



HAL
open science

Analyse et mise en œuvre de l'analyseur pyramide pour l'optique adaptative à très hauts ordres des ELT

Vincent Deo

► **To cite this version:**

Vincent Deo. Analyse et mise en œuvre de l'analyseur pyramide pour l'optique adaptative à très hauts ordres des ELT. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Cité, 2019. Français. NNT : 2019UNIP7137 . tel-03128914

HAL Id: tel-03128914

<https://theses.hal.science/tel-03128914>

Submitted on 2 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris

ÉCOLE DOCTORALE 127

ASTRONOMIE & ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

Laboratoire d'Études Spatiales et d'Instrumentation en Astrophysique

Thèse de doctorat

pour obtenir le grade de Docteur en sciences

Analyse et mise en œuvre de l'analyseur pyramide pour l'optique adaptative à très hauts ordres des ELT

par Vincent DEO

Thèse dirigée par Gérard ROUSSET et Éric GENDRON

Soutenue publiquement le 7 octobre 2019 devant un jury composé de :

Cécile FERRARI	<i>Présidente</i>	Professeure des universités, IPGP
Roberto RAGAZZONI	<i>Rapporteur</i>	Directeur de recherche, INAF
Jean-Pierre VÉRAN	<i>Rapporteur</i>	Senior Scientist, NRC-CNRC
Caroline KULCSÁR	<i>Examinatrice</i>	Professeure des universités, IOGS
Benoit NEICHEL	<i>Examineur</i>	Chargé de recherche, LAM
Christophe VÉRINAUD	<i>Examineur</i>	Ingénieur de recherche, ESO
Éric GENDRON	<i>Directeur</i>	Astronome adjoint, LESIA
Gérard ROUSSET	<i>Directeur</i>	Professeur des universités, LESIA



Remerciements

Déjà, merci à toi qui prends la peine de lire ce manuscrit !

Trois ans, déjà !

Et quelques quatre mois depuis ma soutenance... des vacances notamment. Je profite de mes dernières semaines à Meudon avant de partir m'installer à Hawaï pour écrire les tous derniers mots de ce *tapuscrit* de thèse. Ce long parcours de thèse n'aurait évidemment pas été possible sans l'assistance de nombreuses personnes, et je prends donc ces quelques lignes pour exprimer ma gratitude à celles et ceux qui m'ont fourni leur assistance, logistique et scientifique, leur humour, leurs conseils, et leur réconfort pendant ma thèse.

Je tiens à remercier très chaleureusement les membres de mon jury – Cécile, Roberto, Jean-Pierre, Caroline, Benoit et Christophe – d'avoir accepté la corruption de quelques petits fours en échange de la charge de travail supplémentaire, et je les remercie tout particulièrement pour leurs commentaires, corrections, et suggestions scientifiques tous azimuts. Merci aussi d'avoir évité les questions trop difficiles, ça m'a permis de passer une soutenance finalement très agréable !

Ensuite, je tiens à adresser mes remerciements infinis¹ à mes directeurs de thèse Éric et Gérard, qui auront énormément travaillé, dirigé, orienté, relu, reformulé, et corrigé pour que mes travaux prennent forme et se concrétisent. Il m'est franchement difficile de suffisamment souligner à quel point leur disponibilité, leur compétence (évidemment), leur intérêt, et leurs qualités humaines en général et d'encadrants en particulier ont été la colonne vertébrale, pour moi, de ces trois années passées à Meudon. Un immense merci pour les bons mots et les bons moments, les conversations techniques endiablées et les réunions à rallonge, les portes toujours ouvertes, la psychothérapie et les cours magistraux *on demand* sur le canapé du Rico à n'importe quelle heure ; merci aussi de m'avoir supporté, accueilli, et considéré avec votre incroyable gentillesse toutes les fois où j'ai débarqué sans prévenir avec une remarque ou une question complètement sortie de son contexte².

1. (unités arbitraires)

2. des remarques *parfois* pertinentes, hé ho !

Un grand merci à toute l'équipe du bâtiment 12, et des alentours, dont l'ambiance si décontractée m'a fait me sentir à l'aise tout de suite. Une expérience humaine fantastique : tous ouverts à la discussion sur n'importe quel sujet, toujours prêts à prêter assistance aux nouveaux thésards, une machine à café de compét', des récits de guerre en Ouzbékistan ou ailleurs, des débats aussi hautement intellectuels et techniques que profondément inutiles³; et des grands éclats de rire, autant de contributions essentielles à ma (non-)productivité, et surtout à mon plaisir de faire partie de cette équipe.

Un merci en particulier à Fabrice, Arnaud et Florian pour leur résilience psychologique face à mes demandes de support technique; à Tristan et Yann pour leurs conseils et coups de pouce toujours avisés; à Fanny et Mathieu qui auront fait l'effort d'éponger mon absence totale de connaissances en optique; aux stagiaires tout pleins d'entrain Vincent et Milan qui m'auront efficacement forcé à synthétiser et à partager mes connaissances, même les jours de mauvaise humeur en pleine rédaction; à Lisa, Lucas, Pierre, Clément, Nicolas, Simon, et aux copains du bâtiment 16 – Diane, Corentin, Alan, Sonny, Étienne, et leurs compagnons – pour les superbes moments partagés, le soutien sans faille des connaisseurs passés par là, les soirées raclette, le Ricard du lundi après-midi, et en général pour m'avoir introduit à leur univers des "jeunes" de l'observatoire. Un merci, un grand sourire, et une tape dans le dos à Arielle, qui se fait un plaisir de prendre la suite des opérations sur l'analyseur pyramide, et à qui je souhaite encore deux années de "bon courage" d'avance.

Je voulais aussi remercier ceux qui le sont trop rarement, et qui pourtant m'ont amenés, indirectement, jusqu'à ce doctorat : tous les enseignants et encadrants que j'ai côtoyés dans le supérieur, et qui chacun et tous ensemble m'ont permis par leur travail passionné et leur enseignement de qualité de les rejoindre aujourd'hui dans la communauté scientifique.⁴

Un grand merci enfin à mes amis, de tous horizons et depuis tout ce temps, de lycée, de Rueil, de prépa, de l'X, de l'Obs désormais, les pièces rapportées qui ne rentrent dans aucune de ces catégories, et j'en passe. On ne me verra pas prendre le risque d'essayer de faire ici une liste nominative, mais tous ont dû subir mon obsession monomaniaque pour les pyramides⁵, m'ont sorti la tête de l'eau, n'ont pas oublié de m'inviter en vacances, et sont restés d'un soutien indéfectible.

Et à toute ma famille, grands-parents, Claire, Thierry, et en particulier mes parents Anne et Michel; merci encore, je vous aime, tout ça, c'est grâce à vous.

3. Arrivera-t-on oui ou non à déterminer la masse orbitable par une catapulte de porte-avion ?

4. Parmi ceux qui sont aussi remerciés trop rarement : mes sponsors Sci-hub, Wikipédia et ADS.

5. Et mes colocataires successifs qui ont toléré ça tous les jours! Merci ♡.

Résumé

Les années 2020 vont voir la mise en route des extrêmement grands télescopes (ELT), et avec eux une révolution dans l'astronomie optique. Ces télescopes, de diamètres de 24 à 39 mètres, offriront à la communauté scientifique une qualité d'imagerie d'un ordre de grandeur supérieure aux meilleurs observatoires actuels. Néanmoins, les télescopes au sol sont naturellement limités par la turbulence atmosphérique : de la résolution théorique de l'ELT de quelques mas, les taches image sont brouillées jusqu'à atteindre environ une seconde d'arc de largeur.

L'optique adaptative (OA) se propose de compenser en temps réel l'effet de la turbulence atmosphérique, mesurant cette dernière sur des étoiles guides et agissant sur le front d'onde à l'aide de miroirs déformables. Elle est absolument indispensable pour garantir la performance scientifique de tous les grands télescopes terrestres. L'OA reste limitée en terme de couverture de ciel, et il est nécessaire de pouvoir l'asservir sur les étoiles les plus faibles possibles ; ceci promeut le développement d'analyseurs de surface d'onde toujours plus sensibles, dont l'analyseur pyramide (PWFS), qui profite aussi de détecteurs disponibles plus efficaces. Ainsi les étoiles plus faibles, jusqu'à une à trois magnitudes supplémentaires, peuvent encore guider l'OA.

Le PWFS reste une technologie en cours de maturation, et cette thèse s'inscrit parmi les recherches conduites pour amener ce senseur jusqu'aux ELT malgré ses limites : défauts d'usinage et d'alignement ; et un comportement non-linéaire. Ce dernier provoque d'importantes baisses de performance en conditions de mauvais seeing.

D'une part, cette thèse présente la mise en œuvre sur banc d'optique d'un démonstrateur d'OA à l'échelle des ELT : caractérisations et étalonnages des composants spécifiques au PWFS à haute résolution, jusqu'à la mise en œuvre d'une boucle fermée complète sur un télescope simulé de 18 mètres de diamètre.

D'autre part, l'essentiel de ces travaux portent sur la conception d'algorithmes de contrôle et de lois de commande, théoriquement, en simulation, et sur banc, afin d'exploiter au maximum les capacités du PWFS. On propose une analyse des défauts du PWFS, et une modification du contrôle qui permet de relaxer fortement les contraintes de fabrication et de généraliser l'approche à d'autres senseurs, comme le PWFS à 3 faces. Pour ces PWFS, on met en place une étude systématique des non-linéarités, qui permet de définir une méthode de compensation au premier ordre en fonction des conditions turbulentes, et respectant les contraintes opérationnelles.

Ces travaux aboutissent finalement à la conception d'un algorithme d'asservissement de second niveau, qui permet d'optimiser les paramètres du contrôleur de l'OA en temps réel, à partir de la seule télémétrie existante. Quelles que soient les conditions d'observation, il devient possible d'ajuster la loi de commande pour obtenir un contrôle optimisé à travers le PWFS, sans a priori et sans intervention aucune.

Mots clés : Optique adaptative ; Extrêmement grands télescopes ; Analyse de surface d'onde ; Senseurs non-linéaires ; Analyseur pyramide ; Contrôle.

Abstract

The 2020s are to see the first light of Extremely Large Telescopes (ELTs), and together with it a revolution in optical astronomy. ELTs, with diameters from 24 to 39 meters, will grant the scientific community access to an imaging quality an order of magnitude better than the current largest observatories. However, ground-based telescopes are limited by atmospheric turbulence: from a theoretical ELT resolution of a few mas, image spots are blurred up to a width of about an arcsecond.

Adaptive Optics (AO) offers a real-time compensation method to turbulence-induced nefarious effects. Turbulence is measured on guide stars, and the incident wavefront is corrected using deformable mirrors. AO stands as an absolute requirement to achieve nominal imaging performance at larger ground-based observatories. Yet AO suffers from a fundamental sky coverage limitation, and it is necessary to enable guidance on the faintest possible stars. This drives AO research towards ever more sensitive wavefront sensors, among which the pyramid sensor (PWFS), which also benefits from available higher efficiency detectors. Fainter guide stars up to an extra 1-3 magnitudes can be used for AO guidance.

The PWFS technology remains to be completely mastered, with this PhD standing within research performed to bring the PWFS up to the task of ELT-sized AO, notwithstanding its intrinsic limitations: machining and alignment defects; and an infamous non-linear behavior. The latter induces important losses in AO performance in sub-median seeing conditions.

First, this dissertation presents the implementation of a high order PWFS AO demonstrator in the lab at ELT scales: the characterizations and calibrations of PWFS-specific components, up to the operation of a complete closed AO loop on an 18 m diameter simulated telescope.

Second, most of this research focuses on the conception and demonstration of control algorithms and command laws, both in theory, simulations, and in the lab, as to enable the best performance from the PWFS. An analysis of PWFS defects is proposed, along with an associated new control law enabling an important relaxation of machining specifications, and the generalization of the approach to other sensors, such as the 3-sided PWFS. For these PWFS, we perform a systematic study of nonlinear effects, resulting in a first-order compensation method depending on seeing conditions, which method is compliant with AO operational requirements.

Finally, we present a novel second-layer servo-loop control, which performs a real-time optimization of the AO controller parameters, based upon the sole preexisting AO telemetry. Regardless of observational conditions, it becomes possible to fine-tune the PWFS command law automatically, without need of situational knowledge nor any kind of intervention on the system.

Keywords: Adaptive optics; Extremely large telescopes; Wavefront sensing; Nonlinear sensors; Pyramid wavefront sensor; System control techniques.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vi
Table des matières	vii
Liste des figures et tables	xi
Liste des abréviations	xv
Introduction	xvii
I Principes généraux : Imagerie, turbulence, optique adaptative	1
1 L'imagerie optique pour l'astronomie	3
1.1 Un télescope, c'est quoi ?	4
1.1.1 Formation des images	4
1.1.2 Optique de Fourier	5
1.1.3 Images et transformée de Fourier optique	7
1.2 La turbulence atmosphérique	11
1.2.1 Origine et physique	11
1.2.2 Description statistique	12
1.3 Impact de la turbulence sur les images	17
1.3.1 Description	18
1.3.2 Qualité des images	19
1.4 Décomposition modale du front d'onde	22
1.4.1 Polynômes de Zernike	22
1.4.2 Variance de phase des Zernikes	23
1.4.3 Karhunen-Loève atmosphériques	25
1.5 Des aspects spatiaux aux aspects temporels	26
1.6 Conclusion : vers l'optique adaptative	26
2 L'optique adaptative	29
2.1 Principe général	30
2.1.1 Une très brève histoire	30
2.1.2 La SCAO : Single Conjugate Adaptive Optics	30
2.2 Agir sur la phase : le miroir déformable	32
2.2.1 Le modèle linéaire	32

2.2.2	Zone de correction	34
2.2.3	Une base orthonormée pour le DM	36
2.3	Mesurer la phase : l'analyseur de surface d'onde	37
2.3.1	Le Shack-Hartmann	38
2.3.2	D'autres types d'analyseurs	39
2.4	L'analyseur Pyramide	40
2.4.1	Principe et analyse géométrique	40
2.4.2	Généralisation des mesures	48
2.4.3	Une analyse diffractive	49
2.4.4	D'autres pyramides	53
2.5	Calculateur temps réel	54
2.5.1	Matrices d'interaction et de commande	54
2.5.2	Loi de commande et analyse temporelle de l'OA	57
2.5.3	Contrôle du gain par suppression du bruit négatif	61
2.6	Budget d'erreur en optique adaptative	62
2.6.1	Erreurs liées au dimensionnement	63
2.6.2	Erreurs liées au système	63
2.6.3	Erreurs pour le canal scientifique	66
2.7	Au delà de la SCAO : des OA plus complexes	67
2.7.1	Couverture de ciel et lasers	67
2.7.2	D'autres modes d'OA	68
2.8	Futur immédiat en OA : les ELT et leurs défis	69
2.8.1	L'ELT de l'ESO	71
2.8.2	MICADO et sa SCAO	72

II PYRCADO : Mise en œuvre en laboratoire d'un analyseur pyramide à très hauts ordres 75

3	PYRCADO : Un démonstrateur de pyramide, taille ELT	77
3.1	Introduction	78
3.1.1	Présentation du banc	78
3.1.2	L'analyseur PYRCADO	80
3.2	Étalonnage de l'ASO	82
3.2.1	Préliminaires	83
3.2.2	Positionnement des quadrants	84
3.2.3	Déplacement volontaire des quadrants	86
3.2.4	Déplacement thermique des quadrants	87
3.3	Étalonnage du SLM	88
3.3.1	Référencement de la pupille	89
3.3.2	Caractérisation du saut de phase	92
3.3.3	Non-linéarité en profondeur	93
3.3.4	Temps de montée	96

3.3.5	Génération d'écrans de phase SLM	97
3.4	Étalonnage du miroir de modulation	97
3.4.1	Fréquence d'oscillation	100
3.4.2	Phasage des canaux	105
3.4.3	Amplitude de modulation	107
3.5	Matrice d'interaction et premières mesures	109
3.5.1	Paramètres de l'OA de PYRCADO	109
3.5.2	Mesure de la matrice d'interaction	110
3.6	Fermeture de boucle	114

III La pyramide pour les très hauts ordres : problématiques, algorithmes de compensation et adaptation des lois de commande 121

4	Mésalignements et contrôle généralisé	123
4.1	Contexte	124
4.1.1	Origine expérimentale	124
4.1.2	Généralisation des cartes de pentes	126
4.2	Article A&A2018 : Deo et al. (2018a)	128
4.3	Un complément : les mésalignements extrêmes	143
4.4	Et après ?	146
4.4.1	Les spécifications de l'analyseur SCAO de MICADO	147
4.4.2	Des résultats conceptuels	147
5	Gain optique et compensation modale	149
5.1	Contexte	150
5.1.1	Non-linéarité et baisse de sensibilité	150
5.1.2	Compensation et approche modale	154
5.2	Article A&A2019 : Deo et al. (2019a)	156
5.3	Discussions et compléments	175
5.3.1	Les fronts d'onde de classe p_0	175
5.3.2	Rayon de modulation et autres bases modales	177
5.3.3	Sélection des modes pour le dithering	182
5.3.4	Compensation dense du gain optique	186
5.4	Quelques résultats pour la pyramide à trois faces	190
5.4.1	Préliminaires	190
5.4.2	Dithering pour le 3PWFS : étude des abaques	193
5.4.3	Simulations end-to-end	193
5.4.4	Analyse des non-linéarités	197
5.4.5	Conclusion	200

6	CLOSE : un contrôleur du gain modal en temps réel	203
6.1	Introduction	204
6.2	Principe général et implémentation	205
6.2.1	Intégration dans la boucle d'OA	205
6.2.2	Détection de résonance dans les mesures	207
6.2.3	Implémentation temps-réel	211
6.2.4	Contraintes imposées sur le RTC et implémentation par blocs	213
6.3	Comparaison avec les solutions optimales	214
6.3.1	Préliminaires	214
6.3.2	Résultats numériques	215
6.4	Simulations numériques	216
6.4.1	Convergence des gains à la fermeture de boucle	217
6.4.2	Comportement temporel des G_i en boucle fermée	220
6.4.3	Performance de bout-en-bout en conditions stationnaires	222
6.4.4	Seeing rapidement variable	223
6.5	Compensation des NCPA avec un PWFS	224
6.5.1	Problématique	224
6.5.2	Gain optique et gain dynamique avec CLOSE	226
6.6	Quelques commentaires et perspectives	228
	Conclusions et perspectives	231
	Bibliographie	235
A	Spectre modal temporel incident pour un PWFS	249
B	Liste de publications	255
C	Deo et al. (2017) : “Enlarging the control space of the pyramid wa- vefront sensor : Numerical simulations and bench validation” (2017), 5th AO4ELT conference	259
D	Deo et al. (2018b) : “A modal approach to optical gain compensation for the pyramid wavefront sensor” (2018), Proc. SPIE 10703	265
E	Deo et al. (2019b) : “CLOSE : a self-regulating, best-performance tracker for modal integrator based AO loops” (2019), 6th AO4ELT conference	275

Liste des figures et tables

1.1	Propagation de la lumière, des étoiles jusqu'au plan focal	5
1.2	Représentation d'une tache d'Airy, de face et en coupe	7
1.3	Pupille de l'ELT et tache de diffraction associée	8
1.4	FTO pour un télescope à pupille circulaire en l'absence d'aberrations .	9
1.5	Image de <i>RS Puppis</i> par le télescope spatial Hubble	10
1.6	Illustration du modèle de cascades convectives de Kolmogorov.	11
1.7	Déformation du front d'onde à la traversée des cellules convectives. . .	12
1.8	Spectres expérimentaux de von Kármán dans des écoulements à hauts Reynolds.	14
1.9	Profilométrie du $C_n^2(h)$ dans l'atmosphère au cours d'une nuit.	17
1.10	PSF courte et longue pose à travers la turbulence atmosphérique. . . .	19
1.11	Images de la galaxie HCG87c prises avec Gemini South sans son optique adaptative et avec le télescope spatial Hubble	20
1.12	Représentation des 9 premiers polynômes de Zernike.	24
1.13	Représentation des 9 premiers KL atmosphériques	27
2.1	Principe de fonctionnement de la SCAO	31
2.2	Schéma de principe d'un miroir déformable piézoélectrique	33
2.3	Fonction d'influence et correction par le DM	34
2.4	Exemple de PSF corrigée par une OA	35
2.5	Fonctionnement schématique d'un analyseur Shack-Hartmann.	39
2.6	Propagation d'un rayon lumineux aberrant au plan focal	41
2.7	Principe de l'analyseur de Horwitz	42
2.8	Principe de fonctionnement de l'analyseur pyramide	43
2.9	Trajet d'un rayon lumineux au voisinage du sommet de la pyramide au cours d'une période de modulation.	45
2.10	Réponse de l'analyseur pyramide à un astigmatisme	47
2.11	Sensibilité normalisée des PWFS et SH aux fréquences spatiales	51
2.12	Analyse de la sensibilité fréquentielle du PWFS par interférences des speckles	52
2.13	Sensibilité normalisée du PWFS dans le plan des fréquences spatiales .	53
2.14	Démonstration d'autres analyseurs de la classe des pyramides	54
2.15	Diagramme de la boucle d'asservissement de la SCAO.	58
2.16	Fonctions de transfert de puissance de la boucle d'OA $ h_{\text{Corr}} ^2$ et $ h_{\text{Noise}} ^2$	60
2.17	Illustration de l'effet d'anisoplanétisme	67
2.18	Principe de la MCAO	70
2.19	Design optique de l'ELT.	71
2.20	Vue d'ensemble de l'instrument MICADO-MAORY.	73

3.1	Schéma optique d'ensemble du banc SÉSAME avec l'expérience PYRCADO.	79
3.2	Photographie du démonstrateur PWFS PYRCADO	80
3.3	Micrographie optique du plan focal à travers le prisme pyramidal de PYRCADO.	81
3.4	Caractéristiques de caméras de l'expérience PYRCADO	82
3.5	Pré-traitement d'image pour l'ajustement des quadrants du PWFS	85
3.6	Exemple de résultat d'ajustement des quadrants du PWFS	85
3.7	Position et taille des quadrants pour l'analyseur PYRCADO	86
3.8	Déplacement des quadrants sur le CCD en fonction du déplacement de la PIL	87
3.9	Déplacement spontanés des quadrants sur le CCD	88
3.10	Caractéristiques du SLM de PYRCADO	89
3.11	Pré-traitement des images pour l'identification de la pupille sur le SLM	90
3.12	Ajustement des images des gradients annulaires à travers le PWFS	91
3.13	Relations entre les coordonnées \mathbf{r}_{SLM} et \mathbf{r}_{CCD}	91
3.14	Traitement des franges obtenues par introduction d'une piston différentiel entre deux trous d'Young	93
3.15	Mesures et ajustement de la phase $\phi(\delta)$ des franges par rapport à l'OPD δ introduite sur le SLM, en unité de commande.	94
3.16	Aberration différentielle d'amplitude RMS maximale mesurée lorsque qu'un piston est introduit sur le SLM	95
3.17	Aberration différentielle en fonction du piston sur le SLM	95
3.18	Imagerie rapide du temps de montée du SLM	96
3.19	Processus de génération d'écrans de phase sur le SLM	98
3.20	Spécifications de l'actionneur piézoélectrique du FSM.	99
3.21	Spécifications de la carte DDB pilotant le FSM.	99
3.22	Mesure de la fréquence de la modulation par analyse azimutale des ellipses modulées - exemples.	101
3.23	Mesure de la fréquence de la modulation par analyse azimutale des ellipses modulées - résultats.	102
3.24	Chronogramme de l'exposition de la caméra du PWFS relativement au FSM.	104
3.25	Spectres mesurés durant l'étalonnage synchrone du FSM.	105
3.26	Amplitude du pic de battement à 5 Hz en fonction de f	105
3.27	Méthode d'étalonnage de ϕ_{DDB} : mesure de l'argument des ellipses	106
3.28	Résultat de l'étalonnage de ϕ_{DDB}	107
3.29	Étalonnage du rayon de modulation du DDB par mesure de l'extension des ellipses de modulation selon les axes.	108
3.30	Principaux paramètres de l'OA sur le banc PYRCADO.	109
3.31	Sensibilité de l'analyseur PYRCADO aux modes KL_i^{DM}	111
3.32	Sensibilité de l'analyseur PYRCADO aux modes F_i^{DM}	112
3.33	Décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction	113

3.34	Sensibilité individuelle des pixels du PWFS de PYRCADO	114
3.35	Front d'onde résiduel après 2 s de fermeture de boucle	115
3.36	PSF obtenues avec la caméra d'imagerie post-modulation de PYRCADO.	116
3.37	Zooms des PSF obtenues avec la caméra d'imagerie post-modulation de PYRCADO.	117
3.38	Analyse des résidus modaux en boucle fermée sur PYRCADO.	118
4.1	Images obtenues sur le banc PYRCADO, sans modulation (gauche) et avec modulation (droite), alors que le cœur de la PSF est stationné sur le sommet de la pyramide.	125
4.2	Analyse de la qualité du sommet du prisme pyramidal de rechange de PYRCADO	126
4.3	Micrographie du champ à travers le prisme défectueux	127
4.4	Performances de bout-en-bout obtenues en simulations numériques en fonction du mésalignement et de la méthode de contrôle du PWFS utilisée.	144
4.5	PSF longues poses en bande H obtenues lors des simulations numériques présentées sur la figure 4.4.	145
4.6	Analyse de la transformée $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{s}$ pour le mésalignement donné par l'équa- tion 4.3	146
5.1	Courbes de réponse à plusieurs modes d'un analyseur pyramide simulé par simple optique géométrique, en fonction du niveau de turbulence résiduel.	151
5.2	Réponse de l'analyseur pyramide à un quasi-défocuss, avec et sans résidu turbulent de hautes fréquences spatiales	152
5.3	Une modélisation de la PSF en régime de correction partielle.	153
5.4	Spectre modal utilisé (boucle fermée) pour définir les fronts d'onde de la classe $p_0 = 12.9$ cm.	176
5.5	Abaque du coefficient de sensibilité $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ pour trois bases du DM et deux rayons de modulation 4 et $8 \frac{\lambda}{D}$	179
5.6	Étude de la sensibilité du PWFS et de la baisse de sensibilité $\mu \left[\alpha_{\parallel}(\phi_i, p_0) \right]$ sur la base de Fourier du DM.	180
5.7	Valeurs RMS pour la matrice d'interaction $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ reprojctée sur le reconstructeur idéal \mathbf{Rec} , sur des fronts d'onde de classe p_0	183
5.8	Analyse du couplage des modes aux fréquences fondamentales et pre- mières harmoniques du dithering des ψ_i	185
5.9	PSF longue pose obtenue durant une séquence de dithering de 4 se- condes avec des amplitudes $A_i \ \psi_i\ = 50$ nm.	186
5.10	Analyse statistique du comportement du terme de confusion $\mathbf{d}_{\perp}(\phi_i)$. .	188
5.11	Performance obtenue pour la méthode de compensation dense.	190
5.12	Implémentation du 3PWFS dans COMPASS.	192
5.13	Abaques de réduction de sensibilité et des OGC G_{opt} pour le 3PWFS	194

5.14	Performance de bout-en-bout du 3PWFS pour des étoiles guides $M_R = 0$ et $M_R = 16$	195
5.15	Synthèse des simulations end-to-end effectuées pour comparaison entre les 3PWFS et 4PWFS	196
5.16	Analyse statistique de la reconstruction \mathbf{d} en présence du gain optique pour le 3PWFS.	198
5.17	Champ de reconstruction du tip-tilt pour les 4PWFS et 3PWFS autout de $\phi_{\text{Res}} = 0$	199
5.18	Erreur de non-linéarité aux tip-tilt pour les 3PWFS et 4PWFS.	200
6.1	Schéma de principe de la boucle d'OA, intégrée dans la boucle CLOSE.	205
6.2	Schéma de principe de la boucle d'OA pour un seul mode.	206
6.3	Paramètres des points de divergence de la boucle d'OA.	208
6.4	Spectres de puissance des mesures à l'approche de la résonance.	209
6.5	Comparaison des solutions numériques pour les gains MV et CLOSE.	215
6.6	Paramètres des simulations de bout-en-bout.	217
6.7	Convergence des gains CLOSE a la fermeture de boucle.	219
6.8	Séries temporelles des gains CLOSE durant l'asservissement.	220
6.9	Performance simulée en conditions stationnaires.	222
6.10	Performance simulée pour des conditions de seeing variables.	224
6.11	Reconstruction du gain dynamique $\alpha_i G_i$ à partir des autocorrélations temporelles.	227
A.1	Spectre de puissance modal de la turbulence à travers un SH.	252
A.2	Spectre de puissance modal de la turbulence à travers un analyseur de courbure.	252
A.3	Spectre de puissance modal de la turbulence à travers un PWFS	253

Liste des abréviations

3PWFS	<i>3-sided Pyramid Wavefront Sensor</i> ; Analyseur pyramide à 3 faces
4PWFS	<i>4-sided Pyramid Wavefront Sensor</i> ; Analyseur pyramide à 4 faces
AO	<i>Adaptive Optics</i> ; Optique adaptative
ASO	Analyseur de surface d'onde
CCD	Charge Coupled Device (detector)
CLOSE	<i>Correlation-Locked Optimization StratEgy</i> ; Stratégie d'optimisation par verrouillage de corrélation
CMOS	Complementary Metal-Oxyde Semiconductor (detector)
COMPASS	COMputing Platform for Adaptive opticS Systems
CP	Courte pose
DDB	<i>Direct Digital signal generation Board</i> ; Carte digitale de génération de signaux
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> ; Transformée de Fourier discrète
DM	<i>Deformable Mirror</i> ; Miroir déformable
DSP	Densité spectrale de puissance
EE	<i>Ensquared Energy</i> ; Énergie encadrée
ELT	Extremely Large Telescope(s)
ESO	<i>European Southern Observatory</i> ; Observatoire Européen Austral
FT	<i>Fourier Transform</i> ; Transformée de Fourier
FTO	Fonction de transfert optique
FOM	<i>Figure of Merit</i> ; Figure de mérite
FSM	<i>Fast Steering Mirror</i> ; Miroir de modulation
FWHM	<i>Full width at half maximum</i> ; Largeur à mi-hauteur
GLAO	<i>Ground Layer Adaptive Optics</i> ; Optique adaptative conjuguée au sol
GMT	Giant Magellan Telescope
IF	<i>Influence Function</i> ; Fonction d'influence
KL	Karhunen-Loève
LCOS	<i>Liquid Crystal On Silicon</i> ; Cristaux liquides sur silicium
LE	<i>Long Exposure</i> ; Longue pose
LESIA	Laboratoire d'études spatiales et d'instrumentation en astrophysique
LP	Longue pose
LTAO	<i>Laser Tomography Adaptive Optics</i> ; Optique adaptative par tomographie laser
MAORY	Multi-conjugate Adaptive Optics RelaY
MCAO	<i>Multi-conjugate Adaptive Optics</i> ; Optique adaptative multi-conjuguée

MICADO	Multi-AO Infrared CAmera for Deep Observations
MOAO	<i>Multi-object Adaptive Optics</i> ; Optique adaptative multi-objets
MV	<i>Minimum Variance</i> ; Variance Minimale
MVM	<i>Matrix-Vector Multiplication</i> ; Multiplication matrice-vecteur
MTT	Monture tip-tilt
NCPA	<i>Non-common Path Aberrations</i> ; Aberrations non-communes
OA	Optique adaptative
OGC	<i>Optical Gain Coefficients</i> ; Coefficients de gain optique
OPD	<i>Optical Path Difference</i> ; Différence de chemin optique
PIL	<i>Pupil Imaging Lens</i> ; Lentille d'imagerie de pupille
PSD	<i>Power spectrum Density</i> ; Densité spectrale de puissance
PSF	<i>Point Spread Function</i> ; Fonction d'étalement de point
PWFS	<i>Pyramid Wavefront Sensor</i> ; Analyseur pyramide
PYRCADO	<i>PYRamid wavefront sensor prototype for miCADO</i> ; Prototype d'analyseur pyramide pour MICADO
RMS	<i>Root-Mean-Square</i> ; Moyenne quadratique
RON	<i>Read Out Noise</i> ; Bruit de lecture ou de détecteur
RTC	<i>Real-time Computer</i> ; Calculateur temps réel
SAPHIR	<i>Sensor Achromatic Pyramid HIgh Resolution</i> ; Analyseur achromatique à pyramide haute résolution
SCAO	<i>Single Conjugate Adaptive Optics</i> ; Optique adaptative à simple conjugaison
SE	<i>Short Exposure</i> ; Courte pose
SH	Shack-Hartmann
SLM	<i>Spatial Light Modulator</i> ; Modulateur spatial de lumière
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i> ; Rapport signal à bruit
SR	<i>Strehl Ratio</i> ; Rapport de Strehl
TF	Transformée de Fourier
TMT	Thirty Meter Telescope
VK	(spectre de) von Kármán
VLT	Very Large Telescope
WFS	<i>Wavefront Sensor</i> ; Analyseur de surface d'onde
WHT	William Herschel Telescope
XAO	<i>eXtreme Adaptive Optics</i> ; Optique adaptative extrême

Introduction

Je me rappelle d’une astuce que mes grand-parents me citaient, contemplant le ciel depuis notre terrasse, pour pouvoir savoir si tel ou tel point lumineux était une étoile ou une planète du système solaire : les étoiles scintillent ; les planètes beaucoup moins.

Le scintillement des étoiles est connu depuis la nuit des temps⁶. Le phénomène a été approfondi et confirmé dès les débuts de l’instrumentation astronomique : Galilée et Newton constatent que les étoiles “dansent” dans l’oculaire de leurs instruments, et entrevoient déjà que la propagation de la lumière à travers l’atmosphère qui nous entoure est la cause de ces fluctuations permanentes.

Les développements instrumentaux suivent leur cours pendant les siècles qui suivent ; astronomes et physiciens construisent des télescopes de diamètres toujours plus importants, affinent leur compréhension des phénomènes astrophysiques et de la physique de la lumière. Il est finalement acquis que c’est la réfraction erratique des rayons lumineux aux interfaces entre des masses d’air de températures différentes qui est à l’origine du scintillement des étoiles – visible à l’œil nu ; mais aussi à l’origine d’un effet de mouvement et de flou – qu’on observe avec des instruments même de taille modeste.

Les étoiles – sources ponctuelles – se voient “étalées”, et ne peuvent pas être distinguées avec une résolution plus précise qu’environ une arcseconde, et ce quelque soit le diamètre, et donc la résolution limite de diffraction, du télescope utilisé. Cette limite apparaît comme fondamentale, et l’on imagine jusqu’au milieu du XX^{ème} siècle que rien ne peut débarrasser les télescopes terrestres de l’effet de l’atmosphère, si ce n’est d’optimiser l’emplacement des observatoires.

Peu après l’inauguration du télescope de 200 pouces au Mont Palomar en 1949 par Edwin Hubble, un certain Horace Babcock (1953) décide qu’il est las de cette soumission des astronomes aux lois de la physique atmosphérique. En 1953, il propose pour la première fois l’*optique adaptative* (OA).

L’OA se propose comme un système auxiliaire à l’instrument scientifique placé au foyer du télescope. On introduit un miroir déformable (DM⁷), dont la forme vient compenser celle des fronts d’onde turbulents reçus à travers l’atmosphère. Après réflexion de l’onde électromagnétique sur ce DM, une image limitée par la diffraction peut venir se former sur l’imageur scientifique. Pour maintenir cet effet correcteur, un analyseur de surface d’onde (ASO) mesure l’aberration résiduelle, et un ordinateur temps-réel (RTC⁸) produit la commande nécessaire à sa compensation. La forme du DM, et son asservissement en temps réel par l’ASO, permettent de maintenir la qualité d’imagerie, et donc de retrouver la résolution théorique de l’instrument,

6. Et les planètes scintillent moins parce que ce sont des sources étendues. Je l’ai su 20 ans plus tard, et j’invite le lecteur curieux à le vérifier après avoir lu le chapitre 1.

7. *Deformable mirror* ; je préférerais souvent les acronymes anglais lorsque ceux-ci sont très usités.

8. *Real Time Computer*.

malgré l'évolution continue de la turbulence atmosphérique.

Il faudra 40 ans et de nombreux développements technologiques pour que l'OA trouve enfin le chemin de l'astronomie. La première OA astronomique, COME-ON, est mise en œuvre à l'observatoire de Haute-Provence en 1989 (Rousset et al., 1990). Fort d'un succès retentissant, COME-ON est ensuite déployé au télescope de 3.60 m de La Silla, référence de l'époque.

Le succès de COME-ON marque le début d'une nouvelle ère pour l'astronomie ; les bénéfices pour l'imagerie sont tels que l'OA s'impose comme un *must*, et tous les plus grands observatoires s'en équipent : les télescopes jumeau Keck (Wizinowich et al., 2000), Subaru (Gaessler et al., 2002), le *Very Large Telescope* (Rousset et al., 2003), etc. Il n'est plus envisageable aujourd'hui de porter un projet instrumental sans lui assortir une OA ; le gain en terme de résolution, de collecte de photons, d'imagerie d'objets lointains, faibles, et diffus, est tel que l'OA est désormais indispensable à l'approfondissement de l'astrophysique⁹. Et les projets vont bon train ; les télescopes de la classe des 8-10 mètres ont débuté leurs activités entre 1990 et 2010 ; les années 2020 vont voir l'arrivée de trois extrêmement grands télescopes (les ELT¹⁰), avec des miroirs primaires de 24 à 39 mètres de diamètre.

Parmi ces télescopes, l'ELT européen (Tamai et al., 2016), avec un miroir primaire de 39 mètres de diamètre, sera équipé en première lumière de trois instruments, dont la caméra MICADO¹¹ (Davies et al., 2018), un spectro-imageur grand champ en proche infrarouge. Celle-ci profitera de la résolution de 6 à 12 milli-arcsecondes, et des quelques 1000 m² de surface collectrice de l'ELT, pour fournir des données d'une qualité et d'une précision nouvelles à de nombreux sujets de recherche actifs en astrophysique ; pour n'en citer que quelques-uns : physique stellaire, objets compacts, imagerie directe d'exoplanètes, étude du centre galactique, etc. Évidemment, MICADO sera soutenu par des optiques adaptatives (Clénet et al., 2019; Diolaiti et al., 2016), et celle de première lumière, qui suit le paradigme classique à un ASO et un DM, est développée au LESIA, laboratoire d'accueil de ma thèse.

La complexité d'une OA augmente rapidement avec le diamètre du télescope : pour un échantillonnage spatial identique, le nombre de degrés de liberté du système augmente quadratiquement. Selon les algorithmes utilisés, la puissance du RTC doit augmenter d'au moins autant. La complexité technique des miroirs déformables à plusieurs milliers d'actionneurs est bien plus importante. Côté analyseur, l'augmentation du nombre de points de mesure augmente aussi la quantité de bruit reçue. La conception d'une nouvelle OA pour un ELT est donc une aventure complexe, et celle de MICADO ne fait pas exception. Des innovations sont nécessaires sur tous les fronts : optique, mécanique, informatique, algorithmique, ... Et c'est donc dans ce contexte

9. Et ce n'est d'ailleurs pas son seul champ d'application ; on pourra citer l'ophtalmologie, les systèmes de pointage et visée, les télécommunications optiques aériennes, l'imagerie sous-marine, etc.

10. *Extremely Large Telescope(s)*.

11. *Multi-AO Infrared CAmera for Deep Observations*.

qu'intervient ma thèse, au milieu des développements technologiques nécessaires pour mener à bien ce projet.

Parmi les paramètres clés de chaque OA, on trouve la couverture de ciel, c'est à dire la probabilité – associée à une direction donnée – d'y trouver un astre à la fois assez brillant et proche angulairement pour pouvoir guider l'asservissement avec une performance donnée. Pour pouvoir la maximiser, et donc avoir accès au plus grand nombre d'objets astronomiques possible, il faut optimiser l'usage fait de chaque photon reçu ; en d'autres termes, il faut optimiser absolument la sensibilité de l'ASO choisi.

Si l'OA a déjà accès de longue date à des analyseurs fiables dont les propriétés sont éprouvées, la communauté se tourne pour les ELT vers l'analyseur pyramide (PWFS¹²), proposé par [Ragazzoni \(1996\)](#) comme l'aboutissement d'une lignée de prototypes d'ASO, lointains descendants du couteau de Foucault. Le paradigme est résolument différent des Shack-Hartmann ([Shack, 1971](#)) alors communément utilisés, et offre naturellement une sensibilité bien supérieure ([Ragazzoni & Farinato, 1999](#)). Le PWFS est ensuite démontré sur le ciel au *Telescopio Nazionale Galileo* ([Ragazzoni et al., 2000b](#)), et les premiers systèmes dont l'analyseur principal est un PWFS sont installés au tournant des années 2010 ([Esposito et al., 2010](#); [Guyon et al., 2011](#)).

Si le PWFS est désormais utilisé sur le ciel dans plusieurs observatoires, il n'en reste pas moins que sa mise en œuvre est notablement plus subtile que celle d'un Shack-Hartmann. En cause en premier lieu, sa non-linéarité, avec pour preuve les nombreux travaux menés sur la construction de modèles analytiques et leurs inverses [Vérinaud \(2004\)](#); [Guyon \(2005\)](#); [Shatokhina \(2014\)](#); et d'algorithmes de reconstruction de front d'onde, linéaires ou non ([Korkiakoski et al., 2008](#); [Shatokhina, 2014](#); [Hutterer et al., 2018](#)). Avec l'explosion du nombre de degrés de liberté pour les ELT, ce problème remet au premier plan le besoin d'implémentation de contrôleurs ad-hoc pour profiter pleinement de l'augmentation de sensibilité promise par ce senseur. Outre la non-linéarité, des problèmes issus conjointement du design de l'ELT et du choix d'utiliser un PWFS pour la plupart des OA qui l'équiperont se doivent d'être résolus pendant la phase de conception, et certains de ces problèmes n'avaient encore jamais été étudiés. Par exemple, la communauté en analyse de surface d'onde étudie activement des techniques de cophasage pour le miroir primaire – constitué de 798 miroirs hexagonaux indépendants – et de son maintien en position ; la prise en compte de la structure du miroir adaptatif, constitué de six quadrants mécaniquement indépendants ; la mesure et la gestion de la continuité du front d'onde là où la pupille est occultée par les bras de support du miroir secondaire, de 51 cm de large ; le maintien en position en temps réel de la pupille à travers les différents miroirs et modules, malgré les flexions et les vibrations, etc.

Et voilà – pour de bon – précisément où intervient cette thèse : la conception et le développement de tels algorithmes de contrôle, pour limiter l'impact (ou compenser totalement) des propriétés spécifiques au PWFS – mésalignements et non-linéarités en fer de lance – qui viendront impacter le budget d'erreur de l'OA de MICADO.

12. *Pyramid WaveFront Sensor*

Ce manuscrit est organisé en six chapitres, qui contextualisent et présentent les travaux que j'ai menés pendant cette thèse sur le PWFS.

Le chapitre 1 rappelle quelques éléments d'optique de Fourier et de formation des images dans les instruments optiques, introduit la description de la turbulence atmosphérique, et présente l'impact de celle-ci sur les images astronomiques obtenues. Le chapitre 2 présente les principes généraux de l'OA, à travers ses principaux composants, la notion de budget d'erreur, et les algorithmes de contrôle linéaire classiques. J'y donne évidemment la part belle à plusieurs descriptions du PWFS, pour proposer au lecteur·rice une synthèse de différents modèles qui, bien que cohérents, semblent souvent peu compatibles de prime abord.

Le chapitre 3 présente le volet expérimental de cette thèse, avec la mise en œuvre du démonstrateur PYRCADO, prototype de PWFS à très haute résolution, intégré au LESIA depuis 2014. Je présente les travaux d'étalonnage et de calibration des différents sous-systèmes de ce prototype, qui m'ont ultimement permis de réaliser la première fermeture de boucle d'OA avec ce système.

La troisième partie de ce manuscrit est la plus congrue, et regroupe mes différentes analyses, méthodes et résultats sur l'amélioration des lois de commande pour le PWFS. Au chapitre 4, j'étudie dans un formalisme général l'impact des mésalignements des quadrants sur le détecteur sur la capacité effective de contrôle de l'OA. Cette étude permet de valider la méthode de contrôle dite "full pixels", ce qui permet de fortement relâcher les tolérancements sur le prisme pyramidal, et par suite de réduire les coûts opto-mécaniques d'un analyseur pyramide.

Enfin, je me penche dans les chapitres 5 et 6 sur la problématique de la compensation de la loi de commande par un gain modal ad-hoc pour le contrôle quasi-optimal d'un PWFS. Les analyses numériques menées permettent de bien comprendre le phénomène de baisse de sensibilité différentielle mise en jeu, et de valider l'approche linéaire réajustée lorsque la base de contrôle est bien choisie. Je développe de plus au chapitre 5 une méthodologie complète pour mettre en œuvre cette technique de compensation sur le ciel ; en injectant des signaux connus à intervalles régulier, le RTC est capable de surveiller l'état du système et d'ajuster sa loi de commande en fonction des conditions d'observation. Cette méthode prête pour le ciel est aussi l'occasion d'un détour pour étudier la pyramide à trois faces, et comparer ses performances de bout-en-bout avec le PWFS habituel.

Le chapitre 6 propose une méthode entièrement automatisée de contrôle des gains modaux, qui agit en temps réel et ne requiert plus l'introduction de signaux supplémentaires sur le miroir. L'algorithme CLOSE intervient comme un asservissement de second niveau, et ajuste en temps réel la loi de commande en se basant sur une simple condition algébrique sur la corrélation temporelle de la télémétrie. Je démontre que la solution satisfaite par un tel asservissement est très proche de l'optimum pour le contrôle par intégrateur modal, et propose ainsi une perspective nouvelle et très encourageante vers des solutions de contrôle adaptatif entièrement automatiques pour les systèmes d'OA.

Première partie

Principes généraux : Imagerie, turbulence, et optique adaptative

L'imagerie optique pour l'astronomie

Ce premier chapitre a pour objet de mettre en place les concepts qui forment le socle de l'imagerie astronomique. Je parlerai d'abord de quelques rappels d'optique de Fourier, afin d'étudier par quel processus l'astronome harnache la lumière des étoiles pour pouvoir les observer. Ensuite, je présenterai les propriétés de l'atmosphère, pour enfin présenter au lecteur·rice son impact *déplaisant* sur la mise en place de systèmes optiques séparés de leurs cibles par toute cette masse d'air, au premier rang desquels on trouve les télescopes astronomiques terrestres.

Sommaire

1.1	Un télescope, c'est quoi ?	4
1.1.1	Formation des images	4
1.1.2	Optique de Fourier	5
1.1.3	Images et transformée de Fourier optique	7
1.2	La turbulence atmosphérique	11
1.2.1	Origine et physique	11
1.2.2	Description statistique	12
1.3	Impact de la turbulence sur les images	17
1.3.1	Description	18
1.3.2	Qualité des images	19
1.4	Décomposition modale du front d'onde	22
1.4.1	Polynômes de Zernike	22
1.4.2	Variance de phase des Zernikes	23
1.4.3	Karhunen-Loève atmosphériques	25
1.5	Des aspects spatiaux aux aspects temporels	26
1.6	Conclusion : vers l'optique adaptative	26

1.1 Un télescope, c'est quoi ?

1.1.1 Formation des images

Un télescope, c'est un système optique, qui comme son étymologie tend à l'indiquer, permet de *regarder de loin*. Ce *loin* prend une définition toute particulière pour l'astronome : loin, c'est précisément infiniment loin. La fonction du télescope est donc de fournir à l'observateur une image de taille finie, à un endroit précis, d'un objet céleste qui se trouve à une distance supposément quasi-infinie, par rapport aux distances rencontrées sur Terre.

Évidemment, le physicien tend à essayer de définir où se trouve précisément l'infini. On parlera d'objet, de source, d'étoile, etc. à l'infini, lorsque le référencement de cet objet par rapport à l'observateur dépend exclusivement de la *direction* mais pas de la *position*. En un sens, si je regarde vers le nord et que je fais un pas à gauche, je regarde toujours¹ vers le nord, qui désigne donc un objet à l'infini.

Le choix du nord pour mon exemple ramène directement à l'astronomie : on trouve au nord céleste l'étoile Polaris. Elle est pour nous à l'infini, mais de plus ponctuelle : en regardant exactement dans sa direction à travers le chas d'une aiguille, on la voit, mais si on vise immédiatement à côté : le noir total.

Ces deux caractéristiques nous permettent de décrire la lumière qui nous parvient de cette étoile ou d'une autre : il s'agit de rayons lumineux venant d'une unique direction, qui rejoignent l'observateur et son voisinage tels un faisceau de droites parallèles. Il s'agit bien de l'approximation à très grande distance de rayons qui quittent la source de manière isotrope, qui lorsqu'on en voit une très petite section nous semblent parallèles. Je présente schématiquement ce processus de propagation sur la figure 1.1, sur laquelle je m'appuie également pour ce qui suit.

Le théorème de **Malus (1811)** nous permet de faire correspondre la notion de rayon lumineux à la théorie ondulatoire de la lumière : elle est une onde progressive dont les surfaces isophas sont perpendiculaires en tout point aux rayons lumineux. Une onde lumineuse rejoignant notre télescope est alors directement associée à un front d'onde, l'outil principal que j'utiliserai pour décrire la forme de la lumière reçue. Pour des rayons parallèles, les surfaces isophas sont planes : on parle de fronts d'onde plans.

Dans le plan pupille du télescope, qui correspond généralement à la position du miroir primaire, la lumière reçue est donc décrite par un champ électromagnétique dont l'amplitude se note :

$$E_{\text{pup}}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}) \times A(\mathbf{r}) \times e^{i\phi(\mathbf{r})} \quad (1.1)$$

où \mathbf{r} est la coordonnée d'espace. $P(\mathbf{r})$ est la fonction indicatrice de la transmission de la pupille ; pour une ouverture circulaire de diamètre D sans obstruction centrale, on

1. On supposera, pour cet exemple, que la Terre est plate à l'échelle du pas que je viens de faire vers la gauche.

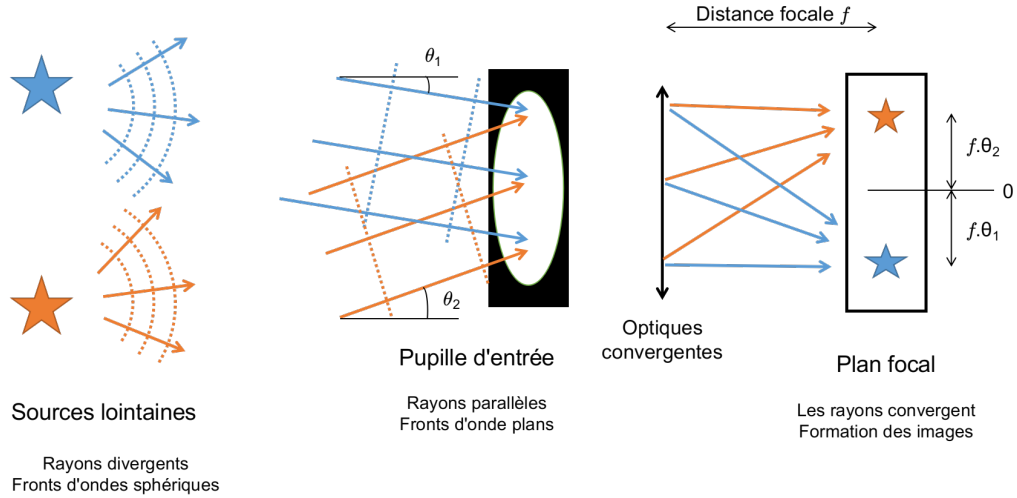


FIGURE 1.1: Schéma de la propagation de la lumière de deux étoiles, jusqu'à la pupille de l'instrument d'imagerie et enfin son plan focal, autour des notions de rayons lumineux (traits pleins) et de fronts d'onde (pointillés).

a :

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{si } r > \frac{D}{2}, \end{cases} \quad (1.2)$$

et $A(\mathbf{r})$ et $\phi(\mathbf{r})$ désignent respectivement l'amplitude et la phase du champ électrique. $\phi(\mathbf{r})$ décrit directement le front d'onde : c'est, dans le plan de la pupille, l'avance ou le retard de phase en chaque coordonnée de l'espace.

Après avoir traversé cette pupille, notre onde lumineuse se propage à nouveau, vers l'infini, de l'autre côté. Et c'est là qu'intervient toute la magie du télescope : il nous permet de ramener l'infini juste à côté de nous, à des échelles finies, dans son plan focal (aussi appelé le *champ*). Une conjugaison parfaite entre l'infini et le plan focal fait que tout rayon issu d'une direction donnée par les angles (θ_x, θ_y) relatifs à la ligne de visée vient croiser ce plan à une position donnée par : $\mathbf{s} = (x, y) = (f \cdot \theta_x, f \cdot \theta_y)$, où f est la longueur focale du télescope. C'est donc dans ce plan que l'on va venir placer une plaque photographique, ou de nos jours une matrice de détecteur, pour obtenir des images astronomiques.

1.1.2 Optique de Fourier

C'est à la traversée du plan pupille par la lumière qu'a lieu le phénomène de diffraction. À cause de sa traversée d'un espace contraint, de surface transmissive limitée, la propagation de la lumière ne peut plus être complètement décrite par les lois de l'optique géométrique. L'intensité pour un point source reçue au plan focal en

aval de la pupille est alors non plus un point image, mais une tache de diffraction, qui caractérise la transformation que la pupille a appliquée à la lumière venue du ciel.

Le principe d'Huygens-Fresnel (Fresnel, 1870) pose sous une forme très générale la théorie de la diffraction. On considère que la lumière se propage jusqu'au plan pupille en onde plane; on lui applique alors le masque de pupille en annulant le champ électrique en dehors de la pupille; et enfin, on reprend la propagation, comme si chaque point de la pupille était une source ponctuelle à l'origine d'une onde sphérique se propageant en aval dans le système optique.

On est alors en mesure de calculer la propagation de l'onde entre chaque point de la pupille et les points d'intérêt en aval, pour obtenir le champ électrique résultant de la diffraction subie. Le plan focal a une position privilégiée parmi ces points d'intérêt : les équations s'y simplifient sous l'approximation de Fraunhofer, et on peut alors obtenir l'amplitude du champ électrique :

$$E_{\text{foc}}(\mathbf{s}) = \iint_{\mathbf{r}} E_{\text{pup}}(\mathbf{r}) \times \exp\left(-2i\pi \frac{\mathbf{s}}{f} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right) d\mathbf{r}, \quad (1.3)$$

en notant \mathbf{s} la variable d'espace dans le plan focal, f la distance focale, et avec λ la longueur d'onde de la lumière monochromatique considérée. On constate alors que l'amplitude E_{foc} s'exprime comme la transformée de Fourier (TF, FT pour *Fourier transform*) de l'amplitude E_{pup} , prise entre les variables $\frac{\mathbf{r}}{\lambda}$ et $\frac{\mathbf{s}}{f}$, à considérer respectivement comme l'inverse d'un angle et un angle.

Je noterai directement \mathcal{F} l'opérateur de transformée de Fourier de l'équation 1.3, qui nous permet de commuter d'un plan pupille à un plan focal, et de réécrire de manière plus concise :

$$E_{\text{foc}}(\mathbf{s}) = \mathcal{F}(E_{\text{pup}}(\mathbf{r})). \quad (1.4)$$

En optique, on ne peut néanmoins enregistrer directement l'amplitude du champ électrique à une position de l'espace. Ceci pour plusieurs raisons, la principale étant que la lumière visible ou proche infrarouge a des fréquences oscillatoires de l'ordre de quelques 10^{14} Hz, bien au delà de nos capacités technologiques actuelles pour enregistrer continûment le champ électrique. La grandeur qui nous est accessible est l'énergie déposée par les photons à une position de l'espace, qui correspond à la puissance lumineuse collectée par unité de surface. Elle est proportionnelle au module carré de l'amplitude complexe du champ électrique, et on obtient donc la mesure dans le plan focal :

$$I(\mathbf{s}) = |E_{\text{foc}}(\mathbf{s})|^2 = |\mathcal{F}(E_{\text{pup}}(\mathbf{r}))|^2. \quad (1.5)$$

La distribution spatiale de l'intensité définit la fonction d'étalement de point (PSF, *Point Spread Function*) du système : sa réponse, au plan focal, à une source ponctuelle. Lorsque la pupille est un simple disque, et que le front d'onde reçu est bien plan ($A(\mathbf{r}) = C^{\text{te}}$, $\phi(\mathbf{r}) = 0$ dans l'équation 1.1), cette PSF est une tache d'**Airy (1835)**, que je représente sur la figure 1.2. En particulier, la première annulation a lieu pour $\frac{s}{f} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, et la largeur angulaire à mi-hauteur (FWHM, *Full Width at Half-Maximum*) est de $1.03 \frac{\lambda}{D}$.

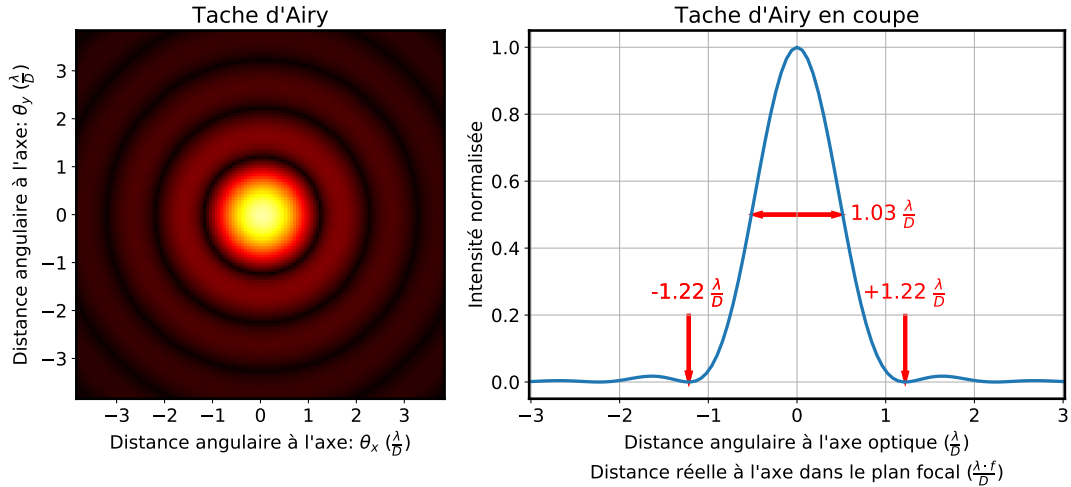


FIGURE 1.2: Image et coupe d'une tache d'Airy. La largeur à mi-hauteur est d'environ $\frac{\lambda}{D}$, la première annulation se situe à $1.22 \frac{\lambda}{D}$ de l'axe. Le premier anneau culmine à une intensité de 1.7% du pic central.

C'est cette dernière grandeur qui nous permet de définir le pouvoir de résolution d'un télescope : deux sources célestes seront discernables si elles sont séparées d'au moins cet angle $\frac{\lambda}{D}$. La résolution s'améliore ($\frac{\lambda}{D}$ plus petit) donc sous deux conditions : faire des observations à longueur d'onde plus courte, ou bien construire des télescopes plus grands.

Par ailleurs, la PSF de référence pour un front d'onde plan n'est pas toujours celle qu'on a vue sur la figure 1.2, puisque elle dépend de la pupille de l'instrument. Par exemple, pour l'Extremely Large Telescope (ELT), la pupille est un dodécagone irrégulier, coupé d'un hexagone central supporté par six bras ! Je montre sur la figure 1.3 cette pupille et la PSF associée. Par abus de langage, on parlera occasionnellement de tache d'Airy "d'un télescope" pour désigner la PSF correspondant à un front d'onde plan, même pour une pupille qui n'est pas un disque.

1.1.3 Images et transformée de Fourier optique

J'ai présenté dans le paragraphe précédent comment une transformée de Fourier nous permet de convertir le champ électrique des plans pupilles au plan focaux, puis que la PSF est le module carré de l'amplitude au plan focal $E_{\text{foc}}(\mathbf{s})$. Évidemment, il est intéressant de pousser plus loin à l'aide d'éléments de théorie de Fourier pour introduire d'autres fonctions utiles à l'étude des systèmes optiques.

On applique ici aux systèmes d'imagerie le formalisme de la théorie des systèmes linéaires, découlant naturellement de la relation de Fourier présentée à l'équation 1.3. L'application d'une TF transforme les produits terme à terme en produits de convolutions, et donc l'opération "module carré" en autocorrélation. On peut alors reprendre

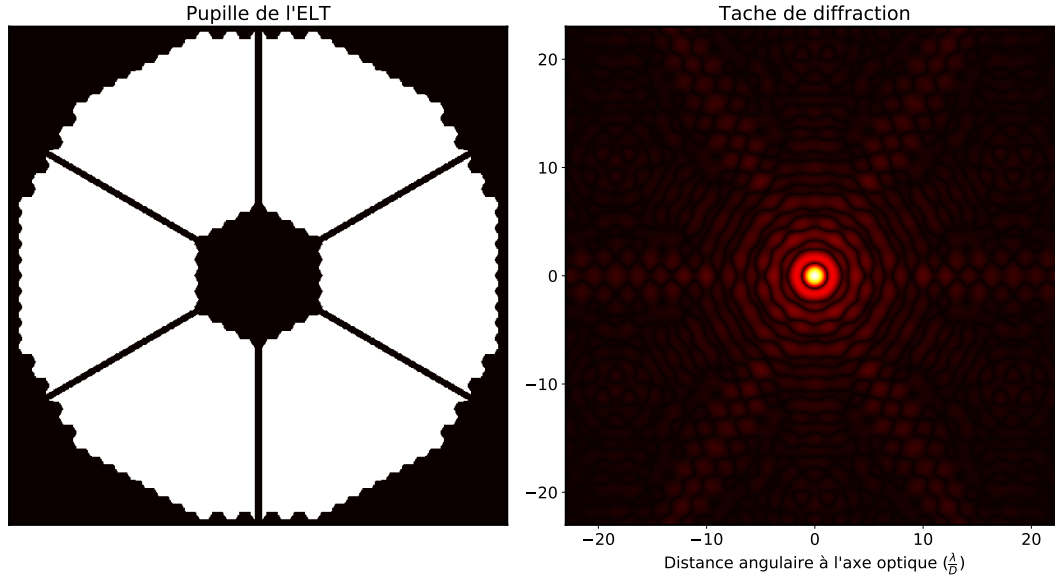


FIGURE 1.3: La pupille $P(\mathbf{r})$ de l'ELT et la tache de diffraction associée. Le miroir primaire est un assemblage de 798 miroirs hexagonaux de 1.4 m de grande diagonale, ce qui donne cet aspect irrégulier à la pupille. L'image de gauche couvre une surface de 39 m de côté.

l'équation 1.5 :

$$I(\mathbf{s}) = |\mathcal{F}(E_{\text{pup}}(\mathbf{r}))|^2 = \mathcal{F}(\underbrace{E_{\text{pup}}(\mathbf{r}) * E_{\text{pup}}(-\mathbf{r})}_{\text{FTO}}), \quad (1.6)$$

avec $*$ l'opérateur de convolution spatiale, et attribuer une nouvelle signification à ces termes. La PSF $I(\mathbf{s})$ est la réponse impulsionnelle du système, c'est à dire la réponse à la fonction de Dirac sur les directions des rayons lumineux qu'est une source ponctuelle à l'infini. Le terme noté FTO est donc la TF de la réponse impulsionnelle : c'est la fonction de transfert optique (FTO) de notre système.

Pour une certaine distribution lumineuse dans le ciel $A_{\text{ciel}}(\mathbf{s})$, on trouve donc que l'intensité au plan focal du télescope, qu'on appelle *l'image*, est le produit de convolution de la PSF par $A_{\text{ciel}}(\mathbf{s})$:

$$A_{\text{img}}(\mathbf{s}) = A_{\text{ciel}}(\mathbf{s}) * I(\mathbf{s}), \quad (1.7)$$

et nous pouvons également conduire ce raisonnement dans l'espace de Fourier du champ :

$$\mathcal{F}(A_{\text{img}}(\mathbf{s})) = \mathcal{F}(A_{\text{ciel}}(\mathbf{s})) \times \text{FTO}. \quad (1.8)$$

C'est donc l'étude de l'opérateur FTO qui nous indique le comportement fréquentiel d'un système optique; FTO opère multiplicativement sur la décomposition en fréquences angulaires de l'illumination reçue. On pourra donc considérer la FTO comme

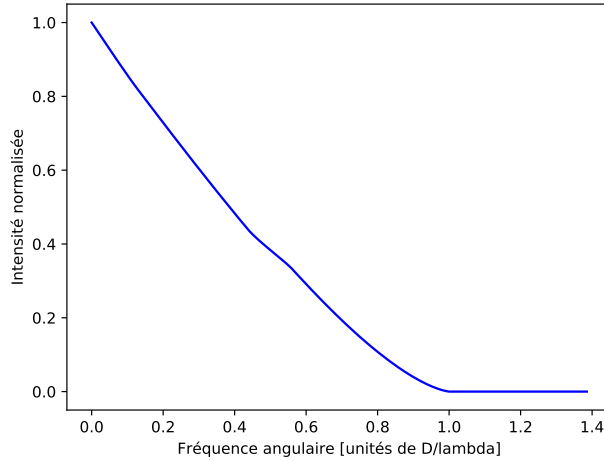


FIGURE 1.4: Coupe radiale de la FTO (à symétrie de révolution) pour un télescope à pupille circulaire, lorsque le champ incident ne comporte aucune perturbation : $A(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})} = 1$. *Crédit : F. Ferreira.*

une fonction sur les fréquences angulaires $\frac{r}{\lambda}$ de la distribution du champ électrique à l'infini.

Dans le cas d'une ouverture circulaire, et pour un front d'onde plan $E_{\text{pup}}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})$, je montre la fonction FTO($\frac{r}{\lambda}$) en coupe sur la figure 1.4. Dans ce cas, la FTO est une fonction réelle. On constate donc qu'un télescope se comporte comme un filtre passe bas, à coupure totale au delà de la fréquence $\frac{D}{\lambda}^2$. Ce résultat est univoque avec notre première définition de la résolution : pour décrire une distribution d'intensité avec deux pics plus proches que $\frac{\lambda}{D}$, il faudrait nécessairement utiliser des fréquences spatiales plus grandes que $\frac{D}{\lambda}$!

En imageant à travers l'ELT, il sera donc attendu que chaque étoile soit vue comme la PSF à six branches de la figure 1.3. C'est également pour cette raison que sur les images du télescope Hubble, chaque étoile s'étale en une grande croix, comme dans l'exemple que je reproduis sur la figure 1.5.

Au delà de la simple forme de la pupille, les aberrations de l'instrument viennent définir la structure exacte de la PSF. Elles correspondent aux termes d'amplitude $A(\mathbf{r})$ et de phase $\phi(\mathbf{r})$ dans la pupille induits par les différentes imperfections du système optique. La réalisation de systèmes optiques les moins aberrants possibles, et la caractérisation des aberrations, ont été un moteur de l'instrumentation astronomique depuis Galilée. La présence d'aberrations, comme on le voit à travers le développement des équations 1.3 à 1.8, modifie la réponse du télescope, sa FTO, sa PSF, et par suite la qualité des image qu'il permet d'obtenir.

Au delà du plaisir photographique, bien connaître et maîtriser la PSF d'un ins-

2. c'est à dire un signal qui réalise une période pour une distance angulaire de $\frac{\lambda}{D}$



FIGURE 1.5: Image (traitée et recomposée) de la céphéide variable *RS Puppis* et sa nébuleuse par le télescope spatial Hubble. On reconnaît sur les étoiles les plus brillantes une croix et un halo identiques : la PSF de Hubble. *Crédit : Hubble/NASA.*

trument est un besoin clé en astronomie : pour se débarrasser de l'impact de l'instrument, où de facteurs exogènes, on sera souvent amené à déconvoluer les images brutes $A_{\text{img}}(\mathbf{s})$ par la PSF : ce sont les techniques de reconstruction d'image (Véran et al., 1997; Jolissaint et al., 2004; Clénet et al., 2006).

L'exemple que j'ai choisi de montrer sur la figure 1.5 est en réalité quelque peu arrangeant ; pour un télescope spatial, la PSF ne dépend en effet que de l'instrument, de sa pupille et de ses aberrations. Mais dans le cas des télescopes terrestres, la situation est notablement plus complexe : l'atmosphère s'intercale, et modifie grandement le champ électrique E_{pup} par rapport à celui, trivial, que nous avons utilisé pour définir la FTO. Avant de voir quel impact cela aura sur les images dans la section 1.3, je propose d'abord d'étudier les processus à l'œuvre dans l'atmosphère dans la section suivante.

1.2 La turbulence atmosphérique

L'atmosphère, qui vient s'intercaler entre les astres et le télescope, n'est pas du tout un milieu optiquement inerte. Les volumes d'air chaud et d'air froid se mélangent de manière turbulente, et les variations d'indice de réfraction associées sont à l'origine d'importantes perturbations du trajet de la lumière.

1.2.1 Origine et physique

Les travaux de Kolmogorov (1941, 1962) sont fondateurs en matière de description des processus turbulents à l'œuvre dans l'atmosphère. D'importants échanges thermiques ont lieu du sol jusqu'aux limites de l'espace, alimentés par l'énergie apportée par le soleil et irradiée par le sol. Ces transferts radiatifs donnent naissance à des cellules de convection, qui donnent à l'air un comportement de fluide en régime d'écoulement fortement turbulent.

Kolmogorov, dans sa théorie dite *des cascades* (illustrée sur la figure 1.6), propose que les plus grosses cellules, de taille L_0 (échelle externe ; plusieurs dizaines de mètres), instables, se fractionnent en cellules plus petites pour dissiper plus efficacement leur énergie, jusqu'à atteindre l'échelle interne l_0 (de l'ordre du millimètre). La viscosité à cette échelle l_0 est alors suffisante pour que la cellule finisse de se résorber sans plus se fragmenter.

Cette cascade de cellules vient altérer la propagation de la lumière à travers la turbulence. La loi de Gladstone & Dale (1863) nous renseigne sur l'indice de réfraction

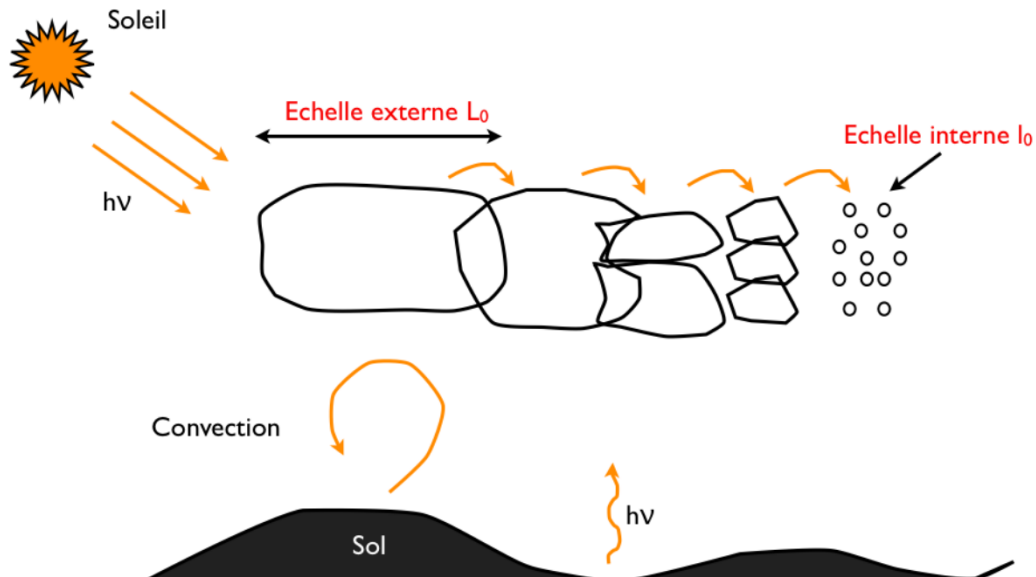


FIGURE 1.6: Illustration du modèle de cascades convectives de Kolmogorov.
Crédit : F. Vidal.

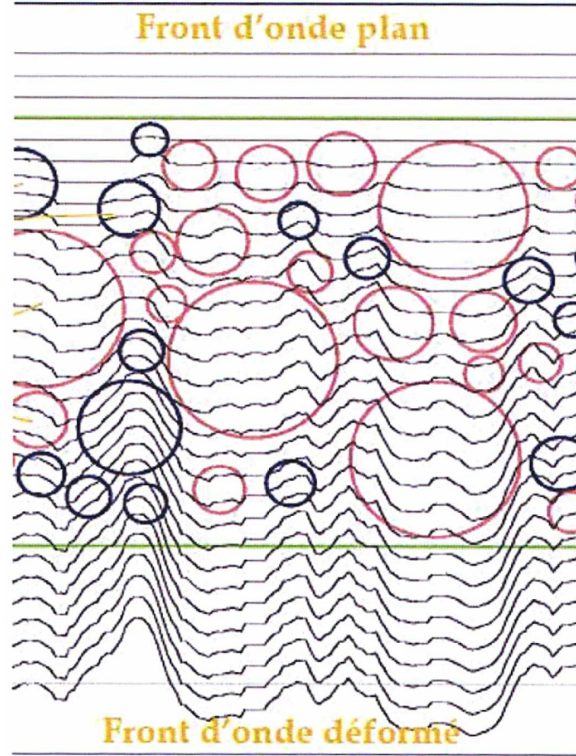


FIGURE 1.7: Déformation du front d'onde à la traversée des cellules convectives de température et d'indice de réfraction variables. *Crédit : L. Demailly.*

n d'un gaz en fonction de sa masse volumique μ , qui est elle même une fonction de (entre autres) la température T :

$$n = 1 + C^{\text{te}} \mu(T, \dots). \quad (1.9)$$

La lumière est donc réfractée en traversant des gradients de température. L'effet de la propagation à travers des cascades de cellules est illustré sur la figure 1.7.

1.2.2 Description statistique

Indice de réfraction

La variation d'indice de réfraction dans une couche d'atmosphère est évidemment aléatoire, mais il est possible d'en caractériser les propriétés stochastiques. On note $n(\boldsymbol{\rho})$ l'indice de réfraction de l'air à une coordonnée tridimensionnelle $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{r}, h)$. \mathbf{r} désignera par la suite une coordonnée bidimensionnelle dans le plan horizontal, h l'altitude.

Le processus aléatoire définissant $n(\boldsymbol{\rho})$ peut être décrit par sa *fonction de structure* :

$$D_n(\mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}) = \langle [n(\boldsymbol{\rho}) - n(\mathbf{d} + \boldsymbol{\rho})]^2 \rangle, \quad (1.10)$$

en notant $\langle \rangle$ l'espérance sur les réalisations aléatoires.

Il convient alors de faire l'hypothèse de la stationnarité du processus à une altitude donnée : $D_n(\mathbf{d}, \rho)$ dépend alors de la seule altitude h et de la différence de position $d = \|\mathbf{d}\|$. On peut alors obtenir (Oboukhov, 1941, 1962) la loi de puissance, pour les échelles correspondant au régime des cascades de Kolmogorov $l_0 \leq d \leq L_0$:

$$D_n(d, h) = C_n^2(h) d^{\frac{2}{3}}, \quad (1.11)$$

où $C_n^2(h)$, appelé *constante de structure de l'indice de réfraction*, caractérise l'amplitude, la force de la turbulence pour la couche d'altitude h . Je reviendrai sur sa caractérisation et sa distribution typique un peu plus loin.

Par des transformations algébriques, on passe de la fonction de structure, isotrope, à la densité spectrale de puissance (DSP, PSD pour *Power Spectrum Density*) de l'indice de réfraction en fonction de la norme de la fréquence spatiale f , pour obtenir le spectre de Kolmogorov :

$$W_n^{Kolto}(f, h) = 9.6 \cdot 10^{-3} C_n^2(h) f^{-\frac{11}{3}}. \quad (1.12)$$

Si ce spectre est adéquat pour décrire le comportement de l'indice n aux fréquences f entre $\frac{1}{L_0}$ et $\frac{1}{l_0}$, comme on le vérifie sur les données expérimentales, il n'est néanmoins pas intégrable aux basses fréquences. Pour contourner ce problème, von Kármán (1948) propose une extension pour les comportements au-delà des échelles internes et externes :

$$W_n^{VK}(f, h) = 9.6 \cdot 10^{-3} C_n^2(h) \left(\frac{1}{L_0^2} + f^2 \right)^{-\frac{11}{6}} e^{-f^2 l_0^2}, \quad (1.13)$$

proposant ainsi un modèle d'énergie totale finie. Ces lois de puissance ont été abondamment vérifiées expérimentalement pour des écoulements turbulents pleinement développés : dans l'atmosphère, la traînée des turbo-réacteurs, ou encore dans des liquides. La figure 1.8 montre une synthèse de nombre de ces études, qui ramènent toutes au spectre de von Kármán.

Phase de la lumière

Ces fluctuations d'indice de l'air viennent affecter la propagation du champ électromagnétique à travers l'atmosphère. Elles modifient l'amplitude et la phase du champ $E_{\text{pup}}(\mathbf{r})$ finalement reçu dans la pupille, mais l'on peut souvent supposer que la variation de l'amplitude $A(\mathbf{r})$ est négligeable (Roddiér, 1981), et donc que seule la phase $\phi(\mathbf{r})$ est affectée.

Lors de la traversée au point \mathbf{r} d'une couche d'atmosphère d'épaisseur δh et d'indice $n(\mathbf{r}, h)$, le champ électrique accumule un déphasage de :

$$\phi(\mathbf{r}, h) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{\delta h} (n(\mathbf{r}, h') - 1) dh' = \frac{2\pi}{\lambda} (n(\mathbf{r}, h) - 1) \delta h \quad (1.14)$$

relativement à une propagation dans le vide.

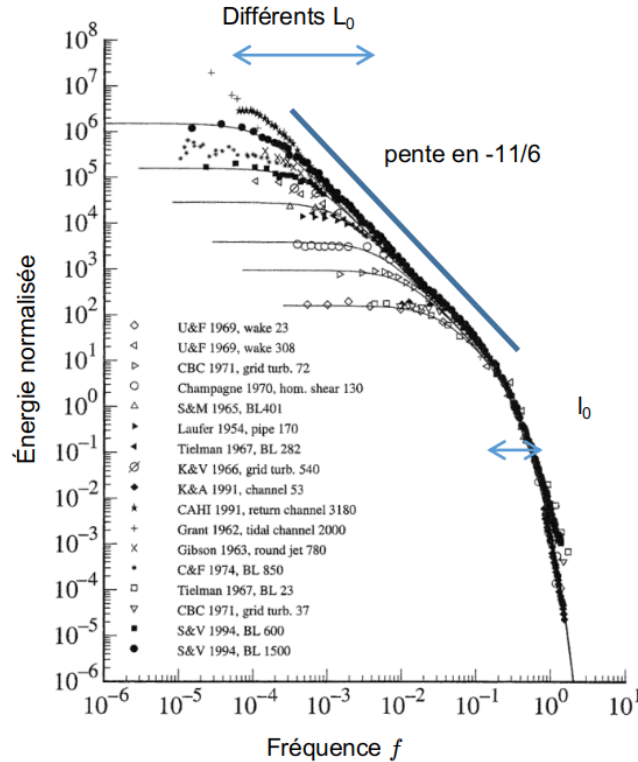


FIGURE 1.8: Spectres $\sqrt{W^{VK}}(f)$ expérimentaux de distribution d'énergie dans des écoulements turbulents à très hauts nombres de Reynolds. On retrouve les coupures correspondant aux échelles internes et externes, avec un spectre de Kolmogorov entre. *Reproduit et annoté depuis Bakker (2002).*

Alors que cette équation 1.14 fait apparaître la longueur d'onde de la lumière λ , il convient de faire un bref aparté sur la notion de chromaticité. La phase est une grandeur qui dépend de λ , et est donc chromatique. On considérera donc préférentiellement, plus tard, la différence de chemin optique $\frac{\lambda}{2\pi}\phi$. Cette dernière est achromatique sous l'hypothèse, que nous accepterons ici, que la variation de l'indice n avec λ est négligeable³.

Repartant de l'équation 1.14, on peut alors réinjecter les propriétés statistiques connues sur l'indice n (équations 1.11 à 1.13) pour obtenir des propriétés comparables sur la phase. Tatarski (1961) développe la *fonction de structure de phase* dans les

3. En pratique, à travers le visible et le proche infrarouge, $n(400 \text{ nm}) = 1.0003$ et $n(2200 \text{ nm}) = 1.00027$. Cet effet n'est pas négligeable de manière générale dans l'ingénierie des télescopes, et des systèmes de compensation dédiés sont mis en œuvre. Je ne me préoccupe pas dans ma thèse du résidu de second ordre après de tels compensateurs.

limites de Kolmogorov :

$$\begin{aligned} D_\phi(\mathbf{d}, h) &= \langle (\phi(\mathbf{r}, h) - \phi(\mathbf{d} + \mathbf{r}, h))^2 \rangle \\ &= 2.91 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(h) \delta h d^{\frac{5}{3}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Et de la même manière, on peut obtenir la PSD correspondante. Avant d'exprimer celle-ci, il est pratique de considérer la propagation à travers l'ensemble de l'atmosphère. La phase totale accumulée s'écrit alors, dans l'approximation des faibles phases introduites par les couches turbulentes :

$$\phi^{\text{tot.}}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \frac{1}{\cos(\gamma)} \phi(\mathbf{r}, h) dh, \quad (1.16)$$

où γ est l'angle de la ligne de visée par rapport au zénith. Cette intégration permet de réduire la fonction de structure de phase pour toutes les couches turbulentes à (Roddiar, 1981) :

$$D_\phi(d) = 6.88 \left(\frac{d}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.17)$$

où r_0 est le paramètre de Fried (1966), qui réduit en un seul scalaire la force accumulée de la turbulence.

Ce paramètre r_0 est proposé comme le diamètre d'un télescope dont la résolution limitée par la diffraction serait égale à celle d'un télescope beaucoup plus grand mais limité par la turbulence.

Il est donc empiriquement défini par la largeur à mi-hauteur de la PSF statistique moyenne obtenue sous une certaine force de turbulence. Mathématiquement, l'intégration effective de l'équation 1.15 sur la ligne de visée permet d'obtenir, dans l'équation 1.17 :

$$r_0 = \left[0.423 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos(\gamma)} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]^{-\frac{3}{5}}. \quad (1.18)$$

Avec une dépendance en $\lambda^{6/5}$, r_0 augmente rapidement avec la longueur d'onde d'observation. Pour un instrument de taille donnée, il sera bien plus facile de faire des images bien résolues à $\frac{\lambda}{D}$ dans l'infrarouge que dans le visible. Le paramètre de Fried – qui est donné pour un instant, à un site d'observation – est conventionnellement exprimé à $\lambda = 500$ nm. Pour l'ELT au Cerro Armazones, l'inter-quartile estimé est de 8.7 à 22 cm (Osborn et al., 2013).

Pour revenir à la statistique de la phase, nous sommes maintenant en mesure de passer de la fonction de structure à la PSD de la phase turbulente. Le spectre de Kolmogorov pour la phase totale s'écrit alors :

$$W_\phi^{\text{Kolmo}}(f) = 2.3 \cdot 10^{-2} r_0^{-\frac{5}{3}} f^{-\frac{11}{3}}, \quad (1.19)$$

et la correction de von Kármán est généralement utilisée sous la forme suivante, qui réintroduit une échelle externe finie :

$$W_\phi^{\text{VK}}(f) = 2.3 \cdot 10^{-2} r_0^{-\frac{5}{3}} \left(f^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-\frac{11}{6}}. \quad (1.20)$$

Cohérence temporelle et frozen flow

Pour l'instant, nous n'avons encore discuté que de propriétés stochastiques spatiales de la turbulence atmosphérique, mais pas de ses propriétés temporelles. On considère, pour une couche de turbulence donnée à l'altitude h , que son déplacement dû au vent est très rapide devant le développement des cellules convectives au sein de cette couche (Gendron & Léna, 1996). Il est alors équivalent de considérer que la phase $\phi(\mathbf{r}, h)$ est déterministe, se déplaçant selon la vitesse $\mathbf{v}(h)$, chaque zone de la couche interceptant brièvement la ligne de visée du télescope. Cette hypothèse est appelée de *frozen flow* (en français *flux gelé*, qui est peu usité) et a d'abord été utilisée par Taylor (1938). Elle correspond à une relation simple aux dérivées partielles pour l'écran de phase $\phi(\mathbf{r}, t; h)$ à l'altitude h :

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t; h)}{\partial t} = \mathbf{v}(h) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t; h)}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.21)$$

ce qui permet de relier la distance de cohérence donnée par r_0 à un temps caractéristique d'évolution sur un élément de surface de taille r_0 (Fried, 1990) :

$$\tau_0 \approx 3.14 \cdot 10^{-1} \times \frac{r_0}{\bar{v}}. \quad (1.22)$$

Ce temps τ_0 est donné pour l'ensemble des couches, et fait ressortir \bar{v} , la vitesse apparente moyenne du vent, avec les couches pondérées par le profil de $C_n^2(h)$:

$$\bar{v} = \left[\frac{\int_0^\infty v(h)^{\frac{5}{3}} C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{\frac{3}{5}}. \quad (1.23)$$

Les r_0 et τ_0 sont des paramètres physiques particulièrement importants, et les caractériser en vue de la construction d'un télescope est déterminant. Par suite, ce sont les paramètres clés qui permettent de dimensionner un système d'optique adaptative, donnant les résolutions spatiales et temporelles nécessaires pour atteindre une qualité d'imagerie donnée.

Distribution verticale de la turbulence

Comme nous venons de le voir, chaque couche peut être supposée comme suivant l'hypothèse de frozen flow. La turbulence totale dans la ligne de visée est alors déterminée par l'accumulation des différentes couches, avec chacune son propre $r_0(h)$ et sa propre vitesse.

La structure globale de l'atmosphère n'est pas uniforme avec l'altitude : il suffit de penser à la distribution de température avec l'altitude ou encore aux jet-streams pour l'intuiter. Il s'ensuit que la distribution des couches turbulentes n'est pas uniforme. Comme nous l'avons esquissé à partir de l'équation 1.11, ce sont les $C_n^2(h)$ qui définissent cette distribution en élévation de la turbulence.

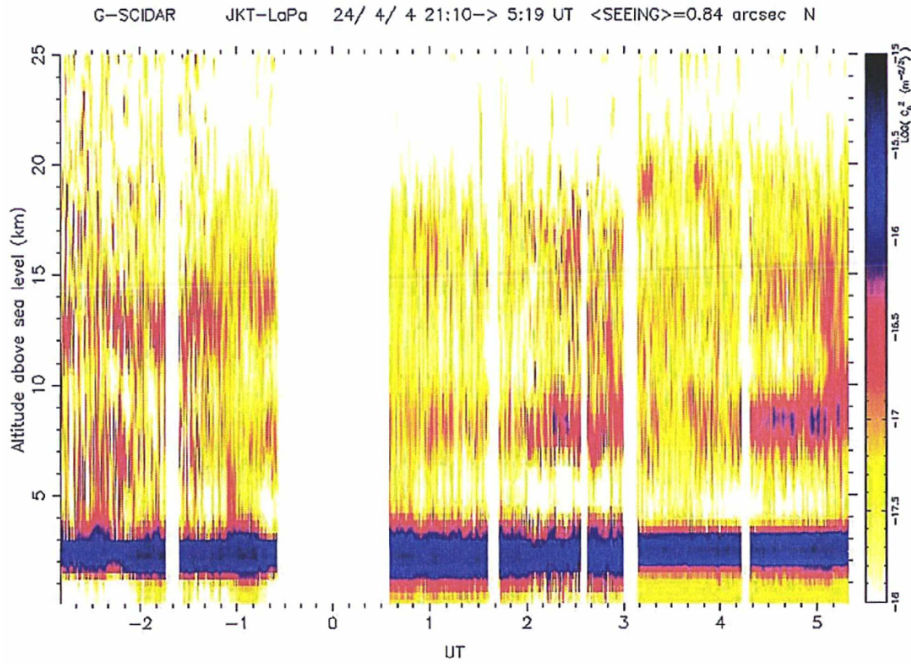


FIGURE 1.9: Évolution temporelle du profil de $C_n^2(h)$ au cours d'une nuit d'observation. Mesure réalisée à l'observatoire du Roque de los Muchachos (Îles Canaries ; 2 400 m d'altitude). *Crédit : Fuensalida et al. (2004).*

La figure 1.9 montre un profil de C_n^2 enregistré au cours d'une nuit. La majeure partie de la turbulence est concentrée dans une couche proche du sol (*ground layer* ; en dessous de 1 000 m), et quelques (< 10) couches moins importantes en altitude.

Finalement, on pourra presque toujours faire l'approximation d'une somme discrète de couches turbulentes. On développe alors de l'équation 1.18 que les r_0 s'additionnent de la manière suivante :

$$r_0 = \left[\sum_{\text{Couches}} r_0(h)^{-\frac{5}{3}} \right]^{-\frac{3}{5}}, \quad (1.24)$$

et c'est en utilisant cette métrique d'addition que l'on peut alors parler de fractions du r_0 total à une altitude donnée.

1.3 Impact de la turbulence sur les images

Maintenant que nous avons étudié comment la turbulence atmosphérique se comporte à l'égard de la propagation de la lumière stellaire, il est temps de considérer l'impact final de la turbulence sur la qualité d'imagerie d'un instrument.

1.3.1 Description

Nous avons vu (équation 1.7) que l'image produite est la convolution de la distribution d'intensité de l'objet observé par la PSF, où de manière équivalente le produit du spectre angulaire de l'objet source par la FTO. Nous pouvons maintenant définir une FTO et une PSF lorsque le champ $E_{\text{pup}}(\mathbf{r})$ comporte une phase ϕ non nulle. La FTO est alors l'autocorrélation de ce champ complexe $P(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}$.

Si le rapport $\frac{D}{r_0}$ est suffisamment grand, on peut alors décrire la PSF comme étant constituée d'un champ de *speckles* (ou tavelures), lobes de taille $\frac{\lambda}{D}$, au nombre de $(\frac{D}{r_0})^2$ et répartis dans une zone de taille typique $\frac{\lambda}{r_0}$. On peut interpréter ces speckles comme le résultat de la sommation des franges de petits interféromètres entre chaque paire d'éléments de surface de la pupille sur lesquels la phase est localement plane, mais de valeur aléatoire.

Une telle PSF correspond à une unique réalisation de la turbulence donnant un front d'onde $\phi(\mathbf{r})$. C'est ce qui est observé sur un cliché où le temps d'exposition est bref à l'échelle de la variation du front d'onde sur l'ensemble de la pupille, que l'on caractérise par (Roddi et al., 1982) :

$$T_0 = \frac{r_0}{\Delta v}, \quad (1.25)$$

où Δv est l'écart-type de la distribution des $v^{\frac{5}{3}}$ à travers les couches turbulentes, pondérée par les $C_n^2(h)$ (similaire à l'expression de l'équation 1.23).

On parle alors de PSF courte pose (CP, ou SE *Short Exposure*). Je présente une telle PSF, dans un cas $\frac{D}{r_0} \approx 16$, sur la figure 1.10 (gauche).

On peut appliquer le même raisonnement à la FTO et à la PSF longue pose (LP, LE *Long Exposure*) lorsque le front d'onde n'est plus déterministe mais un processus stochastique, décrit par les spectres vus dans la section 1.2. Le module de la FTO LP s'écrit alors à partir de la fonction de structure de phase :

$$\left| \text{FTO}_{\text{turbu}} \left(\frac{d}{\lambda} \right) \right| = \left| \text{FTO}_{\text{diffraction}} \left(\frac{d}{\lambda} \right) \right| \times \exp \left[-\frac{1}{2} D_\phi(d) \right]. \quad (1.26)$$

Pour un spectre Kolmogorov ou von Kármán, on a $D_\phi(d) \propto d^{\frac{5}{3}}$. La PSF LP $\mathcal{F}(\text{FTO}(\frac{d}{\lambda})_{\text{turbu}})$ n'admet alors pas d'expression analytique agréable. On sait néanmoins (Racine, 1996) qu'il s'agit d'une courbe en cloche, de largeur à mi-hauteur :

$$0.976 \frac{\lambda}{r_0}. \quad (1.27)$$

On retrouve alors la définition souhaitée du r_0 : le diamètre d'un télescope dont la résolution limitée par la diffraction ou la turbulence sont identiques. Je montre sur la figure 1.10 (droite) un exemple d'image alors que l'exposition est de l'ordre de $100 T_0$, et que l'illumination tend vers la distribution limite qu'est la PSF LP.

Cette PSF LP est ce qu'on appelle une tache de *seeing*⁴ ; la quantification du seeing caractérise justement la largeur angulaire à mi-hauteur $\frac{\lambda}{r_0}$, qui est proportionnelle à

4. Terme qui n'existe pas en français. On pourrait peut-être, au mieux, choisir *tache de voyement* ?

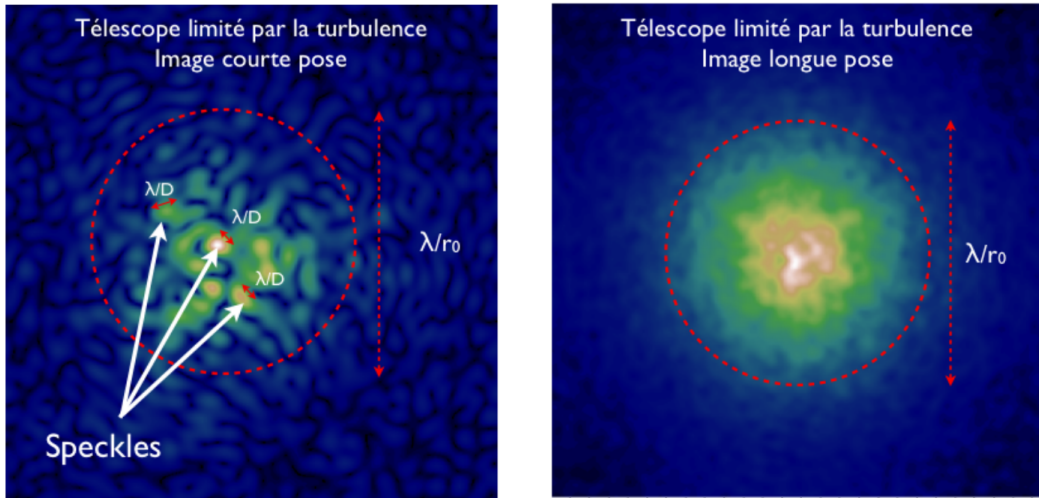


FIGURE 1.10: PSF courte et longue pose à travers la turbulence atmosphérique. Les images courte pose sont constituées d'un agrégat de speckles. Sur les images longue pose, l'ensemble se moyenne et donne une distribution statistique de FWHM égale au seeing $\frac{\lambda}{r_0}$. *Crédit : F. Vidal.*

$\lambda^{-1/5}$. Cette donnée est pratique en ce sens : la valeur donnée ne dépend presque pas de la longueur d'onde et chaque instrumentaliste peut en faire bon usage. Les valeurs typiques sur un bon site astronomique s'échelonnent de 0.5" à 1.5", donnés par convention à $\lambda = 500$ nm (tout comme r_0). Pour comparaison, la résolution à la diffraction du futur ELT à la diffraction serait de 3.7 mas à 500 nm ! Je montre sur la figure 1.11 un autre exemple de comparaison entre les télescopes Hubble et Gemini South (Chili). C'est à cause de cette perte importante en résolution que l'optique adaptative s'impose comme un *must have* sur les grands télescopes.

1.3.2 Qualité des images

Avant de tendre vers les méthodes déployées pour se soustraire aux effets de la turbulence atmosphérique, il convient d'abord de mettre en place des critères quantitatifs pour mesurer son effet sur les images. Je vais donc présenter ici quelques métriques que j'utiliserai à travers cette thèse pour mesurer la qualité d'une image produite par le télescope.

Variance de phase

C'est la phase du front d'onde incident qui est à l'origine de la dégradation des images. La qualité finale de l'image (pour l'instant dans un sens empirique) est inversement corrélée à la variance spatiale du front d'onde, que l'on compte en radians carrés :

$$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{S} \iint [\phi(\mathbf{r}) - \mu(\phi(\mathbf{r}))]^2 P(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.28)$$



FIGURE 1.11: Images de la galaxie HCG87c prises avec Gemini South sans son optique adaptative (gauche) et avec le télescope spatial Hubble (droite). Gemini ne peut résoudre les détails, lissés par la PSF longue pose. Le seeing est d'environ $0.5''$. Les images font $20''$ de côté. *Crédit Gemini Observatory/-NASA.*

où S est la surface de la pupille, et $\mu(\phi(\mathbf{r}))$ la moyenne de ϕ sur la pupille. Cette mesure est chromatique : elle dépend de la longueur d'onde λ à laquelle on exprime la phase. On lui préférera souvent la variance de différence de chemin optique (OPD, *optical path difference*) :

$$\sigma_{\text{OPD}}^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \sigma_{\phi}^2, \quad (1.29)$$

homogène a une longueur au carré, qui est achromatique sous réserve que les aberrations le soient (approximation que l'on fera presque toujours ici). On parlera donc souvent, pour évaluer la qualité des images, de la variance du front d'onde ayant engendré l'image, mesuré en rad^2 , μm^2 ou nm^2 . En prenant l'écart-type au lieu de la variance, on compte alors en nm RMS.

Pour les images longue pose, on procède à la substitution du front d'onde déterministe par un processus stochastique, comme nous l'avons fait pour définir la PSF longue pose. Il convient alors de quantifier les variances par leur moyennes durant la durée d'intérêt T :

$$\langle \sigma_{\text{OPD}}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{\text{OPD}}^2(t) dt. \quad (1.30)$$

En passant à la limite des longues poses, l'intégrale temporelle est équivalente à l'espérance sur les réalisations de la phase turbulente.

Énergie encadrée

Nous avons déjà évoqué la largeur à mi-hauteur comme indicateur de qualité d'imagerie. Je la mets en perspective avec l'énergie encadrée, car ces deux métriques sont

en générale pertinentes dans des cadres similaires. En spectrographie, il est important de mesurer – et de maximiser – la lumière reçue sur la surface collectrice de la fente du spectrographe. Le critère de référence est alors :

$$EE = \frac{\iint_{\text{surface utile}} I(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}{\iint I(\mathbf{s}) d\mathbf{s}} \quad (1.31)$$

Rapport de Strehl

Le plus commun de ces indicateurs en optique adaptative est le rapport de **Strehl** (1895) (noté SR, *Strehl Ratio*), qui est simplement défini par le rapport de l'intensité mesurée sur l'axe optique relativement à la diffraction, pour la même illumination totale :

$$SR = \frac{I_{\text{turbu}}(\mathbf{s} = \mathbf{0})}{I_{\text{diffraction}}(\mathbf{s} = \mathbf{0})}. \quad (1.32)$$

Cette métrique a néanmoins le défaut d'être instable vis-à-vis des translations de l'image, même pour des PSF $I_{\text{turbu}}(\mathbf{s})$ très étroites et piquées. Je lui préférerais donc le SR à translation près, défini par :

$$SR = \frac{\max_{\mathbf{s}} I_{\text{turbu}}(\mathbf{s})}{\max_{\mathbf{s}} I_{\text{diffraction}}(\mathbf{s})}. \quad (1.33)$$

Le rapport de Strehl est toujours compris entre 0 et 1 : la physique de la diffraction ne permet pas qu'un front d'onde concentre mieux la lumière que la PSF à la diffraction⁵. Il faut noter que bien que la mesure du SR soit triviale sur des images simulées, elle est plus subtile sur des observations réelles, et de nombreuses méthodes existent pour estimer le vrai SR (Roberts Jr et al., 2004).

Le Strehl peut être relié à la variance de phase à travers la formule de Mahajan (1982) :

$$SR = \exp(-\sigma_{\phi}^2) = \exp\left(-\frac{4\pi^2\sigma_{\text{OPD}}^2}{\lambda^2}\right), \quad (1.34)$$

qui est valide dans l'approximation des faibles phases. Elle est également toujours valide sous la limite que le front d'onde est un bruit blanc spatial.

Enfin, le Strehl est plus pertinent que l'énergie encadrée quand le front d'onde est tel que l'image contient un pic central, qu'on nomme aussi *cœur cohérent*. L'énergie encadrée à quelques dizaines de $\frac{\lambda}{D}$ est alors proche de 100% et varie peu, alors que le SR différencie aisément la hauteur du cœur à travers différentes images visuellement similaires.

5. Tel un état d'entropie minimale.

1.4 Décomposition modale du front d'onde

Pour étudier le front d'onde sur l'ouverture de notre télescope, et traiter de manière efficace un certain nombre de problèmes analytiques et numériques de l'optique adaptative, il est propice d'introduire une décomposition modale du front d'onde. On évitera ainsi de travailler indéfiniment à coup d'intégrales doubles sur la variable d'espace, et on pourra alors écrire :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \phi_i(\mathbf{r}), \quad (1.35)$$

où les ϕ_i sont les fronts d'onde, de nombre infini mais ordonnés, composant la base de travail. Une base bien choisie permettra d'avoir une convergence rapide pour les fronts d'onde typiques, et les sommes partielles permettront d'avoir une représentation efficace du front d'onde en se restreignant à un nombre fini de modes. Une base orthonormée permet également de compter la variance de phase par sommation sur les modes d'intérêt :

$$\sigma_\phi^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2, \quad (1.36)$$

pour la variance spatiale instantanée, et de même pour la variance stochastique :

$$\langle \sigma_\phi^2 \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle a_i^2 \rangle. \quad (1.37)$$

1.4.1 Polynômes de Zernike

Les polynômes de **Zernike (1934)** forment une base propice à l'étude des fonctions réelles continues définies sur un disque. Ils admettent une expression analytique polynomiale, en coordonnées polaires sur le disque-pupille, en fonction de leur indice i – lui même relié à leur ordre radial n et leur ordre azimutal m (**Noll, 1976**) :

$$Z_i(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \cos(m\theta) & \text{si } i = 0[\text{mod } 2] \text{ et } m \neq 0 \\ \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \sin(m\theta) & \text{si } i = 1[\text{mod } 2] \text{ et } m \neq 0 \\ \sqrt{n+1} R_n^0(r) & \text{si } m = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

où les R_n^m sont les polynômes radiaux :

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(m-n)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} r^{n-2s}, \quad (1.39)$$

définis pour satisfaire la condition aux limites $R_n^m(r=1) = 1$. En utilisant les équations 1.38 et 1.39, on obtient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} Z_i(r, \theta) Z_j(r, \theta) r dr d\theta = \delta_{ij}, \quad (1.40)$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. Les Z_i ainsi normalisés (Noll, 1976) forment donc une base orthonormée des fronts d'onde. Je montre sur la figure 1.12 les premiers polynômes de Zernike, selon leur classification habituelle, permettant de relier l'indice i aux ordres m et n .

Il convient de noter que sur les polynômes de Zernike, comme sur de nombreuses autres bases, le premier mode ϕ_1 décrit le piston : une aberration constante de moyenne spatiale non nulle. D'une part, la présence de piston dans la décomposition modale de la turbulence pose un problème d'intégrales divergentes ; d'autre part, il n'a aucune importance physique, puisque le piston n'affecte pas l'intensité lumineuse dans le plan focal. On conviendra donc de prendre la décomposition modale à partir du premier mode non-constant, c'est à dire dans le cas présent les modes Z_2 et Z_3 , d'ordres radial et azimutal 1. Ces modes sont les basculements, ou tip-tilt ; ils sont particulièrement importants car ils décrivent la translation de l'image dans le plan focal.

1.4.2 Variance de phase des Zernikes

L'utilisation des polynômes de Zernike en optique adaptative vient des travaux fondateurs de Noll (1976), qui en a étudié la covariance pour des fronts d'ondes définis par la statistique de Kolmogorov. Les calculs de Noll permettent d'obtenir, entre les modes Z_i et Z_j d'ordres n_i, m_i et n_j, m_j :

$$\langle a_i a_j \rangle = 3.90 [(n_i + 1)(n_j + 1)]^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{n_i + n_j - 2m_i}{2}} \delta_{m_i m_j} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} A(n_i, n_j), \quad (1.41)$$

A étant un coefficient ne dépendant que de n_i et n_j ⁶. L'expression se simplifie pour les coefficients diagonaux de la covariance, et on obtient alors (Conan, 1994) la dépendance :

$$\sigma_{Z_i}^2 \propto \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} (n_i + 1)^{-\frac{11}{3}}. \quad (1.42)$$

La décroissance en $-\frac{11}{3}$ en fonction de l'ordre radial est donc très rapide ! Comme il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Zernikes d'ordre radial $\leq n$, on en déduit aussi une décroissance asymptotique en $-\frac{11}{6}$ de la densité modale de puissance en fonction du numéro du mode i . Par ailleurs, ils faut noter que les coefficients $\langle a_i a_j \rangle$, $i \neq j$ sont non-nuls seulement pour les modes tels que i et j sont de même parité, et vérifiant $m_i = m_j$.

On peut donc, à partir de la covariance des Zernikes, évaluer la variance de phase correspondant à tous les modes ou certains sous-groupes d'entre eux. En particulier, le résidu total sous le spectre de Kolmogorov s'évalue (Fried, 1966) en moyenne statistique à :

$$\langle \sigma_\phi^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle = 1.03 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}}, \quad (1.43)$$

6. Dont l'expression analytique est fort peu agréable.

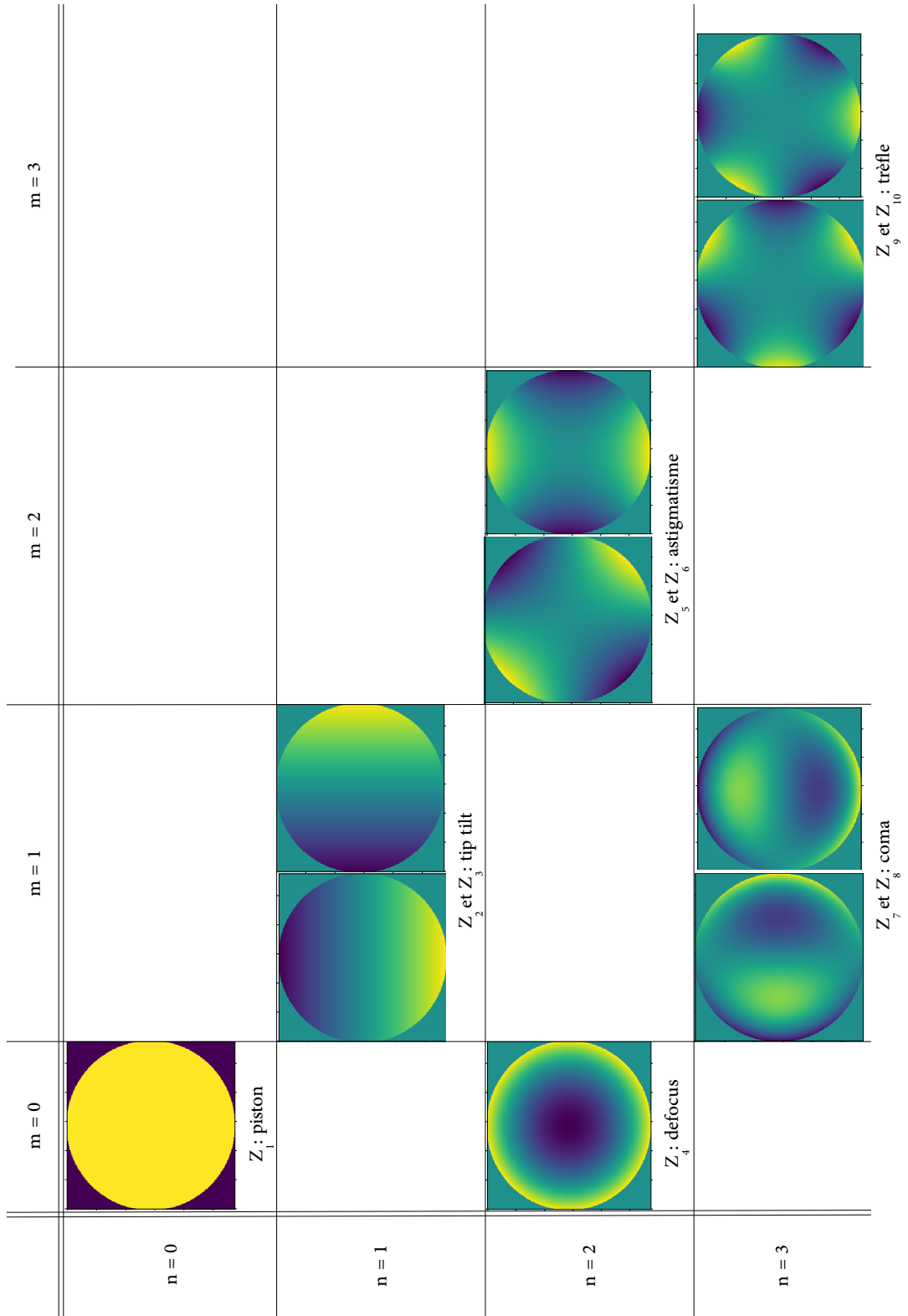


FIGURE 1.12: Représentation des 9 premiers polynômes de Zernike $Z_i(\mathbf{r})$.
Crédit : F. Ferreira.

dans lesquels l'influence des seuls deux premiers modes tip et tilt (Noll, 1976) compte pour :

$$\sigma_{\text{TT}}^2 = 0.896 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}. \quad (1.44)$$

Cette domination des bas ordres est réduite dans le cadre du spectre de von Kármán (Winker, 1991), avec par exemple σ_{TT}^2 réduit d'un facteur 10 pour $L_0 = 5D$, et d'un facteur 300 pour $L_0 = D$! La décroissance asymptotique des variances reste en revanche inchangée.

1.4.3 Karhunen-Loève atmosphériques

Bien que comme nous l'ayons vu, les polynômes de Zernike soit une ressource fort utile pour la description modale du front d'onde, leur praticité admet quelques limites.

Ils sont définis sur un disque, alors que la pupille d'un télescope a généralement une forme annulaire. Ensuite, la condition au bord $R_n^m(r=1) = 1$ conduit à une augmentation très rapide de sa dérivée au bord $dR_n^m(r=1)$ avec l'ordre radial, rendant difficiles les calculs numériques en bord de pupille. Enfin, on a vu dans l'équation 1.41 que les coefficients modaux des Zernikes ne sont pas statistiquement indépendants sous le spectre de la turbulence atmosphérique.

C'est ce dernier critère qui est le plus important : il induit (Noll, 1976), que la décroissance du résidu de phase après la correction de N Zernikes est de :

$$\sum_{i=N+2}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle \propto N^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad (1.45)$$

qui n'est pas optimale. Alors même que c'est un critère majeur pour définir l'efficacité du choix d'un nombre fini de modes pour corriger la turbulence atmosphérique.

Il est donc pertinent de définir des modes, dits de Karhunen-Loève, qui vérifient cette propriété d'indépendance statistique et de décroissance optimale (Dai, 1996) des résidus après correction de N modes. Ils sont obtenus numériquement, par diagonalisation de la covariance spatiale⁷ statistique de la phase, restreinte à la pupille de l'instrument :

$$\text{Cov}_\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \phi(\mathbf{r}_1)P(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)P(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (1.46)$$

Les vecteurs propres de cette matrice de covariance sont des fonctions de l'espace, que l'on notera KL_i^A (\cdot^A comme *atmosphérique*), ordonnés par valeur propre décroissante. Ils résolvent les trois problèmes énoncés plus haut : statistiquement indépendants, définis uniquement sur la pupille, quelle que soit sa forme, et enfin ils sont plus *lisses* sur les bord que les polynômes de Zernike. Leur défaut, en revanche, est qu'ils dépendent de la pupille, et qu'il n'est pas possible d'en donner une expression analytique.

Structurellement, un ordonnancement à peu près similaire à celui des Zernike ressort sur les premiers modes, qui sont présentés sur la figure 1.13 à titre de comparaison.

7. En pratique, de la fonction de structure bidimensionnelle $D_{2,\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D_\phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, pour éviter de devoir manipuler des intégrales divergentes sous le spectre de Kolmogorov. Le résultat est identique, au piston près.

Visuellement, on voit par exemple sur les comas que l'énergie est maintenant majoritairement localisée dans les lobes centraux, à la différence des Zernikes Z_7 et Z_8 .

Je m'arrête ici pour l'instant avec les considérations modales. J'y reviendrai au chapitre 2, après que nous ayons introduit les principes de l'optique adaptative, pour introduire une nouvelle base, qui sera la plus utile aux travaux menés dans cette thèse.

1.5 Des aspects spatiaux aux aspects temporels

En plus de l'analyse spatiale et modale du front d'onde turbulent, il est également utile d'analyser son comportement temporel. En joignant ce qui a été présenté sur les Zernikes dans la section 1.4, à l'expression de l'hypothèse de Taylor comme équation aux dérivées partielles (équation 1.21), Conan et al. (1995) obtient le spectre temporel de chaque mode Z_i en fonction de la vitesse moyenne du vent \bar{v} (équation 1.23).

Dans la limite d'un modèle turbulent multi-couches dans lequel les directions de vent sont aléatoires, on peut alors obtenir que : à basse fréquence, en fonction de la fréquence temporelle ν , la PSD temporelle se comporte asymptotiquement comme

$$\text{PSD}(\nu; Z_i) \propto \begin{cases} \nu^{-\frac{8}{3}} & \text{pour le piston } i = 0 \\ \nu^{-\frac{2}{3}} & \text{pour les tip-tilt } i = 1, 2 \\ \nu^0 & \text{pour } i \geq 3. \end{cases} \quad (1.47)$$

Et à haute fréquence, la décroissance suit la même loi pour tous les modes Z_i :

$$\text{PSD}(\nu; Z_i) \propto \nu^{-\frac{17}{3}}. \quad (1.48)$$

La fréquence de coupure entre ces deux régimes est donnée en fonction de l'ordre radial du mode de Zernike :

$$\nu_c \approx 0.3(n+1) \frac{\bar{v}}{D} \quad (1.49)$$

1.6 Conclusion : vers l'optique adaptative

J'ai présenté, au cours de ce chapitre, les principales idées associées à la turbulence atmosphérique et à son analyse. Nous avons vu, dans la section 1.3, l'impact dramatique de la turbulence sur la qualité des images produites par un télescope terrestre, dont la grande taille est rendue virtuellement inutile par le seeing – en terme de résolution angulaire dans les images.

Évidemment, cette introduction n'a que pour but de laisser comprendre au lecteur·rice que les astronomes n'ont pas l'intention de se laisser faire ! Je présente dans le chapitre suivant les principes de l'optique adaptative, dont l'objectif est précisément d'annuler, au mieux de nos capacités technologiques, l'effet de la turbulence sur l'imagerie faite depuis le sol.

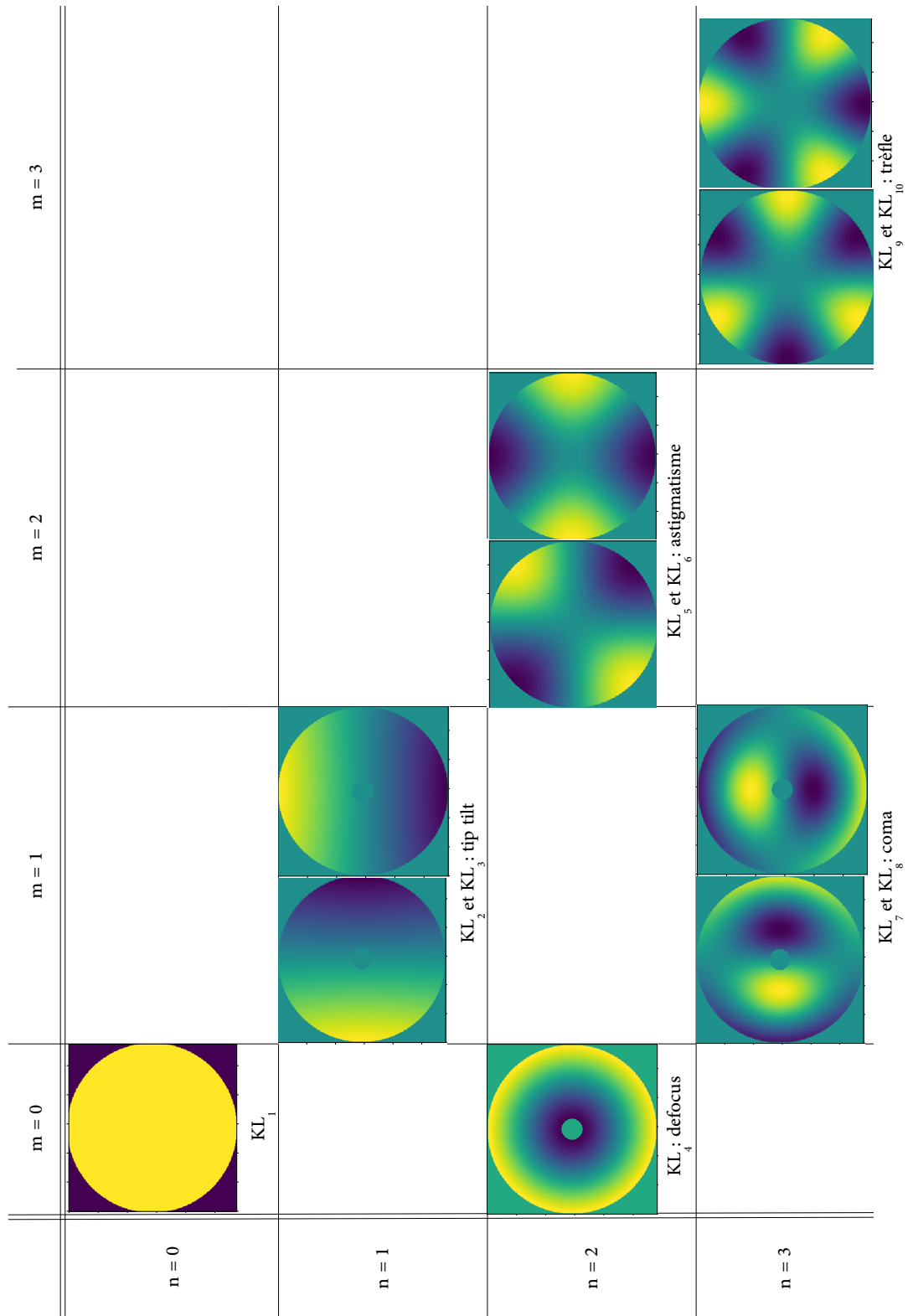


FIGURE 1.13: Représentation des 9 premiers KL atmosphériques $KL_i^A(\mathbf{r})$.
Crédit : F. Ferreira.

L'optique adaptative

Je présente dans ce chapitre les principes généraux de l'optique adaptative (OA) dans sa déclinaison originale : la SCAO (*Single Conjugate Adaptive Optics*). L'optique adaptative regroupe l'ensemble des développements, technologies et procédés dont l'objet est de corriger l'impact des milieux turbulents sur la propagation de la lumière. En particulier pour l'astronomie, l'OA est la clé du succès des très grands télescopes terrestres. Ce chapitre me permettra également d'introduire en détail l'analyseur pyramide, dont l'étude et la mise en œuvre font l'objet de cette thèse.

Sommaire

2.1	Principe général	30
2.1.1	Une très brève histoire	30
2.1.2	La SCAO : Single Conjugate Adaptive Optics	30
2.2	Agir sur la phase : le miroir déformable	32
2.2.1	Le modèle linéaire	32
2.2.2	Zone de correction	34
2.2.3	Une base orthonormée pour le DM	36
2.3	Mesurer la phase : l'analyseur de surface d'onde	37
2.3.1	Le Shack-Hartmann	38
2.3.2	D'autres types d'analyseurs	39
2.4	L'analyseur Pyramide	40
2.4.1	Principe et analyse géométrique	40
2.4.2	Généralisation des mesures	48
2.4.3	Une analyse diffractive	49
2.4.4	D'autres pyramides	53
2.5	Calculateur temps réel	54
2.5.1	Matrices d'interaction et de commande	54
2.5.2	Loi de commande et analyse temporelle de l'OA	57
2.5.3	Contrôle du gain par suppression du bruit négatif	61
2.6	Budget d'erreur en optique adaptative	62
2.6.1	Erreurs liées au dimensionnement	63
2.6.2	Erreurs liées au système	63
2.6.3	Erreurs pour le canal scientifique	66
2.7	Au delà de la SCAO : des OA plus complexes	67
2.7.1	Couverture de ciel et lasers	67
2.7.2	D'autres modes d'OA	68
2.8	Futur immédiat en OA : les ELT et leurs défis	69
2.8.1	L'ELT de l'ESO	71
2.8.2	MICADO et sa SCAO	72

2.1 Principe général

2.1.1 Une très brève histoire

Avec l'arrivée de télescopes dont le miroir primaire dépasse les 5 mètres de diamètre vers le milieu du XX^{ème} siècle (Hubble, 1949), l'impact de la turbulence sur la résolution de ces derniers devient un problème particulièrement critique. C'est à cette époque que Babcock (1953), puis Linnik (1957), proposent pour la première fois de compenser, à l'aide d'une surface optique contrôlable, la variabilité du chemin optique parcouru par la lumière incidente.

Les solutions technologiques étant insuffisantes à l'époque, la première mise en œuvre n'aura lieu qu'en 1977 (Hardy et al., 1977), profitant de l'arrivée des premiers miroirs déformables. Mais ces développements initiaux de l'OA restent longtemps l'exclusivité des programmes militaires.

La première application à l'astronomie aura lieu avec la démonstration du système COME-ON (Rousset et al., 1990; Rigaut et al., 1991) à l'observatoire de Haute-Provence puis au télescope de 3.60 m de La Silla. Le tournant du millénaire marque l'arrivée des systèmes d'optique adaptative sur les télescopes de 8-10 m de diamètre (Wizinowich et al., 2000; Gaessler et al., 2002; Rousset et al., 2003), les plus grands du monde encore aujourd'hui. Dès lors, l'optique adaptative s'impose comme un *must have* pour tous les grands observatoires, et de nombreux projets sont mis en œuvre pour équiper les grands télescopes existants ou à venir.

Je garde cette introduction relativement concise. Pour plus d'informations, je renvoie le lecteur·rice particulièrement curieux à Roddier et al. (1999).

2.1.2 La SCAO : Single Conjugate Adaptive Optics

Pour parvenir à compenser la forme des fronts d'ondes incidents, trois étapes principales sont nécessaires. La première consiste à mesurer la déformation $\phi(\mathbf{r})$ du front d'onde. Comme je l'ai déjà évoqué, il n'est pas physiquement possible aujourd'hui de mesurer directement $\phi(\mathbf{r})$. L'analyseur de surface d'onde (ASO, WFS pour *Wavefront sensor*) remplit donc deux fonctions. D'abord, opérer une transformation optique permettant d'encoder la phase en une fonction d'intensité ; ensuite, enregistrer cette image à l'aide d'une caméra.

La seconde étape est d'effectuer les calculs qui permettent d'inverser l'opération de l'ASO. On parle alors de reconstruction de front d'onde, qui permet d'estimer $\phi(\mathbf{r})$ à partir des mesures de l'ASO. Cette étape est effectuée par le calculateur temps réel (RTC, *Real Time Computer*). Au delà de la seule reconstruction, le RTC va également appliquer la loi de commande, choisie selon les besoins et les conditions pour optimiser le fonctionnement global du système.

Enfin, dernière étape, le miroir déformable (DM, *Deformable Mirror*) vient appliquer optiquement la commande reçue du RTC ; placé dans un plan pupille, il se déforme pour faire subir à la lumière un front d'onde supplémentaire de $-\phi(\mathbf{r})$. Dans

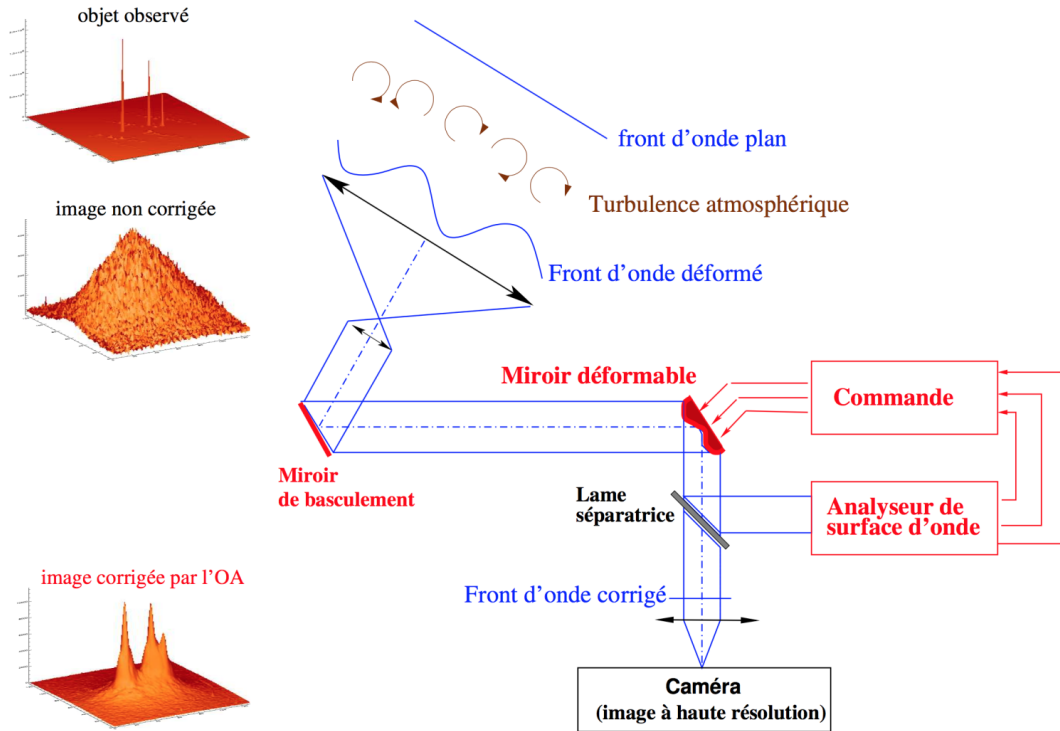


FIGURE 2.1: Schéma du principe de fonctionnement de la SCAO. L'analyseur de surface d'onde est placé derrière le miroir déformable, opérant en boucle fermée sur une seule étoile guide. L'OA permet de résoudre la source triple observée. *Crédit : T. Fusco.*

le cas idéal, le front d'onde de la lumière après réflexion sur le DM est à nouveau plan avec $\phi(\mathbf{r}) = 0$. La résolution de l'instrument est alors restaurée.

Cette séquence mesure-calcul-application doit être exécutée continûment, en temps réel. Nous avons vu au chapitre précédent que la turbulence évolue avec un temps caractéristique τ_0 (équation 1.22). Il est donc nécessaire d'opérer plus vite que τ_0 , sous peine que la commande, appliquée par le miroir déformable, soit déjà rendue caduque.

En ce qui concerne l'implémentation de ces étapes, la SCAO est la solution la plus traditionnelle. Son principe de fonctionnement est représenté sur la figure 2.1.

Dans cette configuration, on utilise un unique ASO et un unique DM. L'analyseur est pointé sur une étoile guide, sur laquelle la turbulence est mesurée. L'analyseur est placé en aval du DM, et l'instrument scientifique également, immédiatement en parallèle de l'ASO. Le miroir déformable est généralement conjugué dans un plan pupille ; ceci permet d'avoir une efficacité maximale pour corriger la turbulence proche du sol, qui domine largement le profil des $C_n^2(h)$.

Par un tel positionnement, on met en œuvre une boucle d'asservissement – à moitié optique, à moitié informatique –, dans laquelle l'ASO et l'instrument scientifique ne

voient que la composante résiduelle du front onde. En asservissant cette boucle vers un résidu nul, on obtient alors la qualité d'imagerie souhaitée. On parlera donc d'OA en *boucle fermée* pour ce genre de configurations. Ce n'est pas nécessairement le cas pour des concepts d'OA plus sophistiqués, et je reviendrai brièvement sur de tels cas dans la section 2.7.

2.2 Agir sur la phase : le miroir déformable

Comme nous l'avons vu, le miroir déformable est l'organe mécaniquement et optiquement actif de l'OA. Pour des raisons pratiques, on aura d'ailleurs presque toujours au moins deux miroirs contrôlables, comme on le voit sur la figure 2.1. Le premier est le miroir de tip-tilt, qui corrige seulement ces deux premiers modes de basculement de l'onde. Il s'agit d'un miroir plan, monté sur une structure orientable. Le second est le véritable DM, auquel je m'intéresse maintenant, et dont je montre le principe sur la figure 2.2.

La plupart des miroirs déformables utilisés (Séchaud, 1999) aujourd'hui sont constitués d'une unique surface continue, qu'on nomme "membrane". On vient fixer sur la face arrière de la membrane un ensemble d'actionneurs, dont le but est d'imposer une déformation au substrat.

Plusieurs technologies d'actionneurs sont utilisées, principalement des empilements de matériaux piézoélectriques (dits *piezo-stack*), des électroaimants, et des électrodes électrostatiques usinées sur silicium. Ces trois méthodes permettent de transformer une commande électrique à chaque actionneur en un déplacement, et donc par déformation de la surface réfléchissante de créer une aberration contrôlée dans le système optique.

La membrane est en général composée d'un matériau ayant de bonnes propriétés au polissage (souvent du verre ou silicium), et recouverte d'une fine couche d'aluminium pour obtenir de bonnes propriétés réfléchives. Dans le cas d'un DM, on choisit de faire cette membrane relativement fine, pour qu'elle conserve une certaine souplesse. En effet l'épaisseur de cette membrane résulte d'un compromis parfois subtil entre la force exercée par les actionneurs, les fréquences de résonance, ou encore la forme, largeur et le couplage relatif des déformées produites par les actionneurs, qu'on appelle fonctions d'influence (voir section 2.2.1). L'épaisseur est de l'ordre du millimètre pour les miroirs piézoélectriques (à empilement, monomorphes ou bimorphes), de la dizaine de micromètres pour les miroirs magnétiques, et inférieure au micromètre dans le cas des miroirs électrostatiques.

2.2.1 Le modèle linéaire

Je ferai, à travers cette thèse, l'approximation d'un DM linéaire dont tous les actionneurs ont un comportement identique. Cette approximation de linéarité et d'unicité de la fonction d'influence est particulièrement importante et pratique pour la caractérisation et la simulation des miroirs déformables, et est en général assez bien

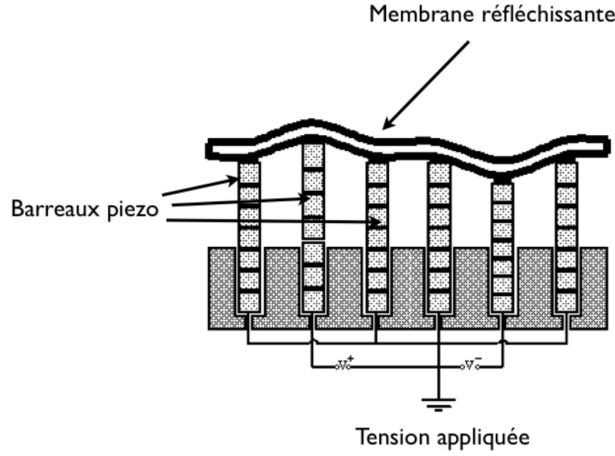


FIGURE 2.2: Schéma de principe d'un miroir déformable piézoélectrique en coupe. *Crédit : ONERA.*

vérifiée¹, notamment parce que l'effet d'un actionneur du DM sur la membrane est local à l'échelle de l'ensemble. Le voisinage d'un unique actionneur est donc presque toujours le même, et les actionneurs lointains ne s'affectent quasiment pas mutuellement.

Dans la configuration en boucle fermée, le front d'onde derrière le DM, dit front d'onde résiduel, s'écrit :

$$\phi_{\text{Res}} = \phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}}, \quad (2.1)$$

où ϕ_{Atm} et ϕ_{DM} sont respectivement le front d'onde turbulent et la compensation créée par le DM. Dans le modèle de DM linéaire, on peut décomposer ϕ_{DM} comme combinaison linéaire des déformations – dites *fonctions d'influence* (IF) – créées par chacun des n_{act} actionneurs pour une commande unitaire, notées IF_i :

$$\phi_{\text{DM}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{act}}} v_i \times \text{IF}_i(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Les v_i sont les composantes du vecteur de commande de taille n_{act} appliqué au DM. En rajoutant l'hypothèse que toutes les fonctions d'influence sont identiques – ce qui est souvent vérifié à l'exception des actionneurs les plus proches des bords de la membrane – on peut alors écrire :

$$\phi_{\text{DM}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{act}}} v_i \times \text{IF}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \text{IF}(\mathbf{r}) * \sum_{i=1}^{n_{\text{act}}} v_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.3)$$

où les \mathbf{r}_i sont les coordonnées spatiales des actionneurs et $\delta(\mathbf{r})$ est la distribution de Dirac dans le plan.

1. À l'exception des DM monomorphes et bimorphes, qui disposent d'électrodes surfaciques. Mais je n'en ai pas utilisés au cours de cette thèse.

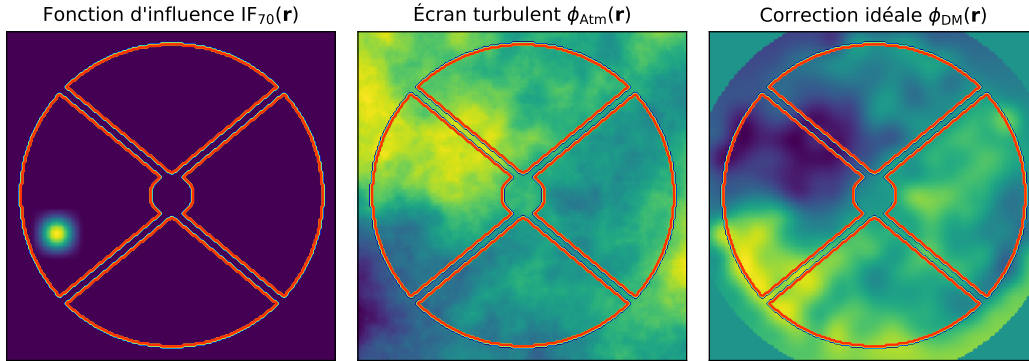


FIGURE 2.3: Exemple de fonction d'influence (gauche), et capacité de correction du miroir déformable. La forme du miroir déformable ϕ_{DM} (droite) est la réponse idéale au front d'onde turbulent ϕ_{Atm} (milieu), c'est à dire la projection de $-\phi_{Atm}$ sur l'espace des phases du DM. On distingue bien la granularité de ϕ_{DM} , conséquence du nombre limité d'actionneurs et de la forme de $IF(\mathbf{r})$. Rouge : contour de la pupille du VLT utilisée pour cet exemple.

Généralement, les actionneurs sont disposés selon un maillage périodique ou périodique par zones, à maille carrée ou hexagonale. La sommation de l'équation 2.3 peut alors s'écrire comme un peigne de Dirac pondéré, dont le support est restreint à l'empreinte de la pupille $P(\mathbf{r})$.

À travers les équations 2.2 et 2.3, nous décrivons l'ensemble des fronts d'onde ϕ_{DM} que peut effectuer le miroir déformable. Bien entendu, cet espace de phase est bien plus restreint que l'espace engendré par la turbulence atmosphérique, comme je le présente à travers un exemple sur la figure 2.3.

Ceci ouvre la porte à deux interrogations : premièrement, comment bien décrire la capacité de correction du miroir déformable ? J'aborde cette question dans la section suivante, et je compléterai en discutant des termes d'erreurs en OA à la section 2.6. Deuxièmement, comment mieux décrire l'espace des ϕ_{DM} ? Nous verrons comment définir une bonne base de contrôle dans la section 2.2.3.

2.2.2 Zone de correction

Un des paramètres principaux pour définir la capacité de correction d'un miroir déformable est sa densité d'actionneurs. En général, on se contente de la définir par le nombre d'actionneurs à travers le diamètre de la pupille, ou bien le *pitch*. Le pitch, que je noterai d_{DM} , est la distance entre deux actionneurs les plus proches. La résolution du DM est alors définie par :

$$\frac{d_{DM}}{D}, \quad (2.4)$$

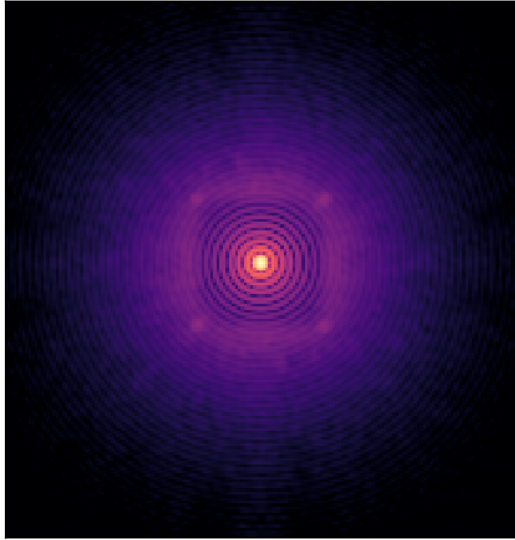


FIGURE 2.4: Simulation COMPASS (Ferreira et al., 2018b; COMPASS, 2018) d'une PSF corrigée typique (échelle logarithmique). On voit apparaître clairement la zone de correction du DM, dans laquelle les anneaux d'Airy ressortent. En dehors de cette zone, la PSF est prolongée par le pied de la tache de seeing. On note dans ce cas précis les quatre taches qui bornent les coins de la zone de correction, correspondant à un mode "gaufre". Ce mode est parfois difficile à maîtriser dans certaines OA, comme dans cet exemple.

D étant le diamètre du télescope. La matrice des actionneurs forme alors un peigne de Dirac à maille carrée de taille d_{DM} , limité par la fonction pupille $P(\mathbf{r})$. Un front d'onde $\phi_{\text{DM}}(\mathbf{r})$ est alors entièrement décrit par les fréquences spatiales qu'il contient à l'intérieur du domaine de Nyquist correspondant, c'est à dire les fréquences spatiales (f_x, f_y) telles que :

$$|f_x|, |f_y| \leq \frac{1}{2d_{\text{DM}}}. \quad (2.5)$$

On appelle cette zone la zone de correction du DM. Au delà, les fréquences spatiales ne sont vues ou créés que par effet d'aliasing. En mettant en perspective ce domaine fréquentiel avec la transformée de Fourier pour l'optique dans la forme introduite par l'équation 1.3, il correspond dans le plan focal à un carré de côté (angulaire)

$$\frac{D}{d_{\text{DM}}} \cdot \frac{\lambda}{D}. \quad (2.6)$$

C'est dans cette zone centrale du champ qu'il sera possible à l'optique adaptative de travailler pour se débarrasser des speckles : c'est ce qui est à l'origine de la forme typique des PSF corrigées par une OA, que je montre sur la figure 2.4.

Lorsque la matrice des actionneurs n'est pas à maille carrée, la forme de cette zone n'est plus la même. En particulier, dans le cas du miroir déformable M4 de l'ELT,

la zone de correction sera un hexagone ; des exemples simulés sur ce miroir seront montrés au chapitre 5 (par exemple, voir les PSF figure A&A2019:A.2).

2.2.3 Une base orthonormée pour le DM

Description

Nous avons approché, dans la section 1.4, deux décompositions modales des fronts d'onde dans la pupille du télescope. Si les modes Karhunen-Loève atmosphériques KL_i^A répondent bien aux limites vues pour les polynômes de Zernike, ils ne fournissent pas une bonne description de l'espace des phases du DM : ils n'y appartiennent pas ; et leurs projections sur cet espace ne sont pas orthogonales entre elles.

Une implémentation a été proposée (Gendron, 1995; Ferreira, 2018; Ferreira et al., 2018a) pour obtenir une base orthonormée du DM. Cette base présente également certaines des bonnes propriétés des modes KL_i^A , et elle est obtenue par un procédé similaire. Je la noterai donc \mathcal{KL}^{DM} , et les modes qu'elle contient KL_i^{DM} .

On considère d'abord la matrice de la base des fonctions d'influence \mathbf{IF} , dont chaque colonne décrit $\text{IF}_i(\mathbf{r})$. On calcule alors la matrice de covariance géométrique Δ du DM (Gaffard & Boyer, 1987) sur cette base :

$$\Delta = \mathbf{IF}^T \cdot \mathbf{IF}. \quad (2.7)$$

La matrice Δ est symétrique définie positive car \mathbf{IF} forme une base. On considère alors la base auxiliaire $\mathcal{KL}_{\text{aux}}^{\text{DM}}$ des vecteurs propres de Δ , ordonnée par ordre décroissant des valeurs propres λ_i , c'est à dire telle que :

$$\mathcal{KL}_{\text{aux}}^{\text{DM}} \cdot \text{Diag}(\lambda_i) \cdot \mathcal{KL}_{\text{aux}}^{\text{DM}T} = \Delta. \quad (2.8)$$

La base $\mathcal{KL}_{\text{aux}}^{\text{DM}}$ est orthonormée dans l'espace des commandes v_i et orthogonale dans l'espace des phases. Une dernière renormalisation permet de normaliser ces modes pour les phases, et de définir :

$$\text{KL}_i^{\text{DM}} = \lambda_i^{-1/2} \text{KL}_{i,\text{aux}}^{\text{DM}}. \quad (2.9)$$

L'implémentation de Ferreira (2018) recouvre une subtilité supplémentaire que je ne détaillerai pas ici : on peut procéder comme ci-dessus avec la contrainte supplémentaire d'un espace orthogonal aux modes piston et tip-tilt. La base finalement obtenue permet d'avoir une base orthonormée bien séparée entre les deux commandes du miroir de tip-tilt, et les $(n_{\text{act}} - 3)$ modes² contrôlant le DM sans y injecter ni piston ni tip-tilt.

2. Ce -3 apparaît car on interdit le piston et les tip-tilt au DM, soit 3 degrés de liberté qu'il est parfaitement capable d'exécuter !

Analyse et description

Je propose ici quelques brefs éléments de description quant à la structure de la base \mathcal{KL}^{DM} . Il est important d'entrevoir pourquoi ces modes ressemblent aux modes atmosphériques KL_i^A , dont ils récupèrent certaines des bonnes propriétés.

En raison du maillage régulier des actionneurs, la matrice Δ représente presque un produit de convolution, issu de la structure donnée par l'équation 2.3 quand les \mathbf{r}_i forment un peigne de Dirac. Le noyau appliqué par cette convolution est l'autocorrélation spatiale de la fonction d'influence du DM

$$\text{IF}(\mathbf{r}) * \text{IF}(-\mathbf{r}). \quad (2.10)$$

La convolution peut également être calculée dans l'espace de Fourier, auquel cas la fonction de transfert de la matrice Δ est la TF de son noyau de convolution :

$$|\mathcal{F}(\text{IF}(\mathbf{r}))|^2. \quad (2.11)$$

Si nous reprenons la définition de la base atmosphérique \mathcal{KL}^A , la matrice de covariance diagonalisée (équation 1.46) est également un opérateur de convolution, dont la fonction de transfert est le spectre de Kolmogorov $W_\phi^{\text{Kolmo}}(f)$.

Ces deux fonctions de transfert définissent directement les valeurs propres λ_i de l'opérateur diagonalisé, et par suite l'ordonnancement des modes. En particulier, il s'agit pour toutes les deux de fonctions en cloche, décroissantes à partir de 0 et à symétrie de révolution dans le plan de fréquence³. Les modes sont donc, pour les deux bases, ordonnés par norme croissante des fréquences spatiales.

En conséquence, tant que l'impact de la résolution limitée du DM est négligeable aux faibles fréquences spatiales, les modes KL_i^{DM} sont ordonnés comme et structurellement similaires aux modes KL_i^A . Alors que l'indice des modes, et les fréquences spatiales qu'ils portent, augmentent, la résolution limitée du DM devient importante et la structure des modes n'est plus fréquemment isotrope, car limitée par le repliement spectral. À la limite de résolution, les modes KL_i^{DM} complètent la base par des modes gaufré, porteurs des fréquences maximales du DM : $|f_x|, |f_y| = \frac{1}{2d_{\text{DM}}}$; ces derniers n'ont plus du tout de lien avec les KL atmosphériques.

Je montre quelques exemples de modes KL_i^{DM} et leur spectre spatial dans ces différents régimes sur la figure A&A2019:7 (chapitre 5).

2.3 Mesurer la phase : l'analyseur de surface d'onde

La fonction de l'ASO est de transformer, puis d'encoder, en une forme accessible des informations sur le front d'onde incident $\phi(\mathbf{r})$. Comment procéder pour cela ? La proposition la plus commune est celle d'un analyseur Shack-Hartmann (SH), mais depuis les années 80, de nouveaux concepts sont proposés et offrent des designs plus

3. Pour $|\mathcal{F}(\text{IF}(\mathbf{r}))|^2$, cette propriété est strictement vraie si $\text{IF}(\mathbf{r})$ est à symétrie de révolution et de spectre décroissant, ce qui est typiquement le cas.

appropriés en fonction des besoins de chaque système d'OA. Le lecteur·rice pourra trouver une revue sur les ASO dans [Rousset \(1999\)](#).

2.3.1 Le Shack-Hartmann

Imaginons un bref instant que la perturbation de phase incidente soit réduite aux modes tip et tilt uniquement. Nous avons vu que ces modes induisent directement une translation de la PSF. S'il est possible de mesurer ce déplacement, nous disposons alors d'un ASO!

Néanmoins, le front d'onde n'est pas réduit à des tip-tilts à l'échelle du télescope entier. C'est néanmoins le cas lorsque l'on regarde à des petites échelles, en zoomant sur un petit élément de surface : le front d'onde est alors presque un tilt, correspondant au gradient moyen du front d'onde sur cette surface. Cette idée de mesurer les tip-tilts locaux est à l'origine de la proposition de [Hartmann \(1900\)](#) de placer une plaque munie de trous dans un plan pupille, à l'époque pour caractériser les aberrations de polissage des miroirs. Le concept est étoffé par [Shack \(1971\)](#), qui propose de remplacer l'écran à trous par une matrice de microlentilles⁴.

Chaque microlentille, couvrant un élément de surface de la pupille dS , vient alors focaliser une PSF correspondant à dS . Le déplacement du barycentre de cette PSF correspond alors essentiellement au gradient du front d'onde incident $\phi(\mathbf{r})$. Ce fonctionnement est montré sur la figure 2.5.

Analytiquement, le gradient de front d'onde est directement relié aux déplacements mesurés selon les deux axes c_x et c_y , à travers ([Primot et al., 1990](#)) :

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{c_x}{f_{dS}} = \frac{\lambda}{2\pi dS} \iint_{dS} \frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ \alpha_y &= \frac{c_y}{f_{dS}} = \frac{\lambda}{2\pi dS} \iint_{dS} \frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{r}) d\mathbf{r},\end{aligned}\tag{2.12}$$

où f_{dS} est la longueur focale des microlentilles, et donc où $\alpha_{x,y}$ expriment en unités d'angle la pente moyenne du front d'onde à travers la surface de la microlentille.

Le design optique du SH en fait un analyseur assez linéaire en fonction du gradient de front d'onde, et surtout un analyseur à très grande dynamique. La limitation essentielle est la troncature du spot (nom donné à la PSF d'une microlentille) lorsque la pente excessive le fait partiellement sortir du sous-ensemble des pixels qui lui est alloué sur le CCD.

Le Shack-Hartmann (SH) est aussi confronté à une limite fondamentale de sensibilité : le calcul du centre de gravité est effectué sur une PSF limitée au mieux par la diffraction par une seule sous-pupille dS , cette dernière étant bien plus petite que l'ensemble de la pupille. Le spot associé a donc une largeur à mi-hauteur plus importante que la PSF de l'ensemble. Il s'ensuit que la sensibilité de la mesure du gradient est réduite en calculant le barycentre de cette PSF plus étendue, par rapport au calcul du déplacement sur une distribution plus étroite ([Rousset et al., 1987](#)).

4. une revue est proposée dans [Platt & Shack \(2001\)](#)

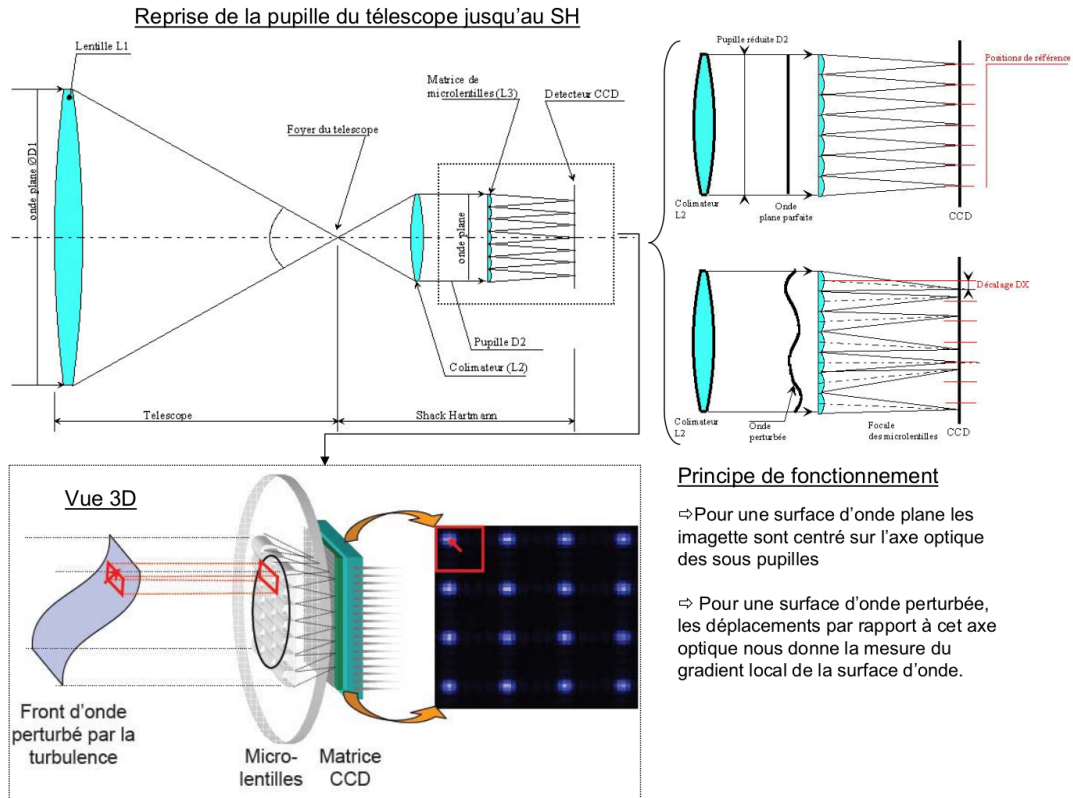


FIGURE 2.5: Fonctionnement schématique d'un analyseur Shack-Hartmann. Le tilt local dans les sous-ouvertures induit un déplacement du spot correspondant, mesuré par calcul de son centre de gravité. *Crédit : C. Plantet*

C'est autour de ce constat qu'a émergé l'idée d'analyseurs d'un autre type que le SH, qui mesurent la phase à partir d'un dispositif au foyer du télescope. La PSF y est limitée par la diffraction de l'ensemble de la pupille, et est donc bien plus étroite, permettant une mesure plus sensible. Il convient néanmoins de ne pas crier à l'obsolescence : la grande dynamique et l'excellente linéarité des SH en font des analyseurs de choix pour nombre de besoins dans les designs d'OA d'aujourd'hui.

2.3.2 D'autres types d'analyseurs

Il existe évidemment de multiples autres concepts d'ASO. Je citerai par exemple, l'analyseur de courbure (Roddi *et al.*, 1988), l'interféromètre à décalage latéral (Wyant, 1975), l'analyseur de Zernike (Zernike, 1934), ou encore la diversité de phase (Kendrick *et al.*, 1994), qui tous répondent à des problématiques spécifiques.

Une dernière classe d'analyseurs nous intéresse particulièrement dans cette thèse : ceux qui opèrent sur le front d'onde par application d'un masque de phase dans le plan focal, pour venir rendre cette information mesurable dans un plan conjugué à la pupille. Fauvarque (2017) propose un formalisme général pour l'étude de ces ASO à

filtrage de Fourier. Dans cette dernière catégorie, on retrouve parmi les plus communs et plus utilisés l'analyseur pyramide et toutes ses déclinaisons.

2.4 L'analyseur Pyramide

Je vais présenter dans cette section les principes généraux de l'analyseur pyramide (PWFS, *Pyramid wavefront sensor*). Cet analyseur, proposé par [Ragazzoni \(1996\)](#), a un grand nombre de bonnes propriétés qui répondent aux problématiques des évolutions de la SCAO pour les très grands télescopes, avec en particulier une sensibilité accrue par rapport à des analyseurs SH de résolution équivalente. La première démonstration sur le ciel du PWFS est réalisée en 2000 ([Ragazzoni et al., 2000b](#)), et les premiers instruments reposant sur le PWFS sont mis en œuvre au Telescopio Nazionale Galileo (3.6 m, [Ghedina et al. \(2003\)](#)), puis au Large Binocular Telescope (2×8.4 m, [Esposito et al. \(2010\)](#)).

2.4.1 Principe et analyse géométrique

Avant la pyramide

La proposition initiale autour du PWFS repose sur le principe du couteau de [Foucault \(1859\)](#). Lorsque le front d'onde est aberrant, les rayons lumineux issus de certains points de la pupille "ratent" le foyer du télescope, comme illustré schématiquement sur la figure 2.6.

La distance du point d'interception d'un rayon au foyer dans le plan focal s'écrit directement à partir du gradient de front d'onde $\phi(\mathbf{r})$, à l'instar de l'équation 2.12, pour la focale de l'ensemble de l'instrument :

$$\begin{aligned}\alpha_x(\mathbf{r}) &= \frac{s_x(\mathbf{r})}{f} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial x}(\mathbf{r}) \\ \alpha_y(\mathbf{r}) &= \frac{s_y(\mathbf{r})}{f} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial y}(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2.13}$$

En aval du foyer, on reconstruit une image de la pupille, après avoir placé dans le plan focal un masque occultant la moitié du plan : le couteau. Les parties illuminées dans le plan pupille d'imagerie correspondent aux points \mathbf{r} de la pupille tels que le rayon traverse le plan focal du côté non occulté par le couteau, par exemple $s_x(\mathbf{r}) > 0$.

Dans l'exécution que je viens de décrire, la caractérisation d'un front d'onde exige de déplacer à plusieurs reprises le couteau, afin de relever pour quelle position de celui-ci différentes zones de la pupille s'illuminent ou s'obscurcissent.

Ce processus itératif est évidemment en contradiction avec les besoins temps-réel de l'optique adaptative. Ce qu'il est alors nécessaire de réussir, c'est de récupérer l'image de la pupille correspondant à plusieurs positions du couteau de Foucault, simultanément pour l'axe vertical et l'axe horizontal. Le résultat de ces mesures permet alors d'obtenir en une seule image le signe des deux composantes du gradient de phase en chaque point de la pupille.

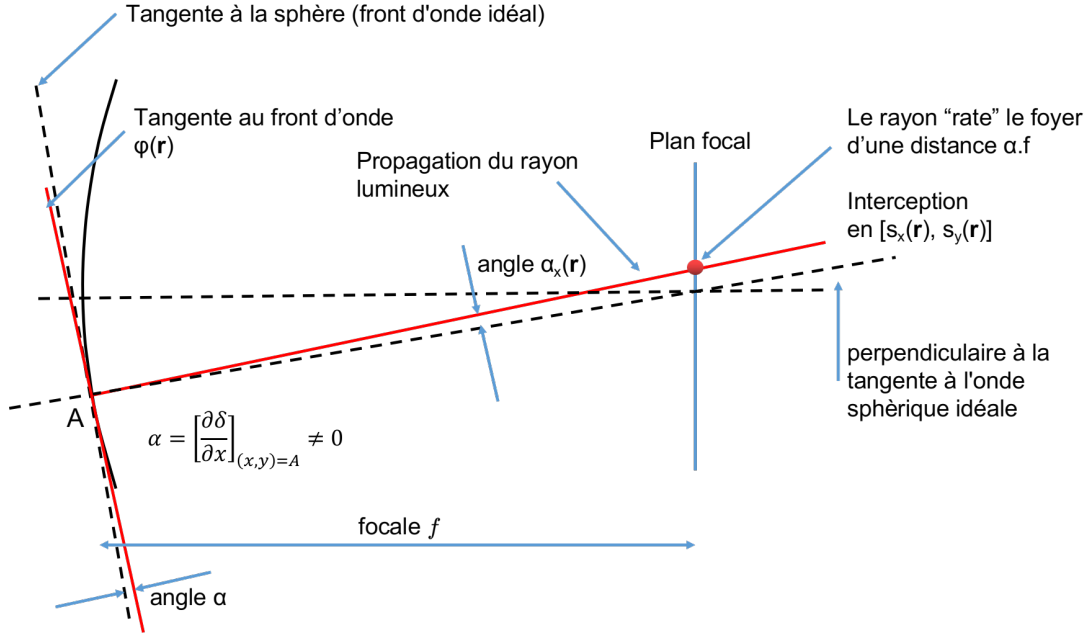


FIGURE 2.6: Propagation d'un rayon lumineux jusqu'au foyer de l'instrument en présence d'une aberration de front d'onde. Le point d'interception est déplacé d'un angle α , ou d'une distance s à côté du foyer. *Crédit : É. Gendron.*

Le seul signe du gradient de $\phi(\mathbf{r})$ est néanmoins une information insuffisante pour parvenir à reconstruire $\phi(\mathbf{r})$. Pour circonvier à ce problème, [Horwitz \(1994\)](#) propose de *linéariser* le couteau, le remplaçant par des prismes donc la transmission \mathcal{T} et la réflexion $\mathcal{R} = 1 - \mathcal{T}$ sont une fonction linéaire du point d'interception, sur deux canaux en x et en y :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x(\alpha_x) &= \frac{\alpha_x}{2\alpha_{\max}} + \frac{1}{2} \\ \mathcal{T}_y(\alpha_y) &= \frac{\alpha_y}{2\alpha_{\max}} + \frac{1}{2},\end{aligned}\quad (2.14)$$

prolongés par 0 ou 1 au delà de $\pm\alpha_{\max}$, l'angle de saturation. Le concept de l'analyseur de Horwitz est schématisé sur la figure 2.7

On peut alors, à l'aide d'un montage optique approprié, reconfigurer une pupille dans chacun des quatre faisceaux transmis ou réfléchis. En mettant bout à bout les équations 2.13 et 2.14, on obtient alors pour le canal en x , la distribution d'intensité pour les deux pupilles aval $T_x(\mathbf{r})$ et $R_x(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}T_x(\mathbf{r}) &= I(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{2\alpha_{\max}} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \right] \\ R_x(\mathbf{r}) &= I(\mathbf{r}) \left[-\frac{1}{2\alpha_{\max}} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \right],\end{aligned}\quad (2.15)$$

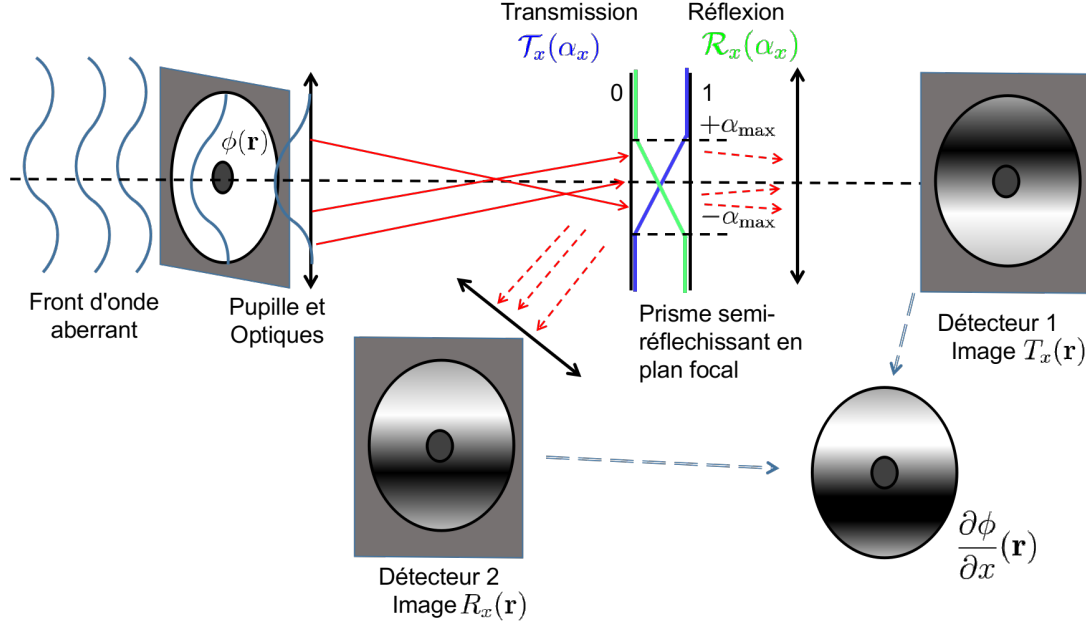


FIGURE 2.7: Principe de l'analyseur de Horwitz. À l'aide de deux prismes semi-réfléchissants placés au plan focal, on reconstitue à partir de quatre images le gradient de surface d'onde. Un seul canal est ici représenté.

$I(\mathbf{r})$ étant la distribution d'intensité dans la pupille d'entrée; on obtient de même pour le canal y , sous la condition de non-saturation $\left| \frac{\partial \phi}{\partial \bullet} \right| < \alpha_{\max}$. Ces images de la pupille, ou quadrants, peuvent enfin être recombinaées pour obtenir :

$$\text{sat} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{r}); \frac{2\pi}{\lambda} \alpha_{\max} \right) = \frac{2\pi \alpha_{\max}}{\lambda} \left[\frac{T_x(\mathbf{r}) - R_x(\mathbf{r})}{T_x(\mathbf{r}) + R_x(\mathbf{r})} \right] \quad (2.16)$$

où sat est la fonction de saturation :

$$\begin{aligned} \text{sat}(a; b) &= a && \text{si } |a| < b \\ &= -b && \text{si } a < -b \\ &= b && \text{si } a > b. \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'analyseur de Horwitz nous permet donc d'avoir une mesure exacte du gradient de front d'onde par un procédé assez simple, sous réserve de choisir l'angle de saturation α_{\max} assez grand pour toutes les situations utiles.

Ce concept est également repris par le prototype d'analyseur ADONF⁵ (Gendron et al., 2010). Cette fois ci, la linéarisation du plan focal et la séparation en fonction du signe du gradient est obtenue par un ensemble de cristaux chiraux, opérant sur la polarisation des photons.

5. Connu des anglophones sous le nom de YAW (*Yet Another Wavefront sensor*).

Une des limites de ces concepts réside dans le choix définitif de α_{\max} , qui régit la fabrication des pièces optiques. Un choix de grand α_{\max} offre un analyseur linéaire à grande dynamique, mais qui souffre aussi d'une sensibilité fortement réduite, le rapport signal à bruit étant clairement pressenti à partir de l'équation 2.15. Enfin, le design optique mélangeant réflexions et transmissions impose d'utiliser plusieurs caméras dans les axes correspondants. Son avantage néanmoins est que le faisceau n'a subi aucune diffraction par une ouverture plus étroite que la pupille du télescope, et l'échantillonnage n'est fixé que par les détecteurs choisis et la taille de leurs pixels.

Il ne fallait pas plus que ces quelques constats pour inspirer à R. Ragazzoni la genèse de l'analyseur pyramide.

L'analyseur pyramide

Le concept du PWFS est illustré sur la figure 2.8. Pour cet analyseur, la séparation entre l'équivalent des canaux transmission et réflexion de l'analyseur d'Horwitz est assuré par quatre dioptrés se rejoignant en un unique sommet, et formant donc un prisme pyramidal à quatre faces. Chaque quart du plan focal \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} fait subir aux rayons lumineux qui le traversent une réfraction dans une direction donnée. La lentille d'imagerie de pupille (PIL, *Pupil imaging Lens*) vient alors réimager la lumière traversant ce quart de plan focal dans un quadrant, pseudo-image translatée de la pupille, dont l'intensité est décrite par les fonctions A , B , C , $D(\mathbf{r})$.

L'utilisation d'une pyramide à 4 faces permet la combinaison des deux canaux en x et y en une seule pièce optique. Par rapport à l'analyseur de Horwitz, notons déjà

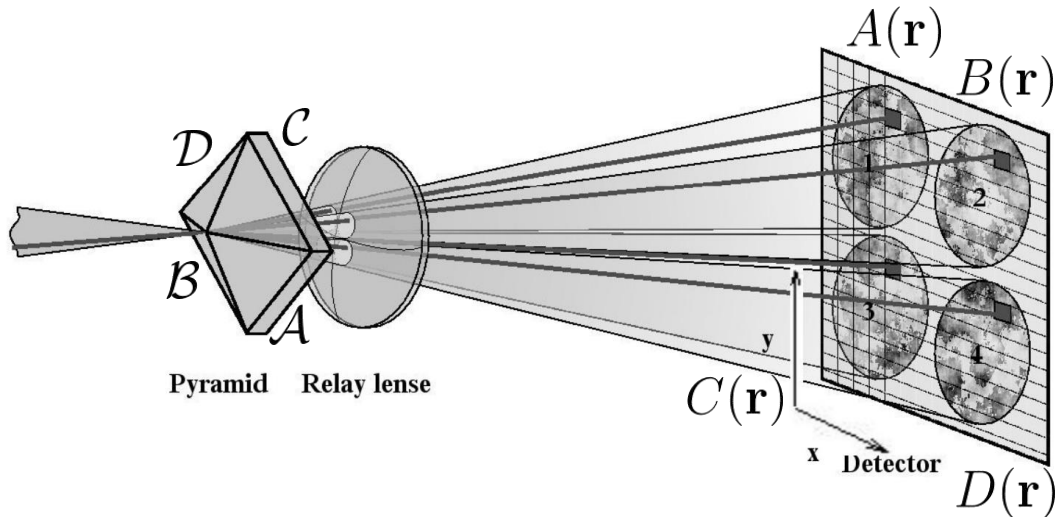


FIGURE 2.8: Principe de fonctionnement optique de l'analyseur pyramide. Le découpage du plan focal en quatre parties $\mathcal{A} - \mathcal{D}$ induit quatre images réfractées (quadrants) de la pupille d'entrée, décrites par les fonctions d'intensité lumineuse $A(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})$. *Crédit : S. Egner.*

que les quatre pupilles réfractées se propagent dans la même direction. Il sera donc aisé de les positionner sur un unique détecteur en aval de la PIL.

La version unidimensionnelle de la pyramide se nomme le *Roof prism* WFS, avec un prisme classique à deux dioptries se rejoignant en une seule arête. On fait régulièrement appel à ce modèle pour certains calculs analytiques, car il permet des simplifications algébriques utiles.

Une linéarisation de la mesure du gradient – équivalent des fonctions $\mathcal{T}_{x,y}$ précédentes – est toujours nécessaire. Elle est obtenue en ajoutant une modulation synchrone en tip-tilt, opérée par un miroir oscillant suffisamment rapide placé dans un plan pupille en amont. Elle se doit d'être synchronisée avec l'exposition de la caméra, c'est à dire périodique de période le temps d'exposition T de l'analyseur, et bien évidemment continue. Notons

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

la fonction T -périodique de modulation, comptée en déplacement angulaire induit par les tip-tilt. Elle correspond au front d'onde sur les tip et tilt Z_2 et Z_3 :

$$\phi_{\text{mod}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\pi D}{2\lambda} [w_x(t)Z_2(\mathbf{r}) + w_y(t)Z_3(\mathbf{r})]. \quad (2.19)$$

Deux fonctions de modulation en particulier vont nous intéresser : la modulation carrée, pour les premiers calculs de réponse analytique qui vont suivre, et la modulation circulaire, implémentation réaliste par un miroir oscillant. La modulation carrée est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w_x^{\square}(t) &= r_{\text{Mod}} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ &\text{prolongée par parité et } T - \text{périodicité, et} \\ w_y^{\square}(t) &= w_x^{\square}\left(t - \frac{T}{4}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

où r_{Mod} , dit *rayon de modulation*, est le demi-angle maximal de déplacement atteint par ces fonctions $w^{\square}(t)$. En modulation carrée, la PSF modulée décrit effectivement un carré dans le plan focal, dont les diagonales correspondent aux arêtes de la pyramide. Pour effectuer une modulation carrée, il serait nécessaire de disposer d'un miroir de modulation avec une bande passante infinie. On lui substitue donc une modulation circulaire :

$$\begin{aligned} w_x^{\circ}(t) &= r_{\text{Mod}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ w_y^{\circ}(t) &= r_{\text{Mod}} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ces deux fonctions de modulation sont représentées sur la figure 2.9, pour des rayons lumineux issus de points de la pupille tels que respectivement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x, y}(\mathbf{r}) = 0, \quad 0 < \left| \frac{\partial \phi}{\partial x, y}(\mathbf{r}) \right| < r_{\text{Mod}}, \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \phi}{\partial x, y}(\mathbf{r}) \right| > r_{\text{Mod}}. \quad (2.22)$$

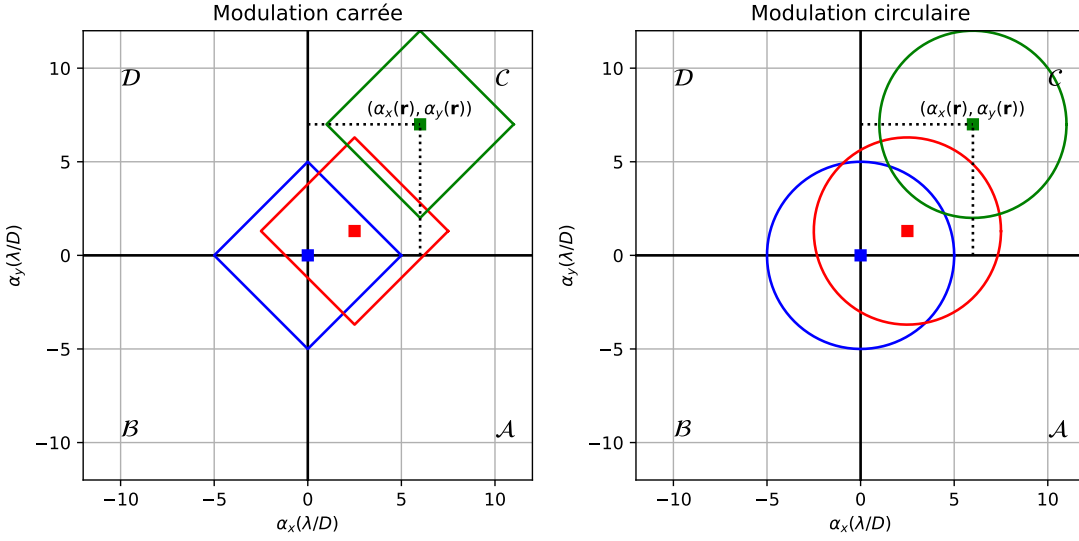


FIGURE 2.9: Trajet d'un rayon lumineux au voisinage du sommet de la pyramide au cours d'une période de modulation, pour des fonctions de modulation carrées ou circulaires. Selon la valeur du gradient de front d'onde, le rayon est réfracté par une ou plusieurs faces au cours du cycle de modulation.

Pentes géométriques sous modulation carrée

Regardons maintenant l'effet de la modulation sur les signaux reçus pour un rayon lumineux traversant la pupille à la position \mathbf{r} , et interceptant le plan focal aux coordonnées angulaires $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} \overrightarrow{\text{Grad}}(\phi)(\mathbf{r})$.

Il est maintenant facile de regarder la fraction temporelle réfractée par chacun des dioptrés \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} au cours d'une période, et d'en déduire les fonctions d'intensité dans le plan pupille résultant A , B , C et $D(\mathbf{r})$. Pour séparer les deux coordonnées du problème, je propose de raisonner par demi-plans. Par exemple, $\alpha_x(\mathbf{r}) + w_x^\square(t) > 0$ correspond à une réfraction par \mathcal{A} ou \mathcal{C} . On peut alors écrire, pour la modulation carrée :

$$\begin{aligned}
 A(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r}) &= 0 && \text{si } \alpha_x(\mathbf{r}) < -r_{\text{Mod}} \\
 &= I(\mathbf{r}) \left(\frac{\alpha_x(\mathbf{r})}{2r_{\text{Mod}}} + \frac{1}{2} \right) && \text{si } |\alpha_x(\mathbf{r})| < r_{\text{Mod}} \\
 &= I(\mathbf{r}) && \text{si } \alpha_x(\mathbf{r}) > r_{\text{Mod}}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

et, dans le demi-plan opposé :

$$B(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}) - (A(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r})) \tag{2.24}$$

On pourra reconnaître l'analogie avec les équations 2.14 et 2.15. Nous avons en effet reconstitué un analyseur de Horwitz, en ayant substitué r_{Mod} , paramètre dynamique, au α_{max} qui définissait la largeur du gradient de transmission. On construit donc les

cartes de pentes de l'analyseur pyramide :

$$\begin{aligned} S_x(\mathbf{r}) &= \frac{A(\mathbf{r}) - B(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})}{A(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})} \\ S_y(\mathbf{r}) &= \frac{A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) - C(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})}{A(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

qui vérifient, pour une modulation carrée, identiquement à l'équation 2.16 :

$$\begin{aligned} \text{sat} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{r}); \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right) &= \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} S_x(\mathbf{r}) \\ \text{sat} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{r}); \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right) &= \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} S_y(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

On remarque que les équations 2.25 sont identiques à celles qui pourraient être utilisées pour un ASO Shack-Hartmann avec une détection sur 2×2 pixels par sous-ouverture (écartométrie quatre-quadrants ou *quad-cell*). Cette analogie est récurrente pour l'analyse du fonctionnement du PWFS.

Modulation circulaire

Dans le cadre d'une modulation circulaire, l'intégration géométrique pour obtenir l'équation 2.23 est modifiée, et l'on obtient alors :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r}) &= 0 && \text{si } \alpha_x(\mathbf{r}) < -r_{\text{Mod}} \\ &= \frac{1}{\pi} I(\mathbf{r}) \arcsin \left(\frac{\alpha_x(\mathbf{r})}{r_{\text{Mod}}} \right) + \frac{1}{2} && \text{si } |\alpha_x(\mathbf{r})| < r_{\text{Mod}} \\ &= I(\mathbf{r}) && \text{si } \alpha_x(\mathbf{r}) > r_{\text{Mod}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

En conservant la définition des cartes de pentes données par l'équation 2.25, on peut alors réécrire l'équation 2.26 pour la modulation circulaire :

$$\begin{aligned} \text{sat} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{r}); \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right) &= \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \sin(S_x(\mathbf{r})) \\ \text{sat} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{r}); \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right) &= \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \sin(S_y(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Je montre un exemple de la réponse du PWFS à un astigmatisme sur la figure 2.10, avec un rayon de modulation $r_{\text{Mod}} = 3 \frac{\lambda}{D}$. On reconnaît la saturation du gradient lorsque ses extrema sont atteints, le long des axes.

Validité des développements précédents

On vient donc de démontrer que la pyramide modulée circulairement est un senseur linéaire, sous condition de saturation, du gradient de front d'onde incident. Néanmoins, nous avons raisonné dans cette section en termes de trajectoire de rayons lumineux, et d'intensité réfractée dans les quadrants. Il convient donc d'écrire en toutes lettres

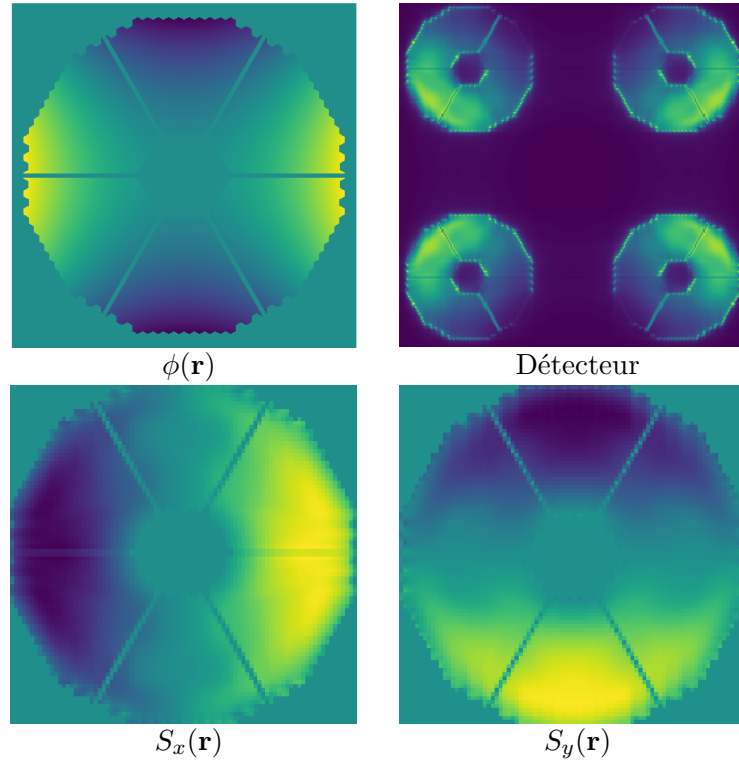


FIGURE 2.10: Exemple de réponse du PWFS à un astigmatisme Z_5 . La modulation est circulaire avec $r_{\text{Mod}} = 3 \frac{\lambda}{D}$. Haut gauche : aberration ; haut droite : image du détecteur ; bas : cartes de pentes $S_x(\mathbf{r})$ et $S_y(\mathbf{r})$. L'amplitude de $\phi(\mathbf{r})$ est telle que la saturation est juste atteinte sur les parties extrémales de S_x et S_y . *Crédit : A. Bertrou-Cantou.*

les conditions dans lesquelles ce raisonnement est une bonne approximation, bien que les équations ci-dessus soient utilisables même en dehors de ces approximations.

Nous avons déjà supposé que chaque point \mathbf{r} de la pupille correspondait à un rayon interceptant le plan focal. Ceci revient à supposer que la PSF est infiniment étroite et passe un temps négligeable du cycle de modulation sur les arêtes. Pour cela, il faudrait supposer une grande modulation à l'échelle de la diffraction subie par la PSF, et la possible épaisseur des arêtes due aux limites techniques d'usinage du prisme pyramidal, typiquement de l'ordre de 5-10 μm . La condition relative à la diffraction revient alors à r_{Mod} grand devant $\frac{\lambda}{D}$.

Ce critère est néanmoins à accepter en demi-teinte : nous voyons apparaître dans l'équation 2.28 que les cartes de pentes $S_x, S_y(\mathbf{r})$, qui contiennent l'information d'un nombre donné de photons sur un nombre donné de pixels, sont liées au gradient de phase par un facteur $\frac{1}{r_{\text{Mod}}}$. Il s'agit là du compromis bien connu de l'analyseur pyramide : le rayon de modulation est un réglage direct entre la sensibilité au gradient de front d'onde et la limite de saturation du senseur (sa dynamique).

Ensuite, il faut souligner que nous avons négligé toute possibilité d'interférences

entre les faisceaux réfractés dans les quatre images de la pupille. Ceci est vrai dans le cas de pupilles fortement séparées, ou a fortiori envoyées sur des détecteurs différents par un dispositif optique en réflexion. Il est d'ailleurs à noter que ce critère rejoint le précédent : pour obtenir un effet interférentiel entre deux quadrants, la PSF doit se situer sur l'arête les séparant et ainsi être diffractée dans les deux quadrants à la fois.

Échantillonnage par le détecteur

J'ai traité jusqu'à présent de l'analyse de front d'onde opérée par le PWFS dans un cadre continu, exclusivement en fonction de la coordonnée \mathbf{r} dans le plan pupille. Le flux lumineux est évidemment échantillonné spatialement par la matrice de pixels du détecteur, et les quatre images A , B , C et D de la pupille sont échantillonnées, chacune par N_{subap} pixels se correspondant un à un entre les images. Pour le pixel i ($1 \leq i \leq N_{\text{subap}}$), correspondant à un carré dS_i dans la pupille d'entrée, on a alors par exemple pour A :

$$A[i] = \iint_{dS_i} A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.29)$$

Les équations reliant cartes de pentes et gradient de phase sont alors discrétisées en :

$$\begin{aligned} \sin(S_x[i]) &= \frac{1}{r_{\text{Mod}}} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{dS_i} \iint_{dS_i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ \sin(S_y[i]) &= \frac{1}{r_{\text{Mod}}} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{dS_i} \iint_{dS_i} \frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

La sortie de l'analyseur est donc un flux de vecteurs de $2 \times N_{\text{subap}}$ éléments donnant les valeurs de $S_x[i]$ et $S_y[i]$ pour chaque image acquise.

2.4.2 Généralisation des mesures

Par analogie avec le Shack-Hartmann, l'approche originale du PWFS est celle que j'ai décrite ci-dessus. Néanmoins, d'abord au fil des besoins analytiques pour étudier plus en détail le PWFS (Vérinaud, 2004; Shatokhina, 2014; Fauvarque, 2017), puis par des démonstrations de performance de bout-en-bout d'optique adaptative (Deo et al., 2018a), différentes versions ont été proposées quant à la notion d'espace des mesures du PWFS, qui est par suite l'espace des données d'entrée du RTC.

Classiquement, l'expression donnée par l'équation 2.25 est utilisée – avec ou sans application du sinus de l'équation 2.28, pour des pyramides modulées (circulairement) ou non.

Un problème survient néanmoins avec cette normalisation : lorsque le flux incident de l'étoile guide est faible, il est possible qu'une sous-ouverture dS n'intègre aucun photon durant la durée d'exposition. Le dénominateur de S_x et S_y est alors nul, ce qui pose un problème de prolongement des données à partir des sous-ouvertures effectivement mesurées. La normalisation globale est proposée par Vérinaud (2004) : nous reprenons l'équation 2.25, en utilisant la valeur moyenne du dénominateur sur

les pixels :

$$K = \frac{1}{N_{\text{subap}}} \sum_i A[i] + B[i] + C[i] + D[i], \quad (2.31)$$

pour alors définir :

$$\begin{aligned} S_x[i] &= \frac{1}{K} (A[i] - B[i] + C[i] - D[i]) \\ S_y[i] &= \frac{1}{K} (A[i] + B[i] - C[i] - D[i]). \end{aligned} \quad (2.32)$$

En allant plus loin dans ce raisonnement, il est même proposé (Guyon et al., 2011; Clergeon, 2014; Fauvarque et al., 2016a; Deo et al., 2018a) de plus en plus régulièrement de ne plus calculer explicitement la transformation intermédiaire de $A, B, C, D[i]$ vers $S_x[i]$ et $S_y[i]$, et d'opérer l'analyseur en considérant directement un vecteur de pixels simplement normalisés par K . La sortie de l'analyseur est alors un vecteur de taille $4 N_{\text{subap}}$:

$$\frac{1}{K} [A[1] \dots A[N_{\text{subap}}], B[1] \dots B[N_{\text{subap}}], C[1] \dots C[N_{\text{subap}}], D[1] \dots D[N_{\text{subap}}]]^T. \quad (2.33)$$

J'ai eu l'occasion d'approfondir sur cette dernière manière d'appréhender le signal du PWFS, qui présente certains avantages lorsque l'on sort du cadre strict introduit dans cette section. En particulier, il est nécessaire pour parvenir aux identités 2.29 et 2.30 de supposer que la sous-ouverture dS_i correspond bien au même élément de surface pour les quatre pixels correspondants $A[i], B[i], C[i]$ et $D[i]$, hypothèse qui peut souffrir des défauts opto-mécaniques du PWFS. Je reviendrai en détail sur cette problématique au chapitre 4, dans lequel j'étudierai aussi l'impact des différentes formules présentées ici pour le calcul des pentes.

Finalement, pour les besoins de cette thèse, je me contenterai souvent par la suite de définir la pyramide par un opérateur **Pyr**, qui a un front d'onde associe la collection des valeurs des pixels éclairés à la sortie du PWFS. Comme nous l'avons vu à travers cette section, cet opérateur est linéaire dans la limite des faibles phases, mais généralement non linéaire à cause de l'effet de saturation locale du gradient.

2.4.3 Une analyse diffractive

Il est bien entendu possible d'effectuer une modélisation complète de l'analyseur pyramide, prenant en compte tous les effets de diffraction et d'interférences. Nous pouvons facilement définir l'image \mathbf{I}_{Pyr} dans le plan du détecteur à l'aide d'une succession de transformées de Fourier, en introduisant le prisme comme un masque de phase dépendant de la position au plan focal :

$$\phi_{\text{Pyr}}(\boldsymbol{\alpha}) = \kappa \times (|\alpha_x| + |\alpha_y|), \quad (2.34)$$

κ étant une constante liée à l'angle au sommet et à l'indice optique du prisme, qui définit la direction de réfraction des quatre quadrants. On peut alors écrire :

$$\mathbf{I}_{\text{Pyr}} \propto \int_0^T \left| \mathcal{F}^{-1} [\exp(i \phi_{\text{Pyr}}) \times \mathcal{F} [A(\mathbf{r}) \exp(i(\phi(\mathbf{r}) + \phi_{\text{mod}}(\mathbf{r}, t)))] \right|^2 dt. \quad (2.35)$$

Bien que ce soit cette formule qui soit généralement utilisée dans les simulateurs d'optique adaptative, à travers une discrétisation de l'intégrale sur la modulation, elle est en revanche peu pratique pour des études analytiques, et ne nous renseigne pas sur le contenu des cartes de pentes.

Une modèle diffractif complet du Roof prism à été proposé pour la première fois par [Vérinaud \(2004\)](#), puis étoffé en un modèle bidimensionnel par [Shatokhina \(2014\)](#).

Le modèle de [Vérinaud \(2004\)](#), sous l'approximation des faibles phases, permet d'écrire pour les cartes de pentes, par exemple S_x :

$$S_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{x'} P(x', y) \times (\phi(x', y) - \phi(x, y)) \times \text{v.p.} \left(\frac{\sin(\xi x)}{\xi x^2} \right) dx', \quad (2.36)$$

où $P(x, y)$ est la fonction indicatrice de la pupille, $\xi = \frac{2\pi r_{\text{Mod}}}{\lambda}$, et v.p. la distribution valeur principale. Ce dernier terme en v.p. est la signature de l'intégrale de l'intensité lumineuse sur la fonction de modulation circulaire.

Sous l'approximation de la pupille infinie, l'équation 2.36 s'écrit comme un produit de convolution, ce qui permet alors de définir une FTO entre le front d'onde $\phi(\mathbf{r})$ et chacune des cartes de pentes $S_x(\mathbf{r})$ et $S_y(\mathbf{r})$. À partir de cette FTO, [Vérinaud \(2004\)](#) obtient alors la sensibilité normalisée des cartes de pentes en fonction de la fréquence spatiale, par exemple pour un roof prism sur l'axe x :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{r_{\text{Mod}}} |f_x| & \text{si } |f_x| \leq \frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda} \\ 1 & \text{si } |f_x| > \frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda}. \end{cases} \quad (2.37)$$

Cette quantité est montrée sur la figure 2.11, comparée avec un analyseur Shack-Hartmann d'échantillonnage équivalent. Le PWFS a la sensibilité d'un dérivateur pour les fréquences spatiales en dessous de $\frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda}$, et une sensibilité constante au delà. On parle alors de dualité entre senseur de gradient et senseur de phase en fonction de la fréquence spatiale.⁶

Sensibilité par l'approche interférentielle

L'approche ci-dessus nous restreint à étudier la sensibilité d'un Roof prism, ou de la pyramide à travers une seule des deux cartes de pentes. Ces limitations sont les mêmes pour le modèle bidimensionnel de [Shatokhina \(2014\)](#) ; il est en revanche possible de déterminer la carte de sensibilité de la pyramide en fonction des fréquences spatiales 2D par d'autres approches, par exemple les modèles convolutifs ([Fauvarque, 2017](#)), ou encore une approche interférentielle ([Guyon, 2005](#); [Clergeon, 2014](#)) se basant sur une analyse géométrique sur le trajet de la modulation, comme nous avons étudié précédemment.

6. En pratique, même pour $f_x > \frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda}$, les cartes de pentes S_x et S_y déphasent quand même les perturbations $\phi(\mathbf{r})$ sinusoidales de $\frac{\pi}{2}$. On pourrait mieux décrire le PWFS en parlant de dérivateur-déphaseur, ou de "dérivateur flou".

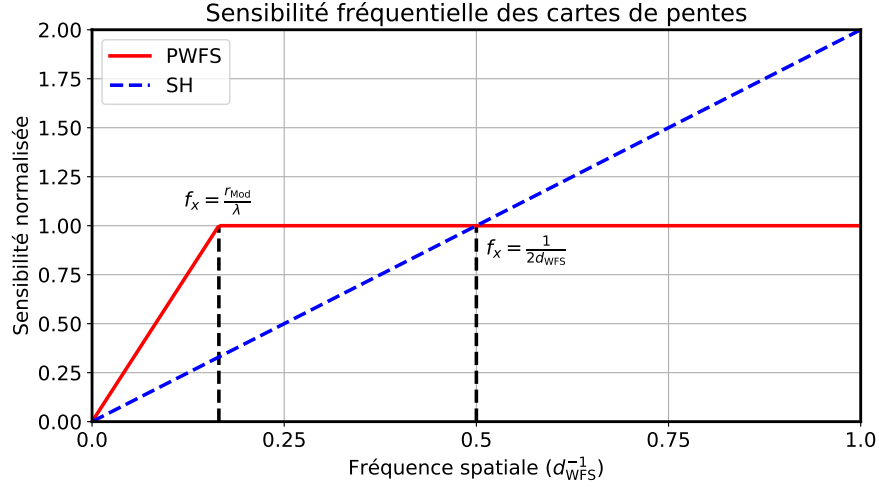


FIGURE 2.11: Sensibilité normalisée des cartes de pentes du PWFS et des pentes du SH en fonction de la fréquence spatiale du front d'onde incident. d_{WFS} est la taille des sous-ouvertures ; $f_x = \frac{1}{2d_{\text{WFS}}}$ est la fréquence de Nyquist de l'échantillonnage spatial. *Crédit : C. Vérinaud.*

Pour un front d'onde incident sinusoïdal de fréquence spatiale \mathbf{f} :

$$\phi(\mathbf{r}) = A \times \cos(2\pi\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.38)$$

l'image formée au plan focal est constitué, dans la limite $A \ll 1$ rad, de la tache d'Airy accompagnée de deux speckles aux positions angulaires $\alpha = \lambda\mathbf{f}$, comme montré sur la figure 2.12 (centre).

Les deux speckles et le cœur de la PSF sont réfractés dans les différents quadrants, et créent ou non des franges d'interférences dans $A, B, C, D(\mathbf{r})$ selon leurs positions relative. Quand l'ensemble est réfracté par la même face du prisme pyramidal, il n'y a pas d'interférences ; lorsqu'à l'inverse, la PSF est proche d'une arête, le cœur interfère avec un seul des speckles et forme des franges dans les images de la pupille. Cette dernière configuration est permanente pour des fréquences $f > \frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda}$, mais ne peut se produire que lorsque $\|\mathbf{w}(t)\| < \lambda f$ dans le cas où $\lambda f < r_{\text{Mod}}$.

En intégrant, en fonction de la fréquence spatiale, ces positions au cours d'un cycle de modulation, on peut alors obtenir une carte de sensibilité en fonction de \mathbf{f} , comme représenté sur la figure 2.13. On retrouve, le long des axes, la structure de l'équation 2.37 ; une différence de comportement majeure est néanmoins mise en valeur entre les hautes fréquences selon les arêtes du PWFS et celles à 45 degrés. Si l'on considère les deux axes de la pyramide comme deux Roof prisms indépendants, les hautes fréquences spatiales selon les arêtes du PWFS se situent alors dans le régime basse fréquence et grande dynamique sur un axe, et dans le régime haute fréquence et grande sensibilité sur l'autre axe. Ces fréquences sont donc celles auxquelles le PWFS est le plus sensible.

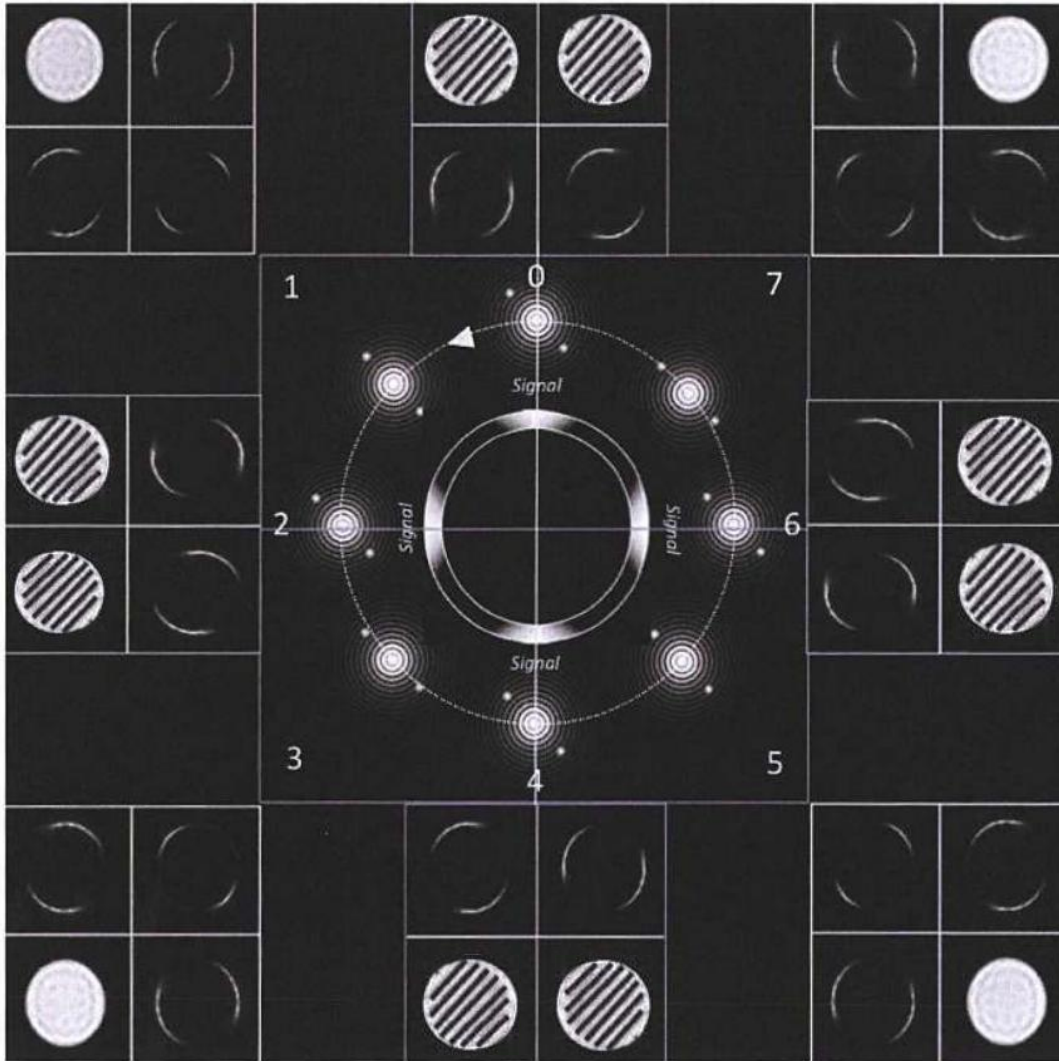


FIGURE 2.12: Analyse de la sensibilité fréquentielle du PWFS par interférences des speckles, en fonction des positions au cours d'une période de modulation. L'aberration à une fréquence spatiale donnée est susceptible de donner un signal utile dans les pentes du PWFS lorsque la modulation place la PSF de sorte que les speckles traversent deux faces différentes du prisme. Pour les positions 0, 2, 4 et 6, les franges vues dans les deux quadrants utiles sont en opposition de phase. *Revu depuis Clergeon (2014).*

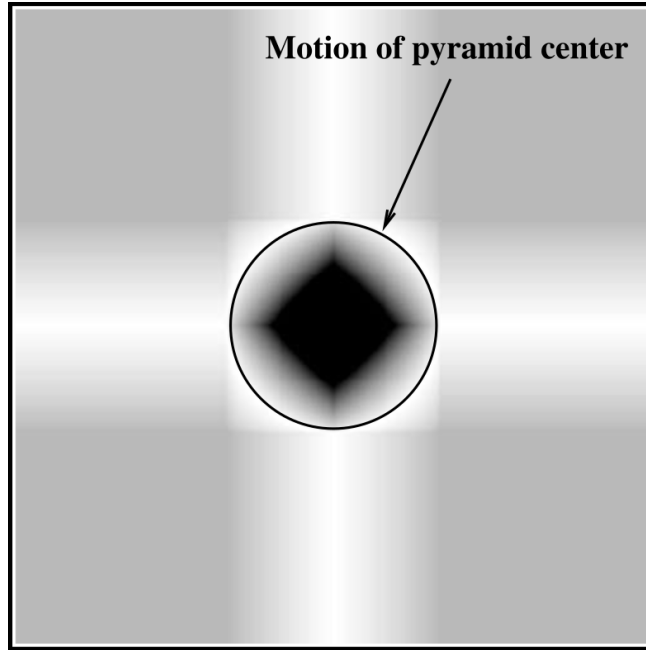


FIGURE 2.13: Sensibilité normalisée du PWFS dans le plan de fréquences spatiales, résultant de l'analyse des interférences de speckles sur le cycle de modulation. Noir au centre : couleur tronquée, décroissance linéaire jusqu'à 0 pour la fréquence nulle. "Motion of pyramid center" : fréquence spatiale $f = \frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda}$ correspondant au rayon de modulation. *Crédit : O. Guyon.*

2.4.4 D'autres pyramides

Le PWFS n'est pas le seul ASO à exploiter une séparation du plan focal par réfraction dans différentes directions. En particulier, la généralisation de la notion de pente que j'ai présenté à la section 2.4.2 a levé le besoin de pouvoir reconstituer explicitement – à l'instar du SH – des cartes représentant le gradient de phase.

Cette levée de contrainte a donné naissance à toute une classe d'ASO pyramide (Fauvarque et al., 2016b; Janin-Potiron et al., 2019), optimisables en fonction des besoins de chaque OA. En particulier, certains de ces ASO suscitent de par leurs avantages en matière de fabrication ou de sensibilité un intérêt certain :

- La pyramide à trois faces (3PWFS), pour laquelle le prisme est plus aisé à fabriquer, et supposément plus sensible car utilisant la surface de trois quadrants au lieu de quatre sur le CCD.
- La pyramide aplatie, où les réfractions à de faibles angles laissent les quatre quadrants se superposer largement. La surface utile du CCD est alors de peu supérieure à celle d'un seul quadrant. On peut aussi envisager de reconstituer certaines propriétés de l'interféromètre à décalage latéral.
- L'axicon, pour lequel la surface réfractive est une surface conique, donnant une surface éclairée sur le CCD en forme de disque ou d'anneau. Les propriétés de

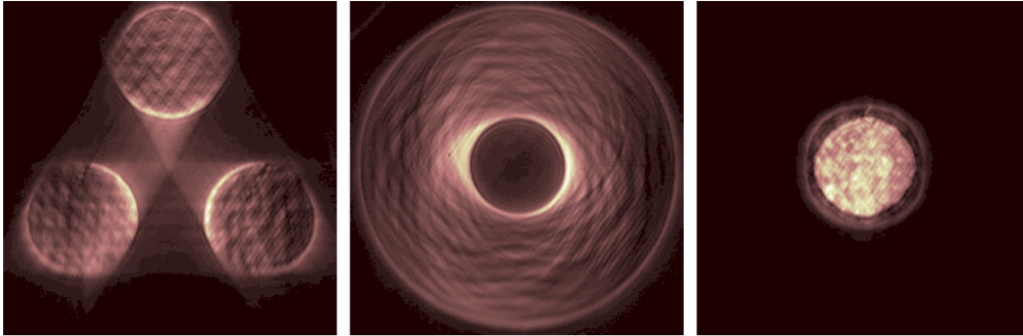


FIGURE 2.14: Images CCD obtenues pour différents analyseurs de la classe des pyramides, en l'absence de modulation. De gauche à droite : 3PWFS, axicon et pyramide aplatie. *Crédit : P. Janin-Potiron.*

l'ASO sont alors strictement isotropes par rapport aux fréquences spatiales. Pour ces trois analyseurs, les images obtenues sont typiquement comme montrées sur la figure 2.14.

2.5 Calculateur temps réel

Je vais maintenant m'intéresser dans cette section au troisième composant principal de la boucle d'OA : le calculateur temps réel (RTC). Comme je l'ai dit en introduction de ce chapitre, le RTC remplit deux fonctions, souvent entremêlées : reconstruire, ou du moins estimer au mieux, le front d'onde à partir du vecteur de mesures \mathbf{s} de l'ASO ; et appliquer la loi de commande adéquate pour déduire le vecteur de commandes \mathbf{v} à envoyer au DM.

2.5.1 Matrices d'interaction et de commande

Dans cette thèse, je restreins mon approche à celle des reconstructions linéaires du front d'onde. Cela peut sembler paradoxal, étant donné que l'objet de cette thèse est justement de travailler avec l'analyseur pyramide, dont les non-linéarités forment une des principales sources de difficultés.

Néanmoins la reconstruction linéaire est une des plus utilisés en optique adaptative, une des plus simples à implémenter, et elle est très efficace d'un point de vue calculatoire.

Je note **Pyr** l'opérateur qui à un front d'onde associe le vecteur de mesure de l'ASO⁷. La matrice d'interaction est la calibration de la réponse de l'analyseur à toutes les déformations possibles exercées par le miroir déformable. Pour obtenir cette matrice, la procédure générale est d'appliquer sur le miroir déformable successivement

7. **Pyr** comme pyramide, puisque l'étude porte ici sur le PWFS. Cette section s'applique néanmoins à n'importe quel autre ASO.

tous les fronts d'onde ϕ_i d'une base du miroir, et d'enregistrer la réponse normalisée de l'ASO à ce stimulus.

Les ϕ_i sont les modes de la base de contrôle du DM (voir section 2.2.3), de sorte que l'on peut décomposer :

$$\phi_{\text{DM}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{act}}} v_i \phi_i. \quad (2.39)$$

avec les v_i dénotant les commandes modales. On supposera que les ϕ_i forment une base orthonormée pour les phases, et en pratique il s'agira souvent de la base \mathcal{KL}^{DM} définie dans la section 2.2.3.

Dans le cadre d'un analyseur linéaire, la quantité appliquée sur le DM de chaque mode ϕ_i a peu d'importance. En revanche, pour un ASO globalement non-linéaire, il est important d'effectuer cette mesure avec des amplitudes suffisamment faibles pour garantir la linéarisation souhaitée dans le régime des faibles perturbation. Il est donc intéressant de mesurer la réponse différentielle de l'analyseur au voisinage de son zéro, c'est à dire sa réponse au front d'onde plan $\phi(\mathbf{r}) = 0$.

Pour chaque mode ϕ_i , on calibre donc la réponse différentielle en calculant à l'aide d'un *push-pull*, c'est à dire en appliquant successivement un front d'onde et son opposé. Ceci a pour effet d'annuler toutes les non-linéarités d'ordre pair. La mesure effectuée, que je note $\mathbf{dPyr}(\phi_i)$ est donc :

$$\mathbf{dPyr}(\phi_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Pyr}(\varepsilon \phi_i) - \mathbf{Pyr}(-\varepsilon \phi_i)}{2\varepsilon}, \quad (2.40)$$

où $\mathbf{Pyr}(\phi)$ est le vecteur de mesures de l'ASO, défini pour le PWFS selon les possibilités proposées dans la section 2.4.2. La matrice d'interaction \mathbf{dPyr} est alors la collection des colonnes $\mathbf{dPyr}(\phi_i)$, $1 \leq i \leq n_{\text{modes}}$. En multipliant à droite par la représentation d'un front d'onde sur la base des ϕ_i , on obtient la réponse de l'ASO, dans la limite supposée de sa linéarité. En pratique, on fera tendre ε vers 0 dans la limite où le niveau de bruit sur les mesures de l'ASO permet d'extraire un signal satisfaisant. Ceci est particulièrement important dans le cadre de la mesure de matrices d'interactions sur le ciel ([Esposito et al., 2006](#)).

La matrice \mathbf{dPyr} nous fournit donc une relation entre l'espace du DM et l'espace des mesures. Procéder ainsi par une mesure explicite de l'interaction permet d'incorporer dans le processus de reconstruction un certain nombre d'effets fins qu'il est difficile de modéliser, comme certains défauts d'alignement, du DM ou de l'ASO.

Pour faire fonctionner notre boucle d'OA, nous avons besoin de la transformation inverse, qui à un vecteur de mesures associe le front d'onde correspondant sur le DM. L'espace des mesures est toujours de dimension plus grande que l'espace du DM. Et l'espace des fronts d'onde sur la pupille est même de dimension infinie. On ne peut qu'accepter que le DM ne puisse corriger parfaitement tout front d'onde incident, mais on cherche à trouver la solution optimale au sens des moindres carrés, car cette solution minimise la variance de phase résiduelle, et donc maximise le SR de l'image produite.

En se plaçant dans le cadre de la boucle ouverte, cette condition s'écrit :

$$\phi_{\text{DM}} \text{ tel que minimisant } \|\phi_{\text{Atm}} + \phi_{\text{DM}}\|^2. \quad (2.41)$$

En incorporant l'effet de la mesure de l'ASO à travers la matrice d'interaction, cette minimisation se réécrit :

$$\phi_{\text{DM}} \text{ tel que minimisant } \|\mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Atm}}) + \mathbf{dPyr} \cdot \phi_{\text{DM}}\|^2, \quad (2.42)$$

qui est donc la projection orthogonale sur le DM du front d'onde qui induirait⁸ la mesure $\mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Atm}})$ par l'analyseur. Notons que la résolution de l'équation 2.42 n'est plus un critère d'optimalité ; on ne cherche qu'à ajuster le DM aux mesures de l'ASO.

La solution à l'équation 2.42 est obtenue par une équation linéaire :

$$\phi_{\text{DM}} = -\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Atm}}), \quad (2.43)$$

où \mathbf{Rec} , le reconstituteur ou matrice de commande, est obtenu par pseudo-inversion de la matrice d'interaction :

$$\mathbf{Rec} = \mathbf{dPyr}^\dagger = (\mathbf{dPyr}^T \cdot \mathbf{dPyr})^{-1} \cdot \mathbf{dPyr}^T. \quad (2.44)$$

Il faut noter que, dans le cas le plus général, la matrice $\mathbf{dPyr}^T \cdot \mathbf{dPyr}$, bien que carrée, n'est pas inversible. Certains modes du DM peuvent être "mal vus" par l'analyseur, c'est à dire que $\mathbf{dPyr}(\phi_i)$ est petit devant le bruit, voire nul. C'est par exemple le cas du mode piston pour tous les analyseurs classiques en OA.

Dans ce cas, une décomposition en valeurs singulières de \mathbf{dPyr} indique s'il est nécessaire d'opérer une troncature des modes lors de l'inversion, dont la commande est alors forcée à zéro pour éviter une importante amplification du bruit de mesure. Typiquement, on essaiera de maintenir un conditionnement de l'ordre de $5 \cdot 10^{-2}$. Cette régularisation du spectre est équivalente à une projection orthogonale de la commande sur l'espace des modes non filtrés. Finalement, $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{dPyr}$ est une matrice carrée, diagonale, dont les coefficients diagonaux sont autant de 1 (de 0) que de modes non filtrés (filtrés lors de l'inversion).

Une remarque néanmoins sur la reconstruction linéaire : satisfaire la minimisation de l'équation 2.42 n'est pas équivalent à 2.41, pour deux raisons. Tout d'abord, la finitude des mesures due à l'échantillonnage discret de la pupille par l'ASO crée un repliement spectral. La résolution spatiale de la mesure est donc limitée, et le vecteur de commande ne décrit pas parfaitement le front d'onde reçu ϕ_{Atm} . Deuxièmement, la non-linéarité de l'analyseur entre en jeu, et la minimisation par la pseudo-inverse suppose, si ϕ_{Atm} n'est pas une petite perturbation, que l'analyseur est linéaire. Cette impact de la non-linéarité sur la reconstruction du front d'onde est un sujet à part entière, et fait l'objet du chapitre 5.

Les mêmes considérations s'appliquent en boucle fermée, en prenant le résidu ϕ_{Res} à la place du front d'onde turbulent intégral ϕ_{Atm} , dans le but de calculer par incréments les commandes du DM. C'est ce que nous allons voir dans la section 2.5.2.

8. Au conditionnel, à cause, encore, des non-linéarités.

Reconstructions non-linéaires et modèles inverses

Si l'inversion aux moindres carrés des mesures à l'aide d'une matrice de commande est la méthode de reconstruction originelle et la plus commune en OA, de nombreux autres algorithmes existent. Ils sont développés en particulier face à l'inexactitude, parfois critique, de l'équation 2.42 pour les ASO non-linéaires ; et face à la complexité algorithmique du produit matrice-vecteur (MVM, *Matrix-Vector Multiply*) $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{s}$.

Ces méthodes proposent d'étudier le comportement modélisé de l'ASO, pour la plupart au delà du premier ordre, et d'utiliser des techniques non-linéaires et itératives pour résoudre le problème de l'inversion de l'opérateur \mathbf{Pyr} . On pourra citer, parmi les plus prometteuses pour le PWFS, tant par leur complexité de calcul que leur précision :

- L'inversion directe de second ordre pour le PWFS non-modulé (Frazin, 2018)
- Le reconstruteur cumulatif pré-processé par décomposition de domaines (P-CURED) (Shatokhina et al., 2013)
- L'application de méthodes d'optimisation non-linéaires et d'apprentissage machine comme les descentes de gradient, le gradient conjugué, l'optimisation itérative de Landweber-Kaczmarz (Hutterer & Ramlau, 2018; Hutterer et al., 2018), etc.

Enfin, une nouvelle méthode linéaire est proposée pour l'inversion des ASO à filtrage de Fourier par modèles convolutifs (Fauvarque, 2017; Fauvarque et al., 2019). Cette technique est également limitée par les non-linéarités, mais se distingue en remplaçant le MVM par des transformées de Fourier uniquement.

2.5.2 Loi de commande et analyse temporelle de l'OA

Nous avons pour l'instant vu la fonction de reconstruction du RTC. Nous allons maintenant voir comment est opérée la loi de contrôle, et introduire le comportement temporel du RTC et de la boucle d'OA. Le rôle de la loi de commande (Demerlé et al., 1994; Madec, 1999) est d'assurer que le miroir déformable applique une correction totale appropriée, en prenant en compte les effets de latence, de propagation du bruit, etc. En particulier, une condition minimale est de garantir la stabilité du système, c'est à dire empêcher en toutes conditions que ϕ_{DM} ne diverge.

Dans le cadre de la SCAO, nous avons vu que l'OA est opérée en boucle fermée, avec l'ASO en aval du DM. Imaginons qu'à l'instant (discret) k , le front d'onde est parfaitement corrigé, avec donc :

$$\phi_{DM}[k] = \phi_{Atm}[k], \quad (2.45)$$

et l'ASO voit un front d'onde nul. Avec l'évolution de la turbulence, à l'instant $k + 1$ l'analyseur voit désormais la turbulence :

$$\begin{aligned} \phi_{Res}[k + 1] &= \phi_{Atm}[k + 1] - \phi_{DM}[k] \\ &= \phi_{Atm}[k + 1] - \phi_{Atm}[k] \end{aligned} \quad (2.46)$$

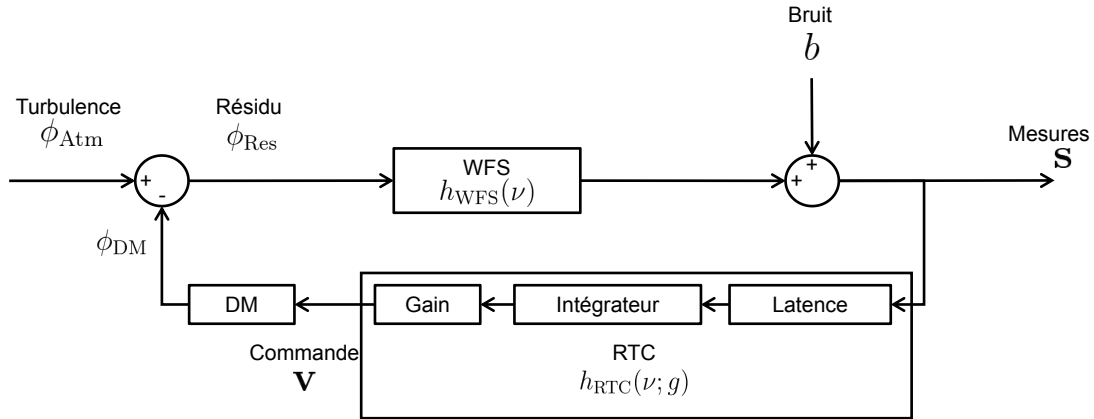


FIGURE 2.15: Diagramme de la boucle d'asservissement de la SCAO, avec les fonctions de transfert de l'ASO et du RTC.

Et il conviendrait donc de décrémenter la commande ϕ_{DM} de $\phi_{Res}[k+1]$. Il ressort de cet exemple basique que la mesure forme une version discrétisée de la dérivée temporelle du front d'onde turbulent. L'idée s'impose alors – aussi par souci de simplicité à ce stade – d'utiliser une loi de commande par intégrateur discret.

À chaque trame calculée par le RTC, l'équation de mise à jour de la commande \mathbf{v} du DM est donc, à partir de la mesure $\mathbf{s} = \mathbf{Pyr}(\phi_{Res})$:

$$\mathbf{v}[k] = \mathbf{v}[k-1] - g \times \mathbf{Rec} \cdot \mathbf{s}[k], \quad (2.47)$$

où g est le gain de l'intégrateur, aussi appelé gain de boucle. On reconnaît l'intégration progressive, pondérée par ce gain g , de la solution aux moindres carrés de l'équation 2.43. Bien entendu, d'autres lois de contrôle existent et circonviennent aux limites du contrôle par simple intégrateur (Petit et al., 2004; Gilles, 2005; Kulcsár et al., 2006).

Le gain de boucle a un impact direct, tant quantitatif que qualitatif sur le comportement de la boucle d'OA. Qualitativement, on peut dire que :

- g petit correspond à une boucle lente, qui peine à suivre l'évolution temporelle de la turbulence. Ce comportement est désirable par exemple en cas de très mauvais rapport signal à bruit.
- g trop élevé correspond à une sur-application de l'incrément de la correction. Le bruit est moins atténué et peut introduire des hautes fréquences temporelles sur le DM ; cela peut induire des régimes oscillants, voire l'instabilité de l'asservissement.

Regardons maintenant d'un point de vue d'automaticien le comportement fréquentiel et temporel d'une boucle d'OA. Je présente sur la figure 2.15 un schéma de principe de la propagation des signaux dans la boucle d'OA, avec les fonctions de transfert associées à chacun des blocs ; je note $h_{\bullet}(\nu)$ les fonctions de transfert temporelles.

Le schéma figure 2.15 traite implicitement de grandeurs scalaires : il est applicable en considérant que les différents composants de l'OA sont linéaires, et que la grandeur

scalaire prise en compte est la projection du front d'onde sur un vecteur de l'espace du DM. L'effet de la matrice d'interaction et de la matrice de commande est alors écarté, la combinaison des deux opérant comme une identité sur un tel mode (hors filtrage de modes dans **Rec**).

L'ASO est modélisé par la fonction de transfert (Gendron & Léna, 1994) :

$$h_{\text{WFS}}(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu T) \times \exp(-i\pi\nu T), \quad (2.48)$$

T étant la durée de l'exposition, supposée égale à la période de l'échantillonnage temporel du système. $h_{\text{WFS}}(\nu)$ correspond à l'intégration sur T du signal continu en entrée. On voit apparaître dans l'exponentielle un déphasage correspondant à un retard d'une demi-trame : le front d'onde délivré à la fin d'une durée d'exposition entre 0 et T correspond en moyenne au front d'onde s'étant réalisé à $\frac{T}{2}$.

La fonction de transfert du RTC incorpore différents effets : la latence τ induite par le transfert des données et le calcul, ainsi que l'intégrateur et son gain. On peut alors écrire :

$$h_{\text{RTC}}(\nu; g) = g \times \frac{\exp(-2i\pi\tau\nu)}{2i\pi\nu}. \quad (2.49)$$

Pour ce qui est du DM, on l'assimile généralement à un retard pur, qui est déjà incorporé dans τ . En pratique, les miroirs déformables sont des filtres passe-bas (Sedghi et al., 2010), mais leur fréquence de coupure est en général proche ou au delà de la fréquence de Nyquist temporelle.

En procédant à partir de la figure 2.15, on peut retrouver la fonction de transfert – dite de *correction* ou *réjection* – entre le front d'onde incident ϕ_{Atm} et le résidu de boucle ϕ_{Res} :

$$h_{\text{Corr}}(\nu; g) = \frac{\hat{\phi}_{\text{Res}}(\nu)}{\hat{\phi}_{\text{Atm}}(\nu)} = \frac{1}{1 + h_{\text{WFS}}(\nu)h_{\text{RTC}}(\nu; g)} \quad (2.50)$$

en notant $\hat{\cdot}$ la transformation de Fourier temporelle.

Il est par ailleurs intéressant d'introduire la fonction de transfert de bruit, prise entre le résidu de boucle ϕ_{Res} et le bruit b , qui caractérise l'impact du bruit propagé à travers la boucle fermée sur le système :

$$h_{\text{Noise}}(\nu; g) = \frac{\hat{\phi}_{\text{Res}}(\nu)}{\hat{b}(\nu)} = h_{\text{RTC}}(\nu; g) \times h_{\text{Corr}}(\nu; g). \quad (2.51)$$

Je présente sur la figure 2.16 quelques exemples des fonctions de transfert de correction et de bruit en fonction de g .

On peut alors combiner ensemble ces deux fonctions de transfert pour obtenir la densité spectrale de puissance du résidu de boucle, sachant que turbulence et bruit ne sont pas corrélés :

$$|\hat{\phi}_{\text{Res}}(\nu)|^2 = |h_{\text{Corr}}(\nu; g)\hat{\phi}_{\text{Atm}}(\nu)|^2 + |h_{\text{Noise}}(\nu; g)\hat{b}(\nu)|^2, \quad (2.52)$$

et par suite obtenir la variance temporelle du front d'onde résiduel par rapport à la turbulence et au bruit :

$$\sigma_{\text{Res}}^2 = \int |\hat{\phi}_{\text{Res}}(\nu)|^2 d\nu. \quad (2.53)$$

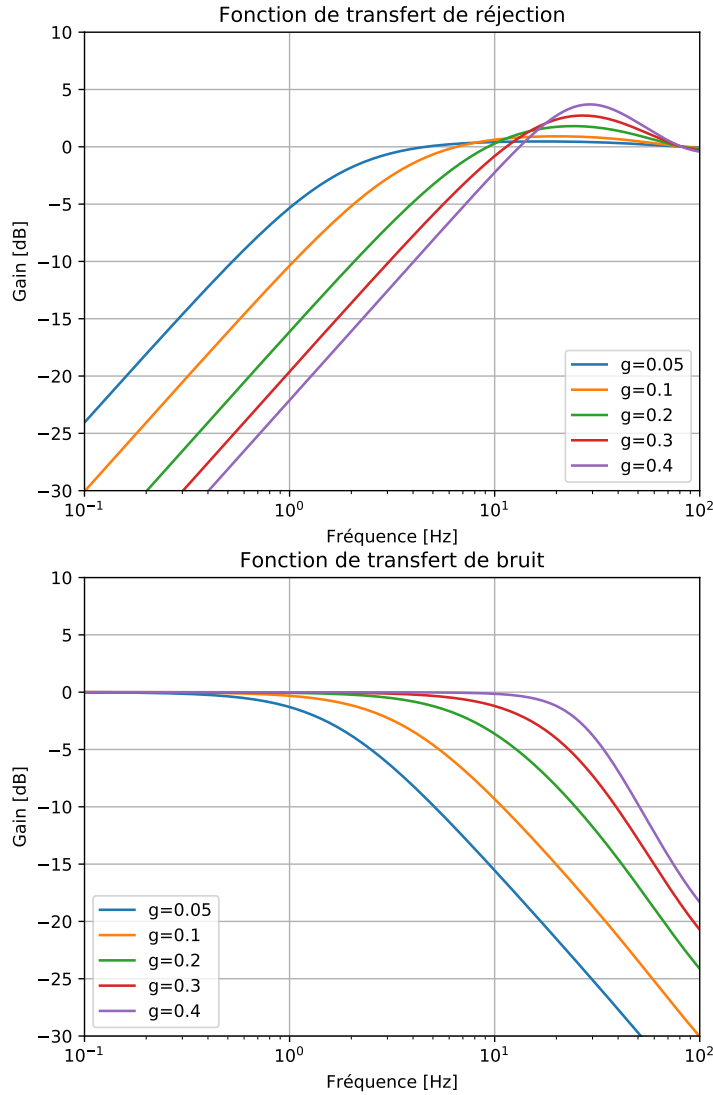


FIGURE 2.16: Exemples de fonctions de transfert de puissance $|h_{\text{Corr}}(\nu; g)|^2$ et $|h_{\text{Noise}}(\nu; g)|^2$ pour différentes valeurs du gain de boucle g . La fréquence d'échantillonnage est de 200 Hz ($T = 5$ ms), pour une latence $\tau = 3.5$ ms. *Crédit : É. Gendron.*

Nous avons donc établi une expression pour la variance du résidu, qui est la grandeur qu'il est désirable de minimiser. Il est possible de caractériser les différents paramètres intervenant dans h_{Corr} et h_{Noise} , et donc de déterminer la valeur effective des fonctions de transfert sur un système donné. En revanche, il n'est pas possible sur un vrai système d'OA d'accéder directement à ϕ_{Atm} et ϕ_{Res} .

Les travaux de [Gendron & Léna \(1994\)](#) proposent une méthode de minimisation de σ_{Res}^2 à partir des données effectivement disponibles par la télémétrie de l'OA : des mesures s en boucle ouverte, incluant le bruit, et la variance – connue – du bruit

(blanc) σ_{noise}^2 . La méthode permet alors de minimiser σ_{Res}^2 par rapport à g , en fonction du rapport signal à bruit (SNR, *signal-to-noise ratio*). Mieux encore, Gendron & Léna (1994) propose dans cette stratégie d'optimisation modale d'opérer séparément cette minimisation sur chaque mode commandé ϕ_i , obtenant ainsi un gain g_i pour chacun, permettant de garantir une variance du résidu minimale pour un RTC à intégrateur, sans modification structurelle de la loi de commande.

Cette méthode d'optimisation modale de la loi de commande, couplée à un choix judicieux du filtrage modal lors du calcul de **Rec**, fait encore référence aujourd'hui pour le contrôle des optiques adaptatives. Cette méthode atteint néanmoins ses limites pour des ASO à sensibilité variable (centroid gain), voire non-linéaires, tels que l'analyseur pyramide. Il est alors impossible d'obtenir une estimation en boucle ouverte du spectre de la turbulence, et la non-linéarité peut être – dans le meilleur des cas – modélisée par un multiplicateur arbitraire dans la boucle d'asservissement, mettant à mal l'analyse que j'ai conduite dans cette section.

J'ai proposé au cours de ma thèse une alternative à cette optimisation se basant exclusivement sur la télémétrie en boucle fermée ; l'étude des non-linéarités du PWFS sera traitée au chapitre 5, et je présenterai cette méthode au chapitre 6. J'ai également utilisé dans une partie de mes travaux une alternative au contrôle du gain en fonction du niveau de bruit, dont la performance est moindre mais dont l'implémentation, propre au PWFS, est très simple. Je présente cette technique dans la section suivante.

2.5.3 Contrôle du gain par suppression du bruit négatif

La technique d'optimisation modale de Gendron & Léna (1994) se heurte à quelques limites pour pouvoir être applicable à un PWFS. En effet, sa mise en œuvre requiert l'acquisition de mesures suffisamment précises en boucle ouverte, afin de mesurer le SNR sur chacun des modes considérés. Néanmoins, à cause de la dynamique limitée du PWFS, de la saturation du gradient et des effets de gain optique (chapitre 5), une telle mesure est impossible avec un PWFS.

Il est néanmoins souhaitable d'obtenir une atténuation du gain de boucle pour les asservissements sur faibles étoiles guides, afin de limiter la propagation du bruit à travers la boucle. Traditionnellement, les modes de hauts ordres portant le signal le plus faible sont progressivement filtrés alors que le SNR diminue, et le gain de boucle est abaissé pour les modes restants.

Cet effet peut être obtenu par seuillage du bruit négatif, une étape de pré-traitement des images de l'ASO ; cette étape s'insère en début de chaîne de traitement, après la correction de l'image par le fond et le flat field de la caméra, et avant la normalisation des quadrants $A[i], \dots, D[i]$.

Le signal reçu sur la caméra ne peut en théorie être que supérieur au niveau de fond, et seul le bruit aléatoire (j'en reparlerai section 2.6.2) qui s'ajoute aux pixels $b_q[i]$ ($q = A, B, C, D$) peut conduire à des valeurs de pixels négatives. Ceci est particulièrement problématique dans le cas des normalisations locales des mesures du PWFS à très faibles SNR, avec une probabilité importante d'obtenir des dénominateurs aberrants

dans l'équation 2.25. J'introduis donc un seuillage sur les pixels des images :

$$A[i](\text{seuillé}) := \max(A[i](\text{hors bruit}) + b_A[i], 0), \quad (2.54)$$

et de même sur les autres quadrants.

Les processus à l'origine du bruit font que les $b_q[i]$ sont décorrélés à travers les pixels, et toujours d'espérance nulle. Le seuillage limitant l'amplitude des pixels négatifs, le bruit de mesure résultant après seuillage

$$A[i](\text{seuillé}) - A[i](\text{hors bruit}) \quad (2.55)$$

est d'espérance positive, croissante jusqu'à atteindre la valeur de l'espérance de $\max(b_q[i], 0)$ alors que le SNR tend vers 0.

Dans le cadre d'observations utilisant de faibles étoiles guides, avec un SNR dans chaque pixel typiquement inférieur ou égal à 1, l'augmentation du niveau moyen des pixels induite par le seuillage produit une atténuation du signal – à travers l'augmentation moyenne du dénominateur de l'équation 2.25. Un effet comparable se produit quelque soit la notion de mesures du PWFS utilisée, même si les cartes de pentes $S_x[i]$, $S_y[i]$ ne sont pas explicitement calculées. Cette atténuation du signal introduit, sans intervention requise, une réduction effective du gain de boucle d'autant plus importante que le SNR est faible.

La caractérisation précise de l'effet de ce seuillage est non-triviale, en particulier sa dépendance modale, et je n'irai pas plus avant dans sa description mathématique. J'ai pu montrer à travers des simulations de bout-en-bout que l'atténuation effective du gain de boucle introduite par le seuillage conduisait, pour un faible effort, à une amélioration de la performance en régime de très faible flux, et ce en évitant d'avoir à filtrer de plus en plus de modes de la matrice de commande alors que le SNR se dégrade.

J'utiliserai ce seuillage du bruit négatif pour l'ensemble des résultats présentés aux chapitres 4 et 5. Cette méthode est rendue caduque par la technique d'optimisation automatique du gain modal que je présenterai au chapitre 6.

2.6 Budget d'erreur en optique adaptative

J'ai commencé, à travers la section 2.5.2, à mentionner l'impact sur la variance des résidus σ_{Res}^2 de certains paramètres, comme le gain ou le niveau de bruit dans les mesures.

De manière générale, la conception et la caractérisation des systèmes d'OA attache beaucoup d'importance à la détermination du *budget d'erreur* (Véran et al., 1997) : l'impact, en terme de variance du front d'onde résiduel, de différents paramètres, défauts ou limites du système. On suppose que la plupart des termes du budget d'erreur sont décorrélés ; il s'ensuit que les variances sont additives, donnant la variance de phase résiduelle totale sous la forme :

$$\sigma_{\text{Res}}^2 = \sum_{\text{postes d'erreur}} \sigma_i^2 \quad (2.56)$$

Je présente à travers cette section les principaux termes des budgets d'erreurs classiques, tout particulièrement ceux qui seront d'une utilité particulière à travers cette thèse.

2.6.1 Erreurs liées au dimensionnement

Erreur de fitting

L'erreur de fitting (ou de sous-modélisation) est le fruit de la résolution spatiale limitée du miroir déformable. On peut projeter tout front d'onde comme deux composantes, sur les modes du DM effectivement contrôlés et sur l'espace orthogonal :

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{DM}}(\mathbf{r}) + \phi_{\perp\text{DM}}(\mathbf{r}). \quad (2.57)$$

L'effet correctif du DM est toujours restreint à la seule première composante. Sous la statistique de Kolmogorov, il est possible de calculer l'espérance de l'erreur de fitting (Hudgin, 1977), pour un miroir à membrane continue à maillage carré :

$$\langle \sigma_{\text{fitt.}}^2 \rangle = 0.23 \left(\frac{d_{\text{DM}}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}. \quad (2.58)$$

Erreur d'aliasing

Celle-ci est liée à la résolution limitée de l'ASO. L'échantillonnage par les sous-ouvertures introduit un repliement (*aliasing*) des fréquences spatiales dans le domaine de Nyquist de l'analyseur (à l'image de la zone de correction du DM que j'ai présentée section 2.2.2). Les hautes fréquences du spectre de Kolmogorov – au delà de $f = \frac{1}{2d_{\text{WFS}}}$ – sont alors mesurées comme des basses fréquences. Rigaut et al. (1998) propose une expression pour un analyseur SH :

$$\langle \sigma_{\text{alias}}^2 \rangle = 0.08 \left(\frac{d_{\text{WFS}}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (2.59)$$

où d_{WFS} est la taille des sous-ouvertures (pour un PWFS, des pixels) projetée dans la pupille d'entrée. Néanmoins, nous avons vu que la sensibilité d'un analyseur pyramide aux hautes fréquences spatiales est constante, contrairement à un SH où elle augmente linéairement. Ceci conduit à un poids bien inférieur des mesures repliées pour l'analyseur pyramide ; de manière générale, il est acceptable pour un PWFS d'affirmer que :

$$\langle \sigma_{\text{alias}}^2 \rangle \text{ petit devant } \langle \sigma_{\text{fitting}}^2 \rangle. \quad (2.60)$$

2.6.2 Erreurs liées au système

Je reviens ici sur les deux termes que j'ai mis en avant dans l'équation 2.52, qui fait apparaître les effets, à travers l'asservissement, des résidus temporels de phase et de la propagation du bruit.

Erreur temporelle

L'erreur temporelle correspond au premier terme de l'équation 2.52, dont la variance intégrée s'écrit :

$$\sigma_{\text{tempo}}^2 = \int |h_{\text{Corr}}(\nu; g) \hat{\phi}_{\text{Atm}}(\nu)|^2 d\nu \quad (2.61)$$

Elle est donc uniquement affectée par le choix du gain de boucle et par les paramètres cachés dans h_{Corr} : latence du système et fréquence d'échantillonnage. C'est à cause de ce retard de boucle, associé à l'effet du bruit, que la correction calculée par le RTC, fût elle parfaite, ne peut être appliquée au bon moment, induisant au final une erreur sur le front d'onde corrigé. Greenwood (1977) propose une expression directe de ce terme d'erreur :

$$\sigma_{\text{tempo}}^2 = 0.243 \left(\frac{\bar{v}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \nu_{3\text{dB}}^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.62)$$

où \bar{v} est la vitesse apparente du vent moyennée sur les couches turbulentes (équation 1.23), et $\nu_{3\text{dB}}$ la fréquence de coupure à 3 dB de $h_{\text{Corr}}(\nu; g)$, recouvrant la dépendance à g , τ , et à la fréquence d'échantillonnage.

Erreur due au bruit

La mesure du front d'onde par l'ASO subit des variations aléatoires en plus du signal attendu. Ce bruit est considéré comme ayant deux origines : d'une part, la nature quantifiée des photons induit une distribution poissonnienne sur le nombre de photons arrivant dans un élément de surface pendant une certaine durée. D'autre part, le détecteur n'est pas sans défaut, ce qui induit un bruit électronique gaussien sur la mesure de la valeur de chaque pixel (on parle de bruit de lecture, RON pour *Read Out Noise*).

Les expressions analytiques de l'impact de ces deux termes sur la variance des mesures de gradient de phase ne sont pas proposées dans la littérature pour l'analyseur pyramide spécifiquement. Je propose ici les expressions issues de Rousset et al. (1987), adaptées à un PWFS modulé opérant dans l'approximation des faibles phases. Pour le bruit de photons :

$$\sigma_{\text{phot, pentes}}^2 = \frac{4\pi^2}{n_{\text{phot}}} \left(\frac{D}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right)^2 \left(\frac{d_{\text{WFS}}}{D} \right)^2 \quad (2.63)$$

où n_{phot} est l'espérance du nombre de photons par sous-ouverture par trame. Pour le bruit de lecture :

$$\sigma_{\text{RON, pentes}}^2 = 16\pi^2 \frac{\sigma_e^2}{n_{\text{phot}}^2} \left(\frac{D}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right)^2 \left(\frac{d_{\text{WFS}}}{D} \right)^2, \quad (2.64)$$

où σ_e^2 est la variance du bruit électronique, exprimée en photo-électrons au carré par pixel et par trame. Notons l'expression $\frac{D}{\lambda} r_{\text{Mod}}$: le rayon de modulation, en unité de $\frac{\lambda}{D}$,

ce qui correspond au ratio des largeurs à mi-hauteur de la PSF “modulée apparente” et d’une tache d’Airy.

Les expressions 2.63 et 2.64 portent sur la variance de chaque mesure échantillonnée de $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ou $\frac{\partial\phi}{\partial y}$, reconstruits à partir de l’expression 2.30. On suppose ces termes décorrélés entre toutes les sous-ouvertures et selon les deux axes, et on obtient alors le budget d’erreur en variance de phase en prenant en compte la propagation du bruit à travers le système :

$$\sigma_{\text{phot+RON, phase}}^2 = \text{Tr}(\mathbf{Rec}^T \cdot \mathbf{Rec}) \times (\sigma_{\text{phot, pentes}}^2 + \sigma_{\text{RON, pentes}}^2), \quad (2.65)$$

où Tr est la trace matricielle. À la différence de ce qui a été défini dans la section 2.5.1, la matrice de commande \mathbf{Rec} est pour l’équation 2.65 entendue comme incluant tous les pré-facteurs pour transformer directement des mesures de gradient en front d’onde⁹. Il convient de noter que l’expression 2.65 est cohérente avec l’analyse de sensibilité menée à la section 2.4.3. Si les formules 2.63 et 2.64 dépendent de r_{Mod} , cette effet est contrebalancé dans l’équation 2.65 par le contenu de la matrice de commande \mathbf{Rec} . On retrouve alors bien le résultat clé pour le PWFS : la propagation du bruit pour les fréquences spatiales bien au-delà des $\frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda}$ utilisés ne dépend pas de la modulation.

Le budget d’erreur global du bruit correspond au second terme de l’équation 2.52, correspondant à la propagation du bruit à travers la boucle, le bruit étant à spectre blanc :

$$\sigma_{\text{bruit}}^2 = \frac{1}{\nu_{\text{Ny}}} \int_{f=0}^{\nu_{\text{Ny}}} |h_{\text{Noise}}(\nu; g)|^2 \sigma_{\text{phot+RON, phase}}^2 d\nu, \quad (2.66)$$

où $\nu_{\text{Ny}} = \frac{1}{2T}$ est la fréquence de Nyquist de l’échantillonnage temporel.

Non-linéarité de l’ASO

Ce terme du budget d’erreur décrit de manière générale l’erreur de reconstruction commise lorsque l’on applique la méthode linéaire décrite à la section 2.5.1 à un ASO non-linéaire. L’estimation du front d’onde est alors erronée, avec :

$$\mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Atm}}) - \mathbf{Pyr}(\phi = 0) \neq \mathbf{dPyr} \cdot \phi_{\text{Atm}} \quad (2.67)$$

ce qui induit un terme d’erreur σ_{nonlin}^2 à prendre en compte.

Cette erreur est particulièrement difficile à modéliser, a fortiori pour l’analyseur pyramide. Au premier ordre, nous verrons au chapitre 5 qu’il est possible de modéliser cette erreur en écrivant :

$$\mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Atm}}) - \mathbf{Pyr}(\phi = 0) = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{dPyr} \cdot \phi_{\text{Atm}} \quad (2.68)$$

9. Et non pas comme sa définition habituelle de transformer des pentes normalisées $S_x[i]$, $S_y[i]$ en commandes du DM, soit modales, soit sur les actionneurs.

où la matrice décrivant la non-linéarité $\mathbf{\Lambda}$ est – sur une base appropriée – à diagonale dominante et stable avec l'évolution de la turbulence. La mise à jour de la reconstruction avec ce modèle au premier ordre permet de réduire de manière importante σ_{nonlin}^2 , sans pour autant que ce poste d'erreur soit entièrement maîtrisé.

2.6.3 Erreurs pour le canal scientifique

Jusqu'à présent dans ce chapitre, je me suis intéressé à l'OA et à son budget d'erreur uniquement du point de vue de l'ASO. Néanmoins, ce n'est finalement pas la qualité du front d'onde vu par l'analyseur qui importe, mais la qualité sur l'instrument scientifique au profit duquel l'OA opère ! Deux termes d'erreur supplémentaires sont alors à prendre en compte.

Aberrations non-communes

L'ensemble des optiques présentes entre la lame séparatrice et d'un côté l'ASO, de l'autre l'imageur scientifique induisent des aberrations différentielles entre ces deux éléments. On parle alors d'aberrations non-communes (NCPA, *Non-common path aberrations*) :

$$\phi_{\text{NCPA}} = \phi_{\text{Res}} - \phi_{\text{Imageur}}. \quad (2.69)$$

Ces aberrations sont statiques ou quasi-statiques dans le temps, peuvent fluctuer avec la température, les déformations mécaniques de long terme, ou la position d'optiques mobiles. Après calibration de ϕ_{NCPA} , en général par des techniques de diversité de phase (Gonsalves, 1982), la consigne d'asservissement de la boucle est modifiée pour faire tendre ϕ_{Res} vers ϕ_{NCPA} . Néanmoins, une caractérisation imparfaite ou encore une composante orthogonale à l'espace du DM dans ϕ_{NCPA} peuvent venir ajouter un terme d'erreur supplémentaire σ_{NCPA}^2 à notre budget d'erreur.

Anisoplanétisme

L'objet cible de l'imageur n'est pas nécessairement l'étoile guide utilisée pour asservir l'OA. Le cylindre de turbulence intercepté par la ligne de visée de l'ASO n'est alors pas identique à celui pour l'imageur, comme représenté sur la figure 2.17.

Cette turbulence, non vue et non corrigée par l'ASO, introduit un terme d'erreur

$$\sigma_{\text{aniso}}^2 = \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (2.70)$$

où θ est l'angle séparant les lignes de visée et θ_0 l'angle d'isoplanétisme introduit par Fried (1982). La SCAO est par nature impuissante à influencer sur l'effet d'anisoplanétisme, qui est entièrement défini par le profil turbulent et l'angle θ . Je m'intéresserai à travers cette thèse uniquement aux performances de l'OA dans l'axe, à $\theta = 0$.

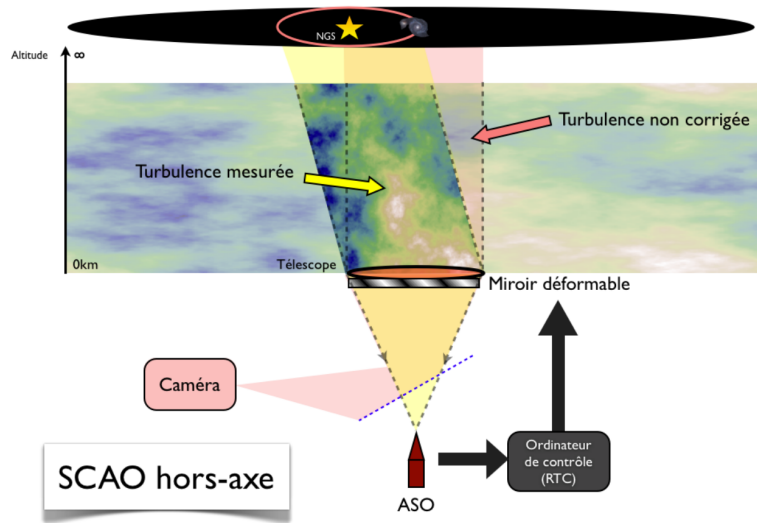


FIGURE 2.17: Illustration de l'origine de l'anisoplanétisme : en altitude, la turbulence corrigée par l'OA ne correspond pas à celle vue par le canal scientifique. *Crédit : F. Vidal*

2.7 Au delà de la SCAO : des OA plus complexes

L'effet d'anisoplanétisme pose une limite fondamentale à la performance possible avec une SCAO : l'astronome est limité à des sources se trouvant typiquement à 1' de distance au plus des étoiles suffisamment brillantes pour asservir la SCAO. Même s'il y a beaucoup d'étoiles, la plupart ne sont pas assez brillantes ; la surface du ciel observable avec une SCAO représente – selon le système considéré – de l'ordre de 0.1% à 1% du ciel (voir la table 2 de [Rigaut & Gendron \(1992\)](#) pour quelques chiffres).

2.7.1 Couverture de ciel et lasers

Pour pallier à ce problème, on utilise des lasers pour pouvoir créer une source lumineuse ([Foy & Labeyrie, 1985](#)) dans n'importe quelle direction, au voisinage d'une cible d'intérêt.

La technique la plus utilisée aujourd'hui est celle des lasers sodium : le faisceau, de longueur d'onde 589 nm, vient exciter les atomes de sodium d'une couche naturelle de l'atmosphère terrestre située à environ 90 kilomètres d'altitude. En se désexcitant, les atomes ré-émettent de la lumière, offrant ainsi une source lumineuse pour asservir l'OA.

Cette technique très prometteuse est actuellement utilisée dans les grands observatoires ([Wizinowich et al., 2004](#); [Rigaut et al., 2014](#); [Kolb et al., 2017](#)), mais elle n'est pas sans quelques limitations spécifiques :

- À cause de la distance finie à laquelle se trouve "l'étoile laser", la turbulence interceptée n'est pas un cylindre, mais un cône. La différence par rapport au

cylindre de turbulence intercepté par la lumière d'une étoile naturelle est d'autant plus importante que la taille du télescope augmente. Cet effet introduit des erreurs supplémentaires, en particulier pour une turbulence en altitude importante (Fried & Belsher, 1994)

- Il y a une ambiguïté intrinsèque entre la défocalisation et l'altitude moyenne, variable, de la couche de sodium
- Les modes tip-tilt ne peuvent être déterminés. Le laser subit à la montée un tip-tilt inconnu qui perturbe la mesure du tilt subi à la redescende (Rigaut & Gendron, 1992).
- L'étoile laser est un objet volumique. Sur des grands télescopes utilisant un Shack-Hartmann, cela crée des spots très allongés, induisant des problématiques supplémentaires pour le calcul du centre de gravité (Gilles & Ellerbroek, 2006).

Dans tout les cas, au moins une étoile naturelle doit être utilisée pour la mesure des trois premiers modes uniquement : tip-tilt et défocalisation. En revanche, elle peut être bien plus distante de l'axe de visée que la limite imposée à la SCAO par l'anisoplanétisme, et beaucoup moins brillante qu'une étoile utilisée pour la mesure de tous les modes.

2.7.2 D'autres modes d'OA

Si l'étoile laser est une solution apparente au problème de couverture de ciel dont souffre la SCAO, les termes d'erreurs supplémentaires introduits impactent considérablement la performance par rapport à une étoile naturelle (Bardou, 2018).

De plus l'utilisation d'une unique étoile laser ne permet pas de satisfaire un second besoin : observer simultanément de nombreux objets d'intérêt à travers un unique, grand champ d'observation. Si l'anisoplanétisme permet des observations jusqu'à quelques dizaines de secondes d'arc de l'axe, les grands télescopes actuels ont des champs dépassant la minute ou la dizaine de minutes.

Pour répondre à ce besoin, on assiste à l'émergence de techniques d'OA dites "grand champ". Elles recourent à plusieurs ASO, visant chacun sa propre étoile laser ou naturelle, et possiblement à plusieurs DM.

L'utilisation d'étoiles multiples permet de couvrir un plus grand volume turbulent, correspondant à des objets partout dans le champ. L'utilisation de multiples étoiles laser permet également de limiter l'effet de cône. Une estimation en volume de la turbulence peut alors être implicitement reconstruite en utilisant des techniques tomographiques (Tallon & Foy, 1990). On peut alors utiliser cette information quasi-complète sur le volume turbulent pour adapter la correction aux besoins.

Laser Tomography Adaptive optics (LTAO)

En LTAO, plusieurs étoiles laser sont utilisées pour limiter l'impact de l'effet de cône individuel de chacune (Baranec et al., 2006). L'intersection de l'ensemble des

cônes de turbulence perçus permet alors, par reconstruction tomographique, de retrouver le front d'onde associé au cylindre de turbulence dans la direction de l'objet d'intérêt. Un ASO est utilisé par étoile laser, chacun en aval d'un unique DM corrigeant la turbulence pour l'objet d'intérêt scientifique.

Si cette technique n'est pas une OA à grand champ, elle permet néanmoins d'étendre les performances attendues en SCAO à une couverture de ciel quasi-totale.

Ground layer adaptive optics (GLAO)

En GLAO, on utilise un unique DM pour corriger uniquement la couche turbulente proche du sol (Rigaut, 2002; Milton et al., 2008), qui domine le profil turbulent. La qualité de correction est limitée, ne considérant pas la turbulence en altitude, mais a l'avantage d'être très uniforme à travers le champ.

Multi conjugate adaptive optics (MCAO)

La GLAO peut être étendue à des couches turbulentes en altitude. On utilise alors plusieurs miroirs déformables, conjugués à différentes altitudes et corrigeant chacun les couches turbulentes correspondantes. On parle alors de MCAO (Ellerbroek, 1994; Beckers, 1989), dont je montre le principe général sur la figure 2.18, dans sa version *star-oriented* (Ragazzoni et al., 2000a).

Multi object adaptive optics (MOAO)

En MOAO, l'ensemble du champ n'est pas corrigé, mais l'instrument dispose de plusieurs voies scientifiques, chacune munie de son propre DM. Le contrôle de chaque DM est réalisé à partir d'un algorithme tomographique, qui se base sur les informations d'analyseurs (étoiles naturelles et laser) répartis dans le champ et mutualisés entre tous les DM. On obtient alors une correction comparable à la SCAO, dans plusieurs zones du champ simultanément (Hammer et al., 2002; Gendron et al., 2011), augmentant ainsi les possibilités d'imagerie et l'efficacité d'un télescope à grand champ.

2.8 Futur immédiat en OA : les ELT et leurs défis

J'ai à travers ce chapitre détaillé les principes généraux de l'OA et des principaux composants et algorithmes qui lui sont nécessaires. Je me penche maintenant sur les développements actuels et à venir de la discipline. Ces nouveaux développements sont essentiellement motivés par un effet d'échelle : depuis le début des années 2000 se prépare un important bond dans la taille des télescopes : l'arrivée des télescopes de plus de 20 mètres de diamètre, qui doit voir son terme dans les années 2025-2030.

Trois projets sont actuellement en cours :

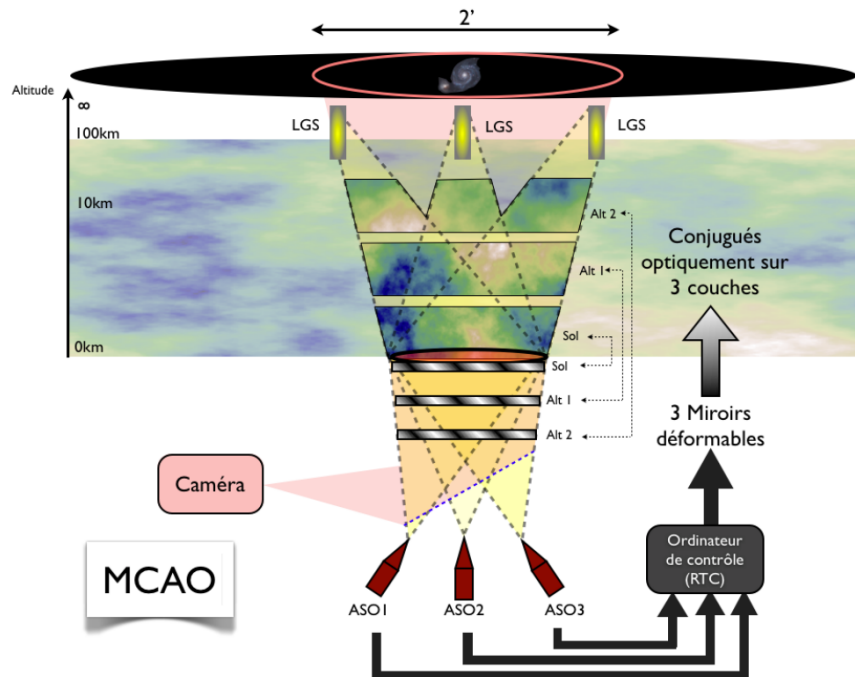


FIGURE 2.18: Principe de fonctionnement de la MCAO, ici avec trois DM appliquant chacun une correction à une altitude donnée, et trois analyseurs laser. *Crédit : F. Vidal.*

- L'Extremely Large Telescope (ELT¹⁰) de l'observatoire européen austral (ESO) (Tamai et al., 2016) – d'un diamètre de 39 m.
- Le Thirty Meter Telescope (TMT) (Liu & Sanders, 2018) – $D = 30$ m
- Le Giant Magellan Telescope (GMT) (Fanson et al., 2018) – $D = 24$ m.

Le plus grand télescope optique au monde actuellement, le Gran Telescopio Canarias, a un miroir primaire de 10.4 m de diamètre. Le passage aux ELT constitue donc un bond conséquent en terme de surface optique collectrice. À cet agrandissement se voient naturellement associées un grand nombre de mises à l'échelle technologiques à travers l'ensemble des étapes de conception du télescope, de ses instruments, et de leurs optiques adaptatives. Ceci affecte presque tous les domaines d'ingénierie : mécanique, optique, algorithmie, moyens informatiques, logistique, etc.

Le groupe d'OA du LESIA est membre d'un consortium travaillant à la préparation de l'OA de l'instrument MICADO pour l'ELT européen. C'est à travers cet exemple que je vais maintenant présenter les problématiques de l'OA sur les ELT.

10. Qui a donné son nom à cette classe de télescopes. "L'ELT" désigne donc ce télescope uniquement, alors que "les ELT" les désigne tous les trois.

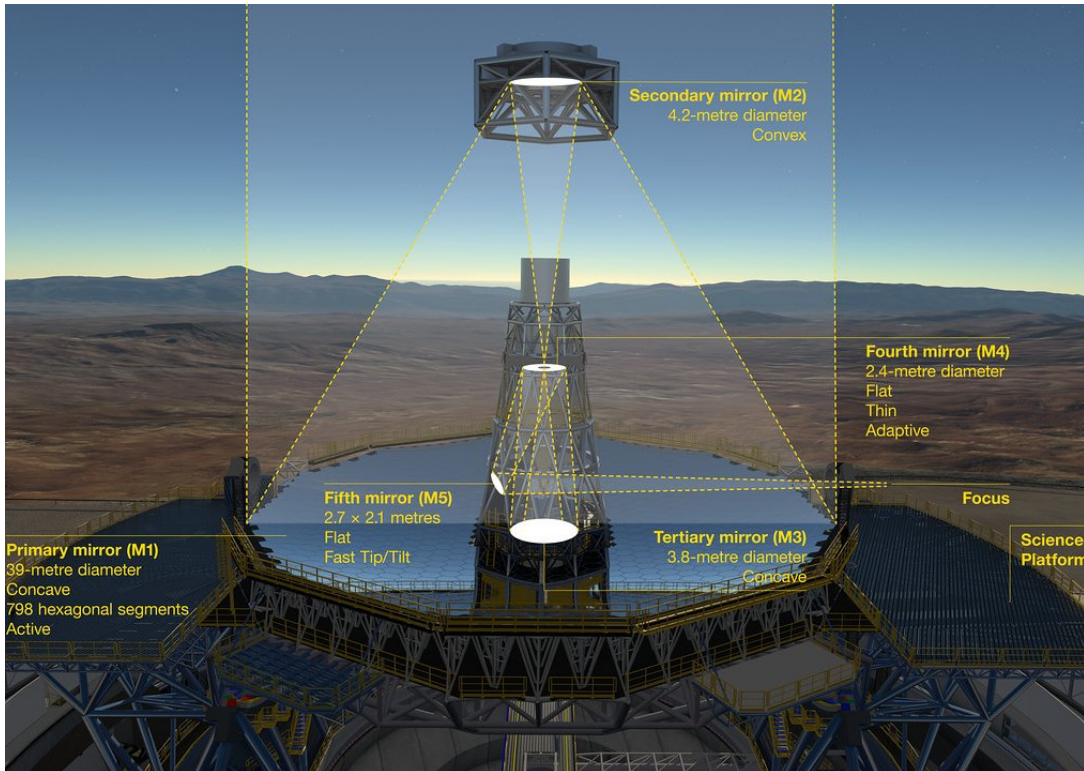


FIGURE 2.19: Design optique des 5 miroirs de l'ELT. Le miroir secondaire est suspendu au-dessus de M1 par une structure à six bras non représentée. L'ensemble de la structure des miroirs est orientable, et est abrité par un dôme culminant à 74 m du sol, et de 86 m de diamètre. *Crédit : ESO.*

2.8.1 L'ELT de l'ESO

L'ELT (vue d'artiste du design optique sur la figure 2.19) sera, lors de sa première lumière en 2025, le plus grand télescope optique du monde. Son design optique à cinq miroirs, avec une surface collectrice de lumière de $1\,116\text{ m}^2$, permettra de délivrer un faisceau gravitairement invariant aux instruments sur les plate-formes Nasmyth, avec un champ de près de 10° .

Pour parvenir à de telles dimensions, des spécificités technologiques sont mises en place : le miroir primaire M1 est composé de 798 miroirs hexagonaux de 1.45 m de taille, dont les supports sont contrôlés et asservis pour maintenir la structure d'ensemble du réflecteur à des précisions nanométriques. Un miroir déformable (M4) est directement intégré dans le design optique du télescope. Légèrement elliptique et d'un grand axe de 2.5 m, il est constitué de six pétales indépendants, comprenant au total 5 319 actionneurs répartis selon un maillage hexagonal (Vernet et al., 2014). Il renvoie la lumière sur un miroir tip-tilt rapide (M5), qui délivre le faisceau au foyer Nasmyth. Pour les modes d'optique adaptative utilisant une tomographie laser, six lasers sont directement intégrés à la structure du télescope.

Les instruments doivent donc travailler avec des dispositifs de correction de front d'onde situés en amont ; le design actuel de l'ELT n'inclut pas de source de calibration, mettant en avant une problématique de calibration car les instruments ne verront M4 et M5 que sous la lumière des étoiles. Les ELT sont donc à l'origine de réflexions sur les stratégies d'étalonnage des OA directement sur le ciel (Héritier, 2018).

Par ailleurs, le nombre élevé d'actionneurs, associé à une résolution et un échantillonnage élevé des ASO, amène des défis de mise à l'échelle pour les RTC des OA et les systèmes de contrôle-commande. Le nombre important de points de mesure et d'actionneurs implique également une propagation de bruit plus importante par rapport à des systèmes sur des télescopes plus petits ; il convient donc d'utiliser les ASO et détecteurs les plus sensibles possible.

La taille du champ est également la cause de nombre de défis opto-mécaniques : les relais optiques doivent alors intégrer des optiques de taille métrique !

L'ELT embarquera trois instruments de première lumière, répondant à diverses problématiques scientifiques (imagerie directe d'exoplanètes, formation stellaire, cosmologie, trous noirs supermassifs, etc.), et incluant divers modes d'imagerie et de spectroscopie, supportés par plusieurs systèmes d'OA en fonction des besoins : MCAO, LTAO, SCAO, ...

2.8.2 MICADO et sa SCAO

L'instrument MICADO (Multi-AO Imaging Camera for Deep Observation, Davies et al. (2018)) est un des trois instruments de première lumière de l'ELT. Il s'agit d'un spectro-imageur grand champ ($50 \times 50''$) dans le proche infrarouge (900-2500 nm), délivrant au choix des images sur l'ensemble du champ ou des images très haute résolution sur un champ plus restreint ; le mode spectroscopique permettra d'obtenir des spectres d'objets compacts.

MICADO se voit supporté par deux optiques adaptatives : le banc MAORY (Multi-conjugate Adaptive optics RelaY, Diolaiti et al. (2016)), fournissant une correction en MCAO, et une SCAO (Clénet et al., 2019), qui sera disponible pour la première lumière. Je montre les designs de l'ensemble posé sur la plateforme Nasmyth de l'ELT sur la figure 2.20.

La SCAO reposera sur un analyseur pyramide en lumière visible (596-850 nm), avec un échantillonnage de 96×96 sous-ouvertures, utilisant un détecteur à faible bruit 240×240 pixels. Le PWFS contrôlera les miroirs M4 et M5 à une fréquence de 500 Hz. L'objectif est de délivrer à l'imageur MICADO un faisceau corrigé à – par exemple – 70% de Strehl en bande K ($2.2 \mu\text{m}$) pour des conditions de seeing médianes, à 30 deg du zénith, et pour des étoiles de magnitude 12 ou moins. La SCAO sera utilisée pour l'imagerie en champ réduit, dans la limite imposée par l'anisoplanétisme.

Les spécifications pour la SCAO de MICADO ont donc amené, pour raisons de sensibilité supérieure, au choix d'un analyseur pyramide. C'est ce choix de design qui a conduit mon équipe d'accueil au LESIA à mener une importante activité de prototypage – logiciel et matériel – autour du PWFS, dans laquelle s'inscrit cette thèse.

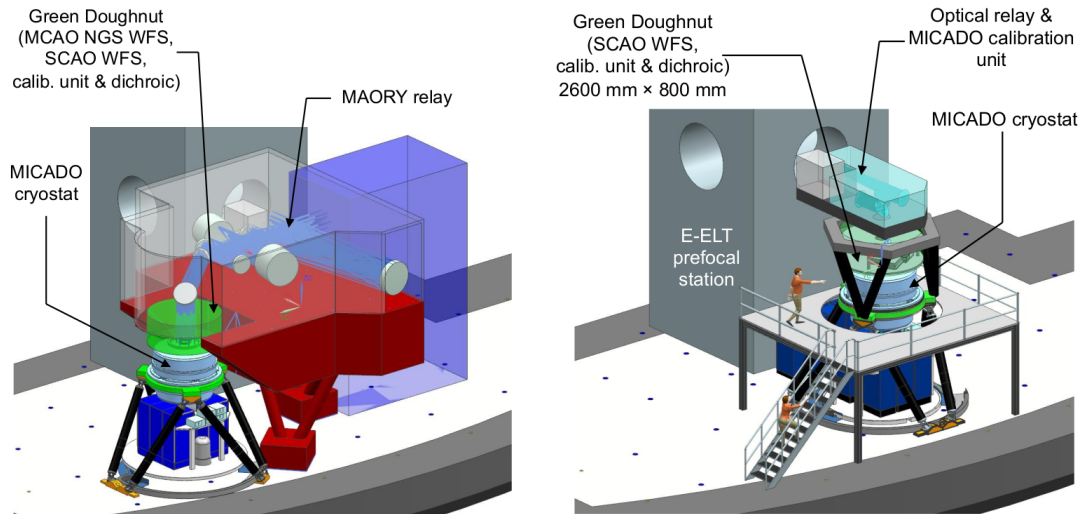


FIGURE 2.20: Vue d'ensemble de l'instrument MICADO sur la plate-forme Nasmyth de l'ELT, dans sa configuration MCAO avec le relai MAORY (gauche) et dans sa configuration SCAO autonome (droite). L'instrument scientifique se situe dans le cryostat (bleu ciel) supporté par l'hexapode (en noir), au dessus duquel duquel repose la SCAO (tore vert à gauche). *Crédit : Y. Clénet.*

Cette activité de recherche a conduit à la mise en place d'un banc de démonstration d'OA à très hauts ordres avec un PWFS, auquel je consacre le chapitre suivant.

Deuxième partie

PYRCADO : Mise en œuvre en laboratoire d'un analyseur pyramide à très hauts ordres

PYRCADO : Un démonstrateur de pyramide, taille ELT

PYRCADO (PYRamid [wavefront sensor prototype] for micADO) est le démonstrateur d’analyseur pyramide pour l’OA à très hauts ordres installé au LESIA, développé dans le cadre des activités de prototypage pour la SCAO de l’instrument MICADO. Dans ce chapitre, je présente l’expérience, les caractérisations que j’ai effectuées et les procédures d’étalonnage que j’ai établies, afin d’assurer le bon fonctionnement d’une OA avec PWFS.

Sommaire

3.1	Introduction	78
3.1.1	Présentation du banc	78
3.1.2	L’analyseur PYRCADO	80
3.2	Étalonnage de l’ASO	82
3.2.1	Preliminaires	83
3.2.2	Positionnement des quadrants	84
3.2.3	Déplacement volontaire des quadrants	86
3.2.4	Déplacement thermique des quadrants	87
3.3	Étalonnage du SLM	88
3.3.1	Référencement de la pupille	89
3.3.2	Caractérisation du saut de phase	92
3.3.3	Non-linéarité en profondeur	93
3.3.4	Temps de montée	96
3.3.5	Génération d’écrans de phase SLM	97
3.4	Étalonnage du miroir de modulation	97
3.4.1	Fréquence d’oscillation	100
3.4.2	Phasage des canaux	105
3.4.3	Amplitude de modulation	107
3.5	Matrice d’interaction et premières mesures	109
3.5.1	Paramètres de l’OA de PYRCADO	109
3.5.2	Mesure de la matrice d’interaction	110
3.6	Fermeture de boucle	114

3.1 Introduction

L'expérience PYRCADO a été conçue et assemblée en 2014-2015, dans le cadre de la montée en puissance de l'équipe d'optique adaptative du LESIA sur l'instrument MICADO (section 2.8.2). Le démonstrateur PYRCADO ambitionne de multiples objectifs, de la capacité de fabrication de la mécanique et des pièces optiques, jusqu'à la mise en œuvre pratique d'un démonstrateur de PWFS à très hauts ordres.

PYRCADO a été intégré sur le banc SÉSAME (voir par exemple Vidal (2009) pour plus de détails), conçu dans les années 2000 et précédemment utilisé pour les premières démonstrations de MOAO en laboratoire. Depuis cette époque, les possibilités techniques multiples du banc SÉSAME sont mises à profit pour accueillir périodiquement des expériences et démonstrateurs d'OA hôtes.

3.1.1 Présentation du banc

Je présente dans cette section les différents éléments du train optique du banc SÉSAME, avec en bout de chaîne les démonstrateurs d'analyseurs pyramide PYRCADO et SAPHIR (Chemla et al., 2019). Ce dernier est un démonstrateur de PWFS achromatique, à surfaces réfléchissantes donc sans réfractions dans l'ASO, avec un dimensionnement identique à celui de PYRCADO. Je représente le train optique mis en œuvre pour l'ensemble de l'expérience sur la figure 3.1.

Un ensemble de sources est disponibles ; pour les expériences présentées dans ce chapitre, j'utilise uniquement un laser à 633 nm, formant une source ponctuelle après passage dans un pinhole de 20 μm de diamètre. Un premier plan pupille est formé après deux réflexions permettant d'aligner les axes optiques des sources et de l'ensemble en aval. Dans ce premier plan pupille se trouve le SLM (*Spatial Light Modulator*), placé immédiatement derrière un polariseur. Ce dispositif, que j'aborderai plus en détail à la section 3.3, permet d'introduire par contrôle numérique des fronts d'onde à haute résolution à introduire dans l'expérience et à corriger.

Le faisceau traverse ensuite la partie principale du train optique, et vient intercepter un miroir plan de 50 mm définissant la pupille de l'ensemble. Ce miroir est monté sur une monture tip-tilt (MTT) à grande course (± 4 mrad) qui est utilisée pour les étalonnages et dans la boucle d'OA.

Ensuite, trois lames séparatrices à faible réflexion viennent prélever une partie du faisceau, dirigées dans trois voies auxiliaires. L'une accueille en permanence un SH 14 \times 14, servant d'ASO de référence à toutes fins utiles. Les deux autres offrent des foyers ouverts à $f/17$ et accueillent les expériences hôtes du banc SÉSAME.

Nous sommes alors au foyer intermédiaire $f/17$ de la voie centrale, en transmission depuis la pupille ; à partir d'ici, nous rencontrons les éléments propres à PYRCADO. Une séparatrice pelliculaire prélève 5% du faisceau, qui à travers un objectif de microscope vient former un foyer à $f/110$ sur une caméra. Celle-ci est l'imagerie principale de PYRCADO ; elle ne sera néanmoins pas utilisée dans ce chapitre.

En aval du foyer, une nouvelle pupille de diamètre 10 mm est formée sur un miroir

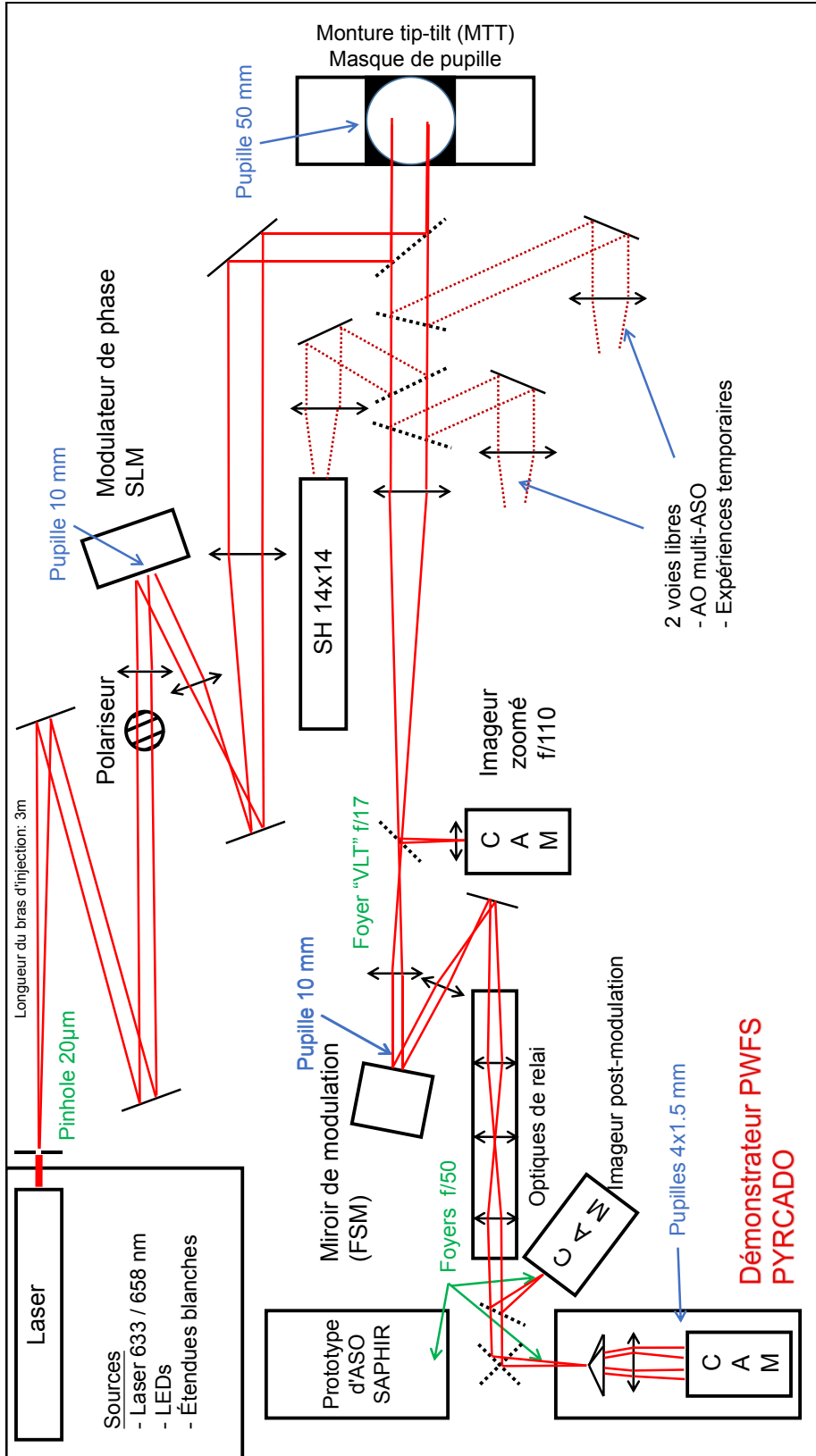


FIGURE 3.1: Schéma optique d'ensemble du banc SÉSAME, avec les démonstrateurs PYRCADO et SAPHIR (Chemla et al., 2019) positionnés dans la partie inférieure gauche. Le détail du train optique et la définition des différents acronymes est données dans le texte de la section 3.1.1.

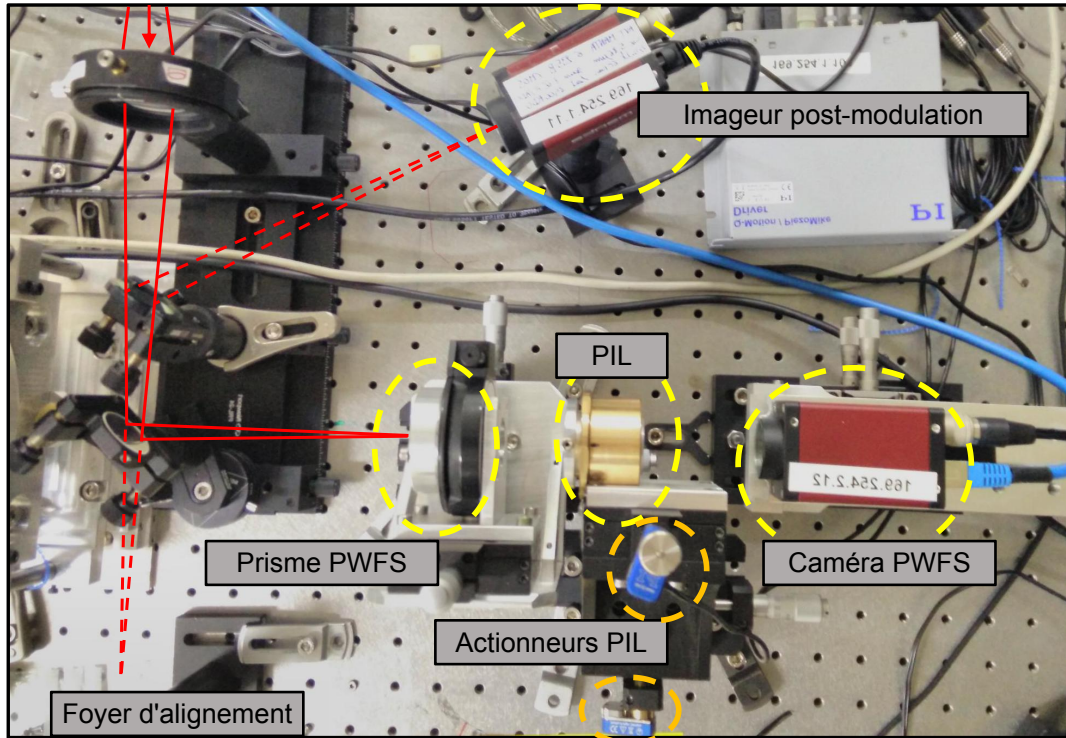


FIGURE 3.2: Photographie du démonstrateur d'analyseur pyramide PYRCADO. De gauche à droite : monture du prisme pyramidal, support motorisé de la lentille d'imagerie de pupille, et caméra d'acquisition de l'ASO.

oscillant (FSM, *Fast Steering Mirror*), qui permet d'assurer la modulation du PWFS. Je présenterai le FSM, son contrôleur, et les étalonnages effectués dans la section 3.4.

Un relai optique permet d'adapter, selon des configurations pré-calculées, l'ouverture numérique du faisceau de $f/30$ jusqu'à $f/150$, sans modifier les conjugaisons des plan pupilles et focaux. J'utiliserai ici une configuration $f/50$.

Un seconde séparatrice pelliculaire vient placer un foyer sur une caméra d'imagerie. Cette caméra, post-modulation, est d'une utilité critique pour les intégrations, les étalonnages et de manière générale toutes les opérations de diagnostic de PYRCADO, comme nous le verrons à travers ce chapitre.

En transmission de cette pelliculaire, un miroir orientable à deux positions vient renvoyer le dernier foyer sur le sommet du prisme pyramidal d'un des deux prototypes de PWFS installés, dont le démonstrateur PYRCADO.

3.1.2 L'analyseur PYRCADO

L'opto-mécanique de l'analyseur PYRCADO (voir photo figure 3.2) est composée de trois montures indépendantes, permettant une latitude maximale pour les positionnements et alignements des trois modules du bloc PWFS :

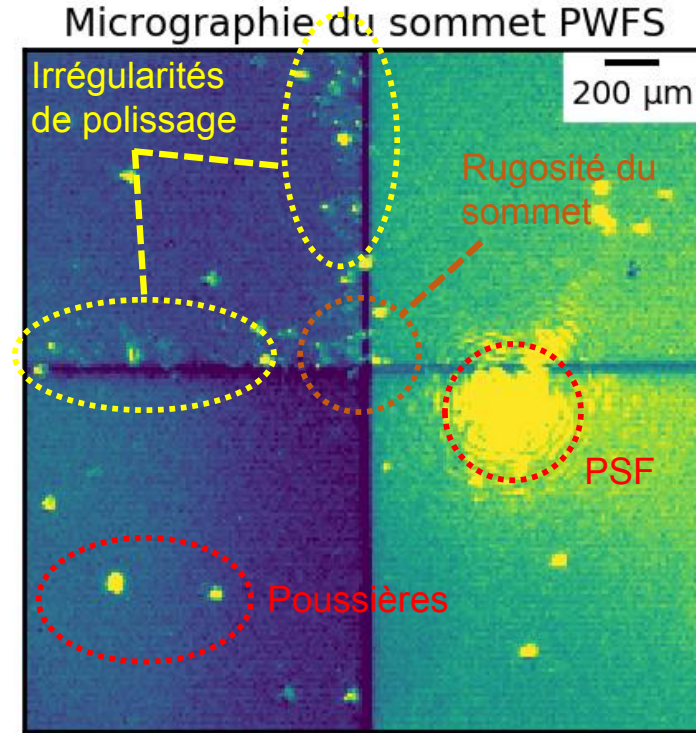


FIGURE 3.3: Micrographie optique du plan focal à travers le prisme pyramidal de PYRCADO, permettant d'illuminer les défauts du verre, et de mettre en valeur les discontinuités entre surfaces réfractrices. Les défauts sont concentrés le long des arêtes de la face supérieure gauche, probablement la dernière à avoir été polie.

- le prisme pyramidal,
- la lentille d'imagerie de pupille (PIL, *Pupil Imaging Lens*), dont la monture est munie d'actionneurs micrométriques contrôlables à distance. Il s'agit d'un doublet achromatique de focale 75 mm.
- La caméra du PWFS, sur laquelle se forment les quatre quadrants, spécifiés pour des diamètres de 1.5 mm à $f/50$.

Prisme pyramidal

Le prisme pyramidal est spécifié pour des dioptries induisant une déviation de $2^{\circ}39'$ par rapport à l'axe optique, avec une répétabilité de $5''$ entre les différentes faces. Les mesures effectuées relèvent des déviations comprises entre $2^{\circ}39'55''$ et $2^{\circ}39'59''$ (Buey et al., 2016). En conséquence, les centres des quadrants subissent des translations jusqu'à $2 \mu\text{m}$, relativement à leur positionnement idéal sur un carré de 3.84 mm de côté, valeur prévue par rapport à la longueur focale effective de la PIL.

Un défaut de sommet ainsi qu'une épaisseur des arêtes d'environ $15 \mu\text{m}$ – soit $1.2 \frac{\lambda}{D}$ – est estimée à partir de la micrographie montrée sur la figure 3.3, ainsi que par mesure

Table 3.4: Caractéristiques des caméras utilisées sur PYRCADO. *Sources : documentation constructeur et configurations/caractérisations internes.*

Caractéristiques des caméras		
Caméra	PWFS et image science	Post-modulation
Fabricant	Allied Vision	
Modèle	Manta G-235	Prosilica GT1380
Capteur	CMOS	CCD
Shutter	Global	
Interface	Gb Ethernet (RJ45)	
Taille des pixels	5.86 μ m	6.45 μ m
Résolution (pleine)	1936 \times 1216	1360 \times 1024
	200 \times 200 en	
Résolution (utilisée)	binning \times 4 (PWFS)	1024 \times 1024
	1024 \times 1024 (Imageur)	
Profondeur	12 bits	12 bits
Rendement quantique (à 633 nm)	53%	42%
Bruit de lecture	7.2 e ⁻	13.3 e ⁻
Dynamique	73.0 dB	60.9 dB

de l'intensité réfractée dans les différents quadrants (je décrirai le procédé plus avant dans la section 4.1.1). On anticipe donc une valeur minimale de modulation de 3 à 4 $\frac{\lambda}{D}$ pour parvenir à obtenir une réponse localement linéaire de l'ASO. Je présenterai en détail au chapitre 4 l'impact des défauts de sommet et d'usinage des plans de réfraction, ainsi que les méthodes de contrôle pour circonvier à ces défauts ; cette analyse sera basée sur l'expérience acquise lors des tests du prisme de rechange fourni par le fabricant (j'en reparlerai section 4.1), avec un défaut de sommet de quelques 80 μ m.

Caméras

Les caractéristiques principales des trois caméras – imageurs principal et post-modulation, et ASO – de PYRCADO sont résumées dans la table 3.4. Nous faisons le choix d'utiliser des caméras disponibles sur étagère, malgré une performance en terme de bruit notablement moins bonne que des caméras scientifiques. Néanmoins, les photons ne manquent pas sur l'expérience : les durées d'exposition sont choisies par rapport à la limite dynamique et jamais en fonction du niveau de détection.

3.2 Étalonnage de l'ASO

Après l'alignement préliminaire du train optique, nous pouvons commencer les étalonnages de PYRCADO. À ce stade de l'alignement, nous avons déjà veillé à bien

établir les conjugaisons de pupilles entre le SLM, la MTT sur laquelle se trouve la pupille, le FSM, et la caméra PWFS ; on s'assure aussi de la cohérence mutuelle en tip-tilt et focus des trois caméras.

Nous pouvons alors procéder à l'étalonnage des différents composants contrôlables du banc, à commencer par l'analyseur. La première étape est d'identifier avec précision les positionnements des quatre quadrants A , B , C , $D(\mathbf{r})$ sur le CCD, pour obtenir la correspondance des sous-ouvertures (voir section 2.4.2) et être en mesure de calculer l'appariement des pixels pour le calcul des cartes de pentes.

À ce stade, le FSM n'est pas étalonné, et il n'est donc pas possible d'obtenir des images modulées convenablement.

3.2.1 Préliminaires

Images 4-tilts

Pour éclairer les quatre quadrants séparément, je génère des images synthétiques à l'aide de la MTT. Je pilote la MTT de sorte à introduire les déplacements angulaires :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \pm_x K \\ \pm_y K \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

où K est choisi suffisamment grand pour que l'intégralité du flux de la PSF soit réfractée dans un unique quadrant. On obtient ainsi quatre images de l'ASO I_A, \dots, I_D dans lesquelles, par exemple pour I_A :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= P(\mathbf{r}) \\ B(\mathbf{r}) &= C(\mathbf{r}) = D(\mathbf{r}) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $P(\mathbf{r})$ est la fonction d'illumination de la pupille. Pour chacune de ces images, les compensations habituelles de soustraction du fond et de normalisation par le flat field sont effectuées.

J'appelle image 4-tilts I_{4t} la somme des quatre I_A, \dots, I_D , dans laquelle on a idéalement :

$$A(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}) = C(\mathbf{r}) = D(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

c'est à dire qu'on observe quatre translatées identiques de la fonction d'illumination de la pupille, sans effet des aberrations de phase. J'utiliserai cette technique de nombreuses fois dans les premières étapes de la procédure d'étalonnage.

Ajustement des expositions

Les premières images 4-tilts permettent d'ajuster le flux lumineux, et par suite de choisir la durée d'exposition du PWFS pour l'expérience. Il convient de s'assurer que l'image 4-tilts ne dépasse pas la limite de linéarité de la caméra, du moins sur presque toute la surface.

Pour PYRCADO, j'opte pour une durée de 8 000 μs . La limite de fréquence d'acquisition en résultant est de 83 Hz seulement pour 200×200 pixels, les caméras ne permettant pas l'exposition et le transfert simultanés. L'expérience n'a néanmoins pas vocation à fournir une démonstration temps-réel; cette limite supérieure est satisfaisante, et par ailleurs ne sera pas limitante par rapport au temps nécessaire pour agir sur le SLM (voir section 3.3).

Sélection des pixels

La sélection des pixels valides est une étape importante pour mettre en œuvre un PWFS. C'est cette sélection qui permet de déterminer quels pixels du détecteurs définissent les quadrants $A[i], \dots, D[i]$, puis permet d'apparier quatre à quatre les pixels pour calculer, si nécessaire, les cartes de pentes $S_x[i]$ et $S_y[i]$.

Je procède ici par seuillage à 20% de son maximum d'une image 4-tilts à la durée d'exposition choisie, pré-traitée par : soustraction du dark, normalisation du flat field, et lissage gaussien de FWHM 1 px. Ce filtrage permet d'éliminer certains artefacts, dans des cas comme sur PYRCADO où l'illumination dans la pupille est inhomogène. Le seuil de 20% est la variable d'ajustement préférentielle en fonction des fluctuations d'illumination dans la pupille, pour obtenir le résultat souhaité en bord de pupille, et pour éviter dans les cas extrêmes l'apparition de trous au sein des quadrants.

Ensuite, il convient, si l'on souhaite utiliser les cartes de pentes, de rendre les masques des quatre quadrants superposables. Après avoir déterminé l'ajustement idéal (voir section suivante et appendice A de [Deo et al. \(2018a\)](#)), je rajouterai alors au masque les pixels manquants à certains quadrants et considérés comme valides dans au moins un des quatre $A[i], \dots, D[i]$.

Il sera possible d'apporter plus tard des corrections à ce masque des pixels en fonction des mesures de l'ASO, comme je le montrerai à la section 3.5.

3.2.2 Positionnement des quadrants

Le positionnement des quadrants est obtenu à partir d'images 4-tilts. Les quarts d'image sont normalisés et seuillés, puis on applique une détection de contours à l'aide d'un filtre de Sobel, effectuant un calcul discret de la norme du gradient de l'image. Je nettoie le résultat du Sobel des pixels isolés et autres artefacts, pour obtenir un masque binaire indiquant les contours de la pupille. J'ajuste alors aux moindres carrés une ellipse sur les pixels validés comme étant des bords de quadrants.

Je montre sur la figure 3.5 les images construites pendant ce processus pour le quadrant A, et sur la figure 3.6 le résultat de l'ajustement elliptique. Les résultats pour cet exemple sont donnés dans la table 3.7, les barres d'erreurs étant calculées sur 50 mesures de l'image I_{4t} , pour lesquelles on note l'exceptionnelle répétabilité de la mesure par rapport au bruit. Les demi-axes indiquent des pupilles circulaires à mieux que 1%, ce qui induit une indétermination totale sur l'orientation du grand axe pour les quadrants A et D.

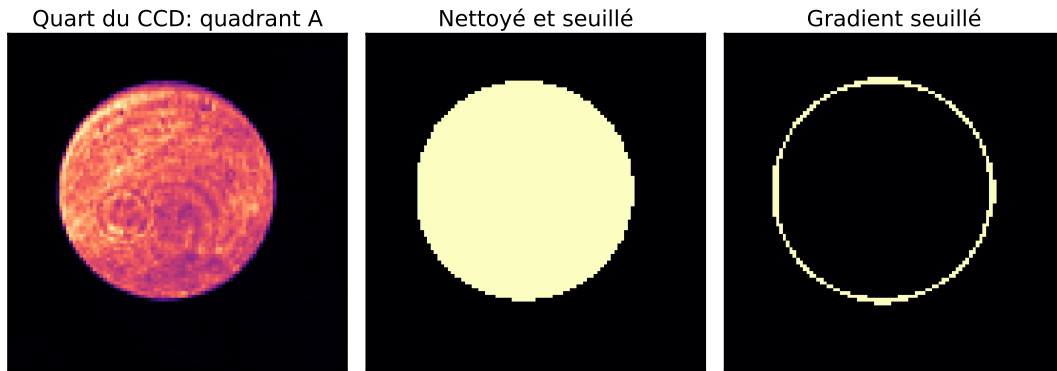


FIGURE 3.5: Pré-traitement d'image pour l'étalonnage du positionnement des quadrants sur la caméra du PWFS. Le même processus est appliqué sur les quatre quarts du CCD.

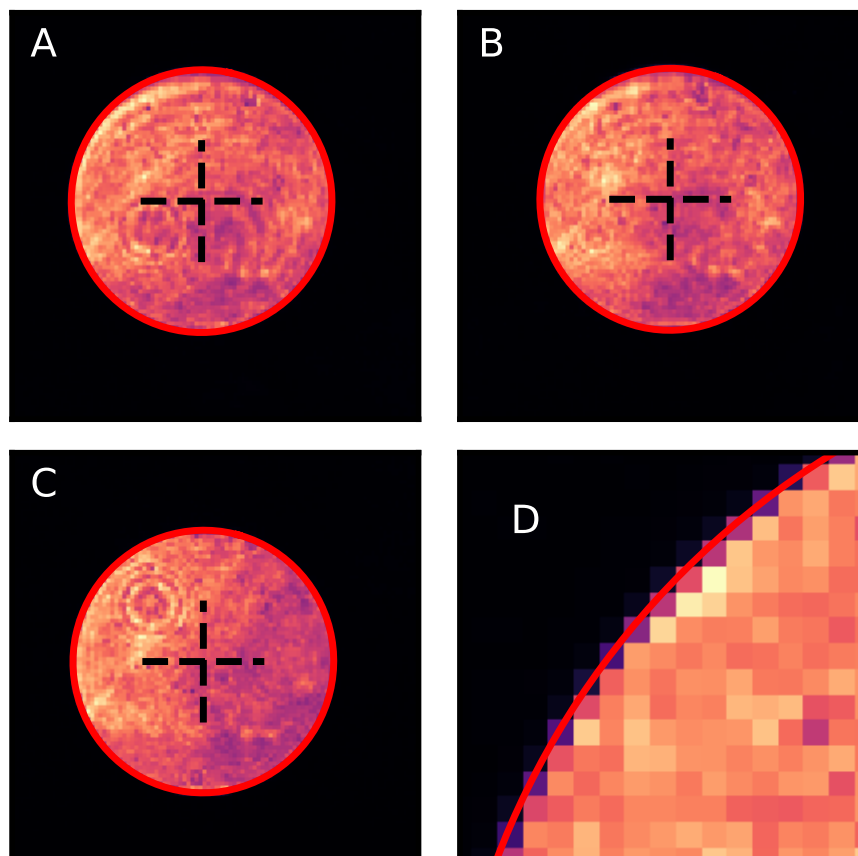


FIGURE 3.6: Ajustements elliptiques obtenus pour les quatre quadrants, superposés à l'image 4-tilts initiale. Un zoom est effectué sur le bord du quadrant *D*. Je donne les valeurs numériques des paramètres d'ajustement dans la table 3.7.

Table 3.7: Résultat des mesures de positionnement des quadrants montrées sur la figure 3.6. x, y : positions des centres ; a, b, θ : demi grand axe, demi petit axe et argument du grand axe de l’ellipse ajustée. Incertitudes calculées sur 50 acquisitions de l’image 4-tilt.

q	x_q (px.)	y_q (px.)	a_q (px.)	b_q (px.)	θ_q (deg)
A	$46.13 \pm .005$	$153.15 \pm .003$	$32.34 \pm .002$	$32.05 \pm .006$	77.68 ± 42.1
B	$151.24 \pm .008$	$153.60 \pm .007$	$32.25 \pm .010$	$32.05 \pm .010$	68.61 ± 2.56
C	$46.55 \pm .017$	$48.12 \pm .008$	$32.32 \pm .009$	$32.06 \pm .010$	74.48 ± 1.49
D	$151.51 \pm .007$	$48.51 \pm .003$	$32.23 \pm .004$	$32.18 \pm .009$	72.13 ± 46.8

À partir des mesures de demi-axes, on calcule le rayon circulaire moyen R_{CCD} :

$$R_{\text{CCD}} = \frac{1}{4} \sum_{q \in ABCD} \sqrt{a_q \times b_q} = 32.18 \text{ px.} \quad (3.4)$$

J’utilise dans ce chapitre la caméra du PWFS avec un sous-échantillonnage par quatre. Évidemment, il est possible d’exécuter les opérations décrites ici dans la configuration “haute définition” de PYRCADO, ce qui me sera utile pour les résultats présentés dans [Deo et al. \(2018a\)](#) (chapitre 4). Le diamètre de la pupille est alors de près de 260 px., permettant d’effectuer du prototypage d’OA à très haute résolution.

3.2.3 Déplacement volontaire des quadrants

Afin de prototyper la fonction de stabilisation de la pupille sur l’analyseur SCAO de MICADO, nous avons équipé la PIL de PYRCADO d’actionneurs contrôlables à distance. Ces actionneurs, de la gamme PI PiezoMike, se substituent aux vis micrométriques des montures standard, et permettent d’effectuer des pas spécifiés pour 400 nm, avec une très bonne linéarité en fonction du nombre de pas. Ils ne disposent pas de positionnement absolu, et ne supportent que les commandes incrémentales. La longueur exacte de chaque pas semble néanmoins dépendre du couple appliqué, et donc de la monture et du sens de rotation.

En déplaçant la PIL perpendiculairement à l’axe optique, une translation commune des quatre quadrants est introduite, alors que le faisceau se déplace par rapport au centre optique de la PIL. Je répète donc la procédure de positionnement des quadrants décrite à la section 3.2.2 pour de multiples incréments de la position des PiezoMike, avec deux objectifs : calibrer la relation entre actionneurs et translations de l’image PWFS ; et vérifier l’existence de possibles artefacts dans l’algorithme de positionnement des quadrants (par exemple, des effets de sauts lors des translations liés à la discrétisation de l’image). Il faut en effet noter que les excellentes barres d’erreur de la table 3.7 ne nous renseignent que sur la répétabilité de la procédure en fonction du bruit d’imagerie !

Je montre une courbe de mesure des centres des quadrants x_q, y_q sur la figure 3.8. On constate, pour chaque quadrant, une déviation de la mesure de son centre

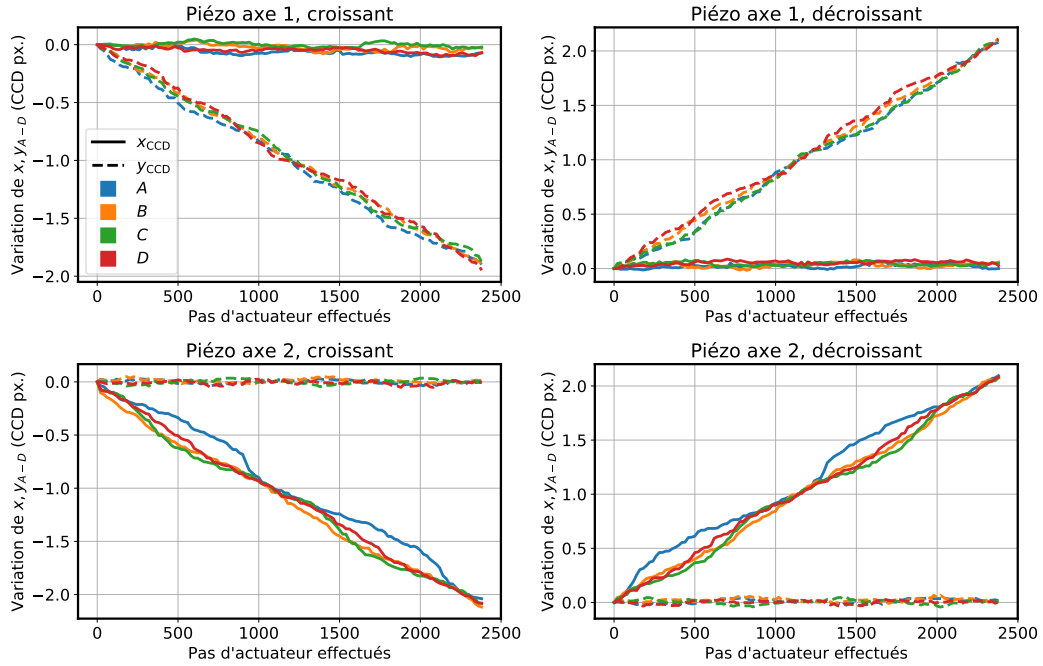


FIGURE 3.8: Déplacement des quadrants sur le CCD en fonction du déplacement de la PIL et caractérisation des erreurs systématiques sur l'ajustement elliptique des quadrants, pour des commandes incrémentales sur les deux sens des deux axes. Les courbes sont translattées pour valoir 0 à l'origine. Le déplacement total de la PIL est d'environ 1 mm pour chaque axe et sens.

$r_{A,B,C,D}$ par rapport aux meilleures régressions linéaires, périodiques de période 1 px. et correspondant donc aux erreurs systématiques de mon algorithme en fonction de la forme et du positionnement sub-pixelique de chaque quadrant.

Le pire cas est atteint pour le quadrant A translatté selon l'axe x_{CCD} , avec une erreur atteignant 0.2 px. d'amplitude totale environ. Cette valeur correspond à une erreur de détermination de 0.63% du diamètre D de la pupille sur PYRCADO, 0.2% sur MICADO – pour lequel une stabilisation de pupille asservie sera nécessaire. En utilisant la configuration haute définition de PYRCADO, on atteint une précision de 0.16% de D , les pixels avant binning logiciel étant quatre fois plus petits.

3.2.4 Déplacement thermique des quadrants

Après avoir caractérisé l'algorithme de détermination des quadrants et leurs déplacements en fonction des translations de la PIL, je vérifie maintenant la stabilité des quadrants en fonction des variations de température.

La salle accueillant PYRCADO n'étant pas thermalisée, la température y suit les fluctuations du cycle quotidien. J'ai donc mesuré, à intervalles de 5 min durant 18 h, les déplacements des quadrants sur le CCD, et je montre les résultats de cette expérience sur la figure 3.9.

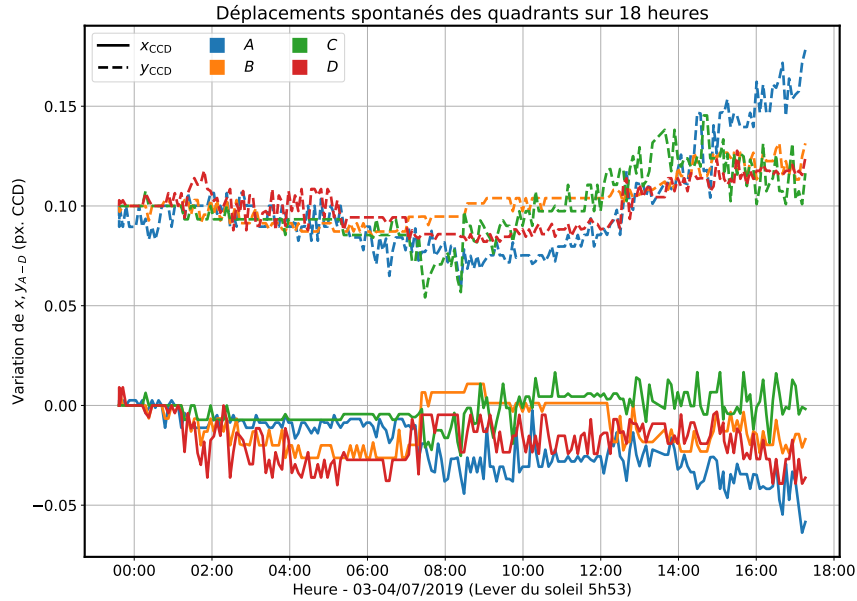


FIGURE 3.9: Déplacement relevés des quadrants sur le CCD, toutes les 5 minutes durant 18 heures. Les températures extrémales ont été estimées à 24°C et 30°C, atteintes respectivement à 7h et 17h.

On note une corrélation évidente entre les déplacements sur l'axe y_{CCD} et la baisse de température en fin de nuit, puis sa remontée de jour. Les résultats de cette étude mettent en lumière que le cycle de température quotidien affecte peu le positionnement des pupilles, avec une fluctuation de l'ordre de 10% d'un pixel d'amplitude totale, pour une variation de température de l'ordre de 6°.

Cette variation est 100 fois supérieure à l'erreur de répétabilité de la mesure sur x_q, y_q , néanmoins 2 fois moins que l'erreur systématique mise en évidence dans la section 3.2.3. On peut donc établir que les fluctuations thermiques sont de second ordre quant au positionnement absolu des quadrants du PWFS de PYRCADO, dans la configuration 200×200 du CCD.

En configuration haute définition, ce même déplacement thermique représente 40% d'un pixel, et donc 2 fois plus que l'erreur systématique, ce qui aura alors un impact important sur la stabilité de l'OA.

3.3 Étalonnage du SLM

Le SLM (LCOS-SLM, *Liquid Crystal on Silicon Spatial Light Modulator*, Love (1999); Inoue et al. (2007)) est le dispositif d'action sur la phase permettant de mettre en œuvre une correction à très hauts ordres sur PYRCADO. Je l'utilise à la fois pour la génération d'écrans turbulents à haute résolution, l'ajout de lames de phase statiques, et enfin la correction par le miroir déformable, en affichant dessus la somme des fronts d'onde souhaités.

Table 3.10: Caractéristiques du SLM utilisé sur PYRCADO. *Source : documentation constructeur.*

Caractéristiques du SLM	
Fabricant	Hamamatsu Photonics
Modèle	X10468-01
Interface	vidéo DVI-D 60 Hz
Résolution	800×600
Taille du chip	15.8×12.0 mm
Taille des pixels	20 μm
Profondeur	8 bits
Temps de montée	5 ms
Temps de descente	25 ms
Bande passante	400-700 nm
Efficacité en réflexion	79% à 633 nm
Facteur de remplissage	98%

Ce dispositif – dont je résume dans la table 3.10 les principales caractéristiques – utilise une matrice de pixels de cristaux liquides à nématiques, qui, par contrôle électrostatique de leur orientation, induisent une différence de chemin optique contrôlée pour la lumière se réfléchissant sur chaque pixel. Ces SLM ne fonctionnent que pour un faisceau polarisé linéairement ; le résidu à la polarisation perpendiculaire n'est pas affecté par les cristaux liquides et voit effectivement un miroir plan.

Par ailleurs, l'OPD introduite est fortement chromatique, et de plus, la course en OPD est limitée : on doit alors considérer les fronts d'onde modulo λ . Il n'est donc possible d'utiliser le SLM qu'en lumière quasi-monochromatique ; l'utilisation de PYRCADO est donc restreinte à des lasers, ou des sources à spectre étroit. Les SLM induisent également de nombreux artefacts optiques, dus au facteur de remplissage, aux limites du polariseur en amont, etc. On trouve une étude de ces défauts dans le cadre d'un SLM placé en plan focal dans [Janin-Potiron et al. \(2019\)](#).

3.3.1 Référencement de la pupille

Avant de pouvoir générer des écrans de phase sur le SLM, il nous faut repérer précisément le positionnement de la pupille sur cette matrice de pixels, qui est dimensionnée pour 10 mm de diamètre (500 pixels).

En introduisant des gradients de phase importants sur le SLM, une signature visuelle est facilement observée sur des images 4-tilts : l'image est obscurcie là où le gradient du front d'onde renvoie les rayons lumineux en direction du centre de la pyramide, où les rayons sont réfractés dans un autre quadrant.

À partir de cette idée, j'ai mis au point une technique similaire à la détermination des pupilles sur le PWFS, en utilisant les positions des quadrants précédemment déterminées comme référence.

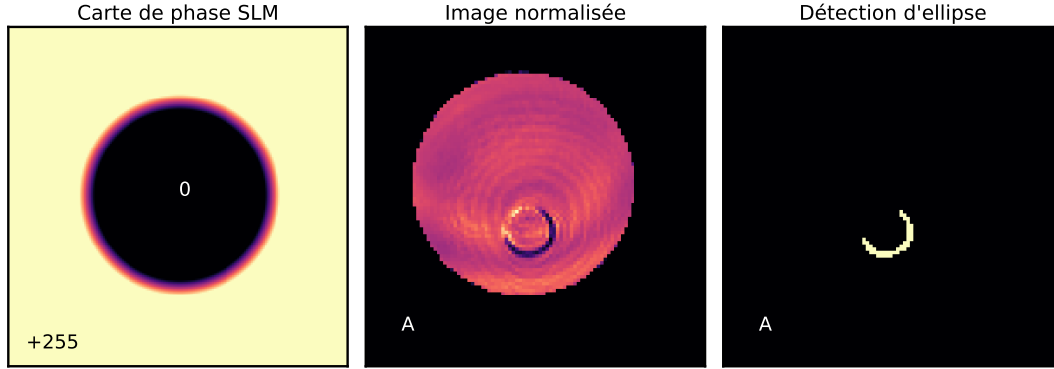


FIGURE 3.11: Front d'onde introduit et pré-traitement d'image pour l'identification de la position de la pupille sur le SLM. Gauche : front d'onde sur le SLM, zoom de côté 200 px. Centre : quadrant A, image normalisée par l'image 4-tilts de référence sans l'anneau de gradient. Droite : détection de l'anneau.

Je génère sur le SLM, à des positions aléatoires dans la pupille estimée, des gradients annulaires : la valeur du SLM passe de 0 à 255 sur un anneau de rayon interne 50 px. et d'épaisseur 10 px.

Les images 4-tilts ressemblent alors typiquement à celle que je montre sur la figure 3.11 (milieu) pour chaque quadrant. L'image de la couronne de gradient de phase est clairement visible, ce qui permet, par un traitement de détection de contour similaire à celui utilisé pour les quadrants, d'identifier sa position, puis d'ajuster dessus une ellipse. Je montre le résultat de l'ajustement sur un exemple sur la figure 3.12.

Cette fois ci, seul le centre de l'ellipse nous intéresse, définissant la relation entre les coordonnées sur le SLM, et les coordonnées relatives aux centres des quadrants $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q)_{q \in A, B, C, D}$. On constate sur la figure 3.12 que la méthode présente un léger biais pour chaque quadrant : la détection étant faite sur les seuls pixels sombres, le centre de l'ellipse est biaisé en direction du sommet du PWFS. Cette erreur systématique est efficacement compensée en moyennant chaque mesure entre les quatre quadrants d'une même image 4-tilts. La relation calibrée s'écrit donc :

$$\mathbf{r}_{\text{CCD}} = \frac{1}{4} \sum_{q \in ABCD} \mathbf{r} - \mathbf{r}_q = f(\mathbf{r}_{\text{SLM}}) \quad (3.5)$$

Avec suffisamment de mesures pour des positions \mathbf{r}_{SLM} aléatoires, on peut ajuster la fonction f aux moindres carrés par une relation affine. Je montre sur la figure 3.13 les relations mesurées entre les différentes coordonnées¹.

Après inversion, la relation affine inverse s'écrit :

$$\mathbf{r}_{\text{SLM}} = \begin{bmatrix} 7.76 & 0.11 \\ -0.09 & 7.77 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{CCD}} + \begin{bmatrix} 300.36 \\ 452.96 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

1. Cette représentation est cohérente car les axes des matrices de pixels s'identifient par une rotation de presque un multiple de $\frac{\pi}{2}$.

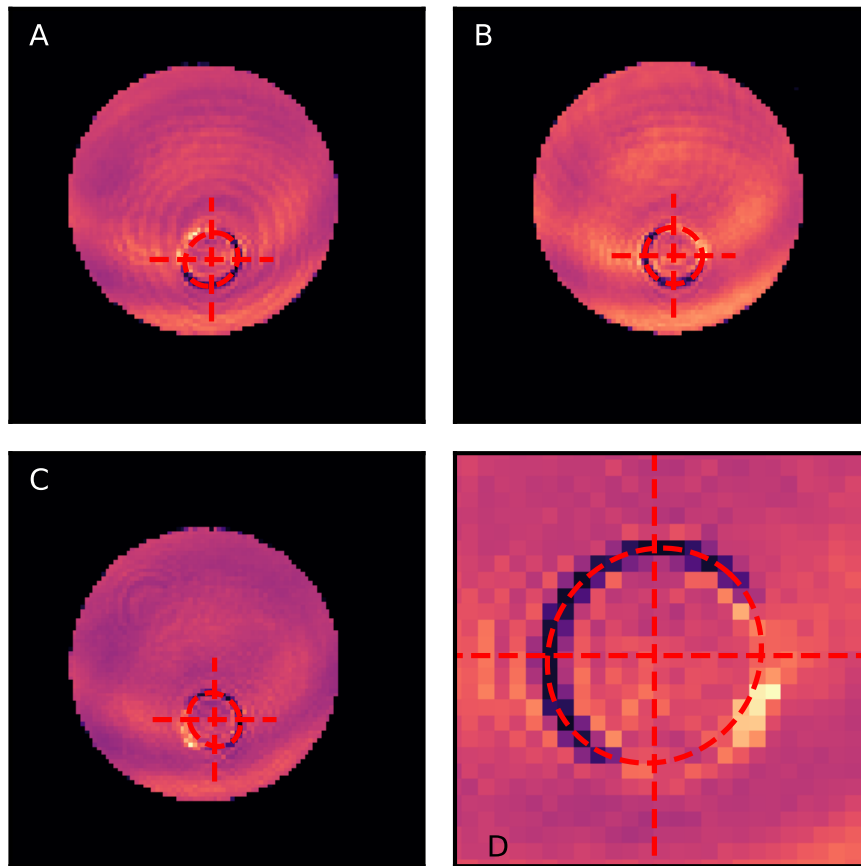


FIGURE 3.12: Résultat de l'ajustement des images des gradients annulaires sur le SLM à travers le PWFS. Un zoom est effectué pour le quadrant D.

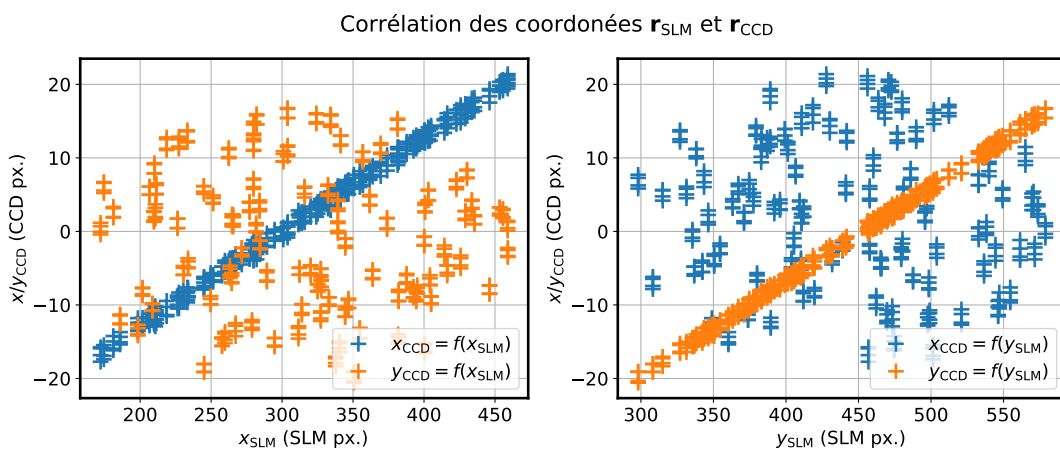


FIGURE 3.13: Relations mesurées entre les coordonnées en pixels du SLM \mathbf{r}_{SLM} et les coordonnées moyennes dans les quadrants \mathbf{r}_{CCD} .

Ce qui me permet de redéfinir l'origine des coordonnées sur le SLM comme étant $[300.36, 452.96]$, centre de la pupille, et de calculer le rayon moyen de celle-ci :

$$R_{\text{SLM}} = \mathbf{det} \left(\begin{bmatrix} 7.76 & 0.11 \\ -0.09 & 7.77 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} R_{\text{CCD}} = 249.90 \text{ px.} \quad (3.7)$$

À l'aide de cet étalonnage, nous sommes désormais en mesure de créer des écrans de phase à la position souhaitée dans la pupille, premier pas vers l'émulation d'un miroir déformable.

3.3.2 Caractérisation du saut de phase

Il reste néanmoins à calibrer le SLM "en profondeur" pour pouvoir effectivement s'en servir. La mesure la plus importante est de mesurer la valeur, en unité de valeur appliquée au SLM, correspondant à une longueur d'onde du laser d'OPD introduite.

Pour ce faire, j'utilise une technique de trous d'Young : je pose un masque de pupille comportant deux trous diamétralement opposés par rapport à la pupille, leurs centres correspondant sur le SLM environ aux coordonnées $\pm 0.9R_{\text{SLM}}$.

J'applique alors un piston différentiel entre les deux trous, en explorant les différences de -255 à 255 de profondeur, qui peuvent être atteintes sans utiliser encore d'enroulage de phase en utilisant les deux trous et la valeur des pixels données sur 8-bits. Pour une OPD (en unité de profondeur du SLM) δ : si $\delta < 0$ (resp. $\delta > 0$), un trou est mis à la valeur δ (resp. 0) et l'autre à 0 (resp. δ). Ces différences sont explorées dans un ordre aléatoire pour éviter toute corrélation de la turbulence dans la salle avec l'OPD introduite.

La mesure est effectuée sur une des caméras d'imagerie, sur laquelle les franges d'interférence se déplacent avec l'OPD introduite. Les franges étant proches de la verticale, les images sont accumulées verticalement, donnant des fonctions de la seule abscisse $I(x; \delta)$.

J'effectue alors un ajustement aux moindres carrés de l'enveloppe des franges :

$$\begin{aligned} \min_{\delta} I(x; \delta) &\approx P_{\text{inf}}(x) \\ \min_{\delta} I(x; \delta) &\approx P_{\text{sup}}(x), \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec P_{inf} et $P_{\text{sup}}(x)$ des polynômes d'ordre quatre. Cet ajustement permet de prendre en compte l'enveloppe des franges par la tache de diffraction des trous, et la baisse de contraste induite par les différentes imperfections du SLM et du train optique², le dark de la caméra, et le léger désalignement angulaire des franges. Je montre le résultat de cet ajustement sur la figure 3.14, avec quelques exemples des franges $I(x; \delta)$ mesurées.

Ensuite, j'effectue un ajustement des franges pour chaque image individuellement, sous la forme :

$$I(x; \delta) = [P_{\text{sup}}(x) - P_{\text{inf}}(x)] [A \cos(fx + \phi) + B] + P_{\text{inf}}(x). \quad (3.9)$$

2. Notamment, le masque n'est pas exactement positionné dans un plan pupille.

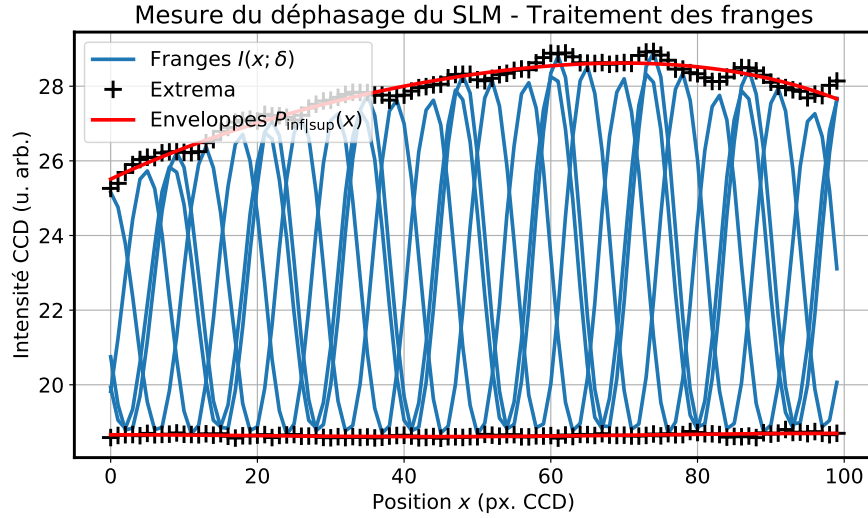


FIGURE 3.14: Traitement des franges obtenues par introduction avec le SLM d'un piston différentiel entre deux trous d'Young : détermination des enveloppes pour l'ajustement et la normalisation des franges.

Les paramètres A , B et f sont ajustés pour chaque image, leur stabilité fournissant un critère a posteriori du bon fonctionnement de la procédure. J'obtiens ainsi une relation $\phi(\delta)$ donnant le déphasage des franges, sur laquelle j'effectue une régression linéaire. Je montre un jeu de mesures sur la figure 3.15 (haut), pour lequel on obtient :

$$\phi(\delta) = 29.3 \cdot 10^{-3} \times \delta - 5.51 \quad \text{rad} \quad (3.10)$$

La valeur de δ induisant un décalage des franges d'une période, ou de manière équivalente une OPD de λ est alors déterminée :

$$\delta_\lambda = 214.3. \quad (3.11)$$

Connaissant maintenant la longueur d'onde et les dimensions de la pupille en unités du SLM, nous sommes enfin en mesure de générer sur celui-ci des fronts d'onde arbitraires (!), en introduisant les cartes de phase désirées modulo λ . Après quelques caractérisations supplémentaires, je reviendrai dans la section 3.3.5 sur la méthode utilisée pour la génération de fronts d'onde pour l'OA sur le SLM.

3.3.3 Non-linéarité en profondeur

On constate dans le résidu de l'ajustement linéaire $\phi(\delta)$ la présence d'un défaut persistant et répétable (figure 3.15 (bas)) : une oscillation, de période environ $\lambda \equiv \delta = 214$, se superpose au déphasage prévu des franges pour les valeurs $\delta < 0$. Ceci laisse entrevoir un effet non-linéaire de l'OPD en fonction de δ pour la surface correspondant à un des deux trous d'Young, possiblement induit par ou couplé à des effets interférentiels du laser dans la matrice de pixels, ce qui relierait la périodicité à λ .

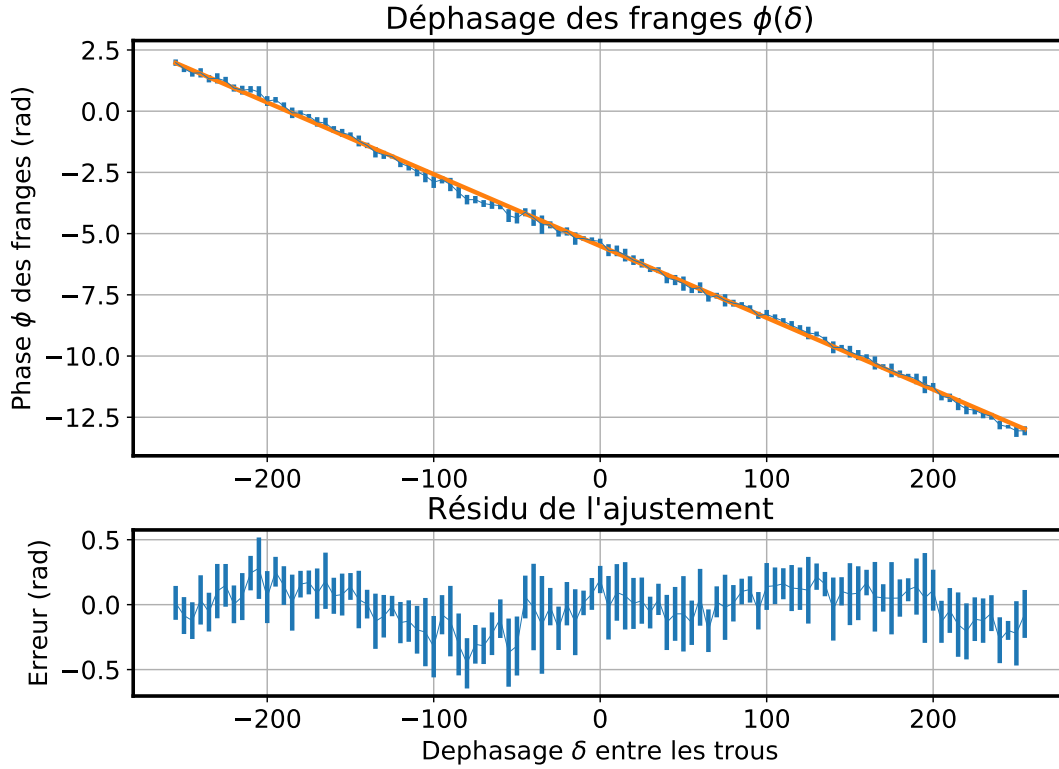


FIGURE 3.15: Mesures et ajustement de la phase $\phi(\delta)$ des franges par rapport à l'OPD δ introduite sur le SLM, en unité de commande.

Pour pouvoir caractériser cette différence d'OPD entre les pixels sur l'ensemble de la pupille, il nous faut disposer d'un ASO fonctionnel. Je vais pour cela utiliser le PWFS de PYRCADO, avec le FSM étalonné et fonctionnel, par les procédures que j'expliquerai dans la section 3.4.

Pour disposer d'un ASO le plus linéaire possible, la modulation est de $35 \frac{\lambda}{D}$, et je procède ici par calcul des cartes de pentes $S_x[i]$ et $S_y[i]$. Je mesure donc les cartes de pentes en fonction de la valeur δ de piston appliquée sur le SLM, et les cartes de pentes moyennes sur toutes les valeurs de δ servent de pentes de référence pour le PWFS, prenant en compte toutes les aberrations statiques du train optique.

Je montre sur la figure 3.16 les cartes de pentes et le front d'onde reconstruit lorsque celui-ci est maximal (en RMS), pour $\delta = 83$. Cette valeur correspond environ à la déviation maximale en valeur absolue atteinte pour l'ajustement montré sur la fig. 3.15, à $\delta = -83$, (un des trous voit alors $\delta = 83$, l'autre $\delta = 0$). On observe une déviation de 1.04 rad creux-à-crête à travers la pupille !

Je calcule ensuite l'amplitude et le RMS de l'aberration en fonction de δ (figure 3.17, gauche), et l'écart-type sur δ en fonction de la position dans la pupille (figure 3.17, droite). L'amplitude de l'aberration dépend peu de la valeur de δ , et on observe pas ou peu l'oscillation de période environ λ vue avec les trous d'Young.

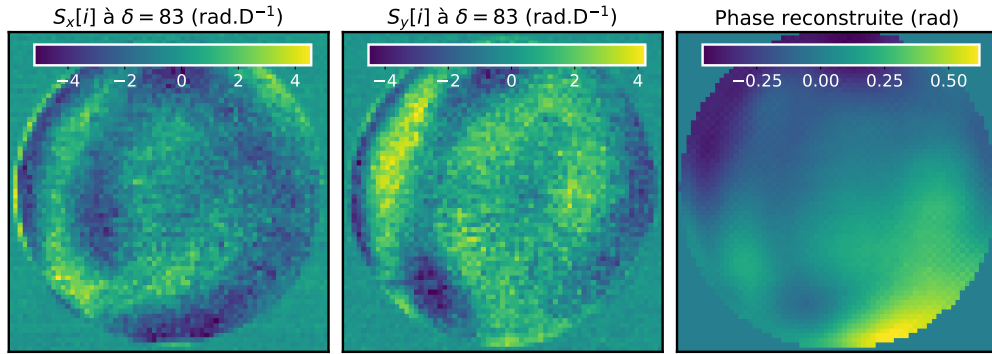


FIGURE 3.16: Cartes de pentes et aberration différentielle d'amplitude RMS maximale mesurée lorsque qu'un piston est introduit sur le SLM. L'aberration reconstruite (droite) à partir de $S_x[i]$ (gauche) et $S_y[i]$ (milieu) fait .18 rad RMS, pour une amplitude de 1.04 rad. Les pentes moyennes sur l'ensemble des δ servent de mesure de référence.

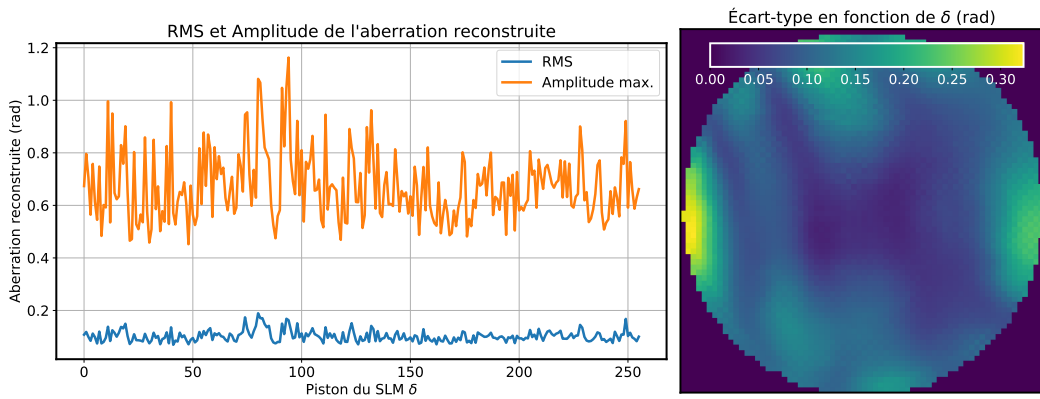


FIGURE 3.17: Gauche : amplitude et RMS de l'aberration différentielle mesurée en fonction du piston introduit sur le SLM δ . Droite : écart-type pour chaque point de la reconstruction de front d'onde sur toutes les valeurs du piston δ de 0 à 255.

On constate néanmoins que les zones de la pupille les moins linéaires correspondent effectivement aux positions des deux trous Young, sur un diamètre horizontal, avec une variation jusqu'à 0.3 rad d'écart-type quand le piston varie.

En conclusion, j'ai été capable de caractériser que le SLM présente de fortes non-linéarités, même piloté avec des aberrations supposément planes. Il ne m'est néanmoins pas possible de conclure strictement quant à l'origine de ce défaut. L'hypothèse la plus probable reste la conjonction des deux facteurs :

- Un mauvais étalonnage en usine des électroniques de commande du SLM
- Des effets interférentiels entre la lumière déphasée et des réflexions parasites, soit directement dans le SLM, soit plus loin dans le train optique.

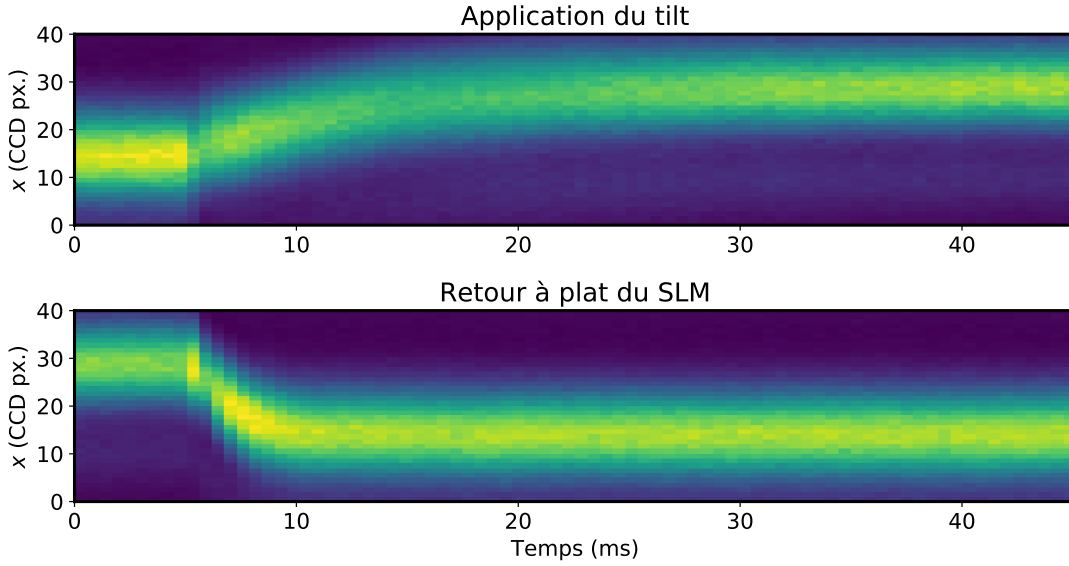


FIGURE 3.18: Successions de tranches de PSF $I(x;t)$ (image 1×40 px. autour du maximum de la PSF) acquises à 1750 Hz lors de l'application d'un tilt de $1.2 \frac{\lambda}{D}$ sur le SLM (haut), et du retour à plat du SLM (bas).

3.3.4 Temps de montée

Dernière caractérisation pour le SLM, nous souhaitons vérifier les temps de montée et descente annoncés par le constructeur (resp. 5 et 25 ms), qui en premières observations ne correspondent pas à la réalité.

Pour mener cette mesure, j'applique un tilt d'amplitude $1.2 \frac{\lambda}{D}$ sur le SLM (maximum sans enroulage de phase), pour mesurer le déplacement de la PSF sur une caméra d'imagerie. La vitesse d'acquisition étant le paramètre clé pour cet mesure, je réduis la zone d'acquisition du CCD à seulement 2×40 pixels, dans la direction de la translation attendue. J'appelle la somme des deux lignes de telles images des tranches de PSF, que je note $I(x;t)$ en fonction de la colonne et du temps. Il est possible pour une si petite zone d'atteindre une cadence de 1750 images par secondes, pour une exposition de 347 μ s.

On peut alors suivre le déplacement de la PSF sur ces tranches de PSF $I(x;t)$ avec une résolution temporelle de 570 μ s. Je montre sur la figure 3.18 les successions d' $I(x;t)$ lors de l'application du tilt et de la remise à plat du SLM.

On observe, à la montée, que le déplacement de la PSF s'effectue en 10 ms. Néanmoins, une inhomogénéité à travers la pupille introduit une baisse de Strehl apparente (à $t=15$ ms), qui ne se résorbe qu'environ 30 ms après le début d'exécution de la commande. On peut également voir à partir de $t=20$ ms à la position d'origine de la PSF une image fantôme d'environ 3% d'amplitude. Cette image directe est issue des défauts du polariseur et de la transmission parasite non-déphasée dans le SLM.

La descente est plus rapide et s'effectue en seulement 5 ms, sans baisse de Strehl

transitoire.

Il ressort de cette étude que je vais appliquer une attente conservative de 40 ms après chaque commande envoyée au SLM, pour assurer que le front d'onde demandé est bien stabilisé. Cette attente sera importante pour la mesure des matrices d'interaction, durant lesquelles il faut être certain que le front d'onde demandé est bien appliqué. Elle pourrait être supprimée lors du fonctionnement en boucle fermée, auquel cas le temps de montée du SLM se trouvera intégré dans la latence de l'OA.

3.3.5 Génération d'écrans de phase SLM

J'utilise le SLM pour la génération de tous les fronts d'ondes, à l'exception de la correction des tip-tilt – effectuée par le miroir tip-tilt en pupille – et de la modulation – effectuée par le FSM.

La génération d'écrans de phase utilise une couche logicielle faisant appel au simulateur COMPASS, pour générer trois écrans de phase :

- Un écran turbulent suivant le spectre de von Kármán
- La correction appliquée par une simulation de miroir déformable
- Un écran de phase statique supplémentaire, défini comme une carte de phase sur l'ensemble du SLM, ou comme une décomposition en polynômes de Zernike.

Ces écrans sont ensuite alignés dans la matrice 800×600 du SLM pour être centrés dans la pupille, mis à l'échelle de manière appropriée et sommés.

Enfin, il faut convertir les fronts d'ondes définis dans des unités physiques en des données applicables sur le SLM. Pour cela, je prends la carte de phase alignée et sommée modulo λ , la multiplie par $\frac{214.3}{\lambda}$, pour enfin convertir en format 8-bits. Pour réduire l'impact des enroulements de phase, la médiane de l'image avant enroulement est ajustée pour correspondre à la mi-course du SLM, soit la valeur 107. Je résume l'ensemble de ce procédé sur la figure 3.19. Dans cet exemple, la phase ϕ_{DM} réduit le front d'onde turbulent à la seule erreur de fitting, et j'ajoute une aberration statique dans les modes de Z_4 à Z_{20} , qui serait par exemple le front d'onde de NCPA (mais est trop important dans l'exemple pour être réaliste). On constate l'effet sur le SLM d'importants gradients, induisant des sauts de phase rapprochés : en quelques dizaines de pixels, on observe plusieurs enroulements de 0 à 214.

3.4 Étalonnage du miroir de modulation

Le miroir de modulation est le troisième élément clé du démonstrateur PYRCADO. Il s'agit d'un oscillateur piézoélectrique PI S-230, sur lequel est fixé un miroir plan de 15 mm, et qui est contrôlé par une carte de génération de signaux fabriquée au LESIA. Cette carte de génération de signaux (DDB, *Direct Digital signal generation Board*) est pilotée numériquement à travers une interface RS232, et envoie au miroir deux signaux analogiques pilotant en position les tip et tilt. Je résume dans la table 3.20 les principales spécification données par PI pour l'oscillateur piézo, et dans la table 3.21 les interfaces digitales de commande du DDB.

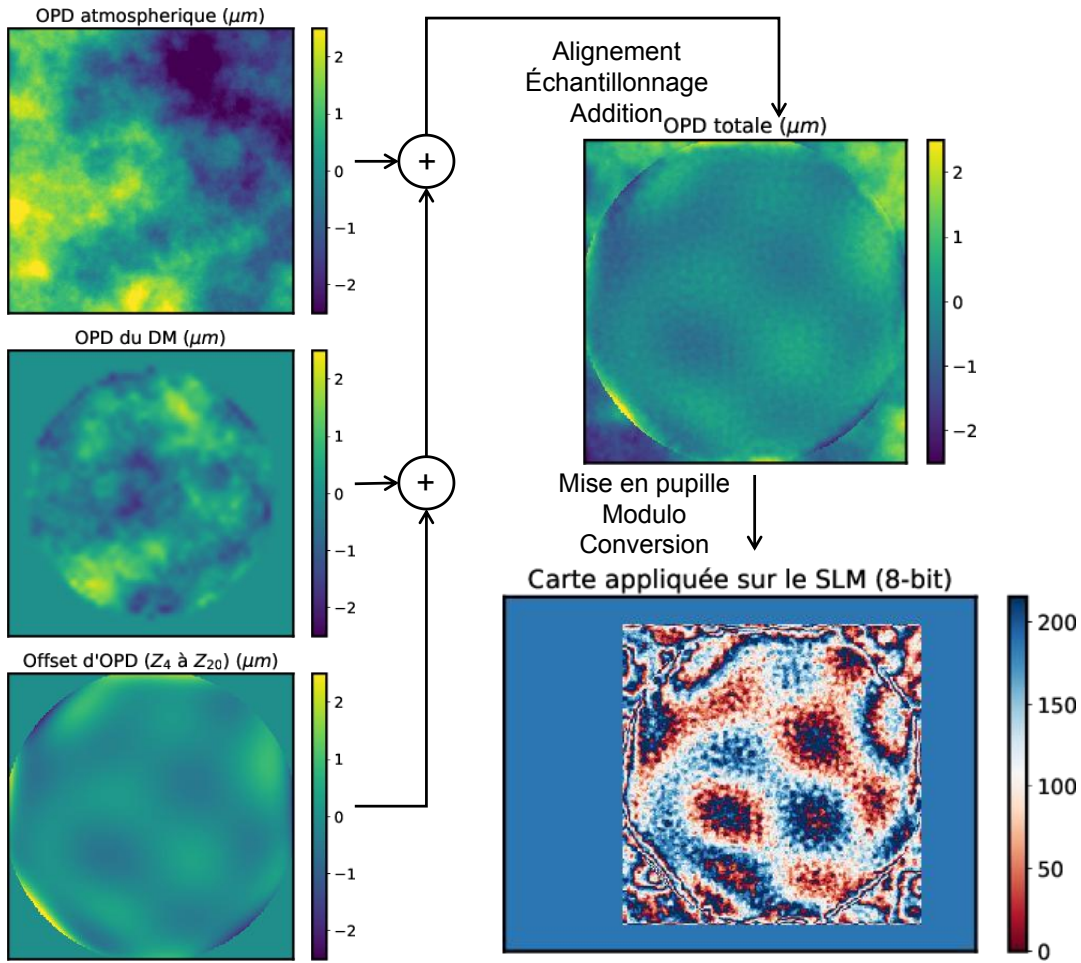


FIGURE 3.19: Processus de génération d'écrans de phase sur le SLM. Le cercle circonscrivant l'offset d'OPD correspond au support de la génération des Zernikes; la zone contrôlée sur le SLM est réduite à un carré. Ces deux zones contiennent strictement l'empreinte de la pupille sur le SLM.

Table 3.20: Spécifications de l'actionneur piézoélectrique du FSM.

Spécifications du FSM	
Modèle	PI S-230
Dynamique angulaire	3.5 mrad
Déviatoin optique max.	7.0 mrad = $106 \frac{\lambda}{D}$
Résolution angulaire	50 nrad
Fréquence de résonance (à vide)	2.4 kHz
Fréquence de résonance (en charge)	1.6 kHz

Table 3.21: Spécifications de la carte de génération de sinus DDB pilotant le FSM. Sont données la dynamique de la commande (unités numériques), l'estimation de la valeur optique correspondante et la résolution (rés.) associée.

Spécification de la carte DDB	
Position moyenne	0-4095
	0-17.1 $\frac{\lambda}{D}$
résolution	0.004 $\frac{\lambda}{D}$
Amplitude du sinus	0-1023
	0-39.5 $\frac{\lambda}{D}$
résolution	0.039 $\frac{\lambda}{D}$
Fréquence	0-65535
	0-1.954 kHz
résolution	0.030 Hz
Phase entre canaux	0-360 deg
résolution	0.08 deg

Dans sa forme générale, la carte DDB nous fournit un signal de modulation

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} r_{\text{Mod}}^x \times \cos(2\pi ft) \\ r_{\text{Mod}}^y \times \cos(2\pi ft + \phi_{\text{DDB}}) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

La synchronisation des fréquences f est obtenue de manière certaine, les deux canaux étant issus du même oscillateur. Il faut donc étalonner les paramètres r_{Mod}^x , r_{Mod}^y , f et ϕ_{DDB} , afin de pouvoir moduler le PWFS circulairement, à des amplitudes et fréquences connues. Je ferai dans la suite référence à ces grandeurs en valeur de commande, ce que je note en unité de DDB (uni. DDB), ou par leur valeur physique, une fois les étalonnages effectués.

Je détaille dans la suite de cette section les procédures que j'ai mises en œuvre pour ces étalonnages. Je procéderai presque toujours par analyse de la trajectoire de la PSF – définissant la fonction $\mathbf{w}(t)$ – sur la caméra focale immédiatement adjacente au PWFS. Pour pouvoir convertir les pixels de cette caméra en unités d'angle, la *pixel scale* – que je note z – de cette caméra est étalonée à l'aide d'une méthode

d’analyse des franges d’interférences engendrées par un masque de pupille à trous non-redondants (Gendron, 2017), pour obtenir :

$$z = 0.167 \frac{\lambda}{D} . \text{px.}^{-1}. \quad (3.13)$$

3.4.1 Fréquence d’oscillation

Une des clés du bon fonctionnement d’un PWFS est la synchronisation appropriée du cycle de modulation avec la durée d’exposition de la caméra de l’ASO. Nous avons ici deux paramètres contrôlables, la fréquence du FSM et l’exposition de la caméra.

L’exposition de la caméra du PWFS PYRCADO peut être ajustée par pas de 14 μs , et la résolution en fréquence du FSM est de 0.029 Hz. En fonction de la fréquence cible, une meilleure résolution est obtenue en ajustant l’une ou l’autre de ces grandeurs, la précision étant identique pour 46.1 Hz. La fréquence cible de PYRCADO étant d’environ 125 Hz, j’ajusterai la fréquence du FSM pour une durée d’exposition fixée à 7994 μs (pas le plus proche de 8000 μs). Une erreur sur cette valeur dans le fonctionnement des caméras n’a pas d’importance, l’objectif étant uniquement la stabilité de l’exposition et l’étalonnage relatif avec le FSM.

Je procède à cet étalonnage en deux étapes : la première, géométrique, permet de déterminer la clôture azimutale des anneaux de modulation à chaque trame ; la seconde évalue avec précision les effets de battement sur un grand nombre de trames.

Étalonnage géométrique

Pour cette première étape d’étalonnage de la fréquence f , je procède par analyse du “trou” ou de la “bosse” dans les ellipses de modulation. Un premier jet manuel est nécessaire pour obtenir des ellipses à peu près circulaires, et cibler la fenêtre de fréquences utile pour l’analyse. Je montre sur la figure 3.22 (haut) la figure de modulation obtenue aux extrema et milieu du domaine d’intérêt après l’ajustement manuel.

Il s’agit ensuite d’analyser la distribution azimutale du flux lumineux dans de telles images. Je discrétise pour cela le plan focal en 256 secteurs angulaires à partir du barycentre de la PSF non modulée, pour former l’histogramme azimutal de l’image, tel que représenté sur la figure 3.22 (milieu), sur lequel on observe nettement le creux, correspondant à un FSM trop lent et ne complétant pas un tour, et la bosse correspondant au FSM effectuant plus d’un tour pendant l’exposition.

On observe sur ces histogrammes deux effets : les pics étroits sont dus à la discrétisation azimutale légèrement inhomogène par rapport à la distribution des pixels³ ; et la variation reproductible sur 360 deg., qui correspond à la distribution effective de l’intensité lumineuse. D’une part, la modulation n’est pas parfaitement circulaire, et d’autre part, la PSF n’étant pas encore bien corrigée, l’intensité modulée des principaux speckles rend la distribution d’intensité anisotrope.

3. Et sont particulièrement intenses près des azimuts -90, 0, 90 et ± 180 deg.

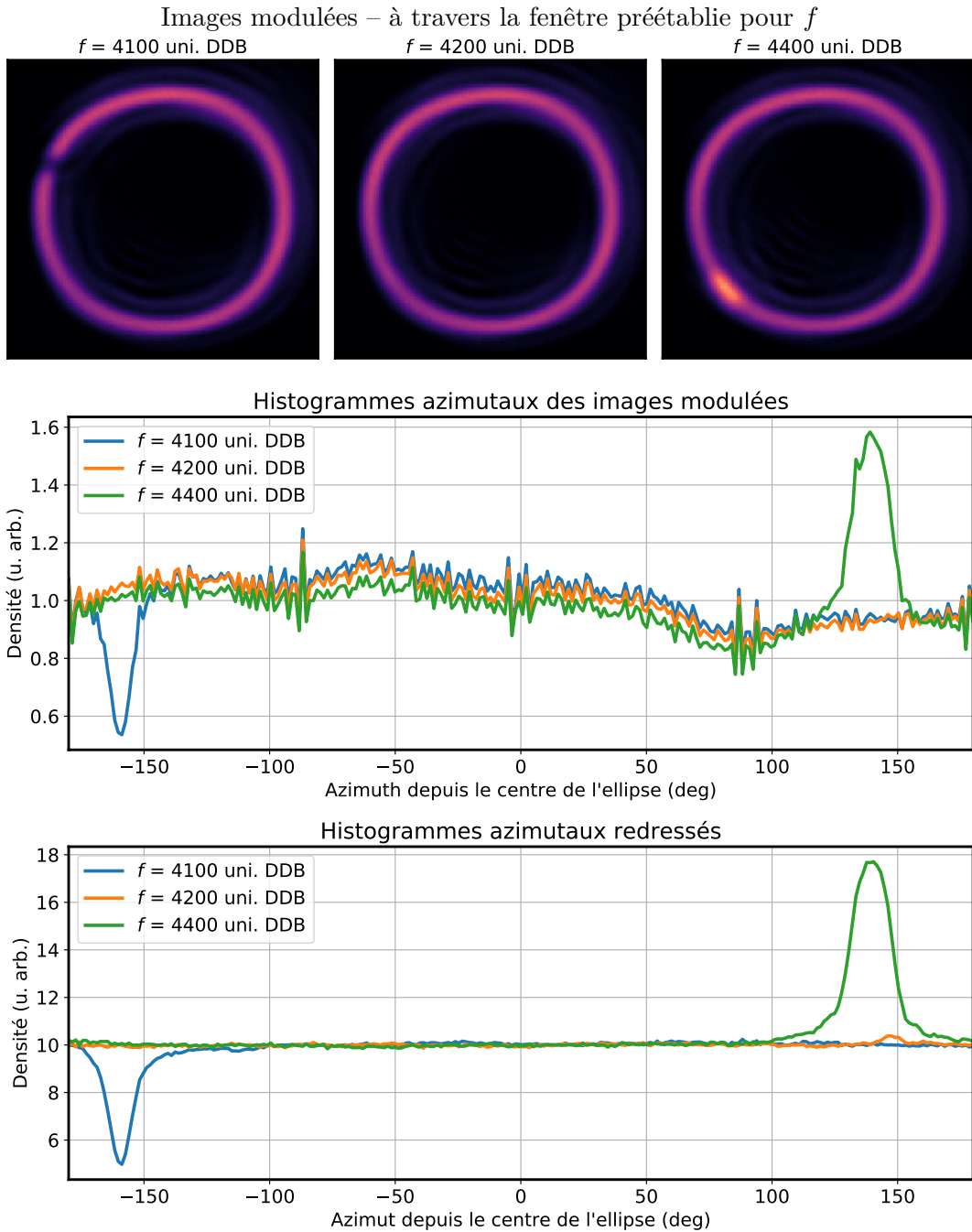


FIGURE 3.22: Étalonnage de la fréquence f du FSM par analyse azimutale des ellipses modulées. Haut : trois exemples de figures de modulation, lorsque le FSM est respectivement trop lent, apparemment correct, et trop rapide, donnant l'effet de creux et de bosse dans l'image modulée. Milieu : histogrammes azimutaux de ces images pris sur 256 bins angulaires. Bas : histogrammes redressés par la valeur médiane de tels histogrammes sur 10 images, alors que le creux ou la bosse se déplace dans l'ellipse.

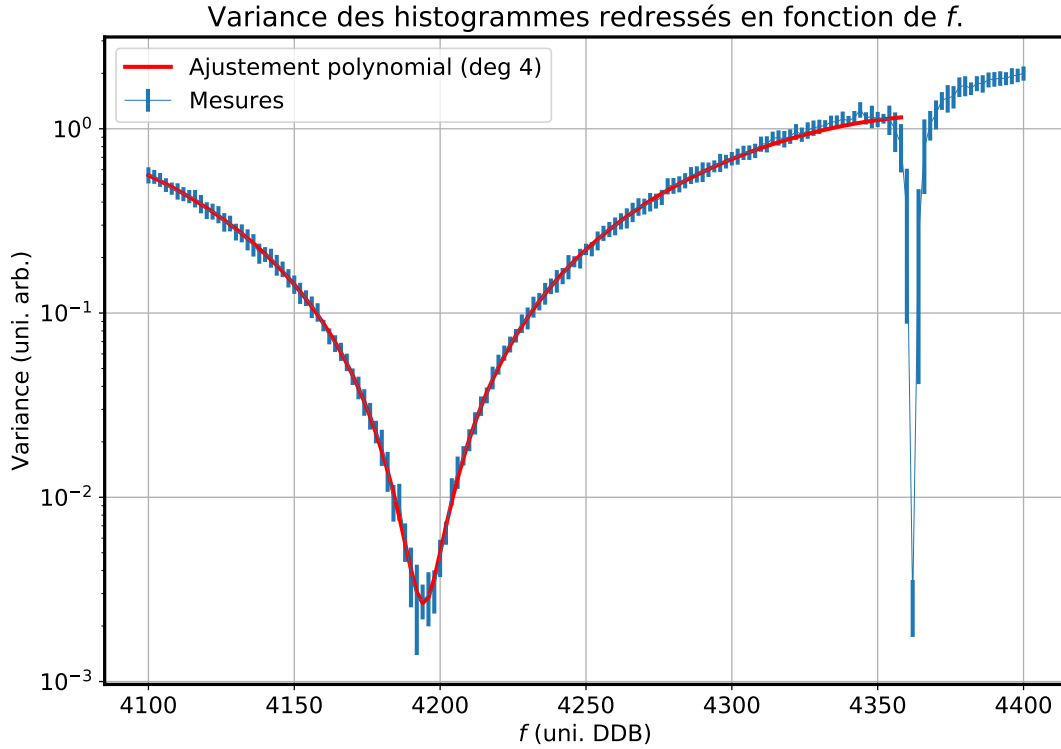


FIGURE 3.23: Étalonnage de la fréquence du FSM par analyse azimutale des ellipses de modulation : variance de l’histogramme redressé en fonction du paramètre f (uni. DDB). Chaque point de mesure est donné par la moyenne sur 10 acquisitions, la barre d’erreur étant calculée comme l’écart-type sur ces 10 mesures. En rouge : ajustement polynomial de degré 4 sur $4100 \leq f \leq 4300$. Le minimum est atteint à $f = 4194$ uni. DDB.

Pour une série d’images successives, le creux ou la bosse se déplace le long du cercle de modulation. En prenant la médiane des histogrammes de plusieurs images successives, il devient possible de redresser chaque histogramme individuellement, comme je le montre sur la figure 3.22 (bas).

La synchronisation idéale correspond donc au paramètre pour f tel que l’histogramme redressé ne présente pas de pic. Pour quantifier l’amplitude d’un tel pic, je mesure à chaque valeur du paramètre de fréquence la variance des histogrammes redressés, moyennée sur plusieurs acquisitions. Je représente le résultat sur la figure 3.23, superposant aux mesures un ajustement polynomial pris sur f de 4100 à 4300.

Le minimum de l’ajustement nous donne la valeur du paramètre pour laquelle la meilleure synchronisation est obtenue :

$$f(\text{uni. DDB}) = 4194. \quad (3.14)$$

On peut extrapoler cette mesure en une relation linéaire, prenant en compte que la

durée d'exposition vaut 7 994 μs :

$$f \text{ (uni. DDB)} = 33.53 \text{ Hz}^{-1} \times f \text{ (Hz)}. \quad (3.15)$$

J'ai volontairement inclus sur la figure 3.23 les mesures jusqu'à 4 400 uni. DDB, alors que l'étalonnage préliminaire n'appelle visuellement qu'à parcourir les valeurs jusqu'à 4 250-4 300 uni. DDB. Un commentaire s'impose sur le creux dans les données centré sur 4 362 uni. DDB sur la figure 3.23 : la fréquence du FSM rentre alors en résonance, non pas avec la durée d'exposition, mais le cadencement des trames choisi lors de cet étalonnage, de 10 Hz. Il découle effectivement de notre étalonnage que 4 362 uni. DDB correspondent à 130 Hz.

Le FSM effectue alors exactement 13 tours entre deux trames. La bosse de l'histogramme azimutal est alors quasi-statique, ce qui invalide la technique proposée de redressement des histogrammes – basée sur le déplacement du défaut entre les images consécutives – et fausse les mesures.

Étalonnage synchrone

La méthode d'étalonnage géométrique permet d'obtenir la meilleure valeur pour f à quelques unités près. Néanmoins, un modulateur mal mais presque synchronisé induit un battement à basse fréquence, qui se répercute alors directement par des oscillations des tip-tilt dans le front d'onde corrigé lorsque le PWFS est opéré en boucle fermée. Il est donc nécessaire d'obtenir une synchronisation au mieux avec la caméra du PWFS. La méthode géométrique a justement cette limite qu'il est techniquement nécessaire de pouvoir obtenir des temps d'expositions identiques entre la caméra focale utilisée et la caméra du PWFS.

Je vais donc confirmer la valeur trouvée pour f par une seconde méthode, basée sur l'analyse des battements directement dans les images PWFS, et qui fonctionne également bien en ayant seulement pour l'instant un étalonnage grossier de l'amplitude de la modulation et du cophasage des canaux du DDB.

Je montre sur la figure 3.24 un chronogramme des acquisitions par la caméra du PWFS, ainsi que la fonction de modulation circulaire pour une fréquence f : $\mathbf{w}(t) = r_{\text{Mod}} \begin{bmatrix} \cos(2\pi ft) \\ \sin(2\pi ft) \end{bmatrix}$. Le début de la première trame représentée correspond à $t = 0$. Je note ici $T_{\text{exp}} = \frac{1}{f_{\text{exp}}}$ et $T_{\text{samp}} = \frac{1}{f_{\text{samp}}}$ les durées respectivement d'exposition de la caméra et d'échantillonnage temporel du système. Dans le cas que je représente sur la figure 3.24, le FSM est légèrement trop lent, à 120 Hz pour $f_{\text{exp}} = 125$ Hz. Lors de la première trame, le quadrant A est moins modulé ; lors de la seconde, le quadrant B, etc. On voit apparaître un effet d'oscillation entre l'illumination reçue dans chaque quadrant en fonction des différentes fréquences mises en jeu.

On peut démontrer que dès lors que f ne correspond pas exactement à f_{exp} , on observe dans les signaux enregistrés par la pyramide, qu'il s'agisse des quadrants ou des cartes de pentes, un effet de battement, à la fréquence

$$|f - f_{\text{samp}}| \quad (3.16)$$

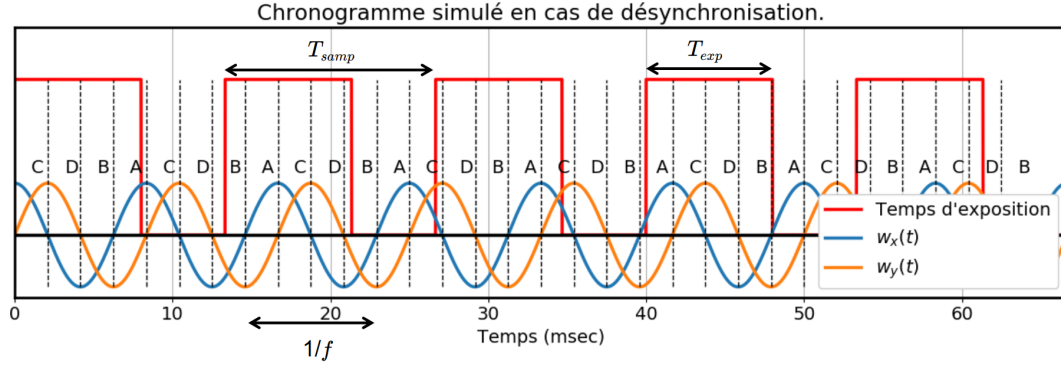


FIGURE 3.24: Chronogramme de l'exposition de la caméra du PWFS relativement au FSM. La fréquence f_{samp} est de 75 Hz, pour une fréquence f_{exp} de 125 Hz. Le FSM n'est pas synchronisé et tourne à $f = 120$ Hz. A, B, C, D et séparateurs verticaux : quadrant illuminé par le miroir de modulation dans chaque quart de période du FSM.

et d'amplitude proportionnelle à :

$$|f - f_{\text{exp}}| \quad (3.17)$$

Pour me placer dans une configuration où cette fréquence de battement est bien résolue, je configure pour cette acquisition la caméra du PWFS sur seulement 20×20 px. au centre d'un quadrant. Le temps de lecture et transfert étant réduit, il m'est alors possible de cadencer la caméra à 120 Hz. Le battement est donc attendu très proche de 5 Hz pour cette configuration.

Pour obtenir une résolution fréquentielle très fine, j'acquière 4096 trames pour chaque valeur du paramètre f au voisinage de la valeur d'intérêt, déterminée par la méthode géométrique précédente. La résolution fréquentielle est alors de 0.029 Hz, comparable à celle du DDB.

Le calcul de la transformée de Fourier temporelle de la seule luminosité totale fait apparaître le battement. Je montre quelques exemples de spectres mesurés sur la figure 3.25. La résolution fréquentielle étant très proche de celle du DDB, le pic de battement se déplace d'un bin de TF pour chaque incrément de f , avec une amplitude mettant en évidence la courbe pour laquelle la meilleure synchronisation est obtenue.

Enfin, en procédant par détection de pic, j'extrais de chaque spectre le maximum au voisinage de 5 Hz. Je montre ces mesures sur la figure 3.26. La dépendance en $|f - f_{\text{exp}}|$ est clairement mise en évidence.

On confirme (ou affine) avec cette méthode le résultat acquis par la méthode géométrique : la valeur de f correspondant le mieux à l'exposition choisie de $7994 \mu\text{s}$ est $f = 4194$ (uni. DDB) ; l'amplitude relevée du pic est d'un facteur 5 inférieure aux mesures à 4193 et 4195, garantissant une excellente précision sur la mesure.

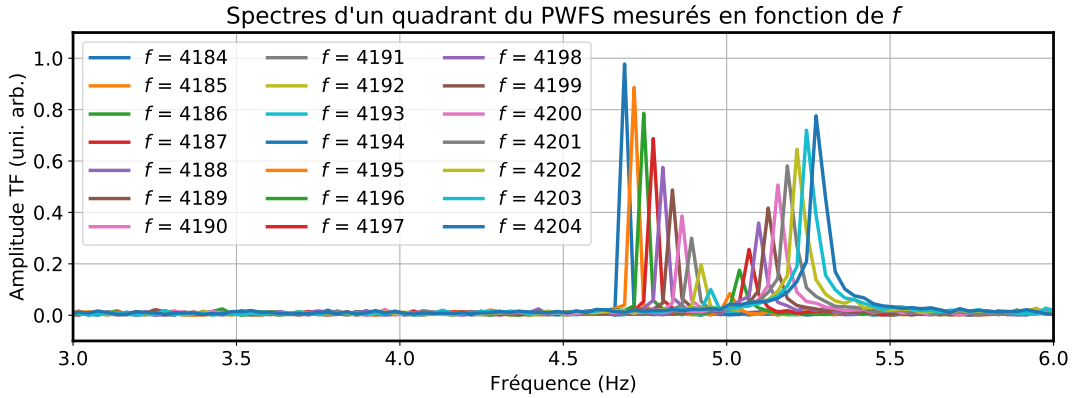


FIGURE 3.25: Zoom sur les pics à 5 Hz des spectres mesurés durant la procédure d'étalonnage synchrone, en fonction de la commande en fréquence du DDB f .

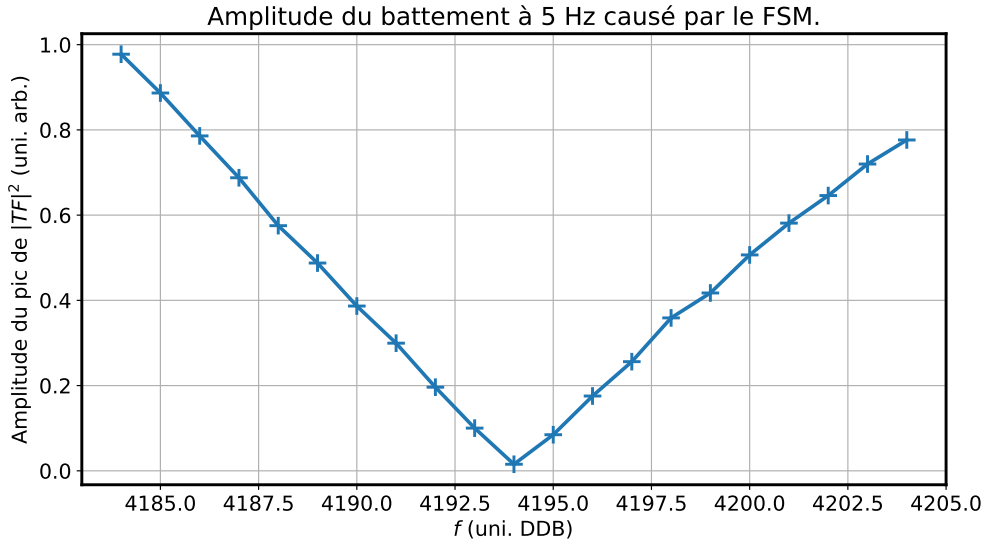


FIGURE 3.26: Amplitude du pic de battement à 5 Hz (figure 3.25) en fonction de la commande de fréquence du DDB f .

3.4.2 Phasage des canaux

Nous sommes maintenant assurés que nous pouvons synchroniser le FSM avec la caméra du PWFS et les caméras focales de PYRCADO. La prochaine étape est d'étalonner le déphasage relatif ϕ_{DDB} à envoyer à la carte DDB pour garantir que les signaux $w_x(t)$ et $w_y(t)$ se trouvent bien mis en quadrature de phase. Pour arriver à cela, je procède à nouveau par analyse de la trace elliptique de $\mathbf{w}(t)$ sur la caméra d'imagerie.

On doit d'abord vérifier l'absence de rotation entre les axes mécaniques du FSM et les axes du détecteur de la caméra focale. Modulation arrêtée, j'utilise la commande

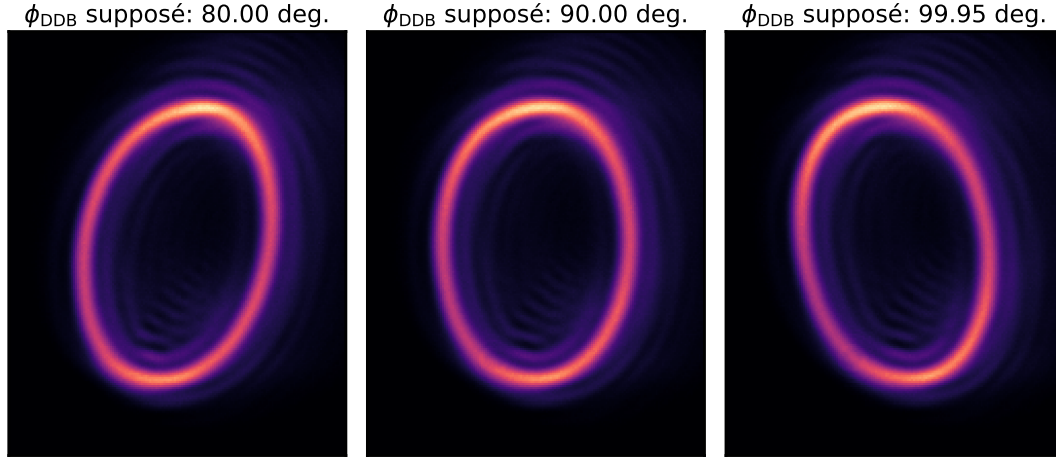


FIGURE 3.27: Étalonage de la commande de déphasage ϕ_{DDB} entre les signaux de modulation, par mesure de l'argument des ellipses créées. De gauche à droite : ellipses générées par le FSM aux valeurs minimale, centrale et maximale de la plage d'intérêt de ϕ_{DDB} . On recherche ϕ_{DDB} pour aligner le demi grand-axe sur la verticale.

d'offset de la carte DDB et mesure le barycentre de la PSF. Cette relation est obtenue par ajustement d'une transformation affine entre les coordonnées sur le CCD plan focal $[x_{\text{PSF}}, y_{\text{PSF}}]$ et les commandes de position moyenne du DDB sur 12 bits, résultant dans :

$$\begin{bmatrix} x_{\text{PSF}} \\ y_{\text{PSF}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.48 \cdot 10^{-2} & -6.2 \cdot 10^{-6} \\ 2.84 \cdot 10^{-4} & 2.55 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle w_x(t) \rangle (\text{uni. DDB}) \\ \langle w_y(t) \rangle (\text{uni. DDB}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 618.09 \\ 432.59 \end{bmatrix} \text{ px. PSF.} \quad (3.18)$$

On déduit de la matrice de passage que les deux systèmes d'axes se correspondent, à 0.5 deg. près au plus. L'extension maximale de l'ellipse selon chacun des deux axes du CCD correspond donc directement à l'amplitude des commandes $w_{x,y}(t)$.

Pour l'étalonnage de ϕ_{DDB} , je règle l'amplitude des canaux de sorte à voir une ellipse notablement allongée, comme je le montre sur la figure 3.27 ; ceci permet de lever l'ambiguïté entre les grands et petits axes, et donc d'effectuer des mesures précises de l'argument du grand axe de l'ellipse.

En faisant varier la commande de ϕ_{DDB} , je mesure l'argument du grand axe, résultats que je montre sur la figure 3.28. Lorsque les signaux de modulation sont bien en quadrature, le grand axe se trouvera être aligné sur la verticale du CCD. Au voisinage de la quadrature de phase, la relation entre cette mesure et ϕ_{DDB} est linéaire, comme le confirme la régression effectuée. Il résulte de cet étalonnage que l'argument de l'ellipse est parfaitement aligné sur les axes du repère pour une commande :

$$\phi_{\text{DDB}} = 92.26 \text{ deg.} \quad (3.19)$$

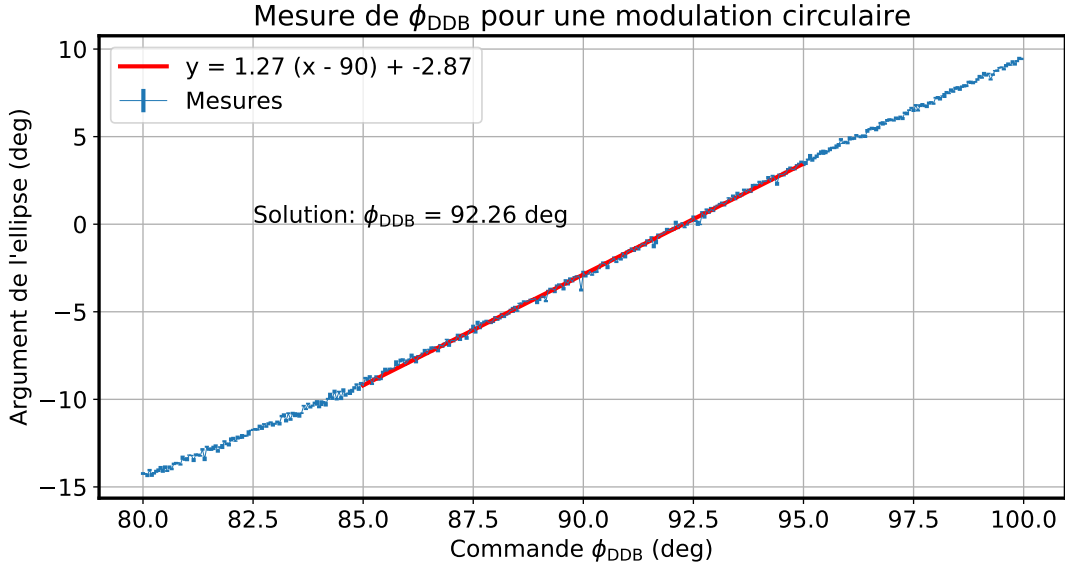


FIGURE 3.28: Résultat de l'étalonnage de ϕ_{DDB} par ajustement de l'argument du grand axe d'ellipses telles que montrées sur la figure 3.27.

À l'aide de cette valeur, nous pouvons désormais piloter le FSM de telle sorte que les axes de l'ellipse soit toujours alignés sur les axes de la matrice de pixels.

3.4.3 Amplitude de modulation

Dernière étape de l'étalonnage du FSM, il nous faut enfin garantir que nos ellipses bien orientées soit en fait des cercles. J'étudie pour cela la relation entre les extensions verticales et horizontales – dont nous voyons à travers l'équation 3.18 qu'elles correspondent respectivement aux deux axes d'oscillation du FSM.

La technique employée est toujours basée sur l'ajustement d'ellipses : je capture des images pour des signaux $\mathbf{w}(t)$ dont les amplitudes r_{Mod}^x et r_{Mod}^y (uni. DDB) sont laissées libres et aléatoires.

Il suffit finalement d'ajuster une régression linéaire entre les mesures de r_{Mod}^x et r_{Mod}^y , en pixels de la caméra focale, et les commandes, ce que je représente sur la figure 3.29. Je ne fais varier le gain que de 300 à 500 uni. DDB, en fonction des contraintes liées à l'ajustement des ellipses : il faut que l'ellipse ait un trou central bien marqué ; mais plus le rayon est grand, plus l'intensité est diffuse ; et il faut conserver, à exposition synchrone, un bon rapport signal à bruit.

On obtient donc les relations :

$$\begin{aligned} r_{\text{Mod}}^x(\text{px. PSF}) &= 0.226 \times r_{\text{Mod}}^x(\text{uni. DDB}) - 0.89 \\ r_{\text{Mod}}^y(\text{px. PSF}) &= 0.234 \times r_{\text{Mod}}^y(\text{uni. DDB}) - 0.80 \end{aligned} \quad (3.20)$$

La petitesse des ordonnées à l'origine confirme la bonne qualité de l'ajustement et des mesures. La différence entre les deux canaux, outre une possible différence dans

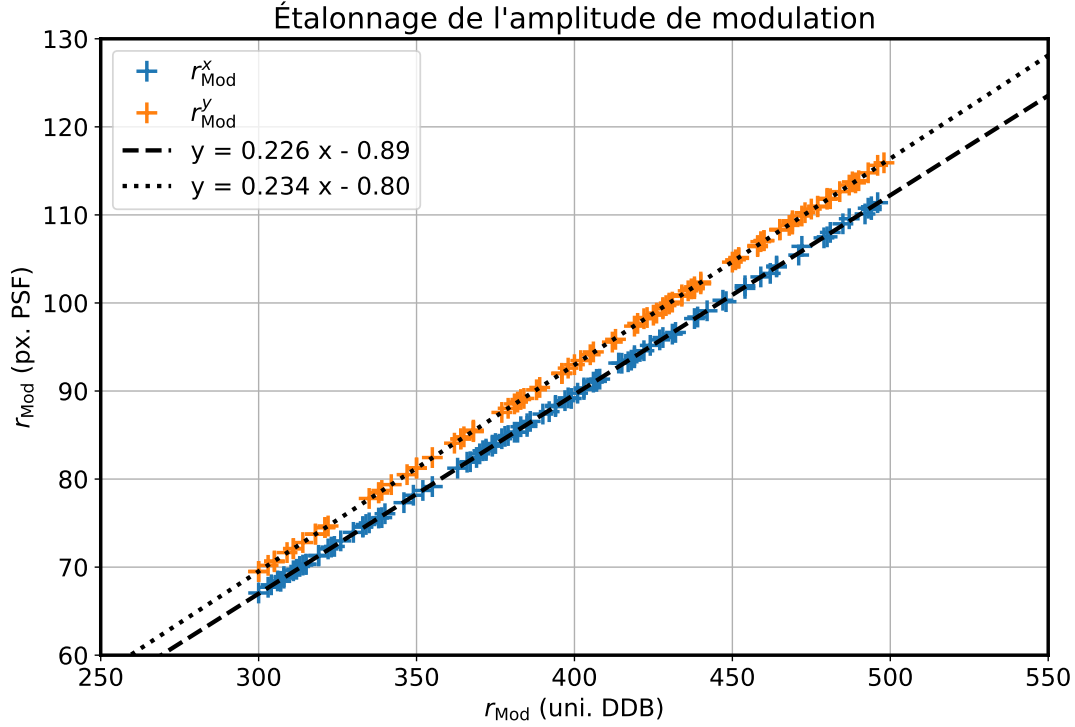


FIGURE 3.29: Étalonage du rayon de modulation du DDB par mesure de l'extension des ellipses de modulation selon les axes de la caméra focale (px. PSF) en fonction des commandes de la carte DDB (uni. DDB). Un point sur 10 est représenté pour plus de clarté.

les électroniques, trouve son explication dans la réflexion oblique sur le FSM. Ce seul facteur pris en compte, on retrouve l'angle de déflexion de l'axe optique par le FSM :

$$\arccos\left(\frac{0.226}{0.234}\right) = 14.3 \text{ deg.} \quad (3.21)$$

cohérent avec le design optique mis en œuvre.

En inversant la relation 3.20, et en insérant la pixel scale donnée à l'équation 3.13, on aboutit finalement à la relation de commande du FSM pour une modulation d'amplitude souhaitée :

$$\begin{bmatrix} r_{\text{Mod}}^x(\text{uni. DDB}) \\ r_{\text{Mod}}^y(\text{uni. DDB}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.50 \\ 25.59 \end{bmatrix} \frac{D}{\lambda} r_{\text{Mod}}, \quad (3.22)$$

ce qui donne une dynamique maximale de $r_{\text{Mod}} = 38.6 \frac{\lambda}{D}$, avec une excellente linéarité jusqu'à au moins $20 \frac{\lambda}{D}$, comme on le voit sur la figure 3.29.

3.5 Matrice d'interaction et premières mesures

Nous sommes maintenant prêts à faire de l'optique adaptative avec notre démonstrateur de PWFS hauts-ordres. Je vais rappeler dans cette section le dimensionnement utilisé pour la mise en œuvre du système d'OA, et présenter quelques caractérisations de l'ensemble de l'expérience.

3.5.1 Paramètres de l'OA de PYRCADO

J'ai présenté à la section 3.3.5 la méthodologie utilisée pour mettre à profit le SLM dans notre expérience d'OA. Le DM et la turbulence étant issus d'une simulation numérique, il s'agit maintenant de choisir le dimensionnement que je vais utiliser pour les premiers tests. De même, le PWFS, en utilisant le CCD à pleine résolution, nous offre un diamètre de pupille de quelques 260 px., et nous aurons la liberté de choisir différents modes d'échantillonnage en fonction de la résolution désirée, ce que j'ai fait dans [Deo et al. \(2017, 2018a\)](#).

Je résume l'ensemble de ces paramètres dans la table 3.30, et je détaille les principaux choix ci-dessous.

Table 3.30: Principaux paramètres de l'OA utilisée pour les caractérisations du banc PYRCADO.

Dimensionnement de l'OA pour les tests PYRCADO	
Télescope	$D = 18$ m, pupille circulaire
Turbulence	Monocouche dans la pupille r_0 variable de 13 à 20 cm $L_0 = 25$ m, $\ \mathbf{v}\ = 10$ m.s ⁻¹
DM	Tip-tilt physique DM piezo-stack 39×39 - $d_{DM} = 47$ cm 1 177 actionneurs contrôlés
PWFS	65×65 sous-ouvertures $\lambda = 633$ nm $r_{Mod} = 5 \frac{\lambda}{D}$ Normalisation globale, mode "all pixels" 13 288 points de mesure (pixels dans A, B, C, D)
Contrôle	Intégrateur sans latence Base \mathcal{KL}^{DM} (boucle fermée) Base de Fourier \mathcal{F}^{DM} (analyse de sensibilité)

Analyseur

Je choisis la résolution sur laquelle j'ai effectué les étalonnages de la section 3.2, avec l'échantillonnage (matériel) par 4 du CCD, donnant un diamètre de pupille de 65 sous-ouvertures. Le calcul des pentes n'est pas effectué explicitement ; je considère – comme présenté à la section 2.4.2 –, la sortie de l'ASO comme l'ensemble des pixels des quatre quadrants A , B , C et D , normalisés de manière globale (équation 2.33). Je sélectionne les pixels valides à partir du seuillage d'une image 4-tilts de référence.

Miroir déformable

Avec 500 px. du SLM dans le diamètre de la pupille, la limite de résolution sera difficilement atteinte pour le DM émulé. D'autres arguments rentrent ici en ligne de compte : le SLM est en effet de moins en moins efficace en réflexion avec l'augmentation du gradient de phase. L'augmentation du nombre d'actionneurs du DM implique aussi une augmentation importante du temps de calcul. Pour conserver une vitesse d'exécution raisonnable, tout en me plaçant dans une dynamique de démonstrateur pour les ELT, je simule un DM de 39×39 actionneurs, pour une pupille simulée de $D=18$ m. Le pitch projeté dans la pupille est alors de 47 cm, soit 13.1 px. sur le SLM, et les fonctions d'influence – de FWHM environ égale au pitch – sont alors très bien échantillonnées.

Couche turbulente

Un pixel du SLM correspond alors à 3.6 cm projetés sur l'ouverture de 18 m simulée. Pour une turbulence bien résolue, il nous faut au moins deux points d'échantillonnage sur une distance de r_0 . Dans cette configuration, on pourra donc simuler des r_0 jusqu'à 7.2 cm à 633 nm, soit 5.9 cm à 500 nm ; ce qui correspond à des conditions parmi les moins bonnes envisageables dans un observatoire scientifique. Je travaillerai en général sur PYRCADO avec un r_0 simulé correspondant à des conditions médianes ou mieux, c'est à dire des r_0 (à 500 nm) de 13.0 à 20.0 cm. Évidemment, ne disposant que d'un SLM conjugué à la pupille pour générer la turbulence, je serai limité à la simulation d'une unique couche de turbulence proche du sol.

3.5.2 Mesure de la matrice d'interaction

J'effectue l'acquisition de la matrice d'interaction **dPyr** pour deux bases différentes, en utilisant des push-pull d'amplitude constante pour tous les modes (équation 2.40). L'amplitude totale dépasse λ même pour des ε de quelques dizaines de nm RMS en raison de la présence d'un offset de phase, ajusté à la main et compensant les aberrations les plus grossières du train optique entre le SLM et l'ASO, pour placer la pyramide dans un régime linéaire, favorable à la mesure de la matrice d'interaction. Pour contourner les limitations du SLM, en particulier la non-linéarité et l'imperfection de l'enroulement de phase, qui laisse des artefacts visibles dans les images PWFS, je calcule **dPyr** en moyennant des matrices obtenues pour différentes

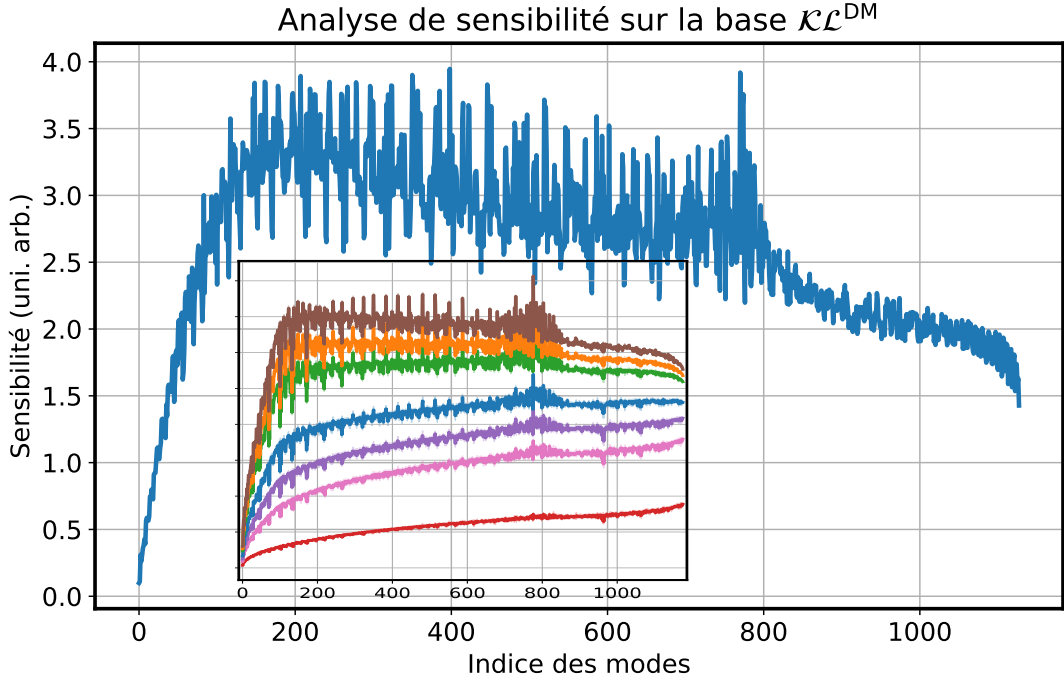


FIGURE 3.31: Analyse de la sensibilité de l'analyseur PYRCADO aux modes \mathcal{KL}^{DM} , mesurée comme $\|\mathbf{dPyr}(\phi_i)\|^2$. Insert : même mesure calculée sur une simulation COMPASS, issue de [Deo et al. \(2018b\)](#), en présence de résidus turbulents. La courbe marron correspond au résidu le plus faible, donc le plus proche des conditions expérimentales présentées ici ; on retrouve les mêmes distribution de sensibilité et structure de la réponse modale.

valeurs de ε dans l'équation 2.40, de 10 à 50 nm RMS d'amplitude. De la sorte, les enroulements de phase ne se situent pas toujours au même endroit dans la pupille lors des mesures de $\mathbf{Pyr}(\pm\varepsilon\phi_i)$.

J'utilise la base \mathcal{KL}^{DM} définie à la section 2.2.3, que j'utiliserai pour le contrôle de la boucle d'OA, ainsi qu'une base des modes de Fourier du miroir \mathcal{F}^{DM} , qui permet d'effectuer une analyse du comportement du PWFS par fréquences spatiales.

Tout d'abord, je vérifie la sensibilité mesurée pour chaque mode de ces deux bases, que je représente sur les figures 3.31 et 3.32. Ces sensibilités sont calculées comme :

$$\|\mathbf{dPyr}(\phi_i)\|^2 \quad (3.23)$$

pour chacun des modes ϕ_i des deux bases \mathcal{KL}^{DM} et \mathcal{F}^{DM} . Cette quantité est proportionnelle au rapport signal-à-bruit (en variance) de la mesure de chaque mode, dans la limite des faibles phases, pour un flux lumineux incident donné.

Les modes \mathcal{KL}^{DM} étant classés par fréquences spatiales, on retrouve grâce à leur ordonnancement les deux régimes de la courbe de sensibilité analytique de l'analyseur Roof en fonction des fréquences spatiales ([Vérinaud, 2004](#)) : linéaire en dessous du rayon de modulation, plat au delà. On observe une augmentation quasi-linéaire de

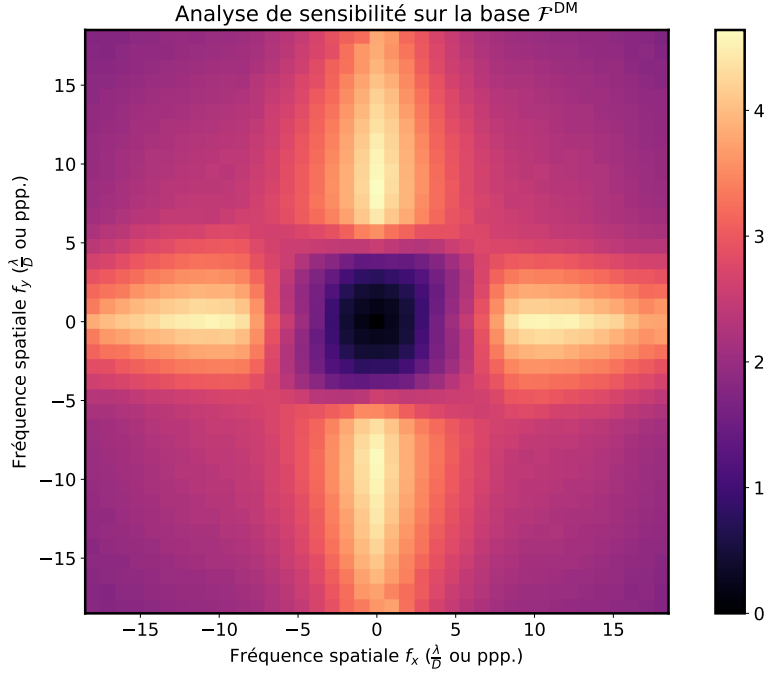


FIGURE 3.32: Analyse de la sensibilité de l’analyseur PYRCADO aux modes de Fourier du DM, mesurée comme $\|\mathbf{dPyr}(\phi_i)\|$. Chaque mode de Fourier est représenté à la position du plan de fréquence correspondant à la fréquence spatiale portée. Les modes cosinus sont représentés à $f_y > 0$, les modes sinus à $f_y < 0$. ppp. : périodes-par-pupille.

$\|\mathbf{dPyr}\|^2$ pour les modes de bas ordres, jusqu’aux fréquences correspondant au rayon de modulation (mode 150). On a ensuite deux tendances : entre les modes 150 et 800, les modes sont des KL aux fréquences spatiales bien définies ; puis au delà du mode 800, régime dans lequel la définition des modes KL_i^{DM} est limitée par la résolution du DM. Les variations locales de la sensibilité, pseudo-périodiques, correspondent à l’ordonnement des ordres azimutaux des modes.

Je reproduis en insert sur la figure 3.31 la sensibilité simulée sur un système équivalent. Ces sensibilités ont été calculées en présence de résidu turbulent haute-fréquence (on le verra au chapitre 5), le résidu le plus faible correspondant à la courbe marron. On note pour celle-ci l’excellente correspondance structurelle des matrices d’interaction simulées et mesurées sur PYRCADO.

En utilisant la base \mathcal{F}^{DM} , je peux représenter la sensibilité à chaque mode à la position correspondant à sa fréquence spatiale \mathbf{f} dans le plan de fréquences, donnant une carte bidimensionnelle de sensibilité aux fréquences spatiales, telle que celle déterminée par Guyon (2005) (figure 2.13), et celles obtenues en simulation end-to-end par Deo et al. (2018b) (figure 5.6). Les modes les plus sensibles sont bien les fréquences spatiales de fréquence f dépassant r_{Mod} et orientés dans la direction des arêtes du PWFS, comme nous l’avons vu dans la section 2.4.3.

Par rapport à la figure 2.13, la mesure effectuée sur PYRCADO inclut les atténuations dues à la fonction de transfert de l'intégration par les pixels (équation 2.29) et la TF de la fonction d'influence, ce qui explique l'atténuation observée aux bords de la figure 3.32.

Validation du spectre de la matrice d'interaction

Pour vérifier que tous les modes du DM peuvent être bien contrôlés par l'OA, je calcule le spectre de la matrice d'interaction, représenté sur la figure 3.33. La structure de la courbe des valeurs singulières est conforme avec les résultats usuels en simulation. Le conditionnement est particulièrement satisfaisant, à 0.113, ce qui indique qu'il est possible de contrôler l'ensemble des actionneurs ou modes sans procéder à un filtrage, du moins à fort flux lumineux. Cette valeur est tout à fait cohérente avec le sur-échantillonnage utilisé, avec 65 sous-ouvertures pour 38 actionneurs. Je n'effectue donc pas de filtrage modal pour le calcul du reconstructeur **Rec**.

Validation de la sélection des pixels

La matrice d'interaction nous permet de confirmer a posteriori la bonne détermination du masque de sélection des pixels valides. La norme des lignes de **dPyr** correspond à l'information utile portée par chaque pixel sur l'ensemble de la base modale, et permet d'identifier, puis d'éliminer, les pixels les moins utiles, et donc susceptibles de propager le plus de bruit dans la boucle d'OA. Je montre cette métrique sur la figure 3.34. La dynamique de l'ensemble est bien bornée, avec une amplitude maximale de 20 entre le pixel le plus sensible et le pixel le moins sensible. On retrouve des pixels particulièrement moins sensibles autour de certains défauts optiques (bas des quadrants C et D ; haut-droit des quadrant B et D), ainsi que sur l'extrême bord

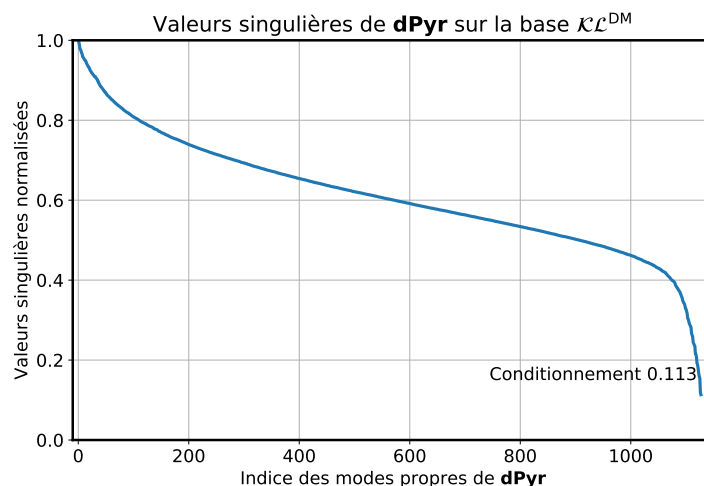


FIGURE 3.33: Valeurs singulières normalisées de la matrice d'interaction **dPyr** sur la base de commande de l'OA \mathcal{KL}^{DM} .

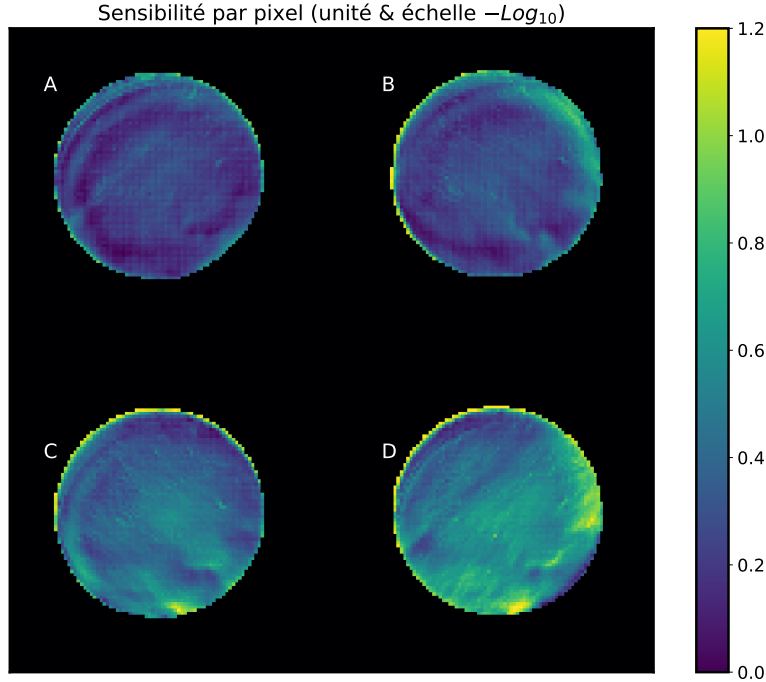


FIGURE 3.34: Sensibilité individuelle des pixels du PWFS de PYRCADO, mesurée et représentée comme $-\log_{10}$ de la norme des lignes de la matrice d'interaction sur la base \mathcal{KL}^{DM} . Les valeurs sont normalisées à 1 pour le pixel le plus sensible (bleu sombre). Seuls les pixels faisant partie du masque de sélection sont représentés ; le fond noir correspond aux pixels non considérés.

des quadrants B, C et D, caractérisant donc un masque de sélection insuffisamment restrictif en bord de pupille. Je peux donc appliquer cette rectification du masque a posteriori, par application d'un seuil sur la sensibilité des pixels.

3.6 Fermeture de boucle

Je présente dans cette section un exemple d'expérience en boucle fermée sur PYRCADO. Pour ne pas encore pousser vers les conditions les plus difficiles, le r_0 utilisé est ici de 20 cm ; les paramètres de l'OA sont ceux donnés dans la table 3.30. La durée totale de la boucle simulée est de 7 500 trames, soit 15 secondes à 500 Hz. Durant les 1000 premières trames, j'optimise le gain appliqué sur chacun des modes. La technique utilisée dans cet exemple pour obtenir les gains compensant les non-linéarités est la méthode CLOSE (Deo et al., 2019b), qui fera l'objet du chapitre 6. Les 6 500 trames suivantes sont dédiées à l'acquisition des PSF (figures 3.36 et 3.37) et au calcul des résidus (figure 3.38).

Le premier critère est celui de la stabilité : à part deux actionneurs situés aux extrémités du diamètre horizontal de la pupille, la surface du DM reste stable durant l'ensemble de la durée d'asservissement. Je montre à titre d'exemple le front d'onde

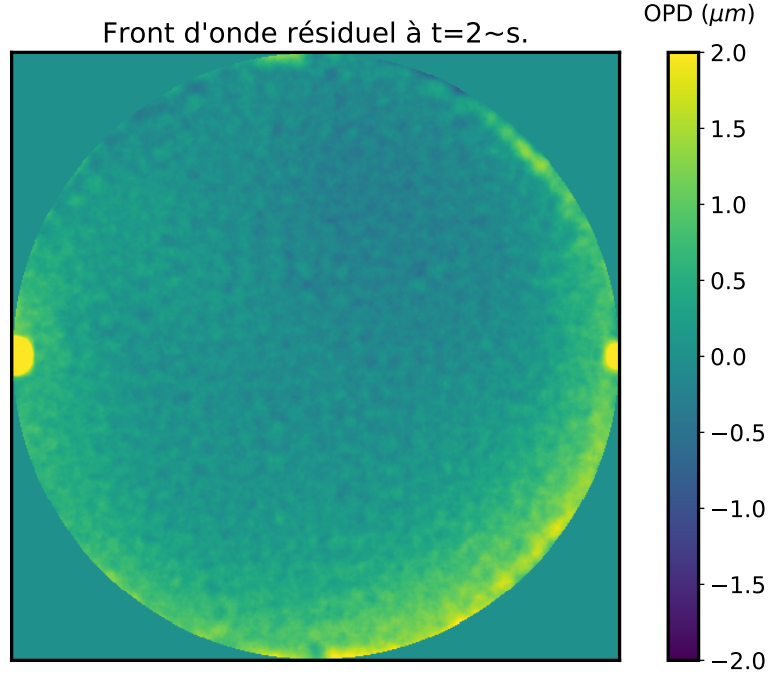


FIGURE 3.35: Front d'onde résiduel pris 2 s (simulées) après la fermeture de boucle. Ce front d'onde est calculé comme la différence $\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}}$ envoyée sur le SLM.

relevé à la trame 2 500 sur la figure 3.35 ; il s'agit du front d'onde différentiel $\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}}$ envoyé sur le SLM. Les deux actionneurs mal contrôlés divergent à respectivement 5 et 20 μm au moment de ce relevé.

On peut décomposer ce front d'onde en deux éléments : une aberration à travers tous les modes, résidu de correction de la turbulence, correspondant à un budget d'erreur dominé par la fitting et l'erreur temporelle ; et une aberration dominée par un mode sphérique bien visible sur le bord inférieur droit, qui correspond à l'aberration statique du train optique entre le SLM et l'ASO, et que l'on souhaite corriger avec le DM pour atteindre la meilleure PSF possible. La quantité étudiée sur la figure 3.35 peut s'écrire, en fonction des différentes composantes :

$$\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}} = \left[\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{Atm}}^{\text{mesuré}} \right] - \phi_{\text{statique}}^{\text{mesuré}}, \quad (3.24)$$

alors que le front d'onde vu par l'ASO est :

$$\begin{aligned} [\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}}] + \phi_{\text{statique}} &= \left[\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{Atm}}^{\text{mesuré}} \right] + \left[\phi_{\text{statique}} - \phi_{\text{statique}}^{\text{mesuré}} \right] \\ &\rightarrow 0 \text{ dans le cas de mesures parfaites.} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dans cette démonstration, le PWFS est asservi sur un front d'onde plan en utilisant des pentes de références nulles. On peut en effet démontrer, et vérifier en simulation, que pour un front d'onde cible $\phi_{\text{Res}} = 0$, les pentes de référence $\mathbf{s} = \mathbf{Pyr}(\phi = 0)$

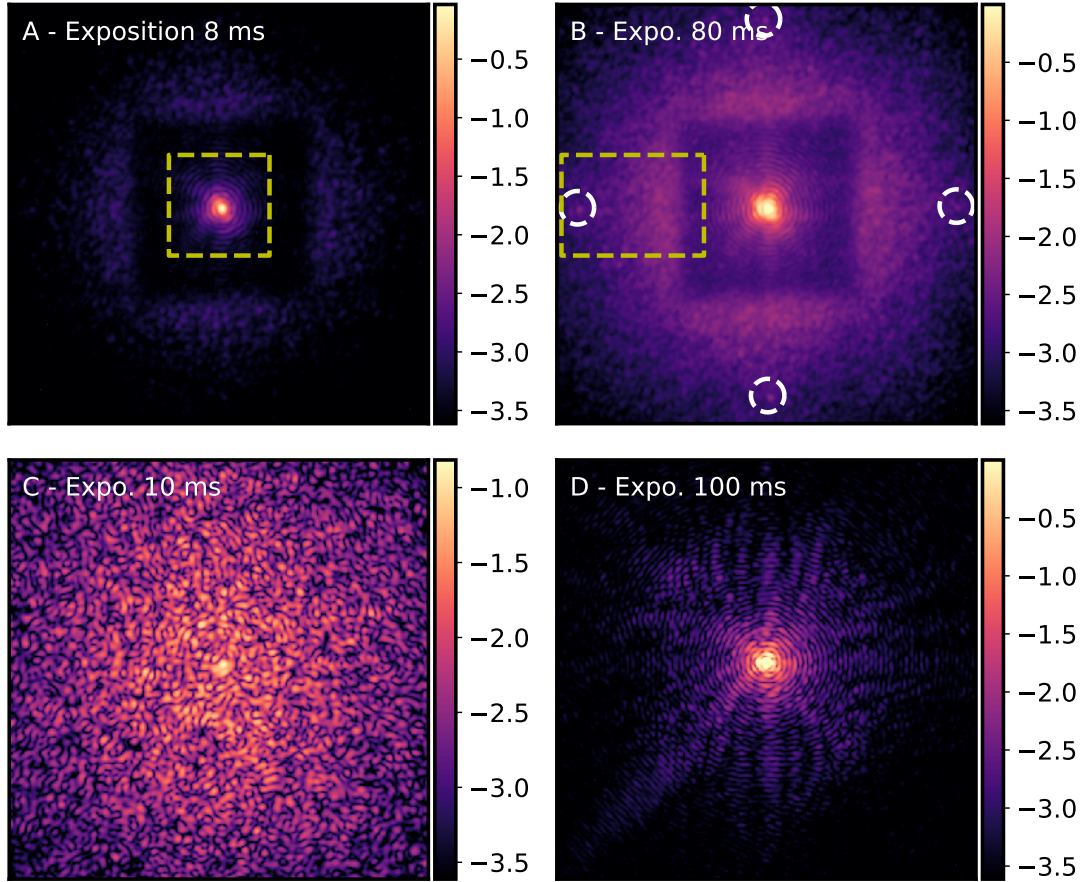


FIGURE 3.36: PSF obtenues avec la caméra d'imagerie post-modulation de PYRCADO. A-B : images longue pose (par moyenne d'images courte pose à l'exposition donnée) sur respectivement 1 500 et 5 000 trames de la boucle d'OA ; B sature le détecteur d'un facteur 5. C : PSF courte pose immédiatement avant la fermeture de boucle de l'OA. D : PSF en l'absence de turbulence atmosphérique. Les échelles de couleur sont données en \log_{10} , 0 correspondant à la valeur de saturation du capteur. Cercles blancs : localisation des speckles d'aliasing du DM, d'amplitude 10^{-2} . Encadrés jaunes : zooms montrés sur la figure 3.37.

se situent dans le noyau du reconstructeur **Rec**. Les remplacer par un vecteur de pentes de référence nul n'introduit donc pas de biais dans la boucle ; mieux encore, cela permet de mesurer les aberrations ϕ_{statique} du train optique de l'ASO.

Il s'ensuit que les NCPA entre l'ASO et la caméra d'imagerie ne sont pas compensées, conduisant à un cœur de PSF accompagné de speckles de bas ordres, comme on le voit sur la figure 3.36 (A, C, D ; zoom sur la figure 3.37 (gauche)). J'utilise pour l'instant la caméra d'imagerie post-modulation, pour laquelle les NCPA sont minimales, mais non négligeables en raison de la séparatrice pelliculaire utilisée. Dans ce

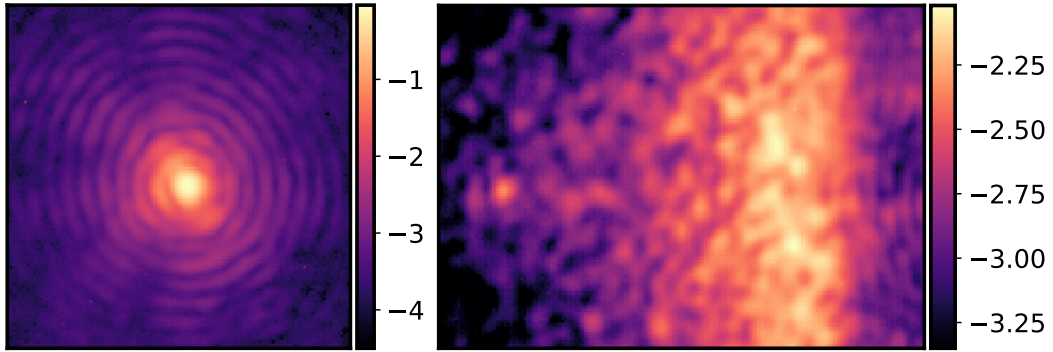


FIGURE 3.37: Zooms sur les PSF montrées sur la figure 3.36 (A, B). Gauche : cœur de la PSF corrigée en boucle fermée, laissant voir les aberrations de bas ordres dues aux NCPA non corrigées. Droite : zoom sur le bord de la zone de correction du DM et le speckle d'aliasing. Les échelles de couleur sont données en \log_{10} , et normalisées pour donner le meilleur contraste possible.

cas, le FSM est arrêté toutes les 5 trames pour effectuer une acquisition de PSF. La PSF figure 3.36 (A) correspond à une acquisition non saturée moyennée sur les trames 1 000 à 2 500 de la boucle (3 secondes simulées). Les speckles hors zone de correction sortent à peine du niveau de fond. La PSF figure 3.36 (B) correspond à une longue pose sur les trames 2 500 - 7 500 (10 secondes simulées). Le pic central dépasse la dynamique de la caméra d'un facteur 5 ; ceci permet d'obtenir une image bien contrastée du halo de la zone de réjection. On voit également apparaître – dans la direction des axes – quatre speckles d'aliasing par le DM, liés à la largeur spectrale des fonctions d'influence (voir figure 3.37 (droite)).

Sans disposer de tache d'Airy de référence pour la caméra d'imagerie, il est difficile d'évaluer le SR obtenu à partir de PSF, si ce n'est à travers l'expérience visuelle de l'opérateur. Pour caractériser plus en détail la performance de l'OA, j'étudie la décomposition modale des résidus de boucle mesurés pendant l'acquisition de la PSF sur la figure 3.36 (B). Ces résidus sont la projection modale directe de $\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}}$, c'est à dire le résidu envoyé sur le SLM et incluant la compensation par l'OA des aberrations statiques. À cause de l'aberration du train optique, ils tendent vers et maintiennent une moyenne non-nulle.

Je montre sur la figure 3.38 la valeur moyenne, la moyenne quadratique, et l'écart-type temporels de ces résidus, recalculés après avoir éliminé les deux actionneurs hors de contrôle ; je note ces résidus $x_i(t)$. L'étude à travers l'écart-type plutôt que les valeurs RMS permet de s'émanciper de l'aberration ϕ_{statique} ; à part ce terme, il est attendu pour des poses suffisamment longues que les résidus de la boucle asservie vers la consigne $\phi = 0$ soient, pour chaque mode, de moyenne nulle.

Moyenne et moyenne quadratique des résidus présentent de nombreux pics : il s'agit de la décomposition modale de ϕ_{statique} vers laquelle converge la différence $\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}}$. Sur l'ensemble des modes, la moyenne, moyenne quadratique et écart-type se somment

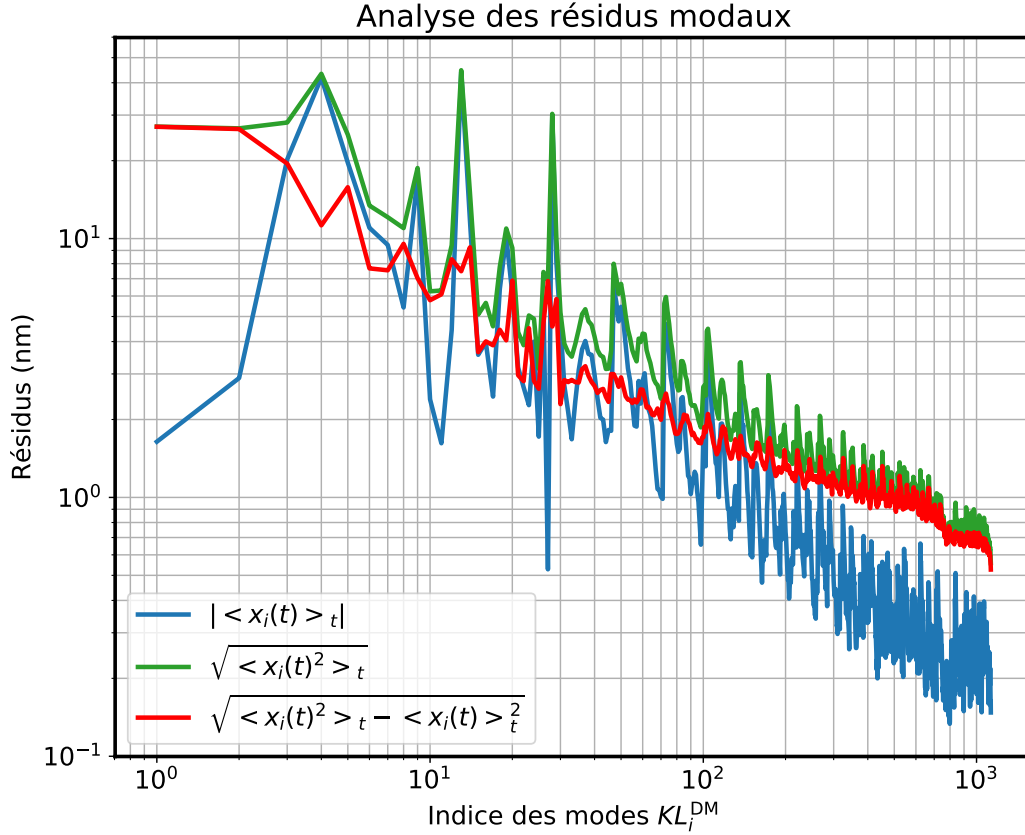


FIGURE 3.38: Analyse des résidus modaux en boucle fermée sur PYRCADO. Moyenne (bleu), moyenne quadratique (vert) et écart-type (rouge) sur 5 000 trames intégrées. Les résidus sont calculés à partir des cartes de phase envoyées sur le SLM et sont biaisés par l’aberration différentielle statique entre SLM et PWFS. Les courbes sont lissées à partir de l’indice $i = 20$ pour plus de lisibilité.

respectivement à :

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \langle x_i(t) \rangle_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= 93 \text{ nm RMS} \\ \left(\sum_i \langle x_i(t)^2 \rangle_t \right)^{\frac{1}{2}} &= 115 \text{ nm RMS} \\ \left(\sum_i \langle x_i(t)^2 \rangle_t - \langle x_i(t) \rangle_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= 67 \text{ nm RMS.} \end{aligned} \quad (3.26)$$

L’erreur de fitting est également estimée, comme l’orthogonal de la projection de $\phi_{\text{Atm}} - \phi_{\text{DM}}$ sur l’espace du DM. J’obtiens alors une erreur de fitting de 110 nm RMS, à comparer à une valeur théorique de 98 nm RMS avec l’équation 2.58. En

sommant la fitting à l'écart-type temporel de l'erreur modale, j'obtiens alors un front d'onde résiduel de 129 nm RMS. Ceci correspond, à travers la formule de Mahajan (équation 1.34), à un rapport de Strehl absolu de :

20% à 633 nm

79% en bande H (1 650 nm)

87% en bande K (2 200 nm).

Évidemment, quelques termes de budget d'erreur n'ont pas été pris en compte pour parvenir à cette estimation de Strehl, avec en tout premier lieu, la gestion convenable des NCPA qui reste à faire à ce stade. Néanmoins, la performance obtenue ouvre la voie à des démonstrations de performance prometteuses pour l'instrument MICADO, et pour l'utilisation du PWFS à l'échelle des ELT de manière générale.

Troisième partie

La pyramide pour les très hauts
ordres : problématiques,
algorithmes de compensation et
adaptation des lois de commande

Mésalignements et contrôle généralisé

Une partie de mes travaux a été déclenchée par un évènement fortuit, confronté sur le banc PYRCADO à des signaux qui ne trouveraient pas d'explication à travers le modèle théorique d'analyseur pyramide. De cette observation, j'en suis venu à construire une étude plus générale sur les conséquences que pouvaient avoir certains défauts des analyseurs pyramide sur la formation de l'information sur le front d'onde. Cette étude a abouti à des résultats à la fois concrets sur les méthodes de contrôle du PWFS, mais aussi conceptuels quant à la manière d'appréhender l'information créée par le senseur.

Sommaire

4.1	Contexte	124
4.1.1	Origine expérimentale	124
4.1.2	Généralisation des cartes de pentes	126
4.2	Article A&A2018 : Deo et al. (2018a)	128
4.3	Un complément : les mésalignements extrêmes	143
4.4	Et après ?	146
4.4.1	Les spécifications de l'analyseur SCAO de MICADO	147
4.4.2	Des résultats conceptuels	147

4.1 Contexte

4.1.1 Origine expérimentale

Lorsque j’ai pour la première fois pris en main l’expérience PYRCADO durant ma première année de doctorat, les toutes premières tentatives de boucle d’OA fermée donnaient des résultats surprenants. Les matrices d’interactions mesurées avec les cartes de pentes S_x et S_y (équation 2.25, notés par raccourci dans ce chapitre, $X[k]$ et $Y[k]$) présentaient un conditionnement bien plus défavorable que la matrice présentée à la section 3.5, donnant lieu à des performances end-to-end dégradées ou une boucle d’OA instable.

Un des problèmes réside alors dans l’aberration statique du train optique ; le processus que j’ai alors implémenté est de mesurer une matrice d’interaction préliminaire, autour d’un front d’onde statique moyen, suffisamment petit mais inconnu. Ce front d’onde comprend les aberrations cumulées du train optique, mais pour l’heure je n’utilise pas le SLM pour effectuer de pré-compensation. Partant de cette aberration, la boucle d’OA est mise en œuvre en utilisant des pentes de référence nulles, afin de faire converger le SLM vers ce que l’analyseur suppose être un front d’onde plan.

La PSF présente maintenant un cœur cohérent bien contrasté. Je montre sur la figure 4.1 un exemple des images typiques que j’ai alors obtenues sur le PWFS, avec la modulation activée ou désactivée (ici, $r_{\text{Mod}} = 8 \frac{\lambda}{D}$). L’image modulée, déjà, indique une curieuse répartition de l’illumination, avec une illumination des quadrants A et D notablement supérieure à celle des quadrants B et C .

Il convient alors de dresser les hypothèses pouvant conduire à un tel résultat. Sous l’hypothèse d’un prisme pyramidal idéal, il faudrait que la PSF au sommet de la pyramide présente un cœur allongé selon la direction -45° , voire plusieurs speckles principaux. Alors que cette possibilité serait tout à fait valide pour une source non ponctuelle, par exemple une étoile binaire orientée à -45° , nous travaillons sur PYRCADO avec une source laser cohérente et non résolue. Une PSF éclatée serait donc nécessairement associée à un front d’onde fortement non-plan sur l’analyseur ; ce qui induirait au sein de chaque quadrant des variations importantes de l’illumination. L’hypothèse d’une PSF très déformée est donc écartée : elle ne peut conduire à l’image de la figure 4.1 (droite). De plus, j’ai pu confirmer – par contrôle des caméras d’imagerie de PYRCADO – que le régime atteint nous donne une PSF avec un cœur cohérent bien contrasté par rapport aux halos et speckles qui l’entourent.

On ne peut alors qu’écarter la prémisse du raisonnement précédent : “un prisme pyramidal idéal”. L’observation faite est alors compatible avec une des configurations schématisées sur la figure A&A2018:3 (b-c), de sorte que les quadrants B et C soient moins illuminés que A et D .

C’est ce que confirme l’observation lorsque la modulation est arrêtée, montrée sur la figure 4.1 (gauche) : la PSF étant positionnée de telle sorte que le tilt vu est nul, c’est à dire que les flux dans les quadrants sont tels que $A+B = C+D$ et $A+C = B+D$. La lumière est alors diffractée, par le défaut de sommet, directement entre les quadrants

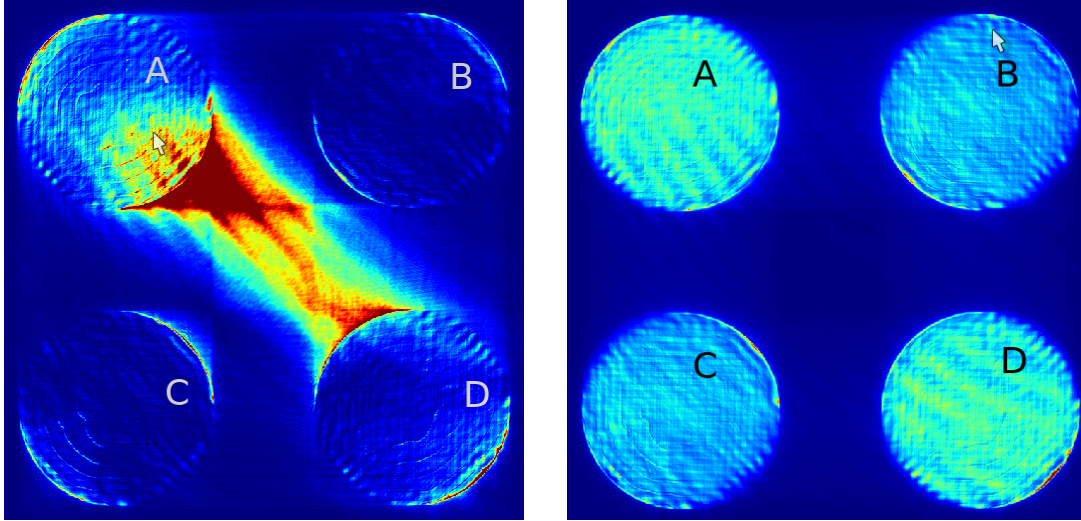


FIGURE 4.1: Images obtenues sur le banc PYRCADO, sans modulation (gauche) et avec modulation (droite), alors que le cœur de la PSF est stationné sur le sommet de la pyramide. Le prisme de test alors utilisé présente une arête transverse de sommet d'environ $80\ \mu\text{m}$ de longueur.

A et *D* ! On peut encore observer, beaucoup moins intenses, les bandes horizontales et verticales correspondant à la diffraction entre quadrants voisins, mais la bande illuminée diagonale de *A* à *D* les domine fortement.

Cette configuration confirme donc que le prisme alors utilisé présente une arête transverse au sommet, arête joignant les faces *A* et *D*, telle que dans l'exemple de la figure A&A2018:3 (c). Ce prisme a été changé depuis ; les mesures présentées au chapitre 3 et publiées dans Deo et al. (2018a) utilisent exclusivement le prisme de qualité de sommet supérieure.

J'ai pu valider l'hypothèse d'arête transverse au sommet en mettant en place une procédure d'analyse spatiale du sommet de la pyramide. Cette technique, moins directe que d'imager le sommet du prisme, présente l'avantage d'être immédiatement réalisable avec le matériel installé sur le banc SESAME, sans nécessité d'ajout de sources ou de démontage-remontage mécanique.

Je me suis d'abord assuré de former au sommet de la pyramide une PSF aussi proche de la limite de diffraction qu'il m'était possible de le faire, en maximisant le flux dans le cœur par un ajustement manuel des premiers modes de Zernike. Ensuite, je déplace à l'aide du miroir de tip-tilt cette PSF au voisinage du sommet du prisme pyramidal selon un quadrillage serré, et je mesure en chaque point de cette grille la fraction de l'illumination reçue à l'intérieur et à l'extérieur des quatre quadrants. Le ratio de l'énergie hors des quatre quadrants sur l'énergie totale reçue sur le CCD constitue une borne inférieure à la quantité d'énergie diffractée de façon non conforme au modèle du prisme parfait. La résolution est liée à la FWHM du cœur de PSF sur le sommet du prisme : $\frac{\lambda f}{D} = 31\ \mu\text{m}$. L'intensité hors des quadrants vient donc indiquer

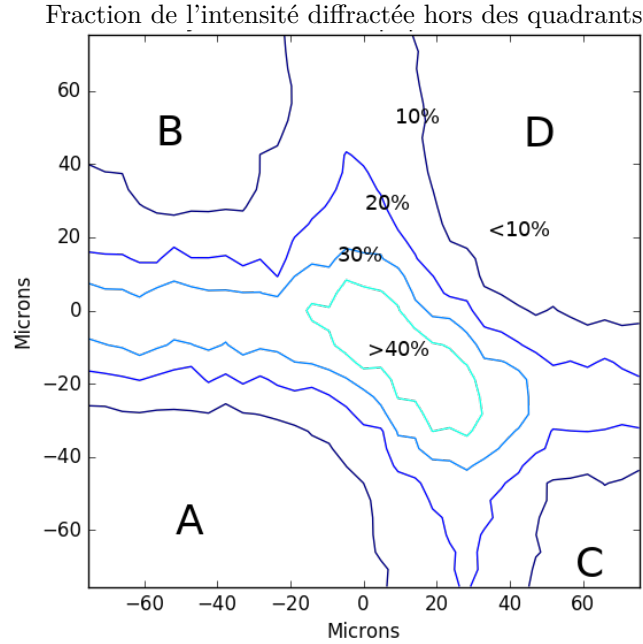


FIGURE 4.2: Analyse de la qualité du sommet du prisme pyramidal de rechange de PYRCADO par mesure de l'intensité diffractée en fonction de la position de la PSF dans le plan focal. A-D : correspondance des faces avec les quadrants sur la figure 4.1. $\frac{\lambda f}{D} = 31 \mu\text{m}$.

la présence de défauts diffractifs sur le sommet du prisme, et fournit par ailleurs un processus, grossier mais rapide, de vérification de la qualité d'usinage.

Cette quantité d'énergie diffractée, que je représente sur la figure 4.2, permet de valider ce que j'ai développé plus haut en analysant la figure 4.1 : ce prisme souffre d'un défaut de sommet de taille caractéristique $80 \times 30 \mu\text{m}$, de type roof entre les faces \mathcal{A} et \mathcal{D} . Le défaut s'étend sur l'arête séparant les faces \mathcal{A} et \mathcal{B} , le long de laquelle 30% au moins de l'illumination est diffractée hors des pixels utiles.

Bien plus tard dans ma thèse, j'ai pu confirmer la présence de ce défaut par imagerie directe du champ à travers le prisme pyramidal, micrographie que je montre sur la figure 4.3.

Suite à l'analyse présentée dans cette section, nous avons donc échangé le "mauvais" prisme pyramidal pour celui avec lequel sont effectués l'ensemble des résultats du chapitre 3 et ci-après ; ce second prisme s'est avéré être de bien meilleure qualité, avec un défaut de sommet symétrique et d'extension de l'ordre de $30 \mu\text{m}$.

4.1.2 Généralisation des cartes de pentes

C'est face aux observations présentées dans la section 4.1.1 et avant de se débarrasser de cette pyramide défectueuse, qu'est née l'idée d'une généralisation du contrôle

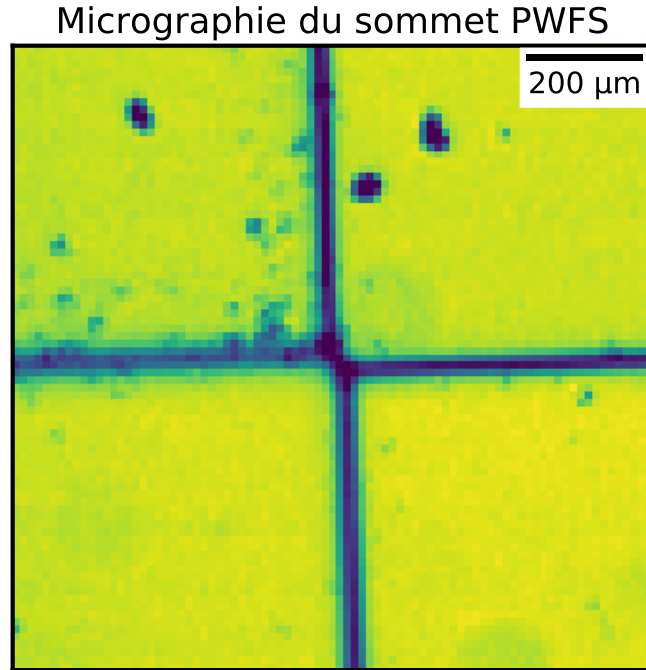


FIGURE 4.3: Micrographie optique du sommet du prisme pyramidal défectueux. L'orientation est identique à celle de la figure 4.2. $\frac{\lambda f}{D} = 31 \mu\text{m} = 2.4 \text{ px}$. On note la concentration des défauts de polissage sur la face supérieure gauche, et en particulier la qualité inférieure de l'arête gauche relativement aux trois autres.

de la pyramide : si la différence croisée des quadrants normalisés :

$$Z[k] = \frac{A[k] - B[k] - C[k] + D[k]}{A[k] + B[k] + C[k] + D[k]}, \quad (4.1)$$

(en écrivant cette équation avec la normalisation locale, sur l'indice k des sous-ouvertures) semble porter une quantité importante d'information, pourquoi ne trouverait-elle pas sa place au côté des cartes habituelles de gradient de front d'onde X et Y ?

Je propose deux éléments de réponse : d'abord, quand on confronte cette problématique aux modèles théoriques (Fauvarque, 2017) – de ceux d'optique géométrique aux plus complets – du PWFS, la réponse est immédiate : on devrait avoir

$$Z[k] = 0. \quad (4.2)$$

En revanche, ces modèles reposent sur l'hypothèse d'un prisme idéal aux arêtes infiniment fines et au sommet parfait. Expérimentalement, cette hypothèse ne tient pas, et on peut donc s'interroger sur l'information portée par le terme $Z[k]$ pour un prisme imparfait. Permet-elle d'améliorer la qualité du contrôle de la boucle d'OA ?

Quand j'utilise le contrôle conventionnel (c'est à dire les seuls pseudo-gradients $X[k]$ et $Y[k]$), la boucle d'OA est parfois divergente, ou alors convergente mais résulte en des PSF singulières avec de nombreux artefacts. Le fait de considérer comme pentes du PWFS le triplet $[X[k], Y[k], Z[k]]$ m'a permis d'obtenir les tous premiers résultats de bout-en-bout sur PYRCADO, avec une boucle d'OA stable et même raisonnablement performante – y compris avec le prisme défectueux présenté à la section 4.1.1.

C'est donc en résolvant la question suivante qu'est née l'étude qui suit : quels éléments ne sont pas couverts par les modèles théoriques habituels du PWFS, qui pourraient expliquer la plus-value au contrôle apportée par le terme $Z[k]$? C'est dans l'indice k que j'ai cherché un premier élément de réponse : on présuppose qu'il est possible d'associer quatre pixels des quadrants A , B , C et D qui correspondent à un élément de surface unique et commun de la pupille d'entrée du télescope. En général, cette propriété n'est pas vraie.

La modélisation mathématique et la validation extensive de cette nouvelle méthode, à travers une généralisation de la notion d'espace des pentes du PWFS (section 2.4.2), est arrivée avec la préparation de l'article [Deo et al. \(2018a\)](#), présenté dans la section 4.2 ci-dessous. Je réfère au contenu de cet article à travers ce chapitre par la notation [A&A2018](#).

4.2 Article [A&A2018](#) : [Deo et al. \(2018a\)](#)

L'article suivant a été publié en novembre 2018 dans le journal *Astronomy & Astrophysics*. J'y développe deux notions principales : premièrement, une étude autour de la géométrie de l'échantillonnage des quatre pupilles ré-imaginées sur la caméra du PWFS ; et deuxièmement, la généralisation de l'espace des mesures du PWFS.

Jusqu'alors, on considère presque toujours qu'un analyseur pyramide est susceptible d'être suffisamment bien aligné de telle sorte que l'on puisse extraire quatre pixels de chacun des quatre quadrants, qui définissent une même surface géométrique dans la pupille de l'instrument ([Ragazzoni, 1996](#); [Vérinaud, 2004](#); [Shatokhina et al., 2014](#)). À cause des limitations du procédé de fabrication ou de la qualité de l'alignement, comme schématisé sur la figure [A&A2018:3](#), cette propriété tombe souvent en défaut, bien que la qualité accessible soit en constante amélioration ([Pinna et al., 2017](#)).

Je propose alors un formalisme général pour déterminer la propagation de l'information utile à l'analyse de front d'onde à travers les quatre combinaisons linéaires possibles X , Y , Z , et F des quatre quadrants imagés A , B , C , et D . J'ajoute les deux dernières Z et F (où F comme *flux* est la somme de A , B , C , et D) comme une extension algébriquement naturelle des cartes de gradient habituellement utilisées X et Y et j'explore leurs propriétés.

L'étude analytique me permet d'obtenir d'une part un processus optimal de co-sélection des pixels entre les quadrants si l'on se cantonne au contrôle par cartes de pentes usuel ; et d'autre part la démonstration que même si le calcul des mesures en X et Y rendent invisibles certaines fréquences spatiales, ce signal est rendu disponible –

avec un SNR identique – dans la combinaison des 4 signaux $XYZF$. Cette démonstration analytique est assortie d’une étude statistique sur la répartition de l’information entre ces quatre combinaisons linéaires des quadrants normalisés, avec pour finalité principale de démontrer que le maintien de conditions d’alignement suffisantes pour permettre l’utilisation satisfaisante d’un contrôleur conventionnel (utilisant uniquement X et Y) est un problème non-trivial.

Dans la seconde partie, je valide que la méthode de contrôle généralisé (dit $XYZF$) ou même sa simplification en considérant directement les pixels normalisés comme la sortie du PWFS (dit contrôle $ABCD$) fournit une performance de bout-en-bout identique ou supérieure au contrôle conventionnel, dans des conditions de mésalignement relatif des quadrants allant de négligeables à très excessives : le fonctionnement nominal de la boucle d’OA avec ces nouveaux modes de contrôle est garanti, même quand la sélection des pixels utiles est rendue artificiellement et visiblement très défectueuse.

Erratum

Suite à une erreur en production, dans l’article suivant [Deo et al. \(2018a\)](#), p. 2, deuxième colonne, le texte suivant manque immédiatement avant l’équation [A&A2018:4](#) : “[Normalized quadrants, either local or global, are] rearranged into measurement terms depending on the PWFS operation method. Conventionally, quad-cell SH-like terms X, Y are used as follows :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{\text{norm}} \\ Y_{\text{norm}} \end{bmatrix} [k] &= \begin{bmatrix} A_{\text{norm}} - B_{\text{norm}} + C_{\text{norm}} - D_{\text{norm}} \\ A_{\text{norm}} + B_{\text{norm}} - C_{\text{norm}} - D_{\text{norm}} \end{bmatrix} [k] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{\text{norm}} \\ B_{\text{norm}} \\ C_{\text{norm}} \\ D_{\text{norm}} \end{bmatrix} [k]. \end{aligned}$$

Assessing and mitigating alignment defects of the pyramid wavefront sensor: a translation insensitive control method

V. Deo¹, É. Gendron¹, G. Rousset¹, F. Vidal¹, T. Buey¹, and M. Cohen²

¹ LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
e-mail: vincent.deo@obspm.fr

² GEPI, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Received 20 June 2018 / Accepted 20 August 2018

ABSTRACT

The pyramid wavefront sensor (PWFS) is the currently preferred design for adaptive optics (AO) systems for extremely large telescopes, as focal plane wavefront sensing bears potential for a large intrinsic sensitivity gain when compared to Shack–Hartmann (SH) sensors. Yet, obtaining a high quality pyramidal prism and a model-consistent assembly remains a critical design factor. We demonstrate that the traditional gradient sensing controller is extremely sensitive to prism shape defects and assembly misalignments. We show that even optimal registration of quadrants on the detector may be insufficient to prevent misalignment induced performance loss through a theoretical analysis of the impact of detection plane quadrants sampling errors and individual translations, which may be induced by a variety of mechanical defects. These misalignments displace wavefront information to terms not included in the conventional gradient-like slopes maps and high spatial frequencies become invisible to the sole X - and Y - axis differences. We introduce expanded space control (ESC) for quad-cell signal by generalizing output measurements of the PWFS and demonstrate its insensitivity to misalignment-induced information loss, therefore dramatically relaxing machining and alignment constraints for PWFS engineering. This work presents the theoretical developments leading to ESC design, along with validating performance and robustness results, both in end-to-end numerical simulations and on a PWFS demonstrator bench at LESIA.

Key words. instrumentation: adaptive optics – techniques: high angular resolution – telescopes

1. Introduction

This paper presents novel research about pyramid wavefront sensor (PWFS; [Ragazzoni 1996](#)) control, conducted within the MICADO SCAO module ([Davies et al. 2010](#); [Clénet et al. 2014](#)) development at LESIA. Developing a PWFS-based adaptive optics (AO) system with more than 80×80 pupil points resolution for the European Extremely Large Telescope (the ELT) brings up unprecedented scalability challenges to state-of-the-art focal plane sensing, making of paramount importance the current effort to gather experience, data, and thorough knowledge of PWFSs. Since its introduction, the PWFS was demonstrated to provide a valuable sensitivity increase over equivalent Shack–Hartmann (SH) sensors ([Ragazzoni & Farinato 1999](#); [Esposito et al. 2010](#)). However, theoretical and experimental developments on the PWFS remain an active and open research topic. Knowledge of modulation impact ([Ragazzoni et al. 2002b](#)), signal normalization, edge-diffracted photons usage ([Vérinaud 2004](#)), theoretical models ([Shatokhina 2014](#); [Fauvarque et al. 2016a,b](#)), optimal modal control ([Gendron & Léna 1994](#); [Korkiakoski et al. 2008a](#); [Deo et al. 2018](#)), or phase reconstruction algorithms do not yet converge into a unique, well-established set of operation guidelines.

This paper presents a possible improvement to PWFS control, called expanded space control (ESC). Through expanding the dimension of the sensor data space, ESC provides an operating mode that is robust to independent translations of the four sensor quadrants and therefore to several PWFS defects. First,

Sect. 2 describes in detail the mathematics of extracting PWFS signal from the detector and a generalized formalism to describe different preprocessing options. Section 3 covers how pyramid prism defects propagate into detector plane misalignments and why models requiring well-defined subapertures do not hold for PWFS. Section 4 covers a statistical analysis of misalignment distribution and proposes an optimal method to preselect detector data given the misalignment. Sections 5 and 6 introduce an approach similar to system transfer function (TF) to shed light on the reconstruction completeness issue with conventional control and ESC, and propose quantitative figures of merit for design risk assessment. Finally, Sect. 7 presents end-to-end performance results, depending on signal normalization and misalignment, through simulations with the COMPASS software ([Gratadour et al. 2014](#); [Carlotti et al. 2014](#)), and end-to-end runs on a laboratory demonstrator bench.

2. Measurements of the pyramid wavefront sensor

Imaging the telescope pupil, or an altitude layer meta-pupil in layer-oriented AO ([Ragazzoni et al. 2002a](#)), through a PWFS or a conceptually similar focal plane optical design ([Horwitz 1994](#); [Gendron et al. 2010](#)) generates four pupil-like images (quadrants) in the detection plane, as shown in Fig. 1. These quadrants can generally be assumed to be optically independent, for example, when using a focal-point splitting prism with sufficient angular deviation ([Fauvarque et al. 2016b](#)). Pupil quadrant intensity maps A_{Raw} , B_{Raw} , C_{Raw} , and D_{Raw} , referred to as “Raw” before preprocessing, are extracted by selecting

PWFS: Pixel masking & quadrant selection

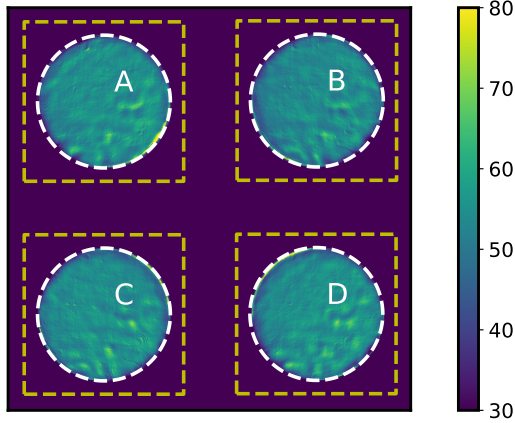


Fig. 1. Typical observation on the PWFS detector – here on the laboratory bench –, illustrating a priori requirements for the pixel mask. White: conventional control requires subpixel precision in estimating contours and centers of quadrants. Yellow: with ESC, an estimated selection zone containing all illuminated pixels of each quadrant is sufficient. Irrelevant pixels can be eliminated from the selection zone afterward.

geometrically relevant areas of the detection plane and cropping to the illuminated pupil-shaped quadrant area as follows:

$$\begin{bmatrix} A_{\text{Raw}}(x, y) \\ B_{\text{Raw}}(x, y) \\ C_{\text{Raw}}(x, y) \\ D_{\text{Raw}}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(x - x_A, y - y_A) \\ I(x - x_B, y - y_B) \\ I(x - x_C, y - y_C) \\ I(x - x_D, y - y_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cropped to pupil} \\ \text{quadrant footprint} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where $(x_i, y_i)_{i=A,B,C,D}$ are quadrants geometrical centers and $I(x, y)$ is the spatially continuous intensity map in the detection plane. Quadrant intensities $A_{\text{Raw}}, B_{\text{Raw}}, C_{\text{Raw}}, D_{\text{Raw}}(x, y)$ are binned and discretized by the detector pixel matrix into two-dimensional matrices $\bullet[m, n]$, which we alternately consider in a vectorized form $\bullet[k]$, i.e., as a list of pixel values, possibly restricted only to a subset of sufficiently illuminated pixels. Valid $[m, n]$ (or $[k]$) indices are defined by the selected pixel/subaperture mask, which must be identical for all four quadrants, as shown in Fig. 1. We inherit the term of subaperture from its usual acceptance with SH sensors: the projected footprint of the $[m, n]$ pixel of each quadrant in the entrance pupil, although it must be assumed those four footprints are identical.

Different approaches exist to process the quadrant pixels into meaningful measurements. First, the quadrants need to be normalized: the “local” normalization (noted \bullet_{Loc}), originally introduced by Ragazzoni (1996), proposes normalizing by the total intensity per subaperture as follows:

$$\begin{bmatrix} A_{\text{Loc}}[k] \\ B_{\text{Loc}}[k] \\ C_{\text{Loc}}[k] \\ D_{\text{Loc}}[k] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_{Q=A,B,C,D} Q_{\text{Raw}}[k]} \begin{bmatrix} A_{\text{Raw}}[k] \\ B_{\text{Raw}}[k] \\ C_{\text{Raw}}[k] \\ D_{\text{Raw}}[k] \end{bmatrix}, \quad (2)$$

so as to bring a convenient closed form expression for relevant measurements (Eq. (5)) within the ray optics modelization of the PWFS. Another normalization method, referred to as the “global” method hereafter (noted \bullet_{Glob}) was first proposed by Véronaud (2004), using the spatially averaged intensity,

$$\begin{bmatrix} A_{\text{Glob}}[k] \\ B_{\text{Glob}}[k] \\ C_{\text{Glob}}[k] \\ D_{\text{Glob}}[k] \end{bmatrix} = \frac{1}{\left\langle \sum_{Q=A,B,C,D} Q_{\text{Raw}}[k] \right\rangle_k} \begin{bmatrix} A_{\text{Raw}}[k] \\ B_{\text{Raw}}[k] \\ C_{\text{Raw}}[k] \\ D_{\text{Raw}}[k] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

where $\langle X[k] \rangle_k$ is the average of vector X over all indices k . This normalization was motivated by more recent small-signal linearized models of the PWFS, and is now widely adopted in the community. Normalized quadrants, either local or global, are

$$\begin{bmatrix} X_{\text{norm}} \\ Y_{\text{norm}} \end{bmatrix} [k] = \begin{bmatrix} A_{\text{norm}} - B_{\text{norm}} + C_{\text{norm}} - D_{\text{norm}} \\ A_{\text{norm}} + B_{\text{norm}} - C_{\text{norm}} - D_{\text{norm}} \end{bmatrix} [k] \\ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{\text{norm}} \\ B_{\text{norm}} \\ C_{\text{norm}} \\ D_{\text{norm}} \end{bmatrix} [k],$$

where $\text{norm} \in \{\text{Loc}, \text{Glob}\}$. (4)

In this formalism, the traditional gradient-like measurements along the axes are therefore noted $X_{\text{Loc}}, Y_{\text{Loc}}$ or $X_{\text{Glob}}, Y_{\text{Glob}}$ depending on the normalization. The derivation in the ray optics approximation in Ragazzoni (1996) establishes the relationship between the continuous measurements $X_{\text{Loc}}, Y_{\text{Loc}}$ and the gradient of the wavefront in the pupil,

$$\begin{bmatrix} X_{\text{Loc}} \\ Y_{\text{Loc}} \end{bmatrix} (x, y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{\alpha} \overrightarrow{\text{Grad}}(\delta)(x, y) \right), \quad (5)$$

where $\delta(x, y)$ is the optical path difference in the entrance pupil and α is the circular modulation half-angle. This leads to consider in discretized space,

$$\begin{bmatrix} X_{\text{Loc,Sine}} \\ Y_{\text{Loc,Sine}} \end{bmatrix} [k] = \sin \left(\frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} X_{\text{Loc}} \\ Y_{\text{Loc}} \end{bmatrix} [k] \right), \quad (6)$$

to obtain, assuming derivation approximations and leaving discretization aside, a sensible measurement of $\overrightarrow{\text{Grad}}(\phi)(x, y)$.

We propose generalizing measurement methods by considering additional terms beyond gradient-like $X_{\text{Loc}/\text{Glob}}$ and $Y_{\text{Loc}/\text{Glob}}$. ESC (Deo et al. 2017) of the PWFS considers sensor output to be a combination of the former X, Y terms with two newly defined terms: a cross-coupling term $Z_{\text{Loc}/\text{Glob}}$ and an intensity term $F_{\text{Loc}/\text{Glob}}$, defined by the following linear transform:

$$\begin{bmatrix} X_{\text{norm}} \\ Y_{\text{norm}} \\ Z_{\text{norm}} \\ F_{\text{norm}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} A_{\text{norm}} \\ B_{\text{norm}} \\ C_{\text{norm}} \\ D_{\text{norm}} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

where $\text{norm} \in \{\text{Loc}, \text{Glob}\}$.

The typical structure of these four ESC measurements is shown in Fig. 2, for a perfectly aligned PWFS (top) and a misaligned system (bottom). The example in Fig. 2 is obtained from interaction matrices of end-to-end simulations, whose setups and parameters are covered in detail in Sect. 7.1.

This formalism allows us to define a variety of measurement computation options; possibly any combination of terms A, B, C, D and X, Y, Z, F with either local or global normalization. A synthesis of end-to-end performance with various PWFS measurements is presented in Sect. 7.2. In this section we obtain results for an ideal PWFS with perfect alignment, using the end-to-end AO simulator COMPASS (Gratadour et al. 2014) and we conclusively validate the superior performance of global measurement methods over local measurement methods, or $XY_{\text{Loc,Sine}}$ (Eq. (6)), at all illuminations.

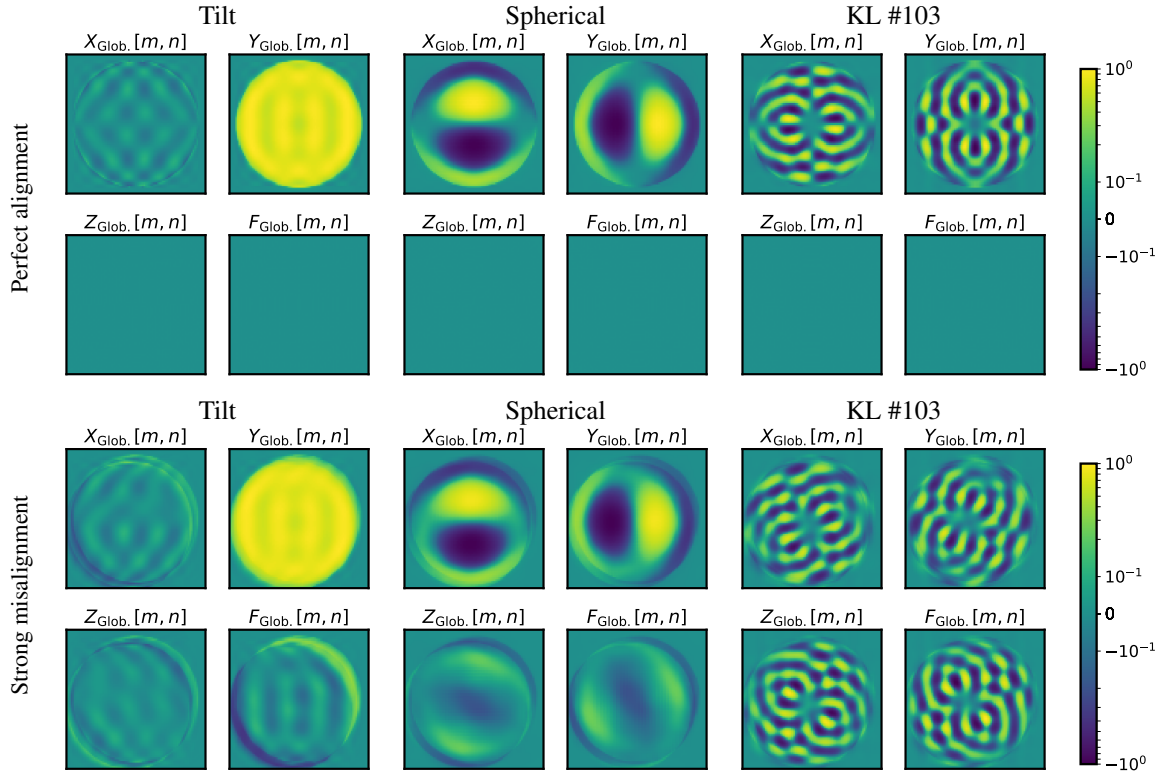


Fig. 2. Simulated small-signal differential response (interaction matrix measurement) of the PWFS in the four ESC measurement maps for 3 aberrations: tilt (*left*), spherical (*center*), and higher frequency Karhunen–Loève #103 (*right*). *Top row*: the system is perfectly aligned and differential signals in Z_{Glob} and F_{Glob} are zero. *Bottom row*: exaggerated misalignment case (up to $\approx 5\%$ of pupil diameter for each quadrant), illustrating how information is now spread across all four X, Y, Z, F_{Glob} ESC measurements.

3. Misalignments of pyramid quadrants

Theoretical models of the PWFS usually rely on matching $\bullet[m, n]$ quadrant pixels to be exactly superimposed, i.e., in a comparison with a quad-cell SH, such that they correspond to a given well-defined subaperture (Sect. 2). However, the PWFS optical concept introduces additional degrees of freedom due to both machining and alignment uncertainties, which do not have equivalents in the quad-cell SH framework, such as independent translations of each of the four quadrants with respect to the detector sampling. This study thoroughly covers this case, and leaves aside other potential effects such as differential pupil magnification, rotation, or distortion, which we believe to be at worst of a second order, if not non-existent, in classical refractive optical designs. With these restrictions stated, we believe that the conclusions of this research should apply to those defects as well were they to be encountered in some hypothetical future experimental design. The schematics in Fig. 3 synthesize how archetypal pyramid apex defects introduce quadrant translations and modify the intensity at the PWFS zero aberration operating point, thus introducing signals unphysical to a perfect PWFS.

Even with major effort given to machining pyramidal prisms with the greatest precision, the latest investigations (Pinna et al. 2017) report quadrant positioning up to a precision of only $\approx 1\%$ of the pupil diameter, which still represents a significant portion of a subaperture for ELT-sized PWFS designs. For that reason, we assume that risk mitigation procedures are required on the basis of lack of accurate subpixel positioning capability of the quadrants.

After the translation and cropping process (Eq. (1)), quadrants are sampled and discretized by the pixel matrix. We define the “true” quadrants as the would-be measurements if the

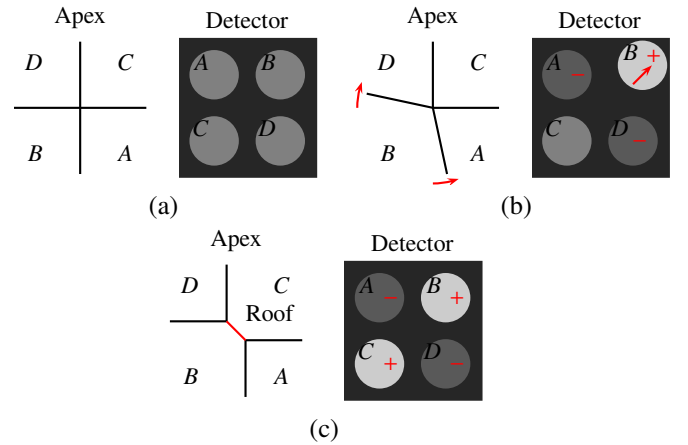


Fig. 3. Schematic representations of common defects on the prism apex and their impact on quadrant positioning. *Panel a*: nominal design of the pyramid apex: quadrants lie on a perfect square, although the side length of the square needs not match an integer multiple of the pixel size. *Panel b*: polishing angle of facet B is excessive, shifting outward edges of facet B ; quadrant B is moved away from the optical axis and receives more flux, whereas A and D receive less. *Panel c*: facet polishing depth is unequal, creating a roof apex. Intensities at zero-phase point are modified.

quadrant centers $(x_i, y_i)_{i=A,B,C,D}$ were to lie exactly at the center of pixels, defining the following discretization:

$$A_{\text{Raw}}^{\text{True}}[m, n] = \iint_{x,y} A_{\text{Raw}}(x, y) \times \Pi(x - x_A - m, y - y_A - n) dx dy, \quad (8)$$

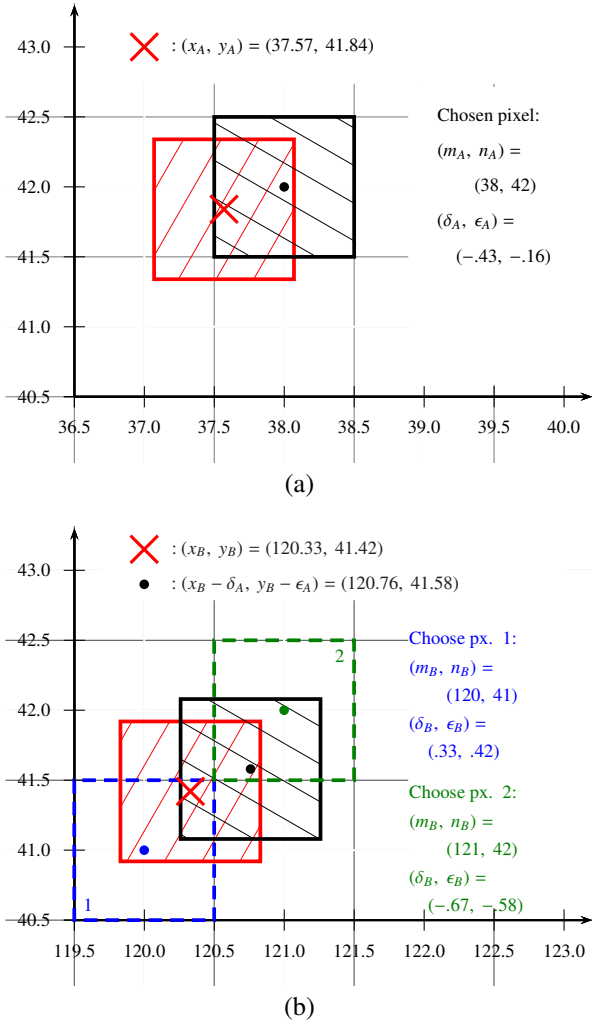


Fig. 4. Schematized selection of the detector pixels corresponding to the centers of the first two quadrants A and B. Information is primarily obtained that $(x_A, y_A) = (37.57, 41.84)$ and $(x_B, y_B) = (120.33, 41.42)$ for this example. *Panel a:* idealized $[0, 0]$ central pixel for quadrant A (red) and nearest detector pixel (black) chosen as $[0, 0]$ reference. *Panel b:* at the center of quadrant B; red: idealized $[0, 0]$ pixel for quadrant B; black: subaperture footprint of the $[0, 0]$ pixel chosen for quadrant A; blue and green: possible pixel choices for $[0, 0]$ of B: pixel “1” (blue) minimizes absolute misalignment ($|\delta_B|, |\epsilon_B|$), whereas pixel “2” (green) minimizes the differential misalignment ($|\delta_B - \delta_A|, |\epsilon_B - \epsilon_A|$). Solid grid on *panels a* and *b*: detector pixel boundaries.

and similarly for quadrants B, C, and D, where $\Pi(x, y)$ is the unit rectangular function ($\Pi(x, y) = 1$ if $|x| < \frac{1}{2}$ and $|y| < \frac{1}{2}$; 0 otherwise), and assuming a lattice of identical, square pixels completely covering the detector surface. However, as geometrical centers need not match any pixel center, the actual measurement becomes

$$A_{\text{Raw}}^{\text{Meas.}}[m, n] = \iint_{x,y} A_{\text{Raw}}(x, y) \times \Pi(x - m_A - m, y - n_A - n) dx dy, \quad (9)$$

where $[m_i, n_i]_{i=A,B,C,D}$ are the indices of the detector pixel retained as approximate center for quadrant i . The idealized versus actual pixel sampling issue is illustrated in Fig. 4a, and the misalignment-inducing decision issue that arises with a second quadrant in Fig. 4b.

We define the following quantity for all quadrants:

$$\begin{bmatrix} (\delta_A, \epsilon_A) \\ (\delta_B, \epsilon_B) \\ (\delta_C, \epsilon_C) \\ (\delta_D, \epsilon_D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_A - m_A, y_A - n_A) \\ (x_B - m_B, y_B - n_B) \\ (x_C - m_C, y_C - n_C) \\ (x_D - m_D, y_D - n_D) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

which is not a misalignment indicator yet, but the offset between the geometric centers of quadrants (x_i, y_i) and the coordinates $[m_i, n_i]$ on the pixel matrix considered as such. We establish the link between these offsets and misalignment quantities in the following sections.

The importance of selecting appropriate central pixels to have subaperture-like correspondence when processing quadrants into measurement maps is critical and is discussed in detail in Sect. 5. Selection methods given knowledge of the center (x_i, y_i) are discussed below in Sect. 4, looking toward (a) an optimal way to select the central pixels (m_i, n_i) and (b) indicators of worst and average-case scenarios for random alignment configurations.

4. Pixel selection and misalignment distributions

Beyond the opto-mechanical causes of PWFS quadrant translations, the question arises of how to perform pixel selection – computing $[m_i, n_i]$ – to obtain the smallest amount of misalignments (δ_i, ϵ_i) , and the best possible PWFS operating conditions. Working hypotheses are that (1) we assume a design where no extensive mechanical or optical effort was undertaken to guarantee subpixel quadrant positioning, and therefore the fractional parts of (x_i, y_i) are uniformly distributed and (2) quadrant positions in the detecting planes (x_i, y_i) are accurately measured.

We quantify the amount of misalignment in the system with the maximum position difference between any two quadrants, on a single axis and on both axes, as follows:

$$\begin{aligned} \text{MaxMis}_x &= \max\{|\delta_i - \delta_j|, \quad i, j \in \{A, B, C, D\}, i \neq j\} \\ \text{MaxMis}_y &= \max\{|\epsilon_i - \epsilon_j|, \quad i, j \in \{A, B, C, D\}, i \neq j\} \\ \text{MaxMis}_{\text{both ax.}} &= \max\{\text{MaxMis}_x, \text{MaxMis}_y\}, \end{aligned} \quad (11)$$

and we use this metric in the next paragraphs, where we analyze three pixel selection methods, comparing their performance regarding the distribution of **MaxMis** on average and worst case scenarios.

Naive approach. The most common approach for finding central pixels, referred to as the naive method thereafter, is to simply round off each quadrant’s center independently to the nearest detector pixel,

$$m_i, n_i = \text{round}(x_i), \text{round}(y_i), \quad (12)$$

which leads to δ_i, ϵ_i uniformly distributed in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. As illustrated in Fig. 4b, this method may lead to suboptimal pixel choices starting with two quadrants: the naive method makes selection of pixel “1”, while choosing pixel “2” allows for reduced **MaxMis** values on both axes. This early arising issue with pixel selection in terms of differential quadrant misalignment appears striking enough to justify seeking more suitable techniques.

Reference quadrant method. The reference quadrant method consists in selecting an arbitrary quadrant, for example, A, to round off $(x_i, y_i)_{i=B,C,D}$ in the idealized pixel frame of quadrant A, and finally replacing quadrants on the pixel grid of the

Table 1. Statistical indicators of the alignment quality obtained with 3 alignment methods detailed in the text and Appendix A.

Method:	Naive	Ref. quad.	Optimal
$\max_{\{\delta_i\}}(\mathbf{MaxMis}_{x,y})$	1	1	0.75
$\mathbb{E}(\mathbf{MaxMis}_{x,y})$	0.6	0.530	0.479
Median($\mathbf{MaxMis}_{x,y}$)	0.614	0.5	0.5
$\mathbb{E}(\mathbf{MaxMis}_{\text{both ax.}})$	0.715	0.638	0.554
Median($\mathbf{MaxMis}_{\text{both ax.}}$)	0.731	0.643	0.565

Notes. All values in px units.

detector by a common translation. It is therefore guaranteed that misalignments are less than $\frac{1}{2}$ px with the reference quadrant,

$$\begin{aligned} \delta_A, \epsilon_A &\in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & \delta_{B,C,D} &\in \left[\delta_A - \frac{1}{2}, \delta_A + \frac{1}{2}\right], \\ \epsilon_{B,C,D} &\in \left[\epsilon_A - \frac{1}{2}, \epsilon_A + \frac{1}{2}\right], \end{aligned} \quad (13)$$

but yet misalignments between non-reference quadrants may remain larger than $\frac{1}{2}$ px. While misalignments are statistically smaller than with the naive method (Table 1) the upper bound $\mathbf{MaxMis} \leq 1$ remains unchanged.

Optimal method. We propose an optimal method to obtain $[m_i, n_i]$ values systematically minimizing \mathbf{MaxMis} , whose implementation and proof of optimality are detailed in Appendix A. With optimal pixel choice, the upper bound is reduced to $\mathbf{MaxMis}_{x,y} \leq \frac{3}{4}$, reached only for evenly-spaced cases,

$$\begin{aligned} x_A = x_A, \quad x_B = x_A + \frac{1}{4}, \quad x_C = x_A + \frac{1}{2}, \quad x_D = x_A + \frac{3}{4} \\ \text{(or permutations thereof),} \end{aligned} \quad (14)$$

demonstrating worst-case PWFS alignment scenarios with a pair of quadrant having $\frac{3}{4}$ px relative misalignment.

Using David & Nagaraja (2005), we derived analytical distributions for $\mathbf{MaxMis}_{x,y}$ and $\mathbf{MaxMis}_{\text{both ax.}}$, for all three methods with results synthesized in Fig. 5 and Table 1. In particular for the optimal method, we obtain:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{MaxMis}_{x,y}) &= \frac{23}{48} \approx 0.479 \\ \mathbb{E}(\mathbf{MaxMis}_{\text{both ax.}}) &\approx 0.554, \end{aligned} \quad (15)$$

showing that even with optimized pixel selection, a misalignment of $\frac{1}{2}$ px or more along either axis is to be expected and accounted for in PWFS operation. This underlines not only the importance of assessing the performance impact of such misalignments, but also of proposing risk mitigating methods regarding those impacts.

5. Misalignments: an analytical transform

5.1. Definition

As mentioned in Sects. 1 and 2, several models have been established around the PWFS since its introduction (Ragazzoni 1996; V erinaud 2004; Shatokhina et al. 2013; Shatokhina 2014; Fauvarque et al. 2016a). Although it is beyond the scope of this paper to discuss the analytical validity of these models, we briefly summarize our hypotheses in this matter as follows: that the signals $X_{\text{Loc|Glob}}^{\text{True}}$ and $Y_{\text{Loc|Glob}}^{\text{True}}$ are (1) direction-sensitive operators along the axes, which may be linearized in a small signal

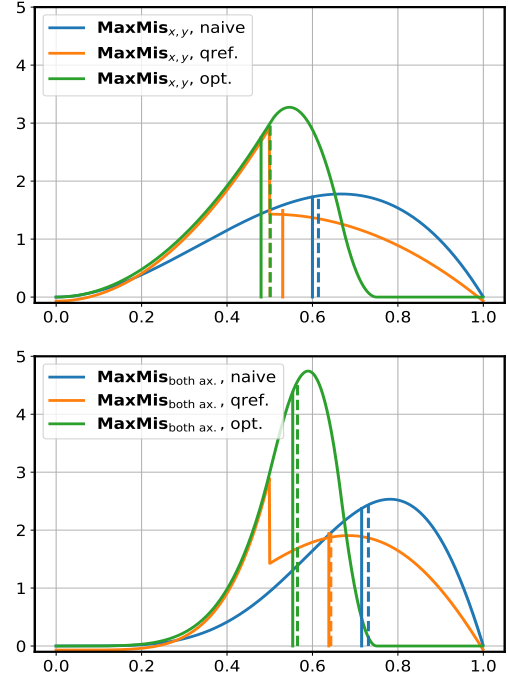


Fig. 5. Probability density functions (pdf) for *top*: $\mathbf{MaxMis}_{x,y}$ and *bottom*: $\mathbf{MaxMis}_{\text{both ax.}}$ for pixel centering performed with naive, reference quadrant (qref.) or optimal methods (opt.). Solid (dashed) vertical lines highlight the average (median) of the corresponding pdf. Opt. and qref. pdfs overlap below 0.5, which is their common single-axis median.

regime compatible with AO closed loop operation and (2) contain sufficient information to perform a complete and unambiguous (besides piston mode) phase reconstruction. This latter point has been recently demonstrated in Fauvarque et al. (2016a) in the small-signal context: X^{True} and Y^{True} signals contain all available phase information, whereas Z^{True} and F^{True} small-signal linearizations are analytically null, and thus convey no information. This demonstration however holds only if (1) the pyramidal apex is ideal and (2) quadrants are ideally sampled and referenced, i.e., if $\mathbf{MaxMis}_{\text{both ax.}} = 0$.

We show that when either condition above fails – thus inducing unforeseen independent translations of the quadrants – information is shifted out from X and Y signals into $Z^{\text{Meas.}}$ and $F^{\text{Meas.}}$. Let us express the relationship between idealized quadrants and actual measurements before pixel discretization occurs; we can express the translation of each quadrant (with abusive notations),

$$\begin{bmatrix} A^{\text{Meas.}}(x,y) \\ B^{\text{Meas.}}(x,y) \\ C^{\text{Meas.}}(x,y) \\ D^{\text{Meas.}}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\text{True}}(x - \delta_A, y - \epsilon_A) \\ B^{\text{True}}(x - \delta_B, y - \epsilon_B) \\ C^{\text{True}}(x - \delta_C, y - \epsilon_C) \\ D^{\text{True}}(x - \delta_D, y - \epsilon_D) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

but this relationship does not conveniently transform through pixel discretization. However, taking the spatial Fourier transform of Eq. (16) (strictly, of Eqs. (8) and (9)), a relationship is obtained that also expresses conveniently after discretization as

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^{\text{Meas.}}(u,v) \\ \hat{B}^{\text{Meas.}}(u,v) \\ \hat{C}^{\text{Meas.}}(u,v) \\ \hat{D}^{\text{Meas.}}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(2i\pi(\delta_A u + \epsilon_A v)) \cdot \hat{A}^{\text{True}}(u,v) \\ \exp(2i\pi(\delta_B u + \epsilon_B v)) \cdot \hat{B}^{\text{True}}(u,v) \\ \exp(2i\pi(\delta_C u + \epsilon_C v)) \cdot \hat{C}^{\text{True}}(u,v) \\ \exp(2i\pi(\delta_D u + \epsilon_D v)) \cdot \hat{D}^{\text{True}}(u,v) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

where $\hat{f}(u,v)$ is the two-dimensional discrete space Fourier transform of $f[m,n]$ (zero-padded at will), and u, v are spa-

tial frequencies in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{px}^{-1}$. Using the \mathbf{P} transform (Eq. (7)) between normalized quadrants and ESC measurements $X, Y, Z,$ and F , and using $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \mathbf{P}^t$, we obtain:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}^{\text{Meas.}} \\ \hat{Y}^{\text{Meas.}} \\ \hat{Z}^{\text{Meas.}} \\ \hat{F}^{\text{Meas.}} \end{bmatrix} (u, v) = \underbrace{\frac{1}{4} \mathbf{P} \Delta(u, v) \mathbf{P}^t}_{\hat{\mathbf{M}}\text{is}} \begin{bmatrix} \hat{X}^{\text{True}} \\ \hat{Y}^{\text{True}} \\ \hat{Z}^{\text{True}} \\ \hat{F}^{\text{True}} \end{bmatrix} (u, v), \quad (18)$$

where Δ is the complex linear phasor corresponding to quadrant translations

$$\Delta(u, v) = \text{Diag} \begin{bmatrix} \exp(2i\pi(\delta_A u + \epsilon_A v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_B u + \epsilon_B v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_C u + \epsilon_C v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_D u + \epsilon_D v)) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

The complex-valued, Fourier domain $\hat{\mathbf{M}}\text{is}$ transformation (Eq. (18)) provides us with a block-wise TF from the four perfect alignment measurements \bullet^{True} to the PWFS actual measurements $\bullet^{\text{Meas.}}$. The $\hat{\mathbf{M}}\text{is}$ operator is a unitary transform at all frequencies with specific structure,

$$\hat{\mathbf{M}}\text{is}(u, v) = \begin{bmatrix} p & q & r & s \\ q & p & s & r \\ r & s & p & q \\ s & r & q & p \end{bmatrix}$$

with $\begin{bmatrix} s \\ r \\ q \\ p \end{bmatrix} (u, v) = \frac{1}{4} \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \exp(2i\pi(\delta_A u + \epsilon_A v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_B u + \epsilon_B v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_C u + \epsilon_C v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_D u + \epsilon_D v)) \end{bmatrix}, \quad (20)$

and with coefficients additionally verifying $|p + q + r + s|(u, v) = 1$ for any frequency (u, v) . Additionally, each of the terms is Hermitian in (u, v) , for example, $p(-u, -v) = \text{conj}(p(u, v))$.

5.2. Simulated impact on real AO systems

We present numerical demonstrations of the impact of $\hat{\mathbf{M}}\text{is}$ on PWFS measurements through a numerical simulation on a realistic AO design. System parameters are similar to those presented in Table 3 of an 18 m telescope with a 39×39 deformable mirror (DM). In this section only, the PWFS follows exact Fried geometry, i.e., with an actuator placed at each pixel corner in order to obtain identically sized PWFS and DM Nyquist domains for the sake of clarity. We use more realistic PWFS configurations starting at the end of Sect. 6. Using this system, we measure the response of the PWFS to each spatial frequency through interaction matrices over Fourier modes of the DM, thus computing a pseudo-TF between the input phase and measurement terms. This small signal TF on all four components X, Y, Z, F is shown in Fig. 6, illustrating the alteration of measurements when the system suffers quadrant misalignments. For this example, a misalignment scenario with $\text{MaxMis} = 0.75 \text{px}$ was chosen in compliance with Eq. (14), specifically,

$$\begin{aligned} \delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D &= 0.00, 0.25, 0.75, 0.50 \text{ px} \\ \epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C, \epsilon_D &= 0.75, 0.5, 0.00, 0.25 \text{ px}. \end{aligned} \quad (21)$$

Numerical simulations of the response confirm no information is within the small signal approximations of $\hat{Z}, \hat{F}^{\text{True}}_{\text{Glob.}}$ (Fig. 6, top), well validating the theoretical demonstrations in Fauvarque et al. (2016a). We note that the nullity of $\hat{Z}, \hat{F}^{\text{True}}_{\text{Glob.}}$ – both from the theoretical developments and from all

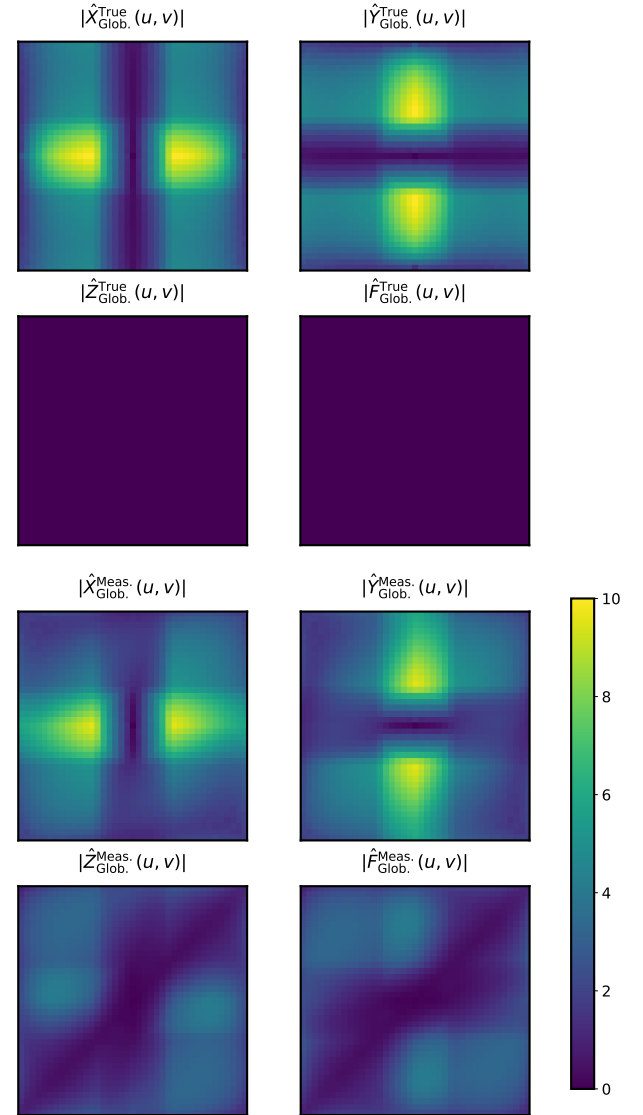


Fig. 6. Simulated TF of the PWFS in the four measurement terms, (top) without misalignment and (bottom) with $\text{MaxMis} = 0.75$ as per Eq. (21). All 8 heat maps are shown over the Nyquist domain of the system, i.e. $-\frac{1}{2} < u, v < \frac{1}{2}$. Color axis: projected linear response for a $1 \mu\text{m}$ RMS phase input at $6 \lambda/D$ modulation. Symmetry around the 45° axis is due to having $\epsilon_i = -\delta_i + 0.75$ (Eq. (21)) and is not a general property of $\hat{\mathbf{M}}\text{is}$.

simulations we conducted without misalignment – is completely independent of the system design, including the modulation radius used, as long as a perfect four-faced PWFS is used. On the other hand, misalignments (Fig. 6, bottom) induce a signal attenuation in the NW-SE corners of $\hat{X}, \hat{Y}^{\text{Meas.}}_{\text{Glob.}}$, where $|p(\pm 0.5, \mp 0.5)| = |q(\pm 0.5, \mp 0.5)| = 0$ (Fig. 7, top), while the information at these frequencies seems to be transferred to $\hat{Z}, \hat{F}^{\text{Meas.}}_{\text{Glob.}}$ measurements.

The $\hat{\mathbf{M}}\text{is}$ transform corresponding to the example in Fig. 6 is shown in Fig. 7 (top). For this misalignment, a total of 22.6% of the simulated TF energy is borne by the $Z^{\text{Meas.}}$ and $F^{\text{Meas.}}$ terms. As seen in Fig. 7 (bottom), this energy fraction highly depends on the spatial frequency and follows the structure of $s(u, v)$ and $r(u, v)$, reaching a maximum value of $\approx 75.5\%$ energy in the NW and SE corner areas of the Nyquist domain. Without considering the pixel integration (Eq. (9)) TF damping that at these

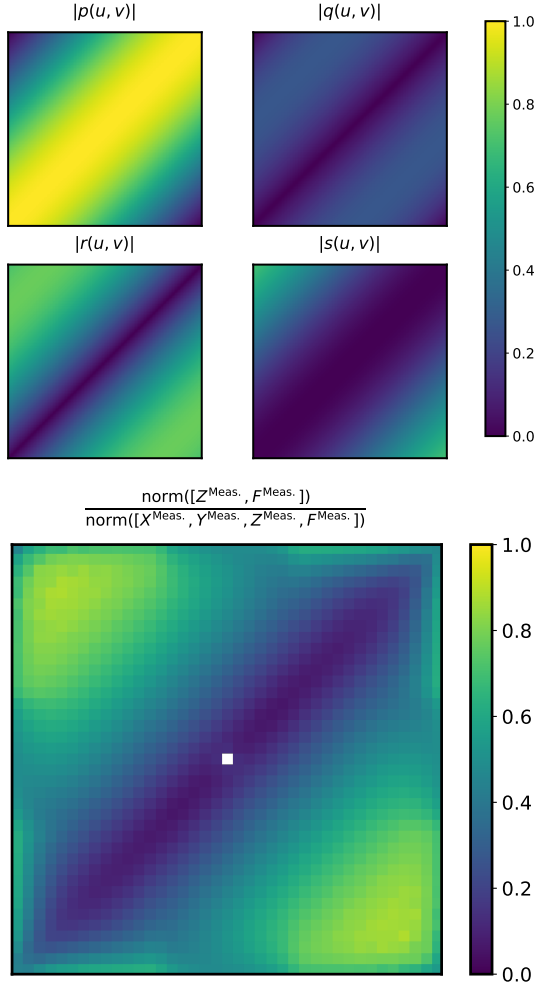


Fig. 7. *Top:* magnitudes of the 4 terms of $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{is}(u, v)$ for the case shown in Fig. 6. The $|p(u, v)|$ term goes to 0 in the NW and SE corners, where measurement in X^{True} is shifted in $Z^{\text{Meas.}}$ (Y^{True} in $F^{\text{Meas.}}$) by the $r(u, v)$ term. *Bottom:* frequency dependent measurement energy ratio of $[Z^{\text{Meas.}}, F^{\text{Meas.}}]$ cumulative energy to total energy. Edge effects are induced by pixel area integration. White pixel: undefined value for piston mode.

corners, this energy fraction would reach 100% on the corner points, where $p = q = 0$ and $|r| = |s| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

From the observations above, it is expected that using an $XY_{\text{Glob.}}$ measurement method, misalignment significantly affects the sensing ability of the PWFS for input phase spatial frequencies at a -45° angle, and corresponding speckles should persist in the long exposure point spread function (PSF). This behavior was confirmed with numerical simulations with nominal and misalignment-altered PSFs as shown in Fig. 8. When using $XY_{\text{Glob.}}$ control with misalignments (Fig. 8b), the correction zone is reduced, principally along the NW-SE axis, as we need to filter out 15% of the modes based on the fraction of their response contained in Z and F , a filtering required just to ensure loop stability. As shown in Fig. 8c, when comparing to the nominal PSF (Fig. 8a) we observe that besides the geometrical distortion of the PSF, the background within the correction zone of the DM is amplified by up to 10, an unsatisfactory reduction of AO performance.

More dramatic examples and their impact on PSFs were presented in a previous work (Deo et al. 2017), showing multiple residual speckle stripes due to several zero-valued bands in $p(u, v)$ for extreme misalignment situations.

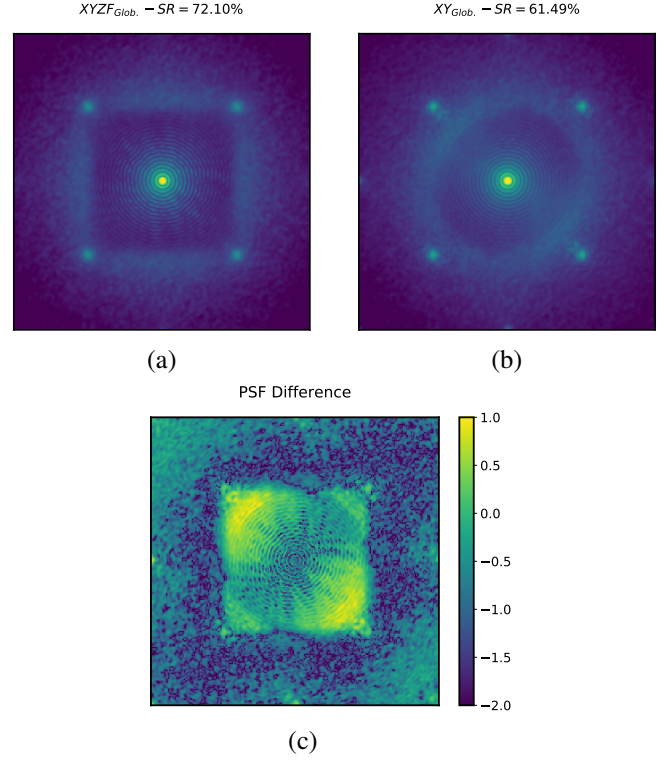


Fig. 8. *Panels a and b:* long exposure H-band PSFs for the 0.75 px **MaxMis** misalignment case detailed in Figs. 6 and 7: with $XYZF_{\text{Glob.}}$ measurement control (*panel a*) and with $XY_{\text{Glob.}}$ (*panel b*). *Panel c:* Log₁₀-scaled relative difference between the latter PSFs.

6. Misalignment figure of merit

Not all misalignments are equivalent because the magnitude $|\hat{\mathbf{M}}\mathbf{is}(u, v)|$ is determined through six degrees of freedom, and different misalignments – even with identical **MaxMis** – impact PWFS operation with conventional $XY_{\text{Glob.}}$ at various degrees. Our main focus is to emphasize the theoretical inability of $XY_{\text{Glob.}}$ nominal operation past a certain degree of misalignment, and we also investigate the compromise of using $XYZ_{\text{Glob.}}$ as a trade-off between reconstruction ability and computational cost. First, unitarity of $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{is}(u, v)$ ensures that unit gain in X^{True} and Y^{True} is split within all four ESC measurements without loss, distributed depending on the four terms p, q, r, s (see Eq. (20)), as follows:

- The diagonal term $p(u, v)$ is the amount of accurate measurement from XY^{True} in $XY^{\text{Meas.}}$.
- The $q(u, v)$ term cross-couples or swaps information between x and y axes, however overall without loss between XY^{True} and $XY^{\text{Meas.}}$.
- The $r(u, v)$ and $s(u, v)$ terms are the critical quantities, representing an information displacement from X, Y^{True} to $Z, F^{\text{Meas.}}$.

With non-negligible r and s terms, complete wavefront information cannot be retrieved anymore from measurements $X^{\text{Meas.}}$ and $Y^{\text{Meas.}}$ only, and phase retrieval requires operating with ESC.

It is useful to synthesize the phase reconstruction information available within a given measurement mode, by introducing a quantitative frequency dependent figure of merit $fom(u, v)$, representing the fraction of information conserved from \hat{X}^{True} and \hat{Y}^{True} at a given spatial frequency. As we hypothesize knowledge of both X^{True} and Y^{True} is required for reconstruction, it follows that we consider the least of the two singular values (s.v.;

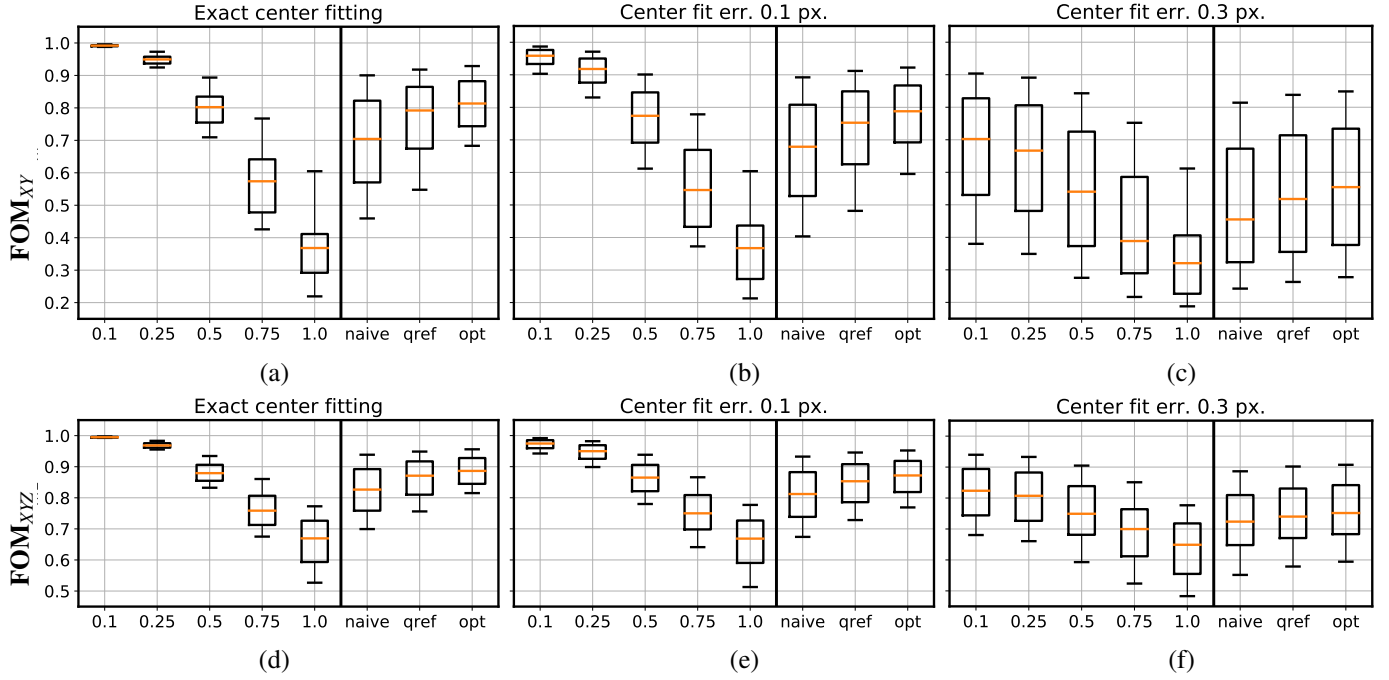


Fig. 9. Statistical distribution of \mathbf{FOM}_{XY} (panels a–c) and \mathbf{FOM}_{XYZ} (panels d–f) for random misalignments either with fixed \mathbf{MaxMis} from 0.1 px to 1 px or distributed as the output of the 3 pixel selection methods (naive, qref., opt.) presented in Sect. 4. Boxes show the median and quartiles of the distribution and whiskers the 1st and 9th deciles. From *left to right* for both rows: without noise on $(x_i, y_i)_{i=A,B,C,D}$ determination, with 0.1 px and with 0.3 px RMS noise.

real-valued, positive) of the $\hat{\mathbf{M}}_{\text{is}}$ transform sub-matrix between $[X^{\text{True}}, Y^{\text{True}}]$ and the considered measurements, i.e.,

$$\begin{aligned}
 fom_{XY}(u, v) &= \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} (u, v) \right) \quad (\leq 1) \\
 fom_{XYZ}(u, v) &= \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} p & q & r \\ q & p & s \end{bmatrix} (u, v) \right) \quad (\leq 1) \\
 fom_{XYZF}(u, v) &= \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} p & q & r & s \\ q & p & s & r \end{bmatrix} (u, v) \right) \quad (= 1),
 \end{aligned} \quad (22)$$

where $\sigma_2(\mathbf{M})$ is smallest singular value of matrix \mathbf{M} with two rows. Further along this numerical reduction, a global figure of merit expressed as a single scalar value for a given misalignment ought to be provided. We estimated that the average or median values were not suitable; we decided to quantify globally the S/N value by the first quartile of fom_{\bullet} over the frequency domain, which represents a S/N value guaranteed for 75% of the Fourier modes of the system. Our global figure of merit is hence the \mathbf{FOM}_{\bullet} value such that

$$\iint_{u,v=-0.5}^{0.5} [1 \text{ if } fom_{\bullet}(u, v) \leq \mathbf{FOM}_{\bullet}] dudv = 0.25. \quad (23)$$

The \mathbf{FOM} ranges from 100% for nominal transfer between $\bullet^{\text{Meas.}}$ and \bullet^{True} measurements down to (theoretically) 0% for complete signal loss. As a global S/N indicator, \mathbf{FOM} is expected to strongly correlate with the number of modes requiring to be filtered out to ensure loop stability, and therefore AO performance.

We performed an extensive Monte Carlo analysis of \mathbf{FOM} values for XY and XYZ measurement modes, which are shown in Figs. 9a and d. The median value of \mathbf{FOM}_{XY} drops dramatically past $\mathbf{MaxMis} = 0.25$ px, down to 0.37 at fixed tolerances of $\mathbf{MaxMis} = 1$ px. When using XYZ measurement, \mathbf{FOM}_{XYZ} median is maintained at 0.67 for such cases, which demonstrates the retrieval of information that had leaked into $Z^{\text{Meas.}}$ domain.

This statistical approach also lets us rank the \mathbf{FOM} yielded by pixel selection methods, with from best to worst optimal, reference quadrant and naive, correlatively with the \mathbf{MaxMis} tolerances obtained with these. For reference, the misalignment case example presented in Sect. 5, which has $\mathbf{MaxMis} = 0.75$ px, yields a \mathbf{FOM}_{XY} value of 0.49 and requires filtering 15% of controlling modes just to permit loop stability, in a noiseless simulation and yet with the degraded PSF shown in Fig. 8b.

Beyond our Sect. 4 hypothesis that quadrant centers can be exactly known, we also investigated the final impact on \mathbf{FOM} of uncertainties in quadrant referencing. The stability and biases of the many methods to fit quadrants on the detector, depending on quadrant resolution, illumination conditions or noise levels, are not documented to our knowledge, and final reliability may vary depending on each PWFS AO design and calibration protocols. With quadrant referencing errors, the pixel selection procedure is performed on erroneous quadrant centers with coordinates

$$\begin{aligned}
 x_i^{\text{err}} &= x_i + \text{err}_i^x \\
 y_i^{\text{err}} &= y_i + \text{err}_i^y.
 \end{aligned} \quad (24)$$

While the δ_i, ϵ_i obtained through pixel selection on the values of Eq. (24) comply with the statistics discussed in Sect. 4, actual quadrant misalignment values of the system are $\delta_i - \text{err}_i^x, \epsilon_i - \text{err}_i^y$. These errors can lead to a different and suboptimal pixel choice for quadrant referencing, and further to the AO having a strongly degraded $\hat{\mathbf{M}}_{\text{is}}$ transform compared to the optimal quadrant referencing. Using the optimal method, and assuming the center finding error is a zero-mean Gaussian process of standard deviation σ , we simulated that the pixel selection is altered to a suboptimal alternative in 50% (respectively 90%) of cases when $\sigma = 0.1$ px (resp. 0.3 px).

The results of the impact study of calibration errors of (x_i, y_i) using our \mathbf{FOM}_{\bullet} indicator are presented in Figs. 9b, c, e and f, allowing us to compare putative phase reconstruction capability

Table 2. Probability of a zero-valued zone occurring in $fom_{XY}(u, v)$ depending on pixel selection method, error on quadrant finding, and PWFS pixels to DM actuators oversampling factor.

Oversampling	Px selection method	Quadrant center error (px RMS)		
		0.0	0.1	0.3
1 px to 1 actu	naive (%)	26.2	31.4	61.1
	qref. (%)	14.2	19.9	55.8
	opt. (%)	4.1	11.5	51.4
96 px to 80 actu	naive (%)	9.6	14.5	43.0
	qref. (%)	4.9	7.5	36.2
	opt. (%)	0.2	2.3	31.9
96 px to 60 actu	naive (%)	0.2	1.0	14.8
	qref. (%)	0.1	0.6	10.7
	opt. (%)	0.0	0.0	8.6

Notes. Values are computed as $\text{Prob.}(\min_{u,v}[fom_{XY}(u, v)] < 0.01)$ for 10 000 random $(x_i, y_i)_{i=A,B,C,D}$.

of measurement modes XY , XYZ , and $XYZF$ ($\mathbf{FOM}_{XYZF} = 1$) for various misalignment and uncertainty error scenarios. The impact of subpixel positioning uncertainty is significant; the $\hat{\mathbf{M}}is$ transform unknowingly affects reconstruction capability.

Another critical question arising concerning misalignment impact is the possibility of zeros occurring in $fom_{XY}(u, v)$, i.e., potential reconstructor incapacity zones. With the optimal pixel selection algorithm, only the special cases of Eq. (14) lead to two zeros in opposite corners of the Nyquist domain. However, with the reference quadrant or the naive methods, or with errors on quadrant centers, the probability of zero-valued stripes crossing $fom_{XY}(u, v)$ may be significant, with values reported on Table 2 (section “1 px to 1 actu”).

The values in Table 2 also include probability estimates regarding PWFS to DM oversampling. Our mathematical developments so far focus on misalignment impact within the PWFS Nyquist domain, implicitly assuming the latter matches the correction area of the DM. Because of the enhanced behavior of PWFS in oversampling regimes rather than rigorous Fried geometry (Vidal et al. 2017), most PWFS-based systems currently in development are designed with oversampled PWFS. In this case, metrics should be corrected to only take into account the correction area of the system. Although this work does not propose an extensive analysis of oversampled behavior, we include in Table 2 the probabilities of zeros occurring in the AO correction zone with oversampling ratios of the current designs of the MICADO SCAO system (96 px to 80 actu) and the NFIRAOS AO facility of the Thirty Meter Telescope International Observatory (TMT; 96 px. to 60 actu) (Wang et al. 2017). These values show that misalignment-induced performance loss is well mitigated simply by system geometry when reaching oversampling ratios above ≈ 1.5 . Such a design decision may however not generally be a satisfactory trade-off for PWFS designs because it is bound to enhance readout noise impact for dimmest guide stars.

7. Numerical simulations and laboratory results

7.1. Experimental setup and protocols

We performed end-to-end simulations and optical bench runs to assess the performance of various measurement methods and their stability regarding PWFS misalignment. To perform these experiments at a realistic high-order AO scale, yet to maintain acceptable computing times, we considered an 18 m diameter

Table 3. Parameters for measurement method comparison and quadrant misalignment experimental runs.

Optical bench and numerical simulation configuration	
Telescope	$D = 18.0$ m diameter Circular pupil – No obstruction
Turbulence layer	Single von Karman ground layer $r_0 = 12.9$ cm– $L_0 = 25$ m $\ \vec{v}\ = 10$ m s ⁻¹
Source	On-axis natural guide star
Readout noise	$0.3 e^-$ (bench: added numerically)
Loop rate	Simulated as 500 Hz
Deformable mirrors	Tip-tilt mirror (bench: physical mount) Square pitch piezo-stack (bench: on LCOS-SLM ^a)
Piezo-stack mirror	39×39 actuators – Total 1,177 in pupil
PWFS subapertures	44×44 (simu.)– 46×46 (bench)
PWFS wavelength	Monochromatic at 658 nm
PWFS modulation	Circular, tunable radius.
Simulation method	Focal phase mask (quadrants interferences included) Modal integrator
Controller	Optimized Karhunen–Loève basis ^b (defined on DM actuators)
Controller Gain	Optimized scalar loop gain Modal sensitivity compensation ^{c,d}

References. ^(a)Inoue et al. (2007), ^(b)Ferreira et al. (2018), ^(c)Korkiakoski et al. (2008b) and ^(d)Deo et al. (2018).

telescope equipped with a 39×39 square-pitch DM, targeting half the dimensions of ELT SCAO systems. The PWFS is sampled with a 13–18% oversampling factor, consistent with the current value of the MICADO SCAO design. Detailed information on bench experimental setup and end-to-end run algorithms are identical to previous work (Deo et al. 2017); major parameters are recalled in Table 3.

For each controller mode and misalignment values (δ_i, ϵ_i), end-to-end long exposure Strehl ratios (S.R.) are obtained by (1) computing a reference modal interaction matrix I_0 in Airy spot regime; (2) bootstrapping the AO loop for 0.8 s (i.e., 400 frames) with command matrix I_0^\dagger , reaching a suboptimal stationary regime; (3) computing the sensitivity loss compensation modal coefficients G_{modal} ; and (4) running the AO loop and recording telemetry data for 2.0 s (1000 frames) with the optical gain corrected command matrix $G_{\text{modal}} \times I_0^\dagger$. This procedure applies to numerical simulations and bench experiments.

It is to be noted that our computations do not include optical throughput, and therefore stellar magnitudes should be scaled accordingly for real system projective performances. We use a zero-point value of 2.62×10^{10} ph s⁻¹ m⁻², yielding the flux values given in Table 4.

Section 7.2 presents results of numerical simulations comparing a variety of measurement and normalization options for a perfect PWFS to be conclusive regarding (1) the relative performance of $\bullet_{\text{Glob.}}$ and $\bullet_{\text{Loc.}}$ normalizations and (2) conservation of system sensitivity when adding ESC measurements to X and Y . Section 7.3 covers numerical simulations and optical bench experiments regarding robustness of $XY_{\text{Glob.}}$, $XYZ_{\text{Glob.}}$, and $XYZF_{\text{Glob.}}$ methods relative to PWFS misalignments, toward confirming the intrinsic robustness of $XYZF_{\text{Glob.}}$ to any amount of misalignment.

Table 4. Photonic flux values considered for experimental runs of Sects. 7.2 and 7.3.

Stellar magnitude Mag_R	14.0	17.0	19.0
Full pupil (ph.it ⁻¹)	3.35×10^4	2,110	335
Simulations (ph.it ⁻¹ .subap ⁻¹)	22.0	1.39	0.22
Bench runs (ph.it ⁻¹ .subap ⁻¹)	20.2	1.27	0.202

Notes. Zero-point value of $2.62 \times 10^{10} \text{ ph s}^{-1} \text{ m}^{-2}$.

7.2. Comparing measurement methods for a perfect PWFS: Numerical simulations

We compared the end-to-end performance of $\bullet_{\text{Glob.}}$, $\bullet_{\text{Loc.}}$ and $XY_{\text{Loc.,Sine}}$ measurement methods, at modulation radii ranging from 2 to $6\lambda/D$, and for guide star magnitudes 14–19. We tested an extensive number of centroiding options to assess performance discrepancies, namely: (global) $XY_{\text{Glob.}}$, $XYZ_{\text{Glob.}}$, $XYF_{\text{Glob.}}$, $XYZF_{\text{Glob.}}$, $ABCD_{\text{Glob.}}$; (local): $XY_{\text{Loc.}}$, $XYZ_{\text{Loc.}}$, $ABCD_{\text{Loc.}}$; and (local-sine): $XY_{\text{Loc.,Sine}}$. The $ABCD_{\text{norm}}$ modes are operated by considering PWFS output as the direct concatenation of valid pixels of the four quadrants. These modes are fully equivalent to the corresponding $XYZF_{\text{norm}}$ modes: the P transform preliminary operation from A , B , C , and D to X , Y , Z , and F becomes factored into the system command matrix. Numerical simulations confirmed this equivalence, with identical outputs down to floating point precision.

In all fairness regarding measurement methods, in particular discrepancies in the normalization of modal sensitivity compensation coefficients, we performed all experiments after an optimization of the integrator scalar gains given all other parameters, thus eliminating this factor for result interpretation. Figure 10 shows simulated performance for XY measurement modes. Others methods listed above (XYZ_{\bullet} , XYF_{\bullet} , $XYZF_{\bullet}$, $ABCD_{\bullet}$) could not be drawn due to excessive similarity: all $\bullet_{\text{Glob.}}$ methods, on the one hand, and all $\bullet_{\text{Loc.}}$ and $XY_{\text{Loc.,Sine}}$, on the other hand, yield identical performance within two points of Strehl ratio, at all guide star magnitudes and modulation radii.

ESC use preserves PWFS sensitivity. We previously discussed that for a perfect PWFS prism and assembly, F and Z bear no information, and even that $F_{\text{Loc.}} = 1$ analytically and was not considered. However the perfect similarity in performance with or without adding terms Z and F satisfactorily demonstrates that their addition to the processing does not degrade the noise propagation, i.e., has no impact whatsoever on PWFS sensitivity.

Global outperforms Local. Finally, the results in Fig. 10 demonstrate the superior performance of $\bullet_{\text{Glob.}}$ methods over $\bullet_{\text{Loc.}}$ methods. A limiting magnitude increase of up to $\frac{2}{3}$ is measured, and benefits are observed over the complete magnitude range – even for magnitudes <17 , where 0-photon count pixels do not yet cause normalization issues to $\bullet_{\text{Loc.}}$ methods.

7.3. Misalignment impact on end-to-end performance

We analyze the impact of quadrant misalignments for various **MaxMis** specifications and for stellar magnitudes 14–18.5, both in numerical simulations and on the optical bench, currently restricting our study to global normalization. We compare the performance of conventional $XY_{\text{Glob.}}$ and ESC Modes $XYZ_{\text{Glob.}}$ and $XYZF_{\text{Glob.}}$. The misalignments selected correspond to values of (δ_i, ϵ_i) deduced from Eq. (14) but multiplied by a scaling factor to vary **MaxMis** as desired. In numerical simulations, quadrants are misaligned by altering the orientations of

the refracting planes within the PWFS phase mask, allowing us to set (x_i, y_i) with arbitrary precision. On the optical bench, the high-resolution design of the PWFS detector is such that a WFS pixel information is obtained by binning camera pixels by 6, and therefore misalignments can be introduced with a $\frac{1}{6}$ pixel-wide uniformly distributed precision, i.e., with a standard deviation of 0.048 px.

Numerical simulation results are shown in Fig. 11, which includes two operational behaviors:

- Solid lines: all DM modes are driven by the controller
- Dashed lines: mode filtering is performed based on a rejection criterion in order to maintain loop stability.

The rejection criterion is similar to fom_{\bullet} except that it is computed directly on KL modes. During mode-filtered operation, modes are either kept or rejected depending on the true phase information (i.e., X^{True} and Y^{True}) available in considered measurements, either XY , XYZ , or $XYZF$. This requires computing the complete interaction matrix in all four X , Y , Z , and F , before computing the rejection criterion given, for example, in the XY case by

$$\begin{aligned} \text{Mode ratio} &= \frac{\text{norm}([X^{\text{Meas.}}, Y^{\text{Meas.}}])}{\text{norm}([X^{\text{True}}, Y^{\text{True}}])} \\ &= \frac{\text{norm}([X^{\text{Meas.}}, Y^{\text{Meas.}}])}{\text{norm}([X^{\text{Meas.}}, Y^{\text{Meas.}}, Z^{\text{Meas.}}, F^{\text{Meas.}}])}, \end{aligned} \quad (25)$$

which is the complementary quantity to Fig. 7 (bottom). A threshold value of 40% was manually adjusted, trading off between insufficient and excessive mode filtering; both choices reduce the final performance.

We investigated the responses to misalignments up to **MaxMis** = 1.5 px. Although this is beyond the worst case scenario even for naive quadrant referencing, these cases largely cover possible errors on quadrant centers adjustments, and we also believe the stability of $XYZF_{\text{Glob.}}$ at large misalignments – with previous work (Deo et al. 2017) investigating up to **MaxMis** = 5.0 px – is, if not of operational utility, at least of theoretical interest.

At all magnitudes tested, conventional $XY_{\text{Glob.}}$ shows dramatic performance loss for misalignments larger than **MaxMis** = 0.5 px. While mode filtering allows us to avoid critical AO failure (S.R. down to 0%), it remains an insufficient compromise that does not mitigate the misalignment-induced performance loss.

Simulations with $XYZF_{\text{Glob.}}$ show no significant sensitivity to misalignments, aside from extreme noise of $\text{Mag}_R = 18.5$, and therefore offers a satisfactory solution to cancel out misalignment effects, hence confirming theoretical developments of Sect. 5, and paving the way for relaxing PWFS specifications to favor this software-based solution. Finally, $XYZ_{\text{Glob.}}$ provides an intermediate misalignment mitigating ESC method at only 75% the computational cost of $XYZF_{\text{Glob.}}$.

End-to-end runs with similar parameters were successfully performed on the optical bench; the results are shown in Fig. 12. Because the bench is operated with a spatial light modulator (SLM) rather than a conventional DM, we use the following process to generate phase screens: (1) the turbulence screen is generated numerically; (2) DM shape is generated; and (3) DM and turbulence buffers are summed and displayed on the SLM. Also, the SLM imposes a strictly monochromatic operation, making actual H-band images unavailable, and in place these were synthetically computed from the difference between turbulent and DM phase screens. Another SLM-specific behavior constrained us to discard data points for which emulated phase maps diverge

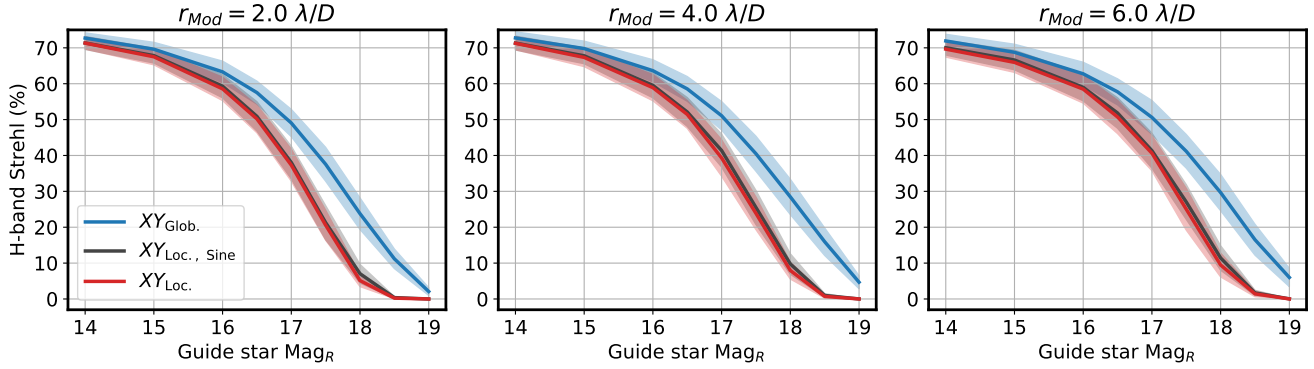


Fig. 10. End-to-end simulation performance comparison of measurement methods, in particular the normalization employed, after optimization of the loop gain, for a perfect PWFS design. Shaded area: error bars as ± 1 standard deviations of the instantaneous short exposure S.R.

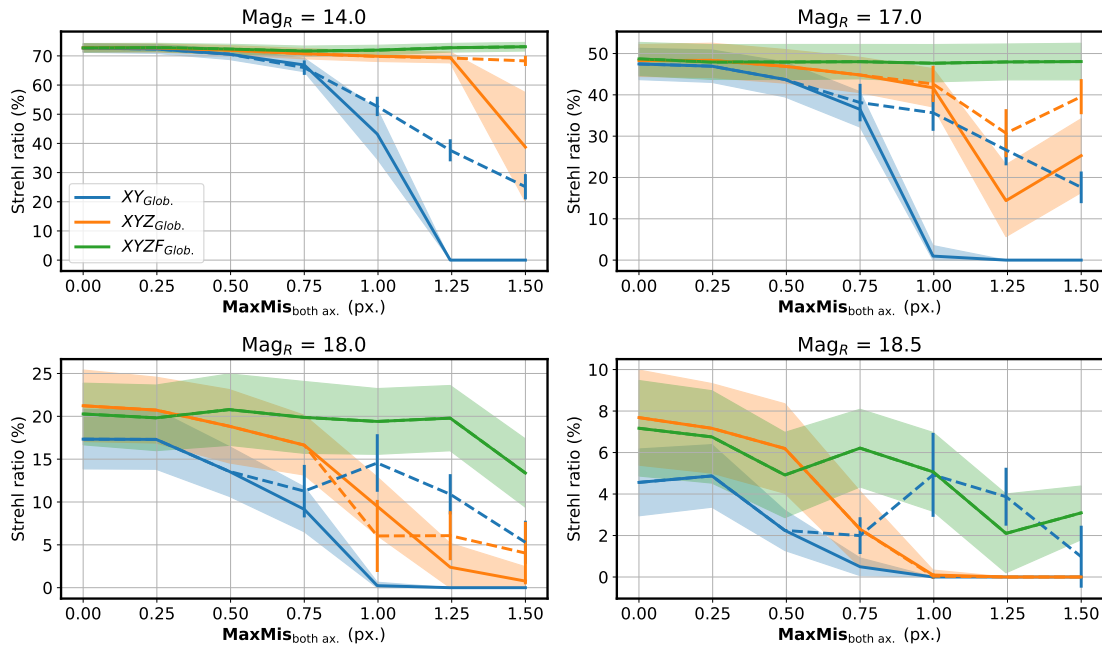


Fig. 11. Numerical simulation performance results for various misalignment scenarios. Solid lines: all DM modes controlled (error as shaded areas, defined as in Fig. 10); dashed lines: modes with dominant energy in Z and F filtered (error as solid bars), only shown when relative difference to unfiltered control is larger than 1%. The Strehl ratio (S.R.) is measured at 1650 nm. Results are shown for $r_{Mod} = 2 \lambda/D$; simulations for $4 \lambda/D$ and $6 \lambda/D$ achieve similar performance.

beyond $1.5 \mu\text{m}$ RMS during AO loop operation. This leads to artifacts of amplitude 2% S.R. to build up and dominate the PSF recording. However, other data points with lower S.R. are deemed valid, as the RMS residual is kept within 600 nm RMS and no artifacts are observed.

Showing a flat phase screen on the SLM does not induce a flat wavefront in the bench pupil, and the residual computation is biased by a residual aberration. After best effort calibration, we estimate this aberration to an unmeasured 50 nm RMS, i.e., 4 pts of H -band S.R. at most, which is little compared to the experimental results shown in Fig. 12 (H -band S.R. of 56% mapping to 200 nm RMS residual through the Maréchal approximation). Long-exposure S.R. in the R band were also measured using an imaging camera, and confirm AO loop operability even when lacking a coherent PSF core at the pyramid pin for guide star magnitudes ≥ 17 . R -band S.R. are satisfactorily consistent with trends in computed H -band S.R. at magnitudes 14 and 17. Bench experiments confirm numerical simulation results with a consistent relative difference of 10 pts. H -band S.R. ceiling performance.

The predicted absolute stability of $XYZF_{Glob.}$ control with quadrant misalignments is experimentally confirmed by our optical bench results.

8. Conclusions

In this work, the authors propose a thorough analysis of (1) how quadrants on the PWFS detector are extracted and normalized from sensor data and (2) quadrant misalignments depending on the quadrant pixel referencing algorithm. Simulation and bench runs bring conclusive information regarding the better performance of the global normalization (Vérinaud 2004) over the local normalization (Ragazzoni 1996) with a sensitivity limit gain of $\frac{2}{3}$ of a magnitude.

Our theoretical analysis of independent quadrant translations in the Fourier domain leads us into introducing ESC, generalizing the notion of output measurements for the PWFS. We theorize, and measure through experimental small-signal TFs, that frequency information is shifted from gradient-like terms X and Y into ESC terms Z and F due to the relative misalignments of

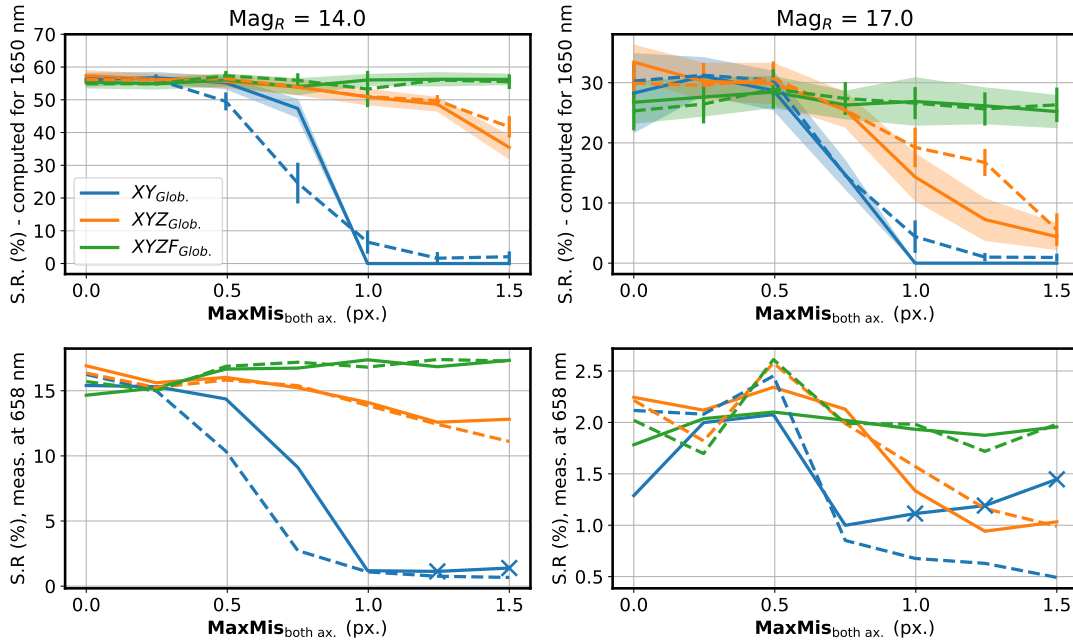


Fig. 12. Adaptive optics bench performance results for various misalignment scenarios. Solid and dashed lines, shaded areas: same as in Fig. 11; *top* row: H -band S.R. computed from the phase residuals; *bottom* row: measured S.R. in the R band, relative to bench focal camera nominal alignment ($\approx 80\%$ absolute S.R.). Results are shown for $r_{\text{Mod}} = 6 \lambda/D$, which is close to minimal operational radius on bench due to PWFS prism edge roughnesses of approximately $30 \mu\text{m}$ ($1 \lambda/D$) width. Cross markers: measured R -band S.R. is undetermined (explanations in the text).

the quadrants. As zero-gain frequency zones may appear within the XY -only TF, it is expected that (a) past a certain misalignment, conventional XY control is unable to sense all frequencies of the PWFS domain and (b) that ESC should be insensitive to any relative misalignments. Furthermore, through a Monte Carlo statistical analysis of realistic quadrant misalignments, and by introducing a scalar figure of merit to quantify performance loss with conventional control, it is pointed out that realistic misalignment situations may lead to significant AO performance loss, therefore requiring risk mitigation procedures other than for extremely tight pyramid prism specifications. As a conceptually simple extension of conventional XY PWFS control, ESC provides a fitting candidate for misalignment impact mitigation.

Simulations and optical bench runs confirm that ESC with four measurement maps $XYZF$ is insensitive to misalignments, as long as illuminated pixels are not cropped out by the quadrant mask, and is thus up to the sensitivity limit. It is also demonstrated that adding in the extra terms Z and F does not worsen noise propagation, even if made unnecessary by low misalignment situations.

Generally, this study attempts to bring additional arguments to PWFS systems design trade-offs; along with prism quality and price, oversampling factor choice, or RTC dimensioning. With $XYZF$ measurements twice as large, instrumental RTCs specifications should be adapted. However, the command matrix – slopes vector multiplication is well within the scope of parallel computing, and the computational impact should be well mitigated using GPU-based RTC architectures (Gratadour et al. 2016). The authors therefore believe $XYZF$ or $ABCD$ PWFS control is a satisfactory risk mitigation choice and has the benefit of dramatically relaxing PWFS design constraints.

Acknowledgements. This research is performed in the frame of the development of MICADO, first light instrument of the ELT (ESO), with the support of ESO, INSU/CNRS and Observatoire de Paris. The authors wish to thank the fruitful contributions of D. Gratadour, F. Ferreira, and A. Sevin to the COMPASS simulation tool and of Z. Hubert to the experimental bench.

References

- Carlotti, A., Vérinaud, C., Gratadour, D., Westphal, M., & Beuzit, J.-L. 2014, *Proc. SPIE*, 9148, 91486R
- Clénet, Y., Buey, T. M., Rousset, G., et al. 2014, *Proc. SPIE*, 9148, 91480Z
- David, H. A., & Nagaraja, H. N. 2005, *Order Statistics*, 3rd edn, eds. W. A. Shewhart, & S. S. Wilks (John Wiley & Sons, Inc.)
- Davies, R., Ageorges, N., Barl, L., et al. 2010, *Proc. SPIE*, 7735, 77352A
- Deo, V., Vidal, F., & Gendron, E. 2017, in *5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*
- Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., Vidal, F., & Buey, T. 2018, *Proc. SPIE*, 10703, 1070320
- Esposito, S., Riccardi, A., Fini, L., et al. 2010, *Proc. SPIE*, 7736, 773609
- Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O. 2016a, *Optica*, 3, 1440
- Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O. 2016b, *Proc. SPIE*, 9909, 990960
- Ferreira, F., Gendron, E., Rousset, G., & Gratadour, D. 2018, *A&A*, 616, A102
- Gendron, E., & Léna, P. 1994, *A&A*, 291, 337
- Gendron, E., Brangier, M., & Chenegros, G. 2010, in *1st AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 05003
- Gratadour, D., Puech, M., Vérinaud, C., et al. 2014, *Proc. SPIE*, 9148, 91486O
- Gratadour, D., Dipper, N., Biasi, R., et al. 2016, *Proc. SPIE*, 9909, 99094I
- Horwitz, B. A. 1994, in *1994 Symposium on Astronomical Telescopes & Instrumentation for the 21st Century*, International Society for Optics and Photonics, 496
- Inoue, T., Tanaka, H., Fukuchi, N., et al. 2007, *Proc. SPIE*, 6487, 64870Y
- Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Le Louarn, M. 2008a, *Appl. Opt.*, 47, 79
- Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Le Louarn, M. 2008b, *Proc. SPIE*, 7015, 701554
- Pinna, E., Briguglio, R. A., & Bonaglia, M. 2017, *Pyramid Prototyping for the GMT, Wavefront Sensing in the VLT era II*
- Ragazzoni, R. 1996, *J. Mod. Opt.*, 43, 289
- Ragazzoni, R., & Farinato, J. 1999, *A&A*, 350, L23
- Ragazzoni, R., Diolaiti, E., Farinato, J., et al. 2002a, *A&A*, 396, 731
- Ragazzoni, R., Diolaiti, E., & Vernet, E. 2002b, *Opt. Commun.*, 208, 51
- Shatikhina, I. 2014, PhD Thesis, Johannes Kepler Universität Linz, Austria
- Shatikhina, I., Obereder, A., Rosensteiner, M., & Ramlau, R. 2013, *Appl. Opt.*, 52, 2640
- Vérinaud, C. 2004, *Opt. Commun.*, 233, 27
- Vidal, F., Ferreira, F., & Deo, V. 2017, in *5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*
- Wang, L., Véran, J. P., & Ellerbroek, B. 2017, in *5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*

Appendix A: Quadrant central pixel selection methods

A.1. Preselected reference quadrant method

Within the reference quadrant method described succinctly in Sect. 4, one of the quadrants is priorly chosen, here A , and central pixels are selected through

$$m_A, n_A = \text{round}(x_A, y_A)$$

$$\Rightarrow \delta_A, \epsilon_A \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$m_{B,C,D} = \text{round}(\text{round}(x_{B,C,D} - x_A) + x_A)$$

$$\Rightarrow |\delta_{B,C,D} - \delta_A| < \frac{1}{2}$$

$$n_{B,C,D} = \text{round}(\text{round}(y_{B,C,D} - y_A) + y_A)$$

$$\Rightarrow |\epsilon_{B,C,D} - \epsilon_A| < \frac{1}{2}, \quad (\text{A.1})$$

with the inner rounding corresponding to nearest-pixel selection for B, C, D for an idealized pixel lattice in which x_A, y_A are integers; and the outer rounding operations being a common nearest-pixel roundoff of this idealized lattice on the actual detector pixel matrix.

A.2. Optimal method

We consider the values of $m_i, n_i, \delta_i, \epsilon_i$ after a naive method roundoff. There are plenty of ways to modify this output to minimize MaxMis . One method, for instance, is experimenting with the reference quadrant method using all four possible references and selecting the best outcome, which will be the optimum. However we prefer the following three-step algorithmic description as it is insightful about the intrinsic geometry of the problem being discussed: the minimization the total span of an arbitrary number of real values only using integer translations.

Without loss of generality, the demonstration is restricted to the x -axis, and we assume sorted values at the beginning of the process,

$$\delta_A \leq \delta_B \leq \delta_C \leq \delta_D. \quad (\text{A.2})$$

Length testing. We define the four lengths that correspond to separations between δ_i values

$$l_1 = \delta_B - \delta_A, \quad l_2 = \delta_C - \delta_B, \quad l_3 = \delta_D - \delta_C, \quad l_4 = 1 + \delta_A - \delta_D, \quad (\text{A.3})$$

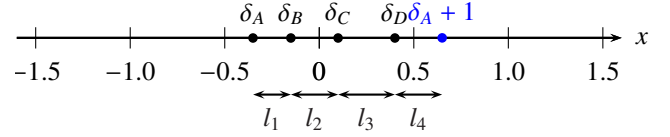


Fig. A.1. Beginning of the optimal misalignment algorithm. In this example, $\delta_A = -0.35$, $\delta_B = -0.15$, $\delta_C = 0.10$, $\delta_D = 0.40$, such that $l_3 = 0.3 = l_{\max}$. The optimal value with this example is $\text{MaxMis}_x^{\text{opt}} = 1 - l_{\max} = 0.70$ px.

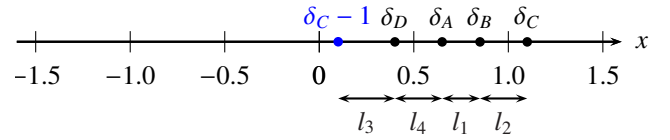


Fig. A.2. After the pixel shifting step, with quadrants A, B , and C offset one pixel to the left from the initial situation of Fig. A.1.

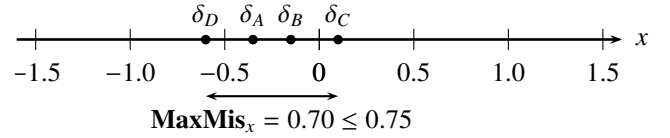


Fig. A.3. Final value of δ_i misalignments at the optimal choice of central pixels m_i .

as shown in Fig. A.1. We seek which of these four lengths is maximal, with value l_{\max} . Two outcomes are possible:

- $l_4 = l_{\max}$, in which case the algorithm skips to the termination
- $l_4 < l_{\max}$, and we perform a pixel shifting.

Pixel shifting. If $l_{\max} = l_1$, we shift the reference pixel for quadrant A one pixel to the left, i.e., m_A, δ_A are changed to $m_A - 1, \delta_A + 1$. In case $l_{\max} = l_2$ (resp. $l_{\max} = l_3$), this shift is performed on both quadrants A and B (resp. A, B , and C), resulting as on Fig. A.2.

Termination. All four quadrants are offset identically to minimize the largest $|\delta_i|$, so as to avoid offsets larger than 1 between the quadrant center x_i and the assumed central pixel m_i . Between Figs. A.2 and A.3, a 1 px right-shift is made, finally yielding $\delta_i \in [-0.60, 0.10]$.

The situation at the end of the optimal algorithm is such that

$$\text{MaxMis}_x = \max_i \delta_i - \min_i \delta_i = 1 - l_{\max}, \quad (\text{A.4})$$

which is also the minimal sum of any three of the l_i , ensuring the optimality of MaxMis_x over choices of m_i .

4.3 Un complément : les mésalignements extrêmes

Je profite de cette section pour apporter quelques éclairages supplémentaires au contenu de l'article [Deo et al. \(2018a\)](#), en particulier à l'aide de résultats que j'avais produits pour [Deo et al. \(2017\)](#).

J'avais alors exploré des valeurs de mésalignement jusqu'à $\mathbf{MaxMis} = 5.0$ px., selon un protocole identique à celui des simulations de bout-en-bout présentées dans la section [A&A2018:7](#). Je présente les résultats de cette étude sur la figure 4.4, qui vient, à l'exception des différences précisées plus bas, s'inscrire comme une extension vers les grands \mathbf{MaxMis} des résultats présentés sur la figure [A&A2018:11](#). Ces résultats sont obtenus par des simulations numériques de bout-en-bout, avec trois méthodes de contrôle XY , XYZ et $XYZF$, pour des valeurs de \mathbf{MaxMis} de 0 à 5 px. La normalisation utilisée est la normalisation globale, et la simulation n'inclut pas de bruit de mesure. Pour obtenir ces données, j'avais utilisé un mésalignement :

$$\begin{aligned} \delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D &= -0.24, \quad 0.28, \quad -0.17, \quad 0.45 \text{ px} \\ \varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C, \varepsilon_D &= 0.46, \quad -0.50, \quad 0.50, \quad -0.47 \text{ px}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

qui vérifie $\mathbf{MaxMis} = 1.0$ px. et s'avère être une issue valide d'un appariement des sous-ouvertures par méthode *naïve* (arrondi au pixel le plus proche), mais pas par la méthode optimale. Les autres valeurs de mésalignement sur la figure 4.4 sont obtenues par mise à l'échelle par un multiplicateur des valeurs de l'équation 4.3. J'avais choisi cette valeur de mésalignement comme étant une des plus agressives compatible avec une sélection naïve.

Ces valeurs conduisent aux facteurs de mérite – tels que définis dans la section [A&A2018:6](#) – $\mathbf{FOM}_{XY} = 0.27$ et $\mathbf{FOM}_{XYZ} = 0.41$. Mis en regard des distributions présentées sur la figure [A&A2018:9\(a,d\)](#), il s'agit bien d'une valeur située très loin dans la queue de distribution des mésalignements les plus défavorables.

La performance de bout-en-bout nous fait retrouver le résultat principal de [Deo et al. \(2018a\)](#) : le contrôle complet $XYZF_{\text{Glob}}$ offre une performance indifférente à l'amplitude du mésalignement. À l'inverse, le contrôleur XY_{Glob} est incapable de maintenir la performance dès que \mathbf{MaxMis} dépasse 0.75 - 1.0 px, c'est à dire pour une limite comparable à celle pour le mésalignement choisi dans l'équation [A&A2018:21](#).

Deux éléments nous permettent d'aller plus loin dans l'interprétation des résultats présentés sur la figure [A&A2018:11](#). Premièrement, malgré la faible valeur de \mathbf{FOM}_{XYZ} , le contrôle XYZ_{Glob} offre une performance identique à $XYZF_{\text{Glob}}$. L'explication la plus probable se trouve dans (1) la plus grande dimensionalité de l'espace des pentes : une fréquence spatiale peut être mal vue dans X et Y , mais bien vue dans Z , ce qui permet de reconstruire une partie de l'information ; et (2) que les simulations ont été effectuées sans bruit de mesure, et donc que malgré un conditionnement de la matrice d'interaction très dégradé, le contrôleur XYZ parvient tout de même à reconstituer l'information pour tous les modes KL^{DM} utilisés.

Deuxièmement, on observe des points de mesure à fort mésalignement pour le contrôle XY_{Glob} qui semblent maintenir une performance certes dégradée mais non

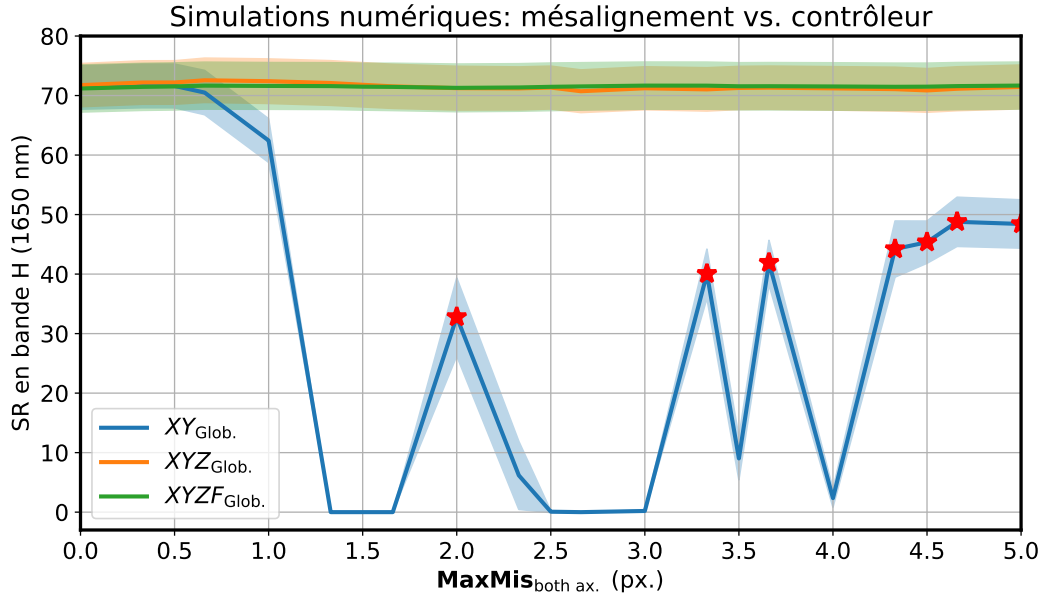


FIGURE 4.4: Performances de bout-en-bout obtenues en simulations numériques en fonction du mésalignement et de la méthode de contrôle du PWFS utilisée. Tous les modes du DM sont contrôlés. Le mésalignement utilisé est celui défini par l'équation 4.3. Étoiles : commentaire dans le corps du texte, PSF montrées sur la figure 4.5.

négligeable (SR en bande H de l'ordre de 30 à 50%). Je montre sur la figure 4.5 (b-g) les PSFs longue pose correspondant à ces mesures – annotées d'une étoile sur la figure 4.4. Ces mesures sont et doivent être considérées comme des artefacts de simulation, permis par le SNR infini ; de telles mesures ne sont pas reproduites lors des expériences sur banc (Deo et al., 2017).

On constate directement sur les PSF figure 4.5 l'impact dans le plan focal du mésalignement ; pourtant, la boucle d'OA n'explose pas complètement pour ces points de mesure. Des bandes de speckles, non corrigées – et non corrigées – traversent le plan focal et se resserrent autour du cœur de PSF alors que **MaxMis** augmente, ce qui correspond bien à l'homothétie qu'il convient d'appliquer aux termes de la transformée $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{is}$ lors d'une mise à l'échelle des δ_i et ε_i .

Ces bandes de non-correction, correspondant à des fréquences spatiales auxquelles le contrôleur $XY_{\text{Glob.}}$ est presque aveugle, correspondent directement au bloc diagonal $|p(u, v)|$ de la transformée $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{is}$ du mésalignement choisi (équation 4.3), dont je montre la magnitude pour **MaxMis** = 2.0 px. sur la figure 4.6. Les bandes de très faible $|p(u, v)|$ se superposent directement dans la zone de correction avec les speckles vus sur la PSF figure 4.5 (b). Cette propriété fonctionne particulièrement bien pour cet exemple, car dans le cas de l'équation 4.3 le terme de couplage entre X et Y : $q(u, v)$ est

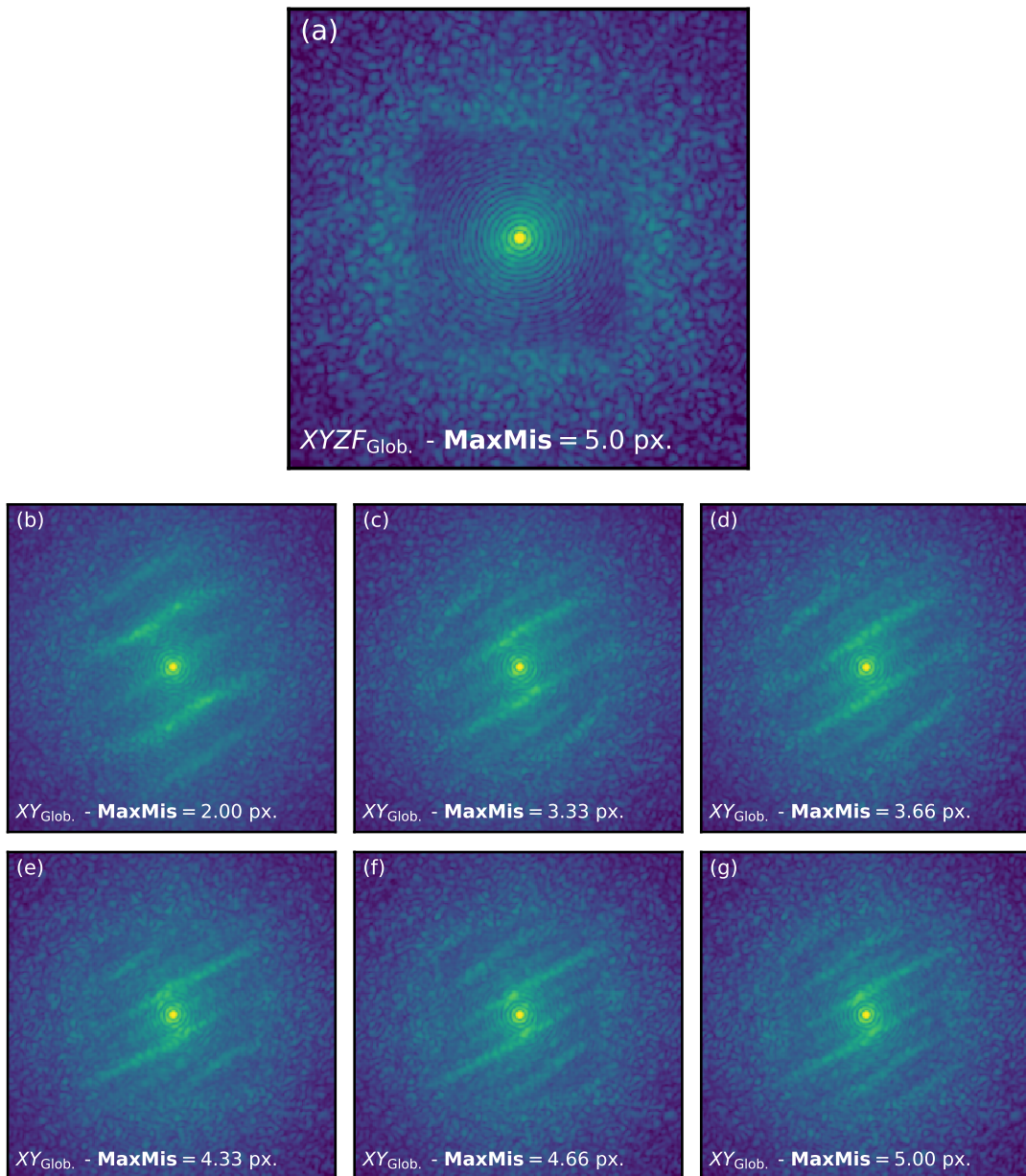


FIGURE 4.5: PSF longues poses en bande H obtenues lors des simulations numériques présentées sur la figure 4.4. (a) : PSF nominale, obtenue pour $\mathbf{MaxMis} = 5.0 \text{ px.}$ avec le contrôleur $XYZF_{Glob.}$. (b-g) : PSF correspondant aux marqueurs étoilés sur la figure 4.4, avec le contrôleur $XY_{Glob.}$.

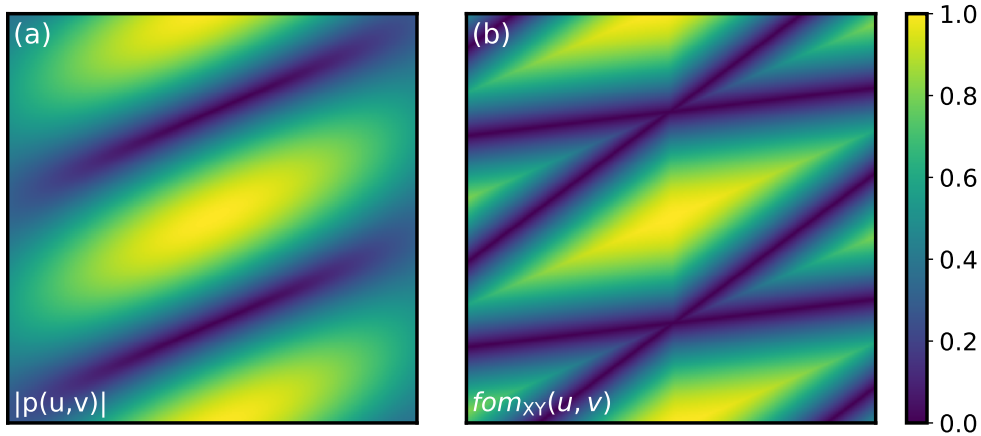


FIGURE 4.6: (a) : Magnitude du terme diagonal $|p(u, v)|$ de la transformation $\hat{\mathbf{M}}_{\text{is}}$ pour le mésalignement de l'équation 4.3, mis à l'échelle pour obtenir $\text{MaxMis} = 2.0$ px. (b) : figure de mérite fréquentielle $fom_{XY}(u, v)$ correspondante (équation A&A2018:22). L'aire représentée correspond au domaine de Nyquist de l'échantillonnage du PWFS : $|u|, |v| \leq 0.5$

petit (< 0.25 pour 80% des fréquences spatiales), et on peut presque écrire directement :

$$\begin{aligned} \hat{X}^{\text{Meas}} &= p(u, v) \hat{X}^{\text{True}} \\ \hat{Y}^{\text{Meas}} &= p(u, v) \hat{Y}^{\text{True}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Finalement, force est de constater qu'entre la redistribution des fréquences spatiales – analysée dans l'espace de Fourier mais contrôlée dans l'espace des modes KL – ainsi que les simulations à SNR quasi-infini, ont permis d'obtenir des résultats peu réalistes, défavorables pour faire de l'OA, mais qui ont fortement enrichi notre raisonnement et notre compréhension de l'échantillonnage fait par l'analyseur et de la propagation de l'information dans le plan de Fourier à travers les différents modes de contrôle.

4.4 Et après ?

Maintenant que j'ai présenté quelques éléments d'analyse supplémentaires quant au contenu technique proposé par l'article [Deo et al. \(2018a\)](#), je propose de faire le point sur les conséquences, tant concrètes que conceptuelles, qui ont été engendrées par ce pan de mes travaux de thèse. Tout d'abord, je présente comment ce travail s'est inscrit dans la R&D de la SCAO pour l'instrument MICADO, et ont conduit à modifier quelques spécifications de l'ASO.

Ensuite, je reviendrai sur ce que ces travaux suggèrent quant à l'approche conceptuelle du PWFS, et comment cela m'a permis d'adopter une posture plus générale par rapport aux problématiques liées au PWFS.

4.4.1 Les spécifications de l'analyseur SCAO de MICADO

La démonstration principale de [Deo et al. \(2018a\)](#) concerne finalement le positionnement opto-géométrique des quatre quadrants A , B , C et D sur le CCD du PWFS. Le compromis est démontré dans la section [A&A2018:7](#) et discuté dans la section [A&A2018:8](#) : si l'on accepte de doubler le volume des calculs matriciels du RTC, pour considérer des mesures de taille $4n_{\text{subap}}$ au lieu de $2n_{\text{subap}}$, alors en utilisant une méthode de contrôle de type $ABCD_{\text{Glob}}$ ou $XYZF_{\text{Glob}}$, les spécifications de positionnement sur les x_i et y_i se trouvent grandement relâchées.

Néanmoins, d'autres spécifications du prisme sont, elles, conservées :

- la taille du défaut optique au sommet, soit par la présence d'un petit éclat, soit d'une arête transverse
- la largeur des arêtes du prisme, sur laquelle il ne peut être considéré comme un dioptre (je renvoie le lecteur·rice à la figure [4.2](#)) au voisinage des intersections des plans de polissage des faces
- ou encore la qualité thermo-mécanique de l'assemblage de l'analyseur, étant donné que l'étude ne couvre que les problèmes liés au positionnement statique, et non à son évolution temporelle.

Et, bien entendu, les positionnements ne sont relâchés que dans la limite conceptuelle d'une pyramide à quatre faces : les quatre images doivent être maintenues sur le CCD, sans recouvrement, et recevoir environ un quart chacune de l'intensité incidente.

Pour la SCAO de l'instrument MICADO, ce travail a effectivement abouti à une refonte des spécifications pour le prisme pyramidal. On cherche à spécifier le positionnement de quadrants de 96 pixels de diamètre sur un CCD de 220 ou 240 pixels de côté – les caméras ALICE (ESO ; [Downing et al. \(2018\)](#)) ou OCam2 (First Light Imaging ; [Feautrier et al. \(2010, 2016\)](#)). Les erreurs tolérées sur x_i, y_i ($i \in A, B, C, D$) ont été élargies de 0.1 px. à 4 px., soit une relaxation totale de la contrainte tant qu'il est garanti que chaque quadrant reste confiné dans le quart prévu du CCD.

Cette décision, comme évoqué dans [Deo et al. \(2018a\)](#), s'est évidemment vue renforcée par des motivations financières. Étant données les techniques de fabrication des prismes pyramidaux, une telle relaxation abaisse significativement le nombre de tentatives à faire par le fabricant avant de réussir un prisme conforme ; le coût pour le client est donc réduit d'autant.

En contrepartie, ce changement de spécification met en tension le design du RTC de la SCAO MICADO, devant doubler la puissance de calcul pour maintenir un temps de latence constant. À l'échelle d'un tel système, la matrice de commande se voit agrandie par le passage d'un contrôle par pente à un contrôle $ABCD$, de quelques $5\,000 \times 12\,000$ à $5\,000 \times 24\,000$.

4.4.2 Des résultats conceptuels

La deuxième plus-value proposée par [Deo et al. \(2018a\)](#) se retrouve dans l'interprétation des résultats des simulations et expériences sur banc, et nous porte au delà de la vision canonique de l'analyseur pyramide.

On trouve dans ces résultats la confirmation par des expériences end-to-end de la généralisation de la notion de pente, explorée depuis longtemps par la communauté (Guyon, 2005; Clergeon, 2014; Fauvarque, 2017), qui pour l’instant n’avait pas réellement trouvé de validation expérimentale; mais sur laquelle un consensus informel se trouvait déjà établi. Plus que les démonstrations techniques autour du mésalignement et de la transformée des fréquences spatiales \hat{M} is qui font l’objet de l’article, je considère aujourd’hui que les résultats qui suivent seront l’héritage le plus intéressant de cet article.

J’ai dit dans la section 4.4.1 qu’il convenait de conserver une structure de pyramide à 4 faces, avec des quadrants non superposés, etc. Néanmoins, en considérant que (1) l’on continuera de préférer la normalisation globale et que (2) si l’on considère le contrôle $ABCD$ plutôt que $XYZF$, l’appariement des pixels 4 par 4 devient une étape superflue. Nous avons désormais toutes les cartes en mains pour étudier les analyseurs de la famille des pyramides sans référer à la notion de sous-ouverture localisée, et sans explicitement identifier les pixels à des unités de surface dans la pupille.

Ce point de vue me permet de reconnecter mes études avec les travaux de Fauvarque (2017), qui emmène la généralisation beaucoup plus loin dans le cadre des ASO à filtrage de Fourier. Vu sous son formalisme – qui requiert l’utilisation de la normalisation globale et d’un contrôle équivalent à celui que j’appelle $ABCD$ pour le PWFS –, l’opération de transformation qui va du front d’onde jusqu’aux pixels est un opérateur localement linéaire pour une vaste classe de pièces optiques placés au foyer de l’instrument à la place d’un prisme pyramidal. L’étude de l’opérateur correspondant pour chacun de ces ASO permet de dériver une matrice de commande pour faire de la reconstruction effective de front d’onde. Une partie du chemin est donc parcourue pour connecter l’approche conventionnelle de la pyramide, souvent rattachée à des éléments d’optique géométrique et à l’expérience acquise sur les Shack-Hartmann, avec la théorie des ASO à filtrage de Fourier.

Concrètement, des opportunités se voient ouvertes pour des nouveaux senseurs de type pyramide (section 2.4.4), pour lesquels l’appariement des pixels était jusqu’à présent un frein conceptuel ou technique. On pourra citer, par exemple, la pyramide aplatie ou la pyramide à 3 faces (Fauvarque et al., 2016b). Cette dernière fait déjà l’objet d’un intérêt très particulier : on lui suppose des propriétés de linéarité, sensibilité et dynamique très similaires à celles de sa grande sœur à 4 faces. Je reviendrai sur la pyramide à 3 faces à la section 5.4, dans laquelle je lui appliquerai les techniques et l’expérience acquise sur le PWFS usuel. Parmi ces techniques se trouve notamment la compensation des effets non-linéaires du PWFS, que j’étudie au chapitre suivant.

Gain optique et compensation modale

À l'aube de l'avènement des ELT, et avec le nombre grandissant de projets d'OA se munissant d'analyseurs pyramide, de nombreuses questions restent à résoudre pour parvenir à une véritable maîtrise du senseur, et ainsi obtenir le meilleur des instruments à très hauts ordres dans un futur proche.

Une de ces thématiques est la gestion par un contrôle approprié des non-linéarités du PWFS. On regroupe une partie de ces régimes non-linéaires sous la dénomination de *gain optique*, dont l'étude et la compensation font l'objet de ce chapitre.

Sommaire

5.1	Contexte	150
5.1.1	Non-linéarité et baisse de sensibilité	150
5.1.2	Compensation et approche modale	154
5.2	Article A&A2019 : Deo et al. (2019a)	156
5.3	Discussions et compléments	175
5.3.1	Les fronts d'onde de classe p_0	175
5.3.2	Rayon de modulation et autres bases modales	177
5.3.3	Sélection des modes pour le dithering	182
5.3.4	Compensation dense du gain optique	186
5.4	Quelques résultats pour la pyramide à trois faces	190
5.4.1	Préliminaires	190
5.4.2	Dithering pour le 3PWFS : étude des abaques	193
5.4.3	Simulations end-to-end	193
5.4.4	Analyse des non-linéarités	197
5.4.5	Conclusion	200

5.1 Contexte

Avec ce que nous avons vu de l'analyseur pyramide jusqu'à présent, j'ai déjà abondamment eu l'occasion de dire qu'il s'agissait d'un analyseur de front d'onde non-linéaire et que cette situation nous procurerait quelques problèmes par la suite.

Nous y sommes.

Je présente dans cette section les éléments principaux qui définissent le régime de *gain optique*, puis, en revenant sur les premiers travaux sur le sujet de [Korkiakoski et al. \(2008\)](#), je présenterai la méthodologie que j'adopterai dans la suite du chapitre pour m'attaquer au problème du contrôle optimisé du PWFS.

5.1.1 Non-linéarité et baisse de sensibilité

Les points de vue que je présente ici ont pour but de fournir quelques exemples basiques sur pourquoi et comment les non-linéarités du PWFS se comportent. Ces points de vue se recoupent, mais sont issus de formalismes, d'approximations, et d'analyses conceptuelles variés du PWFS. Je ne chercherai pas à en faire la synthèse ou à les relier mathématiquement, mais plutôt à donner au lecteur une compréhension du phénomène qui nous intéresse : pourquoi, relativement au régime des faibles phases, la sensibilité du PWFS diminue dès que l'on quitte ce régime.

Du point de vue de l'optique géométrique

Nous avons déjà croisé une première approche de la non-linéarité dans la section 2.4 : le PWFS, sous le modèle d'optique géométrique de [Ragazzoni \(1996\)](#), se comporte comme un dérivateur avec une saturation nette quand le gradient de front d'onde dépasse l'angle du rayon de modulation r_{Mod} .

Cette première modélisation fonctionne très bien dans les cas les plus simples : pour le tip-tilt ; lorsqu'on effectue l'analyse localement, en considérant, indépendamment, le signal mesuré par chaque sous-ouverture ; ou enfin si l'analyseur pyramide a une résolution si grossière qu'il se réduit à un analyseur quatre-quadrants, où chacun des quadrants du PWFS A, B, C, D devient sur le CCD un unique gros pixel.

Néanmoins dans le cadre véritable du PWFS, pour une distribution donnée du front d'onde, le seuillage du gradient se produit continûment à travers les différentes sous-ouvertures alors que l'amplitude du front d'onde augmente.

J'utilise pour présenter les exemples de ce paragraphe un modèle très basique de l'analyseur pyramide. J'utilise la courbe de réponse calculée pour le modèle géométrique de [Ragazzoni \(1996\)](#) (équation 2.28), c'est à dire que je calcule directement, à partir d'un front d'onde ϕ , les pentes :

$$\text{sat} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{r}); \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right) \text{ et } \text{sat} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{r}); \frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}} \right), \quad (5.1)$$

où $\text{sat}(\cdot)$ est la fonction de saturation définie à la section 2.4.

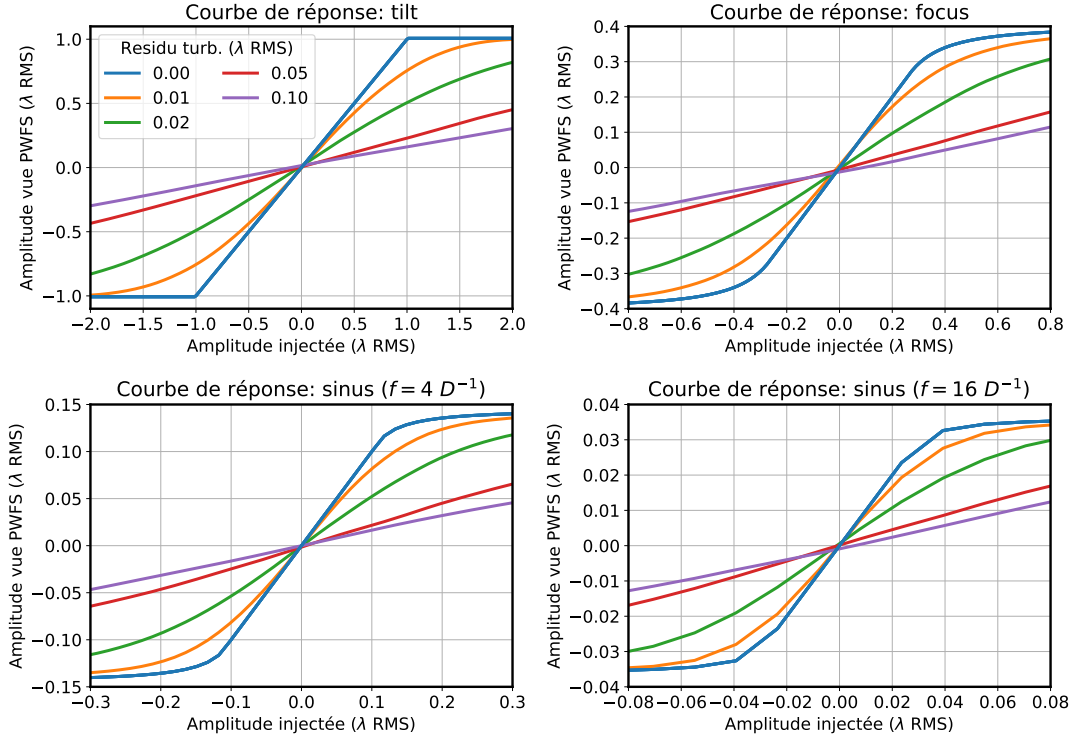


FIGURE 5.1: Courbes de réponse à plusieurs modes d'un analyseur pyramide simulé par simple optique géométrique, en fonction du niveau de turbulence résiduel. Le résidu turbulent suit une statistique Kolmogorov à partir de la fréquence $f = 20 D^{-1}$, et est de spectre nul en deçà. Voir également la figure A&A2019:1.

L'implémentation est faite en quelques lignes : le front d'onde est généré, puis le gradient est calculé par différences finies, et enfin cette dérivée est seuillée à la valeur correspondant au rayon de modulation.

Je montre – sous ce modèle du senseur – sur la figure 5.1 la courbe de réponse de l'analyseur pyramide à divers modes, en fonction de résidus additionnels vus par l'analyseur en plus du mode étudié. Pour cela, je rajoute au front d'onde un terme de hautes fréquences spatiales pour simuler un résidu de boucle avec une PSD suivant une loi en $f^{-11/3}$ au delà d'une fréquence de 20 périodes par pupille – $f = 20 D^{-1}$ – et nulle en deçà, c'est à dire simulant grossièrement l'erreur de fitting du DM.

On observe donc que l'introduction de résidus, dès quelque $10^{-2} \lambda$ RMS, vient atténuer la réponse du senseur à l'ensemble des modes contrôlés par le système d'OA. Si nous utilisons la réponse du senseur étalonnée en l'absence de résidu, la reconstruction du front d'onde est alors toujours insuffisante à cause de cette variation de réponse, un effet comparable à une atténuation non souhaitée du gain de boucle.

En contrepartie, on note que l'on obtient une augmentation de la dynamique du senseur, à travers un fort lissage de la transition entre les régimes linéaires et saturés.

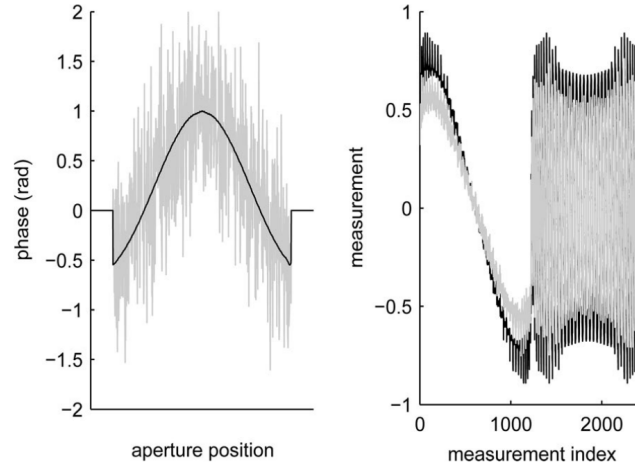


FIGURE 5.2: Réponse de l'analyseur pyramide à un quasi-défocal, avec (gris) et sans (noir) résidu turbulent de hautes fréquences spatiales ajouté au mode. Gauche : coupe radiale du front d'onde introduit ; droite : valeur des pentes en x et y , selon un axe puis l'autre, dans l'ordre des sous-ouvertures. *Crédit : V. Korhikoski.*

L'atténuation est également bien visible dans l'espace des pentes du senseur, avant même de considérer la reconstruction des modes. Je montre sur la figure 5.2 (voir aussi figure A&A2019:1) la réponse du PWFS à un quasi-défocal, montré seul et additionné avec un résidu. On constate immédiatement l'atténuation du signal mesuré avec le résidu par rapport à sa contrepartie pure.

Dans le cadre des optiques adaptatives à PWFS, c'est ce phénomène qu'on appelle précisément le régime de gain optique : l'ensemble aggloméré du front d'onde résiduel – composé des modes du miroir, ou seulement de l'erreur de fitting – vient perturber la réponse de l'analyseur, et ce pour chaque mode dès le régime différentiel localement autour d'un point de fonctionnement donné.

Par ailleurs, le raisonnement mené ici nous fait attendre un comportement identique à l'effet d'un écrêtage en traitement des signaux temporels : une diminution d'énergie dans le fondamental – i.e. le mode d'intérêt – et l'apparition d'harmoniques spatiales dans la sortie du senseur.

Du point de vue du contraste

On obtient une autre approche à la baisse de sensibilité en considérant la distribution de l'illumination dans le plan focal au sommet de la pyramide. On considère la PSF obtenue par la correction partielle de l'OA obtenue à un instant donné, PSF qu'on vient modéliser comme la somme de deux composantes :

- Le coeur cohérent, de hauteur normalisée égale au Strehl instantané S , et contenant cette fraction S des photons incidents.
- Un pied de PSF, distribué spatialement, contenant le reste des photons.

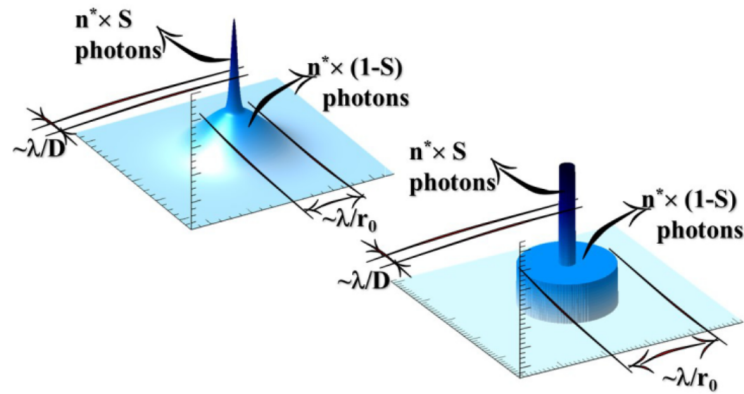


FIGURE 5.3: Une modélisation de la PSF en régime de correction partielle. S : rapport de Strehl instantané; n^* : nombre de photons reçus. *Crédit* : V. Viotto.

Cette modélisation, proposée dans [Viotto et al. \(2016b\)](#), est montrée sur la figure 5.3. En poussant un peu plus l'approximation, nous imaginons que cette PSF correspond à la véritable distribution d'intensité de la source observée, qui serait composée d'une étoile non résolue entourée d'un halo. Les photons du cœur permettent effectivement de faire l'analyse de front d'onde, alors que les photons (ou les speckles) dans le pied ou même en dehors de la zone de correction sont approximés comme (1) incohérents et (2) issus de tous les points de la pupille. Ces approximations, grossières, ne tiennent réellement que si le résidu est composé de très hautes fréquences spatiales, et donc que pour chaque localisation dans la pupille le gradient de front d'onde varie rapidement et distribue largement l'intensité dans le plan focal – avec des speckles majoritairement plus loin que r_{Mod} des arêtes du PWFS. La validité de l'hypothèse se renforce donc sur un grand télescope, pour lequel la tache de seeing est notablement plus grande que le cœur de la PSF.

En poursuivant avec ce modèle, on obtient donc que les photons du pied de PSF se conjuguent dans le plan de la caméra en une illumination homogène, et ne participent pas à l'analyse de front d'onde. Finalement, on obtient donc une réduction du contraste dans le plan d'analyse d'un facteur S , et par suite une réduction d'un facteur S de la sensibilité de l'analyseur.

Le même raisonnement peut être appliqué lors du calcul de sensibilité du PWFS par la méthode interférentielle, présentée à la section 2.4.3, en comptant à nouveau que les $(1 - S)n^*$ photons du pied de PSF ne contribuent qu'à atténuer le contraste des franges d'intérêt.

Finalement, on trouve donc un second raisonnement qui nous permet de comprendre pourquoi le PWFS subit une baisse de sensibilité dans les régimes opérationnels, qui diffèrent du régime de calibration. Si la baisse de sensibilité suit effectivement une tendance comparable à celle du Strehl (voir par exemple la figure 13 de [Deo et al.](#)

(2018b)), les courbes ne se superposent pas et l'espace des paramètres à prendre en compte est largement plus complexe¹. On observera en général que la sensibilité diminue plus vite que le Strehl lors d'une dégradation de la qualité d'image.

Conséquences pour les matrices d'interaction

Il est donc maintenant pertinent d'introduire ce que l'on va précisément chercher à quantifier pour prendre en compte l'effet du gain optique sur le système. Pour cela, je vais anticiper sur le formalisme qui sera utilisé dans l'article [Deo et al. \(2019a\)](#) (section 5.2) et dans le reste de ce chapitre.

Pour notre étude du gain optique, il est intéressant d'établir la réponse du système dans un certain régime de fonctionnement. Mis en perspective avec les exemples montrés sur la figure 5.1, il s'agit d'établir la pente à l'origine de la courbe de réponse sous certaines perturbations.

Cette grandeur nous est donnée par la réponse différentielle à un front d'onde ϕ autour du front d'onde résiduel ϕ_{Res} . Je note, comme pour les matrices d'interaction, cette dérivée de la réponse du senseur **dPyr** :

$$\mathbf{dPyr}(\phi; \phi_{\text{Res}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Res}} + \varepsilon \cdot \phi) - \mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Res}} - \varepsilon \cdot \phi)}{2\varepsilon}. \quad (5.2)$$

Ainsi, mon analyse sur le gain optique et la mise en place des méthodes de compensation, que je décris dans l'article [Deo et al. \(2019a\)](#), s'axera autour de l'étude de cette grandeur, et de sa bonne utilisation pour accorder la loi de commande à son évolution.

5.1.2 Compensation et approche modale

Comme je l'ai fait observer sur la figure 5.1, la baisse de sensibilité en conditions opérationnelles devient rapidement considérable avec la présence de résidu turbulent. J'entends ici *considérable* par : suffisant pour entraver au bon fonctionnement de la boucle d'OA, et donc de motiver une étude approfondie du phénomène.

Le problème reporté sur la bonne opération de l'OA est évidemment lié aux paramètres du système étudié et simulé. Cette étude s'inscrit dans le contexte de systèmes SCAO en lumière visible pour les ELT ; ces cas engendrent des problématiques spécifiques par rapport à des systèmes XAO sur des télescopes de 10 m ou moins, ou encore pour des senseurs infrarouge.

Maintenant que nous avons donc établi la présence d'une réduction *considérable* de sensibilité, on va donc naturellement chercher à compenser cette baisse de sensibilité en utilisant des lois de commande appropriées.

Dans un premier temps, la méthode naturelle de compensation consiste à agir sur le gain de la boucle de rétroaction du système. On peut généralement dire qu'un RTC fournit deux fonctionnalités successives : la reconstruction du front d'onde ; et le contrôle de la dynamique de la boucle. Dans le cadre d'un ajustement empirique

1. et les hypothèses faites ici sont excessivement simplificatrices.

du gain d'intégrateur ces deux fonctionnalités se confondent de manière transparente, et on peut, sous certaines conditions, améliorer considérablement la performance en ajustant le gain au delà de sa valeur supposément optimale au sens de la dynamique du système.

Néanmoins, la possibilité d'effectuer correctement l'étape de reconstruction en ajustant un facteur multiplicatif scalaire par rapport à la matrice de commande n'est généralement pas suffisamment vérifiée sur des systèmes de hauts ordres. Les travaux de [Korkiakoski et al. \(2008\)](#) proposent en premier de s'attaquer à cette problématique par une compensation modale de la sensibilité. Étant donnée une base de modes ϕ_1, \dots, ϕ_N du miroir déformable, il est proposé d'effectuer la compensation mode à mode en amplifiant chaque ligne de la matrice de commande modale d'un facteur :

$$\frac{\|\mathbf{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}} = 0)\|}{\|\mathbf{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}})\|}, \quad (5.3)$$

de telle sorte que l'amplitude de la réponse à une excitation de norme donnée soit maintenue constante dans l'espace des mesures.

Cette méthode est déjà la réponse à un premier problème : il n'est pas possible, pour chaque front d'onde ϕ_{Res} vu en temps réel par le PWFS, de venir calculer une matrice de commande pour ces conditions précises. On se contente donc, à travers une procédure plus réaliste, de s'appuyer sur la matrice de commande obtenue lors des calibrations, et d'en ajuster la sensibilité sur une base prédéfinie de modes, avec un coefficient moyen par mode. Par ailleurs, comme je le décris dans [Deo et al. \(2019a\)](#), le calcul de ces coefficients modaux fournit déjà une confirmation auto-cohérente de leur utilité : à travers les différents modes ϕ_i , ces gains peuvent présenter d'importantes variations ; on en déduit donc qu'un seul ajustement par un gain scalaire de la loi de commande ne peut permettre de compenser convenablement les différentes composantes modales.

Comme il n'est justement pas possible d'effectuer la mesure de \mathbf{dPyr} sur chaque front d'onde résiduel, il convient de trouver une approche telle que les gains choisis soit valables dans la durée, c'est à dire appropriés à une grande diversité de fronts d'onde ϕ_{Res} . Sur cette thématique, une bonne propriété du PWFS vient nous aider – également mise en lumière par [Korkiakoski et al. \(2008\)](#) : tant que la puissance de la turbulence – quantifiée par r_0 – reste constante, la sensibilité modale de l'analyseur varie très peu, et donc la compensation appliquée peut être maintenue à une même valeur.

La méthode initialement proposée consiste donc à générer aléatoirement un unique front d'onde ϕ_{Res} , quit suit la densité spectrale de puissance du résidu estimée à travers la télémétrie de l'OA. À partir de cet unique ϕ_{Res} , des simulations hors temps réel permettent d'obtenir une mesure – supposée statistiquement certaine – des gains modaux à appliquer.

5.2 Article A&A2019 : Deo et al. (2019a)

L'article qui suit a été publié en septembre 2019 dans le journal *Astronomy & Astrophysics*. Il est articulé en deux parties principales : La première porte sur la définition que nous donnons au phénomène de gain optique, l'analyse quantitative que nous proposons dans un espace modal de reconstruction, la définition de gains modaux optimaux au sens de l'erreur de nonlinéarité, pour enfin aboutir à des résultats numériques exhaustifs sur la sensibilité et l'erreur induite par le gain optique en fonction de la turbulence atmosphérique. Nous fournissons un cadre mathématique aux effets que nous avons dessinés à travers les exemples de la section 5.1.1.

Cette analyse est construite autour de l'hypothèse de persistance des gains modaux que nous conservons et validons : le r_0 de la turbulence définit bien à lui seul la "bonne compensation" à appliquer pour les conditions courantes.

La seconde partie de l'article présente une méthodologie pour appliquer cette compensation dans des conditions opérationnelles. Nous proposons et étudions un processus entièrement automatisé qui introduit des signaux connus sur le DM et nous analysons l'information récupérée par le PWFS. Grâce à cette méthode, nous parvenons à maintenir les gains modaux à des valeurs quasi-optimales à travers de très longues séquences d'observations et des conditions atmosphériques largement variables ; et cette procédure peut être accomplie à intervalles réguliers, avec une incidence négligeable sur le canal d'imagerie scientifique.

A telescope-ready approach for modal compensation of pyramid wavefront sensor optical gain

V. Deo, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal, A. Sevin, F. Ferreira, D. Gratadour, and T. Buey

LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 Place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
e-mail: vincent.deo@obspm.fr

Received 6 May 2019 / Accepted 27 July 2019

ABSTRACT

The pyramid wavefront sensor (PWFS) is the currently preferred design for high-sensitivity adaptive optics (AO) systems for extremely large telescopes (ELTs). Yet, nonlinearities of the signal retrieved from the PWFS pose a significant problem for achieving the full correction potential using this sensor, a problem that will only worsen with the increasing dimension of telescopes. This paper investigates the so-called optical gain (OG) phenomenon, a sensitivity reduction and an overall modification of the sensor response induced by the residual wavefront itself, with considerable effects in standard observation conditions for ELT-sized AO systems. Through extensive numerical analysis, this work proposes a formalism to measure and minimize the first-order nonlinearity error caused by optical gain variation, which uses a modal compensation technique of the calibrated reconstructor; this enables a notable increase in performance in faint guide stars or important seeing scenarios, for example from 16 to 30% H -band Strehl ratio for a sixteenth magnitude star in $r_0 = 13$ cm turbulence. Beyond the performance demonstrated by this compensation, a complete algorithm for realistic operation conditions is designed, which from dithering a few deformable mirror modes retrieves the optimal gains and updates the command matrix accordingly. The performance of this self-updating technique – which successfully allows automatic OG compensation regardless of the turbulent conditions, and its minimal interference with the scientific instrument are demonstrated through extensive end-to-end numerical simulations, all at the scale of an ELT instrument single-conjugate AO system.

Key words. instrumentation: adaptive optics – techniques: high angular resolution – telescopes

1. Introduction

A continuous effort is being provided by the adaptive optics (AO) community to drive forward the usability of the pyramid wavefront sensor (PWFS). Since its introduction (Ragazzoni 1996) as a high-sensitivity alternative to the Shack–Hartmann (Ragazzoni & Farnato 1999; Esposito & Riccardi 2001; Véronaud 2004), the PWFS has been thoroughly assessed to be the better alternative for high-Strehl AO systems currently in development, including first-light instruments for all three extremely large telescopes (ELTs; Véran et al. 2016; Pinna et al. 2014; Neichel et al. 2018; Clénet et al. 2018).

However, mastering the PWFS for such high-order AO systems comes with a number of theoretical and technological challenges. In particular, the PWFS exhibits a strongly nonlinear behavior, as in-loop residual wavefronts dramatically alter the response of the sensor. This response modification between the calibration and on-sky operations is mainly expressed through a spatial-frequency-dependent sensitivity reduction, a phenomenon named optical gain (OG). Numerical values in median seeing conditions – for example r_0 of 14 cm at sensor visible wavelength – for an ELT typically range within 50–80 % of perceived attenuation of closed-loop residuals when compared to small-signal calibrations. Furthermore, the fluctuation of sensitivity with on-sky external parameters prevents a well adjusted subtraction of the calibrated noncommon path aberrations (NCPAs) through the application of the reference slopes, with OG affecting the system as an unforeseen transformation between the acquired setpoint and the runtime measurements.

Both the sensitivity reduction and the NCPA alteration are critical and must be addressed to obtain efficient AO with a PWFS.

The PWFS nonlinearities also make the sensor formally incompatible with the usual process of matrix-vector multiplication (MVM)-based phase reconstruction, which is the core of most AO real-time computers (RTCs) today as such linear methods are well proven and computationally efficient. Although analytically extensive models of the PWFS response have been proposed (Shatkhina 2014), and inverse methods to these models are being extensively investigated throughout the AO community (Frazin 2018; Hutterer & Ramlau 2018), our research scopes only within the frame of classical linear reconstruction and sets aside iterative nonlinear methods, so as to avoid the added computational burden. This work was initiated in Deo et al. (2018a).

To handle OG, Esposito et al. (2015) proposed to adjust the overall integrator gain of the AO to compensate for tip-tilt sensitivity in real time. Viotto et al. (2016) suggested to introduce dithering in different modes to assess the dependence of the phenomenon across spatial frequencies. We propose to adapt the RTC control law through a modal gain approach, which depends – among others – on the current seeing, through obtaining a linearization of the PWFS response for variations around AO residuals for a given r_0 . This approach was initiated by Korkiakoski et al. (2008a), and generalizations based on a generic framework for Fourier-based wavefront sensors are being actively researched (Fauvarque et al. 2016, 2019).

We build upon the OG analysis within the modal command matrix update framework, and derive a compensation

method and the necessary technical declinations ensuring its appropriateness for on-sky operations. We numerically investigate the statistical validity of the modal approach and propose a measure-and-update workflow based on a precomputed database of appropriate modal gains. The objective of this research is twofold: to mathematically minimize the nonlinear reconstruction errors within a well-assessed approximation hypothesis; and operationally, to provide procedures that enforce this minimization automatically and continuously, without requiring operator intervention.

We first introduce in Sect. 2 our formalism and hypotheses for optimal and realistic OG modal compensation. Section 3 presents the AO system we use for all simulations in this paper, namely the current design parameters for dimensioning the MICADO single-conjugate AO (Clénet et al. 2018); Sect. 4 validates the statistical hypotheses required, providing a quantitative analysis of sensitivity reduction, optimal gains, and nonlinearity errors and the reduction thereof when applying optimal OG compensation. Section 5 covers the automatic method for optical gain modal coefficients to be updated regularly, using a precomputed database and performing in-situ measurements through an optical dithering of the deformable mirror. Sections 6 and 7 present end-to-end numerical simulations, demonstrating the performance increase using our automatic method and its robustness to turbulence condition variations across a short timescale. Finally, Sect. 8 offers some discussions and results on key points raised with our sky-ready method: optical interaction between dithering and scientific imaging; and appropriate NCPA compensation provided by the improved knowledge of real-time sensitivity.

2. Optical gain: definitions and formalism

2.1. Differential response and interaction matrices

For all analyses and results presented in this paper, our conceptual approach to the PWFS is a generic one of some nonlinear operator between the input wavefront and the normalized pixel space (referred to as slope space hereafter). The **Pyr** operator covers the transformation between a wavefront ϕ in the entrance pupil and the slope vector \mathbf{S} :

Let **Pyr** (ϕ) = \mathbf{S} such that:

$$\phi \xrightarrow{\text{Optical propagation}} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_K \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Preprocessing}} \mathbf{S} = \left(\frac{4}{K} \sum_{i=1}^K z_i \right)^{-1} \times \mathbf{z}, \quad (1)$$

where z_1, \dots, z_k are the CCD pixel values for the K valid pixels located within the four pupils re-imaged after the pyramidal prism. The exact expression of the **Pyr** operator would depend on several parameters, such as PWFS prism defects, misalignments (Deo et al. 2018b), and notably the modulation radius used. This generic formalism could also be extended to WFSs other than a classical four-sided PWFS.

We adopt the global pixel normalization (Vérinaud 2004), and consider all valid pixels (Clergeon 2014) rather than computing the “normalized differences between opposite pairs of pupils” as initially suggested by Ragazzoni (1996). The factor $\frac{4}{K}$ ensures that the mean value of the slope is 0.25, corresponding to the original definition with a unit flux per subaperture. In Deo et al. (2018b), we demonstrated that this global normalization was more effective in terms of end-to-end system performance than the original local alternative (Ragazzoni 1996); and

that using all pixels was altogether equivalent to using the slopes maps, while being the more generic approach, paving the way for the application of the methods presented in this paper to sensors other than an ideal four-faced PWFS as we use herein. The global normalization is also well tailored to locally linearized interpretations of PWFS behavior, such as the studies providing theoretical frameworks consistent with the approach detailed here (Fauvarque et al. 2016; Frazin 2018).

One main step for the calibration of the AO system is to obtain the interaction matrix as a linearization around the operating point. Here, we consider the behavior of the PWFS with some residual phase error due to the AO loop ϕ_{Res} . This can be done with sufficiently small deformable mirror (DM) modal pokes $\epsilon \cdot \phi$ and disregarding noise; one then obtains the derivative of the PWFS response along a wavefront ϕ locally around ϕ_{Res} :

$$\mathbf{dPyr}(\phi; \phi_{\text{Res}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Res}} + \epsilon \cdot \phi) - \mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Res}} - \epsilon \cdot \phi)}{2\epsilon}. \quad (2)$$

The interaction matrix at ϕ_{Res} : $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ is then a collection of differentiations $\mathbf{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}})_{1 \leq i \leq N}$ for the modal basis (ϕ_1, \dots, ϕ_N) of the DM wavefront space. The modal basis to be used is usually determined beforehand based on criteria other than OG compensation, and is beyond the scope of this paper. We simply assume here the use of a nonredundant basis reduced to a convenient subset of the DM space, free from any PWFS blind modes.

Among these generically defined interaction matrices, the one around the unaberrated wavefront $\phi_{\text{Res}} = 0$ holds a specific function as the one that is effectively computed and used to calibrate the AO. When analyzing OG quantitatively, it is observed that $\phi_{\text{Res}} = 0$ yields the maximum PWFS sensitivity. Therefore, we have taken the reference interaction matrix $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}=0}$ as a uniquely defined comparison point for relative assessments of OG impact.

From $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}=0}$, the wavefront reconstructor of the PWFS is obtained:

$$\mathbf{Rec} = \mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}=0}^\dagger \quad (3)$$

where \bullet^\dagger is appropriately conditioned matrix generalized inversion. The above defined **Rec** is effectively the modal command matrix of the system in the usual acceptance for the selected DM basis, and the reconstruction is exact for a sufficiently small wavefront ϕ generated by the DM:

$$\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\phi) = \phi. \quad (4)$$

2.2. Optical gain: a turbulence-induced nonlinearity

The reconstruction identity of Eq. (4) generally does not hold in realistic AO operation conditions when a non-negligible wavefront aberration reaches the PWFS. This induces a variation in the PWFS response, this variation being important even when the residual is dominated by the fitting term. Such a situation is illustrated through a preliminary example in Fig. 1, displaying the slopes $\mathbf{S}(\phi)$ when the PWFS is shown a tilt aberration, with and without an added 120 nm RMS fitting ϕ_{Res} (top); and the response curves for a few modes (bottom). This class of effects is what we name the OG phenomenon: an invalidation of the calibrated response of the PWFS due to residual wavefronts, a characteristic not covered by the calibration.

Mathematically, Eq. (4) failing even for small ϕ signifies that the Jacobian $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ near the residual wavefront differs from the calibrated $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}=0}$, and therefore that the linear reconstructor

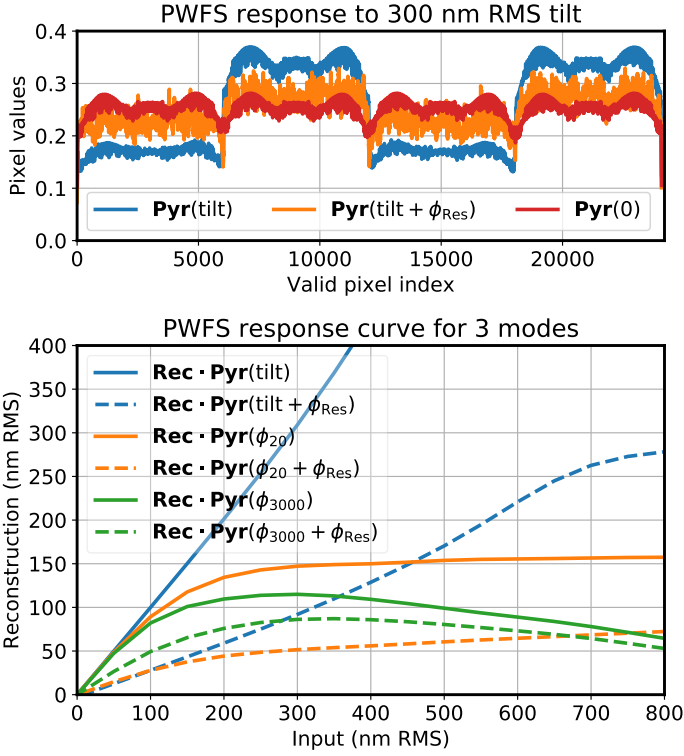


Fig. 1. *Top:* PWFS slopes vector for a flat wavefront, a 300 nm RMS tilt, and the same tilt added to a 120 nm RMS fitting error wavefront ϕ_{Res} , showing the attenuation of the signal. Data are smoothed by a window of 50 samples in width for clarity. *Bottom:* recorded PWFS response curve to three modes – tilt and Karhunen–Loève 20 and 3000 – with and without the same ϕ_{Res} . The tilt curve without residuals saturates around 750 nm RMS. The AO setup simulated is described in Sect. 3.

\mathbf{Rec} is inappropriate for the AO operating regime. In order to overcome this issue which impedes the linear wavefront reconstruction framework, one would ideally always use the appropriate command matrix, provided the instantaneous disturbing wavefront ϕ_{Res} is known. Such continuous measurements and updates of $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ are unfortunately conceptually and computationally unreasonable.

Modal OG compensation – initiated by Korkiakoski et al. (2008a) – is a first-order approximation and substitutes the estimation of the instantaneous Jacobian by a modal scaling of the reference interaction matrix, assuming modal optical gain coefficients (OGCs) may be obtained. For this operation to be possible, the required property is that for each DM basis mode ϕ_i ($1 \leq i \leq N$), a scalar λ_i exists such that:

$$\mathbf{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}}) = \lambda_{i, \phi_{\text{Res}}} \times \mathbf{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}} = 0), \quad (5)$$

or, spanning the whole basis, for a diagonal matrix $\mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ to exist such that

$$\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}} = \mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}=0} \cdot \mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}}. \quad (6)$$

With Eq. (6) verified, the modal command matrix of the system can be updated with $\mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}}^{-1} \cdot \mathbf{Rec}$, that is, with a line-wise rescaling with the candidate OGCs – ignoring for now cases with ill-conditioned $\mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}}$. Assuming that $\mathbf{\Lambda}$ matrices can be found that are suitable for most AO operating conditions, this analysis paves the way for an appropriate OG compensation through regular command matrix updates.

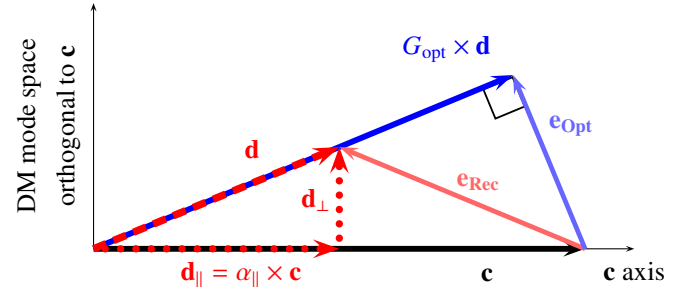


Fig. 2. Schematic OG-impeded reconstruction of a mirror mode $\phi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$ represented by vector \mathbf{c} , around any given nonzero phase ϕ_{Res} (not shown). The misestimated reconstruction $\mathbf{d} = \mathbf{Rec} \cdot \mathbf{dPyr}(\phi; \phi_{\text{Res}})$ is the sum of a colinear component \mathbf{d}_{\parallel} and an orthogonal part \mathbf{d}_{\perp} . Reconstruction errors \mathbf{e}_{Rec} and \mathbf{e}_{Opt} are the first-order nonlinearity errors with and without application of the appropriate $\mathbf{G}_{\text{opt}}(\phi; \phi_{\text{Res}})$ OGC, respectively.

2.3. Defining the optimal optical gain coefficients

Equation (6) nonetheless represents a strong hypothesis in the general case, and therefore we propose a phenomenological approach to quantify the discrepancy between $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ and $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}=0} \cdot \mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}}$ for optimally adjusted λ_i . Our strategy to calibrate optimal OGCs is hence to evaluate the impact of residual wavefronts on DM basis modes, and thereupon to derive the optimal OGC for this mode.

For a DM wavefront ϕ , represented as vector $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$ on the DM basis ϕ_1, \dots, ϕ_N , we consider the OG-uncompensated small-signal reconstruction near a residual wavefront ϕ_{Res} :

$$\mathbf{d}^{\phi_{\text{Res}}} = \mathbf{Rec} \cdot \mathbf{dPyr}(\phi; \phi_{\text{Res}}). \quad (7)$$

The vector $\mathbf{d}^{\phi_{\text{Res}}}$ is the DM space wavefront reconstructed from PWFS measurements, erroneously instead of \mathbf{c} . We choose to decompose it into components colinear and orthogonal to \mathbf{c} :

$$\mathbf{d}^{\phi_{\text{Res}}} = \mathbf{d}_{\parallel}^{\phi_{\text{Res}}} + \mathbf{d}_{\perp}^{\phi_{\text{Res}}}, \quad (8)$$

as illustrated in Fig. 2. From this decomposition, we bring out the colinear sensitivity reduction coefficient, which traces the core effect at the origin of the denomination “optical gain”. This is expressed as:

$$\alpha_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{Res}}) = \frac{\|\mathbf{d}_{\parallel}^{\phi_{\text{Res}}}\|}{\|\mathbf{c}\|}, \quad (9)$$

with $\|\cdot\|$ being wavefront euclidean norm. Similarly, we define the orthogonal nonlinear coefficient:

$$\alpha_{\perp}(\phi; \phi_{\text{Res}}) = \frac{\|\mathbf{d}_{\perp}^{\phi_{\text{Res}}}\|}{\|\mathbf{c}\|}, \quad (10)$$

as an indicator of the confusion between DM modes arising from the PWFS nonlinear response.

From α_{\parallel} and α_{\perp} , we derive the putative optimal OGC for wavefront ϕ :

$$\mathbf{G}_{\text{opt}}(\phi; \phi_{\text{Res}}) = \frac{\alpha_{\parallel}}{\alpha_{\parallel}^2 + \alpha_{\perp}^2}, \quad (11)$$

as the minimizing solution for the first-order nonlinearity error $\|\mathbf{c} - \mathbf{G}_{\text{opt}}(\phi; \phi_{\text{Res}}) \times \mathbf{d}\|$. The original error using the reconstructor \mathbf{Rec} is denoted $\mathbf{e}_{\text{Rec}} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, and the minimized one

$\mathbf{e}_{\text{opt}} = \mathbf{G}_{\text{opt}} \times \mathbf{d} - \mathbf{c}$; their normalized lengths are simply expressed from α_{\parallel} and α_{\perp} :

$$\frac{\|\mathbf{e}_{\text{Rec}}\|}{\|\mathbf{c}\|} = \sqrt{(1 - \alpha_{\parallel})^2 + \alpha_{\perp}^2}, \quad \text{and} \quad \frac{\|\mathbf{e}_{\text{opt}}\|}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{\alpha_{\perp}}{\sqrt{\alpha_{\parallel}^2 + \alpha_{\perp}^2}}. \quad (12)$$

The quantitative values of \mathbf{e}_{opt} and \mathbf{e}_{Rec} – and the statistical distributions thereof – are investigated numerically in Sect. 4.2, and prove to be very useful indicators to quantify first-order nonlinearity errors when using appropriate OGCs.

To obtain optimal OGCs for all controlled modes ϕ_i of the DM basis, Eqs. (7)–(11) are applied for each ϕ_i . Equation (2) describes the way $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ is computed in our simulations, by freezing the AO loop on a given ϕ_{Res} and introducing small perturbations $\epsilon \cdot \phi$ around it. Using this evaluation of $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$, we may then derive the quantities of Eqs. (7)–(11). The reconstructor update diagonal matrix $\Lambda_{\phi_{\text{Res}}}^{-1}$ is defined by its diagonal coefficients $G_{\text{opt}}(\phi_i; \phi_{\text{Res}})_{1 \leq i \leq N}$.

2.4. Statistics with disturbing wavefronts

In Sect. 2.3, we obtained a candidate set of optimal OGCs given a residual wavefront ϕ_{Res} . At the current state of this research, it is unrealistic to measure $G_{\text{opt}}(\phi_i; \phi_{\text{Res}})$ for every single turbulent wavefront realization; therefore, it is useful to define classes of realistic closed-loop wavefronts yielding similar $G_{\text{opt}}(\phi_i; \phi_{\text{Res}})$. This objective is the direct consequence of a key requirement for modal OG compensation with regular command matrix updates to perform: OGCs are to be valid for a sufficient duration between updates. Originally, Korkiakoski et al. (2008b) proposed that OGCs were only dependent on the current r_0 of the turbulence. It turns out that during the writing of this article, Fauvarque et al. (2019) came up with the analytical demonstration that within a convolutional model of the PWFS, Eq. (6) is exact with Λ depending only on the phase structure function of the wavefront residual.

Upon this prior, we perform a classification of wavefronts of interest with a single quantitative parameter: we define a wavefront class to be the set of wavefronts that share an identical spatial power spectrum density (PSD). Among these infinite classes, only the ones that are realistic to an AO system are of relevance, which we parameterize by a single scalar p_0 .

The wavefronts of class p_0 shall be the ones with the PSD corresponding to a fitting error of Fried parameter r_0 – null power up to the DM cutoff frequency and von Kármán spectrum beyond – added to some typical residuals over the DM modes covering aliasing temporal and nonlinearity error budgets. We therefore reduce the class parameter p_0 to the Fried radius r_0 . The notation p_0 is meant to negate any potential ambiguity between the Fried parameter of the turbulence and the coefficient used for computing OGCs when presenting results further in this paper, although underlining the conceptual connection in between. While r_0 is a physical parameter, p_0 is merely a descriptive label for statistical classification purposes. The relative composition of the residuals is computed in this paper through preliminary end-to-end simulations of the AO system, which did not simulate noise.

For analyzing the statistical properties of the indicators defined in Sect. 2.3, we now consider α_{\parallel} , α_{\perp} , $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$ for each ϕ_i as scalar random variables depending on the turbulent realization ϕ_{Res} with p_0 -parameterized PSD, and \mathbf{e}_{Rec} and \mathbf{e}_{opt} as vector random variables. For a unified notation, we refer to their averages and standard deviations over the p_0 wavefront class as

$\mu[\bullet(\phi_i; p_0)]$ and $\sigma[\bullet(\phi_i; p_0)]$, respectively. Numerical analyses regarding the significance of these indicators and their behaviors across p_0 classes are presented in Sect. 4.

3. Adaptive optics simulation setup

Advancing in our developments requires numerical simulations, and this section presents the AO simulation setup used for all numerical simulations presented in Sects. 4–8. Parameters of the simulation are synthesized in Table 1; the PWFS samples the wavefront over 92 pixels across the pupil diameter, at an R -band median wavelength of 658 nm. To devise significant methods and provide results meaningful to the ELT instrumental projects, we considered parameters close to those of the MICADO SCAO design (Vidal et al. 2017), in which it was in particular demonstrated that a single modulation radius within the $3\text{--}5 \frac{\lambda}{D}$ range provided maximum performance at all guide star magnitudes. Given this prior, the modulation radius is henceforth considered as a design parameter and not as an optimization degree of freedom.

The telescope pupil is the ESO-defined ELT model, although with spiders omitted; the DM is the latest known model of the adaptive mirror M4 of the ELT (Biasi et al. 2016), with a hexagonal pattern of pitch 54 cm in M1 space, simplified with a spatially localized influence function model with a coupling of 0.24. All numerical simulations were performed using the COMPASS (Ferreira et al. 2018a) simulation package, running on a Nvidia DGX-1 server equipped with two 20-core Intel Xeon E5-2698 processors and eight Nvidia Tesla P100 graphics boards. Generating a $4 \frac{\lambda}{D}$ modulated PWFS image on this server typically requires 60–70 ms.

4. Modal analysis of compensation coefficients

4.1. Sensitivity reduction and optimal gain

This section presents results from numerical simulations regarding the dependence of α_{\parallel} and G_{opt} with turbulence residual amplitude as characterized by p_0 . Results shown are extracted from the abacus precomputed for our simulated ELT AO – a process covered in detail in Sect. 5.2, which is obtained averaging interaction matrices $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ (Eq. (2)) for 15 different ϕ_{Res} , at each of 15 p_0 values log-spaced from 4.0 to 35.0 cm. These results provide the required consistency check of the key hypotheses allowing optical gain modal compensation: for a well chosen set of modes, p_0 is a parameter that effectively induces values that are stable with the phase realization ϕ_{Res} ; results in this section demonstrate that the Karhunen–Loève (KL) basis fits such a criterion. Stability here is meant in the sense that the standard deviation measured across the wavefronts of a p_0 -labeled class is negligible compared to the variations of the gains with p_0 , both for the sensitivity loss $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ – as shown in Fig. 3 – and the optimal gain $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$ – shown in Fig. 4. This is shown respectively in Figs. 3 and 4, with the shaded areas showing ± 2 standard deviations around the solid line showing the average $\mu[\alpha_{\parallel}]$ or $\mu[G_{\text{opt}}]$. The constant thickness of the σ bar in logarithmic scale suggests a rough proportionality between σ and μ .

All measured values demonstrate the stability of the measurement α_{\parallel} for a given p_0 , with relative standard deviations $\frac{\sigma[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]}{\mu[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]}$ below 3% for all $p_0 > 7.4$ cm, and the possibility of high-confidence estimations of p_0 using only α_{\parallel} (see

Table 1. AO numerical simulation parameters.

Numerical simulation configuration	
Telescope	$D = 39$ m diameter ELT pupil 798 aggregated hexagons No support spiders
	von Kármán, ground layer only r_0 at 500 nm: variable in a useful range of 7.0–35.0 cm $L_0 = 25$ m $\ \vec{v}\ = 10$ m s ⁻¹
PWFS	
Subapertures	92×92 – pixel size 42 cm. 24 080 useful pixels
Wavelength	Monochromatic, 658 nm
Throughput	0.28 (including quantum efficiency)
Modulation	Circular, $4\frac{\lambda}{D}$ radius
Readout noise	$0.3 e^-$
Source	On-axis natural guide star
Guide star flux	Zero point: 2.6×10^{10} ph s ⁻¹ m ⁻²
Adaptive mirrors	
	Tip-tilt mirror Hexagonal M4 model pattern Pitch of 54 cm Coupling of 0.24 4310 controlled actuators Both with infinite bandwidth
RTC controller	
Loop rate	500 Hz
Method	Linear modal integrator
Latency	Data flow 1 frame + MVM 1 frame
Basis	DM Karhunen–Loève basis ^(a)

References. ^(a)Ferreira et al. (2018b).

Fig. 3) – a feature that we look for in Sect. 5. Numerical values are also insightful on the important impact of OG on sensitivity: even in extremely good seeing conditions, losses in sensitivity relative to the calibration of 30–45% are to be expected ($p_0 = 25.7$ cm in Fig. 3). At the near-median value $p_0 = 13.8$ cm, low-order modes are attenuated by a factor of 5, and at the extreme $p_0 = 7.4$ cm by a factor of more than 20.

The sensitivity reduction is well described by two trends, below and above the modulation radius spatial frequency, corresponding for $4\frac{\lambda}{D}$ to KL mode 30. The sensitivity loss below this index is homogeneous, then increasing beyond this index up to maximal values for the highest orders. For modes ϕ_i ($30 \leq i \leq 3000$), for which spatial frequencies are entirely within the DM resolution, the sensitivity reduction coefficient follows a p_0 -dependent power-law trend. For ϕ_i ($i > 3000$) modes tend to resemble waffle modes rather than atmospheric KL modes – due to the DM resolution limit– and this induces more chaotic variation between modes, nevertheless without compromising the stability at a given p_0 .

The optimal gain G_{opt} to apply in p_0 -PSD wavefront conditions is shown in Fig. 4. It generally behaves as the inverse of α_{\parallel} , yet with a more discrete cutoff at the modulation radius, the knee being smoothed out by the relative weight of α_{\perp} (Eq. (11)) and the desired minimization of $\|\mathbf{e}_{\text{opt}}\|$ (Eq. (12)).

Extensive numerical analyses and comparisons for various DM bases and PWFS modulation radii are not covered in this

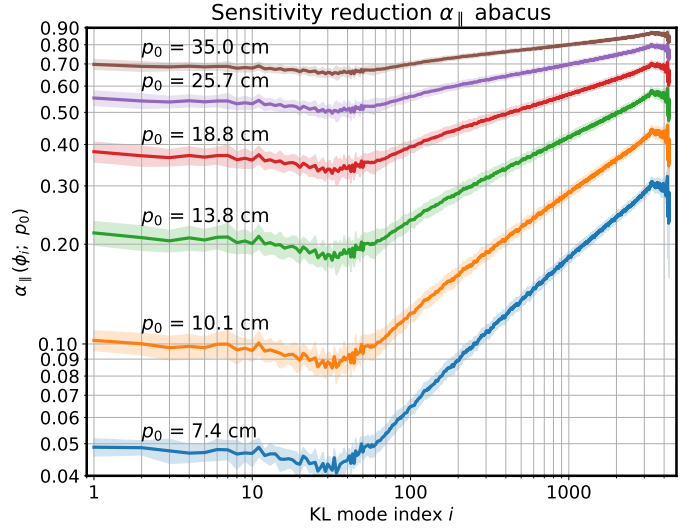


Fig. 3. Subset of the α_{\parallel} abacus data. Solid lines: $\mu[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]$; shaded areas: $\pm 2\sigma[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]$, as computed numerically on 15 independent wavefronts of class p_0 in conditions of Table 1, except that no noise is introduced. Curves are smoothed for improved clarity using an adaptive recursive filter with window width $\log(i)$.

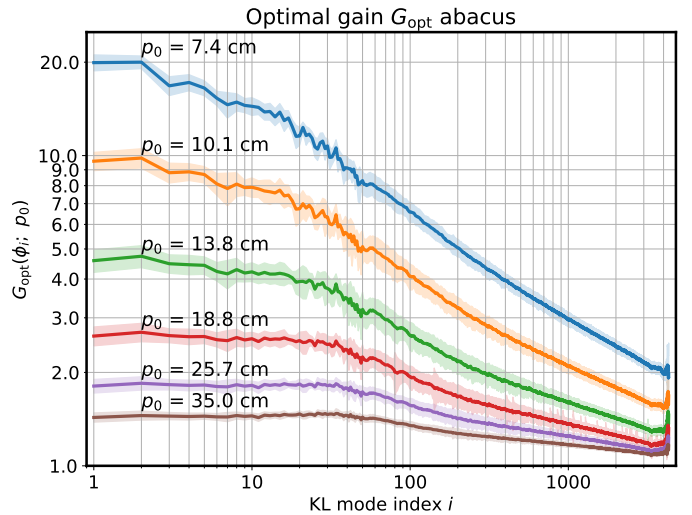


Fig. 4. Subset of the G_{opt} abacus data. Solid lines: $\mu[G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)]$; shaded areas: $\pm 2\sigma[G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)]$. Data computed and smoothed as in Fig. 3.

paper, but were documented in previous work (Deo et al. 2018a). We showed in this latter publication that the overall sensitivity, with α_{\parallel} factored in, is independent of the modulation radius for modes bearing frequencies past the modulation-induced cutoff, while smaller modulations provide greater sensitivity for low-order modes below this cutoff. This sensitivity analysis has to be considered alongside dynamic range effects, and an optimal trade-off has been highlighted near the chosen $4\frac{\lambda}{D}$ (Vidal et al. 2017).

Regarding modal basis choices, it was shown that both the Fourier and KL DM bases provide extremely stable $\alpha_{\parallel}(\phi_i; \phi_{\text{Res}})$ values at a given p_0 , unlike the natural actuator basis which proved to be unsuitable for an OGC approach. When comparing α_{\parallel} numerical values between Deo et al. (2018a) and this paper, data shown here are smaller for an identical p_0 parameter. This difference is well explained by first: the upscaling of the AO

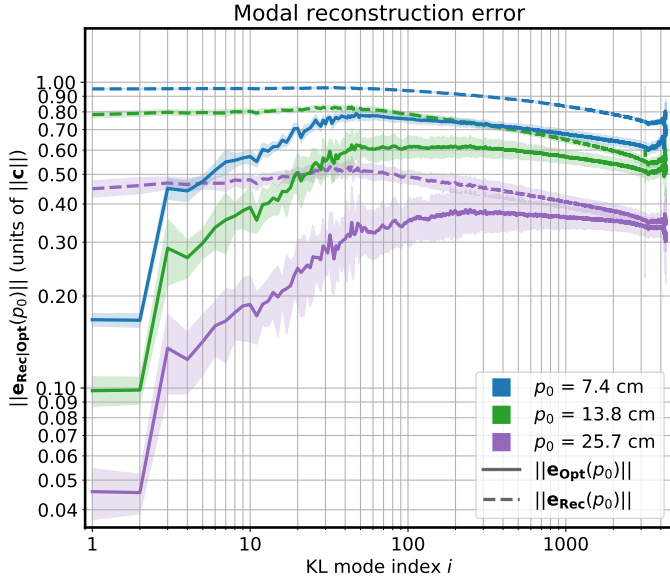


Fig. 5. Error terms with and without applying static $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$ OGCs. Solid lines: $\mu [||\mathbf{e}_{\text{Opt}}(p_0)||]$ (with OGCs); dashed lines: $\mu [||\mathbf{e}_{\text{Rec}}(p_0)||]$ (without modal compensation); shaded areas: ± 2 standard deviations. Data computed and smoothed as in Fig. 3.

system considered (18–39 m diameters); and second, the redefinition of the p_0 -class PSD, which now includes DM space loop residuals instead of being restricted to a fitting error wavefront.

4.2. Nonlinear reconstruction errors

Along with computing α_{\parallel} and G_{opt} in a variety of conditions, we extract the reconstruction error incurred by DM modes with and without OGCs (resp. \mathbf{e}_{Opt} and \mathbf{e}_{Rec}), as defined in Sect. 2.3 and depicted in Fig. 2. We reiterate that $||\mathbf{e}_{\text{Opt}}||$ and $||\mathbf{e}_{\text{Rec}}||$ are the RMS errors for each mode of the command matrix \mathbf{Rec} compared to the OG-disturbed effective reconstruction, with and without an OGC applied. Numerical values for $||\mathbf{e}_{\text{Opt}}||$ and $||\mathbf{e}_{\text{Rec}}||$ are shown in Fig. 5, restricted to three p_0 values of 7.4, 13.8, and 25.7 cm for clarity.

The error term without OGCs \mathbf{e}_{Rec} allows for a quantitative analysis of the potential impact of OG on AO performance. Below the modulation radius cutoff, $\mu [||\mathbf{e}_{\text{Rec}}||]$ is shown to have an approximately flat magnitude of resp. 0.5, 0.8, and 0.95 – in units of the input magnitude $||\phi_i||$ – for p_0 values of 25.7, 13.8, and 7.4 cm. Beyond the cutoff, $\mu [||\mathbf{e}_{\text{Rec}}||]$ slowly decreases – altogether by 25–30% for the highest order modes. These surprisingly high values underline that using the calibrated command matrix \mathbf{Rec} along with an analytically derived integrator gain would not permit an appropriate control of the PWFS, even in very favorable seeing conditions.

The $||\mathbf{e}_{\text{Rec}}||$ metric alone is insufficient to distinguish the colinear, OGC-compensable error $\mathbf{c} - \mathbf{d}_{\parallel}$ and the confusion portion \mathbf{d}_{\perp} ; the optimally reduced reconstruction error $||\mathbf{e}_{\text{Opt}}||$ sheds light on this repartition. For high frequency modes, $||\mathbf{e}_{\text{Opt}}||$ shows only a moderate reduction over $||\mathbf{e}_{\text{Rec}}||$, from which is understood that a significant OG confusion between modes occurs. A value of $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$ for $||\mathbf{e}_{\text{Opt}}||$ corresponds to $\alpha_{\perp} = \alpha_{\parallel}$, i.e., an equal weight of the sensibility and the nonlinear confusion. This value is seldom reached, that is, only for mid-order modes when $p_0 = 7.4$ cm.

The reconstruction error is significantly reduced for modes below the modulation cutoff, with data showing that the

orthogonal component increases with spatial frequency, yet that most of the error is borne by the colinear term; this significant reduction is observed regardless of atmospheric conditions. Noticeably, the optimally reduced error is minimal for the tip-tilt modes, with an error norm reduced by a factor 5–8, for example from 0.80 down to 0.10 for median conditions $p_0 = 13.8$ cm.

The error reduction for modes which bear the most power in the turbulence demonstrates that OG can be well corrected using modal OGCs, with a significant reduction of the nonlinearity error budget to be expected. It should be noted however that while $\mu [||\mathbf{e}_{\text{Opt}}||]$ is indicative of the nonlinear behavior of each mode, it should not be directly interpreted as a nonlinearity error budget, but merely as an initial step towards its derivation.

5. Leveraging the OG analysis for AO operations

So far, we have derived an analysis in Sect. 2 to obtain error-minimizing rescaling coefficients for each mode – by applying Eqs. (2) through (11) – in order to update the PWFS command matrix with

$$\mathbf{Rec}(p_0) = \text{Diag}(\mu [G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)], i \in [1, N]) \cdot \mathbf{Rec}. \quad (13)$$

However, this methodology, which is hereafter referred to as *static* OGCs, promptly reaches limitations when its applicability is considered beyond a laboratory setup – as the on-sky turbulence cannot be halted to compute an interaction matrix as per Eq. (2). It is only properly adequate if the residual PSD matches the partially corrected turbulence chosen for the $p_0 = r_0$ wavefront class – which may not be the case due to the varying relative weights of nonlinearity, latency, and noise error budgets. Furthermore, it requires an adequate estimate of the current atmospheric Fried radius r_0 , obtained via a yet-to-be-defined method of AO telemetry – which will have to face the challenge posed by the fact that pseudo-openloop wavefronts cannot be estimated through the PWFS due to OG itself.

5.1. Automatic method for determination of optical gain coefficients

For AO operations, we set the objective to propose a sky-ready, fully automated method that proposes an answer to the two shortcomings mentioned immediately above. This algorithm proceeds to obtain sensitivity reduction statistics through dithering some DM modes. From there, it deduces the operating conditions through the parameter p_0 , and then extrapolates corresponding G_{opt} values for all DM modes from a precomputed database. Our objective in designing this method is twofold: First, implement a near real-time, efficient compensation of PWFS nonlinearity. Second, propose an algorithm that enforces OG compensation automatically, in all expected conditions at the telescope, and that exonerates the operator from any kind of fine-tuning of one or many AO control parameters so as to obtain the maximum performance.

Using a sinusoidal dithering followed by a synchronous demodulation stands as a natural approach to this problem. Deformable mirror dithering has often been used to retrieve in-situ values of a variety of turbulence-dependent measurements (Rigaut et al. 2010), or on-sky interaction matrices (Esposito et al. 2006; Kolb et al. 2012). Dithering, coupled with synchronous demodulation (Sect. 5.3), allows for an optimized retrieval of the desired information α_{\parallel} using fine-tuned parameters for this purpose; in particular the frequency range and the desired S/N – as is detailed in Sect. 5.4.

Using DM dithering however adds an intrusiveness issue between the science and the AO channels, as dithered signals are forwarded to the scientific instrument. We seek to introduce the minimal disturbance to the science channel while satisfactorily tracking OG fluctuations. Design strategies include using minimal dithering amplitudes, a well-selected minimal number of modes, and reduced active duration, possibly synchronized by the instrument control system with short periods of offline science time. Dithering signal parameters and design trade-offs are presented in Sects. 5.3 and 5.4, and numerical simulation results on the intrusiveness of the automatic OG compensation into the scientific imaging are presented in Sect. 8.1.

5.2. Database computation

Database computation is a step that comes offline, well before any on-sky operations and ideally during the commissioning of the instrument. This is entirely done by end-to-end numerical simulations configured to match the optical setup, and consists in populating a database with OGCs.

For each sampled p_0 parameter within the range of interest – in our case 15 values sampled from $r_0 = 4.0$ to 35.0 cm at 500 nm, a number of wavefronts are generated with the selected p_0 -class closed-loop wavefront PSD, defined using the method described in Sect. 2.4. An interaction matrix is computed around each of these wavefronts as per Eq. (2), allowing statistically converged target values $\mu[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]$ and $\mu[G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)]$ to be computed for all p_0 and all DM modes ϕ_i , as already presented in Figs. 3 and 4. These two compiled p_0 -labeled abacuses will allow the interpolation and gain retrieval process described in Sect. 5.5. Such abacuses must be computed for all determined operating modes of the system, with noticeably different values and structure for different modulation radii; otherwise, they remain unchanged for the lifetime of the system, as they are mostly dependent on the sampling of the DM and WFS, their relative positioning, and the modulation radius. We compute abacuses with a simulated star bright enough to disregard noise, and we use the same abacus during operations regardless of the guide star being observed.

5.3. Dithering sequence

The dithering sequence now happens on-sky during observations. Our strategy is to use a cosine-wave pseudo-openloop dithering of the DM to retrieve the amplitude seen by the PWFS. For a subset of K modes ψ_1, \dots, ψ_K of the DM, a cosine-shape excitation is introduced for a total added amplitude to the AO loop integrator output at time step t of:

$$\text{Dither}(t) = \sum_{i=1}^K A_i \times \cos(2\pi f_i t) \times \psi_i, \quad (14)$$

where A_i and f_i are the a priori determined dithering amplitudes and frequencies for each of the ψ_i modes. From the recorded PWFS slopes $\mathbf{S}(t)$ during the same time frame – re-synchronized from latency effects, we demodulate the seen amplitude of the ψ_i modes at frequencies f_i in terms of the reference reconstructor \mathbf{Rec} . For the current $\alpha_{\parallel}(\psi_i)$, this quantity estimates

$$\alpha_{\parallel}^*(\psi_i) = \frac{1}{A_i} \frac{1}{T} \frac{1}{\|\psi_i\|^2} \left| \sum_t \cos(2\pi f_i t) \times [\psi_i \otimes (\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{S}(t))] \right|, \quad (15)$$

with starred values denoting measured or estimated values, \otimes the inner product in wavefront space, and T the duration of the

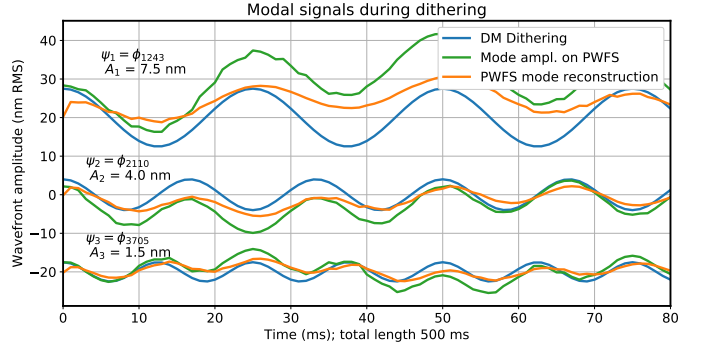


Fig. 6. Typical example of a dithering sequence, as we use for all numerical simulations using the dithering method in this paper. “DM dithering”: ψ_i amplitude injected $A_i \times \|\psi_i\| \times \cos(2\pi f_i t)$; “Mode ampl. on PWFS”: true instantaneous component in ψ_i of the wavefront; “PWFS reconstruction”: ψ_i component measured from the slopes, i.e., $\|\psi_i\|^{-2} \times \psi_i \otimes (\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{S}(t))$. For this case, the turbulence r_0 is 14.5 cm, with conditions of Table 1 but no noise. Wavefront maps of the ψ_i are shown in Fig. 7. Data for ψ_1 and ψ_3 are offset by +20 and –20 nm, respectively.

Table 2. Parameters used for the dithering signals.

Dithering sequence configuration		
Number of modes	K	3
Duration	T	500 ms – 250 frames
Signal shape		$A_i \cos(2\pi f_i t)$
ψ_i gain reduction		8.0
Modes	ψ_i	Fig. 7
Frequencies	f_i	20, 30 and 40 Hz
Amplitude	A_i	auto. S/N assessment
Min. amplitude		1.5 nm RMS per mode
Max. amplitude		25.0 nm RMS per mode
Noise meas. band	Δf	± 2 DFT bins i.e., ± 4 Hz

sequence in samples. A typical example of dithering sequence and signal retrieval is shown in Fig. 6, with the input amplitude dithered $A_i \times \|\psi_i\| \times \cos(2\pi f_i t)$, the true signal on the PWFS, and the reconstructed modal signal as used in Eq. (15): $\|\psi_i\|^{-1} \times \psi_i \otimes (\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{S}(t))$. More generally, signals other than a cosine can be used, and demodulated using cross-correlation in place of Eq. (15).

5.4. Dithering sequence design and parameters

For an efficient performance of the automatic update method, suitable amplitudes, frequencies, mode choices, and so on have to be determined for the AO system. Possible choices are numerous and there are no unique acceptable solutions. We reached a satisfactory solution through trial and error on simulated systems of different sizes and now describe the retained decisions and the various trade-offs considered. The choices of parameters for the dithering sequence used throughout this project, according to the constraints detailed hereafter, are synthesized in Table 2.

Obtaining open-loop slopes. The computation of Eq. (15) is an appropriate estimator if closed-loop rejection of the dithering signal can be ignored. To access a relevant value for $\alpha_{\parallel}^*(\psi_i)$, the AO system consequently behaves in an open-loop mode, albeit in the small-phases approximation such that rejection of the dithering signals can be ignored. However, completely filtering out ψ_i modes from \mathbf{Rec} during the dithering allows the atmospheric

component to build up to nonsmall quantities. Therefore, we choose to reduce the modal gains of the K modes ψ_i by a factor of 8.0 during the dithering sequence, while all nondithered modes are maintained in nominal closed-loop regime.

Frequencies. Sufficiently low frequencies f_i are to be chosen so as to be well within the bandwidth of the DM, and below the overshoot band of the feedback loop – as a small amount of the dithered signal will be injected into all modes through nonlinear cross-coupling, and will possibly be amplified by the overshoot as all other modes than the ψ_i are still operated in close-loop. Operating well beneath the Nyquist frequency is also meant as a conservative strategy for real AO systems, considering the possibility of fluctuating, fractional delays, and possible difficulties for characterization of DM and telescope control transfer functions close to the Nyquist limit.

Beneath these upper bounds, f_i should be as high as possible in order to escape the massive low-frequency spectrum of the turbulence and mitigate the impact of lengthy drifts from the closed loop value on the scientific imaging path. Given that we operate our AO loop at 500 Hz, with an overshoot band centered on 50 Hz for a two-frame delay integrator RTC, we select f_i frequencies in the range 20–40 Hz. To avoid fratricide effects between the ψ_i due to the unknown \mathbf{d}_\perp OG cross-coupling, we select different, evenly spaced frequencies for all ψ_i within this range. We ought to have avoided choosing harmonic frequencies, but frequency-mode analyses showed that this issue was insignificant given the chosen ψ_i . The f_i values are conservatively within the ELT M4 flat (± 1 dB) response band of 200 Hz (Sedghi et al. 2010).

Amplitudes. Dithering amplitudes A_i must on the one hand remain small enough as to not perturb the science imaging quality during the dither sequence, yet be large enough to obtain a high-confidence measurement of α_\parallel^* . In order to always use appropriate A_i , we perform an automatic S/N assessment immediately before the dithering sequence. The gains for ψ_i are also divided by 8.0 during the same duration, and the noise level is assessed in frequencies within Δf of f_i through:

$$n_i = \frac{1}{2\Delta f} \frac{1}{T} \frac{1}{\|\psi_i\|^2} \int_{f_i-\Delta f}^{f_i+\Delta f} \left| \sum_t \cos(2\pi ft) [\psi_i \otimes (\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{S}(t))] \right|^2 df, \quad (16)$$

typically using Δf such that it covers a few Fourier transform bins. From this measured n_i noise floor at frequency f_i in mode ψ_i , the amplitude A_i is obtained relative to a set target S/N of 5 for a lower range α_\parallel of 0.1, hence:

$$A_i = \frac{5}{0.1} n_i. \quad (17)$$

Finally, to avoid exceptional situations in very high or low S/N, A_i is clipped to extremal values such that $A_i \times \psi_i$ amounts to between 1.5 and 25.0 nm of spatial RMS.

Choice and number of modes. In order to obtain estimates of α_\parallel^* (ψ_i) while properly sampling the spatial frequency range, it is appropriate to choose a large enough number of modes to span the entire DM basis, with minimal \mathbf{d}_\perp -induced cross-coupling. Conversely, a minimal number of modes guarantees a reduced total wavefront disturbance during the dithering period – both from the uncorrected atmospheric drift and the dithering signal itself. In order to evaluate this compromise, we started with a choice of $K = 20$ modes, evenly sampling the frequency plane,

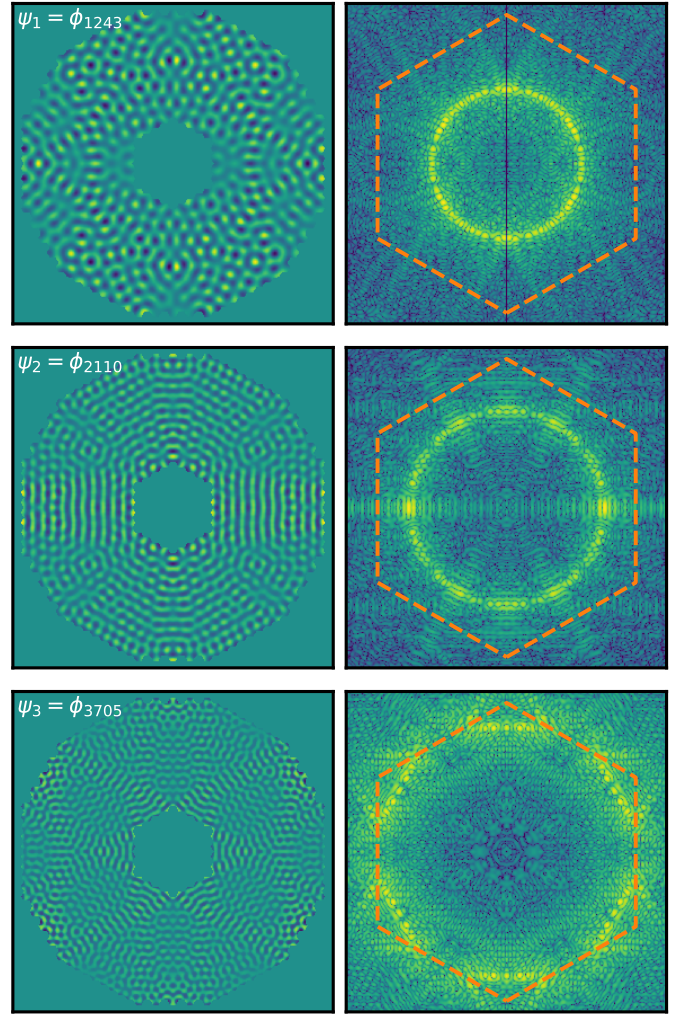


Fig. 7. Wavefront maps (left column) and log-scaled spatial PSD (right) for the dithered modes $\psi_{1,2,3}$. The displayed area is 39.5 m across for wavefront maps and $100 \frac{\lambda}{D}$ across for PSD maps. The colormap extent for PSD maps is 10^4 . Dashed hexagons show the limit of the M4 DM correction zone.

and gradually monitored the performance while reducing K . A consistent performance of the procedure was validated down to $K = 3$ dithered modes.

The three retained KL modes $\psi_{1,2,3}$ for the ELT-M4 setup we use for numerical simulations are shown in Fig. 7, along with their spatial PSD. An important criterion for the choice of a mode is to ensure that its PSD energy is well distributed azimuthally in the frequency plane, which ensures that science path speckles induced by the dithering signal are diluted over a larger area in the focal plane, rather than building very localized artifacts. Also, the pseudo-openloop drift should not impede imaging, hence the choice of ψ_1 with frequency contents of the order of $25 \frac{\lambda}{D}$. This is low enough to extrapolate the gains of the first optical modes with confidence, yet high enough to leave the Airy core and the first few rings unaltered.

Duration of dithering. The last design parameter to discuss is the duration of the dithering sequence; it must be long enough to achieve the target S/N given by Eqs. (16) and (17), yet not impede the general workflow of the AO operation. We opted for 500 msec, i.e., 250 frames at 500 Hz. As discussed in Sect. 8, this duration is well suited to induce very low dithering

amplitudes in most situations, and can be well integrated into scientific operating procedures.

5.5. Interpolation and retrieval of optical gain coefficients

With $\alpha_{\parallel}^*(\psi_i)$ values obtained from demodulating the recorded dithering sequence for three modes, the algorithm proceeds to define appropriate $G_{\text{opt}}^*(\phi_i)$ values for all DM modes. This process is done in three steps, which are depicted with simulation data in Fig. 8.

For dithered modes ψ_i , the sensitivity reduction coefficient $\alpha_{\parallel}^*(\psi_i)$ is mapped to a $p_0^*(\psi_i)$ value using the α_{\parallel} abacus. This measured p_0^* is representative of the turbulence power in spatial frequencies borne by mode ψ_i . As the residual spectrum does not necessarily match the PSD chosen for a given p_0 wavefront class, it is expected that p_0^* would differ across dithered modes. From the measured values $p_0^*(\psi_i)$, a value is interpolated for all modes using a linear interpolation across the spatial-frequency-sorted natural ordering of the KL modes, and extrapolating with $p_0^*(\phi_i) = p_0^*(\psi_1)$ (resp. $p_0^*(\psi_3)$) for modes with indexes below ψ_1 (resp. beyond ψ_3).

Finally, the G_{opt} abacus is used to obtain putative $G_{\text{opt}}^*(\phi_i; p_0^*(\phi_i))$ for all modes, interpolating from the pre-computed p_0 values. The command matrix of the system can now be updated using these OGCs, to be maintained until the next OGC update sequence occurs.

5.6. Additional weighting of optical gain coefficients

When using either static OGCs – that is, $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0 = r_0)$ assuming r_0 is known – or automatic OGCs, that is those obtained through regular dithering and updating sequences, a nefarious effect arises; this is observed when the scalar integrator gain is overset beyond some reasonable value ensuring stability, particularly in above-median seeing conditions with bright guide stars. Updating the RTC with G_{opt} coefficients sets all modes to a comparable level of optimum rejection; if the scalar integrator gain is then overset, the lowest-order modes – bearing the most residual and being the most boosted by OGCs (Fig. 4) – enter first in an oscillatory regime characteristic of a lack of stability. In particular, the tip-tilt are the most affected modes and the science image suffers from jittering and is rendered unexploitable. The same effect occurs if r_0 increases by a significant fraction between two dithering sequences, with the experienced OG sensitivity reduction becoming less dramatic, hence a response from the loop equivalent to that caused by a gain increase. This effect was observed in our simulations, and is discussed in more depth in Appendix A; it was deemed to be a critical shortcoming for system robustness, and therefore we devise a workaround to prevent low-order instability.

We circumvented the issue by adding an additional weighting to the G_{opt} coefficients, allowing us to control which modes enter oscillatory regime first when an unexpected gain increase occurs. For all results when referring to weighted OGCs, we add an additional modal gain multiplier of:

$$W(i) = 1 - \left(0.15 - 0.3 \sqrt{\frac{i}{N}}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{i - 0.8N}{0.035N}\right)\right), \quad (18)$$

where i is the mode index and N the total number of modes. Numerical parameters were fine-tuned with the experimental ELT setup described in Sect. 3, yet were tested and should be appropriate on other designs as long as a DM-reprojected KL basis ordered with increasing spatial frequencies (Ferreira et al.

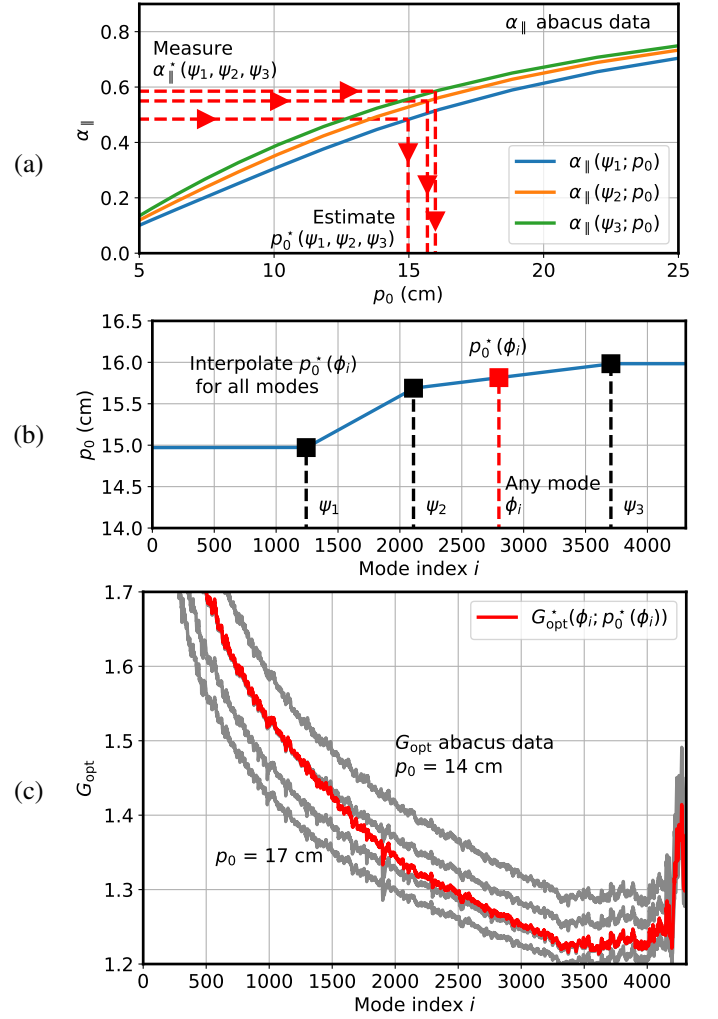


Fig. 8. Successive steps of the abacus-based interpolation process. (a) For each of the K dithered modes ψ_i , the measurement $\alpha_{\parallel}^*(\psi_i)$ is mapped to a wavefront PSD class identified by $p_0^*(\psi_i)$. (b) p_0^* is extrapolated from the dithered ψ_i to all DM basis modes ϕ_i . (c) From $p_0^*(\phi_i)$, an optimal OGC $G_{\text{opt}}^*(\phi_i; p_0^*(\phi_i))$ is interpolated for all basis modes. Figures show actual simulation data processed from the dithering sequence shown in Fig. 6, with $\alpha_{\parallel}(\psi_i) = 0.48, 0.54$ and 0.58 and $p_0^*(\psi_i) = 15.0, 15.7$ and 16.0 cm. The turbulence r_0 is 14.5 cm.

2018b) is used. The weighting function is plotted in Fig. 9, along with a map of this weighting distribution in the Fourier plane.

Equation (18) corresponds to a square-root shape from 0.85 at lowest orders to 1.15 at highest orders, with the arctan term bringing $W(i)$ back to 1 across a transition of width $0.035 N$ centered on mode number $0.8 N$. A square root function corresponds to a linear increase with the norm of the spatial frequencies borne by the mode. The arctan term is introduced to cut-off the gain boost before the highest-order waffle-like modes at the end of the KL DM basis. These highest-index modes have spatial PSDs well localized on the corners of the DM rejection domain, and therefore they quickly induce undesirable artifacts in the point spread function (PSF) when reaching oscillatory regimes.

Boosting the gain of mid-order modes ensures that if for any reason some instability is approached, mid-order modes would be affected first. Low orders, and tip-tilt in particular, would be shielded, as well as waffle-like modes: the additional mid-frequency wavefront perturbation will in turn induce a reduction of the PWFS sensitivity, providing a self-stabilizing regime.

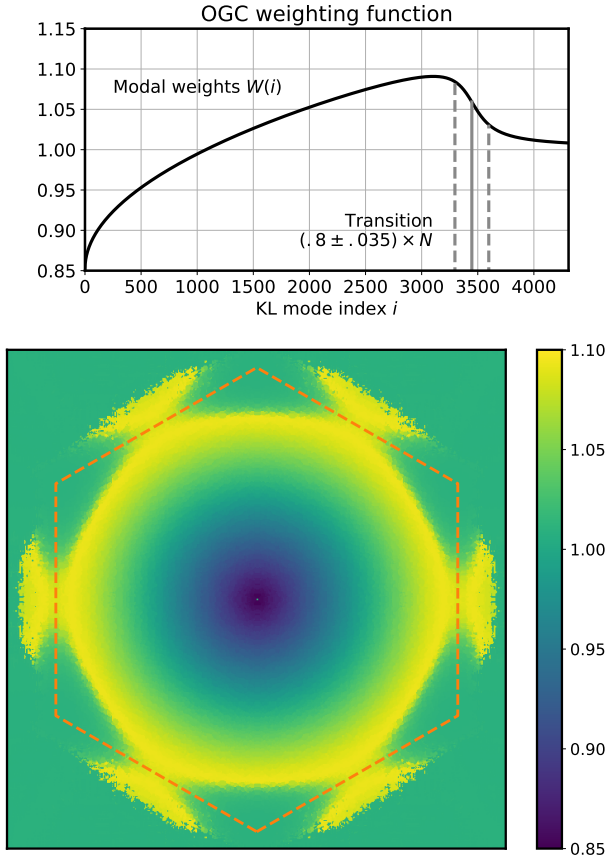


Fig. 9. *Top:* corrective OGC weighting $W(i)$, as defined per Eq. (18), for the ELT simulation with $N = 4309$ modes. *Bottom:* distribution of the weighting $W(i)$ in the Fourier plane of the pupil. At each frequency in the Fourier plane, the weight shown is the $W(i)$ of the KL mode which bears the most energy at that specific frequency. This representation is obtained by computing the Fourier transform of all modes and finding the mode that is most representative of any given spatial frequency. The dashed hexagon shows the correction zone of the M4 DM. The displayed area is $100 \frac{\lambda}{D}$ across.

6. End-to-end simulation results – stationary r_0 turbulence

We now propose to analyze and verify the end-to-end performance when switching from the conventional command matrix \mathbf{Rec} to the OGC-updated $\Lambda^{-1} \cdot \mathbf{Rec}$. This section covers stationary turbulence conditions, where wind speed, r_0 , and L_0 remain constant over time for each numerical simulation. The simulated RTC is however not aware of any parameter of the turbulence and operates autonomously.

A key point to assess is the improvement in end-to-end metrics regardless of any other multiplicative factor, typically the loop scalar gain, which may often be the first parameter manually or automatically tuned to maximize AO performance. Here, the AO performance is measured in terms of the science channel long-exposure Strehl ratio (SR), in the H infrared band (1650 nm). Section 6.1 presents the simulation protocol used and Sect. 6.2 covers the results and discussions of these stationary turbulence cases. Dynamic evolution is treated in Sect. 7.

As discussed in Sect. 4.1, we do not consider the modulation parameter as an optimization in this paper, and rather base our choice of $4 \frac{\lambda}{D}$ on previous design analyses. We believe this choice to be of relevance, as most ongoing AO designs with PWFSs are sensitivity-driven, and aim for small modulation radii. Fur-

thermore, a demonstration of the benefits of modal OG compensation – whether through the proposed dithering method or another – at lower modulation radii at which the pyramid is more prone to nonlinearity provides us with confidence of the applicability for potential improvements at larger modulations.

6.1. Simulation protocol

To describe the numerical simulation protocol used for our OGC-versus-scalar gain optimization experiments, it is useful to first describe two sequences that are recurrently used hereafter. The OGC update sequence is the process of noise assessment, dithering, and reconstructor update. The bootstrap sequence is the method by which we obtain condition-appropriate OGCs when cold-starting the AO system.

OGC update sequence. An OGC update sequence is the practical implementation of the dithering process described in Sect. 5. While the AO is operating in closed-loop: (1) The command matrix is updated so as to reduce the gain of dithered modes ψ_i by a factor 8.0. (2) Noise assessment is computed from a 500 ms (a 500 Hz frame rate is assumed) set of closed-loop slopes, from which dithering amplitudes are derived, as per Eqs. (16) and (17). (3) The command matrix is reset to its original value; the loop is run for 100 ms, catching up any drift in the ψ_i modes. (4) The command matrix is updated again to relieve control of the ψ_i ; the dithering sequence is performed, lasting 500 ms. (5) New OGCs are computed with the interpolation method described in Sect. 5.5. The new command matrix is computed using these new modal gain coefficients, possibly weighted as per Eq. (18).

Bootstrap sequence. When initially closing the loop, we generally assume we have no prior information on atmospheric conditions, and therefore we always start with OGCs set to 1. From there, convergence on situation-appropriate automatic OGCs is achieved through repeating the following sequence three times: with the integrator gain set to 0.5, we (1) close the loop with no other action for 0.2 s and (2) perform an OGC update sequence. We find that 0.2 s is a sufficient time to reach a steady-state regime from a flat DM, or after any update of the command matrix. With the three repetitions of the OGC update sequence, the total length of the bootstrap sequence is 3.9 s; the repetitions are merely a safeguard to ensure convergence of the automatic OGCs, yet in most cases the AO is almost optimally operational after one or two passes, depending on the current seeing.

Overall, for the end-to-end simulations, we first set the atmospheric r_0 ; then for the automatic, weighted OGCs, a complete bootstrap sequence is performed. Once OGCs are set, the integrator gain g is set to the test value and the loop is closed from a flat DM for 200 ms, after which a long-exposure PSF is recorded lasting one second. Strehl ratios are computed from this PSF, and error bars are estimated from the standard deviation of wavefront errors across all frames using the Maréchal approximation.

6.2. Results

We compare the overall performance of the PWFS without modal OG compensation – that is, flat, unit OGCs – and with automatic, weighted OGCs. Numerical simulations are performed with atmospheric r_0 ranging from 7.0 cm to 14.5 cm. Results are shown in Figs. 10 and 11, respectively, using guide stars with magnitudes $M_R = 0$ and $M_R = 16$ – yielding CCD fluxes of

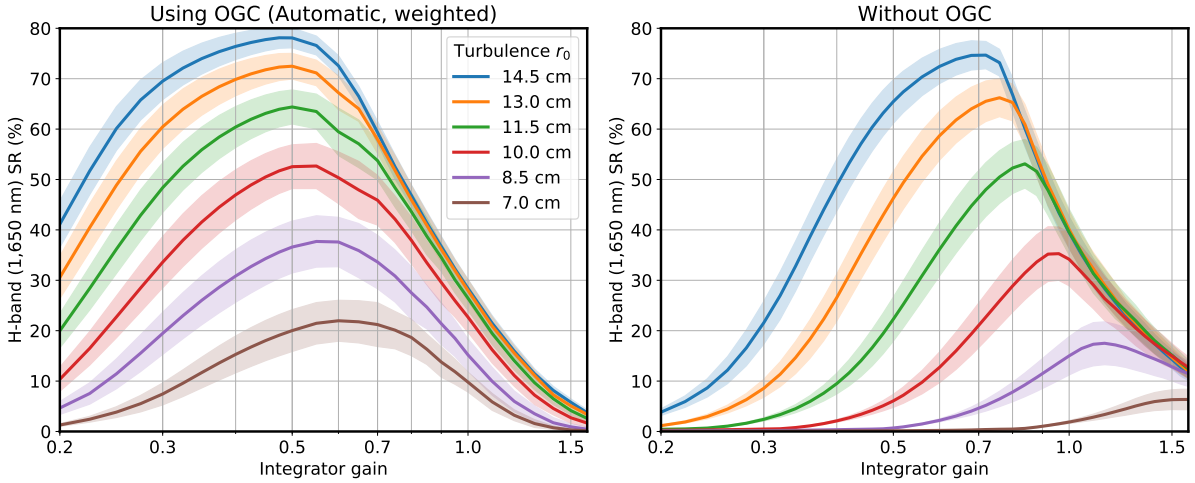


Fig. 10. Comparison of end-to-end performance with automatic, weighted OGCs (*left*), and no modal compensation (*right*), depending on the integrator scalar gain g , for various atmospheric r_0 . An $M_R = 0$ guide star is used. Error bars show ± 1 standard deviation of the frame-by-frame SR.

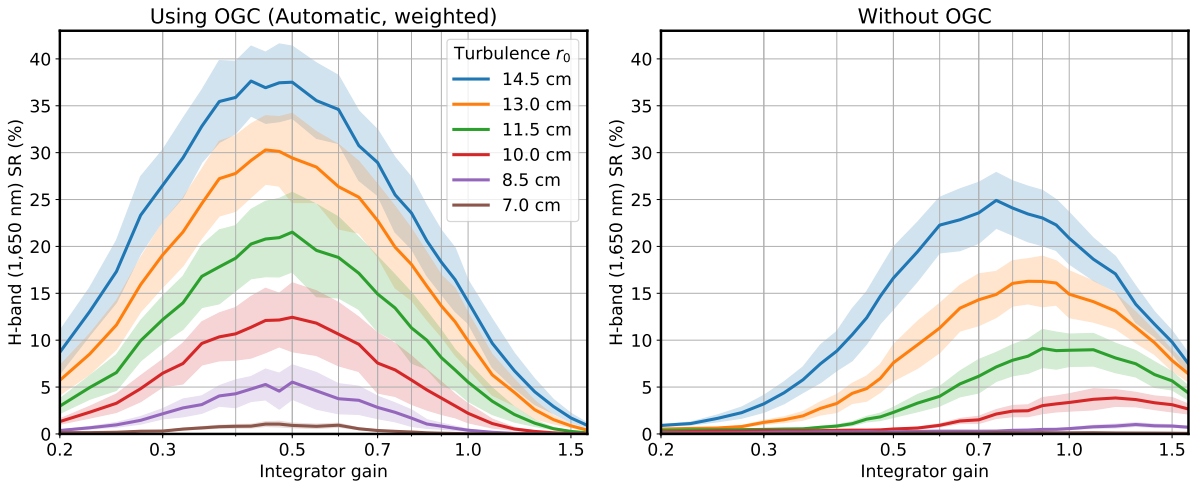


Fig. 11. Identical to Fig. 10, using a $M_R = 16$ guide star.

respectively 7.0×10^5 and 0.28 photo-electrons $\text{pixel}^{-1} \text{frame}^{-1}$ in the PWFS pupil images.

The maximum SR achievable while sweeping the scalar integrator gain g is increased by the introduction of OGCs in all the situations simulated. While the improvements are modest for median seeing in the $M_R = 0$ simulation (Fig. 10), namely 74% to 78% for $r_0 = 14.5$ cm, the increase in SR is valuable when r_0 is below 10 cm: maximal performances of 7 and 17% for r_0 of 7.0 and 8.5 cm are improved to respectively 21 and 38% of H -band SR.

Significant improvements are also obtained for the high noise $M_R = 16$ case, as seen in Fig. 11, for all seeing conditions. Overall, the use of automatic OGCs is expected to greatly increase the range of possible sky conditions for a given astronomical observation with a minimum acceptable SR, thus improving telescope availability.

Another result is conveyed that has been implicitly leveraged when describing the bootstrap sequence in Sect. 6.1. When using automatic, weighted OGCs, for each Fried parameter r_0 the integrator gains $g_{\max}(r_0)$ which yield the maximum SR are within a much narrower range than when not using OGCs. Due to the loss in sensitivity as seeing degrades, $g_{\max}(r_0)$ continuously increases if no modal gain compensation is applied to

over 1 for $r_0 \leq 8.5$ cm and to over 1.5 for $r_0 = 7$ cm. This drift is induced by the strong sensitivity loss for the low-order modes being compensated overall by increasing $g_{\max}(r_0)$, and in itself requires manual or automatic optimization procedures if no OGCs are to be used. With the automatic, weighted OGCs on the other hand, $g_{\max}(r_0)$ is bound between 0.45 and 0.6 for both guide stars and at all r_0 .

This allows us to choose a nominal integrator gain of 0.5 when using OGCs. With this constant g value set, we can budget that while the OGCs automatically update, the performance obtained is within 2% SR of the maximum achievable value when tuning g .

Finally, some selected PSF profiles corresponding to the best SRs in Fig. 10 are compared in Fig. 12. Additional speckles when comparing PSFs made without OGCs – but optimizing the global integrator gain – to those with OGCs are located mainly in two particular areas of the focal plane: the low-mid-frequencies (from 4 to $20 \frac{\lambda}{D}$), and the DM frequency limit (centered on 42 – $44 \frac{\lambda}{D}$); this difference is most clearly seen on the $r_0 = 10.0$ cm and 7.0 cm profiles. These localized degradation zones are a consequence of the impossibility to reach an optimum for all modes by only tuning the scalar integrator gain, with merely a compromise achieved. The trade-off induced at g_{\max} when not using OGCs

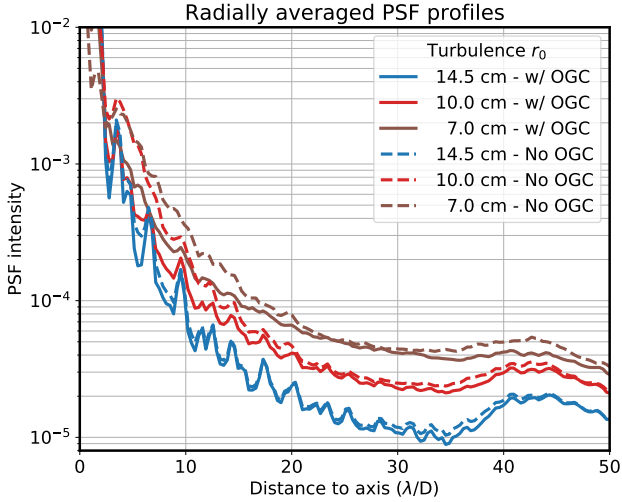


Fig. 12. PSF profiles corresponding to the maximum SR attained in Fig. 10, with and without using OGCs (automatic, weighted), for a turbulence r_0 of 14.5, 10.0, and 7.0 cm.

leads to an overshooting regime of the high-frequency modes, while mid-range modes suffer from under-compensation. At the crossing of these two regimes – for spatial frequencies of $25 \frac{\lambda}{D}$ – there are modes for which the optimum rejection regime is reached, both with and without OGCs; at this location the PSFs show an identical speckle floor level.

7. End-to-end simulation results – automatic gain tracking

As we look towards our design for a fully automatic OG compensation process, we have demonstrated that automatic, weighted OGCs obtained through a bootstrap sequence yield an improved AO performance in all compared seeing and guide star magnitude conditions. We now assess the long-run capacity of regular command matrix updates to maintain the AO in a near optimum state when seeing conditions need not remain stationary throughout an observation.

7.1. Variable r_0 – Methods

To demonstrate the robustness of the self-updating OGC method in telescope-like conditions – in particular regardless of the seeing and without intervention of the operator during the acquisition run – we designed an end-to-end simulation protocol which covers large variations in seeing. Two simulation runs were performed: (1) where r_0 gradually decreases with time from 21 to 7.0 cm over the course of 20 min and (2) the mirrored variation where r_0 increases from 7.0 back to 21 cm. The performance of several AO optimization strategies is compared across these two runs.

These strategies, described hereafter, cover what is to be done with the loop gain g and the OGCs at the beginning of the experiment, and how to automatically track seeing variations. During each experiment, the AO loop is run continuously for 20 min; each minute, r_0 is increased or decreased by 5.6%, and – depending on the method – the integrator gain or the OGCs are updated to track this change. A SR measurement is obtained each minute from the average of two PSFs exposed for one second each, taken immediately before and after the control law update,

if any. Four methods for the initial RTC state and the update sequence are compared:

Method A: complete automatic OGC pipeline. Method A is the complete development of the automatic OG compensation process that is proposed in this research. Automatic, weighted OGCs are set through an initial bootstrap sequence at the starting r_0 . The integrator gain is set to 0.5 and remains unchanged. At each minute of the simulation, a single OGC update sequence is performed that lasts 1.1 s and progressively updates the modal coefficients while the r_0 changes. This method, which is the product of all the analyses presented in this paper, is expected to be one of the best possible automatic strategies to go through the designed experiment with maximum performance.

Method B: initial OGCs, no update. The integrator gain is set to 0.5 and automatic, weighted OGCs at the starting r_0 are set. No control updates are performed. This method simulates the impact of a one-shot modal gain optimization upon loop closing, after which the system is left unattended and unmodified across long acquisition runs. By construction, the initial state with methods A and B is identical, with an increasing difference between their performances as r_0 drifts from its initial value.

Method C: initial g_{Max} , no OGCs. The integrator gain is set to $g_{\text{max}}(r_0)$ for the starting r_0 , as obtained from the results of Sect. 6.2. No OGCs are used, and no control updates are performed. Altogether, method C is the best effort performance if restricted to manually tuning the loop gain at the beginning of an observation and not using modal OG compensation.

Method D: median OGCs, g_{Max} updates. Reference automatic, weighted OGCs are set using the near-median $r_0 = 14.5$ cm. These OGCs are never updated, but the integrator gain is updated every minute to the appropriate $g_{\text{Max}}(r_0)$, as tabulated from stationary end-to-end simulations with a $M_R = 0$ guide star. This method simulates using some fixed, median optimal gains deemed almost always adequate, and leaving the final in-situ optimization to the integrator gain. Method D was suggested and introduced as a possible technical simplification of method A.

The end-to-end performance results for the r_0 -varying experiments with all four methods, using $M_R = 0$ and $M_R = 16$ guide stars, are shown in Fig. 13.

7.2. Variable r_0 – Results

As expected, the automatic pipeline we propose – method A – satisfactorily maintains AO performance throughout both 20 min cycles, with identical behavior for improving or deteriorating turbulence conditions. This demonstrates that recurring OGC update sequences can satisfactorily maintain the AO in a stable and efficient state during long closed-loop runs. When comparing to the maxima for stationary r_0 shown in Figs. 10 and 11, the performance is consistently inferior by 2–5% of the SR when crossing the given r_0 value. When considering this loss however, the following must be taken into account: (1) the value of 0.5 not being the exact $g_{\text{Max}}(r_0)$; and (2) the measurement by averaging the SR immediately before and after the OGC update. The choices of the variation speed of r_0 and the frequency of updates are individually somewhat arbitrary, but it is demonstrated that a single update sequence can efficiently overcome r_0 variations of 5.6%. We acknowledge we are missing statistics on the temporal variations of r_0 , but such data are beyond the scope of the present paper. Anyhow, such statistics are expected

to be extremely variable depending on the moment in the year, the site, the telescope, and its dome. Altogether, we estimate that 5.6% ought to be a conservative bound for a one-minute change, and if this were found not to be the case, the frequency of OGC update sequences could easily be increased.

On the other hand, the nonupdating methods B and C show comparable performance for decreasing r_0 , which is as expected substantially below that of method A. When r_0 deteriorates below 9.5 and 11.5 cm for magnitude 0 and 16 guide stars, respectively, the SR drops below 5%, while method A reaches this level at $r_0 = 9$ cm for $M_R = 16$, and maintains a SR of above 19% for $M_R = 0$. For these methods, the decreasing and increasing r_0 experiments are not equivalent. When seeing degrades, the sensitivity decreases from the initial state at $r_0 = 21$ cm, and the system suffers an under-compensation. On the other hand, for increasing r_0 , the sensitivity of the PWFS continuously increases as compared to the initial state. Hence, the AO loop quickly reaches instability regimes, which in turn degrades the wavefront quality, which in turn stabilizes the loop thanks to the added residual and its inherent sensitivity reduction. This general overshoot trend accounts for the asymmetry of the two experiments for methods B and C, and is the origin of the dip in method B data for $10 \leq r_0 \leq 14$ cm. Data for methods B and C for increasing r_0 past 10 cm can altogether be disregarded, as the buildup in focal plane artifacts make it undesirable to do science in such regimes. This effect is connected to the overshoot regimes which are described in Appendix A.

Besides method A, method D is the most fitting candidate for an automatic tracking of optical gain. End-to-end performances for $M_R = 0$ are similar within SR measurement uncertainty, and for $M_R = 16$, method D yields better performance by at most 8% SR when r_0 is beyond 17 cm in the decreasing r_0 sequence. This performance improvement is explained by the shape of the OGC curves used, and their relationship to S/N optimization: when taking the ratio between automatic OGCs at $r_0 > 14.5$ cm as used by method A, and automatic OGCs at $r_0 = 14.5$ cm, one observes that method D benefits – thanks to the trends of sensitivity measurements with seeing – from a reduction of the gain of high-order modes relative to that of low-order modes, which tends to follow the trend for optimum noise rejection (Gendron & Léna 1994) for high-noise regimes. Experimental data confirm this $r_0 > 14.5$ or < 14.5 cm dichotomy, with the gap between methods A and D – in the decreasing r_0 case – closing just as r_0 reaches 14.5 cm. Noise-dependent control law optimization has not yet been implemented in method A.

These results tend to indicate that the simplification of the update process proposed by method D is attractive in terms of design, computational burden, and correction performance. As much as the authors would like to support this strategy, it is to be noted that method D, not being the core of this paper, has not been engineered in appropriate detail for this experiment, and still incurs some shortcomings. First, the update rule used assumes an immediate and precise knowledge of the current r_0 ; this may be provided by another channel of telemetry, but this is yet to be determined. Second, the dithering-based method A has been designed, using the abacus interpolation method, to accommodate residual wavefront PSDs which may differ from the abacus computation regime, in particular when changing the importance of the various error budget components. On the other hand, maintaining a permanent OGC curve assumes conditions compliant with the ones in which it was computed; typically for method D an r_0 close enough to the selected 14.5 cm. Robustness to highly varying noise conditions was demonstrated, yet

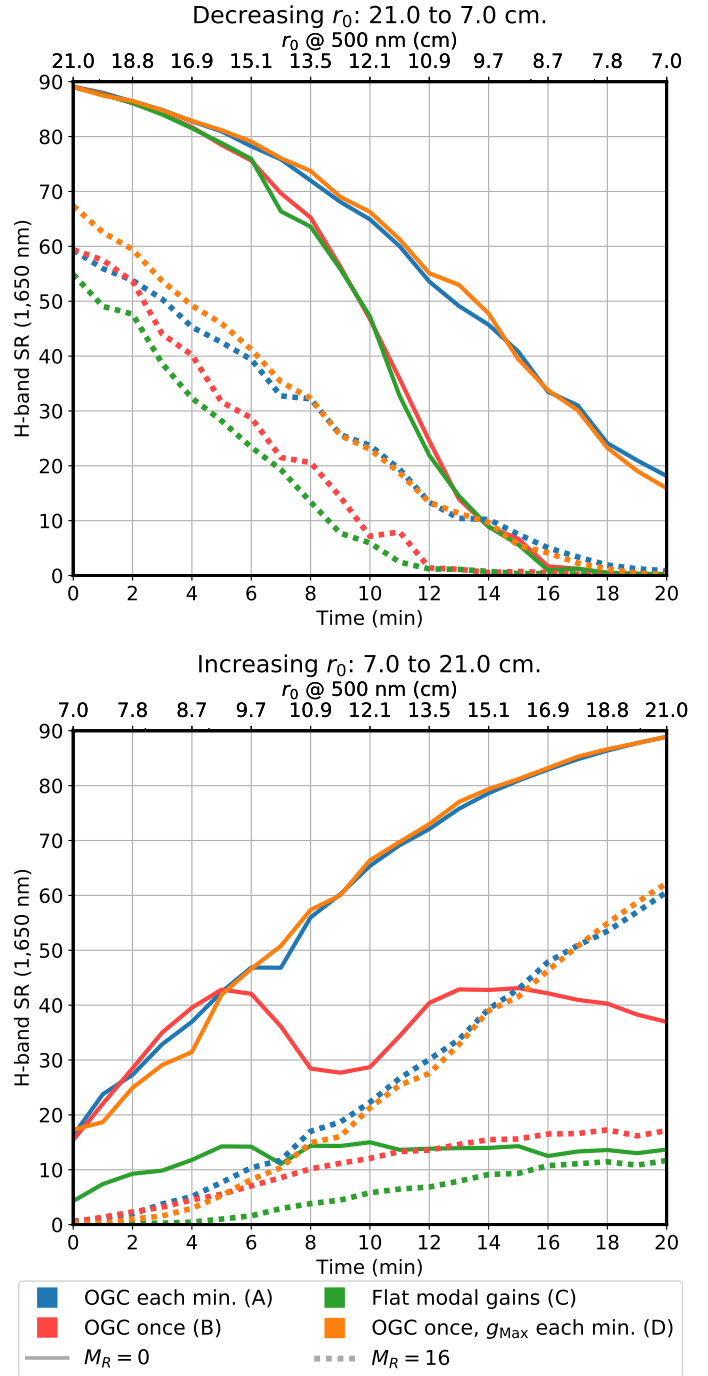


Fig. 13. Comparative analysis of end-to-end AO performance through an observation where (*top*) r_0 decreases and (*bottom*) r_0 increases between 7.0 cm and 21.0 cm – in steps of $\pm 5.6\%$ every minute – depending on the method chosen for integrator gain and OGCs. Results are compiled for guide stars of magnitude 0 (solid) and 16 (dashed). Error bars of $\pm 3\%$ of SR are to be assumed for all data. The general simulation procedure and methods (A–D) are detailed in the main text.

the authors express reservations regarding variations of other parameters, in particular wind speed and direction; or the spatial extension of the guide object (multiple stars, planetoids, AGNs, etc). Finally, using method D also places the AO in a catastrophic failure regime if g or r_0 are overestimated in low-noise cases, as occurred for unweighted OGCs and was discussed in Sect. 5.6. An analysis and discussion of this issue with method D are also included in Appendix A.

Table 3. *H*-band SR measurements during and in-between dithering sequences for various r_0 and guide stars, along with mean dithering amplitudes.

SRs in and out of dithering					
r_0	M_R	Dith.	10 s	20 msec	$\sqrt{\sum_{k=1}^3 A_k^2 \ \psi_k\ ^2}$
cm		Y/N	SR (%)	SR ^(a) (%)	nm RMS ^(b)
14.5	0	N	77.2	76.9 ± 0.9	5.3
		Y	77.2	76.9 ± 0.8	
8.5	0	N	34.7	33.0 ± 3.4	5.9
		Y	35.2	33.8 ± 3.2	
14.5	16	N	36.6	35.5 ± 3.3	25.8
		Y	36.0	35.1 ± 3.1	
8.5	16	N	4.1	2.7 ± 1.1	25.1
		Y	4.0	2.9 ± 1.0	

Notes. Dith.: Yes (Y) for data during dithering and No (N) otherwise.
^(a)Computed from loop residuals with the Maréchal approximation.
^(b)Averages across the 20 dithering sequences.

8. Discussion

8.1. Compatibility with imaging requirements

The automatic OG compensation pipeline was demonstrated to be satisfactory with an OGC update sequence of 1.1 s performed every minute. The question remains as to the impact of DM dithering on the scientific instrument, which might represent a potential restriction to the practical implementation of this technique.

Using dithering amplitudes based on in-situ noise assessment is the key feature: this ensures the dithering is always proportionate to the current image quality. We showed that clipping the amplitudes between 1.5 and 25.0 nm RMS per mode provided satisfactory performance, with 1.5 nm occasionally being reached from the S/N minimum requirement of Eq. (17) for $M_R = 0$.

Nevertheless, we seek to quantify potential focal plane artifacts observed at the spatial frequency locations of the dithered modes – shown in Fig. 7 – and SR performance losses, if any. We measured the SR for cases with r_0 of 14.5 and 8.5 cm and guide star magnitudes $M_R = 0$ and 16. During an AO run lasting 20 min, the PSF was acquired during all of the 20 dithering sequences, each 0.5 s long. From these, a ten-second exposure equivalent PSF was obtained, and identically a nondithered PSF was compiled after acquiring 20 exposures of 0.5 s each immediately after dithering sequences. Measured short exposure and overall ten-second SRs are compiled in Table 3, along with the mean dithering amplitudes for the three ψ_i modes across the 20 ditherings performed to reach the total ten-second exposure.

Data in Table 3 show that any science channel disturbance is beyond SR measurement sensitivity. Long- and short-exposure SRs are identical within and outside of ditherings, with nearly identical temporal error bars of the short-exposure SR. Moreover, quantitative values amount to approximate maximal dithered wavefronts of 6 and 26 nm RMS adding the three modes, for $M_R = 0$ and $M_R = 16$, respectively.

Of the cases measured, only for $r_0 = 14.5$ cm at $M_R = 16$ were we capable of clearly observing dithering-induced structures in the PSF. The relative difference between dithering and nondithering PSFs is shown in Fig. 14, computed

$$\text{as: } \frac{|\text{PSF}_{\text{dither}} - \text{PSF}_{\text{no dither}}|}{\text{PSF}_{\text{no dither}}}.$$

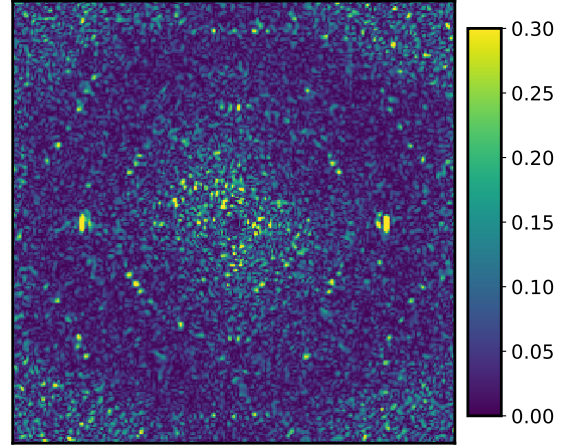


Fig. 14. Relative PSF difference between dithering-only and nondithering acquisitions, for $r_0 = 14.5$ cm and $M_R = 16$. The image is $100 \frac{\lambda}{D}$ across.

The most prominent structure in Fig. 14 are the two side lobes on the horizontal axis, induced by mode ψ_2 ; they may be observed on the dithered PSF, with peak magnitude of 0.06% of the PSF core. These two lobes are complemented by a near-complete ring of speckles from ψ_1 and a partial hexagon of the spatial frequencies of ψ_3 . Speckles with higher values within the ψ_1 ring are due to speckle noise between the subtracted PSFs.

Overall, our experiments indicate that the worst case disturbances induced by dithering on the science channel would only matter if contrasts better than 10^4 could be obtained. While this is generally not the case with the system studied, it may be for an AO followed by a coronagraphic second-stage extreme AO system. The authors suggest two possible operating modes to ensure profitable cooperation between an automatically dithering RTC and the science channel depending on the scientific acquisition mode. If long-exposure science images are being run, for example above 10 s of exposure time, a half-second dithering would be diluted across the exposure, and the AO would proceed without interrupting the science instrument; if short-exposure shots are being taken, we suggest that the instrument-control software would periodically suspend the scientific acquisitions while the dithering is performed. In such a case, dithering amplitudes can even be increased and the dithering duration shortened, together preventing a fratricide effect, with the shortest possible interruptions.

8.2. Compensating noncommon path aberrations

Early in this paper, we mentioned the critical issue of the effect of OG regarding NCPA subtraction in the AO loop. We unfortunately could not tackle this topic extensively at the time of writing this paper, and no end-to-end simulations with NCPAs had yet been performed using the dithering method. NCPA compensation was actually one of the starting points of OG analysis and gain tracking methods for high-order AO systems with nonlinear WFSs (Esposito et al. 2015). Modal OG compensation works towards the solution: considering the NCPA measurement not as reference slopes, a practice inherited from Shack–Hartmann formalism and yet unsuitable for nonlinear systems, but rather in terms of reference wavefront maps. In practice, this means performing the setpoint subtraction not as

$$\text{Pyr}(\phi) - \text{Pyr}(\phi_{\text{NCPA}}), \quad (19)$$

but after the MVM computation, as

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\phi) - \phi_{\text{NCPA}}. \quad (20)$$

With this new point of view, an appropriate NCPA compensation can be performed adequately, leveraging the rectification of the reconstructor, and avoiding the issue of NCPA over-compensation (Bond et al. 2017) which occurs when an increase in gain is applied over Eq. (19) to compensate for sensitivity reduction.

The NCPA subtraction following Eq. (20) is appropriate regardless of whether ϕ_{NCPA} is calibrated directly as a wavefront (e.g., with phase diversity), or using the traditional method – setting the cleanest possible PSF on the imaging channel and acquiring the WFS slopes for such a wavefront, in which case it is estimated by

$$\phi_{\text{NCPA}}^* = \mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\phi_{\text{NCPA}}). \quad (21)$$

The latter case allows for a finer all-in-one estimation of second-order effects such as aliasing or nonlinearity of the measurement of the NCPA wavefront.

The nonlinearity induced by the NCPA offset is also to be considered for OG compensation in its own regard. Regarding the MICADO SCAO system, a total of 120–150 nm RMS residual NCPA is expected after optical precompensation during instrument commissioning. This residual NCPA alone modifies the PWFS response. For the dithering method to be applicable, we therefore expect that abacuses should be recomputed once NCPAs are fully characterized, with p_0 -class wavefronts offset by the ϕ_{NCPA} .

8.3. Alternative calibration and sensitivity-compensation methods

To conclude this section, we would like to discuss how the dithering and OG compensation approach presented in this paper should compare to current alternatives used to operate PWFSs on-sky. In particular, on-sky measurements of interaction matrices can be performed (Esposito et al. 2010; Guyon et al. 2011), or alternatively, adequate synthetic matrices to match on-sky sensitivity (Héritier et al. 2018).

First, we assume an on-sky interaction matrix can be measured that is appropriate to the ongoing average turbulent conditions, that is, the mean \mathbf{dPyr} for some residual wavefront PSD. Using the associated reconstructor would then account for both the sensitivity reduction, as characterized by α_{\parallel} , and the mean nonlinear modal crosstalk, quantified by \mathbf{d}_{\perp} as per the definitions in Sect. 2.3. It is however possible to derive – from data obtained during the computation of the abacuses shown in Figs. 3 and 4 – that \mathbf{d}_{\perp} is mainly borne by stochastic fluctuations with the wavefront realization ϕ_{Res} . Due to this property, the compensation of the mean \mathbf{d}_{\perp} component for a given p_0 -PSD class, as could be expected with obtaining an on-sky interaction matrix, makes little to no difference as compared to the sole compensation of the colinear nonlinearity α_{\parallel} as proposed in this paper.

Furthermore, the main criterion to be considered is the actual capacity to obtain a nearly noiseless and well-conditioned on-sky interaction matrix, in particular at the ELT scale where matrices reach sizes beyond $4000 \times 20\,000$, with the acquisition being all the more difficult on faint guide stars and in sub-median seeing conditions. For such reasons, a modal rescaling to be applied on synthetic interaction matrices is at this stage expected to be the most robust approach.

Lastly, it is sometimes suggested that a modal gain function can be directly extrapolated from sensitivity-reduction measurements, such as the ones obtained from demodulating dithered signal. In such a case, a piecewise-constant or linear curve is extrapolated, which provides gain values across the modal basis. We believe this method is numerically efficient and very comparable to our approach, and our analysis of the sensitivity as shown in Fig. 3 should provide input on how to group modes for interpolation. However, it is still the case that coefficients comparable to α_{\parallel} have to be measured for a few modes, in which case the use of a true, realistic abacus, as demonstrated here, is merely a small extra effort that enables all the features of the used DM basis to be encompassed.

9. Conclusion

In this work, the authors propose a thorough analysis of the optical gain phenomenon with the PWFS, OG being defined as a modification of the first-order response of the sensors between the calibration regime – with a flat wavefront, and operational regimes when the PWFS is shown a closed-loop residual wavefront.

We proposed a numerical approach for obtaining the gain for each mode that minimizes the first-order nonlinearity error component for a given wavefront. Through extensive numerical simulations we confirmed the hypothesis that OGCs only weakly depend (<3%) on the wavefront, but only on its PSD, a key point to ensure the time-persistent validity of a set of OGCs. Moreover, our analysis of the residual error after modal compensation showed that low-order modes see their nonlinearity error budget greatly reduced.

There are strong variations of the OGCs when r_0 varies, and a sufficiently precise telemetry would be required to obtain the appropriate modal gains to be obtained. We implemented a telescope-ready method to obtain the optimal modal gains without prior knowledge of the atmospheric conditions. Using an offline-computed database comprising sensitivity reduction and optimal gains for a variety of r_0 , we interpolate the optimal gain for all modes, using information acquired from the feedback of the dithering of only three DM modes over 0.5 s. The dithering-sequence mode choices, signal frequencies, and duration were engineered to provide meaningful, robust, and consistent results using the ELT AO setup on which we performed all the validating numerical simulations.

Using automatic OGCs, besides providing a method valid for a broad range of observation conditions without any operator intervention or system fine-tuning, was shown to provide valuable increases in end-to-end performances in all the configurations tested, mainly for sub-median seeings and near the limiting magnitude of the instrument. These performances are expected to provide a valuable increase both in imaging quality and in useful telescope time, by pushing the lower limit of acceptable sky conditions for scientific observations.

Furthermore, we demonstrated, through end-to-end simulations with a fast, broad-range dynamically varying r_0 , that the repetition of the OGC update sequence lasting 1.1 s every minute was sufficient to maintain the control law in near optimum state, without ever opening and re-closing the AO loop, even after minutes spent at $r_0 < 8$ cm. We also investigated an alternative simplification of the method, which would optimize only the integrator scalar gain while maintaining a predefined modal gain curve. While this simplified process provided results comparable to our complete OGC automatic method, interrogations remain at this step on how to engineer a complete automatic pipeline

following this altogether promising philosophy and avoiding the instability issue associated with low-order modes.

We propose a robust automatic control law protocol, tailored for telescope operation conditions, which relieves the burden of monitoring and adjusting the AO manually, with little to no effect on the operation of the scientific instrument. We strongly support the implementation of such a method or its future derivatives in ELT AO controllers, which will hopefully be a valuable asset in monitoring and optimizing AO loop internals without increased operator supervision.

Acknowledgements. This research is performed in the frame of the development of MICADO, the first light instrument of the ELT (ESO), with the support of ESO, INSU/CNRS and Observatoire de Paris. The authors also thank the members of the AO community who manifested their interest in an optical gain compensation method adjusting the integrator gain only over a nonchanging modal coefficient curve.

References

- Biasi, R., Manetti, M., Andrighettoni, M., et al. 2016, *Proc. SPIE*, 9909, 99097Y
- Bond, C. Z., Correia, C. M., Sauvage, J. -F., et al. 2017, in *5th AO4ELT Conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*
- Clénet, Y., Buey, T., Gendron, E., et al. 2018, *Proc. SPIE*, 10703, 1070313
- Clergeon, C. 2014, Ph.D. Thesis, Observatoire de Paris – Subaru National Astronomical Observatory of Japan
- Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al. 2018a, *Proc. SPIE*, 10703, 1070320
- Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al. 2018b, *A&A*, 619, A56
- Esposito, S., & Riccardi, A. 2001, *A&A*, 369, L9
- Esposito, S., Tubbs, R., Puglisi, A., et al. 2006, *Proc. SPIE*, 6272, 62721C
- Esposito, S., Riccardi, A., Fini, L., et al. 2010, *Proc. SPIE*, 7736, 773609
- Esposito, S., Pinna, E., Puglisi, A., et al. 2015, in *4th AO4ELT Conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*
- Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O. 2016, *Optica*, 3, 1440
- Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., et al. 2019, *JOSA A*, 36, 1241
- Ferreira, F., Gratadour, D., Sevin, A., et al. 2018a, *Proc. SPIE*, 10703, 1070347
- Ferreira, F., Gendron, E., Rousset, G., & Gratadour, D. 2018b, *A&A*, 616, A102
- Frazin, R. A. 2018, *JOSA A*, 35, 594
- Gendron, E., & Léna, P. 1994, *A&A*, 291, 337
- Guyon, O., Martinache, F., Clergeon, C., et al. 2011, *Proc. SPIE*, 8149, 814908
- Héritier, C. T., Esposito, S., Fusco, T., et al. 2018, *Proc. SPIE*, 10703, 107034P
- Hutterer, V., & Ramlau, R. 2018, *Appl. Opt.*, 57, 8790
- Kolb, J., Madec, P. Y., Le Louarn, M., Muller, N., & Béchét, C. 2012, *Proc. SPIE*, 8447, 84472D
- Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Le Louarn, M. 2008a, *Proc. SPIE*, 7015, 701554
- Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Le Louarn, M. 2008b, *Appl. Opt.*, 47, 79
- Neichel, B., Fusco, T., & Sauvage, J. F., et al. 2018, *Proc. SPIE*, 10703, 1070322
- Pinna, E., Agapito, G., Quirós-Pacheco, F., et al. 2014, *Proc. SPIE*, 9148, 914804
- Ragazzoni, R. 1996, *J. Mod. Opt.*, 43, 289
- Ragazzoni, R., & Farinato, J. 1999, *A&A*, 350, L23
- Rigaut, F., Neichel, B., Bec, M., et al. 2010, in *1st AO4ELT Conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, EDP Sciences
- Sedghi, B., Muller, M., Bonnet, H., Dimmler, M., & Bauvir, B. 2010, *Proc. SPIE*, 7733, 773340
- Shatkhina, I. 2014, Ph.D. Thesis, Johannes Kepler Universität Linz, Austria
- Véran, J.P., Esposito, S., Spanò, P., Herriot, G., & Andersen, D. 2016, in *4th AO4ELT Conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*
- Vérinaud, C. 2004, *Opt. Commun.*, 233, 27
- Vidal, F., Ferreira, F., Deo, V., et al. 2017, in *5th AO4ELT Conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*
- Viotto, V., Bergomi, M., Dima, M., et al. 2016, *Proc. SPIE*, 9909, 99096H

Appendix A: Stability issues and OGC weighting

For some modal gain coefficient curves, a catastrophic failure of the AO loop may happen for small increases of the loop gain or the PWFS sensitivity. This effect is discussed in the main text in Sect. 5.6, and was the motivation for our introduction of a weighting of the OGCs defined by Eq. (18).

This appendix documents and discusses how this instability phenomenon is manifested with some OGC computation techniques, when a sensitivity increase – due to the integrator gain, or an increase in r_0 – sets the lowest-order modes of the DM into oscillatory regimes. We recall that very low-order modes – mainly tip-tilt – bear the most turbulence residuals, are most affected by OG, and therefore most compensated, and suffer the least reconstruction error when appropriately compensated, as was discussed in Sect. 4.2. Frame-to-frame oscillations of these modes are destructive for the imaging quality, with a PSF core either bearing strong artifacts or tracing patterns in long-exposure images due to a wandering tip-tilt.

We performed identical experiments to those used to demonstrate the performance of automatic, weighted OGCs for a given r_0 (Figs. 10 and 11), comparing the long exposure SR with the varying integrator gain g . Here, we study three OGC methods: (1) unweighted, automatic OGCs; (2) the sensitivity compensation coefficients (SCC) proposed in Korkiakoski et al. (2008b), defined as

$$\text{SCC}(\phi_i; \phi_{\text{Res}}) = \frac{\|\text{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}} = 0)\|}{\|\text{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}}(r_0))\|}, \quad (\text{A.1})$$

with the norms taken in the PWFS slope space; and (3) automatic, weighted OGCs measured at $r_0 = 14.5$ cm and then unchanged, as used in method D of Sect. 7. Results for these three possible OGC computations are shown in Fig. A.1, using a $M_R = 0$ guide star, and exhibit the infamous gap effect in the SR(g) data at the higher r_0 values. With the global variation of sensitivity with r_0 , dynamic variations in r_0 – or misestimations thereof – not accounted for by automatic OGC updates are equivalent to a left-shift or a right-shift of the SR(g) curves as r_0 increases or decreases, respectively. With g set to $g_{\text{Max}}(r_0)$, a sudden r_0 increase therefore results in the SR collapsing as tip-tilt becomes unstable.

For unweighted, automatic OGCs, the gap effect means an immediate degradation of the SR to below 10% with sensitivity increases, observed for all $r_0 \geq 8.5$ cm. Similarly, the OGCs taken for $r_0 = 14.5$ cm and unchanged exhibit a gap for $r_0 > 14.5$ cm. This effect was not observed in the dynamically increasing r_0 experiments shown in Sect. 7.2, yet only because the tabulated g_{max} were taken, conservatively, to be smaller than the gap edge, hence ensuring the r_0 increases of 5.6% each minute were tolerated by method D.

For the SCCs, it is interesting to note they also exhibit the gap behavior for $r_0 \geq 11.5$ cm, although less markedly. We suggest that this is linked to the computation method, performed in the higher-dimensionality slope space rather than modal space; this yields OGC curves spanning a larger range across the modal basis. Hence, for an identical gain of the low-order modes, highest-frequency modes bear a higher gain than for automatic OGCs, and in turn provide the self-stabilizing increase in wavefront residual slightly sooner than our G_{opt} coefficients.

We wish to mention that similar effects could not be reproduced for these SCCs on an 18 m simulated telescope (Deo et al. 2018a), and therefore that the gap effect is thought to be strongly correlated with the ever-increasing dimensionality – and complexity – of the AO system with telescope size.

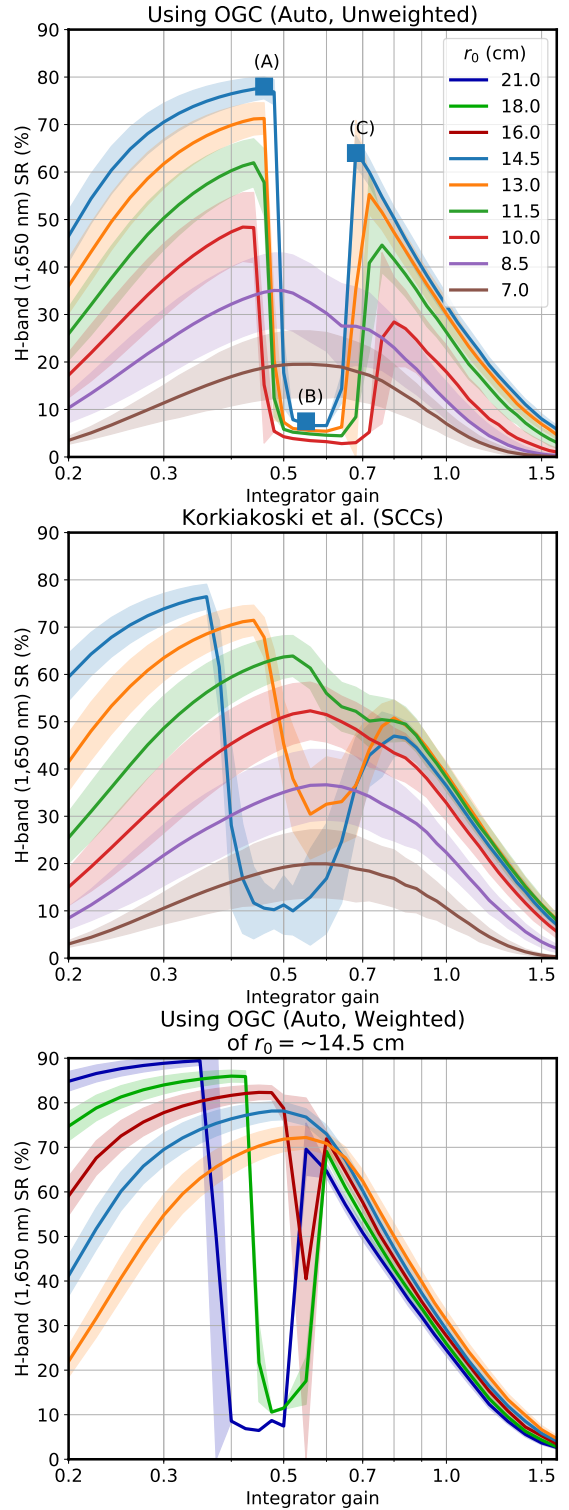


Fig. A.1. End-to-end performance measurements for various OGC modal-compensation techniques, probing for maximum SR depending on integrator gain g at various stationary r_0 from 7.0 to 21 cm, using a $M_R = 0$ guide star. *Top*: unweighted automatic OGCs; *middle*: SCCs as per Korkiakoski et al. (2008b); *bottom*: using automatic, weighted OGCs computed at $r_0 = 14.5$ cm and reused identically at all r_0 , as per method D of Sect. 7.1. Labeled markers on top graph: PSFs are shown in Figs. A.2a–A.2c.

How the gap effect impacts the tip-tilt and its successful compensation with OGC weighting is best seen using PSFs corresponding to various g values during the experiments.

Figures A.2a–A.2c show PSFs taken across the gap for automatic, unweighted OGCs at $r_0 = 14.5$ cm, corresponding to points labeled (A)–(C) in Fig. A.1 (top). At a gain of 0.60 – in combination with $g_{\max} = 0.46$ – the PSF is completely blurred by tip-tilt oscillations, which smear the core into an elliptic pattern a few $\frac{\lambda}{D}$ across. Reaching past this regime at $g = 0.68$, waffle modes enter oscillatory regimes, with corresponding artifacts at the corners of the DM rejection domain, and in turn tip-tilt sensing is sufficiently dampened to induce a stabilized PSF core and restore a decent SR over 60%.

The PSF in Fig. A.2d is taken with all identical parameters to those in Fig. A.2b except for the added weighting. This PSF demonstrates how the image is satisfactorily stabilized, and the mid-frequency range speckle halos engineered by Eq. (18) and synthetically imaged in Fig. 9 are clearly noticeable. While this regime is not meant to be reached and provides a PSF with some artifacts, it is only transitory with sudden improvements of the seeing until the following OGC update sequence; weighting satisfactorily prevents the catastrophic failures of the other OGC computation techniques presented.

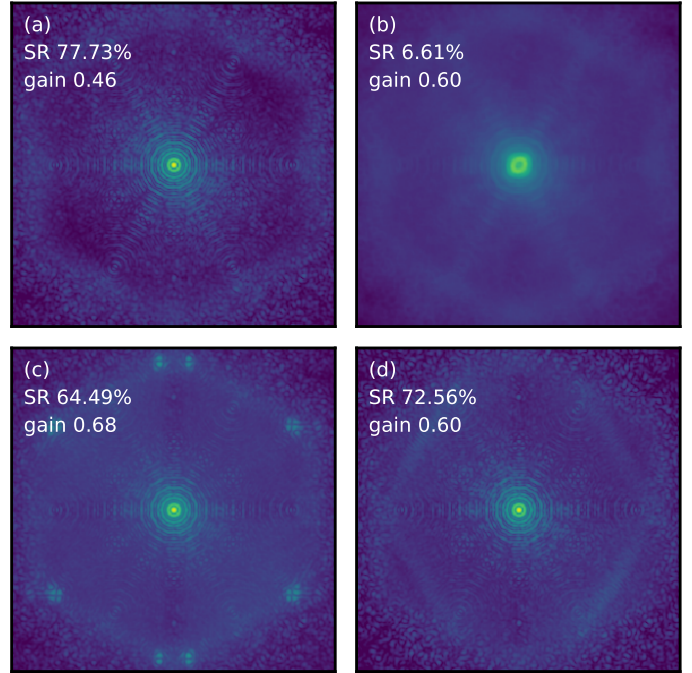


Fig. A.2. Analysis of the PSF structure during the SR gap effect when continuously increasing the integrator gain. (a)–(c): PSFs from unweighted OGC runs, corresponding to points labeled (A)–(C) in Fig. A.1 (top). (d): PSF taken with parameters equivalent to those in (b) but with weighted OGC, corresponding to Fig. 10. All PSFs are shown in log scale, with colormaps spanning from $3 \cdot 10^{-6}$ to 1, where 1 is a 100% SR PSF.

5.3 Discussions et compléments

Cette section sera l'occasion de voir un certain nombre d'éléments qui n'ont pas trouvé leur place dans l'article [Deo et al. \(2019a\)](#), soit par souci de concision, soit par manque de maturation au moment de la rédaction de l'article. Les paragraphes qui suivent porteront sur les éléments suivants, qui méritent une attention particulière en complément de l'article :

- La définition précise du spectre modal utilisé pour le calcul des abaques (sections [A&A2019:2.5](#) et [A&A2019:5.2](#)).
- Des compléments, issus de [Deo et al. \(2018b\)](#), sur le choix d'une base modale appropriée et la dépendance du gain optique au rayon de modulation.
- Des éléments d'analyse qui ont conduit au choix des modes pour la séquence de dithering (section [A&A2019:5.4](#)).
- Une étude sur la possibilité d'une compensation du gain optique au delà de la méthode modale retenue jusqu'à présent.

5.3.1 Les fronts d'onde de classe p_0

Dans l'article, nous passons rapidement dans la section [A&A2019:2.4](#) sur la classification des fronts d'onde résiduels par leur PSD, identifiée par un unique paramètre scalaire p_0 . Je détaille ici le processus de génération et d'utilisation des fronts d'onde servant de support à l'abaque des gains, et j'explique le choix de la dénomination p_0 , plutôt que r_0 . p_0 s'identifie au r_0 utilisé pour obtenir la PSD du front d'onde, mais néanmoins n'est destiné qu'à étiqueter les fronts d'ondes ayant cette PSD.

Le calcul initial de la PSD des fronts d'ondes p_0 s'effectue à partir d'une seule simulation de bout-en-bout, en utilisant un r_0 quasi-médian de 12.9 cm et une étoile brillante de magnitude $M_R = 0$. À ce stade, je n'utilise pas encore de gains modaux. Le gain de l'intégrateur est réglé à 0.75, ce qui correspond au $g_{\max}(r_0 = 13 \text{ cm})$ tel que donné sur la figure [A&A2019:9](#), sur laquelle on voit que la performance attendue dépend peu, dans ces conditions, de l'utilisation des OGC ; la performance attendue est donc de $66 \pm 4\%$ de SR en bande H. Je laisse alors converger la boucle d'OA, et procède à l'enregistrement et l'analyse des résidus modaux vus par l'analyseur pendant une seconde, afin de pouvoir calculer le spectre modal résiduel ; ce dernier sera l'outil principal de la suite de mon analyse.

Je montre ce spectre modal résiduel sur la figure [5.4](#), ainsi que le spectre enregistré en boucle ouverte pendant la même durée. Le résidu total moyen pendant la séquence, fitting incluse, est de 168.2 nm RMS. Le front d'onde en boucle ouverte correspondant compte pour 1576 nm RMS, dont une erreur de fitting de 116.3 nm RMS.

Ce spectre obtenu, je l'utilise pour générer des fronts d'onde pour n'importe quelle classe p_0 : on considère un front d'onde aléatoire ne correspondant qu'à une erreur de fitting, qu'on normalise à $116.3 \times \left(\frac{12.9 \text{ cm}}{p_0}\right)^{\frac{5}{6}}$ nm RMS. J'y additionne un front d'onde généré par le DM, aléatoirement à partir du spectre donné en figure [5.4](#) et

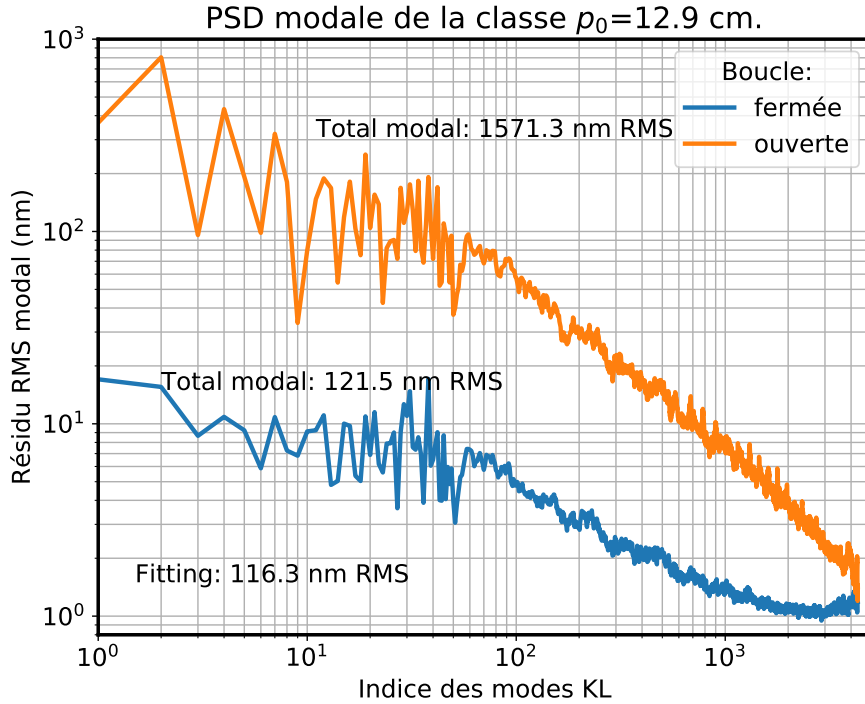


FIGURE 5.4: Spectre modal utilisé (boucle fermée) pour définir les fronts d'onde de la classe $p_0 = 12.9$ cm, à partir d'une simulation de bout-en-bout sur une turbulence de $r_0 = 12.9$ cm (boucle ouverte).

également mis à l'échelle par $\left(\frac{12.9 \text{ cm}}{p_0}\right)^{\frac{5}{6}}$. J'effectue cette génération aléatoire à partir de la seule variance des résidus, et en négligeant la covariance modale, par souci de simplification. La matrice de covariance des résidus est essentiellement diagonale, par définition même des modes KL atmosphériques – bien que cette covariance ne soit plus mathématiquement nulle après projection des modes sur le DM et à cause des couplages non-linéaires introduits par le PWFS.

Pour p_0 autre que 12.9 cm, utilisé pour le spectre de référence, l'approche de mise à l'échelle par $p_0^{-\frac{5}{6}}$ permet d'estimer efficacement le budget d'erreur qu'on aurait effectivement par un seul changement de r_0 . Un tel changement augmente de ce même rapport les composantes du budget d'erreur pour la latence et la fitting (qui vaut ici 48% de l'erreur quadratique), qui dominent largement le budget d'erreur à fort flux lumineux.

On pourrait en revanche lever l'objection que pour des situations ou des paramètres tels que la vitesse du vent, la magnitude de l'objet source, ou encore la distance de la cible à l'axe différent, ce spectre résiduel ne serait pas adéquat, à cause de la variation relative de l'importance des termes d'erreur dus à la latence, au bruit, et à l'anisoplanétisme. En réalité, j'ai déjà validé expérimentalement que ce spectre reste bien une modélisation fonctionnelle lorsque la magnitude de la source a fortement changé :

pour obtenir les résultats à magnitude $M_R = 16$ présentés à la section A&A2019:7, j'utilise les abaques calculées pour $M_R = 0$.

En utilisant ce procédé de génération de fronts d'ondes à partir de cette PSD modale pré-enregistrée, je peux rapidement générer les fronts d'onde nécessaires au calcul des abaques de réduction de sensibilité et de gains optimaux. L'abaque découle du calcul d'une matrice d'interaction complète au voisinage de chacun de ces fronts d'onde, puis du calcul des coefficients moyens pour chacune des classes p_0 .

Dans Deo et al. (2018b), j'avais simplifié la procédure en ne considérant que l'erreur de fitting pour la classe p_0 . En réalité, la différence en terme de performance de bout-en-bout est négligeable, bien que les valeurs contenues dans l'abaque soit sensiblement différentes, avec des gains plus raisonnablement bornés pour les bas ordres quand $p_0 < 10$ cm. Néanmoins, le processus d'interpolation, pour l'une ou l'autre des abaques, s'accommode bien de ces modifications tant que le processus reste auto-cohérent.

J'insiste sur la nécessité, et la presque suffisance de l'idée "d'auto-cohérence" pour que le processus de mesure de la sensibilité suivie de l'interpolation du gain fonctionne : le cas le plus extrême consisterait à un grand nombre de couples $(\alpha_{\parallel}(\phi_i), G_{\text{opt}}(\phi_i))$, mesurés dans des conditions arbitraires pour chaque mode. Dans ce cas, une mesure de $\alpha_{\parallel}(\phi_i)$ pour tous les modes, un par un, renvoie à une valeur de G_{opt} . Ce qu'apporte la structure de l'abaque, et sa construction à partir de la réalité physique de la turbulence et du senseur, c'est de simplifier ce processus en permettant des extrapolations bien plus importantes : à partir de seulement trois modes effectivement mesurés, on peut alors extrapoler la mesure $\alpha_{\parallel}(\phi_i)$ à tous les autres !

5.3.2 Rayon de modulation et autres bases modales

Le lecteur·rice attentif aura noté que l'ensemble des simulations présentées dans l'article Deo et al. (2019a) ont été effectués pour la seule base \mathcal{KL}^{DM} , pour un seul rayon de modulation $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$.

J'avais précédemment étudié (Deo et al., 2018b) plus en détail le comportement des coefficients de sensibilité, en particulier vis-à-vis de la base modale utilisée pour le calcul de $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$, et pour plusieurs rayons de modulation de 2 à $10 \frac{\lambda}{D}$, avec l'objectif de définir ce que pouvait être "un bon mode" pour la compensation modale.

Dans cette section dont les résultats sont issus de Deo et al. (2018b), les simulations utilisent une optique adaptative réduite par rapport à l'article Deo et al. (2019a) : un télescope de 18 m avec un DM à maille carrée 39×39 , dans le but d'accélérer les simulations. Ce système est très similaire à celui utilisé dans l'article Deo et al. (2018a) présenté au chapitre 4 sur les mésalignements, dont les paramètres sont donnés dans la table A&A2018:3, à l'exception du PWFS qui est sur-échantillonné avec 61×61 sous-pupilles à travers le diamètre du télescope, au lieu de 44×44 .

Je montre sur la figure 5.5 les mesures de $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$, sur trois bases – la base des actuateurs, la base de Fourier \mathcal{F}^{DM} et la base \mathcal{KL}^{DM} ; et pour deux rayons de modulation 4 et $8 \frac{\lambda}{D}$.

Je regarde tout d'abord le critère de stabilité de la mesure à travers la classe p_0 ,

qui est, comme nous l'avons vu dans Deo et al. (2019a), un critère primordial pour pouvoir appliquer la compensation modale de manière efficace. Pour les bases Fourier et KL, les $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ sont mesurés de manière très stable à travers la classe p_0 ; les valeurs numériques de $\frac{\sigma[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]}{\mu[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]}$ sont en dessous de 3% sur ces deux bases pour tous les $p_0 \geq 8.0$ cm.

A contrario, la stabilité mesurée directement sur les actionneurs du DM est très mauvaise, avec $\frac{\sigma[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]}{\mu[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]}$ rapidement croissant avec la dégradation du seeing, de 10.2% à $p_0 = 20.0$ cm jusqu'à 27.6% à $r_0 = 8.0$ cm.

Je confirme ici qu'essayer d'appliquer une compensation modale du reconstruteur n'a pas tellement de sens quand les modes présentent une structure défavorable, comme par exemples les fonctions d'influence. On s'achemine alors vers la définition d'un critère définissant les bases modales appropriées. La stabilité des $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ est un tel critère, mais qui requiert une quantité significative de calculs numériques pour être obtenu.

On identifie également, sur la figure 5.5, l'influence du rayon de modulation r_{Mod} sur la distribution de α_{\parallel} . Le minimum est bien marqué pour les modes Fourier et KL dont les fréquences correspondent à r_{Mod} . Pour des fréquences spatiales plus élevées que r_{Mod} , le comportement est sensiblement indépendant de ce paramètre. À l'inverse, pour les plus bas ordres, où la pyramide est censée se comporter comme un véritable dérivateur de front d'onde, un rayon de modulation plus grand garantit une borne inférieure plus élevée à la baisse de sensibilité, relativement à la mesure pour $\phi_{\text{Res}} = 0$.

En terme d'étude en fonction des fréquences spatiales, la distribution de $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ sur la base de Fourier est plus révélatrice que sur la base KL. En générant une base de Fourier du DM à géométrie cartésienne, nous pouvons identifier chaque mode à une position dans le plan de Fourier, qui encode la fréquence spatiale portée par ce mode.

Je montre cette représentation – pour $r_{\text{Mod}} = 4$ et $8 \frac{\lambda}{D}$ – sur la figure 5.6 (haut). On identifie clairement trois régimes différents : à l'intérieur d'un carré de côté $2 r_{\text{Mod}}$, avec un α_{\parallel} relativement stable; dans 4 bandes horizontales et verticales de $2 r_{\text{Mod}}$ de large le long des axes, avec un minimum juste au delà du carré central. Et enfin un régime dans les 4 coins du plan, en dehors des bandes, où α_{\parallel} augmente régulièrement dans les directions à 45° .

Pour avoir une échelle absolue de la réponse du PWFS, j'ai également représenté la sensibilité totale de l'analyseur sur la figure 5.6 (bas), définie ici par :

$$\text{Sensibilité}(\phi_i; p_0) = \mu[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)] \times \|\mathbf{dPyr}(\phi_i; \phi_{\text{Res}} = 0)\|, \quad (5.4)$$

c'est à dire la quantité d'énergie modale dans la mesure du PWFS, atténuée par le gain optique de circonstance. On retrouve sur la figure 5.6 la structure de plusieurs résultats déjà connus en l'absence de résidus : la réponse fréquentielle analytique (figure 2.13); et celle mesurée sur PYRCADO (figure 3.32). Si la structure est similaire, il faut noter

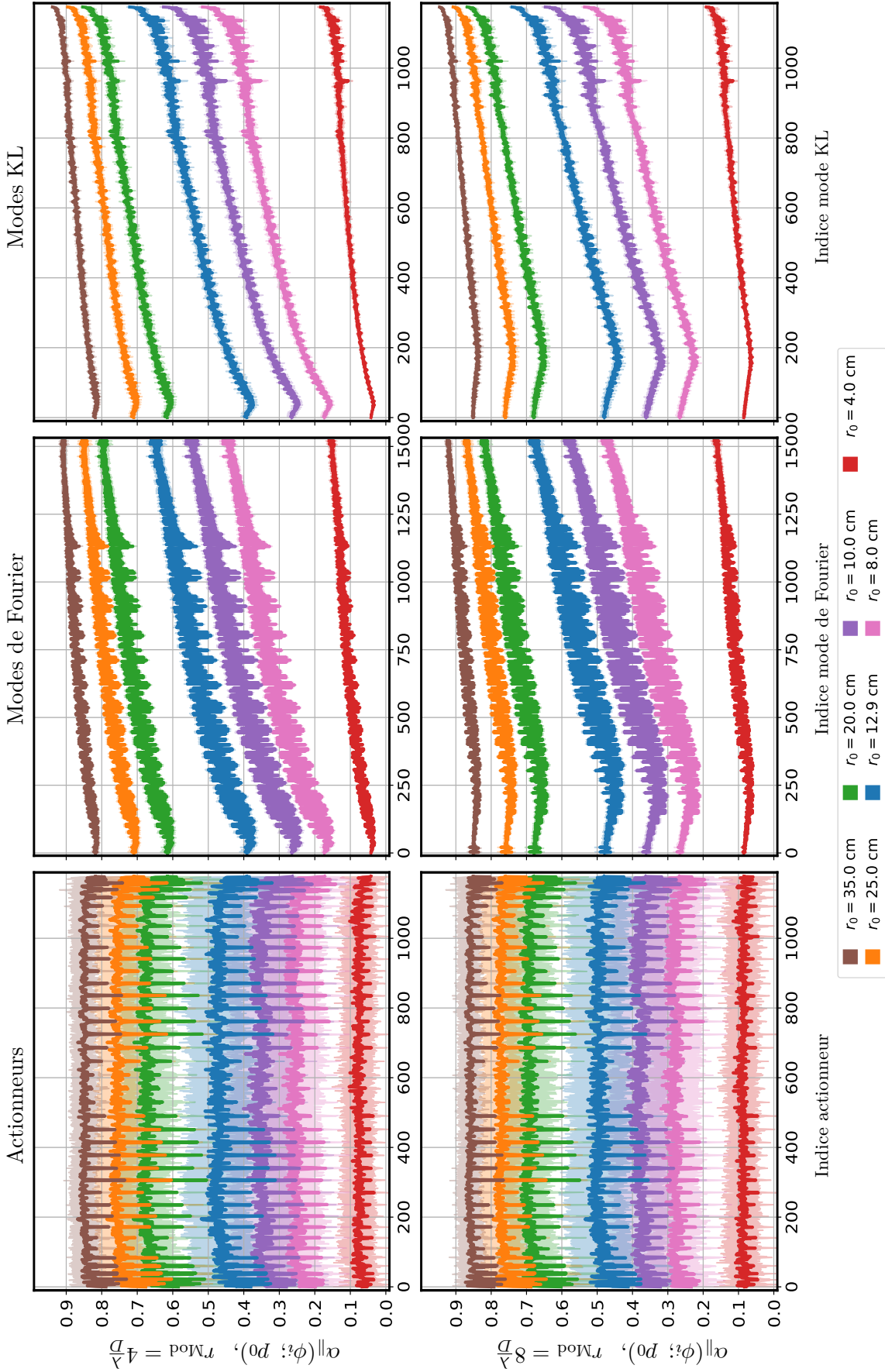


FIGURE 5.5: Abaque de $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ pour trois bases du DM et deux $r_{\text{Mod}} : 4$ et $8 \frac{\Delta}{D}$. Les actionneurs sont numérotés par ligne et colonne; les modes de Fourier par norme de la fréquence spatiale portée; et les KL par fréquences spatiales croissantes. Lignes pleines : moyennes $\mu[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]$; aires colorées : $\pm\sigma[\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)]$, bien visible uniquement pour la base des actionneurs. Mesures sur 30 réalisations d'un front d'onde $r_0 = p_0$ restreint à une erreur de fitting.

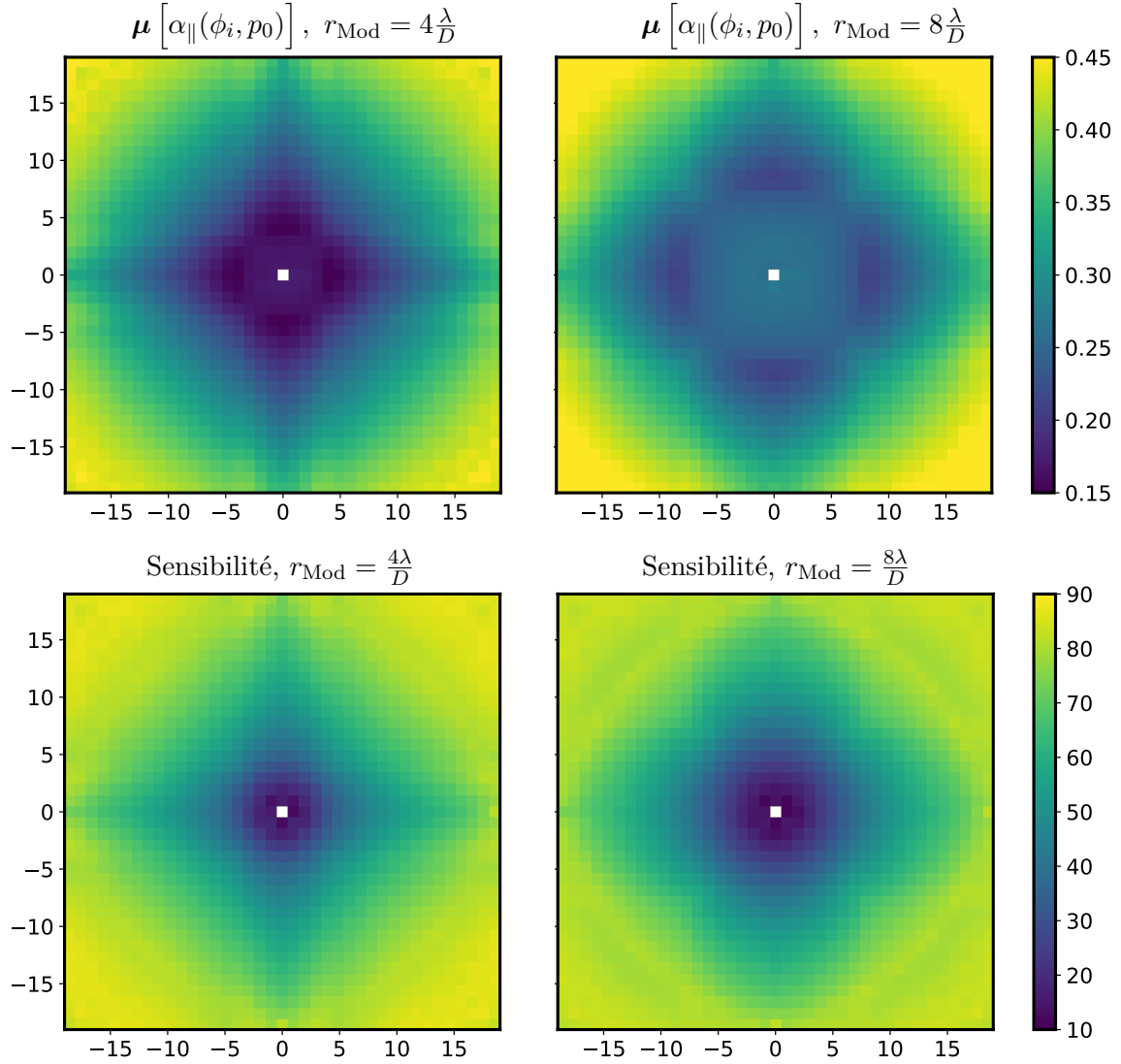


FIGURE 5.6: Haut : représentation dans le plan de Fourier de $\mu[\alpha_{||}(\phi_i, p_0)]$, mesuré sur la base de Fourier du DM avec $p_0 = 8.0$ cm. La mesure pour chaque mode de Fourier est représentée à la position correspondante dans le plan fréquentiel. Les axes sont gradués en unités de D^{-1} . Bas : Sensibilité (équation 5.4) du PWFS dans des conditions identiques. Pixel blanc : la mesure n'est pas définie pour le mode piston, de fréquence de Fourier nulle.

que les modes les mieux vus en présence de résidu ne sont plus ceux aux fréquences selon les arêtes du PWFS : ce sont désormais les modes de haute fréquence, avec $|f_x|, |f_y| > \frac{r_{\text{Mod}}}{\lambda}$.

Cette carte de sensibilité de Fourier est aussi structurellement compatible avec celle de Fauvarque (2017) qui le premier propose une fonction de transfert optique pour le PWFS, à travers l'application des modèles convolutifs.

En plus d'être rassurant, se résultat se veut finalement assez naturel : dans le cadre des approximations du système convolutif, il sera finalement démontré (Fauvarque et al., 2019) que le gain optique du PWFS peut être modélisé par une fonction de transfert qui ne dépend que de la PSD des phases résiduelles. Autrement dit, sous cette stricte hypothèse nos mesures $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ sur la base de Fourier auraient un écart-type nul et seraient parfaitement déterministes. On dispose alors d'une base propre pour la non-linéarité liée au gain optique sur une classe de PSD de front d'onde donnée ; pour reprendre l'équation A&A2019:6, ces modes diagonalisent la matrice de confusion non-linéaire $\Lambda_{\phi_{\text{Res}}}$.

Ceci nous permet de définir un critère numérique de distance d'un mode quelconque ϕ_i à un vecteur propre pour le gain optique : la variance de $\alpha_{\parallel}(\mathbf{f}; p_0)$ en fonction des fréquences spatiales \mathbf{f} , pondérées par le spectre du mode $|\mathcal{F}[\phi_i]|^2$:

$$\left[\iint_{\mathbf{f}} |\mathcal{F}[\phi_i]|^2 d\mathbf{f} \right]^{-1} \left[\iint_{\mathbf{f}} \alpha_{\parallel}(\mathbf{f}; p_0)^2 |\mathcal{F}[\phi_i]|^2 d\mathbf{f} - \left(\iint_{\mathbf{f}} \alpha_{\parallel}(\mathbf{f}; p_0) |\mathcal{F}[\phi_i]|^2 d\mathbf{f} \right)^2 \right]. \quad (5.5)$$

Ce critère, sous les modèles convolutifs, est alors nul pour les seuls modes de Fourier (de la phase, et non du DM ; et modulo la dégénérescence de α_{\parallel}), et strictement positif sinon.

La base \mathcal{F}^{DM} s'impose donc comme la base conceptuellement idéale pour mesurer et compenser le gain optique. Néanmoins, l'implémentation du contrôle sur la base \mathcal{F}^{DM} est peu pratique : générer tous les fronts d'onde sinusoidaux que peut faire le DM nous fournit n^2 modes (ici, $1521 = 39^2$), où n est le nombre d'actionneurs à travers le diamètre du télescope. Néanmoins, le DM ne comporte effectivement qu'environ $\frac{\pi}{4}n^2$ (ici, 1177) actionneurs, et nous obtenons une famille dégénérée de modes, ce qui requiert alors de réfléchir un peu plus lors de l'inversion du reconstructeur.

La base \mathcal{KL}^{DM} s'avère alors être un excellent atout. Bien qu'elle ait été introduite pour d'autres raisons, à savoir sa similarité structurelle avec les KL atmosphériques, et qu'on a ensuite mis à profit ces modes pour en faire une base orthonormée du DM de notre optique adaptative (section 2.2.3, Ferreira et al. (2018a)), la distribution fréquentielle des modes obtenus permet de conserver les bonnes propriétés de la base de Fourier. Comme il a été montré dans la figure A&A2019:6, le spectre d'un mode KL se compose de fréquences distribuées en un anneau dans le plan de Fourier, jusqu'à la limite de résolution du DM. Lorsque la limite de résolution est atteinte, la distribution fréquentielle ne forme plus un anneau complet et se replie autour des coins de la zone de correction du DM.

La sensibilité (ou bien le coefficient α_{\parallel}) présente peu de variations lorsqu'on parcourt les modes de Fourier à module de fréquence constant, c'est à dire le long d'un

cercle centré sur l'origine. Dit autrement, les cartes de sensibilité exposées sur la figure 5.6 sont *presque* à symétrie de révolution. On pourrait alors abusivement dire que les modes KL héritent des modes de Fourier la propriété d'être *presque* des modes propres pour la transformation appliquée au PWFS par le gain optique.

On trouve dans ce raisonnement une justification a posteriori de la stabilité, mesurée numériquement, de $\alpha_{\parallel}(\text{KL}_i^{\text{DM}}; p_0)$, et donc qu'il s'agit d'une base appropriée pour la compensation modale du gain optique, même si elle n'a pas été construite dans ce but. En outre, la diversité des modes présents dans cette base nécessite de faire un choix parmi ceux-ci dès lors qu'il va s'agir d'en exploiter la structure dans le cadre d'une mesure de gain optique, en particulier dans le cadre du dithering.

5.3.3 Sélection des modes pour le dithering

Je vais apporter dans cette section quelques éléments supplémentaires sur le choix des modes utilisés dans le cadre de la mesure du gain optique par dithering. En effet, ce choix est un élément important qui participe à la qualité de l'estimation fournie par la méthode. Je propose donc ici de faire découvrir au lecteur·rice quelques éléments quantitatifs qui m'ont été utiles durant la conception du dithering.

Pour rappel, j'avais commencé par utiliser une vingtaine de modes, puis réduit ce nombre jusqu'à trois, constatant que la performance du processus était maintenue. En fait, l'histoire est plus complexe, et c'est ce que je décris ci-après. Dans cette section, j'utilise à nouveau le dimensionnement ELT de l'OA avec 4309 modes contrôlés sur le miroir M4, à l'identique de [Deo et al. \(2019a\)](#).

J'ai commencé par générer autant d'indices de modes que nécessaire, répartis à travers la base KL avec une densité $\frac{1}{\sqrt{i}}$. Cette densité permet un échantillonnage du plan des fréquences spatiales, où chaque mode porte les fréquences contenues dans un anneau dont le rayon augmente linéairement.

Ensuite, il convient de vérifier que ces modes ne sont pas couplés par le gain optique. Pour mener à bien cette analyse, j'ai procédé par une inspection visuelle de la projection des modes en condition de gain optique sur la reconstruction idéale de ces modes, c'est à dire :

$$\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}} \cdot \quad (5.6)$$

Chaque colonne de cette matrice décrit la décomposition de \mathbf{d} (figure [A&A2019:2](#)) pour le mode considéré sur la reconstruction modale idéale. Le coefficient diagonal est quant à lui le $\alpha_{\parallel}(\phi_i)$. Je présente sur la figure 5.7 la valeur RMS de $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$, mesurée à partir de 20 fronts d'onde pour $p_0 = 12.9$ cm. Cette vue est restreinte aux 100 premiers modes et aux 310 derniers de la base \mathcal{KL}^{DM} .

On constate plusieurs éléments importants :

- Tous les modes sont partiellement reprojétés sur les 30 plus bas ordres, avec la composante la plus importante sur le tip-tilt (deux premières lignes).
- Les 90 derniers modes, sortes de gaufres qui ne ressemblent plus du tout à des KL atmosphériques à cause de la limite de résolution du DM, sont presque tous couplés deux à deux.

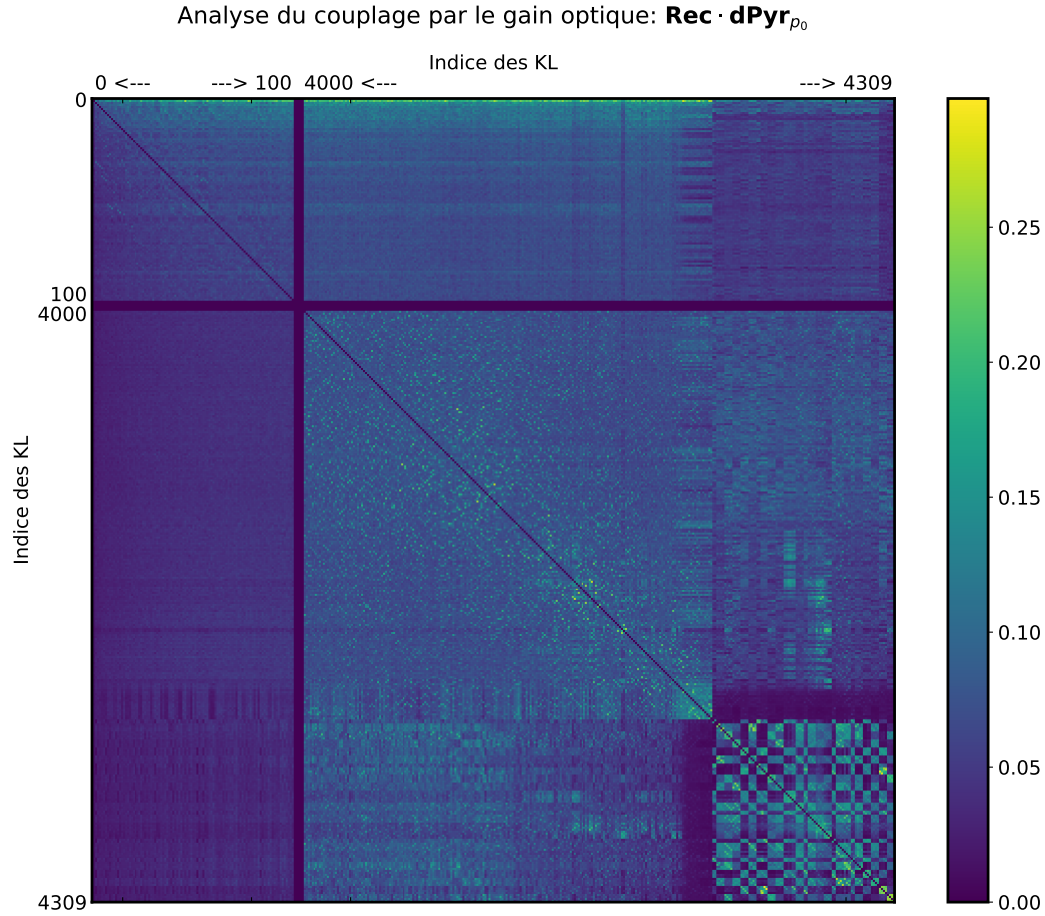


FIGURE 5.7: Valeurs RMS pour la matrice d'interaction $\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$ reprojétée sur le reconstruteur idéal \mathbf{Rec} , sur des fronts d'onde de classe p_0 . Les valeurs sont mises à la puissance $\frac{1}{2}$ pour une meilleure lisibilité. Chaque colonne correspond à la décomposition du vecteur reconstruit \mathbf{d} sur les lignes de \mathbf{Rec} . Les coefficients diagonaux sont mis à zéro. Seuls les modes KL d'indice 1 à 100 et 4000 à 4309 sont représentés, séparés par des lignes et colonnes de zéros.

- Les autres modes présentent des couplages tels qu'une faible fraction des coefficients dépasse du niveau de fond observé sur la figure 5.7 : la plupart des couplages sont très faibles ($< 10^{-2}$, soit 0.1 sur l'échelle de couleur).

On cherchera donc à éliminer les plus bas ordres et les plus hauts ordres de nos modes choisis pour le dithering ψ_i . Ce choix était déjà acquis pour les bas ordres, puisqu'ils portent la plus forte composante de la turbulence atmosphérique, et il n'est donc pas souhaitable d'arrêter leur asservissement pendant la durée du dithering. Pour le reste des modes, on ajustera simplement la distribution initiale si nécessaire pour éviter les couplages les plus importants.

Dans un second temps, j'ai cherché à analyser si un couplage non-linéaire temporel

est présent entre les modes sélectionnés. En effet, la réponse du PWFS étant non-linéaire, je n'exclus pas qu'une perturbation temporellement monochromatique induise par effet non-linéaire quadratique – peu probable – ou cubique, des harmoniques aux fréquences double et triple du signal de dithering. Ces harmoniques pourraient même s'exprimer selon \mathbf{d}_\perp , c'est à dire sur d'autres modes que celui excité.

Pour cette analyse, la technique retenue est d'inspecter le spectre temporel, par mode, pendant qu'on introduit le dithering sinusoïdal dans les modes ψ_i retenus. Pour ce faire, nous généralisons l'équation A&A2019:15 de démodulation à tous les modes et toutes les fréquences :

$$\alpha^*(\psi_i, \phi_j, f) = \frac{1}{A_i} \frac{1}{T} \frac{1}{\|\psi_i\| \cdot \|\phi_j\|} \left| \sum_t \cos(2\pi ft) \times [\phi_j \otimes (\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{S}(t))] \right|, \quad (5.7)$$

ce qui nous fournit une métrique pour la propagation du dithering dans les autres modes que les ψ_i , à leur fréquence fondamentale et leurs harmoniques.

Je présente ces coefficients α^* sur la figure 5.8, pour tous les modes, aux fréquences f_i , $i = 1, 2, 3$ et leurs deux premières harmoniques. Cette série de données a été obtenue en introduisant un dithering de 50 nm d'amplitude maximale dans chacun des trois ψ_i , sur une durée de 2048 trames (4.096 sec). Cette amplitude, importante en regard des besoins réalistes en SNR, est justifiée ici uniquement par l'approche systématique du problème dans cette phase préliminaire de design de la séquence de dithering.

On retrouve bien pour les trois ψ_i le pic attendu correspondant à l'énergie du signal injecté sur le DM. Pour les trois modes, on observe que pas ou peu d'énergie est injectée dans la seconde harmonique. Ceci était attendu de la symétrie des signaux de dithering et de la réponse du PWFS. En revanche, on constate bien une troisième harmonique : celle de ψ_2 émerge d'un facteur 10 du niveau de fond, et affecte quelques modes au voisinage de ψ_2 . Pour ψ_1 , seul ψ_1 lui-même est excité à $3 \times f_1$ à environ 5 fois le niveau des modes alentours, mais étonnamment cet effet est vu sur le deuxième graphe à la fréquence $2 \times f_2$. Dans la configuration présente, $3f_1 = 60.1$ Hz et $2f_2 = 59.6$ Hz ne diffèrent en effet que d'un bin de DFT. Moins visible, on envisage même de lire une excitation de ψ_1 d'ordre 4 dans les données démodulées à $f = 2f_3 = 79.6$ Hz.

Pour le mode ψ_3 , la situation est moins satisfaisante : comme nous l'indiquait l'étude statique montrée sur la figure 5.7, les modes de hauts ordres présentent entre eux des couplages plus élevés. Ici, on constate que le fondamental et la troisième harmonique de ψ_3 marquent une élévation du niveau spectral pour une large gamme de modes ϕ_i , $3000 \leq i \leq 4000$. Bien que cela ne soit pas très satisfaisant, il est à noter que nous aurons in fine besoin d'un mode dans cette plage pour procéder à l'interpolation des gains optiques.

En aparté, je propose à titre de complément de la section A&A2019:8.1 la PSF longue pose à travers les 4 secondes de dithering étudiées ici (avec les amplitudes $A_i \|\psi_i\| = 50$ nm), que je montre sur la figure 5.9. Les artefacts liés aux modes $\psi_{1,2,3}$ sont cette fois fortement caractérisés, montrant les dégradations qu'on aurait pu obtenir dans la voie scientifique si un dithering extrêmement important avait été requis.

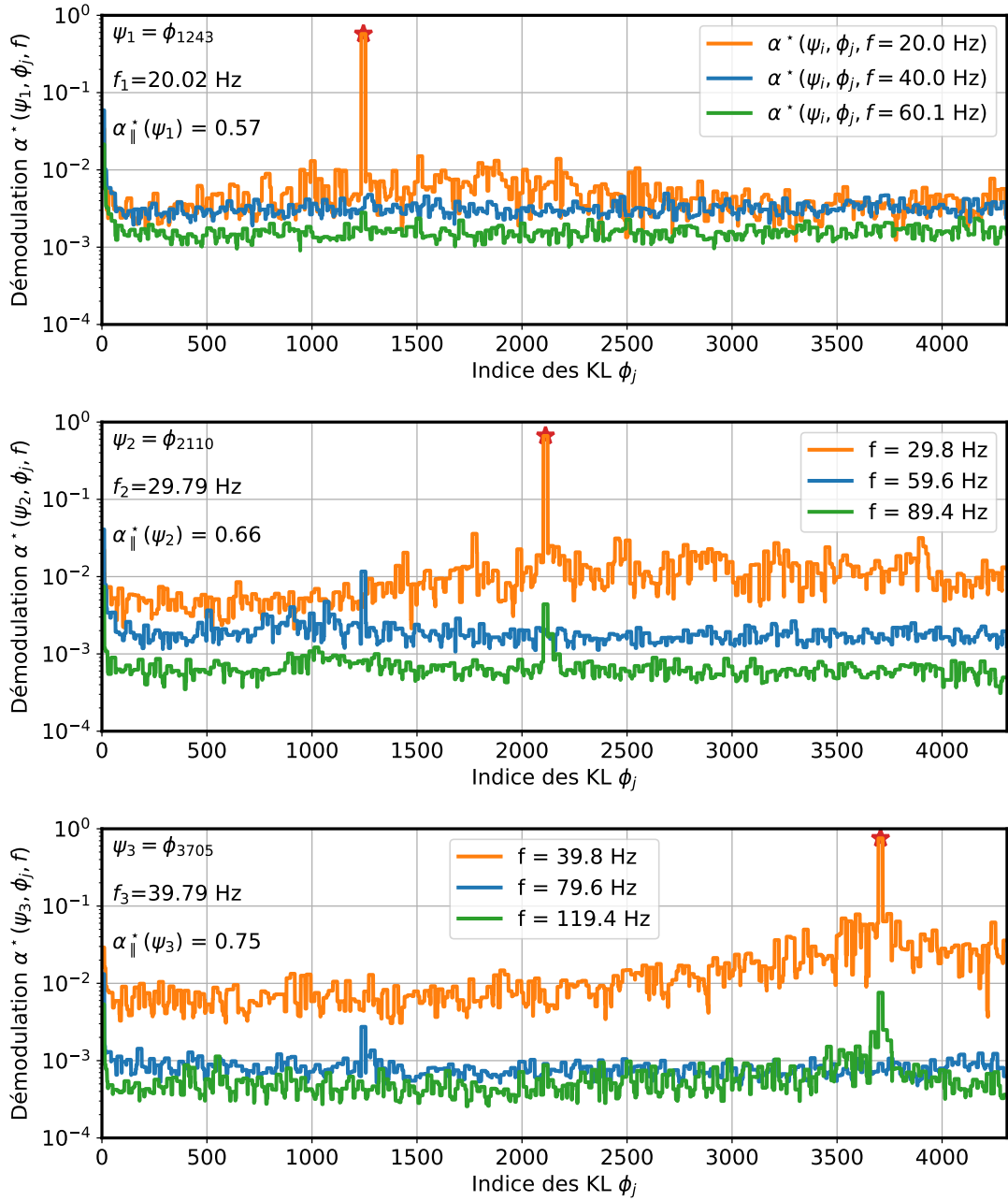


FIGURE 5.8: Analyse du couplage des modes aux fréquences fondamentales et premières harmoniques du dithering des ψ_i . Le coefficient $\alpha^*(\psi_i, \phi_j, f)$ est défini par l'éq. 5.7. Données mesurées sur les pentes du PWFS pour une séquence de dithering de 4 secondes avec des amplitudes $A_i|\psi_i|$ de 50 nm. Les courbes sont lissées par un filtre non-linéaire retenant le maximum local à ± 10 indices – ce qui explique l'aspect crénelé – afin de conserver les ordonnées des pics, qui se retrouvent élargis. Marqueur étoilé : coefficient d'intérêt de la méthode automatique $\alpha_{\parallel}^*(\psi_i)$.

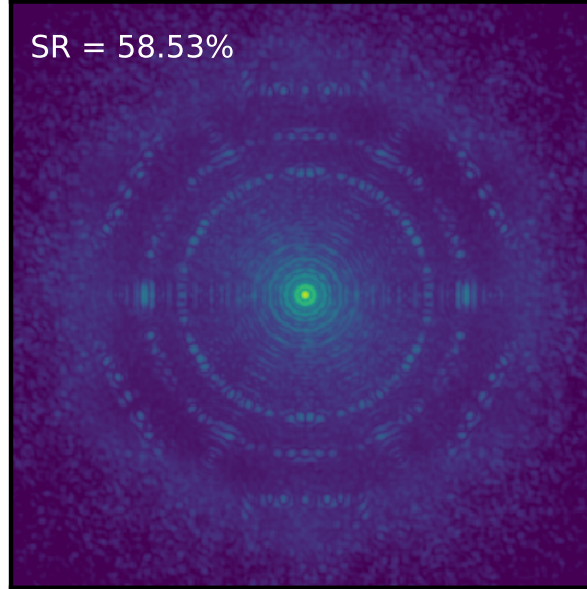


FIGURE 5.9: PSF longue pose obtenue durant une séquence de dithering de 4 secondes avec des amplitudes $A_i ||\psi_i|| = 50$ nm. L'échelle – logarithmique – de couleur couvre 5 décades en deçà du maximum de la PSF.

On note également qu'avec ces amplitudes, une perte sensible de SR est observée de 72% nominaux dans les conditions considérées – $r_0 = 13$ cm, $M_R = 0$ – à 58% pour la pose de 4 secondes à travers le dithering.

À travers cette section, j'ai présenté les méthodes que j'ai mises en place pour sélectionner des bons modes, qui perturbent peu le système pendant le dithering, et en particulier qui vérifient des critères de faible couplage non-linéaire. Il convient alors de se poser la question : est-il possible, en allant au-delà de l'approximation modale, de se débarrasser des effets de couplage induits par \mathbf{d}_\perp ? C'est ce que j'étudie dans la section suivante.

5.3.4 Compensation dense du gain optique

La question se pose de savoir s'il est possible d'effectuer une compensation du gain optique au delà de l'approximation diagonale qui a été proposée jusqu'à présent, et qui légitimait donc d'appliquer un multiplicateur scalaire à chaque mode. Je propose de construire une méthode de compensation au delà de cette hypothèse, dans l'objectif de réduire encore la composante du budget d'erreur pour les non-linéarités. Pour ce faire, je propose d'essayer d'appliquer l'équation A&A2019:6 :

$$\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}} = \mathbf{dPyr}_{\phi=0} \cdot \mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}}, \quad (5.8)$$

mais cette fois ci sans la restriction que $\mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}}$ soit une matrice diagonale. $\mathbf{\Lambda}_{\phi_{\text{Res}}}$ est alors dense, ce qui me fournit le nom donné à cette méthode : la compensation *dense* du gain optique.

Pour une classe de fronts d'onde p_0 , il s'agit donc maintenant de calculer le reconstruteur mis à jour en fonction des conditions turbulentes : \mathbf{Rec}_{p_0} . Je considère pour cela la matrice d'interaction moyenne sur la classe p_0 ; le reconstruteur s'exprime alors comme :

$$\mathbf{Rec}_{p_0} = \boldsymbol{\mu} \left[\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}, \phi_{\text{Res}} \in \text{classe } p_0 \right]^\dagger. \quad (5.9)$$

Il est attendu que cette méthode dense, qui incorpore naturellement l'effet de confusion entre les modes induit par le gain optique, aboutisse à une meilleure performance de bout-en-bout que la méthode modale. Bien que faire des simulations numériques avec cette méthode soit plus coûteux en temps de calcul que d'utiliser la méthode modale, je propose quelques résultats dans le dimensionnement ELT de [Deo et al. \(2019a\)](#). J'ai pour cela réduit l'analyse à un unique p_0 , sachant qu'on pourrait également appliquer à la méthode dense la technique d'interpolation (section [A&A2019:5.5](#)) et obtenir une matrice d'interaction qui couvre une plage d'estimées p_0^* variant à travers la base modale.

Analyse des composantes

Pour cette simulation, la matrice d'interaction moyenne

$$\boldsymbol{\mu} \left[\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}, \phi_{\text{Res}} \in \text{classe } p_0 \right] \quad (5.10)$$

a été obtenue à partir de 20 réalisations sur différents fronts d'onde résiduels. Je profite de ce calcul pour analyser la distribution statistique de ces 20 matrices d'interaction, à travers la stabilité de la composante non-diagonale de $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}}$. Cette quantité correspond au vecteur de confusion modale \mathbf{d}_\perp introduit dans mon analyse mathématique (section [A&A2019:2](#)). L'analyse statistique quantitative de ces termes de confusion est présentée sur la figure [5.10](#); j'y représente également les quantités $\boldsymbol{\mu} [\|\mathbf{d}\|]$ et $\boldsymbol{\mu} [\alpha_\parallel]$ utilisées pour le calcul des coefficients modaux. En plus, j'étudie l'amplitude de la confusion moyenne à travers la classe p_0 : $\|\boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}_\perp]\|$, et ses variations aléatoires en fonction de la réalisation du front d'onde :

$$\boldsymbol{\mu} [\|\mathbf{d}_\perp - \boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}_\perp]\|]. \quad (5.11)$$

On mesure donc que la composante non-diagonale \mathbf{d}_\perp est fortement dominée par ses variations aléatoires et non par le vecteur moyen, par un facteur 3 environ. L'amplitude relative de $\boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}_\perp]$ dans le vecteur reconstruit $\boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}]$ est maximale pour les modes d'ordre élevé, et plafonne à ce maximum à partir de la coupure liée à r_{Mod} . Pour ces modes, on atteint $\frac{\|\boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}_\perp]\|}{\|\boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}]\|} \approx 0.2$, et la composante orthogonale moyenne compte donc pour $0.2^2 = 4\%$ du mode reconstruit, comptée en intensité quadratique.

Avec ce résultat quantitatif, on peut inférer que le remplacement de la matrice de commande par $\boldsymbol{\mu} \left[\mathbf{dPyr}_{\phi_{\text{Res}}} \right]^\dagger$ revient essentiellement à une compensation modale, où les coefficients utilisés sont les $\alpha_\parallel^{-1}(\phi_i; p_0)$ à la place des G_{opt} . Cette méthode de

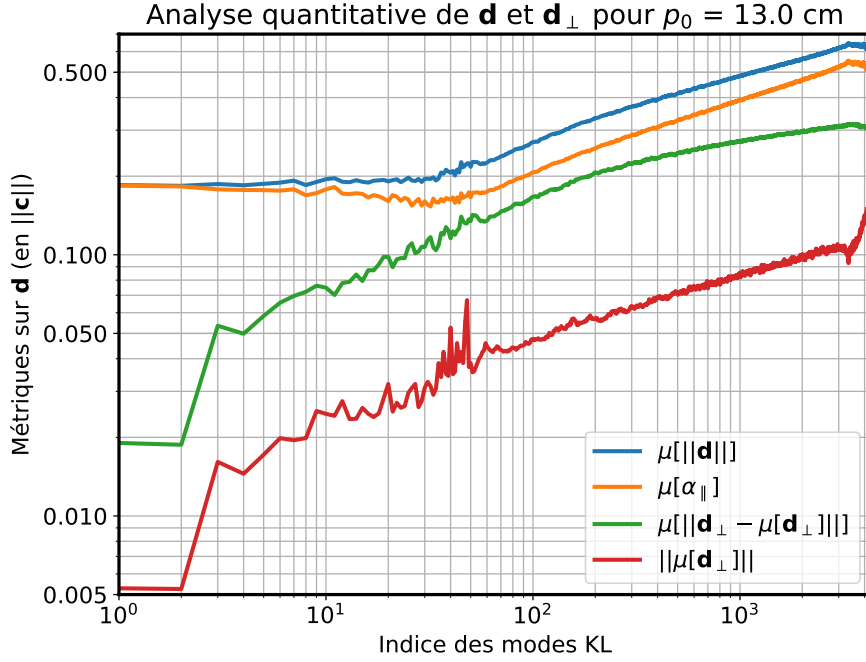


FIGURE 5.10: Analyse statistique du comportement du terme de confusion $\mathbf{d}_\perp(\phi_i)$, comparé à la reconstruction totale moyenne $\mu[||\mathbf{d}||]$ et sa partie colinéaire normalisée $\mu[\alpha_\parallel]$ à travers la base \mathcal{KL}^{DM} , à partir de mesures de matrices d'interactions sur 20 fronts d'onde de classe $p_0 = 13$ cm. La modulation utilisée est de $4 \frac{\lambda}{D}$.

compensation est d'ailleurs la première que j'avais proposée, et qui est mise en avant dans [Deo et al. \(2018b\)](#).

Si enfin l'on rajoutait à la matrice d'interaction moyenne une atténuation, modale, optimale pour compenser l'amplitude des variations aléatoires de \mathbf{d} , on aboutirait alors à une compensation modale avec les gains optimaux G_{opt} , pour lesquels l'atténuation compense précisément les variations stochastiques de α_\perp . Cette analyse finit de conforter l'idée que la compensation modale des gains telle que je l'ai présentée, si elle n'est pas l'optimum analytique dans le cadre de la compensation linéaire de la dérivée du PWFS selon les conditions, en est extrêmement proche.

Approximations et atténuation

Si on part d'une compensation dense, on peut travailler sur les approximations successives que j'ai mises en valeur à travers l'étude de \mathbf{d}_\perp ci-dessus. Je multiplie donc, pour chaque mode, par un coefficient d'atténuation optimal au sens des moindres carrés pour compenser les variations aléatoires de \mathbf{d}_\perp :

$$\text{Attn.}(\phi_i) = \frac{||\mathbf{d}||^2}{||\mathbf{d}||^2 + \mu[||\mathbf{d} - \mu[\mathbf{d}]||^2]}. \quad (5.12)$$

On réduit cette formule en utilisant plusieurs hypothèses : (1) la composante aléatoire est essentiellement portée par \mathbf{d}_\perp et (2) que $\|\mathbf{d}\| \approx \|\mathbf{d}_\parallel\|$ au premier ordre. Ce coefficient d'atténuation s'exprime alors comme :

$$\begin{aligned} \text{Attn.}(\phi_i) &= \frac{\|\mathbf{d}_\parallel\|^2}{\|\mathbf{d}_\parallel\|^2 + \boldsymbol{\mu} [\|\mathbf{d}_\perp - \boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}_\perp]\|^2]} \\ &= \frac{\alpha_\parallel^2}{\alpha_\parallel^2 + \alpha_\perp^2} \\ &= \alpha_\parallel(\phi_i) \times G_{\text{opt}}(\phi_i). \end{aligned} \tag{5.13}$$

On aboutit ainsi à la formule proposée dans l'article [Deo et al. \(2019a\)](#), dans lequel α_\perp est bien calculé comme $\boldsymbol{\mu} [\|\mathbf{d}_\perp\|]$ et non $\|\boldsymbol{\mu} [\mathbf{d}_\perp]\|$, et l'on retrouve les coefficients G_{opt} pour une compensation modale optimalement atténuée des fluctuations de \mathbf{d}_\perp .

Performance de bout-en-bout

Pour conclure sur la méthode dense, maintenant que j'ai présenté les approximations qui la lient à la méthode modale, il convient de mesurer la performance effectivement obtenue en implémentant une compensation dense dans nos simulations d'OA.

La performance de bout-en-bout pour une simulation à $r_0 = 13$ cm stationnaire, en fonction du gain d'intégrateur, est présentée sur la figure 5.11, superposée à celle obtenue avec OGC modaux telle que montrée sur la figure [A&A2019:9](#).

La performance maximale atteinte est identique, à 72% de SR pour $M_R = 0$, et on constate une augmentation du SR de 31 à 36% pour le cas $M_R = 16$. Les courbes sont décalées vers la gauche avec désormais un g_{max} de 0.30-0.35. L'amélioration à $M_R = 16$ n'est néanmoins pas nécessairement à mettre au compte d'une réduction des non-linéarités. En effet, j'ai fait intervenir deux mises à l'échelle modales entre les deux simulations :

- La fonction de pondération (équation [A&A2019:18](#)) utilisée pour les OGC modaux, qui atténue les gains des bas ordres et évite de possibles instabilités de ces modes – effet discuté section [A&A2019:5.6](#) et appendice [A&A2019:A](#).
- L'atténuation pour obtenir les G_{opt} (méthode modale) à partir des α_\parallel^{-1} (presque équivalents à la méthode dense).

Il est donc à considérer, à cause de ces multiplicateurs, que notre simulation avec la compensation dense profite de gains favorables pour l'optimisation du SNR en fonction du niveau de bruit. Comme nous l'avons déjà précisé dans [Deo et al. \(2019a\)](#), nous n'avons, à l'heure de l'écriture de l'article, encore mis en œuvre aucune forme d'optimisation du gain en fonction du SNR des modes dans notre compensation modale automatique.

Ce dernier point nous amène précisément à conclure sur la méthode de compensation dense : bien que possible à implémenter, et fonctionnelle, l'apport en terme de performance n'est pas clairement établi à ce stade. Les bénéfices et limites sont donc

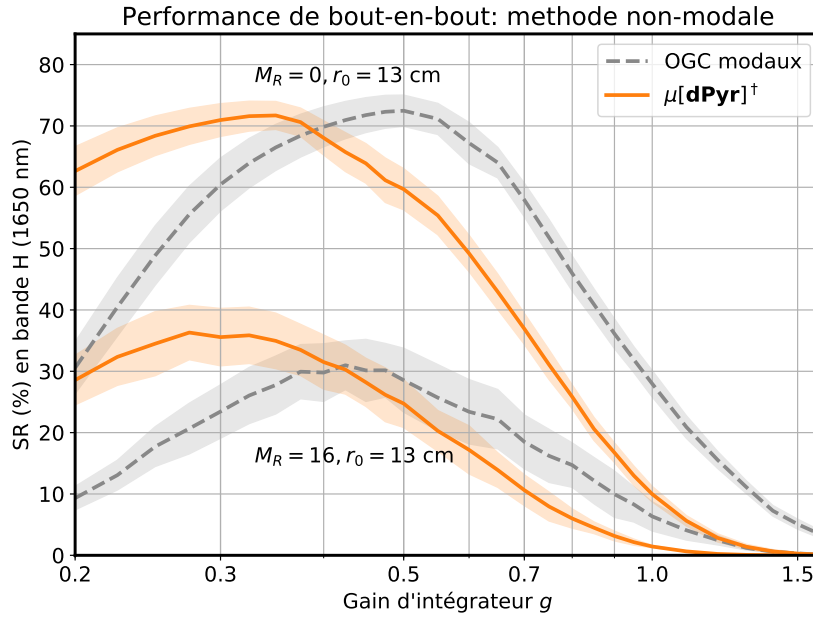


FIGURE 5.11: Performance obtenue en fonction du gain d'intégrateur pour la méthode de compensation dense avec la matrice d'interaction moyenne sur la classe p_0 ; cette performance est comparée avec celle obtenue avec les OGC modaux automatiques et pondérés.

identiques à ceux de la méthode modale. En vertu de l'analyse menée sur la distribution statistique de la non-linéarité, la performance de bout-en-bout est finalement conforme à celle attendue. Pour conclure, il convient de dire que ma stratégie de développement s'oriente vers une optimisation des G_{opt} comme une fonction combinée de la non-linéarité et du niveau de bruit, plutôt que vers des méthodes non-modales.

5.4 Quelques résultats pour la pyramide à trois faces

5.4.1 Préliminaires

J'ai déjà évoqué, aux sections 2.4.2, 2.4.4 et 4.4.2, les ouvertures possibles vers d'autres types d'ASO de la famille des pyramides.

Parmi ceux-ci, la pyramide à trois faces (3PWFS) fait l'objet d'un intérêt particulier : de la théorisation de l'ASO (Fauvarque et al., 2016b) et sa mise en pratique sur banc (Janin-Potiron et al., 2019); jusqu'aux mises en application pour l'astronomie (van Kooten et al., 2016; Codona et al., 2018; Schatz et al., 2017; Janin-Potiron et al., 2019) ou l'ophtamologie (Alvarez Diez, 2006). Il est en effet supposé que le 3PWFS présente plusieurs avantages par rapport à sa contrepartie à 4 faces, que je noterai dans cette section 4PWFS.

Tout d'abord, il faut noter un avantage opto-mécanique; comme je l'ai étudié au chapitre 4, la fabrication d'un prisme de 4PWFS avec un sommet d'excellente qua-

lité est un problème non trivial. En revanche, l’usinage de l’intersection de 3 plans seulement en un point est de manière générale garantie. De ce fait, fabriquer des 3PWFS avec des spécifications conformes est une tâche bien plus facile; les scientifiques peuvent donc espérer des pièces optiques de meilleure qualité à des coûts moindres.

Par ailleurs, une réduction du budget d’erreur associé au bruit de lecture est attendue par rapport à un 4PWFS équivalent. La surface utile à lire sur le CCD est réduite à trois quadrants, soit une réduction de $4n_{\text{subap}}$ à $3n_{\text{subap}}$ pixels lus. À capteur identique, une réduction de la variance du bruit de lecture de 25% est donc attendue. En pleine époque de design et mise en œuvre de diverses OA à très hauts ordres – SCAO ou OA multi-ASO sur les ELT, XAO sur les télescopes de la classe des 10 m – ce seul argument suffit à porter l’attention sur le 3PWFS, offrant un gain immédiat en sensibilité, et donc en magnitude limite et couverture de ciel.

Pour ces raisons qui font converger l’attention sur le 3PWFS, je me suis moi-même penché sur cet ASO, mettant à profit les compétences, les détails d’implémentation, et de manière générale l’expérience acquise à travers l’étude du 4PWFS.

J’ai en effet présenté, à travers les chapitres précédent, un certain nombre d’éléments permettant de lever certaines limites techniques à la mise en œuvre d’un 3PWFS : à travers le chapitre 4, j’ai pu démontrer l’équivalence du contrôle à travers les cartes de pentes ou l’ensemble des pixels valides. Mieux encore, j’ai pu démontrer l’insensibilité au mésalignement statique sur le CCD lorsque l’ensemble des pixels valides sont utilisés.

Dans le cadre d’un 3PWFS, en profitant de la relaxation des spécifications d’usinage, ces apports sont deux conditions nécessaires : l’usinage de trois plan réfractant dans des direction à 120 deg. ne garantit pas un positionnement relativement à la matrice du CCD. La reconstruction des cartes de pentes $S_x[i], S[y]_i$ est théoriquement possible, mais il est difficile d’envisager sur un 3PWFS qu’elles vérifient les mêmes propriétés que sur un 4PWFS; plus encore, nous perdons sur le 3PWFS la similarité formelle² avec les SH quad-cell. Le contrôle avec tous les pixels, $ABCD$ (4PWFS) ou ABC (3PWFS), finit de lever la barrière des cartes de pentes et nous ramène dans le formalisme plus vaste des ASO à filtrage de Fourier.

Mise en œuvre des simulations

L’implémentation dans COMPASS, ou tout autre simulateur de PWFS basé sur des successions de transformées de Fourier (équation 2.35), est relativement directe. Il convient de substituer le masque d’OPD au plan focal par celui représentant un 3PWFS; je montre sur la figure 5.12 ce masque ainsi qu’un exemple d’image CCD obtenue en boucle ouverte, pour un 3PWFS modulé à $4 \frac{\lambda}{D}$. Dans l’implémentation que j’ai réalisée dans COMPASS, il est possible de modifier arbitrairement l’orientation des dioptries pour positionner les quadrants aux positions désirées. Par ce biais, le

2. Ô combien pratique pourtant.

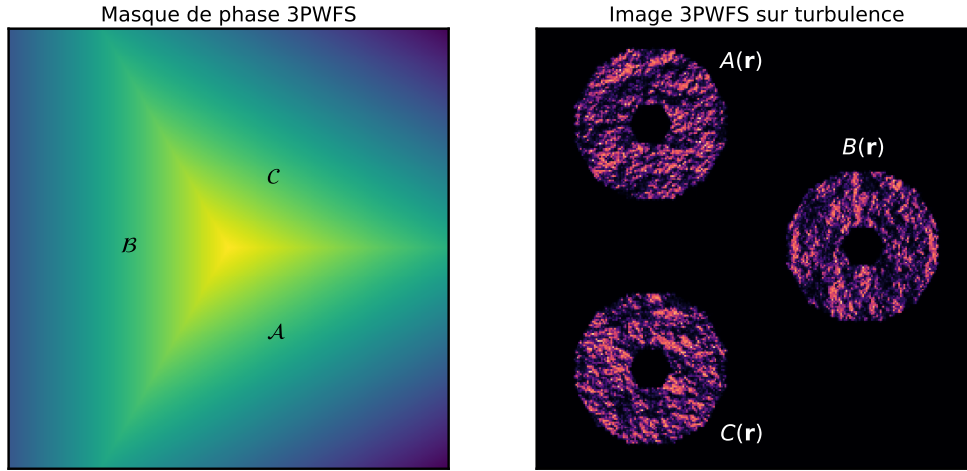


FIGURE 5.12: Implémentation du 3PWFS dans COMPASS : masque de phase au plan focal (gauche) et image modulée générée en boucle ouverte (droite). Le 3PWFS est exploité avec une modulation de $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$; l'OA est dimensionnée pour l'ELT ; les paramètres sont identiques à ceux de [Deo et al. \(2019a\)](#).

3PWFS peut être simulé soit avec des dioptries orientés à exactement 120 deg. (utilisé dans cette section), soit avec des quadrants dont les pixels se superposent exactement.

Les simulations numériques présentées dans cette section ambitionnent de proposer des valeurs quantitatives quant à la performance qu'il est possible d'obtenir avec un 3PWFS, pour un dimensionnement ELT. L'ensemble des simulations est effectué sur un dimensionnement identique à celui utilisé dans [Deo et al. \(2019a\)](#) (voir table [A&A2019:1](#)) : sur l'ELT, muni d'un PWFS à $\lambda=658$ nm et de résolution 92×92 sous-ouvertures, contrôlant les miroirs M4 et M5 (4 309 modes) de l'ELT, à travers un RTC à 500 Hz avec une latence de 2 trames.

Je profite justement de l'expérience acquise et des méthodes présentées jusqu'à présent dans ce manuscrit, en appliquant au 3PWFS la méthode de dithering présentée dans ce chapitre. J'applique donc aux deux ASO un procédé similaire, correspondant en l'état à ce que je suppose être une méthode de contrôle robuste à l'ensemble des conditions testées ; et la méthode est supposée strictement indépendante, dans son exécution, du nombre de faces du PWFS mis en œuvre.

J'étudierai donc, dans la section 5.4.2, la structure des abaques de sensibilité et de gain optimal pour l'application de la compensation du gain optique appliquée au 3PWFS ; pour ensuite mettre en œuvre, section 5.4.3, des simulations end-to-end dans diverses conditions d'illumination et de seeing. Enfin, je présenterai dans la section 5.4.4 une étude de la non-linéarité, pour tenter d'expliquer les différences de performance entre 3PWFS et 4PWFS.

5.4.2 Dithering pour le 3PWFS : étude des abaques

Afin de pouvoir appliquer la méthode modale de compensation du gain optique que j’ai développée (section A&A2019:5) pour le 4PWFS, et donc pouvoir de la même manière obtenir la meilleure performance possible du 3PWFS, il me faut d’abord calculer les deux abaques utiles à l’interpolation des OGC $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$.

La base modale \mathcal{KL}^{DM} est identique à celle utilisée pour le 4PWFS, de même que la définition des PSD de fronts d’onde dans les classes p_0 . Je montre les valeurs numériques de réduction de sensibilité $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ et les gains correspondants $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$ sur la figure 5.13, construite à l’identique des figures A&A2019:3-4.

Structurellement et quantitativement, ces abaques sont extrêmement similaires à celles obtenues pour le 4PWFS. La réduction de sensibilité $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ à p_0 donné est constante sur les 20 premiers modes, présente un léger creux vers $i = 30$, correspondant aux modes portant les fréquences spatiales associées à $r_{\text{Mod}} = 4\frac{\lambda}{D}$; au delà, $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$ croît comme une puissance de i , jusqu’à la queue de distribution liée aux modes gaufres au delà de $i = 3000$.

À l’identique du 4PWFS, les gains compensatoires G_{opt} suivent généralement la tendance de $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)^{-1}$, le coude liée au rayon de modulation étant moins marqué, particulièrement aux faibles p_0 . Ceci est encore une fois du à l’atténuation déterminée par la composante orthogonale \mathbf{d}_{\perp} , dont l’amplitude relative augmente dans les moins bonnes conditions de seeing.

Numériquement, on retrouve essentiellement les valeurs trouvées pour le 4PWFS : des valeurs de $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$ à $p_0 = 7.4 - 7.7$ cm de 20 aux bas ordres décroissant jusqu’à 2.0-2.5 pour les modes d’ordre élevé. À $p_0 = 12.9 - 13.8$ cm, proche des conditions de seeing médianes, on mesure pour les deux ASO un gain compensatoire proche de 5 pour les bas ordres, décroissant jusqu’à 1.5 en fin de base modale.

Finalement, on a une correspondance numérique très forte entre les abaques du 4PWFS et celles du 3PWFS, même si les fluctuations des courbes – liées aux finesses précises du couplage de l’ASO avec chaque mode – ne se correspondent pas particulièrement.

5.4.3 Simulations end-to-end

Le travail numérique préliminaire à la mise en œuvre du dithering ayant été fait, nous pouvons alors commencer à appliquer effectivement le dithering à travers des simulations end-to-end. Je présente dans cette section des résultats pour le protocole expérimental détaillé dans la section A&A2019:6, appliqué au 3PWFS.

J’étudie, pour différentes conditions de seeing, la performance en terme de SR LE en bande H, en explorant les valeurs possibles du gain de boucle, ceci afin d’éliminer celui-ci comme facteur discriminant de la performance finale. Pour chaque condition de seeing et valeur de gain de boucle, la boucle est fermée puis la “séquence de bootstrap” (section A&A2019:6.1) est appliquée. Ceci permet en l’espace de 3.9 sec. de mesurer in situ, d’interpoler et de mettre à jour les gains, et ce à trois reprises successives afin de

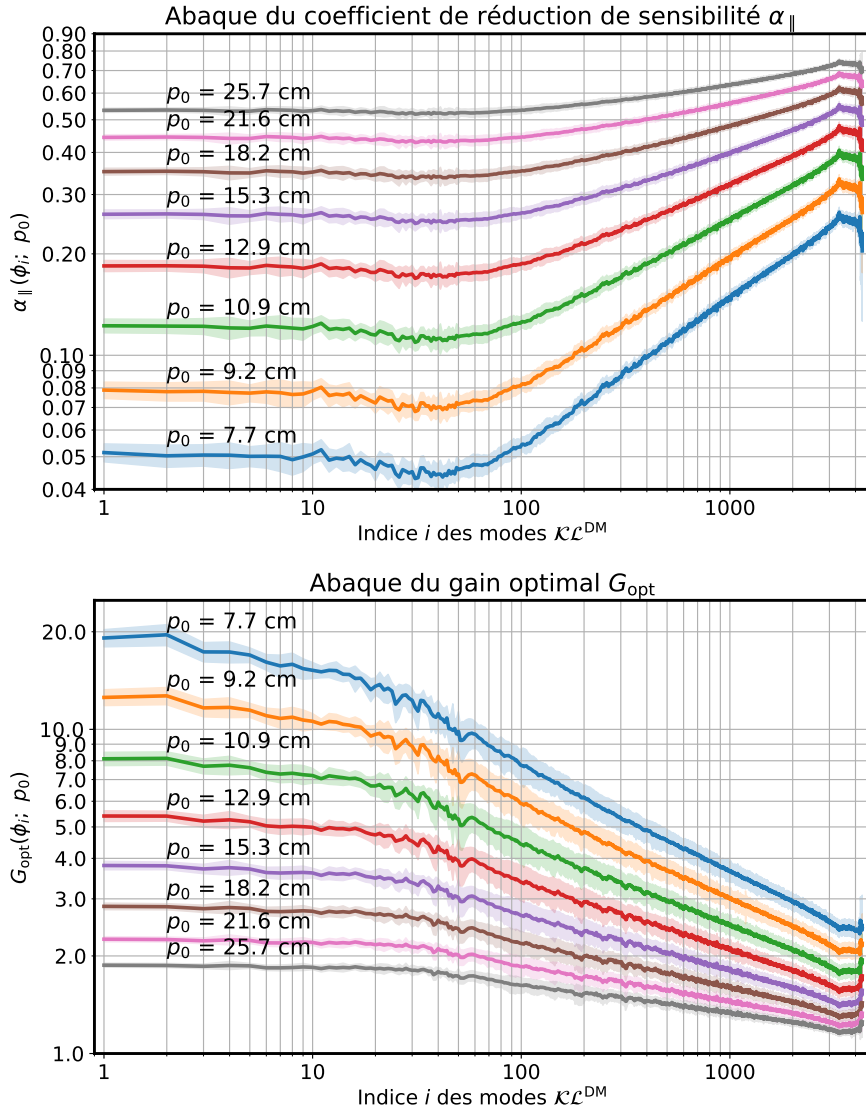


FIGURE 5.13: Haut : abaque du coefficient de sensibilité $\alpha_{\parallel}(\phi_i; p_0)$; et bas : du gain optimal $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$ mesurées pour un 3PWFS à $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$. Les lignes indiquent les moyennes, les aires colorées ± 2 écarts-types, mesurés sur 15 réalisations de fronts d'onde de chaque classe p_0 .

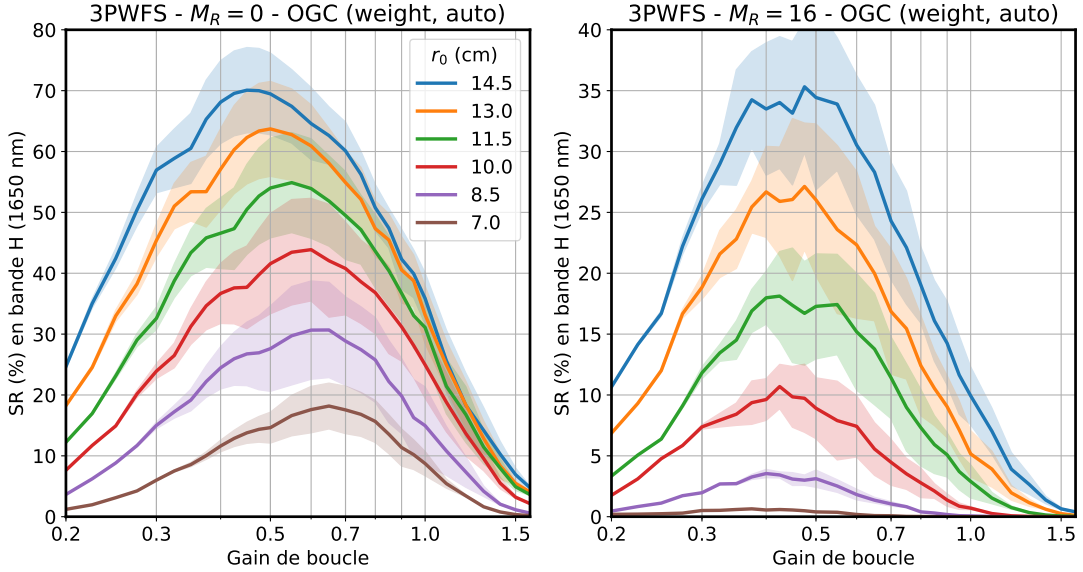


FIGURE 5.14: Performance de bout-en-bout du 3PWFS pour des étoiles guides $M_R = 0$ (gauche) et $M_R = 16$ (droite) et des conditions turbulentes stationnaires, en fonction du gain scalaire de boucle. On utilise des OGC modaux, obtenus par dithering et pondérés par l'équation A&A2019:18. Aires colorés : ± 1 écart-type du SR courte pose.

converger rapidement sur les valeurs de gains appropriées aux conditions courantes, c'est à dire à la distribution effective du résidu dans la boucle d'OA.

J'ai effectué ces simulations pour deux étoiles guides, de magnitudes $M_R = 0$ et $M_R = 16$, et pour des r_0 de 7.0 à 14.5 cm. Ces résultats – que je montre sur la figure 5.14 – sont directement comparables à ceux présentés sur les figures A&A2019:10-11 (gauches). Je n'inclus pas ici la performance mesurée sans l'application des OGC, qui comme pour le 4PWFS : (1) donne un SR systématiquement inférieur et (2) induit le même problème de dérive du gain d'intégrateur vers les grandes valeurs alors que la sensibilité du PWFS chute aux petits r_0 (voir figures A&A2019:10-11 (droites)).

Le gain g_{\max} donnant la meilleure performance est très similaire à celui mesuré pour le 4PWFS ; à $M_R = 0$, il augmente de 0.45 pour $r_0 = 14.5$ cm jusqu'à 0.65 pour $r_0 = 7.0$ cm ; à $M_R = 16$, g_{\max} est essentiellement stable à 0.45-0.5.

Deux observations sont néanmoins à faire quant à la tendance des mesures de SR en fonction du gain de boucle. Par rapport au 4PWFS ; la performance à $M_R = 0$ présente visiblement deux bosses avec les variations du gain de boucle ; et à $M_R = 16$, la performance maximale pour le 3PWFS est plus instable que pour le 4PWFS. Alors que j'écris ces lignes, je n'explique pas encore bien l'origine de ces deux effets ; je note néanmoins que la courbe "à deux bosses" semble évoquer une mauvaise homogénéisation de la dynamique des modes à travers la base modale, et ce malgré l'application des OGC. En effet, le léger creux entre les deux bosses évoque les prémisses du *gap effect* que j'ai étudié dans l'appendice A&A2019:A, mais ici dans une proportion bien

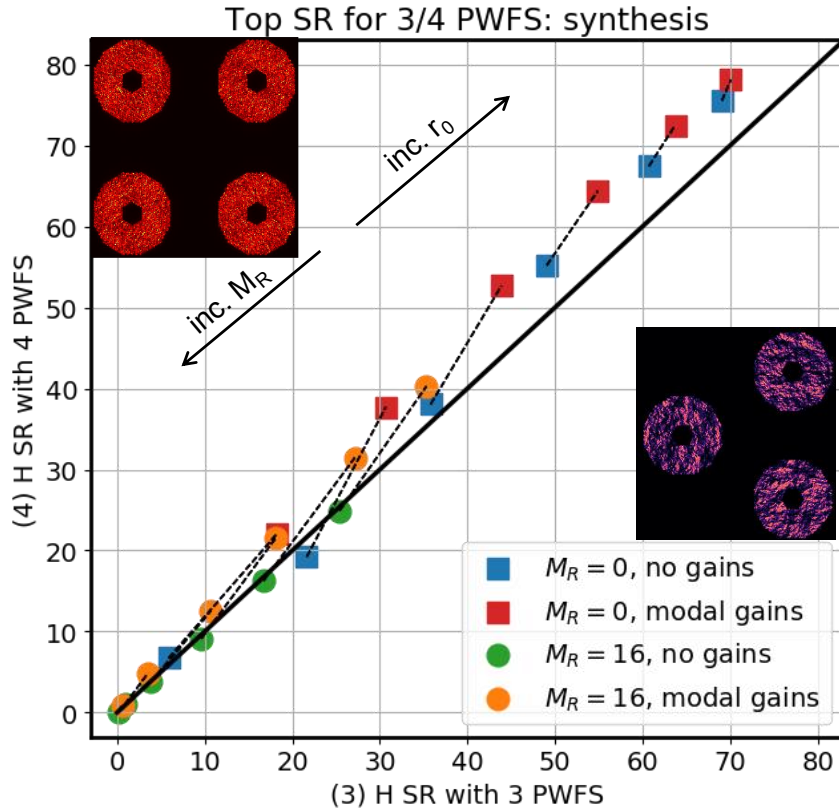


FIGURE 5.15: Synthèse des simulations end-to-end effectuées, pour des paramètres et méthodologies identiques, avec les 3PWFS et 4PWFS. Abscisses et ordonnées : SR LE pour des simulations identiques (voir légende) sur les deux ASO. Lignes pointillées : correspondances des simulations sans compensation modale et avec OGC. Ligne continue : première bissectrice.

moins critique.

Pour mieux comparer la performance des deux ASO dans des conditions identiques, je synthétise l'ensemble des simulations end-to-end effectuées sur la figure 5.15. J'y représente les SR mesurés pour les 2 ASO, à $M_R = 0$ et $M_R = 16$, les 6 valeurs de r_0 entre 7.0 et 14.5 cm, et avec et sans l'utilisation de la compensation modale par dithering. Les simulations avec et sans application des OGC pour les mêmes magnitude et seeing sont appariées par les traits pointillés.

Cette représentation permet de mettre en valeur les principales conclusions, tant sur l'application du dithering au 3PWFS, que sur la comparaison des performances des ASO :

- L'application de la compensation modale du gain optique permet d'améliorer la performance obtenue, pour les deux ASO, dans l'ensemble des conditions simulées.
- La performance obtenue avec le 4PWFS est supérieure ou égale à celle obtenue

avec le 3PWFS pour l'ensemble des points de mesure (sauf un : $M_R = 0$, $r_0 = 8.5$ cm, sans application d'OGC).

- À $M_R = 16$, la performance sans compensation du gain optique est identique pour les deux ASO. Néanmoins, le 4PWFS bénéficie plus de la compensation modale que le 3PWFS, et offre donc une performance compensée supérieure.

Dans le cadre que j'ai jusque alors proposé, le 4PWFS s'impose donc comme un ASO plus performant pour les conditions testées ; conditions qui sont basées sur les besoins et spécifications des SCAO dans le visible sur les ELT.

Mais avant de sauter aux conclusions, il convient de dire que l'hypothèse que je fais dans cette section n'est pas forcément entièrement valide : l'ensemble des méthodologies optimisées sur un 4PWFS, même sans besoin de référer explicitement au nombre de faces, ne s'appliquent pas nécessairement de manière suffisante et transparente au 3PWFS.

Les résultats sur la figure 5.15 semblent en effet indiquer que le 3PWFS présente un désavantage en terme de performance, qui n'est rattrapé que pour de très faibles étoiles guides ($M_R = 16$ donne 0.28 ph.px⁻¹.trame⁻¹). Pour les étoiles faibles, l'avantage de sensibilité du 3PWFS permet de rattraper l'écart de performance. Je propose deux facteurs pour expliquer cet handicap du 3PWFS : soit j'ai omis une étape nécessaire de traitement des signaux sur le 3PWFS, car une telle étape n'est pas pertinente pour un 4PWFS, et est donc à ce jour méconnue ou négligée ; soit le 3PWFS présente intrinsèquement un budget d'erreur plus important sur un autre poste que le bruit, typiquement sur les non-linéarités. C'est ce que je propose d'étudier dans la section suivante.

5.4.4 Analyse des non-linéarités

Non-linéarité de type gain optique

J'ai étudié en détail les limites de la compensation modale pour le 4PWFS, à travers une étude de la composante orthogonale \mathbf{d}_\perp de la non-linéarité induite par le gain optique (voir sections A&A2019:4.2 et 5.3.4). Il s'agit de la forme de non-linéarité que j'ai le plus étudié jusqu'à présent, mesurée comme la variation non-modale de la réponse différentielle \mathbf{dPyr} de l'ASO en fonction du point de fonctionnement ϕ_{Res} .

Je vérifie ici ces mêmes caractéristiques pour le 3PWFS, à travers l'étude des matrices d'interaction sur résidu turbulent mesurées pour le calcul des abaques. À travers 15 matrices mesurées pour des fronts d'onde de classe $p_0 = 12.9$ cm, je représente sur la figure 5.16 les normes moyennes de la reconstruction effective de chaque mode $\mu [||\mathbf{d}||]$, ainsi que les normes de chacune de ses deux composantes : modale $\mu [||\mathbf{d}_\parallel||]$ et orthogonale $\mu [||\mathbf{d}_\perp||]$. Ces résultats sont présentés à l'identique de la figure 5.10 ; à l'exception que cette fois-ci, je n'effectue pas la distinction entre la composante moyenne de \mathbf{d}_\perp et ses variations stochastiques. Comme dans le cas des abaques pour $\alpha_\parallel(\phi_i; p_0)$ et $G_{\text{opt}}(\phi_i; p_0)$, les résultats mesurés pour le 3PWFS sont extrêmement similaires, structurellement et numériquement, à ceux mesurés pour le 4PWFS.

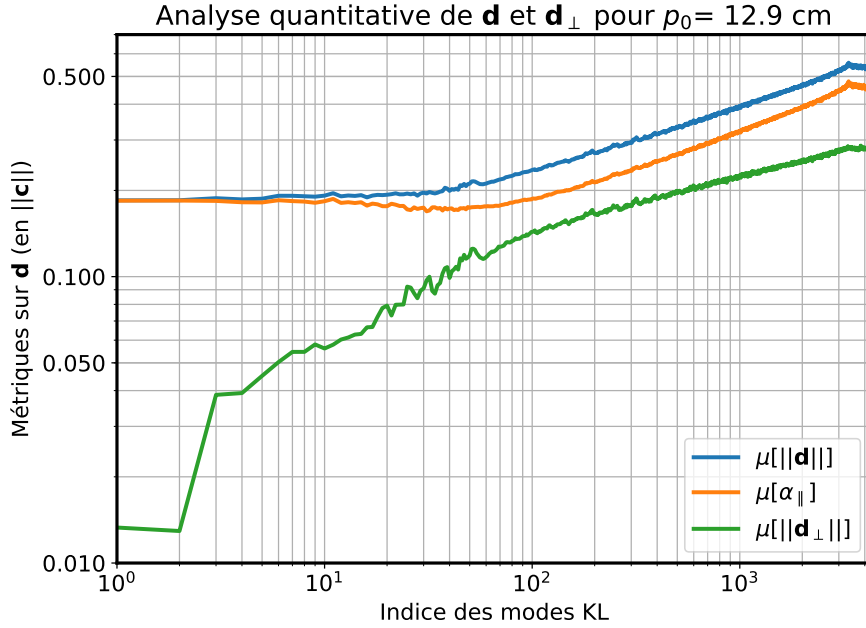


FIGURE 5.16: Analyse statistique de la reconstruction \mathbf{d} en présence du gain optique pour le 3PWFS, décomposé en ses composantes colinéaire \mathbf{d}_\parallel et orthogonale \mathbf{d}_\perp . Les mesures sont effectuées sur la base \mathcal{KL}^{DM} ; la modulation est de $4 \frac{\lambda}{D}$; les moyennes des normes sont prises sur 15 matrices d'interactions sur des fronts d'ondes mutuellement décorrélés de classe p_0 .

Les non-linéarités non-modales induites par le gain optique nous renvoient donc à un comportement similaire des 3PWFS et 4PWFS, et ne peuvent expliquer les variations de performance end-to-end observées. Par ailleurs, la conformité de ces mesures entre les 3PWFS et 4PWFS ne fait que conforter l'idée que l'utilisation de la compensation modale est toute aussi appropriée pour le 3PWFS que pour le 4PWFS, conclusion renforcée par les augmentations de performances substantielles relevées, représentées sur la figure 5.15.

Non-linéarité en limite de dynamique

Je continue donc la recherche du facteur discriminant entre les deux pyramides. Je reviens ici sur une autre cause (ou interprétation) de la non-linéarité de l'ASO : celle causée par la saturation de la mesure du gradient de phase lorsque celui-ci dépasse la valeur critique $\frac{2\pi}{\lambda} r_{\text{Mod}}$. Nous interprétons dans ce cas la non-linéarité comme le fait d'être loin du point de fonctionnement présumé. Classiquement, nous pouvons étudier ces régimes en regardant la réponse de l'ASO à des tip-tilt d'amplitude dépassant le régime linéaire. Les conclusions pourront alors être appliquées, soit pour les tip-tilt sur l'ensemble de la pupille, soit en imaginant se restreindre à du tip-tilt sur une unique sous-ouverture, décomposant implicitement le front d'onde en une fonction affine par morceaux.

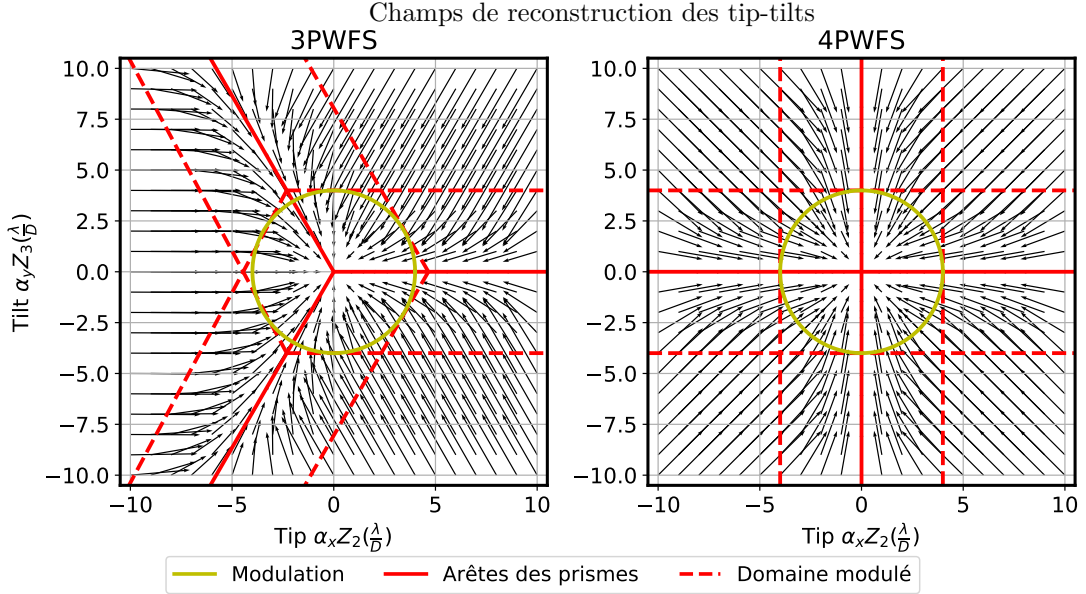


FIGURE 5.17: Champ de reconstruction du tip-tilt pour les 3PWFS (gauche) et 4PWFS (droite) autour de $\phi_{\text{Res}} = 0$. Flèches : opposé du vecteur de tip-tilt reconstruit : $-\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\alpha_x Z_2 + \alpha_y Z_3)$, mis à l'échelle par un facteur $1/3$. Représenté à l'échelle, l'ensemble des flèches dont le pied est à l'intérieur du rayon de modulation convergeraient sur le point $\alpha_{x,y} = 0$; c'est à dire que la mesure est exacte à l'intérieur de ce domaine.

Je calcule d'abord la reconstruction des tip-tilt mesurés par les deux ASO, en fonction des tip-tilts injectés, de -10 à $+10 \frac{\lambda}{D}$; les grandeurs d'intérêt sont les coefficients des tip-tilts dans la reconstruction :

$$\begin{aligned}\alpha_x^* &= Z_2 \otimes [\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\alpha_x Z_2 + \alpha_y Z_3)] \\ \alpha_y^* &= Z_3 \otimes [\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\alpha_x Z_2 + \alpha_y Z_3)],\end{aligned}\quad (5.14)$$

\otimes étant le produit scalaire dans l'espace des phases. Je représente sur la figure 5.17 le champ de vecteur $(-\alpha_x^*, -\alpha_y^*)$, qui représente donc, pour les deux PWFS, le mouvement que le RTC ordonne au miroir tip-tilt pour compenser le déplacement perçu.

Ces résultats sont bien connus pour le 4PWFS. En revanche, un examen visuel pour le 3PWFS met en lumière quelques éléments surprenants : aux points plus loin d'une arête que r_{Mod} , la reconstruction se fait toujours dans la direction de l'arête opposée. Pour les régions du plan situées loin des arêtes, cette direction correspond à la reconstruction idéale, vers le zéro. En revanche, pour les points situés loin du centre mais à exactement r_{Mod} d'une arête (sur les lignes pointillées sur la figure 5.17) – comme par exemple les deux coins $\alpha = [-10, -10]$ et $[-10, 10] \frac{\lambda}{D}$ –, la direction de reconstruction effective semble peu naturelle. L'angle d'erreur entre la reconstruction proposée par rapport au tip-tilt montré à l'ASO tend, pour ces domaines, vers 60 deg. alors que l'on s'éloigne du centre du plan focal. Pour un 4PWFS, cet angle est en

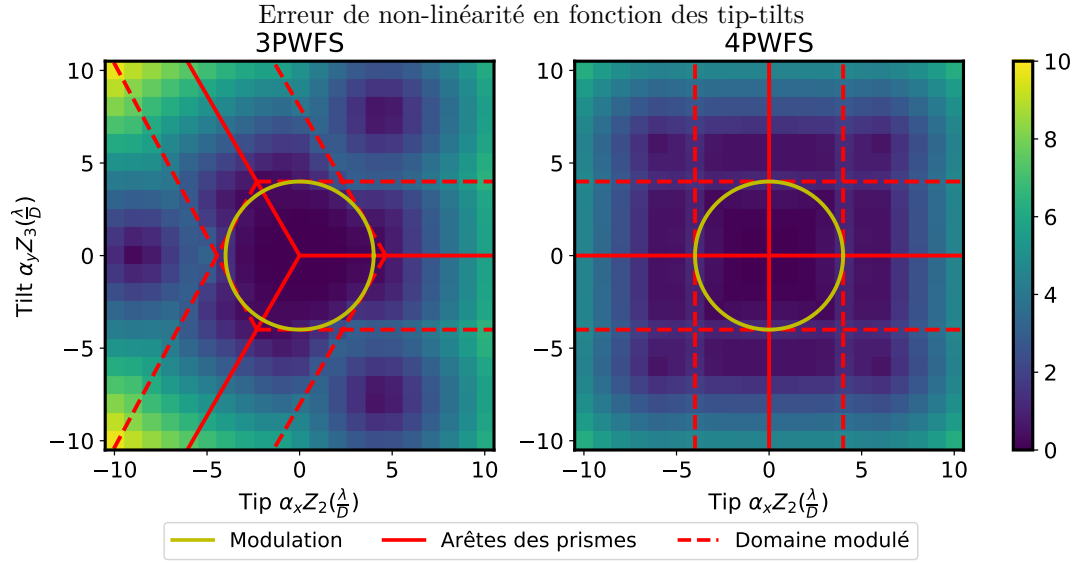


FIGURE 5.18: Erreur de non-linéarité $\left[(\alpha_x^* - \alpha_x)^2 + (\alpha_y^* - \alpha_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ en fonction des tip-tilt montrés au 3PWFS (gauche) et au 4PWFS (droite). Échelle de couleur en unités de $\frac{\lambda}{D}$.

revanche limité à 45 deg.

Je calcule alors, en fonction des tip-tilt montrés, l'erreur de non-linéarité commise par l'ASO, calculée comme :

$$\left[(\alpha_x^* - \alpha_x)^2 + (\alpha_y^* - \alpha_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.15)$$

que je représente sur la figure 5.18.

On vérifie, dans la suite de nos observations sur la figure 5.17, une augmentation de l'erreur de reconstruction dans le domaine considéré $|\alpha_{x,y}| < 10 \frac{\lambda}{D}$, en particulier en s'éloignant le long des arêtes du 3PWFS.

Une erreur de reconstruction plus importante implique, par suite, qu'il faut un nombre d'itérations plus grand pour faire converger l'OA à partir d'une aberration statique donnée. En utilisant l'OA sur la turbulence, cette effet de retard se couple naturellement à l'erreur temporelle. On pourrait alors envisager de définir une latence effective, qui couple la latence du système aux digressions causées par la non-linéarité de l'ASO, et qui serait in fine plus importante pour le 3PWFS que pour le 4PWFS.

5.4.5 Conclusion

J'ai donc tenté d'esquisser, à travers la section 5.4.4, quelques explications pour caractériser la différence de performance entre les 3PWFS et 4PWFS, après avoir confirmé que l'approche de la compensation du gain optique par l'approximation modale semble tout aussi appropriée aux deux ASO.

Bien que la moindre performance du 3PWFS ne constitue pas en soi une démonstration scientifique, et peut rester liée aux limites et spécificités des méthodes mises en œuvre, j’espère avoir fourni ici un faisceau d’éléments quant à (1) la possibilité technique d’obtenir des performances SCAO satisfaisantes avec un 3PWFS ; et (2) les limitations d’un tel senseur comparativement à la pyramide classique. En particulier, je mets en lumière que la performance généralement moins bonne du 3PWFS par rapport au 4PWFS peut être mise au compte d’un budget d’erreur de non-linéarité accru, à peine compensé au voisinage de la magnitude limite par la réduction du budget d’erreur de bruit.

Il faut noter que ce rattrapage, du à la meilleure sensibilité au bruit du 3PWFS, est en réalité limité au seul RON. Il est possible – bien qu’inutile pour les simulations – d’obtenir à partir de raisonnements géométriques l’expression analytique du gradient de phase en fonction de l’illumination des quadrants $A(\mathbf{r})$, $B(\mathbf{r})$ et $C(\mathbf{r})$, et par suite d’obtenir les sensibilités différenciées aux bruits de photons et de lecture. La sensibilité au bruit de photon est identique pour les 3PWFS et 4PWFS au premier ordre, et seul le budget d’erreur du RON est réduit d’un facteur $\frac{3}{4}$. Or, avec l’émergence des détecteurs à très faible bruit ($0.1-0.3 e^-$), le bruit de photons est le contributeur dominant, même dans les régimes de très faible flux. La possibilité d’utiliser des détecteurs de grande qualité vient donc en fait atténuer le possible avantage au bruit du 3PWFS sur le 4PWFS ; les performances mesurées à faible flux pourraient être plus contrastées sur un système équipé d’un détecteur dont le RON excède 1 à $2 e^-$.

Enfin, je dirai qu’on raisonne souvent³ en disant qu’un speckle donné dans le plan focal ne contribue effectivement à l’analyse de surface d’onde que si, à travers le cycle de modulation, il traverse au moins une des arêtes du prisme de l’ASO. Partant de ce point de vue, il vient naturellement que la surface utile du plan focal est réduite d’un facteur $\frac{3}{4}$ en passant d’un 4PWFS à un 3PWFS, réduisant de cette manière la qualité de la détection de front d’onde.

3. Analyse mise en valeur dans [Vidal et al. \(2019\)](#) et [Rozel \(2019\)](#), étudiant en particulier le comportement du PWFS sur des binaires visuelles. La performance est directement liée à la quantité de speckles stationnés sur les arêtes du PWFS au point de fonctionnement atteint.

CLOSE : un contrôleur du gain modal en temps réel

La méthode CLOSE (*Correlation-Locked Optimization StratEgy*; Stratégie d'optimisation par verrouillage de corrélation) est le fruit des ultimes travaux menés pendant ce doctorat. Elle s'inscrit naturellement dans la suite de l'optimisation des gains par dithering, mais se veut à la fois plus simple et plus efficace. CLOSE propose une technique d'optimisation des gains modaux avec de multiples avantages : sans intrusion dans l'OA ; exécutable en temps réel ou par blocs pseudo-temps réel ; et sans requérir d'a priori sur les conditions d'observation.

Sommaire

6.1	Introduction	204
6.2	Principe général et implémentation	205
6.2.1	Intégration dans la boucle d'OA	205
6.2.2	Détection de résonance dans les mesures	207
6.2.3	Implémentation temps-réel	211
6.2.4	Contraintes imposées sur le RTC et implémentation par blocs	213
6.3	Comparaison avec les solutions optimales	214
6.3.1	Préliminaires	214
6.3.2	Résultats numériques	215
6.4	Simulations numériques	216
6.4.1	Convergence des gains à la fermeture de boucle	217
6.4.2	Comportement temporel des G_i en boucle fermée	220
6.4.3	Performance de bout-en-bout en conditions stationnaires	222
6.4.4	Seeing rapidement variable	223
6.5	Compensation des NCPA avec un PWFS	224
6.5.1	Problématique	224
6.5.2	Gain optique et gain dynamique avec CLOSE	226
6.6	Quelques commentaires et perspectives	228

6.1 Introduction

La méthode CLOSE s'inscrit dans le contexte de l'optimisation des gains modaux dans la boucle d'OA. La stratégie proposée consiste à estimer le gain de boucle approprié à partir du retour, dans les mesures de l'ASO, de la commande appliquée immédiatement avant l'exposition tout juste achevée. Cette technique originale de [Montera et al. \(2018\)](#) propose donc de mesurer la corrélation entre les mesures ayant produit l'incrément de commande – c'est à dire reçues $\tau f_{\text{éch}} + 1$ trames précédemment où τ est la latence du système et $f_{\text{éch}}$ la fréquence d'échantillonnage – et les nouvelles mesures ayant vu cet incrément du DM. Une corrélation positive est alors interprétée comme le fruit d'un gain insuffisant : il aurait été possible d'envoyer une commande plus importante ; une corrélation négative suggère l'inverse : le gain est trop important. Cette méthode de gain adaptatif a été mise en œuvre ([Montera et al., 2018](#)) sur le ciel pour le contrôle automatisé des *centroid gains* d'un asservissement des tip-tilts, ainsi que sur banc d'optique pour le contrôle des gains individuels des actionneurs, pour une OA avec un SH et un DM à 26×26 actionneurs.

Je propose de généraliser cette méthode au contrôle indépendant du gain sur une base modale, pour les ASO non-linéaires dont – comme nous l'avons vu pour le PWFS au chapitre 5 – la non-linéarité peut être décrite par une baisse de sensibilité généralement diagonalisable sur une base modale bien choisie. L'étude que je propose aux sections 6.2 et 6.3 se base, de manière très générale, sur une décomposition modale de la boucle d'OA avec un ASO linéaire subissant une réduction modale de sensibilité inconnue de l'opérateur et du RTC. Cette méthode, que je baptise CLOSE, propose donc un certain nombre de développements et raffinements techniques à partir de la méthode de [Montera et al. \(2018\)](#). CLOSE se base sur l'analyse en temps réel, à travers le calcul de l'autocorrélation des mesures modales, de l'amplitude du pic de résonance des fonctions de transfert de réjection et de bruit ; CLOSE contrôle le gain d'intégrateur, et asservit la fonction d'autocorrélation temporelle modale sur une valeur cible qui se veut indépendante des conditions d'observation.

Pour une latence donnée du système d'OA, le pic de résonance survient à une fréquence donnée ν_{crit} et en s'approchant d'une valeur déterminée g_{crit} du gain de boucle, à laquelle la fonction de transfert devient instable : les pôles communs à $h_{\text{Corr}}(\nu; g)$ et $h_{\text{noise}}(\nu; g)$ (section 2.5.2) deviennent réels pour $g \geq g_{\text{crit}}$. En analysant les mesures à cette seule fréquence – utilisant l'autocorrélation temporelle des mesures modales comme proxy – il est alors possible d'asservir en temps réel le gain d'intégrateur pour maintenir la stabilité et la quasi-optimalité (au sens de [Gendron & Léna, 1994](#)) de la boucle. Je démontre en particulier que l'autocorrélation temporelle pour le décalage temporel d'intérêt est une fonction monotone du gain de boucle appliqué sur chaque mode.

Je présente dans la section 6.2 comment cette technique d'asservissement s'intègre par dessus la boucle d'OA comme une boucle de second niveau ; ainsi que le principe de détection de résonance à la fréquence ν_{crit} et l'implémentation pratique de l'algorithme à l'aide d'estimateurs temps réel. Puis, dans la section 6.3, je compare les solutions

obtenues pour le gain de boucle aux solutions analytiques minimisant la variance du front d'onde résiduel (Gendron & Léna, 1994) ; enfin, je présente dans la section 6.4 des résultats de simulations de bout-en-bout effectuées avec CLOSE.

6.2 Principe général et implémentation

6.2.1 Intégration dans la boucle d'OA

Je montre sur la figure 6.1 le principe général de l'intégration de CLOSE autour de la boucle d'OA usuelle. Le schéma 6.1 est orienté autour d'une décomposition modale du front d'onde et des mesures, et reprend les hypothèses de modélisation de la non-linéarité du PWFS étudiées au chapitre 5 et dans Deo et al. (2019a). Dans l'hypothèse d'un gain optique compensé sur une base modale appropriée, le PWFS se comporte comme :

- sa matrice d'interaction modale autour du front d'onde nul \mathbf{dPyr}
- suivie d'une matrice de confusion modale \mathbf{M} décrivant la non-linéarité en fonction de la DSP du résidu ϕ_{Res} .

Dans notre approximation modale du gain optique, \mathbf{M} est diagonale et ne dépend que de la DSP de ϕ_{Res} . En pratique, les fluctuations stochastiques de \mathbf{M} et sa composante non-diagonale pourraient être considérées comme un "bruit de non-linéarité" et intégrées dans le terme de bruit b^1 .

1. Mais cela mettrait alors à mal l'hypothèse toujours faite que b est décorrélé et de spectre temporel blanc. Je ne pousserai pas la modélisation dans cette direction.

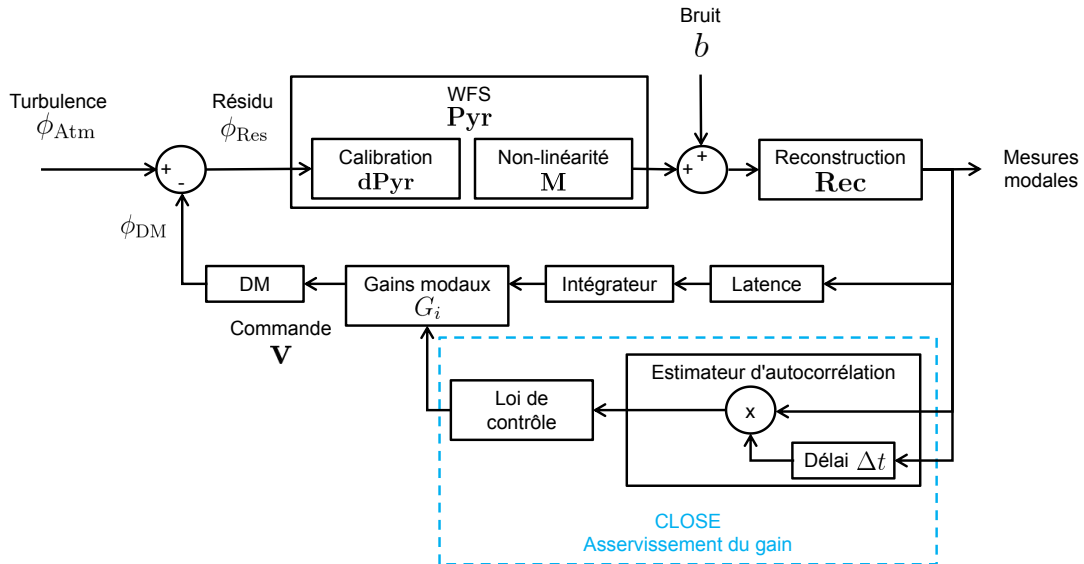


FIGURE 6.1: Schéma de principe de la boucle d'OA avec un ASO PWFS, s'intégrant dans la boucle de contrôle du gain avec CLOSE. La matrice décrivant localement la non-linéarité \mathbf{M} dépend du front d'onde résiduel ϕ_{Res} .

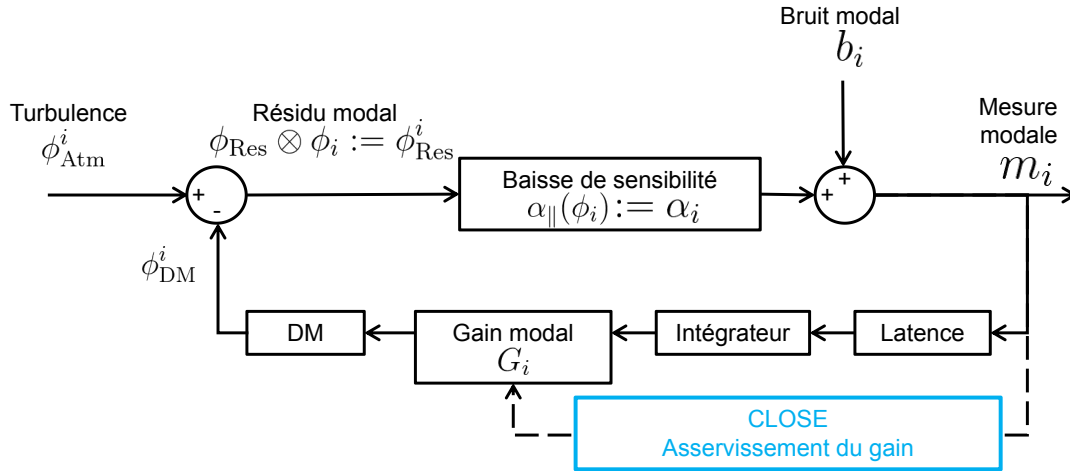


FIGURE 6.2: Schéma de principe de la boucle d'OA pour un seul mode ϕ_i . À la matrice de non-linéarité se substitue, sous l'approximation modale, un coefficient inconnu α_i dépendant de la seule DSP de ϕ_{Res} .

CLOSE s'intègre comme un contrôleur adaptatif autour du RTC de la boucle d'OA. À travers un estimateur temps-réel de l'autocorrélation des mesures modales, le gain de boucle G_i est asservi, pour obtenir et maintenir une condition algébrique, pour chaque mode, sur la valeur de l'autocorrélation des mesures pour une différence de temps Δt . Je reviens sur le critère d'optimisation et le choix des différents paramètres dans la section 6.2.2.

Je montre sur la figure 6.2 une simplification à un seul mode du schéma global de la figure 6.1. Je raisonne à partir du schéma 6.2 pour mettre en place l'analyse fréquentielle qui nous permettra de modéliser le comportement de CLOSE, et comprendre pourquoi cette solution est finalement performante. En passant à une représentation sur un seul mode de la base de contrôle, la matrice d'interaction **dPyr** et le reconstruteur **Rec** se simplifient. Reste pour la modélisation de l'ASO le seul coefficient de baisse de sensibilité α_i , i -ième coefficient diagonal de **M**.

Nous pouvons reprendre l'analyse des fonctions de transfert de l'OA comme à la section 2.5.2 en repartant de la figure 6.2. Un coefficient α_i s'ajoute à la fonction de transfert de l'ASO, et on peut alors trouver les fonctions de transfert modales de correction et de bruit pour ce modèle :

$$h_C^i(\nu) = \frac{\hat{\phi}_{\text{Res}}^i(\nu)}{\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)} = \frac{1}{1 + h_{\text{RTC}}(\nu; \alpha_i G_i)}, \quad (6.1)$$

et

$$h_N^i(\nu) = \frac{\hat{\phi}_{\text{Res}}^i(\nu)}{\hat{b}_i(\nu)} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{h_{\text{RTC}}(\nu; \alpha_i G_i)}{1 + h_{\text{RTC}}(\nu; \alpha_i G_i)}. \quad (6.2)$$

Comme notre analyse porte sur une étude de la télémétrie des mesures modales m_i , les fonctions de transfert d'intérêt sont en réalité celles entre turbulence et bruit

d'une part, et les mesures d'autre part :

$$h_{C,m}^i(\nu) = \frac{\hat{m}_i(\nu)}{\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)} = \alpha_i h_C^i(\nu), \quad (6.3)$$

et

$$h_{N,m}^i(\nu) = \frac{\hat{m}_i(\nu)}{\hat{b}_i(\nu)} = h_C^i(\nu). \quad (6.4)$$

Vu des mesures, la boucle se comporte comme un filtre passe-haut pour le bruit et pour la turbulence ; on n'observe pas dans les mesures l'effet de la composante à basse fréquence du bruit qui vient biaiser le résidu ϕ_{Res}^i (voir figure 2.16).

Les équations 6.1 à 6.4 mettent en avant qu'il est possible de décrire la boucle d'OA à partir de deux paramètres libres : le gain de boucle effectif $\alpha_i G_i$; et le rapport signal à bruit effectif, que je définis par le rapport des variances des composantes modales dans la turbulence σ_{Atm}^2 et dans le bruit σ_N^2 , corrigé du facteur α_i apparaissant dans h_N^i et $h_{C,m}^i$:

$$\text{SNR}_i = \frac{\sigma_{\text{Atm}}^2}{\alpha_i^{-2} \sigma_N^2} = \frac{\int_{\nu=0}^{\nu_{\text{Ny}}} |\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2 d\nu}{\alpha_i^{-2} \int_{\nu=0}^{\nu_{\text{Ny}}} |\hat{b}_i(\nu)|^2 d\nu}, \quad (6.5)$$

où ν_{Ny} est la fréquence de Nyquist temporelle.

Bien que ces deux paramètres décrivent entièrement notre système, et vont donc former la base de l'analyse du comportement de la boucle, il est important de noter qu'ils comportent tout les deux une dépendance à la sensibilité de l'ASO à travers α_i . Le paramètre SNR_i dépend alors comme d'habitude du niveau de RON et de la magnitude de l'étoile guide, mais aussi des conditions de seeing qui affectent le PWFS.

Du point de vue opérationnel, ce sont donc des paramètres aveugles, que l'opérateur et le RTC ne peuvent a priori connaître, à moins d'établir une modélisation précise de l'ASO au point de fonctionnement, par exemple par une méthode de compensation modale du gain optique comme celle de [Deo et al. \(2019a\)](#).

6.2.2 Détection de résonance dans les mesures

Étude du spectre de puissance des mesures

Regardons maintenant comment se comporte le spectre des mesures alors que le gain d'intégrateur est proche de sa valeur critique g_{crit} – à partir de laquelle les zéros de $1 + h_{\text{RTC}}(\nu; g)$ deviennent réels au voisinage de la fréquence ν_{crit} , et donnent donc lieu pour des valeurs $g \geq g_{\text{crit}}$ à des réponses temporelles divergentes. Je donne quelques exemples de ces paramètres dans la table 6.3 en fonction de la latence τ de la fonction de transfert h_{RTC} . Pour rappel, τ recouvre les durées de lecture de la caméra, de transferts de données, de calculs du RTC et de montée du DM ; il faudra donc ajouter une trame correspondant à l'intégration par l'ASO et au sample-and-hold du DM pour obtenir la latence totale du système.

Table 6.3: Paramètres des points de divergence des fonctions de transfert de la boucle d’OA en fonction de la latence τ . Le paramètre Δt est la demi-période correspondant à ν_{crit} .

Latence τ (trames)	ν_{crit} (Hz)	g_{crit}	Δt (trames)
0	ν_{Ny}	2.0	1
1	$\frac{\nu_{\text{Ny}}}{3}$	1.0	3
2	$\frac{\nu_{\text{Ny}}}{5}$	$2 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 0.618$	5

Je représente sur la figure 6.4 l’évolution du spectre du puissance des mesures modales $|\hat{m}_i(\nu)|^2$ alors que $\alpha_i G_i$ s’approche de la valeur g_{crit} , pour plusieurs valeurs de τ : 0, 1 et 2 trames. Je prends pour cet exemple un SNR (équation 6.5) de 10^3 . Le spectre de puissance en entrée $|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2$ est défini par les formules de Conan et al. (1995 ; équations 1.47 à 1.49), avec une fréquence de coupure $\nu_c = 1$ Hz. Pour une SCAO typique avec des sous-ouvertures de 50 cm sous un vent $\bar{v} = 10$ m.s⁻¹, les fréquences de coupure des modes contrôlés s’échelonnent en effet de $0.6 \frac{\bar{v}}{D} = 0.16$ Hz (sur l’ELT) pour les tip-tilts jusqu’à environ 6 Hz pour les plus hauts ordres. Par ailleurs, j’étudie plus en détail la validité de ces spectres turbulents décroissant asymptotiquement en $\nu^{-\frac{17}{3}}$ pour un PWFS dans l’appendice A.

On constate bien sur la figure 6.4, en particulier pour les cas $\alpha_i G_i \geq 0.75 g_{\text{crit}}$, que le spectre des mesures est essentiellement concentré en deux pics fréquentiels : le premier est centré sur ν_c , et correspond au coude de $|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i|^2$, multiplié par la réjection de $|h_{\text{C,m}}^i|^2$ en ν^{+2} à basse fréquence. Sa FWHM est constante², et son maximum s’abaisse alors que $\alpha_i G_i$ augmente, améliorant continûment la réjection à basse fréquence.

Le second pic correspond à la résonance de $h_{\text{C,m}}$ et $h_{\text{N,m}}$. Son amplitude augmente asymptotiquement vers l’infini alors que $\alpha_i G_i$ tend vers g_{crit} , et son maximum se déplace vers la droite pour atteindre asymptotiquement ν_{crit} .

Le minimum entre ces pics est donné par SNR_i , et est atteint lorsque les spectres de puissance $|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2$ et $|\alpha_i^{-1} \hat{b}_i(\nu)|^2$ sont égaux, ici à 9 Hz ; son amplitude est inférieure d’un facteur $3 \cdot 10^{-4}$ à celle du pic à ν_c . On conclut donc que pour les cas à fort SNR, les deux pics sont les contributeurs extrêmement majoritaires du spectre de puissance des mesures.

Approximation du spectre à deux pics

C’est cette approximation de deux contributeurs fréquentiels majoritaires qui conduit au design de CLOSE : on peut alors écrire que les mesures modales $m_i[k]$

2. ne dépend pas du gain, et est proportionnelle à son abscisse ν_c , constante pour chaque mode.

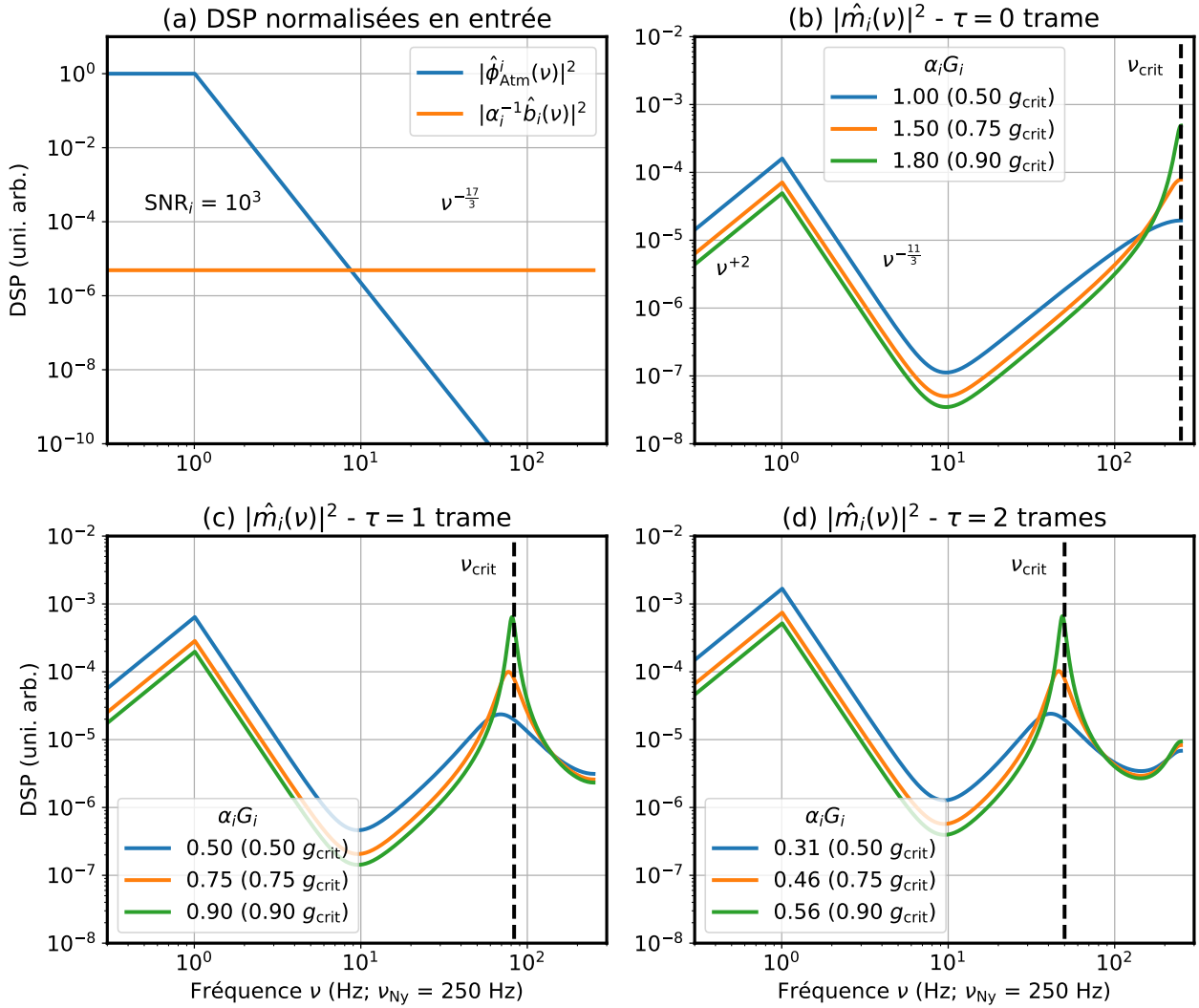


FIGURE 6.4: Spectres de puissance des mesures à l'approche de la résonance de l'intégrateur modal. (a) : DSP du mode dans la turbulence $|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i|^2$ et du bruit corrigé de la baisse de sensibilité $|\alpha_i^{-1}\hat{b}_i|^2$, normalisés de telle sorte que $|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu = 0)|^2 = 1$ et $\text{SNR}_i = 10^3$. (b)-(d) : spectres de puissance des mesures $|\hat{m}_i(\nu)|$ résultant de l'entrée donnée en (a), pour des gains effectifs $\alpha_i G_i = 0.5, 0.75$ et $0.9 g_{\text{crit}}$, en fonction de la latence du RTC $\tau = 0, 1$ et 2 trames.

sont constituées de deux composantes fréquentielles :

$$m_i[k] \approx A \cos\left(\pi \frac{\nu_c}{\nu_{Ny}} k + \phi_A\right) + B \cos\left(\pi \frac{\nu_{crit}}{\nu_{Ny}} k + \phi_B\right); \quad (6.6)$$

de même que leur autocorrélation $m_i^*[k]$, qui pour un intervalle d'intégration K suffisamment grand, peut être approximée par :

$$\begin{aligned} m_i^*[k] &= \frac{1}{K} \sum_{k'=1}^K m_i[k'] m_i[k' - k] \\ &\approx A^2 \cos\left(\pi \frac{\nu_c}{\nu_{Ny}} k\right) + B^2 \cos\left(\pi \frac{\nu_{crit}}{\nu_{Ny}} k\right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Le premier minimum de cette fonction est atteint pour un décalage temporel de $k = \frac{\nu_{Ny}}{\nu_{crit}}$ trames, que je note Δt (donné en fonction de τ dans la table 6.3). L'autocorrélation normalisée y vaut :

$$\begin{aligned} \frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} &= \frac{A^2 \cos\left(\pi \frac{\nu_c}{\nu_{crit}}\right) - B^2}{A^2 + B^2} \\ &\approx \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} = 1 - \frac{2B^2}{A^2 + B^2}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

cette dernière approximation étant permise car ν_c (< 10 Hz) est très petit devant ν_{crit} (> 50 Hz).

Alors que $\alpha_i G_i$ varie d'une valeur où la résonance est faible jusqu'à g_{crit} , A^2 diminue et B^2 augmente – donnant à cet indicateur une variation monotone de 1 jusqu'à, asymptotiquement, -1.

Le fait de disposer d'un indicateur monotone du gain effectif de la boucle $\alpha_i G_i$ nous permet effectivement de mettre en place un contrôle par asservissement de $\alpha_i G_i$, même sans connaître sa valeur numérique.

C'est que se propose de faire la méthode CLOSE : en analysant en temps réel la valeur de $\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]}$ par rapport à une consigne r entre -1 et 1 pour chacun des modes contrôlés, on peut faire évoluer automatiquement la valeur du gain G_i pour obtenir le ratio souhaité entre les composantes à ν_c du résidu et à ν_{crit} de la résonance. Et par ce biais avoir un contrôle des fonctions de transfert $h_C^i(\nu)$ et $h_N^i(\nu)$. On augmentera donc le gain G_i de l'OA tant que $\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} > r$, et on l'abaissera lors de détections de $\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} < r$.

Maintenant que j'ai présenté l'approche par analyse spectrale “des deux pics”, qui donne une bonne idée du principe l'asservissement des gain modaux, je vais présenter dans la section 6.2.3 l'implémentation pratique de cet algorithme dans le RTC.

Transitoires divergents

Mais en aparté, il faut d'abord dire quelques mots des situations où le gain de boucle excède la valeur de divergence g_{crit} . L'analyse présentée ci-dessus suppose en effet que les DSP sont toujours définies et intégrables, de même que l'autocorrélation.

De plus, un algorithme qui a la possibilité d'augmenter le gain de boucle sans supervision peut en effet sembler un pari risqué pour la stabilité de l'OA ; que se passe-t-il alors si la boucle (même pour un seul mode) se trouve dans un régime divergent avec $\alpha_i G_i > g_{\text{crit}}$? On peut imaginer que de tels cas surviennent si une augmentation de G_i se poursuit excessivement à cause d'effets exogènes ou d'autres contributions de la loi de contrôle ; ou lors d'une augmentation rapide de α_i si, par exemple, les conditions de seeing s'améliorent rapidement.

Des pôles des fonctions de transfert $h_C^i(\nu)$ et $h_N^i(\nu)$ sont alors effectivement réels. Pour $\alpha_i G_i$ supérieur de peu à g_{crit} , j'approxime leur valeur par $\nu_{\text{crit}} \pm \varepsilon$. Les séries temporelles qui sont modes propres de notre asservissement sont alors les exponentielles divergentes oscillantes :

$$\begin{aligned} & \cos\left(\pi \frac{\nu_{\text{crit}}}{\nu_{\text{Ny}}} k\right) \exp\left(\pi \frac{\varepsilon}{\nu_{\text{Ny}}} k\right) \\ \text{et } & \sin\left(\pi \frac{\nu_{\text{crit}}}{\nu_{\text{Ny}}} k\right) \exp\left(\pi \frac{\varepsilon}{\nu_{\text{Ny}}} k\right). \end{aligned}$$

Ces modes propres divergents ont une signature très forte dans le signal que l'asservissement CLOSE mesure : $\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]}$. Dès que l'on aura intégré au moins Δt trames, on obtient une signature de forte anti-corrélation à la demi-période de l'oscillation amplifiée Δt . La technique de contrôle employée est bien adaptée pour détecter ces signaux, et immédiatement abaisser le gain de boucle, fournissant effectivement un garde-fou contre une divergence de l'intégrateur du RTC.

6.2.3 Implémentation temps-réel

Voyons maintenant l'implémentation pratique de la boucle d'asservissement des gains modaux G_i . Comme représenté sur la figure 6.1, deux étapes sont nécessaires :

- le calcul d'un estimateur temps-réel de l'autocorrélation des mesures modales, pour un intervalle de temps Δt , déterminé à partir d'une calibration de la latence du système ;
- et la mise à jour proprement dite des gains modaux.

Considérons la quantité mesurée d'un mode ϕ_i à la trame k :

$$m_i[k] = \phi_{\text{Res}}^i[k] \times \alpha_i (+b_i[k]), \quad (6.9)$$

en reprenant les notations de la figure 6.2. Je construis une estimation de l'autocorrélation à l'aide de deux intégrateurs discrets pour chaque mode : N_i^0 et $N_i^{\Delta t}$, qui visent

à estimer respectivement $m_i^*[0]$ et $m_i^*[\Delta t]$. Les équations discrètes exécutées à chaque itération sont alors :

$$\begin{aligned} N_i^0[k] &= p m_i[k]^2 + (1 - p)N_i^0[k - 1] \\ N_i^{\Delta t}[k] &= p m_i[k]m_i[k - \Delta t] + (1 - p)N_i^{\Delta t}[k - 1]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Le gain d'intégrateur p pour ces estimateurs se doit d'être relativement élevé, pour permettre de détecter rapidement les régimes transitoires conduisant à des instabilités de l'OA. Après quelques expériences empiriques, j'ai déterminé que la valeur

$$p = 0.3 \quad (6.11)$$

est fonctionnelle pour l'ensemble des cas testés et présentés dans ce chapitre et dans [Deo et al. \(2019b\)](#) ; et c'est donc la seule que j'ai utilisée. De ce fait, la largeur temporelle de l'estimateur d'autocorrélation implémenté est de l'ordre de 3 trames.

La seconde fonctionnalité de la boucle CLOSE est la mise à jour du gain. Celle-ci s'effectue multiplicativement, par un contrôle proportionnel à l'autocorrélation normalisée estimée :

$$G_i[k] = G_i[k - 1] \times \left[1 + q \left(\frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} - r \right) \right], \quad (6.12)$$

où q est le facteur d'apprentissage, et r la valeur de consigne.

Le facteur d'apprentissage q sera ajusté en fonction de la stabilité souhaitée, et de la potentielle variabilité des conditions ; il définit la constante de temps associée aux gains G_i . Sur le ciel, il convient d'utiliser des valeurs q de 10^{-4} à 10^{-3} ; je reviendrai sur le comportement typique des G_i qui en résulte dans la section 6.4.2. La constante de temps associée, pour un système opérant à 500 Hz, va alors de quelques secondes à quelques dizaines de secondes. Pour les simulations présentées dans les sections suivantes, je prendrai q de 10^{-3} à 10^{-2} , permettant un démarrage plus rapide de la boucle à partir de valeurs G_i uniformes pour tous les modes.

La consigne r définit la valeur cible vers laquelle l'autocorrélation normalisée est asservie. Les développements théoriques présentés (section 6.3) considèrent dans l'idéal une valeur cible $r = 0$; néanmoins, les observations phénoménologiques durant le design de CLOSE ont permis d'affiner la valeur de r qui, pour le dimensionnement ELT que je simule, maximise systématiquement le SR obtenu. J'utiliserai donc la valeur :

$$r = -0.1. \quad (6.13)$$

L'équation 6.12 fait donc – comme souhaité à partir de l'analyse préliminaire menée dans la section 6.2.2 – que le gain est augmenté lorsque $\frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} > r$, correspondant à un contrôle “trop lent” sur le mode ϕ_i . À l'inverse, $\frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} < r$ est la signature d'une boucle trop proche d'un régime oscillant pour le mode ϕ_i , et l'équation 6.12 enclenche alors une réduction du gain modal G_i . En pratique, ces deux situations ne

sont pas équivalentes : dans le cas décroissant, on détecte un début d'instabilité de la boucle d'OA, et il est opportun de réagir rapidement pour en sortir. Je préfère donc à l'équation 6.12 une version asymétrique :

$$\begin{aligned} G_i[k] &= G_i[k-1] \times \left[1 + q^+ \left(\frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} - r \right) \right] & \text{si } \frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} > r \\ G_i[k] &= G_i[k-1] \times \left[1 + q^- \left(\frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} - r \right) \right] & \text{si } \frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} < r, \end{aligned} \quad (6.14)$$

pour laquelle j'utiliserai, en pratique, $q^- = 5 \times q^+$.

6.2.4 Contraintes imposées sur le RTC et implémentation par blocs

La mise en œuvre de CLOSE en temps réel dans le RTC de l'OA requiert une modification de la structure du RTC pour mettre à jour indépendamment les gains modaux G_i à chaque trame. Alors que pour une mise à jour occasionnelle, comme dans le cadre du dithering, il est intéressant de calculer hors-ligne la nouvelle matrice de commande :

$$\mathbf{KL}^{\text{DM}} \cdot \text{Diag}[\dots G_i \dots] \cdot \mathbf{Rec} \quad (6.15)$$

et de la charger dans le RTC à chaque modification des gains modaux, une telle opération devient bien trop lourde pour pouvoir accommoder des changements très fréquents, possiblement à chaque trame.

Pour pouvoir utiliser CLOSE en temps réel, il est alors nécessaire d'opter pour une multiplication matrice-vecteur (MVM) en deux étapes. Les pentes sont d'abord multipliées par \mathbf{Rec} pour obtenir les mesures modales m_i ; on multiplie terme à terme les commandes m_i par les gains modaux G_i ; pour enfin multiplier par la matrice de la base commandée \mathbf{KL}^{DM} (ou autre) pour obtenir les commandes des actionneurs.

En pratique, l'augmentation du temps de calcul mise en jeu est modeste : pour un PWFS contrôlé dans l'espace des pixels, il y a typiquement 4 à 8 fois plus de mesures que de modes ou actionneurs. Le premier MVM est identique, en temps de calcul, à celui effectué pour une reconstruction classique avec un unique MVM. Le second MVM est 4 à 8 fois plus rapide que le premier, avec une matrice de taille $n_{\text{modes}} \times n_{\text{act}}$; la surcharge induite en temps de calcul est donc typiquement de +12 % à +25 %.

Enfin, je n'ai traité jusqu'ici que de la version temps-réel de CLOSE, dans laquelle les autocorrélations sont estimées et les gains mis à jour à chaque trame. Si la surcharge sur le temps de calcul n'est pas acceptable, il est néanmoins tout à fait possible d'opérer par blocs temporels, et de procéder, comme dans le cadre du dithering, à un calcul hors ligne occasionnel de la matrice de commande complète. Dans le cadre de CLOSE par blocs, les estimateurs N_i^0 et $N_i^{\Delta t}$ sont calculés hors-ligne à partir de K mesures modales successives à la place de l'intégrateur proposé à l'équation 6.10. On calcule la mise à jour des gains par l'équation 6.12 (ou 6.14) à chaque fois que ces estimateurs sont obtenus, puis on calcule et met à jour la matrice de commande complète (équation 6.15).

Cette technique par blocs présente également l'avantage de permettre le déploiement immédiat de CLOSE sur des systèmes existants, en ajoutant simplement des calculs hors temps-réel se basant sur la télémétrie déjà disponible. Ceci a permis de tester CLOSE pour le contrôle des gains des tip-tilts sur l'instrument CANARY au télescope William Herschel (WHT ; Gendron, 2019), sans effort de développement particulier. J'ai également mis en œuvre CLOSE par blocs sur le démonstrateur PYRCADO, pour la fermeture de boucle présentée dans la section 3.6.

6.3 Comparaison avec les solutions optimales

6.3.1 Préliminaires

Il est important, pour valider la pertinence de l'algorithme proposé, de regarder les propriétés dynamiques de la boucle lorsque la condition d'asservissement de l'autocorrélation est atteinte. Cette condition s'écrit, en régime permanent :

$$\alpha_i G_i \text{ tel que } \frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} = r. \quad (6.16)$$

En particulier, il est important de confirmer la bonne compatibilité de cette solution par rapport à la minimisation du budget d'erreur combiné du terme temporel et du terme de bruit.

Pour rappel, dans les conditions d'opération de CLOSE, et l'implémentation proposée dans la section 6.2.3, l'algorithme contrôle et connaît le seul G_i . Nous ne sommes pas en mesure de connaître explicitement α_i – qui dépend des conditions de gain optique – ni SNR_i . En revanche, le gain effectif $\alpha_i G_i$ de la boucle lorsque l'équation 6.16 est satisfaite est une fonction bien déterminée, pour un spectre $\hat{\phi}_{\text{Atm}}$ donné, du seul SNR_i . Je propose donc d'étudier les propriétés de cette fonction $\alpha_i G_i(\text{SNR}_i)$, pour la comparer à la solution optimale.

La condition d'optimalité pour les gains modaux³ (Gendron & Léna, 1994 ; voir section 2.5.2) s'exprime comme la minimisation de la variance du front d'onde résiduel ϕ_{Res} . Pour des modes dont la covariance dans la turbulence est nulle, ce qui est par définition le cas des modes KL_i^A , cette minimisation peut être calculée indépendamment pour chacun des modes. Je fais l'hypothèse que cette séparabilité modale est également acquise sur la base que j'utilise \mathcal{KL}^{DM} ; cette hypothèse est aisément vérifiée aux bas ordres – très similaires à des KL atmosphériques – qui portent le plus fort de la puissance modale de la turbulence.

La variance modale du front d'onde résiduel s'écrit :

$$\sigma_{\text{Res},i}^2 = \int |h_C^i(\nu) \hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2 + |h_N^i(\nu) \hat{b}_i(\nu)|^2 d\nu; \quad (6.17)$$

et la solution optimale est obtenue par minimisation de cette équation en fonction du gain d'intégrateur :

$$\alpha_i G_i \text{ tel que } \frac{\partial \sigma_{\text{Res},i}^2}{\partial G_i} = 0. \quad (6.18)$$

3. Sous contrainte d'un RTC à intégrateur, pour une latence donnée.

J'appellerai gain *minimum variance* (MV) la solution obtenue par l'équation 6.18. En pratique (Gendron & Léna, 1994), la valeur MV de G_i est obtenue par minimisation numérique de 6.18 après avoir caractérisé à partir de mesures en boucle ouverte les différentes DSP considérées. L'utilisation de cette méthode pour un ASO non-linéaire requerrait également de connaître α_i , ce qui n'est pas le cas de CLOSE, qui opère multiplicativement par itérations sur G_i , et s'exonère de connaître de la valeur numérique de α_i .

6.3.2 Résultats numériques

Je procède par résolution numérique pour obtenir les deux solutions pour $\alpha_i G_i$: la solution MV et la solution CLOSE – cette dernière dépendant de la consigne r . Je calcule les solutions obtenues en fonction du rapport signal à bruit modal SNR_i , et en utilisant un spectre $\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i$ avec $\nu_c = 1$ Hz. Numériquement, ces calculs sont une simple recherche par évaluation successive soit de minimum, soit de valeur d'interception, des fonctionnelles données aux équations 6.16 et 6.18, sous contrainte que les DSP et autocorrélations soient bien définies : $0 \leq \alpha_i G_i \leq g_{\text{crit}}$.

Je montre sur la figure 6.5 les valeurs obtenues pour $\alpha_i G_i$ MV et CLOSE pour des

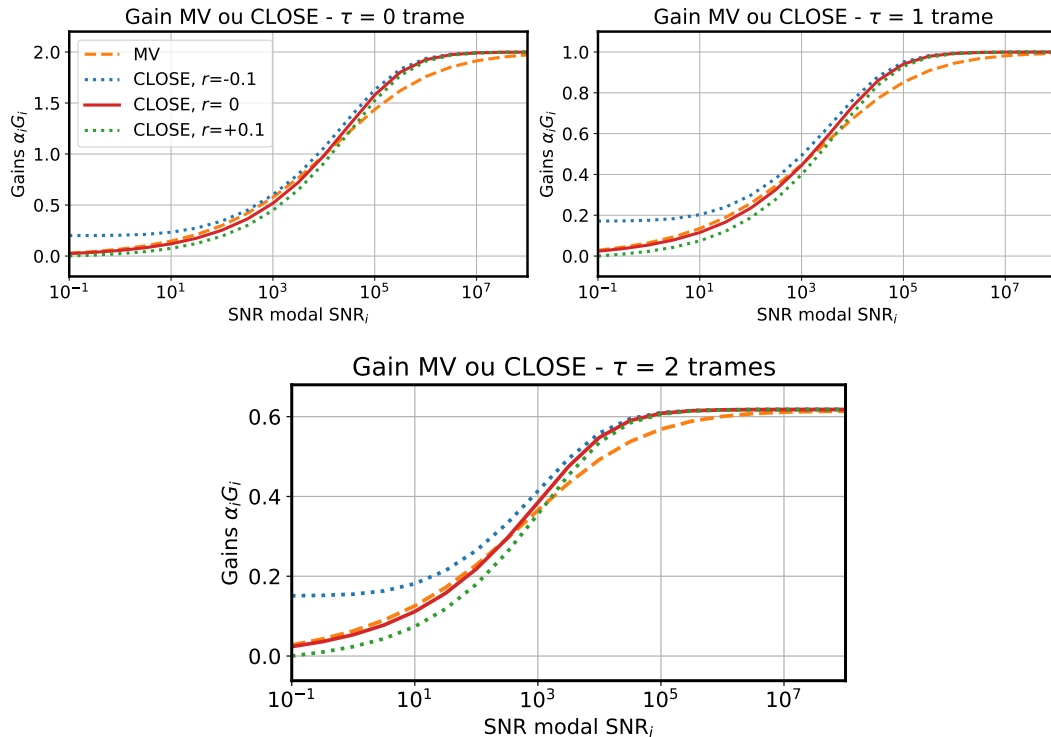


FIGURE 6.5: Comparaisons des solutions numériques pour $\alpha_i G_i$ en MV ou CLOSE, pour des latences $\tau = 0, 1$ et 2 trames, en fonction du rapport signal à bruit SNR_i . On calcule $\alpha_i G_i$ avec CLOSE pour trois valeurs possibles de la consigne r : 0 et ± 0.1 .

consignes r de -0.1, 0 et 0.1, et pour des latences $\tau = 0, 1$ et 2 trames.

La première constatation est la forte similarité entre la solution optimale (MV) et la solution CLOSE avec $r = 0$. La déviation maximale entre les deux est de +20%, atteinte à $\text{SNR}_i = 10^2$. La déviation dans l'inflexion supérieure, pour les trois latences, est de -10%, atteinte aux alentours de $\text{SNR}_i = 5 \cdot 10^4$. On s'attend donc, à partir de ces résultats, à ce que CLOSE fournisse une solution quasi-optimale en terme de variance du résidu, et ce à travers toute la gamme des SNR utiles.

On constate par ailleurs sur la figure 6.5 l'effet de la consigne r sur la solution $\alpha_i G_i$ obtenue, qui permet de diriger le résultat pour les valeurs $\text{SNR}_i < 10^2$. Une valeur $r > 0$ laisse décroître le gain vers 0 plus rapidement alors que le SNR diminue. À l'inverse, une valeur $r < 0$ permet d'établir un gain minimal aux très faibles SNR, ici de l'ordre de 0.15 - 0.20 indépendamment de τ avec $r = -0.1$. Bien que la valeur $r = 0$ semble analytiquement idéale, des simulations de bout-en-bout permettent de démontrer que l'on obtient une meilleure performance – en terme de SR LE –, et ce dans des conditions de simulation plus génériques, à l'aide de $r < 0$, typiquement -0.05 à -0.2. Ceci peut notamment être expliqué par la borne inférieure imposée à $\alpha_i G_i$: elle évite une déviation indéfinie de la mise à jour des gains (équation 6.14) vers 0, dont il est très long de ressortir si SNR_i revient à augmenter.

Un autre lien entre les gains CLOSE et MV

La proximité des gains CLOSE avec la solution optimale MV était déjà attendue à l'heure où j'écris ces lignes : d'une part, les démonstrations de [Montera et al. \(2018\)](#) sur banc et sur le ciel, et d'autre part les simulations présentées section 6.4, qui montrent une bonne performance dans des conditions de bruit très variables ; ceci n'est compatible qu'avec des gains qui suivent la tendance appropriée en fonction du SNR, et qui fournissent, en plus de la correction de α_i , une dynamique proche de l'optimum.

Par ailleurs, [Flanagan et al. \(2019\)](#) démontre que la solution en régime permanent de CLOSE (équation 6.16 ; mais dans le cadre de la version de l'algorithme de [Montera et al., 2018](#)) correspond à la première itération de la descente de gradient associée à la résolution de l'équation 6.18 donnant les gains MV. Ce résultat permet donc d'affirmer que CLOSE forme une résolution au premier ordre de la minimisation de variance du front d'onde résiduel.

6.4 Simulations numériques

Je présente dans cette section plusieurs résultats obtenus en simulations numériques afin d'explorer le comportement de l'asservissement CLOSE, et de démontrer la performance de la méthode. L'ensemble des résultats de simulations présentés dans cette section sont effectués avec COMPASS, pour le dimensionnement de la SCAO de MICADO sur l'ELT, tout comme dans [Deo et al. \(2019a\)](#) ; et dans le reste du chapitre 5). Je reprends dans la table 6.6 (voir aussi la table [A&A2019:1](#)) les paramètres

Table 6.6: Paramètres des simulations de bout-en-bout.

Configuration des simulations	
Télescope	$D = 39$ m ; pupille ELT ; sans araignée
Turbulence	von Kármán ; une couche au sol r_0 à 500 nm variable de 7.0 à 22.0 cm $L_0 = 25$ m ; $\ \vec{v}\ = 10$ m.s ⁻¹
PWFS	
Sous-ouvertures	92×92 ; taille dans la pupille 42 cm. 24 080 pixels considérés
Longueur d'onde	Monochromatique, 658 nm
Transmission	0.28 (rendement quantique inclus)
Modulation	Circulaire, $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$
RON	0.3 e ⁻
Source	Étoile naturelle sur l'axe
Flux	Zero point : 2.6×10^{10} ph.s ⁻¹ .m ⁻²
DM	
	Miroir tip-tilt Modèle M4 de l'ELT $d_{\text{DM}} = 54$ cm ; Couplage 0.24 4 310 actionneurs contrôlés
RTC	
	Cadence 500 Hz ; intégrateur modal Latence $\tau = 2$ trames Contrôle sur la base \mathcal{KL}^{DM} MVM en deux étapes : Pixels $\rightarrow [m_i] \times [G_i] \rightarrow$ actionneurs DM CLOSE : $p = 0.3$; $r = -0.1$; $q^+ = 10^{-4}$ à 10^{-2} ; $q^- = 5q^+$;

de l'OA.

Je présente dans les paragraphes suivants : (1) la convergence des gains à partir de G_i uniformes à la fermeture de boucle ; (2) une étude du comportement temporel des G_i en régime supposé permanent en boucle fermée ; (3) Les performances de l'OA, en terme de SR LE, en fonction de la magnitude de l'étoile guide et du seeing ; (4) et enfin, une simulation de conditions de seeing rapidement variables, à l'instar des résultats montrés pour le dithering dans la section [A&A2019:7](#).

6.4.1 Convergence des gains à la fermeture de boucle

Tout d'abord, regardons le comportement des gains asservis lors de la fermeture de boucle. Je définis les conditions d'initialisation : pour éviter de démarrer dans un régime de forte oscillations qui empêcherait la fermeture de boucle, il convient d'éviter une condition initiale $\alpha_i G_i > g_{\text{crit}}$, régime dans lequel même une décroissance rapide (accélérée par $q^- = 5q^+$) des G_i ne pourrait à coup sur éviter une divergence de

l'intégrateur. Je n'utilise ici qu'un seul a priori sur le comportement de l'ASO : pour un PWFS, α_i est en toute circonstance plus petit que 1. J'initialise donc les gains G_i à une valeur proche de g_{crit} , en pratique $G_i[0] = 0.5$ avec $\tau = 2$ trames, qui garantit donc un régime stable.

À partir de cette valeur initiale uniforme de 0.5, les gains G_i sont asservis et convergent vers leurs valeurs supposément stationnaires pour les conditions données. C'est ce que je représente sur la figure 6.7, pour quatre situations : des étoiles guides $M_R = 0$ et 16, et des conditions turbulentes $r_0 = 14.5$ et 9.0 cm.

Je représente la moyenne des gains $\frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{k=k_1}^{k_2} G_i[k]$ de chaque mode sur des intervalles de temps $[k_1, k_2]$ à partir de la fermeture de boucle ; on observe dans les quatre cas l'évolution vers une courbe stable à partir de $t = 0$ jusqu'à $t = 2$ sec (soit $k = 1000$). Pour les cas à $M_R = 0$, la convergence est essentiellement atteinte au bout de 1 sec, ce qui est cohérent avec le facteur $q^+ = 5.10^{-3} = (200 \text{ trames})^{-1}$ utilisé. Les gains en régime permanent étant tous supérieurs à 0.5 pour les cas $M_R = 0$ (et presque tous pour $M_R = 16$), c'est bien le seul facteur q^+ qui définit la constante de temps associée à la convergence, sans influence du q^- . Pour les cas $M_R = 16$, la convergence est un peu plus lente, la courbe évoluant encore entre $t=1$ sec et $t=2$ sec.

Les cas $M_R = 0$ sont essentiellement des simulations à SNR infini⁴. Dès lors, les gains G_i convergent, comme vu sur la figure 6.5, vers $\alpha_i G_i \approx g_{\text{crit}}$. Il s'ensuit que l'on peut lire sur la figure 6.7 la valeur de la baisse de sensibilité pour les conditions simulées : $\alpha_i = \frac{g_{\text{crit}}}{G_i}$; et on retrouve bien la structure inverse du coefficient de réduction de sensibilité $\alpha_{\parallel}(\phi_i)$ étudié dans Deo et al. (2019a), montré sur l'abaque figure A&A2019:3 (voir aussi la figure 9 de Deo et al., 2018b). Le gain G_i atteint en régime permanent augmente pour les bas ordres pour atteindre son maximum aux ϕ_i correspondant au rayon de modulation $-i=30$ pour $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$ – puis décroît toujours comme une loi de puissance de l'indice des modes.

En étudiant la différence entre les cas $M_R = 0$ et $M_R = 16$, on voit intervenir la prise en compte par CLOSE de l'optimisation de la dynamique de boucle en fonction du SNR. Si la structure des courbes à $t = 2$ sec est similaire, on constate une diminution globale des gains G_i appliqués : l'atténuation recherchée pour limiter la propagation du bruit. Il n'est pas pour autant attendu que les courbes $M_R = 0$ et $M_R = 16$ soient identiques à un facteur près : à $M_R = 16$, la solution pour $\alpha_i G_i$ varie de manière importante, SNR_{*i*} couvrant une large plage sur laquelle la solution de CLOSE varie amplement. De plus, il est moins évident de relier ces résultats aux abaques sur lesquelles nous travaillions au chapitre 5, la DSP du front d'onde résiduelle n'étant pas la même. On découvre par exemple cette quasi-discontinuité dans les G_i autour de l'indice 100 pour les simulations à $M_R = 16$, qui n'aurait pu être anticipée par des abaques calculées sur des DSP de résidus typiques à $M_R = 0$.

Indépendamment de la structure des gains G_i obtenus, nous pouvons commencer à comparer les SR SE obtenus après deux secondes de fermeture de boucle aux meilleurs SR obtenus dans le cadre de la compensation modale du gain optique par dithering

4. Mais en fait, il ne faut pas oublier l'effet de "bruit de non-linéarité" formant la limite de l'approximation de la compensation modale du gain optique.

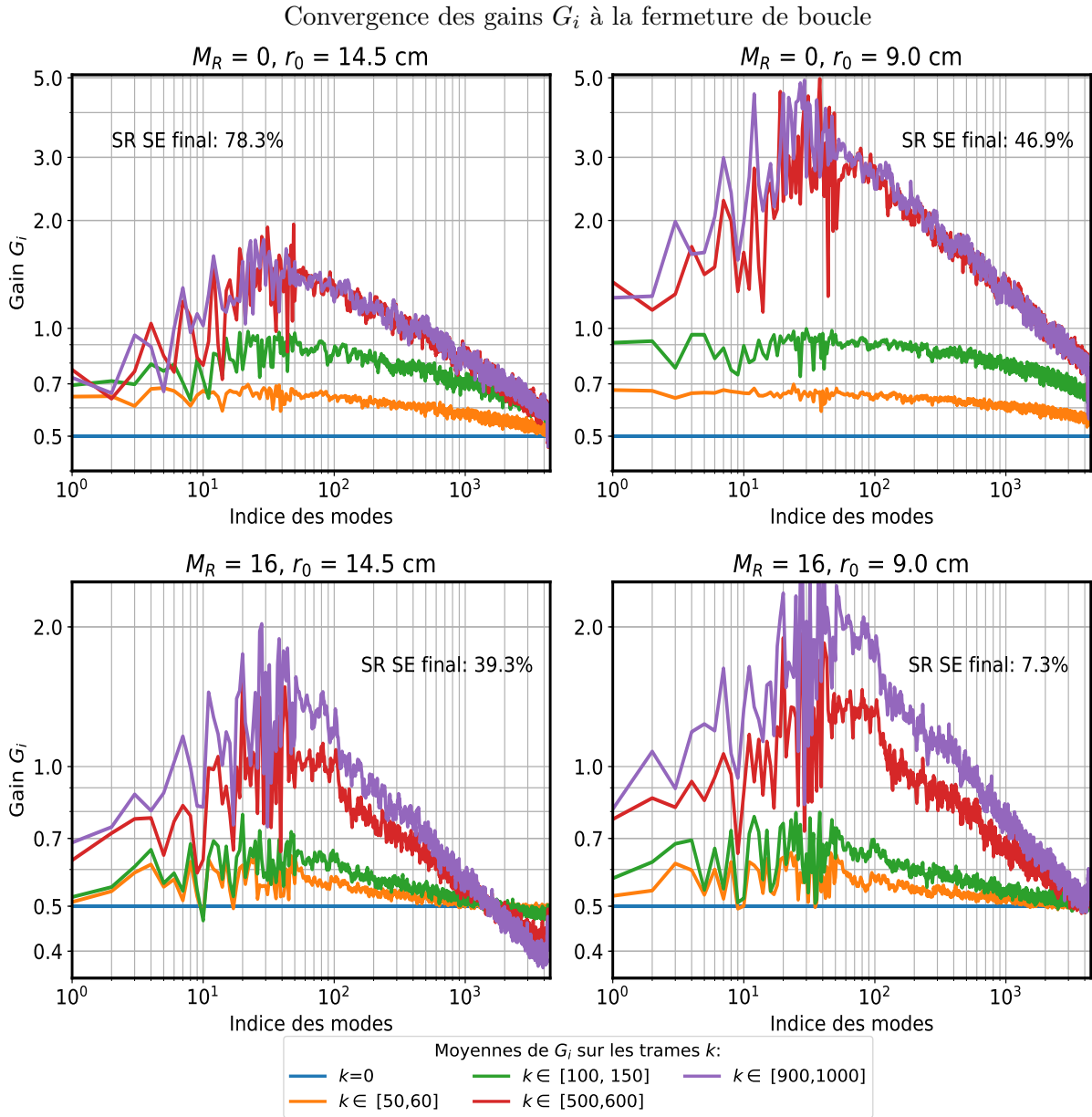


FIGURE 6.7: Convergence des gains modaux CLOSE sur les 2 s (1 000 trames) suivant la fermeture de boucle, pour deux étoiles guides $M_R = 0$ et 16, et deux conditions de seeing $r_0 = 14.5$ cm et 9.0 cm. Les gains G_i valent initialement (bleu) 0.5 pour tous les modes. Les paramètres de CLOSE sont : $p = .3$, $q^+ = .005$, $q^- = .025$, $r = -0.1$. Les SR finaux donnés sont calculés par moyenne du SR SE sur les trames 900-1000 (0.2 s). Les courbes correspondent aux valeurs de G_i moyennées sur les ensembles de trames donnés dans la légende ; les courbes sont lissées le long de l'indice i pour plus de clarté.

(figures A&A2019:10–11) : les valeurs sont compatibles avec les SR LE obtenus dans ce cadre, mais cette fois-ci sans effort d’optimisation de gain scalaire pour trouver le SR maximal accessible. Je reviendrai sur la performance obtenue avec CLOSE en terme de SR LE dans la section 6.4.3.

Finalement, les résultats présentés ici confirment la convergence de CLOSE sur des valeurs adéquates des gains modaux à travers une large gamme de conditions d’observation, en une durée inférieure à 2 secondes.

6.4.2 Comportement temporel des G_i en boucle fermée

Une fois le régime permanent atteint après la fermeture de boucle, les gains G_i continuent évidemment d’être asservis, et évoluent dynamiquement autour des valeurs “moyennes” correspondant au SNR et à la sensibilité courante, donnée par la DSP du résidu de boucle. Ils sont en particulier affectés par les variations stochastiques de la non-linéarité du PWFS, en fonction des réalisations exactes de la turbulence atmosphérique.

Le contrôle de la dynamique des gains est régi par les paramètres d’apprentissage q^+ et q^- ; le design de l’algorithme permet de les ajuster, entre des coefficients importants (10^{-2}), donnant des G_i très réactifs à des variations de la réponse de l’ASO, ou des coefficients plus faibles ($10^{-5} - 10^{-4}$) privilégiant une stabilité et une robustesse du contrôle à des évènements transitoires.

Je présente sur la figure 6.8 le comportement dynamique des G_i en boucle fermée, pour plusieurs valeurs des facteurs q^\pm . L’enregistrement des gains, pour 3 modes,

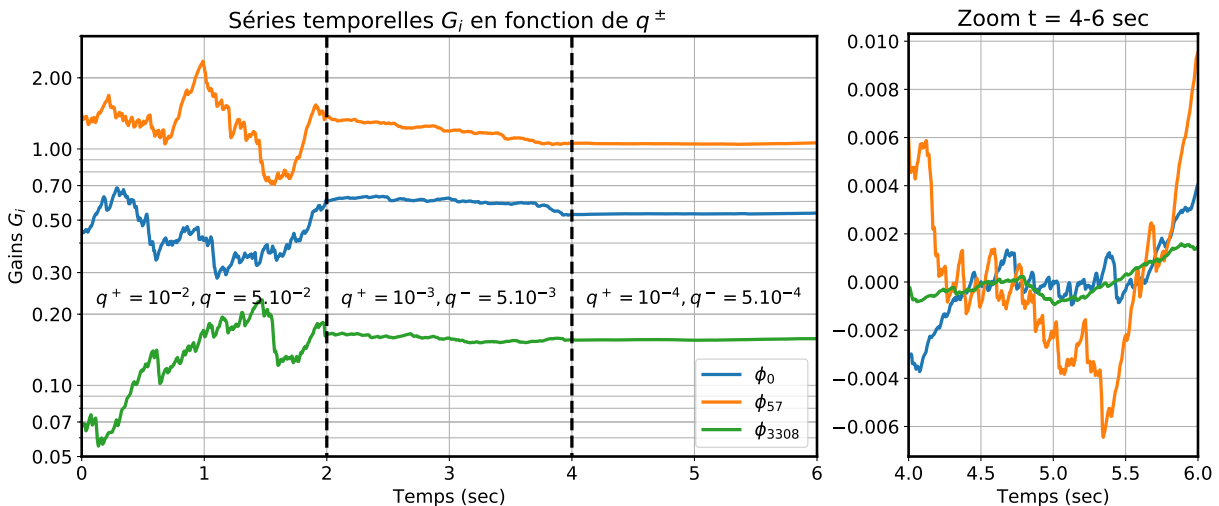


FIGURE 6.8: Gauche : séries temporelles des gains CLOSE pour trois modes durant 6 sec. d’asservissement en régime permanent, pour un facteur d’apprentissage q^+ de 10^{-2} , 10^{-3} et 10^{-4} (et $q^- = 5q^+$). Simulation avec $M_R = 15$ et $r_0 = 13.0$ cm. Droite : zoom sur $4 \leq t \leq 6$ sec avec $q^+ = 10^{-4}$; la moyenne est soustraite des données.

commence 2 secondes après la fermeture de boucle sur des gains unitaires. En partant de $q^\pm = 10^{-2}, 5.10^{-2}$, ces facteurs sont abaissés d'un facteur 10 au bout de 2 sec., puis à nouveau d'un facteur 10 au bout de 2 sec. supplémentaires. On voit l'évolution importante des G_i pour les trois modes considérés sur les deux premières secondes, à travers plusieurs régimes typiques de l'asservissement CLOSE :

- Pour ϕ_{57} de 0 à 0.6 sec : des oscillations rapides autour d'une valeur idéale pour G_{57} , comportement attendu pour un système linéaire où les α_i sont inconnus mais constants.
- Pour ϕ_{57} de 0.6 sec à 2 sec, et ϕ_0 sur les deux premières secondes : des variations à l'échelle de quelques dixièmes de secondes, couvrant une amplitude d'un facteur jusqu'à 2 : le gain G_i suit à l'inverse les variations stochastiques du α_i et du SNR instantané induites par le défilement de la turbulence atmosphérique.
- Pour ϕ_{3308} de 0 à 2 sec : G_{3308} démarre égaré à une valeur anormalement faible par rapport à sa valeur moyenne pour ces conditions, et la convergence initiale se poursuit. Des détections occasionnelles d'oscillations conduisent à des rabaissements transitoires de G_i , accélérés par $q^- = 5q^+$. La tendance globale reste à la hausse jusqu'à 1.5 sec, à travers lesquelles G_{3308} s'est vu augmenté d'un facteur 3.

Passé $t = 2$ sec, les q^\pm sont abaissés à 10^{-3} et 5.10^{-3} . Avec ces valeurs, les variations sont plus lentes, et bornées à environ $\pm 10\%$ sur les 2 sec. considérées. Enfin, en passant à $q^\pm = 10^{-4}, 5.10^{-4}$ à partir de $t = 4$ sec, l'amplitude des variations globales devient inférieure au %. On constate néanmoins (figure 6.8, droite) que les G_i continuent d'évoluer : on voit toujours des oscillations – d'amplitude 10^{-3} – autour d'une valeur moyenne à tendance stable, ou des variations monotones suivant de manière déterministe des fluctuations des α_i .

Bien entendu, nous souhaitons que cette expérience propose un critère de choix des facteurs d'apprentissage q^\pm . Mais d'autres facteurs rentrent en compte : la stabilité et la dynamique de l'OA, la nature de l'ASO et les fluctuations de α_i associées, etc. On ne peut à ce stade établir une règle unique pour le choix des q^\pm ; on imagine néanmoins le cas idéal : pour un système suffisamment stable et réactif, utiliser des facteurs q^\pm relativement élevés permettrait de répondre très rapidement aux variations de sensibilité induites par le développement d'effets turbulents transitoires, comme par exemple la turbulence de dôme. À l'inverse, sur des OA pour lesquelles la stabilité est généralement un problème, l'utilisation de CLOSE avec des q^\pm faibles pourrait permettre de déployer un contrôleur adaptatif non-supervisé sans compromettre plus avant la robustesse du système.

Enfin, l'étude conjointe des résultats présentés sur les figures 6.7 et 6.8 nous permet de concevoir des stratégies pour obtenir le meilleur des mondes : faire converger rapidement les G_i avec des q^\pm dans les 10^{-2} , que l'on diminuerait après quelques secondes pour un asservissement du gain plus lent, et une boucle fermée généralement plus robuste. Pour ce qui est des simulations numériques présentées plus loin, le temps d'exécution reste une contrainte, et je resterai sur $q^\pm = 10^{-2}, 5.10^{-2}$ pour assurer une fermeture de boucle et un suivi rapides de l'évolution de la turbulence.

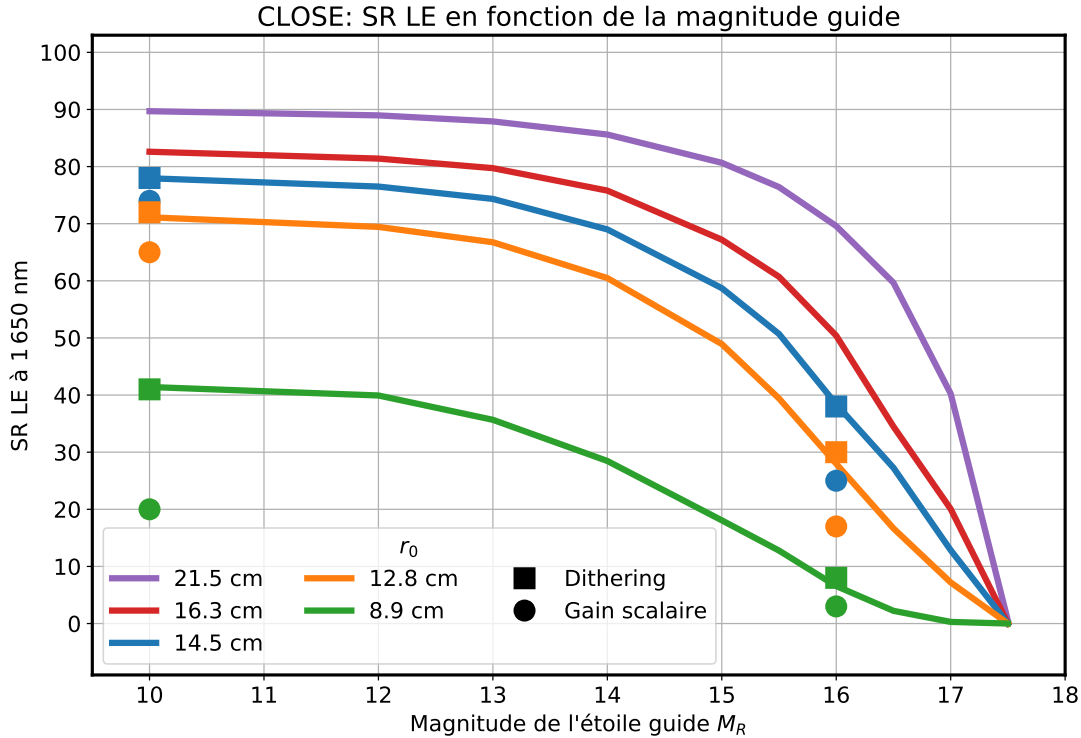


FIGURE 6.9: Performance de bout-en-bout simulée avec des gains CLOSE, en fonction de la magnitude de l'étoile guide et des conditions de seeing, ici stationnaires pour chaque point de mesure. Marqueurs : performances maximales obtenues pour des OGC par la méthode de dithering, et avec optimisation du seul gain scalaire, rappelées depuis [Deo et al. \(2019a\)](#).

6.4.3 Performance de bout-en-bout en conditions stationnaires

Maintenant que j'ai présenté plus en détail la dynamique d'asservissement à la fermeture de boucle et en régime permanent de boucle fermée, je présente la performance de bout-en-bout de l'OA atteinte en utilisant CLOSE.

Je montre sur la figure 6.9 la performance – en terme de SR LE en bande H – atteinte pour des étoiles guides de magnitudes 10 à 17.5 et pour des conditions de seeing stationnaires, avec 5 valeurs de r_0 de 8.9 à 21.5 cm. Pour chaque point de mesure, la boucle est fermée pendant 1 seconde à partir de gains modaux uniformes $G_i = 0.5$; la PSF LE est ensuite intégrée sur 2 secondes. Les paramètres de CLOSE utilisés sont $p = 0.3$, $q^\pm = 10^{-2}, 5.10^{-2}$ et $r = -0.1$.

Je superpose sur la figure 6.9 la performance maximale obtenue après optimisation du gain scalaire (voir les figures [A&A2019:10-11](#)) à $M_R = 0$ et $M_R = 16$: sans gains modaux ; et en utilisant la méthode de dithering pour la compensation modale.

CLOSE offre une performance identique à la compensation par dithering, et on retrouve la même amélioration de magnitude limite de 0.5 - 0.7 magnitudes par rapport à un gain scalaire. Deux facteurs sont à prendre en compte dans l'optimisation des

gains modaux pour le PWFS : le gain optique, soit la compensation adéquate de la baisse de sensibilité α_i , et l'optimisation du gain dynamique en fonction du SNR.

Dans le cadre du dithering, les abaques fournissent la composante optique, et la correction dynamique était grossièrement assurée par un seuillage de bruit négatif (section 2.5.3) ; maintenant, CLOSE assure ces deux fonctionnalités de manière combinée, sans plus utiliser de seuillage de bruit négatif ; de plus, l'effort mis en œuvre est bien moindre que pour l'utilisation du dithering. Par ailleurs, CLOSE permet aussi une transition beaucoup plus lisse au delà de $M_R = 16$, jusqu'à la limite accessible entre $M_R = 17$ et 17.5. Avec la méthode de dithering, bien que la performance soit identique à $M_R = 16$, il m'était particulièrement difficile de maintenir la stabilité de la boucle à $M_R \geq 16.5$ ⁵. CLOSE permet donc d'améliorer très amplement la robustesse du système en régime de bruit critique, relativement à la méthode de dithering.

6.4.4 Seeing rapidement variable

Pour poursuivre la comparaison entre la compensation des gains modaux par dithering et avec CLOSE, je reproduis ici les simulations en conditions de seeing variables présentées dans la section A&A2019:7.

À la différence des simulations menées dans Deo et al. (2019a), je fais cette fois-ci varier le r_0 continûment, pour une variation accumulée de 10% toutes les 4 secondes. Avec la vitesse de vent de 10 m.s⁻¹, l'écran de phase extrudé présente alors un r_0 10% plus grand à un bord de la pupille par rapport au bord opposé. Ainsi, après une fermeture de boucle initiale de 2 sec., je fais décroître le r_0 de 22.0 cm jusqu'à 7.0 cm sur une durée totale de 50 sec. (25 000 trames), puis remonter à nouveau à 22.0 cm sur la même durée. La boucle n'est pas ouverte entre les deux cas r_0 décroissant et r_0 croissant, et donc l'état interne du RTC n'est pas réinitialisé en repartant de $r_0 = 7$ cm.

Je montre sur la figure 6.10 la performance obtenue lors de ces simulations, pour des étoiles guides $M_R = 0$ et 16. On retrouve pour CLOSE les bonnes propriétés des deux méthodes adaptatives testées dans Deo et al. (2019a) : la méthode complète par dithering ; et l'optimisation du gain scalaire par dessus une courbe statique de gains modaux (respectivement méthodes A et D dans la section A&A2019:7). En particulier, la performance alors que le seeing s'améliore est bien le symétrique de la performance lorsqu'il se dégrade ; et les SR obtenus sont conformes aux performances obtenues pour des r_0 stationnaires.

La symétrie des performances à r_0 décroissant et r_0 croissant est un critère important : nous avons vu dans Deo et al. (2019a) qu'il est particulièrement critique que l'algorithme adaptatif puisse absorber les remontées de sensibilité du PWFS associées à une amélioration du seeing, et abaisser d'autant les gains modaux, afin d'éviter l'installation de régimes oscillants ou divergents. Dans le cas présent, ces simulations démontrent que CLOSE est un processus adaptatif robuste qui maintient la quasi-optimalité dans des conditions de seeing fortement variables, dès lors que la constante

5. Raison pour laquelle le chapitre 5 ne contient aucun point de mesure avec $M_R > 16$.

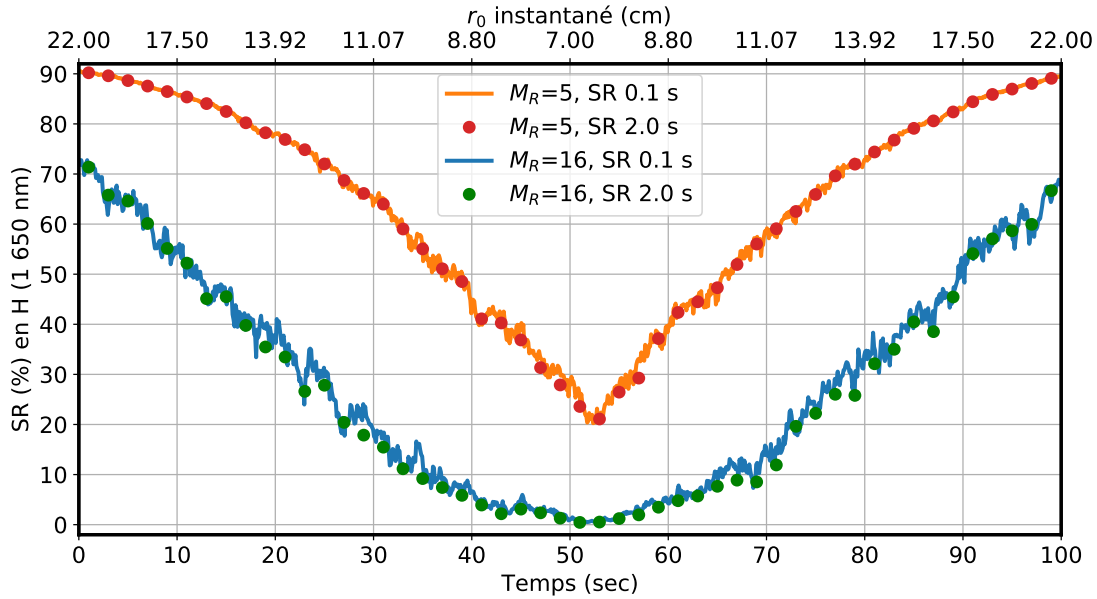


FIGURE 6.10: Performance de bout-en-bout simulée pour des conditions de seeing variables, avec r_0 décroissant continûment de 22 à 7 cm, puis croissant jusqu'à 22 cm à nouveau. La durée totale simulée est de 100 s, pour deux étoiles guides $M_R = 5$ et 16. Le décalage de 2 à 3 s du minimum est causé par l'extrusion progressive des écrans turbulents, le r_0 étant donné pour l'écran turbulent généré en bord de la pupille à l'instant correspondant. Courbes : SR pour des poses de 100 ms ; marqueurs : SR pour des poses de 2 s.

de temps associée est plus grande que celle correspondant à q^\pm .

De plus, cette versatilité et cette robustesse se verraient assez naturellement étendues à d'autres paramètres variables, comme par exemple la vitesse du vent, ou bien tout changement de conditions d'observations amenant à une variation importante de la DSP du front d'onde résiduel – variations qui ne peuvent pas nécessairement être bien compensées par la méthode de dithering au delà du spectre utilisé pour le calcul des abaques (section 5.3.1).

6.5 Compensation des NCPA avec un PWFS

6.5.1 Problématique

Les résultats montrés dans les section 6.4.3 et 6.4.4 m'ont permis de démontrer la performance nominale de CLOSE dans des conditions extrêmement diverses de gain optique et de niveau de bruit. Il faut néanmoins noter que la performance égale celle démontrée par la méthode de dithering, sans la dépasser. Simplement, CLOSE offre par rapport à cette précédente méthode une très grande simplification technique : l'implémentation est à la fois plus simple et plus versatile ; est temps-réel ; et ne requiert

plus d'utiliser des abaques pré-calculées.

Un problème important reste néanmoins en suspens à ce stade – dont j'ai déjà discuté dans la section A&A2019:8.2 sans le résoudre : pouvoir appliquer, avec un PWFS, une compensation appropriée des NCPA, même en condition de gain optique important. Et cette problématique est absolument critique pour permettre la mise en œuvre du PWFS sur des systèmes à hauts ordres.

Le problème de compensation des NCPA est d'ailleurs l'origine principale des études sur le gain optique du PWFS, bien avant les problématiques de correction optimale dans des mauvaises conditions de seeing. On retrouve cette notion dans par exemple Esposito et al. (2015), puis Bond et al. (2017), dans lesquels émerge l'idée d'un dithering optique pour obtenir la réduction de sensibilité à un instant t , et donc pouvoir appliquer la correction des NCPA de manière efficace. Ces considérations s'appliquent aux analyseurs non-linéaires de manière plus générale, et avaient été constatés avec l'arrivée des analyseurs SH quad-cell.

Je reformule d'abord l'équation A&A2019:20, qui décrit la reconstruction du front d'onde corrigée du gain optique en présence d'une aberration différentielle ϕ_{NCPA} entre l'ASO et l'imageur scientifique. En projection modale, et en appliquant l'approximation de diagonalisabilité de l'effet du gain optique sur cette base, la i -ième composante modale du front d'onde reconstruit pour l'imageur s'écrit :

$$\alpha_i^{-1} \underbrace{[\phi_i \otimes \mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Pyr}(\phi_{\text{Res}})]}_{m_i} - [\phi_i \otimes \phi_{\text{NCPA}}]. \quad (6.19)$$

Pour obtenir la convergence de la boucle d'OA vers la consigne correspondant aux NCPA, avec une dynamique de boucle donnée par des fonctions de transfert avec un gain effectif $\alpha_i G_i$, l'incrément modal de commande à envoyer au DM s'écrit alors :

$$\alpha_i G_i \left(\alpha_i^{-1} m_i - \phi_i \otimes \phi_{\text{NCPA}} \right). \quad (6.20)$$

Cette seconde forme fait apparaître les grandeurs qu'il nous faut isoler pour opérer une soustraction convenable des NCPA :

- Le gain *dynamique* $\alpha_i G_i$, qui définit la fonction de transfert temporelle de la boucle.
- Le gain *optique* α_i^{-1} , qui vient compenser la baisse de sensibilité du PWFS sur le mode ϕ_i .

Jusqu'à présent dans ce manuscrit, les techniques proposées ne permettent pas de séparer proprement et dans le cas général les gains dynamiques et optiques. Dans le cadre de la méthode de dithering, les abaques, mesurées à SNR quasi-infini, donnent le gain optique. Le dithering en mettant les modes en boucle ouverte sert justement à mesurer le seul gain optique, pour une bonne correspondance entre la mesure et les abaques. Il est possible d'ajouter par dessus cela une optimisation du gain dynamique ; dans mon implémentation du dithering, j'ai laissé cet effet au seuillage du bruit négatif, et je n'avais donc pas connaissance du gain dynamique effectivement appliqué aux différents modes. De plus, l'utilisation d'abaques prises sur des DSP de front d'onde

résiduel figées est également une contrainte : comme discuté plus en détail dans la section A&A2019:8.2, l'application de NCPA modifie en soi la sensibilité de l'ASO en déplaçant son point de fonctionnement, limitant ainsi la validité des abaques, et augmentant de manière importante la complexité du processus de compensation.

Avec CLOSE tel que présenté jusqu'ici, nous n'avons pas non plus la séparabilité des gains optiques et dynamiques ; le gain dynamique effectif $\alpha_i G_i$ est optimisé, mais nous connaissons le seul G_i que nous appliquons, qui mélange donc les deux composantes optique et dynamique.

6.5.2 Gain optique et gain dynamique avec CLOSE

Mais l'utilisation de CLOSE ouvre des portes quant à la bonne utilisation que l'on peut faire de la télémétrie, en particulier l'autocorrélation des pentes. J'ai présenté jusqu'à présent le seul critère d'asservissement sur l'autocorrélation normalisée pour un décalage de Δt . Mais nous pouvons mettre à profit l'autocorrélation modale pour d'autres décalages temporels. Mieux encore, la fonction d'autocorrélation des mesures ne dépend pas de la sensibilité de l'ASO, mais de la fonction de transfert complète de la boucle ; de fait, il est attendu que l'autocorrélation (normalisée) $m_i^*[k]$ dépende du seul gain dynamique de boucle $\alpha_i G_i$.

Je propose donc de reconstruire le gain dynamique $\alpha_i G_i$ lorsque la condition d'asservissement de CLOSE $\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} = r$ est satisfaite. Cette reconstruction est effectuée à partir de combinaisons linéaires des différents termes $\frac{m_i^*[k]}{m_i^*[0]}$, qui sont chacun des fonctions du SNR_i effectif dans les conditions présentes :

$$\left[\alpha_i G_i(\text{SNR}_i; \tau, r) \text{ tel que } \frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} = r \right] \approx \sum_k \xi_k \frac{m_i^*[k]}{m_i^*[0]}. \quad (6.21)$$

Seuls quelques coefficients ξ_k sont utiles. On peut éliminer d'office de la régression linéaire le terme $k = \Delta t$, qui est constant de valeur r et redondant avec le terme $k = 0$, qui vaut 1. On trouve aisément des combinaisons linéaires à partir d'au plus 4 décalages temporels k qui soient valables sur l'ensemble des SNR_i considérés.

Je montre sur la figure 6.11 les combinaisons linéaires proposées dans l'équation 6.21 pour des latences $\tau = 0, 1$ et 2 trames, et des consignes de CLOSE $r = -0.1, 0.0$ et 0.1 . Les combinaisons linéaires proposées ne dépendent que de ces deux paramètres, qui sont déjà strictement nécessaires pour mettre en œuvre la méthode CLOSE. En opérant cette reconstruction du gain dynamique $\alpha_i G_i$, j'obtiens par suite le gain optique $\alpha_i^{-1} = \frac{G_i}{\alpha_i G_i}$, et dispose donc ainsi de la possibilité de compenser proprement les NCPA.

Il reste néanmoins une réserve : les gains CLOSE présentés sur la figure 6.11, et donc les combinaisons linéaires de reconstruction associées, dépendent des DSP temporelles utilisées pour résoudre numériquement la contrainte $\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} = r$. Si les exemples présentés sur la figure 6.11 laissent certainement entrevoir qu'il existera une solution pour chaque mode, la problématique reste ouverte, avec possiblement une solution différente pour chaque mode, dépendant de la vitesse du vent, etc.

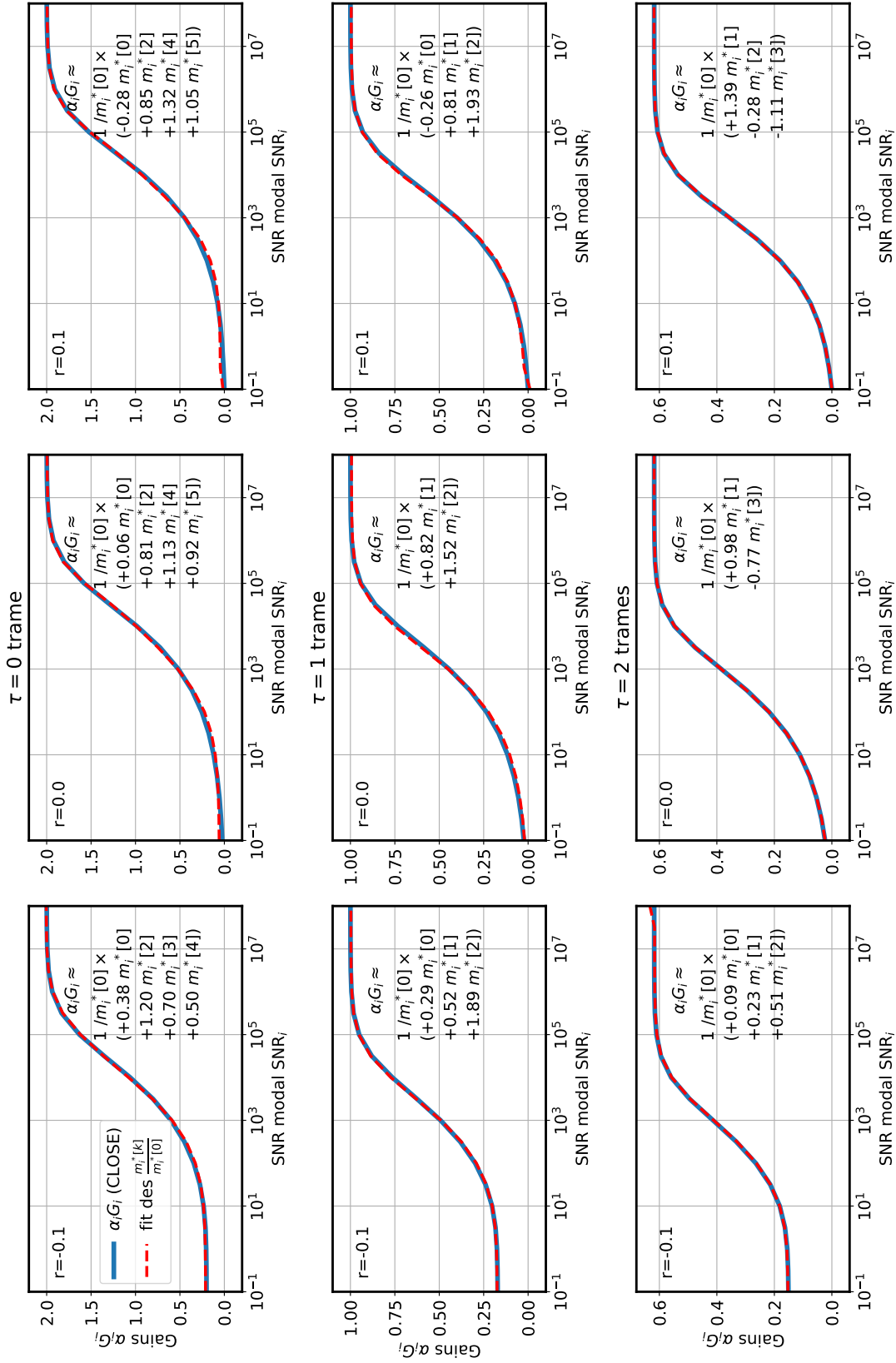


FIGURE 6.11: Reconstruction du gain dynamique $\alpha_i G_i$ à partir des mesures d'autocorrélation temporelle, alors que l'on se place à la solution fournie par CLOSE : $\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} = r$.

6.6 Quelques commentaires et perspectives

Avant de conclure ce chapitre et ce manuscrit, je propose ici quelques commentaires supplémentaires sur CLOSE, et sur les perspectives ouvertes avec cet algorithme.

Binaires et objets guides étendus

La problématique a été récemment relevée du contrôle du PWFS lorsque l'objet source est soit un objet étendu, soit une étoile multiple. J'ai déjà mentionné que l'on peut grossièrement dire qu'un speckle au plan focal n'est utile que s'il est modulé à travers les arêtes du PWFS. Ceci pose problème pour des étoiles doubles : la convergence des seuls tip-tilts place les deux composantes de part et d'autre du sommet, souvent avec une séparation des composantes supérieure à $2r_{\text{Mod}}$.

Deux approches principales sont possibles : la première est de corriger les pentes de référence pour les tip-tilts afin de placer la composante la plus brillante sur le sommet du PWFS ; la deuxième est d'appliquer une compensation modale adéquate pour éliminer les composantes fréquentielles mal vues à cause de la distribution lumineuse, et plus généralement rectifier la matrice d'interaction sur source ponctuelle pour l'adapter à la distribution angulaire d'intensité de l'astérisme guide.

Cette seconde possibilité a été le premier cas d'études de bout-en-bout avec CLOSE (Vidal et al., 2019; Rozel, 2019). La technique de Korciakoski et al. (2008) s'applique difficilement, car l'application de gains modaux sur les tip-tilts déplace le point de fonctionnement, invalidant la mesure précédente des gains modaux ; de même que la technique de dithering, ne pouvant interpoler une distribution de perte de sensibilité sur étoiles doubles à partir d'abaques sur des étoiles simples.

En revanche, le caractère temps-réel de CLOSE a imposé la méthode comme tout à fait adéquate ; la perte de performance par rapport à une étoile simple peut être limitée à quelques % de SR dans l'infrarouge, jusqu'à des séparations angulaires des composantes de l'ordre de 1". L'étude reste à compléter pour des sources dont la magnitude combinée est proche de la limite de sensibilité, mais nous avons néanmoins éliminé le risque pour les cas les plus gênants : les binaires brillantes séparées de quelques centaines de mas seulement peuvent être utilisées pour l'OA aussi bien que des étoiles simples.

Des estimations préliminaires à partir de modèles de formation stellaire et des données de la mission GAIA nous permettent d'estimer que l'applicabilité de CLOSE réduit la fraction de binaires problématiques de 25 % à seulement 4 % (calcul effectué dans la direction du centre galactique) des astérismes candidats pour la SCAO MICADO.

Enfin, nous avons également simulé (Vidal et al., 2019) l'asservissement de la SCAO MICADO sur Titan, pour obtenir, grâce à la rectification des contrôles modaux par CLOSE, une performance comparable à celle sur étoile simple. Cette compensation continue des composantes modales ouvre également d'autres portes : elle permet par exemple d'utiliser un reconstruteur calculé pour un rayon de modulation à d'autres

rayons de modulation ; et par extension de faire varier le rayon de modulation en temps réel sans qu’une substitution du restructeur soit nécessaire⁶. Le passage de modulé à non-modulé reste évidemment un des cas les plus difficiles et il n’est pas dit que cela soit possible, mais le cas est intéressant pour certaines XAO souhaitant effectuer une fermeture de boucle modulée, suivi d’un asservissement non-modulé à sensibilité maximale.

Des problématiques sur les Shack-Hartmann

Le fonctionnement de CLOSE à la fois pour des objets étendus et pour des ASO non-linéaires rappelle évidemment des problématiques connues sur les SH. Je mentionne très vite que des perspectives intéressantes s’ouvrent pour la re-linéarisation des mesures :

- pour les SH sur étoiles laser allongées,
- et pour le calcul de centre de gravité des SH quad-cell.

Dans ces cas, nous avons également besoin d’effectuer une correction du gain optique, et l’optimisation modale dynamique en fonction du SNR. Néanmoins, pour les étoiles laser allongées par exemple, ces deux compensations interviennent dans des espaces différents : la non-linéarité sur les pentes ; et la correction dynamique sur les modes.

On peut donc envisager un contrôle automatisé à la CLOSE, réparti par des asservissements simultanés dans plusieurs espaces – les autocorrélations des pentes, des modes et des commandes seraient calculées –, et avec des contraintes globales supplémentaires sur les différents vecteurs de G_i pour éviter une sur-détermination du problème.

Adéquation spécifique de CLOSE aux PWFS

Si les développements présentés dans ce chapitre s’inscrivent dans la suite du chapitre 5, et concernent en premier lieu le 4PWFS, la relation que j’ai déjà évoquée entre le formalisme convolutif (Fauvarque et al., 2019) et la compensation modale du gain optique laisse immédiatement envisager une généralisation de CLOSE à un certain nombre d’ASO à filtrage de Fourier.

Mais il faut souligner quelques points qui font que le fonctionnement de CLOSE, bien que décrit autour d’un modèle d’ASO plus général, ne s’applique pas nécessairement (ou du moins pas sans effort supplémentaire) à toutes les formes de non-linéarité et à tous les ASO – à filtrage de Fourier ou non.

Je décrirai la bonne adéquation des PWFS par deux critères principaux. Premièrement, la non-linéarité peut être décrite efficacement au premier ordre par une linéarisation autour du point de fonctionnement typique ; simplement, cette linéarisation diffère de celle calibrée sur front d’onde plan. Ce comportement “presque linéaire mais inconnu” sur lequel se basent les démonstrations de ce chapitre est adapté à

6. Et on retrouve cette adaptabilité avec le contrôle temps-réel des gains modaux par modèles convolutifs (Chambouleyron et al., 2019).

CLOSE, qui pourrait avoir plus de difficultés avec des ASO dont la réponse n'est pas (ou est difficilement) linéarisable avec une certaine dynamique de validité autour du point de fonctionnement.

Le seconde bonne propriété est l'effet auto-stabilisateur des PWFS : le point de fonctionnement idéal du PWFS est celui de SR maximal, et est aussi celui de sensibilité maximale. Ceci fait que les variations du front d'onde résiduel et les différentes perturbations de la boucle vont toujours dans la même direction d'une baisse de sensibilité ; le PWFS fournit alors un équilibre stable par rapport aux régimes divergents transitoires qui peuvent survenir alors que CLOSE augmente brièvement le gain au delà de la limite critique. La baisse de sensibilité systématique amortit les divergences et améliore la stabilité de l'OA.

Nous n'avons actuellement que très peu d'expérience pour des systèmes qui ne respecteraient pas ce critère – mais notons qu'un PWFS avec des NCPA importantes rentre dans cette catégorie.

Divergences et saturation

Les essais de CLOSE sur CANARY ont également démontré qu'une bonne gestion des saturations est nécessaire pour garantir la stabilité de la boucle. En effet, si un des composants de la boucle parvient à saturation, logicielle ou physique, l'implémentation de CLOSE telle que proposée ici tend à augmenter continûment le gain, sans jamais obtenir de retour dans la télémétrie. La divergence se poursuit alors indéfiniment, saturant progressivement l'ensemble des composants de la boucle si rien n'est fait.

Ceci pour dire qu'il faudra prochainement ajouter à l'implémentation proposée dans ce chapitre un ensemble de garde-fous pour garantir la stabilité en cas de perte de rétroaction de la boucle CLOSE.

Vers des stratégies de calibration sur le ciel

Enfin, je propose un dernier commentaire sur les stratégies de calibration de matrices d'interaction sur le ciel, qui s'imposent comme absolument nécessaires sur l'ELT, celui-ci ne disposant pas de source de calibration en amont du miroir M4.

Il est donc nécessaire d'acquérir les matrices d'interactions en conditions turbulentes, et une des stratégies pressenties est une mesure par blocs avec fermeture de boucle progressive. On mesure la matrice d'interaction des plus bas ordres en boucle ouverte, puis la boucle est fermée sur ces modes. Un dithering est alors introduit pour mesurer la matrice d'interaction du bloc suivant, etc.

Avec un PWFS, ces incréments de la qualité de correction modifient à chaque fois la distribution de turbulence résiduelle, et invalident partiellement les blocs de matrice d'interaction déjà mesurés. C'est ainsi qu'un algorithme de compensation de sensibilité en temps réel peut, à l'aide de développements spécifiques, devenir un atout intéressant pour les calibrations de l'OA qui s'effectueront directement sur le ciel.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Les trois parties de cette thèse m'ont permis d'analyser de nombreuses thématiques et problématiques de l'OA propres aux développements des futures SCAO à analyseur pyramide à très haute résolution pour les ELT.

J'ai rappelé, dans les deux premiers chapitres, les principes généraux de l'astrométrie optique et de la turbulence atmosphérique ; puis, j'y ai présenté les différents composants des systèmes d'optique adaptative : miroirs déformables, ASO, lois de commande, ainsi que les systèmes plus complexes d'OA multi-DM et multi-ASO. L'accent principal porte sur les développements nécessaires à la préparation des SCAO sur l'ELT fonctionnant à l'aide d'analyseurs pyramide, l'objet de cette thèse étant de permettre une avancée pour bien étudier, comprendre, contrôler, et enfin maîtriser cet ASO. J'ai donc présenté, à travers plusieurs approches basées sur l'optique géométrique, l'optique ondulatoire, ou la théorie des systèmes linéaires, une fraction que j'espère utile des éléments pertinents à la mise en œuvre du PWFS. J'ai également présenté des éléments d'analyse de la boucle d'OA connexes à l'ASO, mais qui se sont révélés d'une importance particulière pour mes travaux : la définition d'une base modale appropriée ; l'optimisation des lois de commande ; ou encore l'analyse de sensibilité dans le domaine des fréquences spatiales par exemple.

Dans la seconde partie de ce mémoire, j'ai présenté la mise en œuvre pratique du banc PYRCADO, démonstrateur de boucle SCAO à très haute résolution, utilisant un SLM en plan pupille comme actionneur sur la phase et un PWFS dont la résolution peut aller jusqu'à 260×260 sous-ouvertures.

Cette expérience a été l'occasion d'importants développements – en particulier en terme d'implémentation logicielle – sur les méthodes d'étalonnage des OA à PWFS et des démonstrateurs à SLM. J'ai mis en avant les caractérisations que j'ai conçues et effectuées pour les sous-systèmes principaux de PYRCADO : positionnement opto-géométrique du PWFS et du SLM ; et l'étalonnage et mise en œuvre du miroir de modulation et de sa carte de génération de signaux.

Autant d'étapes pour définir un processus fiable et facilement répétable qui amène PYRCADO d'un état d'assemblage brut à un état opérationnel pour mesurer et agir correctement sur les fronts d'onde. Ces développements ont permis d'aller jusqu'aux premières fermetures de boucle SCAO sur le banc PYRCADO, démontrant une performance conforme aux budgets d'erreurs prévisionnels, avec un SR à 633 nm de 20 % pour $r_0 = 20$ cm sur un télescope simulé de 18 m de diamètre et muni d'un DM 39×39 . Bien entendu, les travaux présentés dans les parties II et III ne le sont pas dans un ordre chronologique, et les algorithmes ont été définis à travers un processus

itératif : ils sont autant les clés qui permettent une bonne fermeture de boucle sur le banc que les fruits des constatations expérimentales faites sur PYRCADO.

Fort à propos, j'ai présenté dans la troisième partie de cette thèse plusieurs problématiques critiques pour la bonne mise en œuvre d'un PWFS à très hauts ordres, et des analyses et algorithmes qui permettent de résoudre tout ou partie de ces problèmes. Ces chapitres sont également l'opportunité de développements analytiques, qui, entre le problème et la solution que je propose, permettent d'étoffer notre compréhension du système.

J'ai étudié dans le chapitre 4 l'impact sur la reconstruction du front d'onde des défauts de fabrication typiques d'un PWFS ; en étudiant les FTO associées aux différents termes de la mesure, il a été mis en valeur qu'une généralisation de la notion de pente du PWFS, bien qu'introduisant un doublement de la charge de calcul temps-réel, permet d'étendre la performance du PWFS idéal à des ASO souffrant d'importants mésalignements. Il s'ensuit que certaines des spécifications du prisme du PWFS sont grandement relâchées, offrant donc la possibilité d'obtenir à moindre coût des pièces optiques conformes. De manière plus générale, ces travaux sur le positionnement générique des quadrants sur le CCD permettent de démontrer qu'effectuer une reconstruction explicite du gradient de front d'onde est superflu, et par là même ouvrent la voie à la généralisation des méthodes appliquées au 4PWFS à d'autres ASO de la même classe, comme le 3PWFS.

Par suite, j'ai étudié dans le chapitre 5 les non-linéarités de type gain optique du PWFS, et ai proposé un algorithme de compensation. À travers de nombreuses analyses numériques, j'ai montré qu'une compensation modale de la non-linéarité est pertinente, et possiblement optimale sous les contraintes proposées, à condition d'utiliser une décomposition modale adéquate ; et de pouvoir inférer la distribution courante du front d'onde résiduel vu par l'ASO. De plus, l'étude des termes d'ordre supérieur de la non-linéarité par simulations numériques montre que ceux-ci ne sont pas réductibles dans cette approche – bien que les couplages non-linéaires entre modes varient aléatoirement et s'imposent comme contributeurs non-négligeables du budget d'erreur. L'utilisation d'un facteur scalaire bien choisi pour chaque mode est suffisante pour obtenir la performance nominale du PWFS.

Nous avons pu voir que cette compensation modale repousse la limite pour les étoiles guides de 0.5 à 1 magnitudes, et améliore substantiellement les performances pour des conditions turbulentes pires que la médiane. De plus, je propose un protocole complet pour intégrer cette compensation dans les conditions réelles d'exploitation du télescope : en introduisant sur le DM des signaux connus, contrôlés en boucle ouverte partielle, il est possible de mesurer la contribution de la non-linéarité, et par suite d'interpoler la compensation modale appropriée pour les conditions courantes. J'ai démontré que cette méthode de dithering s'accommodait de conditions turbulentes variables, en ne nécessitant pas de re-calibrations ou de jeux de paramètres spécifiques à l'objet guide utilisé.

Cette méthode de compensation automatique du gain optique, couplée aux généralisations permises par les travaux sur la notion de pente, ont d'ailleurs permis d'appliquer de manière uniforme aux 4PWFS et 3PWFS le meilleur des lois de contrôle développées, et ainsi d'apporter quelques éléments critiques relatifs à la performance possible d'un 3PWFS sur un ELT. Je démontre, pour l'ensemble des conditions testées au dimensionnement SCAO ELT, que le 4PWFS offre toujours une performance supérieure ou égale au 3PWFS, malgré les a priori usuels sur le budget d'erreur de RON.

Fort des résultats et études sur la non-linéarité présentés au chapitre 5, j'ai proposé dans le chapitre 6 l'algorithme CLOSE, dernier né des travaux effectués durant cette thèse. Si l'ambition initiale est la même que celle pour le dithering – compenser les non-linéarités sans a priori situationnels et sans intervention –, la méthode CLOSE apparaît largement supérieure : plus élégante, plus efficace, et plus générique. CLOSE se propose de mettre en œuvre un intégrateur adaptatif en temps réel, mettant à profit une relation d'asservissement entre les gains modaux de la boucle d'OA et l'autocorrélation de la télémétrie des pentes. De plus, la solution satisfaite par CLOSE est quasi-optimale au sens de la variance du résidu, et il en résulte simultanément une compensation idéale du gain optique sous l'approximation modale, et une minimisation des budgets d'erreurs temporels et de bruit. Si j'ai pu démontrer que la performance de bout-en-bout est conforme, pour le dimensionnement SCAO MICADO, aux meilleures performances atteintes jusqu'alors dans les mêmes conditions, les développements de CLOSE en restent à leurs préliminaires. Les derniers développements théoriques laissent entrevoir une possible ouverture vers la compensation des NCPA pour les ASO non-linéaires, un sujet encore épineux pour les PWFS à très hauts ordres.

Perspectives

Si les travaux menés pendant cette thèse permettent des avancées en terme de contrôle des PWFS à très hauts ordres, en particulier en terme de contrôle modal et de rectification des non-linéarités, un long chemin reste à parcourir d'ici à la première lumière des ELT dans la seconde moitié des années 2020.

Les algorithmes que je propose se doivent d'être raffinés et complétés avant d'arriver au télescope. En premier lieu, le banc PYRCADO sera mis à profit pour explorer plus avant les besoins et les performances des méthodes proposées, en particulier poursuivre le développement de CLOSE. Dans un second temps, les années 2020-2022 vont voir le déploiement au WHT du démonstrateur CANARDO sur le banc CANARY. Cette expérience, qui sera la démonstration des ASO et RTC de la SCAO MICADO, utilisera un DM ALPAO 64×64 , et sera l'occasion de tester sur le ciel les algorithmes proposés dans cette thèse ou leurs successeurs. L'expérience acquise pendant les nuits de CANARDO sera riche d'enseignements sur les PWFS pour les SCAO ELT, mais aussi pour les systèmes XAO visible qui seront déployés

sur les télescopes de 8-10 m dans la prochaine décennie.

Au delà des problématiques que j'ai étudié pendant cette thèse, il reste aussi à définir comment seront résolus d'autres problèmes qui interviendront pour la SCAO MICADO ou d'autres OA. Je citerai trois exemples : (1) la gestion des NCPA, avec pour MICADO un résidu de 120-150 nm RMS dans les 100 premiers modes après compensation optique durant le commissioning ; (2) l'évolution dynamique des mésalignements – car les miroirs M1, M4, et le CCD de l'ASO subissent des déplacements relatifs au cours d'une nuit d'observation ; et (3) la gestion de l'effet d'îlots, induit par la discontinuité de la mesure de front d'onde sous l'araignée supportant le miroir secondaire (large de plusieurs r_0 sur l'ELT).

La communauté de recherche en OA s'intéresse déjà activement à ces problèmes, dont la résolution est impérative ; si je ne les ai pas directement étudiés, il apparaît néanmoins que les analyses et algorithmes que je propose peuvent faire partie d'une solution. J'ai déjà présenté une ébauche quant à la compensation des NCPA avec CLOSE ; de plus CLOSE s'intègre bien avec la gestion des mésalignements et du piston différentiel (Bonnet, 2019 ; correction démontrée pour l'instant avec un PWFS dans l'infrarouge), à condition de traiter les étapes sur une base modale incluant les îlots ; et de bien séquencer la compensation, pour éviter les effets fratricides entre les boucles parallèles qui corrigent ces différents effets.

Par ailleurs, le contrôle du PWFS par tous les pixels plutôt que les cartes de pentes, en réintégrant dans la boucle les non-linéarités d'ordre pair, inclut une information qui travaille dans la bonne direction pour la reconstruction des pistons différentiels – même pour un ASO en lumière visible (Bertrou-Cantou et al., 2020) ; mais pour l'instant ce résultat est restreint à des r_0 dans la queue de distribution la plus favorable.

Je terminerai en mentionnant des perspectives de recherches plus lointaines : comme évoqué à la section 6.6, le contrôle adaptatif des gains modaux permet d'utiliser le PWFS avec une efficacité nominale sur des sources binaires ou étendues ; avec un tel outil, il est envisageable de pousser plus loin et de développer les lois de commande qui permettront d'utiliser efficacement un PWFS sur des étoiles laser, améliorant grandement la sensibilité par rapport à des SH pour de tels guidages. À encore plus long terme, les premiers éléments se mettent en place pour une reconstruction linéarisée de la turbulence à l'aide d'un PWFS opérant localement en boucle fermée ; ainsi, on pourra envisager des systèmes tomographiques (MOAO / MCAO) entièrement basés sur des PWFS, moins gourmands sur la puissance des lasers, et avec une meilleure couverture de ciel permise par un plus large choix d'étoiles naturelles pour les tip-tilts et focus.

Bibliographie

- Airy, G. B. 1835, “On the diffraction of an object-glass with circular aperture”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 5, 283 (cité à la page 6)
- Alvarez Diez, C. 2006, “A 3-sided pyramid wavefront sensor controlled by a neural network for adaptive optics to reach diffraction-limited imaging of the retina”, PhD thesis, Kirchhoff Institute for Physics (cité à la page 190)
- Babcock, H. W. 1953, “The Possibility of Compensating Astronomical Seeing”, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, 65, 229 (cité aux pages xvii et 30)
- Bakker, A. 2002, “Lecture 9”, in *Kolmogorov’s Theory Applied Computational Fluid Dynamics* (cité à la page 14)
- Baranec, C., Lloyd-Hart, M., & Hilton, N. M. 2006, “Tomographic reconstruction of stellar wavefronts from multiple laser guide stars”, *Proc. SPIE*, 6272 (cité à la page 68)
- Bardou, L. 2018, “Analyse de front d’onde sur étoile laser allongée pour l’optique adaptative de l’ELT”, PhD thesis, Observatoire de Paris - Univ. Sorbonne Paris Cité - Univ. Paris Diderot (cité à la page 68)
- Beckers, J. M. 1989, “Detailed compensation of atmospheric seeing using multiconjugate adaptive optics.”, *Proc. SPIE*, 1114, 215 (cité à la page 69)
- Bertrou-Cantou, A., Gendron, É., Rousset, G., et al. 2020, “Confusion in differential piston measurement with the pyramid wave-front sensor”, *In Prep.* (cité à la page 234)
- Biasi, R., Manetti, M., Andrighettoni, M., et al. 2016, “E-ELT M4 adaptive unit final design and construction : a progress report”, *Proc. SPIE*, 9909 (cité à la page 172)
- Bond, C. Z., Correia, C. M., Sauvage, J.-F., et al. 2017, “Optimized calibration of the adaptive optics system on the LAM bench”, in *5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes* (cité aux pages 172, 225 et 274)
- Bonnet, H. 2019, “Integrating and testing CLOSE within the ELT phasing station simulator”, *priv. comm* (cité à la page 234)
- Buey, T., Meslem, J., & Gendron, É. 2016, “PYRCADO test report”, *Tech. rep.*, ELT – MICADO consortium – LESIA Observatoire de Paris (cité à la page 81)
- Carlotti, A., Vérinaud, C., Gratadour, D., Westphal, M., & Beuzit, J.-L. 2014, “Modelization of a pyramid wavefront sensor for the E-ELT in the context of the COM-PASS project”, *Proc. SPIE*, 9148 (cité aux pages 141 et 264)

- Chambouleyron, V., Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., et al. 2019, “Modal gain optimization of the pyramid wave-front sensor using a convolutive model : from theory to experimental validation”, in 6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages 229 et 281)
- Chemla, F., Huet, J.-M., Deo, V., et al. 2019, “SAPHIR (Sensor Achromatic Pyramid High-Resolution) : a new concept of reflective pyramidal wavefront-sensor free from chromatic aberrations”, in 6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages 78, 79 et 256)
- Clénet, Y., Buey, T., Gendron, É., et al. 2018, “The MICADO first-light imager for the ELT : towards the preliminary design review of the MICADO-MAORY SCAO”, Proc. SPIE, 10703, 10703 (cité aux pages 172, 257, 274 et 281)
- Clénet, Y., Buey, T., Gendron, É., et al. 2019, “MICADO-MAORY SCAO Preliminary design, development plan and calibration strategies”, in 6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages xviii, 72 et 256)
- Clénet, Y., Buey, T. M., Rousset, G., et al. 2014, “Overview of the MICADO SCAO system”, Proc. SPIE, 9148 (cité aux pages 141 et 264)
- Clénet, Y., Kasper, M., Gendron, É., et al. 2006, “PSF reconstruction for NAOS-CONICA”, Proc. SPIE, 6272 (cité à la page 10)
- Clergeon, C. 2014, “Étude d’un analyseur de surface d’onde haute sensibilité pour l’optique adaptative extrême”, PhD thesis, Observatoire de Paris - Subaru National Astronomical Observatory of Japan (cité aux pages 49, 50, 52, 148, 172 et 281)
- Codona, J. L., Hart, M., Schatz, L. H., & Mateen, M. 2018, “Comparative performance of a 3-sided and 4-sided pyramid wavefront sensor”, in Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference (cité à la page 190)
- COMPASS. 2018, “COMPASS - GPU-based end-to-end AO simulation package”, anr-compass.github.io/compass (cité à la page 35)
- Conan, J.-M. 1994, “Etude de la correction partielle en optique adaptative”, PhD thesis, ONERA (cité à la page 23)
- Conan, J.-M., Rousset, G., & Madec, P.-Y. 1995, “Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence”, J. Opt. Soc. Am. A, 12, 1559 (cité aux pages 26, 208, 249, 251 et 281)
- Costa, J. B. 2005, “Modulation effect of the atmosphere in a pyramid wave-front sensor”, Appl. Opt., 44, 60 (cité à la page 281)
- Dai, G.-M. 1996, “Modal wave-front reconstruction with Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions”, J. Opt. Soc. Am. A, 13, 1218 (cité à la page 25)

- David, H. A. & Nagaraja, H. N. 2005, *Order Statistics*, Third Edition, ed. W. A. Shewhart & S. S. Wilks (John Wiley & Sons, Inc.) (cité à la page 141)
- Davies, R., Ageorges, N., Barl, L., et al. 2010, “MICADO : the E-ELT adaptive optics imaging camera”, *Proc. SPIE*, 7735 (cité aux pages 141, 264 et 274)
- Davies, R., Alves, J., Clénet, Y., et al. 2018, “The MICADO first light imager for the ELT : overview, operation, simulation”, *Proc. SPIE*, 10702, 107021S (cité aux pages xviii, 72, 256 et 281)
- Demerlé, M., Madec, P.-Y., & Rousset, G. 1994, “Servo-loop analysis for adaptive optics”, in *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, Vol. 423, 73 (cité à la page 57)
- Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al. 2018a, “Assessing and mitigating alignment defects of the pyramid wavefront sensor : a translation insensitive control method”, *Astronomy & Astrophysics*, 619, A56 (cité aux pages ix, 48, 49, 84, 86, 109, 123, 125, 128, 129, 143, 146, 147, 172, 177, 255, 274 et 281)
- Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al. 2018b, “A modal approach to optical gain compensation for the pyramid wavefront sensor”, *Proc. SPIE*, 10703 (cité aux pages x, 111, 112, 153, 172, 175, 177, 188, 218, 255, 265 et 281)
- Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al. 2019a, “A telescope-ready approach for modal compensation of pyramid wavefront sensor optical gain”, *Astronomy & Astrophysics*, 629, A107 (cité aux pages ix, 149, 154, 155, 156, 175, 177, 178, 182, 187, 189, 192, 205, 207, 216, 218, 222, 223, 255 et 281)
- Deo, V., Rozel, M., Bertrou-Cantou, A., et al. 2019b, “CLOSE : a self-regulating, best-performance tracker for modal integrator based ao loops”, in 6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages x, 114, 212, 255, 275 et 282)
- Deo, V., Vidal, F., Gendron, É., et al. 2017, “Enlarging the control space of the pyramid wavefront sensor : Numerical simulations and bench validation”, in 5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages x, 109, 141, 143, 144, 255, 259 et 274)
- Dessenne, C., Madec, P. Y., & Rousset, G. 1998, “Optimization of a predictive controller for closed-loop adaptive optics”, *Appl. Opt.*, 37, 4623 (cité à la page 281)
- Diolaiti, E., Ciliegi, P., Abicca, R., et al. 2016, “MAORY : adaptive optics module for the E-ELT”, *Proc. SPIE*, 9909 (cité aux pages xviii et 72)
- Downing, M., Amico, P., Brinkmann, M., et al. 2018, “Update on the development of WFS cameras at ESO for the ELT”, *Proc. SPIE*, 10703 (cité à la page 147)

- Ellerbroek, B. L. 1994, “First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes.”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 11, 783 (cité à la page 69)
- Esposito, S., Feeney, O., & Riccardi, A. 2000, “Laboratory test of a pyramid wavefront sensor”, *Proc. SPIE*, 4007, 416 (cité à la page 274)
- Esposito, S., Pinna, E., Puglisi, A., et al. 2015, “Non common path aberration correction with non linear WFSs”, in 4th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages 172, 225 et 281)
- Esposito, S. & Riccardi, A. 2001, “Pyramid wavefront sensor behavior in partial correction adaptive optic systems”, *Astronomy & Astrophysics*, 369, L9 (cité à la page 172)
- Esposito, S., Riccardi, A., Fini, L., et al. 2010, “First light AO (FLAO) system for LBT : final integration, acceptance test in Europe, and preliminary on-sky commissioning results”, *Proc. SPIE*, 7736 (cité aux pages xix, 40, 141, 172, 264 et 274)
- Esposito, S., Tubbs, R., Puglisi, A., et al. 2006, “High snr measurement of interaction matrix on-sky and in lab”, *Proc. SPIE*, 6272 (cité aux pages 55 et 172)
- Fanson, J., McCarthy, P., Bernstein, R., et al. 2018, “Overview and status of the Giant Magellan Telescope project”, *Proc. SPIE*, 10700 (cité aux pages 70 et 281)
- Fauvarque, O. 2017, “Optimisation des analyseurs de front d’onde à filtrage optique de fourier”, PhD thesis, Université d’Aix-Marseille - ED352 Physique et sciences de la matière - Laboratoire d’astrophysique de Marseille (cité aux pages 39, 48, 50, 57, 127, 148 et 181)
- Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., et al. 2019, “Kernel formalism applied to Fourier-based wave front sensing in presence of residual phases”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 36, 1241 (cité aux pages 57, 172, 181 et 229)
- Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O. 2016a, “General formalism for Fourier-based wave front sensing”, *Optica*, 3, 1440 (cité aux pages 49, 141, 172, 264 et 274)
- Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O. 2016b, “A general formalism for Fourier based wave front sensing : Application to the pyramid wave front sensors”, *Proc. SPIE*, 9909 (cité aux pages 53, 141, 148, 190, 264 et 274)
- Feautrier, P., Gach, J.-L., Balard, P., et al. 2010, “Characterization of OCam and CCD220 : the fastest and most sensitive camera to date for AO wavefront sensing”, *Proc. SPIE*, 7736 (cité à la page 147)
- Feautrier, P., Gach, J.-L., & Bério, P. 2016, “Fast sub-electron detectors review for interferometry”, *Proc. SPIE*, 9907 (cité à la page 147)

- Ferreira, F. 2018, “Budget d’erreur en optique adaptative : Simulation numérique haute performance et modélisation dans la perspective des ELT”, PhD thesis, Observatoire de Paris - Univ. Sorbonne Paris Cité - Univ. Paris Diderot (cité à la page 36)
- Ferreira, F., Gendron, É., Rousset, G., & Gratadour, D. 2018a, “Numerical estimation of wavefront error breakdown in adaptive optics”, *Astronomy & Astrophysics*, 616, A102 (cité aux pages 36, 141, 172, 181, 274 et 281)
- Ferreira, F., Gratadour, D., Sevin, A., et al. 2018b, “Real-time end-to-end AO simulations at ELT scale on multiple GPUs with the COMPASS platform”, *Proc. SPIE*, 10703, 1070347 (cité aux pages 35, 172 et 257)
- Flanagan, M., Montera, D., Brown, J., & Steinbock, M. 2019, “Adaptive gain control for adaptive optics close loop”, in 6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité à la page 216)
- Foucault, L. 1859, “Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté”, *Annales de l’observatoire impérial de Paris*, 5, 197 (cité à la page 40)
- Foy, R. & Labeyrie, A. 1985, “Feasibility of adaptive telescope with laser probe”, *Astronomy & Astrophysics*, 152, L29 (cité à la page 67)
- Frazin, R. A. 2018, “Efficient, nonlinear phase estimation with the nonmodulated pyramid wavefront sensor”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 35, 594 (cité aux pages 57, 172 et 274)
- Fresnel, A. 1870, Ch. Premier mémoire sur la diffraction de la lumière (1815), *Œuvres complètes d’Augustin Fresnel*, ed. I. Impériale (Senarmont, Henri de and Verdet, Émile and Fresnel, Léonor) (cité à la page 6)
- Fried, D. L. 1966, “Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures”, *J. Opt. Soc. Am.*, 56, 1372 (cité aux pages 15 et 23)
- Fried, D. L. 1982, “Anisoplanatism in adaptive optics”, *J. Opt. Soc. Am.*, 72, 52 (cité à la page 66)
- Fried, D. L. 1990, “Time-delay-induced mean-square error in adaptive optics”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 7, 1224 (cité à la page 16)
- Fried, D. L. & Belsher, J. F. 1994, “Analysis of fundamental limits to artificial-guide-star adaptive-optics-system performance for astronomical imaging.”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 11, 277 (cité à la page 68)
- Fuensalida, J. J., Chueca, S., Delgado, J. M., et al. 2004, “Turbulence profiles in the observatories of the Canary islands : preliminary statistics for adaptive optics”, *Proc. SPIE*, 5382 (cité à la page 17)

- Gaessler, W., Takami, H., Takato, N., et al. 2002, “First results from the Subaru AO system”, *Proc. SPIE*, 4494 (cité aux pages xviii et 30)
- Gaffard, J.-P. & Boyer, C. 1987, “Adaptive optics for optimization of image resolution”, *Appl. Opt.*, 26, 3772 (cité à la page 36)
- Gendron, É. 1995, “Optimisation de la commande modale en optique adaptative : applications à l’astronomie”, PhD thesis, Univ. Paris Diderot (cité aux pages 36, 249, 251 et 281)
- Gendron, É. 2017, “Focal plane camera pixel scale calibration using non-redundant aperture masks”, priv. comm. (cité à la page 100)
- Gendron, É. 2019, “Testing CLOSE algorithm for tip-tilt control on the CANARY experiment : lessons learned”, priv. comm. (cité à la page 214)
- Gendron, É., Brangier, M., Chenegros, G., et al. 2010, “A new sensor for laser tomography on ELTs”, in 1st AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes, EDP Sciences, 05003 (cité aux pages 42, 141 et 274)
- Gendron, É. & Léna, P. 1994, “Astronomical adaptive optics. 1 : Modal control optimization”, *Astronomy & Astrophysics*, 291, 337 (cité aux pages 59, 60, 61, 141, 172, 204, 205, 214, 215, 264 et 281)
- Gendron, É. & Léna, P. 1996, “Single layer atmospheric turbulence demonstrated by adaptive optics observations”, *Astrophysics and Space Science*, 239, 221 (cité à la page 16)
- Gendron, É., Vidal, F., Brangier, M., et al. 2011, “MOAO first on-sky demonstration with CANARY”, *Astronomy & Astrophysics Letters*, 529, L2 (cité à la page 69)
- Ghedina, A., Cecconi, M., Ragazzoni, R., et al. 2003, “On-sky test of the pyramid wavefront sensor”, *Proc. SPIE*, 4839 (cité à la page 40)
- Gilles, L. 2005, “Closed-loop stability and performance analysis of least-squares and minimum-variance control algorithms for multiconjugate adaptive optics”, *Appl. Opt.*, 44, 993 (cité à la page 58)
- Gilles, L. & Ellerbroek, B. 2006, “Shack-Hartmann wavefront sensing with elongated sodium laser beacons : centroiding versus matched filtering”, *Appl. Opt.*, 45, 6568 (cité à la page 68)
- Gladstone, J. H. & Dale, T. P. 1863, “Researches on the refraction, dispersion and sensitiveness of liquids”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 153, 317 (cité à la page 11)
- Gonsalves, R. A. 1982, “Phase retrieval and diversity in adaptive optics”, *Opt. Eng.*, 21, 215829 (cité à la page 66)

- Gratadour, D., Dipper, N., Biasi, R., et al. 2016, “Green FLASH : energy efficient real-time control for AO”, Proc. SPIE, 9909 (cité aux pages 141 et 264)
- Gratadour, D., Ferreira, F., Sevin, A., et al. 2016, “COMPASS : status update and long term development plan”, Proc. SPIE, 9909 (cité à la page 281)
- Gratadour, D., Puech, M., Vérinaud, C., et al. 2014, “COMPASS : an efficient, scalable and versatile numerical platform for the development of ELT AO systems”, Proc. SPIE, 9148 (cité aux pages 141, 264 et 274)
- Greenwood, D. P. 1977, “Bandwidth specification for adaptive optics systems”, J. Opt. Soc. Am., 67, 390 (cité à la page 64)
- Guyon, O. 2005, “Limits of adaptive optics for high-contrast imaging”, Astrophysical Journal, 629 (cité aux pages xix, 50, 112, 148 et 281)
- Guyon, O., Martinache, F., Clergeon, C., et al. 2011, “Wavefront control with the subaru coronagraphic extreme adaptive optics (SCExAO) system”, Proc. SPIE, 8149, 8149 (cité aux pages xix, 49 et 172)
- Hammer, F., Sayède, F., Gendron, E., et al. 2002, “The FALCON Concept : Multi-Object Spectroscopy Combined with MCAO in Near-IR”, in Scientific Drivers for ESO Future VLT/VLTI Instrumentation, ed. J. Bergeron & G. Monnet, 139 (cité à la page 69)
- Hardy, J. W., Lefebvre, J. E., & Koliopoulos, C. L. 1977, “Real-time atmospheric compensation”, J. Opt. Soc. Am., 67, 360 (cité à la page 30)
- Hartmann, J. 1900, “Bemerkungen über den Bau und die Justirung von Spektrographen (Remarks on the construction and adjustment of spectrographs)”, Berlin : Julius Springer, 20, 17 (cité à la page 38)
- Héritier, C. T. 2018, “Ao calibration strategy for the elt : toward a Pseudo-Synthetic interaction matrix”, seminar at LESIA - February 2018 (cité à la page 72)
- Héritier, C. T., Esposito, S., Fusco, T., et al. 2018, “Analysis of AO modeling for pseudo-synthetic interaction matrix at the LBT”, Proc. SPIE, 10703 (cité à la page 172)
- Horwitz, B. A. 1994, “New pupil-plane wavefront gradient sensor”, in 1994 Symposium on Astronomical Telescopes & Instrumentation for the 21st Century, International Society for Optics and Photonics, 496–501 (cité aux pages 41, 141 et 274)
- Hubble, E. 1949, “First photographs with the 200-inch Hale telescope”, Pub. Astron. Soc. Pac., 61, 121 (cité à la page 30)
- Hudgin, R. 1977, “Wave-front compensation error due to finite corrector-element size”, J. Opt. Soc. Am., 67, 393 (cité à la page 63)

- Hutterer, V. & Ramlau, R. 2018, “Nonlinear wavefront reconstruction methods for pyramid sensors using Landweber and Landweber–Kaczmarz iterations”, *Applied optics*, 57, 8790 (cité aux pages 57 et 172)
- Hutterer, V., Ramlau, R., & Shatokhina, I. 2018, “Real-time adaptive optics with pyramid wavefront sensors : a theoretical analysis of the pyramid sensor model”, arXiv preprint arXiv :1810.00682 (cité aux pages xix et 57)
- Inoue, T., Tanaka, H., Fukuchi, N., et al. 2007, “LCOS spatial light modulator controlled by 12-bit signals for optical phase-only modulation”, *Proc. SPIE*, 6487, 6487 (cité aux pages 88 et 141)
- Janin-Potiron, P., Chambouleyron, V., Schatz, L., et al. 2019, “Adaptive optics with programmable Fourier-based wavefront sensors : a spatial light modulator approach to the LOOPS testbed”, arXiv e-prints, arXiv :1903.06599 (cité aux pages 53, 89 et 190)
- Jolissaint, L., Véran, J.-P., & Marino, J. 2004, “OPERA, an automatic PSF reconstruction software for Shack-Hartmann AO systems : application to Altair”, *Proc. SPIE*, 5490 (cité à la page 10)
- Kendrick, R. L., Acton, D. S., & Duncan, T. S. 1994, “Phase-diversity wave-front sensor for imaging systems”, *Appl. Opt.*, 33, 6533 (cité à la page 39)
- Kolb, J., Madec, P.-Y., Arsenault, R., et al. 2017, “AOF – first on-sky performance of the GALACSI GLAO mode (or how to close 10 loops in less than 5 minutes)”, in 5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité à la page 67)
- Kolb, J., Madec, P.-Y., Le Louarn, M., Muller, N., & Béchet, C. 2012, “Calibration strategy of the aof”, *Proc. SPIE*, 8447 (cité à la page 172)
- Kolmogorov, A. N. 1941, “The local structure of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 301, 30 (cité à la page 11)
- Kolmogorov, A. N. 1962, “A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number”, *Journal of Fluid Mechanics*, 13, 82 (cité à la page 11)
- Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Le Louarn, M. 2008, “Applying sensitivity compensation for pyramid wavefront sensor in different conditions”, *Proc. SPIE*, 7015 (cité aux pages xix, 141, 172, 264, 274 et 281)
- Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Le Louarn, M. 2008, “Improving the performance of a pyramid wavefront sensor with modal sensitivity compensation”, *Appl. Opt.*, 47, 79 (cité aux pages 141, 150, 155, 172, 228, 264, 274 et 281)

- Korkiakoski, V., Vérinaud, C., Louarn, M. L., & Conan, R. 2007, “Comparison between a model-based and a conventional pyramid sensor reconstructor”, *Appl. Opt.*, 46, 6176 (cité à la page 264)
- Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Petit, C., Conan, J.-M., & de Lesegno, P. V. 2006, “Optimal control, observers and integrators in adaptive optics”, *Opt. Express*, 14, 7464 (cité à la page 58)
- Linnik, V. P. 1957, “On the theoretical possibility of decreasing the influence of the atmosphere on the image of a star”, *Optika i Spektroskopiya - Optics and Spectroscopy*, 3, 401 (cité à la page 30)
- Liu, F. & Sanders, G. 2018, “Thirty meter telescope project status”, *Proc. SPIE*, 10700 (cité aux pages 70 et 281)
- Love, G. D. 1999, Ch. Liquid crystal adaptive optics, *Adaptive optics engineering handbook*, ed. R. K. Tyson (CRC Press), 273–284 (cité à la page 88)
- Madec, P.-Y. 1999, Ch. Control techniques, *Adaptive optics in astronomy*, ed. F. Roddier (Cambridge University Press), 131–154 (cité à la page 57)
- Mahajan, V. N. 1982, “Strehl ratio for primary aberrations : some analytical results for circular and annular pupils”, *J. Opt. Soc. Am.*, 72, 1258 (cité à la page 21)
- Malus, É. L. 1811, “Mémoire sur de nouveaux phénomènes d’optique”, *Journal de Physique*, 72, 393 (cité à la page 4)
- Milton, N. M., Lloyd-Hart, M., Baranec, C., et al. 2008, “Commissioning the MMT ground-layer and laser tomography adaptive optics systems”, *Proc. SPIE*, 7015, 701522 (cité à la page 69)
- Montera, D. A., Brown, J. M., Buckman, M. D., et al. 2018, “Adaptive gain in closed-loop tilt control and adaptive optics”, *Proc. SPIE*, 10703, 10703 (cité aux pages 204, 216 et 281)
- Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., et al. 2018, “HARMONI at the diffraction limit : from single conjugate to laser tomography adaptive optics”, *Proc. SPIE*, 10703 (cité aux pages 172 et 274)
- Noll, R. J. 1976, “Zernike polynomials and atmospheric turbulence”, *J. Opt. Soc. Am.*, 66, 207 (cité aux pages 22, 23 et 25)
- Oboukhov, A. M. 1941, “On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow”, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geogr. i Geofiz.*, 5, 453 (cité à la page 13)
- Oboukhov, A. M. 1962, “Some specific features of atmospheric turbulences”, *Journal of Fluid Mechanics*, 13, 77 (cité à la page 13)

- Osborn, J., Wilson, R., Butterley, T., et al. 2013, “E-ELT turbulence profiling with stereo-SCIDAR at Paranal”, in 3rd AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes, EDP Sciences (cité à la page 15)
- Petit, C., Quiros-Pacheco, F., Conan, J.-M., et al. 2004, “Kalmán-filter-based control for adaptive optics”, Proc. SPIE, 5490, 1414 (cité à la page 58)
- Pinna, E., Agapito, G., Quirós-Pacheco, F., et al. 2014, “Design and numerical simulations of the GMT natural guide star WFS”, Proc. SPIE, 9148 (cité aux pages 172 et 274)
- Pinna, E., Briguglio, R. A., Bonaglia, M., et al. 2017, “Pyramid prototyping for the GMT”, Wavefront Sensing in the VLT era II - Padova (cité aux pages 128 et 141)
- Platt, B. C. & Shack, R. 2001, “History and principles of Shack-Hartmann wavefront sensing”, Journal of Refractive Surgery, 17, S573 (cité à la page 38)
- Primot, J., Rousset, G., & Fontanella, J. C. 1990, “Deconvolution from wave-front sensing : a new technique for compensating turbulence-degraded images”, J. Opt. Soc. Am. A, 7, 1598 (cité à la page 38)
- Racine, R. 1996, “The telescopic point-spread function”, Pub. Astron. Soc. Pac., 108, 699 (cité à la page 18)
- Ragazzoni, R. 1996, “Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism”, J. Mod. Opt., 43, 289 (cité aux pages xix, 40, 128, 141, 150, 172, 264, 274 et 281)
- Ragazzoni, R., Diolaiti, E., Farinato, J., et al. 2002a, “Multiple field of view layer-oriented adaptive optics-Nearly whole sky coverage on 8 m class telescopes and beyond”, Astronomy & Astrophysics, 396, 731 (cité à la page 141)
- Ragazzoni, R., Diolaiti, E., & Vernet, E. 2002b, “A pyramid wavefront sensor with no dynamic modulation”, Opt. Commun., 208, 51 (cité aux pages 141 et 264)
- Ragazzoni, R. & Farinato, J. 1999, “Sensitivity of a pyramidal wave front sensor in closed loop adaptive optics”, Astronomy & Astrophysics, 350, L23 (cité aux pages xix, 141, 172, 264 et 274)
- Ragazzoni, R., Farinato, J., & Marchetti, E. 2000a, “Adaptive optics for 100-m-class telescopes : new challenges require new solutions”, Proc. SPIE, 4007 (cité à la page 69)
- Ragazzoni, R., Ghedina, A., Baruffolo, A., et al. 2000b, “Testing the pyramid wavefront sensor on the sky”, Proc. SPIE, 4007 (cité aux pages xix et 40)
- Rigaut, F. 2002, “Ground Conjugate Wide Field Adaptive Optics for the ELTs”, in European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings, Vol. 58, European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings, ed. E. Vernet, R. Ragazzoni, S. Esposito, & N. Hubin, 11 (cité à la page 69)

- Rigaut, F. & Gendron, E. 1992, “Laser guide star in adaptive optics - The tilt determination problem”, *Astronomy & Astrophysics*, 261, 677 (cité aux pages 67 et 68)
- Rigaut, F., Neichel, B., Bec, M., et al. 2010, “A sample of gems calibrations and control schemes”, in 1st AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes, EDP Sciences (cité à la page 172)
- Rigaut, F., Neichel, B., Boccas, M., et al. 2014, “Gemini multiconjugate adaptive optics system review - I. Design, trade-offs and integration”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 437, 2361 (cité à la page 67)
- Rigaut, F., Rousset, G., Kern, P., et al. 1991, “Adaptive optics on a 3.6-m telescope : results and performance”, *Astronomy & Astrophysics*, 250, 280 (cité à la page 30)
- Rigaut, F., Véran, J.-P., & Lai, O. 1998, “Analytical model for Shack-Hartmann-based adaptive optics systems”, *Proc. SPIE*, 3353 (cité à la page 63)
- Roberts Jr, L. C., Perrin, M. D., Marchis, F., et al. 2004, “Is that really your Strehl ratio?”, *Proc. SPIE*, 5490, 504 (cité à la page 21)
- Roddier, F. 1981, “The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy”, *Prog. Optics*, 19, 281 (cité aux pages 13 et 15)
- Roddier, F., Gilli, J. M., & Lund, G. 1982, “On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry”, *J. Optics (Paris)*, 13, 263 (cité à la page 18)
- Roddier, F., Roddier, C., & Roddier, N. 1988, “Curvature sensing : a new wavefront sensing method.”, *Statistical Optics*, 976, 203 (cité à la page 39)
- Roddier, F., Séchaud, M., Rousset, G., et al. 1999, *Adaptive Optics in Astronomy*, ed. F. Roddier (Cambridge University Press) (cité à la page 30)
- Rousset, G. 1999, Ch. Wave-front compensation devices, *Adaptive optics in astronomy*, ed. F. Roddier (Cambridge University Press), 91–130 (cité à la page 38)
- Rousset, G., Fontanella, J. C., Kern, P., et al. 1990, “First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics”, *Astronomy & Astrophysics Letters*, 230, L29 (cité aux pages xviii et 30)
- Rousset, G., Lacombe, F., Puget, P., et al. 2003, “NAOS, the first ao system of the VLT : on-sky performance”, *Proc. SPIE*, 4839 (cité aux pages xviii et 30)
- Rousset, G., Primot, J., & Fontanella, J. C. 1987, “Visible wavefront sensor development”, LEST Foundation, Technical report, 28, 17 (cité aux pages 38 et 64)
- Rozel, M. 2019, “Étude d’un analyseur de front d’onde pyramide pour l’ELT sur étoiles doubles”, Master’s thesis, Observatoire de Paris - LESIA - M2 AAIS (cité aux pages 201 et 228)

- Schatz, L., Males, J., Hart, M., et al. 2017, “Pyramid wavefront sensing update for MagAO-X”, *Wavefront Sensing in the VLT era II - Padova* (cité à la page 190)
- Séchaud, M. 1999, Ch. Wave-front compensation devices, *Adaptive optics in astronomy*, ed. F. Roddier (Cambridge University Press), 57–90 (cité à la page 32)
- Sedghi, B., Muller, M., Bonnet, H., Dimmler, M., & Bauvir, B. 2010, “Field stabilization (tip/tilt control) of E-ELT”, *Proc. SPIE*, 7733 (cité aux pages 59 et 172)
- Shack, R. 1971, “Production and use of a lenticular Hartmann screen”, *J. Opt. Soc. Am.*, 61, 656 (cité aux pages xix et 38)
- Shatokhina, I. 2014, “Fast wavefront reconstruction algorithms for eXtreme Adaptive Optics”, PhD thesis, Johannes Kepler Universität Linz (cité aux pages xix, 48, 50, 141, 172 et 264)
- Shatokhina, I., Obereder, A., & Ramlau, R. 2014, “Fast algorithm for wavefront reconstruction in XAO/SCAO with pyramid wavefront sensor”, *Proc. SPIE*, 9148, 91480P (cité à la page 128)
- Shatokhina, I., Obereder, A., Rosensteiner, M., & Ramlau, R. 2013, “Preprocessed cumulative reconstructor with domain decomposition : a fast wavefront reconstruction method for pyramid wavefront sensor”, *Appl. Opt.*, 52, 2640 (cité aux pages 57, 141 et 264)
- Strehl, K. 1895, “Aplanatische und fehlerhafte abbildung im fernrohr”, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 15, 362 (cité à la page 21)
- Tallon, M. & Foy, R. 1990, “Adaptive telescope with laser probe - Isoplanatism and cone effect”, *Astronomy & Astrophysics*, 235, 549 (cité à la page 68)
- Tamai, R., Cirasuolo, M., González, J. C., Koehler, B., & Tuti, M. 2016, “The E-ELT program status”, *Proc. SPIE*, 9906 (cité aux pages xviii, 70 et 281)
- Tatarski, V. I. 1961, *Wave propagation in a turbulent medium*, ed. McGraw-Hill (Translated by R. A Silverman) (cité à la page 14)
- Taylor, G. I. 1938, “The spectrum of turbulence”, *Proceedings of the Royal Society of London*, 164, 476 (cité à la page 16)
- van Kooten, M., Bradley, C., Véran, J.-P., Herriot, G., & Lardièrre, O. 2016, “Fast modulation and dithering on a pyramid wavefront sensor bench”, *Proc. SPIE*, 9909 (cité aux pages 190 et 274)
- Véran, J.-P., Esposito, S., Spanò, P., Herriot, G., & Andersen, D. 2016, “Pyramid versus Shack-Hartmann : Trade study results for the NFIRAOS NGS WFS”, in *4th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes* (cité aux pages 172 et 274)

- Véran, J.-P., Rigaut, F., Maître, H., & Rouan, D. 1997, “Estimation of the adaptive optics long-exposure point-spread function using control loop data”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 14, 3057 (cité aux pages 10 et 62)
- Vérinaud, C. 2004, “On the nature of the measurements provided by a pyramid wavefront sensor”, *Opt. Commun.*, 233, 27 (cité aux pages xix, 48, 50, 111, 128, 141, 172, 264 et 274)
- Vernet, E., Cayrel, M., Hubin, N., et al. 2014, “On the way to build the M4 Unit for the E-ELT”, *Proc. SPIE*, 9148 (cité à la page 71)
- Vidal, F. 2009, “Calibrations et reconstruction tomographique en optique adaptative multi-objet pour l’astronomie : Application au démonstrateur CANARY”, PhD thesis, Observatoire de Paris (cité à la page 78)
- Vidal, F., Ferreira, F., Deo, V., et al. 2017, “End-to-end simulations for the MICADO-MAORY SCAO mode”, in 5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages 141, 172 et 257)
- Vidal, F., Rozel, M., Deo, V., et al. 2019, “Analysis of the MICADO-MAORY SCAO performance”, in 6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages 201, 228, 256 et 281)
- Viotto, V., Bergomi, M., Dima, M., et al. 2016a, “PWFSs on GMCAO : a different approach to the non-linearity issue”, *Proc. SPIE*, 9909 (cité à la page 172)
- Viotto, V., Ragazzoni, R., Bergomi, M., Magrin, D., & Farinato, J. 2016b, “Expected gain in the pyramid wavefront sensor with limited Strehl ratio”, *Astronomy & Astrophysics*, 593, A100 (cité à la page 153)
- von Kármán, T. 1948, “Progress in the statistical theory of theory of turbulence”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 34, 530 (cité à la page 13)
- Wang, L., Véran, J.-P., & Ellerbroek, B. 2017, “Pyramid WFS tolerance study for NFIRAOS NGS AO”, in 5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (cité aux pages 141 et 274)
- Winker, D. M. 1991, “Effect of a finite outer scale on the Zernike decomposition of atmospheric turbulence outer scale”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 8, 1568 (cité à la page 25)
- Wizinowich, P. L., Acton, D. S., Lai, O., et al. 2000, “Performance of the WM Keck observatory natural guide star adaptive optics facility : the first year at the telescope”, *Proc. SPIE*, 4007, 2 (cité aux pages xviii et 30)
- Wizinowich, P. L., Le Mignant, D., Bouchez, A., et al. 2004, “Adaptive optics developments at Keck Observatory”, *Proc. SPIE*, 5490, 1 (cité à la page 67)

- Wyant, J. C. 1975, "Use of an AC heterodyne lateral shear interferometer with real-time correction systems", *Appl. Opt.*, 14, 2622 (cité à la page 39)
- Zernike, F. 1934, "Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method", *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 94, 377 (cité aux pages 22 et 39)

Spectre modal temporel incident pour un PWFS

Préliminaires

J'ai du obtenir, lors de mes premiers travaux sur CLOSE, une approximation correspondant au spectre modal temporel des mesures d'un PWFS. Cette distribution m'a été utile à travers l'exemple présenté à la section 6.2.2, et les multiples calculs numériques pour obtenir les solutions de gains MV et CLOSE à travers la section 6.3.

Je repars ici des équations 1.47 à 1.49 (Conan et al., 1995), qui donnent le spectre de puissance d'un mode de Zernike dans la turbulence. La décroissance asymptotique est alors en $\nu^{-\frac{17}{3}}$, au delà de la fréquence de coupure ν_c ; celle-ci est donnée par la vitesse du vent, l'ordre radial du mode et le diamètre du télescope. Cet appendice m'amenant à manipuler les deux, je note f les fréquences spatiales et ν les fréquences temporelles.

Par ailleurs, Conan et al. (1995) étudie le spectre temporel des mesures pour des ASO SH et courbure, obtenant des spectres de puissance asymptotiques respectivement en $\nu^{-\frac{11}{3}}$ et $\nu^{-\frac{5}{3}}$. Gendron (1995) relie ces spectres des mesures à ceux des modes, qui suivent donc – par argument de décorrélation des sous-ouvertures – ces mêmes lois asymptotiques en $\nu^{-\frac{11}{3}}$ et $\nu^{-\frac{5}{3}}$.

La densité spectrale de puissance d'un mode donné est donc – relativement au $\nu^{-\frac{17}{3}}$ de la turbulence – augmentée d'une puissance 2 lorsque la turbulence est mesurée à travers un SH, et 4 à travers un analyseur de courbure; il faut en effet compter sur le repliement de la turbulence par l'ASO : des modes de très hautes fréquences somment leur spectres à ceux des modes bien vus. La sensibilité étant pour les SH (resp. ASO courbure) croissante comme la fréquence spatiale d'un mode (resp. son carré), l'importance des repliements se voit renforcée dans les mesures.

La question se pose alors du spectre modal incident $|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2$ à considérer pour le mode ϕ_i vu à travers le repliement d'un PWFS, dont la sensibilité aux hautes fréquences (section 2.4.3) est constante. Au sens strict, ce spectre incident serait celui du prolongement à une dynamique infinie d'un PWFS linéarisé et opérant en boucle ouverte. Si cette situation n'est pas physiquement possible, le spectre construit sera tout à fait valide comme terme d'entrée dans le cadre des calculs menés à la section 6.2.2.

Formule numérique

J'ai donc mis en place un calcul numérique, effectuant la somme sur les ordres de repliement jusqu'aux très hautes fréquences :

$$|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \hat{\phi}_{\text{Réfer}} \left(\nu; 0.3N(k+1) \frac{\bar{v}}{D} \right) \right|^2 \times k f_k^{-\frac{11}{3}} f_k^s f_k^{-3}, \quad (\text{A.1})$$

où $|\hat{\phi}_{\text{Réfer}}(\nu; \nu_c)|^2$ définit le spectre turbulent de référence : de puissance unitaire, constant pour $\nu < \nu_c$ et décroissant comme $\nu^{-\frac{17}{3}}$ au delà. N est le nombre de sous-ouvertures à travers le diamètre, soit à une constante près l'ordre radial maximal vu sans repliement par l'ASO. Je décris la décomposition des autres termes dans cette sommation et leur justification dans la suite.

Découpage de la somme. Cette formule A.1 découle d'une discrétisation du plan de fréquence par l'ordre des repliements de la zone de Nyquist de l'ASO. Je pars d'un mode bien vu par l'ASO, qui est le terme $k = 0$.

Asymptotiquement, je regarde pour chaque terme de la somme les modes d'ordre radial de kN à $(k+1)N$. Ceci revient à considérer les répliques de la zone de Nyquist spatiale de l'ASO sur une couronne de rayon $\frac{kN}{D}$ et d'épaisseur $\frac{N}{D}$ dans le plan de fréquences spatiales. Ces modes portent les fréquences spatiales de norme typiquement de l'ordre de :

$$f_k = (k+1) \frac{N}{D} \quad (\text{A.2})$$

Fréquence de coupure ν_c^k . Ceci me donne donc la fréquence temporelle de coupure du spectre de ces modes, à partir de l'équation 1.49 :

$$\nu_c^k = 0.3N(k+1) \frac{\bar{v}}{D} \quad (\text{A.3})$$

Facteur k . Ces modes d'ordres radiaux kN à $(k+1)N$ sont en nombre de l'ordre de kN^2 , dont une fraction d'environ $\frac{1}{N^2}$ se replie sur le mode fondamental non-replié que je considère. Ceci car chaque réplique periodisée de la zone de Nyquist de l'ASO correspond aux $\approx N^2$ modes vus par l'ASO. Il faut donc compter un facteur k de nombre de modes considérés à la densité spectrale de puissance du k -ième terme de la somme.

Facteur $f_k^{-11/3}$: il correspond à la force du spectre de Kolmogorov (eq. 1.19) à la fréquence spatiale f_k .

Facteur f_k^s : la sensibilité de l'ASO aux fréquences spatiales f_k ; $s = 0$ pour un PWFS, $s = 1$ pour un SH et $s = 2$ pour un analyseur de courbure.

Facteur f_k^{-3} : l'atténuation due à la fonction de transfert spatiale de l'intégration par les sous-ouvertures (Gendron, 1995).

Vérification

La décomposition faite par l'équation A.1 permet une sommation très rapide jusqu'aux très grands ordres radiaux ; en pratique jusqu'à ce que ν_c^k excède la fréquence temporelle maximale utilisée dans le calcul.

Pour les résultats numériques présentés ici, je considère un télescope échantillonné par un ASO avec des sous-ouvertures de 50 cm, avec un vent de 10 m.s⁻¹, de sorte que la fréquence de coupure du mode fondamental étudié est de

$$\nu_c^0 = 0.3N \frac{\bar{v}}{D} = 6 \text{ Hz.} \quad (\text{A.4})$$

J'effectue les calculs numériques pour une fréquence maximale de 65 536 Hz ; la sommation A.1 est alors définie jusqu'à $k = 5\,460$.

Je vérifie tout d'abord les résultats de Conan et al. (1995) pour le SH et l'ASO courbure, que je montre sur les figures A.1 et A.2. On retrouve bien les dépendances asymptotiques en $\nu^{-\frac{11}{3}}$ et $\nu^{-\frac{5}{3}}$. Sur chacune de ces figures, je montre le spectre du fondamental $k = 0$ et des deux premiers ordres de repliement $k = 1$ et $k = 2$, le résultat de la sommation $|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2$, ainsi que cette somme corrigée de la puissance asymptotique attendue, normalisée par sa valeur à la fréquence de Nyquist.

Pour un PWFS

Un dernier calcul et on s'en va : j'applique maintenant la formule de sommation prise pour la sensibilité d'un PWFS, soit avec $s = 0$; je montre les résultats sur la figure A.3. On s'attend intuitivement à récupérer sur le comportement asymptotique une puissance 2 par rapport au SH. Néanmoins, la sommation pour le PWFS est tout juste dégénérée, de telle sorte que notre estimation asymptotique en $\nu^{-\frac{17}{3}}$ est visiblement sous-estimante.

Après un ajustement empirique pour trouver une meilleure description de l'asymptote, je propose donc une loi de puissance pour le repliement d'un PWFS :

$$|\hat{\phi}_{\text{Atm}}^i(\nu)|^2 \propto \nu^{-\frac{17}{3} + \frac{1}{8}}. \quad (\text{A.5})$$

Évidemment, on pourrait exploiter analytiquement la formule A.1 pour pouvoir obtenir le véritable développement asymptotique, ce que je ne ferai pas ici. Par suite, on pourra également exploiter soit un développement théorique, soit une méthode numérique telle que celle utilisée ici pour obtenir, par exemple, un budget d'erreur définitif de repliement pour un PWFS.

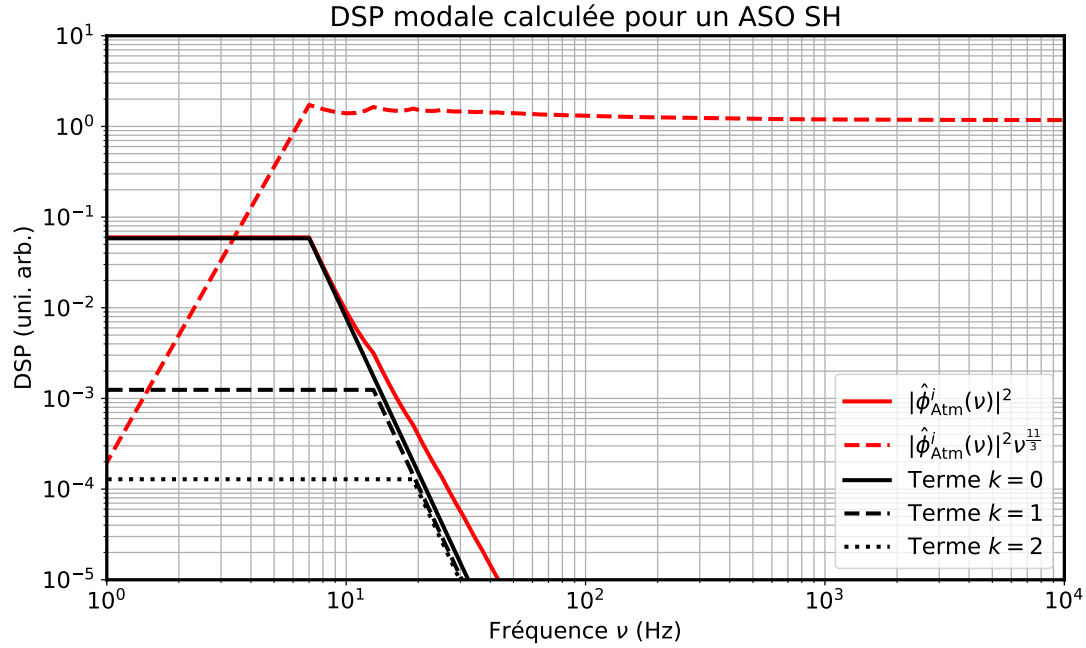


FIGURE A.1: Spectre de puissance modal de la turbulence à travers un SH, calculé à travers la formule A.1 de sommation sur le repliement. Rouge pointillé : résultat de la somme, corrigé d'une puissance $+\frac{11}{3}$ et normalisé pour valoir 1 à la fréquence de Nyquist.

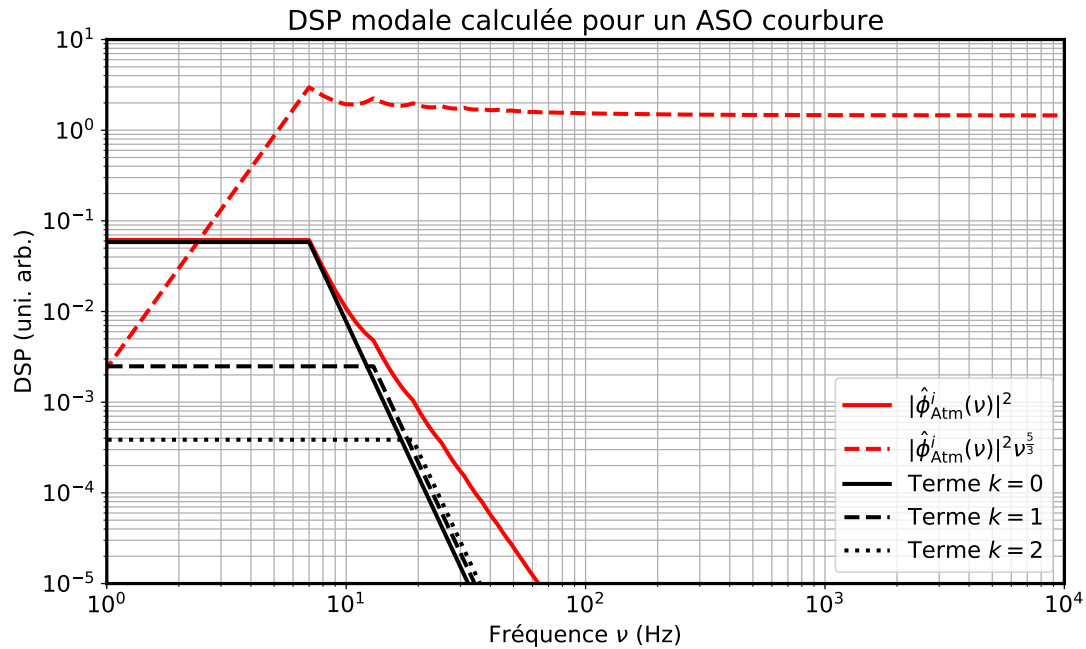


FIGURE A.2: Spectre de puissance modal de la turbulence à travers un analyseur de courbure. Rouge pointillé : résultat de la somme, corrigé d'une puissance $+\frac{5}{3}$ et normalisé pour valoir 1 à la fréquence de Nyquist.

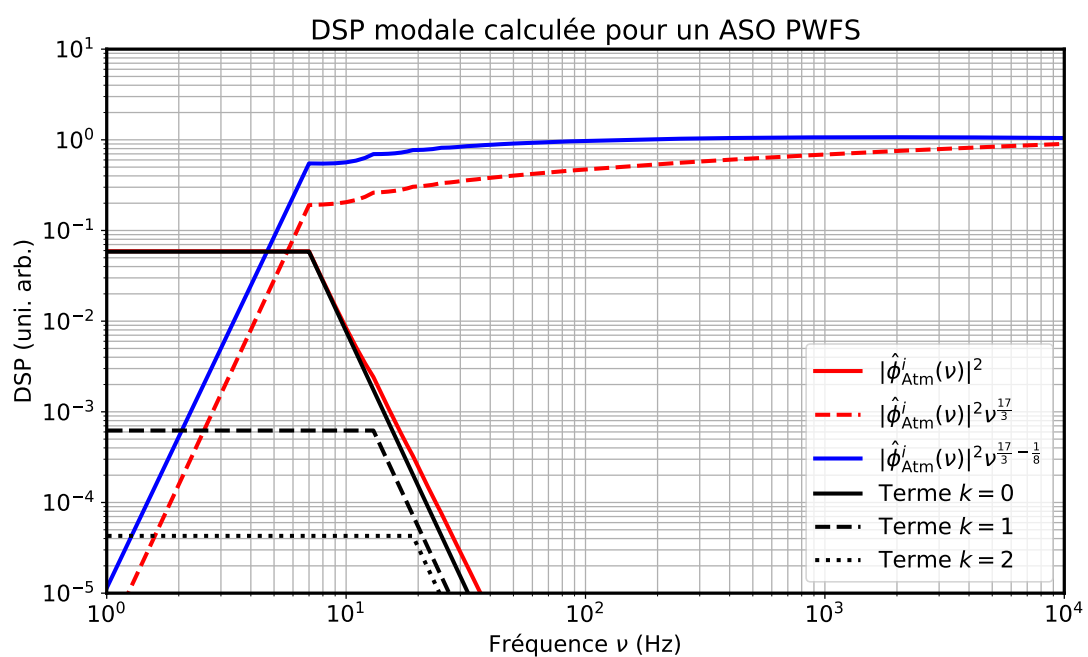


FIGURE A.3: Spectre de puissance modal de la turbulence à travers un PWFS. Rouge pointillé : résultat de la somme, corrigé d'une puissance $+\frac{17}{3}$; bleu : corrigé d'une puissance $+\frac{17}{3} - \frac{1}{8}$.

ANNEXE B

Liste de publications

Publications à comité de lecture

- [Deo et al. \(2019a, A&A2019, section 5.2\)](#) : **V. Deo**, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal, A. Sevin, F. Ferreira, D. Gratadour, T. Buey “*A telescope-ready approach for modal compensation of pyramid wavefront sensor optical gain*”, *Astronomy and Astrophysics*, 629, A107, 2019.
- [Deo et al. \(2018a, A&A2018, section 4.2\)](#) : **V. Deo**, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal, T. Buey et M. Cohen, “*Assessing and mitigating alignment defects of the pyramid wavefront sensor : a translation insensitive control method*”, *Astronomy and Astrophysics*, 619, A56, 2018 (*Corr. A&A 626, C1, 2019*).

Actes de conférences

- [Deo et al. \(2019b, Annexe E\)](#) : **V. Deo**, M. Rozel, A. Bertrou-Cantou, F. Ferreira, F. Vidal, D. Gratadour, A. Sevin, Y. Clénet, G. Rousset and É. Gendron, “*CLOSE : a self-regulating, best-performance tracker for modal integrator based AO loops*”, in *6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2019.
- [Deo et al. \(2018b, Annexe D\)](#) : **V. Deo**, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal and T. Buey, “*A modal approach to optical gain compensation for the pyramid wavefront sensor*”, *Proceedings of the SPIE*, 10703, 2018.
- **V. Deo**, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal, T. Buey and M. Cohen, “*Compensation modale du gain optique pour les analyseurs pyramide*”, in *Société Française d’optique – Toulouse 2018*, 2018.
- [Deo et al. \(2017, Annexe C\)](#) : **V. Deo**, F. Vidal, É. Gendron, T. Buey, D. Gratadour, Z. Hubert, M. Cohen and G. Rousset, “*Enlarging the control space of the pyramid wavefront sensor : Numerical simulations and bench validation*”, in *5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2017.

Communications orales

- **V. Deo**, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal, F. Ferreira, A. Sevin, D. Gratadour and T. Buey, “*Forward with self-adaptive optical gain modal compensation : comparative simulations with various PWFS-class sensors*”, in *6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2019.

- **V. Deo**, Séminaire invité au Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, “*Getting to know the PWFS for high-order AO systems : some recipes for performance improvement and risk mitigation*”, octobre 2018.
- **V. Deo**, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal and T. Buey, “*A modal approach to optical gain compensation for the pyramid wavefront sensor*”, in *Wavefront Sensing in the VLT/ELT era III - Paris, 2018*.
- **V. Deo**, Conférence Elbereth 2017, “*The PWFS for adaptive optics at the ELT scale : experiments and investigations : an overview.*”
- **V. Deo**, F. Vidal, É. Gendron, T. Buey, D. Gratadour, Z. Hubert, M. Cohen and G. Rousset, “*Wavefront reconstruction for imperfect PWFS assemblies : generalizing the controller slope space*”, in *Wavefront Sensing in the VLT/ELT era II - Padova, 2017*.

Publications en tant que co-auteur

- A. Bertrou-Cantou, É. Gendron, G. Rousset, F. Vidal, **V. Deo** and F. Ferreira, “*Analysis of the island effect for ELT MICADO-MAORY SCAO mode*”, in *6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2019.
- **Chemla et al. (2019)** : F. Chemla, J.-M. Huet, **V. Deo**, F. Vidal, T. Buey, J. Gaudemard, É. Gendron and M. Cohen, “*SAPHIR (Sensor Achromatic Pyramid High-resolution) : a new concept of reflective pyramidal wavefront sensor free from chromatic aberrations*”, in *6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2019.
- **Clénet et al. (2019)** : Y. Clénet, T. Buey, É. Gendron, Z. Hubert, F. Vidal, M. Cohen, F. Chapron, A. Sevin, P. Fédou, G. Barbary, B. Borgo, J.-M. Huet, A. Blin, O. Dupuis, J. Gaudemard, S. Ben Nejma, D. Gratadour, **V. Deo**, F. Ferreira, S. Thijs, V. Lapeyrère, J. Raffard, F. Chemla, B. Le Ruyet, A. Bertrou-Cantou, M. Rozel, Y. Younès, G. Rousset, G. Zins, E. Diolaiti, P. Ciliegi, V. Garrel, S. Rabien, J. Schubert, M. Hartl, V. Hörmann and R. Davies, “*MICADO-MAORY SCAO Preliminary design, development plan & calibration strategies*”, in *6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2019.
- S. Thijs, O. Dupuis, É. Gendron, F. Vidal, **V. Deo**, M. Cohen, A. Sevin, V. Lapeyre, Z. Hubert and T. Buey, “*K-mirror prototype for MICADO-SCAO module of the E-ELT*”, in *6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2019.
- **Vidal et al. (2019)** : F. Vidal, F. Ferreira, **V. Deo**, A. Sevin, É. Gendron, Y. Clénet, D. Gratadour, G. Rousset and R. Davies, “*Analysis of the MICADO-MAORY SCAO performance*”, in *6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2019.
- **Davies et al. (2018)** : R. Davies, J. Alves, Y. Clénet, F. Lang-Bardl, H. Nicklas, J.-U. Pott, R. Ragazzoni, E. Tolstoy, P. Amico, H. Anwand-Heerwart, S. Barboza, L. Barl, P. Baudoz, R. Bender, N. Bezawada, P. Bizenberger,

W. Boland, P. Bonifacio, B. Borgo, T. Buey, F. Chapron, F. Chemla, M. Cohen, O. Czoske, **V. Deo**, K. Disseau, S. Dreizler, O. Dupuis, M. Fabricius, R. Falomo, P. Fedou, N. Förster Schreiber, V. Garrel, N. Geis, H. Gemperlein, É. Gendron, R. Genzel, S. Gillessen, M. Glück, F. Grupp, M. Hartl, M. Häuser, H.-J. Hess, R. Hofferbert, U. Hopp, V. Hörmann, Z. Hubert, E. Huby, J.-M. Huet, V. Hutterer, D. Ives, A. Janssen, W. Jellema, W. Kausch, F. Kerber, H. Kravcar, B. Le Ruyet, K. Leschinski, C. Mandla, M. Manhart, D. Massari, S. Mei, F. Merlin, L. Mohr, A. Monna, N. Muench, F. Mueller, G. Musters, R. Navarro, U. Neumann, N. Neumayer, J. Niebsch, M. Plattner, N. Przybilla, S. Rabien, R. Ramlau, J. Ramos, S. Ramsay, P. Rhode, A. Richter, J. Richter, H.-W. Rix, G. Rodeghiero, R.-R. Rohloff, M. Rosensteiner, G. Rousset, J. Schlichter, J. Schubert, A. Sevin, R. Stuik, E. Sturm, J. Thomas, N. Tromp, G. Verdoes-Kleijn, F. Vidal, R. Wagner, M. Wegner, W. Zeilinger, J. Ziegler, B. Ziegler and G. Zins, “*The MICADO first light imager for the ELT*”, Proceedings of the SPIE, 10702, 2018.

- **Ferreira et al. (2018b)** : F. Ferreira, D. Gratadour, A. Sevin, N. Doucet, F. Vidal, **V. Deo**, and É. Gendron, “*Real-time end-to-end AO simulations at ELT scale on multiple GPUs with the COMPASS platform*”, Proceedings of the SPIE, 10703, 2018.
- **Clénet et al. (2018)** : Y. Clénet, T. Buey, É. Gendron, Z. Hubert, F. Vidal, M. Cohen, F. Chapron, A. Sevin, P. Fédou, G. Barbary, P. Baudoz, B. Borgo, S. Ben Nejma, V. Chambouleyron, **V. Deo**, O. Dupuis, S. Durand, F. Ferreira, J. Gaudemard, D. Gratadour, E. Huby, J.-M. Huet, B. Le Ruyet, N. Nguyen-Tuong, C. Perrot, S. Thijs, Y. Younès, G. Rousset, P. Feautrier, G. Zins, E. Diolaiti, P. Ciliegi, S. Esposito, L. Busoni, J. Schubert, M. Hartl, V. Hörmann and R. Davies, “*The MICADO first-light imager for the ELT : towards the preliminary design review of the MICADO-MAORY SCAO*”, Proceedings of the SPIE, 10703, 2018.
- **Vidal et al. (2017)** : F. Vidal, F. Ferreira, **V. Deo**, A. Sevin, É. Gendron, Y. Clénet, S. Durand, D. Gratadour, N. Doucet, G. Rousset and R. Davies, “*End-to-end simulations for the MICADO-MAORY SCAO mode*”, in *5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*, 2017.

ANNEXE C

Deo et al. (2017) : “Enlarging the control space of the pyramid wavefront sensor : Numerical simulations and bench validation” (2017), 5th AO4ELT conference

Enlarging the Control Space of the Pyramid Wavefront Sensor: Numerical Simulations and Bench Validation

V. Deo^{a*}, F. Vidal^a, E. Gendron^a, T. Buey^{a,b},
D. Grataudour^a, Z. Hubert^a, M. Cohen^b, and G. Rousset^a

^aLESIA, Observatoire de Paris - CNRS - UPMC - Univ. Paris 7 Diderot
5 place Jules Janssen, 92190 Meudon, France

^bGEPI, Observatoire de Paris - PSL Research University - CNRS
61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

ABSTRACT

We investigate the currently experienced limitations regarding the use of the Pyramid Wavefront Sensor (PWFS) in the coming generation of very high order adaptive optics (AO) systems for ELLTs. As a focal plane wavefront sensor, the PWFS concept paves way for a telescope diffraction limited AO regime, hence potential 80 times or more sensitivity improvement over a comparable Shack-Hartmann (SH) on large telescopes. Although some theoretical similarities exist with quad-cell SHs, the focal/pupil planes inversion brings up significantly different modelizations. Diffractive effects between PWFS pupil images (quadrants), nonlinear behavior – limited dynamic range, optical gain fluctuations – are PWFS features that require AO systems and controllers be specifically engineered. Demonstration of physical validity and robustness of PWFS models on sky-ready, ELT-scaled AO systems remains an open topic to date.

Obtaining a high quality pyramidal prism and a model-consistent WFS assembly is noticeably a critical factor. We demonstrate that the traditional gradient sensing controller is extremely sensitive to prism shape defects and common assembly misalignments: we generically analyze the effect of sensor-plane quadrants individual translations, which are induced by a variety of mechanical defects.

Quadrant misregistrations displace wavefront information to terms not included in the conventional slopes maps, and high spatial frequencies become invisible to the WFS. Expanded Space Control (ESC) for quad-cell signal incorporates additional WFS signals in addition to the X- and Y-axis differences, and compensates misalignment-induced information loss, therefore dramatically relaxing machining and alignment constraints for PWFS engineering. We here present validating results of ESC performance and robustness for quadrant misregistration cases, both in end-to-end simulations with COMPASS and on the PYRCADO PWFS demonstrator bench at LESIA.

Keywords: Pyramid Wavefront Sensor, Extremely Large Telescope, Modal Control, Wavefront Reconstruction.

1. INTRODUCTION

The present paper is a progress report of ongoing research about Pyramid Wavefront Sensor (PWFS) control, conducted within the MICADO camera, SCAO module^{1,2} development team at LESIA. Developing a PWFS-based Adaptive Optics (AO) system with more than 80×80 resolution for the E-ELT brings up unprecedented scalability challenges to state-of-the-art focal plane sensing, making of paramount importance the current effort to gather experience, data, and thorough knowledge of PWFSs.

Since its introduction as a linearized Foucault knife-edge test with user-tunable sensitivity/dynamic trade-off,³ the PWFS was demonstrated to provide a valuable sensitivity increase over equivalent SH sensors.^{4,5} Many currently developed high order, high sky coverage AO systems rely on the use of one or several PWFSs, including instrumental upgrades of 10 m class telescopes and first light instruments of all the projected 30-40 meter class telescopes.

* Corresponding author. E-mail: vincent.deo at obspm dot fr. Telephone: +33 (0) 1 45 07 77 86

However, theoretical and experimental developments on the PWFS have brought up much debate and are an active research topic. Knowledge on modulation,⁶ photon efficiency,⁷ theoretical models,^{8–10} optimal modal control,^{11,12} or phase reconstruction algorithms does not yet converge into a unique, well established set of operation guidelines.

This paper presents a possible improvement to PWFS control, named Expanded Space Control (ESC), which through expanding the dimension of the sensor data space provides an operating mode that is robust to independent translations of the four sensor quadrants, and so to several PWFS defects. This work presents a Fourier domain analytical approach to the control completeness problem, followed by end-to-end simulations on COMPASS^{3,14} and bench experiment cases demonstrating the performance of ESC.

2. EXPANDED SPACE CONTROL OF THE PWFS

Imaging the telescope pupil (or altitude layer meta-pupil) through a PWFS generates 4 pupil-like images (quadrants) in the sensor plane, typically as on Fig. 1. These A , B , C and D quadrants can generally be assumed optically independent, whether by using a prism with sufficient light deviation or with a modulation angle large enough for a favorable in-quadrant to edge-diffracted light ratio. Pyramid signals are preprocessed from sensor image data. Pupil quadrants A , B , C and D are extracted by selecting illuminated quadrant areas:

$$\begin{bmatrix} A(x, y) \\ B(x, y) \\ C(x, y) \\ D(x, y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\iint I(x, y) dx dy} \begin{bmatrix} I(x - x_A, y - y_A) \\ I(x - x_B, y - y_B) \\ I(x - x_C, y - y_C) \\ I(x - x_D, y - y_D) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

and cropping to the quadrant illuminated pixels, where $(x_i, y_i)_{i \in A, B, C, D}$ is the quadrant exact position on the sensor and $I(x, y)$ is the intensity map in the sensor plane. We use the normalization of signals with subaperture average flux, as introduced by Verinaud.⁷ Quadrant origins $(x_{\bullet}, y_{\bullet})$ are given by the deflection angle of prism facets, and the scaling factor provided by the pupil imaging lens. Then $[A, B, C, D]$ is processed into gradient-like slopes maps S_x and S_y :

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}(x, y) = \begin{bmatrix} A - B + C - D \\ A + B - C - D \end{bmatrix}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}(x, y). \quad (2)$$

The exact analytical nature of the slopes maps S_x and S_y for the perfect PWFS is not trivial and several interpretations coexist to this day. Originally, Ragazzoni³ proposed a ray optics interpretation leading to S_x , S_y being exact gradient components up to a saturation threshold. Verinaud⁷ introduced a one-dimensional forward model of mixed behavior between derivator and direct phase sensing depending on spatial frequency. Several 1-D and 2-D forward PWFS models were developed during the last decade, e.g. by Shatokhina et al.,^{8,15} and latest developments by Fauvarque et al.⁹ propose a linear Optical Transfer Function model for small signals of the PWFS and the slopes maps.

It is beyond the scope of this paper to discuss the validity bounds and interpretations of these models. However, we briefly summarize that (1) S_x and S_y are direction-sensitive linear operators in a small signal regime that is compatible with AO closed loop operation and (2) S_x and S_y contain sufficient information to perform a complete and unambiguous (besides piston mode) phase reconstruction. The latter point is key to this study, as the analytical focus is to ensure that measurements of a misaligned PWFS contain at least equivalent information to S_x and S_y of a perfect PWFS.

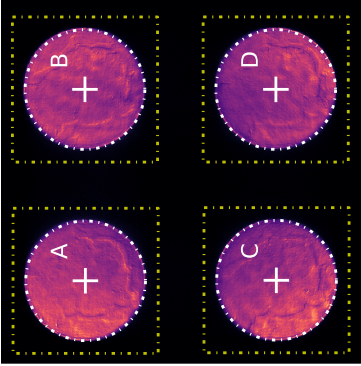


Figure 1. Typical observation in the PWFS sensor plane - here on the PYRCADO bench - illustrating requirements for quadrant registration. White: conventional control requires subpixel precision in estimating contours and centers of quadrants. Yellow: with ESC, a general selection zone containing all illuminated pixels of the quadrant is sufficient. Black pixels can be eliminated from the selection zone afterwards.

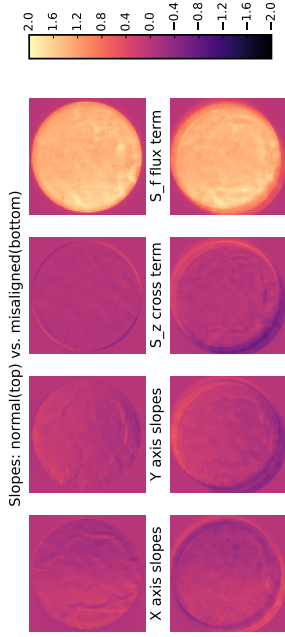


Figure 2. The 4 ESC slopes map on the PYRCADO bench (from left to right) $S_x^{\text{Meas.}}$, $S_y^{\text{Meas.}}$, $S_z^{\text{Meas.}}$ and $S_f^{\text{Meas.}}$ (Eq. 6) on a zero residual phase reference. Top row: quadrant misalignment is within 0.2% of the pupil, $S_z^{\text{Meas.}} \approx 0$ and $S_f^{\text{Meas.}}$ should be independent of the input phase. Bottom row: a strong misalignment case (approx. 5% of pupil size), illustrating how edge information is present in $S_x^{\text{Meas.}}$ and $S_f^{\text{Meas.}}$.

Expanded Space Control adds to the PWFS data space two additional slopes maps computed from quadrants:

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_f \end{bmatrix} (x, y) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} (x, y), \quad (3)$$

S_z and S_f respectively describing a cross-term and an out-of-reference flux term. It is to be noted that S_z and S_f bear no small-signal information for (1) exactly referenced quadrants, (2) a perfect 4-sided prism and (3) homogeneous and stationary pupil illumination, as demonstrated recently in Faurvaque et al.¹⁰ However, when any of conditions (1)-(3) fails, the conclusion that S_z and S_f are independent of the input field does not hold. An example of the four ESC slope maps in an aligned and a strongly misaligned case are shown on Fig. 2.

When considering translations of quadrants within the sensor plane, the measurements (noted $\bullet^{\text{Meas.}}$) are related to the exact quadrants through:

$$\begin{bmatrix} A^{\text{Meas.}}(x, y) \\ B^{\text{Meas.}}(x, y) \\ C^{\text{Meas.}}(x, y) \\ D^{\text{Meas.}}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x - \delta_A, y - \epsilon_A) \\ B(x - \delta_B, y - \epsilon_B) \\ C(x - \delta_C, y - \epsilon_C) \\ D(x - \delta_D, y - \epsilon_D) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

where $(\delta_i, \epsilon_i)_{i \in A, B, C, D}$ are the sensor plane offsets between the geometrical center (x_i, y_i) of the quadrant and the point estimated as such. The relationship of Eq. 4 expresses in the spatial frequency domain as:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^{\text{Meas.}}(u, v) \\ \hat{B}^{\text{Meas.}}(u, v) \\ \hat{C}^{\text{Meas.}}(u, v) \\ \hat{D}^{\text{Meas.}}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(2i\pi(\delta_A u + \epsilon_A v)) \cdot \hat{A}(u, v) \\ \exp(2i\pi(\delta_B u + \epsilon_B v)) \cdot \hat{B}(u, v) \\ \exp(2i\pi(\delta_C u + \epsilon_C v)) \cdot \hat{C}(u, v) \\ \exp(2i\pi(\delta_D u + \epsilon_D v)) \cdot \hat{D}(u, v) \end{bmatrix} \quad (5)$$

where $\hat{f}(u, v)$ is the 2-D continuous Fourier transform of $f(x, y)$. Using the \mathbf{P} transform (Eq. 3) from $[A, B, C, D]$ blocks to $[S_x, S_y, S_z, S_f]$ blocks, one can obtain, using $\mathbf{P}^{-1} = 1/4 \mathbf{P}^T$:

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \\ \hat{S}_f \end{bmatrix} (u, v) = \underbrace{\frac{1}{4} \mathbf{P} \Delta(u, v) \mathbf{P}^T}_{\text{Mis}} \begin{bmatrix} \hat{S}_x^{\text{Meas.}} \\ \hat{S}_y^{\text{Meas.}} \\ \hat{S}_z^{\text{Meas.}} \\ \hat{S}_f^{\text{Meas.}} \end{bmatrix} (u, v) \quad (6)$$

where the Δ transform is the blockwise linear phaseor corresponding to quadrant translations:

$$\Delta(u, v) = \text{Diag} \begin{bmatrix} \exp(2i\pi(\delta_A u + \epsilon_A v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_B u + \epsilon_B v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_C u + \epsilon_C v)) \\ \exp(2i\pi(\delta_D u + \epsilon_D v)) \end{bmatrix}.$$

The **Mis** transformation (Eq. 6) provides us with an optical transfer function (OTF) from the 4 measured slopes maps $[\hat{S}_x^{\text{Meas.}}, \hat{S}_y^{\text{Meas.}}, \hat{S}_z^{\text{Meas.}}, \hat{S}_f^{\text{Meas.}}]$ to the 2 theoretical slopes maps $[S_x, S_f]$. It is worth noting that **Mis** is a unitary transform with specific structure:

$$\mathbf{Mis}(u, v) = \begin{bmatrix} p & q & r & s \\ q & p & s & r \\ r & s & p & q \\ s & r & q & p \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{bmatrix} s \\ r \\ q \\ p \end{bmatrix} (u, v) = \frac{1}{4} \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \exp(-2i\pi(\delta_A u + \epsilon_A v)) \\ \exp(-2i\pi(\delta_B u + \epsilon_B v)) \\ \exp(-2i\pi(\delta_C u + \epsilon_C v)) \\ \exp(-2i\pi(\delta_D u + \epsilon_D v)) \end{bmatrix} \quad (7)$$

with coefficients additionally verifying $|p + q + r + s|(u, v) = 1$ for any frequency (u, v) .

3. MISALIGNMENT TRANSFORM ANALYSIS

The **Mis** transformation, as a blockwise OTF, describes the information available for potential reconstruction for various control modes. We investigate how the information required for reconstruction, i.e. $[S_x, S_f]$, can be gathered from the misaligned measurements $[\hat{S}_x^{\text{Meas.}}, \hat{S}_y^{\text{Meas.}}, \hat{S}_z^{\text{Meas.}}, \hat{S}_f^{\text{Meas.}}]$.

First, **Mis**(u, v) being unitary at all frequencies implies that unit gain at frequency (u, v) in \hat{S}_x or \hat{S}_y is split within all 4 measured slopes maps without loss, with respective magnitudes depending of the 4 terms p, q, r, s :

- $p(u, v)$ is the direct term: measurement that is true to the reference, in either S_x or S_y .

- $q(u, v)$ is the cross-coupling term between either S_x^{Meas} and S_y or S_y^{Meas} and S_x . The amount of gain in the q term will not impact control performance, but S_x^{Meas} and S_y^{Meas} will both contain a frequency-dependent mix of X- and Y-axis signals. Assuming $p(u, v)$ and $q(u, v)$ provide most gain at all frequencies compared to $r(u, v)$ and $s(u, v)$, no sizable performance difference is expected for conventional $[S_x^{\text{Meas}}, S_y^{\text{Meas}}]$ control.
- $r(u, v)$ and $s(u, v)$ couple S_x and S_y information into S_x^{Meas} and S_y^{Meas} . The magnitude of these coefficients maps to the expected SNR loss for conventional control with misalignment.

We define 3 control modes for further analysis. The conventional controller (referred to as XY control) uses $[S_x^{\text{Meas}}, S_y^{\text{Meas}}]$ as the PWFS slope space, and two ESC modes respectively adding in the slope map S_z^{Meas} and both slopes maps $S_z^{\text{Meas}}, S_y^{\text{Meas}}$ (resp. noted XYZ and XYZF control). The test case misalignment structure and $\text{Mis}(u, v)$ maps used for experiments are detailed in Sec. 4.

4. EXPERIMENTAL SETUP & PROTOCOLS

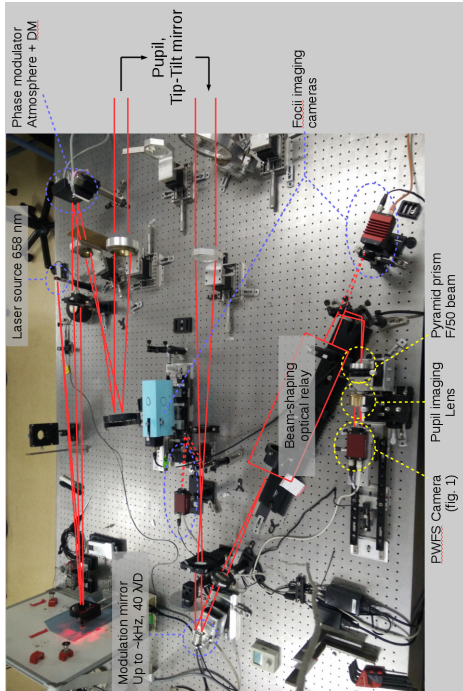


Figure 3. The PYRCADO PWFS research bench at LESIA. See text for description of elements.

The PYRamid for miCADO (PYRCADO) experiment at LESIA is a PWFS prototype developed since 2014 to study high-order AO developments and challenges, looking towards the design of high order PWFSs for ELT instrumentation.

The experiment operates with monochromatic $\lambda = 658$ nm laser light. Atmospheric distortions and high-order deformable mirrors are emulated on a Hamamatsu LCOS-SLM with a spatial resolution of 500 px across the pupil and a depth resolution of 200 ADU/ λ . A dedicated mirror on a physical mount compensates for tip-tilt. The WFS assembly is preceded by a fast steering tip-tilt mirror mounted on a PI oscillating piezoelectric stage which allows modulation up to a $40 \lambda/D$ angle at up to kHz frequency, and a beam shaping optical relay enabling F/D ratios from 30 to 150. The prism is a 4-sided pyramid with summit half-angle $87^\circ 21'$ and apex roughness $< 10 \mu\text{m}$ ($0.75 \lambda/D$ at $F/50$). Finally, quadrants are imaged with an Allied Vision Manta G-255 Gigabit ethernet camera. At aperture $F/50$ as used in experiments, quadrants are imaged with diameter 260 px, which allows for a variety of binning modes either in hardware or software.

The simulated system specifications for bench experiments and end-to-end simulations are listed in Table 1. The experimental protocol for both simulation and bench (unless otherwise specified) is the following:

- (Bench only) Compute a phase offset map to display on the SLM to place the PWFS in Airy spot regime.
- (Bench only) Calibrate quadrant positions (x_\bullet, y_\bullet) on sensor matrix, and perform a factor 6 rebin based on pixel nearest to calibrated center. Through binning, the component of $(\delta_\bullet, \epsilon_\bullet)$ due to bench alignment is maintained within $1/12^{\text{th}}$ of a subaperture.
- Select controller mode (XY, XYZ, XYZF) and experimental misalignments $(\delta_\bullet, \epsilon_\bullet)$
- Measure reference modal interaction matrix I_0 in Airy spot regime.
- Operate the AO loop for 0.8 sec. (400 frames at simulated 500 Hz) with modal control matrix I_0^\dagger . The controller is ran without optical gain compensation and reaches a suboptimal stationary regime.
- Compute sensitivity loss compensation gains G_{Modal} ^{16,17} on closed-loop phase residual.
- Run the AO loop with gain-compensated $G_{\text{Modal}} \times I_0^\dagger$ for 0.8 sec. to reach best-effort stationary regime.
- Run the AO for 0.8 sec. more, accumulating residual wavefront and PSF data for performance results.

For repeatability of the experiment, a given misalignment pattern of the 4 quadrants was selected and then scaled to match given misalignment total tolerance. The following values of $(\delta_\bullet, \epsilon_\bullet)$ were selected, and are further referenced as the 0.5 subaperture data point in Sec. 5:

$$\begin{aligned} \delta_A, \epsilon_A &= -0.24, +0.46 \\ \delta_B, \epsilon_B &= +0.28, -0.49 \\ \delta_C, \epsilon_C &= -0.17, +0.38 \\ \delta_D, \epsilon_D &= +0.45, -0.47, \end{aligned} \quad (8)$$

in units of PWFS subapertures. This misalignment meets a 0.5 subaperture total tolerance, and yields the Mis transform which gain is displayed in Fig. 4. It was retained as the structure of the Mis transform makes explicit the relationships between the different slope maps. With $|q(u, v)|$ and $|r(u, v)|$ close to zero, information is split between the direct term $p(u, v)$ and the $s(u, v)$ term—coupling identically S_x to S_x^{Meas} and S_y to S_y^{Meas} . Within the two Southwest-Northeast oriented stripes where $|p(u, v)| < 1$, frequency information is exclusively contained in S_x^{Meas} and S_y^{Meas} , and one can visually apprehend why using ESC is required to operate the AO system.

5. RESULTS

Simulations and bench runs were realized considering an 18 m diameter telescope with a 39×39 square-pitch deformable mirror and an approx. 35% spatially oversampled PWFS, with a single ground layer of atmospheric turbulence of $r_0 = 12.9$ cm. The four quadrants were shifted from their true position by a scaled amount of parameters in Eq. 8, from 0 to 2.5 pixel maximum absolute value of $(\delta_\bullet, \epsilon_\bullet)$, and the AO loop was ran using XY, XYZ and XYZF modes. Detailed parameters are compiled in Table 1, and results are graphed on Figs. 5 and 7.

For both simulations and bench experiments, an analytical error budget provides us with an estimated 125 nm RMS fitting error, which were subtracted from the raw residual measurements. An additional budget due to photon noise, bandwidth and aliasing was computed to a total 77 nm RMS, shown as a dash-dotted baseline on both Fig. 5 and 7. In simulation, all control modes provide with comparable performance for misalignments within a 0.35 subaperture upper bound. For any higher values, while XYZ and XYZF control maintain a consistent, nominal performance regardless of the misalignments, data points with XY control exhibit highly degraded performance with two possible outcomes: (1) the AO loop is unstable and the residual diverges continuously to several λ RMS or DM saturation; or (2) the AO loop provides stable control with focal plane artifacts corresponding to blind zones in the Mis transform. Long exposure H-band PSFs for the latter cases, corresponding to starred data points in Fig. 5, are shown on Fig. 6. The speckled southwest-northeast oriented stripes on the distorted PSFs clearly illustrate the accumulation of gain cancellation stripes in the $|p(u, v)|$ Fourier plane: as the misalignment scales by a factor f , the periodic pattern in the $p(u, v)$ diagonal OTF term scales by a factor $1/f$, and additional

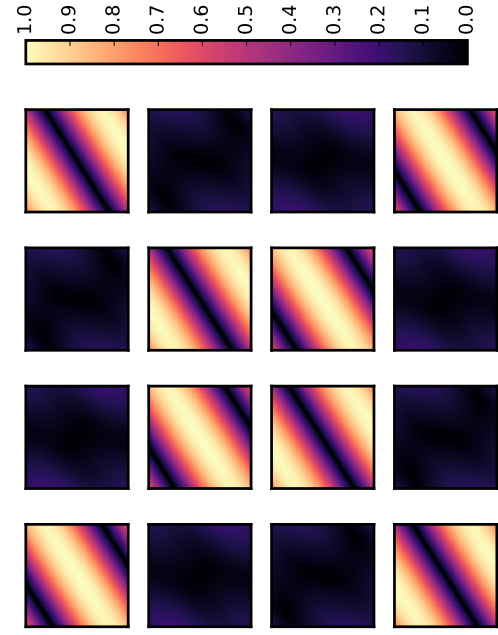


Figure 4. Frequency dependence of the magnitude of the 4×4 MIs(u, v) transform, for the misalignment test case selected for experiments (Eq. 8). Each of the 16 inserts is the magnitude of one of $p, q, r, s(u, v)$, in the order given in Eq. 7, shown over the Nyquist domain of the PWFS: $-1/2 \leq u, v \leq 1/2$.

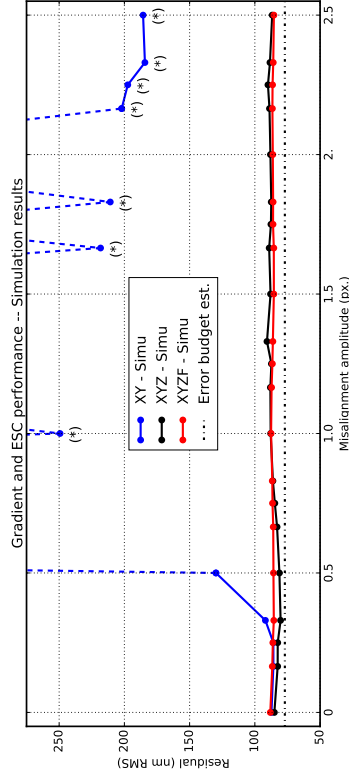


Figure 5. COMPASS end-to-end simulations of quadrant misalignment impact on AO global performance. Fitting error is already subtracted from the measured residual. Blue: conventional gradient slopes-map control. Black, Red: ESC modes. Dashed lines: AO loop diverged for intermediate points. Starred (*) points: AO loop is stable but with unsatisfactory quality; see text and Fig 6 for details. Dash-dotted line: estimated analytical error budget.

zero-gain stripes enter the Nyquist domain of the PWFS.

While XYZ and XYZF control provide equivalent performance in simulation, results of bench experiments (Fig. 7) provide us with a different conclusion. XYZF control still yields consistent performance close to 100 nm RMS across all misalignment values. The excess 50 nm RMS residual relative to simulation XYZF baseline are explained both by bench calibration and optical artifacts, mostly from the SLM.

Table 1. Detailed simulation and bench parameters for quadrant misalignment experiments.

Optical Bench & Simulation Configuration	
Telescope specifications	$D = 18.0$ m diameter – Circular pupil – No obstruction
Turbulence layer	Single Kolmogorov ground layer $r_0 = 12.9$ cm – $L_0 = 25$ m – $\ \nabla\ = 10$ m.s $^{-1}$
Source	R-magnitude 13, on-axis natural guide star
Loop rate	Simulated as 500 Hz
Deformable Mirrors	Tip-tilt mirror (bench: physical mount) Square pitch piezo-stack (bench: LCOS-SLM)
Piezo-stack mirror	39 actuators across pupil diameter – Total 1,117 in pupil
PWFS Subapertures	54 across pupil – 2,290 illuminated per quadrant image Monochromatic at 658 nm
PWFS Wavelength	Photon flux of $84.2 \cdot 10^3$ photons per frame.
PWFS Modulation	Circular of radius $r_{mod} = 8\lambda/D$
Controller	Modal integrator DMs operated with 1,107 Karhunen-Loève functions Integrator loop gain 0.7
Controller Gain	Modal sensitivity compensation applied (see Sec. 4)

H-band PSFs for nominal AO and distortion cases

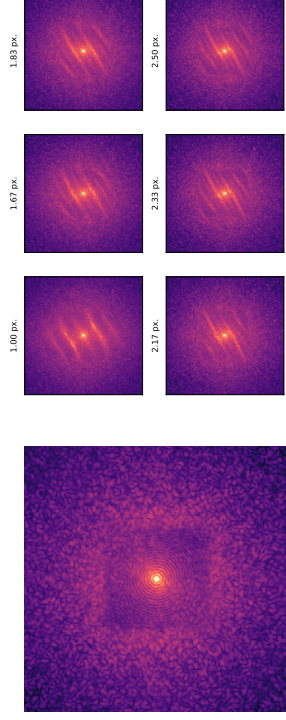


Figure 6. Log-scale representation of long exposure (0.8 sec.) H-band PSFs for various misalignment/controller COM-PASS simulations. Left: XYZF controller with 2.5 subaperture misalignment. This PSF, with a Strehl ratio of 75%, is representative of all data points in Fig. 5 in XYZ or XYZF control modes. Right inserts: PSFs for starred data in Fig. 5; for misalignments larger than 0.5 subaperture, XY control may stabilize yet the resulting PSFs exhibit strong, time-persistent stripe-like artifacts, consistent with the structure of $|p(u, v)|$. Strehl ratios for smaller inserts range from 50 to 60%.

XY and XYZ control only maintain the nominal performance of approx. 100 nm RMS up to misalignments of respectively 0.35 and 0.7 subapertures. At higher offsets, these control modes systematically lead to AO loop instability. No cases of a stable loop yielding distorted PSFs was observed on the optical bench, vouching for the hypothesis that those cases may arise only for an extremely clean and robust AO demonstration. Stability with XYZ control should not be expected on real systems for misalignments larger than 0.7 subapertures, or even less. The observed behavior of XYZ mode is opposite between simulations and bench measurements. When XYZ allows complete misalignment robustness in simulation, the addition of the S_f term is absolutely necessary to maintain stability on the bench. It has also been simulated that using slopes map $[S_x, S_y, S_f]$ provides a performance comparable to $[S_x, S_y, S_z]$, hinting towards a redundancy of information between S_z and S_f

terms occurring only in our simulations. Whereas in simulation pupil illumination is spatially and temporally homogeneous, the bench pupil suffers from luminous flux varying both in time and space, due to: (1) pupil-plane speckles, (2) non-conjugated aberrations which move in the pupil with tip-tilt, (3) interference fringes and (4) SLM phase discontinuity artifacts. The illumination variation is an additional degree of freedom that is not taken into account by the global normalization of the slopes map, and sets as indispensable to use all 4 ESC terms (or another transform of sensor data containing complete illumination information) for operating a misalignment-robust AO system.

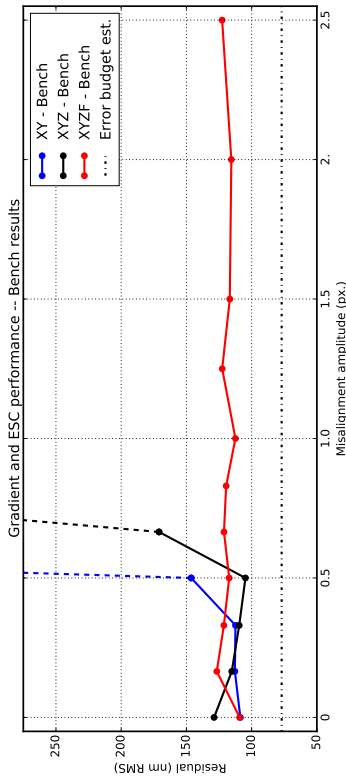


Figure 7. PYRCADO bench experiments of quadrant misalignment impact on AO global performance. Fitting error is already subtracted from the measured residual. Blue: conventional gradient slopes-map control. Black, Red: ESC modes. Dashed lines: AO loop diverged for larger misalignments.

CONCLUSION & PERSPECTIVES

In this work, we proposed an analysis of the impact of PWFS quadrant misalignments on the sensor matrix. Such cases should naturally arise with random offsets up to 0.5 subapertures unless for an engineering effort for the PWFS to comply with tighter specifications. Larger misalignments may arise in specific situations, such as direct buffer processing of the sensor requiring memory alignment. We demonstrate, both theoretically and experimentally, that misalignments even below 0.5 subapertures may introduce significant SNR loss in the AO when conventional gradient-map control is used, and may even jeopardize AO loop stability.

We propose an alternate flavor for controlling the PWFS, by doubling the size of the measurement space. Although it is theoretically demonstrated that those extra signals do not contain information for a perfect PWFS, this is not true with quadrant misalignments, and ESC uses this additional PWFS data to gather necessary reconstructor information. Our theoretical analysis demonstrates that ESC is supposed to be insensitive to any misalignment value, and simulations and bench runs up to a 2.5 subaperture misalignment confirm this prediction. A quick analysis of different PWFS behaviors on bench and in simulation also hints towards ESC offering extra degrees of freedom in PWFS control, such as sensitivity to varying pupil illumination. In general, this study aims at bringing additional arguments to PWFS systems design trade-offs, along with prism quality and price, oversampling factor choice, RTC dimensioning and more broadly, tolerance specifications.

Finally, the authors would like to bring a quick overview of the trade-offs of using ESC found so far. First, the slope space being twice as large, instrumental RTCs should be designed to accommodate the required extra processing. It is however very accessible to mitigate this impact using parallel and/or GPU-based RTC architectures.⁴⁸ The effect of switching to ESC on noise propagation through the command matrix has not yet been established and is a good candidate for further studies. So far, our experiments show no loss of performance with ESC even when alignment conditions do not require its usage, but experiments at sensitivity limit ought to be made to adjust this perspective.

REFERENCES

- [1] Davies, R., Ageorges, N., Barl, L., Bedin, L., Bender, R., Bernardi, P., Chapron, F., Clenet, Y., Deep, A., Deul, E., et al., "Micaado: the e-elt adaptive optics imaging camera," *Proc. SPIE* **7735** (2010).
- [2] Clenet, Y., Buey, T. M., Rousset, G., Cohen, M., Feautrier, P., Gendron, E., Hubert, Z., Chénla, F., Grataadour, D., Baudoz, P., et al., "Overview of the micaado scao system," *Proc. SPIE* **9148** (2014).
- [3] Ragazzoni, R., "Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism," *J. Mod. Opt.* **43**(2), 289–293 (1996).
- [4] Ragazzoni, R. and Farnato, J., "Sensitivity of a pyramidal wave front sensor in closed loop adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **350**, L23–L26 (1999).
- [5] Esposito, S., Riccardi, A., Fini, L., Puglisi, A. T., Pinna, E., Komper, M., Briguglio, R., Quiros-Pacheco, F., Stefanini, P., Guerra, J. C., Busoni, L., Tozzi, A., Pieralli, F., Agapito, G., Brusca-Zappellini, C., Demers, R., Brymel, J., Arcidiacono, C., and Salinari, P., "First light AO (FLAO) system for LBT: final integration, acceptance test in Europe, and preliminary on-sky commissioning results," *Proc. SPIE* **7736** (July 2010).
- [6] Ragazzoni, R., Diolaiti, E., and Vernet, E., "A pyramid wavefront sensor with no dynamic modulation," *Opt. Commun.* **208**(1), 51–60 (2002).
- [7] Véronaud, C., "On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor," *Opt. Commun.* **233**(1), 27–38 (2004).
- [8] Shatokhina, I., *Fast Wavefront Reconstruction Algorithms for extreme Adaptive Optics*, PhD thesis, Johannes Kepler Universität Linz (2014).
- [9] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., and Girault, O., "General formalism for fourier-based wave front sensing," *Optica* **3**, 1440–1452 (Dec 2016).
- [10] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., and Girault, O., "A general formalism for Fourier based wave front sensing: Application to the pyramid wave front sensors," (2016).
- [11] Korkiakoski, V., Véronaud, C., and Louarn, M. L., "Improving the performance of a pyramid wavefront sensor with modal sensitivity compensation," *Appl. Opt.* **47**, 79 (2008).
- [12] Gendron, E. and Léna, P., "Astronomical adaptive optics. I: Modal control optimization," *Astron. Astrophys.* **291**, 337–347 (1994).
- [13] Grataadour, D., Puech, M., Véronaud, C., Kestener, P., Gray, M., Petit, C., Brulé, J., Clenet, Y., Ferreira, F., Gendron, E., et al., "Compass: an efficient, scalable and versatile numerical platform for the development of elt ao systems," *Proc. SPIE* **9148** (2014).
- [14] Carlotti, A., Véronaud, C., Grataadour, D., Westphal, M., and Beuzit, J.-L., "Modelization of a pyramid wavefront sensor for the e-elt in the context of the compass project," *Proc. SPIE* **9148** (2014).
- [15] Shatokhina, I., Obereder, A., Rosensteiner, M., and Ramlau, R., "Preprocessed cumulative reconstructor with domain decomposition: a fast wavefront reconstruction method for pyramid wavefront sensor," *Appl. Opt.* **52**(12), 2640–2652 (2013).
- [16] Korkiakoski, V., Véronaud, C., Louarn, M. L., and Conan, R., "Comparison between a model-based and a conventional pyramid sensor reconstructor," *Appl. Opt.* **46**, 6176–6184 (Aug. 2007).
- [17] Korkiakoski, V., Véronaud, C., and Le Louarn, M., "Applying sensitivity compensation for pyramid wavefront sensor in different conditions," *Proc. SPIE* **7015** (2008).
- [18] Grataadour, D., Dipper, N., Biasi, R., Deneux, H., Bernard, J., Brulé, J., Doucet, R., Doucet, N., Ferreira, F., Gendron, E., et al., "Green flash: energy efficient real-time control for ao," *Proc. SPIE* **9909** (2016).

ANNEXE D

Deo et al. (2018b) : “A modal approach to optical gain compensation for the pyramid wavefront sensor” (2018), Proc. SPIE 10703

A Modal Approach to Optical Gain Compensation for the Pyramid Wavefront Sensor

V. Deco^{a*}, É. Gendron^a, G. Rousset^a, F. Vidal^b, and T. Buey^a

^aLESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

ABSTRACT

Extremely Large Telescopes are making Pyramid Wavefront Sensors (PWFS) the preferred engineering choice for Adaptive Optics designs, such as the MICADO camera SCAO subsystem currently developed at LESIA. A major PWFS issue is the so-called Optical Gain (OG) effect: PWFSs experience a nonlinearity-induced sensitivity reduction – of 60% or worse at the fitting error on standard atmospheric conditions – which degrades as the turbulence residual increases. OG affects system performance, jeopardizes loop stability and prevents efficient non-common path aberration compensation. We investigate a modal approach to OG impact mitigation, and investigate its impact on nonlinearity error depending on the AO control basis. We evidence that scalar gain compensation of the OG is insufficient on high order systems, as the high spatial frequency range spanned covers high OG value discrepancies over the controlled basis. We quantify the performance improvements obtained with OG modal compensation by end-to-end numerical simulations. Finally, we propose a modelization of OG modal compensation coefficients, in order to allow their computation on-the-fly provided telemetry of the immediate turbulence conditions is available.

Keywords: Pyramid Wavefront Sensor, Extremely Large Telescope, Modal Control, Optical Gain, Wavefront Reconstruction, Fourier Imaging

1. INTRODUCTION

As we look towards the upcoming generation of Extremely Large Telescopes (ELTs), a continuous effort is produced to drive forward state-of-the-art knowledge and usage of Pyramid wavefront sensors (PWFS). Introduced by R. Ragazzoni (1996),¹ PWFSs provide a thoroughly assessed increase in sensitivity over Shack-Hartmann sensors of equivalent dimensions, which advantage is linearly increasing with pupil diameter.^{2,3} This superiority, joint with the possibility of runtime sensibility-dynamic range trade-off with modulation, makes PWFS the preferred engineering choice for next generation adaptive optics (AO) designs, including most instruments for the TMT,⁴ the GMT,⁵ and ESO's ELT.^{6,7} PWFS research is crucial in overcoming the challenges of a PWFS-powered AO system for a 39 meter telescope, such as the MICADO camera SCAO subsystem currently developed by the authors' research group at LESIA.⁸

One among the major yet-to-solve PWFS issue is the so-called Optical Gain (OG) effect. When operated in reduced Strehl ratio regime, ranging anywhere from the system fitting – i.e. the minimal error for a given turbulence – to a seeing-limited spot, the PWFS experiences significant sensitivity loss due to the inherently nonlinear nature of the output signals. We observe sensitivity reduction of 60% or worse at the fitting error on standard atmospheric conditions ($r_0 = 8.0 - 13.0$ cm), with sensitivity decreasing as the residual RMS increases. It hence stands critical to understand, monitor and compensate OG as it dramatically affects system performance, and even jeopardizes feedback loop stability. OG also affects operation of the PWFS around a non-zero setpoint, e.g. when compensating for non-common path aberrations (NCPA) between the science and the AO optical paths. Optical sensitivity affects in-loop setpoint subtraction, which results in over-applied NCPA and induces a global performance loss.

This research investigates a modal approach to OG compensation, building upon the approach first proposed by Korkiakoski et al. (2008),^{9,10} however with our own novel definition of Optical Gain Modal Compensation

* Corresponding author. Email: vincent.deco at obspm dot fr; phone: +33 (0) 1 45 07 77 86

Adaptive Optics Systems VI, edited by Laird M. Close, Laura Scheiber,
Dink Schmidt, Proc. SPIE Vol. 10703, 107030E, © 2018 SPIE
CCC code: 0277-786X/18/\$18 doi: 10.1117/1.2311631

Proc. of SPIE Vol. 10703 1070320-1

(OGMC) coefficients. We evidence that a scalar gain compensation is insufficient to address the issue on high order systems, as modal OG can vary dramatically over the control basis. The modal OG value depends mostly on: (1) the statistics of the sensed residual phase, (2) global system parameters – e.g. DM influence functions and modulation radius – and (3) spatial frequencies contained in a given mode. We present extensive numerical simulations of modal sensitivity and reconstruction error with and without OGMC usage, comparing the properties of 3 control bases: an actuator-per-actuator basis, Karhunen-Loève (KL) polynomials and a Fourier basis. These numerical results are followed by end-to-end simulations which demonstrate the final performance improvement obtained with OGMC. Finally, we propose a numerical model allowing to obtain immediately the appropriate OGMC coefficients from a reduced number of telemetry parameters, which could e.g. be monitored following the recently proposed optical dithering approach.¹¹

2. PWFS MEASUREMENTS AND LINEARIZED MODELS

2.1 PWFS signal normalization and output space

The PWFS optical concept places a refractive pyramidal prism¹ – or another optical device with similar behavior¹²⁻¹⁴ – at the focal point of the imaging instrument, immediately followed by a pupil re-imaging lens conjugating the entrance pupil with the PWFS detector plane, as shown on Fig. 1. Although many variations around the original concept have been proposed, it is generally assumed that the four detector-plane pupil images are non overlapping, optically independent, and receive a significant fraction of detector plane illumination, the latter point having been well confirmed for modulation radii a few times larger than typical chirp sizes at the prism apex. For all analyses and results presented in this paper, we use the global normalization³ of PWFS signals, and consider PWFS output as being the subset of pixels contained in the geometrical footprints of the detector pupil-like images. With a total of K pixels within the four pupil images, each with value z_i , $i \in [1, K]$, we define the pyramid measurement vector as:

$$\mathbf{s} = \left(\frac{4}{K} \sum_{i=1}^K z_i \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_K \end{bmatrix}, \quad (1)$$

with the prefactor $\frac{4}{K}$ being of little importance but to keep a formal similarity with the average flux per subaperture, projected in the entrance pupil. We opt for this definition of PWFS signals, which is within the common options in the PWFS community, based on the authors' recent demonstration¹⁵ that: (1) global normalization performs better in terms of final Strehl ratio than local subaperture normalization¹ and (2) that it is of no importance, given that an ideal PWFS is simulated, whether or not the four pupil images are processed into gradient-like slopes maps, including regarding noise propagation. It is also worth noticing that the global normalization is better suited for locally linearized approaches to the PWFS,¹⁶⁻¹⁸ as we make use of in the present work.

2.2 PWFS interaction matrix and linearized response

We define the PWFS response measurement to be $\mathbf{S}(\phi)$ when the system is shown a given phase difference map ϕ , and the measurement derivative to be $\mathbf{dS}(\phi)$, near a given reference point ϕ_{ref} :

$$\mathbf{dS}(\phi)|_{\phi_{\text{ref}}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{S}(\phi_{\text{ref}} + \epsilon\phi) - \mathbf{S}(\phi_{\text{ref}} - \epsilon\phi)}{2\epsilon}, \quad (2)$$

which, given an orthonormal basis ϕ_1, \dots, ϕ_N of the considered phase space, induces the following expression for the Jacobian of the PWFS response around point ϕ_{ref} :

$$\mathbf{Jac}|_{\phi_{\text{ref}}} = \left[\mathbf{dS}(\phi_1)|_{\phi_{\text{ref}}}, \dots, \mathbf{dS}(\phi_N)|_{\phi_{\text{ref}}} \right]. \quad (3)$$

The expression of Eq. 3 is also the interaction matrix of the system around phase ϕ_{ref} given that (1) a small enough modal poke ϵ is used for interaction calibration and (2) the space spanned by the ϕ_i , $i \in [1, N]$ is a chosen subset

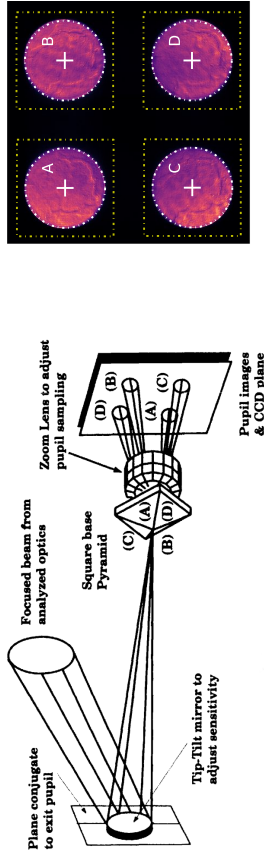


Figure 1. Left (from Esposito et al.¹⁹): Principle of the PWFS optical design. The pupil-plane fast steering mirror allows for variable modulation radius. Right (from Deo et al.²⁰): Typical PWFS detector images for a flat input wavefront on the optical bench at LESTA. In this paper, PWFS output is the average-normalized sequence of pixels within the A, B, C and D adjusted white circles.

of the deformable mirror (DM) space. Eq. 3 is to be understood with normalized modal responses $\mathbf{ds}(\phi_i)_{|\phi_{\text{ref}}}$ being column vectors, with $\mathbf{Jac}_{|\phi_{\text{ref}}}$ effectively being the matrix formed by concatenating these columns.

The Jacobian around the null phase $\phi_{\text{Airy}} = \mathbf{0}$, which propagates into an Airy spot at the pin of the prism and is the ideal calibration regime for the AO, is of course of particular interest, and we use it to define the system's modal reconstructor:

$$\mathbf{Rec} = \mathbf{Jac}_{|\phi_{\text{Airy}}}^\dagger = \mathbf{Jac}_{|\mathbf{0}}^\dagger, \quad (4)$$

where \bullet^\dagger denotes (supposedly well-conditioned) matrix pseudo-inversion. \mathbf{Rec} is effectively the systems' modal command matrix over the DM space basis ϕ_1, \dots, ϕ_N . Provided a phase map ϕ small enough such that nonlinearities are negligible, we do have the exact DM-projected reconstruction after propagation through the PWFS:

$$\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{S}(\phi) = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad \text{verifying that} \quad \sum_{i=1}^N c_i \phi_i = \phi \text{ [projected normally on the DM space]}, \quad (5)$$

where \cdot denotes matrix multiplication. Even in the case where the phase map ϕ is not small, Eq. 5 still holds, however with the response $\mathbf{S}(\phi)$ replaced with its multi-point derivative $\mathbf{ds}(\phi)$.

2.3 Optical Gain: a turbulence-induced response modification

When the PWFS is shown a phase different from the null phase and calibrated around one such point, nonlinearities impact the quality of the reconstruction. While Eq. 5 always holds for a linear system – with all Jacobians being equal to the interaction matrix –, for the PWFS we should not expect \mathbf{Rec} to be a valid reconstructor when operating away from the null phase, as is well confirmed from simulations and observations, as shown on the example on Fig. 2.

The idea of compensating the OG through a modal approach – as proposed originally by Korikowski et al.¹⁰ – stems from the idea that when the residual phase ϕ_{ref} is within an acceptable range, a line-wise scaling of \mathbf{Rec} may be suited to obtain the local reconstructor around point ϕ_{ref} . For this to be possible, the required property is that for each basis mode $\phi_i, i \in \{1, N\}$, a scalar λ_i exists such that:

$$\mathbf{ds}(\phi_i)_{|\phi_{\text{ref}}} = \lambda_i \times \mathbf{ds}(\phi_i)_{|\mathbf{0}}, \quad (6)$$

or, generalized over the control basis, for a diagonal matrix $\mathbf{A} = \text{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$ to exist such that:

$$\mathbf{Jac}_{|\phi_{\text{ref}}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Jac}_{|\mathbf{0}}. \quad (7)$$

Therefore, the exact linearized reconstructor around ϕ_{ref} would be obtained by computing $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Rec}$, rather than through arduously estimating and inverting the instantaneous interaction matrix, an operation impossible to perform on a real system. Eq. 7 with \mathbf{A} diagonal is equivalent to the extremely strong and unlikely property of $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Jac}_{|\phi_{\text{ref}}}$ being diagonalizable with real eigenvalues; the control basis $\phi_1 \dots \phi_N$ is generally selected considering a number of factors prioritizing over the latter criterion (if possible anyway), e.g. noise propagation or optimized turbulence covariance among modes, and a single modal basis is expected to be a well-suited choice for a wide variety of operational conditions.

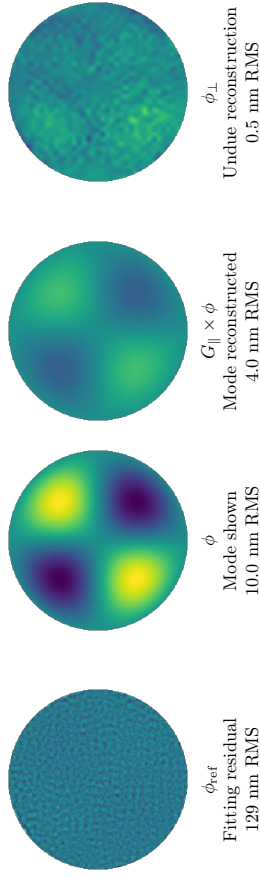


Figure 2. Nonlinearity issues in PWFS reconstruction. Left: reference phase for the PWFS ϕ_{ref} , which is the fitting error for a turbulent screen of $r_0 = 12.9$ cm. Center-left: applied 10 nm RMS of astigmatism. Center-right: reconstruction with \mathbf{Rec} from differential PWFS measurements, projected on the direction of ϕ . Right: orthogonal reconstruction component of 0.5 nm RMS of non-astigmatism error. Colormaps are identical for central plots.

3. CALIBRATING THE MODAL OPTICAL GAIN

3.1 OGMC coefficients

Rather than seeking near-eigenvectors of $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Jac}_{|\phi_{\text{ref}}}$, we proceed to measure the closeness of any DM mode ϕ to being an eigenvector, and the estimated eigenvalue-like scalar, by decomposing the reconstructed derivative $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{ds}(\phi)_{|\phi_{\text{ref}}}$ along $\mathbf{ds}(\phi)_{|\mathbf{0}}$ and its orthogonal subspace within the DM space, as with the example shown on Fig. 2. Considering a DM mode ϕ with representation \mathbf{c} on the DM modal basis $\phi_1 \dots \phi_N$ ($\phi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$), the uncompensated small-signal reconstruction:

$$\mathbf{d}_{|\phi_{\text{ref}}} = \mathbf{Rec} \cdot \mathbf{ds}(\phi)_{|\phi_{\text{ref}}} \quad (8)$$

is the DM mode seen by the system in place of mode \mathbf{c} , which can be decomposed into its components parallel and orthogonal to \mathbf{c} as:

$$\mathbf{d}_{|\phi_{\text{ref}}} = \mathbf{d}_{\parallel|\phi_{\text{ref}}} + \mathbf{d}_{\perp|\phi_{\text{ref}}}, \quad (9)$$

as illustrated on Fig. 4. We further define – as the putative λ of Eq. 6 – the: (1) *parallel gain* or OGMC coefficient of mode ϕ :

$$G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}}) = \frac{\|\mathbf{d}_{\parallel|\phi_{\text{ref}}}\|}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{d}_{|\phi_{\text{ref}}}}{\|\mathbf{c}\|^2}, \quad (10)$$

which is the relative sensitivity of the PWFS near phase ϕ_{ref} for mode ϕ ; and (2), as ϕ is not specifically an eigenvector of $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Jac}_{|\phi_{\text{ref}}}$, the *orthogonal gain*:

$$G_{\perp}(\phi; \phi_{\text{ref}}) = \frac{\|\mathbf{d}_{\perp|\phi_{\text{ref}}}\|}{\|\mathbf{c}\|} = \left(\frac{\|\mathbf{d}_{|\phi_{\text{ref}}}\|^2}{\|\mathbf{c}\|^2} - G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

i.e. the norm of the non-collinear part of the reconstructed phase, in units of $\|\mathbf{c}\|$, where in Eqs. 10 and 11, $\|\bullet\|$ denotes euclidean vector norm and \bullet^T matrix transposition. Appropriate DM basis modes are expected to have (1) the smallest possible G_{\perp} and (2) a constant G_{\parallel} value for a given description of the system and residual phase, for which metrics will be discussed in Sec. 4.

3.2 A comparison with previous research

At this point, it is interesting to note the difference between the OGMCM values $G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$, introduced as a DM-space rescaling, and the sensitivity compensation coefficients $\xi(\phi; \phi_{\text{ref}})$ proposed by Korhikoski et al., defined by a PWFS-space energy measurement:

$$\xi(\phi; \phi_{\text{ref}}) = \frac{\|\mathbf{dS}(\phi)\|_{\phi_{\text{ref}}}}{\|\mathbf{dS}(\phi)\|_0}. \quad (12)$$

As a measurement-based metric, $\xi(\phi; \phi_{\text{ref}})$ is bound to consider supplemental effects as compared to $G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$. The latter eliminates these PWFS-space effects through applying **Rec** and taking response ratios in the DM space only. OGMCM coefficient are expected to be insensitive to the larger dimensionality of the PWFS space relative to the DM space, a valuable feature as oversampled PWFSs currently become a preferred design choice. Numerical simulations of the dependence of $\xi(\phi; \phi_{\text{ref}})$ and $G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$ with PWFS binning, shown on Fig. 3, confirm that as long as the DM space is well seen by the PWFS (DM is 39×39 actuators), our metric G_{\parallel} is independent of the PWFS binning choice, while ξ is strongly correlated.

ξ is always larger than G_{\parallel} , and may reach above 1 for highest frequency modes. Our preferred interpretation being that the ξ metric includes high-frequency nonlinear effects caused by ϕ_{ref} , which nonlinearities are sensed by the PWFS but beyond the DM cutoff frequency. The ξ metric is also bound to include PWFS-biased frequencies, while this research leans towards obtaining a metric that would be intrinsic and independent of detector geometry, ideally even valid if computed with spatially continuous information in the detector plane.

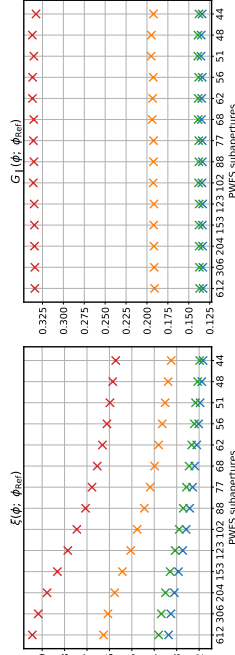


Figure 3. Measurement of left: $\xi(\phi; \phi_{\text{ref}})$ and right: $G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$ for 4 selected modes of the DM (in color; resp. from top to bottom modes M_8, M_3, M_6 and M_2 as shown on Fig. 12), depending on the number of PWFS subapertures across the telescope pupil. A unique realization of ϕ_{ref} is used, generated with Kolmogorov spectrum of $r_0 = 8.0$ cm = $\frac{D}{225}$, then projected onto the orthogonal of the DM space.

3.3 Reconstruction errors

With the definitions laid out in Sec. 3.1, we will now cover the reconstruction errors that are made using the non-compensated reconstructor **Rec** or through using OGMCM, with G_{\parallel} values measured on a preselected basis. Fig. 4 schematizes the various terms involved in the erroneous reconstruction of a DM-mode ϕ , when $G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$ and $G_{\perp}(\phi; \phi_{\text{ref}})$ are measured directly for this mode, i.e. it is a support vector of the DM basis. As seen on Fig. 4, one straightforwardly obtains the reconstruction error without OGMCM:

$$\text{err}_{\text{Rec}}(\phi; \phi_{\text{ref}}) = \frac{\|\text{err}_{\text{Rec}}(\phi; \phi_{\text{ref}})\|}{\|\mathbf{c}\|} = \left((1 - G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}}))^2 + G_{\perp}(\phi; \phi_{\text{ref}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

and with the use of OGMCM:

$$\text{err}_{\text{OGMCM}}(\phi; \phi_{\text{ref}}) = \frac{\|\text{err}_{\text{OGMCM}}(\phi; \phi_{\text{ref}})\|}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{G_{\perp}(\phi; \phi_{\text{ref}})}{G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})}. \quad (14)$$

These error terms will be useful in assessing the reduction of the reconstruction error when switching to OGMCM control, as will be covered in Sec. 7.

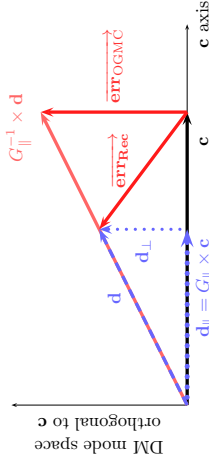


Figure 4. Schematic reconstruction of a mirror mode $\phi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$ represented by vector \mathbf{c} around any given non-zero phase ϕ_{ref} (not shown). The misestimated reconstruction $\mathbf{d} = \text{Rec} \cdot \mathbf{dS}(\phi)|_{\phi_{\text{ref}}}$ is the sum of (1): a collinear component \mathbf{d}_{\parallel} , from which $G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$ is measured; and (2): an orthogonal part \mathbf{d}_{\perp} . Reconstruction errors are shown, respectively err_{Rec} and $\text{err}_{\text{OGMCM}}$ without and with application of OGMCM on this mode.

4. STABILITY OF MODAL OPTICAL GAIN TERMS

When operating the PWFS with OGMCM control, the null-phase modal reconstructor **Rec** is rescaled mode-wise with a set of measured coefficients $G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$, i.e. replaced by the OGMCM reconstructor:

$$\text{OGMCM reconstructor} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \text{Rec} \quad \text{with } \mathbf{A} = \text{Diag}(G_{\parallel}(\phi_1; \phi_{\text{ref}}), \dots, G_{\parallel}(\phi_N; \phi_{\text{ref}})). \quad (15)$$

The question remains of the validity of measured coefficients beyond the very phase realization ϕ_{ref} on which the synthetic G_{\parallel} computation was performed. To provide answer elements and ensure the \mathbf{A} scaling matrix applies to a variety of situations, we probe the validity of the hypothesis hinted at by Korhikoski et al.: for a fixed Fried parameter r_0 , a single realization of the phase is sufficient to compute persistently valid OGMCM coefficients, or in other terms that \mathbf{A} depends only of the power spectrum density of the input phase. Although this previous work only considered a non-modulated PWFS, we broaden the scope of this hypothesis, as our research mainly has interest in modulated PWFS. We will also consider the modulation radius r_{Mod} as a system parameter generally modifying G_{\parallel} measurements, and hence the reconstruction errors defined in Sec. 3.3.

We parameterize OGMCM related indicators (Eqs. 10 and 11) with (1) the modulation radius r_{Mod} and (2) the r_0 of the incoming turbulence – using Von-Karman spectrum –, while all other AO design parameters remain identical – as described in Sec. 5. As we restrict our analysis to a PWFS operating near the fitting error, we will use the notation $\phi_{\text{fit}}(r_0)$ to denote the fitting phase map obtained by projecting an atmospheric turbulence map of Fried parameter r_0 onto the orthogonal of the DM phase space.

The most important criterion for any mode ϕ is the stability of the G_{\parallel} scaling. For the purpose on analyzing it, we define the random variable depending on turbulence realization $\phi_{\text{fit}}(r_0)$:

$$\mathbf{G}_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}}) = G_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{fit}}(r_0)), \quad (16)$$

which average and standard deviation over all turbulences with identical r_0 will be noted $\mu\mathbf{G}(\dots)$ and $\sigma\mathbf{G}(\dots)$.

We also monitor the reconstruction errors with and without OGMCM control, as defined in Eqs. 13 and 14, as turbulence dependent random variables:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{Rec}}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}}) &= \text{err}_{\text{Rec}}(\phi; \phi_{\text{fit}}(r_0)) \\ \mathbf{E}_{\text{OGMCM}}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}}) &= \text{err}_{\text{OGMCM}}(\phi; \phi_{\text{fit}}(r_0)), \end{aligned} \quad (17)$$

and will use notations $\mu\mathbf{E}_{\text{Rec}}$ and $\mu\mathbf{E}_{\text{OGMC}}$ for their mean values, respectively describing the average reconstruction error made when performing phase reconstruction with **Rec** and with the OGMC reconstructor.

After introducing our experimental setup in Sec. 5, extensive measurements of \mathbf{G}_{\parallel} are presented in Sec. 6.1, and reconstruction errors with corresponding parameters will be studied in Sec. 6.2.

5. NUMERICAL SIMULATIONS AO SETUP

This section presents the AO parameters and setup used for all numerical simulation results presented in Secs. 6, 7 and 8. To perform experiments at a realistic high-order AO scale, yet to maintain acceptable computing times, we consider an 18 m diameter telescope equipped with a 39×39 square-pitch deformable mirror. Wavefront sensing is realized using a PWFS with 55 % oversampling, as to reduce the impact of aliasing error. This AO resolution is designed to be representative of half the dimensions of ELT SCAO systems, and the PWFS oversampling ratio is consistent with current design parameters of e.g. the NFIRAOS AO facility of the TMT.²¹ Major parameters of the AO design are synthesized in Table 1. All numerical simulations were performed using the COMPASS²² simulation software, running on a Supermicro server set up with 2 10-core Intel Xeon E5-2630 CPUs and 8 Nvidia Titan XP GPUs.

Table 1. AO numerical simulations setup parameters.

Numerical simulations configuration	
Telescope	$D = 18.0$ m diameter – Circular pupil – No obstruction
Turbulence layer	Single Von-Karman ground layer
Source	Selectable $r_0 - L_0 = 25$ m – $ \nabla^2 = 10$ m.s ⁻¹
Loop rate	On-axis natural guide star
Deformable mirrors	Simulated as 500 Hz or 200 Hz
	Tip-tilt mirror
Piezo-stack mirror	Square pitch piezo-stack
PWFS subapertures	39×39 actuators – total 1,177 active
PWFS measurements	61×61
PWFS wavelength	all illuminated pixels – no slopes maps (Sec. 2.1)
PWFS modulation	Monochromatic at 658 nm
Detector noise	Circular, tunable radius.
Photon noise	None
Controller	None
	Modal integrator
Controller	2 frames latency (1 detector integration, 1 RTC processing)
	DM-projected Karhunen-Loève (KL) basis ²³ (1,176 modes)

For the measurements of G_{\parallel} and reconstruction error terms presented in Sec. 6 and 8, at each given modulation radius we proceed by:

- Computing the null-phase reconstructor **Rec** using strictly orthogonalized KL modes.
- Computing the zero-phase response $\mathbf{dS}(\phi)_0$ to all relevant modes ϕ .

Then – repeatedly for any number of atmospheric realizations ϕ_{ref} :

- Setting the DM to the exact fitting error, thus showing the PWFS a phase $\phi_{\text{fit}}(r_0)$
- Measuring $\mathbf{dS}(\phi)_{\phi_{\text{fit}}(r_0)}$ and computing G_{\parallel} and G_{\perp} values for all modes ϕ of interest.

Using a well orthogonalized modal basis of the DM allows for handy computations of G_{\parallel} and G_{\perp} directly in the DM modal space of dimension 1,176, rather than in the phase map space as would be required, with phase maps being sampled at up to 300,000 points. For end-to-end simulations presented in Sec. 7, for each data point long exposure Strehl ratios (S.R.) are obtained by:

- Computing **Rec** on the null phase with the KL basis.
- If using OGMC: computing and applying OGMC coefficients using a single realization of the fitting error.
- Bootstrapping the AO loop during 0.2 seconds to reach stationary correction regime.
- Running the AO loop and recording telemetry data and PSFs for 4 seconds.

Within the COMPASS software, H and R band PSFs are computed at each iteration of the AO loop – along with their temporal averages for S.R. computations – and phase buffers representing DM, turbulence and WFS instantaneous states are made readily available to the user.

6. SIMULATING OGMC: MODAL BASES, MODULATION RADII AND ATMOSPHERIC CONDITIONS

6.1 OGMC coefficients and PWFS sensitivity

This section investigates trends in and behavior of $\mathbf{G}_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ for various modal bases. We performed numerical simulations across seven different Fried parameters r_0 , including an extreme value $r_0 = 4$ cm, 3 usual values $r_0 = 8, 10, 12.9$ cm and 3 favorable condition values $r_0 = 20, 25, 35$ cm. As changing the modulation values defines a different PWFS response, we performed simulations for r_{Mod} ranging from 0 to $8 \frac{\lambda}{D}$. However, due to the large amount of data generated, data will only be shown for modulation radii 4 and $8 \frac{\lambda}{D}$. Measurements for \mathbf{G}_{\parallel} are shown on Fig. 5. To provide an absolute comparison of PWFS performance at the parameters tested, the modal sensitivity was computed as well and is shown on Fig. 6. The PWFS sensitivity to mode ϕ around a reference ϕ_{ref} is computed as the ratio between the norm of PWFS measurements, normalized by the amplitude of the mode, expressed in the modal space; it is computed through:

$$\text{Sensitivity}(\phi; \phi_{\text{ref}}) = \frac{\|\mathbf{dS}(\phi)\|_{\phi_{\text{ref}}}}{\|\phi\|} = \frac{\|\mathbf{dS}(\phi)\|_{\phi_{\text{ref}}}}{\|\text{Rec-dS}(\phi)\|_0} \quad (18)$$

Fried parameter dependency Fig. 5 shows simulations of $\mathbf{G}_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ for the actuator, Fourier and KL DM bases. All three bases at all modulation radii have similar behavior relative to r_0 : $\mu\mathbf{G}_{\parallel}$ is approx. 0.9 for the largest $r_0 = 35$ cm and continuously decreases with r_0 , down to .2-.4 for the usual $r_0 = 8-12.9$ cm, and down to .1 (or below) for the extreme $r_0 = 4$ cm. The standard deviation $\sigma\mathbf{G}_{\parallel}$ is systematically increased with decreasing r_0 , yet remains at less than 6 % of $\mu\mathbf{G}_{\parallel}$ for the Fourier and KL bases. As error bars on Fig. 5 are too small to be seen for these bases, we synthesize relative stability values in Table 2, well confirming the monotonic degradation of the OGMC measurement stability as phase residuals increase.

Stability vs. control basis As seen in Table 2, for a given r_0 , \mathbf{G}_{\parallel} is always approx. 10 times more stable for the KL and Fourier bases as compared to the actuator basis, with values consistently below 3 % one-sigma relative \mathbf{G}_{\parallel} uncertainty for $r_0 > 8$ cm. Measurements strongly confirm the working hypothesis developed in Sec. 4: the OGMC coefficient G_{\parallel} is well independent of the phase realization when computed on appropriate modes, and computations on a single $\phi_{\text{fit}}(r_0)$ are to be trusted.

Actuator response structure On the other hand, \mathbf{G}_{\parallel} measurements on the actuator basis prove to be dramatically unstable, showing average $\frac{\sigma\mathbf{G}_{\parallel}}{\mu\mathbf{G}_{\parallel}}$ ratios 17 % and higher for realistic r_0 values. Moreover, the spatial distribution of this response – and variance thereof – is non-homogeneous and mostly impacts actuators controlling aperture edges, as shown on Fig. 7: (1) edge actuators experience twice more sensitivity loss than inner actuators, and (2) relative uncertainty is at least twice larger than for inner actuators. With $\frac{\sigma\mathbf{G}_{\parallel}}{\mu\mathbf{G}_{\parallel}}$ at 40 % or higher at the edge of the pupil, it follows that sensitivity variations of the order of 100 % may happen near pupil edges while the turbulence moves by one DM pitch, i.e. $1/20^{\text{th}}$ of a second given the considered wind speed of 10 m.s⁻¹. This is yet another explanation of (1) why DM edge divergent commands are often observed with PWFS and (2) why actuator basis control of a PWFS AO is most difficult to achieve and has widely been discarded, at least for systems sensing in visible light, e.g. First Light AO at the Large Binocular Telescope.²⁴

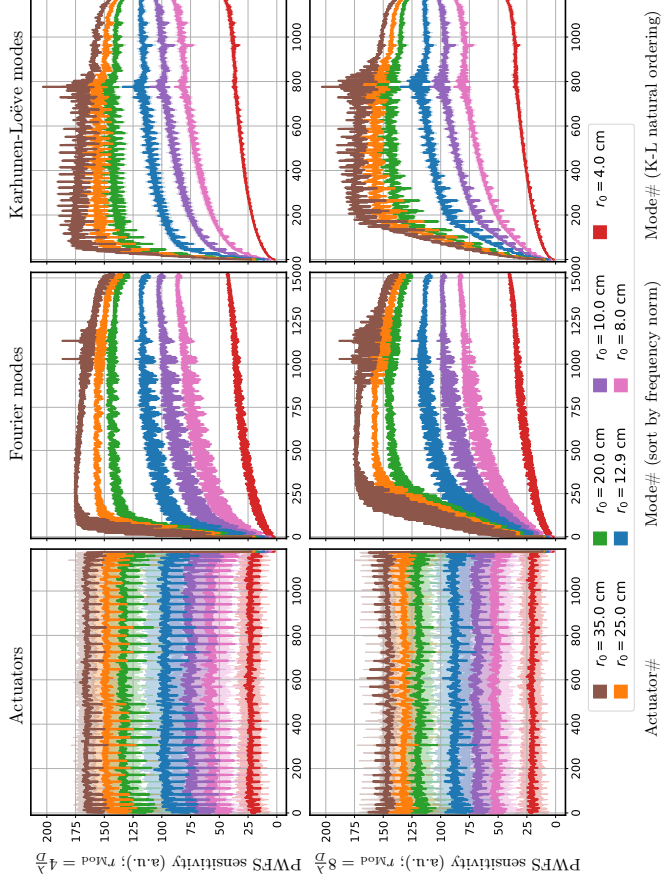


Figure 6. Numerical simulations of the PWFS modal sensitivity around a residual $\phi_{\text{fit}}(r_0)$, for modulation radii 4 and 8 λ/D (rows) over DM actuator, Fourier and KL bases (columns). Colors: r_0 used. Solid lines (resp. shaded areas): average (resp. ± 1 standard deviation) over 30 independent realizations of $\phi_{\text{fit}}(r_0)$.

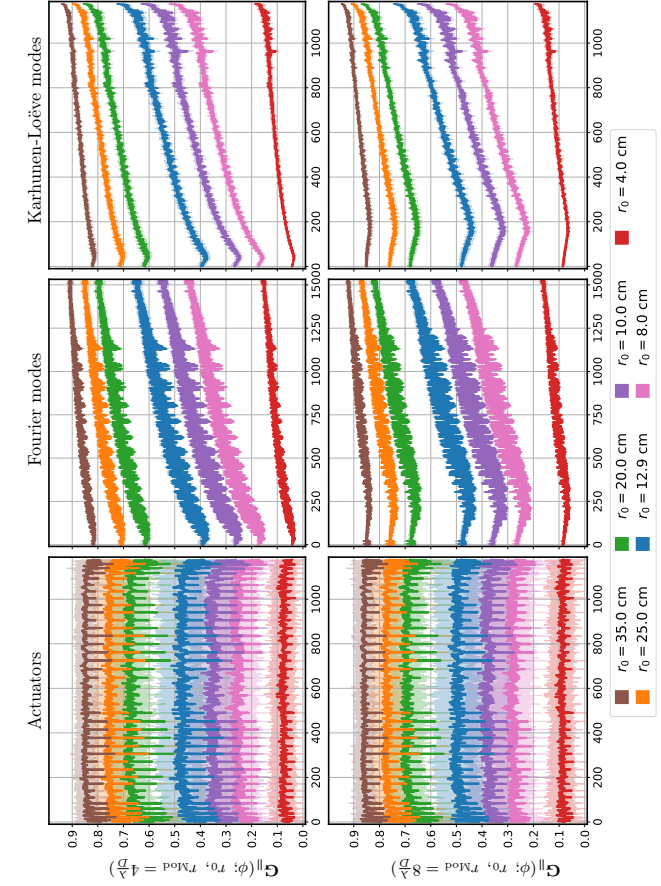


Figure 5. Numerical simulations of the modal optical gain scaling $G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$. Columns: measurement on the actuator, Fourier and KL bases of the DM. Rows: Modulation radii 4 and 8 $\frac{\lambda}{D}$. Colors: r_0 used. Solid lines: average $\mu G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$; shaded areas: $\pm 1 \sigma G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$, clearly visible only for actuators (left). Measurements of μG_{\parallel} and σG_{\parallel} performed on 30 independent realizations of $\phi_{\text{fit}}(r_0)$.

Table 2. Stability of the $G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ compensation coefficient over 30 realizations of $\phi_{\text{fit}}(r_0)$, computed from numerical simulations as the ratio $\sigma G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})/\mu G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$, here for $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$. Values given are the average (Av.) and extrema over all modes ϕ of each control basis.

r_0 (cm)	Actuators			Fourier			Karhunen-Loève		
	Av.	Max.	Min.	Av.	Max.	Min.	Av.	Max.	Min.
35.0	.046	.185	.006	-.006	.011	.003	-.006	.013	.002
25.0	.075	.275	.009	-.008	.016	.004	.010	.019	.003
20.0	.102	.337	.012	-.011	.021	.006	-.013	.025	.004
12.9	.176	.465	.021	-.016	.039	.010	-.020	.040	.008
10.0	.226	.487	.030	-.019	.049	.009	-.024	.050	.010
8.0	.276	.552	.035	-.022	.059	.011	-.028	.061	.013
4.0	.555	1.87	.050	-.042	.082	.026	-.056	.120	.034

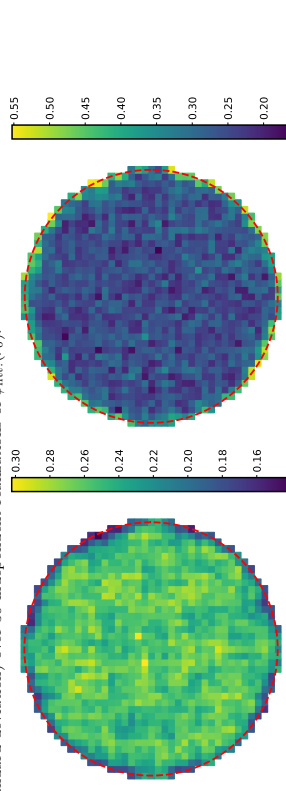


Figure 7. Numerical simulations of $\mu G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ (left) and $\sigma G_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ (right) for the DM mirror actuator basis (shown for $r_0 = 8$ cm, $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$), shown by actuator position in the DM plane. Dashed red circle: telescope aperture projected on the DM.

Fourier mode response Fourier modes of the DM allow to probe the PWFS response to specific, well-defined spatial frequencies, and therefore permits to probe the frequency plane in an optical transfer function-like approach. As the present research focuses only on small-signal linearized PWFS response, it is expected for DM Fourier modes to be the closest approximation to eigenvectors of $\mathbf{Rec} \cdot \mathbf{Jac}|_{\phi_{\text{ref}}}$ (Eq. 7), and as such the appropriate control basis for OGMC control given the approach presented in Sec. 2.3, an hypothesis so far corroborated by the stability of $\mathbf{G}_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ on Fourier modes – as shown in Table 2.

For a better visualization of the PWFS response depending on spatial frequency, the average $\mu\mathbf{G}_{\parallel}$ and the PWFS sensitivity for $r_0 = 8$ cm are shown on Fig. 8, layed out according to each mode spatial frequency. Sensitivities along a single axis are consistent with the theoretical developments of Vérinaud,³ with sensitivity linearly increasing up to the frequency corresponding to the modulation radius, and then stalling up to the DM cutoff. However when studied in two dimensions, PWFS response is more complex to describe, being non-separable between axes and anisotropic. Modes with frequency within the central r_{Mod} square experience a low \mathbf{G}_{\parallel} value, slowly decreasing as the frequency increases, and minimal values are observed within 4 triangular lobes along the PWFS edges' axes, of approximate width corresponding to r_{Mod} in the focal plane. For modes at distance greater than r_{Mod} from the pyramid pin and edges, \mathbf{G}_{\parallel} increases approximately linearly in directions 45 degrees outwards from the pyramid pin, with PWFS sensitivity being nearly constant when reaching the DM cutoff frequency.

The analysis above is insightful about different PWFS regimes across different spatial frequency domains: (1) below r_{Mod} on both axes, i.e. in the central square, signals are well linearized by modulation; (2) for spatial frequencies below r_{Mod} on a single axis, modes are linearized in one direction only and (3) for frequencies beyond r_{Mod} on both axes, modes are not correctly linearized and the PWFS cannot be interpreted as a gradient sensor by any means.

Karhunen-Loève basis The observed similarity of data between Fourier modes and KL modes regarding the scaling coefficient \mathbf{G}_{\parallel} (Fig. 5) and the PWFS sensitivity (Fig. 6) is a side effect of the definition of atmospheric KL modes, and how they are processed to generate our DM KL basis. The atmospheric turbulence properties being spatially isotropic, the power spectrum is rotationally invariant and each KL corresponds to a mixture of spatial frequencies distributed on rings centered on zero, with the KL ordering by decreasing eigenvalue – i.e. decreasing variance – inducing a natural classification following each mode's *average spatial frequency*. As our definition of $\mathbf{G}_{\parallel}(\phi; \phi_{\text{ref}})$ is linear with the mode ϕ , we may consider each KL mode as a weighted average of Fourier modes with same frequency norm, and as such $\mathbf{G}_{\parallel}(\phi_{\text{KL}}; \phi_{\text{ref}})$ as an orthoradial averaging of $\mathbf{G}_{\parallel}(\phi_{\text{Fourier}}; \phi_{\text{ref}})$. As seen on Fig. 8, the mean optical gain $\mu\mathbf{G}_{\parallel}(\phi_{\text{Fourier}}; r_0)$ presents no large orthoradial discrepancies in the frequency plane, and therefore the KL modes inherit from the Fourier modes (1) the stability of the G_{\parallel} measurement – always $< 3\%$ for $r_0 > 8.0$ cm – and (2) the overall structure of the measured $\mathbf{G}_{\parallel}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ and PWFS sensitivity. Following the same line of reasoning, each actuator mode is an evenly-weighted linear combination across all of the Fourier plane, therefore across important $G_{\parallel}(\phi_{\text{Fourier}})$ discrepancies, which is another interpretation of the previously discussed issues with the DM natural basis.

For low order KL modes, $\mu\mathbf{G}_{\parallel}$ decreases, reaching a minimum for modes containing frequencies of norm r_{Mod} , while PWFS sensitivity increases linearly from 0, as expected from a gradient sensor. For higher order modes, $\mu\mathbf{G}_{\parallel}$ continuously increases, with an acceleration past mode order 800: the DM cutoff frequency is partially reached, and the DM-reprojected KL modes converge on waiffl-like modes rather than keeping a frequencyally isotropic structure.

6.2 Reconstruction errors

We performed numerical simulations of the modal reconstruction error terms with uncompensated PWFS control – $\mathbf{Err}_{\text{rec}}(\phi, r_0, r_{\text{Mod}})$ – and with OGMC – $\mathbf{EOGMc}(\phi, r_0, r_{\text{Mod}})$ –, for identical modal bases, r_0 and r_{Mod} as in Sec. 6.1. We remind the reader the reconstruction errors terms have been defined in Eqs. 13 and 14, graphically depicted on Fig. 4, and their stochastic nature described in Eq. 17. Results are shown only for $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$ on Fig. 9. Note that the extreme case $r_0 = 4$ cm is not shown, with extremely noisy values $\mathbf{Err}_{\text{rec}}(\phi, r_0, r_{\text{Mod}})$ in the 1.0-1.2 range and $\mathbf{EOGMc}(\phi, r_0, r_{\text{Mod}})$ substantially larger than 1, amplified by \mathbf{G}_{\parallel} values below 0.1.

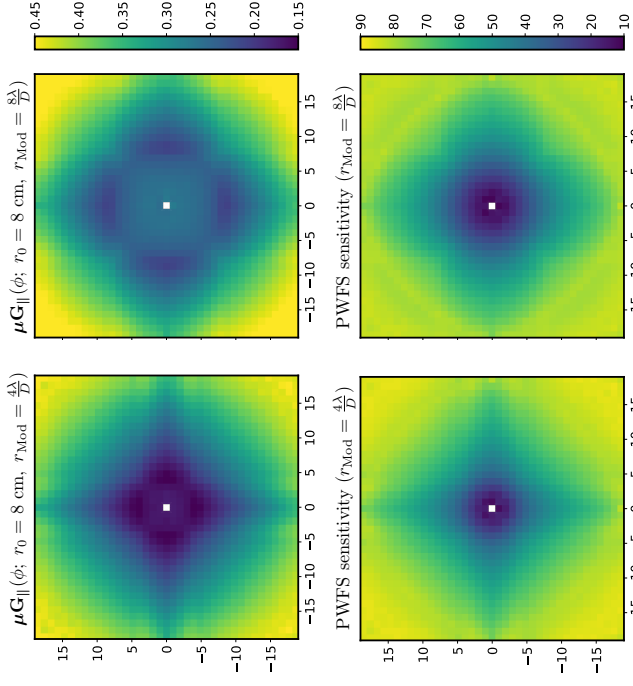


Figure 8. Top: Fourier plane displays of $\mu\mathbf{G}_{\parallel}$ for the Fourier basis over residuals $\phi_{\text{int}}(r_0)$, $r_0=8$ cm. Data corresponding to each Fourier mode is shown at the corresponding position in the discretized Fourier plane, with axes showing spatial frequencies in units of periods-per-telescope-aperture (or equivalently, in the telescope focal plane with axes in units of $\frac{\lambda}{D}$); bottom: PWFS sensitivity in identical conditions. Central white pixel: undefined value for piston mode.

Fried parameter dependency The general trend is well observed on mean values $\mu\mathbf{Err}_{\text{rec}}$ and $\mu\mathbf{EOGMc}$ on the actuator basis, besides the higher standard deviations – propagated from \mathbf{G}_{\parallel} and \mathbf{G}_{\perp} . Introducing OGMC offers a consistent reduction of small-signal reconstructor errors, with overall amounts synthesized in Table. 3: a reduction of the local reconstruction error from 10 to 30 % is observed for usual r_0 , with even more sensible reductions for higher r_0 . This observation is naturally consistent with G_{\parallel} and G_{\perp} asymptotically reaching respectively 1 and 0 as r_0 increases.

Mode frequency dependency While the overall reduction of the reconstruction error is interesting in itself, the most attractive improvement obtained by applying OGMC resides in low frequency modes. For Fourier or KL modes below the modulation radius, the reconstruction error is mostly induced by the G_{\parallel} sensitivity variation, rather than the G_{\perp} coupling to other modes, i.e. on Fig. 4 $\mathbf{err}_{\text{rec}}$ is dominated by $(G_{\parallel} - 1) \times \mathbf{c}$. The reconstruction error is well reduced by applying OGMC control, with – as seen on Fig. 9 – $\mu\mathbf{EOGMc}$ ramping up from 0 for the first modes up to a rather homogeneous ceiling value over the rest of the basis modes, which ceiling value is reached for modes containing frequencies at r_{Mod} .

A considerable gain is therefore expected regarding rejection of low frequencies by the AO loop when applying OGMC, which spatial frequencies are of highest variance in the atmospheric turbulence. Performance improvement is investigated through end-to-end simulations in Sec. 7.

7. END-TO-END PERFORMANCE IN NUMERICAL SIMULATIONS

Now that the behavior of OGMC coefficients and reconstruction error terms has been investigated, we propose to verify the impact of switching from conventional control with **Rec** to OGMC control using $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Rec}$, as defined in Eq. 15. As we calibrate and operate the AO through the KL basis, and as we have well demonstrated in Sec. 6.1 the sub-3 % stability of \mathbf{C}_{\parallel} for these modes, the \mathbf{A} scaling is measured by showing the PWFS a single realization of $\phi_{\text{fit}}(r_0)$.

First, we establish that simple adjustment of a single scalar loop gain cannot be sufficient to compensate the optical gain sensitivity reduction. To assess OGMC performance regardless of global scalar gain effects, we ran numerical simulations for across a range of loop gains – from 0.1 to 2.0 –, seeking the value yielding the maximum Strehl ratio (S.R.) on the H-band (1,650 nm) science camera. Fig. 10 presents end-to-end simulation performance depending on integrator loop gain, for $r_{\text{Mod}} = 2 \frac{1}{2}$ and for atmospheric conditions of $r_0 = 8.0$, 10.0 and 12.9 cm. Additionally, to assess putative correlations with the AO bandwidth limitations, we performed these simulations at both 500 Hz and 200 Hz, at which wind speed corresponds to respectively 0.07 and 0.17 subapertures per frame. With the considered loop delay of 2 frames, this accounts for bandwidth error being a negligible contributor at 500 Hz, but a dominant one at 200 Hz. It is worth noting that a slowing down of the AO loop is a common compromise when using fainter guide stars, as to increase WFS exposure times.

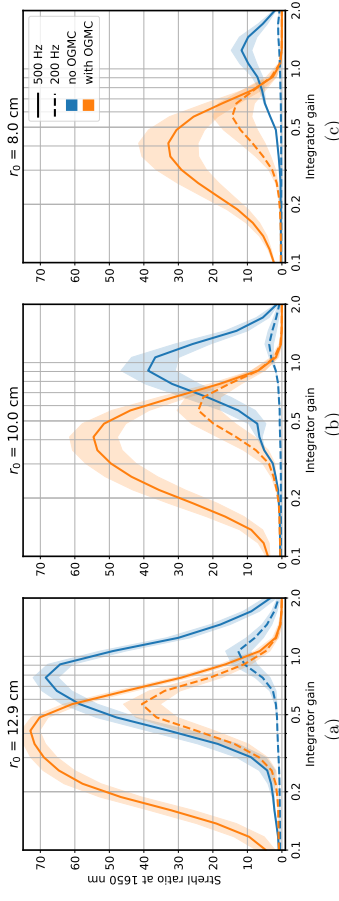


Figure 10. Long exposure Strehl ratio simulated depending on loop framerate (500 Hz and 200 Hz), integrator gain (from 0.1 to 2.0), r_0 (12.9, 10 and 8 cm) and whether OGMC is being applied. r_{Mod} was set to $2 \frac{1}{2}$.

At 500 Hz, OGMC allows for a modest performance increase for $r_0 = 12.9$ cm, with +6 % of H-band S.R. However with $r_0 = 10$ cm or less, OGMC usage prevails as absolutely critical to maintain AO performance: the best achievable performances without OGMC are respectively 38 % and 12 % for r_0 of 10 and 8 cm, increased to 55 % and 33 % using OGMC. When considering bandwidth dominated simulations at 200 Hz, results are even more discriminating, with performance without OGMC capping at 15% H-band S.R. for $r_0 = 12.9$ cm and below 5 % for smaller r_0 , thus completely disallowing AO-powered observations for such atmospheric conditions; in these conditions, OGMC control yields the dramatically improved performance of resp. 25 % and 15 % of S.R. OGMC usage is altogether expected to widely broaden the range of acceptable observation conditions.

More detailed insight on how OGMC increases performance can be obtained by analyzing real-time telemetry of end-to-end numerical simulations, such as these shown on Fig. 11, simulated with $r_0 = 10$ cm and the optimized integrator gains, i.e. corresponding to the maxima of the 4 curves of Fig. 10 (b). The modal distribution of loop residuals for the same numerical simulation is shown on Fig. 11 (right column). The most dramatic reduction is obtained within the first 100 modes – well in accordance with the measurements for $\mu\mathbf{E}_{\text{Rec}}$ and $\mu\mathbf{E}_{\text{OGMC}}$ discussed in Sec. 6.2 – as the reconstruction error is reduced to near zero for lowest order modes when OGMC is used.

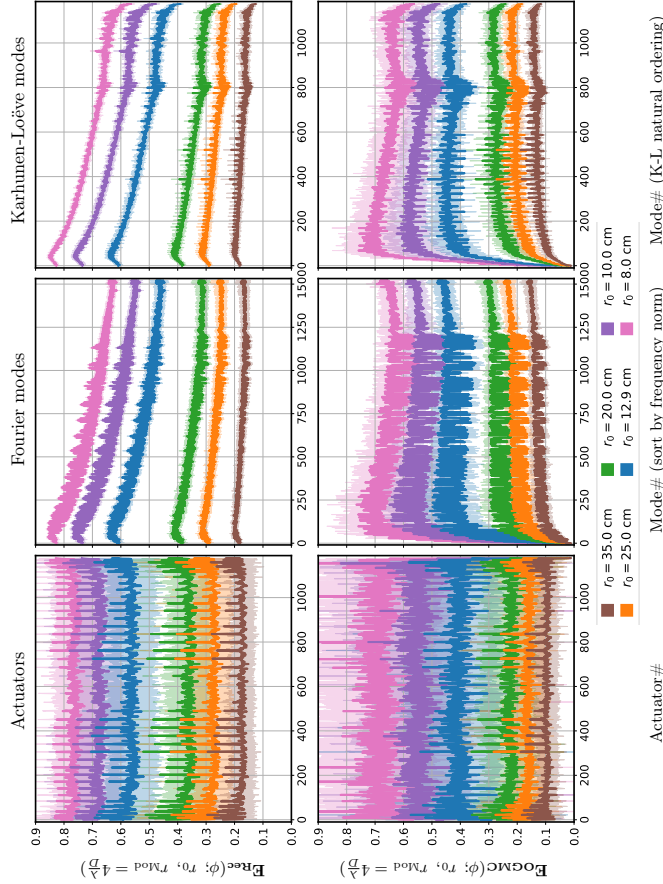


Figure 9. Numerical simulations of the modal nonlinearity reconstruction errors without modal compensation $\mathbf{E}_{\text{Rec}}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$ (top) and with using OGMC $\mathbf{E}_{\text{OGMC}}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}})$, shown for $r_0 = 8 - 35$ cm and $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{1}{2}$. Columns: measurement on the actuator, Fourier and KL bases of the DM. Solid lines: averages $\mu\mathbf{E}_{\text{Rec}}$ and $\mu\mathbf{E}_{\text{OGMC}}$; shaded areas: ± 1 standard deviation. Measurements were performed over 30 independent realizations of $\phi_{\text{fit}}(r_0)$.

Table 3. Mean reconstruction error terms $\mu\mathbf{E}_{\text{Rec}}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}} = 4 \frac{1}{2})$ and $\mu\mathbf{E}_{\text{OGMC}}(\phi; r_0, r_{\text{Mod}} = 4 \frac{1}{2})$, averaged over the actuator basis, and variation incurred by introducing OGMC.

r_0 (cm)	$\mu\mathbf{E}_{\text{Rec}}$	$\mu\mathbf{E}_{\text{OGMC}}$	Variation (%)
35.0	0.18	0.10	-44.4
25.0	0.28	0.17	-41.2
20.0	0.37	0.23	-38.0
12.9	0.57	0.41	-28.1
10.0	0.68	0.55	-19.5
8.0	0.77	0.69	-10.7

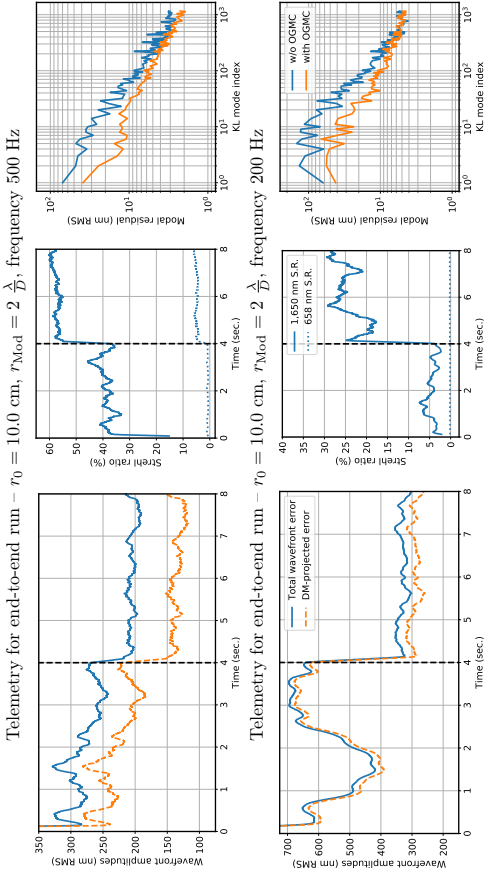


Figure 11. Real-time telemetry – left: wavefront residual terms; center: PWFS and science camera Strehl ratios (S.R.); and right: AO loop modal residuals for end-to-end simulations –, using $r_0 = 10.0$ cm and $r_{Mod} = 2 \frac{\lambda}{b}$, with integrator gains such as they correspond to Strehl ratio maxima on Fig. 10 (b). OGMC is applied starting at $t=4$ sec. (dashed vertical line). Modal time-averaged residuals are computed excluding bootstrapping duration immediately after $t = 0$ and $t = 4$ sec.

8. PREDICTIVE MODELS FOR OGMC VALUES

Provided the results of the extensive OGMC numerical analysis presented in Sec. 6, and the end-to-end AO performance simulation presented in Sec. 7, it is well apparent that (1) OGMC provides performance improvements ranging from moderate to critical depending on the observing conditions and that (2) OGMC coefficients remain constant for KL modes as long as PWFS parameters and turbulence r_0 remain unchanged. Therefore, provided real-time r_0 values are obtained through some telemetry procedure of the on-sky AO, it is possible to obtain the compensation coefficients through an offline numerical simulation of the system, a method that was proposed in the work of Korkiakoski et al.⁹

Computing a set of $G_{||}$ coefficients requires computing a modal interaction matrix of the system, which for our simulations of ELT-scaled SCAO systems takes approx. 6 minutes. Although simulation servers performance improvements are to be expected between now and the first light of ELT AOs, our preferred approach remains to find predictive models to obtain $G_{||}(\phi; r_0, r_{Mod})$ as quickly as possible every time r_0 is updated.

Investigating for good modeling candidates requires a large amount of data, both in terms of r_0 values and turbulence realizations to ensure strict convergence on the mean value $\mu G_{||}(\phi; r_0)$. To circumvent this computational burden, we restricted our modeling analysis to eight preselected modes M_1 – M_8 – shown on Fig. 12 – from all of the actuator, Fourier and KL modal bases and spanning the frequency range. With these modes, we performed extensive $G_{||}(M_i; r_0)$ numerical simulations, which results are shown on Fig. 13, and adjusted an asymmetric sigmoid model fit to the data.

$$\mu G_{||}(\phi; r_0, r_{Mod}) = 1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r_0}{b}\right)^{a_1}\right]} \quad (19)$$

where a , b and c are the 3 parameters of the fit, therefore depending upon (1) the considered mode ϕ and (2)

current PWFS configuration, including r_{Mod} . The quality of the asymmetric sigmoid model is shown on Fig. 13 and yields a high-precision adjustment to $G_{||}$ data, in particular for the most relevant regions $8 \text{ cm} < r_0 < 25 \text{ cm}$.

This model provides a reduction of the OGMC computation problem down to simply storing 3 real parameters per mode and per modulation radius, which values are not expected to change except in case of AO re-design. Extensive offline numerical simulations can therefore be done a unique time to obtain a persistently valid lookup table. The extremely fast computations of modal gains from the lookup tables will pave the way for adaptive AO controller designs, with runtime tuning based on telemetry data, possibly directly obtained from high spatial frequency information of PWFS measurements, which so far is unused.

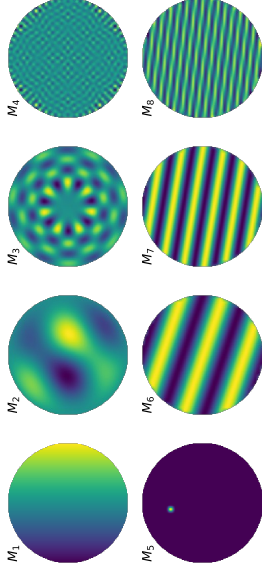


Figure 12. Eight pre-selected modes for computation-intensive analyses of prediction models for $\mu G_{||}(\phi; r_0, r_{Mod})$. M_1 : tilt. M_2, M_3, M_4 : low, mid and high frequency modes of the DM-reprojected KL basis. M_5 : single actuator poke. M_6, M_7, M_8 : Low, mid and high frequency modes of the DM Fourier basis.

CONCLUSION

In this work, we propose a thorough analysis of the optical gain phenomenon of the PWFS and a control method to mitigate the AO performance reduction caused by OG. Our new approach to optical gain modal compensation coefficients is based on the rescaling of PWFS estimated wavefronts so that each mode is measured with the same colinear amplitude as during the calibration phase. This formula for OG coefficients is well suited for a detailed analysis of coefficients, modal sensitivity, and wavefront reconstruction error depending on AO design parameters, modulation radius, and turbulence parameters.

We build a stochastic analysis of PWFS OG depending only on atmospheric r_0 and system parameters, and satisfactorily demonstrate a prerequisite hypothesis for a generalized and persistent OGMC approach: given an appropriate DM control basis, compensation coefficients are independent of the turbulence realization, but only of its stochastic properties. Extensive numerical simulations demonstrate the difference between the DM actuator basis, a KL basis and a Fourier basis, showing that applying OG compensation on the actuator basis paves way for critical AO instabilities. On the other hand, Fourier and KL bases are shown to share frequency dependent characteristics for sensitivity and OG coefficients and exhibit the required stability of OGMC coefficients regarding phase realizations. Moreover, we demonstrate that OGMC offers a considerable reduction of reconstruction error for modes with spatial frequencies below the modulation radius of the PWFS.

End-to-end numerical simulations – through both final S.R. performance and the analysis of simulation telemetry – are conclusively determining that modal compensation of the OG, rather than global compensation with a single value, is a necessary feature for high-order PWFS AOs. Performance improvements are seen even within usually specified conditions (r_0 of 13 cm, 500 Hz), and OGMC even allows operation with satisfactory performance in conditions otherwise inaccessible, e.g. with $r_0 \leq 10$ cm or with the framerate slowed down for improved detector exposure. Finally, we propose an empirically determined modelization for predicting OGMC values at a negligible computational cost, based solely on a pre-computed lookup table and on any available r_0 -related telemetry. Looking towards future implementations of this method on high-order on-sky AOs, this telemetry could be obtained directly from the PWFS, using the many more degrees of freedom of the PWFS measurements compared to the DM modal basis.

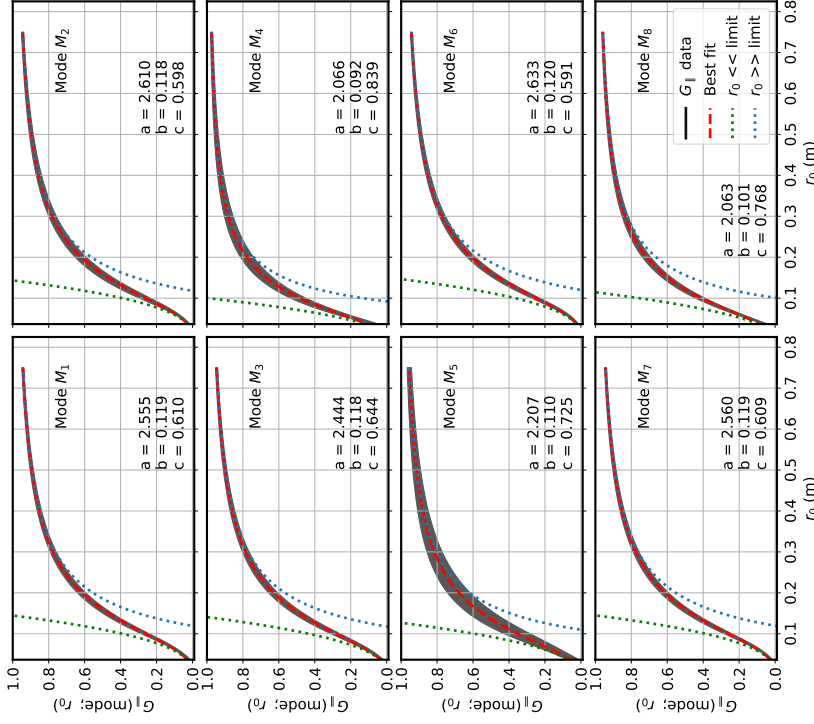


Figure 13. Predictive asymmetric sigmoid (Eq. 19) OGMC model adjusted for the 8 modes shown on Fig. 12. Black: simulations of $G_{||}(M_i; r_0, r_{\text{mod}} = 4 \frac{D}{\lambda})$. Computations were performed for 100 log-spaced r_0 values from 2 cm to 75 cm, with 100 turbulence realizations at each r_0 . Dashed red: best asymmetric sigmoid fit. Dotted blue and green: model small and large r_0 asymptotic trends, shown for visual guidance.

ACKNOWLEDGMENTS

This research is performed in the frame of the development of MICADO, first light instrument of the ELT (ESO), with the support of ESO, INSU/CNRS and Observatoire de Paris. The authors wish to thank the fruitful contributions of D. Gratadour, F. Ferreira and A. Sevin to the COMPASS simulation tool.

REFERENCES

- [1] Ragazzoni, R., "Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism," *J. Mod. Opt.* **43**(2), 289-293 (1996).
- [2] Ragazzoni, R. & Farinato, J., "Sensitivity of a pyramidal wave front sensor in closed loop adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **350**, L23-L26 (1999).
- [3] Vérmard, C., "On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor," *Opt. Commun.* **233**(1), 27-38 (2004).
- [4] Véran, J.-P., Esposito, S., Spanò, P., Herriot, G., & Andersen, D., "Pyramid versus Shack-Hartmann: Trade study results for the NFIRAOS NGS WFS," in [4th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes], EDP Sciences (2016).
- [5] Pinna, E., Agapito, G., Quirós-Pacheco, F., et al., "Design and numerical simulations of the GMT natural guide star WFS," *Proc. SPIE* **9148** (2014).
- [6] Davies, R., Aggones, N., Barl, L., et al., "MICADO: the E-ELT adaptive optics imaging camera," *Proc. SPIE* **7735** (2010).
- [7] Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., et al., "HARMONI at the diffraction limit: from single conjugate to laser tomography adaptive optics," *Proc. SPIE This conference* (2018).
- [8] Clénet, Y., Buey, J.-T., Gendron, E., et al., "MICADO-MAORY SCAO: towards the preliminary design review," *Proc. SPIE This conference* (2018).
- [9] Korkiakoski, V., Vérmard, C., & Le Louarn, M., "Applying sensitivity compensation for pyramid wavefront sensor in different conditions," *Proc. SPIE* **7015** (2008).
- [10] Korkiakoski, V., Vérmard, C., & Le Louarn, M., "Improving the performance of a pyramid wavefront sensor with modal sensitivity compensation," *Appl. Opt.* **47**, 79 (2008).
- [11] Bond, C. Z., Correia, C., Sauvage, J.-F., et al., "Optimized calibration of the adaptive optics system on the LAM pyramid bench," in [5th AO4ELT conference - Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes], (2018).
- [12] Horwitz, B. A., "New pupil-plane wavefront gradient sensor," in [1994 Symposium on Astronomical Telescopes & Instrumentation for the 21st Century], 496-501, International Society for Optics and Photonics (1994).
- [13] Gendron, E., Brangier, M., Chenegros, G., et al., "A new sensor for laser tomography on ELTs," in [1st AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes], 05003, EDP Sciences (2010).
- [14] Van Kooten, M., Véran, J.-P., & Bradley, C., "Alternative pyramid wavefront sensors," *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems* **3**(2), 029001 (2017).
- [15] Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al., "Assessing and mitigating alignment defects of the pyramid wavefront sensor: a translation insensitive control method," *In prep.* . (2018).
- [16] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O., "General formalism for Fourier-based wave front sensing," *Optica* **3**, 1440-1452 (2016).
- [17] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O., "A general formalism for Fourier based wave front sensing: Application to the pyramid wave front sensors," *Proc. SPIE* **9909** (2016).
- [18] Frazin, R. A., "Efficient, nonlinear phase estimation with the nonmodulated pyramid wavefront sensor," *J. Opt. Soc. Am. A* **35**, 594-607 (2018).
- [19] Esposito, S., Feeney, O., & Riccardi, A., "Laboratory test of a pyramid wavefront sensor," *Proc. SPIE* **4007**, 416-422 (2000).
- [20] Deo, V., Vidal, F., Gendron, E., et al., "Enlarging the control space of the pyramid wavefront sensor: Numerical simulations and bench validation," in [5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes], (2017).
- [21] Wang, L., Véran, J.-P., & Ellerbroek, B., "Pyramid WFS tolerance study for NFIRAOS NGS AO," in [5th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes], (2017).
- [22] Gratadour, D., Puech, M., Vérmard, C., et al., "COMPASS: an efficient, scalable and versatile numerical platform for the development of ELT AO systems," *Proc. SPIE* **9148** (2014).
- [23] Ferreira, F., Gendron, E., Rousset, G., & Gratadour, D., "Adaptive optics error breakdown numerical estimation for PSF reconstruction," *Astron. Astrophys. Forthcoming* (2018).
- [24] Esposito, S., Riccardi, A., Fini, L., et al., "First light AO (FLAO) system for LBT: final integration, acceptance test in Europe, and preliminary on-sky commissioning results," *Proc. SPIE* **7736** (2010).

ANNEXE E

Deo et al. (2019b) : “CLOSE : a self-regulating, best-performance tracker for modal integrator based AO loops” (2019), 6th AO4ELT conference

CLOSE: a self-regulating, best-performance tracker for modal integrator based AO loops

V. Deo*, M. Rozel, A. Bertrou-Cantou, F. Ferreira, F. Vidal, D. Gratadour,
A. Sevin, Y. Clénet, G. Rousset, and É. Gendron

LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, 92190 Meudon, France

ABSTRACT

The pyramid wavefront sensor (PWFS), due to its extremely high sensitivity in comparison to the Shack-Hartmann WFS, is the design choice of most single-conjugate adaptive optics (AO) instruments currently being developed for extremely large telescopes (ELTs). This sensitivity benefit is served, however, with several technical drawbacks to overcome, one of which is the intrinsic non-linearity of the sensor. Even in modulated operation, the gradient measurement saturation non-linearity is strongly exacerbated by in-loop phase residuals for typical on-sky regimes, with high spatial frequencies inducing a dramatic sensitivity reduction for the controlled modes. This phenomenon has been dubbed “optical gain”, and it was demonstrated that a modal gain compensation on an appropriate control basis provides an adequate mitigation of the sensitivity reduction, and improves the end-to-end performance on ELT SCAO systems across all relevant guide star magnitudes and seeing conditions.

Several techniques have been proposed to achieve this nominal performance recovery, however most require offline computation of interaction matrices; or some alterations to the usual AO loop operation. In this paper, we present the CLOSE (Correlation-Locked Optimization StratEgy) algorithm, which achieves determination of the modal gains, in a real-time fashion, through the sole use of the modal decomposition of the WFS measurements. Real-time estimators are implemented to implicitly measure resonance levels of the integrator transfer function, which is used as a proxy to control the modal gains through a second-layer servo loop. Using this method, we achieve compensation of the optical gain in the command law, and a fully automatic optimization of the modal integrator depending on the signal-to-noise level. Simulated end-to-end results are presented, for stationary or quickly varying seeing conditions, all at the scale of the MICADO SCAO design on the ELT. We also discuss the applicability of the CLOSE scheme on other known AO problems.

Keywords: Pyramid wavefront sensor, Extremely large telescopes, Modal control, Wavefront reconstruction.

1. INTRODUCTION

Probing the distant universe with always finer resolution and precision requires to increase the diameter of the next generation of ground-based telescopes^{1–3} so as to improve light collection and resolving power. The latter is limited by atmospheric turbulence, making extremely large telescopes (ELTs) a waste if not for the use of adaptive optics (AO). The pyramid WFS⁴ (PWFS) in particular is the preferred sensor for ELTs, a choice motivated by its increased sensitivity at low flux regimes, and also by technical advantages such as the reduced number of required pixels. Unfortunately, the PWFS also comes with a list of technical and theoretical difficulties and challenges; one such drawback is the variation of the sensor sensitivity with wavefront conditions,^{5,6} called *optical gain*; sensitivity depends upon the magnitude and structure of the residual phase measured, and is thus influenced by the seeing, the wind speed or any other parameter that has an impact on the loop residuals.

Moreover, this optical gain intertwines with the integrator loop gain, i.e. the value used by the AO real-time computer (RTC) to scale the sensor feedback. Indeed, most AO systems use an integral controller, as such a law is conceptually simple and uses moderate computing power. Tuning the loop gain is a way to increase the loop performance, as gain impacts in opposite ways the temporal error and the noise propagation. A fine-tuned modal integrator thus makes it possible to optimally balance those error terms towards residual variance minimization.⁷

* Corresponding author. E-mail: vincent.deo at obspm dot fr

Previously existing approaches^{7,8} are made complex by the sensitivity variation of the PWFS: the optical and loop gains multiply and bias the outcome: the sensitivity must be known to optimize the integrator.

We started to tackle this problem in the context of the SCAO module of the MICADO⁹ instrument, a first-light, near-infrared imaging camera for the European ELT. The built-in SCAO¹⁰ uses a PWFS working at optical wavelengths. We previously presented a method for estimating on-sky the optical gain,¹¹ and demonstrated that a modal compensation¹² applied on a well-suited basis allows for significant performance improvements, in particular for poor seeing conditions. Yet, we did not address the optimization of the integrator against the signal-to-noise ratio (SNR) and speed of turbulence, which is what we now propose in the present paper.

CLOSE (Correlation-Locked Optimization StratEgy) is a self-regulating method that permanently maintains the equilibrium between small temporal residuals and a reasonable noise amplification, while coping with an arbitrary hidden, variable WFS sensitivity, such as PWFS optical gain. Without assumptions, CLOSE applies beyond the sole case of the PWFS: it also naturally applies to any other AO system, whether the sensor gain varies or not (Shack-Hartmann systems, using or not quad-cells, elongated laser guide stars, etc.). CLOSE – originally inspired by a proposition (Montera et al.¹³) to apply single-layer neural networks to AO RTCs – is a second-level servo-loop, which drives modal gains through real-time multiplicative updates computed from the temporal correlations of the modal decomposition of WFS measurements. The steady-state condition reached for this top-level loop closely matches the variance optimization criterion for the residuals, regardless of the currently-ongoing optical gain alteration of the WFS response. Altogether, CLOSE is a fully automatic, without intrusive signals, real-time pipeline optimizing integrator-based AOs with unknown sensitivity variations.

In section 2, we introduce our model of the PWFS and describe our dealing with nonlinearity. Section 3 explains how CLOSE operates, and section 4 will describe its possible implementations. Finally, section 5 shows some simulation results for the MICADO SCAO for stationary and varying seeing conditions, and discusses CLOSE capabilities beyond the originally envisioned PWFS modal gain compensation.

2. A QUASI-LINEAR MODEL OF THE NONLINEAR PWFS

We show on fig. 1 the schematic of the SCAO that is considered throughout this paper. The various wavefronts ϕ , represented on fig. 1 are meant as their vectorized decomposition on the control basis of the deformable mirror (DM): (ϕ_1, \dots, ϕ_N) , plus some additional component orthogonal to the DM space. The wavefront sensor is using infinitesimal push-pulls around a flat wavefront. We introduce before this interaction matrix a square, modal confusion matrix \mathbf{M} , which is a random variable dependent on the residual wavefront ϕ_{Res} shown to the PWFS. This random matrix \mathbf{M} is the mathematical representation we choose of the optical gain effect.

The confusion matrix \mathbf{M} has some reasonable properties when described on an appropriate modal basis, which are the foundation of optical gain modal compensation for the PWFS.^{6,12} In previous work,^{11,14,15} we performed a thorough numerical assessment of the fluctuations of \mathbf{M} when the power spectrum density (PSD) of ϕ_{Res} is stationary, and validated the key properties described thereafter; these analyses were performed using

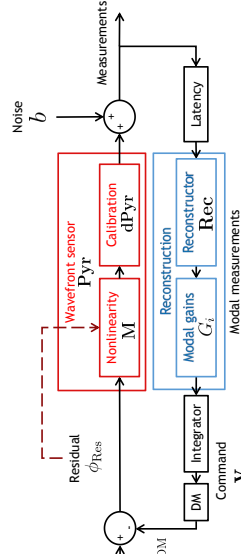


Figure 1. General modeling of the AO loop with the WFS, RTC and DM, in the nonlinear confusion matrix model presented. The confusion matrix \mathbf{M} (slowly) depends on the structure of the residual ϕ_{Res} .

a Karhunen-Loève (KL) basis orthonormalized on the DM,¹⁶ built with modes ϕ_i containing a mix of spatial frequencies of a single given norm, and ordered by spatial frequency. The last few hundred modes (at the ELT scale) contain a variety of waffles, until the cutoff is reached. We use this basis for all purposes in this paper.

We have demonstrated that: (1) \mathbf{M} is essentially diagonal for low-order modes, which bear most of the power of the atmospheric turbulence; (2) that the diagonal coefficients vary by no more than a few percent for a given set of wavefronts ϕ_{Res} of identical PSD, a property in accordance with theoretical derivations through convolutional PWFS descriptions;^{17, 18} and (3) that the off-diagonal portion of \mathbf{M} , while non-negligible for high-order ϕ_i , is of a negligible average value across wavefronts of identical PSD.

These properties enable the modal gain compensation strategy. It is shown in the “Reconstruction” block of fig. 1: first, a modal space description is obtained through the reference command matrix $\mathbf{Rec} = \mathbf{dPyr}^\dagger$; then, an array of multipliers $G_{i, 1 \leq i \leq N}$ is applied to modal commands, with such multipliers ideally selected to encompass (1) compensation of the \mathbf{M} nonlinear effect for ongoing turbulent conditions and (2) the gain factor such that the modal integrators show appropriate transfer functions and ideal rejection levels. The stability property of \mathbf{M} against the spectrum of ϕ_{Res} ensures that G_i values can be kept constant as long as the descriptive statistical parameters (ν_0 , L_0 , $C_n^2(h)$, ...) of the turbulence remain constant.

While we have well assessed that \mathbf{M} is not, in general, a diagonal matrix, its average for a given ϕ_{Res} PSD is, and it remains quite interesting for design purposes to pursue this hypothesis in the general case. Assuming the diagonality, fig. 1 can then be simplified to the flowchart shown on fig. 2, which applies as one of N decoupled servo-loops for each of the controlled modes. The reference interaction and command matrices \mathbf{dPyr} and \mathbf{Rec} simplify to give scalar, decoupled diagrams, with \mathbf{M} reduced to its i -th diagonal coefficient α_i . As α_i is always smaller than 1, it has often been called modal sensitivity reduction.

Under the diagonal hypothesis leading up to fig. 2, we can also factor in that α_i varies only with the statistical properties of the turbulence, and hence changes slowly relative to the rate the AO loop is executed at. Considering timescales over which all α_i are static, it follows that we simplified the problem of the nonlinear PWFS to N superimposed linear modal servo-loops, although each with an unknown sensitivity parameter. The performances of these loops are entirely defined by a small number of parameters: the temporal spectra of the turbulence and noise for the i -th mode, and the α_i and G_i scalars. The temporal spectrum for a single mode is well described in the literature^{19, 20} for Kolmogorov or Von-Kármán turbulence; we shall assume that the noise is white. The temporal dynamics of the loop are described by the sole “true gain” $\alpha_i G_i$, which effectively defines what the closed-loop transfer function will be. However, except for in-situ calibrations used by other optical gain compensation methods,^{11, 12, 21} this overall loop gain is in general unknown to the operator and/or the RTC.

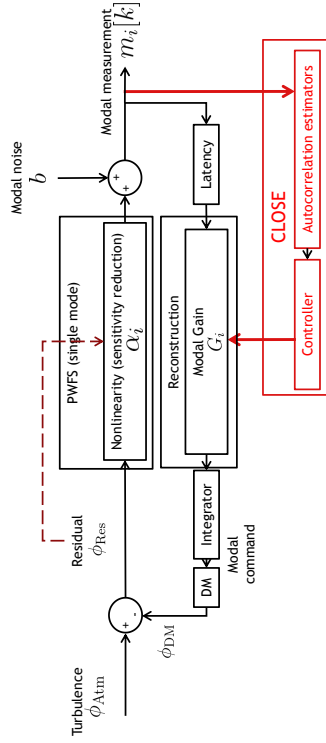


Figure 2. Reduction of the PWFS AO loop model (fig. 1) to a single mode. The matrix \mathbf{M} is reduced to its i -th diagonal term α_i ; residual off-diagonal terms are to be included in the modal noise b .

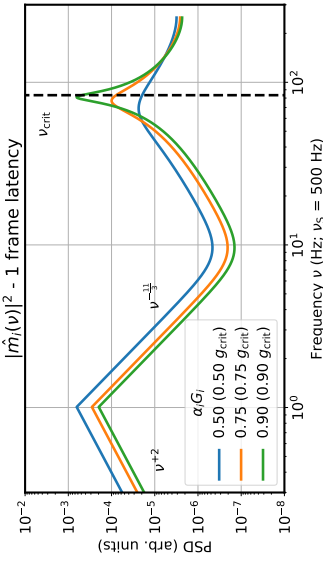


Figure 3. Typical temporal spectra $|\hat{m}_i(v)|^2$ of the residual closed-loop modal measurements for a high SNR case, for several values of the true gain $\alpha_i G_i$. Here the latency is 1.0 frame, $\nu_S = 500$ Hz, giving $g_{\text{crit}} = 1.0$ and $\nu_{\text{crit}} = 83.3$ Hz.

3. THE CLOSE SOLUTION TO MODAL GAIN

The diagram shown on fig. 2 introduces the principle of the CLOSE servo-loop; its objective is to provide a unified technique to optimize the rejection, defined by the hidden value $\alpha_i G_i$, based on the modal SNR, and operating only on the known modal multiplier G_i . It is introduced as a second-layer supervisory loop, which takes as inputs the modal decomposition of the PWFS measurements. From there, a frame-by-frame estimation of modal temporal autocorrelation (AC) is performed, and an update of the modal gain G_i is computed and applied at every time step based on these estimates. With all the priors on the temporal spectra of the modal components of the turbulence and noise, estimating the normalized AC for a single temporal shift enables the estimation of the actual loop gain $\alpha_i G_i$, and through this to automatically drive the value of G_i so that the transfer function given by $\alpha_i G_i$ is ideal for the control of the AO.

For each mode, the loop described in section 2 is a classical feedback loop with a delayed integrator of gain $\alpha_i G_i$. The rejection of such loops are a high-pass transfer function, and they become unstable when the gain reaches a value g_{crit} , which only depends on the loop latency (expressed in frame units). As the loop gain increases towards g_{crit} , the closed loop transfer function exhibits a typical resonance peak, with a central frequency converging towards a value ν_{crit} defined only by the system latency (expressed in frame units) as well. An example of modal measurements power spectra $|\hat{m}_i(v)|^2$, where ν is the temporal frequency and \bullet denotes a temporal Fourier transform, is shown on fig. 3. The left “peak” on fig. 3 is the remainder of the turbulence spectrum cutoff after application of the high-pass rejection transfer function. The right peak (converging to $\nu_{\text{crit}} - 83.3$ Hz in this example with a sampling frequency ν_S of 500 Hz) is the result of the amplification of the noise floor as the AO loop, with an effective gain $\alpha_i G_i$ closing on g_{crit} , exhibits as strong resonant effect. The latency considered in the example shown on fig. 3 is 1.0 frame, resulting in $g_{\text{crit}} = 1$; in this paper, we define latency values as not including WFS integration and DM zero-order hold effects. Values of ν_{crit} and g_{crit} with latency are summarized in table 1.

Table 1. Parameters related to transfer function divergence of the AO loop depending on the latency of the system.

Latency (frames)	ν_{crit}	g_{crit}	Δt (frames)
0	$\nu_S / 2$	2.0	1
1	$\nu_S / 6$	1.0	3
2	$\nu_S / 10$	≈ 0.618	5

The rationale of CLOSE is to leverage this typical structure of the modal measurement spectrum to implement a servo-loop supervising $\alpha_i G_i$. The amplitude of the resonant peak is used as a monotonically varying indicator to provide control on the value of the true gain $\alpha_i G_i$. The AO modal gain G_i is then adjusted to converge on the

desired $\alpha_i G_i$ value. In order to estimate the amplitude of the resonant peak, CLOSE uses the anti-correlation of the measurements for a time-shift Δt that is half the period corresponding to ν_{crit} . Values for Δt are also given in table 1. With $m_i^*[\Delta t]$ being the AC of the time series of modal measurements $m_i[k]$ for a time-shift of Δt frames, the normalized

$$\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} = \frac{\sum_k m_i[k] m_i[k + \Delta t]}{\sum_k m_i[k]^2}, \quad (1)$$

is a monotonic proxy for the true gain $\alpha_i G_i$. From there, one can act on G_i in order to lock the correlation value onto a steady-state solution verifying

$$\frac{m_i^*[\Delta t]}{m_i^*[0]} = r \in [-1, 1], \quad (2)$$

where r is the smartly chosen, supervisory loop setpoint. The value of r shall be adjusted (or defined per-mode) as to fit a performance-maximizing criterion in all useful situations the AO would face, and across the complete range of the effective modal SNR. A higher value for r will work towards a more cautious and robust solution with a lower loop gain. A smaller value will lead to more aggressive loop behavior, possibly reaching nearly-divergent transfer functions, but with a maximized rejection of the low frequency components.

With the condition of eq. 2 reached, CLOSE enforces a transfer function constraint that is independent of the sensitivity reduction of the WFS. Therefore, it provides a go-around strategy regarding the impossibility to apply to the PWFS (or other systems compatible with the description discussed in section 2) some methods ^{7,8} based on numerical estimations of transfer functions that are restricted to linear systems without unknowns.

3.1 Choosing the r setpoint

In order to assess what values of r shall be chosen, we performed semi-analytical computations of the steady-state solution of CLOSE, and compared to the optimal solution for modal integrators minimizing the residual variance of Gendron & Léna (1994). ⁷ As we use near-KL modes, the variance minimization is similarly obtained by optimizing each of the N modal loops separately.

These computations showed that for latencies of 0, 1 and 2 frames, and across 10 orders of magnitude of the range of modal SNR (i.e. for any mode and any SNR), the CLOSE steady-state solution never diverges from the optimal one by more than 20% when keeping a constant setpoint value of $r = 0$. Certainly a smart fine tuning of the value of r could lead to some slight, marginal improvement of the performance. But we claim that choosing $r = 0$ is so close to the optimum over such a huge range of situations that it can be set as the baseline value with confidence. The retained value is not critical for the performance, provided it is not too close to -1 or +1. As said before, playing with values in $r \in [-0.2, 0.2]$ makes it possible to explore different compromises of performance versus robustness. These results show that CLOSE can, on top of making the loop independent from arbitrary hidden modal factors, enforce a near-optimization of the modal integrator with a very simple control law.

4. PRACTICAL IMPLEMENTATION

Having studied the steady-state solutions of the CLOSE servo-loop, we now propose our real-time implementation to achieve convergence to such states. From the time series $m_i[k]$ of modal measurements, two AC estimators are built using discrete integrators:

$$\begin{aligned} N_i^0[k] &= p m_i[k]^2 + (1-p) N_i^0[k-1] \\ N_i^{\Delta t}[k] &= p m_i[k] m_i[k - \Delta t] + (1-p) N_i^{\Delta t}[k-1], \end{aligned} \quad (3)$$

where k is the time step index, and $p \in [0, 1]$ a smoothing parameter. N_i^0 and $N_i^{\Delta t}$ contain time-windowed estimates of $m_i^*[0]$ and $m_i^*[\Delta t]$; after an empirical optimization of the parameter p , we opted for fast integrators with $p = 0.3$ for all simulations presented in section 5.

After the AC estimation, the G_i are updated using multiplicative increments as follows:

$$G_i[k] = G_i[k-1] \times \left[1 + q^\pm \left(\frac{N_i^{\Delta t}[k]}{N_i^0[k]} - r \right) \right]. \quad (4)$$

The r parameter is the same loop setpoint as defined in section 3. While the theoretical derivations were most accurate using $r = 0$, it is to be noted that for numerical simulations we maximized the long exposure Strehl ratio (SR) empirically, which in the end lead us to always using $r = -0.1$.

The q^\pm learning factor encompasses two different values, with either q^+ and q^- used depending on the sign of $N_i^{\Delta t}[k]/N_i^0[k] - r$. This asymmetry is introduced as to make the algorithm more reactive to overshooting transients (with q^-), as compared to tracking gain increases due to a transfer function deemed too slow (using q^+). As such we will be using $q^- = 5q^+$; the numerical values of q^\pm used in the numerical simulations in section. 5 are $q^+ = 10^{-2}$ and $q^- = 5 \cdot 10^{-2}$.

These q^\pm learning factors are the determining parameter of the time constants associated with the convergence and tracking ability of the CLOSE loop. Simulations here use what is near the maximum acceptable value to limit computation time while maintaining AO stability. We however infer that for a real AO system, q^+ values in the range of $10^{-3} - 10^{-4}$ should be used assuming 500 Hz frequency, hence providing typical time constants in the 2-20 seconds range. The ideal choice of q^\pm will probably remain dependent on the system, and will probably require some adjustments accounting for robustness and responsiveness to variations of turbulence conditions or other transient events.

4.1 Expected additional strain on the RTC

Implementing CLOSE in a real-time fashion is of course expected to add some additional RTC strain. While the AC estimations and gain updates themselves (eqs. 3 and 4) are negligible compared to the required matrix-vector multiplication (MVM), having the $m_i[k]$ available in real-time requires to do the reconstruction in two successive MVM steps. The first MVM converts WFS measurements to modal values, with a computational burden nearly identical to the usual measurements-to-DM-commands MVM. The second step computes DM increments from modal values, with a nearly square matrix of size the number of actuators.

For a typical PWFS AO system, the number of pixels read out is typically 5 to 6 times the number of actuators. If performing the measurement in a slopes-maps fashion, the RTC strain increase is of about 33 - 40%; if using a full-pixel measurement technique, it is an additional 16 - 20% increase only.

4.2 Block-wise, zero-strain alternative

If the RTC software cannot be altered on an existing system, or if the additional strain is not acceptable within the RTC specifications, CLOSE can be implemented in a block-wise flavor. In such case, all estimators, gain updates, and command matrix updates are performed in offline time, certainly in another process and preferably on another machine. This buffered strategy enables to deploy CLOSE on nearly any existing AO system.

A time-continuous buffer of K WFS measurements is forwarded to the CLOSE process, which turns them into modal measurements $m_i[0] \dots m_i[K-1]$ using the modal reconstructor **Rec**. For each mode, the AC estimators of eq. 3 are replaced by the direct computation of the normalized Δt -shifted AC term over the telemetry buffer:

$$N_i^{\text{block}} = \frac{1}{K - \Delta t} \sum_{k=0}^{K-\Delta t-1} m_i[k] m_i[k + \Delta t] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} m_i[k]^2$$

The gain update equation can then be performed:

$$G_i[\text{new}] = G_i[\text{old}] \times [1 + q^\pm (N_i^{\text{block}} - r)]. \quad (6)$$

using q^\pm factors adjusted for the longer integration time and the increased SNR on AC estimation; typically q^\pm ought to be larger by a factor \sqrt{K} for a dynamical effect comparable to the real-time implementation. The new command matrix can then be computed accounting for the new G_i values, and when all side-tracked computations are finished, can be set into the RTC.

5. NUMERICAL SIMULATION RESULTS

This section covers some end-to-end numerical simulations demonstrating the performance achieved with CLOSE when applied to the MICADO SCAO design ^{10,22} (see table 2). All simulations were performed using the COM-PASS²³ platform. In the following sections, we present studies on the convergence of modal gains when bootstrapping the AO loop, and the end-to-end performance for stationary and varying seeing conditions. In addition, videos showing the dynamical behavior of some CLOSE simulations are available online.²⁴

5.1 Gain convergence at loop closing

We can take a first look at the behavior of CLOSE when the AO loop is closed. Without any priors given, we choose an initialization condition $G_i[0] = 0.5$. With the 2 frames of latency considered, the critical gain value is $g_{\text{crit}} \approx 0.61$; given that the sensitivity reduction α_i is always smaller than 1, this ensures that the loop is initially closed with stable transfer functions. From these initial 0.5 values, the G_i are driven by CLOSE to their steady-state values, which account both for non-linearity compensation and the temporal variance minimization.

We show on fig. 4 the values of the 4309 modal gains G_i , averaged on certain subsets of frames within the first two seconds after the AO loop is closed. These simulations are performed for four different cases, with r_0 of 14.5 and 9.0 cm, and guide stars of brightnesses $M_R = 0$ and $M_R = 16$. For the bright cases, steady state is reached by frame $k \approx 500$, i.e. within one second. The process is slightly slower for the $M_R = 16$ cases, with a continued convergence of the G_i between frames $k = 500$ and $k = 1000$.

Simulations at $M_R = 0$ are essentially performed with an infinite SNR. As such, the loop true gain which minimizes the output variance is close to the maximum stability value g_{crit} , and the G_i coefficients reached in steady-state are essentially reflecting the inverse α_i^{-1} of the PWFS sensitivity reduction. These curves reached after $k = 1000$ frames in $M_R = 0$ cases are compliant with the abacuses we presented in previous work,^{11,14} with α_i decreasing up to mode 30, which contains spatial frequencies corresponding to the modulation radius, then increasing again roughly as a power law up to the highest order modes.

Table 2. AO parameters used for end-to-end numerical simulations

Simulation parameters	
Telescope	D = 39 m ELT pupil model
Spiders are omitted	von Kármán - single ground layer
Guide star	r_0 (500 nm) from 7.0 to 22.0 cm $L_0 = 25$ m, $\ \vec{\nabla}\ = 10$ m.s ⁻¹ 92 × 92 subapertures (42 cm pitch)
DMs	zero point 2.6×10^{10} ph.s ⁻¹ .m ⁻² Tip-tilt ELT M4 model pitch 54 cm, coupling 0.24 4310 actuators driven Frequency 500 Hz Latency 2 frames
RTC	(exposure/hold excluded) Controlled on KL basis ¹⁶ Modal integrator with double MVM: Pixels $\rightarrow [r_{ti}] \times [G_i] \rightarrow$ actuators
Turbulence	von Kármán - single ground layer r_0 (500 nm) from 7.0 to 22.0 cm
PWFS	24 080 pixel values read-out "Full pixels" measurement space ²⁵⁻²⁷ Monochromatic at 658 nm 0.28 throughput (quantum efficiency inc.) Circular modulation, $r_{\text{Mod}} = 4 \frac{\lambda}{D}$ Read-out noise $0.3 e^-$
CLOSE	Real-time implementation $p = 0.3$ $q^+ = 10^{-2}$, $q^- = 5.10^{-2}$ $r = -0.1$

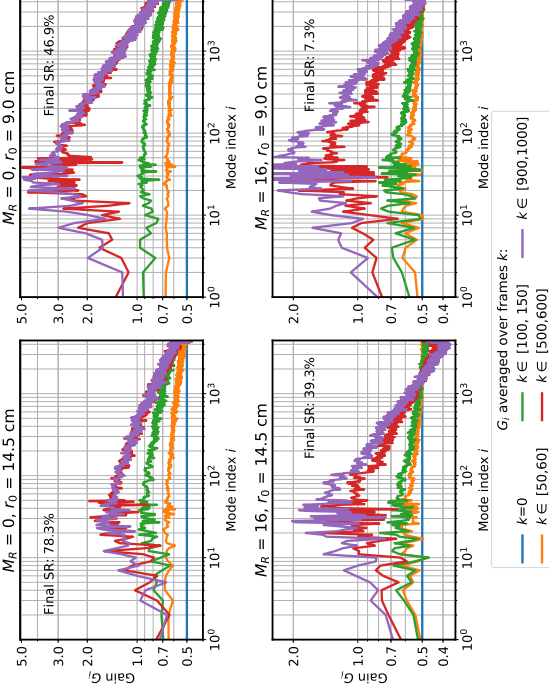


Figure 4. Convergence of CLOSE gains on the 2.0 sec following loop closing, for guide stars of $M_R = 0$ and 16 and atmospheric r_0 of 14.5 and 9.0 cm. All G_i are set to 0.5 at loop closing (blue line). G_i values are shown as averaged over the frame intervals given in the legend. Curves are smoothed along the i index for clarity. Final SRs are given in H-band and computed from the cumulative exposure between frame 900 and 1000 (200 msec).

When comparing the G_i values reached between $M_R = 0$ and $M_R = 16$ cases, one can observe the effect of the SNR-dependent optimization of the transfer function, with steady-state gain values dampened by typically 20-50% depending on the mode number and the r_0 . Altogether, results presented on fig. 4 tend to validate that – without any priors and regardless of the PWFS sensitivity reduction – CLOSE is able to make the modal integrator adaptively converge to the adequate solutions, across a 1 to 2 second period.

5.2 Results with stationary turbulence

Besides the adaptive capability, it is most important to look at the AO performance achieved once CLOSE reaches its steady-state behavior. In order to perform this analysis, we generalize the simulations to a larger range of r_0 values and guide star magnitudes.

Measured performances are shown on figure 5, with the long exposure H-band SR plotted against the star magnitude and computed for 5 different seeing conditions. For all the results the SR is averaged over 2-second exposures, starting 2 seconds after the AO loop is closed, and with initial modal gains $G_i = 0.5$ as previously.

We report the performance achieved for r_0 values from 8.9 to 21.5 cm, and for guide stars from $M_R = 10$ to 17.5 with CLOSE (solid lines). Circles overlaid at $M_R = 10$ and 16 are performance without using modal gain compensation, but after an optimization of a global scalar loop gain. Square markers are when using the dithering-based determination of modal gains as reported in previous work,¹¹ and after an optimization of the scalar loop gain. The latter dithering-based performance is also identical to what can be obtained using the sensitivity normalization, the original method proposed by Korhikowski *et al.*^{6,12}

From the performances reported, it follows that CLOSE compares to other modal non-linearity compensation techniques crafted for high-order PWFS, with added benefits: a single, real-time technique factors in both the

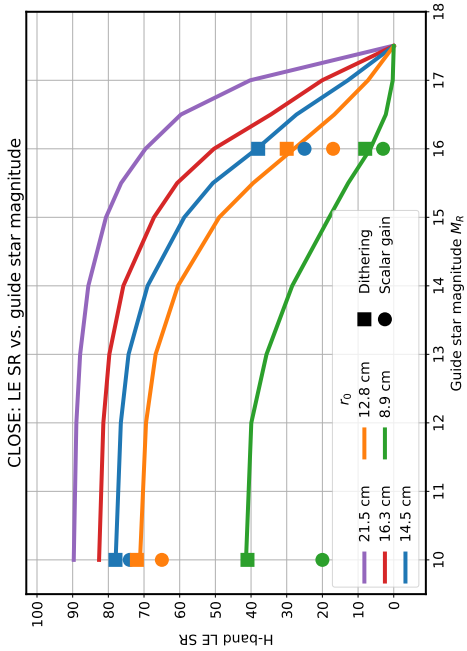


Figure 5. Plain lines: Long-exposure SR in H-band obtained with CLOSE for guide star magnitudes $M_R=10-17.5$ and $r_0=8.9-21.5$ cm. Circles: Best performance obtained without using modal gains. Squares: Best performance with modal gains optimized through a dithering measurement technique, recalled from previous work.¹¹

non-linearity component and the transfer function optimization, with a far greater responsiveness to transient events; and as compared to either of the aforementioned modal compensation techniques, offline computation of modal gain abacuses or in-situ control matrices is no longer required.

5.3 Continuously varying turbulence

When mentioning the robustness of CLOSE regarding optimizing the modal integrator through transient events, it is interesting to evaluate how the performance evolves for continuously varying seeing conditions.

We report on fig. 6 the results of a simulation in which the r_0 value changes from 22 cm to 7.0 cm then back to 22 cm over the course of 100 seconds of operation, without ever opening the AO loop or performing any external action on the AO parameters. A similar simulation was performed in previous work¹¹ for several gain compensation strategies. The performance is measured in terms of SR over successive 0.1 sec (solid lines) and 2 sec exposures (circles), starting 2 sec. after the loop is closed. An identical experiment is ran for guide stars of $M_R = 5$ and $M_R = 16$.

In practice, the COMPASS-generated numeric turbulence screen is continuously extruded from one edge of the pupil, then translated with the simulated wind. The r_0 given on fig. 6 is the one of the wavefront pixels being extruded at a given time; yet it takes 4 seconds for those turbulent features to entirely cross the pupil. This induces a delay of about 2 seconds between the time a given r_0 is reported, and when the associated performance is expected on the imager.

The SR complies with the values found for stationary r_0 cases for the bright and the $M_R = 16$ case, demonstrating that although the seeing conditions vary very quickly, the responsiveness of the modal gain curve can easily adjust the integrator regime for such variations, maintaining the maximum possible SR for a given r_0/M_R combination. The symmetry of the two r_0 decreasing and r_0 increasing phases is also to be noted: CLOSE enables the integrator to accommodate both cases with similar flexibility. Cases with the seeing improving were noticeably less robust with previous modal compensation methods, as the increased sensitivity of the PWFS can lead to a diverging integrator if the modal gains are not adjusted in a timely manner.

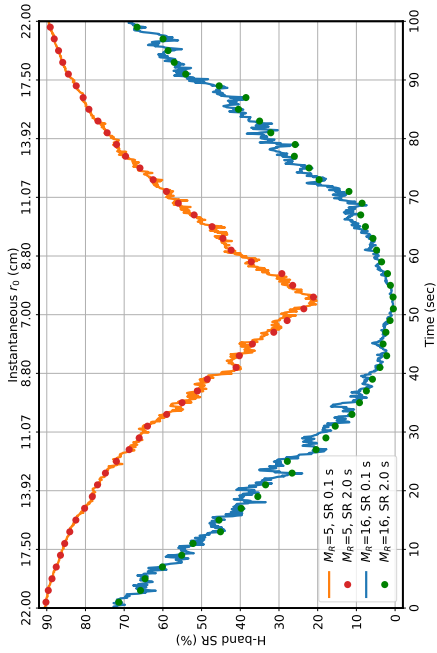


Figure 6. SR in H-band obtained for 0th and 16th guide star magnitudes, as the seeing conditions cycles from $r_0 = 22$ cm to 7 cm and back across 100 sec of simulated AO time. Lines: 100 msec SR; markers: 2.0 sec SR.

The symmetry, in particular at $M_R = 16$, also underlines that the integrator is adequately maintained in a robust regime, without accumulation of waffle or divergence of single actuators, after more than 20 seconds spent with a residual wavefront error of about 1λ RMS on the PWFS.

5.4 Additional capabilities

Not only CLOSE is able to track gains through varying observing conditions^{24a}, but it can also adapt the system to some other situations. We have simulated CLOSE when sensing on double stars^{24b}, and tested the results against different separations, different orientations with respect to the pyramid edges, and different flux ratios of the guiding binary. The detailed results have not been reported in this paper, but we were able to verify that the functioning point reproduced the same performance that could be obtained using standard methods. This also demonstrates that an interaction matrix for a single star can be converted to another adequate to binary sources using a modal rescaling only on our DM KL basis.

The test has also been done using uniform disk-like objects of various diameters from 10 to 800 mas (a simulation of Titan as guide object^{24c}). Not surprisingly, each of them exhibits a similar behavior where the gains stabilize rapidly to the optimum value, with a performance level consistent with that found using classical methods. The case of more peculiar objects (triple or multiple stars, galactic nuclei exhibiting a plateau around a central peak, small globular clusters, etc.) has not been studied but we are confident that CLOSE would also converge smoothly on those cases.

Also not tested yet when writing the present article, we think that CLOSE can also cope with variations of the modulation radius (without a substitution of the command matrix), as this impacts the WFS sensitivity—at first order—as a modification of the modal gains. Whether that interesting property can be leveraged is another, wider topic to be discussed in the perspective of optimizing the overall pyramid sensor behavior even better.

We also need to mention that CLOSE can be applied to systems using other wavefront sensors than pyramids. In particular, CLOSE could certainly help in the case of the *centroid gain* induced by quad-cells in a Shack-Hartmann sensor, which acts as a global unknown multiplicative factor. We think it could also be of some help in the case of significantly elongated laser guide stars (LGS), possibly truncated, which induce some unknown fluctuations of the sensitivity in the measurements with the thickness changes of the sodium layer. However, we think this would possibly have to be coupled with a smart choice of the modal basis to act on. We envision a scheme where one CLOSE loop is run in the slope space to compensate centroid gain effects, and another in the

REFERENCES

- [1] Tamai, R., Cirasuolo, M., González, J. C., Koehler, B., & Tuti, M., “The E-ELT program status,” *Proc. SPIE* **9906** (2016).
- [2] Liu, F., & Sanders, G., “Thirty meter telescope project status,” *Proc. SPIE* **10700** (2018).
- [3] Fauson, J., McCarthy, P., Bernstein, R., et al., “Overview and status of the Giant Magellan Telescope project,” *Proc. SPIE* **10700** (2018).
- [4] Ragazzoni, R., “Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism,” *J. Mod. Opt.* **43**(2), 289–293 (1996).
- [5] Costa, J. B., “Modulation effect of the atmosphere in a pyramid wave-front sensor,” *Appl. Opt.* **44**, 60–66 (2005).
- [6] Korkiakoski, V., Verinaud, C., & Le Louarn, M., “Applying sensitivity compensation for pyramid wavefront sensor in different conditions,” *Proc. SPIE* **7015** (2008).
- [7] Gendron, E., & Léna, P., “Astronomical adaptive optics. 1: Modal control optimization,” *Astronomy & Astrophysics* **291**, 337–347 (1994).
- [8] Dessemme, C., Madaec, P. Y., & Rousset, G., “Optimization of a predictive controller for closed-loop adaptive optics,” *Appl. Opt.* **37**(21), 4623 (1998).
- [9] Davies, R., Alves, J., Clénet, Y., et al., “The MICADO first light imager for the ELT: overview, operation, simulation,” *Proc. SPIE* **10702**, 107021S (2018).
- [10] Clénet, Y., Buey, T., Gendron, E., et al., “The MICADO first-light imager for the ELT: towards the preliminary design review of the MICADO-MAORY SCAO,” *Proc. SPIE* **10703**, 10703 – 10703 – 11 (2018).
- [11] Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al., “A telescope-ready approach for modal compensation of pyramid wavefront sensor optical gain,” *Astronomy & Astrophysics* **629**, A107 (2019).
- [12] Korkiakoski, V., Verinaud, C., & Le Louarn, M., “Improving the performance of a pyramid wavefront sensor with modal sensitivity compensation,” *Appl. Opt.* **47**, 79 (2008).
- [13] Montero, D. A., Brown, J. M., Buckman, M. D., et al., “Adaptive gain in closed-loop tilt control and adaptive optics,” *Proc. SPIE* **10703**, 10703 – 10703 – 14 (2018).
- [14] Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al., “A modal approach to optical gain compensation for the pyramid wavefront sensor,” *Proc. SPIE* **10703** (2018).
- [15] Deo, V., *Analysis and implementation of the pyramid wavefront sensor for high-order adaptive optics on ELTs*, PhD thesis, Université de Paris - Observatoire de Paris (2019).
- [16] Ferreira, F., Gendron, E., Rousset, G., & Gratadour, D., “Numerical estimation of wavefront error breakdown in adaptive optics,” *Astronomy & Astrophysics* **616**, A102 (2018).
- [17] Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., et al., “Kernel formalism applied to Fourier-based wave front sensing in presence of residual phases,” *J. Opt. Soc. Am. A* **36**(7), 1241–1251 (2019).
- [18] Chambouteyron, V., Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., et al., “Modal gain optimization of the pyramid wave-front sensor using a convolutive model: from theory to experimental validation,” in [*6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*] (2019).
- [19] Conan, J.-M., Rousset, G., & Madaec, P.-Y., “Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence,” *J. Opt. Soc. Am. A* **12**(7), 1559 (1995).
- [20] Gendron, E., *Optimisation de la commande modale en optique adaptative: applications à l’astronomie*, PhD thesis, Univ. Paris Diderot (1995).
- [21] Esposito, S., Pinna, E., Puglisi, A., et al., “Non common path aberration correction with non linear WFSs,” in [*4th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*] (2015).
- [22] Vidal, F., Ferreira, F., Deo, V., et al., “Analysis of the MICADO-MAORY SCAO performance,” in [*6th AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*] (2019).
- [23] Gratadour, D., Ferreira, F., Sevin, A., et al., “COMPASS: status update and long term development plan,” *Proc. SPIE* **9909** (2016).
- [24] (a): www.tinyurl.com/singleStarCLOSE; (b): www.tinyurl.com/doubleStarCLOSE; (c): www.tinyurl.com/TitanCLOSE.
- [25] Guyon, O., “Limits of adaptive optics for high-contrast imaging,” *Astrophysical Journal* **629**(1) (2005).
- [26] Clergeon, C., *Etude d’un analyseur de surface d’onde haute sensibilité pour l’optique adaptative extrême*, PhD thesis, Observatoire de Paris - Subaru National Astronomical Observatory of Japan (2014).
- [27] Deo, V., Gendron, E., Rousset, G., et al., “Assessing and mitigating alignment defects of the pyramid wavefront sensor: a translation insensitive control method,” *Astronomy & Astrophysics* **619**, A56 (2018).

modal space for integrator optimization, held together with adequate normalization conditions. We think that CLOSE could be of help any time a modal gain optimization on an integrator law is to be done in a situation where sensitivity fluctuations (either of the sensor, or the adaptive mirrors) are to be expected.

CONCLUSION AND PERSPECTIVES

We have presented a self-regulating method that allows us to track, either in hard or soft real-time, the modal gains of the integrator controller in an AO system, in order to maintain the maximum performance against variable conditions (seeing, wind speed, SNR) and variable sensitivity of the WFS. Our method differs from previous works as it doesn’t require any knowledge about the sensitivity of the sensor, but permits to counteract its variations. This property makes the method particularly suitable whenever sensitivity fluctuations of the feedback loop (either of the sensor, or the adaptive mirrors) are to be expected, like in the case of high-order PWFS designs on ELTs.

The method is based on the value of the temporal auto-correlation of the modal phase residuals computed at a single given time-shift Δt , followed by the appropriate counter-reaction on the modal gain in order to lock the previously mentioned Δt -correlation value to some chosen setpoint. We have demonstrated first that, for some given conditions, there is an unequivocal relation between the gain and the value of that Δt -correlation, and second that locking the Δt -correlation at a fixed well-chosen value through multiplicative adjustments of the integrator gain will keep the phase residuals near their achievable minimum. The method has been called *CLOSE*, for Correlation-Locked Optimization Strategy.

We were able to experience through end-to-end AO simulations the remarkable behavior of the CLOSE algorithm: extremely promising, it appears to be self-regulating, and seems to adapt naturally to any new case whether we deal with any combination of good or low SNR, good or bad seeing, extended objects or else. ²⁴ However, our simulations at the time of writing are restricted to a PWFS (that of the SCAO module of MICADO ELT instrument, which was the primary target for our study). We are confident that CLOSE also applies to others AO systems equipped with non-pyramid sensors: future numerical simulations should be able to confirm this, and there is certainly a wealth of potential applications to follow. Today, CLOSE is our baseline algorithm for optimizing the end-to-end simulations running with a pyramid sensor.

Coming now to limitations, we shall warn potential users that the update equation (eq. 4) contains an integrator, which definitely requires a proper feedback to avoid any fatal divergence. Blocking of the feedback on the correlation value may be triggered by unexpected effects, such as actuator saturation on the deformable mirror, or by the absence of feedback from the main AO loop –which happens when the loop “crashes” or when the flux disappears. Other cases may exist, but those are sufficient to draw our attention to the fact that eq. 4 needs to be completed with some monitoring and safeguarding system in order to be fully applicable to a real system. We shall also investigate the impact of non-Kolmogorov input perturbations such as telescope wind-shake, or vibrations. While telescope wind-shake is generally a low-frequency perturbation that should not harm too much the algorithm, the way CLOSE will interact with high-frequencies vibrations potentially amplified by the rejection overshoot remains to be looked in detail. Whether CLOSE reacts in a right or wrong way depending on the frequency of the perturbation is not obvious at first sight.

Finally, it should be raised that CLOSE does not say anything about the WFS sensitivity value, which knowledge is of importance for a correct compensation of non-common path aberrations. As a consequence, our present algorithmic design for the SCAO sensor of MICADO includes both CLOSE and a standard algorithm for measuring the WFS optical gain, which seems to be a waste. The possibility of deriving simultaneously an optimum modal gain with the WFS optical gain is currently envisioned, based on the measurements of the correlation for different Δt , possibly leading to an all-in-one algorithm.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors express their wishful thanks to D. Montero, whose adaptive control algorithm gave us the push towards designing CLOSE. This research is performed in the frame of the development of MICADO, first light instrument of the ELT (ESO), with the support of ESO, INSU/CNRS and Observatoire de Paris.

