}$, donc au-dessus de la température de transition vitreuse.

Propriétés mécaniques

Dans la littérature, le BoPET a un module d'Young typique de 4 à 5 GPa [67, 207] et un coefficient de Poisson de 0.3 à 0.4 [159, 207], en accord avec ceux choisis ou obtenus pour le pli unique. Pour nous assurer que le comportement du mylar est bien thermoplastique, nous avons mesuré la réponse mécanique d'un échantillon rectangulaire de dimensions 100x10 mm pour une épaisseur de 350 μm , dont le résultat en contrainte σ et déformation ϵ est donné en figure 2.3 (b). Nous observons un comportement ductile avec une réponse quasi élastique pour de faibles déformations $\epsilon < \epsilon_s \approx 3\%$ et un réponse plastique au-delà. Le seuil de plasticité obtenu correspond à celui trouvé dans la littérature [21, 16] et est assimilé au début du glissement de chaînes de polymères à l'intérieur du matériau [16].

Aussi, nous constatons clairement que la simple description purement élastique n'est pas suffisante pour capturer l'ensemble des propriétés mécaniques du pli et des origamis en mylar. Génériquement, la modélisation de systèmes présentant des attributs solides et liquides se fait au travers de considérations viscoélastique que nous allons détailler.

2.2 Notions de viscoélasticité

Après le pliage d'une feuille mince plastique, l'angle au repos formé s'ouvre au cours du temps selon une loi logarithmique [73, 21, 188]. Ce comportement ne peut pas être le résultat de considérations purement élastiques et est une manifestation du caractère viscoélastique du matériau. Comprendre l'origine et les effets de ces propriétés viscoélastiques est primordiale pour la description complète de la réponse du pli. Ainsi, nous allons expliciter la notion de viscoélasticité pour les matériaux en se basant sur la riche littérature sur le sujet [162, 41, 87, 133, 168].

2.2.1 Modélisation phénoménologique

Génériquement, les matériaux disposent de deux réactions mécaniques à des stimulations externes, une réponse immédiate élastique et une réponse retardée visqueuse. Le type de réponse est un marqueur de la capacité du matériau à se souvenir de ses configurations passées. Prenons deux cas extrêmes, un solide purement élastique et un liquide visqueux. Si une contrainte initialement appliquée sur le solide est relâchée, tous les atomes composant ce dernier reviennent à une position originale. Ce n'est pas le cas pour un liquide, où la réorganisation des atomes permet de dissiper les perturbations.

Attention, ces observations sont relatives à l'intervalle de temps considéré. Sur une période géologique, les grands glaciers se comportent comme des fluides. Au contraire, avec un temps d'interaction faible, l'eau agit comme un solide. C'est pour cela que l'eau semble plus dure lorsque l'on plonge très rapidement dans une piscine. Ces deux exemples montrent l'importance de comparer le temps d'étude avec un temps caractéristique de relaxation τ correspondant au temps typique pour lequel le système oublie son histoire.

La quantification des observations expérimentales sur l'évolution temporelle de la réponse mécanique se base sur une théorie phénoménologique de viscoélasticité linéaire. En effet, baser la description à l'échelle macroscopique du matériau sur la description fondamentale des interactions entre les atomes est trop complexe. Le comportement phénoménologique permet d'outrepasser cette limitation et de prédire correctement la réaction du système à toutes les échelles de temps. De plus, nous verrons que sous certaines conditions, la théorie viscoélastique octroie un éclairage sur certaines caractéristiques.

téristiques microscopiques.

Modèles élémentaires

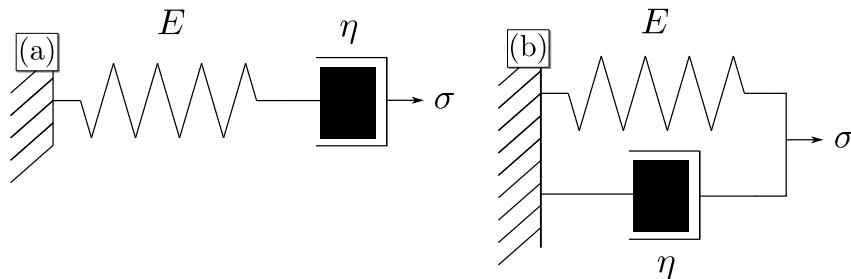


FIG. 2.4 (a) Modèle de Maxwell. (b) Modèle de Kelvin-Voigt.

Avant de considérer des modèles complexes pour nos systèmes polymériques de plis, commençons par des modèles simples unidimensionnels. Les modèles rhéologiques élémentaires à une dimension sont le ressort élastique idéal, qui joue le rôle de la réponse purement élastique, et l'amortisseur idéal, qui agit comme un liquide visqueux. Si nous définissons E comme la raideur élastique du ressort (correspondant au module d'Young de la mécanique hookéenne), son équation d'équilibre mécanique s'écrit

$$\sigma_r(t) = E\epsilon_r(t), \quad (2.1)$$

avec σ_r la contrainte exercée sur le ressort et ϵ_r la déformation du ressort. L'amortisseur quant à lui s'oppose au mouvement lors de la déformation. Il est défini par une viscosité η liée à sa réponse

$$\sigma_a(t) = \eta\dot{\epsilon}_a(t), \quad (2.2)$$

où le point représente la dérivée temporelle $\dot{\epsilon}_a = \frac{d\epsilon_a}{dt}$. Pour les deux éléments, la relation entre contrainte et déformation est linéaire.

Un système physique viscoélastique présente à la fois les propriétés de l'amortisseur, typique d'un fluide, et du ressort, typique d'un solide élastique. À partir de ces deux éléments, les systèmes les plus simples imaginables sont le modèle de Maxwell, qui met en série le ressort et l'amortisseur, et le modèle de Kelvin-Voigt, qui les met en parallèle (voir la figure 2.4). En premier, concentrons-nous sur le modèle de Maxwell. En série, la force s'appliquant sur les deux éléments est identique et la déformation totale est la somme des déformations de chaque élément $\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_a$. Nous en déduisons l'équation d'équilibre en utilisant les relations (2.1) et (2.2),

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma(t)}{E\tau} + \frac{\dot{\sigma}(t)}{E}. \quad (2.3)$$

avec $\tau = \frac{\eta}{E}$ le temps caractéristique de relaxation tel que décrit en introduction. Suivant le temps d'observation typique de l'expérience t_{obs} , nous identifions deux comportements asymptotiques. Pour $t_{obs} \ll \tau$, la viscosité n'a pas le temps de modifier la configuration du système et nous observons une réponse élastique. Au contraire, pour $t_{obs} \gg \tau$, la viscosité relaxe complètement les contraintes et nous observons une réponse de type liquide. Le comportement mécanique de ce système basique est bien viscoélastique avec un temps de relaxation τ crucial dans la prédiction de son comportement.

L'objectif de la modélisation est d'arriver à une représentation quantitative de la réponse expérimentale observée. Pour cela, nous partons de la solution générale de l'équation (2.3)

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^t G(t-t') \dot{\epsilon}(t') dt', \quad (2.4)$$

avec t_0 un temps pour lequel nous connaissons la valeur de la contrainte et

$$G(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (2.5)$$

le module de relaxation. La justification de la forme de la solution est détaillée dans le livre *Engineering Viscoelasticity* [87].

Le modèle de Kelvin-Voigt est une alternative au modèle de Maxwell pour lequel les éléments sont en parallèle. Jouissant du même nombre d'éléments, il dispose d'un degré de complexité identique. Pour des éléments en parallèle, la déformation est la même pour tous les éléments, et la contrainte totale est la somme des contraintes $\sigma = \sigma_a + \sigma_r$. De façon analogue au modèle de Maxwell, nous en déduisons l'équation d'évolution du système

$$\frac{\sigma(t)}{\eta} = \frac{\epsilon(t)}{\tau} + \dot{\epsilon}(t), \quad (2.6)$$

avec le même temps caractéristique de relaxation τ . Nous noterons que le passage de l'équation (2.3) à l'équation (2.6) s'effectue en opérant les transformations $\sigma \rightarrow E\epsilon$ et $\dot{\epsilon} \rightarrow \frac{\dot{\sigma}}{\eta}$. La solution de l'équation d'équilibre (2.6) est déduite de la solution pour le modèle de Maxwell (2.4) en utilisant les transformations précédentes

$$\epsilon(t) = \epsilon(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^t J(t-t') \frac{\sigma(t')}{\tau} dt', \quad (2.7)$$

avec $J(t)$ la complaisance au fluage définie par

$$J(t) = \frac{1}{E} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (2.8)$$

Nous concentrons notre description sur une étude temporelle du comportement mécanique. Cependant, il existe une autre approche viscoélastique se basant sur la variation

de comportement en fonction de la fréquence d'excitation externe. Dans cette approche, la transformée de Fourier du module $G(t)$ se sépare en une partie réelle G' , le module de conservation qui reflète la part de réponse purement élastique, et une partie imaginaire G'' , le module de perte qui traduit la dissipation énergétique par friction interne. Nous n'utiliserons pas ces notations puisque nous avons effectué nos expériences dans le domaine temporel et non fréquentiel.

Fluage et relaxation

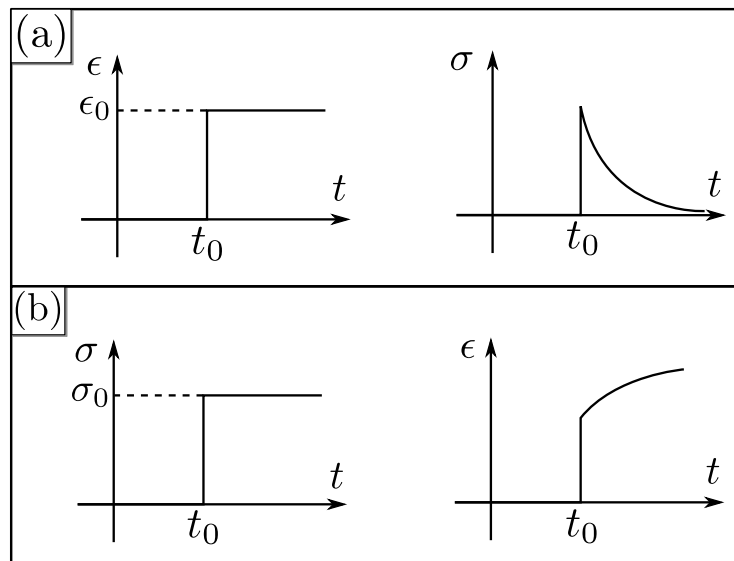


FIG. 2.5 Schématisation (a) d'une expérience de relaxation et (b) d'une expérience de fluage. Pour les deux expériences, la courbe de gauche représente les conditions imposées au système et la courbe de droite représente la réponse observée.

La linéarité des relations entre contraintes et déformations ainsi que les similitudes entre les deux modèles viscoélastiques présentés mettent en exergue la dualité entre contraintes et déformations. Si l'une est imposée, l'autre sera le résultat des propriétés mécaniques du système. Par conséquent, deux expériences typiques schématisées dans la figure 2.5 sont employées pour étudier la rhéologie viscoélastique d'un système, le fluage et la relaxation. Dans une expérience de fluage, la contrainte est imposée et maintenue pendant que l'évolution de la déformation est observée. Réciproquement, dans une expérience de relaxation, la déformation est imposée et l'évolution des contraintes est observée. Ces définitions sont générales à n'importe quel système. Les notions de contrainte et de déformation peuvent donc être macroscopiques et correspondre à des forces ou des conditions aux limites.

Les divergences entre les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt génèrent des réactions différentes aux expériences de fluages et de relaxation. Étudions plus précisément la réponse de chaque modèle à un fluage caractérisé par une sollicitation $\sigma(t) = H(t)\sigma_0$, avec $H(t)$ la fonction de Heaviside et σ_0 une valeur arbitraire positive de contrainte. Nous regarderons aussi le comportement du système lorsque nous relâ-

chons la contrainte pour $t = t_1$.

Commençons par le modèle de Kelvin-Voigt. La résolution de l'équation (2.6) donne l'évolution de la déformation pour $t > 0$

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right]. \quad (2.9)$$

La déformation augmente lentement suivant un temps caractéristique τ et tend vers une valeur asymptotique $\frac{\sigma_0}{E}$. Pour $t > t_1$, après que la contrainte soit relaxée, la déformation varie suivant

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(\frac{-t_1}{\tau}\right) \right] \exp\left(\frac{-(t - t_1)}{\tau}\right). \quad (2.10)$$

jusqu'à tendre vers la configuration initiale $\epsilon = 0$ aux temps longs. La déformation du matériau est réversible simplement en relâchant les contraintes.

Le modèle de Maxwell exhibe d'une tout autre réponse

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \frac{t}{\tau} \right]. \quad (2.11)$$

Après une réponse immédiate élastique en $t = 0$, la déformation augmente linéairement en fonction de t . Pour $t > t_1$, la déformation totale perd la composante élastique et le système a une nouvelle configuration au repos

$$\epsilon_0(t_1) = \frac{\sigma_0}{E} \frac{t_1}{\tau}. \quad (2.12)$$

Contrairement au modèle de Kelvin, ici l'annulation des contraintes ne rend pas au système sa configuration initiale. Cependant, nous pouvons utiliser des protocoles usant de contraintes négatives pour revenir à la valeur de déformation au repos. Cette observation illustre la difficulté pour définir la ligne entre viscoélasticité, où la réponse est réversible, et viscoplasticité, où la réponse est irréversible, à partir d'une approche purement phénoménologique sans tenir compte des causes physiques sous-jacentes. Pour simplifier, nous qualifierons de plastique tout comportement non élastique entraînant une modification de la configuration de référence au repos.

Généralisation des modèles

La sobriété des modèles proposés ne permet pas de capturer les subtilités observées expérimentalement. Une modélisation plus réaliste est le modèle généralisé de Maxwell. Il consiste à augmenter la complexité en considérant N modèles de Maxwell, avec différentes rigidités E_k et viscosités η_k , en parallèle. Chaque sous-élément génère un temps caractéristique de relaxation τ_k . Pour une expérience de relaxation, la linéarité du système permet de trouver une équation d'évolution similaire à celle obtenue pour le modèle de Maxwell 2.4. La seule différence est que le module de relaxation est

la somme discrète des relaxations exponentielles de chaque élément de Maxwell du système

$$G(t) = \sum_1^N E_k \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right). \quad (2.13)$$

Pour un matériau réel, le nombre N de temps caractéristiques est suffisamment grand pour étendre le modèle discret à un modèle continu. Le module de relaxation s'exprime alors comme

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} \quad (2.14)$$

avec $H(\tau)$ le spectre de relaxation continu pour le matériau étudié. Ce spectre correspond à la distribution de temps caractéristique de relaxation et leurs importance dans le système.

La modélisation phénoménologique généralisée réduit l'analyse de la viscoélasticité à la recherche des caractéristiques du spectre H . De plus, la relation entre spectre et temps caractéristiques est liée aux comportements structurels à l'échelle moléculaires. Prenons comme exemple le cas d'un polymère. La description que nous avons fournie de ces macromolécules donne plusieurs sortes de mobilités possibles pour les chaînes, par changement de conformation ou par démêlage de pelote dans des régions amorphes, pour ne citer qu'eux. Les différentes barrières énergétiques correspondantes indiquent la facilité à effectuer un type spécifique de mouvement et sont liées à des temps de relaxation plus ou moins longs. Trouver la forme de H renseigne sur le type de mouvement favorisé dans le système.

2.2.2 Relaxation de systèmes vitreux

Généralités

L'étude de l'évolution au cours du temps des systèmes vitreux montre que leur réponse à des stimuli externes suit un phénomène de relaxation lente couramment appelé vieillissement. Selon le type de système considéré, plusieurs comportements caractéristiques empiriques peuvent être distingués.

Lors de la compression dans un système granulaire agité [107], la réponse d'une boule d'aluminium froissé à un chargement [3, 44] ou encore la diminution de luminescence dans les silicones poreux [146], le changement du paramètre étudié suit une évolution en exponentielle étirée $\exp\left(-\frac{t}{\tau}^\beta\right)$, avec $0 < \beta < 1$, qui se nomme relaxation de Kohlrausch Williams et Watts [109, 199]. Plusieurs modèles ont été suggérés pour comprendre ce comportement [145, 53, 182, 103].

Cependant, le comportement qui nous intéresse le plus est celui observé pour de nombreux systèmes physiques de matières condensées comme la friction [20], le fluage

magnétique dans les semi-conducteurs [86], mais surtout régulièrement observé dans des systèmes de mylar et papier froissés sous plusieurs conditions expérimentales [134, 188, 127, 15, 60, 117, 31]. Pour ces systèmes, le vieillissement correspond à une évolution logarithmique $\log(1 + t/t_w)$ du paramètre d'ordre et plusieurs modèles théoriques ont été proposés pour expliquer ce comportement [30, 140, 53, 110, 6]. Il est important de noter qu'une évolution temporelle logarithmique est similaire à une évolution en exponentielle étirée pour une puissance β faible. Nous avons vu en introduction qu'une boule de mylar froissé est un système complexe composé entre autres de multiples pliures [81]. Nous souhaitons savoir si le comportement en relaxation de ce système est dû aux plis ou au matériau lui-même.

Evolution logarithmique

Le modèle proposé par Amir *et al.* [6] est intéressant, car il fournit une justification phénoménologique de l'évolution logarithmique centrée sur la distribution du spectre de relaxation continu (2.14). Nous allons le détailler dans le cadre d'un matériau polymérique.

Les systèmes vitreux activés comme les polymères thermoplastiques disposent de paysages énergétiques rugueux [54]. Pour passer d'une configuration d'équilibre à une autre, des barrières énergétiques doivent être traversées. La vitesse de passage λ d'une barrière énergétique U est donnée par la loi d'Arrhenius

$$\lambda \propto \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \quad (2.15)$$

Le temps typique de passage de la barrière énergétique τ étant l'inverse de la vitesse de passage, nous avons

$$\tau = 1/\lambda = \exp\left(\frac{U}{kT}\right) \quad (2.16)$$

Une hypothèse forte de ce modèle est de supposer que les barrières énergétiques sont distribuées équitablement dans toute une gamme d'énergie $P(U) \sim \text{cst}$. À partir de ce postulat, la distribution de temps de relaxation τ s'écrit

$$P(\tau) = \frac{P(U)}{d\tau/dU} \sim \frac{kT}{\tau} \quad (2.17)$$

Il est nécessaire de définir deux valeurs de temps limites $\tau_{min} < \tau < \tau_{max}$ avec $\tau_{min} \ll \tau_{max}$ pour rendre la distribution intégrable et prendre en compte suffisamment de mécanismes de relaxation différents. La distribution en $1/\tau$ n'est pas unique aux systèmes vitreux activés et joue un rôle crucial dans la relaxation du système.

En utilisant la distribution (2.17) dans le cas d'un modèle de Maxwell généralisé, où

la relation entre contraintes et déformations est donnée par l'équation (2.14), nous obtenons

$$\sigma(t) = \sigma_0 \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \frac{\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}{\tau} d\tau \quad (2.18)$$

avec σ_0 un préfacteur d'amplitude. Si nous considérons que le temps typique de l'expérience est loin des coupures ($\tau_{min} \ll t \ll \tau_{max}$), l'étude asymptotique, telle que $\tau_{min} \rightarrow 0$ et $\tau_{max} \rightarrow \infty$, transforme l'intégrale (2.18) en exponentielle intégrale. Par un développement au premier ordre, l'expression de la contrainte se réduit à une forme plus simple

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[-\gamma - \log\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (2.19)$$

qui présente une évolution logarithmique.

Relaxation du Mylar

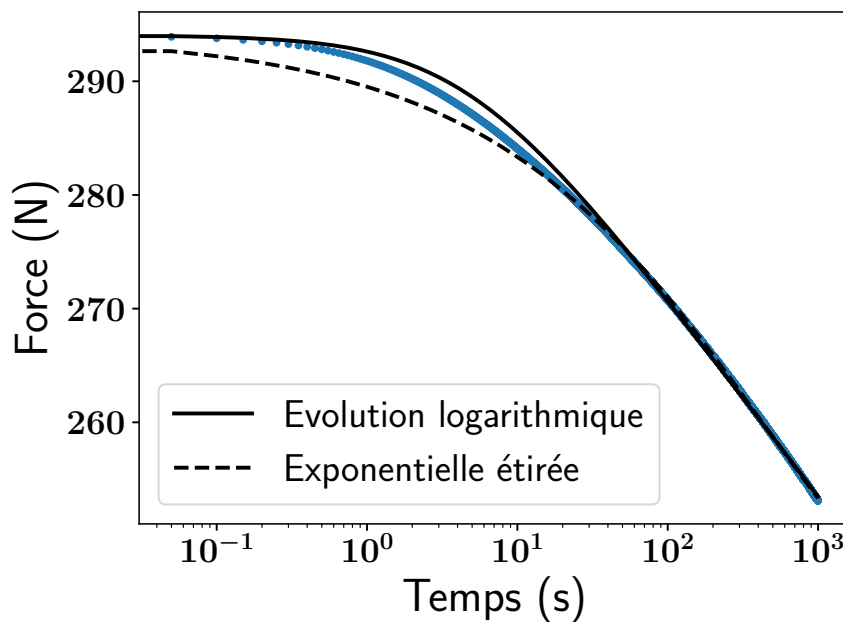


FIG. 2.6 Relaxation d'un échantillon rectangulaire de mylar de dimensions $100 \times 10 \times 0.35$ mm. Le trait noir représente une première tentative d'ajustement des données selon une loi logarithmique $F(t) = F(0)[1 - A \log(1 + t/\tau)]$, avec $A = 0.026$ et $\tau = 4.8$ s, tandis que le trait discontinu noir représente une seconde tentative selon une exponentielle étirée $F(t) = F(0)[1 - A(1 - \exp(-(t/\tau)^B))]$, avec $A = 0.18$, $B = 0.4$ et $\tau = 428$ s.

Avant d'étudier la relaxation du pli unique, nous avons effectué une expérience de relaxation sur un échantillon de mylar rectangulaire de dimensions 100×10 mm et d'épaisseur $350 \mu\text{m}$. Pour cela, nous avons chargé en tension l'échantillon jusqu'à

atteindre une force de 300 N, puis nous avons maintenu l'écartement entre les mors pendant 1000 secondes et enregistré l'évolution de la force correspondante (voir la figure 2.6).

Ni l'ajustement en exponentielle étirée ni l'ajustement en loi logarithmique ne donnent un résultat satisfaisant. La courbe de relaxation du matériau en étirement ne correspond pas à un comportement classique de relaxation lente pour les systèmes vitreux.

2.2.3 Changement de la métrique

Une grande limite de la démarche phénoménologique présentée ici est l'incapacité de décrire la réponse du système sans connaître son histoire complète. Une représentation intuitive des évolutions viscoélastiques sous stimulus externe est une modification de la configuration stable de référence pour se rapprocher de la configuration en déformation [93]. En effet, si le module élastique est conservé, l'unique moyen pour diminuer les contraintes est de diminuer l'écart entre la configuration en déformation et celle de référence. Si la déformation reste constante, alors celle de référence doit s'en rapprocher au court du temps.

Ainsi, dans le cas où le système dispose d'un état métastable, le changement de la configuration de référence peut s'accompagner de la perte du second état stable selon une instabilité viscoélastique [79, 190]. Une théorie récente de Urbach et Efrati [191] décrit la disparition de l'état métastable au moyen d'une redéfinition des déformations selon une nouvelle métrique de déformation g associée à une métrique de référence du système au repos \bar{g} . Pour $g = \bar{g}$, le système est au repos et donc libre. Dans les autres cas, le système est considéré dans un état d'équilibre quasi statique linéaire qui se lit

$$\sigma(t) = E(g(t) - \bar{g}(t)), \quad (2.20)$$

avec E la rigidité du système.

Contrairement aux considérations précédentes, l'évolution temporelle du système ne se fait plus sur le module de relaxation $G(t)$, mais sur les changements de l'état de référence, défini comme un paramètre interne au système. La déformation de l'amortisseur dans le cas du modèle de Maxwell en est un bon exemple. Dans cette configuration, nous pouvons transformer la réponse du système établie par l'équation (2.4) en considérant le paramètre interne ϵ_a ,

$$\sigma(t) = E(\epsilon(t) - \epsilon_a(t)). \quad (2.21)$$

Étudier l'évolution de la réponse revient alors à suivre l'évolution de ϵ_a .

Nous avons employé cette approche dans le cadre du pli unique, en considérant les paramètres internes locaux comme les paramètres caractéristiques de la configuration au repos : l'angle au repos Ψ_0 et la longueur caractéristique S_0 . Dans la prochaine

section, nous allons voir si nous pouvons appliquer les idées énoncées précédemment au suivi de l'évolution de la configuration de référence in situ en ne se basant que sur des observables macroscopiques, lorsque nous sortons du régime de réponse élastique.

2.3 Suivi in situ de l'angle au repos

2.3.1 Les effets non élastiques changent l'état de référence

Comme système d'étude, nous considérons toujours le modèle expérimental énoncé dans la description élastique, à savoir un pli unique symétrique encastré à une extrémité dans un mur rigide et fixé à l'autre extrémité à la jauge de chargement. Cela permet un contrôle uniaxial de la distance l entre les bords du pli tout en mesurant la force en réponse F_x , tel que schématisé dans la figure 1.6. Cependant, et contrairement au chapitre précédent, nous conservons un modèle idéal, pour lequel le pli est symétrique et $F_y = 0$. Nous simplifions donc la notation de l'unique force restante $F = F_x$.

En ce qui concerne la création du pli unique, nous procédons suivant le même protocole que pour l'analyse élastique, à l'exception du recuit que nous n'effectuons pas afin que la configuration initiale au repos soit un angle aigu et que la plasticité arrive rapidement lors de la déformation.

Paramètres caractéristiques de la déformation

La forme de référence d'un pli unique (1.48) est définie par deux valeurs, l'angle au repos Ψ_0 et la longueur caractéristique de la pliure S_0 . En se plaçant dans une configuration où les conditions aux limites d'encastrement sont rigoureusement respectées, nous avons vu dans la sous-section 1.5.3 que nous pouvons obtenir une courbe de force-déplacement en opérant un balayage du chargement adimensionné α . Le choix des valeurs extrémales de α n'est pas sans conséquences. En effet, pour des valeurs de α très négatives, c.-à-d. une pliure en forte compression, les formes de plis déformés ont des faces qui s'interpénètrent, ce qui est physiquement impossible. Pour l'éviter, nous définissons $\alpha^{(c)}$ comme le chargement correspondant à l'apparition d'un contact entre les faces et limitons notre analyse à $\alpha > \alpha^{(c)}$.

Pour un pli unique, nous avons établi l'ensemble P des paramètres suffisants pour définir une forme unique du pli déformé (voir l'équation (1.49)) avec une configuration au repos caractérisée par deux paramètres internes (s_0, Ψ_0). Si la réponse est purement élastique, ces paramètres restent inchangés tout au long de l'expérience. Ce n'est pas le cas pour l'étude qui nous intéresse, et nous devons les ajouter à l'ensemble P .

Pour un système idéal, le pli est symétrique ($\beta = 0, s_p = 0$) et encastré aux extrémités ($\theta(-1) = 0$). Ainsi, pour une déformation générale d'un pliage unique idéal,

l'ensemble des paramètres caractérisant la déformation est $P = (s_0, \Psi_0, \alpha, \theta'(-1))$. Deux conditions supplémentaires sont prescrites par l'expérience. Tout d'abord, nous avons la seconde contrainte d'encastrement $\theta(1) = 0$. Ensuite, nous avons la mesure de l'écartement normalisé ϵ_x que nous imposons entre les mors. L'obtention de deux paramètres de l'ensemble P suffit à déterminer la forme du pli, puisque les deux autres paramètres se récupèrent par l'optimisation en méthode du tir qui vérifie les deux conditions aux limites expérimentales. De ce fait, si nous connaissons une des deux caractéristiques de référence, s_0 ou Ψ_0 , il est possible d'obtenir la seconde expérimentalement à partir de la mesure de la force, et donc de la connaissance de α .

Influence de la taille de la pliure

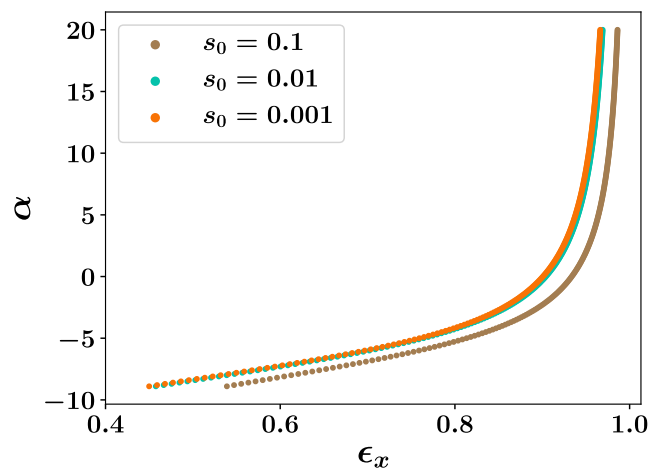


FIG. 2.7 Courbes de force-déplacement adimensionnées pour 3 ordres de grandeur différents pour la taille de pliure s_0 au même angle au repos $\Psi_0 = 90^\circ$.

Étudions un élément que nous n'avons pas encore abordé : l'influence des caractéristiques de la pliure sur la déformation, et plus précisément sur la courbe de force-déplacement, en commençant par la largeur de la pliure s_0 . Pour visualiser cet effet, nous avons calculé la courbe de force-déplacement à partir de résolutions numériques pour plusieurs valeurs de s_0 à Ψ_0 fixé. La résolution numérique nécessitant la condition initiale $\theta'(-1)$, nous l'utilisons comme paramètre d'ajustement d'une méthode de tir cherchant à vérifier la seconde condition d'encastrement $\theta(1) = 0$. Le résultat, montré en figure 2.7, nous amène à deux conclusions.

Tout d'abord, un changement de s_0 se traduit par une modification de la courbe de force-déplacement. Ce comportement est prévisible, puisqu'une modification de s_0 exprime aussi une transformation de la rigidité de la pliure (voir les équations (1.64) et (1.58)).

Néanmoins, nous remarquons une nette différence dans le changement de réponse lorsque nous passons de $s_0 = 0.1$ à $s_0 = 0.01$ d'un côté, et de $s_0 = 0.01$ à $s_0 = 0.001$ de l'autre. Si la pliure est petite devant la longueur caractéristique du pli ($s_0 \ll 1$), la réponse macroscopique du pliage ($\alpha = f(\epsilon_x)$) ne dépend pratiquement plus de la

largeur de la pliure. Ce comportement aussi est prévisible. Dans la limite asymptotique de petite pliure, celle-ci est traitée comme rigide. Donc, l'angle du pli déformé est, en première approximation, son angle au repos $\Psi \approx \Psi_0$. Il en résulte des conditions aux limites identiques pour les faces, et ce, quelle que soit la valeur de s_0 .

Cette dernière propriété est primordiale dans notre analyse du pli unique. Nous considérons des expériences pour lesquelles la largeur de la pliure reste petite devant la taille des faces, donc dans le régime asymptotique que nous venons de décrire. Par conséquent, s_0 n'aura qu'un impact mineur sur la déformation et nous négligerons sa potentielle modification par des effets plastiques. Avec cette approximation, les données expérimentales sont suffisantes pour trouver l'angle au repos du pli in situ.

2.3.2 Cartographie de l'espace force-déformation

Carte de l'espace force-déformation

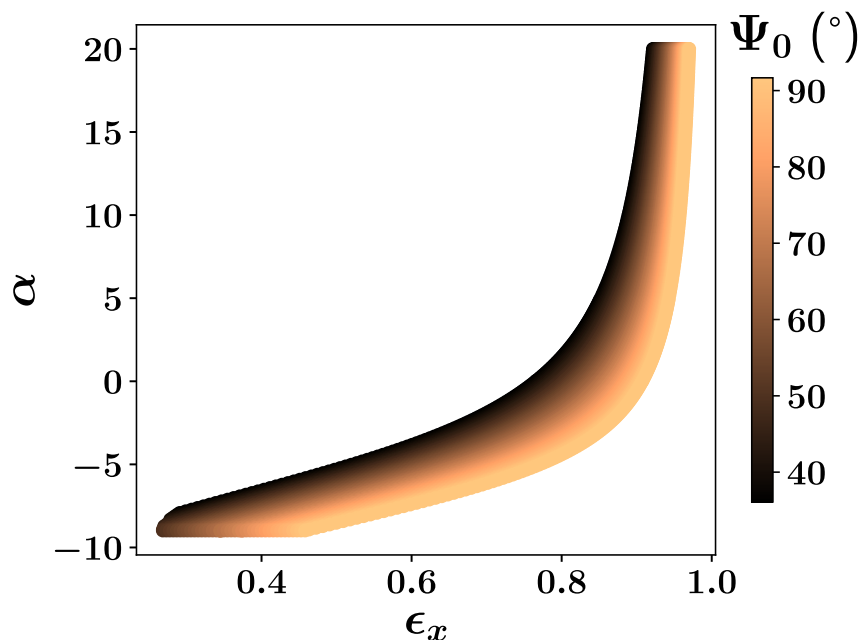


FIG. 2.8 Cartographie de l'espace de force-déplacement pour des plis de taille $s_0 = 9.2 \times 10^{-3}$ et d'angle au repos Ψ_0 de 36° à 92° .

Pour obtenir l'angle au repos, deux méthodes existent.

La première consiste à étendre la méthode de tir que nous avons décrite précédemment en ajoutant un paramètre d'ajustement, Ψ_0 , et une autre condition à vérifier, la distance entre les extrémités ϵ_x .

La seconde méthode consiste à cartographier à priori l'espace de force-déplacement pour de nombreuses valeurs de Ψ_0 et, par la suite, d'interpoler les données expérimentales pour qu'elles correspondent à une valeur de Ψ_0 . Une unique carte peut être utilisée pour plusieurs pliures différentes, tant que la taille de la pliure est négligeable devant celle des faces.

Pour la créer, nous commençons par fixer une valeur de s_0 . Ici, s_0 est celui recueilli expérimentalement à partir de la forme au repos. Une fois la largeur de la pliure choisie, nous effectuons un double balayage en chargement α et en angle au repos Ψ_0 . Nous obtenons ainsi une surface des configurations possibles dans l'espace $(\Psi_0, \alpha, \epsilon_x)$ satisfaisant la condition d'encastrement. Sa projection dans l'espace de force-déplacement en figure 2.8 montre qu'un couple de données (α, ϵ_x) ne peut être lié qu'à une unique solution, et donc un unique Ψ_0 .

Conséquences sur le moment de la pliure

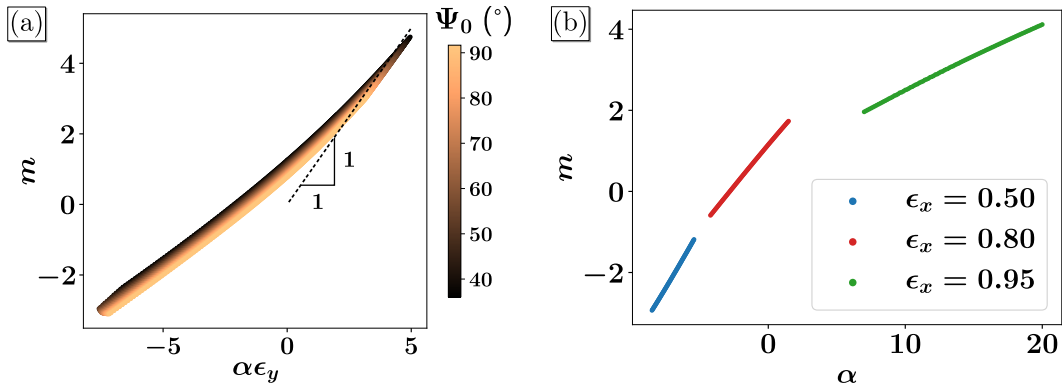


Fig. 2.9 (a) Cartographie du moment normalisé de la pliure en fonction du moment macroscopique imposé au pli. Pour de forts étirements, les deux moments sont similaires ($m \approx \alpha\epsilon_y$). (b) Moment normalisé $m(\alpha)$ pour différentes déformations ϵ_x . Toutes les données concernent un pli avec une taille de pliure $s_0 = 9.2 \times 10^{-3}$ et un angle au repos Ψ_0 variant de 36° à 92° .

La résolution numérique donne accès aux déformations locales du pliage, et plus particulièrement à celle de la pliure. Dans le cas d'un système purement élastique, le moment normalisé en réponse à une déformation angulaire est

$$m = \Delta\theta'(s_c), \quad (2.22)$$

avec $s_c = S_c/L$. Nous extrayons cette information des solutions générées pour notre carte et nous comparons m au moment macroscopique, défini comme le chargement multiplié par la hauteur du pli $\alpha\epsilon_x$ [124], dans la figure 2.9 (a). Le moment macroscopique est initialement choisi pour lier les contraintes locales de la pliure aux données expérimentales. Notre modèle du pli élastique étendu fournit ces données locales à partir d'observables identiques sans le besoin d'opérer à des approximations asymptotiques et en prenant en compte les conditions aux bords. La différence entre les deux approches est particulièrement visible pour des chargements faibles ou négatifs.

Un autre comportement notable qui sort de la carte est la relation quasi affine entre le moment de la pliure et le chargement pour un déplacement ϵ_x constant (voir la figure 2.9 (b)). Dans la section 2.4, nous observerons la relaxation de la force F pour un écartement l macroscopique imposé et constant. La relation affine entre moment et chargement permet de limiter notre étude à F tout en étendant les observations et

conclusions à la réponse de la pliure.

La carte de configurations est un outil puissant prédisant l'état de référence de la pliure à n'importe quel instant à partir des observables macroscopiques l et F dans l'hypothèse d'équilibre élastique quasi statique. Pour vérifier cela, nous allons confronter la prédiction de Ψ_0 avec l'expérience.

2.3.3 Prédiction de l'évolution de l'angle au repos

Protocole expérimental

Le pli unique que nous étudions est formé à partir d'une feuille rectangulaire en mylar de dimensions 159×30 mm et d'épaisseur $500 \mu\text{m}$. Ce mylar est plus épais que celui utilisé dans la partie élastique pour augmenter la valeur des forces mesurées d'un ordre de grandeur.

La préparation du pli n'a plus pour objectif de maximiser la région de déformation élastique. En conséquence, nous modifions le protocole de création du pli. Après avoir manuellement plié l'échantillon, nous le plaçons sous un poids de 20 kg pendant 30 minutes. Puis, nous le laissons relaxer librement pendant 10 minutes. Avant le test, nous récupérons de la forme au repos la largeur de pliure initiale S_0^{init} ainsi que l'angle au repos initial Ψ_0^{init} correspondant.

Pour l'expérience, nous définissons deux protocoles différents. Dans le premier (Protocole A), nous attachons le pli dans une configuration comprimée ($F < 0$) et nous l'étirons à une vitesse de $50 \text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$ jusqu'à atteindre une valeur de force cible. Nous choisissons empiriquement 4 N pour objectif, bien au-delà du seuil plastique. À la fin de l'extension, le pli est détaché et nous prenons immédiatement une photo de sa configuration au repos, dont nous extrayons l'angle au repos final Ψ_0^{final} et la largeur finale S_0^{final} . Le second protocole (Protocole B) est pratiquement identique au premier, à l'exception d'une dernière étape de compression jusqu'à une valeur de force négative $F = -1.5 \text{ N}$ avant de détacher le pli et de mesurer, cette fois encore, les paramètres de référence.

Les tailles de pliure que nous avons récupérées sont $s_0^{init} \approx 9.2 \times 10^{-3}$ ainsi que $s_0^{final} \approx 1.1 \times 10^{-2}$. Ce sont des longueurs proches appartenant au régime asymptotique $s_0 \ll 1$. Dès lors, nous considérons que la largeur de la pliure est constante durant toute l'expérience $s_0 \approx \times 10^{-2}$ et que les modifications irréversibles de la référence concernent uniquement la valeur de l'angle au repos.

Récupération du module de flexion in situ

La comparaison entre les données expérimentales et les données extraites des résolutions numériques requiert le dimensionnement de ces dernières, et donc la connais-

sance des paramètres élastiques du matériau, en particulier le module de flexion B . Pour l'obtenir, nous utilisons le début de l'expérience jusqu'à la fin de la compression ($F < 0$), où le pli est encore dans le domaine élastique. Dans ce régime, la configuration de référence ne change pas et l'angle au repos reste constant égal à sa valeur initiale Ψ_0^{init} . Connaissant les dimensions du pliage, le facteur d'adimensionnement de la force, qui doit être $\frac{BW}{L^2}$ pour un pli élastique et qui est nécessaire pour ajuster les données expérimentales aux résultats numériques, renseigne sur la valeur de B . Nous en déduisons la valeur de la rigidité à la flexion $B = 44.2$ mJ, correspondant à un module d'Young $E = 3.5$ GPa, raisonnable pour du mylar.

Cette méthode d'obtention de B s'ajoute à la longue liste de méthodes utilisées pour obtenir la rigidité de flexion de plaques minces [148], mais possède l'avantage de pouvoir s'effectuer pendant l'expérience après un éventuel recuit du pli qui peut changer le module élastique du matériau. Cependant, elle exige de connaître, à priori, l'angle au repos et la largeur de la pliure, et repose sur les mesures précises de la longueur L et de la largeur W du pli. Bien que cette méthode ne soit pas la plus efficace, elle a l'avantage de ne pas inclure de phénomène de friction, et permet d'utiliser une plus grande variété de forces.

Interpolation grâce à la carte de force déformation

Nous supposons que, pendant toute l'expérience, le pli demeure, à tout instant, dans un état d'équilibre élastique quasi statique. La forme déformée du pli suit donc toujours l'équation d'élastica avec précontraintes (1.36). De plus, nous avons déterminé que la plasticité du matériau ne modifie significativement que l'angle au repos. En couplant ces restrictions à la carte de configuration en force-déplacement que nous avons établie (voir la figure 2.8), nous interpolons l'angle au repos $\Psi_0(t)$ ainsi que l'angle déformé $\Psi(t)$ à chaque point de l'expérience ($F(t), l(t)$). Les résultats pour chaque protocole sont affichés en figure 2.10

Pour les deux expériences, nous pouvons séparer l'évolution de Ψ_0 en deux parties (voir les colonnes de droite de la figure 2.10). Au début de l'expérience, les déformations sont faibles, la réponse est purement élastique et Ψ_0 reste constant. Cela nous a permis de récupérer le module de flexion B . Au-delà d'un certain point, lorsque les contraintes deviennent trop importantes, le pliage se plastifie au niveau de la pliure. Ce comportement se traduit par une augmentation de Ψ_0 lors de l'étirement.

Pour le protocole A, l'angle au repos final mesuré est notablement plus fermé que celui prédit par l'interpolation. Nous estimons que plusieurs raisons peuvent conduire à un tel comportement. Tout d'abord, le caractère viscoélastique du matériau ajouté aux fortes contraintes sur le pli induit un fluage du système pendant le court intervalle entre le moment où nous détachons le pli et celui où nous prenons la photo de sa forme au repos. Ensuite, la région de large extension est bien plus sensible aux erreurs de mesure de la longueur totale du pli, ou de l'étalonnage de la distance entre les mors.

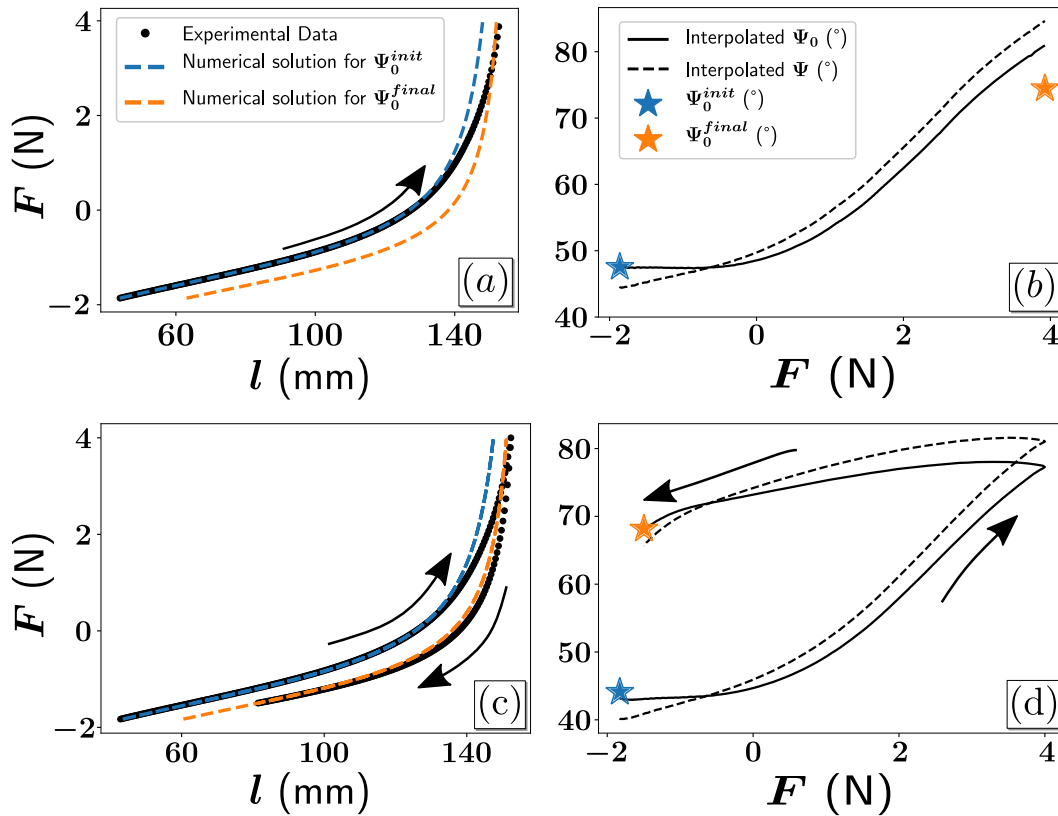


FIG. 2.10 Réponse mécanique d'un pli unique selon deux protocoles expérimentaux différents (voir texte). Les figures (a) et (b) (resp. (c) et (d)) montrent les résultats du protocole A (resp. B). Les flèches suivent la chronologie du chargement. Les légendes sont identiques pour les deux lignes. Dans les figures (a) et (c), les points noirs correspondent aux données expérimentales et les lignes discontinues aux solutions numériques élastiques pour les deux valeurs d'angle au repos Ψ_0^{init} et Ψ_0^{final} qui sont les mesures respectivement avant et après l'expérience. Les figures (b) et (d) montrent l'évolution de l'angle au repos Ψ_0 et l'angle en déformation Ψ de la pliure, tous les deux interpolés durant tout le test mécanique.

Enfin, la concentration des contraintes peut affaiblir localement la rigidité au niveau de la pliure. La force nécessaire pour la déformation est alors plus faible que celle attendue.

Le protocole B résout ces difficultés en revenant dans un régime en compression après l'étirement. L'angle au repos final mesuré Ψ_0^{final} est dès lors en accord avec la prédiction par interpolation.

Pour conclure, nous avons décrit une méthode qui permet, à partir de valeurs observables macroscopiques F et l , de trouver la forme de déformation du pliage sous contraintes externes, tout en renseignant sur les paramètres intrinsèques du pli, à savoir le module de flexion B et l'angle au repos Ψ_0 . Cela n'est possible qu'en considérant les modifications plastiques comme des changements de la configuration de référence, spécifiquement de Ψ_0 , tout en conservant les propriétés élastiques du matériau.

Seuil de plasticité

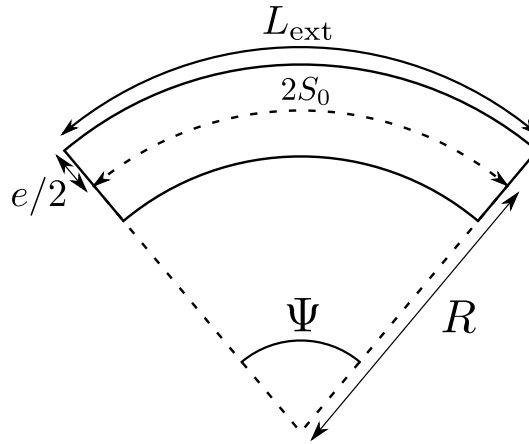


FIG. 2.11 Modèle géométrique en arc de cercle d'une pliure de longueur caractéristique S_0 et d'épaisseur e dans une configuration d'angle d'ouverture Ψ correspondant à un rayon R .

À partir des deux expériences précédentes, nous pouvons établir le seuil de plasticité pour lequel l'angle au repos commence à changer. Les déformations plastiques débutent le long des surfaces libres du pli, puisque ce sont les régions pour lesquelles les contraintes sont les plus importantes [21]. Afin de mesurer ces contraintes quantitativement, envisageons un modèle géométrique pour lequel la pliure est une section de cercle, tel que schématisé dans la figure 2.11, associé à un rayon au repos R_0 . Définissons R comme le nouveau rayon de la pliure en déformation et supposons que la déformation du plan moyen de longueur $2S_0$ est isométrique. Ce modèle vérifie l'équation de déformation de la pliure (1.55). La déformation isométrique du plan moyen et la géométrie du système imposent

$$2S_0 = \Psi R = \Psi_0 R_0. \quad (2.23)$$

avec Ψ_0 l'angle au repos.

Intéressons-nous maintenant à la déformation de la surface libre étirée. Sa longueur en déformation L_{ext} et au repos $L_{\text{ext},0}$ sont déterminées par les paramètres du système

$$L_{\text{ext},0} = \Psi_0 \left(R_0 + \frac{e}{2} \right), \quad (2.24)$$

$$L_{\text{ext}} = \Psi \left(R + \frac{e}{2} \right). \quad (2.25)$$

La déformation relative ϵ de cette surface est

$$\epsilon = \frac{L_{\text{ext}} - L_{\text{ext},0}}{L_{\text{ext},0}}. \quad (2.26)$$

En utilisant les relations géométriques établies, nous obtenons

$$\epsilon = \frac{\Psi - \Psi_0}{4\frac{S_0}{e} + \Psi_0}. \quad (2.27)$$

En prenant une valeur typique de la largeur de la pliure $S_0 = 3e$ [21], nous obtenons environ $\epsilon \approx \frac{\Psi - \Psi_0}{13}$. Dans notre expérience, nous voyons que les effets plastiques apparaissent aux alentours de $\Psi - \Psi_0 \approx 3^\circ$, ce qui correspond à une contrainte seuil $\epsilon_s \approx 0.4\%$. Ce seuil est significativement plus faible que celui observé pour le matériau seul d'environ 3% (voir la figure 2.3 (a)). Nous estimons que cette différence provient des contraintes internes résiduelles résultant de la formation de la pliure en l'absence de recuit [55].

Un dernier comportement que nous allons commenter est celui observé lors de la compression finale du protocole B. En principe, en retournant à des contraintes faibles, le système devrait revenir à un régime élastique. Or, nous remarquons que l'angle au repos continue d'évoluer. Ce comportement est dû à la viscoélasticité du matériau qui entraîne une certaine inertie dans la variation du système. Pour quantifier cela, nous allons présenter une étude de l'évolution temporelle de la réponse mécanique du pli.

2.4 Relaxation d'un pli unique

En ce qui concerne l'étude viscoélastique du pli unique, seules deux expériences de fluage après formation de la pliure ont été effectuées à notre connaissance [188, 73]. Les deux montrent une évolution en loi logarithmique pour la valeur de l'angle au repos jusqu'à 24 heures après la formation du pli. Dans ces deux articles, le pli est préparé en appliquant une force constante pendant un temps défini avant l'expérience.

2.4.1 Préparation du pli pour la relaxation

Dans le cadre de l'étude viscoélastique d'un système, il existe deux archétypes de tests mécaniques, le fluage et la relaxation. Pour le premier, les contraintes sont constantes pendant l'expérience et l'évolution temporelle des déformations est mesurée. Ce fut l'option choisie pour analyser les changements au cours du temps d'une pliure au repos [188, 73]. Cependant, notre appareil de traction ne dispose pas d'algorithme de rétroaction pour maintenir une force stable. En conséquence, nous jetons notre dévolu sur l'expérience de relaxation. L'instrumentation permet de garder aisément une distance entre les mors l et de mesurer l'évolution temporelle de F .

Un des éléments essentiels d'une expérience en physique est la reproductibilité des résultats. Or, la réponse mécanique d'un matériau viscoélastique dépend de son histoire et de l'échantillon. Il est donc capital de choisir un protocole de préparation de la pliure fiable pour que les relaxations se fassent pour des configurations identiques.

En s'inspirant de Farain [73], le pli est placé entre chaque expérience sous un poids de 15 kg pendant 30 minutes. L'objectif est de réinitialiser l'histoire du pli et de le mettre dans un état initial connu. Après cette étape, nous laissons le pli fluer au repos pendant 10 minutes pour diminuer l'évolution temporelle aux temps courts.

2.4.2 Dynamique de relaxation du pli unique

Protocole de relaxation

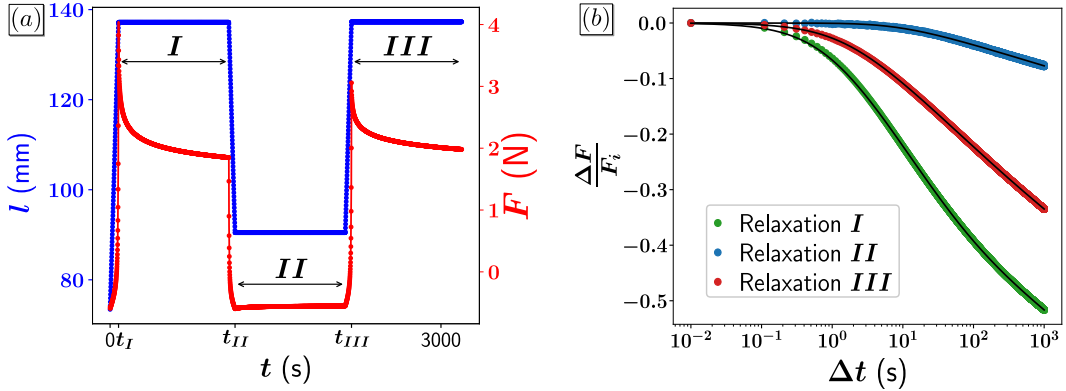


FIG. 2.12 (a) Protocole expérimental pour l'étude de la relaxation d'un pli unique : le déplacement $l(t)$ est imposé pendant que la réponse $F_x(t)$ est mesurée. Le protocole choisi est divisé en trois phases de relaxation commençant à $t = t_i$ pour des forces appliquées F_i ($i = I, II, III$). Chaque relaxation se poursuit pendant 1000 s. (b) Données brutes de la force $F(t)$ durant les trois phases de relaxation ajustées par le comportement en double logarithme donné par l'équation (2.28). Ici, $\Delta t = t - t_i$ et $\Delta F = F(t) - F_i$.

Notre protocole expérimental typique se divise en trois phases de relaxation I , II et III (voir la figure 2.12). Chaque phase suit la même séquence : nous modifions la longueur $l(t)$ entre les extrémités jusqu'à atteindre une force seuil F_i à un temps t_i dans la phase i . À cet instant, la partie mobile est arrêtée et maintenue pendant que nous mesurons l'évolution de la force $F(t)$. Puis nous passons à la phase suivante.

La force limite prescrite pour chacune deux premières phases est identique pour toutes les expériences. Ce choix présente une double utilité : vérifier la reproductibilité des résultats et préparer le pli dans le même état avant la troisième relaxation.

Habituellement pour les systèmes en mylar, nous avons constaté que la relaxation du système est capturée par une dépendance logarithmique des contraintes en fonction du temps [134, 117, 31]. Toutefois, ce schéma ne permet pas de saisir la complexité observée dans notre expérience. Dans ce but, les courbes de force-déplacement sont ajustées par une fonction double logarithmique

$$\frac{\Delta F}{F_i} = A_1 \log \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_1} \right) + A_2 \log \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_2} \right), \quad (2.28)$$

pour laquelle $\Delta t = t - t_i$ et $\Delta F = F(t) - F_i$, avec $F_i = F(t_i)$. L'équation (2.28) inclut deux amplitudes de relaxation A_1 et A_2 , ainsi que deux temps caractéristiques dont

l'ordre $\tau_1 < \tau_2$ est choisi. Les données en figure 2.12 montrent que la fonction (2.28) donne une bonne description de toutes les phases de relaxation.

Dans un premier temps, nous avons effectué 10 expériences pour lesquelles le seul paramètre modifié est la valeur de F_{III} . Les deux autres forces extrémales sont fixées à $F_I = 4$ N et $F_{II} = -0.6$ N. La vitesse de translation de la section mobile de l'appareil de traction entre les phases est de 50 mm/min⁻¹. Pour ces expériences, nous trouvons dans la phase *I*, $A_1 = -0.091 \pm 0.002$, $A_2 = 0.048 \pm 0.002$, $\tau_1 = 0.9 \pm 0.07$ s et $\tau_2 = 83 \pm 9$ s. Les marges d'erreur correspondent à l'écart-type obtenu pour chaque paramètre. Dans la phase *II*, le signal mesuré suit une décroissance en simple logarithme, avec $A_1 = -0.016 \pm 7 \cdot 10^{-4}$, $A_2 = 0$ et $\tau_1 = 4.4 \pm 1.6$ s.

Les deux temps caractéristiques ne sont logiquement pas du même ordre de grandeur avec $\tau_1 \ll \tau_2$. Dans le cas contraire, la fonction trouvée se compare facilement à un simple logarithme. Phénoménologiquement, le premier terme de la loi double logarithmique (2.28) traduit le comportement à court terme pendant que le second terme donne les corrections à temps long. τ_1 est de l'ordre de la seconde, similaire au temps nécessaire pour augmenter la force jusqu'à F_i et détermine ainsi l'inertie du système. Nous remarquons que les paramètres d'ajustement pour les phases *I* et *II* restent consistants pour toutes les expériences. À l'issue de ces deux étapes nous obtenons un pli reproductible disposant d'une histoire identique à court terme et préparé dans une configuration en compression. Par ailleurs, comme nous avons utilisé le même pli pour toutes ces expériences, la réinitialisation de la configuration avant l'expérience pour limiter l'impact de la mémoire à long terme est un succès.

Influence des contraintes

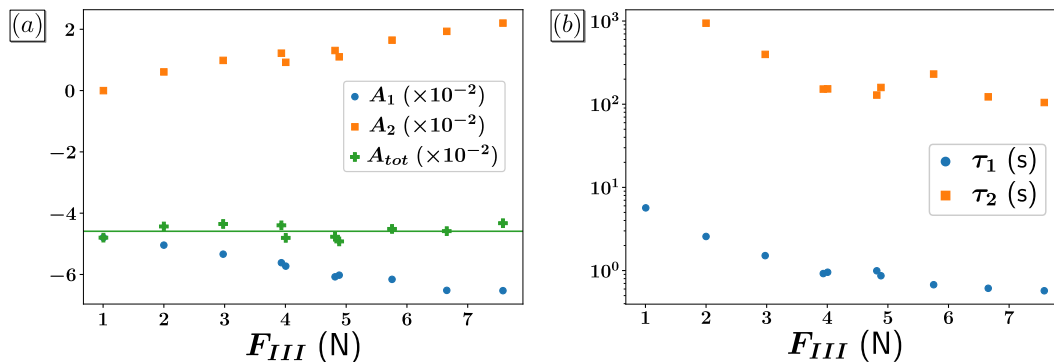


FIG. 2.13 Effet de la force extrême F_{III} sur les paramètres d'ajustement du double logarithme en phase *III* pour différentes expériences avec le même pli de dimensions $150 \times 20 \times 0.35$ mm. (a) Évolution des amplitudes de relaxation A_1 , A_2 et de leur somme $A_{tot} = A_1 + A_2$ en fonction de F_{III} . La ligne verte indique la valeur moyenne $A_{tot} = -0.046$. (b) Évolution des temps caractéristiques τ_1 et τ_2 en fonction de F_{III} .

Les variations entre les expériences apparaissent à la phase *III* pour laquelle nous changeons la force limite au début de la relaxation F_{III} . Nous observons son effet sur la réaction du pli dans la figure 2.13.

La variation des contraintes modifie le comportement de la force pendant la relaxation. Lorsque nous augmentons F_{III} , les temps caractéristiques τ_1 et τ_2 diminuent. Pour les amplitudes de relaxation, nous remarquons que les valeurs absolues de A_1 et A_2 augmentent avec F_{III} . Nous rappelons au lecteur que ces amplitudes sont adimensionnées par la force initiale. À long terme, l'amplitude de relaxation $A_{tot} = A_1 + A_2$ reste toujours autour d'une valeur moyenne $A_{tot}^- = -0.046$.

Donc, l'augmentation des contraintes lors de la relaxation du pli unique réduit l'inertie des comportements visqueux et accélère la relaxation à court terme.

Influence de la température

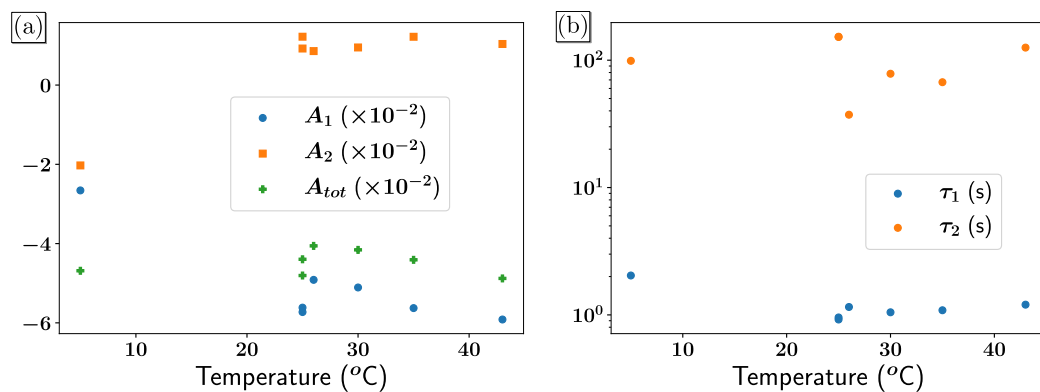


FIG. 2.14 Effet de la température sur les paramètres d'ajustement du double logarithme pour la relaxation en phase III. (a) Évolution des amplitudes de relaxation A_1 , A_2 et de leur somme $A_{tot} = A_1 + A_2$ en fonction de la température. (b) Évolution des temps caractéristiques τ_1 et τ_2 en fonction de la température.

Le mylar étant un polymère thermoplastique activé, la température devrait jouer un rôle important dans la relaxation d'une pliure. Pour vérifier cela, nous avons effectué plusieurs expériences de relaxation à des températures différentes.

La machine de traction peut être équipée d'un bain avec un contrôle basique de la température par un thermocouple placé environ à la moitié de la hauteur du bain et un chauffage par en dessous. Le capteur et le chauffage sont reliés à un boîtier disposant d'un algorithme de rétroaction intégré permettant de chauffer par intermittence de telle sorte que la température mesurée par le capteur soit une température cible. Ce système, normalement utilisé pour des échantillons biologiques, permet de définir une température de bain entre la température ambiante et 40°C .

Pour nos expériences, nous avons rempli le bain d'eau et choisi une température d'expérience. Les contributions de la poussée d'Archimède sur le mors amovible et le pli sont prises en compte en effectuant la mise à zéro du capteur de force après avoir attaché le pli sur la partie mobile et plongé le tout dans le bain. Nous avons aussi rajouté un point de température à 5°C , mesuré par un thermomètre externe, en remplissant le bain d'eau froide et de glaçons.

Nous avons utilisé le même protocole que précédemment pour l'étude de l'influence

des contraintes, mais sans changer la dernière phase de relaxation avec $F_{III} = 4$ N. Les amplitudes et temps caractéristiques obtenus sont montrés en figure 2.14. Une première observation des données expérimentales brutes montre que plus la température est élevée, plus il faut étirer le pli avant d'atteindre la même valeur de force. La rigidité du matériau diminue quand la température augmente. En ce qui concerne la relaxation de la phase III, les temps caractéristiques ne dépendent pas de la température alors que, au contraire, A_1 et A_2 croissent avec la température. A_{tot} reste toujours aux alentours de la valeur moyenne \bar{A}_{tot} établie précédemment. Malheureusement, le faible nombre de points expérimentaux et le faible éventail de températures que nous pouvons atteindre, loin de la température de transition vitreuse T_v , ne permettent pas d'établir des conclusions définitives. Toutefois, la lenteur de la relaxation à court terme pour de basses températures laisse à penser que la diminution de température ralentit la vitesse des changements microscopiques responsables de l'évolution lente du système.

Caractéristiques générales de la relaxation

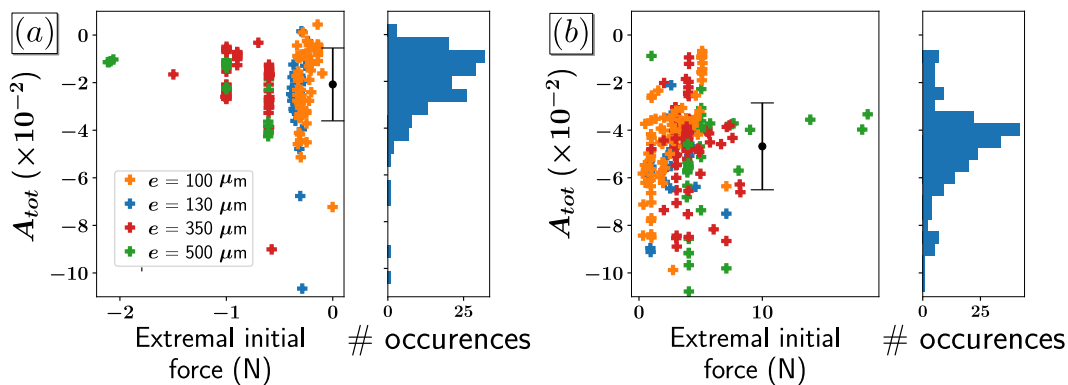


FIG. 2.15 Effets des conditions expérimentales sur le taux de relaxation A_{tot} pour des forces initiales (a) négatives et (b) positives. Tous les points des colonnes de gauche sont associés à différentes conditions expérimentales (voir texte). Les données ont été triées par force extrême au début de la relaxation et les couleurs correspondent à différentes épaisseurs e de mylar. La moyenne et la déviation standard de l'ensemble des points de chaque figure sont indiquées en noir. La colonne de droite de chaque figure montre l'histogramme de A_{tot} .

Un élément ressortissant de nos deux analyses précédentes est que l'amplitude A_{tot} est identique pour plusieurs paramètres de relaxation. De plus, cette valeur est proche de celle trouvée pour la relaxation de la phase I du protocole. Il semble donc y avoir une forme d'universalité pour l'amplitude de relaxation.

Au-delà des résultats présentés jusqu'ici, nous avons effectué, durant nos explorations expérimentales, 405 relaxations pour différentes préparations de plis, températures, temps de relaxation, méthodes de création de pliure et dimensions du pliage. Les amplitudes de relaxation A_{tot} pour toutes ces expériences sont regroupées en figure 2.15. Comme le comportement viscoélastique dépend de l'histoire du pli, nous trouvons des disparités entre les amplitudes recueillies. Toutefois, deux tendances générales

apparaissent suivant que le pli soit en compression ou tension. Dans le premier cas, nous avons $A_{tot} = -0.021 \pm 0.015$ et dans le second $A_{tot} = -0.047 \pm 0.018$. Ces valeurs sont similaires à celles obtenues pour la relaxation de mylar froissé [15, 117, 31].

2.4.3 Relaxation non-monotone

L'effet Kovacs

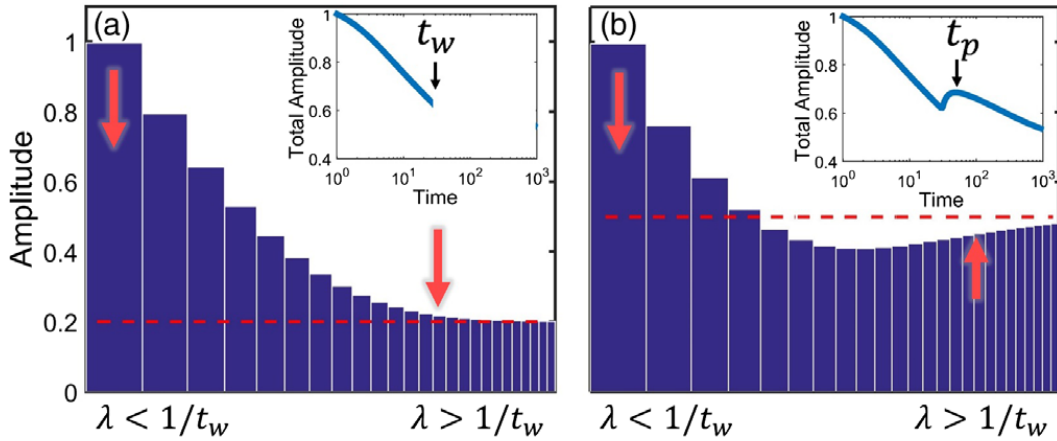


FIG. 2.16 Modèle phénoménologique de relaxation non monotone (extrait de [117]). L'amplitude instantanée des modes de relaxation est indiquée pour (a) $t = t_w$ et (b) $t = t_p$. L'amplitude relative suit l'abondance des différents modes pour une distribution de vitesse de relaxation exponentielle $P(\lambda) \propto 1/\lambda$. En encart se trouve l'évolution temporelle de l'amplitude totale sommée sur tous les modes.

La distribution de temps de relaxation selon le spectre H , que nous avons présentée comme modélisation des comportements viscoélastiques dans l'équation (2.14), conduit à des réponses spectaculaires pour des protocoles expérimentaux plus complexes.

Ainsi, une observable du système étudié peut suivre une variation lente non monotone selon un effet de mémoire non trivial. Ce phénomène fut observé en premier par Kovacs [111] lors de l'évolution temporelle du volume spécifique de l'acétate polyvinyle. Plus généralement, ce comportement a été constaté pour divers systèmes vitreux comme les verres colloïdaux [19], les systèmes granulaires [104] ou dans les aimants superparamagnétiques et les verres de superspin [170]. Il est aussi à l'origine de nombreux modèles théoriques [22, 27, 61].

Plus récemment, l'effet Kovacs a été observé dans différents matériaux froissés [117, 31], incluant le mylar, et dans la friction entre interfaces [62]. Pour en comprendre l'origine, intéressons-nous au protocole utilisé par Lahini et al [117].

Une boule de mylar est initialement préparée entre deux plaques de l'appareil de test distantes de H_1 . Au début de l'expérience, cette distance est diminuée à une longueur $H_2 < H_1$ et conservée pendant un temps t_w . Ensuite, l'écart entre les plaques est

légèrement augmenté à H_3 tel que $H_2 < H_3 < H_1$ et est maintenu durant le reste de l'expérience. L'évolution de la force mesurée durant cette dernière étape est non monotone et atteint un maximum à t_p .

L'existence d'un comportement non monotone, en opposition avec celui habituellement constaté pour la relaxation, confirme l'hypothèse selon laquelle le système dispose d'une mémoire de son histoire et de multiples temps caractéristiques internes. Le modèle d'Amir et al [6], déjà présenté en section 2.2.2, propose une explication raisonnable du comportement observé. Pour l'expérience sur la boule de mylar froissé, avant t_w , tous les modes de relaxation λ baissent exponentiellement vers une configuration comprimée (voir la figure 2.16 (a)). A $t = t_w$ la compression du système est légèrement diminuée. Suivant la valeur du mode λ , nous avons deux comportements. Les modes lents $\lambda > 1/t_w$ sont proches de leurs configurations initiales, et vont donc continuer à décroître. En revanche, les modes rapides $\lambda < 1/t_w$ ont eu le temps d'adopter une nouvelle configuration d'équilibre. En imposant la hauteur H_3 , ils vont se relaxer, mais en passant d'une configuration plus comprimée à une moins comprimée, de sens opposé aux modes lents (voir la figure 2.16 (b)). Cela entraîne une augmentation de la force à court terme avant de reprendre une lente relaxation plus habituelle.

Comme système d'étude, le mylar froissé couple la réponse en friction, par les zones de contact interne, avec la réponse de plusieurs pliures et déformations élastiques. Ce comportement de relaxation non monotone est-il possible dans le cas d'un pliage unique?

Protocole de relaxation

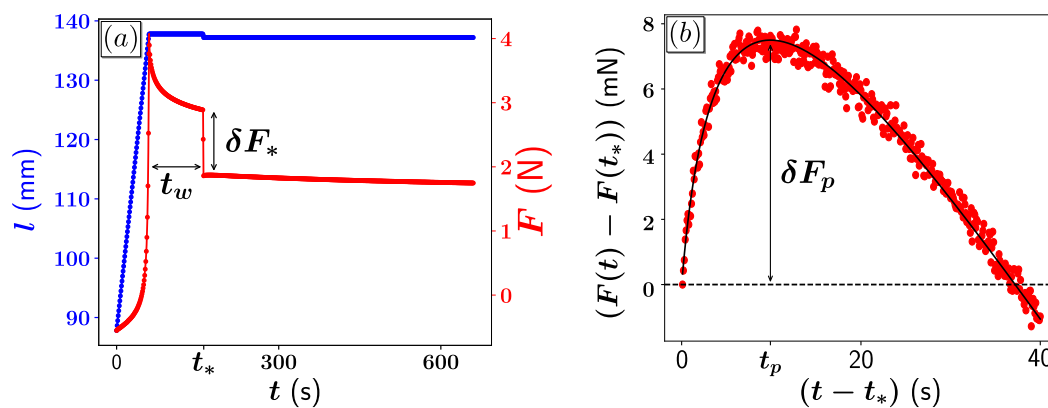


FIG. 2.17 Protocole expérimental modifié durant la phase III pour obtenir une relaxation non monotone. Après un temps d'attente t_w (ici, $t_w = 100$ s), un saut du déplacement est imposé pour diminuer la force mesurée d'un montant δF_* (ici $\delta F_* = 1$ N). (b) Relaxation non monotone de la force pour $t > t_*$. La force relative $F(t) - F(t_*)$ augmente jusqu'à un maximum δF_p à un temps au pic $t - t_* = t_p$ avant de rediminuer.

En s'inspirant de l'expérience de Lahini et al. [117], nous établissons un protocole spécifique pour notre pli unique.

Nous conservons les deux premières phases *I* et *II* de notre protocole précédent. Puis, nous étirons le pli jusqu'à une force F_{III} correspondant à une longueur $l = l_1$. Nous maintenons cette longueur durant un court intervalle de temps t_w . Puis, nous diminuons l jusqu'à une longueur $l = l_2 < l_1$, afin de faire décroître la force d'une valeur relative δF^* . Enfin, nous conservons $l = l_2$ pendant un temps long par rapport à t_w . Le protocole de la phase *III* est détaillé par la figure 2.17 (a).

Nous observons clairement que le comportement de la force pendant la dernière étape de relaxation montre une évolution non monotone. $F(t)$ augmente aux temps courts jusqu'à atteindre un pic à $t - t^* = t_p$ avant de redescendre aux temps longs. La relaxation de la force s'ajuste bien à une fonction double logarithme (2.28), pour laquelle $A_2 > 0$ et $A_{tot} < 0$. Nous caractérisons la relaxation non monotone par deux paramètres expérimentaux, l'intervalle de temps t_p entre le début de la relaxation et le maximum local de force, et l'amplitude relative de ce dernier $\delta F_p = F(t^* + t_p) - F(t^*)$.

Influence du temps d'attente

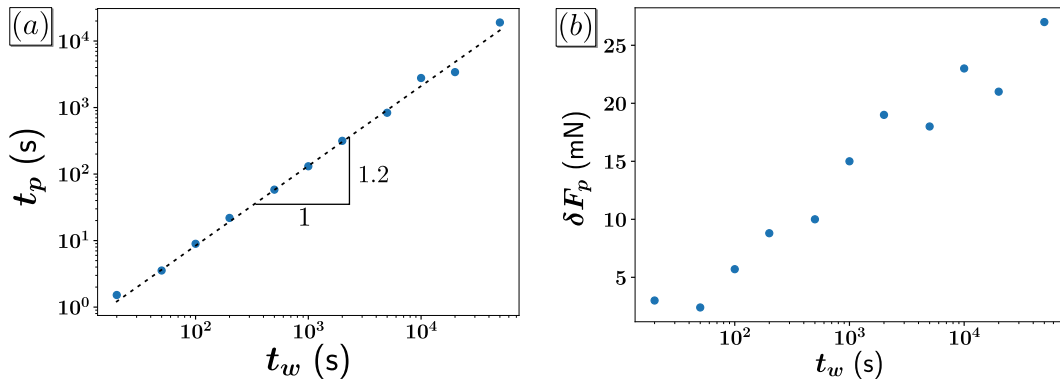


FIG. 2.18 (a) Temps au pic t_p en fonction du temps d'attente t_w pour des expériences suivant le protocole présenté dans la figure 2.17. Les pointillés indiquent la loi d'échelle $t_p \propto t_w^{1.2}$. (b) Amplitude du maximum relatif de force δF_p en fonction du temps d'attente t_w .

Entre les différentes expériences, seul le temps d'attente t_w varie, de 2 secondes à 5×10^4 secondes. Nous observons que le temps t_p avant le pic de force augmente effectivement avec le temps d'attente t_w . Cependant, la relation expérimentale faiblement non linéaire $t_p \propto t_w^{1.2}$ n'est en accord ni avec la relation linéaire obtenue dans le mylar froissé [117, 31], ni avec une analyse dimensionnelle naïve. Nous avançons deux explications possibles pour cette différence.

Contrairement à la relaxation logarithmique du mylar froissé, la relaxation du pli requiert une évolution phénoménologique en double logarithme, indiquant la présence d'autres temps caractéristiques internes.

Aussi, durant la préparation, nous avons gardé les relaxations des phases *I* et *II* ainsi que la préparation du pli pendant 30 minutes sous un poids. Lorsque t_w devient long, des effets de mémoire à long terme peuvent rendre la relation entre t_w et t_p non linéaire.

Pour l'amplitude du pic δF_p , nous constatons que celui-ci augmente avec t_w , ce qui oriente encore une fois vers une collection de mécanismes activés. Plus t_w est long, plus un grand nombre de modes auront eu le temps de se relaxer.

Pli unique et mylar froissé

Finalement, les propriétés viscoélastiques du pli unique divergent quantitativement de celles constatées sur les feuilles minces froissées [117, 31] que ce soit en simple relaxation ou pour les effets mémoires. Toutefois, la seule présence d'un effet Kovacs indique que la physique sous-jacente est identique pour les deux systèmes, à savoir une distribution de temps caractéristiques internes. Une possible explication pour la disparité entre les deux évolutions se trouve au niveau structurel. En effet, les feuilles minces froissées sont composées de nombreuses petites pliures qui interagissent avec des frictions internes. Lorsque des contraintes externes sont appliquées sur cet objet, celles-ci se distribuent à l'intérieur du système. Localement, les déformations sont donc moins importantes que pour un pli unique. Or, nous avons vu que, pour un pli, si les contraintes sont faibles, la relaxation se rapproche d'un comportement logarithmique. Ainsi, l'adoucissement des contraintes locales apporté par la présence de nombreuses pliures transforme une relaxation complexe en relaxation logarithmique.

2.5 Conclusion

Le premier degré de complexité que nous avons introduit après la géométrie dans la modélisation de la réponse mécanique d'un origami est l'élasticité. Son domaine de validité est limité par les caractéristiques physiques du matériau utilisé pour produire le pliage. La compréhension des phénomènes mécaniques non élastiques est impérative pour cerner cette limite.

Grâce à une longue étude expérimentale, nous avons mis en évidence deux comportements découlant des propriétés mécaniques du matériau polymérique employé, le mylar. Tout d'abord, la plasticité modifie la configuration de référence au repos du pli. La concentration des contraintes lors de la déformation garantit que ce changement est isolé à la pliure, et plus précisément à son angle au repos. Cela donne un puissant outil pour lier les propriétés microscopiques internes, l'angle au repos, au comportement macroscopique observé.

La réduction du seuil plastique dans un pli sans recuit restreint encore plus le régime élastique. Il est important d'avoir ces limitations en tête lors de l'étude d'origamis plus complexes, sans quoi les modélisations élastiques ne sont plus suffisantes pour capturer la subtilité de la réponse des pliures.

En ce qui concerne l'évolution du pli au cours du temps, ou son vieillissement, celui-ci

suit les grandes lignes des comportements déjà observés dans les feuilles minces froissées, et plus généralement les systèmes vitreux. Cette remarque reste vraie pour les effets mémoires plus complexes qui indiquent la présence de multiples temps caractéristiques à l'intérieur du système et ont donc pour origine principale la structure du matériau.

Le pliage unique constitue un excellent outil pour analyser la rhéologie d'un matériau grâce à la concentration de contraintes qu'elle induit au niveau de la pliure.

Maintenant que nous avons décrit l'ensemble des comportements mécaniques qu'il est possible d'obtenir avec un pliage unique, nous allons nous intéresser à des origamis présentant des motifs de pliures plus complexes afin d'observer l'interaction qui se produit entre les plis

L'élasticité contrôle la
géométrie des
origamis

Relation entre élasticité et géométrie dans les origamis

Ce troisième chapitre s'intéresse aux relations entre géométrie et élasticité dans les origamis. Nous allons étudier comment cela affecte la forme d'équilibre de leurs structures. Cette étude se base sur un motif simple que nous nommerons « accordéon courbé », et qui produit une courbure apparente le long d'un pli initialement rectiligne, ainsi qu'une variété inattendue de morphologies de déformations. Nous verrons que ces interactions entre géométrie et élasticité, de même que le nombre infini de motifs de pliures, montrent que l'ensemble des formes et des propriétés qu'il est possible d'obtenir avec des pliages est loin d'avoir été complètement exploré. Enfin, nous détaillerons un exemple d'application original des origamis cylindriques comme système mécanique à mémoire binaire.

3.1 Accordéons courbés en origami

3.1.1 Contrôler la forme d'un origami par sa structure

Contrôle géométrique

Dans l'introduction de cette thèse, nous avons longuement discuté de l'intérêt d'obtenir une relation entre le motif de pliures et la structure finale de l'origami. Avec une approche géométrique, un pavage prédéfini de la feuille initiale par des plis est suffisant pour que l'origami plié avoisine la forme d'une surface ciblée [183, 141, 65]. Les faces étant considérées comme rigides, la création de courbures ne se fait que de façon discrète. Par conséquent, plus le nombre de pliures augmente, plus la forme de l'origami est similaire à la forme ciblée. Cependant, la transposition à des systèmes réels se heurte rapidement aux limites imposées par l'épaisseur de la feuille.

Un autre aspect important de l'approche géométrique est que de nombreux motifs engendrent des origamis qui ne sont pas pliables à faces rigides, mais dont les deux configurations déployée et pliée présentent des faces planes. De tels motifs ne sont reliés qu'à une configuration d'équilibre déployée qui ne peut être modifiée à posteriori. La forme n'étant pas modulable, cela pose des questions sur l'adaptabilité des plis lors de leurs applications à des problèmes d'ingénierie.

Contrôle par frustration

La flexibilité des propriétés physiques des origamis provient de l'élasticité du matériau. L'amplitude de son impact est visible par la localisation de la réponse mécanique à une contrainte externe [82]. Cette caractéristique est utilisable afin de modifier le comportement mécanique macroscopique des origamis grâce à des changements locaux de configuration [178, 155]. Plus important encore, la prise en compte de l'élasticité permet de ne plus restreindre l'espace des motifs et configurations aux origamis rigides. Ainsi, la structuration de la forme tridimensionnelle n'est plus uniquement gouvernée par la géométrie, mais aussi par la compétition interne entre les différents éléments élastiques, les faces et les pliures.

Comme système mécanique, l'origami cherche à minimiser l'énergie interne totale en vérifiant les conditions aux limites imposées. Or, durant notre étude de la réponse mécanique d'un pli unique, nous avons mis en évidence l'importance de l'angle au repos et la relative rigidité des pliures par rapport aux faces. Après pliage, l'origami dispose d'une structure dans un équilibre élastique stable au repos, mais qui contient généralement des frustrations internes avec des pliures ou des faces en déformations. Cela produit une riche zoologie de structures macroscopiques et microscopiques, plus

aisément modifiables par changement local des propriétés élastiques, ce qui n'a été que très partiellement explorée. L'unique exemple que nous avons trouvé est l'analyse de la courbure observée sur des anneaux en papier présentant des pliures concentriques [51, 57, 56]. Cela ne concerne qu'une petite section des origamis, la majorité des motifs utilisant des pliures rectilignes.

Dans cette section, nous nous intéressons à la forme produite par un simple motif de pliures rectilignes que nous nommons « accordéon courbé » et qui témoigne du potentiel de mise en forme offert par la frustration dans les origamis.

3.1.2 Création du pliage

Caractéristiques du motif

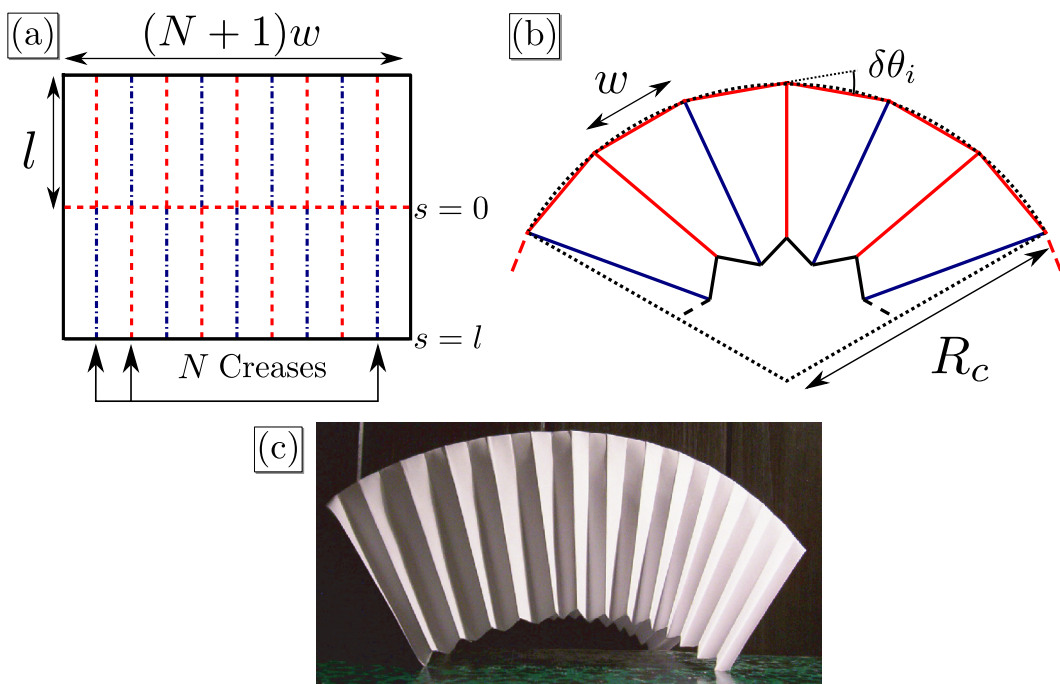


FIG. 3.1 Schémas de l'origami accordéon courbé. (a) Motif de pliures. Chaque face est un rectangle de dimensions $l \times w$. Les lignes à tirets rouges (resp. pointillets-tirets bleues) sont les pliures montagnes (resp. vallées). (b) Structure après pliage et déploiement. $\delta\theta_i$ est l'angle entre deux segments successifs de la pliure centrale au i ème sommet. R_c est le rayon de la courbure apparente le long du pli central. (c) Accordéon courbé en origami plié à partir d'une feuille de papier A4 avec $N=27$.

Le motif de pliure correspondant à l'accordéon courbé en origami (ou ACO) est représenté dans la figure 3.1 (a). Une feuille rectangulaire d'épaisseur e décorée par une pliure montagne centrale à la moitié de sa largeur est traversée perpendiculairement par N pliures régulièrement espacées. La direction des pliures transverses alterne entre montagne et vallée et changent d'orientation au croisement avec la pliure centrale. Les faces rectangulaires résultant de ce motif de pliure ont toutes la même dimension, avec une longueur l et une largeur w .

Le motif proposé correspond à un motif de pliures de Miura [137, 172] pour lequel tous les angles entre les pliures sont des angles droits. Bien que ce motif soit pliable à plat et à faces rigides, ce que nous utiliserons durant le processus de pliage, la forme à l'équilibre observée après pliage et déploiement, notion que nous détaillerons dans la description du protocole expérimental, présente une courbure apparente, de rayon de courbure R_c , suivant la pliure centrale qui est clairement visible sur l'ACO en figure 3.1 (c). Plus précisément, la pliure centrale est divisée, par les pliures transverses, en plusieurs segments rectilignes de longueur w . Les sommets de l'origami imposent des angles entre des segments consécutifs. Ainsi, au i ème sommet nous définissons l'angle $\delta\theta_i$ comme l'angle entre les i ème et $(i + 1)$ ème segments.

Création de l'origami

Notre première idée fut de produire les origamis manuellement, à partir de feuilles minces d'épaisseur $e = 100 \mu\text{m}$ en mylar. Nous choisissons ce matériau pour les raisons énoncées dans le chapitre I. Notre étude exclut donc l'exemple donné en figure 3.1 (c), produit à partir d'une feuille de papier. Initialement, le motif de pliures est imprimé sur une feuille rectangulaire de dimension connue. Le premier pli est effectué à la moitié de la largeur pour former la pliure centrale. Puis, en conservant la feuille pliée en deux, nous plions les deux faces rectangulaires par alternance de pliures montagnes et vallées suivant les indications du motif imprimé. Ce protocole peut être effectué avec des faces rigides et aboutit à un origami plié à plat, confirmant les propriétés du motif. Toutes les pliures sont faites à la main et comprimées fortement à l'aide d'une règle pour s'assurer que leur angle au repos soit assez aigu.

Afin d'obtenir la structure visible en figure 3.1, il nous faut déployer l'origami. Pour cela, nous augmentons manuellement l'angle au repos de chaque pliure, incluant la pliure centrale, jusqu'à environ 90° en exploitant la plasticité du matériau. Nous laissons l'origami final posé sur son bord libre pour l'analyser.

Analyse expérimentale de la structure

Nous avons analysé la structure de l'origami produit suivant deux méthodes.

La première se concentre sur l'observable la plus caractéristique de la structure, à savoir la courbure apparente. Celle-ci est récupérée à partir d'une photo de côté du pliage. Préalablement, nous avons consciencieusement positionné l'appareil photo pour que le plan focal corresponde au plan défini par la pliure centrale. Après avoir extrait la position dans la photo de tous les pixels appartenant à la pliure centrale par simple seuillage noir/blanc, nous avons employé un algorithme [175] basé sur une approximation algébrique d'ajustement de cercle [33] pour repérer le cercle le

plus proche de l'ensemble de ces pixels. Après une mise à l'échelle suivant la méthode décrite dans le chapitre I section 1.2.2, à savoir l'utilisation d'une photo d'un pavage régulier de dimension connue, nous obtenons R_c à partir du rayon du cercle ajusté. Cette méthode a l'avantage d'être rapide et facile à analyser.

Dans le même temps, nous avons employé une technique de scan de l'objet en trois dimensions afin de décrire plus précisément la structure de l'origami. Plusieurs techniques peuvent s'utiliser comme la photogrammétrie, le scan par balayage laser ou encore l'utilisation de la lumière structurée. Nous avons sélectionné ce dernier procédé en s'aidant du logiciel propriétaire HP 3D Scan. Les modalités techniques et la raison derrière ce choix sont détaillées en appendice C.

Le scan produit un maillage 3D dimensionné de la surface de l'origami. Nous avons utilisé Meshlab [42] pour colorier les points du maillage suivant la valeur locale de la courbure moyenne obtenue par l'algorithme d'*algebraic point set surfaces* [85, 84] afin d'identifier les régions où la déformation est importante. Le résultat brut du scanner est légèrement ondulé en raison du bruit, ce qui influence beaucoup l'amplitude de la courbure locale. Pour minimiser son impact, nous avons augmenté la valeur de «MLS - Filter scale» à 10, ce qui a pour effet de moyennner la courbure locale sur une plus grande surface. Les résultats de cette analyse seront montrés dans les sections suivantes (voir par exemple la figure 3.2).

Limites de l'expérience

Notre protocole de pliage et surtout de déploiement de l'origami ne permet pas de correctement contrôler l'angle au repos pour chaque pliure. Il est alors difficile de rationaliser la valeur expérimentale mesurée de R_c par rapport à un modèle élastique, car les angles au repos des plis influencent fortement les angles $\delta\theta_i$ à chaque sommet [8]. Nous l'avons aussi constaté avec nos origamis. En effet, certains échantillons ne présentaient pas de courbure régulière le long de la pliure centrale en raison d'une inconstance des angles définis par les pliures transverses.

Une autre grande limitation est la diversité et la qualité des données que nous pouvons extraire du résultat de notre scan 3D. Le bruit est trop important pour sortir des informations quantitatives fiables du maillage. Á cela, nous ajoutons la complexité de la localisation des plis dans le maillage brut des points obtenus ainsi que la difficulté pour définir et retranscrire une observable claire pour décrire le système.

Pour résoudre ces difficultés, nous utilisons l'outil puissant que nous avons développé dans le chapitre I, à savoir la création des pliures et d'origamis en MEF.

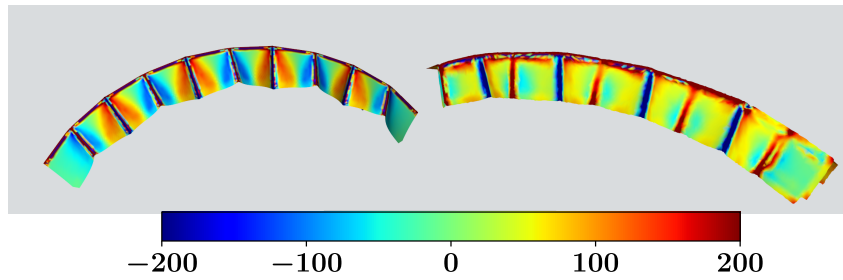


FIG. 3.2 Déformation des faces en facette unique typique du mode I avec $N = 9$, $l = 20$ mm, $w = 20$ mm pour la simulation (gauche) et l'expérience (droite). La couleur représente la courbure moyenne locale en m^{-1} .

Simulation par MEF

La méthode de création et de pliage des pliures individuelles est détaillée en section 1.5.2. La distinction entre les deux directions montagne et vallée se fait par le choix du signe du coefficient de dilatation thermique α_T . Nous sélectionnons $\alpha_T = 1$ pour les plis montagnes et donc $\alpha_T = -1$ pour les plis vallées. Toutes les pliures ont la même largeur $2S_0 = 6e$, valeur typique des pliures en mylar. Nous choisissons un module d'Young de 4 GPa et un coefficient de Poisson de 0.4, également typique pour le mylar (voir la section 2.1.2). L'étape de pliage se fait par petits paliers, en alternant le chauffage de la pliure centrale avec celui des pliures transverses. La différence de température finale entre les bords $\Delta T = 0.187$ K impose un angle au repos $\Psi_0 = 90^\circ$ à toutes les pliures. Nous choisissons de ne prendre qu'un nombre impair N de pliures transverses pour exploiter la symétrie par rapport à la pliure transverse médiane $(N + 1)/2$ et ne calculer que la moitié du système.

Nous avons aussi percé un trou de rayon $\sqrt{2}S_0$ au centre de chaque sommet afin d'empêcher la minimisation de l'énergie de se bloquer en raison d'une concentration trop grande des contraintes à ces emplacements.

La MEF est un outil particulièrement approprié pour effectuer des analyses de l'objet tridimensionnel final. Ainsi, pour obtenir la courbure apparente, nous pouvons extraire directement les coordonnées brutes en repère cartésien des noeuds de la pliure centrale après déformation. À partir de ces coordonnées en trois dimensions, nous réalisons une décomposition en valeurs singulières pour projeter les données sur un plan avant d'accomplir l'ajustement par un cercle que nous avons décrit en section 3.1.2. L'algorithme détaillé est fourni dans [75].

Dans le même temps, nous avons colorié le maillage des noeuds de la simulation pour indiquer la valeur locale de la courbure moyenne avec une plage de couleur identique à celle utilisée lors de notre analyse expérimentale, afin de les comparer (voir par exemple la figure 3.2).

3.1.3 Courbure apparente

Comportement général du rayon de courbure

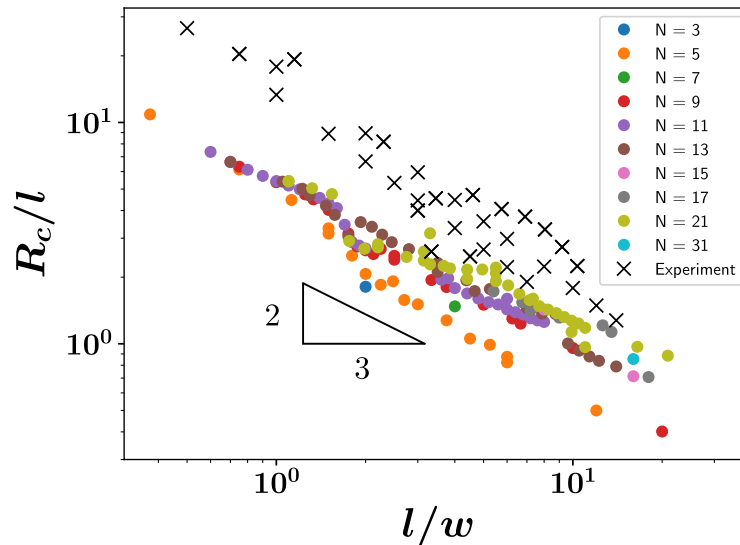


FIG. 3.3 Évolution du rayon de courbure normalisé par la longueur des faces R_c/l pour les origamis expérimentaux (croix) et simulés (cercles pleins) en fonction du rapport d'aspect des faces. Pour les points de simulation, la couleur représente le nombre de pliures transverses. Pour les expériences, nous avons $N = 9, 19$ ou 22 indistinctement.

En utilisant les protocoles expérimentaux et de MEF présentés, nous avons effectué un balayage, principalement en MEF, des paramètres du motifs, à savoir du nombre de pliures N , de la longueur l et de la largeur w des faces. Afin de travailler dans un régime de structures fines, l'épaisseur de la feuille sera toujours négligeable par rapport aux dimensions des faces. Tous les autres paramètres du matériau et des pliures restent constants. L'ensemble des rayons de courbures correspondant est reporté dans la figure 3.3.

La première observation est que, même si les rayons de courbure expérimentaux suivent une tendance similaire à ceux issus des simulations, ils sont aussi sensiblement plus grands. Nous expliquons cette différence par les difficultés expérimentales déjà mentionnées de sélection des angles aux repos des pliures. C'est pourquoi, nous concentrons notre analyse sur les résultats obtenus de la MEF.

Les données provenant des simulations montrent clairement une relation empirique purement géométrique entre R_c et les dimensions des faces pour un nombre de pliures suffisamment élevé ($N \gtrsim 9$)

$$R_c \propto w^{2/3}l^{1/3}. \quad (3.1)$$

Faible nombre de plis

Nous avons établi plus tôt que la courbure apparente de la pliure centrale est en réalité une courbure discrète définie par les angles $\delta\theta_i$ aux sommets. Or, deux sommets sont notablement distincts des autres, le premier et le dernier, car ils sont reliés aux seules faces disposant de deux bords libres. Ces conditions aux limites singulières donnent un équilibre élastique local particulier par rapport au reste des sommets. En conséquence, les angles $\delta\theta_1$ et $\delta\theta_N$ sont significativement différents des autres angles aux sommets et, si le nombre de sommets est faible, cela change l'amplitude globale de la courbure apparente.

Evolution suivant la longueur des faces

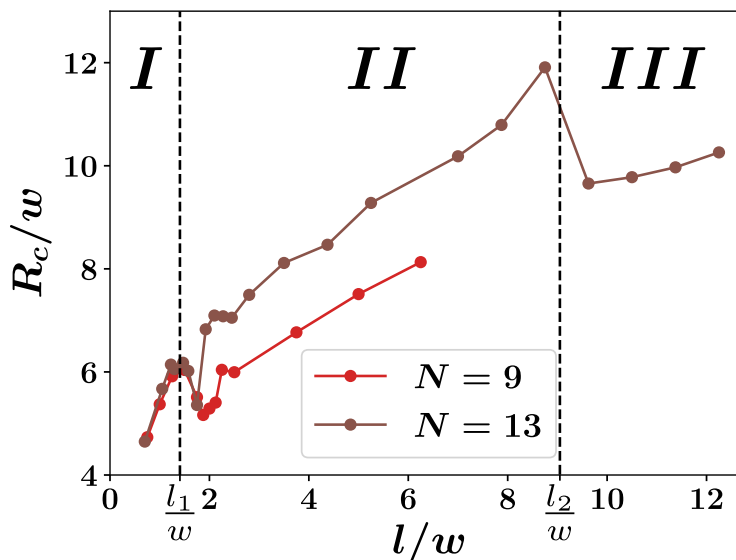


FIG. 3.4 Évolution non monotone de R_c/w en fonction du rapport d'aspect des faces l/w pour $w = 14.3$ mm et $N = 13$ ainsi que pour $w = 20$ et $N = 9$. Les données proviennent de simulations en MEF. Les lignes discontinues indiquent approximativement les transitions entre trois morphotypes de déformation, avec $l_1 \approx 1.5w$ et $l_2 \approx 9w$.

L'évolution de la courbure en fonction de la dimensions des faces suit une tout autre histoire lorsque la variation de R_c est reportée en fonction d'un seul paramètre, comme la longueur des faces en figure 3.4. L'évolution de R_c n'est pas monotone mais saccadée. À partir des données obtenues par MEF, nous pouvons définir trois régions bien distinctes et séparées par deux longueurs critiques $l_1 \approx 1.4w$ et $l_2 \approx 9w$. Nous observons sur les formes des pliages que ces trois régions correspondent à trois modes de déformations différents. Dans la suite de notre analyse, nous allons détailler les caractéristiques propres à chacun de ces modes.

3.1.4 Modes de déformation

Facette unique pour les faces

Commençons par le mode I pour $l < l_1$ et dont la forme est montrée par la figure 3.2. Dans ce mode, chaque face est divisée en trois zones. Une zone centrale triangulaire plane est délimitée par un segment de pliure central et deux régions de courbures qui accommodent les conditions aux limites locales imposées par les pliures. Suite au déploiement, la configuration d'équilibre ne présente pas de faces planes. Les plis restent rectilignes, mais perdent leur parallélisme. Par conséquent, les faces se déforment en forme de S avec deux rides de flexion partant des deux sommets adjacents. Cela afin d'accommoder les conditions cinématiques locales imposées par la rigidité des pliures et l'alternance de direction montagne et vallée.

En effet, nous avons établi dans le chapitre I que l'énergie requise pour ouvrir la pliure est $E_{pliure} \propto Ele^2$ pendant que l'énergie nécessaire à la flexion est $E_{flexion} \propto Ee^3$. Dans notre hypothèse de feuilles minces $l \ll e$, le pliage favorise la flexion des faces. Plus intéressants encore, certains types de localisation des contraintes sont aussi privilégiés par rapport à la déformation des plis. Par exemple, les rides d'étirement ont une énergie approchée par $E_{ride} \propto El^{1/3}e^{8/3}$ [201], toujours plus faible que E_{pliure} . Avec pour objectif de minimiser l'énergie totale du système pour atteindre une configuration d'équilibre, la flexion des faces et surtout la formation de rides seront favorisées par l'élasticité relativement à l'ouverture des pliures.

Facettage des faces

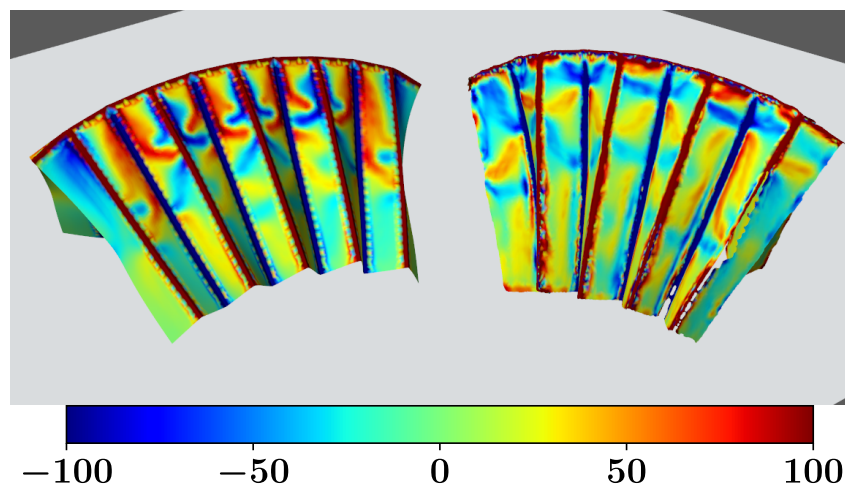


FIG. 3.5 Facettage des faces typique du mode II avec $N = 9$, $l = 20$ mm, $w = 100$ mm pour la simulation (gauche) et l'expérience (droite). La couleur représente la courbure moyenne locale en ^{-1}m .

Lorsque l augmente, nous avons observé qu'à partir d'une valeur critique, les faces changent de mode de déformation l'une après l'autre. Pour un facetage unique, une partie du bord libre n'est pas en flexion, le point d'intersections des rides. Pour l petit, il est au centre du bord. Nous constatons qu'en augmentant l , il se rapproche d'une des deux pliures. Quand une ride stoppe sa progression au niveau de la pliure transverse opposée, ce point d'arrêt constitue le point de départ d'une nouvelle ride qui présentera le même comportement. Ce phénomène continue avec l'augmentation de l jusqu'au net facetage triangulaire visible dans la figure 3.5. Il est caractéristique du mode II obtenu pour $l_1 < l < l_2$. Nous définissons la limite l_1 entre les deux premiers modes par le moment pour lequel au moins une face acquiert une seconde facette.

Demaine et al. [51] se sont déjà intéressés à ce type de facetage dans les origamis, d'un point de vue purement géométrique, en considérant les rides comme de nouvelles pliures rectilignes. Un autre système qui reprend typiquement ce mode de déformation est le ruban élastique fin sous torsion [63]. Afin de mieux comprendre ce type de déformations, nous nous inspirons de cette étude et regardons l'évolution de la torsion de la face connectée au pli transverse médian $(N + 1)/2$, que nous estimons typique de l'origami, en fonction de l en MEF. La torsion locale est définie par

$$\eta(s) \propto s \frac{\delta\phi}{\delta s}. \quad (3.2)$$

avec s la distance par rapport à la pliure centrale (voir la figure 3.1) et $\delta\theta$ l'angle entre deux lignes initialement parallèles avant chauffage à s et $s + \delta s$, deux noeuds consécutifs. Les données sont montrées dans la figure 3.6.

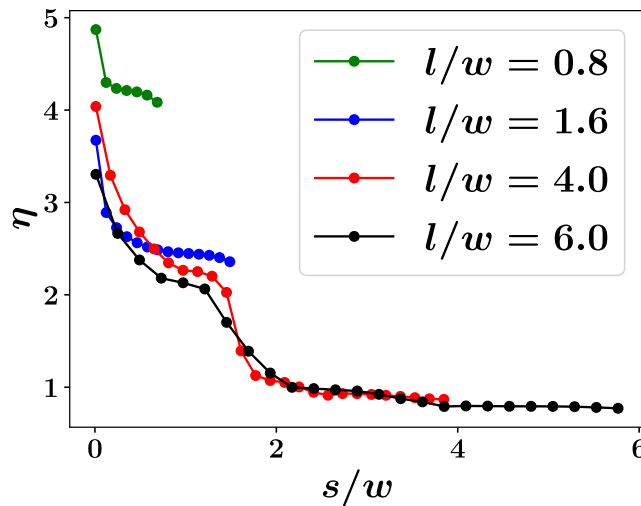


FIG. 3.6 Torsion locale d'une face voisine au pli transverse médian, avec $N = 11$, $w = 25$ mm et différents l . $s = 0$ à la pliure centrale.

Étonnamment, nous remarquons que l_1 n'indique pas seulement la transition au facetage, mais aussi une longueur caractéristique de couche limite proche de la pliure centrale pour laquelle la torsion est importante. Nous notons que dans cette région, les

lignes des pliures transverses qui se courbent légèrement vers les sommets et les faces se déforment d'une manière semblable au mode *I*. Loin de la couche limite, la pliure est rectiligne et les faces manifestent un facettage dont l'amplitude diminue lorsque la distance avec le pli central augmente. La compétition entre la pliure centrale et les pliures transverses s'effectue principalement dans cette couche limite $s < l_1$.

Flambage des bords libres

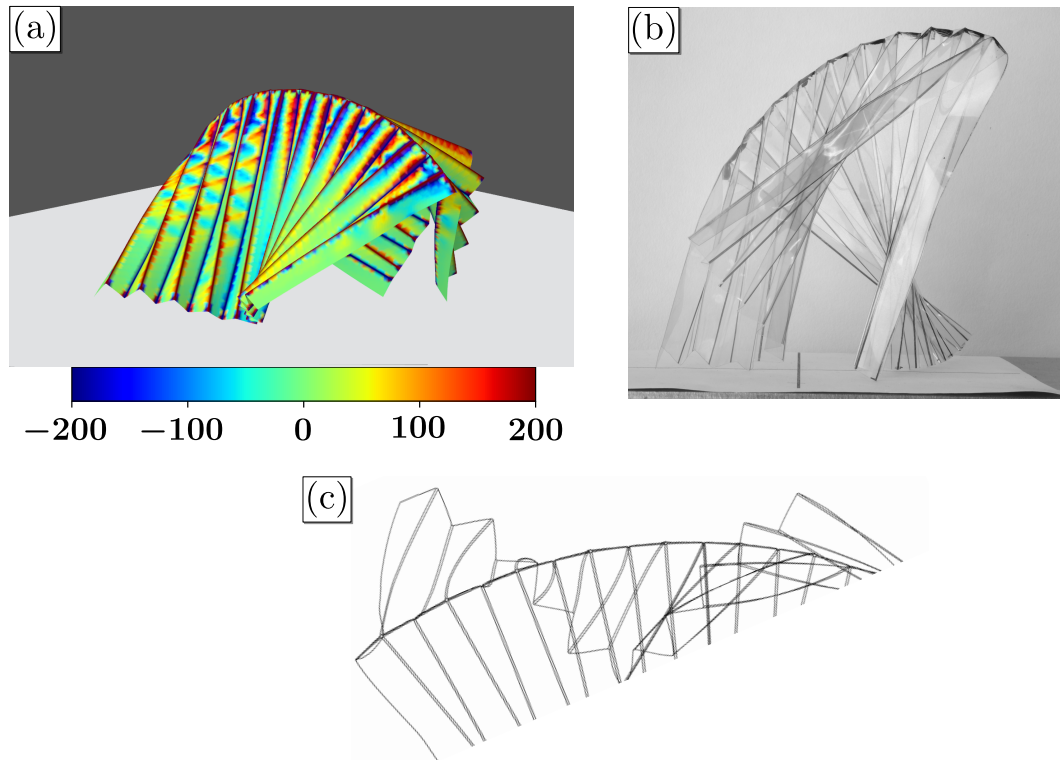


FIG. 3.7 Flambage des bords libres typique du mode *III*. (a) Origami obtenu par MEF avec $N = 19$, $l = 10$ mm, $w = 280$ mm. La couleur représente la courbure moyenne locale en m^{-1} . (b) Image expérimentale brute d'un origami accordéon courbé qui illustre une configuration en flambage. Sa forme le rend difficile à scanner. (c) Squelette partiel de l'origami obtenu en (a) montrant la déformation des lignes de pliure.

Lorsque nous augmentons la longueur l des plis transverses, leur géométrie entraîne un rapprochement des extrémités. Pour limiter cet effet, le rayon de courbure apparent tend à augmenter. Ces deux effets entraînent l'ouverture d'une portion des plis transverses proche de la pliure centrale et la fermeture d'une autre portion proche des bords libres. Ces déformations entraînent une augmentation considérable de l'énergie élastique interne du système, les pliures étant considérées comme rigides. Ainsi, pour une longueur suffisante $l > l_2$, l'ACO adopte une structure ésotérique présentant une courbure notable du bord libre suivant une forme analogue à celle obtenue après flambage d'une poutre. Ce changement s'accompagne d'une modification radicale de la déformation locale, principalement les lignes de pliures. Ces dernières sont

courbées et en torsion selon une forme tridimensionnelle complexe. Les faces quant à elles alternent entre des déformations présentant un facettage triangulaire, dû à une torsion plus importante que pour le mode *II*, et des faces presque plates. Malgré ces changements, la pliure centrale exhibe toujours une courbure discrète quasi régulière. Afin de vérifier l'origine de ce changement de comportement, nous avons extrait

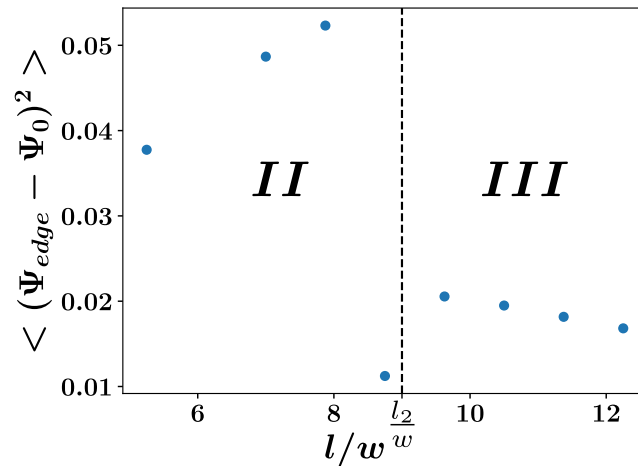


FIG. 3.8 Moyenne du carré de la déformation angulaire $\Psi_{edges} - \Psi_0$ des pliures transverses au bord libre pour $N = 13$ et $w = 14.3\text{mm}$. La ligne verticale discontinue représente approximativement la transition entre le facettage et le flambage avec $l_2 \approx 9w$.

l'énergie élastique adimensionnée moyenne interne au bout des pliures, prise comme la moyenne du carré de la déformation angulaire aux bords libres pour chaque pli. Les données en figure 3.8 montrent que cette énergie augmente effectivement avec l et chute pour $l > l_2$.

Le premier point de la chute, juste avant l_2 traduit une structure du pliage spéciale pour laquelle seul un des deux cotés de la pliure centrale flambe. La dissociation de la transition entre les deux côtés est due à l'asymétrie du nombre de pliures montagnes et vallées de part et d'autre de la pliure centrale. Même si l'énergie aux bords pour ce point est la plus faible, nous estimons que la grande différence entre les déformations de chaque côté du pliage concentre les contraintes autour de ce pli.

Malgré cette différence de seuil de longueur l avant flambage entre les deux côtés, un même évènement se produit pour les deux transitions : la géométrie imposée par l'équilibre avec le facettage du mode *II* augmente l'énergie élastique totale résultant des frustrations internes. Au-delà d'un certain seuil, la position d'équilibre stable change pour une autre configuration d'équilibre relâchant en partie ces frustrations.

Espace des phases

En utilisant la discrimination proposée entre les modes, à savoir l'apparition d'une seconde facette sur une des faces pour la transition au facettage, et la courbure d'au moins une extrémité libre pour la transition de flambage, nous avons obtenu le diagramme de

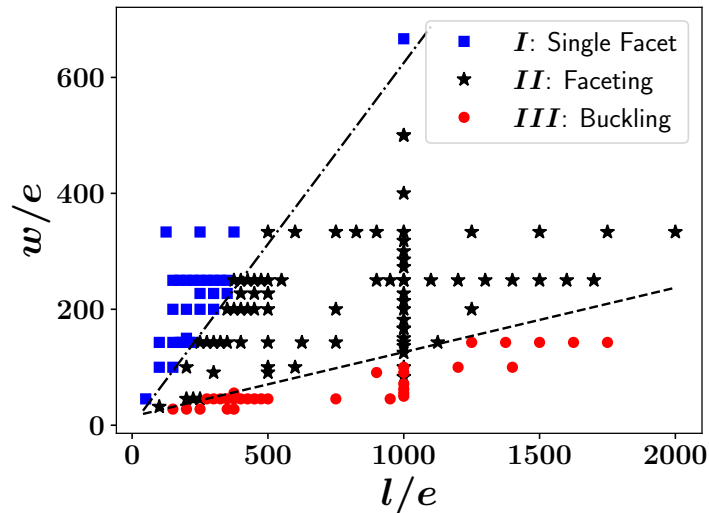


FIG. 3.9 Espace des phases pour les différents modes de déformation. La ligne en pointillés-tirets correspond à $\frac{l_1}{e} = 1.6\frac{w}{e}$ et la ligne discontinue à $\frac{l_2}{e} = 9(\frac{w}{e} - 15)$.

phase en figure 3.9 pour les simulations en MEF présentées dans la figure 3.3. Comme pour la variation de R_c , le paramètre important pour le système est le rapport d'aspect des faces, variable géométrique du motif. Ainsi, les transitions prennent la formes de lignes $l_1 = 1.6w$ et $l_2 = 9(w - dw)$, avec $dw = 1.5$ mm, ce qui souligne encore une fois l'importance de la géométrie dans la compréhension de la structure.

3.1.5 Conclusion

Avec l'ACO, nous avons un motif d'origami simple, un Miura-ori avec uniquement des angles droits entre les pliures. Il produit par lui-même une richesse insoupçonnée de modes de déformations locales, telles que l'ouverture ou la fermeture de l'angle des pliures, la flexion et la torsion des faces, voire les rides d'étirements permettant des déformations non isométriques, mais aussi plus globales comme le flambage des bords libres. Bien que ces formes proviennent de la compétition entre les différents éléments élastiques résultant en des frustrations internes, notre analyse en MEF indiquent que le mode de déformation est prescrit principalement par les dimensions des faces, et donc la géométrie du motif. Les structures des ACO produits à partir de feuilles de mylar sont en accord qualitatif avec cette observation. Toutefois, un meilleur protocole imposant des caractéristiques spécifiques à chaque pli reste à concevoir. Nous devons aussi donner une modélisation géométrique et élastique analytique expliquant quantitativement les transitions entre les modes de déformation.

Dans l'introduction de cette section, nous avons discuté de l'adaptabilité des systèmes origamis. Les études sur ce sujet se basent principalement sur la bistabilité locale des sommets, lorsqu'ils peuvent être « snappés » dans une autre configuration métastable, sur des motifs périodiques de type Miura-ori [178, 155]. Le nombre limité de som-

mets dans un pliage conduit à un nombre discret de configurations. Or l'ACO, et plus généralement les origamis frustrés, disposent du contrôle de la rigidité de la pliure, mais surtout de l'angle au repos qui peut être changé de façon continue après le pliage comme nous l'avons détaillé dans le chapitre *II*.

L'exploitation de cette propriété permet aux origamis de devenir des systèmes à structures hautement adaptables, mais toujours théoriquement prédictibles, qualité rêvée pour un métamatériau.

3.2 L'origami comme système mémoire

3.2.1 Introduction

La mémoire d'un matériau dénote sa capacité à montrer des comportements différents suivant son histoire. Dans la section 2.4, nous avons constaté qu'avec certains protocoles, les plis formés à partir d'une feuille mince polymérique exhibent des propriétés de mémoire comme l'effet Kovacs. La mémorisation des contraintes au niveau microscopique dans le matériau se fait constamment avec les évolutions dynamiques causées par le bruit thermique. En conséquence, le pli a tendance à oublier les détails de son histoire à temps long, ce qui en fait un mauvais système mémoriel.

En effet, prenons comme exemples d'autres systèmes mémoires plus habituels comme les disques durs ou même simplement le papier avec un crayon. Ces systèmes sont employés avec pour objectif de conserver une information sur une longue durée et que celle-ci soit accessible à n'importe quel moment. Pour ce faire, de multiples systèmes physiques, dont font partie les deux que nous avons énoncés, manipulent un grand nombre de configurations d'équilibre local pouvant être modifiées à souhait. Ainsi, la mémoire informatique préserve les informations en code binaire suivant une polarisation locale de la surface du disque et l'écriture utilise la différence entre les marques noires venant du crayon et le blanc de la feuille pour produire une liste de symboles pouvant être lue.

Or, nous avons vu que de multiples motifs d'origamis produisent des systèmes mécaniques dont la réponse montre l'existence de plusieurs configurations d'équilibre stable [92, 123, 194, 102, 160, 8]. Dans cette section, nous allons présenter comment exploiter la bistabilité des origamis cylindriques à faces triangulaires afin de fabriquer un système mécanique à mémoire binaire non volatile pouvant conserver plusieurs bits de données. Ce travail a été effectué en collaboration avec Austin Reid, Karen Daniels et Muhittin Mungan.

3.2.2 Le soufflet cylindrique unique

Types de soufflets cylindriques

Lors de la compression d'une structure cylindrique mince, les contraintes se concentrent localement et produisent un motif de pliure selon un pavage triangulaire [205, 114, 99]. L'exploitation de ce phénomène a permis de concevoir des structures cylindriques déployables et pliables par déformation suivant un seul axe prédéfini. Le compactage étant un facteur crucial pour de nombreux problèmes d'ingénierie, nous trouvons déjà des exemples d'applications spatiales [173], médicales [115] et nucléaires [161] pour ces structures.

Conformément à leur géométrie, les origamis cylindriques ne sont pas pliables à

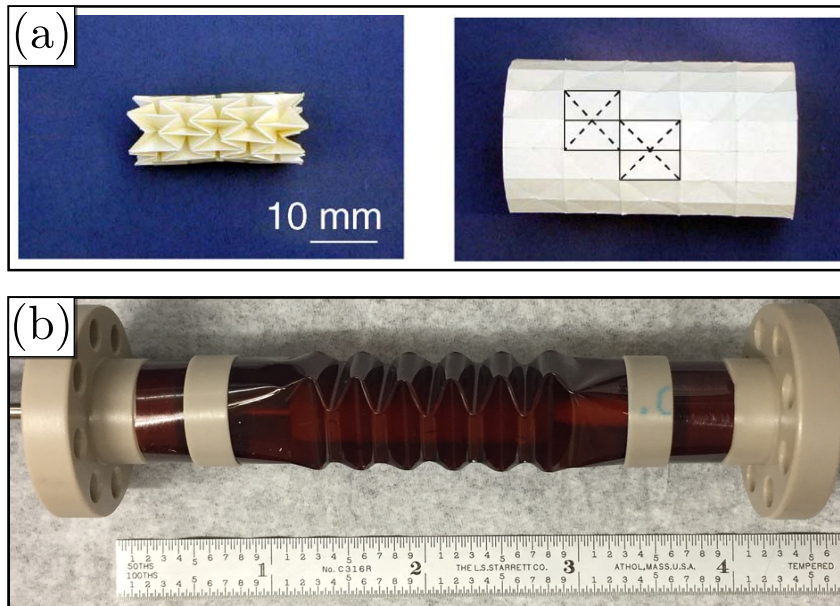


FIG. 3.10 (a) Photographies d'un modèle en carton d'un stent en origami en configurations pliée et dépliée (extraites de [115]). (b) Exemple de soufflet cylindrique flexible en origami supportant le transport d'azone liquide (extrait de [161]).

faces rigides [26]. Leur déformation est accompagné par celle des faces élastiques qui vont gouverner la réponse mécanique lorsque les plis ne sont pas rigides. Ainsi, ils démontrent une bistabilité mécanique [102, 160] grâce à l'existence de deux configurations à faces rigides.

Dans leurs travaux, Reid et al. [160] ont analysé les configurations géométriques atteignables pour des motifs périodiques de faces triangulaires comprenant des sommets de degré 4, signifiant que chaque sommet est à l'intersection entre 4 pliures, et ont mis en évidence que seuls certains motifs spécifiques de Kresling autorisent une bistabilité. Bien qu'il aient aussi considéré des motifs périodiques de quadrilatère, comme le Miura-ori, Reid et al. ont observé que les barrières énergétiques entre les états stables sont nettement plus importantes pour le motif de Kresling. Nous l'avons donc sélectionné afin de faciliter l'étude expérimentale.

Motif et géométrie du soufflet de Kresling

Habituellement, la maille d'un motif est l'ensemble minimal de faces nécessaire pour paver la surface étudiée. Dans le cas d'un motif de Kresling, deux triangles accolés. Cependant, nous souhaitons considérer des origamis cylindriques pour lesquels les extrémités haute et basse ne tournent pas durant la déformation. Afin d'accomplir cet objectif, la maille cristalline, que nous avons caractérisée et détaillée dans la figure 3.11 (a), est symétrique. La moitié supérieure de la maille est définie par quatre vecteurs w_i , avec $i = 1, 2, 3$ et 4 , et deux angles $\Phi_2 < \Phi_1 < \pi/2$. La moitié inférieure est une symétrie miroir de la partie supérieure par rapport à l'axe du vecteur w_1 . Les

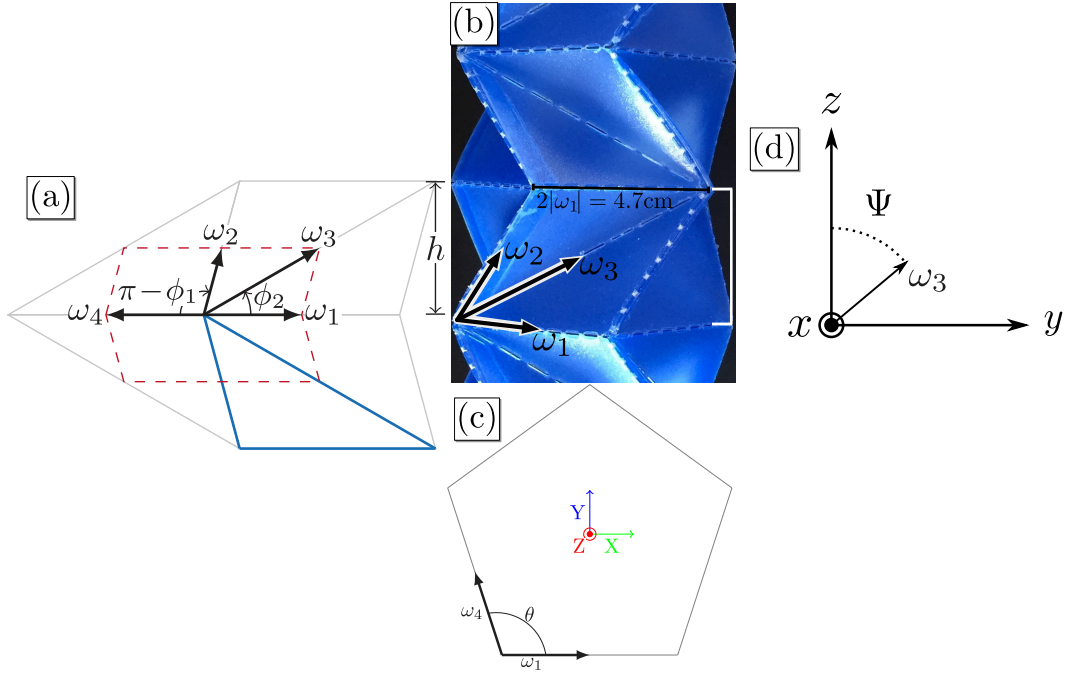


FIG. 3.11 (a) Maille cristalline du motif de Kresling cylindrique (contour en pointillé rouge) avec $\Phi_2 < \Phi_1 < \pi/2$. (b) Deux sections d'un soufflet produit à partir d'un motif de Kresling pour $n = 5$ mailles en circonférence. Le crochet blanc indique une section. Les vecteurs unitaires de la maille sont annotés. (c) Coupe transverse dans le plan xOy délimité par les vecteurs \underline{w}_1 et \underline{w}_4 . Figures extraites de [160]. (d) Projection du vecteur \underline{w}_3 dans le plan yOz dans une configuration déformée. Ψ correspond à l'angle entre la projection de \underline{w}_3 et la direction \underline{e}_z .

dimensions de la maille sont fixées par $|\underline{w}_1| = \frac{l_1}{2}$ et les deux vecteurs \underline{w}_2 et \underline{w}_3 ont la même hauteur $\frac{h}{2}$. Par conséquent, la géométrie impose

$$|\underline{w}_4| = |\underline{w}_1| = \frac{l_1}{2}, \quad (3.3)$$

$$|\underline{w}_2| = \frac{h}{2 \sin \Phi_1}, \quad (3.4)$$

$$|\underline{w}_3| = \frac{h}{2 \sin \Phi_2}, \quad (3.5)$$

$$h = \frac{l_1}{\cot \Phi_2 - \cot \Phi_1} \quad (3.6)$$

La forme de la maille permet de s'assurer des conditions aux limites périodiques nécessaires à la clôture de la circonférence du cylindre. Nous appelons n le nombre de mailles employé pour fermer le soufflet. Notre définition de la maille pose question lorsque nous considérons les bords supérieurs et inférieurs du cylindre qui requièrent des moitiés de mailles pour finir sur des pliures. Ainsi, nous définissons une section comme la fraction de cylindre de hauteur une maille terminant sur des pliures (voir la figure 3.11 (b)). Pour assurer l'absence d'hélicité interne, les sections sont toujours définies en couples symétriques, comme sur la figure 3.11.

En plus de ceux présents dans le motif, deux angles supplémentaires apparaissent lors

du pliage du cylindre. Tout d'abord l'angle θ entre w_1 et w_4 visible sur la figure 3.11 (c). La fermeture du cylindre en un polygone régulier implique nécessairement $\theta = \pi/n$. Le second angle Ψ , l'angle d'élévation du motif, est l'angle de la rotation du vecteur w_3 autour de l'axe w_1 lors de la déformation. Il est schématisé en figure 3.11 (d). Les conditions cinématiques de faces rigides sont respectées si et seulement si

$$\sin \Psi = \frac{1}{2 \tan \frac{\pi}{n} \tan \Phi_2} \left[1 - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} - 1\right)^2 - 4 \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \tan^2 \frac{\pi}{n}} \right]. \quad (3.7)$$

Le calcul est détaillé dans [161].

Les solutions (3.7) ont une signification physique uniquement si $|\sin \Psi| \leq 1$, ce qui limite l'espace des motifs disposant de deux configurations stables. Afin de maximiser la déployabilité du cylindre [160], définie comme la différence d'angle entre les deux solutions Ψ , positive et négative, de l'équation (3.7), nous imposons

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \frac{\pi}{n} \quad (3.8)$$

pour tous les origamis que nous allons étudier.

Création des soufflets

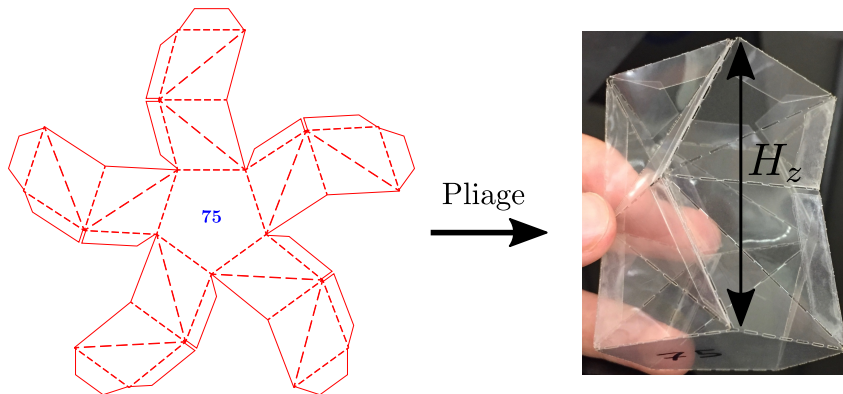


FIG. 3.12 Motif de découpe produisant un soufflet unique avec $\Phi_1 = 75^\circ$ ainsi que le résultat après pliage et collage. H_z est la distance entre les deux extrémités du soufflet.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au comportement mécanique du soufflet le plus simple contenant deux sections symétriques que nous nommons un module. Nous choisissons $n = 5$ comme compromis entre la minimisation des approximations résultant de la création expérimentale du module et la durée de production, et $l_1 = 32$ mm pour que le module soit assez grand mais toujours découppable dans une feuille de format A4.

Afin d'obtenir exactement les motifs désirés (voir la figure 3.12), nous avons découpé les feuilles de mylar d'épaisseur $100\mu\text{m}$ à l'aide d'une imprimante laser. Nous profitons

de cette étape pour percer les pliures et ne laisser qu'une fraction de la feuille pour relier les faces. Cela entraîne deux conséquences : tout d'abord, l'enlèvement d'une partie du matériau diminue la largeur effective de la pliure, et donc sa rigidité, comme nous pouvons le constater dans l'expression son énergie élastique (1.4). Mais l'effet le plus important est la chute du seuil de plasticité entraîné par l'endommagement local. Ces deux effets rendent la variation angulaire de la pliure plus facile que la flexion des faces de l'origami afin de s'assurer que les deux configurations stables sont séparées par une haute barrière énergétique. Pour nos expériences, nous avons décidé d'enlever 70% du matériau suivant un motif visible dans la figure 3.12.

À partir du motif découpé, nous assignons manuellement la direction montagne ou vallée pour chaque pliure. Puis, la cohésion du cylindre complet est assurée en scotch au double-face les languettes de chaque branche du motif à la face voisine correspondante. De la même manière, un pentagone découpé dans la feuille en mylar est collé aux languettes présentes aux extrémités de chaque branche pour fermer le volume.

Réponse mécanique du soufflet unique

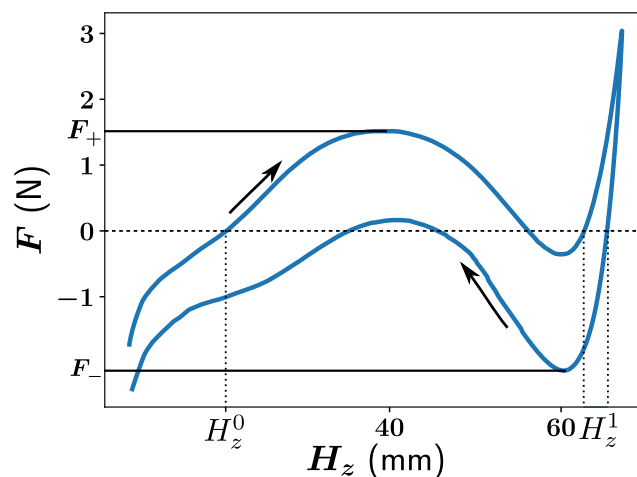


FIG. 3.13 Réponse mécanique typique d'un soufflet unique avec $\Phi_1 = 80^\circ$ et $l_1 = 32$ mm. La force F est mesurée pour une hauteur du soufflet H_z imposée. Les lignes pleines montrent les valeurs seuils $F_+ = 1.5$ N et $F_- = -2.12$ N de transition entre les configurations. Les hauteurs des configurations pliée (H_z^0) et déployée (H_z^1) sont indiquées.

Afin d'évaluer la réponse mécanique d'un module, nous avons collé les deux pentagones aux extrémités à une machine de traction uniaxiale. Cela assure l'absence de rotations aux bords pendant le test et, couplé avec une mise à zéro préalable de la machine, garantit que la distance mesurée est bien la hauteur du soufflet H_z (voir la figure 3.12). Le protocole du test mécanique consiste en trois cycles d'extension-compression entre deux chargements extrêmes permettant au soufflet de se déployer et de se plier à chaque cycle. La réponse typique du dernier cycle est montrée en figure 3.13.

L'hystérèse du cycle est notable pour le soufflet unique. Nous l'attribuons aux déformations non élastiques des pliures que nous avons décrites au chapitre II et, plus particulièrement, aux changements des angles au repos. En partant d'une configuration pliée, pour laquelle les angles au repos sont fermés, le déploiement du soufflet élargit progressivement tous les plis. Comme le seuil plastique a été fortement réduit par les entailles, la configuration de référence est rapidement modifiée et l'angle au repos s'ouvre. Au contraire, lors du pliage du module, l'angle au repos diminue. Bien que le protocole de création du soufflet rende la contribution énergétique de l'élasticité des faces dominante, celle de la pliure n'est pas négligeable et, couplée à la variation d'angle au repos, est à l'origine de la différence entre pliage et déploiement.

Lors du déploiement (resp. pliage) du soufflet, la force augmente (resp. diminue) initialement avant d'atteindre une valeur seuil F_+ (resp. F_-). Ces deux seuils définissent les valeurs maximales de chargement que supporte le système avant de devoir changer de configuration.

En tant que système bistable, le soufflet dispose bien de trois positions d'équilibres ($F = 0$), deux stables et une instable. Cependant, les hauteurs H_z à ces équilibres ne sont pas les mêmes en compression ou extension. Pour la configuration déployée, nous considérons que sa hauteur à l'équilibre H_z^1 se trouve dans l'intervalle délimité par les hauteurs maximales obtenues pour $F = 0$ en extension et en compression. Pour la configuration pliée, nous définissons sa hauteur H_z^0 comme celle obtenue pour le premier état d'équilibre $F = 0$ lors du déploiement.

Variations du motif

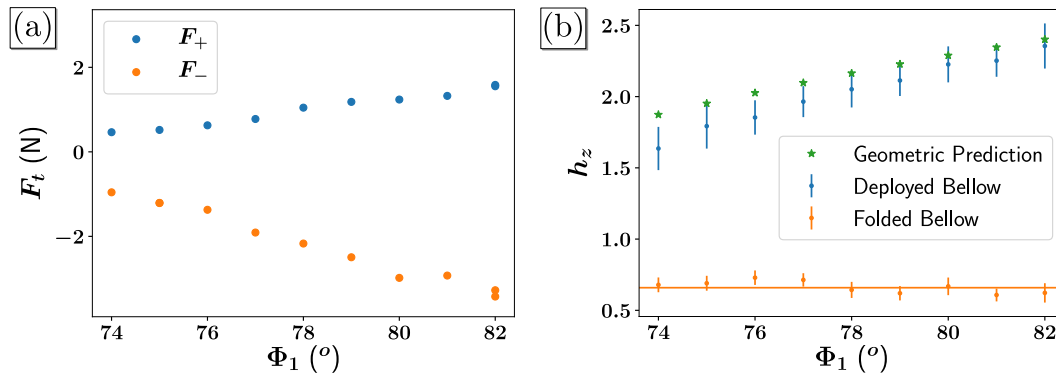


FIG. 3.14 (a) Évolution de F_+ et F_- suivant l'angle de motif Φ_1 choisi. (b) Hauteur relative des motifs $h_z = \frac{H_z}{l_1}$ pour les configurations déployées et pliées mesurées expérimentalement. Les étoiles vertes correspondent à la prédiction géométrique de la hauteur déployée (3.9). La ligne orange correspond à la valeur moyenne de la hauteur pliée $h_0 = 0.66$.

Nous avons effectué un test mécanique pour plusieurs motifs tels que Φ_1 se situe entre 74° et 82° , pendant que Φ_2 vérifie l'équation (3.8). Les données récoltées montrent que les valeurs absolues des forces seuils $|F_+|$ et $|F_-|$ augmentent avec l'angle Φ_1 de façon monotone (voir la figure 3.14 (a)). En ce qui concerne les hauteurs des deux confi-

gurations, une déployée et l'autre pliée, nous avons tenu compte des approximations induites par l'étape de collage des différentes branches du soufflet en envisageant un intervalle pour l_1 entre 30 et 32 mm lors de la normalisation de la hauteur $h_z = \frac{H_z}{l_1}$, en plus des considérations précédemment énoncées. Nous obtenons les barre d'erreurs visibles dans la figure 3.14 (b).

Les pliages que nous étudions sont pliables à plat, et donc théoriquement de hauteur pliés nulle. Toutefois, cette hauteur n'est pas physiquement réalisée en raison de l'épaisseur du matériau et de la rigidité des pliures. Tous les soufflets analysés ont une hauteur pliée proche $H_z^0 \approx 0.66l_1 = 21$ mm, bien plus grande que l'épaisseur théorique repliée qui est $4e$. Cette différence provient de l'ensemble des plis du soufflet qui, par leurs angles au repos, ont une configuration d'équilibre qui ne correspond pas à celle complètement pliée.

L'étude de l'état déployé est plus intéressante. La hauteur géométrique théorique totale du soufflet déployé h_z^1 est obtenue par projection du vecteur \underline{w}_3 sur l'axe \underline{e}_z , ce qui donne

$$h_z^1(\Phi_1) = \frac{2l_1 \cos \Psi(\Phi_1)}{\cot \Phi_2(\Phi_1) - \cot \Phi_1}, \quad (3.9)$$

avec $\Phi_2(\Phi_1)$ satisfaisant l'équation (3.8) et $\Psi(\Phi_1)$ satisfaisant l'équation (3.7) pour un signe négatif. Les valeurs de h_z^1 expérimentales sont raisonnablement en accord avec les prédictions géométriques de l'équation (3.9).

L'accroissement de l'écart de hauteurs entre les deux configurations avec Φ_1 rend la déformation des faces plus importantes lors de la transition, et donc augmente la valeur des forces seuils.

3.2.3 Soufflets comme système mémoire

Soufflet comme élément de Preisach

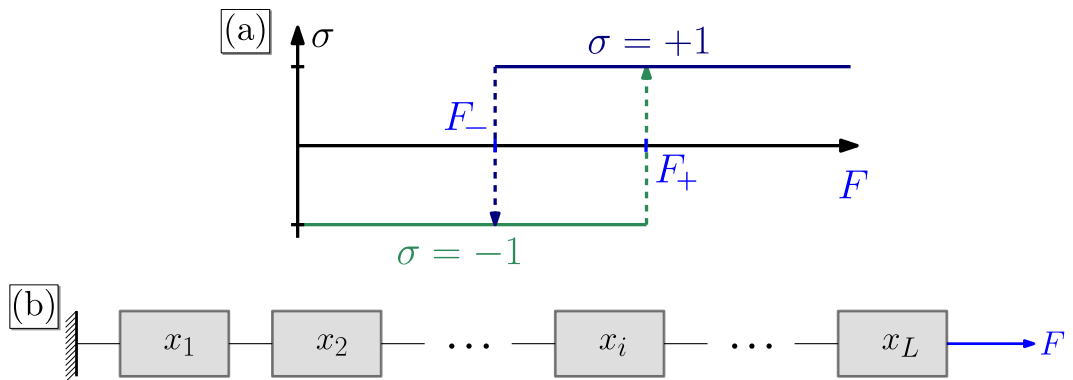


FIG. 3.15 (a) Hystéron, modèle de cycle d'hystérésis de Preisach. $\sigma = \pm 1$ représente chacune des deux configurations d'un système bistable. (b) Chaîne d'hystérons.

Le modèle de Preisach, initialement employé en ferromagnétisme [156], est une modélisation mathématique simple des systèmes avec cycle d'hystérésis. La description du modèle se base sur un opérateur élémentaire appelé hystéron σ , dont le comportement est détaillé en figure 3.15 (a). σ peut prendre deux valeurs $+1$ et -1 suivant la valeur d'une variable d'entrée F :

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } F > F_+, \\ -1 & \text{si } F < F_-, \\ k & \text{si } F_- < F < F_+. \end{cases} \quad (3.10)$$

La valeur de k dépend de l'histoire du système. En partant de $F < F_-$ et en augmentant F , $k = -1$ jusqu'à F_+ . Inversement, en partant de $F > F_+$ et en diminuant F , $k = +1$. Ainsi, dans une configuration pour laquelle $F_- < F < F_+$, k est un bloc mémoire élémentaire du système qui renseigne sur une valeur passée de F .

Ce modèle peut s'appliquer pour des systèmes bistables et particulièrement pour notre soufflet cylindrique en origami. Fondamentalement, il dispose de deux configurations, déployée et pliée, d'équilibre stable et la transition entre elles se fait à des valeurs seuils de force F_- et F_+ .

Un intérêt majeur du modèle de Preisach apparait lorsque plusieurs hystérons sont considérés simultanément. Prenons l'exemple schématisé en figure 3.15 (b) d'une chaîne de L hystérons. L'équilibre des forces internes du montage en série garantit que la force F appliquée à une extrémité est celle subite par chaque hystéron. Ainsi, les transitions entre configurations globales lors du changement de F dépendent des valeurs F_- et F_+ de chaque hystéron, et définissent des capacités de mémorisation pour le système.

Soufflets en série

Pour appliquer le modèle de Preisach à nos origamis, nous avons produit une pile de plusieurs modules en collant les extrémités pentagonales entre elles avec de l'adhésif à double-face. Nous avons choisi d'étudier un empilement de quatre modules de motifs différents. Plus précisément, l'angle Φ_1 , qui permet de complètement définir le motif, diminue avec le numéro du module. Ainsi, l'empilement $\Phi_1 = [82, 80, 78, 75]^\circ$ permet d'obtenir un nombre raisonnable de configurations d'équilibre tout en s'assurant que les barrières énergétiques sont uniques et bien séparées pour chaque section. Afin de décrire l'état du système, nous utilisons un codage binaire traduisant si le module est plié (0) ou déployé (1).

Nous avons remarqué dans la figure 3.14 que les valeurs de forces seuils croissent de manière monotone avec Φ_1 . Les modules étant découplés, cette observation est suffisante pour prédire la réponse de notre système à des contraintes extérieures. Pour prendre un exemple, partons d'une configuration pour laquelle tous les modules sont

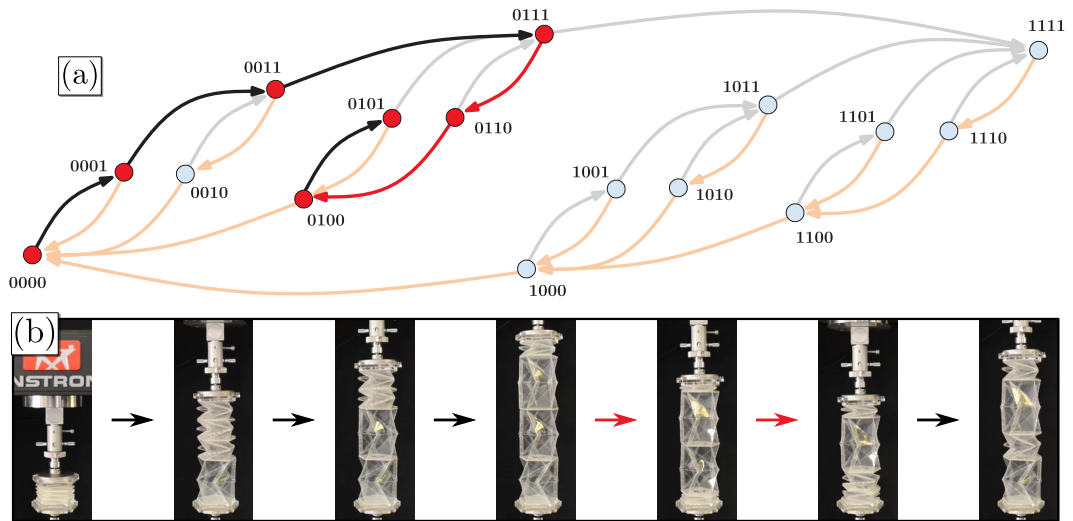


Fig. 3.16 (a) Graphe orienté des transitions entre états possibles pour 4 modules en série d'angles de motif $\Phi_1 = [82, 80, 78, 75]$. 1 correspond à un module déployé et 0 à un soufflet plié. Chaque point est une configuration d'équilibre stable du système. Les flèches bleues ou noires (resp. rouges) indiquent le déploiement (resp. pliage) d'un soufflet. (b) Méthode pour atteindre 0101 en partant de 0000 expérimentalement sur la série de modules. La correspondance dans le diagramme est indiquée par les flèches opaques.

pliés. Cette configuration reste la même jusqu'à ce que la force atteigne la valeur F_+ d'un module qui se déploie. Dans notre cas, c'est le module à 75° puisque sa force seuil est la plus petite. En continuant d'augmenter la force, tous les modules se déploient au fur et à mesure selon l'ordre des F_+ . Pour les mêmes raisons, une règle équivalente sera suivie lorsque la pile est comprimée. L'ensemble des configurations possibles et les transitions entre elles sont cartographiés dans le graphe orienté de la figure 3.16 (a).

Un ordre identique pour $|F_+|$ et $|F_-|$ assure que la pile de modules puisse encoder chacune des 16 configurations que peut prendre le système de manière quasi statique. Nous montrons par exemple comment arriver à la configuration 0101 depuis la configuration 0000 en figure 3.16 (b).

Lecture de la configuration

Maintenant que nous pouvons placer la pile dans des configurations spécifiques, il serait intéressant de pouvoir les reconnaître. Pour cela, nous avons placé l'empilement dans toutes ses configurations stables et observé sa réponse mécanique proche de l'équilibre pour de faibles déformations et selon un petit cycle d'extension-compression. De la même manière que pour un module unique, cela donne un intervalle de hauteur d'équilibre pour chaque configuration. Nous l'avons comparé à une hauteur théorique

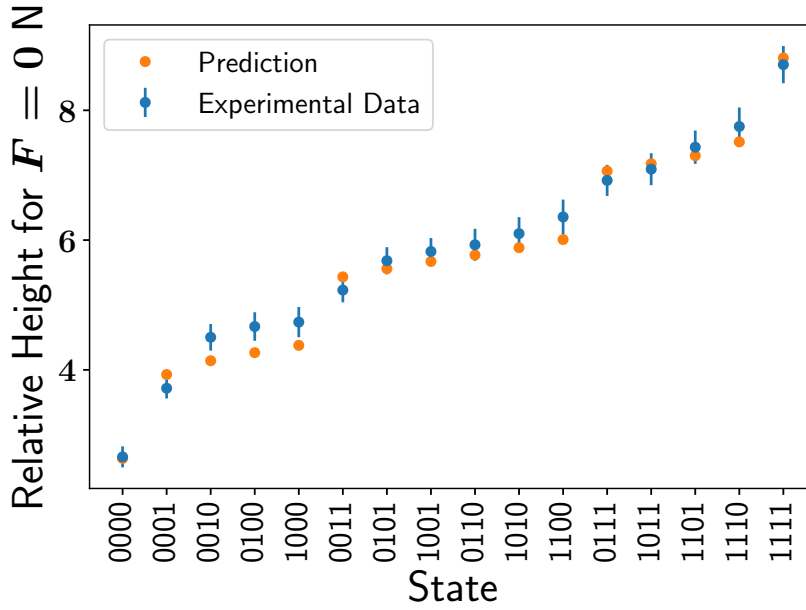


FIG. 3.17 Lecture de l'état du système par la hauteur totale relative de la série de soufflets uniques mesurée expérimentalement (points bleus) et prédite (points orange) selon une méthode détaillée dans le texte.

h_{th} combinant les hauteurs géométriques des modules déployés $h_z^1(\Phi_1)$ et les hauteurs mesurées des modules pliés h_z^0

$$h_{th}(k_1k_2k_3k_4) = \sum_i h_z^0 + k_i(h_z^1(\Phi_1^i) - h_z^0) \quad (3.11)$$

avec i le numéro du module de la pile, Φ_1^i l'angle de motif du module i et k_i l'état du module i . Par exemple, pour la pile dans l'état 0101, cela correspond à $h_{th}(0101) = 2h_z^0 + h_z^1(75^\circ) + h_z^1(80^\circ)$. Encore une fois, la hauteur théorique est raisonnablement en accord avec les mesures expérimentales.

En ce qui concerne la discrimination entre les configurations, le saut en hauteur est suffisant pour démarquer avec certitude le nombre total de modules déployés, entre 0 et 4. De plus, l'ordre théorique des hauteurs des configurations est le même que celui mesuré expérimentalement. Toutefois, les barres d'erreurs empêchent une lecture indiscutable de la configuration.

Série de soufflets couplés

Une façon alternative d'obtenir des soufflets longs, différente de la méthode modulaire, est de prolonger directement les branches en incluant plus de sections (voir la figure 3.18 (a)). La taille totale du motif que nous pouvons dessiner étant restreinte par les dimensions de notre feuille de départ, la fabrication du cylindre passe par celle des branches isolées. La découpe laser et le collage des languettes est similaire à la

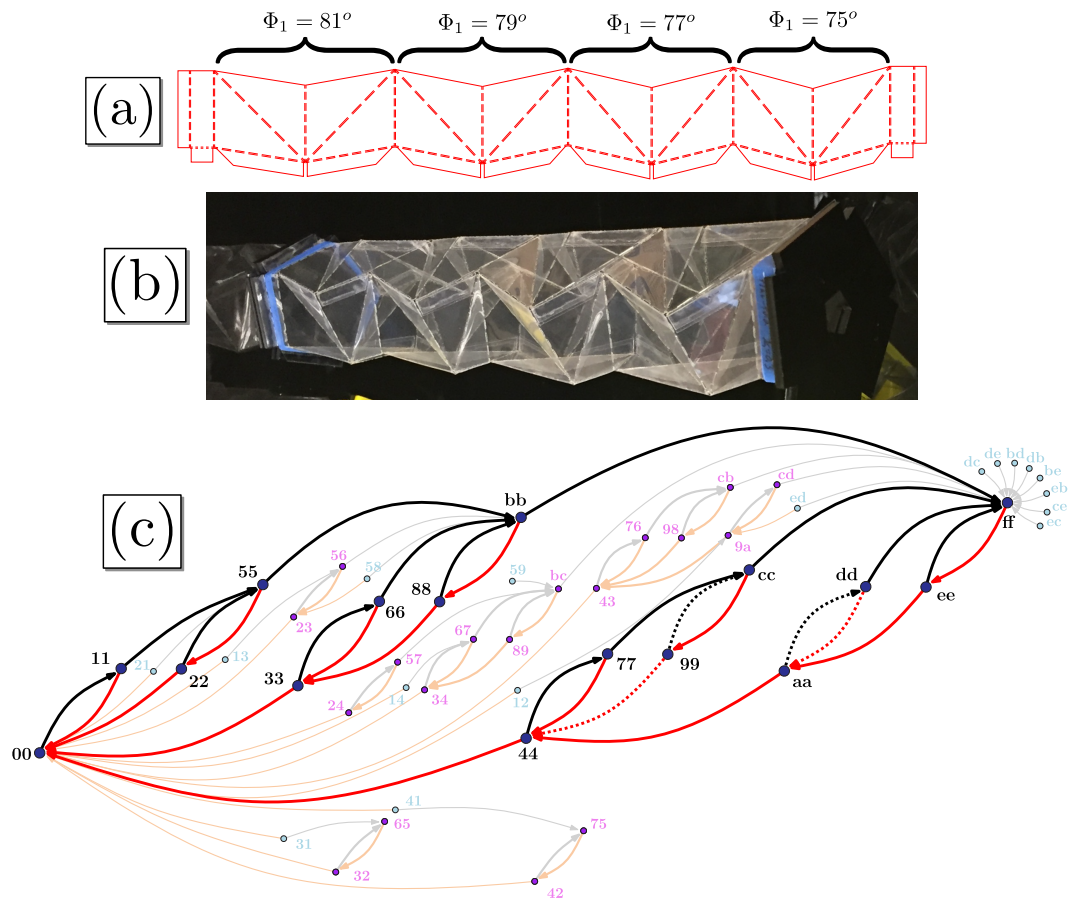


FIG. 3.18 (a) Motif d'une branche avec 4 couples de sections d'angles de motif respectifs $\Phi_1 = [81, 79, 77, 75]^\circ$. (b) Soufflet obtenu avec $n = 5$ après pliage et collage. (c) Graphe orienté partiel expérimental des transitions entre les configurations stables. Les points bleus correspondent aux configurations identiques à l'assemblage de soufflet décollés en figure 3.16. Les autres points correspondent aux autres configurations. Le premier (resp. second) chiffre hexadécimal du numéro de chaque configuration est traduit en code binaire dans le tableau 3.1 et correspond à l'état de la section gauche (resp. droite) de tous les couples de sections. Pour exemple, 59 correspond à 01-00-11-10, avec les - séparant les différents couples. Les flèches noires ou bleues (resp. rouges) indiquent le déploiement (resp. le pliage) d'une paire de sections tel qu'observé expérimentalement.

technique employée pour les modules individuels et permet de produire un long pliage cylindrique (voir la figure 3.18 (b)).

Afin de comparer la réponse de ce nouveau soufflet avec celui utilisant des modules, nous avons plié un origami similaire à 5 branches avec 4 couples de sections d'angles $\Phi_1 = [81, 79, 77, 75]^\circ$, que nous avons testé mécaniquement en limitant toujours la rotation des pentagones aux extrémités. À notre grande surprise, nous avons observé des configurations géométriquement interdites, où deux sections appartenant à deux couples différents se plient ou se déploient ensemble. La description complète de la configuration ne se fait alors avec plus avec 4, mais 8 booléens, reflétant l'état déployé ou plié de chaque section.

Toutefois, les passages entre configurations se font toujours par paires de sections de directions opposées pour conserver une faible hélicité interne. Ainsi, nous avons codifié les 70 configurations possibles avec deux nombres hexadécimaux traduisant le

code binaire de l'ensemble des sections de droites et de gauches des couples selon le tableau 3.1. Avec la condition de transition par paires, cela simplifie la lecture et la compréhension de la configuration. Par exemple, un 1 n'est suivi que par 1, 2, 3 ou 4. Les configurations et les transitions observées expérimentalement sur le long soufflet sont transcrites dans le graphe orienté 3.18 (c).

La présence d'une pliure reliant les couples de sections est à la raison mécanique

0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0001	0010	0100	1000	0011	0101	1001
f	e	d	c	b	a	9	8
1111	1110	1101	1011	0111	1100	1010	0110

TAB. 3.1 Tableau de décodage du nombre hexadécimal des configurations de la figure 3.18.

derrière ce comportement. En effet, l'angle de cette pliure dépend de l'état des deux couples de sections adjacents. Si les deux sont déployés, il a pour angle π , alors que si les deux sont pliés, il a pour angle 0. La rigidité de la pliure affecte alors les barrières énergétiques suivant les configurations. Par exemple, si un couple adjacent est déjà plié, son angle est $\pi/2$. Il sera donc plus difficile de plier l'autre section au contact de la pliure, puisque cela fermerait complètement le pli. Les angles des motifs de toutes les sections étant relativement proche, l'élasticité du matériau peut supporter les rotations internes qui en résultent au travers de légères déformations des faces, d'où l'apparition de configurations interdites géométriquement.

3.2.4 Conclusion

Les soufflets cylindriques en origamis peuvent être utilisés comme source de mémoire mécanique suivant deux archétypes de systèmes. Soit avec l'empilement de m modules individuels découplés ayant chacun ses propriétés mécaniques. Ce système dispose non seulement d'un comportement prédictible, mais dispose aussi d'un certain niveau de lecture externe des 2^m configurations possibles. Soit en couplant les différentes sections du soufflets par des pliures, ce qui force chaque configuration à posséder un paysage énergétique et donc un diagramme de configuration unique. Cependant, nous n'avons exploré qu'une infime région de l'ensemble des couplages qu'il est possible d'apporter en changeant les propriétés des pliures.

Conclusions et perspectives

La présente thèse avait pour objectif principal de mieux comprendre le comportement mécanique des origamis à partir des propriétés du matériau qui les compose. Ce que nous avons accompli au travers, principalement, de l'étude détaillée d'un élément essentiel, à savoir la pliure. En nous basant sur une théorie de déformations élastiques des plaques minces, et en considérant la forme du pli au repos comme une nouvelle configuration de référence, nous avons démontré par une simple expérience de traction que la pliure est déterminée par deux paramètres : l'angle entre les faces qu'elle impose au repos et sa longueur caractéristique. Cette modélisation permet une implémentation aisée de la pliure en méthode des éléments finis. Celle-ci conserve la richesse des modes de déformations élastiques qu'il est possible d'atteindre avec des systèmes complexes comme les pliages, tout en évitant les problèmes expérimentaux de contrôle des angles au repos. Plus intéressant encore, nous obtenons la valeur précise de la raideur d'une pliure à partir de sa largeur typique et des propriétés élastiques locales du matériau. Ainsi, quand la formation de la pliure n'est pas accompagnée d'un endommagement local du matériau, ce qui préserve ses propriétés élastiques, la rigidité du pli est proportionnelle au carré de l'épaisseur de la feuille. Le cas échéant, le pli est considéré comme rigide et il est énergétiquement plus favorable de déformer élastiquement les faces que d'ouvrir ou fermer les pliures qui agissent alors comme des conditions aux limites internes imposant des angles entre les faces.

Pour un pliage dont le motif comprend de multiples plis, la forme structurelle du système à l'équilibre mécanique découle d'une compétition entre la géométrie du motif et l'élasticité des faces et des pliures. Ceci induit une riche variété de modes de déformation avec frustrations, inexistante avec des considérations purement géométriques de faces rigides. Ainsi, dans l'accordéon courbé en origami que nous avons étudié, la forme déployée présente non seulement une courbure discrète selon une pliure centrale qui ne dépend que de la géométrie du motif, mais aussi un facettage triangulaire des faces typique de rubans élastiques fins en torsion voire un flambage de bords libres suivant les dimensions exactes des faces. Tous ces phénomènes résultent de la rigidité des pliures relative à la déformation élastique des faces. Nous trouvons ici une limite de notre analyse. En effet, nous n'avons considéré qu'un angle au repos et qu'une rigidité, identiques pour les plis. Il existe donc encore une plus grande richesse de configurations en équilibre à atteindre en choisissant soigneusement tous

ces paramètres.

La réponse élastique n'est pas le seul comportement mécanique que nous observons pour un pli. La nécessité d'effectuer des déformations irréversibles pour former une pliure, tout en conservant un important régime élastique, oblige à considérer des matériaux présentant une rhéologie viscoélastique complexe, comme le mylar. Une conséquence directe recherchée est que si la contrainte locale est assez élevée, l'angle au repos de la pliure est modifié. Nous avons montré qu'il est possible de suivre strictement ce changement de la configuration de référence à partir de la mesure macroscopique d'une force et, ainsi, contrôler in situ l'angle au repos pour un pliage unique. En conséquence, en prenant en compte la concentration des contraintes de cisaillement dans la pliure, le pli devient un système permettant l'analyse rhéologique du matériau et, par exemple, nous constatons que le seuil plastique diminue nettement après la formation d'une pliure.

Plus encore, l'étude de la relaxation du pli unique renseigne sur la composition microscopique du matériau. L'examen de l'intrigant effet Kovacs, défini par une relaxation non monotone de la force suivant un protocole expérimental spécifique, démontre l'existence d'une répartition de temps caractéristiques internes au système. Cependant, le comportement de relaxation en double logarithme que nous avons analysé ainsi que la non-linéarité entre temps d'attente et temps de repic pour l'effet Kovacs indiquent qu'un modèle de spectre venant d'une statistique d'activation thermique en loi d'Arrhénius n'est pas suffisant comme explication quantitative du phénomène. La compréhension de l'évolution temporelle de l'angle au repos s'avère primordiale pour décrire certaines propriétés des origamis multistables. Par exemple, l'existence d'une configuration métastable peut dépendre de la valeur de l'angle au repos. Si elle est changée au cours du temps, des phénomènes d'instabilités retardées, comme ceux observés avec des calottes sphériques élastiques [79], peuvent apparaître.

L'exploitation de l'ensemble des propriétés mécaniques exposées et le nombre infini de motifs imaginables permet aux origamis d'être d'excellents métamatériaux, au-delà de simples considérations mécaniques. L'exemple présenté dans cette thèse est l'utilisation de soufflets origamis circulaires et bistables en vue de la création d'un système de mémoire binaire encodable et lisible par actionnement global. Le diagramme des transitions entre les configurations stables atteignables est régulé au moyen de pliures. Il serait intéressant d'analyser plus scrupuleusement la relation entre la rigidité de la pliure et les corrélations qu'elle incite entre les sous-systèmes, les couples de sections pour notre étude, afin de mieux cerner les possibilités mémorielles offertes par le pliage.

En plus de mon travail sur les origamis, j'ai effectué deux projets secondaires pendant ma thèse, tous les deux centrés sur la réponse de feuilles minces sous différentes configurations mécaniques. Tout d'abord en appendice A, je montre une étude expéri-

mentale exploratoire sur la forme observée lorsqu'une feuille, assez grande pour que la gravité ne soit plus négligeable, est poussée dans un cylindre vide. L'expérience est accompagnée d'une première modélisation énergétique essayant de définir le rayon critique du disque pour lequel le mode de déformation change. En appendice B, je présente une étude expérimentale préliminaire de la déformation dynamique d'une membrane élastique circulaire mince en rotation rapide, plus particulièrement du seuil d'instabilité au-delà duquel la membrane prend une forme présentant des lobes tournant à une vitesse inférieure à celle imposée par le moteur. Ces deux projets ne concernant pas les origamis et n'étant que partiellement finis, ils ne sont pas inclus dans le corps de thèse.

Par la présente étude, j'espère poser les bases mécaniques théoriques et expérimentales permettant une meilleure compréhension des comportements déjà observés sur les origamis. Il reste encore une grande richesse de comportements physiques engendrés par les pliages à explorer, par exemple en jouant sur les angles au repos des pliures, le rapport entre la rigidité des faces et celle des plis, mais aussi l'exploitation des comportements dynamiques produits par la rhéologie viscoélastique du matériau.

Appendice A : Le g -cone

A.1 Introduction

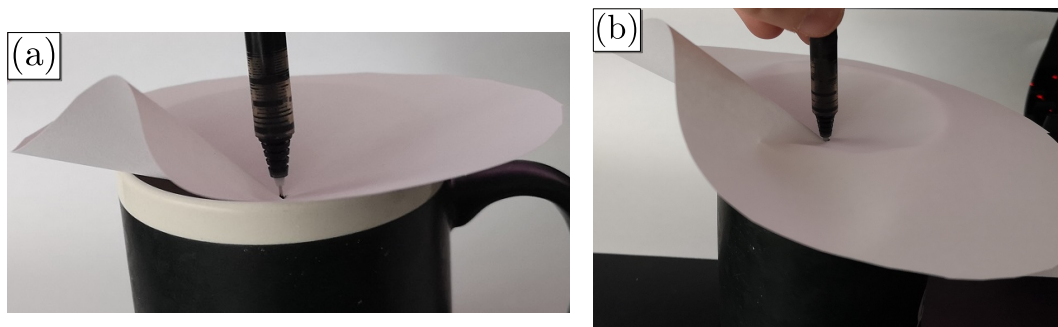


FIG. A.1 (a) Dislocation conique (d -cone) obtenue en poussant un disque élastique fin dans un cylindre de rayon légèrement plus faible. (b) g -cone apparaissant quand le rayon du disque devient grand.

Dans le corps de la présente thèse, nous avons abordé le sujet du compactage d'une grande feuille élastique mince dans un volume réduit, par exemple avec la formation de rides d'étirements [201]. Toutefois, ce n'est pas l'unique mode de déformation comme nous pouvons le constater en poussant une feuille mince circulaire dans un cylindre de rayon inférieur (voir la figure A.1 (a)). Le disque se déforme selon une transformation isométrique, sauf dans une petite région en son centre [125], dans une configuration développable quasi conique qui est appelée cône développable ou d -cone et dont les détails structurels ont été abondamment étudiés [5, 37, 35, 34, 12]. Cependant, une tout autre forme émerge lorsque le rayon du disque devient assez grand (voir la figure A.1 (b)). Les sections externes du disque, au-delà du rayon du cylindre, tombent sous l'effet de la gravité et une ride circulaire apparaît le long du bord du cylindre. Nous nommons cette forme cône gravitationnel, ou g -cone. Cet appendice présente le travail d'investigation préliminaire, que j'ai effectué avec D. Vella durant un court séjour de deux mois à Oxford, pour comprendre l'origine du choix entre la déformation en d -cone ou en g -cone. Une première expérience testant les modes de déformations de plusieurs disques d'épaisseurs et de rayons différents poussés dans des cylindres de rayons différents, nous permet d'obtenir un diagramme de phase des modes. Aussi, nous formulons une première modélisation du phénomène en nous basant sur les énergies associées aux formes de g -cones, de d -cones, mais aussi des cônes d'étirements à très faibles déformations.

A.2 Expérience

Notre travail fut tout d'abord expérimental. Nous avons testé la déformation de plusieurs disques minces en mylar de rayons R , compris entre 25 et 150 mm, poussés dans des cylindres de rayons R_i , compris entre 7.5 et 100 mm. Pour chaque disque, nous avons mesuré leurs épaisseurs e , de 50 à 100 μm et leurs longueurs caractéristiques de flexion gravitaire l_g par test du pli libre (free fold test), consistant à mesurer la taille de la boucle produite en repliant une longue section de la feuille sur elle-même (voir [148] pour plus de détails). l_g indique la longueur typique pour laquelle la gravité est suffisante pour faire fléchir significativement une feuille mince. Elle a pour expression

$$l_g = \left(\frac{Ee^2}{\rho g} \right)^{1/3} \quad (\text{A.1})$$

avec E le module d'Young du matériau, ρ la masse volumique du matériau et g la pesanteur terrestre.

Après avoir mesuré l_g , nous avons découpé plusieurs disques de rayon R . Nous avons testé le comportement de chaque disque pour tous les cylindres de rayon $R_i < R$ dont nous disposons. Ce test consiste à placer le disque sur le bord haut du cylindre de tel sort que le centre du disque passe par l'axe central du cylindre. Puis, nous avons poussé ce centre en lui imposant un déplacement d avec un embout fin placé sur une vis micrométrique jusqu'à ce que la feuille adopte une forme de g -cone ou d -cone. Nous avons renouvelé cette opération plusieurs fois pour vérifier que l'expérience est reproductible et donc que les approximations expérimentales (par exemple un disque mal centré) n'ont que peu d'influence sur la configuration de déformation observée. Les résultats sont affichés dans la figure A.2. Nous constatons qu'après normalisation par l_g , les données pour les différentes épaisseurs de mylar se regroupent selon un diagramme de phase unique, pour lequel la séparation entre g -cone et d -cone est nette.

Nous apportons en plus de ce diagramme trois observations expérimentales.

Tout d'abord, le déplacement doit atteindre une valeur critique d_c pour que le disque présente une forme en g -cone ou d -cone. Avant d_c , l'ensemble du bord circulaire haut du cylindre reste en contact avec la feuille. Cela indique que le disque se déforme selon un autre mode de déformation, différent du g -cone et du d -cone pour $d < d_c$ que nous supposons être un cône d'étirement.

Nous observons aussi que, pour des déplacements proches de d_c , le type de déformation pour $d > d_c$ peut changer si nous augmentons d , mais uniquement pour le passage d'un g -cone à un d -cone.

Enfin, une barrière énergétique bloque cinétiquement les configurations g -cones ou d -cones. Ainsi, il est possible d'obtenir un d -cone à partir d'un disque qui devrait produire un g -cone en forçant la déformation manuellement. La forme imposée reste

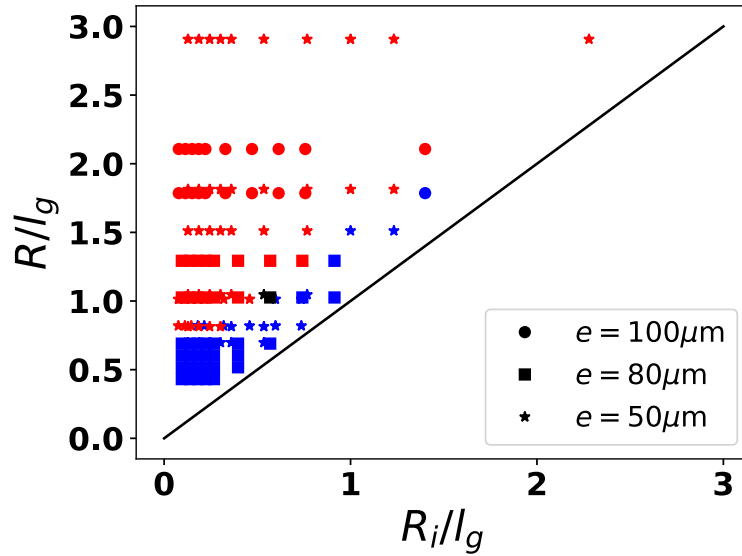


FIG. A.2 Espace des phases pour une feuille de mylar circulaire de rayon R poussée dans un cylindre de rayon R_i normalisé par la longueur de flexion gravitaire l_g . Le symbole représente l'épaisseur de la feuille, entre 50 et 100 μm , et la couleur traduit le type de déformation, d -cône en bleu, g -cône en rouge ou les deux en noir. Le trait noir délimite la région des configurations possibles $R > R_i$.

stable lorsque nous augmentons ou diminuons d . Cette observation est aussi valable pour un d -cône transformé en g -cône.

A.3 Modèle énergétique

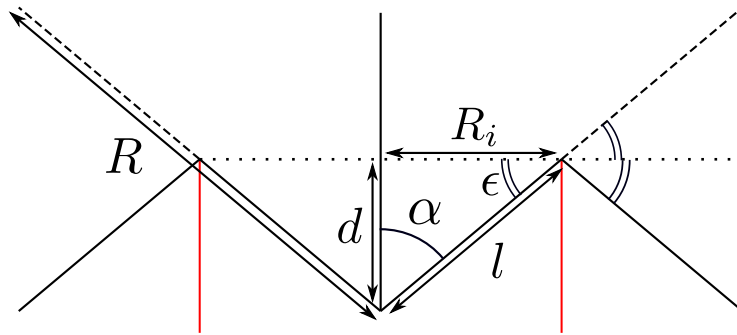


FIG. A.3 Schéma simplifié de la déformation en d -cône (tirets) et en g -cône (traits pleins) pour un disque de rayon R dont le centre est poussé sur une longueur d dans un cylindre rouge de rayon R_i .

Afin de comprendre la condition de sélection du type de la déformation, nous avons effectué une modélisation énergétique simple du système à partir de la déformation schématisée en figure A.3. Étant donnée la géométrie du système, nous prenons le parti pris d'employer une description similaire à celle du d -cône [35] en utilisant les coordonnées d'un référentiel cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ centré sur le disque pour établir la position de chaque point lors de la déformation. Nous considérons une déformation de type conique qui, loin du sommet du cône $r = 0$, transforme le vecteur $\underline{r}e_r$ en $\underline{r} = \underline{r}e_r + z(r, \theta)\underline{e}_z$ avec $z(r, \theta) = r\psi(\theta)$, ψ étant une fonction à définir et représentant

l'angle local de la génératrice avec l'horizontal. Le sommet du cône se trouve toujours en $z = 0$.

Dans un premier temps, nous cherchons une modélisation pour de petites déformations $z(r, t) \ll r$. Dans une géométrie de déformation conique, n'importe quelle génératrice passant par un bord du cylindre donne $\psi(\theta) = d/l \approx \epsilon$ avec d le déplacement selon l'axe $-\underline{e}_z$ du centre du disque et l la longueur entre ce centre et le bord du cylindre. Notre approximation de faibles déformations conduit à $\epsilon \ll 1$.

Nous considérons trois archétypes de déformations : le cône en étirement, le g -cône et le d -cône. Afin d'être à l'équilibre, le système tend à minimiser son énergie totale. Le mode de déformation de la feuille correspond alors à la configuration d'énergie totale minimale. Pour vérifier cela, nous allons détailler toutes les contributions énergétiques pour chaque mode.

Le d -cône est considéré selon la déformation décrite par Cerda et al. dans [35]. Nous identifions la section $|\theta| < \theta_1$ du disque comme n'étant pas en contact avec le cylindre. Pour le g -cône, la description devient plus complexe, puisque la forme n'est pas développable. Dans une première approche qui cherche à simplifier au maximum le système, nous subdivisons le g -cône en trois sections. La partie centrale $r < R_i$ conique et la partie externe qui n'est pas en contact avec le cylindre $r > R_i$ et $|\theta| < \theta_1$ ont la même forme que le d -cône. La partie externe en contact avec le cylindre $r > R_i$ et $|\theta| > \theta_1$ se comporte comme un cône inversé $z(r > R_i, |\theta| > \theta_1) = (2R_i - r)\psi(\theta)$.

Pour de très faibles déformations, nous considérons un cône d'étirement pour lequel seule la partie centrale $r < R_i$ est en déformation pendant que la partie $r > R_i$ reste dans l'état plat initial. Nous allons maintenant détailler sur les estimations des contributions énergétiques que nous considérons pour chaque mode de déformation.

A.3.1 Contributions énergétiques

Potentiel gravitationnel

Commençons par calculer le potentiel gravitationnel associé à chaque configuration. Avec la description que nous avons donné de la feuille, ce potentiel s'écrit

$$E_g = 2 \int_0^R \int_0^\pi \rho g e (z(r, \theta) - z(R_i, \theta)) r dr d\theta \quad (\text{A.2})$$

$$= 2\rho g e \int_0^R (r - R_i) r dr \int_0^\pi \psi(\theta) d\theta. \quad (\text{A.3})$$

Le zéro est choisi afin de correspondre à la configuration plate du disque posé au-dessus du cylindre. Nous séparons cette contribution en trois parties, correspondant aux sections détaillées pour le g -cône. De plus, nous considérons que l'angle de la partie qui ne rentre pas au contact avec le cylindre est le même que celui pour le reste

du disque, afin de simplifier les calculs. En d'autres mots, $\psi(|\theta| < \theta_1) \approx \epsilon$. Les trois contributions s'écrivent alors

$$E_{g,0} \approx 2\rho g e \int_0^{R_i} (r - R_i) r dr \int_0^\pi \psi(\theta) d\theta = -\frac{1}{3} \rho g e \pi \epsilon R_i^3 \quad (\text{A.4})$$

$$E_{g,1} \approx 2\rho g e \int_{R_i}^R (r - R_i) r dr \int_0^{\theta_1} \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{3} \rho g e \theta_1 \epsilon f(R) \quad (\text{A.5})$$

$$E_{g,2} \approx 2\rho g e \int_{R_i}^R (r - R_i) r dr \int_{\theta_1}^\pi \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{3} \rho g e (\pi - \theta_1) \epsilon f(R) \quad (\text{A.6})$$

avec $f(R) = 2R^3 - 3R^2R_i + R_i^3$.

Énergie élastique de flexion

Pour le d -cone et le g -cone, la flexion du disque s'accompagne d'une énergie élastique de flexion E_f estimé par Cerda et al. [35] par

$$E_f \approx E e^3 \log\left(\frac{R\epsilon}{e}\right) \epsilon^2 \quad (\text{A.7})$$

Nous travaillons avec des feuilles minces et pour de petites déformations. Comme l'énergie de flexion est proportionnelle à $e^3 \epsilon^2$, sa contribution est très faible et nous allons dans un premier temps la négliger. Nous vérifierons cette affirmation à postériori.

Cône d'étirement

Pour de très petites déformations, le disque commence par subir une déformation en cône d'étirement qui découple la région externe $r > R_i$, restant dans une configuration plane, et la région interne $r < R_i$, en étirement imposé par le déplacement d . Dans cette seconde zone, nous estimons le faible étirement de chaque rayon par $\frac{l-R_i}{R_i} \approx \epsilon^2/2$. En utilisant la loi de Hooke, l'énergie d'étirement intégrée pour tout le cône s'écrit

$$E_{et} \approx \frac{\pi}{4} E e R_i^2 \epsilon^4. \quad (\text{A.8})$$

Ride d'inversion

L'apparition du g -cone nécessite une inversion du cône de déformation. Basée sur l'inversion modélisée par Pogorelov pour des coques sphériques indentées [151], l'analyse récente de la forme d'un cône élastique inversé par Seffen [176] nous renseigne sur l'énergie E_r associée à la ride produite en $r = R_i$

$$E_r \approx A E e^{5/2} R_i^{1/2} \epsilon^{5/2} \quad (\text{A.9})$$

avec $A = \frac{(\pi - \theta_1)}{[3(1 - \nu^2)]^{3/4}}$ [176] et ν le coefficient de Poisson du matériau.

A.3.2 Comparaison entre les déformations

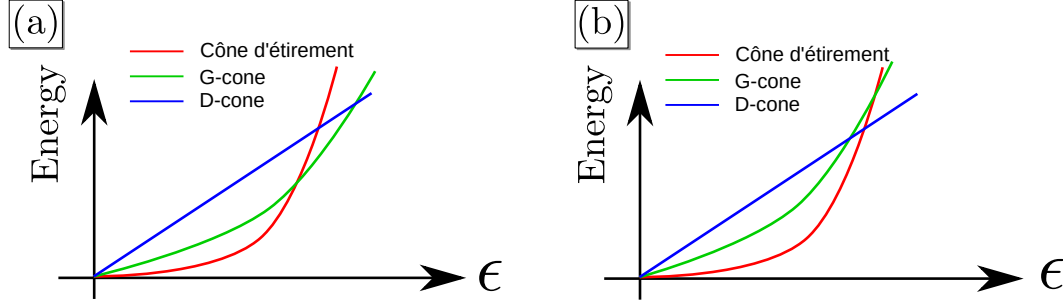


FIG. A.4 Schématisation de l'évolution de l'énergie pour le cône d'étirement, le d -cone et le g -cone en fonction de la déformation ϵ . Deux cas sont possibles. Soit (a) la courbe du cône rencontre en premier celle du g -cone et le disque se déforme en g -cone. Soit (b) elle rencontre en premier celle du d -cone et le disque se déforme en d -cone.

Maintenant que nous avons détaillé les différentes contributions, nous pouvons donner l'énergie totale pour chaque type de déformation

$$E_{tot, d\text{-cone}} \approx E_{g,0} + E_{g,1} + E_{g,2} \quad (\text{A.10})$$

$$E_{tot, g\text{-cone}} \approx E_{g,0} + E_{g,1} - E_{g,2} + E_r \quad (\text{A.11})$$

$$E_{tot, \text{cône étirement}} \approx E_{g,0} + E_{et} \quad (\text{A.12})$$

Pour de faibles déformations ϵ , la décomposition indique clairement que le cône d'étirement, dont la composante principale E_{et} est proportionnelle à ϵ^4 , sera privilégié, car il correspond à la configuration minimale énergétiquement. Au contraire, pour de grandes déformations, la contribution du potentiel gravitationnel devient majeure, favorisant la configuration en g -cone. Lors de la déformation, deux cas, schématisés en figure A.4, peuvent se produire suivant si la courbe d'énergie du cône en étirement croise en premier celle du g -cone ou celle du d -cone. Cela oriente la déformation du disque en d -cone ou en g -cone grâce au blocage procuré par l'importante barrière énergétique entre les deux modes de déformation.

Les rayons R du disque et R_i du cylindre modifient la forme de ces courbes énergétiques. Ainsi, pour à un R_i donné, le rayon critique $R = R_c$ de changement du type de déformation s'obtient lorsque les trois énergies sont identiques pour une déformation $\epsilon = \epsilon_c$. Avec les expressions d'énergies précédentes, nous en déduisons

$$E_r(R_c, \epsilon_c) = 2E_{g,2}(R_c, \epsilon_c) \quad (\text{A.13})$$

$$E_{et}(R_c, \epsilon_c) = E_{g,1}(R_c, \epsilon_c) + E_{g,2}(R_c, \epsilon_c) \quad (\text{A.14})$$

Nous avons donc deux équations pour deux inconnues, ϵ_c et R_c . À partir de la première équation (A.13) et des termes d'énergie (A.6) et (A.9), nous obtenons une première relation entre ϵ_c et R_c

$$AEe^{5/2}R_i^{1/2}\epsilon_c^{5/2} = \frac{2}{3}\rho g e(\pi - \theta_1)\epsilon f(R_c) \quad (\text{A.15})$$

$$\epsilon_c^{3/2} = 2(1 - \nu^2)^{3/4}l_g^{-3}C^{-1/2}f(R_c) \quad (\text{A.16})$$

avec $C = \frac{R_i}{e}$.

De la même manière, en utilisant la seconde équation (A.14) et les expressions d'énergie (A.5), (A.6) et (A.8), nous obtenons une seconde relation entre ϵ_c et R_c

$$\epsilon_c^3 = \frac{4}{3}l_g^{-3}C^{-2}f(R_c) \quad (\text{A.17})$$

En remplaçant l'expression de ϵ_c de l'équation (A.17) par celle trouvée dans l'équation (A.16), nous obtenons finalement

$$f(R_c) = \alpha l_g^3 \quad (\text{A.18})$$

avec $\alpha^{-1} = 3(1 - \nu^2)^{3/2}C$.

Ainsi, pour un rayon de cylindre R_i , la transition entre d -cone et g -cone se fait à $R = R_c$ tel que R_c est solution de l'équation (A.18).

A.4 Résultats et discussion

Une difficulté importante rencontrée avec cette modélisation est que le préfacteur α est très inférieur à 1 ($\alpha \propto \frac{1}{C} = \frac{e}{R_i} \ll 1$). Ainsi, au premier ordre $f(R_c) \approx 0$ et par conséquent $R_c \approx R_i$. Or, expérimentalement nous voyons clairement qu'il y a une nette différence entre R_c et R_i . Il semble que nous ayons sous-estimé l'énergie totale de la déformation en g -cone, la zone de configurations pour laquelle l'énergie du d -cone sera minimale à la transition avec le cône en étirement étant totalement absente.

Nous avons présenté une première ébauche de modèle que nous avons besoin d'approfondir. Nous envisageons de considérer plus attentivement le modèle proposé par Seffen pour vérifier qu'il s'applique bien pour notre système. De plus, nous envisageons d'effectuer une expérience supplémentaire, cette fois en mesurant la force en fonction du déplacement d que nous imposons. Ainsi, nous devrions non seulement observer une réponse mécanique différente suivant le mode de déformation, mais aussi obtenir une valeur quantitative pour la déformation critique ϵ_c de passage à une configuration d -cone ou g -cone afin de la comparer à celle résultant de notre modèle.

Appendice B : Instabilité d'une membrane élastique en rotation rapide

B.1 Introduction



FIG. B.1 Déformation d'un grand disque en latex en rotation rapide. La structure hors du plan présente une symétrie de rotation d'ordre 5.

Lorsqu'un disque est entraîné en rotation, au-delà d'une certaine vitesse, une instabilité se développe dans laquelle le disque se déforme hors du plan (voir la figure B.1). L'étude de la déformation d'un disque en rotation rapide a commencé dans les années 1920 afin de comprendre la défaillance des disques de turbines. L'approche initialement proposée par Lamb et Southwell [118] est une étude de propagation d'ondes et de modes de vibration pour un disque déformable en rotation. Le modèle se base sur des sources externes d'énergie, comme le mouvement de l'air dans une turbine, qui excitent les modes propres et augmentent l'amplitude des déformations jusqu'à fracture en l'absence de dissipations.

La poursuite de cette modélisation, dans la limite membranaire pour laquelle la rigidité en flexion du disque est négligeable par rapport aux autres contributions, aboutit à une première équation linéaire de mouvement gouvernant les vibrations transverses du disque [180].

Suivant ces travaux, une autre approche de la modélisation du problème émerge. Au lieu de considérer le disque comme une membrane sans rigidité de flexion et dans des configurations de faibles déformations, la théorie développée par J. L. Nowinski tient compte de l'épaisseur du matériau autour d'un modèle non linéaire fondé sur la description de von Kármán de la déformation des plaques minces. Cette description non linéaire temporelle des déformations élastiques est présentée pour différentes conditions aux limites pour de multiples types de supports du disque [143].

Plus récemment, N. Baddour et J. W. Zu ont établi un ensemble de trois équations et deux conditions aux limites gouvernant la réponse mécanique non linéaire complète d'un disque fin élastique en rotation selon une approche énergétique qui prend en compte les effets d'inerties non seulement de rotation, mais aussi dans le plan du disque [14]. Malgré leur grand nombre de termes, ces équations sont compatibles avec les modélisations précédentes moyennant des approximations adéquates [38].

Les études que nous avons décrites se concentrent sur la forme de la vibration à deux diamètres nodaux et zéro cercle nodal, produisant l'amplitude la plus importante et donc la plus destructive pour un disque en rotation. Cependant, nous n'avons pas trouvé de travaux renseignant sur la dynamique de l'instabilité et l'effet des interactions hydrodynamiques avec l'air.

D'un point de vue expérimental, le nombre d'articles traitants de la physique du disque en rotation rapide est très réduit et se concentre principalement sur des disques relativement rigides. Par exemple, le plus récent de Delapierre *et al.* [50] analyse le comportement d'un disque en mylar en rotation dans une chambre à vide et subissant son propre poids.

Dans cet appendice, nous allons présenter le travail d'étude effectué sur l'instabilité en rotation d'une membrane élastique circulaire que nous avons initié avec T. Robert durant son stage d'étudiant de M2 et B. Andreotti. Avec une méthode d'observation fondée sur un laser et une caméra rapide, nous sommes parvenus à récupérer de nombreuses informations sur les caractéristiques de l'instabilité, notamment la forme de la déformation et sa vitesse de rotation.

B.2 Système expérimental

B.2.1 Montage expérimental

Le dispositif expérimental que nous avons conçu, schématisé en figure B.2, permet de faire tourner horizontalement un disque élastique à grandes vitesses de rotation Ω , jusqu'à plus de 4000 rotations par minute (rpm), tout en observant efficacement la déformation du disque en un point.

Le moteur que nous avons utilisé est un moteur sans balais de drone que nous contrôlons par l'intermédiaire d'un variateur de vitesse (ESC), lui-même relié à un Arduino Uno. La programmation du module Arduino envoie un signal avec modulation de

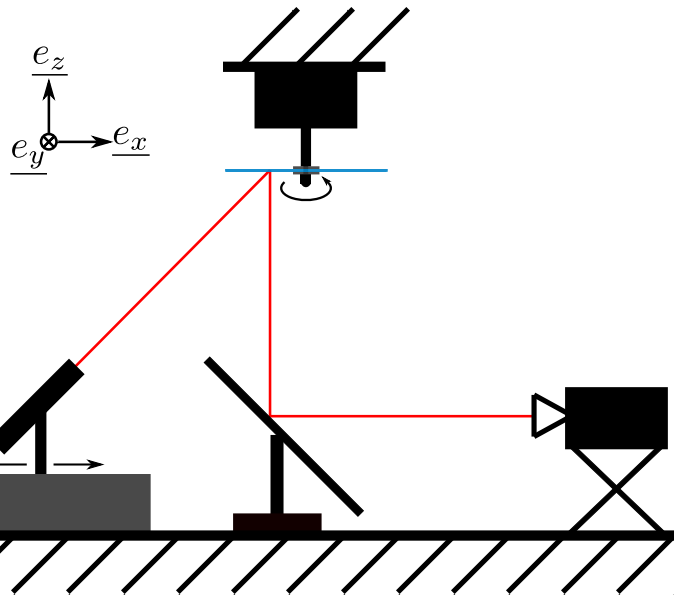


FIG. B.2 Schéma 2D du montage expérimental. Un laser rouge monté sur une platine de translation projette un rayon laser à un angle de 45° sur un disque élastique fixé à un moteur grâce à un boulon. La diffusion de rayon laser par le matériau est capturée par un système de miroir et caméra rapide.

largeur d'impulsion (PWM) dont l'amplitude moyenne est contrôlée par l'opérateur au moyen d'un potentiomètre. L'ESC interprète le signal et régule la cadence du moteur en conséquence. Le bras du moteur est dirigé vers le bas pour limiter, à petites vitesses de rotation, les contacts entre la membrane et des surfaces solides comme la table ou le moteur.

Les deux disques élastiques que nous avons étudiés sont composés de caoutchouc naturel d'épaisseur respective 300 et $330 \mu\text{m}$ et ont pour rayon $R_d = 50 \text{ mm}$. Nous avons mesuré leur module d'Young E au moyen d'une simple expérience de traction uniaxiale en faibles déformations d'échantillons rectangulaires de dimensions connues. Nous avons obtenu $E = 1.1$ et 2.8 MPa respectivement. Le milieu de chaque disque a été percé pour permettre le passage de l'arbre fileté du moteur. Une région circulaire proche du centre de la membrane est comprimée par deux rondelles et fixée à l'arbre par un écrou. Ce système assure que la rotation aux bords des rondelles est identique à celle du moteur.

Afin de capturer la déformation du disque durant l'expérience, nous avons employé une méthode couplant un laser et une caméra rapide. Le laser de marque Melles-Griot dispose d'une puissance de 5 mW et d'une longueur d'onde rouge à $632,8 \text{ nm}$. Le rayon projeté par le laser illumine le disque et la lumière diffusée par le matériau est réfléchiée par un miroir, posé à un angle 45° par rapport à la verticale, jusqu'à une caméra rapide de modèle Miro 340 de Vision Research équipée d'un objectif Nikon de 85 mm . Une grande fréquence de prise d'image ainsi qu'un faible temps d'exposition sont requis pour obtenir un nombre satisfaisant d'images nettes pour caractériser la déformation. La puissance du laser garantit que la luminosité de la diffusion est suffisante pour être capturée par la caméra. Cependant, les diverses réfractions secondaires donnent

de multiples tâches lumineuses sur l'image. Nous ne considérons que la tache la plus brillante et lui assignons comme position son centre de masse. La caméra est alignée de telle sorte que les différentes positions de la tache lumineuse soient disposées uniquement sur sur l'axe vertical x des images. De plus, le miroir assure que le signal lumineux parcourt une longue distance du disque jusqu'à atteindre la caméra ($> 1\text{m}$) et limite les effets de parallaxe.

Le laser est fixé sur une platine de translation uniaxiale Gease M-MTM150CC.1 liée à un contrôleur ESP300, tous les deux de marque Newport. Ce dispositif permet de déplacer le laser selon l'axe e_x en garantissant que le rayon laser reste dans le plan xOy , avec O le centre du disque, et que l'angle d'incidence du laser sur la membrane se conserve.

Avant d'effectuer des mesures, nous exploitons la vue du dessous du disque et surtout du moteur afin d'extraire une échelle pour les images à partir de la taille des rondelles utilisées et de définir la position du centre de la membrane dans l'image.

Le zéro de la platine est effectué grâce aux coordonnées du laser au moment pour lequel la réflexion sur le sommet de l'écrou est observée. Connaissant la hauteur de l'écrou et l'échelle de l'image, nous en déduisons l'écart de cette position au milieu de la membrane.

B.2.2 Analyse d'image

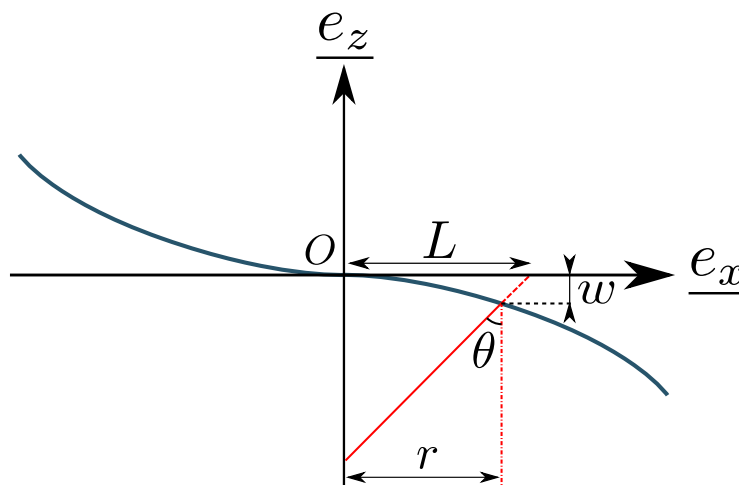


FIG. B.3 Schéma de la déformation du disque dans le plan xOz , avec O le centre du disque. Le rayon rouge représente le rayon laser, qui arrive sur le disque avec un angle $\pi - \theta = 45^\circ$ par rapport à l'axe Ox à un point situé à une coordonnée (r, w) . La position du laser sur la platine de translation est L telle que le laser passe par le centre du disque pour $L = 0$.

Le chemin emprunté par le laser jusqu'au disque tournant est schématisé en figure B.3. Chaque image donne des informations sur un point du disque, celui illuminé par le laser à une coordonnée (r, u) dans le plan xOz . Expérimentalement, nous connaissons la longueur L représentant le déplacement selon l'axe e_x imposé avec la platine de translation par rapport au centre du disque, et r la position du point lumineux après

remise à l'échelle. Puisque le laser fait un angle de 45° avec l'horizontal, une simple relation géométrique donne la déflexion w selon l'axe \underline{e}_z du point illuminé

$$w = \frac{r - L}{\tan \theta} = r - L \quad (\text{B.1})$$

Ainsi, notre dispositif expérimental permet le suivi de $w(t)$ au cours du temps.

B.3 Résultats et observations

B.3.1 Existence des lobes et signal périodique

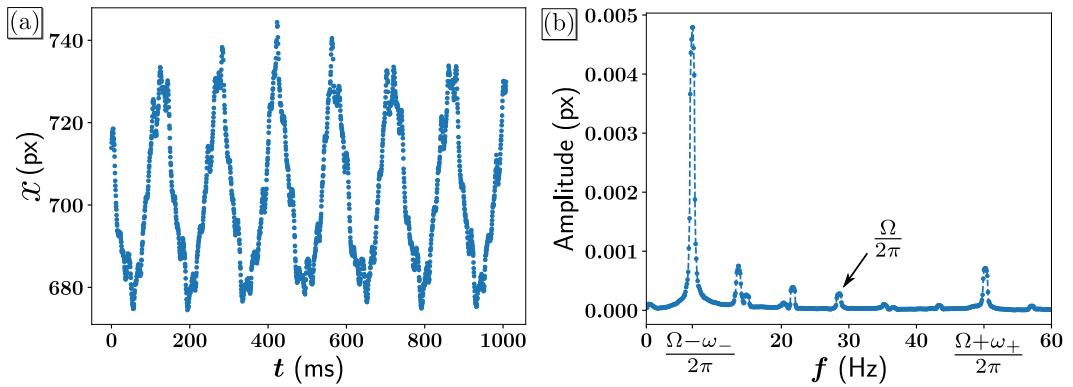


FIG. B.4 (a) Signal périodique brut de la position du signal lumineux selon l'axe x de l'image en fonction du temps pour un intervalle de 1 seconde. Ces mesures ont été effectuées sur le disque d'épaisseur $e = 330 \mu\text{m}$ et de module d'Young $E = 3.3 \text{ MPa}$ à une vitesse de rotation $\Omega = 179 \text{ rad/s} = 28.5 \text{ Hz}$. (b) Transformation de Fourier rapide du signal complet (10 secondes). Deux pics se distinguent : le plus important pour $\frac{\Omega - \omega_-}{2\pi}$, une fréquence faible correspondant à la fréquence des lobes observés macroscopiquement, mais aussi $\frac{\Omega + \omega_+}{2\pi}$, une fréquence plus grande que celle du moteur.

Dans un premier protocole expérimental, nous avons vérifié que le disque élastique en rotation présente effectivement un motif de lobes périodiques stable. Pour cela nous avons fixé la position du laser à une longueur $L(t) \approx R_d/2$ pour que la déformation de la membrane à cet endroit soit suffisamment ample pour être notable sur les images, et nous avons mesuré $w(t)$ sur un temps suffisamment long afin d'enregistrer plusieurs périodes. Puis, nous avons effectué une transformée de Fourier rapide sur le signal pour obtenir les fréquences propres du signal.

Les données recueillies en figure B.4 (a) montrent un signal principalement sinusoïdal, dont la période T reste stable pendant toute l'expérience. L'amplitude importante de la sinusoïde permet de clairement l'identifier après utilisation de la transformée de Fourier (voit la figure B.4 (b)) avec une fréquence caractéristique $\frac{\Omega - \omega_-}{2\pi}$. Ainsi, nous obtenons ω_- , la pulsation des ondes lentes dans le référentiel tournant du disque.

Seulement, ce n'est pas l'unique pulsation qui ressort. En effet, nous constatons, dans le signal brut, des fluctuations régulières à haute fréquence qui engendrent le pic observé à $\frac{\Omega + \omega_+}{2\pi}$, une fréquence plus grande que celle du moteur telle que ω_+ est la

pulsation des ondes rapides dans le référentiel tournant du disque.

Il est intéressant de noter que $\omega_+ \approx \omega_-$. Ce comportement s'explique par la création de deux ondes dans le référentiel tournant de même fréquence, mais de directions opposées, une allant dans le sens de rotation de la membrane et l'autre dans le sens contraire. La nette différence d'amplitude provient des frottements avec l'air, qui atténuent les ondes de grandes vitesses dans le référentiel du laboratoire.

B.3.2 Profil de déformation maximale

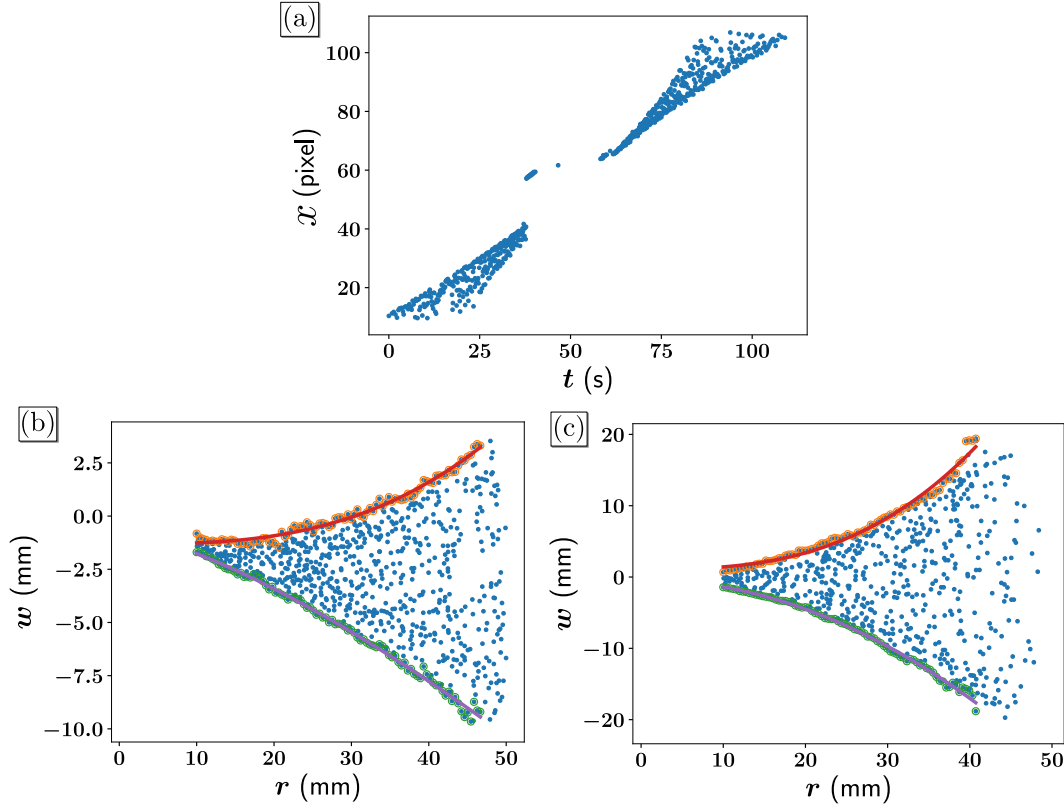


FIG. B.5 (a) Évolution temporelle de la position du point lumineux avec un laser en translation. Les points bleus sont les données expérimentales. Seulement 1 point sur 100 est affiché et les points vers $t = 50$ s loin des triangles proviennent des réflexions sur les rondelles et le boulon. Les données sont corrigées avec l'équation (B.1) afin d'obtenir la déflexion $w(r)$. (b) Déflexion mesurée pour $\Omega = 100$ rad/s. Les limites supérieure (points entourés en orange) et inférieure (points entourés en vert) sont ajustées par une fonction $f(r) = a + br^\alpha$. Pour la limite positive (trait rouge), $a = -1.31$ mm, $b = 6.7 \cdot 10^{-5}$ mm $^{-\alpha}$ et $\alpha = 2.89$, et pour la limite négative (trait violet) $a = -0.76$ mm, $b = -4.1 \cdot 10^{-2}$ mm $^{-\alpha}$ et $\alpha = 1.40$. (c) Déflexion mesurée pour $\Omega = 251$ rad/s. L'ajustement donne pour la limite positive (trait rouge), $a = 1.1$ mm, $b = 4.7 \cdot 10^{-4}$ mm $^{-\alpha}$ et $\alpha = 2.83$, et pour la limite négative (trait violet) $a = -0.32$ mm, $b = -1.1 \cdot 10^{-2}$ mm $^{-\alpha}$ et $\alpha = 2.00$.

Dans un second protocole expérimental, nous avons analysé le profil de déformation de la membrane. Contrairement au premier protocole, nous avons cette fois déplacé le laser tout le long du disque à une vitesse $v \ll R(\Omega - \omega_-)$ constante. Ce choix permet d'observer plusieurs périodes du signal avant un changement significatif de L et donc d'évaluer toutes les valeurs de r associées. Puis, en utilisant l'équation (B.1), nous avons pu remonter à la déformation $w(r)$ pour chaque point mesuré. Les résultats sont

détaillés en figure B.5.

L'enveloppe que nous pouvons constater pour $w(r)$ correspond à la déformation de la membrane pour une amplitude maximale. La différence entre la forme à faible vitesse et celle à grande vitesse indique clairement que la gravité a un impact important sur la déformation tant que l'inertie est encore faible. En conséquence, la symétrie entre les limites hautes et basses de l'enveloppe est brisée. Afin d'étudier cette différence, nous avons ajusté les deux parties hautes et basses des données au travers d'une fonction $f(r) = a + br^\alpha$ traduisant une loi d'échelle entre le rayon et la déflexion maximale selon l'axe \underline{e}_z

B.3.3 Variations de la vitesse du moteur

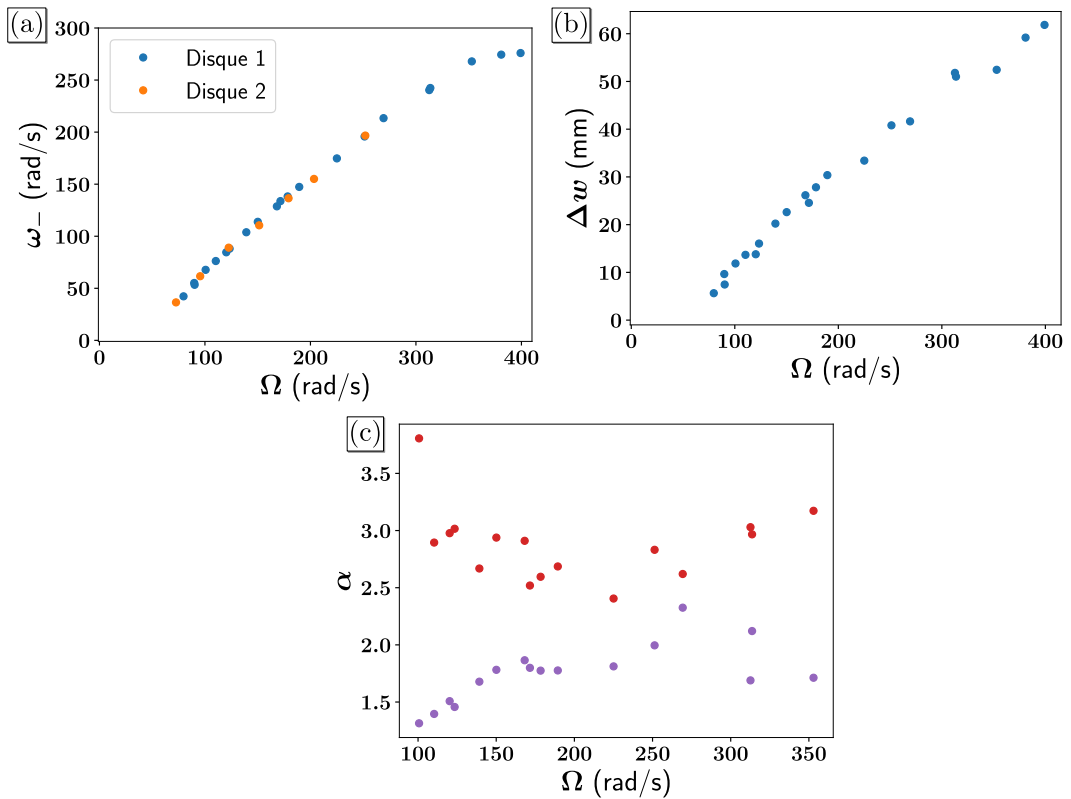


FIG. B.6 Effet de la vitesse de rotation du moteur. (a) Pulsation lente ω_- des lobes dans le référentiel tournant du disque. Le disque 1 (resp. 2) a pour module d'Young $E = 1.1$ MPa (resp. 2.8 MPa) et pour épaisseur $e = 300 \mu\text{m}$ (resp. $330 \mu\text{m}$). Les deux disques ont le même rayon $R = 50$ mm. (b) Différence d'amplitude de déformation maximale mesurée $\Delta w = \max(w) - \min(w)$ pour le Disque 1. (c) Puissance α des enveloppes haute (cercles rouges) et basse (cercles violets) pour le Disque 1.

Enfin, nous avons répété les deux protocoles pour plusieurs vitesses de moteur afin d'observer son influence sur les pulsations mesurées ainsi que la déformation de la membrane. Les résultats sont détaillés en figure B.6.

Proche du seuil de l'instabilité, l'amplitude des lobes ainsi que leur pulsation montrent une relation quasi affine avec la pulsation Ω . Cette relation ne dépend que faiblement des caractéristiques élastiques du matériau. Au-delà d'une vitesse de moteur de 300

rad/s, nous quittons le régime linéaire et les bords se mettent à revenir vers le centre, phénomène clairement visible dans la figure B.1

En ce qui concerne la forme de la déformation, lors de l'augmentation de la vitesse, l'onde se rapproche d'une enveloppe quadratique $w(r) \propto r^2$, typique des ondes harmoniques non linéaires [1].

B.4 Perspectives

Nous avons présenté nos premiers résultats sur l'instabilité d'un disque élastique en rotation rapide dans l'air, en nous concentrant sur le régime stationnaire. Nous constatons la présence d'une vitesse de rotation seuil pour le disque au-delà de laquelle se forment des ondes présentant deux directions de propagation opposées. Au moment où je finis d'écrire cet appendice, nous sommes toujours en discussion pour effectuer la modélisation du comportement observé. Nous envisageons de nous baser sur les équations du mouvement établies dans les travaux précédents présentés en introduction, en rajoutant un terme de gravité, dont l'effet est important pour des basses vitesses de rotation, et un terme hydrodynamique de pression, en s'inspirant des précédents travaux effectués sur les drapeaux flottants [192, 101].

Afin d'approfondir l'expérience, nous envisageons aussi d'étudier la dynamique de l'instabilité lors du changement de la vitesse de rotation du moteur, qui nous renseignera plus sur le mécanisme sous-jacent. Nous souhaitons aussi étudier les différents modes de l'instabilité, correspondant aux multiples nombres de lobes du disque en rotation.

Appendice C : Numérisation d'objets en trois dimensions par balayage en lumière structurée

C.1 Introduction

Les études de systèmes mécaniques reposent généralement sur la mesure de déformations. Pour cela, une mesure précise des coordonnées de chaque point de la structure est nécessaire. Pour des systèmes unidimensionnels, comme un ressort, la mesure de la longueur peut se faire directement et facilement avec une règle. Ce n'est pas le cas des courbures qui apparaissent lorsque deux dimensions ou plus sont considérées. Une méthode efficace pour effectuer des mesures consiste alors à employer la photographie. En connaissant les caractéristiques de l'appareil photo, un calcul des longueurs physiques du système peut être fait à partir de mesures sur l'image bidimensionnelle obtenue. C'est ainsi que nous avons récupéré la forme du pli unique en déformation telle que détaillée dans la section 1.2.2. Cette approche est toutefois limitée à deux dimensions. En effet, au niveau le plus fondamental, une photo couleur n'est qu'une matrice pour laquelle chaque case correspond à un pixel auquel sont attribués trois nombres correspondant à trois intensités de couleur rouge, bleu et vert.

Pour de nombreux systèmes, les mesures de coordonnées requièrent les trois dimensions. Pour cela, et comme souvent en science, nous utilisons un concept naturel : les yeux ou plus précisément la vision stéréoscopique. En effet, en prenant un objet en photo selon au moins deux angles, des règles géométriques de triangulation permettent d'obtenir les coordonnées des points matériels en trois dimensions, sous condition d'un calibrage préalable des caméras[128]. Nous parlons alors de stéréovision. Cependant, il est souvent complexe de définir à quels pixels des deux photos correspond un même point matériel. Une technique ingénieuse pour résoudre ce problème est d'utiliser une lumière structurée [171, 169], selon une méthode que nous allons maintenant détailler.

C.2 Principe de l'analyse

L'équipement requis pour l'analyse en lumière structurée est basique : un appareil photo et un vidéoprojecteur. Le principe est comme suit : le vidéoprojecteur projette

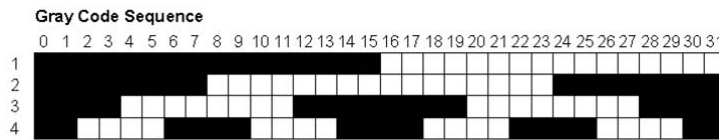


FIG. C.1 Code en noir en blanc discriminant 32 pixels en utilisant 4 motifs.

des images sur l'objet que nous souhaitons analyser pendant que l'appareil photo prend des photos de l'objet éclairé pour chaque image. La clé de la technique repose sur les images choisies. La séquence de motifs projetés permet de discriminer les différents pixels grâce à un code local.

Plus précisément, une méthode habituellement employée consiste à considérer deux niveaux d'illumination séparés, que nous appelons noir et blanc, qui encodent respectivement pour 0 et 1. Avec des motifs précis noirs et blancs pour n images projetées, il est possible d'obtenir 2^{n+1} régions distinctes à partir des séries de 0 et 1, comme le présente la figure C.1. En utilisant une alternance de bandes verticales, nous avons accès à la coordonnée selon l'abscisse de l'image du vidéoprojecteur pour chaque point illuminé dans l'image. De la même manière, l'ordonnée est récupérée avec des bandes horizontales. D'autres techniques pour faire la discrimination entre pixels existent [169], mais toutes ont un objectif identique : faire correspondre les points photographiés et des coordonnées propres au vidéoprojecteur.

La connaissance de cette relation a un double intérêt. Tout d'abord, elle résout le problème que nous avons décrit en fin d'introduction. Effectivement, chaque point photographié est associé à une coordonnée dans le référentiel du vidéoprojecteur. Ensuite, elle permet d'utiliser le vidéoprojecteur comme un second appareil photo dans un dispositif stéréo et donc d'appliquer toutes les considérations classiques de ce type de système. Cependant, il est nécessaire de préalablement calibrer minutieusement le couple vidéoprojecteur-caméra [209, 96, 138] afin d'obtenir un résultat net.

C.3 Scan avec David3D

La méthode d'analyse en lumière structurée convient bien au do-it-yourself, puisque rapide et peu coûteuse. Toutefois, la production d'un algorithme d'analyse d'image et de calibration fiable est exigeante pour un non-expert. En conséquence, nous avons choisi d'utiliser un logiciel propriétaire au prix abordable, le logiciel de scan David3D (maintenant HP 3D Scan).

David3D est un programme coordonnant le fonctionnement d'un vidéoprojecteur avec une caméra de type webcam connecté à un ordinateur. Pour nos expériences, nous avons utilisé une webcam Logitech C920 pro HD et un vidéoprojecteur ACER H6517ST. L'analyse commence par une étape de calibration avec un objet en angle droit contenant un motif précis permettant aussi de récupérer l'échelle pour le scan. La réussite de la calibration donne les relations géométriques entre la caméra et le vidéo-

projecteur, plus précisément leurs positions et orientations relatives. Après calibration, l'analyse de l'objet se fait par la projection de bandes horizontales blanches et noires successives telle que décrite dans la section précédente. L'utilisation d'une webcam permet une étape d'analyse rapide, sa vitesse n'étant limitée que par la fréquence d'acquisition de la caméra. À la fin de la séquence d'images, le logiciel produit un maillage tridimensionnel de l'objet scanné.

Nos origamis sont pliés à partir de feuilles transparentes. Pour permettre leur illumination par le vidéoprojecteur tout en nous assurant ne pas changer les propriétés élastiques, nous avons pulvérisé de la peinture blanche sur l'origami après pliage.

Une force du logiciel est de pouvoir fusionner plusieurs maillages en trouvant les corrélations entre eux. Pour acquérir la forme tridimensionnelle complète d'un objet, il suffit alors de tourner progressivement l'objet et de répéter le processus d'analyse de séquences d'images.

Cette technique présente toutefois plusieurs défauts. Tout d'abord nous avons constaté l'apparition de légères vaguelettes dans le maillage final. Bien que la forme globale de l'objet ne soit pas modifiée, cela influe beaucoup sur le post-traitement. Par exemple, la définition d'une valeur de la courbure locale raisonnable nécessite de moyenner sur un plus grand nombre de points. Il est aussi difficile d'analyser efficacement les recoins aigus de la structure. Malgré ces difficultés, nous obtenons un maillage qualitativement en accord avec le profil réel de l'origami.

Appendice D : Articles écrits et résumés

D.1 Articles publiés

1. *Local mechanical description of an elastic fold*,
Théo Jules, Frédéric Lechenault, et Mokhtar Adda-Bedia, *Soft Matter*, **15**, 1619 (2019).

To go beyond the simple model for the fold as two flexible surfaces or faces linked by a crease that behaves as an elastic hinge, we carefully shape and anneal a crease within a polymer sheet and study its mechanical response. First, we carry out an experimental study that involves recording both the shape of the fold in various loading configurations and the associated force needed to deform it. Then, an elastic model of the fold is built upon a continuous description of both the faces and the crease as a thin sheet with a non-flat reference configuration. The comparison between the model and experiments yields the local fold properties and explains the significant differences we observe between tensile and compression regimes. Furthermore, an asymptotic study of the fold deformation enables us to determine the local shape of the crease and identify the origin of its mechanical behaviour.

D.2 *Articles en révision*

1. Plasticity and Aging of Folded Elastic Sheets,
Théo Jules, Frédéric Lechenault, et Mokhtar Adda-Bedia, XXXXXX

We investigate the dissipative mechanisms exhibited by creased material sheets when subjected to mechanical loading, which comes in the form of plasticity and relaxation phenomena within the creases. After demonstrating that plasticity mostly affects the rest angle of the creases, we devise a mapping between this quantity and the macroscopic state of the system that allows us to track its reference configuration along an arbitrary loading path, resulting in a powerful monitoring and design tool for crease-based metamaterials. Furthermore, we show that complex relaxation phenomena, in particular memory effects, can give rise to a non-monotonic response at the crease level, possibly relating to the similar behavior reported for crumpled sheets. We describe our observations through a classical double-logarithmic time evolution and obtain a constitutive behavior compatible with that of the underlying material. Thus the lever effect provided by the crease allows magnified access to the material's rheology.

Bibliographie

- [1] Sunder H. ADVANI. «Stationary waves in a thin spinning disk». In : *International Journal of Mechanical Sciences* 9.5 (mai 1967), p. 307-313. DOI : [10.1016/0020-7403\(67\)90023-9](https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90023-9).
- [2] Mikko ALAVA et Kaarlo NISKANEN. «The physics of paper». In : *Reports on Progress in Physics* 69.3 (fév. 2006), p. 669-723. DOI : [10.1088/0034-4885/69/3/r03](https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/3/r03).
- [3] R.F ALBUQUERQUE et M.A.F GOMES. «Stress relaxation in crumpled surfaces». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 310.3-4 (juill. 2002), p. 377-383. DOI : [10.1016/s0378-4371\(02\)00747-1](https://doi.org/10.1016/s0378-4371(02)00747-1).
- [4] Roger ALPERIN. «One-, Two- and Multi-Fold Origami Axioms». In : *Origami 4*. A K Peters/CRC Press, août 2009, p. 371-393. DOI : [10.1201/b10653-37](https://doi.org/10.1201/b10653-37).
- [5] M. Ben AMAR et Y. POMEAU. «Crumpled paper». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 453.1959 (avr. 1997), p. 729-755. DOI : [10.1098/rspa.1997.0041](https://doi.org/10.1098/rspa.1997.0041).
- [6] A. AMIR, Y. OREG et Y. IMRY. «On relaxations and aging of various glasses». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 109.6 (fév. 2012), p. 1850-1855. DOI : [10.1073/pnas.1120147109](https://doi.org/10.1073/pnas.1120147109).
- [7] A. Turbis AND. «Origami Demonstrations of Area Formulae for General Triangles Parallelograms and Trapezoids». In : *Origami7 Volume 1 : Design, Education, History, and Science* (2018), p. 197-208.
- [8] I. ANDRADE-SILVA, M. ADDA-BEDIA et M. A. DIAS. «Foldable cones as a framework for nonrigid origami». In : *Physical Review E* 100.3 (sept. 2019). DOI : [10.1103/physreve.100.033003](https://doi.org/10.1103/physreve.100.033003).
- [9] Sevil ARICI et Fatma ASLAN-TUTAK. «THE EFFECT OF ORIGAMI-BASED INSTRUCTION ON SPATIAL VISUALIZATION, GEOMETRY ACHIEVEMENT, AND GEOMETRIC REASONING». In : *International Journal of Science and Mathematics Education* 13.1 (déc. 2013), p. 179-200. DOI : [10.1007/s10763-013-9487-8](https://doi.org/10.1007/s10763-013-9487-8).

- [10] Manan ARYA, Nicolas LEE et Sergio PELLEGRINO. «Crease-free biaxial packaging of thick membranes with slipping folds». In : *International Journal of Solids and Structures* 108 (mars 2017), p. 24-39. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2016.08.013](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.08.013).
- [11] Basile AUDOLY et Arezki BOUDAUD. «Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—Part III : » in : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56.7 (juill. 2008), p. 2444-2458. DOI : [10.1016/j.jmps.2008.03.001](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.03.001).
- [12] Basile AUDOLY et Yves POMEAU. *Elasticity and geometry : from hair curls to the non-linear response of shells*. Oxford University Press, 2010.
- [13] Sahab BABAEI et al. «Bioinspired kirigami metasurfaces as assistive shoe grips». In : *Nature Biomedical Engineering* (juin 2020). DOI : [10.1038/s41551-020-0564-3](https://doi.org/10.1038/s41551-020-0564-3).
- [14] N. BADDOUR et J.W. ZU. «A revisit of spinning disk models. Part I : derivation of equations of motion». In : *Applied Mathematical Modelling* 25.7 (juill. 2001), p. 541-559. DOI : [10.1016/s0307-904x\(00\)00065-2](https://doi.org/10.1016/s0307-904x(00)00065-2).
- [15] Alexander S. BALANKIN et al. «Slow dynamics of stress and strain relaxation in randomly crumpled elasto-plastic sheets». In : *Physical Review E* 84.2 (août 2011). DOI : [10.1103/physreve.84.021118](https://doi.org/10.1103/physreve.84.021118).
- [16] Z. BARTCZAK et A. GALESKI. «Plasticity of Semicrystalline Polymers». In : *Macromolecular Symposia* 294.1 (août 2010), p. 67-90. DOI : [10.1002/masy.201050807](https://doi.org/10.1002/masy.201050807).
- [17] Z. BASHIR et al. «Evaluation of three methods for the measurement of crystallinity of pet resins, preforms, and bottles». In : *Polymer Engineering & Science* 40.11 (nov. 2000), p. 2442-2455. DOI : [10.1002/pen.11376](https://doi.org/10.1002/pen.11376).
- [18] Sarah-Marie BELCASTRO et Thomas C. HULL. «Modelling the folding of paper into three dimensions using affine transformations». In : *Linear Algebra and its Applications* 348.1-3 (juin 2002), p. 273-282. DOI : [10.1016/s0024-3795\(01\)00608-5](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(01)00608-5).
- [19] L BELLON, S CILIBERTO et C LAROCHE. «Memory in the aging of a polymer glass». In : *Europhysics Letters (EPL)* 51.5 (sept. 2000), p. 551-556. DOI : [10.1209/epl/i2000-00368-1](https://doi.org/10.1209/epl/i2000-00368-1).
- [20] Oded BEN-DAVID, Shmuel M. RUBINSTEIN et Jay FINEBERG. «Slip-stick and the evolution of frictional strength». In : *Nature* 463.7277 (jan. 2010), p. 76-79. DOI : [10.1038/nature08676](https://doi.org/10.1038/nature08676).
- [21] Adrien BENUSIGLIO et al. «The anatomy of a crease, from folding to ironing». In : *Soft Matter* 8.12 (2012), p. 3342. DOI : [10.1039/c2sm07151g](https://doi.org/10.1039/c2sm07151g).
- [22] E M BERTIN et al. «The Kovacs effect in model glasses». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 36.43 (oct. 2003), p. 10701-10719. DOI : [10.1088/0305-4470/36/43/003](https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/43/003).

- [23] Katia BERTOLDI et al. «Flexible mechanical metamaterials». In : *Nature Reviews Materials* 2.11 (oct. 2017). DOI : [10.1038/natrevmats.2017.66](https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.66).
- [24] Melina K. BLEES et al. «Graphene kirigami». In : *Nature* 524.7564 (juill. 2015), p. 204-207. DOI : [10.1038/nature14588](https://doi.org/10.1038/nature14588).
- [25] Mark BOLITHO. «Optimisation in Origami Design». In : *Origami7 Volume 1 : Design, Education, History, and Science* (2018), p. 31-46.
- [26] Friedrich Bös et al. «On the Incompressibility of Cylindrical Origami Patterns». In : *Journal of Mechanical Design* 139.2 (déc. 2016). DOI : [10.1115/1.4034970](https://doi.org/10.1115/1.4034970).
- [27] Eran BOUCHBINDER et J. S. LANGER. «Nonequilibrium thermodynamics of the Kovacs effect». In : *Soft Matter* 6.13 (2010), p. 3065. DOI : [10.1039/c001388a](https://doi.org/10.1039/c001388a).
- [28] J. H. BRACKENBURY. «Wing folding and free-flight kinematics in Coleoptera (Insecta) : a comparative study». In : *Journal of Zoology* 232.2 (fév. 1994), p. 253-283. DOI : [10.1111/j.1469-7998.1994.tb01572.x](https://doi.org/10.1111/j.1469-7998.1994.tb01572.x).
- [29] Martin BRANDENBOURGER et al. «Non-reciprocal robotic metamaterials». In : *Nature Communications* 10.1 (oct. 2019). DOI : [10.1038/s41467-019-12599-3](https://doi.org/10.1038/s41467-019-12599-3).
- [30] J. J. BREY et A. PRADOS. «Slow logarithmic relaxation in models with hierarchically constrained dynamics». In : *Physical Review E* 63.2 (jan. 2001). DOI : [10.1103/physreve.63.021108](https://doi.org/10.1103/physreve.63.021108).
- [31] Eric van BRUGGEN, Erik van der LINDEN et Mehdi HABIBI. «Tailoring relaxation dynamics and mechanical memory of crumpled materials by friction and ductility». In : *Soft Matter* 15.7 (2019), p. 1633-1639. DOI : [10.1039/c8sm01951g](https://doi.org/10.1039/c8sm01951g).
- [32] V. BRUNCK et al. «Elastic theory of origami-based metamaterials». In : *Physical Review E* 93.3 (mars 2016). DOI : [10.1103/physreve.93.033005](https://doi.org/10.1103/physreve.93.033005).
- [33] Randy BULLOCK. «Least-squares circle fit». In : *Developmental Testbed Center* (2006).
- [34] E. CERDA et L. MAHADEVAN. «Confined developable elastic surfaces : cylinders, cones and the Elastica». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 461.2055 (mars 2005), p. 671-700. DOI : [10.1098/rspa.2004.1371](https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1371).
- [35] E. CERDA et L. MAHADEVAN. «Conical Surfaces and Crescent Singularities in Crumpled Sheets». In : *Physical Review Letters* 80.11 (mars 1998), p. 2358-2361. DOI : [10.1103/physrevlett.80.2358](https://doi.org/10.1103/physrevlett.80.2358).
- [36] Enrique CERDA et al. «Conical dislocations in crumpling». In : *Nature* 401.6748 (1999), p. 46-49.
- [37] Sahraoui CHAÏEB, Francisco MELO et Jean-Christophe GÉMINARD. «Experimental Study of Developable Cones». In : *Physical Review Letters* 80.11 (mars 1998), p. 2354-2357. DOI : [10.1103/physrevlett.80.2354](https://doi.org/10.1103/physrevlett.80.2354).

- [38] Jen-San CHEN. «On the linearization of the equations of motion of a rotating disk». In : *Applied Mathematical Modelling* 35.1 (jan. 2011), p. 392-397. DOI : [10.1016/j.apm.2010.07.003](https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.003).
- [39] Siheng CHEN et L. MAHADEVAN. «Rigidity percolation and geometric information in floppy origami». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 116.17 (avr. 2019), p. 8119-8124. DOI : [10.1073/pnas.1820505116](https://doi.org/10.1073/pnas.1820505116).
- [40] Y. CHEN, R. PENG et Z. YOU. «Origami of thick panels». In : *Science* 349.6246 (juill. 2015), p. 396-400. DOI : [10.1126/science.aab2870](https://doi.org/10.1126/science.aab2870).
- [41] Kwang Soo CHO. *Viscoelasticity of Polymers*. Springer Netherlands, 2016. DOI : [10.1007/978-94-017-7564-9](https://doi.org/10.1007/978-94-017-7564-9).
- [42] Paolo CIGNONI et al. «Meshlab : an open-source mesh processing tool.» In : *Eurographics Italian chapter conference*. T. 2008. 2008, p. 129-136.
- [43] A. CONCHA et al. «Wrinkling of a bilayer membrane». In : *Physical Review E* 75.1 (jan. 2007). DOI : [10.1103/physreve.75.016609](https://doi.org/10.1103/physreve.75.016609).
- [44] S. COTTRINO et al. «Mechanical properties of crumpled aluminum foils». In : *Acta Materialia* 81 (déc. 2014), p. 98-110. DOI : [10.1016/j.actamat.2014.07.069](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2014.07.069).
- [45] Corentin COULAIS, Dimitrios SOUNAS et Andrea ALÙ. «Static non-reciprocity in mechanical metamaterials». In : *Nature* 542.7642 (fév. 2017), p. 461-464. DOI : [10.1038/nature21044](https://doi.org/10.1038/nature21044).
- [46] Corentin COULAIS et al. «Multi-step self-guided pathways for shape-changing metamaterials». In : *Nature* 561.7724 (sept. 2018), p. 512-515. DOI : [10.1038/s41586-018-0541-0](https://doi.org/10.1038/s41586-018-0541-0).
- [47] Etienne COUTURIER, Sylvain Courrech du PONT et Stéphane DOUADY. «A Global Regulation Inducing the Shape of Growing Folded Leaves». In : *PLoS ONE* 4.11 (nov. 2009). Sous la dir. de Stuart HUMPHRIES, e7968. DOI : [10.1371/journal.pone.0007968](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0007968).
- [48] R de P DAUBENY, Charles William BUNN et C J BROWN. «The crystal structure of polyethylene terephthalate». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 226.1167 (déc. 1954), p. 531-542. DOI : [10.1098/rspa.1954.0273](https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0273).
- [49] B. DAVIDOVITCH et al. «Prototypical model for tensional wrinkling in thin sheets». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108.45 (oct. 2011), p. 18227-18232. DOI : [10.1073/pnas.1108553108](https://doi.org/10.1073/pnas.1108553108).
- [50] Mélanie DELAPIERRE et al. «Wrinkling of transversely loaded spinning membranes». In : *International Journal of Solids and Structures* 139-140 (mai 2018), p. 163-173. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2018.01.031](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.031).

- [51] Erik D. DEMAINE et al. «(Non)Existence of Pleated Folds : How Paper Folds Between Creases». In : *Graphs and Combinatorics* 27.3 (mars 2011), p. 377-397. DOI : [10.1007/s00373-011-1025-2](https://doi.org/10.1007/s00373-011-1025-2).
- [52] M. T. DEMEUSE. *Biaxial stretching of film : principles and applications*. Oxford : Woodhead Pub, 2011. ISBN : 9780857092953.
- [53] C. DEREC, A. AJDARI et F. LEQUEUX. «Rheology and aging : A simple approach». In : *The European Physical Journal E* 4.3 (mars 2001), p. 355-361. DOI : [10.1007/s101890170118](https://doi.org/10.1007/s101890170118).
- [54] Bernard DERRIDA. «Random-energy model : An exactly solvable model of disordered systems». In : *Physical Review B* 24.5 (sept. 1981), p. 2613-2626. DOI : [10.1103/physrevb.24.2613](https://doi.org/10.1103/physrevb.24.2613).
- [55] B. Yasara DHARMADASA et al. «Formation of Plastic Creases in Thin Polyimide Films». In : *Journal of Applied Mechanics* 87.5 (fév. 2020). DOI : [10.1115/1.4046002](https://doi.org/10.1115/1.4046002).
- [56] Marcelo A. DIAS et Christian D. SANTANGELO. «The shape and mechanics of curved-fold origami structures». In : *EPL (Europhysics Letters)* 100.5 (déc. 2012), p. 54005. DOI : [10.1209/0295-5075/100/54005](https://doi.org/10.1209/0295-5075/100/54005).
- [57] Marcelo A. DIAS et al. «Geometric Mechanics of Curved Crease Origami». In : *Physical Review Letters* 109.11 (sept. 2012). DOI : [10.1103/physrevlett.109.114301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.109.114301).
- [58] Marcelo A. DIAS et al. «Kirigami actuators». In : *Soft Matter* 13.48 (2017), p. 9087-9092. DOI : [10.1039/c7sm01693j](https://doi.org/10.1039/c7sm01693j).
- [59] B. A. DiDONNA et T. A. WITTEN. «Anomalous Strength of Membranes with Elastic Ridges». In : *Physical Review Letters* 87.20 (oct. 2001). DOI : [10.1103/physrevlett.87.206105](https://doi.org/10.1103/physrevlett.87.206105).
- [60] Ingo DIERKING et Paul ARCHER. «Sudden ridge collapse in the stress relaxation of thin crumpled polymer films». In : *Physical Review E* 77.5 (mai 2008). DOI : [10.1103/physreve.77.051608](https://doi.org/10.1103/physreve.77.051608).
- [61] Gregor DIEZEMANN et Andreas HEUER. «Memory effects in the relaxation of the Gaussian trap model». In : *Physical Review E* 83.3 (mars 2011). DOI : [10.1103/physreve.83.031505](https://doi.org/10.1103/physreve.83.031505).
- [62] Sam DILLAVOU et Shmuel M. RUBINSTEIN. «Nonmonotonic Aging and Memory in a Frictional Interface». In : *Physical Review Letters* 120.22 (juin 2018). DOI : [10.1103/physrevlett.120.224101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.120.224101).
- [63] Huy Pham DINH et al. «From Cylindrical to Stretching Ridges and Wrinkles in Twisted Ribbons». In : *Physical Review Letters* 117.10 (sept. 2016). DOI : [10.1103/physrevlett.117.104301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.117.104301).

- [64] J.R. DORMAND et P.J. PRINCE. «A family of embedded Runge-Kutta formulae». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (mars 1980), p. 19-26. DOI : [10.1016/0771-050x\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050x(80)90013-3).
- [65] Levi H. DUDTE et al. «Programming curvature using origami tessellations». In : *Nature Materials* 15.5 (jan. 2016), p. 583-588. DOI : [10.1038/nmat4540](https://doi.org/10.1038/nmat4540).
- [66] L. DUFOUR et al. «A drone with insect-inspired folding wings». In : *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, oct. 2016. DOI : [10.1109/iroos.2016.7759255](https://doi.org/10.1109/iroos.2016.7759255).
- [67] Rebecca B. DUPAIX et Mary C. BOYCE. «Finite strain behavior of poly(ethylene terephthalate) (PET) and poly(ethylene terephthalate)-glycol (PETG)». In : *Polymer* 46.13 (juin 2005), p. 4827-4838. DOI : [10.1016/j.polymer.2005.03.083](https://doi.org/10.1016/j.polymer.2005.03.083).
- [68] E. EFRATI, E. SHARON et R. KUPFERMAN. «The metric description of elasticity in residually stressed soft materials». In : *Soft Matter* 9 (2013), p. 8187-8197.
- [69] Theresa ELDER, Damith ROZAIRO et Andrew B. CROLL. «Origami Inspired Mechanics : Measuring Modulus and Force Recovery with Bent Polymer Films». In : *Macromolecules* 52.2 (jan. 2019), p. 690-699. DOI : [10.1021/acs.macromol.8b02002](https://doi.org/10.1021/acs.macromol.8b02002).
- [70] Leonhard EULER. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. apud Marcum-Michaelem Bousquet, 1744.
- [71] Jakob A. FABER, Andres F. ARRIETA et André R. STUDART. «Bioinspired spring origami». In : *Science* 359.6382 (mars 2018), p. 1386-1391. DOI : [10.1126/science.aap7753](https://doi.org/10.1126/science.aap7753).
- [72] Hongbin FANG et al. «Dynamics of a bistable Miura-origami structure». In : *Physical Review E* 95.5 (mai 2017). DOI : [10.1103/physreve.95.052211](https://doi.org/10.1103/physreve.95.052211).
- [73] Kasra FARAIN. «Relaxation Constant in the Folding of Thin Viscoelastic Sheets». In : *Physical Review Applied* 13.1 (jan. 2020). DOI : [10.1103/physrevapplied.13.014031](https://doi.org/10.1103/physrevapplied.13.014031).
- [74] E.T. FILIPOV et al. «Bar and hinge models for scalable analysis of origami». In : *International Journal of Solids and Structures* 124 (oct. 2017), p. 26-45. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2017.05.028](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.028).
- [75] *Fit a circle to cluster of 3D points*. eprint : <https://meshlogic.github.io/posts/jupyter/curve-fitting/fitting-a-circle-to-cluster-of-3d-points/>.
- [76] Wm. T. M. FORBES. «How a Beetle Folds its Wings». In : *Psyche : A Journal of Entomology* 31.6 (1924), p. 254-258. DOI : [10.1155/1924/68247](https://doi.org/10.1155/1924/68247).
- [77] Dmitry FUCHS et Serge TABACHNIKOV. «More on Paperfolding». In : *The American Mathematical Monthly* 106.1 (jan. 1999), p. 27-35. DOI : [10.1080/00029890.1999.12005003](https://doi.org/10.1080/00029890.1999.12005003).

- [78] Jonathan P. GARDNER et al. «The James Webb Space Telescope». In : *Space Science Reviews* 123.4 (nov. 2006), p. 485-606. DOI : [10.1007/s11214-006-8315-7](https://doi.org/10.1007/s11214-006-8315-7).
- [79] Michael GOMEZ, Derek E. MOULTON et Dominic VELLA. «Dynamics of viscoelastic snap-through». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 124 (mars 2019), p. 781-813. DOI : [10.1016/j.jmps.2018.11.020](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.11.020).
- [80] U. GÖSCHEL, K. DEUTSCHER et V. ABETZ. «Wide-angle X-ray scattering studies using an area detector : crystallite orientation in semicrystalline PET structures». In : *Polymer* 37.1 (jan. 1996), p. 1-6. DOI : [10.1016/0032-3861\(96\)81592-8](https://doi.org/10.1016/0032-3861(96)81592-8).
- [81] Omer GOTTESMAN et al. «A state variable for crumpled thin sheets». In : *Communications Physics* 1.1 (nov. 2018). DOI : [10.1038/s42005-018-0072-x](https://doi.org/10.1038/s42005-018-0072-x).
- [82] Steven W. GREY, Fabrizio SCARPA et Mark SCHENK. «Strain Reversal in Actuated Origami Structures». In : *Physical Review Letters* 123.2 (juill. 2019). DOI : [10.1103/physrevlett.123.025501](https://doi.org/10.1103/physrevlett.123.025501).
- [83] H GUENAT et O LE COULS. «Ultra-Light Structures. Status of development & potential applications». In : *ESA Techno/Innovation Days* (2010).
- [84] Gaël GUENNEBAUD, Marcel GERMANN et Markus GROSS. «Dynamic Sampling and Rendering of Algebraic Point Set Surfaces». In : *Computer Graphics Forum* 27.2 (avr. 2008), p. 653-662. DOI : [10.1111/j.1467-8659.2008.01163.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2008.01163.x).
- [85] Gaël GUENNEBAUD et Markus GROSS. «Algebraic point set surfaces». In : *ACM SIGGRAPH 2007 papers on - SIGGRAPH '07*. ACM Press, 2007. DOI : [10.1145/1275808.1276406](https://doi.org/10.1145/1275808.1276406).
- [86] A. GUREVICH et H. KÜPFER. «Time scales of the flux creep in superconductors». In : *Physical Review B* 48.9 (sept. 1993), p. 6477-6487. DOI : [10.1103/physrevb.48.6477](https://doi.org/10.1103/physrevb.48.6477).
- [87] Danton GUTIERREZ-LEMINI. *Engineering Viscoelasticity*. Springer US, 2014. DOI : [10.1007/978-1-4614-8139-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8139-3).
- [88] Fabian HAAS et Robin J. WOOTTON. «Two basic mechanisms in insect wing folding». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series B : Biological Sciences* 263.1377 (déc. 1996), p. 1651-1658. DOI : [10.1098/rspb.1996.0241](https://doi.org/10.1098/rspb.1996.0241).
- [89] Ernst HAIRER, Syvert P. NØRSETT et Gerhard WANNER. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer Berlin Heidelberg, 16 avr. 2008. 548 p. ISBN : 3540566708. URL : https://www.ebook.de/de/product/1327253/ernst_hairer_syvert_p_noersett_gerhard_wanner_solving_ordinary_differential_equations_i.html.
- [90] Dongran HAN et al. «Single-stranded DNA and RNA origami». In : *Science* 358.6369 (déc. 2017), eaao2648. DOI : [10.1126/science.aao2648](https://doi.org/10.1126/science.aao2648).

- [91] Paul Z. HANAKATA et al. «Accelerated Search and Design of Stretchable Graphene Kirigami Using Machine Learning». In : *Physical Review Letters* 121.25 (déc. 2018). DOI : [10.1103/physrevlett.121.255304](https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.255304).
- [92] Brandon H HANNA et al. «Waterbomb base : a symmetric single-vertex bistable origami mechanism». In : *Smart Materials and Structures* 23.9 (août 2014), p. 094009. DOI : [10.1088/0964-1726/23/9/094009](https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/9/094009).
- [93] Daniel HEXNER et al. «Effect of aging on the non-linear elasticity and memory formation in materials». In : (1^{er} sept. 2019). arXiv : [1909.00481v1](https://arxiv.org/abs/1909.00481v1) [[cond-mat.soft](https://arxiv.org/abs/1909.00481v1)].
- [94] Evan HOHLFELD et Benny DAVIDOVITCH. «Sheet on a deformable sphere : Wrinkle patterns suppress curvature-induced delamination». In : *Physical Review E* 91.1 (jan. 2015). DOI : [10.1103/physreve.91.012407](https://doi.org/10.1103/physreve.91.012407).
- [95] You-Lo HSIEH et Zhishen MO. «Crystalline structures of poly(ethylene terephthalate) fibers». In : *Journal of Applied Polymer Science* 33.5 (avr. 1987), p. 1479-1485. DOI : [10.1002/app.1987.070330504](https://doi.org/10.1002/app.1987.070330504).
- [96] Peisen S. HUANG. «Novel method for structured light system calibration». In : *Optical Engineering* 45.8 (août 2006), p. 083601. DOI : [10.1117/1.2336196](https://doi.org/10.1117/1.2336196).
- [97] HUFFMAN. «Curvature and Creases : A Primer on Paper». In : *IEEE Transactions on Computers* C-25.10 (oct. 1976), p. 1010-1019. DOI : [10.1109/tc.1976.1674542](https://doi.org/10.1109/tc.1976.1674542).
- [98] Thomas HULL. *Project Origami*. Taylor & Francis Ltd., 1^{er} fév. 2013. 200 p. ISBN : 1466567910. URL : https://www.ebook.de/de/product/19657139/thomas_hull_project_origami.html.
- [99] Giles W. HUNT et Ichiro ARIO. «Twist buckling and the foldable cylinder : an exercise in origami». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.6 (juill. 2005), p. 833-843. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.011](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.011).
- [100] Humiaki HUZITA. «Axiomatic development of origami geometry». In : *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, 1989*. 1989, p. 143-158.
- [101] Pan JIA, Bruno ANDREOTTI et Philippe CLAUDIN. «Paper waves in the wind». In : *Physics of Fluids* 27.10 (oct. 2015), p. 104101. DOI : [10.1063/1.4931777](https://doi.org/10.1063/1.4931777).
- [102] Cai JIANGUO et al. «Bistable Behavior of the Cylindrical Origami Structure With Kresling Pattern». In : *Journal of Mechanical Design* 137.6 (juin 2015). DOI : [10.1115/1.4030158](https://doi.org/10.1115/1.4030158).
- [103] D. C. JOHNSTON. «Stretched exponential relaxation arising from a continuous sum of exponential decays». In : *Physical Review B* 74.18 (nov. 2006). DOI : [10.1103/physrevb.74.184430](https://doi.org/10.1103/physrevb.74.184430).

- [104] Christophe JOSSERAND et al. «Memory Effects in Granular Materials». In : *Physical Review Letters* 85.17 (oct. 2000), p. 3632-3635. DOI : [10.1103/physrevlett.85.3632](https://doi.org/10.1103/physrevlett.85.3632).
- [105] Jacques JUSTIN. «Résolution par le pliage de l'équation du troisieme degré et applications géométriques». In : *Proceedings of the First international meeting of origami science and technology*. Ferrara, Italy. 1989, p. 251-261.
- [106] Muamer KADIC et al. «3D metamaterials». In : *Nature Reviews Physics* 1.3 (jan. 2019), p. 198-210. DOI : [10.1038/s42254-018-0018-y](https://doi.org/10.1038/s42254-018-0018-y).
- [107] James B. KNIGHT et al. «Density relaxation in a vibrated granular material». In : *Physical Review E* 51.5 (mai 1995), p. 3957-3963. DOI : [10.1103/physreve.51.3957](https://doi.org/10.1103/physreve.51.3957).
- [108] H. KOBAYASHI, B. KRESLING et J. F. V. VINCENT. «The geometry of unfolding tree leaves». In : *Proceedings of the Royal Society B : Biological Sciences* 265.1391 (jan. 1998), p. 147-154. DOI : [10.1098/rspb.1998.0276](https://doi.org/10.1098/rspb.1998.0276).
- [109] R. KOHLRAUSCH. «Theorie des elektrischen Ruckstandes in der Leidener Flasche». In : *Annalen der Physik und Chemie* 167.2 (1854), p. 179-214. DOI : [10.1002/andp.18541670203](https://doi.org/10.1002/andp.18541670203).
- [110] Itamar KOLVIN et Eran BOUCHBINDER. «Simple nonlinear equation for structural relaxation in glasses». In : *Physical Review E* 86.1 (juill. 2012). DOI : [10.1103/physreve.86.010501](https://doi.org/10.1103/physreve.86.010501).
- [111] A. J. KOVACS. «Transition vitreuse dans les polymères amorphes. Etude phénoménologique». In : *Fortschritte Der Hochpolymeren-Forschung*. Springer-Verlag, p. 394-507. DOI : [10.1007/bfb0050366](https://doi.org/10.1007/bfb0050366).
- [112] Dieter KRAFT. «A software package for sequential quadratic programming». In : *Forschungsbericht- Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt fur Luft- und Raumfahrt* (1988).
- [113] H. KRBECEK et M. PIETRALLA. «Brillouin Spectroscopy of Oriented Polymers». In : *International Journal of Polymeric Materials* 22.1-4 (nov. 1993), p. 177-183. DOI : [10.1080/00914039308012072](https://doi.org/10.1080/00914039308012072).
- [114] Biruta KRESLING. «Folded Tubes as Compared to Kikko (""Tortoise-Shell"") Bamboo». In : *Origami 3*. A K Peters/CRC Press, juill. 2002, p. 197-207. DOI : [10.1201/b15735-22](https://doi.org/10.1201/b15735-22).
- [115] Kaori KURIBAYASHI et al. «Self-deployable origami stent grafts as a biomedical application of Ni-rich TiNi shape memory alloy foil». In : *Materials Science and Engineering : A* 419.1-2 (mars 2006), p. 131-137. DOI : [10.1016/j.msea.2005.12.016](https://doi.org/10.1016/j.msea.2005.12.016).
- [116] Wilhelm KUTTA. «Beitrag zur naherungsweise integration totaler differentialgleichungen». In : *Z. Math. Phys.* 46 (1901), p. 435-453.

- [117] Yoav LAHINI et al. «Nonmonotonic Aging and Memory Retention in Disordered Mechanical Systems». In : *Physical Review Letters* 118.8 (fév. 2017). DOI : [10.1103/physrevlett.118.085501](https://doi.org/10.1103/physrevlett.118.085501).
- [118] Horace LAMB et Richard Vynne SOUTHWELL. «The vibrations of a spinning disk». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 99.699 (juill. 1921), p. 272-280. DOI : [10.1098/rspa.1921.0041](https://doi.org/10.1098/rspa.1921.0041).
- [119] L.D. LANDAU et al. *Theory of Elasticity*. Course of theoretical physics. Elsevier Science, 1986. ISBN : 9780750626330. URL : <https://books.google.fr/books?id=tpY-VkwCkAIC>.
- [120] Robert LANG. *Origami design secrets : mathematical methods for an ancient art*. Natick, MA : A.K. Peters, 2003. ISBN : 9781568817002.
- [121] Robert J. LANG. «A computational algorithm for origami design». In : *Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry - SCG '96*. ACM Press, 1996. DOI : [10.1145/237218.237249](https://doi.org/10.1145/237218.237249).
- [122] Mats G. LARSON et Fredrik BENGZON. *The Finite Element Method : Theory, Implementation, and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. DOI : [10.1007/978-3-642-33287-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33287-6).
- [123] F. LECHENAULT et M. ADDA-BEDIA. «Generic Bistability in Creased Conical Surfaces». In : *Physical Review Letters* 115.23 (déc. 2015). DOI : [10.1103/physrevlett.115.235501](https://doi.org/10.1103/physrevlett.115.235501).
- [124] F. LECHENAULT, B. THIRIA et M. ADDA-BEDIA. «Mechanical Response of a Creased Sheet». In : *Physical Review Letters* 112.24 (juin 2014). DOI : [10.1103/physrevlett.112.244301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.112.244301).
- [125] Tao LIANG et Thomas A. WITTEN. «Crescent singularities in crumpled sheets». In : *Physical Review E* 71.1 (jan. 2005). DOI : [10.1103/physreve.71.016612](https://doi.org/10.1103/physreve.71.016612).
- [126] Tao LIANG et Thomas A. WITTEN. «Spontaneous curvature cancellation in forced thin sheets». In : *Physical Review E* 73.4 (avr. 2006). DOI : [10.1103/physreve.73.046604](https://doi.org/10.1103/physreve.73.046604).
- [127] Y. C. LIN et al. «Crumpling under an Ambient Pressure». In : *Physical Review Letters* 101.12 (sept. 2008). DOI : [10.1103/physrevlett.101.125504](https://doi.org/10.1103/physrevlett.101.125504).
- [128] Wilfried LINDER. *Digital photogrammetry : a practical course*. Berlin New York : Springer, 2006. ISBN : 9783540291527.
- [129] Chang LIU et Samuel M. FELTON. «Transformation Dynamics in Origami». In : *Physical Review Letters* 121.25 (déc. 2018). DOI : [10.1103/physrevlett.121.254101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.254101).
- [130] Augustus Edward Hough LOVE. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press, 1927.

- [131] Cheng Lv et al. «Origami based Mechanical Metamaterials». In : *Scientific Reports* 4.1 (août 2014). DOI : [10.1038/srep05979](https://doi.org/10.1038/srep05979).
- [132] L. MAHADEVAN. «Self-Organized Origami». In : *Science* 307.5716 (mars 2005), p. 1740-1740. DOI : [10.1126/science.1105169](https://doi.org/10.1126/science.1105169).
- [133] F. MAINARDI et G. SPADA. «Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology». In : *The European Physical Journal Special Topics* 193.1 (mars 2011), p. 133-160. DOI : [10.1140/epjst/e2011-01387-1](https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01387-1).
- [134] Kittiwit MATAN et al. «Crumpling a Thin Sheet». In : *Physical Review Letters* 88.7 (jan. 2002). DOI : [10.1103/physrevlett.88.076101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.88.076101).
- [135] Marc Z. MISKIN et al. «Graphene-based bimorphs for micron-sized, autonomous origami machines». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 115.3 (jan. 2018), p. 466-470. DOI : [10.1073/pnas.1712889115](https://doi.org/10.1073/pnas.1712889115).
- [136] Koryo MIURA. «A note on intrinsic geometry of origami». In : *Research of Pattern Formation* (1989). KTK Scientific Publishers Tokyo, Japan, p. 91-102. eprint : <http://www.scipress.org/e-library/rpf/pdf/chap2/0091.PDF>.
- [137] Koryo MIURA. «Method of packaging and deployment of large membranes in space». In : *The Institute of Space and Astronautical Science report* 618 (1985).
- [138] Daniel MORENO et Gabriel TAUBIN. «Simple, Accurate, and Robust Projector-Camera Calibration». In : *2012 Second International Conference on 3D Imaging, Modeling, Processing, Visualization & Transmission*. IEEE, oct. 2012. DOI : [10.1109/3dimpvt.2012.77](https://doi.org/10.1109/3dimpvt.2012.77).
- [139] Yusuke MORIKAWA et al. «Ultrastretchable Kirigami Bioprobes». In : *Advanced Healthcare Materials* 7.3 (déc. 2017), p. 1701100. DOI : [10.1002/adhm.201701100](https://doi.org/10.1002/adhm.201701100).
- [140] F.R.N NABARRO. «The time constant of logarithmic creep and relaxation». In : *Materials Science and Engineering : A* 309-310 (juill. 2001), p. 227-228. DOI : [10.1016/s0921-5093\(00\)01692-0](https://doi.org/10.1016/s0921-5093(00)01692-0).
- [141] H. NASSAR, A. LEBÉE et L. MONASSE. «Curvature, metric and parametrization of origami tessellations : theory and application to the eggbox pattern». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473.2197 (jan. 2017), p. 20160705. DOI : [10.1098/rspa.2016.0705](https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0705).
- [142] A.A. NATU, E.A. LOFGREN et S.A. JABARIN. «Effect of morphology on barrier properties of poly(ethylene terephthalate) ». In : *Polymer Engineering & Science* 45.3 (2005), p. 400-409. DOI : [10.1002/pen.20288](https://doi.org/10.1002/pen.20288).
- [143] Jerzy L. NOWINSKI. «Nonlinear Transverse Vibrations of a Spinning Disk». In : *Journal of Applied Mechanics* 31.1 (mars 1964), p. 72-78. DOI : [10.1115/1.3629573](https://doi.org/10.1115/1.3629573).

- [144] Johannes T.B. OVERVELDE et al. «A three-dimensional actuated origami-inspired transformable metamaterial with multiple degrees of freedom». In : *Nature Communications* 7 (mars 2016), p. 10929. DOI : [10.1038/ncomms10929](https://doi.org/10.1038/ncomms10929).
- [145] R. G. PALMER et al. «Models of Hierarchically Constrained Dynamics for Glassy Relaxation». In : *Physical Review Letters* 54.17 (avr. 1985), p. 1965-1965. DOI : [10.1103/physrevlett.54.1965](https://doi.org/10.1103/physrevlett.54.1965).
- [146] LORENZO PAVESI et Matteo CESCHINI. «Stretched-exponential decay of the luminescence in porous silicon». In : *Physical Review B* 48.23 (déc. 1993), p. 17625-17628. DOI : [10.1103/physrevb.48.17625](https://doi.org/10.1103/physrevb.48.17625).
- [147] J. B. PENDRY. «Negative Refraction Makes a Perfect Lens». In : *Physical Review Letters* 85.18 (oct. 2000), p. 3966-3969. DOI : [10.1103/physrevlett.85.3966](https://doi.org/10.1103/physrevlett.85.3966).
- [148] Raymond H PLAUT. «Formulas to determine fabric bending rigidity from simple tests». In : *Textile Research Journal* 85.8 (oct. 2014), p. 884-894. DOI : [10.1177/0040517514553877](https://doi.org/10.1177/0040517514553877).
- [149] A. POCHEAU et B. ROMAN. «Uniqueness of solutions for constrained Elastica». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 192.3-4 (juin 2004), p. 161-186. DOI : [10.1016/j.physd.2003.12.013](https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.12.013).
- [150] L. POCIVAVSEK et al. «Stress and Fold Localization in Thin Elastic Membranes». In : *Science* 320.5878 (mai 2008), p. 912-916. DOI : [10.1126/science.1154069](https://doi.org/10.1126/science.1154069).
- [151] A. V. POGORELOV. *Bendings of surfaces and stability of shells*. Providence, R.I : American Mathematical Society, 1988. ISBN : 082184525X.
- [152] Samuel POINCLOUX. «Élasticité et tremblements du tricot». Thèse de doct. Université Pierre Et Marie Curie, 2018. eprint : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01939566>.
- [153] Samuel POINCLOUX, Mokhtar ADDA-BEDIA et Frédéric LECHENAULT. «Geometry and Elasticity of a Knitted Fabric». In : *Physical Review X* 8.2 (juin 2018). DOI : [10.1103/physrevx.8.021075](https://doi.org/10.1103/physrevx.8.021075).
- [154] M. J. D. POWELL. «An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives». In : *The Computer Journal* 7.2 (fév. 1964), p. 155-162. DOI : [10.1093/comjnl/7.2.155](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.155).
- [155] Phanisri P. PRATAPA, Ke LIU et Glaucio H. PAULINO. «Geometric Mechanics of Origami Patterns Exhibiting Poisson's Ratio Switch by Breaking Mountain and Valley Assignment». In : *Physical Review Letters* 122.15 (avr. 2019). DOI : [10.1103/physrevlett.122.155501](https://doi.org/10.1103/physrevlett.122.155501).
- [156] F. PREISACH. «Über die magnetische Nachwirkung». In : *Zeitschrift für Physik* 94.5-6 (mai 1935), p. 277-302. DOI : [10.1007/bf01349418](https://doi.org/10.1007/bf01349418).

- [157] Ahmad RAFSANJANI et Katia BERTOLDI. «Buckling-Induced Kirigami». In : *Physical Review Letters* 118.8 (fév. 2017). DOI : [10.1103/physrevlett.118.084301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.118.084301).
- [158] YuanQiao RAO et al. «The relationship between microstructure and toughness of biaxially oriented semicrystalline polyester films». In : *Polymer* 49.10 (mai 2008), p. 2507-2514. DOI : [10.1016/j.polymer.2008.03.046](https://doi.org/10.1016/j.polymer.2008.03.046).
- [159] G RAUMANN. «The anisotropy of the elastic constants of transversely isotropic polyethylene terephthalate». In : *British Journal of Applied Physics* 14.11 (nov. 1963), p. 795-799. DOI : [10.1088/0508-3443/14/11/314](https://doi.org/10.1088/0508-3443/14/11/314).
- [160] Austin REID et al. «Geometry and design of origami bellows with tunable response». In : *Physical Review E* 95.1 (jan. 2017). DOI : [10.1103/physreve.95.013002](https://doi.org/10.1103/physreve.95.013002).
- [161] Austin Randolph REID. «Helium-3 Polarization and Origami Folded Cryogenic Actuators and Metamaterials». Thèse de doct. North Carolina State University, 2018. eprint : <https://repository.lib.ncsu.edu/handle/1840.20/35380>.
- [162] Evaristo RIANDE et al., éd. *Polymer Viscoelasticity*. CRC Press, nov. 1999. DOI : [10.1201/9781482293241](https://doi.org/10.1201/9781482293241).
- [163] Cook ROBERT COOK. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons, 29 déc. 1994. 336 p. ISBN : 0471107743. URL : https://www.ebook.de/de/product/3717359/robert_cook_cook_finite_element_modeling_for_stress_analysis.html.
- [164] Nick ROBINSON. *The origami bible*. London : North Light Books, 2004. ISBN : 1581805179.
- [165] A. RUDANOVSKI. «Conceptual origami-based installations». In : *Origami7 Volume 1 : Design, Education, History, and Science* (2018), p. 151-164.
- [166] C. RUNGE. «Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen». In : *Mathematische Annalen* 46.2 (juin 1895), p. 167-178. DOI : [10.1007/bf01446807](https://doi.org/10.1007/bf01446807).
- [167] S.HOFFMANN et al. «Educational Concepts for Developing and Designing Origami-Based Structures». In : *Origami7 Volume 1 : Design, Education, History, and Science* (2018), p. 241-256.
- [168] Jean SALENÇON. *Yield design*. Hoboken, NJ London : John Wiley & Sons ISTE, 2013. ISBN : 9781848215405.
- [169] Joaquim SALVI, Jordi PAGÈS et Joan BATLLE. «Pattern codification strategies in structured light systems». In : *Pattern Recognition* 37.4 (avr. 2004), p. 827-849. DOI : [10.1016/j.patcog.2003.10.002](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2003.10.002).

- [170] M. SASAKI et al. «Aging and memory effects in superparamagnets and superparamagnetic glasses». In : *Physical Review B* 71.10 (mars 2005). DOI : [10.1103/physrevb.71.104405](https://doi.org/10.1103/physrevb.71.104405).
- [171] D. SCHARSTEIN et R. SZELISKI. «High-accuracy stereo depth maps using structured light». In : *2003 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2003. Proceedings*. IEEE Comput. Soc. DOI : [10.1109/cvpr.2003.1211354](https://doi.org/10.1109/cvpr.2003.1211354).
- [172] Mark SCHENK et Simon D. GUEST. «Geometry of Miura-folded metamaterials». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110.9 (fév. 2013), p. 3276-3281. DOI : [10.1073/pnas.1217998110](https://doi.org/10.1073/pnas.1217998110).
- [173] Mark SCHENK et al. «Review of Inflatable Booms for Deployable Space Structures : Packing and Rigidization». In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 51.3 (mai 2014), p. 762-778. DOI : [10.2514/1.a32598](https://doi.org/10.2514/1.a32598).
- [174] D. SCHURIG et al. «Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies». In : *Science* 314.5801 (nov. 2006), p. 977-980. DOI : [10.1126/science.1133628](https://doi.org/10.1126/science.1133628).
- [175] *SciPy Cookbook, Least squares circle*. 2011. eprint : https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/Least_Squares_Circle.html.
- [176] Keith A. SEFFEN. «Inverted cones and their elastic creases». In : *Physical Review E* 94.6 (déc. 2016). DOI : [10.1103/physreve.94.063002](https://doi.org/10.1103/physreve.94.063002).
- [177] S. SERRE et M. L. SPREAFICO. «An Origami Project for Exploring the Learning of Mathematical Logic». In : *Origami7 Volume 1 : Design, Education, History, and Science* (2018), p. 225-240.
- [178] J. L. SILVERBERG et al. «Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials». In : *Science* 345.6197 (août 2014), p. 647-650. DOI : [10.1126/science.1252876](https://doi.org/10.1126/science.1252876).
- [179] Jesse L. SILVERBERG et al. «Origami structures with a critical transition to bistability arising from hidden degrees of freedom». In : *Nature Materials* 14.4 (mars 2015), p. 389-393. DOI : [10.1038/nmat4232](https://doi.org/10.1038/nmat4232).
- [180] James G. SIMMONDS. «The Transverse Vibrations of a Flat Spinning Membrane». In : *Journal of the Aerospace Sciences* 29.1 (jan. 1962), p. 16-18. DOI : [10.2514/8.9297](https://doi.org/10.2514/8.9297).
- [181] Zeming SONG et al. «Kirigami-based stretchable lithium-ion batteries». In : *Scientific Reports* 5.1 (juin 2015). DOI : [10.1038/srep10988](https://doi.org/10.1038/srep10988).
- [182] B. STURMAN, E. PODIVILOV et M. GORKUNOV. «Origin of Stretched Exponential Relaxation for Hopping-Transport Models». In : *Physical Review Letters* 91.17 (oct. 2003). DOI : [10.1103/physrevlett.91.176602](https://doi.org/10.1103/physrevlett.91.176602).

- [183] Tomohiro TACHI. «Composite rigid-foldable curved origami structure». In : *1st International Conference on Transformable Architecture (Transformables 2013), Seville, Spain, Sept. 2013*, p. 18-20.
- [184] Tomohiro TACHI. «Freeform variations of origami». In : *J. Geom. Graph* 14.2 (2010), p. 203-215.
- [185] Tomohiro TACHI. «Rigid-Foldable Thick Origami». In : *Origami 5*. A K Peters/CRC Press, juin 2011, p. 253-263. DOI : [10.1201/b10971-24](https://doi.org/10.1201/b10971-24).
- [186] Tomohiro TACHI. «Simulation of Rigid Origami». In : *Origami 4*. A K Peters/CRC Press, août 2009, p. 175-187. DOI : [10.1201/b10653-20](https://doi.org/10.1201/b10653-20).
- [187] T. TALLINEN, J. A. ÅSTRÖM et J. TIMONEN. «The effect of plasticity in crumpling of thin sheets». In : *Nature Materials* 8.1 (déc. 2008), p. 25-29. DOI : [10.1038/nmat2343](https://doi.org/10.1038/nmat2343).
- [188] B. THIRIA et M. ADDA-BEDIA. «Relaxation Mechanisms in the Unfolding of Thin Sheets». In : *Physical Review Letters* 107.2 (juill. 2011). DOI : [10.1103/physrevlett.107.025506](https://doi.org/10.1103/physrevlett.107.025506).
- [189] S TIMOSHENKO et James N GOODIER. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1969.
- [190] Erez Y. URBACH et Efi EFRATI. «Delayed instabilities in viscoelastic solids through a metric description». In : (26 nov. 2017). arXiv : [1711.09491v1](https://arxiv.org/abs/1711.09491v1) [[cond-mat.soft](https://arxiv.org/abs/1711.09491v1)].
- [191] Erez Y. URBACH et Efi EFRATI. «The metric description of viscoelasticity and instabilities in viscoelastic solids». In : (4 juin 2018). arXiv : [1806.01237v1](https://arxiv.org/abs/1806.01237v1) [[cond-mat.soft](https://arxiv.org/abs/1806.01237v1)].
- [192] Emmanuel VIROT, Xavier AMANDOLESE et Pascal HÉMON. «Fluttering flags : An experimental study of fluid forces». In : *Journal of Fluids and Structures* 43 (nov. 2013), p. 385-401. DOI : [10.1016/j.jfluidstructs.2013.09.012](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.09.012).
- [193] GA Vliegenthart et G GOMPPER. «Forced crumpling of self-avoiding elastic sheets». In : *Nature materials* 5.3 (2006), p. 216-221.
- [194] Scott WAITUKAITIS et al. «Origami Multistability : From Single Vertices to Metasheets». In : *Physical Review Letters* 114.5 (fév. 2015). DOI : [10.1103/physrevlett.114.055503](https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.055503).
- [195] M.G. WALKER et K.A. SEFFEN. «The flexural mechanics of creased thin strips». In : *International Journal of Solids and Structures* 167 (août 2019), p. 192-201. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2019.03.016](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.03.016).
- [196] Martin G. WALKER et Keith A. SEFFEN. «On the shape of bistable creased strips». In : *Thin-Walled Structures* 124 (mars 2018), p. 538-545. DOI : [10.1016/j.tws.2017.12.033](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.12.033).
- [197] Kan WANG et al. «Designable dual-material auxetic metamaterials using three-dimensional printing». In : *Materials & Design* 67 (fév. 2015), p. 159-164. DOI : [10.1016/j.matdes.2014.11.033](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2014.11.033).

- [198] Z. Y. WEI et al. «Geometric Mechanics of Periodic Pleated Origami». In : *Physical Review Letters* 110.21 (mai 2013). DOI : [10.1103/physrevlett.110.215501](https://doi.org/10.1103/physrevlett.110.215501).
- [199] Graham WILLIAMS et David C. WATTS. «Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function». In : *Transactions of the Faraday Society* 66 (1970), p. 80. DOI : [10.1039/tf9706600080](https://doi.org/10.1039/tf9706600080).
- [200] T. A. WITTEN. «Spontaneous Free-Boundary Structure in Crumpled Membranes†». In : *The Journal of Physical Chemistry B* 113.12 (mars 2009), p. 3738-3742. DOI : [10.1021/jp807548s](https://doi.org/10.1021/jp807548s).
- [201] T. A. WITTEN. «Stress focusing in elastic sheets». In : *Reviews of Modern Physics* 79.2 (avr. 2007), p. 643-675. DOI : [10.1103/revmodphys.79.643](https://doi.org/10.1103/revmodphys.79.643).
- [202] R. J. WOOTTON et al. «Approaches to the structural modelling of insect wings». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society B : Biological Sciences* 358.1437 (sept. 2003), p. 1577-1587. DOI : [10.1098/rstb.2003.1351](https://doi.org/10.1098/rstb.2003.1351).
- [203] H. YASUDA et J. YANG. «Reentrant Origami-Based Metamaterials with Negative Poisson's Ratio and Bistability». In : *Physical Review Letters* 114.18 (mai 2015). DOI : [10.1103/physrevlett.114.185502](https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.185502).
- [204] Hiromi YASUDA et al. «Origami-based tunable truss structures for non-volatile mechanical memory operation». In : *Nature Communications* 8.1 (oct. 2017). DOI : [10.1038/s41467-017-00670-w](https://doi.org/10.1038/s41467-017-00670-w).
- [205] Y. YOSHIMURA. «On the mechanism of buckling of a circular cylindrical shell under axial compression». In : (). eprint : <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930093840>.
- [206] Liping ZHANG et al. «Gauss Map Based Curved Origami Discretization». In : *Journal of Mechanisms and Robotics* 11.1 (nov. 2018). DOI : [10.1115/1.4041631](https://doi.org/10.1115/1.4041631).
- [207] S. L. ZHANG et J. C. M. LI. «Anisotropic elastic moduli and Poisson's ratios of a poly(ethylene terephthalate) film». In : *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Physics* 42.2 (2003), p. 260-266. DOI : [10.1002/polb.10542](https://doi.org/10.1002/polb.10542).
- [208] T. Y. ZHANG et C. Y. SUEN. «A fast parallel algorithm for thinning digital patterns». In : *Communications of the ACM* 27.3 (mars 1984), p. 236-239. DOI : [10.1145/357994.358023](https://doi.org/10.1145/357994.358023).
- [209] Z. ZHANG. «A flexible new technique for camera calibration». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22.11 (2000), p. 1330-1334. DOI : [10.1109/34.888718](https://doi.org/10.1109/34.888718).