



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation et à l'interprétation du champ magnétique terrestre d'origine lithosphérique

Erwan Thébault

► **To cite this version:**

Erwan Thébault. Contribution à la modélisation et à l'interprétation du champ magnétique terrestre d'origine lithosphérique. Sciences de la Terre. Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité, 2014. tel-03129494

**HAL Id: tel-03129494**

**<https://theses.hal.science/tel-03129494>**

Submitted on 2 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Paris Diderot - Paris 7

Dossier de synthèse de l'activité scientifique présenté en vue d'une

## **Habilitation à Diriger des Recherches**

Par

**Erwan THÉBAULT**

Équipe de géomagnétisme

Institut de Physique du Globe de Paris

Soutenue le 7 avril 2014, après avis des rapporteurs, devant le jury composé de

Pr. Kathy WHALER – University of Edinburgh  
Pr. Michael PURUCKER - NASA, GSFC  
Pr. Dominique GIBERT – Université de Rennes

Rapporteur  
Rapporteur  
Rapporteur

Dr. Gauthier HULOT, DR CNRS, IPGP  
Pr. Antoine MOCQUET, Université de Nantes

Examineur  
Examineur

Pr. Vincent COURTILLOT, Université de Paris, IPGP

Président





Contributions à la modélisation et à l'interprétation du champ  
magnétique terrestre d'origine lithosphérique

February 2, 2021



<b>I</b>	<b>Présentation administrative</b>	<b>11</b>
0.1	Formation et parcours . . . . .	13
0.1.1	Parcours Professionnel . . . . .	13
0.1.2	Formation Universitaire . . . . .	13
0.2	Publications . . . . .	13
0.2.1	Publications de rang A . . . . .	13
0.2.2	Autres productions . . . . .	17
0.2.3	Livres/Chapitres De Livre . . . . .	18
0.2.4	Cartes Géophysiques . . . . .	18
0.3	Management . . . . .	18
0.4	Projets nationaux et internationaux . . . . .	19
0.4.1	Projets internationaux en cours non financés . . . . .	19
0.4.2	Projets en cours financés . . . . .	19
0.4.3	Projet terminés . . . . .	20
<b>1</b>	<b>Valorisation de la Recherche</b>	<b>21</b>
1.1	Réponse à l'appel d'offre ESA pour la livraison d'un modèle de champ magnétique d'origine lithosphérique . . . . .	21
1.2	Contacts avec la société IXTREM . . . . .	22
1.3	Cartographie magnétique . . . . .	22
1.3.1	...pour l'archéologie . . . . .	22
1.3.2	...pour la déclinaison en France . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Exposé scientifique</b>	<b>23</b>
<b>1</b>	<b>Résumé sur l'originalité des recherches</b>	<b>25</b>

<b>2</b>	<b>Introduction et généralités</b>	<b>29</b>
2.1	Les sources du champ magnétique . . . . .	29
2.2	Les harmoniques sphériques . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Le traitement des données magnétiques</b>	<b>37</b>
3.1	La carte mondiale des anomalies magnétiques terrestres . . . . .	37
3.2	Mesures aux données des stations de répétition . . . . .	43
3.3	La mise en évidence du champ lithosphérique dans les données satellitaires . . . . .	43
3.3.1	Sélection des données «calmes» et corrections . . . . .	45
3.3.2	La correction orbite par orbite . . . . .	46
3.3.3	Quels compromis accepter? . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Contributions à la modélisation et à l'interprétation du champ global</b>	<b>53</b>
4.1	Modèles et interprétations du champ principal . . . . .	53
4.1.1	... actuel . . . . .	53
4.1.2	... et ancien . . . . .	56
4.2	Modèles et interprétations du champ lithosphérique . . . . .	57
4.2.1	Un modèle de champ lithosphérique . . . . .	57
4.2.2	La variation séculaire du champ lithosphérique . . . . .	57
4.2.3	Une forme statistique pour le spectre du champ crustal . . . . .	62
4.2.4	Reconstruction continentale de la Pangée . . . . .	67
<b>5</b>	<b>La modélisation régionale du champ magnétique</b>	<b>69</b>
5.1	Principes généraux de la modélisation régionale . . . . .	69
5.2	Les harmoniques sur calottes sphériques . . . . .	72
5.2.1	Généralités sur la méthode . . . . .	72
5.2.2	Définition analytique d'un spectre régional . . . . .	76
5.2.3	Relations avec les harmoniques sphériques . . . . .	79
5.2.4	Les limites de la modélisation régionale . . . . .	80
5.3	Applications régionales pour le champ crustal . . . . .	81
5.4	Applications régionales pour le champ principal . . . . .	82
5.4.1	...actuel . . . . .	82
5.4.2	...et ancien . . . . .	83
5.5	Applications à la planétologie . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Préparation à l'exploitation de la mission satellite <i>Swarm</i></b>	<b>93</b>
<b>7</b>	<b>Synthèse sur la cohérence et perspectives du projet personnel</b>	<b>97</b>
7.1	Missions satellitaires . . . . .	97
7.2	Modélisations et interprétation des sources de champ lithosphérique . . . . .	99
7.2.1	La profondeur magnétique de la lithosphère terrestre . . . . .	99
7.2.2	Interprétation du champ magnétique lithosphérique, géodynamique, et tectonique . . . . .	101

7.3 Développement des outils régionaux . . . . .	101
<b>8 Bibliographie réduite</b>	<b>103</b>





2.1	À gauche sont représentées les échelles caractéristiques et l'intensité de chaque source globale connue qui constituent le champ magnétique terrestre. La relation entre la longueur spatiale caractéristique et le degré $n$ est donnée par l'équation (2.7). A droite, une vue schématique des différentes sources terrestres (Figure extraite de <b>Thébault et coll., 2010</b> d'après une figure de Hulot et coll., 2007).	30
2.2	Spectre magnétique combinant les contributions du champ principal et du champ lithosphérique pour les degrés $l=1$ à 720 à l'altitude terrestre (ligne continue) et à 400 km d'altitude (ligne pointillée). Le spectre est calculé à partir du modèle NGDC-720 (Maus, 2010) et les contributions de 1 à 15 du champ principal sont celles de GRIMM (Lesur et coll., 2008). D'après <b>Thébault (2011)</b> .	34
3.1	Extrait de la résolution 4 publiée en 1996 et réaffirmée par l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie lors de la conférence de Melbourne en 2011. Cette résolution est destinée à promouvoir les activités relatives à la carte mondiale des anomalies magnétiques.	38
3.2	Compilations ou ensembles de données mis à la disposition du groupe de travail pour la construction d'une carte mondiale des anomalies magnétiques (D'après <b>Hemant et coll., 2007</b> ).	40
3.3	Première carte mondiale des anomalies magnétiques terrestres publiée par la CCGM (Korhonen et coll., 2007).	42
3.4	Cet algorithme montre la chaîne des processus qui sont nécessaires pour mettre en évidence les fines structures spatiales du champ magnétique d'origine lithosphérique à partir des données satellitaires (D'après <b>Thébault et coll., 2013</b> ).	44
3.5	a) Prédiction des artefacts introduits par la correction orbite par orbite dans la valeur de la composante radiale du champ magnétique lithosphérique b) Résidus observés entre un modèle de champ et des données corrigées le long des orbites.	48

3.6	Comparaison entre la composante verticale d'un modèle de champ lithosphérique originale (haut) et celle du même modèle après correction des données pour un champ externe orbite par orbite (milieu). Les surfaces grisées (bas) correspondent aux zones géographiques pour lesquelles la correction a introduit un changement de signe du signal magnétique initial (D'après <b>Thébault et coll., 2012</b> ). . . . .	49
4.1	Résidus pour la composante verticale du champ magnétique terrestre entre les candidats au modèle IGRF (notés de A à F) pour les périodes 2005 et 2010 et un jeu de données du satellite CHAMP indépendant. . . . .	54
4.2	Composante verticale à 400 km d'altitude d'un modèle de champ lithosphérique développé à partir de données magnétiques enregistrées par le satellite CHAMP couvrant la période de 2000 à 2004 (D'après <b>Thébault, 2006</b> ) . . . . .	58
4.3	Estimation des variations des trois composantes $B_\theta$ (haut à gauche), $B_\varphi$ (haut à droite), et $B_r$ (milieu) du champ lithosphérique pendant la période de 1960 à 2002. En bas, différence entre le champ principal en 2002 et en 1960 (composante radiale). D'après Thébault et coll., (2009). . . . .	60
4.4	Spectres magnétiques d'un modèle de champ principal centré sur 2005 (courbe verte), d'un modèle de champ lithosphérique (courbe rouge), du champ lithosphérique prédit (courbe noire) par la distribution de susceptibilité de Hemant et Maus (2005), de la variation séculaire du champ en 2005 (courbe mauve), des variations séculaires de la lithosphère pour chaque année entre 1960 et 2002 (courbes bleues). La droite pointillé prolonge le spectre de la variation séculaire du champ principal et intersecte celle du champ lithosphérique aux degrés 22-23. . . . .	62
4.5	Le spectre théorique (courbe bleue) de l'équation (4.9) est ajusté au spectre des observations magnétiques (courbe noire). La valeur absolue de la dérivée du spectre théorique est représentée en rouge. La droite (magenta) montre l'approximation en loi de puissance pour les degrés $l > 1000$ (voir le texte pour une discussion). . . . .	65
4.6	Spectres théoriques pour des épaisseurs de croûte $\varepsilon$ variables calculés avec l'expression (4.9) pour une aimantation de 1A/m et une loi d'échelle de la susceptibilité $\chi = 1.30$ . 66	66
4.7	Après réduction au pôle <i>via</i> la formule (4.6), la reconstruction de Gondwana semble montrer des structures communes à différents continents comme celles reliant, peut-être, Napier et Dharwar (D'après le rapport de stage de B. Robert, étudiant de M2, 2011-2012). Les contours rouges délimitent les cratons archéens tels qu'ils sont définis dans Mooney (2007). . . . .	68

5.1	Représentation schématique de la méthode Revised Spherical Cap Harmonic Analysis. Le domaine considéré est un cône sphérique dont les surfaces inférieure et supérieure, aux rayons $r = a$ et $r = c$ , sont des calottes sphériques de demi-ouverture d'angle $\theta_0$ . La surface colorée représente un exemple de la superposition en $r = a$ d'une solution impliquant les fonctions de Legendre ( <i>Solution of BVP1</i> ) et d'une solution impliquant les fonctions de Mehler ( <i>Solution of BVP2</i> ) qui décomposent l'espace dans le domaine (voir le texte pour les détails). . . .	73
5.2	Spectre magnétique partiel des anomalies magnétiques dans la partie sud du continent Africain (en rouge). En bleu la forme théorique globale (Eq. 4.2.3) remise à l'échelle qui représente au mieux le spectre magnétique observé. Cette comparaison nous donne une estimation de 24.5 km pour l'épaisseur de la croûte magnétique et de 0.8 A/m pour l'aimantation dans cette région (D'après Vervelidou, PhD, 2013). . . . .	79
5.3	Comparaisons relatives en parties par millions (1 ppm représente une erreur relative de $10^{-6}$ ) entre les fonctions de Mehler $K_{2,p}^m$ calculées à partir de l'algorithme développé par Amparo et coll. (2013) et celles $K_{1,p}^m$ calculées avec notre algorithme pour des valeurs de $\theta$ comprises entre $0^\circ$ et $20^\circ$ , des valeurs de $m$ de 0 à 10 et de $p$ de 1 à 10. . . . .	81
5.4	Exemple de modélisation régionale en France à partir de données (à gauche) aéromagnétiques (points), de stations de répétitions (triangles) et de données satellitaires (traits). A droite, un exemple de continuation vers le haut du modèle obtenu à une résolution spatiale de 40 km (Thébault et coll., 2006). . . . .	82
5.5	Exemples de modèles (non publiés) pour la déclinaison régionale du champ magnétique sur l'Europe en 1965 et 1990 construits à partir du réseau des stations de répétitions européen et des données aéromagnétiques. . . . .	83
5.6	Distribution des données archéomagnétiques de déclinaison, d'inclinaison, et d'intensité. La base de données utilisée pour cette représentation date de 2009. . . . .	84
5.7	Distribution des résidus normalisés par les incertitudes à différentes époques comprises entre 50 av. J.C. et 1850 ap. J.C pour la déclinaison D (haut à gauche), l'inclinaison I (bas à gauche) et l'intensité F (en haut à droite). La densité de données est très forte pour le rouge foncé et nulle pour le bleu. Pour l'époque 675 ap. J.C. je montre l'histogramme des résidus pour l'intensité (voir le texte pour une discussion). . . . .	87
5.8	Variations de l'intensité géomagnétique au site de Mari / Tell Hariri ( $34^\circ$ N $33'$ , $40^\circ$ E $53'$ ) entre 4000 avant JC et 0 AD. La courbe d'intensité archéomagnétique médiane (rose) est calculée avec sa densité de probabilité (dégradés de gris) à partir de toutes les données syriennes disponibles. Les cercles rouges indiquent les données qui sont considérées comme des valeurs aberrantes par l'algorithme. D'après Thébault et Gallet (2009). . . . .	88

5.9	Courbe montrant la relation entre le champ magnétique moyen calculé au-dessus des cratères d'impact (ordonnée) et leur taille (abscisse). Les données proviennent de la sonde <i>Mars Global Surveyor</i> . Le champ moyen est calculé à partir d'un modèle global (en bleu), à partir des données directement (en noir), et à partir d'un modèle local R-SCHA (en rouge). Le dégradé de gris montre la densité de probabilité de la droite (dont le coefficient directeur peut être relié au coefficient de corrélation) entre le champ moyen et leur taille calculée grâce aux barres d'erreurs.	89
5.10	Distribution du coefficient de corrélation calculé entre la taille des cratères martiens et l'intensité du champ magnétique modélisé à leur verticale. Le coefficient de corrélation calculé sans tenir compte des barres d'erreurs (étoile) diffère significativement de celui correspondant au maximum de la distribution (losange).	91
6.1	Algorithme montrant la séquence des 8 processus permettant de produire un modèle de champ magnétique de la lithosphère à partir des données de niveau 1b de la mission satellite <i>Swarm</i> .	94
6.2	a) Spectres du champ magnétique de la lithosphère au rayon terrestre (voir Eq. 2.6) du modèle initial qui a servi à construire les données synthétiques (noir), du modèle estimé par la simulation "end to end" (bleu), et des modèles estimés dans le cas d'une défaillance pour le satellite <i>Swarm</i> B de type 1A (rouge), 2D (vert), et 4B (violet). La barre verticale montre la position du degré 133 qui est l'objectif scientifique de la mission <i>Swarm</i> . b) Corrélation entre le modèle initial et les modèles obtenus pour les différentes simulations. Le code couleur est identique à celui de la figure a).	96
7.1	Spectre magnétique du modèle initial de champ lithosphérique (noir), du modèle retrouvé par la chaîne de traitement 1) dans le cas 4B et aucune correction du champ externe (magenta), 2) dans le cas 4B régularisé avec une condition de norme minimum (vert) 3) dans le cas 4B régularisé avec la condition que le spectre soit proche de la forme théorique donnée par l'équation 4.9 (rouge et bleu).	98
7.2	Modèle régional préliminaire du champ magnétique de Mercure calculé en harmoniques locales à partir des données de la sonde Messenger pour les composantes X, Y et Z. Projection de Lambert centrée sur le pôle Nord. Unités nT.	99
7.3	Estimation statistique de l'épaisseur magnétique crustale à partir des données magnétiques mondiales marines et aéromagnétiques et d'un modèle statistique de spectre. En blanc les zones sans couverture en données (d'après <b>Vervelidou et Thébault, en préparation</b> ).	100

# I

## Présentation administrative



Nom: **THEBAULT**

Prénom: **Erwan**

Chargé de recherche 1<sup>ère</sup> classe

Institut de Physique du Globe de Paris

Équipe de géomagnétisme

1, rue Jussieu 75005 Paris

## 0.1 Formation et parcours

---

### 0.1.1 Parcours Professionnel

- Depuis décembre 2010 : Chargé de recherche 1<sup>ère</sup> classe, équipe de géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris.
- Décembre 2006 – 2010 : Chargé de recherche 2<sup>ème</sup> classe, équipe de géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, France.
- Mars 2004 – Novembre 2006 : Position post-doctorale, GeoForschungsZentrum, Potsdam, France.
- Janvier – Mars 2004 : vacataire à l’Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, France.

### 0.1.2 Formation Universitaire

- 2001-2003 : Doctorat de géophysique interne, École et Observatoire des Sciences de la Terre (EOST), Strasbourg, France. « Modélisation régionale du champ magnétique terrestre ».
- 1999-2000 : DEA de géophysique mention bien, Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP), Paris, France. Sujet de Master: “*Is there a correlation between magnetic storms and Earthquakes.*”
- 1998-1999 : Maîtrise de Physique option traitement du signal mention bien, Université de Cergy-Pontoise (France)/London City University (UK), Programme Erasmus. Intitulé de la thèse de master: “*Modelling a chain of elastic springs with impurities: simulation of shock-wave propagation.*”

## 0.2 Publications

---

43 publications (30 de rang A dont 12 en 1<sup>er</sup> auteur), 1 publication de rang A en révision, 1 livret pédagogique, 3 chapitres de livre, 2 cartes géophysiques, 115 actes de conférence (dont 21 invités). Web Of Science ResearcherID: A-5670-2011.

### 0.2.1 Publications de rang A

**2013**



- (31) **Thébault, E.**, & Vervelidou, F. (2015). A statistical spatial power spectrum of the Earth's lithospheric magnetic field. *Geophysical Journal International*, 201(2), 605-620.
- (30) Chulliat, A., Vigneron, P., **Thébault, E.**, Sirol, O., & Hulot, G. (2013). Swarm SCARF dedicated ionospheric field inversion chain. *Earth, Planets and Space*, 65(11), 1271-1283.
- (29) Licht, A., Hulot, G., Gallet, Y., & Thébault, E. (2013). Ensembles of low degree archeomagnetic field models for the past three millennia. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 224, 38-67.
- (28) **Thébault, E.**, Vigneron, P., Maus, S., Chulliat, A., Sirol, O., & Hulot, G. (2013). Swarm SCARF dedicated lithospheric field inversion chain. *Earth, Planets and Space*, 65(11), 1257-1270.
- (27) Olsen, N., Friis-Christensen, E., Floberghagen, R., Alken, P., Beggan, C. D., Chulliat, A., ... & Visser, P. N. (2013). The Swarm satellite constellation application and research facility (SCARF) and Swarm data products. *Earth, Planets and Space*, 65(11), 1189-1200.
- (26) Genevey A., Gallet Y., **Thébault E.**, Jesset S., and Le Goff M., Geomagnetic field intensity variations in Western Europe over the past 1100 years, in the press to *G-cubed*.doi: 10.1002/ggge.20165
- (25) Lesur V., M. Rother, F. Vervelidou, M. Hamoudi, and **E. Thébault**, Post-processing scheme for modeling the lithospheric magnetic field, *Solid Earth*, 4, 105-118, 2013.

## 2012

- (24) **Thébault, E.**, F. Vervelidou, V. Lesur, and M. Hamoudi, The along-track satellite analysis in planetary magnetism, *Geophys. J. Int.*, Volume 188, Issue 3, pp. 891-907, 2012.doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05281.

## 2011

- (23) Fournier, A., J. Aubert, and **E. Thébault**, Inference on core surface flow from observations and three-dimensional dynamo modelling, *Geophys. J. Int.*, 2011. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05037.x.
- (22) Langlais B. and **E. Thébault**, Predicted magnetic signatures of Martian (de)magnetized impact craters and a statistical comparison with observations, *Icarus*, 212(2), pp 568-578, 2011. doi:10.1016/j.icarus.2011.01.015

## 2010

- (21) **Thébault, E.**, and Y. Gallet (2010), A bootstrap algorithm for deriving the archeomagnetic field intensity variation curve in the Middle East over the past 4 millennia BC, *Geophys. Res. Lett.*, 37, L22303, doi:10.1029/2010GL044788.

- (21) Finlay C. C. , S. Maus, C. Beggan, M. Hamoudi, V. Lesur, F. J. Lowes, N. Olsen, and **E. Thébault**, Evaluation of candidate geomagnetic field models for IGRF-11, *Earth Planet and Space*, IGRF Special issue, Vol. 62 (No. 10), pp. 787-804, 2010.
- (20) Finlay, C. C., S. Maus, C. D. Beggan, T. N. Bondar, A. Chambodut, T. A. Chernova, A. Chulliat, V. P. Golovkov, B. Hamilton, M. Hamoudi, R. Holme, G. Hulot, W. Kuang, B. Langlais, V. Lesur, F. J. Lowes, H. Lühr, S. Macmillan, M. Mandea, S. McLean, C. Manoj, M. Menvielle, I. Michaelis, N. Olsen, J. Rauberg, M. Rother, T. J. Sabaka, A. Tangborn, L. Tøffner-Clausen, **E. Thébault**, A. W. T. Thomson, I. Wardinski, Z. Weil and T. I. Zvereva, *International Geomagnetic Reference Field: The Eleventh Generation*, *Geophys. J. Int.*, Volume 183, Issue 3, Pages: 1216–1230, 2010. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2010.04804.x
- (19) Da Silva, L., S. Maus, G. Hulot and **E. Thébault**, On the possibility of extending the IGRF predictive secular variation model to a higher spherical harmonic degree, *Earth Planet and Space*, IGRF Special issue, Vol. 62 (No. 10), pp. 815-820, 2010.
- (18) **Thébault, E.**, M. Purucker, K. Whaler, B. Langlais and T.J. Sabaka, The Magnetic field of the Earth’s lithosphere, *Space Science Reviews*, Volume 155, Issue 1-4, pp. 95-127, 2010. doi:10.1007/s11214-010-9667-6.
- (17) Chambodut A , B. Langlais, M. Menvielle, **E. Thébault**, A. Chulliat and G. Hulot, Candidate Models for the IGRF - 11th generation, submitted to *Earth Planet and Space*, IGRF Special issue, *Earth Planets Space*, Vol. 62 (No. 10), pp. 745-751, 2010.
- (16) Chulliat A. and **Thébault E.**, Testing IGRF-11 candidate models against CHAMP data and quasi-definitive observatory data, *Earth Planet and Space*, IGRF Special issue, Vol. 62 (No. 10), pp. 805-814, 2010 .
- (15) **Thébault E.**, A. Chulliat, S. Maus, G. Hulot, B. Langlais, A. Chambodut and M. Menvielle, IGRF candidate models at times of rapid changes in core field acceleration, *Earth Planets Space*, Vol. 62 (No. 10), pp. 753-763, 2010.
- (14) Chulliat, A., **E. Thébault**, and G. Hulot, Core field acceleration pulse as a common cause of the 2003 and 2007 geomagnetic jerks, *Geophys. Res. Lett.*, 37, L07301, doi:10.1029/2009GL042019, 2010.

## 2009

- (13) Maus, S., U. Barckhausen, H. Berkenbosch, N. Bournas, J. Brozena, V. Childers, F. Dostaler, J. D. Fairhead, C. Finn, R.R.B. von Frese, C. Gaina, S. Golynsky, R. Kucks, H. Lühr, P. Milligan, S. Mogren, D. Müller, O. Olesen, M. Pilkington, R. Saltus, B. Schreckenberger, **E. Thébault**, and F. Caratori Tontini (2009), EMAG2: A 2-arc min resolution Earth Magnetic Anomaly Grid compiled from satellite, airborne, and marine magnetic measurements, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 10, Q08005, doi:10.1029/2009GC002471, 7 August 2009

- (12) Hulot G., Olsen N., **E. Thébault**, and K. Hemant, Crustal concealing of small scale core field secular variation, *Geophys. J. Int.*, doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04119.x.
- (11) **Thébault, E.**, K. Hemant, G. Hulot, and N. Olsen (2009), On the geographical distribution of induced time-varying crustal magnetic fields, *Geophys. Res. Lett.*, 36, L01307, doi:10.1029/2008GL036416.

### 2008

- (10) **Thébault E.** and Gaya-Piqué L., Applied comparisons between SCHA and R-SCHA Regional Modelling Techniques, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 9,  
  
doi:10.1029/2008GC001953
- (9) **Thébault E.**, A proposal for regional modelling at the Earth's surface, R-SCHA2D, *Geophys. J. Int.*, doi:10.1111/j.1365-246X.2008.03823.x , 2008.
- (8) **Berguig S.**, M. Hamoudi, Y. Cohen, and E. Thébault, Lunar magnetic pole positions deduced from high albedo magnetic anomalies, *Asian Journal of Earth Science*, 1(2), 62:76, 2008.

### 2007

- (7) Hemant, K, **E. Thébault**, M. Mandeia, D. Ravat and S. Maus, Magnetic anomaly map of the world: merging satellite, airborne, marine and ground-based magnetic data sets. *Earth Planet. Sci. Lett.* (2007), doi:10.1016/j.epsl.2007.05.040
- (6) Hamoudi, M., **E. Thébault**, V. Lesur, and M. Mandeia (2007), GeoForschungsZentrum Anomaly Magnetic Map (GAMMA): A candidate model for the World Digital Magnetic Anomaly Map, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 8 , Q06023,  
doi:10.1029/2007GC001638
- (5) Korte, M. **Thébault, E.**, Geomagnetic repeat station crustal biases and vectorial anomaly maps for Germany, *Geophys. J. Int.*, doi: 10.1111/j.1365-246X.2007.03387.x, 2007

### 2006

- (4) **Thébault, E.**, M. Mandeia, and J. J. Schott (2006), Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA), *J. Geophys. Res.*, 111, B05102, doi:10.1029/2005JB004110.
- (3) **Thébault E.** (2006), Global lithospheric magnetic field modeling by successive regional analysis, *Earth Planets and Space*, 58, 485–495.
- (2) **Thébault, E.**, J. J. Schott, and M. Mandeia (2006), Revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA): Validation and properties, *J. Geophys. Res.*, 111, B01102, doi:10.1029/2005JB003836.

2004

- (1) **Thébault E.**, Schott J.J, Mandeà M., Hoffbeck J.P (2004), A new proposal for Spherical Cap Harmonic Analysis, *Geophys. J. Int.*, 159, p83-105. doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02361.x

### 0.2.2 Autres productions

- (13) JiaMing Ou, AiMin Du, **E. Thébault**, WenYao Xu, XiaoBo Tian, TieLong Zhang, A high resolution lithospheric magnetic field model over China, *Science China Earth Sciences*, April 2013, doi:10.1007/s11430-013-4580-y.
- (12) **E. Thébault** and Gallet Y., Résultats préliminaires de la prospection géomagnétique effectuée sur le secteur Franco-Tunisien du site d'Utique dans « Utique », *Chronique des activités archéologiques de l'École française de Rome, Maghreb*, par Jean-Yves Monchambert et Imed Ben Jerbania, 24 juillet 2013.  
URL : <http://cefr.revues.org/996>
- (11) Gallet Y., A. Genevey, J. Margueron, M. Le Goff, **E. Thébault**, P. Matthiae, P. Butterlin , M. Al Maqdissi, Exemples De Chronologie Archéomagnétique A Mari/Tell Hariri, in the press, Syria.
- (10) **E. Thébault**, Geomagnetic Field Models, CNFGG Section 4, quadriennial report, 2011.
- (9) **E. Thébault** and Y. Quesnel, Processing of Magnetic Field Measurements from Ground to Space, CNFGG Section 4, quadriennial report, 2011.
- (8) **Thébault, E.**, The benefits of a regional approach for mapping the lithospheric field at the worldwide scale, *Proceedings of the Second Swarm International Science meeting*, Potsdam, 2010.
- (7) **Thébault, E.**, Iterative modelling of the magnetic field: lithospheric magnetic field recovery for the Swarm satellite mission, IGP Tech. Report, SW-ASM-IPGP-MOD-001, 2008.
- (6) R. R. B. von Frese, A. V. Golynsky, H. R. Kim, L. Gaya-Piqué, **E. Thébault**, M. Chiappini, The next generation Antarctic digital magnetic anomaly map, U.S. Geological Survey and The National Academies; USGS OF-2007-1047, Short Research Paper 093; doi:10.3133/of2007-1047.srp093.
- (5) Mandeà M., V. Lesur, M. Rother, Y. Quesnel, M. Hamoudi, **E. Thébault**, World Digital Magnetic Anomaly Map, GAMMA - the GFZ contribution, *Geotechnological Science report*, 154-158, Munich (De), 2007.
- (4) Mandeà M, H. Lühr, M. Korte, G. Balasis, H.-J. Linthe, K. Hemant, E. Pulz, P. Ritter, M. Rother, C. Stolle, **E. Thébault**, I. Wardinski, A comprehensive view of the Earth's

magnetic field from ground and space observations, *Zweijahresbericht GeoForschungsZentrum Potsdam 2004/2005*, 63-76, 2007.

- (3) **Thébault E.**, M. Hamoudi, M. Rother, V. Lesur and M. Manda, Improvement of the lithospheric magnetic anomaly field using satellite and airborne measurements, *GEOTECHNOLOGIEN Status-seminar "Observation of System Earth from space"*, 5 pages, Décembre 2006
- (2) **Thébault E.**, Manda M., Contribution of regional modeling techniques to the Swarm mission, *ESA Special Publication 615*, 4 pages, 2006
- (1) **Thébault E.**, Modélisation régionale du champ magnétique terrestre (2003), Thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur.

#### 0.2.3 Livres/Chapitres De Livre

- **E. Thébault**, The magnetic field of the Earth's lithosphere, in: *Terrestrial Magnetism, Space Science Serie of ISSI*, Hulot et al. (Ed.), Springer, ISBN: 978-1-4419-7954-4, 2011.
- **E. Thébault**, Magnetic Anomalies, Interpretation, in: *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, Harsh Gupta (Ed.), Springer, 2011.
- Schott, J.J and **E. Thébault**, Modelling the earth's magnetic field from global to regional scales, in: *Geomagnetic Observations and Models, IAGA Special Sopron Book Series*, 2011, Volume 5, 229-264, DOI: 10.1007/978-90-481-9858-0\_9.
- M. Manda and **E. Thébault**, *The Changing Faces of the Earth's Magnetic Field*, CCGM/CCGMW, 50pp, ISBN 978-952-217-000-2, 2007.

#### 0.2.4 Cartes Géophysiques

- The MagNetE working group, *Geomagnetic Declination Chart of Europe in 2006*, 2011.
- J. Korhonen, D. Fairhead, M. Hamoudi, K. Hemant, V. Lesur, M. Manda, S. Maus, M. Purucker, D. Ravat, T. Sazonova and **E. Thébault**, *Magnetic Anomaly Map of the World / Carte des anomalies magnétiques du monde*, 1st Edition, 1:50,000,000, CCGM/CCGMW, ISBN 978-952-217-000-2, 2007

### 0.3 Management

---

- Membre du conseil scientifique du Bureau Central de Magnétisme Terrestre (BCMT) depuis Janvier 2009. Le Conseil Scientifique a élaboré un certain nombre de recommandations pour améliorer l'excellence de la contribution française à l'observation du champ magnétique aux observatoires magnétiques. Nous avons co-rédigés avec D. Kerridge (Director of Geoscience Research, British Geological Survey) les synthèses communiquées à l'INSU en 2009 et 2011 (<http://www.insu.cnrs.fr/node/1265>).

- Secrétaire de la section 4 « Géomagnétisme et Aéronomie » du Comité National Français de Géophysique et de Géodésie (CNFGG, mandat : 2007-2011) - Le CNFGG est le représentant de la communauté française auprès de l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie (AIGA/IAGA) qui élabore des recommandations et des stratégies de recherche dans ce domaine sur une base quadriennale (<http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/>). Mon mandat a été reconduit tacitement pour 2011-2014.

### 0.4 Projets nationaux et internationaux

---

#### 0.4.1 Projets internationaux en cours non financés

- Membre exécutif du World Digital Magnetic Anomaly Map (WDMAM, <http://projects.gtk.fi/WDMAM/> pour la cartographie magnétique du monde).
- Membre du projet Antarctic Digital Magnetic Anomaly Map (ADMAP).
- Co-chair de l'International Geomagnetic Reference Field (IGRF, <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>).
- Membre du réseau de station de répétition européen (MagNetE).
- Membre du consortium SMART (Swarm Magnetic and Atmospheric Research Team).

#### 0.4.2 Projets en cours financés

- Participant au projet financé par l'ANR "Assimilation of geomagnetic observations in dynamical models of the Earth's core (AVSGEOMAG: <http://avsggeomag.ipgp.fr/>)", 2011-2015 (PI A. Fournier, MC, IPGP).
- Participant au projet financé par le CNES « Travaux préparatoires et exploitation de la mission Swarm » depuis 2006. Projet réévalué annuellement (PI G. Hulot, DR1, CNRS/IPGP).
- Participant au projet "Rapid Dynamics in the Earth's Core: Assimilation of Satellite Observations into MHD models" financé par l'International Space Science Institute, ID-241 2012-2014 (PI C. Finlay, DTU Space, Danemark).
- Participant au projet PNP 2013 « Champ magnétique de Mercure, modèles, contraintes pour la dynamo et comparaisons avec le champ géomagnétique » (PI B. Langlais, CR1, Nantes).

### 0.4.3 Projet terminés

Participant au Projet !Khure (<http://khure.ipgp.fr/index.php/Accueil>) piloté par V. Courtillot (Directeur IPGP) entre l'IPGP, l'Africa Earth Observatory Network et l'Université de Cap Town. A partir de janvier 2009, je me suis occupé du sous-projet : “The tectonic framework of Southern Africa interpreted from gravity and aeromagnetic data” proposé initialement par A. Galdeano (équipe de géomagnétisme IPGP retraité en Janvier 2010).

### 1.1 Réponse à l'appel d'offre ESA pour la livraison d'un modèle de champ magnétique d'origine lithosphérique

---

À l'invitation de l'Agence Spatiale Européenne (ESA), l'équipe de Géomagnétisme de l'IPGP dirigée par G. Hulot a défini trois procédures dont une intitulée « Dedicated Lithospheric Field Inversion Chain based on R-SCHA », permettra de produire un champ lithosphérique à partir des futures données Swarm, dans le cadre des produits de niveau 2 souhaités par l'ESA.

Ce travail est basé sur la méthode décrite dans **Thébault et coll. (2006)** et appliquée dans **Thébault (2006)**. Ce prototype a été étendu et adapté aux missions multi-satellite de type Swarm. Les détails de cette procédure, basée sur des méthodes dont l'équipe de géomagnétisme a la maîtrise et de son éventuelle mise en œuvre, ont fait l'objet d'un chapitre spécifique dans chacun des 11 documents remis à l'ESA en Octobre 2008 dans le cadre de l'étude « Preparation of the Swarm level 2 data processing ».

Suite à l'élaboration de ce document, nous avons été en mesure de répondre à l'appel d'offre de l'ESA en Novembre 2009. Depuis octobre 2010, notre équipe est responsable de trois chaînes de traitement de données, dont l'une est spécifique à la modélisation du champ lithosphérique par les méthodes locales dont j'ai la responsabilité.

J'ai la complète maîtrise des algorithmes que j'ai développés dans le cadre de la préparation scientifique de la mission. J'ai également été responsable pour cette chaîne de traitement de trois séries de tests orchestrés par l'ESA nommés Architectural Reviews (AR0, AR1, AR2) dont le dernier s'est terminé en décembre 2012. Ces trois séries de tests ont démontrés le caractère maintenant opérationnel de notre chaîne. Néanmoins, la mise en conformité du software, de son utilisation, et de la documentation associée, ont été placés depuis peu sous la responsabilité de P. Vigneron (IR2, IPGP). J'apporte maintenant un support et une expertise pour tous les aspects scientifiques de la mission mais je m'engage à prendre en charge les aspects ingénieries liés aux développements de prototypes pour l'amélioration des performances de la chaîne de traitement.



### 1.2 Contacts avec la société IXTREM

---

Avec A. Galdéano (DR2 IPGP retraité depuis 2010) nous avons collaboré avec la société IXTREM pour établir une réponse à l'appel d'offre « Étude relative à la modélisation magnétique » du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM). La société n'a pas été retenue (<http://www.klecoon.com/JOCE/joue-appel-offre-objet-marche-ameliorer-modelisationmagnetique-oceanique-partir-donnees-1568537.htm>).

Outre notre volonté de faire valoir notre expertise dans le traitement des données magnétiques, notre intention était de bénéficier de cet appel d'offre pour négocier des données magnétiques auprès du SHOM pour l'avancement du projet World Digital Magnetic Anomaly Map.

### 1.3 Cartographie magnétique

---

#### 1.3.1 ...pour l'archéologie

J'ai participé à plusieurs reprises à des campagnes de fouilles archéologiques. Avec Y. Gallet nous réalisons depuis 2011 en collaboration avec S. Jesset (service archéologique municipal d'Orléans) la cartographie magnétique du site archéologique de Saran, près de la forêt d'Orléans afin de localiser des fours enfouis de potiers datant du IX<sup>ème</sup> au XII<sup>ème</sup> siècle environ. Cette prospection et son analyse font l'objet d'un rapport annuel auprès du conseil de la région centre et a pour objectif d'orienter les sondages archéologiques.

En 2011, nous avons réalisé une cartographie du rebord nord-ouest du site archéologique d'Utique (Tunisie) suite à la reprise d'un programme franco-tunisien (dirigé par Jean-Yves Monchambert, Professeur, Paris Sorbonne, Paris VI et Imed Ben Jerbania de l'Institut National du Patrimoine de Tunis). L'objectif de cette campagne archéologique était de tester le potentiel archéologique de certaines zones peu prospectées et de tenter de mettre en évidence les niveaux préromains de la ville plus particulièrement les niveaux d'époque phénicienne et punique. Ce travail a fait l'objet d'un rapport d'exécution (**Thébault et Gallet, 2013**) intégré au rapport de campagne de fouille (<http://cefr.revues.org/996>).

#### 1.3.2 ...pour la déclinaison en France

Durant l'été 2007 j'ai participé au levé aux stations de répétition française en vue de mettre à jour la carte de la déclinaison magnétique sur le territoire métropolitain français. Avec Kader Telali (Observatoire de Chambon-La-Forêt) nous avons revisité le réseau français pour sa partie Est. Ces mesures ont ensuite été réduites en laboratoire et intégrées à l'ensemble des autres données du territoire métropolitain afin de publier la carte de déclinaison pour l'année 2007.

## II

# Exposé scientifique



---

## Résumé sur l'originalité des recherches

---

Le champ magnétique terrestre est généré par des phénomènes électromagnétiques complexes qui ont lieu dans le noyau, la lithosphère, et les régions extérieures à la surface terrestre. Chacune de ses sources obéit aux lois de la théorie électromagnétique mais résulte de processus différents dont certains, selon les échelles de temps considérées, ont des comportements temporels non prédictibles. Le champ magnétique total peut être mesuré à la surface de la Terre, aux altitudes atteintes par les avions, ou à très haute altitude par des satellites. Ces ensembles de données doivent être représentés par des fonctions mathématiques satisfaisant à la théorie du potentiel afin de nous permettre de prédire le champ magnétique à des endroits de l'espace physique vide de donnée. Ces modèles mathématiques peuvent servir dans un premier temps à la cartographie du champ, être ensuite interprétés qualitativement, ou finalement reliés à des paramètres physiques fondamentaux pour des interprétations plus quantitatives.

Un des objectifs principaux de mon activité de recherche a été de développer une méthode régionale qui permette de représenter mathématiquement le champ magnétique terrestre sur une portion de sphère puis de réaliser des études spectrales qui nous permettent des interprétations géophysiques quantitatives. Cette méthode a été baptisée « *Revised Spherical Cap Harmonic Analysis* » (R-SCHA, **Thébault et coll., 2006a**) en référence à des travaux plus anciens utilisant des « *Spherical Caps* » (SCHA, Haines, 1985). L'intérêt premier de ces développements est de contourner les techniques globales de modélisation qui échouent lorsque les données sont mal distribuées spatialement sur une sphère. Les méthodes globales lissent du signal et masquent les fines structures pourtant enregistrées dans les données. Nous parvenons grâce à ces méthodes locales à améliorer la résolution spatiale de nos modèles. Le formalisme R-SCHA est suffisamment versatile pour être dans le futur déployé et appliqué moyennant des modifications mineures à d'autres quantités géophysiques résolvant les équations de Laplace ou de Poisson (champ de gravité, flux de chaleur, topographie...). À notre connaissance, cette approche est la seule opérationnelle pour modéliser rapidement et systématiquement des données magnétiques de différents types (scalaires ou vectorielles) disponibles à différentes altitudes dans

---

un cône sphérique. Nous avons pu appliquer ce formalisme pour représenter le champ magnétique crustal en France (**Thébault et coll., 2006b**), sur l'Allemagne (**Korte et Thébault, 2007**), et sur la Chine (**Ou et coll., 2013**) mais également pour représenter le champ principal et ses variations temporelles en France de 1960 à 2002 (**Thébault, 2008**) et en Europe pour les périodes archéologiques. Plus récemment, nous avons adapté cette technique pour l'étude du champ au-dessus des cratères de Mars (**Langlais et Thébault, 2011**) et proposé un algorithme d'exploitation des données de la future mission satellite Swarm (**Thébault et coll., 2013**).

Des données de très bonne qualité sont indispensables pour appliquer une méthode régionale avec succès. Les résolutions spatiales offertes par les approches régionales sont telles qu'elles sont particulièrement efficaces pour la représentation des contributions du champ magnétique d'origine lithosphérique. Il est indispensable de corriger les données des effets de « toutes » les autres contributions qui le masquent, c'est-à-dire le champ principal du noyau et les champs externes. L'efficacité de ces corrections repose sur un bon contrôle des modèles qui décrivent ces champs. J'ai donc construit et participé à la construction de modèles de champs magnétiques d'origine interne (**Thébault et coll., 2010; Chambodut et coll., 2010; Finlay et coll., 2010a**) et à l'évaluation de leurs performances (**Chulliat et coll., 2010a; Finlay et coll., 2010b**). Un second volet important de mon activité consiste à traiter et compiler des données magnétiques nouvelles ou anciennes qui constitueront la matière première des modèles à haute résolution. C'est le sens de ma participation au projet international de la carte magnétique du monde (« *The World Digital Magnetic Anomaly Map* » ; WDMAM) dont l'objectif est de compiler toutes les données magnétiques disponibles dans le domaine public. Nous avons pu proposer trois modèles ces dernières années (**Hamoudi et coll., 2007; Hemant et coll., 2007; Maus et coll., 2009**) qui ont permis la publication de la première carte mondiale (**Korhonen et coll., 2007**). La poursuite de ces travaux a nécessité le développement d'outils de traitement du signal dont la précision est compatible avec la résolution et la précision des données dont nous disposons. Nous avons pu constater au cours de ce travail que les modèles de champ lithosphérique construits à partir des données satellites pouvaient contenir des artefacts que nous avons pu caractériser (**Thébault et coll., 2012**). La géométrie de ces artefacts nous a ensuite amené à proposer une méthode originale de traitement des modèles *a posteriori* (**Lesur et coll., 2013**). La leçon retenue au cours de ces activités est qu'il est fondamental de s'intéresser aux processus d'acquisition de ces données dans l'espoir d'en déduire des informations *a priori* sur leurs erreurs. Ces erreurs de mesures et de traitement nous permettront de construire des matrices de covariance qui seront incorporées lors de la résolution du problème inverse dans le cadre, par exemple, du projet d'assimilation de données magnétiques (**Fournier et coll., 2011**).

Le dernier volet de mon travail concerne l'interprétation qualitative et quantitative de ces modèles de champ lithosphérique. Ces dernières activités ont stimulé des développements analytiques spécifiques utilisant des hypothèses sur la physique des sources du champ lithosphériques (**Thébault et Vervelidou., 2015**). Les interprétations en termes de déformations tectoniques requièrent des collaborations avec mes collègues géologues, tectoniciens, paléomagnéticiens, et de géosciences marines. Je discuterai dans la suite également quelques résultats non publiés que j'espère prometteurs.

---

**Avertissement:** *L'exercice m'impose d'insister sur mes travaux. Je présente mes excuses à mes collaborateurs pour la présentation partielle voir partiale que je fais parfois de nos travaux communs. Les articles dont je suis auteur ou co-auteur sont surlignés en gras dans le texte. Une version électronique des articles de rang A est donnée en annexe.*



---

## Introduction et généralités

---

Le champ magnétique de la Terre résulte de la superposition de champs d'origines diverses qui agissent sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. Sur la Terre, le champ magnétique est omniprésent et il n'est pas surprenant que cette quantité physique ait été mesurée en continu pendant plus d'un siècle (Mandea et Purucker, 2005). Les mesures du champ géomagnétique sur le terrain sont d'un usage très répandu pour la télédétection, l'exploration des ressources naturelles, la recherche géophysique, la science planétaire et les applications sociétales (Kono, 2007). En particulier, l'interprétation de ces mesures dans le domaine océanique a été crucial pour le développement dans les années 1960 du paradigme de la tectonique des plaques (Vine et Matthews, 1963).

Il est utile pour la suite de l'exposé de redéfinir certaines notions largement utilisées en géomagnétisme et de résumer les principales propriétés des sources qui constituent le champ magnétique terrestre. Ces généralités permettront, je l'espère, de mieux mettre en perspectives les travaux que je présente et de mieux comprendre la difficulté d'en extraire la composante lithosphérique sur laquelle j'insiste plus particulièrement dans ce mémoire.

### 2.1 Les sources du champ magnétique

---

Le champ magnétique de la lithosphère est masqué principalement par deux sources du champ magnétique (Hulot et coll., 2007). La figure 1 synthétise les différentes sources du champ magnétique connues aux grandes échelles spatiales. Les généralités énoncées ci-après sont une synthèse en français d'un article publié dans l'*Encyclopedia of Solid Earth Geophysics* (Thébault, 2011).

Le champ magnétique vu de l'espace est principalement interne et dipolaire. Cette contribution est souvent appelée champ principal et provient de l'effet d'une dynamo auto-entretenu dans le noyau externe liquide. A la surface de la Terre, il est de géométrie plus complexe et représente plus de 98% du champ magnétique total. Son intensité varie typiquement de 20000 nT à 70000 nT de l'équateur vers les pôles. Les courants circulant dans le noyau externe liquide



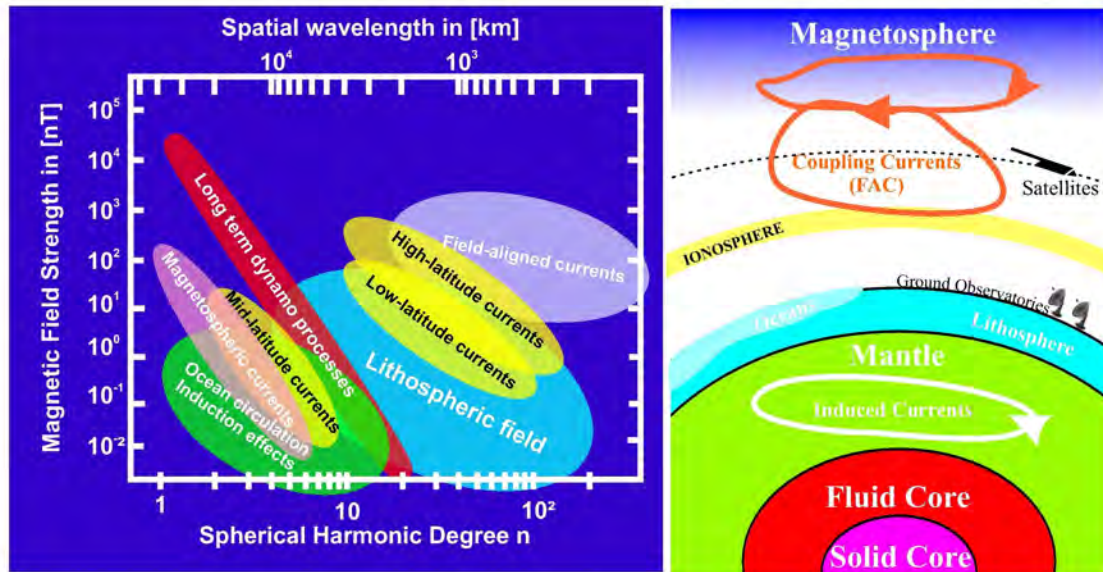


Figure 2.1: À gauche sont représentées les échelles caractéristiques et l'intensité de chaque source globale connue qui constituent le champ magnétique terrestre. La relation entre la longueur spatiale caractéristique et le degré  $n$  est donnée par l'équation (2.7). A droite, une vue schématique des différentes sources terrestres (Figure extraite de **Thébault et coll., 2010** d'après une figure de Hulot et coll., 2007).

de la Terre entre 2900 et 5200 km de profondeur sont responsables d'une variation séculaire du champ magnétique interne (environ 70 nT / an en moyenne au cours des dernières décennies). Bien que cette variation soit en moyenne lente, nous observons des secousses géomagnétiques qui sont des changements brusques de l'accélération du champ principal (Courillot et coll., 1978, **Chulliat et coll., 2010**). Pour notre discussion, il nous importe de souligner que ce champ principal varie de manière significative sur des échelles de temps de quelques mois aux millions d'années. Sur une échelle géologique du temps, ce champ principal renverse occasionnellement sa polarité (Laj et Channel, 2007). La plupart de ces retournements sont imprimées dans la croûte terrestre, notamment le long des dorsales océaniques ou les coulées volcaniques contemporaines de ces inversions. Ces stigmates magnétiques nous donnent un moyen de déchiffrer le comportement ancien du champ magnétique de la Terre mais leurs déformations offrent un outil unique pour mettre en évidence certaines unités géologiques en profondeur et de constater les éventuelles déformations par altération ou par le truchement de la tectonique des plaques.

La seconde source de champ magnétique importante pour notre discussion rassemble les différentes contributions des champs magnétiques qui sont externes à la surface de la Terre. Dans des conditions magnétiques calmes, leurs intensités sont de 3 à 4 ordres de grandeur inférieurs à celles du champ interne principal. Leurs sources sont des systèmes de courants électriques localisés dans l'ionosphère (environ 100-150 km d'altitude) et la magnétosphère (à des distances de plusieurs rayons de la Terre).

Le champ magnétique ionosphérique est de grande échelle spatiale en moyenne. Il est maxi-

mum du côté jour et se caractérise aux moyennes et basses latitudes par des vortex dans chacun des hémisphères terrestres provoqués par des ondes de marée dont l'origine provient du chauffage de l'atmosphère par le soleil. Ce système quasi-symétrique est complété par un courant s'écoulant vers l'Est à l'équateur magnétique appelé électrojet équatorial (EJE). Ce système produit un champ magnétique moyen de quelques dizaines de nT à basses et moyennes latitudes (en fonction de l'heure locale et de l'activité solaire), mais sa signature magnétique peut être localement plus intense. Ce système peut être modélisé en première approximation par une nappe de courant circulant à 110 km d'altitude (e.g., **Chulliat et coll., 2013**).

Le champ magnétosphérique est également principalement de grande échelle spatiale. Il provient du couplage entre le champ magnétique interne de la Terre (le champ principal), le plasma du vent solaire, et le champ magnétique interplanétaire. Il s'agit d'un anneau de courant circulant à peu près dans le plan équatorial magnétique de la Terre à une distance de plusieurs rayons de la Terre (Baumjohann et Nakamura, 2007) qui prend des valeurs typiques de quelques dizaines de nT à la surface de la Terre dans des conditions magnétiques calmes.

Ces champs externes sont donc le résultat des interactions Soleil-Terre. Leurs variations temporelles varient de quelques secondes à plusieurs décennies, avec des périodicités quotidiennes, saisonnières, semestrielles, ou annuelles. On trouve également des périodicités qui suivent les cycles solaires de 11 et 22 ans. À hautes latitudes surtout, les champs ionosphériques et magnétosphériques sont couplés via des courants alignés (« *Field Aligned Currents* », FAC) lors d'épisodes d'intenses perturbations magnétiques. Ces événements génèrent des champs magnétiques qui atteignent plusieurs centaines de nT et présentent des variations temporelles rapides difficiles à modéliser et donc à prédire. Une telle gamme de la variabilité du champ magnétique externe dans l'espace et le temps est particulièrement préjudiciable pour la mise en évidence du champ magnétique d'origine lithosphérique auquel je m'intéresse plus particulièrement.

L'étude du champ magnétique de la lithosphère devient incontournable dès lors que l'on s'intéresse aux mécanismes qui façonnent ou ont façonné la croûte terrestre. Ce signal est en effet supposé refléter les propriétés magnétiques des roches crustales dont certaines siègent à des profondeurs qui sont à l'heure actuelle insondables ou qui restent inaccessibles à l'examen direct en certains endroits du globe (par exemple le Groenland ou l'Antarctique recouverts d'une épaisse couche de glace).

Le sujet du magnétisme des roches est complexe mais ses mécanismes généraux sont bien connus (Dunlop et Özdemir, 2007). La quantité d'aimantation portée par une roche dépend de nombreux paramètres tels que sa taille, sa forme, sa minéralogie, ses domaines magnétiques ... et de son état thermodynamique. La plupart des minéraux magnétiques sur Terre sont des titano-magnétites ou des titano-hématites dont la température de Curie est estimée entre 580° C et 670° C. Si l'on considère le gradient géothermique moyen, ces températures de Curie sont atteintes à des profondeurs d'environ 30 km en domaine continental et de 7 km en domaine océanique. Les roches profondes sont donc considérées comme non magnétiques et la discontinuité de Mohorovicic (Moho) constituerait une limite thermique et compositionnelle pour le champ magnétique de la lithosphère (Wasilewski and Mayhew, 1992). Il convient de noter cependant que certains auteurs prônent l'existence localement d'une aimantation jusque dans le manteau supérieur (par exemple, Ferré et coll., 2013). Par conséquent, je qualifierai souvent le champ

crustal de lithosphérique par la suite pour mieux souligner le fait que la limite rhéologique du Moho peut ne pas correspondre exactement à la profondeur maximum des sources magnétiques.

Les minéraux magnétiques portent une aimantation permanente  $\mathbf{M}_r$  et une aimantation induite  $\mathbf{M}_i$ . La roche acquiert une aimantation rémanente  $\mathbf{M}_r$  lorsque sa température passe en dessous de la température de Curie des grains magnétiques qui la composent. Cette aimantation est plus ou moins proportionnelle au champ magnétique ambiant dans lequel baigne la roche et représente donc une fraction du champ magnétique contemporain au refroidissement de celle-ci. La direction et le sens de cette aimantation mesurée sur site peuvent être très différents du champ actuel soit parce que les roches ont été réorientées par un contexte tectonique, soit parce que le champ ancien avait une direction, voire une polarité, différente du champ actuel. Il est généralement admis que l'aimantation portée par la croûte océanique est principalement d'origine rémanente.

La facilité avec laquelle l'aimantation  $\mathbf{M}_i$  d'un matériau peut être induite dépend de la susceptibilité magnétique  $\kappa$  tel que  $\mu_0 \mathbf{M}_i = \kappa \mathbf{B}$ , où  $\mathbf{M}_i$  est le vecteur d'aimantation induite,  $\mathbf{B}$  le champ ambiant et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. Les valeurs de la susceptibilité des roches varient en fonction de leur composition. Elles sont plus petites pour les roches sédimentaires que pour les roches métamorphiques, elles-mêmes inférieures à celles des roches ignées (ou magmatiques). Dans tous les cas, l'aimantation induite produit un champ beaucoup moins intense que le champ inducteur  $\mathbf{B}$ . Puisqu'il est généralement admis que le champ magnétique du noyau terrestre ne varie que peu sur des échelles de temps décennales, il est aussi admis que le champ lithosphérique d'origine induite est quasi-statique. La croûte continentale semble en première approximation principalement aimantée selon ce principe d'induction.

En résumé, lorsque nous nous intéressons au champ magnétique lithosphérique, nous cherchons à mettre en évidence un signal magnétique masqué par de nombreuses contributions qui constituent le champ magnétique terrestre et dont les sources ne sont pas connues *a priori* puisque ce champ peut être corrélé à des paramètres aussi variés que l'âge, le volume, la composition, l'altération, ou la température des roches, pour ne citer que quelques exemples. Pourtant, le champ lithosphérique présente des caractéristiques favorables à sa détection. D'une part, il est quasi-statique en temps, ce qui permet d'accumuler le signal sur de longues périodes (nous reviendrons néanmoins sur cette question). D'autre part, ses sources résident de manière certaine sous la surface de la Terre. À la surface de la Terre, nous sommes donc en dehors de ses sources mais suffisamment proches pour que certaines de ses échelles spatiales puissent être mises en évidence très nettement à partir de la mesure du vecteur total du champ magnétique terrestre.

## 2.2 Les harmoniques sphériques

---

Les mesures du champ magnétique terrestre peuvent être représentées en termes de fonctions mathématiques. Le potentiel du champ magnétique à la surface de la Terre à la position repérée par le vecteur  $\mathbf{r}$  peut être représenté en coordonnées sphériques. Nous avons (par exemple

Backus et coll., 1996, page 141-142)

$$V(\mathbf{r}, t) = a \sum_{l,m} \beta_l^m(\theta, \varphi) \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} g_l^m(t) + \left(\frac{r}{a}\right)^l q_l^m(t) \right], \quad (2.1)$$

avec  $a$  le rayon de référence pour la Terre,  $r, \theta, \varphi$  les coordonnées géocentriques,  $g_l^m$  et  $q_l^m$  les coefficients de Gauss internes et externes exprimés ici sous forme complexe en fonction du temps  $t$ . Ce potentiel magnétique est solution de l'équation de Laplace

$$\nabla^2 V(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (2.2)$$

avec l'opérateur

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2.3)$$

Les fonctions harmoniques complexes  $\beta_l^m = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \theta)$ , avec  $P_n^m(\cos \theta)$  les fonctions de Legendre, sont normalisées habituellement en géomagnétisme au sens de Schmidt. Les indices  $l$  et  $m$  sont respectivement les degrés et les ordres entiers des harmoniques sphériques et  $i^2 = -1$  est le nombre imaginaire unitaire. Les trois composantes du champ magnétique selon les vecteurs unitaires  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ , sont obtenues en considérant le gradient du potentiel

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = -\nabla V(r, \theta, \varphi); \quad (2.4)$$

le signe négatif étant posé par convention. L'expression du champ magnétique terrestre sur la base des harmoniques sphériques est essentielle à la modélisation d'un champ magnétique poloidal. Les harmoniques sphériques ont des propriétés très intéressantes. D'une part, elles offrent la solution la plus compacte en coordonnées sphériques et d'autre part elles convergent uniformément sur la sphère. La résolution des harmoniques sphériques ne dépend donc pas de la position géographique. Ces fonctions sont également orthogonales au sens du produit scalaire sur une sphère unitaire. Par conséquent, il est possible de calculer un spectre magnétique, c'est-à-dire une quantité reliant l'énergie du signal à un nombre d'onde. Par exemple, pour les contributions du champ magnétique d'origine interne, l'énergie magnétique moyennée sur la sphère est (Lowes, 1974)

$$E_{\partial\Omega}^{SH} = \sum_{l=1}^{\infty} (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+4} \sum_{m=-l}^l (g_l^m)^2 = \sum_{l=1}^{\infty} R_l \quad (2.5)$$

ce qui montre que chaque degré  $l$  porte une contribution indépendante

$$R_l = (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+4} \sum_{m=-l}^l (g_l^m)^2. \quad (2.6)$$

En pratique, l'analyse du spectre magnétique permet de décomposer l'énergie totale du signal en différents ensembles d'harmoniques correspondant à chaque degré  $l$ . Les propriétés d'orthogonalité des harmoniques sphériques sont telles qu'il est également envisageable de pro-

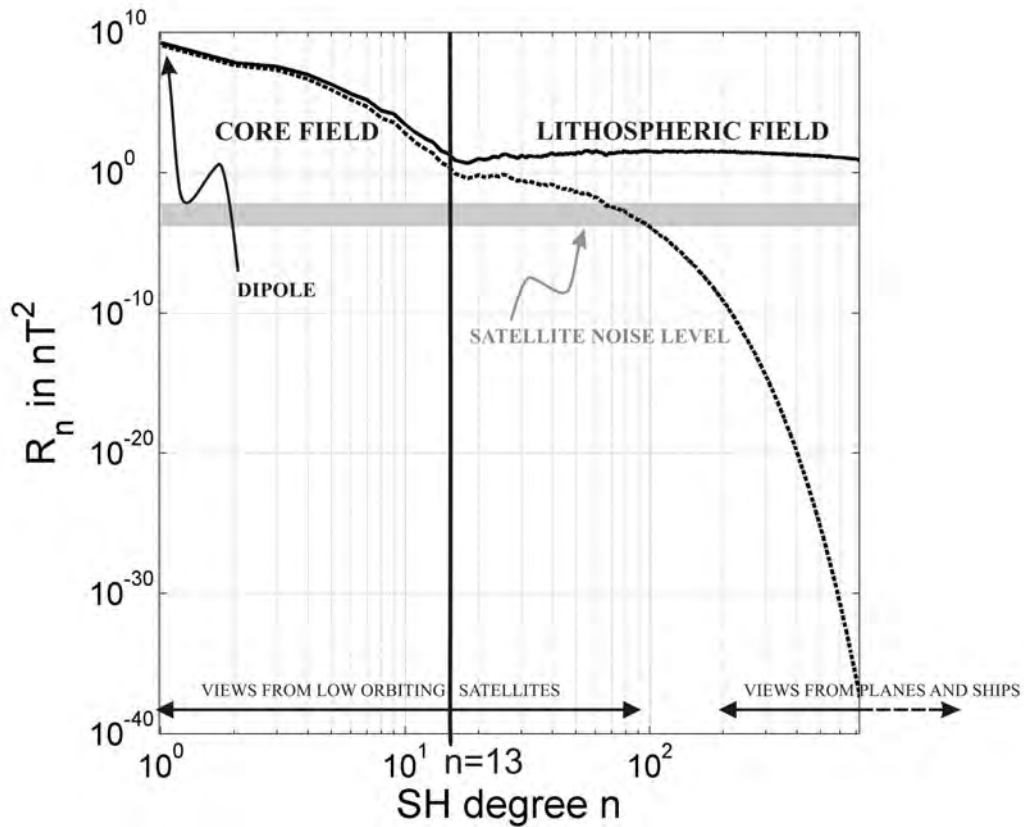


Figure 2.2: Spectre magnétique combinant les contributions du champ principal et du champ lithosphérique pour les degrés  $l=1$  à 720 à l'altitude terrestre (ligne continue) et à 400 km d'altitude (ligne pointillée). Le spectre est calculé à partir du modèle NGDC-720 (Maus, 2010) et les contributions de 1 à 15 du champ principal sont celles de GRIMM (Lesur et coll., 2008). D'après **Thébault (2011)**.

poser une forme de spectre en fonction des ordres  $m$  (spectre azimutal). Cette forme n'est cependant pas la plus utilisée en géomagnétisme car elle n'est pas invariante par rotation. La forme en  $l$  (Eq. 2.6) quant à elle est indépendante du système de référence et l'on peut relier chaque degré  $l$  asymptotiquement à une longueur caractéristique (Backus et al., 1996, page 103)

$$\lambda_l(r) \simeq \frac{2\pi r}{\sqrt{l(l+1)}} \approx \frac{2\pi r}{l + \frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

La figure (2.1) montre schématiquement les décompositions spectrales aux bas degrés des harmoniques sphériques (donc pour les grandes échelles spatiales) de toutes les sources connues du champ magnétique terrestre. On y retrouve les contributions supposées du champ magnétique d'origine lithosphérique qui sont masquées par le champ principal en totalité pour les degrés  $l$  de 1 à environ 12-15 (Langel et Estes, 1982) et partiellement par les sources de champ externe générées par des courants dans l'atmosphère et la magnétosphère.

La figure (2.2) quant à elle montre le spectre magnétique réel d'un modèle de champ magnétique développé jusqu'aux harmoniques de degré  $l = 720$  (Maus, 2010) à l'altitude satellitaire

(400 kilomètres au-dessus du rayon terrestre moyen) et au rayon moyen (à peu près au niveau du sol). L'atténuation géométrique du champ avec l'altitude (en  $\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+4}$ , Eq. 2.6) est particulièrement importante pour les hauts degrés  $l$ , donc pour les petites échelles spatiales. La zone grisée de la figure correspond aux valeurs du champ magnétique comprises entre 0.5 nT et 1 nT. On remarque qu'à 400 kilomètres, le spectre réel prend approximativement ces valeurs dans la gamme des harmoniques comprises entre  $l = 60$  et  $l = 100$ . Ceci illustre que tout biais, même faible, qui serait dû par exemple à la contamination systématique des données par une source de champ mal corrigée, limite la résolution maximale des modèles de champ lithosphérique que nous pouvons espérer calculer avec précision à partir des données satellitaires. La différence de comportement entre ces spectres estimés à des altitudes différentes illustre bien l'une des complexités du problème. La théorie du potentiel nous enseigne que disposer de données vectorielles sur une surface sphérique de rayon  $r$  quelconque est suffisant pour connaître le champ magnétique n'importe où en dehors des sources. En pratique, nous sommes limités par la qualité des données, parfois par leur type (vecteur incomplet ou valeur d'intensité uniquement, par exemple) ou leur distribution spatiale. Il est donc important de disposer d'ensembles de données à des altitudes variées. Dans ce cas précis, nous voyons qu'à l'altitude satellitaire un faible biais se superpose au signal des structures magnétique de dimensions spatiales plus petites que celles correspondant à l'harmonique  $l = 100$ . Au contraire, nous aurions pu illustrer que les données de proche surface détectent mieux les petites structures mais qu'elles ne permettent pas d'avoir une vue globale du champ en raison de leurs faibles extensions latérales. La complémentarité de ces deux ensembles de données est importante et, comme je le décris ci-après, les techniques de traitement et de correction de données de natures et d'altitudes variées nécessitent souvent des stratégies différentes.



---

## Le traitement des données magnétiques

---

### 3.1 La carte mondiale des anomalies magnétiques terrestres

---

Les cartes d'anomalies magnétiques obtenues à partir de levés aériens ou maritimes sont essentielles pour mettre en évidence des structures cachées dans le sous-sol, pour en déterminer leur nature et leur composition chimique, ou en reconstituer l'histoire dynamique. Ces cartes ont contribué à la découverte de l'expansion des fonds océaniques (Vine et Matthews, 1963) et au développement théorique de la tectonique des plaques. L'analyse combinée de leurs détails et d'autres sources d'informations géophysiques peut être réalisée pour délimiter les provinces géologiques et leurs accidents tectoniques, témoins d'une histoire révolue ou en cours, qui provoquent des contrastes entre les propriétés magnétiques des roches qui les composent. Ces cartes sont aussi largement utilisées pour l'exploration des ressources naturelles (par exemple Reeves, 2005). L'objectif premier de ces levés a souvent été la mise en évidence de structures locales supposées résider dans la croûte proche de la surface; c'est-à-dire à des profondeurs plus ou moins accessibles à la prospection directe. Néanmoins, de nombreux problèmes géologiques pourraient être mieux résolus par des cartes proposant une vue plus globale des anomalies magnétiques. Par exemple, le paléomagnétisme couplé à des études géologiques de terrains suggère que l'histoire des plaques tectoniques peut être vue comme une succession d'épisodes de rassemblements et de dislocations de supercontinents (Wilson, 1966). Or, la reconstruction de ces supercontinents selon ce « cycle de Wilson » repose sur des études de surface dont les roches les plus anciennes sont rares, érodées, et altérées. Une carte des anomalies magnétiques mondiales pourrait mettre en évidence les structures plus profondes communes à des blocs continentaux aujourd'hui séparés (par exemple Reeves and De Wit, 2000).

En 1977, l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie (AIGA<sup>1</sup>) a souligné, via la publication d'une série de résolutions, l'importance d'une telle cartographie des anomalies magnétiques pour l'interprétation géologique et tectonique (La figure 3.1 montre un extrait de

---

<sup>1</sup><http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/>



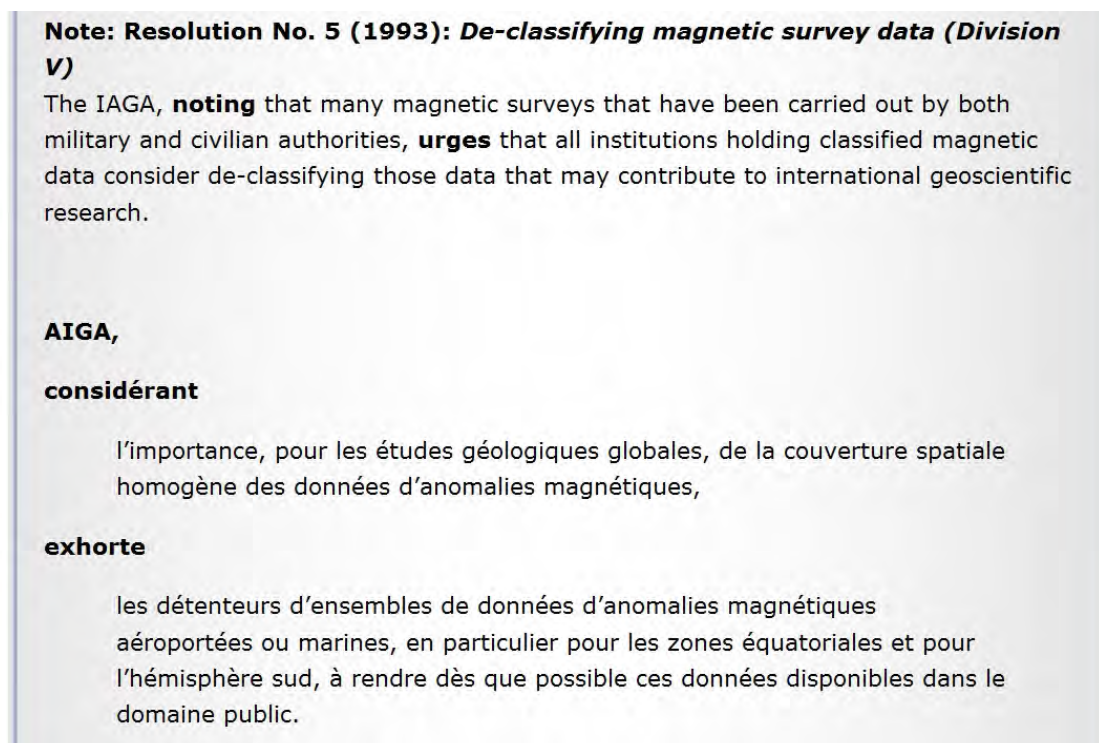


Figure 3.1: Extrait de la résolution 4 publiée en 1996 et réaffirmée par l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie lors de la conférence de Melbourne en 2011. Cette résolution est destinée à promouvoir les activités relatives à la carte mondiale des anomalies magnétiques.

la dernière résolution que nous avons défendue et votée lors de la dernière assemblée de l'AIGA qui s'est tenue à Melbourne en 2011).

C'est à partir de cette époque que l'on observe un effort international concerté pour construire des compilations de données couvrant des territoires géographiques de plus en plus importants. Ces contributions majeures ont permis pas à pas de construire les compilations de l'Amérique du Nord (Bankey et coll., 2002), l'Antarctique (**von Frese et coll., 2007**), l'Arctique (Saltus, and Gaina, 2007), l'Australie (Minty et coll., 2003), l'Europe (Wonik et coll., 2001), la Russie, . . . la liste est non exhaustive. Fort de ce succès, un groupe de travail, le "*World Digital Magnetic Anomaly Map, WDMAM*" piloté par J. Korhonen (GRK, Finlande) a été créé en 2003 pour préparer une feuille de route permettant d'homogénéiser et de fusionner ces différents travaux. Ce groupe de travail, dont je fais partie depuis 2005, s'est donné comme objectifs

- 1) d'inventorier les compilations existantes dans le domaine public par une bibliographie exhaustive.
- 2) de négocier auprès des propriétaires l'accès aux données ou à une version dégradée mais de résolution suffisante pour réaliser une compilation mondiale.
- 3) de retraiter ces ensembles de données hétérogènes et de les intégrer dans un ensemble homogène global.
- 4) de publier la carte des anomalies et la grille numérique avec un espacement de 5 km.
- 5) d'analyser la carte globale et d'émettre des recommandations pour en améliorer la précision et la couverture géographique.

Cette feuille de route a été suivie de manière rigoureuse. Le soutien de l'UNESCO, à travers l'une de ses ONG: la Commission pour la Carte Géologique du Monde (CCGM), a été déterminant puisque qu'il nous a permis requérir des données auprès de pays ou d'institutions sous le couvert d'une association d'utilité publique. Nous avons donc commencé par rassembler les compilations existantes (voir la figure 3.2 pour une vue synthétique des ensembles). Nous avons ensuite uniformisé leur format et leur contenu. Nous avons calculé le modèle caractérisant les grandes tendances du champ principal pour chaque région (parfois ce modèle était disponible sous la forme d'un polynôme géographique, par exemple Le Mouël 1969 pour le levé France). Nous avons ensuite corrigé d'un modèle global du champ principal calculé jusqu'au degré 15 des harmoniques sphériques pour chaque époque de chaque levé. Cette manipulation avait comme objectif de restaurer une partie des grandes longueurs d'onde du champ crustal parfois filtrées par les corrections régionales appliquées aux compilations individuelles. Nous avons ensuite prolongé ces ensembles à une altitude commune de 5 kilomètres. Nous avons chaque fois converti leurs systèmes de référence dans le système géodésique WGS-84. Notons que les anomalies magnétiques sont parfois utilisées pour raffiner la navigation aéronautique ou pour le contrôle en vol de missiles (le contrôle du tangage est particulièrement important pour le guidage). Certaines grilles ont donc parfois été "cryptées" par l'application d'une projection déformant les coordonnées réelles. En l'absence de formule, nous avons donc dans de rares cas été amenés à faire des ajustements manuels sur la base d'informations géologiques indépendantes. Pour les zones de recouvrement entre les grilles, nous avons imposé un ordre de priorité en fonction de la qualité

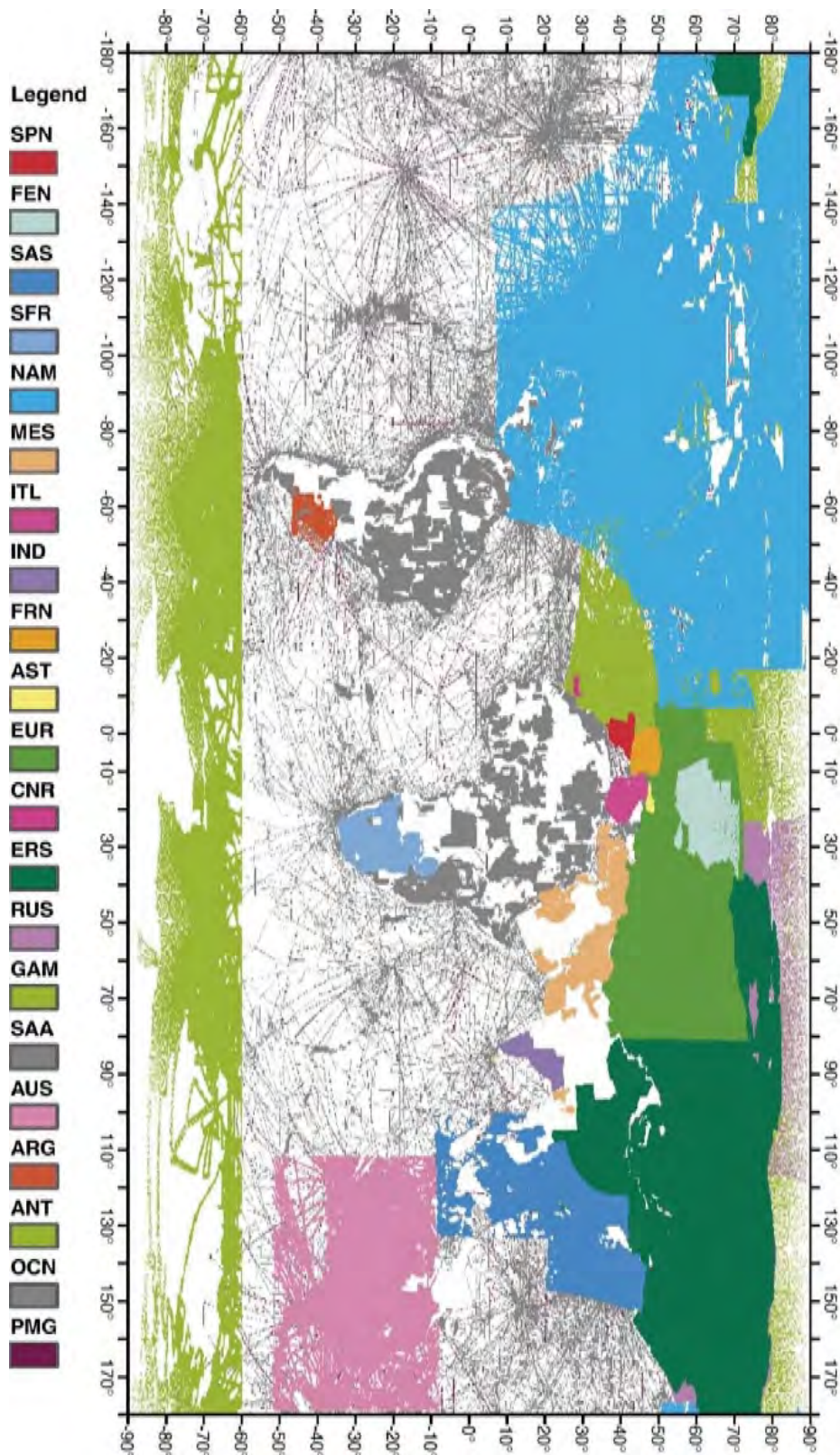


Figure 3.2: Compilations ou ensembles de données mis à la disposition du groupe de travail pour la construction d'une carte mondiale des anomalies magnétiques (D'après **Hemant et coll.**, 2007).

des données, de leur résolution spatiale ou de leur ancienneté. Enfin, dans le domaine marin, certains d'entre nous ont repris la totalité des données pour en éliminer les points singuliers et en améliorer la cohérence aux points de croisements des différentes campagnes marines (Quesnel et coll., 2009). Les échelles spatiales plus grandes que 400 kilomètres ont ensuite été remplacées par un modèle de champ magnétique calculé à partir d'observations satellitaires (Maus et coll., 2007) et la carte WDMAM finale propose également un modèle d'aimantation de la croûte océanique qui permet de couvrir les zones sans données.

Ces travaux nous ont permis de proposer en 2007 deux modèles candidats (**Hamoudi et coll., 2007**; **Hemant et coll., 2007**) parmi cinq. Ces modèles, après évaluation, ont conduit à la publication de la première carte mondiale des anomalies magnétiques par la Commission pour la Carte Géologique du Monde (CCGM, **Korhonen et coll., 2007**). Cette première carte possède au moins des vertus pédagogiques car elle montre à travers le magnétisme les invisibles stigmates laissés par la tectonique des plaques dans la croûte terrestre (Figure 3.2). Nous avons rédigé avec Mme M. Mandea un livret pédagogique dans lequel nous présentons des interprétations qualitatives de cette carte et discutons d'un certain nombre de phénomènes géomagnétiques (**Mandea et Thébault, 2007**). Ce livret a l'ambition de servir de support de cours aux thématiques dites de « géophysiques passives » et d'illustrer la force de la mesure du champ magnétique terrestre.

Il n'aura pas échappé au lecteur que la résolution de AIGA fait mention de données "classifiées" (Figure 3.1). Par conséquent, ce projet dépend en partie de la volonté de certaines nations à contribuer au projet. La couverture de la carte WDMAM a été améliorée une première fois grâce à l'incorporation de nouvelles données marines et d'une technique d'interpolation basée sur une connaissance approximative de l'âge des fonds océaniques (**Maus et coll., 2009, G3**).

Nous poursuivons ces efforts afin de proposer une seconde édition pour la carte magnétique du monde. J'ai retraité les données aéromagnétiques qui étaient sous la responsabilité de l'IPG Paris pour qu'elles puissent être revalorisées et incorporées dans la future version de la carte WDMAM. Des cartes intermédiaires, dont certaines ont été présentées à différents congrès (**Hamoudi et coll., EGU, 2011**), ont montré que certaines compilations récentes n'apportaient pas d'améliorations significatives à la première carte publiée en 2007 (**Korhonen et coll., 2007**). En revanche, le domaine océanique reste largement en friche. Un certain nombre d'outils numériques ont été adaptés par J. Dymant et Y. Choi (Institut de Physique du Globe de Paris) en collaboration avec V. Lesur (GeoForschungsZentrum, Potsdam) et M. Hamoudi (Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene) afin de calculer un modèle réaliste de champ crustal océanique à partir de la carte des âges des fonds océaniques mais en tenant compte également de la tectonique des plaques grâce au calcul des paléolatitudes. Partant d'une aimantation supposée de la croûte océanique, nous avons calculé un champ crustal synthétique que nous avons ensuite calibré aux données réelles marines disponibles dans certaines régions du globe. Ce travail en cours de finalisation a été présenté à diverses reprises en conférence internationale (**Dymant et coll., AGU 2012**; **Hamoudi et coll., AGU 2012**) ou nationale (**Choi et coll., 2013**).



### 3.2 Mesures aux données des stations de répétition

---

Je participe au projet Magnetic Network in Europe (MagNetE) dont l'objectif est d'optimiser les mesures vectorielles du champ magnétique aux stations de répétition européennes. Une station de répétition est une borne géo-référencée à laquelle le champ magnétique terrestre est mesuré à quelques mois ou années d'intervalle. Ce procédé qui est répété sur une durée la plus longue possible permet de mettre en évidence l'évolution du vecteur champ magnétique sur un ensemble discret de points à l'échelle d'un pays. Grâce à ce type de données, j'ai pu proposer un modèle pour le champ magnétique principal en France métropolitaine couvrant la période 1960-2007 (**Thébault, 2008, GJI**). J'ai proposé une modélisation à l'échelle européenne sur les 40 dernières années, basée sur le même protocole, de manière à homogénéiser les cartes de déclinaison à l'échelle du continent (**Thébault et coll., EGU, 2008**). Cette approche par les méthodes potentielles a pu mettre en évidence un certain nombre d'erreurs d'entrées dans la base de données à Edimbourg (WDC) qui ont pu être par la suite discutées et corrigées. Le travail de compilation et de traitement des données à l'échelle européenne a d'autre part fait l'objet d'une carte de la déclinaison magnétique pour l'année 2006 (**Duma, Leichter et coll., 2012**) publiée par la Commission pour la Carte Géologique du Monde (CCGM<sup>2</sup>).

Avec Arnaud Chulliat (Phys. Adjoint, IPGP) et les collaborateurs de l'observatoire de Chambon-La-Forêt, j'ai participé à la campagne de mesures aux stations de répétition pour la zone Est de la France. Ces données ont permis de construire la carte de déclinaison magnétique française en 2007 délivrée tous les 5 ans à la Direction Générale de l'Aviation Civile (DGAC) et à l'Institut Géographique National.

Ce type de mesures dont la finalité est surtout sociétale reste néanmoins très intéressant dans le cadre de la modélisation régionale pour contraindre la valeur du vecteur champ magnétique à la surface terrestre sur une région entière. Une estimation de leur précision, qui varie régionalement selon les protocoles de mesure utilisés, est essentielle dans le cadre des activités de modélisation régionale que je développe. Je m'intéresse donc également à l'histoire de l'acquisition de ces mesures.

### 3.3 La mise en évidence du champ lithosphérique dans les données satellitaires

---

L'exploration spatiale a révolutionné notre connaissance du géomagnétisme. Le satellite MAGSAT (1979-1980) fut le premier à embarquer un magnétomètre de type vectoriel. Depuis, deux autres satellites de basses altitudes (de type *Low Earth Orbiting satellite*) ont fourni des mesures vectorielles et scalaires du champ magnétique. Ørsted et CHAMP sont des missions spatiales récentes lancées respectivement en 1999 et 2000, vingt ans après la mission MAGSAT. Ces données satellitaires prises ensemble forment un ensemble hétérogène de données de qualité et de couverture géographique variées. Le traitement des données satellitaires requièrent donc chaque fois l'adaptation et le développement d'outils d'analyses des données spécifiques.

---

<sup>2</sup>: [http://ccgm.free.fr/MagNetEurope\\_UK\\_b.html](http://ccgm.free.fr/MagNetEurope_UK_b.html)

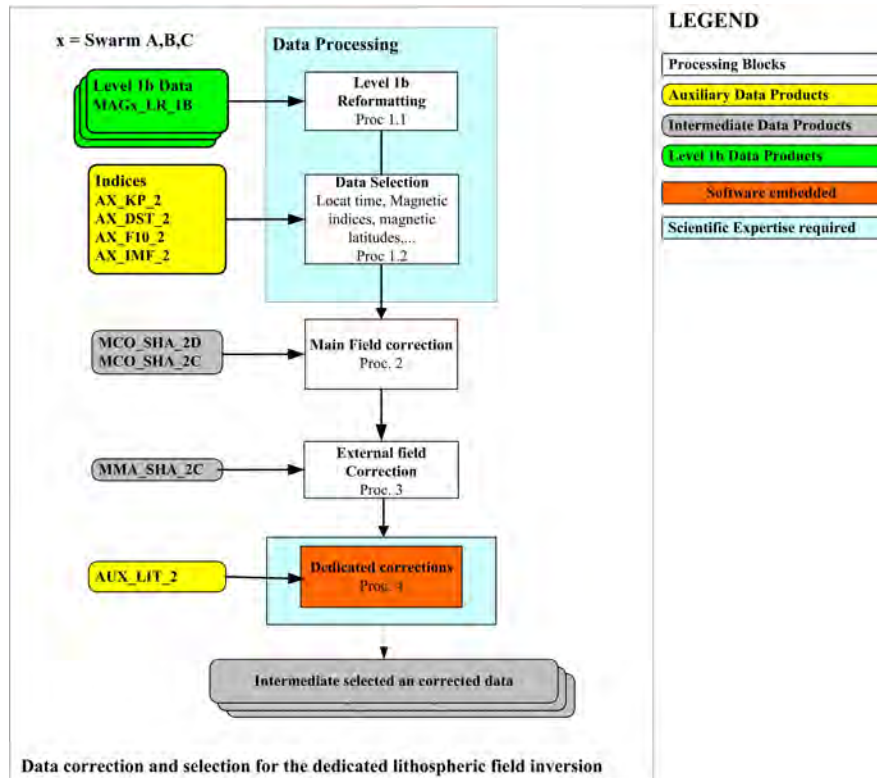


Figure 3.4: Cet algorithme montre la chaîne des processus qui sont nécessaires pour mettre en évidence les fines structures spatiales du champ magnétique d’origine lithosphérique à partir des données satellitaires (D’après **Thébault et coll., 2013**).

La mise en évidence d’une source particulière de champ à partir de la mesure totale du champ magnétique nécessite de faire appel à une sélection de données et à des corrections parfois empiriques. Ces techniques de corrections sont souvent critiquées car elles sont subjectives (par exemple Sabaka et Olsen, 2006). Leur efficacité dépend bien sûr du contexte magnétique (sa complexité) mais relève surtout de l’expérience de l’opérateur face aux ensembles de données qu’il traite. Ces traitements sont importants lorsque la source à identifier est de magnitude si faible qu’elle se confond avec le bruit, comme c’est le cas pour le champ crustal lunaire (**Berguig et coll., 2008**). De la même manière, les contributions de petites échelles émanant de la lithosphère terrestre sont les plus difficiles à mettre en évidence aux altitudes satellitaires car, comme nous l’avons vu (Figure 2.2), elles sont très atténuées et représentent moins de 0.01% du champ total. Les problèmes de couverture du champ en espace et en temps produisent d’autre part des artefacts dans les modèles de champ magnétique d’origine lithosphérique (**Thébault, 2006; Thébault et coll., 2012**).

Pour la mise en évidence du champ lithosphérique, nous proposons par exemple le protocole schématisé sur la figure 3.4 (**Thébault et coll., 2013**). Les données suivent une chaîne de processus numériques qui débute par la sélection des données selon des indices permettant de minimiser certaines contributions magnétiques (Processus 1). Ces données sont ensuite corrigées du champ principal (Processus 2) puis des champs externes (Processus 3). En fonction de la nature et de la géométrie des résidus observés, les données subissent ensuite une série de

corrections «dédiées» destinées à éliminer les sources résiduelles d'origine non lithosphérique (Processus 4). Je décris certains aspects de ces étapes dans les paragraphes qui suivent.

#### 3.3.1 Sélection des données «calmes» et corrections

Le champ magnétique de la lithosphère est faible et principalement de petite échelle à l'altitude satellitaire. Il est donc essentiel d'éliminer toutes les sources de bruit dont l'échelle spatiale caractéristique viendrait perturber les petites échelles de champ que l'on veut mettre en évidence. Ce «bruit», constitué principalement du signal des autres sources de champ magnétique, n'est pas connu avec précision. En revanche, des modèles globaux permettent d'en représenter les grandes tendances en espace et en temps.

Une première étape dans la mise en évidence du champ lithosphérique consiste donc à sélectionner des données qui contiennent des contributions de ces sources proches de ce que les modèles globaux arrivent à représenter de sorte que ces modèles pourront être utilisés pour corriger de ces sources. Pour prendre en compte la nature physique différente du champ externe en fonction de la latitude (en raison principalement des *Field Aligned Currents*, voir Figure 2.1), nous séparons la sphère en trois zones; l'une de moyennes latitudes (environ entre  $\pm 52^\circ$  de latitude par rapport au dipôle magnétique incliné), et deux zones polaires, respectivement aux latitudes  $> 52^\circ$  et  $< -52^\circ$  (toujours par rapport au dipôle incliné). Pour des raisons de continuité, nous autorisons en général un recouvrement entre les zones de moyennes et de hautes/basses latitudes. Pour les moyennes latitudes, nous sélectionnons les heures locales de nuit, entre 21h00 et 5h00 en temps local (Local Time: LT) pour minimiser les contributions du champ ionosphérique *Sq*. Pour les zones polaires, nous considérons tous les LT mais imposons que les données soient en dessous de l'horizon (à  $-10^\circ$  par exemple). Certaines sources du champ magnétique externe sont souvent représentées par des indices magnétiques calculés aux observatoires magnétiques. Nous utilisons également l'indice *Dst* de manière à ne prendre en compte que les données qui correspondent à des moments calmes de champ magnétique créé par l'anneau de courant (*ring current*). Les valeurs doivent être raffinées au cas par cas mais, typiquement, des valeurs du *Dst* inférieures à  $\pm 20$  nT et à 10 nT de variation sur une période de 3h permettent d'éliminer le plus gros des données qui enregistrent les variations rapides de l'anneau de courant. Il est aussi utile d'utiliser l'indice *Kp* afin de ne garder que des données qui correspondent à un niveau moyen plutôt bas de l'activité géomagnétique globale. Un indice  $Kp \geq 2$ , par exemple, témoigne d'une activité magnétique souvent impropre à l'utilisation des données pour l'étude du champ de la lithosphère à haute résolution. Cependant, rejeter trop de données qui correspondent à des activités magnétiques importantes n'améliore pas nécessairement la solution finale car il faut tenir compte du fait que le rapport signal sur bruit est aussi fonction du nombre de données disponibles. Dans les faits, il convient donc de vérifier que le compromis choisi entre le nombre de données sélectionnées et le niveau d'activité des sources perturbantes permet de minimiser la variance de l'erreur sur les données.

Cette sélection de données, schématisée dans la figure (3.4) par les processus 1.1 et 1.2 n'est pas exhaustive mais elle permet de poursuivre sur les processus 2 et 3 qui sont les corrections explicites des champs moyens pour les contributions internes et externes grâce à l'utilisation de



modèles souvent développés en harmoniques sphériques. Bien que ces techniques nous permettent d'éliminer des données potentiellement contaminées par des sources mal connues, la sélection des données et les corrections par des modèles restent souvent insuffisantes parce qu'elles reposent sur des critères, des indices, et des modèles imparfaits. Il est donc usuel en géomagnétisme satellitaire d'employer des méthodes dédiées à la correction de tel ou tel type de source de champ externe en utilisant le plus souvent des analyses orbite par orbite (le processus 4 de *Dedicated corrections* dans la figure 3.4). Cette approche souvent empirique est justifiée car le champ magnétique externe varie rapidement dans le temps même pendant les périodes "magnétiquement calmes". Ce problème provient plus spécifiquement du champ magnétosphérique qui introduit des écarts entre les données magnétiques mesurées le long d'orbites voisins. Ces écarts se caractérisent par des oscillations Est-Ouest dans les valeurs de champ magnétique (lorsque le satellite suit une orbite polaire). Avec des hypothèses simples sur la géométrie du champ externe et sur ses constantes de temps, nous pouvons nous affranchir partiellement de ces effets qui sont préjudiciable à la représentation du champ magnétique de la lithosphère aux petites échelles spatiales.

L'analyse orbite par orbite a été appliqué sur les données du satellite POGO (Cain, 2007) et a permis pour la première fois de réaliser la forte influence et la variabilité temporelle de champ magnétique externe (Langel et Sweeney, 1971). Dès lors, cette technique a été utilisée de manière routinière pour traiter les données de la mission MAGSAT (Langel coll., 1982, Langel et Estes, 1985; Cohen et Achache, 1990, 1994; Ravat et coll., 1995), de la mission Ørsted (Neubert et coll., 2001), et plus récemment de la mission CHAMP (Reigber et coll., 2002) pour la construction de modèles du champ magnétique lithosphérique (Maus et coll., 2002)... Un aperçu des différentes techniques d'analyses le long d'orbites satellitaires est présenté par Langel et Hinze (1998, chap. 4.4). Cette technique est efficace mais imparfaite. Nous avons donc reposé le problème pour vérifier que le traitement des données orbite par orbite n'entraînait pas une incertitude supérieure à celle des données des satellites CHAMP et Ørsted (**Thébault et coll., 2012**). Ce travail est synthétisé ci-après.

#### 3.3.2 La correction orbite par orbite

Supposons que nous cherchions à déterminer les champs internes et externes jusqu'au degré 1 des harmoniques sphériques et cherchons à ne caractériser que sa partie symétrique par rapport à l'axe de révolution de la planète. Sa représentation en harmoniques sphériques ne contient donc que les parties zonales (d'ordre  $m = 0$ ) dans l'équation 2.4. Notons  $\tilde{\mathbf{B}}^0$  la superposition de ces champs magnétiques zonaux interne et externe. Chacune de ses composantes selon les vecteurs unitaires  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$  s'écrit alors

$$\tilde{B}_r^0 = 2 \left\{ \tilde{g}_1^0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \square \tilde{q}_1^0 \right\} P_1^0(\theta), \quad (3.1)$$

$$\tilde{B}_\theta^0 = \square \left\{ \tilde{g}_1^0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 + \tilde{q}_1^0 \right\} \frac{dP_1^0(\theta)}{d\theta}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{B}_\varphi^0 = 0, \quad (3.3)$$

avec  $\tilde{q}_1^0$  et  $\tilde{g}_1^0$  les coefficients de Gauss des champs internes et externes qui sont estimés le long d'une portion d'orbite satellitaire. Les coefficients  $\tilde{q}_1^0$  et  $\tilde{g}_1^0$  sont des estimateurs des "vrais" coefficients  $q_1^0$  and  $g_1^0$ . Notons que dans le cadre général de la planétologie, les équations (3.1), (3.2), et (3.3) sont également souvent utilisées pour tester l'existence d'un champ interne à partir de quelques passages de satellites autour d'une planète (par exemple, Connerney 2007 pour une revue planétaire). Le problème inverse consiste à estimer les coefficients  $\tilde{q}_1^0$  et  $\tilde{g}_1^0$  à partir d'un ensemble discret de mesures magnétiques le long d'une orbite. Prenons pour l'exemple une version idéalisée d'une orbite polaire (Nord-Sud). Cette orbite est circulaire et suit un méridien. Les conditions du champ externe sont différentes du côté jour et du côté nuit et il est d'usage pour les études du champ lithosphérique de ne considérer que les données de nuit afin de réduire la contribution diurne du champ ionosphérique (contribution  $Sq$ , voir section précédente). L'analyse du champ se fait donc le long d'une demi-orbite d'un pôle géographique à l'autre. Les coefficients  $\tilde{q}_1^0$  et  $\tilde{g}_1^0$  doivent minimiser la fonction coût, par exemple au sens des moindres carrés ordinaires,

$$\chi^2 = \int_0^\pi (\mathbf{B} \square \tilde{\mathbf{B}}^0)^2 \sin \theta d\theta,$$

avec  $\mathbf{B}$  le vecteur champ magnétique total mesuré tout au long de l'orbite considérée.

Pour les besoins de l'illustration, nous supposons enfin que le champ  $\mathbf{B}$  mesuré correspond au champ d'origine interne décrit en harmoniques sphériques pour tous les degrés  $n$  et les ordres  $m$  mais qu'il ne contient que le terme externe axial dipolaire ( $n = 1, m = 0$ ). Dans cette approximation nous trouvons que l'estimateur  $\tilde{q}_1^0$  du vrai coefficient externe  $q_1^0$  s'écrit

$$\tilde{q}_1^0(r, \varphi) = q_1^0 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \iota_n^m(\varphi) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \{2\beta_{1,n}^m \square (n+1) \begin{matrix} m \\ 1, n \end{matrix}\}, \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{matrix} m \\ 1, n \end{matrix} = \frac{P_1^0, P_n^m}{P_1^0 \ 2} \quad \text{et} \quad \beta_{1,n}^m = \frac{\left\langle \frac{dP_1^0}{d\theta}, \frac{dP_n^m}{d\theta} \right\rangle}{\frac{dP_1^0}{d\theta}}, \quad (3.5)$$

en ayant posé

$$\iota_n^m(\varphi) = g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi), \quad (3.6)$$

et où  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi fg \sin \theta d\theta$ ,  $\|f\|^2 = \int_0^\pi f^2 \sin \theta d\theta$ .

Une expression similaire peut-être écrite pour l'estimateur  $\tilde{g}_1^0$  des coefficients du champ interne. Dans ces expressions, les coefficients  $\tilde{q}_1^0(r, \varphi)$  sont supposés constants en temps bien qu'un satellite tel que CHAMP parcourt une demi-orbite en environ 50 minutes à 400 km d'altitude (à raison de 7 km par seconde).

L'expression (3.4) démontre analytiquement que l'analyse orbite par orbite des données en magnétisme planétaire souffre de ce qu'il est coutume d'appeler une "fuite spectrale" en traitement du signal. Dans cet exemple, le coefficient estimé est contaminé par le champ d'origine interne  $\iota_n^m$  qui contribue à la valeur du champ le long du méridien  $\varphi$  et au rayon  $r$ .

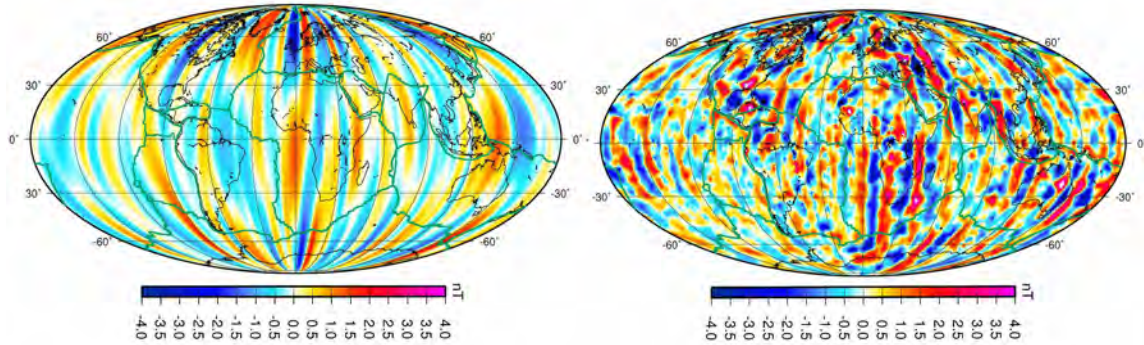


Figure 3.5: a) Prédiction des artefacts introduits par la correction orbite par orbite dans la valeur de la composante radiale du champ magnétique lithosphérique b) Résidus observés entre un modèle de champ et des données corrigées le long des orbites.

En généralisant ce problème et en revenant à la séquence de corrections qui sont nécessaires pour isoler les contributions magnétiques émanant de la lithosphère terrestre (Figure 3.4) nous comprenons que toutes les contributions du champ magnétique d'origine interne (et externe) que nous n'avons préalablement pas retiré dans les données sont susceptibles d'introduire des artefacts si l'on corrige les données pour le champ externe à partir du coefficient  $\tilde{q}_1^0(r, \varphi)$  estimé par cette méthode. La figure 3.5 illustre ce problème. La figure à gauche montre la forme des artefacts estimés à travers l'Eq. (3.4) qui sont introduits par la correction orbite par orbite pour toutes les longitudes et la figure à droite montre ce que nous observons dans les résidus après correction et modélisation des données réelles du satellite CHAMP (Thébault, 2006). Nous avons montré qu'une partie de ces artefacts contaminait les modèles de champ lithosphérique plus particulièrement pour les fines structures spatiales (Thébault et coll., 2012). Nous avons pu démontrer analytiquement que les modèles actuels de champ de la lithosphère étaient contaminés par un artefact Est-Ouest qui pouvaient facilement se confondre avec les anomalies magnétiques des fonds océaniques, notamment celles parallèles aux dorsales orientées Nord-Sud comme la dorsale médio-atlantique par exemple. Le domaine océanique est donc particulièrement impacté par ces problèmes avec de plus des erreurs qui introduisent des changements de signes lors de la détermination de la signature magnétique de la croûte (Figure 3.6). Or, ce type de modèle satellitaire a été intégré aux données aéromagnétiques dans la carte WDMAM qui contient donc des erreurs (voir Figure 3.3). Nous supposons qu'elles expliquent une partie d'importants problèmes de compatibilité entre données terrestres et satellitaires observés depuis plus d'une décennie, notamment dans les zones aurorales (Gaya-Piqué et coll., Vienne, EGU, 2008).

Les implications illustrées par l'équation (3.4) dépassent bien entendu le cadre de la modélisation du champ lithosphérique. Par exemple, puisque les termes internes tels que  $g_1^0$  sont aussi contenus dans  $\iota_n^m$  (Eq. 3.6), cette expression montre qu'il est formellement impossible de séparer la contribution dipolaire axiale externe du champ, représentée par le coefficient  $q_1^0$ , de sa partie interne induite dans le manteau terrestre (portée par  $g_1^0$ ). Or, les études de conductivité du manteau réalisées à partir de données satellitaires (Olsen, 1999) le sont en général à partir de séries temporelles estimées de  $\tilde{q}_1^0$  et de  $\tilde{g}_1^0$  selon des techniques parentes.

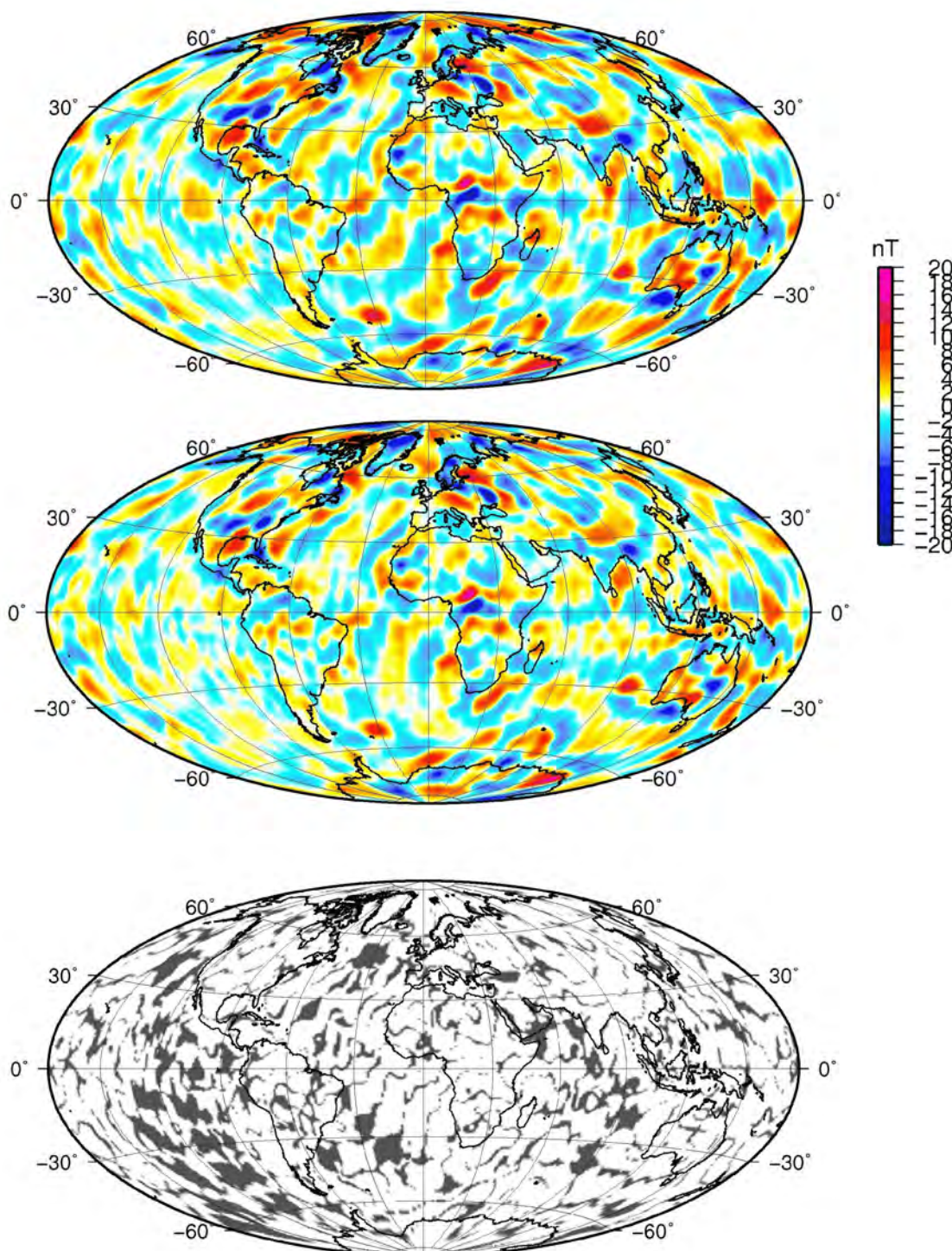


Figure 3.6: Comparaison entre la composante verticale d'un modèle de champ lithosphérique originale (haut) et celle du même modèle après correction des données pour un champ externe orbite par orbite (milieu). Les surfaces grisées (bas) correspondent aux zones géographiques pour lesquelles la correction a introduit un changement de signe du signal magnétique initial (D'après **Thébault et coll., 2012**).

Enfin, dans le contexte de l'exploration spatiale de notre système solaire, ces analyses permettent de mieux comprendre l'origine des désaccords entre les modèles calculés pour le champ magnétique des planètes (voir Connerney, 2007 pour une revue). En effet, l'erreur d'estimation  $q_1^0$  (ou  $g_1^0$ ) d'un champ magnétique à partir de quelques orbites parcourues par les sondes spatiales dépend non seulement de  $\iota_n^m(\varphi)$  dans l'équation (3.4) mais également de  $r$ , le rayon auquel est mesurée la donnée. L'erreur est donc d'autant plus importante que l'orbite de la sonde ou du satellite est elliptique.

### 3.3.3 Quels compromis accepter?

L'unique façon mathématique de s'affranchir de ces erreurs est d'avoir suffisamment de données en longitude au même temps local  $t$ . Comme nous ne disposons pas à l'altitude satellitaire de plusieurs mesures simultanées, nous avons énoncé dans le paragraphe précédent que l'analyse orbite par orbite faisait l'hypothèse d'un champ externe constant sur une période d'environ 50 minutes pour CHAMP. Pour s'affranchir complètement de ces artefacts, il serait nécessaire d'attendre que le satellite ait balayé toutes les longitudes à toutes les heures locales. En effet, pour une Terre en rotation, le temps local est fonction de la différence entre la longitude du soleil à son zénith  $\varphi_s$  (*subsolar point*) et la longitude  $\varphi$  (en degrés) de l'observation magnétique (Hulot et coll., 2007)

$$t = (180^\circ + \varphi \square \varphi_s)/15, \quad (3.7)$$

soit encore

$$\varphi = 15t \square 180 + \varphi_s.$$

En remplaçant cette expression de  $\varphi$  dans  $\iota_n^m$  (Eq. 3.6) et en intégrant sur toutes les longitudes solaires, nous avons

$$\tilde{q}_1^0(t) = q_1^0(t) + \frac{1}{6\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \{2\beta_{1,n}^m \square (n+1) \binom{m}{1,n}\} \int_0^{2\pi} \iota_n^m(15t \square 180 + \varphi_s) d\varphi_s, \quad (3.8)$$

ce qui conduit bien à l'annulation des termes de la double série et donc à l'égalité entre le vrai coefficient et celui estimé

$$\tilde{q}_1^0(t) = q_1^0(t).$$

Nous voyons donc que l'approche de modélisation du champ magnétique dite séquentielle qui consiste à estimer les paramètres du champ magnétique les uns après les autres, ou les uns indépendamment des autres, conduit à des difficultés illustrées mathématiquement par l'équation 3.4. Ce type de problème offre un argument solide en faveur d'une autre approche de modélisation du champ magnétique qualifiée de globale (« *comprehensive inversion* », voir Sabaka et coll., 2004, par exemple) et basée sur l'estimation jointe de tous les paramètres décrivant sta-

tistiquement les différentes sources du champ magnétique terrestre. Mathématiquement, cette approche est indiscutablement la plus rigoureuse. Cependant, nous pouvons lui opposer cet autre argument : pour un satellite tel que CHAMP, la détermination exacte de certains paramètres tel que  $q_1^0(t)$  nécessiterait de ne considérer que des données sur une durée d'environ 130 jours (Olsen et coll., 2010, Fig. 8) pour que  $\varphi_s$  couvre l'intervalle  $[0, 2\pi]$  dans (3.8). Pour la mise en évidence du champ lithosphérique par exemple, il n'y a pas d'amélioration à attendre de la correction d'un modèle de champ externe donc la résolution temporelle se limiterait à 130 jours. Il convient donc d'adopter une approche plus pragmatique, moins robuste mais permettant de construire des modèles à des résolutions spatiales plus élevées.

Pour contourner le problème de l'échantillonnage du champ en espace et en temps de manière empirique, il « suffit » de faire tendre  $\tilde{q}_1^0(t)$  vers  $q_1^0(t)$  avec un niveau d'erreur, que l'on jugera acceptable selon les objectifs scientifiques poursuivis, en réduisant les contributions de  $\iota_n^m(\varphi)$  dans l'équation (3.4). En prenant en compte toutes les corrections par des modèles obtenus par l'approche de modélisation « *comprehensive* », nous réduisons significativement les erreurs mais une autre source d'amélioration très significative provient de la sélection des données qui, selon les critères choisis, permet d'éliminer des contributions comme celles du champ ionosphérique, par exemple. En adoptant cette approche intermédiaire entre les modélisations « *comprehensive* » et séquentielle il devient possible d'estimer  $q_1^0$  à des périodes minimales de l'ordre de la journée ou de quelques heures (voir par exemple Velimsky, 2010). Ces améliorations sont intéressantes pour l'étude de la conductivité du manteau terrestre (car la profondeur de pénétration d'une onde électromagnétique est inversement proportionnelle à la racine carré de la fréquence) et pour la modélisation du champ lithosphérique. Cependant, cette approche nécessite d'avoir une bonne maîtrise des étapes du traitement des données et leur correction afin d'éviter l'écueil d'un raisonnement circulaire. L'un des atouts de l'expression analytique 3.4 est de proposer, moyennant quelques informations sur la statistique de  $\iota_n^m(\varphi)$ , une expression qui permette de quantifier l'erreur commise. Ce travail statistique a fait l'objet d'une étude indépendante qui a abouti à la construction d'un algorithme de correction *a posteriori* des modèles construits suivant la technique de correction le long des orbites (Lesur et coll., 2013).

Dans ces pages, je me suis contenté d'une illustration du problème à partir de l'estimation d'un seul coefficient. Une généralisation de ces équations est proposée dans **Thébault et coll. (2012)** où nous avons caractérisé cette erreur pour la prospection magnétique planétaire en général et quantifié un certain nombre d'artefacts dans le cadre général du géomagnétisme.



---

## Contributions à la modélisation et à l'interprétation du champ global

---

### 4.1 Modèles et interprétations du champ principal

---

Le champ magnétique principal généré dans le noyau externe de la Terre domine toutes les autres contributions et varie de manière séculaire tout en suivant des phases de changement brusque dans son accélération qualifié de « secousses géomagnétiques ». Ce champ magnétique masque totalement le champ de la lithosphère et nous venons de discuter de l'importance de bien le modéliser pour mettre en évidence les structures sous-jacentes.

#### 4.1.1 ... actuel

J'ai donc participé activement à l'élaboration et à la validation de la 11<sup>ème</sup> génération du modèle géomagnétique international de référence (International Geomagnetic Reference Field, IGRF<sup>1</sup>). J'ai fait partie du groupe de travail, mis en place sous l'égide de la division 5 de l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie, chargé d'établir le cahier des charges définissant le format des modèles de champ magnétique de référence ainsi que leur période de validité. Les modèles IGRF, produits tous les 5 ans à partir de modèles candidats soumis par une équipe internationale de volontaires, ont de nombreuses applications scientifiques, industrielles, et sociétales. La correction du champ magnétique principal est également une étape essentielle pour mettre en évidence les structures magnétiques de la croûte terrestre aux altitudes satellitaires et dans le cadre du World Digital Magnetic Anomaly Map (WDMAM).

Nous avons proposé deux modèles candidats basés sur des approches et des jeux de mesures magnétiques différents. La première famille de modèles est basée, d'une part sur une sélection drastique et un prétraitement important des données, d'autre part sur un ré-échantillonnage sur la sphère unité (aux points d'une grille quasi-régulière) appropriée au calcul du problème inverse et préservant au mieux les caractéristiques du champ interne. Le processus de sélection des données (suivant un certain nombre de critères que nous avons exposés dans la section 3.3)

---

<sup>1</sup><http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>



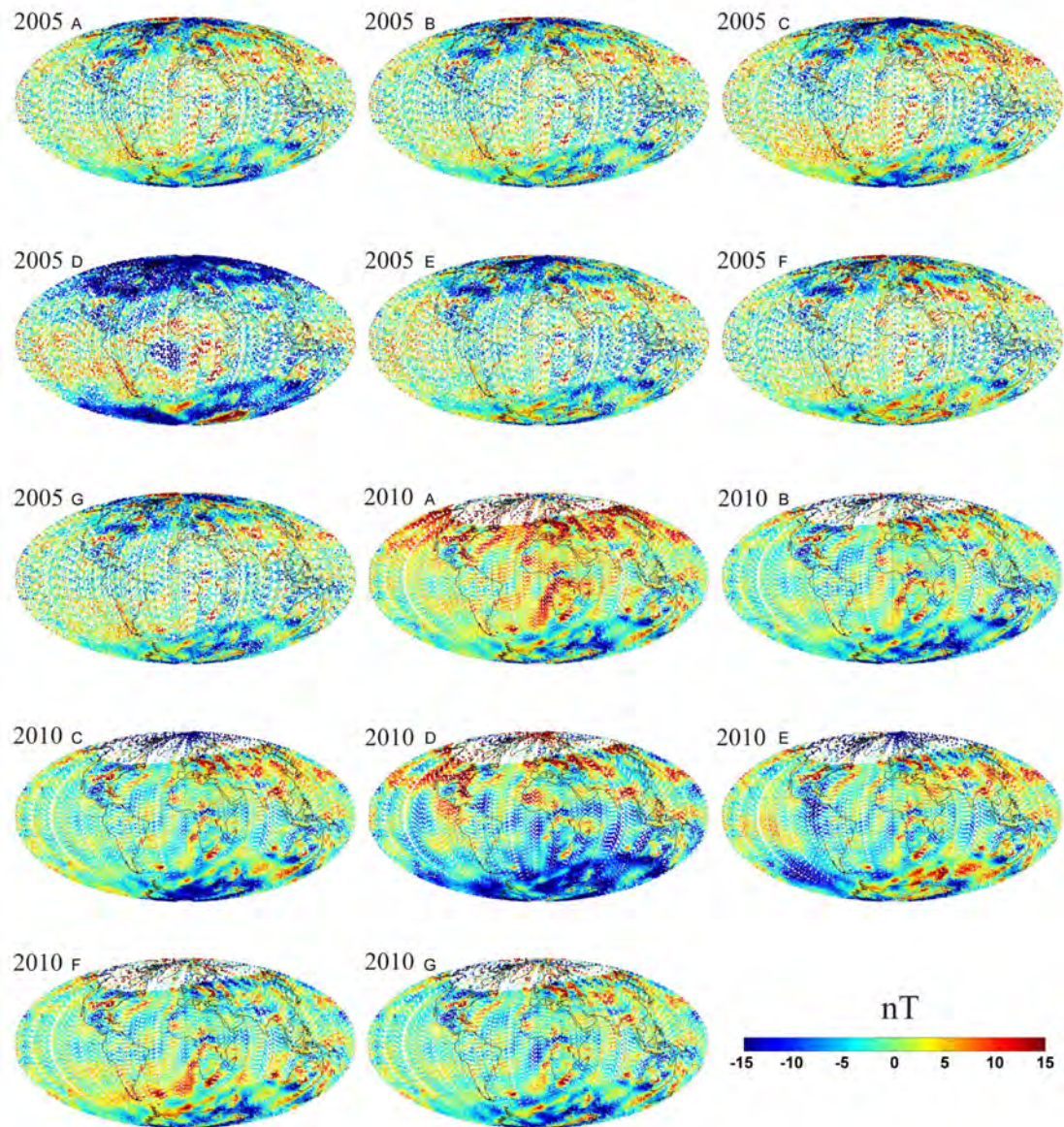


Figure 4.1: Résidus pour la composante verticale du champ magnétique terrestre entre les candidats au modèle IGRF (notés de A à F) pour les périodes 2005 et 2010 et un jeu de données du satellite CHAMP indépendant.

garantie un minimum d'activité du champ externe. Ces données sont corrigées du champ de la magnétosphère, de la lithosphère et des effets magnétiques induits par les marées océaniques (Tyler et al., 2003). Seul un sous-ensemble de données proches des points d'une grille régulière sur la sphère a ensuite été considéré. L'orthogonalité des harmoniques sphériques est ainsi préservée et les données de latitudes moyennes ont le même poids que les données polaires, plus nombreuses, mais contaminées par le champ externe auroral. Nous avons mis l'accent sur l'utilisation de sources d'information *a priori* avant de construire ces modèles pour notamment nous aider à mieux paramétrer leurs dépendances temporelles. Nous avons donc analysé les données d'observatoires et la structure des modèles de champ magnétique développés au cours de ces dix dernières années. Ceci nous a d'ailleurs permis de détecter une secousse magnétique autour de juillet 2007 que nous avons pu relier à ce que nous avons défini comme une impulsion ayant eu lieu en 2006 (**Chulliat et coll., GRL, 2010**). Cette approche nous a permis de ne pas considérer dans ces modèles candidats pour 2005 et 2010 les données affectées par ces phénomènes transitoires internes dont les fonctions temporelles des modèles n'auraient pu rendre compte de la complexité réelle du champ magnétique (**Thébault et coll., 2010**).

La deuxième famille de modèles, proposée par l'IPGS/EOST, le LPGN et l'Equipe de Géomagnétisme de l'IPGP en collaboration avec M. Menvielle (LAMOS), a été intentionnellement construite en employant une méthode plus proche des caractéristiques d'un modèle IGRF (**Chambodut et coll., 2010**). Le modèle de champ principal pour l'époque 2005 a été évalué à partir d'environ un an de données CHAMP sélectionnées afin de minimiser l'influence du champ externe. Le modèle a ainsi été calculé jusqu'au degré 15 pour le champ interne, au degré 2 pour le champ externe, au degré 1 pour sa partie magnétosphérique, et au degré 8 pour la variation séculaire supposée linéaire sur la période considérée. Le modèle de variation séculaire prédictif pour la période 2010-2015 a été calculé à partir des moyennes annuelles d'observatoires magnétiques. Enfin, le modèle de champ principal pour l'époque 2010 a été élaboré en deux étapes. Un modèle de champ interne a d'abord été calculé jusqu'au degré 14 pour le champ interne et au degré 2 pour le champ externe, puis une extrapolation des coefficients de Gauss pour le champ interne a été effectuée jusqu'en 2010.

En tant que membre exécutif de l'IGRF, j'ai ensuite participé à l'évaluation et à la production du modèle IGRF final à partir des modèles candidats (7 modèles centrés sur 2010, 7 sur 2005 et 8 modèles prédictifs de variation séculaire, soit 22 modèles en tout, voir la Figure 4.1 pour une illustration). Cette évaluation a consisté à tester les modèles statistiquement et à vérifier leur accord à un ensemble de données satellitaires CHAMP et de données d'observatoires magnétiques. Nos évaluations ont dans un premier temps fait l'objet d'une note technique interne à notre groupe de travail. Elles sont consultables sur le site internet du modèle IGRF11, et sont en partie reprise dans **Finlay et coll. (2010)**. Deux articles complémentaires ont été publiés dans le cadre de ce travail. L'un présente notamment l'intérêt des données quasi-définitives d'observatoires pour l'évaluation de la variation séculaire (**Chulliat and Thébault, 2010**). Le second fait suite à une réflexion sur la possibilité de proposer des modèles IGRF de meilleure résolution spatiale. Au sein de notre équipe de géomagnétisme à l'IPGP, il nous est en effet apparu que les recommandations de l'IGRF sous-estimaient la résolution maximum possible des modèles construits à partir des données satellitaires qui sont de nos jours nombreuses et de

très bonne qualité. Nous avons donc mené en parallèle une étude prospective sur la possibilité d'améliorer la résolution de la variation séculaire, c'est-à-dire la partie prédictive de l'IGRF (**Da Silva et coll., 2010, EPS**). La 11<sup>ème</sup> génération de l'IGRF a par la suite été rendue publique (**Finlay et coll., 2010, GJI**).

Au cours de ce travail pour l'IGRF, nous avons détecté un phénomène magnétique remarquable qui eut lieu en 2006 que nous qualifions d'impulsion géomagnétique dans le noyau (**Chulliat et coll., 2010**). Les caractéristiques spatiales de cet évènement magnétique nous ont amenés à proposer l'idée que les secousses géomagnétiques observées n'étaient pas la succession d'évènements indépendants car elles semblent anticorrélées dans le temps. Nous proposons que les secousses magnétiques sont en fait les avatars d'impulsions magnétiques qui ont lieu entre deux secousses appairées et que l'objet physique le plus pertinent à étudier sur le plan de la dynamique du noyau terrestre n'est pas la secousse isolée mais l'impulsion. Ce travail piloté par A. Chulliat a fait l'objet d'investigations plus systématiques. Malheureusement, la précision des modèles sur les temps plus anciens (avant 2000) n'est pas suffisante pour tester notre hypothèse sur toutes les secousses magnétiques observées depuis le XX<sup>ème</sup> siècle.

Les modèles IGRF ont également un intérêt scientifique important. Récemment, avec A. Fournier et J. Aubert (IPGP), nous avons co-estimé le champ magnétique donné par l'IGRF, sa variation séculaire, et les mouvements de matière à la frontière noyau-manteau (**Fournier et coll., 2011**). Ce travail pose les jalons d'une méthode d'assimilation de données magnétiques permettant d'estimer le vecteur d'état de la dynamique du noyau et qui fait l'objet d'un projet ANR en cours piloté par A. Fournier (ANR-AVSgeomag : <http://avsgeomag.ipgp.fr/>) auquel je participe. Cette thématique nouvelle est intrinsèquement transdisciplinaire puisqu'elle fait appel à la fois aux observations magnétiques, aux simulations numériques de la dynamo, et aux principes d'assimilation de données bien connus en météorologie et prédiction du climat. L'objectif ambitieux de ce projet est à terme de pouvoir reconstruire le champ passé et prédire (dans sa limite de prédictibilité) le champ futur à partir d'un nombre limité de données moyennant des hypothèses sur la dynamique de la géodynamo. Je reviendrai sur ce projet qui fait partie de mes perspectives scientifiques.

### 4.1.2 ... et ancien

Une fraction du champ magnétique ancien est imprimée dans certaines roches ou artefacts humains via l'acquisition de l'aimantation rémanente (voir section 2.1). L'acquisition régulière de nouvelles données archéomagnétiques enrichit les compilations de données décrivant les variations spatiales et temporelles du champ magnétique principal ancien. Leur distribution spatiale a permis la construction de plusieurs modèles de champ géomagnétique développés en harmoniques sphériques jusqu'aux degrés 10-13 et couvrant des échelles de temps archéologique (par exemple Korte et Constable, 2011 pour une référence récente). Plusieurs auteurs, dont notre groupe à l'IPGP, soulignent néanmoins que ces modèles sont mal contraints par les données et nous pensons que les modèles développés à de plus bas degrés sont plus robustes. Pour nous en assurer, nous avons développé un ensemble de 1000 modèles archéomagnétiques développés jusqu'au degré 5 à partir d'un ensemble de données unique dont nous avons à chaque fois ré-échantillonné

les valeurs selon leurs barres d'erreur. Ceci nous a permis d'estimer la variabilité des coefficients du modèle ainsi obtenus et de proposer à la communauté scientifique des barres d'erreurs sur les paramètres que nous jugeons plus réalistes (**Licht et coll., 2013**). Ce type d'ensemble de modèles dont nous pouvons reconstruire la matrice de covariance a vocation à être incorporé dans les processus d'assimilation de données (**Fournier et coll., 2011**).

Une source importante d'erreur provient également du changement dans la distribution géographique des données en fonction de l'époque qui introduit des variations temporelles artificielles du champ magnétique principal. Avec A. Khokhlov (Université de Moscou), nous travaillons à une méthode de calcul de poids sur les données permettant de nous affranchir de ce biais. Nos tests préliminaires (**Thébault et coll., IAGA, 2011**) ont démontré qu'il nous était possible d'obtenir une description plus robuste du dipôle magnétique au cours des âges. Ce résultat est potentiellement intéressant pour la compréhension de la dynamique du noyau terrestre et de l'interaction entre le champ magnétique et la production de  $C^{14}$ , la biosphère, ou le climat, qui sont des sujets vigoureusement débattus.

## 4.2 Modèles et interprétations du champ lithosphérique

---

### 4.2.1 Un modèle de champ lithosphérique

Certaines applications de nos résultats pour la caractérisation du champ de la lithosphère terrestre sont synthétisées dans un article de revue (**Thébault et coll., 2010**).

En 2006, j'ai proposé un modèle de champ de la lithosphère terrestre à partir des données du satellite CHAMP couvrant la période d'août à juillet 2004. Ces données furent sélectionnées en partie selon le protocole décrit dans la section (3.3.1) avec cependant des critères moins restrictifs de manière à ne pas rejeter trop de données. En effet, cette période couvre un maximum solaire (maximum solaire 23) et les données qui correspondent à des indices d'activité faible de la magnétosphère (faibles valeurs du  $Dst$ ) ne sont pas suffisamment nombreuses. Cette étude a surtout montré la possibilité d'utiliser des fonctions locales pour la représentation globale du champ magnétique de la lithosphère. La figure (4.2) montre la composante verticale à 400 km d'altitude du modèle lithosphérique proposé. La méthodologie générale a fait l'objet d'une étude plus approfondie dans le cadre de la préparation à la mission Swarm (voir section 6).

### 4.2.2 La variation séculaire du champ lithosphérique

La construction des modèles qui décrivent les variations spatiales du champ magnétique de la lithosphère repose sur l'hypothèse que le champ lithosphérique est statique sur des échelles décennales. Cette hypothèse de base nous permet donc d'accumuler le signal enregistré par les satellites à des périodes différentes parfois sur une dizaine d'années. Or, il est communément admis que les grandes structures spatiales du champ magnétique lithosphérique, celles enregistrées par les satellites, sont principalement induites par le champ magnétique principal. Puisque le champ principal évolue au cours du temps, nous nous attendons intuitivement à des changements temporels induits dans la croûte terrestre. Nous anticipions que ces variations puissent être négligées mais nous avons quantifié cet effet. Nous avons ensuite mené une étude pour

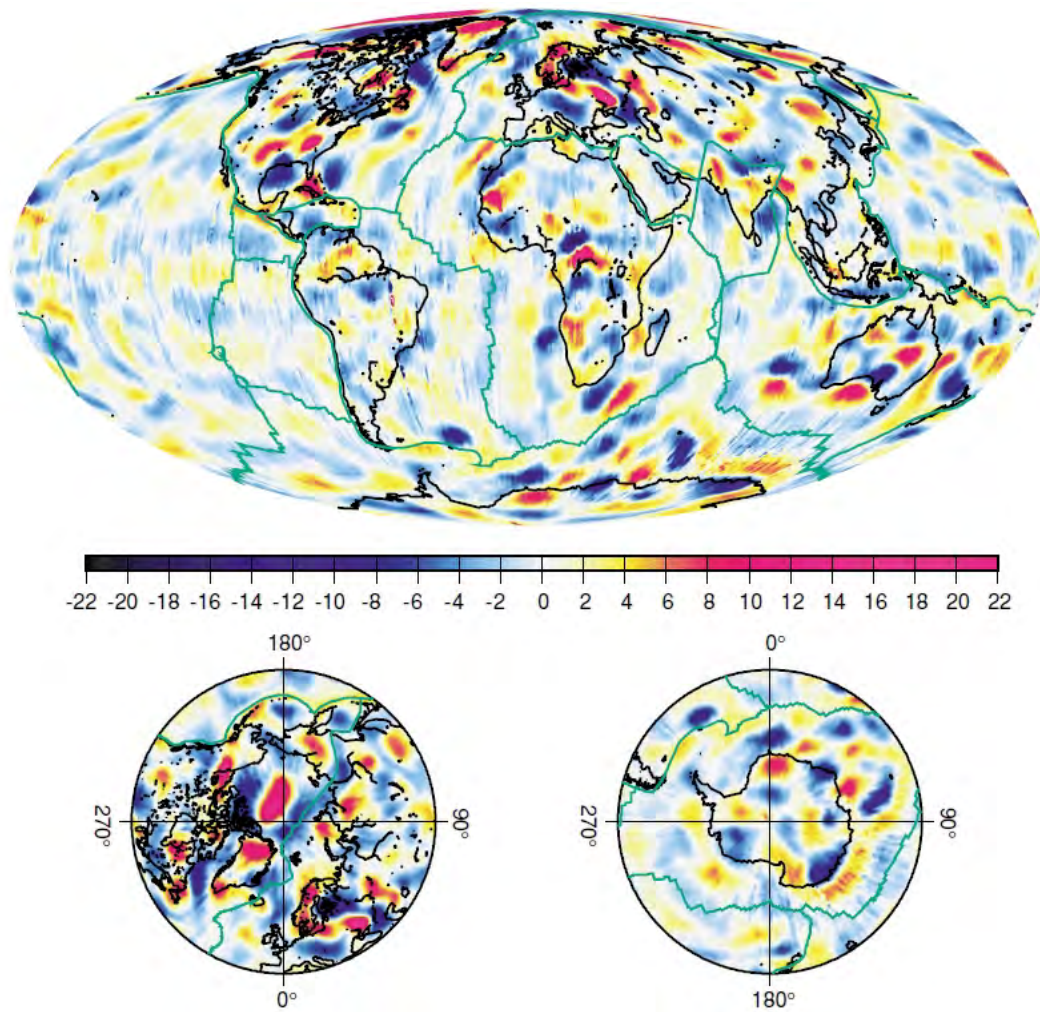


Figure 4.2: Composante verticale à 400 km d'altitude d'un modèle de champ lithosphérique développé à partir de données magnétiques enregistrées par le satellite CHAMP couvrant la période de 2000 à 2004 (D'après **Thébault, 2006**)

estimer la part variable en temps du champ de la lithosphère induite par la variation séculaire du noyau pour voir dans quelle mesure ces signaux se confondaient.

Contrairement au problème inverse qui consiste à estimer un ensemble de paramètres à partir des données, nous sommes partis d'hypothèses et de modèles que nous jugeons réalistes pour la susceptibilité magnétique apparente des roches afin de déterminer l'amplitude du signal attendue dans les données magnétiques. Nous voulions dans un premier temps visualiser géographiquement les variations temporelles du champ lithosphérique pour déterminer si leur amplitude était localement significative. Reprenons l'expression du potentiel magnétique observé au rayon  $\mathbf{r}$  en harmoniques sphériques (Eq. 2.1)

$$V_{SH}(\mathbf{r}) = a \sum_{l,m} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \beta_l^m(\theta, \varphi) g_l^m, \quad (4.1)$$

avec  $a$  le rayon moyen de la Terre,  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  les coordonnées sphériques,  $g_l^m$  les coefficients de Gauss (sous forme complexe), et les fonctions harmoniques  $\beta_l^m$  normalisées au sens de Schmidt. Le potentiel magnétique de la croûte terrestre peut également s'exprimer en fonction d'une distribution continue d'aimantations confinées dans une coquille sphérique  $\Omega'$  de volume élémentaire  $d\Omega'$  (par exemple Blakely, 1995, Eq. 5.2)

$$V_d(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Omega', \quad (4.2)$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité du vide,  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  le vecteur aimantation,  $\nabla'(\cdot)$  l'opérateur du gradient appliqué sur  $\mathbf{r}'$ , et  $\mathbf{r}$  le point d'observation (avec  $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ ). Ces deux formalismes (Eqs. 4.1 et 4.2) peuvent être combinés et, par intégration sur la sphère, nous donner l'expression de chaque coefficient de Gauss  $g_l^m$  décrivant le champ lithosphérique en fonction de la distribution d'aimantation dans la croûte terrestre (par exemple Gubbins et coll., 2011, Eq. 7)

$$g_l^m = \frac{\mu_0}{4\pi a^{l+2}} \int_{\Omega'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left[ r'^l \beta_l^m(\theta', \varphi') \right] r'^2 d\Omega'. \quad (4.3)$$

Si nous supposons que l'aimantation est induite par le champ magnétique principal  $\mathbf{B}(r, \theta, \varphi)$  pour tous les degrés  $n$  nous pouvons écrire  $\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \kappa(\mathbf{r}') \mathbf{B}(\mathbf{r}') / \mu_0$ . Si nous exprimons la susceptibilité magnétique en harmoniques sphériques  $\kappa(\mathbf{r}') = \sum_{l,m} f(r') \beta_l^m(\theta', \varphi') \chi_l^m$  et notons  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$  (voir équation 2.4), nous trouvons

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \left( \sum_{k,j} f(r') \beta_k^j(\theta', \varphi') \chi_k^j \right)}_{\text{Terme de la susceptibilité}} \underbrace{\nabla \left( a \sum_{n,m'} \beta_n^{m'}(\theta', \varphi') \left(\frac{a}{r'}\right)^{l+1} g_n^m(t) \right)}_{\text{Terme du champ principal inducteur}}. \quad (4.4)$$

avec, en particulier, les coefficients  $g_n^m(t)$  qui décrivent le champ magnétique principal et ses variations temporelles. Si enfin nous remplaçons  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  dans l'équation (4.3) par son expression (4.4) nous remarquons qu'il n'y a pas de solution analytique simple.

Nous avons donc abordé le problème numériquement. Pour le premier terme, relatif à la

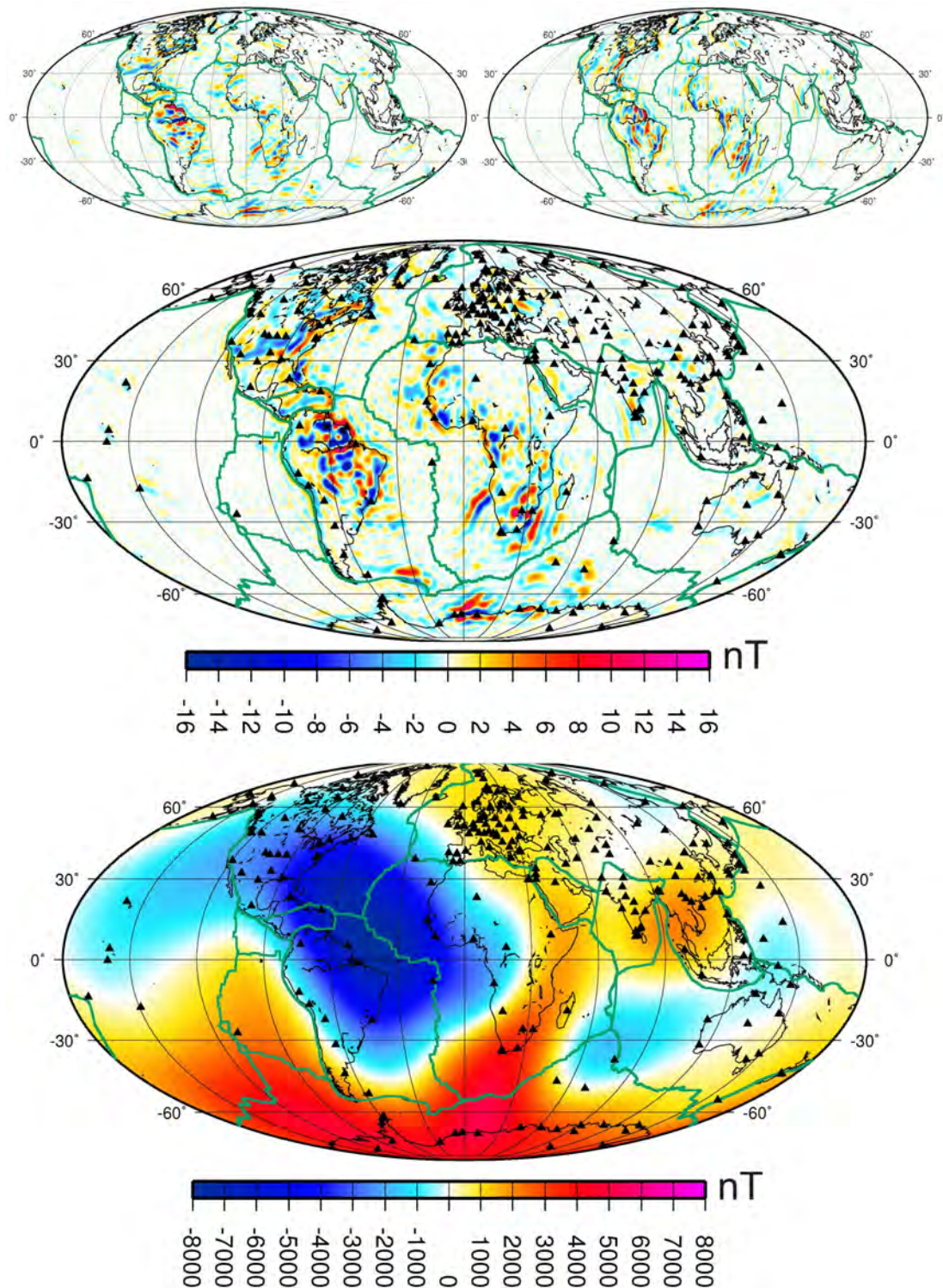


Figure 4.3: Estimation des variations des trois composantes  $B_\theta$  (haut à gauche),  $B_\phi$  (haut à droite), et  $B_r$  (milieu) du champ lithosphérique pendant la période de 1960 à 2002. En bas, différence entre le champ principal en 2002 et en 1960 (composante radiale). D'après Thébault et coll., (2009).

distribution géographique de la susceptibilité, nous avons exploité le travail de Hemant et Maus (2005) qui proposent un modèle global pour la susceptibilité apparente à partir de bases de données sur les contours géologiques, la composition des roches, et l'épaisseur crustale indiquée par la sismique. Par transformation de cette carte en harmoniques sphériques, nous avons obtenu les coefficients  $\chi_k^j$  décrivant ce modèle. Le second terme relatif au champ principal qui requiert la connaissance des coefficients  $g_n^m(t)$  a pu être calculé grâce à l'utilisation des coefficients de Gauss du modèle CM4 (Sabaka et coll., 2004) qui couvre la période de 1960 à 2002. En combinant le modèle de champ magnétique CM4 et le modèle pour la susceptibilité, nous avons ainsi obtenu les coefficients  $g_l^m$  (Eq. 4.3) décrivant le champ lithosphérique pour chaque temps  $t$  et pu ainsi estimer la variation temporelle du champ de la lithosphère sur environ 40 ans. Les variations cumulées sur 40 ans des trois composantes du champ lithosphérique au rayon terrestre moyen sont présentées sur la figure (4.3).

Nous estimons que les variations du champ crustal pour les structures spatiales plus grandes que 400 km peuvent atteindre le nT/an à la surface terrestre dans certaines régions comme l'Afrique du Sud (**Thébault et coll., 2009**). Ces conclusions sont particulièrement pertinentes dans le cadre de ma participation au projet *!Khure*<sup>2</sup> dont l'un des objectifs était précisément de modéliser et d'interpréter toutes les sources de champ magnétique en Afrique du Sud. Ces résultats préliminaires sur l'Afrique du Sud (**Thébault et coll., !Khure meeting, 2009**) n'ont pas fait l'objet de publication mais nous les avons en partie repris dans le cadre de la thèse de F. Vervelidou (Vervelidou, 2013). Je précise que le modèle de susceptibilité de Hemant et Maus (2005) ne permet pas de reproduire avec exactitude les structures de champ lithosphérique observées aux altitudes satellitaires et sous-estime systématiquement leur amplitude d'un facteur 2 à 3 (cette caractéristique est visible en comparant la courbe rouge et la courbe noire sur la figure 4.4). Si nous admettons par linéarité que les valeurs de la susceptibilité apparente sont sous-estimées dans ce modèle, nous pouvons considérer les prédictions de la figure (4.3) comme une borne inférieure. L'amplitude de ces prédictions ne remet donc pas véritablement en cause le principe qui consiste à accumuler des données sur plusieurs années pour mettre en évidence les structures du champ crustal. Cependant, nous remarquons que les variations temporelles du champ lithosphérique qui peuvent atteindre quelques nT/an au sol sont potentiellement mesurables. Cette mesure nous permettrait peut-être de proposer un moyen de séparer statistiquement l'aimantation induite de l'aimantation rémanente.

Ce travail sur les variations temporelles globales du champ crustal a été le point de départ d'une étude qui consistait à estimer dans quelle mesure elles masquaient la variation séculaire de petite échelle produite dans le noyau (**Hulot et coll., 2009**). Nous avons pu calculer que la distribution spectrale de cette contribution ne pouvait pas masquer le signal temporel du noyau aux degrés plus bas que 22 des harmoniques sphériques (le degré 22 correspond à l'intersection de la ligne noire avec les ensembles de prédiction de la variation séculaire lithosphérique sur le Figure 4.4). Même si la résolution des données actuelles ne permet pas de détecter ces échelles spatiales de variation séculaire (la résolution est vraisemblablement limitée au degrés 16-18), nous avons conclu que le degré 22 représente une limite théorique à partir de laquelle

<sup>2</sup>[http://khure.ipgp.fr/index.php/Main\\_Page](http://khure.ipgp.fr/index.php/Main_Page)



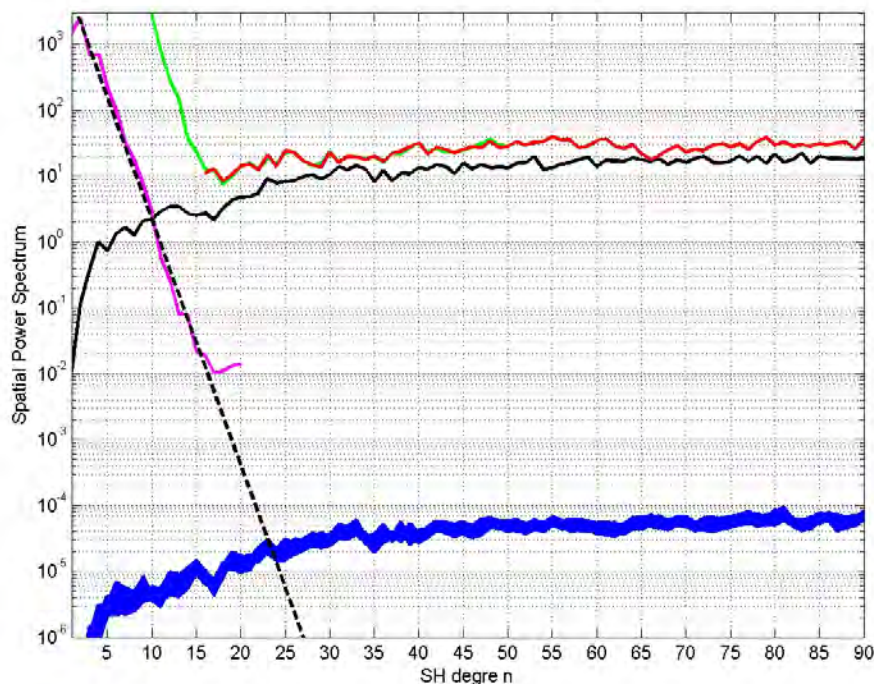


Figure 4.4: Spectres magnétiques d'un modèle de champ principal centré sur 2005 (courbe verte), d'un modèle de champ lithosphérique (courbe rouge), du champ lithosphérique prédit (courbe noire) par la distribution de susceptibilité de Hemant et Maus (2005), de la variation séculaire du champ en 2005 (courbe mauve), des variations séculaires de la lithosphère pour chaque année entre 1960 et 2002 (courbes bleues). La droite pointillée prolonge le spectre de la variation séculaire du champ principal et intersecte celle du champ lithosphérique aux degrés 22-23.

on ne pourra plus espérer détecter la dynamique du noyau et représente donc une contrainte importante pour les simulations géodynamo et, indirectement, sur la prédictibilité des variations temporelles du champ magnétique terrestre.

### 4.2.3 Une forme statistique pour le spectre du champ crustal

Au cours de ces études globales sur les variations spatiales et temporelles du champ crustal j'ai pu observer que la susceptibilité magnétique apparente semblait obéir à une loi d'autosimilarité (ou plus généralement une loi d'échelle). Nous avons poussé cette étude avec F. Vervelidou et avons proposé la forme théorique du spectre magnétique de la lithosphère terrestre qui explique le spectre des données observées sur une très large gamme d'échelles spatiales de 30 à 2600-km (**Thébault et Vervelidou, 2015**). Pour les échelles plus petites, certaines hypothèses devront être raffinées. Notons que ce travail a pu être réalisé grâce au travail de compilation et de modélisation des données dans le cadre du World Digital Magnetic Anomaly Map et notre implication dans la modélisation des données satellitaires qui ont permis le calcul d'un spectre magnétique pour le champ magnétique de la croûte terrestre sur une gamme inégalée d'échelles

spatiales.

Nous avons discuté plus haut que l'expression (4.3) ne prenait pas une forme analytique simple si nous considérons le cas général d'un champ inducteur quelconque. Or, le champ magnétique terrestre est à 90% dipolaire axial, de sorte qu'en première approximation nous pouvons écrire

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \simeq \frac{a}{\mu_0} \nabla \left( \beta_1^0(\theta', \varphi') \left( \frac{a}{r'} \right)^{l+1} g_1^0 \right) \sum_{k,j} f(r') \beta_k^j(\theta', \varphi') \chi_k^j. \quad (4.5)$$

En faisant l'hypothèse que la distribution verticale de l'aimantation est uniforme, nous trouvons une expression compacte des coefficients décrivant le champ magnétique de la lithosphère

$$g_l^m = g_1^0 F_l(\varepsilon) [\alpha_{l+1}^m \chi_{l+1}^m + \delta_{l \square 1}^m \chi_{l \square 1}^m], \quad (4.6)$$

où les coefficients  $\alpha_{l+1}^m$  et  $\delta_{l \square 1}^m$  sont des fonctions du degré  $l$  et de l'ordre  $m$  qu'il n'est pas utile d'expliciter (voir les équations 7 et 8 en Annexe de l'article **Thébault et Vervelidou, 2015**) et où  $\chi_l^m$  sont les coefficients de la susceptibilité exprimés en harmoniques sphériques. Cette équation est similaire à celle proposée par Arkani-Hamed et Strangway (1985, Eq. 14). Le spectre magnétique de la lithosphère est défini en harmoniques sphériques par l'expression (2.6) qui est fonction de la valeur des coefficients de Gauss au carré. Or, à partir de (4.6), et en supposant qu'il n'existe pas de corrélation entre les coefficients de degrés  $l$  différents (pas de corrélation spatiale), nous pouvons écrire l'espérance mathématique  $E\{\cdot\}$  des coefficients de Gauss au carré

$$E\{(g_l^m)^2\} = (g_1^0 F_l(\varepsilon))^2 \sum_{m=\square l}^l \left[ (\alpha_{l+1}^m)^2 E\{(\chi_{l+1}^m)^2\} + (\delta_{l \square 1}^m)^2 E\{(\chi_{l \square 1}^m)^2\} \right], \quad (4.7)$$

qui dépend de l'espérance  $E\{(\chi_{l+1}^m)^2\}$  de la susceptibilité magnétique. Il convient donc de faire des hypothèses statistiques sur les paramètres décrivant la susceptibilité. Nous proposons que les coefficients  $\chi_l^m$  soient indépendants et que leur valeur soit distribuée aléatoirement en suivant la loi normale. Cependant, en supposant que la distribution géographique actuelle de la susceptibilité soit le résultat de processus dynamiques en cours qui tendent à fracturer des unités géologiques initialement uniformes et de grande échelle et à les mélanger, il n'est pas déraisonnable de proposer qu'il existe une certaine dépendance entre les échelles spatiales. Nous proposons donc de plus que la variance de la susceptibilité décroisse en fonction de l'échelle spatiale considérée, ce que nous exprimons par

$$E\{(\chi_l^m)^2\} = \sigma^2 l^\square, \quad (4.8)$$

où  $\sigma^2$  est une constante et  $\square$  la constante caractérisant la loi de puissance. Après quelques opérations algébriques, nous trouvons, en remplaçant les coefficients  $(g_l^m)^2$  donnés par (4.7) dans (2.6), la forme d'un spectre statistique au rayon terrestre moyen  $r = a$

$$E\{R_l\} = (l+1) \frac{\square}{\mu_0} |\overline{\mathbf{M}}| F_l(\varepsilon)^2 l^\square C_l, \quad (4.9)$$

avec

$$F_l(\varepsilon) = a \int_{a-\varepsilon}^a f(r') \left( \frac{r'}{a} \right)^{l+2} dr' = \frac{(1 - (1 - \varepsilon/a)^{l+1})}{l+1}, \quad (4.10)$$

et

$$C_l = \frac{1}{6} \frac{l(l+1)(160l^5 + 264l^4 - 192l^3 - 130l^2 + 96l - 9)}{(2l+3)^2(2l+1)^2(2l-1)^2}. \quad (4.11)$$

Le spectre statistique que nous proposons dépend donc de trois paramètres: l'aimantation moyenne  $\overline{M}$  qui agit comme un simple facteur d'échelle dans la forme du spectre, l'épaisseur  $\varepsilon$  de la coquille sphérique qui contient le matériel aimanté, et la loi de puissance pour la susceptibilité magnétique exprimée en harmoniques sphériques.

Certains indices nous laissent penser que ce spectre statistique est fondé sur des hypothèses réalistes concernant la physique qui régit le signal magnétique crustal de la Terre. En effet, cette forme s'ajuste remarquablement bien au spectre du champ lithosphérique observé (Figure 4.5). L'ajustement du spectre théorique au spectre du modèle de champ lithosphérique NGDC-720 (Maus, 2010<sup>3</sup>) nous donne une estimation pour l'aimantation crustale moyenne d'environ  $0.42 \pm 0.02$  A/m, pour l'épaisseur de la croûte magnétique de  $26.5 \pm 2.0$  km, et pour la loi d'échelle de la susceptibilité magnétique des roches crustales à l'échelle de la Terre de  $\simeq 1.30 \pm 0.04$ . Ces trois quantités physiques estimées à travers l'étude seule du champ magnétique crustal sont en excellent accord avec les valeurs fournies par des modèles indépendants pour la susceptibilité apparente (Hemant et Maus, 2005), pour l'épaisseur crustale sismique (ou profondeur du Moho; Bassin et coll., 2000), et par des mesures en laboratoire publiées de l'aimantation moyenne des roches terrestres. Nous avons comparé l'accord de ce spectre théorique et évalué ses performances par rapport à celles des spectres proposés par Jackson (1990,1994) et Voorhies et coll. (2002). Aucune des autres formes théoriques dont nous avons connaissance ne permet de rendre compte aussi bien que la nôtre du spectre des observations synthétisées mathématiquement par le modèle NGDC-720.

Le spectre théorique global du champ crustal peut être décomposé en deux domaines. Le premier domaine, défini pour les bas degrés des harmoniques sphériques, est dominé par l'épaisseur équivalente de la croûte magnétique qui donne cette forme parabolique au spectre représenté sur la figure (4.5) et dont le maximum est asymptotiquement relié à l'épaisseur moyenne  $\varepsilon$  par l'expression

$$\varepsilon \simeq a \left[ 1 - \exp\left(-\frac{l}{2l_m}\right) \right]. \quad (4.12)$$

A la lecture de la figure (4.5), par exemple, nous repérons le maximum (par le minimum de la valeur absolue de la dérivée du spectre en rouge) à peu près à  $l \simeq 170$  ce qui, en considérant la loi d'échelle  $\simeq 1.30$  donne une profondeur approximative  $\varepsilon \simeq 25$  km. Cette valeur est conforme à  $26.5 \pm 2.0$  km estimée par inversion.

En toute logique, les analyses spectrales de Fourier en deux dimension à partir des données magnétiques devraient montrer un pic équivalent. Pourtant, les spectres de Fourier calculés

<sup>3</sup>Ce modèle est calculé à partir d'une distribution mondiale de données satellites, aéromagnétiques, et marines.

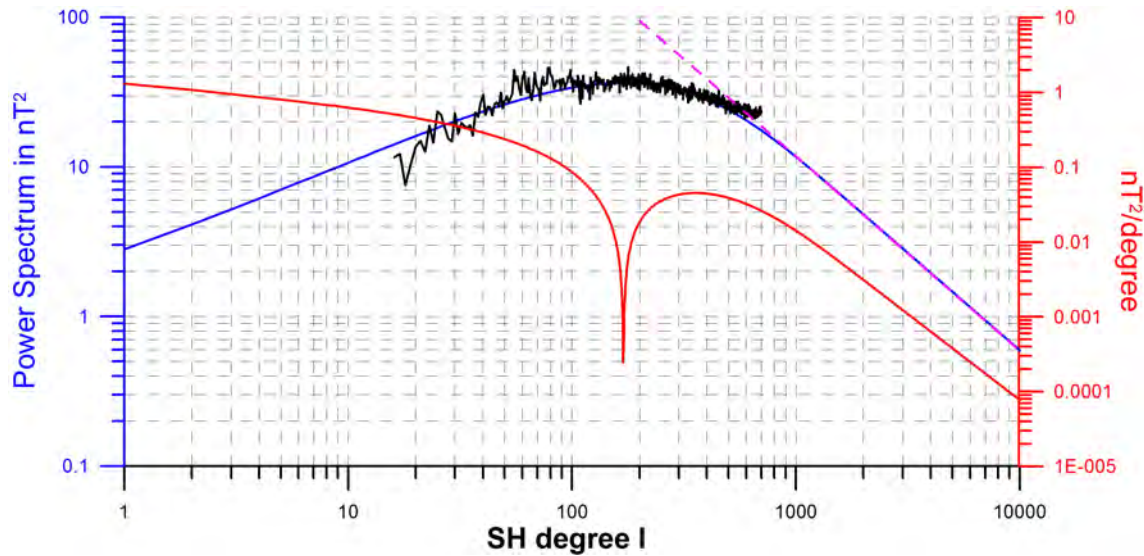


Figure 4.5: Le spectre théorique (courbe bleue) de l'équation (4.9) est ajusté au spectre des observations magnétiques (courbe noire). La valeur absolue de la dérivée du spectre théorique est représentée en rouge. La droite (magenta) montre l'approximation en loi de puissance pour les degrés  $l > 1000$  (voir le texte pour une discussion).

à partir d'ensemble de données couvrant des échelles spatiales régionales variant de quelques centaines de mètres à plusieurs dizaines de kilomètres ne montrent pas de maximum (Maus et al., 1997) et il a souvent été observé que le spectre magnétique crustal suivait une loi de puissance variable en fonction de la zone étudiée (Pilkington et Todoeschuck, 1993)<sup>4</sup>.

L'analyse de la forme théorique (4.9) de la variance degré par degré du champ lithosphérique apporte un éclairage intéressant sur ces deux observations régionales apparemment en contradiction avec nos résultats. Nous pensons que les levés aéromagnétiques n'ont pas les extensions géographiques suffisantes pour voir les échelles spatiales à partir desquelles le maximum devient clairement identifiable. Sur la figure 4.5, nous voyons que le pic s'étale sur plusieurs centaines de degrés  $l$  (entre à peu près  $l = 100$  et  $l = 300$  le spectre possède une énergie similaire) et qu'il ne peut être isolé que grâce à la vue globale du spectre. Pour voir le maximum il faut bien sûr d'abord en avoir identifié la partie croissante qui se distingue uniquement aux grandes longueurs d'onde. Les levés aéromagnétiques devraient donc avoir des extensions latérales de plusieurs centaines voire des milliers de kilomètres (voir aussi Maus et coll., 1997 pour une conclusion similaire fondée sur d'autres arguments). Notons aussi que ce maximum se déplace vers les grandes longueurs d'onde pour des épaisseurs plus importantes (en vertu de l'équation 4.12; voir Figure 4.6). Or, en considérant en première approximation la profondeur du Moho (Bassin et coll., 2000), l'épaisseur de la croûte continentale se situe vraisemblablement entre 20 km et 80 km selon les régions continentales considérées. Une épaisseur crustale  $\varepsilon \simeq 50$  km, par

<sup>4</sup>Prenons garde à ne pas confondre les définitions pour le spectre. En harmoniques sphériques nous avons une variance degré par degré: pour chaque degré  $l$ , la variance est calculée à partir de la somme de  $2l + 1$  coefficients d'ordre  $m$  (Eq. 2.6). Le spectre 2D de Fourier en magnétisme est moyenné azimutalement. En d'autres termes, le spectre d'un bruit blanc calculé par l'équation 2.6 a tendance à croître en fonction de  $l$  alors qu'il est plat en Fourier 2D (Maus, 2008).

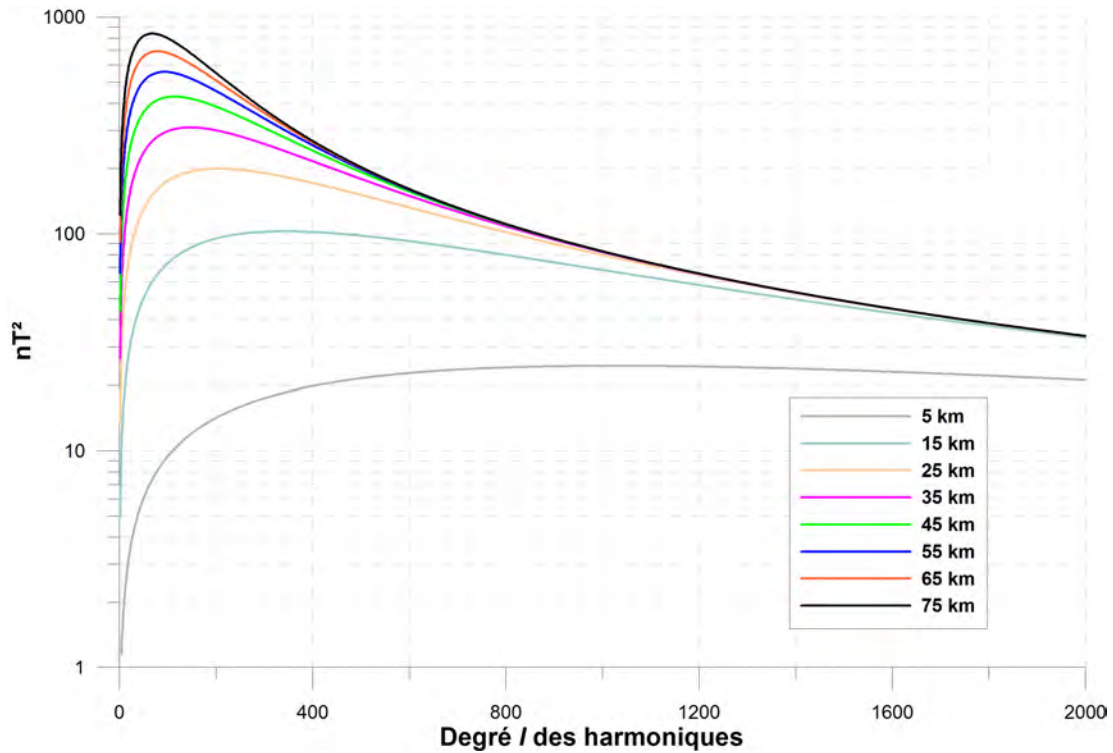


Figure 4.6: Spectres théoriques pour des épaisseurs de croûte  $\varepsilon$  variables calculés avec l'expression (4.9) pour une aimantation de 1A/m et une loi d'échelle de la susceptibilité  $\chi = 1.30$ .

exemple, entraîne un maximum pour le spectre au degré  $l \simeq 83$  (soit une longueur d'onde de 480 km environ) qui correspond à une gamme d'échelles spatiales mal détectées par les levés aéromagnétiques.

Qu'en est-il du domaine océanique connu pour avoir des épaisseurs crustales de quelques kilomètres? Une épaisseur moyenne de 7 km (toujours en considérant le Moho) devrait montrer un spectre maximum en  $l \simeq 600$  (toujours pour  $\chi \simeq 1.30$ ) c'est-à-dire pour une échelle spatiale de 60 km environ (Figure 4.6). Cette échelle spatiale est en principe détectable par les levés magnétiques de grande extension géographique. Dans ce cas précis, la figure 4.6 montre que la difficulté est liée à l'étalement du spectre pour des épaisseurs de croûte fines. Un maximum sera difficile à détecter en pratique si l'on ne connaît le spectre que dans une bande limitée pour laquelle l'ordre de grandeur de l'énergie est similaire. Pour 5 km d'épaisseur par exemple, l'écart maximum entre l'énergie la plus haute et la plus basse n'est que de 5  $nT^2$  entre les harmoniques de  $l = 400$  à  $l = 2000$ . Un tel spectre de Fourier calculé à partir des données réelles serait assez plat et ne se distinguerait pas de manière statistiquement significative de celui d'un bruit blanc.

Intéressons-nous enfin à la décroissance du spectre théorique et tentons d'expliquer sa variabilité régionale. Après avoir atteint un maximum, le spectre décroît jusqu'à montrer asymptotiquement une pente apparemment constante en logarithme sur la figure (4.5). Notre expression montre que le spectre magnétique ne suit théoriquement aucune loi d'échelle mais, en reprenant l'expression (4.9), nous avons pour  $l \gg 1$  les tendances  $F_l(\varepsilon)^2 \propto l^{-2}$  (Eq. 4.10) et  $C_l \propto l^{-1}$  (Eq. 4.11) ce qui nous indique que la loi pour le spectre du champ magnétique suit asymp-

totiquement celle de la variance des coefficients de la susceptibilité magnétique, soit la loi de puissance en  $l^{\square}$ . Cette tendance asymptotique définit un second régime pour lequel nous trouvons effectivement que le champ magnétique peut être approximé par une loi d'échelle à partir du degré  $l \simeq 1000$  des harmoniques sphériques (courbe magenta sur la figure 4.5) ce qui correspond à des échelles spatiales plus petites que 40 kilomètres environ en considérant une épaisseur moyenne de  $\varepsilon \simeq 25$  km. Comme le montre la figure (4.6), le problème est que ce régime est atteint asymptotiquement pour différents degrés  $l$  selon l'épaisseur crustale de la région considérée. Si nous extrapolons ce résultat dans le domaine cartésien de Fourier, nous pensons que la variabilité régionale de l'épaisseur crustale peut introduire des disparités et des incertitudes importantes dans l'estimation des lois de puissance. Il convient néanmoins d'avertir le lecteur que nos considérations sont basées sur une expression théorique du spectre pour laquelle nous avons fait l'approximation d'une distribution de susceptibilité en deux dimensions. Pour de petites échelles spatiales l'effet de la distribution verticale des sources joue peut-être un rôle important que nous n'avons pas pris en compte.

#### 4.2.4 Reconstruction continentale de la Pangée

En marge de la détermination pour la forme statistique du spectre magnétique crustal, nous avons également revisité des questions négligées depuis l'époque du satellite MAGSAT (1979-1980). Pour définir le spectre magnétique en fonction des propriétés statistiques de la susceptibilité, nous avons réécrit les équations reliant le champ magnétique crustal à la susceptibilité magnétique équivalente (Equation 4.6). Nous pouvons donc convertir, en première approximation, un modèle de champ lithosphérique défini par un ensemble de coefficients  $\{g_l^m\}$  en un ensemble de coefficients  $\{\chi_l^m\}$  décrivant un modèle spatial de susceptibilités apparentes équivalentes. Cette opération, qui s'apparente à une "réduction au pôle", permet de mieux visualiser les contours géographiques des sources magnétiques qui produisent le champ de la lithosphère.

Grâce à la bonne résolution spatiale des modèles récents de champ magnétique de la croûte, comme par exemple le modèle MF7, ces cartes de susceptibilité magnétique montrent les contours de nombreuses structures géologiques qui corrélerent remarquablement bien avec des chaînes de montagnes, des cratons, des bassins, etc. Avec J. Besse (Phys. IPGP) et B. Robert (Étudiant M2), nous avons reconstruit la paléogéographie du supercontinent Gondwana. Avec toutes les réserves qu'il convient d'adopter pour le moment, nous pensons avoir mis en évidence des structures continues entre les continents tels que Napier en Antarctique et Dharwar en Inde (Figure 4.7). Un travail plus exhaustif devrait être entrepris pour tester la reconstruction de supercontinents plus anciens (comme Rodinia).

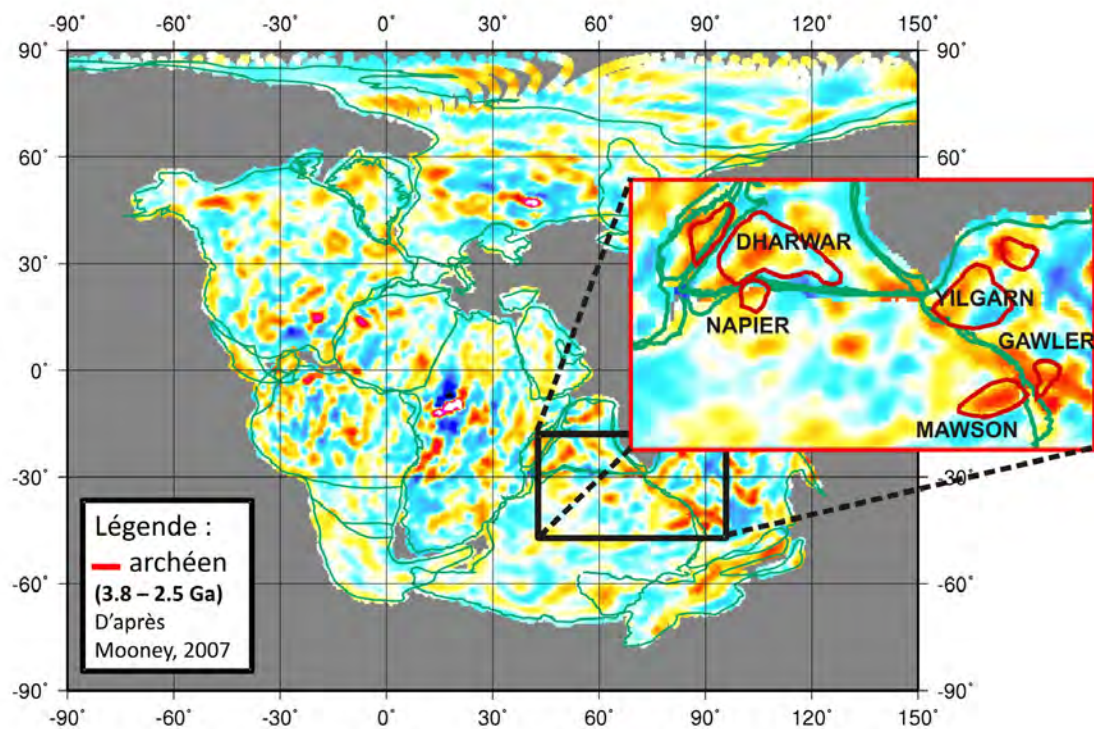


Figure 4.7: Après réduction au pôle *via* la formule (4.6), la reconstruction de Gondwana semble montrer des structures communes à différents continents comme celles reliant, peut-être, Napier et Dharwar (D'après le rapport de stage de B. Robert, étudiant de M2, 2011-2012). Les contours rouges délimitent les cratons archéens tels qu'ils sont définis dans Mooney (2007).

---

## La modélisation régionale du champ magnétique

---

Les travaux précédents ont été réalisés à l'échelle globale de la Terre. À une échelle régionale, des outils mathématiques spécifiques doivent être développés. Ce travail est au cœur de mon activité de recherche et le sujet de ma thèse de troisième cycle. L'approche régionale présente un intérêt géophysique particulier car les données aéromagnétiques sont plus sensibles au signal de proche surface mais détectent mal les structures magnétiques d'échelle continentale (en raison principalement des dimensions spatiales limitées de la zone de prospection). Au contraire, les données satellites détectent mieux les structures spatiales comprises entre 400 km et 2600 km. Ces deux ensembles de données complémentaires doivent être fusionnés pour nous permettre l'accès au spectre complet du champ magnétique qui nous renseignera par la suite sur la composition moyenne de la croûte magnétique terrestre pour une région donnée. En général, les harmoniques sphériques nécessitent plusieurs millions de paramètres pour représenter uniformément sur la sphère un signal jusqu'à dix kilomètres de résolution spatiale. La représentation en harmoniques sphériques nécessite d'autre part une distribution homogène de données de proche surface à l'échelle de la Terre, ce dont nous ne disposons pas. Le modèle global actuel de plus haute résolution, le NGDC-720 (Maus, 2010) déjà discuté dans les pages précédentes, n'excède pas 55 km de résolution spatiale et requiert 519 840 paramètres. Il est basé sur une grille mondiale dont les points de données manquantes sont le résultat d'interpolations numériques. La modélisation régionale a vocation à contourner ces problèmes en concentrant la représentation dans les régions où le champ magnétique est bien échantillonné par les données. Typiquement, les modèles régionaux d'une résolution spatiale avoisinant la dizaine de kilomètres sont obtenus avec un nombre de paramètres de l'ordre de quelques milliers.

### 5.1 Principes généraux de la modélisation régionale

---

La modélisation régionale se donne comme objectif de représenter le champ magnétique dans une région précise bien couverte en données. Nous nous attachons à ne discuter que des approches



basées sur la représentation du champ magnétique en termes de fonctions mathématiques continues. En effet, une solution telle que (4.3) exprimée à partir d'une distribution aimantée équivalente reste possible mais ce problème physique n'est pas discuté dans ces pages.

Soit  $V(\mathbf{r}')$  un potentiel magnétique généré par des sources situées en  $\mathbf{r}'$ . Formellement, l'expression du problème inverse en harmoniques sphériques qui consiste à estimer les coefficients de Gauss en harmoniques sphériques à partir de la connaissance de  $V(\mathbf{r}')$  sur une surface sphérique fermée s'écrit

$$g_l^m = \frac{1}{a \|\beta_l^m\|_{\partial\Omega}^2} \oint_{\partial\Omega'} V(\mathbf{r}') \left(\frac{r'}{a}\right)^{l+1} \beta_l^m(\theta', \varphi') d\partial', \quad (5.1)$$

avec  $\partial' : \{r', 0 \leq \theta' \leq \pi, 0 \leq \varphi' \leq 2\pi\}$  et  $d\partial' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$ . Or, en reprenant l'expression du potentiel magnétique  $V(\mathbf{r})$  observé en dehors des sources à la position  $\mathbf{r}$  pour la partie interne uniquement (Eq. 2.1) nous trouvons, en considérant de plus des fonctions  $\beta_l^m$  normalisées telles

$$\|\beta_l^m\|_{\partial\Omega}^2 = \oint_{\partial\Omega'} \beta_l^m \overline{\beta_l^m} d\partial = 1,$$

$$V(\mathbf{r}) = \oint_{\partial\Omega'} V(\mathbf{r}') \sum_{l,m} \left(\frac{r'}{r}\right)^{l+1} \overline{\beta_l^m(\theta, \varphi)} \beta_l^m(\theta', \varphi') d\partial', \quad (5.2)$$

avec  $\overline{\beta_l^m}(\theta, \varphi)$  la fonction complexe conjuguée de  $\beta_l^m(\theta, \varphi)$ . D'autre part, en faisant usage du théorème d'addition des polynômes de Legendre, nous déduisons la relation (Backus et coll., 1996, page 62)

$$\sum_{m=-l}^l \overline{\beta_l^m(\theta', \varphi')} \beta_l^m(\theta, \varphi) = (2l+1) P_l(\cos \alpha),$$

avec  $\alpha = \angle(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ , ce qui nous permet d'écrire

$$V(\mathbf{r}) = \oint_{\partial\Omega'} V(\mathbf{r}') \sum_l \left(\frac{r'}{r}\right)^{l+1} (2l+1) P_l(\cos \alpha) d\partial', \quad (5.3)$$

ou encore de façon algébrique

$$V(\mathbf{r}) = \oint_{\partial\Omega'} V(\mathbf{r}') K(\cos \alpha) d\partial'. \quad (5.4)$$

La fonction  $K(\cos \alpha)$  est la fonction noyau (*kernel*). Nous venons de montrer que tout potentiel  $V(\mathbf{r}')$  peut être transformé via une fonction noyau  $K(\cos \alpha)$  pour être exprimé en  $V(\mathbf{r})$  en dehors de  $\partial'$ . Ce résultat analytique est le fondement de toute modélisation du champ magnétique qui, à partir d'ensembles de données couvrant des surfaces géographiques, cherche à prédire et exprimer le champ en dehors des régions connues. Lorsque le champ est connu sur une surface sphérique fermée, nous voyons que les harmoniques sphériques forment un système de représentation mathématique adéquat.

La formulation pour la modélisation régionale est formellement similaire à ceci près que  $\partial'$  ne représente plus nécessairement la sphère mais une portion de volume ou de surface

sphérique. La fonction noyau des harmoniques sphériques reste naturellement une solution possible du problème mais elle perd de son attractivité puisque certaines de ses propriétés comme l'orthogonalité ne sont plus respectées sur une portion de sphère. Puisqu'il existe également une relation approximative entre le degré  $l$  des harmoniques sphériques et la dimension spatiale caractéristique (voir équation 2.7), certaines échelles spatiales dont la dimension dépend de la région considérée sont mal contraintes par les données et le problème inverse est numériquement coûteux et instable.

Certains auteurs proposent donc d'optimiser le problème et préconisent de modifier le noyau pour concentrer l'énergie des fonctions sphériques dans la région contenant l'information. Cette approche peut être schématisée par la construction d'un noyau dont les polynômes de Legendre sont pondérés

$$K(\cos \alpha) = \sum_l (2l + 1) w_l \left( \frac{r'}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos \alpha), \quad (5.5)$$

avec  $w_l$  est un facteur dépendant de  $l$ . La détermination des coefficients  $w_l$  peut se faire numériquement grâce à la résolution d'un problème de concentration spectrale qui se résume souvent à un problème d'optimisation. Il existe donc autant de représentations que de façons de poser le problème numérique. Par exemple, Lesur (2006) propose de chercher la solution dans une bande d'harmoniques sphériques en minimisant leurs énergies en dehors de la région considérée. Cela conduit à la construction de fonctions convenables pour l'approximation du signal magnétique mais qui ne sont pas orthogonales. Cette représentation discrète et redondante constitue une *frame* d'ondelettes dont la covariance entraîne des difficultés d'analyse dans le domaine spectral. Simons et coll. (2006) proposent également de maximiser l'énergie de la solution dans la zone d'étude mais imposent une contrainte supplémentaire d'orthogonalité sur les fonctions de base qui, ainsi définies, sont appelées fonctions *Slepian*. Cette dernière condition offre des propriétés avantageuses pour l'analyse du champ dans le domaine spectral pour des régions dont les contours géographiques peuvent être arbitraires et complexes. L'immense avantage apporté par cette flexibilité est amoindri par des complications liées à la représentation des trois composantes du champ magnétique et leurs variations en altitude (**Schott et Thébault, 2011**). Enfin, dans le cadre de la modélisation en ondelettes de Poisson, Holschneider et coll. (2003) définissent  $w_l = f \square e^{\square al} (al)^n$  où  $n$  est l'ordre de l'ondelette et  $a$  est un facteur de dilatation dont la valeur détermine la façon dont l'énergie doit être concentrée et donc les caractéristiques spectrales de la solution. L'avantage d'une telle expression est qu'elle reste en principe interprétable en termes de multipôles magnétiques (Holschneider et coll., 2003). La représentation d'un champ de potentiel à partir d'ondelettes sphériques et des fonctions *Slepian* est mathématiquement bien fondée. Nous avons réalisé un travail de revue et de comparaison des méthodes potentielles existantes pour la modélisation du champ magnétique (**Schott et Thébault, 2011**). Ces techniques proposées dans le cadre du géomagnétisme ont émergé ou ont connu des développements significatifs au cours de ma carrière et sont amenées à connaître des applications et d'autres développements essentiels à la compréhension et à l'analyse du champ magnétique terrestre. Cependant, à l'heure où nous avons réalisé ce travail de revue il nous est apparu que la plupart des approches développées à partir de fonctions globales ne sont pas

adaptées au problème que nous voulons résoudre en géomagnétisme et aux objectifs que nous nous sommes fixés. Nous cherchons une méthode de modélisation capable de prendre en compte différents types de données magnétiques, vectorielles ou scalaires, et de tenir compte du fait qu'elles peuvent être mesurées à des altitudes variées. Ses propriétés mathématiques doivent être suffisamment avantageuses pour qu'elles puissent être appliquées à des ensembles discrets de données et que des outils d'analyses, tel que le spectre, puisse être calculés.

## 5.2 Les harmoniques sur calottes sphériques

De tels objectifs peuvent être remplis en exprimant la solution sur des bases régionales. Il s'agit dans ce cas de trouver une nouvelle expression pour  $K(\cos \alpha)$  dans l'expression (5.4) qui ne soit pas nécessairement explicitement dépendante des polynômes de Legendre. Nous avons proposé et appliqué, avec J.J. Schott (Univ. Strasbourg 1), une méthode baptisée *Revised Spherical Cap Harmonic Analysis* (R-SCHA; **Thébault et coll., 2004, GJI** ; **Thébault et coll., 2006, JGR**) qui permet de traiter conjointement et régionalement les données terrestres, marines, aéromagnétiques, et satellitaires sans faire l'hypothèse d'une Terre plate (ce qui est souvent le cas avec les approches régionales) et dont le formalisme ne repose pas sur des fonctions globales telles que les harmoniques sphériques, les ondelettes, ou les fonctions *Slepian*. Cette méthode potentielle régionale, inspirée des travaux sur les calottes sphériques de Haines (1985), a été testée de manière approfondie sur des cas synthétiques (**Thébault and Gaya-Piqué, 2008, G3**) et a fait l'objet de simulations spécifiques dans le cadre de la préparation de la mission satellitaire *Swarm* (**Thébault, IGP Tech. Report, 2008**). Nous avons également vérifié que notre stratégie de modélisation était pertinente grâce à notre travail de revue sur les méthodes potentielles existantes (**Schott et Thébault, 2011**) qui inclut notamment des comparaisons numériques réalisées pour chaque méthode avec des ensembles de données synthétiques rigoureusement identiques.

### 5.2.1 Généralités sur la méthode

La méthode R-SCHA est fondée sur la résolution d'un problème de conditions aux limites. En dehors des sources, le potentiel magnétique est la solution de l'équation de Laplace. Si l'on note

le domaine d'étude (par exemple le domaine de la Figure 5.1), un problème de conditions aux limites sur les  $n$  surfaces distinctes de la surface fermée  $\partial$  telle que  $\partial = \partial_1 \cup \partial_2 \dots \cup \partial_i \dots \cup \partial_n$  est défini complètement si pour chacune de ses frontières  $\partial_i$  nous avons un problème à résoudre du type

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}_c) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.6a)$$

$$\alpha_i V(\mathbf{r}_c) + \beta_i \frac{\partial V(\mathbf{r}_c)}{\partial n_i} = G_i \text{ sur } \partial_i, \quad (5.6b)$$

avec  $n_i$  le vecteur normal à la frontière  $\partial_i$ ,  $\alpha_i, \beta_i$  deux fonctions réelles quelconques, et  $\mathbf{r}_c = (r_c \mathbf{u}_r, \theta_c \mathbf{u}_\theta, \varphi_c \mathbf{u}_\varphi)$  le vecteur position dans les coordonnées de la calotte sphérique (Figure

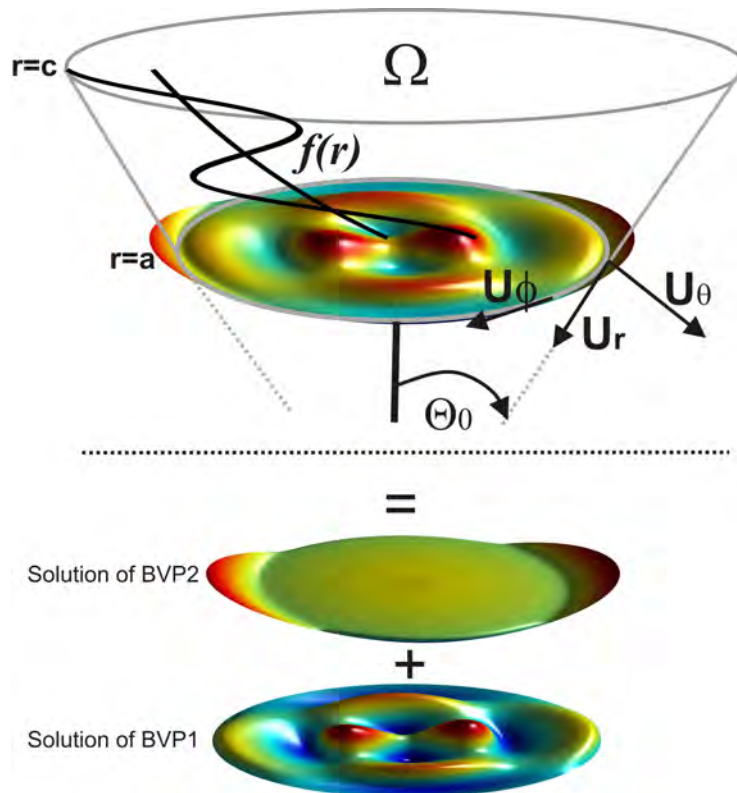


Figure 5.1: Représentation schématique de la méthode Revised Spherical Cap Harmonic Analysis. Le domaine considéré est un cône sphérique dont les surfaces inférieure et supérieure, aux rayons  $r = a$  et  $r = c$ , sont des calottes sphériques de demi-ouverture d'angle  $\theta_0$ . La surface colorée représente un exemple de la superposition en  $r = a$  d'une solution impliquant les fonctions de Legendre (*Solution of BVP1*) et d'une solution impliquant les fonctions de Mehler (*Solution of BVP2*) qui décomposent l'espace dans le domaine (voir le texte pour les détails).

5.1).

Pour résoudre ce problème général plus spécifiquement dans une calotte (ou dans un cône sphérique) par la méthode de la séparation des variables, il est nécessaire que les fonctions  $\alpha_i, \beta_i$  soient constantes sur chacune des trois surfaces  $\partial_i$  de la surface fermée  $\partial$  définie en  $r = a$  (notée  $\partial_a$ ), en  $r = c$  ( $\partial_c$ ), et latéralement en  $\theta = \theta_0$  ( $\partial_{\theta_0}$ ). L'angle  $\theta_0$  représente la demi-ouverture du cône.

Cette décomposition en deux sous-problèmes distincts ne doit pas se faire de manière totalement arbitraire. En effet, le problème de conditions aux limites complet ainsi que chacun des sous-problèmes doit respecter la condition de flux nul du champ magnétique  $\mathbf{B}$  à travers la surface fermée du domaine. Par exemple, en décomposant explicitement le problème initial en deux sous-problèmes de conditions aux limites et en posant  $\alpha_i = 0$  et  $\beta_i = 1$ , c'est-à-dire en posant des conditions de type Neumann sur toutes les surfaces des sous-problèmes, nous trouvons que la solution globale  $V(\mathbf{r}_c)$  est par superposition la somme des solutions indépendantes  $V_1(\mathbf{r}_c)$  et  $V_2(\mathbf{r}_c)$  des problèmes nommés BVP1 et BVP2 définis par

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 V_1(\mathbf{r}_c) &= 0 \text{ dans } \Omega_a, & \nabla^2 V_2(\mathbf{r}_c) &= 0 \text{ dans } \Omega_c, \\
 \frac{\partial V_1(\mathbf{r}_c)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} &= 0 \text{ sur } \partial_{\theta_0}, & \frac{\partial V_2(\mathbf{r}_c)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} &= G_{\theta_0} \text{ sur } \partial_{\theta_0}, \\
 \frac{\partial V_1(\mathbf{r}_c)}{\partial r} \Big|_{a,c} &= G_{a,c} \text{ sur } \partial_a \text{ et } \partial_c, & \frac{\partial V_2(\mathbf{r}_c)}{\partial r} \Big|_{a,c} &= 0 \text{ sur } \partial_a \text{ et } \partial_c, \\
 \int_{\partial\Omega_a} G_a d\partial_a &\square \int_{\partial\Omega_c} G_c d\partial_c = 0, & \int_{\partial\Omega_{\theta_0}} G_{\theta_0} d\partial_{\theta_0} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Algébriquement, nous montrons (Thébault et coll., 2004; Thébault et coll., 2006a) que les solutions  $V_1(\mathbf{r}_c)$  et de  $V_2(\mathbf{r}_c)$  s'écrivent en termes de séries infinies

$$V_1(r, \theta, \varphi) = a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{g}_k^m R_k(r) \bar{L}_k^m(\theta, \varphi), \tag{5.8}$$

$$V_2(r, \theta, \varphi) = a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{g}_p^m R_p(r) \bar{M}_p^m(\theta, \varphi), \tag{5.9}$$

avec  $(\bar{g}_k^m, \bar{g}_p^m)$  les paramètres de la solution complète sous forme complexe,  $R_k(r)$  et  $R_p(r)$  les fonctions radiales de  $V_1$  et de  $V_2$ , et  $\bar{L}_k^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P_{n_k}^m(\cos \theta)$  où  $P_{n_k}^m$  sont les fonctions de Legendre associées de degré réel  $n_k(m)$  et d'ordre  $m$  entier, et  $\bar{M}_p^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} K_{\square 1/2+if(p)}^m(\cos \theta)$  où  $K_{\square 1/2+if(p)}^m$  sont les fonctions coniques de Mehler sur lesquelles nous reviendrons<sup>1</sup>. Notons qu'en pratique les degrés réels  $n_k(m)$  sont estimés numériquement en résolvant, pour cet exemple, l'équation  $\frac{\partial V_1(\mathbf{r}_c)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} = 0$ . Dans toutes ces expressions,  $i$  représente l'unité imaginaire  $i^2 = \square 1$  et  $p, m, k$  sont entiers, également indices des termes des séries.

De toute évidence, si la solution du problème complet (Eq. 5.6) implique une condition très générale pour flux  $\int_{\partial\Omega_a} G_a d\partial_a \square \int_{\partial\Omega_b} G_b d\partial_b + \int_{\partial\Omega_a} G_{\theta_0} d\partial_{\theta_0} = 0$ , la séparation en deux sous-problèmes conduit à des conditions plus restrictives. Si nous écrivons que la fonction  $G_{\theta_0}$  est la composante magnétique selon  $\mathbf{u}_{\theta}$  exprimée en harmoniques sphériques (voir l'expression du gradient de  $V(\mathbf{r}_c)$  Eq. 2.1), nous avons ainsi montré que la condition  $\int_{\partial\Omega_a} G_{\theta_0} d\partial_{\theta_0} = 0$  revenait finalement à imposer que tous les termes zonaux<sup>2</sup> ( $m = 0$ ) devaient avoir des contributions nulles dans le cône sphérique (Thébault et coll., 2004, Eq. 34). Il est donc nécessaire par soucis de généralité d'ajouter une correction de flux dans la solution finale au problème (Thébault et coll., 2004, Eq. 35). En considérant des sources magnétiques situées en  $r < a$ , la condition de flux  $\int_{\partial\Omega_a} G_a d\partial_a \square \int_{\partial\Omega_c} G_c d\partial_c = 0$ , revient quant à elle à supposer que la composante radiale du champ magnétique est de moyenne nulle dans chacune des calottes définies à des rayons sphériques constants  $a \leq r \leq c$ .

Ce résultat signifie que la solution  $V(\mathbf{r}_c)$  construite à partir de  $V_1(\mathbf{r}_c)$  et de  $V_2(\mathbf{r}_c)$  ne permet pas de représenter un potentiel magnétique arbitraire, et donc un champ magnétique par appli-

<sup>1</sup>L'expression générale des fonctions coniques de Mehler que l'on trouve dans la littérature est  $K_{\square 1/2+i\tau}^m$ . Ici nous avons  $\tau = f(p) = p\pi/\log(c/a)$  (voir Figure 5.1 pour les définitions de  $c$  et de  $a$ ).

<sup>2</sup>Les termes zonaux sont exprimés dans le référentiel du cône et non dans le référentiel géocentrique.

cation de l'opérateur gradient. L'une des implications directes de ce travail est de montrer que la solution de  $V_1(\mathbf{r}_c)$  dans ce cas, qui est aussi l'une de celles proposées par Haines (1985) dans sa méthode des calottes sphériques, contient implicitement une hypothèse de moyenne nulle sur la composante radiale du champ magnétique dans la calotte sphérique. Cette hypothèse peut être acceptable uniquement si le champ magnétique qui doit être modélisé est principalement d'origine crustal. Quelles que soient les conditions aux limites choisies, les solutions analytiques de  $V_1(\mathbf{r}_c)$  et de  $V_2(\mathbf{r}_c)$  s'expriment en termes des séries infinies (5.8) et (5.9). La leçon générale à retenir est donc que la décomposition en sous-problèmes, si utiles pour la résolution analytique du problème global, entraîne implicitement des restrictions qu'il convient d'examiner au cas par cas.

D'autres considérations sont importantes. Par exemple, il est utile de sélectionner un problème de condition aux limites dont les bases de fonctions ont une vitesse de convergence rapide car en pratique, les séries infinies (5.8 et 5.9) sont tronquées à des valeurs maximales pour les indices  $m$ ,  $p$  et  $k$  qui sont déterminés par le modélisateur souvent en fonction de la disponibilité des données magnétiques et de leur couverture spatiale dans le volume. Les solutions qui découlent de la décomposition du problème (Eq. 5.7) que nous avons choisie pour cette discussion, par exemple, ont des propriétés de convergence avantageuses. Cette constatation empirique fait suite à des tests approfondis sur des données synthétiques simulant le comportement des différentes contributions du champ magnétique terrestre. Dans chaque cas, nous observons que des bases de fonctions définies par des conditions de Neumann convergent plus rapidement que celles définies par des conditions de Dirichlet pour tous les sous-problèmes de conditions aux limites (Les conditions aux limites de Dirichlet sont obtenues en posant  $\alpha_i = 1$  et  $\beta_i = 0$  dans l'équation 5.6). Or, la couverture spatiale des données géomagnétiques se résume souvent à une couverture homogène sur trois surfaces de rayons  $r$  (quasi-)constants aux rayons terrestre/marin, aéronautique, et satellitaire. Une solution numérique convergeant plus rapidement dans la direction de  $r$  permettra de représenter les données avec une meilleure précision et moins de paramètres qu'une solution dont la convergence est plus lente. En suivant le même argument, nous pouvons accepter une convergence des solutions plus lente pour les variations du modèle en  $\theta$  et  $\varphi$  car la densité des données nous autorise des développements en séries plus poussés (notons que cette justification doit être révisée au cas par cas dans le contexte général de l'exploration des planètes du système solaire car les sondes souvent d'orbites elliptiques couvrent de larges intervalles d'altitudes et la densité peut être meilleure en altitude que sur une surface). Nous avons donc proposé que la décomposition du problème de conditions aux limites initial qui offrait le meilleur compromis pour la modélisation du champ magnétique terrestre (**Thébault et coll., 2006a**) était la suivante

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 V_1(\mathbf{r}_c) &= 0 \text{ dans } \Omega, & \nabla^2 V_2(\mathbf{r}_c) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\
 V_1(\mathbf{r}_c)|_{\theta_0} &= 0 \text{ sur } \partial_{\theta_0}, & V_2(\mathbf{r}_c)|_{\theta_0} &= G_{\theta_0} \text{ sur } \partial_{\theta_0}, \\
 \frac{\partial V_1(\mathbf{r}_c)}{\partial r} \Big|_{a,c} &= G_{a,c} \text{ sur } \partial_a \text{ et } \partial_c, & \frac{\partial V_2(\mathbf{r}_c)}{\partial r} \Big|_{a,c} &= 0 \text{ sur } \partial_a \text{ et } \partial_c, \\
 \int_{\partial\Omega_a} G_a d\partial_a \square \int_{\partial\Omega_c} G_c d\partial_c + \int_{\theta_0} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} d\partial_{\theta_0} &= 0. & \int_{\partial\Omega_{\theta_0}} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} d\partial_{\theta_0} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Cette décomposition avec des conditions aux limites mixtes de type Dirichlet pour  $V_1$  et Neumann pour  $V_2$  conduit à des conditions de flux bien moins restrictives qui permettent de représenter n'importe quel champ magnétique. De plus, la condition de Neumann sur la fonction radiale nous donne bien une solution qui converge rapidement dans cette dimension. Le choix de cette décomposition ne change rien aux solutions formelles des potentiels qui s'expriment toujours comme (5.8) et (5.9) où seules les valeurs numériques des degrés réels  $n_k(m)$  sont modifiées puisqu'elles sont maintenant estimées numériquement par la résolution de l'équation  $V_1(\mathbf{r}_c)|_{\theta_0} = 0$ .

### 5.2.2 Définition analytique d'un spectre régional

Nous savons que cette modélisation permet de représenter le champ magnétique en général dans le domaine spatial. Nous cherchons maintenant à déterminer si les bases de fonctions ont des propriétés intéressantes pour l'analyse du signal magnétique dans le domaine spectral. Nous pouvons démontrer que le choix de problème mixte (Eq. 5.10) conduit à la propriété intéressante (**Thébault et coll., 2006a**)

$$\langle \nabla V_1, \nabla V_2 \rangle_{\Omega} = 0, \tag{5.11}$$

où  $\Omega$  est le volume du cône sphérique et  $\langle f, g \rangle = \iiint f g d\Omega$ . Par conséquent, le gradient du potentiel  $V(\mathbf{r}_c)$  dans le volume  $\Omega$  a la propriété suivante

$$\langle \nabla V, \nabla V \rangle_{\Omega} = \langle \nabla V_1, \nabla V_1 \rangle_{\Omega} + \langle \nabla V_2, \nabla V_2 \rangle_{\Omega}.$$

Puisque les solutions du gradient pour  $V_1$  et  $V_2$  s'expriment toutes deux en termes de séries infinies d'ordre  $m$  entier (Eqs 5.8 et 5.9), nous voyons émerger ici la possibilité de décomposer le signal magnétique total dans le cône en fonction de l'ordre  $m$ . Ce choix de décomposition ouvre donc des perspectives pour l'analyse spectrale volumique azimutale du champ magnétique (que nous n'avons pas explorées). Nous savons qu'un tel type de spectre n'est pas invariant par rotation et que, s'il devait être comparé à un spectre des harmoniques sphériques azimutales, les coefficients des harmoniques sphériques devraient être exprimés dans un repère identique à celui du cône sphérique.

Idéalement, nous voudrions avoir les mêmes propriétés d'orthogonalité non plus dans un volume mais sur toutes les calottes sphériques  $\partial$  de rayon arbitraire  $a \leq r \leq c$  pour pouvoir mener des analyses spectrales de surface. Nous trouvons pour une calotte sphérique de rayon

constant que le produit scalaire devient (Thébault, 2003, Eqs. 11.16 et 11.17)

$$\langle \nabla V, \nabla V \rangle_{\partial\Omega} = \langle \nabla V_1, \nabla V_1 \rangle_{\partial\Omega} + \langle \nabla V_2, \nabla V_2 \rangle_{\partial\Omega} + 2 \langle \nabla V_1, \nabla V_2 \rangle_{\partial\Omega}.$$

La présence des termes croisés entre  $V_1$  et  $V_2$  nous indique que nous perdons les propriétés d'orthogonalité du gradient de  $V$  lorsque nous considérons le champ sur une seule calotte sphérique. Une façon un peu abrupte de contourner ce problème est de définir un spectre partiel en négligeant les termes croisés. Une manière de supprimer les termes croisés est de se mettre dans le cas particulier où l'un ou l'autre des champs magnétiques construits à partir des potentiels  $V_1$  et de  $V_2$  est de contribution négligeable. Par construction du problème (5.10), négliger  $V_1$  (bases de Legendre) revient à supposer que le champ magnétique est nul en  $r = a$  et  $r = c$ , ce qui est évidemment exclu. En revanche négliger  $V_2$  (bases de Mehler), revient à poser la condition que le potentiel magnétique total  $V$  soit nul sur les bords (remarquons que les éléments de  $V_2$  dont l'un est schématisé sur la figure 5.1 sont bien essentiellement concentrés près de la frontière latérale et qu'ils ont des contributions négligeables au centre d'une calotte sphérique); cette dernière option reste envisageable. Précisons que nous ne proposons pas de supprimer la base des fonctions de Mehler pour la modélisation du champ magnétique à partir des données réelles. Ceci qui aurait des conséquences importantes pour la représentation des données notamment près de la frontière latérale. Nous suggérons simplement de ne pas la prendre en compte dans la définition et le calcul d'un spectre de surface si il est avéré que ses contributions sont comparativement faibles. Le sens physique du spectre partiel construit à partir  $V_1$  uniquement dépendra bien sûr de la validité de cette approximation. Dans cette hypothèse, nous avons simplement

$$\langle \nabla V, \nabla V \rangle_{\partial\Omega} \simeq \langle \nabla V_1, \nabla V_1 \rangle_{\partial\Omega}. \quad (5.12)$$

On peut montrer plus explicitement que ce produit scalaire s'écrit

$$\langle \nabla V, \nabla V \rangle_{\partial\Omega} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\square k}^k (n_k(m) + 1) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n_k(m)+4} (2n_k + 1) \left(g_{n_k(m)}^m\right)^2 P_{n_k(m)}^m{}^2, \quad (5.13)$$

$$\text{avec } P_{n_k(m)}^m{}^2 = \int_0^{\theta_0} \left(P_{n_k(m)}^m\right)^2 \sin \theta d\theta.$$

Cette expression ne permet pas encore la définition d'un spectre car nous ne pouvons pas séparer les deux séries en raison de la dépendance  $n_k(m)$ . Nous pouvons poursuivre en remarquant que Robin (1958, section 86) propose un développement de Taylor des fonctions de Legendre pour  $n_k \rightarrow \infty$  que nous exprimons au premier ordre par

$$P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \propto \frac{\cos\left((n_k(m) + \frac{1}{2})\theta\right) \square \frac{\pi m}{4} + \frac{\pi m}{2}}{\sqrt{\sin \theta}},$$

ce qui, par application de la condition à la limite  $V_1(\mathbf{r}_c)|_{\theta_0} = 0$  entraîne



$$n_k(m) \simeq \left(k \square m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2\theta_0} \square \frac{1}{2}, \text{ pour des valeurs de } k \text{ impaires.} \quad (5.14)$$

Nous voyons donc que seules les valeurs de  $k$  telles que  $k \gg m$  permettent de définir des valeurs de  $n_k$  indépendantes de  $m$  en première approximation et que, strictement parlant, il sera toujours impossible de séparer le degré  $n_k$  de l'ordre  $m$ . Nous réalisons cependant qu'il existe des couples  $(k, m)$  pour lesquels les valeurs de  $n_k$  sont asymptotiquement identiques (par exemple  $n_7(5) = n_{11}(9)$ ). Or, nous avons vu que nous pouvions définir une longueur d'onde caractéristique  $\lambda_{n_k}$  à partir de la valeur de  $n_k$  par la relation (2.7).

Dans un travail prospectif, Vervelidou (2013) propose de rassembler les contributions des coefficients  $\left(g_{n_k(m)}^m\right)^2$  dont le couple  $(k, m)$  correspond à des valeurs asymptotiques de  $n_k$  identiques afin d'exprimer les contributions de chaque longueur d'onde caractéristique  $\lambda_{n_k}$ . Cette répartition de l'énergie dans des boîtes centrées sur des valeurs  $n_k$  représente bien une densité de puissance magnétique assimilable à un spectre magnétique.

Supposons que nous tronquions la série infinie selon  $k$  dans l'expression (5.13) à l'indice maximum  $k_{\max}$  (impair d'après 5.14). Nous trouvons alors une valeur asymptotique maximum  $n_{k_{\max}}(0) \simeq k_{\max} \square \frac{1}{2} \frac{\pi}{2\theta_0} \square \frac{1}{2}$  et une valeur minimum  $n_1(0) \simeq \frac{3\pi}{4\theta_0} \square \frac{1}{2}$ . D'autre part la différence minimale entre deux valeurs consécutives de  $n_k$  est constante et définie par

$$n_{k+2}(m+1) \square n_k(m) = \frac{\pi}{2\theta_0}. \quad (5.15)$$

Par conséquent, le spectre magnétique contient  $k_{\max}$  boîtes centrées sur des valeurs de  $n_k$  espacées de  $\frac{\pi}{2\theta_0}$  entre les valeurs  $n_1 = \frac{3\pi}{4\theta_0} \square \frac{1}{2}$  et  $n_{k_{\max}} = k_{\max} \square \frac{1}{2} \frac{\pi}{2\theta_0} \square \frac{1}{2}$  ce qui montre que dans l'approximation (5.12) la norme du gradient du potentiel magnétique, moyennée par la surface de la calotte sphérique considérée, peut se décomposer en

$$E_{\partial\Omega}^{SCHA} = \sum_{b=1}^{k_{\max}} R_b, \quad b \in \mathbb{N}^*, \quad (5.16)$$

avec  $b$  l'indice de la boîte.

L'objectif de cette discussion est de souligner une certaine similitude entre les concepts définis en harmoniques sphériques pour le spectre (voir l'expression 2.5) ou la longueur d'onde (Eq. 2.7) et ceux que nous développons dans le cas de l'approximation asymptotique des fonctions de Legendre de degrés réels  $n_k$ . En particulier si nous nous plaçons dans l'approximation (5.12) et que nous considérons que le champ magnétique global étudié est de moyenne similaire sur la sphère et dans sur calotte sphérique, nous sommes fondés à écrire  $E_{\partial\Omega}^{SCHA} \simeq E_{\partial\Omega}^{SH}$ . Cette moyenne se distribue sur  $l$  degrés entiers pour les harmoniques sphériques et  $b$  boîtes centrées en  $n_k$  réels pour les harmoniques régionales. Pour comparer directement les contributions respectives de chaque degré  $l$  avec chaque degré  $n_k$ , il convient donc d'appliquer le facteur (5.15)  $\frac{\pi}{2\theta_0} R_l$  (avec  $R_l$  défini à l'équation 2.5) pour remettre ces deux spectres à la même échelle.

Avec F. Vervelidou, nous développons cette approche pour la transformer en outil spectral et statistique. La comparaison par une simple mise à l'échelle (Eq. 5.15) entre les formes locales et globales du spectre spatial nous permet l'utilisation de n'importe quelle forme théorique de

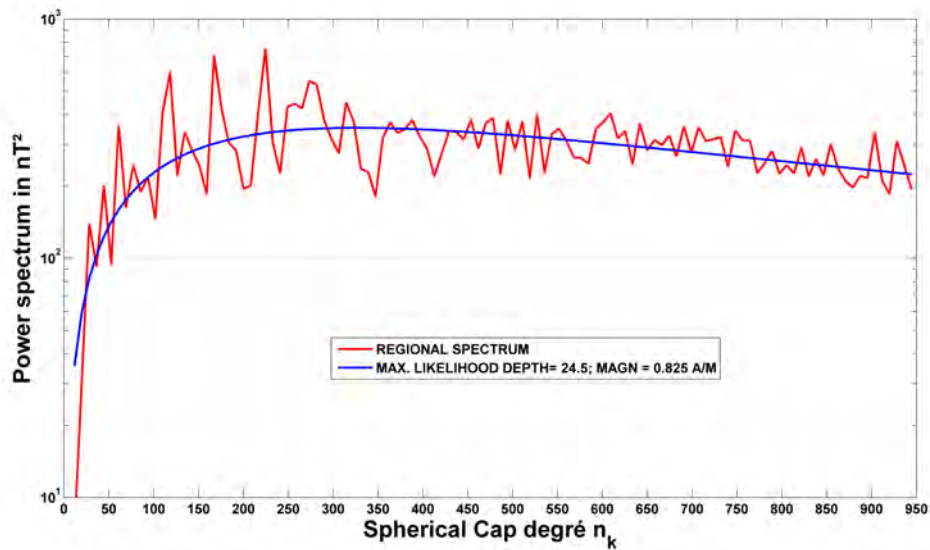


Figure 5.2: Spectre magnétique partiel des anomalies magnétiques dans la partie sud du continent Africain (en rouge). En bleu la forme théorique globale (Eq. 4.2.3) remise à l'échelle qui représente au mieux le spectre magnétique observé. Cette comparaison nous donne une estimation de 24.5 km pour l'épaisseur de la croûte magnétique et de 0.8 A/m pour l'aimantation dans cette région (D'après Vervelidou, PhD, 2013).

spectres magnétiques développés en harmoniques sphériques directement dans la base locale, à condition de nous placer dans l'approximation 5.12 (et de faire une hypothèse implicite de stationnarité pour la forme spectrale globale). Sans entrer dans les détails, nous avons des arguments qui tendent à prouver que l'approximation (5.12) est valable à condition que la moyenne du champ magnétique soit nulle dans la calotte sphérique étudiée; ce qui est en première approximation le cas du champ crustal sur toute sa gamme connue pour une calotte sphérique d'angle  $\theta_0 \geq 12^\circ$ . Par exemple, en supposant que la forme théorique globale du spectre crustal que nous proposons (voir section 4.2.3) restait valable aux échelles locales, nous avons pu calculer le spectre partiel des observations magnétiques et pu le comparer à la formule globale (Figure 5.2) pour estimer l'épaisseur et l'aimantation moyenne de la croûte magnétique en Afrique du Sud (Vervelidou et Thébault, AGU 2012).

### 5.2.3 Relations avec les harmoniques sphériques

Les fonctions régionales sont reliées analytiquement aux harmoniques sphériques. D'après les expressions en séries des potentiels (Eqs. 5.8 et 5.9) les coefficients régionaux s'expriment sur la base des fonctions locales en projetant les valeurs du potentiel magnétique dans le cône sphérique.

De manière analytique on trouve

$$\bar{g}_k^m = \frac{\langle V, R_k(r) \bar{L}_k^m(\theta, \varphi) \rangle_\Omega}{a R_k(r) \bar{L}_k^m(\theta, \varphi) \int_\Omega r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr}, \quad (5.17a)$$

$$\bar{g}_p^m = \frac{\langle V, R_p(r) \bar{M}_p^m(\theta, \varphi) \rangle_\Omega}{a R_p(r) \bar{M}_p^m(\theta, \varphi) \int_\Omega r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr}, \quad (5.17b)$$

avec  $\langle f, g \rangle_\Omega = \iiint f g r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$  et  $\|f\|_\Omega^2 = \iiint f^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$ .

Le potentiel magnétique  $V$  peut être représenté sur des bases de fonction diverses. Nous proposons donc avec les fonctions de base R-SCHA une façon de représenter le champ magnétique aux échelles régionales équivalente et reliée analytiquement à n'importe quelle autre représentation complète du potentiel magnétique. Les relations linéaires explicites entre les coefficients  $(\bar{g}_k^m, \bar{g}_p^m)$  et ceux des harmoniques sphériques  $(\bar{g}_l^m)$  sont données dans **Thébault et coll., (2006a, Eqs. 28-31)**.

#### 5.2.4 Les limites de la modélisation régionale

La modélisation régionale telle que nous l'avons définie connaît certaines limites. Nous cherchions une méthode qui permette de modéliser des données acquises à des altitudes variées, de types différents (scalaire ou vectoriel), et permettant de définir des spectres magnétiques à partir de fonctions régionales. La méthode R-SCHA remplit bien ces objectifs. Cependant, un des facteurs limitant de la méthode est d'avoir en pratique des conditions aux bords non réalistes par rapport au champ magnétique réel. Le champ magnétique réel est continu à travers les frontières du domaine (Figure 5.1) et cette continuité n'est pas respectée lorsque les deux séries infinies (Eqs. 5.8 et 5.9) sont tronquées ce qui a pour effet d'introduire des oscillations artificielles près des frontières du domaine. Par conséquent, puisque le degré de troncature des séries dépend de la disponibilité des données dans le volume, la méthode R-SCHA n'est pas adaptée à l'analyse de données disponibles sur une calotte sphérique d'altitude constante (comme c'est le cas par exemple de données mesurées à la surface terrestre uniquement). Pour ce problème plus spécifique, j'ai proposé la méthode R-SCHA2D (**Thébault, 2008**).

Une autre difficulté provient de la nature des fonctions de bases. Les fonctions de Legendre et de Mehler font partie de la même famille de fonctions qualifiées de « spéciales ». Les fonctions associées de Legendre pour des degrés  $n$  entiers font l'objet de recherches abondantes en calcul numérique (par exemple Schaeffer, 2013) mais les fonctions pour des degrés  $n_k$  réels que nous rencontrons en pratique avec les fonctions de base R-SCHA ne bénéficient pas d'un intérêt aussi vif de la part de la communauté scientifique. Les fonctions de Mehler  $K_{\square 1/2+if(p)}^m$  (voir section 5.2.1) de ce point de vue font figure de cas extrême puisqu'il n'existait pas à notre connaissance d'algorithme permettant de les calculer pour des ordres supérieurs à  $m = 1$ . Gil et coll. (2012) ont récemment proposé un algorithme admettant des valeurs pour  $\theta$ ,  $f(p)$  et  $m$  plus générales. La figure (5.3) montre les différences relatives en valeurs absolues entre notre algorithme et l'algorithme de Gil et coll. (2012) pour des valeurs de  $\theta$ ,  $f(p)$  et  $m$  typiques des besoins de la

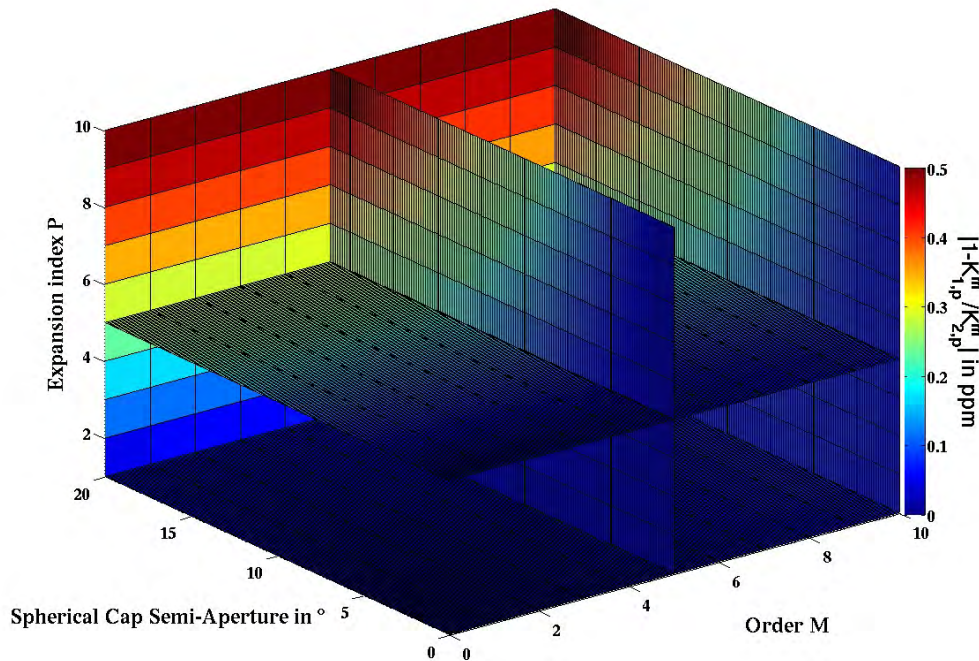


Figure 5.3: Comparaisons relatives en parties par millions (1 ppm représente une erreur relative de  $10^{-6}$ ) entre les fonctions de Mehler  $K_{2,p}^m$  calculées à partir de l'algorithme développé par Amparo et coll. (2013) et celles  $K_{1,p}^m$  calculées avec notre algorithme pour des valeurs de  $\theta$  comprises entre  $0^\circ$  et  $20^\circ$ , des valeurs de  $m$  de 0 à 10 et de  $p$  de 1 à 10.

modélisation régionale. Nous constatons que ces deux algorithmes diffèrent de moins de  $10^{-6}$  en valeur relative, ce qui valide *a posteriori* l'algorithme que nous avons développé.

### 5.3 Applications régionales pour le champ crustal

La méthode R-SCHA est bien adaptée à l'étude du champ lithosphérique dont les structures spatiales sont typiquement régionales. Nous avons appliqué cette technique une première fois pour la représentation du champ lithosphérique en France (**Thébaud et coll., 2006b**). Ce modèle, proposant une résolution spatiale maximum de 40 km, a été construit à partir des données vectorielles mesurées aux stations de répétition française (Nous avons, bien sûr, préalablement corrigé ces données du champ principal et du champ externe), d'une grille aéromagnétique à 5 km d'altitude constituée de valeur pour l'anomalie d'intensité, et de données vectorielles et scalaires sélectionnées et corrigées du satellite CHAMP entre 400 et 550 km d'altitude. Ce modèle régional est à notre connaissance le premier calculé à partir de différents ensembles de données de types (scalaire ou vectoriel) et d'altitudes différents. Il permet de fusionner des ensembles de données qui contraignent le champ lithosphérique dans des bandes spectrales différentes. La variation du modèle en altitude donne en particulier une bonne idée de la façon dont les anomalies décroissent et fusionnent avec l'altitude (Figure 5.4). L'exploitation jointe

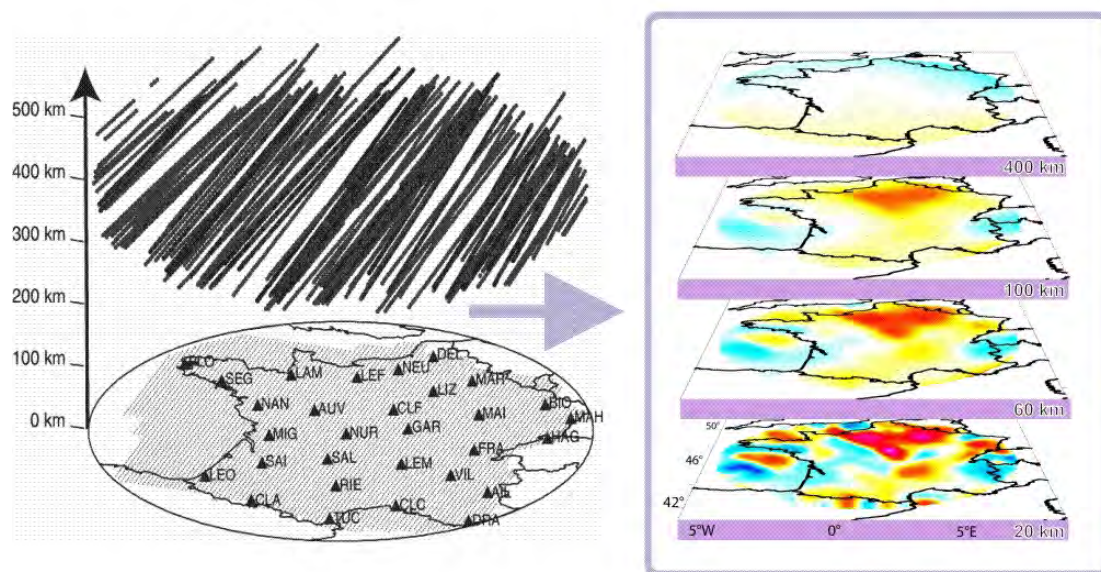


Figure 5.4: Exemple de modélisation régionale en France à partir de données (à gauche) aéromagnétiques (points), de stations de répétitions (triangles) et de données satellitaires (traits). À droite, un exemple de continuation vers le haut du modèle obtenu à une résolution spatiale de 40 km (Thébault et coll., 2006).

de données scalaires et vectorielles permet dans une certaine mesure d'obtenir un modèle lithosphérique vectoriel plus riche que les modèles scalaires obtenus par les méthodes cartésiennes plus classiques basées sur les transformées de Fourier. Dans une autre application de la méthode, nous avons calculé un modèle de champ lithosphérique en Allemagne afin d'estimer la valeur des biais crustaux dans les modèles de champ principaux (Korte et Thébault, 2007). Enfin, notons que des modèles pour la Chine (Ou et coll., 2013) et le Sud du continent Africain (Vervelidou, PhD, 2013) ont été obtenus par la méthode des R-SCHA. Jusqu'à présent seules des interprétations qualitatives comparant les structures magnétiques à la géologie de proche surface ont été proposées dans ces publications. L'objectif de mon travail est de développer des outils plus quantitatifs pour aider à la caractérisation des sources magnétiques en profondeur.

## 5.4 Applications régionales pour le champ principal

### 5.4.1 ...actuel

J'ai également utilisé la modélisation régionale sur des calottes sphériques pour construire un modèle continu en espace et en temps des variations du champ magnétique principal en France couvrant la période de 1960 à 2007 (Thébault, 2008, GJI). Les données utilisées sont celles du réseau de répétition du territoire métropolitain français et de la Corse et les variations en temps sont basées sur des *splines* cubiques. Grâce à ma participation au réseau européen MagNetE et au projet pour la cartographie mondiale des anomalies magnétiques (WDMAM) j'ai pu réaliser

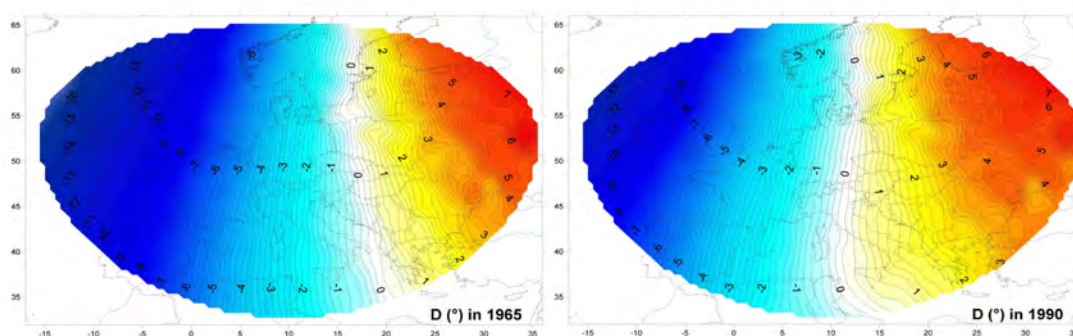
Co-estimation of core and crustal field over Europe ( $\lambda_{\min}=150\text{km}$ )

Figure 5.5: Exemples de modèles (non publiés) pour la déclinaison régionale du champ magnétique sur l'Europe en 1965 et 1990 construits à partir du réseau des stations de répétitions européen et des données aéromagnétiques.

le même travail en superposant le champ crustal aux composantes du champ principal. La figure (5.5) montre deux images de la déclinaison de ce modèle non publié, l'une pour 1960 et l'autre pour 1990. Nous y observons clairement la dérive vers l'Ouest de la déclinaison magnétique qui, coïncidence du calendrier, est proche de zéro en cette fin d'année 2013 sur le méridien de l'observatoire magnétique de Chambon-La-Forêt (A. Chulliat, communication personnelle).

J'ai reçu plusieurs requêtes concernant l'utilisation du logiciel de modélisation régionale, principalement pour la production de modèles de champ magnétique de référence à l'échelle d'un pays. J'ai donc posté sur ma page internet professionnelle<sup>3</sup> un ensemble de routines avec un tutoriel de 11 pages et une simulation pour l'Australie<sup>4</sup>.

#### 5.4.2 ...et ancien

L'archéomagnétisme se donne comme objectif la reconstruction du champ magnétique principal sur les temps historiques à partir de la mesure en laboratoire de l'aimantation rémanente contenue dans des fragments archéologiques. Notre modélisation régionale est bien adaptée à la modélisation des données archéomagnétiques dont la densité est comparativement importante en Europe (voir Figure 5.6). Nous devons cette densité à la richesse du patrimoine historique européen mais surtout au travail d'acquisition important au cours des dernières décennies de la part de la communauté des archéomagnéticiens en Europe. Avec Y. Gallet (IPGP), nous avons initié une modélisation magnétique régionale de type Bayésien afin d'estimer non pas les incertitudes mais les probabilités complètes des modèles obtenus. L'intérêt de la modélisation bayésienne dans ce cadre est triple. D'une part, la construction de la densité de probabilité complète est importante pour mieux évaluer la pertinence et la robustesse des comparaisons entre les variations du champ magnétique ancien et d'autres quantités physiques comme les *proxies* du climat, par exemple (Gallet et coll., 2005). D'autre part, les données archéomagnétiques ne sont pas vectorielles mais peuvent être des angles comme la déclinaison (D) et l'inclinaison (I) ou des

<sup>3</sup><http://www.ipgp.fr/~ethebault/Download.html>

<sup>4</sup>[http://www.ipgp.fr/~ethebault/downloads/Functions/R\\_SCHA.zip](http://www.ipgp.fr/~ethebault/downloads/Functions/R_SCHA.zip)

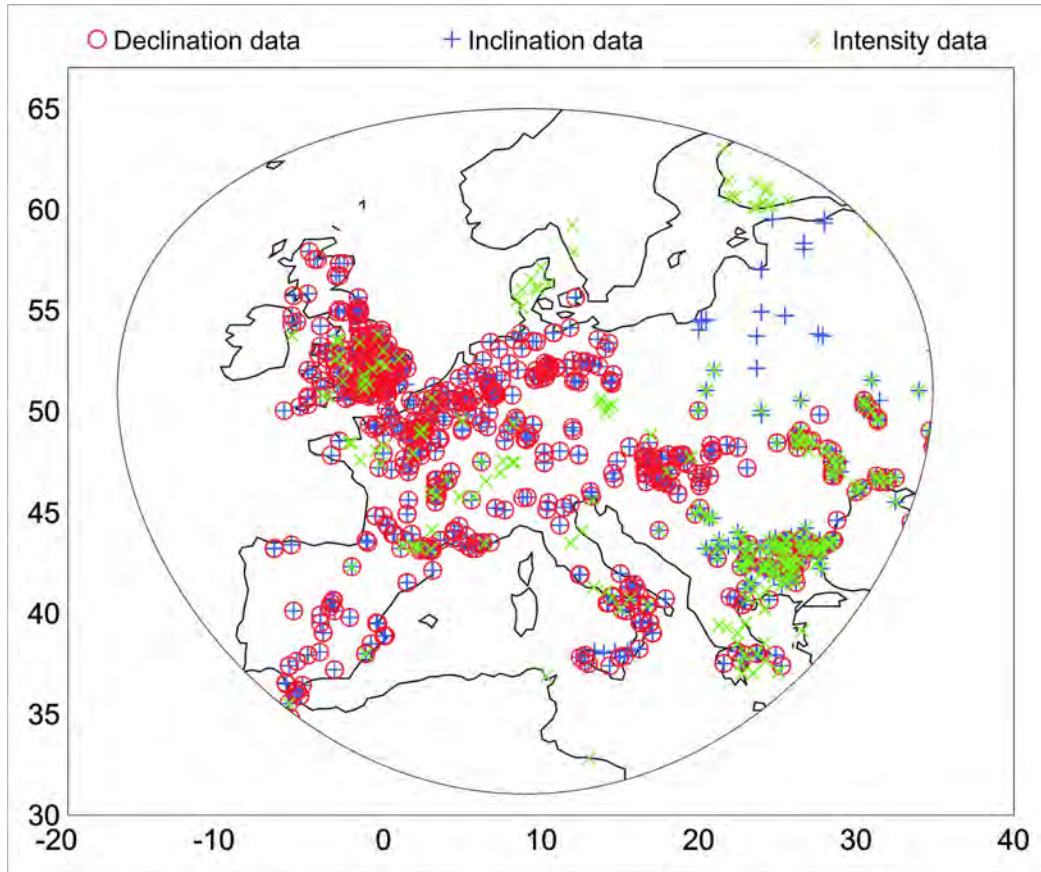


Figure 5.6: Distribution des données archéomagnétiques de déclinaison, d'inclinaison, et d'intensité. La base de données utilisée pour cette représentation date de 2009.

Tesla comme l'intensité ( $F$ ). Ce type de données n'est pas linéaire par rapport aux ensembles de coefficients décrivant les modèles archéomagnétiques globaux (en harmoniques sphériques) ou régionaux (les coefficients  $\bar{g}_k^m, \bar{g}_p^m$  en R-SCHA décrits en section 5.2, par exemple). Cette difficulté est résolue classiquement par une linéarisation autour d'une solution initiale (par exemple **Licht et coll., 2013**). L'approche Bayésienne présente l'avantage de ne pas nécessiter de connaissance au premier ordre sur la valeur des paramètres décrivant le champ magnétique. Enfin, ce formalisme permet de considérer n'importe quelle loi de probabilité des erreurs sur les données et de ne pas se restreindre à la résolution d'un problème inverse au sens des moindres carrés ordinaires. Ce dernier point est important en archéomagnétisme car la nature des données est telle que les erreurs ne suivent vraisemblablement pas la loi Gaussienne.

En reprenant la loi de Bayes, nous pouvons résumer le problème inverse à la recherche de la probabilité marginale

$$P(x_i|\mathbf{y}) = \frac{\sum_{x_j \neq i} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) P(\mathbf{x})}{\sum_{\mu \in \Psi} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) P(\mathbf{x})} \quad (5.18)$$

où  $x_i$  est un paramètre du modèle R-SCHA (par exemple  $\bar{g}_k^m$  dans l'équation 5.8) et  $\mathbf{y}$

l'ensemble des données regroupant D,I et F,  $P(x_i|\mathbf{y})$  la probabilité marginale du paramètre  $x_i$  étant donné l'ensemble des données  $\mathbf{y}$ ,  $P(\mathbf{x})$  la loi de probabilité des paramètres  $\mathbf{x}$ , et  $P(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  la probabilité conditionnelle des données sachant le modèle complet  $\mathbf{x}$ . En pratique, il convient de définir les probabilités *a priori*  $P(\mathbf{x})$  et  $P(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ . Pour la probabilité sur les paramètres nous pouvons sélectionner la loi uniforme pour laquelle chaque valeur du paramètre  $x$  est équiprobable. Nous explorons ainsi tout l'espace des paramètres sans restriction sur leur valeur (en pratique, nous nous limitons, bien sûr à la recherche dans un intervalle). Pour  $P(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  nous pouvons choisir également n'importe quelle loi, par exemple une loi Gaussienne

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto e^{-\chi^2/2} \quad (5.19)$$

avec la fonctionnelle que le modèle régional doit minimiser

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{N_d} \left( \frac{d_j - f_j(\mathbf{x})}{\sigma_j} \right)^2 \quad (5.20)$$

où  $N_d$  est le nombre de données,  $f_j(\mathbf{x})$  la valeur prédite par le modèle pour  $d_j$  et  $\sigma_j$  l'erreur a priori sur la mesure  $d_j$ . Nous pouvons encore choisir une loi de type double Laplace, par exemple

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto e^{-\chi} \quad (5.21)$$

avec cette fois la fonctionnelle à minimiser

$$\chi = \sum_{j=1}^{N_d} \left| \frac{d_j - f_j(\mathbf{x})}{\sigma_j} \right|. \quad (5.22)$$

Cette fonctionnelle présente l'intérêt de produire une solution moins influencée par les données archéomagnétiques erronées. Le calcul du dénominateur de l'équation 5.18 qui requiert l'exploration complète de l'espace  $\Psi$  des valeurs des paramètres  $\mathbf{x}$  est en général extrêmement coûteux en temps de calcul. Nous avons donc opté pour la résolution par chaîne de Markov qui réduit l'espace de recherche autour de la solution la plus probable de manière itérative. Par exemple, si la valeur de  $x_i$  tirée au hasard à l'itération  $n$  conduit à une valeur faible de  $\chi^2$  (ou  $\chi$  selon la loi 5.20 ou 5.22 choisie), alors la chaîne de Markov effectuera de préférence un tirage aléatoire au voisinage de cette valeur à l'itération  $n + 1$  (et inversement).

Nous avons appliqué cette approche pour la modélisation du champ archéomagnétique en Europe pour la période comprise entre 50 av. J.C. et 1850 ap. J.C sur la base des calottes sphériques 2D (Thébault, 2008). La calotte sphérique centrée sur la longitude  $14^\circ$  et la latitude  $44.5^\circ$  avec une ouverture  $\theta_0$  de  $20^\circ$ . Cette calotte sphérique contient 1311 valeurs de déclinaison, 1735 d'inclinaison, et 592 d'intensité sur la période considérée.

À chaque tirage aléatoire des valeurs des paramètres  $\mathbf{x}$  nous avons enregistré les résidus entre les données et la prédiction du modèle normalisés par l'erreur *a priori* sur les données  $\left( \frac{d_j - f_j(\mathbf{x})}{\sigma_j} \right)$ . La figure (5.7) montre la distribution des résidus dans des fenêtres de 25 ans pour chaque type de donnée D, I, et F. Les résidus entre le modèle et les données de direction D et I, normalisés par l'erreur *a priori* sur les données, se concentrent assez clairement autour de zéro et ont un



écart-type assez proche de 1. Ceci tend à prouver que les valeurs de  $d_j$  sont cohérentes entre-elles pour ce type de données et que l'estimation de leurs erreurs  $\sigma_j$  est réaliste. En revanche, les résidus normalisés pour l'intensité  $F$  s'écartent assez systématiquement de cette tendance. Si nous sélectionnons la période 675 ap. J.C, par exemple, nous observons que l'histogramme des résidus est multimodal et qu'il existe des données qui ne sont jamais représentables par le modèle régional, non pas parce que le modèle n'arrive pas à les représenter mais parce qu'elles sont incohérentes par rapport à l'ensemble complet des données. Ces incohérences sont assez bien connues mais mal comprises. Elles proviennent vraisemblablement d'un ensemble de facteurs dont les erreurs de datation archéologique et la diversité des protocoles expérimentaux utilisés pour estimer l'intensité de l'aimantation rémanente ne sont pas les moindres.

En effet, les données archéomagnétiques sont des données indirectes à partir desquelles le champ magnétique terrestre est estimé par l'aimantation rémanente contenue dans des résidus de fabrications humaines (faïence, poteries, carrelages, etc.). Ces objets archéologiques peuvent avoir voyagé (En France, il n'est pas rare de voir des objets d'époque romaine fabriquée dans une région éloignée de l'empire) et les datations sont souvent réalisées par des méthodes relatives susceptibles d'être raffinées à mesure que la connaissance des sites archéologiques se précisent. Il convient donc de rester attentif à l'évolution des éléments historiques sur lesquels sont fondées ces datations si l'on veut incorporer des erreurs de valeurs et de datation précises dans les modèles de champ. A. Genevey et Y. Gallet, spécialistes de l'archéomagnétisme, avec qui je collabore pour la construction de ces modèles sont particulièrement vigilants sur ces questions.

Nous avons donc pu montrer que la résolution du problème inverse en choisissant la fonctionnelle 5.22 était bien plus stable que les moindres carrés ordinaires qui sont habituellement utilisés en modélisation pour la facilité de leur implémentation numérique. Ce travail a été présenté lors de congrès internationaux (**Thébault et coll., AGU, 2008**; **Pavon-Carrasco et coll., AGU, 2008**; **Thébault et coll., IAGA, 2009**) ou nationaux (**Thébault et Gallet, colloque d'archéomagnétisme, 2010**). Suite à la publication de nombreuses nouvelles données archéomagnétiques entre 2010 et 2011 nous avons fait le choix de patienter pour finaliser et publier ce travail. Mon implication dans la modélisation archéologique est à l'origine de ma participation à des campagnes de fouilles archéologiques (Saran, France ; Utique, Tunisie).

Ces études aux échelles régionales et globales tendent à montrer qu'il n'est peut-être pas encore possible d'exploiter les données archéomagnétiques pour la modélisation du champ principal à haute résolution spatiale (ce qui rejoint la philosophie générale que nous avons poursuivie pour la construction à bas degré du modèle archéomagnétique globale de **Licht et coll., 2013**). Sur une région de la taille de l'Europe occidentale (Figure 5.6) le protocole usuel qui consiste à réduire toutes les données en un point géographique en supposant que le champ magnétique principal est dipolaire axial semble pour l'heure suffisant. Ceci présente l'intérêt de considérablement simplifier le problème en éliminant les difficultés liées à la représentation des variations spatiales du champ magnétique pour finalement se concentrer sur l'étude de ses variations temporelles en un endroit géographique.

Nous avons proposé une méthode statistique permettant d'obtenir en un point géographique une courbe d'intensité continue en temps (**Thébault et Gallet, 2010**). L'algorithme que nous avons proposé repose sur l'hypothèse du dipôle axial centré et utilise des outils statistiques dédiés

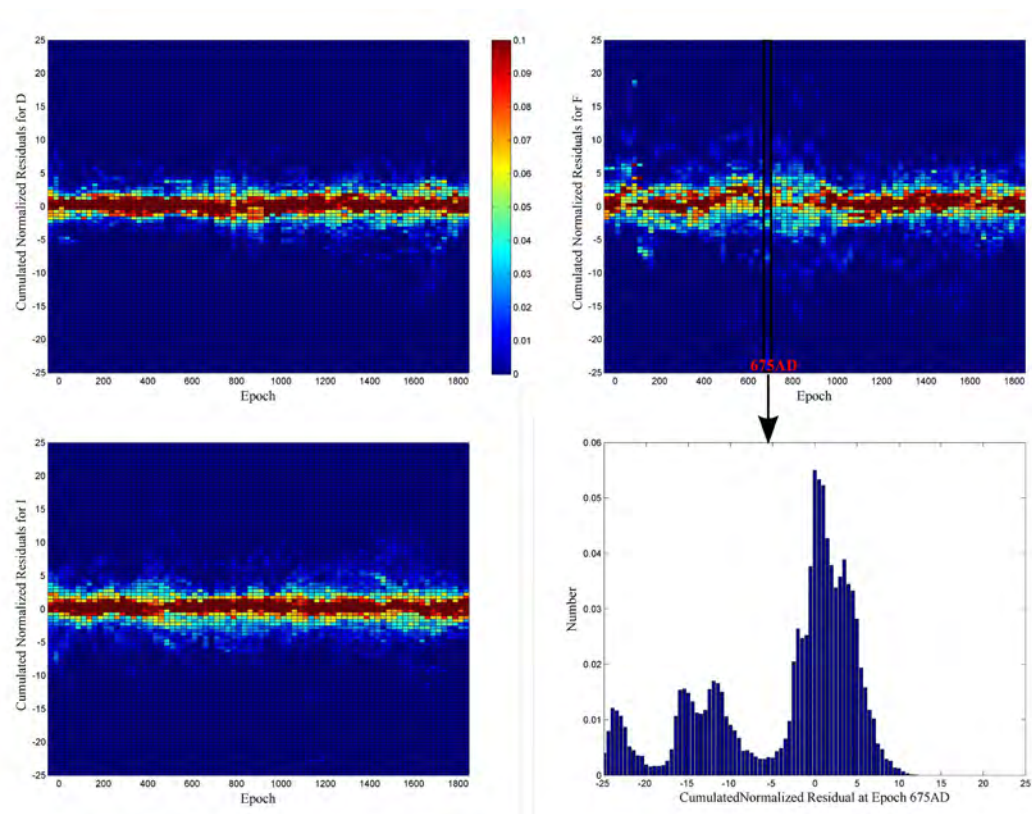


Figure 5.7: Distribution des résidus normalisés par les incertitudes à différentes époques comprises entre 50 av. J.C. et 1850 ap. J.C pour la déclinaison D (haut à gauche), l'inclinaison I (bas à gauche) et l'intensité F (en haut à droite). La densité de données est très forte pour le rouge foncé et nulle pour le bleu. Pour l'époque 675 ap. J.C. je montre l'histogramme des résidus pour l'intensité (voir le texte pour une discussion).

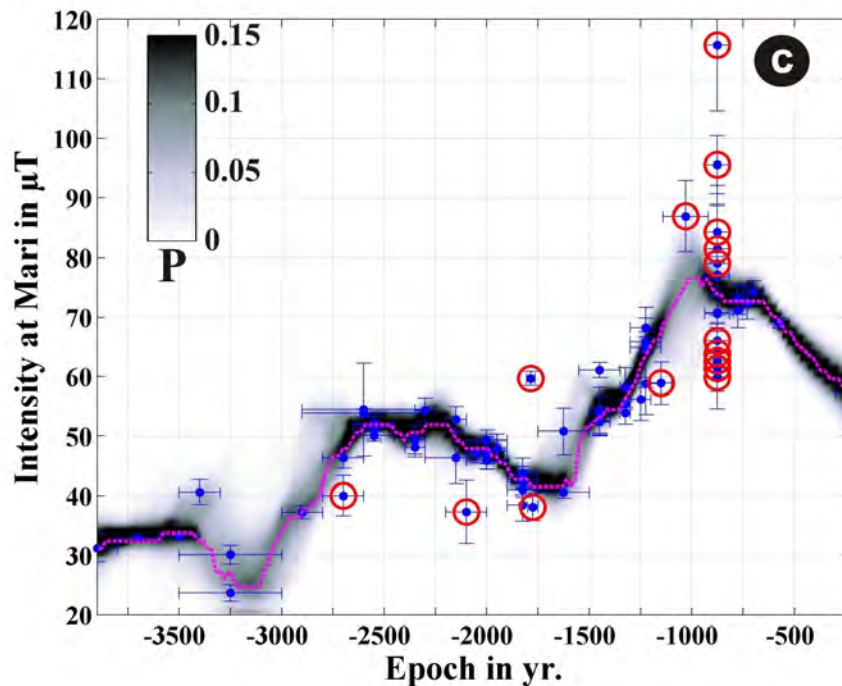


Figure 5.8: Variations de l'intensité géomagnétique au site de Mari / Tell Hariri ( $34^{\circ}$  N33',  $40^{\circ}$  E53') entre 4000 avant JC et 0 AD. La courbe d'intensité archéomagnétique médiane (rose) est calculée avec sa densité de probabilité (dégradés de gris) à partir de toutes les données syriennes disponibles. Les cercles rouges indiquent les données qui sont considérés comme des valeurs aberrantes par l'algorithme. D'après **Thébault et Gallet (2009)**.

à la prise en compte des erreurs de mesure et de datation. Nous avons tout d'abord utilisé la technique du *bootstrap* qui consiste à rééchantillonner les données archéomagnétiques selon leurs barres d'erreurs *a priori*. Ceci permet de mieux tester l'effet des erreurs sur la courbe finale et, surtout, d'estimer la densité de probabilité complète de la solution. L'algorithme prend aussi en compte l'effet des données erronées (celles qui sont systématiquement hors de la tendance moyenne) en utilisant une approche itérative de repondération.

L'un des résultats saillants des études synthétiques que nous avons menées est que l'erreur de datation lorsqu'elle est prise en compte introduit un lissage significatif de la courbe finale. Cette caractéristique est importante lorsque l'on étudie la robustesse des secousses du champ archéomagnétique et apporte un argument solide en faveur de la sélection des données archéomagnétiques à partir de critères de datation stricts.

Nous avons appliqué cet algorithme aux données archéomagnétiques d'intensité mesurées en Syrie couvrant une période s'étendant sur 4 millénaires avant J.C (Figure 5.8). Ces données ont été réduites à la position géographique du site archéologique de Mari.

Ce type de courbe avec sa densité de probabilité a permis de dater relativement des éléments architecturaux en terre cuite et d'initier une discussion originale concernant la chronologie de certains éléments d'urbanisme dans la ville antique de Mari en Syrie (**Gallet et coll., sous presse à Syria**). Ce type de courbe a donc aussi pour vocation dans le futur à être utilisée

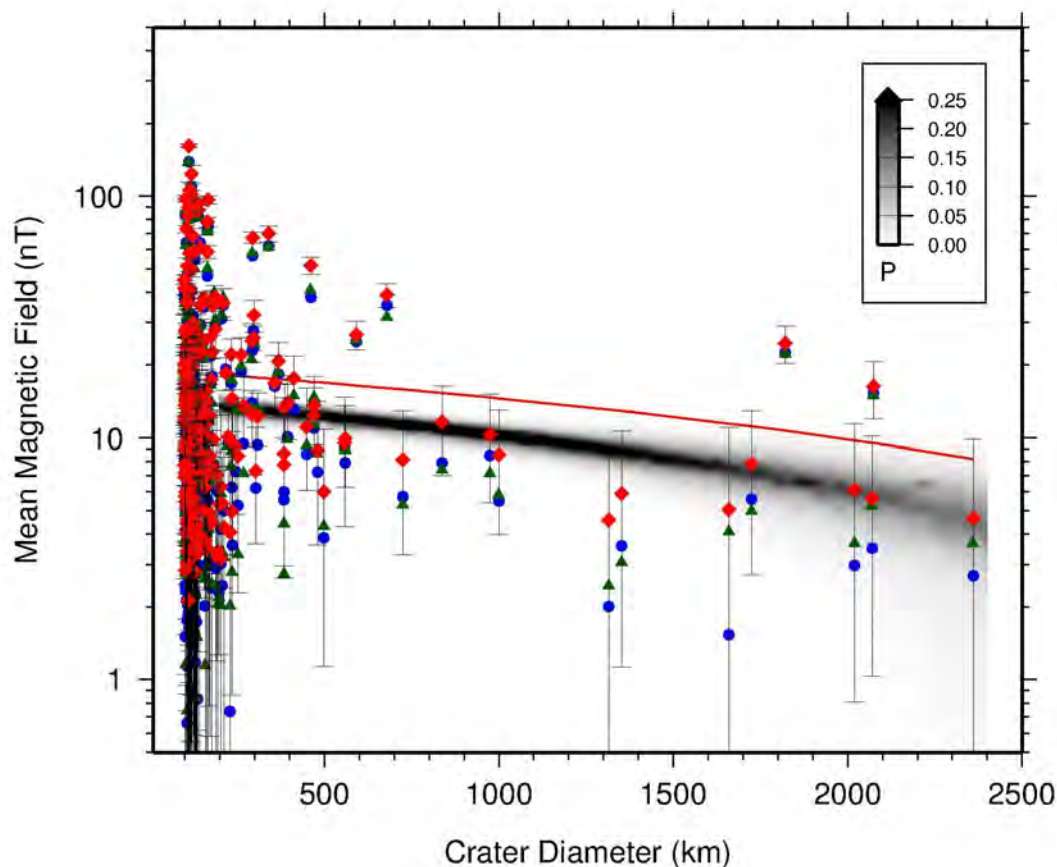


Figure 5.9: Courbe montrant la relation entre le champ magnétique moyen calculé au-dessus des cratères d'impact (ordonnée) et leur taille (abscisse). Les données proviennent de la sonde *Mars Global Surveyor*. Le champ moyen est calculé à partir d'un modèle global (en bleu), à partir des données directement (en noir), et à partir d'un modèle local R-SCHA (en rouge). Le dégradé de gris montre la densité de probabilité de la droite (dont le coefficient directeur peut être relié au coefficient de corrélation) entre le champ moyen et leur taille calculée grâce aux barres d'erreurs.

comme outil de datation archéologique. Dans certaines régions, comme l'Europe occidentale, les analyses des variations temporelles d'intensité magnétique laissent apparaître des corrélations significatives avec les avancées et reculs des glaciers (**Genevey et coll., 2013**) ainsi qu'avec la production de  $C^{14}$  dans une moindre mesure. Cette approche statistique pourrait donc également apporter un éclairage intéressant sur la question sensible d'une possible relation entre les variations climatiques et le champ magnétique terrestre moyen au cours des âges à des échelles locales.

## 5.5 Applications à la planétologie

Dans une autre application de la méthode, nous avons utilisé R-SCHA avec B. Langlais (LPG, Nantes) pour modéliser le champ magnétique mesuré à la verticale des cratères martiens et

pour comparer le champ moyen calculé avec un modèle prédictif basé sur les dipôles équivalents (**Langlais et Thébault, 2011**). Les résultats relatifs au problème inverse ont permis d'estimer les erreurs dans les données pour chaque cratère d'impact. Nous avons pu ainsi déterminer une courbe montrant l'intensité moyenne avec sa barre d'erreur en fonction de la taille des cratères (Figure 5.9). Or, certains de ces cratères d'impact sont datés et ce type de courbe revient donc à représenter l'intensité magnétique au-dessus des cratères en fonction de leur âge. Cette analyse est parfois utilisée pour proposer un âge approximatif pour l'extinction de la dynamo martienne (par exemple Nimmo et Gilmore, 2001). Cette analyse est fondée sur l'hypothèse qu'une zone crustale impactée est désaimantée par dissipation thermique et que la croûte se réaimante uniquement en présence du champ inducteur généré par la dynamo martienne. Un cratère d'impact désaimanté serait donc postérieur à l'extinction de la dynamo martienne.

Nous avons calculé la variabilité du coefficient de corrélation entre la valeur du champ magnétique moyen et l'âge des cratères d'impact par la technique du *bootstrap* en rééchantillonnant chaque fois les données magnétique dans leur barre d'erreur. Nous avons montré par cette approche que la corrélation était très ténue et statistiquement peu différente de 0 lorsque l'on considérait les barres d'erreur sur les intensités locales (Figure 5.10). Pour ce type d'étude, nous pensons que l'analyse de l'intensité du champ magnétique sur les cratères a peu de sens puisque l'intensité du champ crustal varie géographiquement.

Nous avons donc proposé une analyse différente des données magnétiques pour l'analyse de l'extinction de la dynamo martienne. Nous suggérons non pas de considérer l'intensité absolue du champ magnétique à la verticale des cratères d'impact mais le rapport entre l'intensité mesurée au-dessus du cratère et celle mesurée dans leur environnement géographique proche. Ainsi, un cratère d'impact peu aimanté ne sera pas considéré comme désaimanté si la croûte dans son environnement direct est elle-même peu aimantée. Cette approche nous a permis de proposer une nouvelle datation pour l'extinction de la dynamo martienne plus tardive que celle généralement acceptée, ce qui aurait des implications importantes pour la compréhension des processus aqueux sur la planète (**Langlais et coll., en préparation**).

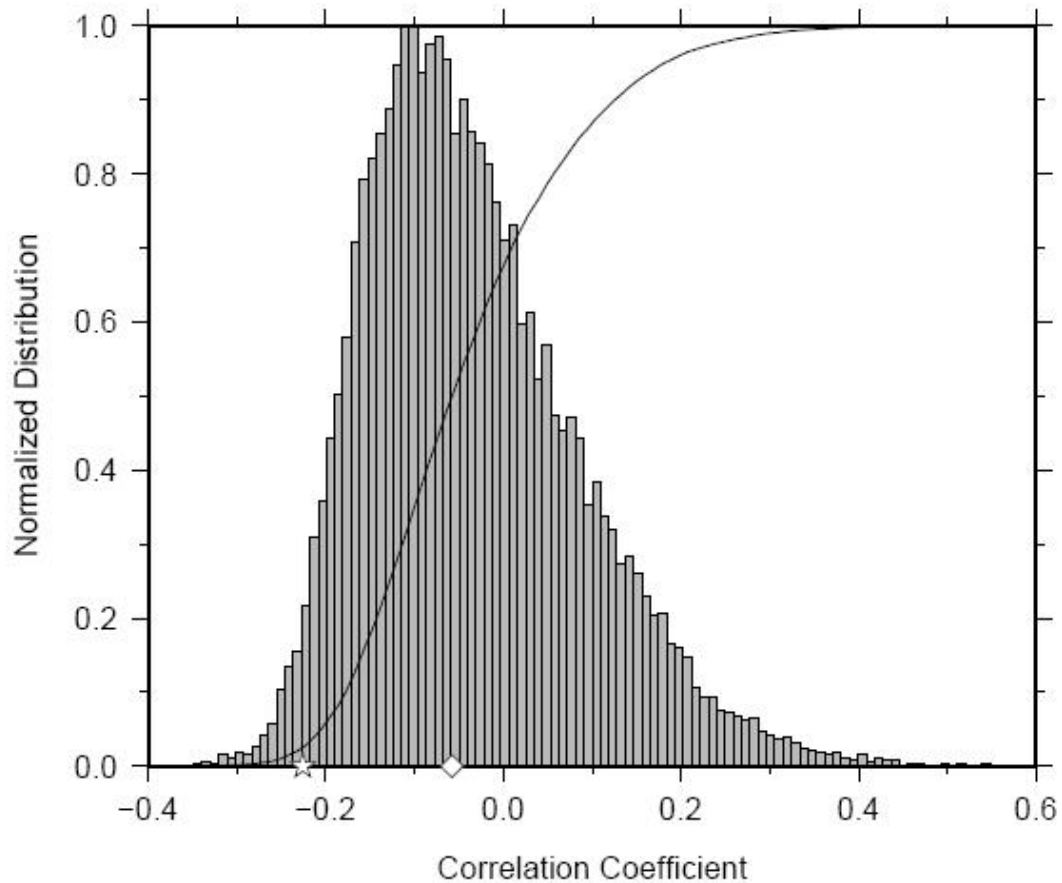


Figure 5.10: Distribution du coefficient de corrélation caclulé entre la taille des cratères martiens et l'intensité du champ magnétique modélisé à leur verticale. Le coefficient de corrélation calculé sans tenir compte des barres d'erreurs (étoile) diffère significativement de celui correspondant au maximum de la distribution (losange).



---

## Préparation à l'exploitation de la mission satellite *Swarm*

---

La mission européenne *Swarm* a pour objectif d'identifier, cartographier et d'interpréter les différents champs magnétiques produits par la dynamo du noyau, les courants induits dans la Terre, la lithosphère aimantée, les courants induits dans les masses d'eau océanique en mouvements, ainsi que les courants ionosphériques et magnétosphériques<sup>1</sup>. Elle a été proposée conjointement par le DTU au Danemark (PI, E. Friis-Christensen), le GFZ en Allemagne (PI, H. Lühr), et notre équipe à l'IPGP (PI, G. Hulot) et a été définitivement sélectionnée en Mai 2004. Elle consistera pour la première fois en une constellation de trois satellites. Les techniques globales et régionales que je développe sont destinées à exploiter au mieux cette configuration spatiale novatrice, notamment par le développement de gradients régionaux qui devraient nous permettre d'extraire le signal plus finement et de nous affranchir d'un certain type de bruit et d'artefacts (voir la section 3.3). Cette opportunité de mission scientifique m'a encouragé à mener la plupart des travaux présentés dans ce mémoire sur la modélisation locale et sur le traitement des données mesurées depuis l'espace. Les résultats scientifiques de ces recherches ont été intégrés à une chaîne de traitement pour la mise en évidence du champ magnétique émanant de la lithosphère terrestre. L'exploitation de la mission *Swarm* est donc le point de convergence de la plupart des outils que j'ai développés sur des aspects liés à la sélection et à la correction des données ainsi que sur l'identification des artefacts, à la mise en place d'une modélisation régionale incorporant le calcul du gradient du champ magnétique, à l'analyse spectrale régionale, et à la transformation des résultats en harmoniques sphériques. Ce type de travail a fait l'objet de nombreuses simulations dans le cadre de ma participation au consortium SMART, de la *closed-loop*, aux *failures cases*, en passant par la simulation *end-to-end*. La figure (6.1) montre l'algorithme de la chaîne de traitement que j'ai développée en collaboration avec S. Maus (NOAA/NGDC).

Les données *Swarm* de niveau 1b sont d'abord sélectionnées en fonction de critères prédéfinis et sont corrigées pour divers champs magnétiques. Cette étape de correction et de sélection comporte quatre processus (Process 1 à 4; Processus détaillé dans la Figure 3.4 de la section

---

<sup>1</sup>[http://www.esa.int/esaLP/ESA3QZJE43D\\_LPswarm\\_0.html](http://www.esa.int/esaLP/ESA3QZJE43D_LPswarm_0.html)



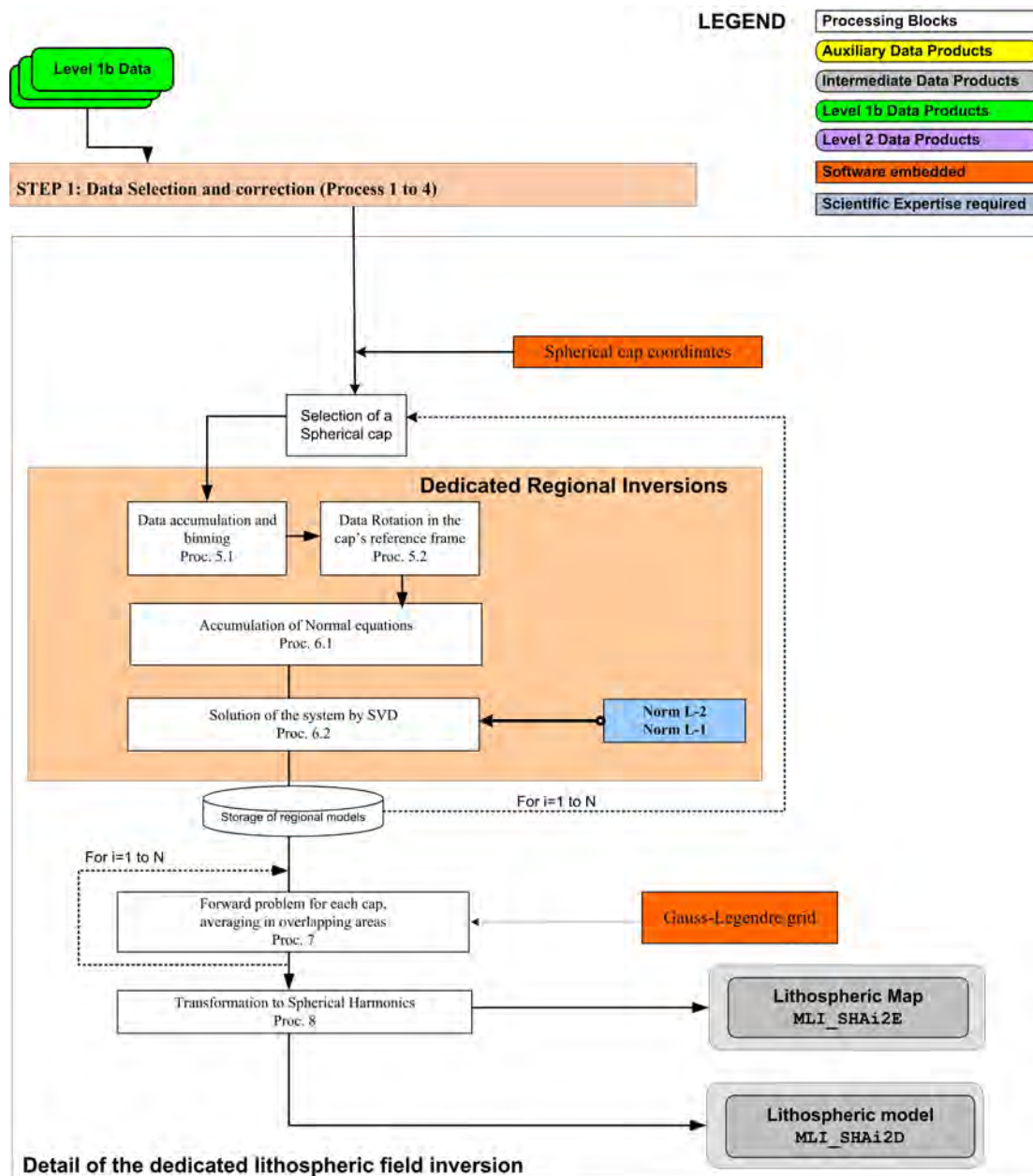


Figure 6.1: Algorithme montrant la séquence des 8 processus permettant de produire un modèle de champ magnétique de la lithosphère à partir des données de niveau 1b de la mission satellite *Swarm*.

---

3.3.1) qui nécessitent des informations auxiliaires et une constante vérification des effets des corrections appliquées par l'opérateur. Parmi les différentes corrections, les corrections dédiées (Process 4) sont indispensables pour récupérer le champ magnétique de la lithosphère de la Terre.

Nous avons implémenté trois corrections dédiées. La première correction est réalisée à l'échelle mondiale dans les coordonnées du dipôle magnétique terrestre. Elle consiste à estimer les champs magnétiques internes jusqu'au degré 15 des harmoniques sphériques et les champs externes jusqu'au degré 5. La seconde série de corrections est effectuée le long des orbites des satellites. Afin d'atténuer le problème de repliement spectral, nous exploitons les données des satellites *Swarm* A et B simultanément pour estimer les contributions résiduelles principalement des champs externes après correction d'un modèle a priori de champ lithosphérique. Nous suivons ainsi les recommandations que nous avons décrites en section 3.3.2. Enfin, une troisième correction, optionnelle, est basée sur le filtrage passe-haut du signal.

Les mesures sélectionnées et corrigées sont ensuite modélisées de manière itérative avec les fonctions locales (R-SCHA, section 5.2). Les données globales sont d'abord distribuées dans des calottes sphériques réparties sur la sphère terrestre aux altitudes satellitaires (Process 5.1 dans la Figure 6.1). Chaque ensemble de données est transformé dans le référentiel local de chaque calotte sphérique (Process 5.2). Le problème inverse linéaire est ensuite résolu, et les paramètres régionaux sont stockés après la construction de la matrice de conception (6.1) et la résolution du système par décomposition en valeurs singulières (SVD dans le Process 6.2). Une fois les inversions régionales terminées pour toutes les calottes sphériques, les paramètres régionaux sont utilisés pour prédire les valeurs vectorielles du champ magnétique de la lithosphère sur une grille de Gauss-Legendre (Process 7). Cette grille couvre la Terre à une altitude moyenne d'environ 400 km. Ces valeurs de champ sont finalement transformées en un ensemble unique de coefficients de Gauss soit par une transformation sphérique (*Fast spherical transform*) soit par une inversion linéaire qui peut être régularisée (Processus 8). Le modèle de la lithosphère champ dédié est le produit de sortie de la séquence de ces procédés numériques.

La chaîne dédiée à la production d'un modèle de champ magnétique lithosphérique a été testée sur des données synthétiques simulant les caractéristiques de la mission *Swarm*. Seules les données de *Swarm* A et B de nuit coïncidant avec des temps magnétiques calmes ont été sélectionnées. Ces données ont ensuite été corrigées pour les champs principaux et externes développés par d'autres chaînes de traitement proposées par le consortium SCARF. Nous avons ensuite appliqué la série de corrections dédiées à l'élimination des contributions résiduelles de grandes échelles spatiales. Ce premier test est considéré comme une simulation *end-to-end* destinée à valider le fonctionnement et les performances de la chaîne de traitement.

Nous avons réalisé trois simulations complémentaires destinées à estimer la performance de la chaîne dans le cas d'une défaillance ou d'un dysfonctionnement instrumental de l'un des satellites *Swarm*

- Le « *failure case 1A* » simule l'absence de données magnétiques vectorielles du satellite *Swarm* B (qui délivre tout de même des données scalaires). Ce type d'incident pourrait provenir, par exemple, d'une défaillance du magnétomètre vectoriel VFM ou d'une défail-

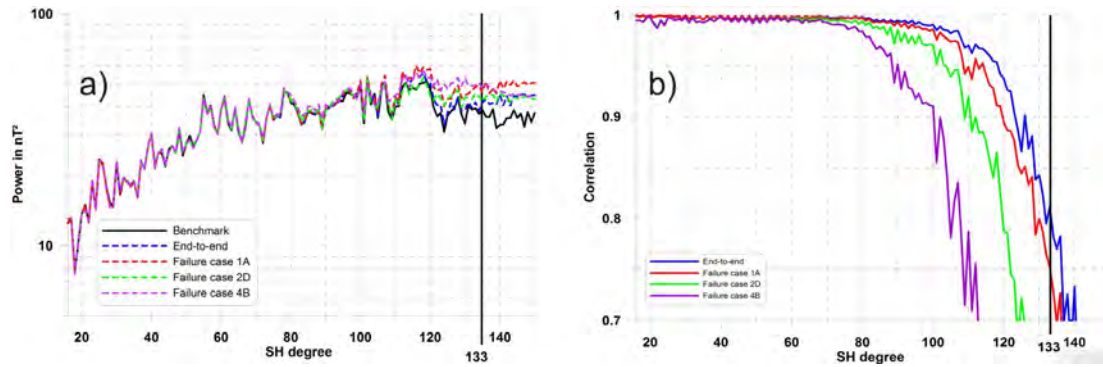


Figure 6.2: a) Spectres du champ magnétique de la lithosphère au rayon terrestre (voir Eq. 2.6) du modèle initial qui a servi à construire les données synthétiques (noir), du modèle estimé par la simulation "end to end" (bleu), et des modèles estimés dans le cas d'une défaillance pour le satellite *Swarm* B de type 1A (rouge), 2D (vert), et 4B (violet). La barre verticale montre la position du degré 133 qui est l'objectif scientifique de la mission *Swarm*. b) Corrélation entre le modèle initial et les modèles obtenus pour les différentes simulations. Le code couleur est identique à celui de la figure a).

lance du STR « *star tracker* ». Dans ce cas, comme le montre la figure (6.2) le modèle lithosphérique obtenu passe les critères de performance (le plus drastique étant celui de la figure 6.2-b imposant une corrélation meilleure que 0.7) au-delà du degré 133 grâce à la disponibilité de données scalaires de gradient.

- Le « *failure case 2D* » simule un biais dans les données du magnétomètre du satellite *Swarm* B. Le RMS du biais est de 0,30 nT et se produit par intermittence mais au hasard. La performance globale reste bonne jusqu'aux degrés 110-120 des harmoniques sphériques.
- Enfin, le « *failure case 4B* » simule la défaillance complète du satellite *Swarm* B. Ce cas de figure correspond à des missions plus standards de type CHAMP et la performance globale est limitée aux degrés 105-110.

Précisons que ces performances sont obtenues pour 4 ans de données synthétiques dont l'altitude médiane est d'environ 400 km. Une extension de la mission *Swarm* avec des orbites à plus basses altitudes nous permettrait d'atteindre des modèles dont la résolution spatiale serait inégalée.

Le lancement de la mission *Swarm* est maintenant imminent. Si la mission *Swarm* n'est pas encore associée à un résultat scientifique marquant, un nombre significatif d'outils originaux ont été mis en place pour exploiter pleinement la mission scientifique comme l'inversion de données de type gradient, la définition de spectre spatial ou de corrélation harmonique entre deux modèles de champs magnétiques régionaux... L'algorithme ainsi que les outils d'analyse sont présentés dans **Thébault et coll. (2013)**.

---

## Synthèse sur la cohérence et perspectives du projet personnel

---

### 7.1 Missions satellitaires

---

Ce projet de recherche s'articule autour du triptyque mêlant acquisition et traitement des données magnétiques, leurs modélisations aux échelles globales et régionales, et l'interprétation des modèles et leurs liens aux sources magnétiques. Sur le long terme, il sera nécessaire d'améliorer la carte des anomalies magnétiques du monde (en tirant parti de *Swarm* pour mieux restituer les grandes structures spatiales du champ lithosphérique) et de travailler sur l'interprétation géophysique et géologique grâce à des outils de type SIG (Système d'Information Géographique) qui restent à développer. Cela nécessitera d'écrire le formalisme R-SCHA pour différents types de données géophysiques afin d'en tirer parti en modélisation globale et régionale des champs magnétiques dans le but d'extraire des informations sur les champs contemporains, historiques, ou archéomagnétiques. Les thématiques de recherche développées dans cette synthèse n'évolueront pas radicalement mais doivent être diversifiées pour la planétologie comparée. Les méthodes de modélisation et les outils statistiques originaux serviront au développement opérationnel des méthodes d'assimilation. Nombre de résultats comme la forme statistique du spectre lithosphérique, le calcul de l'anisotropie du bruit externe, le problème de la distribution spatiale des données magnétiques, ou les variations temporelles du champ lithosphérique peuvent servir à la construction de la matrice de covariance des erreurs sur les modèles de champ principaux. L'utilisation conjointe de l'information *a priori* sur la dynamique du noyau, des observations magnétiques et de la détermination de certaines erreurs pourront aussi apporter des contraintes sur l'état et la dynamique actuels du noyau et la prédiction du champ dans le cadre de la production du prochain modèle de champ magnétique international de référence (IGRF).

Les conclusions développées dans ce travail s'intègrent toutes dans le cadre opérationnel de la mission spatiale européenne *Swarm*. Des analyses réalisées dans le cadre de la simulation de la mission ont montré le grand intérêt du spectre statistique de la lithosphère terrestre (Eq. 4.9) pour la régularisation du problème inverse qui permettra d'obtenir des résolutions spatiales

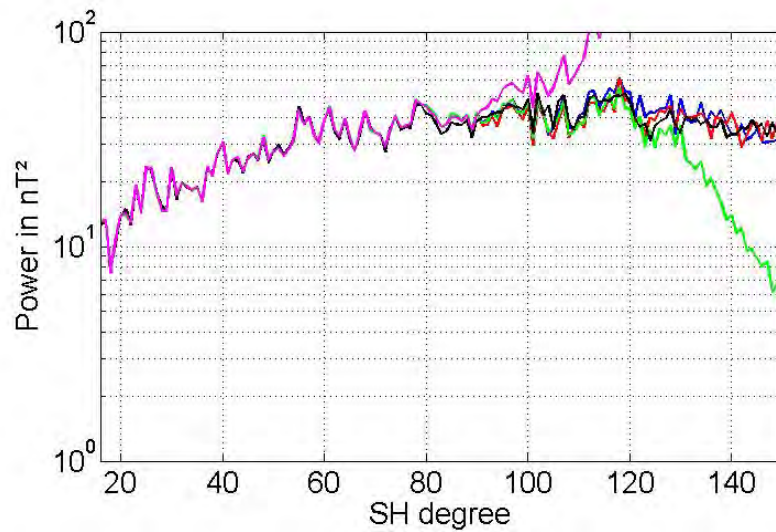


Figure 7.1: Spectre magnétique du modèle initial de champ lithosphérique (noir), du modèle retrouvé par la chaîne de traitement 1) dans le cas 4B et aucune correction du champ externe (magenta), 2) dans le cas 4B régularisé avec une condition de norme minimum (vert) 3) dans le cas 4B régularisé avec la condition que le spectre soit proche de la forme théorique donnée par l'équation 4.9 (rouge et bleu).

inégales. La figure (7.1) compare le spectre d'un modèle obtenu dans un cas proche du « *failure case 4B* » (voir section 6) avec en plus une erreur de 100% dans la correction du champ externe pour différentes régularisations. Le modèle régularisé selon la nouvelle norme semble avoir une tendance plus proche du modèle initial que le modèle régularisé par la condition de norme minimum.

Cette information est plus puissante (mais plus difficile à maîtriser) que les régularisations *ad hoc* utilisées couramment pour réduire arbitrairement l'énergie des coefficients du modèle qui sont mal contraints. D'autre part, une régularisation globale réduit l'énergie de tous les coefficients sans distinction géographique. La possibilité de régulariser régionalement et non plus globalement les modèles est très intéressante puisque nous savons que le bruit dans les données n'est pas identique dans les zones de moyennes et de hautes latitudes et que, par conséquent, les paramètres régionaux n'ont pas la même résolution. Grâce aux relations de passage entre le spectre régional et le spectre global (voir section 5.2.2), nous voyons émerger la possibilité de régulariser le problème régionalement avec une contrainte physique. Nous avons soumis deux projets scientifiques en réponse un appel d'offre SSVO (Swarm Science and Validation Opportunity) de l'ESA. Ces projets ont été « validés » par l'ESA ; ils sont non-financés mais devraient nous permettre de défendre des projets auprès de programmes dédiés (CNES, INSU, etc.).

Une des nouveautés qui pourra être apportée concerne la modélisation régionale dans un cadre planétaire. Nous avons eu l'occasion au démarrage de la thèse de J. Oliveira (doctorante au LPG Nantes) de tester la technique des harmoniques sur calotte sphérique aux données Messenger (Figure 7.2). J. Oliveira s'est orientée sur une approche basée sur les dipôles équivalents et je

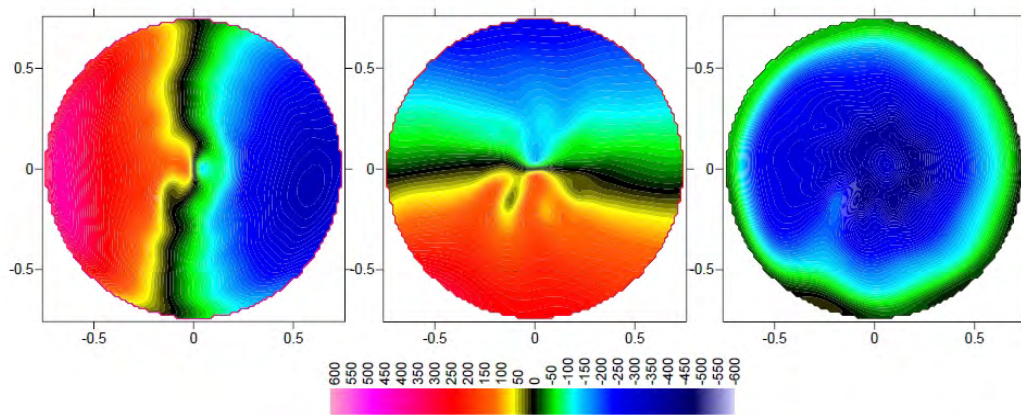


Figure 7.2: Modèle régional préliminaire du champ magnétique de Mercure calculé en harmoniques locales à partir des données de la sonde Messenger pour les composantes X, Y et Z. Projection de Lambert centrée sur le pôle Nord. Unités nT.

propose un point de vue complémentaire basé sur une modélisation dans une calotte sphérique. Nos résultats sont en accord avec les travaux récents de Johnson et coll.. (2012) mais les structures que nous voyons sur nos modèles ont plus de complexité ce qui ouvre des perspectives intéressantes sur la possible présence de champ crustal comme le proposent Anderson et coll., (2012).

Par ces méthodes locales complémentaires, nous avons donc bon espoir de contribuer significativement à la compréhension de la dynamique interne du champ de Mercure. Ce projet fait déjà partie d'une proposition jointe avec B. Langlais financée par le Programme National de Planétologie, mais il nous apparaît clair que les questions soulevées par les données récentes de la sonde Messenger nécessiteront du temps pour trouver une réponse définitive et satisfaisante. Ces axes de recherche font également partie d'un projet ANR soumis en janvier 2013 au programme Blanc - SIMI 5 - Physique subatomique et théories associées, astrophysique, astronomie et planétologie, piloté par B. Langlais et dont le titre est « Mercure: interActions HeRméo-Magnétiques entre l'InTérieur et l'Exosphère (MARMITE) ».

## 7.2 Modélisations et interprétation des sources de champ lithosphérique

---

### 7.2.1 La profondeur magnétique de la lithosphère terrestre

Avec F. Vervelidou (Etudiante en thèse IPGP de 2009-2013), nous avons initié une étude originale sur l'estimation de la profondeur de Curie à l'échelle de la Terre qui est la profondeur à partir de laquelle les roches terrestres perdent leurs propriétés magnétiques. Les échelles spatiales plus grandes que 2500 km environ du champ de la croûte sont masquées par le champ principal du noyau. Par conséquent, nous n'avons accès qu'à une anomalie de profondeur magnétique et il nous manque jusqu'à présent la constante globale ou la « ligne de base » que l'on suppose souvent être confondue avec la profondeur sismique du Moho (Wasilewski and Mayhew, 1992). Grâce

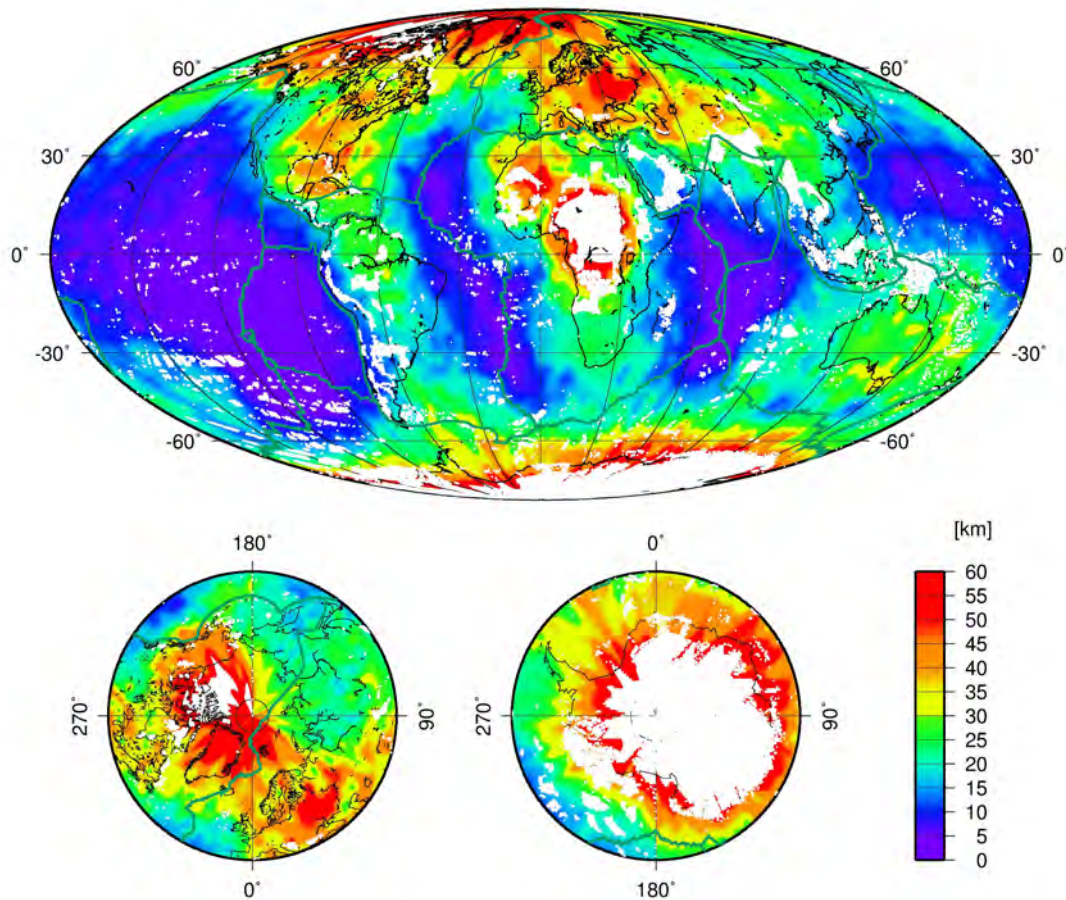


Figure 7.3: Estimation statistique de l'épaisseur magnétique crustale à partir des données magnétiques mondiales marines et aéromagnétiques et d'un modèle statistique de spectre. En blanc les zones sans couverture en données (d'après **Vervelidou et Thébault, en préparation**).

aux outils spectraux régionaux que nous avons développés, nous pensons pouvoir contourner un problème important propre au magnétisme terrestre de la croûte et, à partir de ce spectre incomplet, obtenir néanmoins une information régionale sur l'épaisseur crustale magnétique en ajustant notre spectre théorique aux spectres régionaux calculés en différents endroits couvrant la Terre entière.

Nous avons exploré la faisabilité de ce projet et obtenu des résultats encourageants et cohérents avec le fait que l'épaisseur crustale est plus importante sous les continents que sous les océans (Figure 7.3). Il convient maintenant de corrélérer cette estimation avec des modèles de la profondeur du Moho et des flux de chaleurs (**Vervelidou et Thébault, 2015**). D'autre part, notre approche nous permet de déterminer également des modèles de variations géographiques de l'aimantation moyenne, mais également de celles de la loi d'échelle de la susceptibilité des roches. Ceci n'est qu'une spéculation à explorer mais en supposant que cette loi d'échelle soit le résultat de processus dynamiques crustaux, nous pourrions avoir accès à une contrainte supplémentaire sur les âges de la croûte terrestre et de sa dynamique.

### 7.2.2 Interprétation du champ magnétique lithosphérique, géodynamique, et tectonique

D'une manière générale, je continuerai mes projets propres de compilation et de traitement des données magnétiques de proche surface ou satellitaire dans le cadre du projet World Digital Magnetic Anomaly Map. La version actuelle de la grille est disponible librement au format numérique. Outre son intérêt éducatif certain, cette grille contient de précieuses informations sur l'histoire passée de la croûte terrestre. Elle peut être transformée, lorsque la densité des données le permet, en cartes de profondeur ou d'aimantations équivalentes à partir d'hypothèses et de techniques numériques simples, mais spécifiques, basées sur les transformées de Fourier (réduction aux pôles, transformations vers le haut, vers le bas, etc.) et je compte poursuivre mes activités liées à l'interprétation de cette carte, notamment en terme de reconstruction des supercontinents (voir section 4.2.4).

A partir des données satellitaires de la mission CHAMP et de la future mission *Swarm*, je m'investirai dans la transformation de la quantité magnétique en carte d'aimantation ou de profondeur de Curie par des techniques numériques globales. Certaines informations importantes pour la dynamique terrestre globale sont susceptibles d'être déduites de ces transformations. Les cartes d'aimantation peuvent être testées par une corrélation avec la géologie de proche surface. En cas de corrélation acceptable, il devient possible d'estimer les extensions latérales des blocs tectoniques en profondeur et, projet que j'ai en cours avec J. Besse (Physicien IPGP), d'utiliser les paléopôles pour tester les modèles actuels de paléocontinents et potentiellement de les raffiner. Lorsque la corrélation n'est pas probante, il reste possible de calculer une épaisseur équivalente de croûte aimantée qui, par comparaison avec la profondeur sismique peut nous indiquer d'éventuelles anomalies de flux de chaleur (par exemple, Fox-Maule et coll., 2005).

## 7.3 Développement des outils régionaux

---

Mon projet de recherche personnel évoluera également autour du développement des harmoniques locales. Le champ magnétique peut être développé complètement sur ces bases de fonction à très hautes résolutions (de l'échelle kilométrique à 2600 km, longueur d'onde maximum qui n'est pas masquée par les contributions dominantes du champ principal). Les modèles ainsi obtenus peuvent-être aisément continués vers le haut ou vers le bas. Il reste cependant à en faire un outil d'analyse quantitatif en écrivant les relations de passage entre le champ magnétique régional (Équation de Laplace) et l'aimantation équivalente. Ce projet permettra d'avoir une vue multi-échelle de l'aimantation équivalente dans une région du monde. Pour lever en partie les ambiguïtés d'interprétation, je propose de développer ensuite le formalisme au champ de gravité sur ces bases de fonctions que je compte relier formellement au champ magnétique via la relation de Poisson (par exemple, Blakely, 1995) et à l'anomalie de flux de chaleur. Le champ magnétique exprimé en termes d'aimantation, de pseudo-gravité, et d'anomalie de flux de chaleur pourront alors servir dans un problème inverse joint pour tester la part d'aimantation explicable par le champ de gravité de celle explicable par des anomalies de flux de chaleur. Plus globalement et sur un plus long terme, j'envisage de décomposer la sphère terrestre en calottes



polaires, et en couronnes de moyennes latitudes et équatoriales et de relier le champ magnétique dans différentes couches ionosphériques et magnétosphériques par des conditions de continuité. Une telle décomposition géographique pourra se révéler utile pour différencier dans les modèles de champs magnétiques planétaires dont la physique est très différente selon que l'on se place dans les zones polaires et équatoriales ou à moyenne latitude, à basse ou à haute altitude. À terme, ce modèle devrait pouvoir aider à mieux séparer les sources du champ magnétique et offrir notamment une meilleure compréhension de la dynamique moyenne du champ magnétique externe de la Terre.

## Bibliographie réduite

Anderson, B. J., C. L. Johnson, H. Korth, R. M. Winslow, J. E. Borovsky, M. E. Purucker, J. A. Slavin, S. C. Solomon, M. T. Zuber, and R. L. McNutt Jr. (2012), Low-degree structure in Mercury's planetary magnetic field, *J. Geophys. Res.*, 117, E00L12, doi:10.1029/2012JE004159.

Arkani-Hamed, J., and D. W. Strangway, Lateral Variations of Apparent Magnetic Susceptibility of Lithosphere Deduced From Magsat Data, *J. Geophys. Res.*, 90(B3), 2655—2664 (1985). doi:10.1029/JB090iB03p02655.

Backus, G., R. Parker, C. Constable, *Foundations of Geomagnetism* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996)

Bankey, Viki, Cuevas, Alejandro, Daniels, David, Finn, Carol A., Hernandez, Israel, Hill, Patricia, Kucks, Robert, Miles, Warner, Pilkington, Mark, Roberts, Carter, Roest, Walter, Rystrom, Victoria, Shearer, Sarah, Snyder, Stephen, Sweeney, Ronald, Velez, Julio, Phillips, J.D., and Ravat, D., Digital data grids for the magnetic anomaly map of North America: U.S. Geological Survey Open-File Report 02-414, U.S. Geological Survey, Denver, Colorado, USA (2002).

Bassin, C., Laske, G. & Masters, G., The current limits of resolution for surface wave tomography in North America, *EOS, Trans. Am. geophys. Un.*, 81(48), Abstract S12A-03 (2000).

Baumjohann, W., R. Nakamura, Magnetospheric contributions to the terrestrial magnetic field, in *Treatise on Geophysics*, ed. by M. Kono, vol. 5 (Elsevier, Amsterdam, 2007), pp. 77–91. Chap. 3

Blakely, R.J. (1995), *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

Cain, J.C., Pogo (OGO-2, -4 and -6 spacecraft), in *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, ed. by D. Gubbins, E. Herrero-Bervera (Springer, Dordrecht, 2007), pp. 828–829

Cohen, Y., J. Achache, Contribution of induced and remanent magnetisation to long-wavelength oceanic magnetic anomalies. *J. Geophys. Res.* 99, 2943–2954 (1994)

Cohen, Y., J. Achache, New global vector magnetic anomaly maps derived from Magsat data. *J. Geophys. Res.* 95(B7), 10783–10800 (1990)

---

Connerney, J. E. P., 2007. Planetary Magnetism, in *Treatise on Geophysics*, ed. by M. Kono, vol. 10 (Elsevier, Amsterdam, 2007), pp. 195-237. Chap. 10

Courtilot, V., J. Ducruix, J.L. Le Mouél, Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre. *C.R. Acad. Sci. Paris (D)* 287, 1095–1098 (1978)

Dunlop, D.J., O. Özdemir, Magnetisations in rocks and minerals, in *Treatise on Geophysics*, ed. by M. Kono, vol. 5 (Elsevier, Amsterdam, 2007), pp. 278–331. Chap. 8

Ferré, E.C., S. A. Friedman, F. Martín-Hernández, J. M. Feinberg, J. A. Conder, D. A. Ionov, The magnetism of mantle xenoliths and potential implications for sub-Moho magnetic sources, *Geophys. Res. Lett* (2013). doi: 10.1029/2012GL054100

Gallet, Y., A. Genevey, and F. Fluteau, Does Earth's magnetic field secular variation control centennial climate change?, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 236, 339–347 (2005).

Gil, A., J. Segura and N.M. Temme, An improved algorithm and a Fortran 90 module for Computing the conical function  $P_{\square 1/2+i\tau}^m(x)$ , *Computer Physics Communications* 183(3), 794-799 (2012).

Gubbins D; Ivers D; Masterton SM; Winch DE, Analysis of lithospheric magnetization in vector spherical harmonics, *Geophys. J. Int.*, 187, pp.99-117 (2011). doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.5153.x

Haines. G.V. , Spherical Cap Harmonic Analysis, *J. Geophys. Res*, 90(B3) ,2583-2591 (1985)

Hemant, K., S. Maus, Geological modeling of the new CHAMP magnetic anomaly maps using a Geographical Information System (GIS) technique. *J. Geophys. Res. B* 110, B12103 (2005). doi:10.1029/2005JB003837

Holschneider, M., A. Chambodut and M. Mandea , From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelets. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 135, (2003). doi:10.1016/S0031-9201(02)00210-8.

Hulot, G., N. Olsen, T.J. Sabaka, The present field, in *Geomagnetism*, ed. by M. Kono. *Treatise on Geophysics*, vol. 5 (Elsevier, Amsterdam, 2007), pp. 33–72. Chap. 6

Johnson, C. L., et al., MESSENGER observations of Mercury's magnetic field structure, *J. Geophys. Res.*, 117, E00L14, (2012). doi:10.1029/2012JE004217.

Kono, M., *Geomagnetism in perspective*, in *Geomagnetism*, ed. by M. Kono. *Treatise on Geophysics*, vol. 5 (Elsevier, Amsterdam, 2007), pp. 1–30. Chap. 1

Korte, M. and Constable, C.. Improving geomagnetic field reconstructions for 0-3 ka. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 188: 247-259. doi: 10.1016/j.pepi.2011.06.017 (2011)

Laj, C., J.E.T. Channel, *Geomagnetic excursions*, in *Geomagnetism*, ed. by M. Kono. *Treatise on Geophysics*, vol. 5 (Elsevier, Amsterdam, 2007), pp. 373–407. Chap. 10

Langel, R.A. , Sweeney, R.A, Asymmetric ring current at twilight local time. *J. Geophys. Res.* 761, pp. 4420—4427 (1971).

Langel R.A. , C.C. Schnetzler, J.D. Phillips & Horner,R.J., Initial vector magnetic anomaly map from MAGSAT. *Geophys. Res. Lett.*, 9 , pp. 273—276 (1982)

Langel, R. A. & Estes R. H., Large-scale, near-field magnetic fields from external sources and the corresponding induced internal field. *J. Geophys. Res.*, vol. 90, no3, pp. 2487-2494 (1985)

Langel, R.A. & Hinze, W.J, *The magnetic field of the Earth's lithosphere*. Cambridge University Press, 429 pp (1998).

Langel, R.A., R.H. Estes, A geomagnetic field spectrum. *Geophys. Res. Lett.* 9, 250–253 (1982)

- 
- Le Mouél, J.L., Sur la distribution des éléments magnétiques en France. Ph.D. thesis, Univ. de Paris, Paris, 1969
- Lesur, V., Introducing localized constraints in global geomagnetic field modelling. *Earth Planets Space*, 58, 477-483 (2006).
- Lowes, F.J., Spatial power spectrum of the main geomagnetic field and extrapolation to the core. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 36, 717–730 (1974).
- Mandea, M and M.E. Purucker, Observing, modeling, and interpreting magnetic fields of the solid earth. *Surv. Geophys.* 26 (2005). doi:10.1007/s10712-005-3857-x
- Maule C., Purucker M, Olsen N., K. Mosegaard, Heat Flux Anomalies in Antarctica Revealed by Satellite Magnetic Data, *Science*, 309 (5733): 464-467 (2005)
- Maus, S., D. Gordon, and D. Fairhead (1997), Curie temperature depth estimation using a self-similar magnetization model, *Geophys. J. Int.*, 129, 163–168, doi:10.1111/j.1365-246X.1997.tb00945.x.
- Maus, M., H. Lühr, M. Rother, K. Hemant, G. Balasis, P. Ritter, C. Stolle, Fifth-generation lithospheric magnetic field model from CHAMP satellite measurements. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 8, Q05013 (2007). doi:10.1029/2006GC001521
- Maus, An ellipsoidal harmonic representation of Earth's lithospheric magnetic field to degree and order 720, *Geophys. Geochem. Geosys* (2010 ). doi: 10.1029/2010GC003026
- Maus, S., Rother, M., Holme, R., Lühr, H., Olsen, N. & Haak, V., 2002. First scalar magnetic anomaly map from CHAMP satellite data indicates weak lithospheric field. *Geophys. Res. Lett.*, vol. 29, no. 14, 10.1029/2001GL013685
- Minty, BRS, Milligan, PR, Luyendyk, T and Mackey, T., Merging airborne magnetic surveys into continental-scale compilations, *Geophysics*, vol.63, pp. 1986-1996 (2003).
- Nimmo, F. and Gilmore, M.S.. Constraints on the depth of magnetized crust on Mars from impact craters. *Journal of Geophysical Research* 106 (2001). doi: 10.1029/2000JE001325.
- Neubert, T., M. Mandea, G. Hulot, R. von Frese, F. Primdahl, J.L. Jørgensen, E. Friis-Christensen, P. Stauning, N. Olsen & T. Risbo, Ørsted satellite captures high-precision geomagnetic field data. *EOS* 82(7), 81-88 (2001).
- Olsen, N., Induction Studies With Satellite Data. *Surveys in Geophysics*, 20, 309 – 340 (1999).
- Olsen, N., G. Hulot & T. J. Sabaka, 2010. Sources of the geomagnetic field and the modern data that enable their investigation, *Handbook of Geomathematics*, W. Freedon, M.Z. Nashed, T. Sonar (Eds.), chapter 5, pp 106 - 124, doi:10.1007/978-3-642-01546-5\_5
- Pilkington, M. and J. P. Todoeschuck (1993), Fractal magnetization of continental crust, *Geophys. Res. Lett.*, 20(7), 627–630, doi:10.1029/92GL03009.
- Quesnel, Y., M. Catalan, T. Ishihara, A new global marine magnetic anomaly data set. *J. Geophys. Res.* 114, B04106 (2009). doi:10.1029/2008JB006144
- Ravat, D., R.A. Langel, M. Purucker, J. Arkani-Hamed, D.E. Alsdorf, Global vector and scalar Magsat magnetic anomaly maps. *J. Geophys. Res.* 100(B10), 20111–20136 (1995)
- Reeves, C., M. De Wit, Making ends meet in Gondwana: retracing the transforms of the Indian Ocean and reconnecting continental shear zones. *Terra Nova* 12, 272–280 (2000).
- Reeves, C., *Aeromagnetic Surveys: Principles, Practice and Interpretation* (GeoSoft, 2005), p. 155
- Reigber C. , H. Lühr & Schwintzer T, Champ, Mission status. *Adv. Space Res.* 30 (2002). doi:10.1016/S02731177(02)00276-4

---

Robin, L. *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroidales*, volume I-III. Gauthier-Villars, Paris (1958)

Sabaka, T. J., N., Olsen & M. E. Purucker, Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Ørsted and CHAMP data. *Geophys. J. Int.*, 159( 2), pp. 521-547 (2004). doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02421.x

Sabaka, T.J., N. Olsen, Enhancing comprehensive inversions using the Swarm constellation. *Earth Planets Space* 58, 371–395 (2006)

Saltus, R. W., and C. Gaina, Circum-Arctic Map compilation, *Eos Trans. AGU*, 88(21), 227-227 (2007) doi:10.1029/2007EO210009.

Schaeffer, N., Efficient Spherical Harmonic Transforms aimed at pseudo-spectral numerical simulations, *Geochem. Geophys. Geosyst.* 14, 751-758, doi:10.1002/ggge.20071 (2013)

Simons, F.J., F.A. Dahlen and M.A. Wieczorek, Spatiospectral concentration on a sphere. *SIAM Rev.*, 48(3), 504-536 (2006). doi: 10.1137/S0036144504445765.

Tyler, R., S. Maus, H. Lüher, Satellite observations of magnetic fields due to ocean tidal flow. *Science* 299, 239–241 (2003)

Velínský, J., Electrical conductivity in the lower mantle: Constraints from CHAMP satellite data by time-domain EM induction modelling. *Phys. Earth Planet. Int.*, 180(3-4) (2010). doi: 10.1016/j.pepi.2010.02.007

Vervelidou, F., Contribution à la modélisation et à l'interprétation multi-échelle du champ magnétique de la lithosphère terrestre, Univ. Paris Diderot, Institut de Physique du Globe de Paris (2013).

Vine, F.J. and D.H. Matthew, Magnetic anomalies over oceanic ridges. *Nature* 199, 947–949 (1963)

Von Frese R. R. B., A. V. Golynsky, H. R. Kim, L. Gaya-Piqué, E. Thébault, M. Chiappini, The next generation Antarctic digital magnetic anomaly map, U.S. Geological Survey and The National Academies; USGS OF-2007-1047, Short Research Paper 093; doi:10.3133/of2007-1047.srp093 (2007).

Wasilewski, P.J., M.A. Mayhew, The Moho as a magnetic boundary revisited. *Geophys. Res. Lett.* 19(22), 2259–2262 (1992)

Wilson, J. Tuzo, Did the Atlantic close and then re-open?, *Nature* 211 (5050): 676–681 (August 13, 1966).

Wonik, T., Trippler, K., Geipel, H., Greinwald, S., Pashkevitch, I., Magnetic anomaly map for Northern, Western and Eastern Europe, *Terra Nova*, vol. 13, pp. 203-213 (2001).