



HAL
open science

Mesure du moment dipolaire électrique du neutron : correction de l'effet systématique du champ fantôme

Laura Ferraris-Bouchez

► **To cite this version:**

Laura Ferraris-Bouchez. Mesure du moment dipolaire électrique du neutron : correction de l'effet systématique du champ fantôme. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2020. Français. NNT : 2020GRALY018 . tel-03130525

HAL Id: tel-03130525

<https://theses.hal.science/tel-03130525v1>

Submitted on 3 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : Physique Subatomique et Astroparticules

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Laura FERRARIS-BOUCHEZ

Thèse dirigée par **Guillaume PIGNOL**

préparée au sein du **Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie de Grenoble**
dans l'École Doctorale de Physique

Mesure du moment dipolaire électrique du neutron : correction de l'effet systématique du champ fantôme

Measurement of the neutron electric dipole moment, correction of the phantom field systematic effect

Thèse soutenue publiquement le **30 juin 2020**,
devant le jury composé de :

Madame Fabienne LEDROIT

Directeur de recherche, Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie de Grenoble, Présidente

Monsieur Gilles BAN

Professeur des Universités, Laboratoire de Physique Corpusculaire de Caen, Rapporteur

Madame Justine SERRANO

Chargé de recherche, Centre de Physique des Particules de Marseille, Rapporteuse

Madame Laure-Line ROUVE

Ingénieur de recherche, G2Elab, Examinatrice

Monsieur Guillaume PIGNOL

MCF, Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie de Grenoble, Directeur de thèse



Remerciements

« Words are, in my not-so-humble opinion, our most inexhaustible source of magic. Capable of both inflicting injury, and remedying it. »

Joanne K. Rowling, *Harry Potter and the Deathly Hallows*

La première personne que je souhaite remercier est bien entendu Guillaume, mon encadrant de thèse, qui a été le meilleur encadrant que j'aurais pu souhaiter. Tu étais toujours disponible lorsque j'avais besoin de ton aide et tu m'as laissée gérer mon travail à mon rythme et à ma façon le reste du temps. Ton humour et tes anecdotes culturelles m'ont régulièrement permis de m'aérer les idées et de faire le plein d'énergie avant de me remettre à la tâche.

Merci à toi aussi, Benoît, que ce soit pour les dizaines de fois où je suis venue te poser des questions de statistiques, de probabilités et d'enseignement, ou pour les interminables conversations sur des livres ou des films. Merci également Dominique pour les conversations enrichissantes et pour partager ma passion pour nos amis les chats (je me sentais moins seule dans ce camp).

Merci à Arnaud et Romain, ainsi que Sélim sur la fin de la thèse, nos post-docs, que j'ai toujours pu aller embêter avec divers soucis ou questions, et qui contribuaient à la bonne ambiance générale de l'équipe UCN.

Ces trois années se sont passées au sein d'une équipe unie avec une super ambiance et je regretterai très probablement nos pauses café et nos déjeuners au restaurant!

Je ne peux pas écrire ces remerciements sans remercier les membres de la collaboration nEDM, en particulier Stéphanie, Philipp et Nick, avec qui j'ai beaucoup échangé. Merci à tous les doctorants et post-doctorants pour les bons moments au restaurant pendant les réunions de collaboration. Un merci spécial à Pierrick, avec qui j'ai plaisanté moult fois et que j'ai quelques fois écouté chanter avec plaisir.

Un grand merci également aux autres doctorants, surtout ceux de mon année, et surtout Nico (depuis 2 ans) et Seb (depuis le stage de M2), avec qui j'ai pu partager des anecdotes, et dans le bureau desquels je suis venue me réjouir ou me plaindre un nombre incalculable de fois.

Un merci plus général à l'ensemble des collègues du LPSC que j'ai pu croiser au cours de ma thèse et qui contribuaient à ce que ce laboratoire soit un lieu où il est agréable de venir travailler.

Merci également à Guillaume Laget, qui m'a donné la chance d'enseigner en IUT, ce qui m'a permis de confirmer ma volonté de devenir enseignante.

Grenobloise de naissance, j'ai eu la chance d'être entourée de la plupart de mes amis d'enfance et j'ai aussi rencontré de nombreuses personnes fantastiques ces dernières années qui ont été à mes côtés pendant cette aventure. Je ne peux pas citer chacun de mes amis pour ce qui les rend si uniques sans écrire une deuxième thèse mais sachez que vous êtes tous inclus dans ces

remerciements pour les fous rires, les soirées jeux, les dîners et les longues conversations partagés avec vous tous. Vous êtes les encouragements qui m'ont aidée à aller jusqu'au bout de ce doctorat! Je citerai tout de même mes deux physiciennes reconverties préférées, Charlène et Juliette, qui m'ont écoutée parler de ma thèse des heures durant, qui l'ont lue (et corrigée!) et qui m'ont fait répéter diverses présentations dont ma soutenance.

Merci à mes parents, mon grand-frère, mon cousin Mathieu (sans qui je n'aurais pas fait de fac de physique!) et le reste de ma famille pour votre soutien, vos encouragements et votre confiance en moi continuelle qui m'ont toujours poussée à me dépasser.

Merci enfin aux deux êtres qui partagent mon quotidien. Lilith, ma petite vache d'amour qui a passé les heures d'écriture de ma thèse sur mes genoux à ronronner. Et toi Valentin, que je ne saurai jamais assez remercier de me supporter, de m'encourager dans tout ce que j'entreprends et surtout, de me nourrir.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	1
1 La mesure du moment dipolaire électrique du neutron	3
1.1 Les mesures d'EDM	4
1.1.1 Motivations	4
1.1.2 Historique de la mesure de l'EDM du neutron	9
1.1.3 Les expériences d'EDM dans le monde	10
1.2 Le neutron	16
1.2.1 Le neutron libre	16
1.2.2 Interactions fondamentales	18
1.2.3 Neutrons ultra-froids (UCN)	21
1.3 Principe de mesure et difficultés	23
1.3.1 Principe général de la mesure	23
1.3.2 Procédure de Ramsey	24
1.3.3 L'indispensable co-magnétomètre mercure	27
1.3.4 Le faux EDM du mercure	28
1.4 Conclusion	34
1.5 Références	35
2 L'expérience nEDM	41
2.1 Description de l'expérience	42
2.1.1 La source de neutrons ultra-froids	42
2.1.2 Le spectromètre nEDM	44
2.2 Génération du champ magnétique	47
2.2.1 Le système de bobines	47
2.2.2 Blindages magnétiques	50
2.2.3 Simulations de la bobine B_0 et du blindage passif	52
2.3 Contrôle en ligne du champ magnétique	56
2.3.1 Fonctionnement du co-magnétomètre mercure	56
2.3.2 Inhomogénéités magnétiques et co-magnétomètre mercure	60
2.3.3 Magnétométrie césium	65
2.4 La polarisation des UCN	68
2.4.1 Les mécanismes de dépolarisation	68
2.4.2 Mesure de la dépolarisation dues aux inhomogénéités	72
2.4.3 Algorithme d'optimisation de l'uniformité magnétique	80

2.5	Stratégie de correction du faux EDM	84
2.5.1	Sensibilité de l'expérience nEDM	84
2.5.2	Correction au premier ordre	85
2.5.3	Correction des ordres supérieurs	86
2.6	Conclusion	88
2.7	Références	89
3	Cartographie du champ magnétique	93
3.1	Méthode de cartographie	94
3.1.1	Le mappeur	94
3.1.2	Étalonnage du détecteur	98
3.1.3	Les campagnes de cartographie	101
3.2	Analyse d'une carte de champ	104
3.2.1	Analyse cercle par cercle	105
3.2.2	Ajustement par les modes harmoniques du champ	107
3.2.3	Combinaison des axes d'analyse	110
3.3	Analyse globale	111
3.3.1	Analyse des cartes de B_0 : reproductibilité et répétabilité	112
3.3.2	Analyse des cartes de B_0 : comparaison avec les simulations	122
3.3.3	Analyse des cartes de bobines : linéarité et prédiction du champ	123
3.4	Conclusion	129
3.5	Références	131
4	Point de croisement et EDM du neutron	133
4.1	Méthode du point de croisement	134
4.1.1	Les sources de décalage du rapport \mathcal{R}	134
4.1.2	Équations de la méthode du point de croisement	138
4.2	Détermination de la hauteur du centre de masse des neutrons $\langle z \rangle$	140
4.2.1	Ajustement bloc par bloc	140
4.2.2	Choix de la méthode de mesure du gradient gravitationnel	141
4.3	Covariance de la méthode du point de croisement	144
4.3.1	Contribution statistique	144
4.3.2	Contribution de la reproductibilité du champ	145
4.3.3	Contribution de l'erreur sur la prédiction des gradients de champ	146
4.4	Résultat de la méthode du point de croisement	147
4.4.1	Le résultat de l'équipe Ouest	147
4.4.2	Mesure de l'EDM du neutron	150
4.5	Références	152
	Conclusion	394
A	Paramétrisation harmonique du champ magnétique	155
B	Inhomogénéité transverse	161
B.1	Contributions pures	161
B.2	Termes d'interférences	166
C	Modèle statistique des groupes de cartes	171

D Résultats annexes de l'analyse des cartographies	179
D.1 Reproductibilité et répétabilité	179
D.2 Vérification de la prédiction	194
E Références	207
F Liste des acronymes	209

Introduction

« Turn to page 394. »

Severus Snape, in *Harry Potter and the prisoner of Azkaban* by Joanne K. Rowling

Mesurer un moment dipolaire électrique (EDM) non nul pour un système simple de spin $1/2$, comme un électron ou un nucléon, aurait des implications significatives quant à l'exploration de la physique au-delà du Modèle Standard (MS) de la physique des particules. Pour de tels systèmes, l'EDM est une propriété fondamentale dont l'existence est prédite par le MS. Jusqu'à présent, cette propriété a toutefois toujours été mesurée comme étant compatible avec zéro et la sensibilité des expériences actuelles de mesure d'EDM à travers le monde est toujours plusieurs ordres de grandeurs au-delà des prédictions données par la théorie électrofaible du MS.

Bien que le MS de la physique des particules soit actuellement la théorie la plus performante pour décrire la physique à l'échelle subatomique, il existe des zones d'ombre qui ne trouvent pas leur explication dans cette théorie en l'état. L'asymétrie matière / anti-matière de l'Univers observée, en particulier, ne peut être expliquée par le MS seul. En particulier, la quantité de violation de CP existant dans le MS est insuffisante pour produire une telle asymétrie. De nouveaux modèles ou des extensions du MS permettant de combler ces failles ont donc été inventés. L'EDM des systèmes simples évoqués ci-avant, comme le neutron, est une observable qui viole la symétrie T de renversement du temps et donc, en vertu du théorème CPT , la symétrie CP . De ce fait, les modèles de nouvelle physique au-delà du MS prédisent généralement des valeurs plus larges pour les EDM que le MS seul. Cela fait des EDM des systèmes simples des sondes privilégiées pour la recherche de nouvelles sources de violation de CP . De ce fait, de nombreux projets de mesure d'EDM de divers systèmes existent à travers le monde. Nous nous intéresserons ici à la mesure de celui du neutron, particule très intéressante à étudier du fait de sa neutralité électrique.

Les expériences de mesure d'EDM sont des expériences de haute précision, qui nécessitent donc une grande sensibilité statistique et un contrôle optimal des effets systématiques. C'est sur ce dernier aspect particulier de l'expérience nEDM de l'Institut Paul Scherrer (PSI) que nous allons nous concentrer. Dans ce manuscrit, je présenterai donc la mesure de l'EDM du neutron réalisée au cours de cette expérience.

Dans un premier chapitre, je reviendrai plus en détail sur les motivations de la mesure d'un EDM pour une particule telle que le neutron. Je présenterai de façon non exhaustive les différents projets et expériences de mesure d'EDM dans le monde et ferai un bref historique de la mesure de l'EDM du neutron. Afin de comprendre le défi technique représenté par ce type d'expérience, je présenterai ensuite les différentes propriétés des neutrons, en particulier des neutrons ultra-froids, qui sont utilisés dans l'expérience nEDM. La description du principe de mesure permettra également de mettre en lumière les contraintes et difficultés soulevées par la précision requise pour une telle mesure. Nous verrons en particulier qu'un contrôle extrêmement fin des effets systématiques est nécessaire afin de ne pas dégrader la sensibilité statistique.

Le deuxième chapitre de cette thèse sera dédié à la description de l'expérience nEDM de PSI. Depuis la production des neutrons jusqu'à leur détection, je m'attacherai à décrire les différents composants de l'expérience et leur fonctionnement. Je décrirai particulièrement en détail l'environnement magnétique de l'expérience, ainsi que les outils utilisés pour générer le champ magnétique uniforme nécessaire et ceux pour le contrôler. Une étude de l'effet des inhomogénéités du champ magnétique sur la précision de la mesure sera également présentée. Puis je m'attacherai à décrire la procédure de correction de l'effet systématique principal de l'expérience grâce à la cartographie du champ magnétique.

Au cours du troisième chapitre, je présenterai le principe de la cartographie du champ, qui permet de caractériser hors-ligne les inhomogénéités du champ magnétique lors de la mesure de l'EDM. Je détaillerai les différentes étapes de l'analyse, en m'intéressant particulièrement aux différentes sources d'incertitudes afin de pouvoir par la suite les propager de façon appropriée sur l'EDM mesuré.

Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre, les résultats issus de la cartographie du champ seront utilisés pour corriger les effets systématiques affectant l'EDM mesuré. La dernière étape de l'analyse EDM, dite méthode du point de croisement, sera ensuite appliquée afin d'extraire le résultat final de l'expérience nEDM et ainsi établir la limite d'exclusion telle qu'elle a été publiée en février 2020 par la collaboration nEDM.

Chapitre 1

La mesure du moment dipolaire électrique du neutron

« *That's what Hermione does. [...] When in doubt, go to the library.* »

Ron Weasley, in *Harry Potter and the Chamber of Secrets* by Joanne K. Rowling

Sommaire

1.1 Les mesures d'EDM	4
1.1.1 Motivations	4
1.1.2 Historique de la mesure de l'EDM du neutron	9
1.1.3 Les expériences d'EDM dans le monde	10
1.2 Le neutron	16
1.2.1 Le neutron libre	16
1.2.2 Interactions fondamentales	18
1.2.3 Neutrons ultra-froids (UCN)	21
1.3 Principe de mesure et difficultés	23
1.3.1 Principe général de la mesure	23
1.3.2 Procédure de Ramsey	24
1.3.3 L'indispensable co-magnétomètre mercure	27
1.3.4 Le faux EDM du mercure	28
1.4 Conclusion	34
1.5 Références	35

Les mesures d'EDM ont fait leur apparition dans le monde de la physique fondamentale en 1950 et sont aujourd'hui l'un des sujets de recherche les plus intéressants pour l'exploration au-delà du Modèle Standard. Il s'agit toutefois d'expériences qui demandent une compréhension théorique poussée et des compétences techniques de très haute précision. L'EDM du neutron ne fait pas exception à cette règle et sa mesure est de ce fait extrêmement exigeante. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux limites du Modèle Standard de la physique des particules et aux réponses que la mesure d'un EDM pourrait y apporter. Nous ferons ensuite un bref tour historique et géographique des mesures d'EDM, avant de nous intéresser plus en détail au neutron et à la mesure de son EDM.

1.1 Les mesures d'EDM

1.1.1 Motivations

1.1.1.1 Les symétries du Modèle Standard

Le Modèle Standard de la physique des particules est la meilleure théorie permettant de décrire et prédire le comportement physique à l'échelle subatomique. Il s'agit d'une théorie quantique des champs relativiste et locale qui repose sur la conservation de la symétrie globale *CPT* (appelée théorème *CPT*). Cette symétrie est la combinaison simultanée des trois symétries discrètes suivantes :

- La conjugaison de charge *C*, qui transforme une particule en son anti-particule,
 $\hat{C} : e^- \rightarrow e^+$
- La parité *P*, qui renverse les coordonnées spatiales,
 $\hat{P} : \vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
- Le renversement du temps *T*, qui inverse le sens du temps,
 $\hat{T} : t \rightarrow -t$

La première violation de l'une de ces symétries a été mise en évidence pour la première fois en 1957 *WU et collab. [1957]* dans une expérience étudiant la décroissance β du ^{60}Co . La distribution angulaire de la direction de l'électron émis a été observée comme étant asymétrique, démontrant la violation de *P* dans les désintégrations β . La symétrie *CP* a alors été proposée comme symétrie fondamentale, mais sa violation a, à son tour, été démontrée expérimentalement en 1964 *CHRISTENSON et collab. [1964]* dans la désintégration des kaons neutres. Les violations de ces symétries ont depuis été observées dans de nombreux autres systèmes.

En revanche, la violation de *CPT* n'a jusqu'à présent jamais été observée. Une violation de cette symétrie impliquerait soit une remise en cause de la causalité, soit une remise en cause de l'invariance de Lorentz. En vertu du théorème *CPT*, une violation de *T* implique donc une violation de *CP*, et inversement.

1.1.1.2 Baryogénèse électrofaible

Malgré son efficacité pour la description des phénomènes subatomiques, le Modèle Standard montre toutefois des lacunes pour expliquer tous les phénomènes observés. En effet, l'origine de la masse des neutrinos, la nature et l'origine de la matière et de l'énergie noires restent inexpliquées dans le cadre du MS. L'asymétrie baryonique de l'Univers (BAU) peine également à être expliquée par le Modèle Standard. C'est à ce point particulier que nous allons nous intéresser.

Notre Univers est principalement composé de matière. Les modèles actuels de physique (MS et relativité générale) ne permettent pas d'expliquer la très faible proportion d'anti-matière de l'Univers. En effet, le Big Bang aurait théoriquement dû produire des quantités équivalentes de matière

et d'anti-matière. Une potentielle explication de la non-observation d'anti-matière en quantité suffisante serait que l'Univers se compose de zones de matière et d'anti-matière. Toutefois, dans ce cas de figure, l'annihilation lors de rencontre matière / anti-matière devrait produire un excès de rayonnement détectable, ce qui n'est pas le cas. Le ratio entre le nombre de baryons et le nombre de photons observé est de PLANCK COLLABORATION [2016] :

$$\eta = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \sim 10^{-10}, \quad (1.1)$$

où n_B , $n_{\bar{B}}$ et n_γ sont les densités respectives de baryons, anti-baryons et photons.

En 1967, Sakharov propose trois conditions nécessaires pour produire une telle asymétrie baryonique SAKHAROV [1967] :

- la non-conservation du nombre baryonique B,
- la violation des symétries C et CP ,
- des interactions hors équilibre thermique.

Ces trois conditions existent *a priori* dans le MS. En effet, la non-conservation de B est possible *via* le mécanisme non-perturbatif des sphalérons, qui intervient dans la théorie de baryogénèse électrofaible MORISSEY et RAMSEY-MUSOLF [2012] et permet de convertir des baryons en anti-leptons et des anti-baryons en leptons. Le Modèle Standard contient également des sources de violation de C et CP , à travers l'interaction faible pour le premier cas et les interactions faible et forte pour le second. Enfin, les conditions permettant des interactions hors équilibre thermique ont pu être atteintes lors de transitions de phase dans les premiers instants de l'Univers.

Plusieurs scénarios de baryogénèse satisfaisant ces trois conditions ont été proposés. Parmi ceux-ci, la baryogénèse électrofaible est une possibilité intéressante, de par sa capacité à être testée expérimentalement. Cette théorie propose que la baryogénèse soit arrivée durant la transition de phase électrofaible de l'Univers, à une température d'environ 100 GeV. Dans le cadre de cette théorie, le Modèle Standard ne suffit toutefois pas à produire la BAU observée CLINE [2017]. En effet, deux problèmes majeurs se posent. Le premier concerne la transition de phase électrofaible. S'il s'agit d'une transition de phase du deuxième ordre, la BAU produite est largement en-deçà de la valeur observée. Une transition du premier ordre est donc nécessaire pour justifier cette asymétrie. Toutefois, pour qu'une transition du premier ordre soit possible, la masse du boson de Higgs aurait dû être inférieure à 80 GeV. La mesure de la masse du Higgs à 125 GeV ATLAS COLLABORATION ET CMS COLLABORATION [2015] exclut donc également cette possibilité, à moins d'élargir le secteur de Higgs. Le second problème vient de la quantité de violation de CP dans le Modèle Standard. En effet, même dans le cas d'une transition de phase électrofaible du premier ordre, la violation de CP du MS est insuffisante aux échelles d'énergie de la baryogénèse électrofaible et permettrait seulement d'obtenir une asymétrie de l'ordre de 10^{-26} HUET [1994].

Pour que ce scénario fonctionne, de la physique au-delà du MS générant de la violation de CP et modifiant la dynamique de la transition de phase électrofaible est donc nécessaire.

1.1.1.3 Violation de CP dans le Modèle Standard

Le premier mécanisme de violation de CP dans le MS vient de l'interaction faible. Les états propres de saveur et de masse des quarks étant différents, le mélange des saveurs est autorisé et est décrit dans le lagrangien du MS (voir TANABASHI et collab. [2018]) à travers le terme décrivant

le couplage entre les quarks et le boson W,

$$\frac{-g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) \gamma^\mu W_\mu^+ V \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

où V est la matrice de mélange des quarks Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) CABIBBO [1963]; KOBAYASHI et MASKAWA [1973]

$$V = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Il s'agit d'une matrice unitaire 3×3 qui peut être paramétrée à l'aide de trois angles de mélange θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} et d'une phase complexe δ , de la façon suivante :

$$V = \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

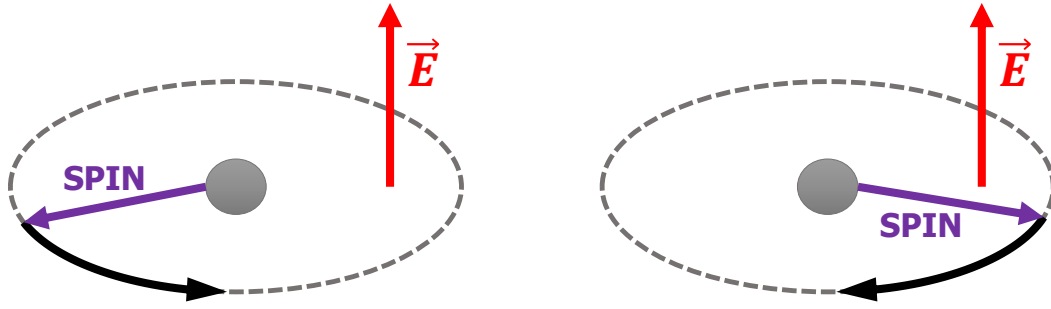
où $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$. La phase δ de cette matrice traduit la violation de CP dans les processus de changement de saveur. Les expériences BABAR, Belle et LHCb étudiant la violation de CP dans les mésons B et D ont permis de mesurer explicitement cette phase, qui continue jusqu'à présent de rendre compte de toutes les observations de violation de CP .

Il existe toutefois un autre terme de violation de CP autorisé dans le MS qui provient de l'interaction forte. Ce terme apparaît dans le lagrangien de chromodynamique quantique (QCD) CHUPP et collab. [2019] sous la forme d'un terme couplant le champ de gluons $G^{\mu\nu}$ comme suit,

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{\alpha_s}{16\pi^2} \bar{\theta} \text{Tr}(G^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}), \quad (1.5)$$

où $\tilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{\alpha\beta}/2$. Ce terme $\bar{\theta}$ est souvent appelé phase theta QCD. Ce paramètre compris entre $-\pi$ et π devrait naturellement être de l'ordre de l'unité et pourrait induire des EDM hadroniques larges. Toutefois, les limites expérimentales respectives des EDM du neutron et de l'atome de ^{199}Hg le contraignent à être extrêmement petit, $|\bar{\theta}| < 10^{-10}$ POSPELOV et RITZ [2005]. L'existence de mécanismes inconnus au-delà du MS fixant cette phase à zéro est supposée pour justifier la valeur très faible de $|\bar{\theta}|$. Cette valeur non-naturelle constitue le problème de la violation de CP dans le secteur fort, nommé le « Strong CP Problem ».

Deux sources de violation de CP sont donc prédites par le MS. La première fait partie de la théorie électrofaible et a été observée dans une grande diversité de processus auprès des collisionneurs de particules. La seconde est prédite par l'interaction forte mais n'a jamais été mesurée et est contrainte par les mesures à être extraordinairement faible. Comme nous l'avons dit, ces sources sont insuffisantes pour justifier les observations cosmologiques et la recherche de nouvelles sources de violation de CP est donc l'un des sujets d'intérêt de la physique fondamentale actuelle. Il existe différents modèles d'extension du MS qui contiennent de la violation de CP supplémentaire. Ces modèles prédisent souvent des valeurs d'EDM non-négligeables pour les particules fondamentales. De ce fait, les EDM de ces particules sont sensibles à ces nouvelles sources de violation de CP , comme nous le verrons ci-après.



(a) Évolution du spin d'une particule possédant un EDM non nul dans un champ électrique \vec{E} . (b) Version temporellement inversée de l'évolution (a).

FIGURE 1.1 – Application de la symétrie T sur une particule de spin $1/2$ possédant un EDM non nul. Le fait que (a) et (b) soient différents montre la violation de T due à l'existence d'un EDM.

1.1.1.4 Qu'est-ce qu'un moment dipolaire électrique?

D'un point de vue classique, le moment dipolaire électrique \vec{d} représente la séparation des centres de masse des charges positives et négatives d'un système composite. D'un point de vue plus général, il caractérise l'interaction du système considéré avec un champ électrique externe. De ce fait, des systèmes simples, tel que le neutron, et même non-composites, tel que l'électron, peuvent également posséder un EDM non nul. L'énergie d'interaction d'un EDM avec un champ électrique externe \vec{E} est $H = -\vec{d} \cdot \vec{E}$. L'EDM étant un opérateur vectoriel, pour une particule de spin $1/2$, il doit être proportionnel aux matrices de Pauli $\hat{\sigma}$ et doit donc être parallèle ou anti-parallèle au spin. Le Hamiltonien d'une particule de spin $1/2$, possédant un EDM permanent \vec{d} , dans un champ électrique \vec{E} s'écrit donc sous la forme

$$\hat{H} = -d\hat{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (1.6)$$

On voit dans (1.6) que pour des systèmes quantiques, l'EDM représente l'amplitude du couplage entre le spin et un champ électrique externe, de la même façon que le moment magnétique μ d'une particule peut être vu comme la constante de couplage entre le spin et le champ magnétique. En théorie quantique des champs, ce couplage est décrit par le lagrangien suivant, dont la limite non-relativiste donne le Hamiltonien (1.6) CHUPP et collab. [2019],

$$\mathcal{L}_{\text{EDM}} = -i\frac{d}{2}\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 F_{\mu\nu}\Psi, \quad (1.7)$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique, ψ désigne un champ spinoriel et $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. γ^μ désigne les quatre matrices de Dirac, qui satisfont l'algèbre $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. On peut voir que ce couplage (1.7) viole la parité P et la symétrie de renversement du temps T , respectivement à travers la matrice de Dirac $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ et le nombre imaginaire i . En vertu du théorème CPT , l'existence d'un EDM pour des particules élémentaires viole donc la symétrie CP . On note que le lagrangien (1.7) n'est pas renormalisable et qu'il s'agit d'un lagrangien effectif permettant de traduire les diagrammes à boucle de la théorie électrofaible ou au-delà du MS contribuant à la création d'un EDM.

L'effet d'un champ électrique (perpendiculaire au spin) sur une particule de spin $1/2$ possédant un moment dipolaire électrique non nul, ainsi que la violation de T causée par l'existence d'un EDM pour une telle particule, sont illustrés sur la figure 1.1.

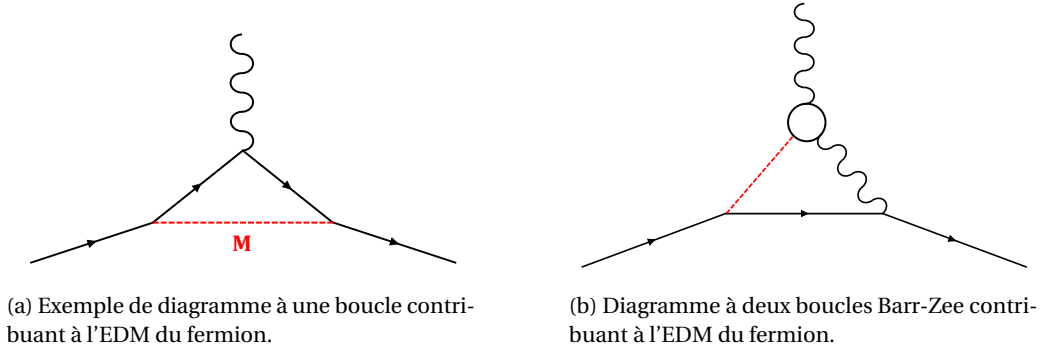


FIGURE 1.2 – Exemples de couplages contribuant à l'EDM du fermion.

A travers la phase δ de la matrice CKM, la théorie électrofaible du Modèle Standard prédit des valeurs d'EDM extrêmement faibles pour les fermions ($\sim 10^{-32} e \text{ cm}$ pour le neutron SENG [2015]). Plusieurs ordres de grandeur séparent ces prédictions des sensibilités expérimentales actuelles, comme nous le verrons dans la section 1.1.3. L'EDM étant une observable violant CP , les modèles permettant d'étendre le MS contenant de la violation de CP prédisent des EDM sensiblement plus grands. C'est pour cette raison que l'on dit souvent des expériences de mesure d'EDM que ce sont des « quasi null tests ». En effet, si l'on mesure un EDM aux sensibilités actuelles, alors il sera directement la preuve de nouvelle physique.

1.1.1.5 Violation de CP au-delà du Modèle Standard et EDM

Comme nous l'avons évoqué ci-avant, ils existent plusieurs modèles d'extension du MS qui peuvent prédire des valeurs d'EDM significativement plus larges que celles prédites par la phase δ de la matrice CKM. Nous donnerons ici deux exemples de couplages générant des EDM pour les fermions afin d'avoir une idée plus concrète de l'intérêt de la recherche d'EDM.

Le premier de ces exemples est illustré par la figure 1.2a. Il s'agit d'un diagramme possible impliquant l'échange d'un boson lourd de masse M , avec un couplage complexe $ge^{i\phi}$ au fermion. Un tel diagramme générerait un EDM

$$d \simeq e\hbar c \frac{g^2}{(4\pi)^2} \sin(\phi) \cos(\phi) \frac{m_f}{M^2}. \quad (1.8)$$

A partir de cette formule, on peut estimer l'ordre de grandeur de l'EDM des fermions de première génération induit par un boson à l'échelle du TeV avec la violation de CP maximale ($\sin(\phi) \simeq 1$). Pour le quark d , soit $m_f = 5 \text{ MeV}$, et avec $M \simeq 1 \text{ TeV}$ et $g^2/(4\pi) \simeq 10^{-2}$, on trouve $d \simeq 10^{-25} e \text{ cm}$. Les EDM des fermions sont donc sensibles à des masses de nouvelle physique, au-delà de l'échelle électrofaible.

Notre deuxième exemple concerne les couplages du boson de Higgs aux fermions. Ceux-ci sont décrits de façon générale par le lagrangien suivant,

$$\mathcal{L}_h = -\frac{y_f}{\sqrt{2}} (\kappa_f \bar{f} f h + i\tilde{\kappa}_f \bar{f} \tilde{\gamma}_5 f h), \quad (1.9)$$

où y_f est le couplage de Yukawa du fermion f , et κ_f et $\tilde{\kappa}_f$ sont respectivement les constantes de couplages conservant et violant CP . Notons que le Modèle Standard prédit $\kappa_f = 1$ et $\tilde{\kappa}_f = 0$. Ce couplage génère un EDM pour les fermions à travers le diagramme à deux boucles visible sur la figure 1.2b. Les limites sur les couplages aux quarks violant CP déduites des limites sur les EDM de l'électron et du neutron sont visibles sur la figure 1.3. Il est intéressant de constater que les mesures

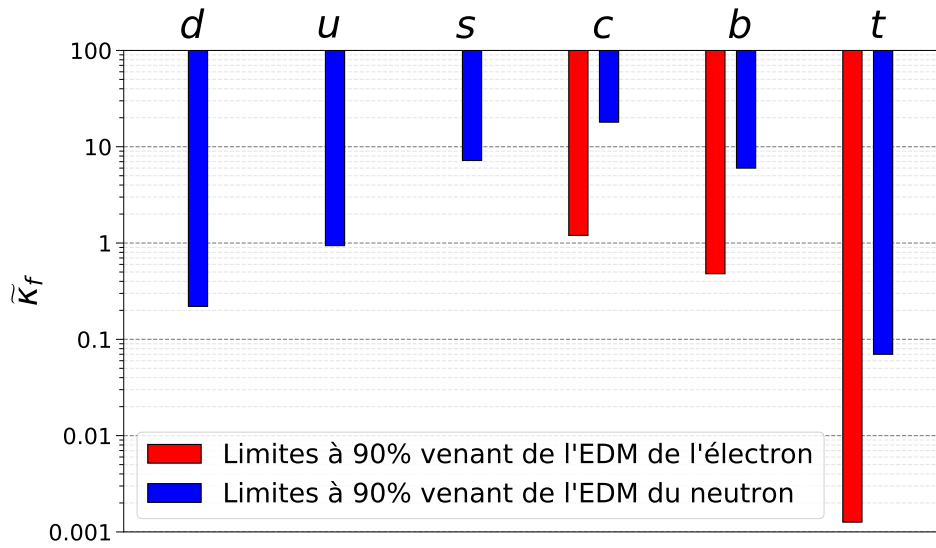


FIGURE 1.3 – Limites sur les couplages violant CP du boson de Higgs aux six saveurs de quark. Les limites en rouge (bleu) sont dérivées des mesures de l'EDM de l'électron (du neutron). Graphique repris et adapté de PSI WEBSITE [2019].

d'EDM sont complémentaires. En effet, les EDM de l'électron et du neutron sont respectivement plus sensible au couplage des quarks lourds et légers. On peut également observer grâce à cette figure la grande sensibilité des mesures d'EDM. En effet, les couplages de l'ordre de l'unité, soit du même ordre que les couplages conservant CP sont déjà exclus pour la plupart des saveurs de quarks. Les futures générations d'expérience avec l'amélioration de la sensibilité devrait permettre de réduire ces limites d'un ordre de grandeur si elles ne mènent pas à l'observation d'un signal EDM non nul.

Nous avons pu montrer à travers ces exemples que les EDM des fermions sont des sondes sensibles aux potentielles sources de violation de CP au-delà du MS. De plus, notre deuxième exemple nous a permis d'illustrer la complémentarité des différentes recherches d'EDM. Intéressons-nous à présent aux diverses expériences de mesure d'EDM à travers les années et le monde.

1.1.2 Historique de la mesure de l'EDM du neutron

La mesure de l'EDM du neutron fut évoquée pour la première fois en 1950 dans la proposition d'expérience de Purcell et Ramsey [PURCELL et RAMSEY [1950]]. L'expérience consistait à utiliser un faisceau de neutrons thermiques polarisés, auquel était appliquée la procédure de Ramsey, qui sera explicitée dans la section 1.3.2. Les neutrons thermiques ont une vitesse d'environ 2200 m/s. Ils étaient envoyés précesser librement dans un environnement magnétique très homogène entouré d'électrodes permettant de générer un champ électrique de quelques dizaines de kV/cm, tantôt parallèle tantôt anti-parallèle à la direction du champ magnétique. La comparaison de la fréquence de précession de Larmor des neutrons f_n dans ces deux cas de figure permettait alors d'extraire l'EDM, comme nous pourrions le voir dans la section 1.3.1. L'expérience avait à l'époque déjà permis de mesurer un résultat compatible avec zéro. Celui-ci n'a toutefois pas été publié immédiatement mais sept ans plus tard, après la découverte de la violation de la parité et la première limite sur la valeur de l'EDM du neutron est donc établie en 1957, ($|d_n| < 5 \times 10^{-20} e \text{ cm}$) SMITH et collab. [1957].

Les mesures de l'EDM du neutron avec des faisceaux de neutrons froids ont été utilisées jus-

qu'en 1977, avant d'atteindre leur limite en sensibilité ($|d_n| < 3 \times 10^{-24} e \text{ cm}$) DRESS et collab. [1977]. Elles étaient alors limitées par l'effet systématique relativiste $v \times E/c^2$ qui ne pouvait être parfaitement corrigé, du fait de la méconnaissance de l'angle entre les champs E et B. Il s'agit de l'effet systématique principal des mesures de l'EDM du neutron actuelles et sa correction sera d'ailleurs le sujet de cette thèse. De plus, le temps de précession libre des neutrons était alors de l'ordre de quelques ms, ce qui, comme nous le verrons par la suite, était un facteur statistique limitant pour une telle mesure.

Ces expériences ont ensuite été remplacées par des expériences utilisant des neutrons ultra-froids (en anglais, ultracold neutrons, ou UCN), ceux-ci ayant la particularité de pouvoir être stockés dans des bouteilles pendant des temps beaucoup plus longs. Les propriétés remarquables des UCN seront explicitées dans la section 1.2.3. La première mesure utilisant des UCN a été publiée en 1980 ($|d_n| < 1.6 \times 10^{-24} e \text{ cm}$) ALTAREV et collab. [1980]. Les neutrons pouvaient alors être stockés durant un temps moyen de 5 s, ce qui était une augmentation d'un facteur 10^3 par rapport aux mesures exploitant des faisceaux.

Au cours des années qui ont suivi, ces expériences ont été perfectionnées et la limite a été ré-établie une dizaine de fois jusqu'à celle publiée en 2006 (et révisée en 2015) par la collaboration RAL/Sussex/ILL ($|d_n| < 3 \times 10^{-26} e \text{ cm}$ (90% NC)) BAKER et collab. [2006]; PENDLEBURY et collab. [2015]. Le spectromètre utilisé pour cette dernière mesure a ensuite été déplacé en 2009 à PSI et a été amélioré par la collaboration nEDM avant de prendre deux années de mesure en 2015 et 2016. Ces deux années suivies de l'analyse des données ont mené à l'actuelle limite sur la valeur de l'EDM du neutron ($|d_n| < 1.8 \times 10^{-26} e \text{ cm}$ (90% NC)), publiée en 2020 ABEL et collab. [2020].

Depuis le premier résultat en 1957 jusqu'au dernier publié en 2020, le contrôle des effets systématiques et l'amélioration de la statistique ont été les maîtres mots guidant chaque nouveau projet d'expérience visant à mesurer l'EDM du neutron. C'est également le cas des expériences mesurant l'EDM d'autres particules. Un petit historique non-exhaustif des différentes limites sur les mesures d'EDM est visible en figure 1.4. Plusieurs nouvelles expériences sont actuellement en cours, en construction ou en projet autour du monde et elles poursuivent toutes ce même objectif afin de pouvoir atteindre encore de meilleures sensibilités.

1.1.3 Les expériences d'EDM dans le monde

Il y a actuellement plus d'une vingtaine de projets de mesure d'EDM dans le monde. Ces projets sont répertoriés géographiquement sur la figure 1.5 et listés dans le tableau 1.1. Le neutron est loin d'être la seule cible pour une recherche d'EDM. En effet, il existe de nombreuses autres expériences qui utilisent des atomes, des molécules, ou même des particules chargées dans un anneau de stockage KLAUS [2013], KIRCH [2013], PIGNOL [2019]. L'existence de cette variété dans la recherche d'EDM est particulièrement intéressante pour différentes raisons. Tout d'abord, étant donné la complexité de telles mesures, avec la présence d'effets systématiques importants difficiles à compenser, en cas de mesure d'un EDM non nul, la confirmation par une autre expérience permettrait de prendre ce résultat avec sérieux. De plus, l'existence d'un EDM pour ces systèmes résulte de combinaisons d'interactions physiques. Même si la découverte d'un EDM non nul serait déjà en soi une découverte spectaculaire de physique au-delà du Modèle Standard, il serait difficile d'en identifier la source sans avoir d'autres résultats. L'utilisation des différentes mesures d'EDM combinées permet donc plus facilement d'identifier ou de contraindre les modèles.

Les recherches d'EDM pour les atomes et les molécules sont généralement séparées en deux catégories : les systèmes diamagnétiques et les systèmes paramagnétiques. Pour comprendre la

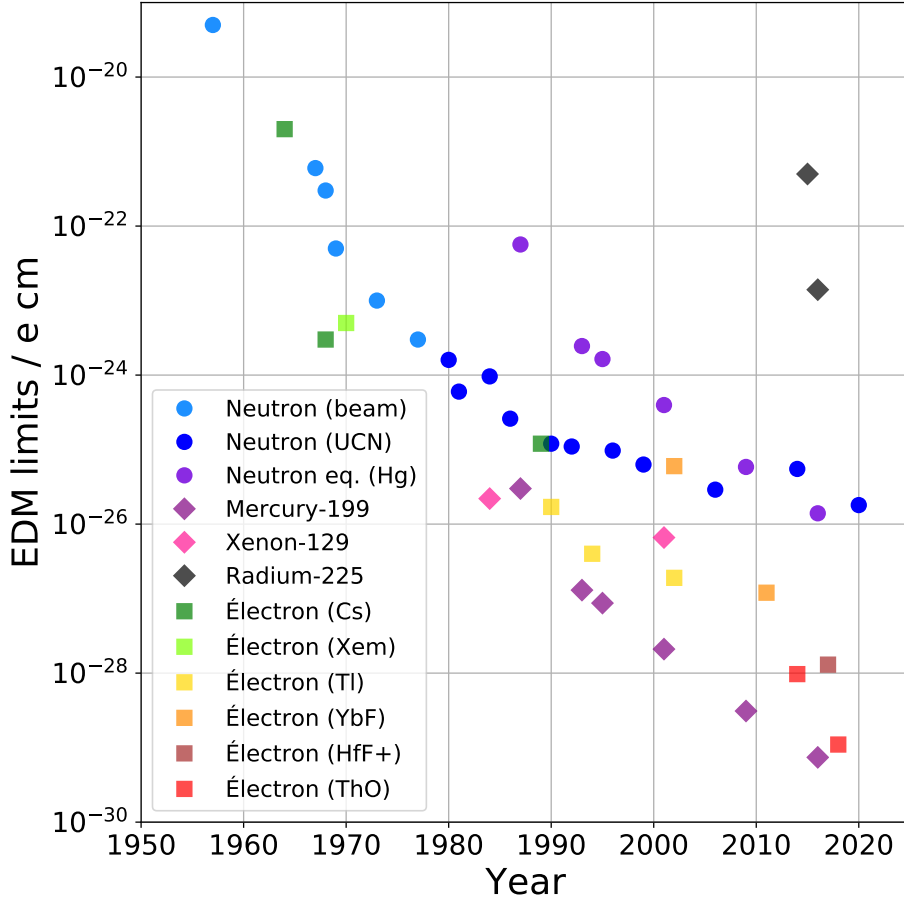


FIGURE 1.4 – Valeurs des différentes limites établies par les expériences de mesure d’EDM depuis 1950 jusqu’à 2020. Les mesures labellées "Neutron eq. (Hg)" font référence à la limite indirecte que l’on peut établir sur l’EDM du neutron à partir de la mesure de l’EDM du mercure-199.

distinction entre ces deux catégories, il est nécessaire de comprendre les différentes contributions à l’EDM atomique. Le théorème de Schiff SCHIFF [1963] stipule qu’un atome neutre, constitué d’un noyau ponctuel et d’électrons non-relativistes, ne peut avoir d’EDM permanent. En effet, un champ électrique externe est écranté par la réorganisation du nuage électronique, si bien que les électrons et le noyau sont soumis effectivement à un champ électrique nul. Cependant, la prise en compte d’effets relativistes SANDARS [1968] LIU et ENGEL [2007] et d’effets venant de la taille finie du noyau SANDARS [1967] FLAMBAUM et KOZLOV [2012] ont permis de mettre en évidence des contributions non nulles à l’EDM atomique KERMAIDIC [2016] :

$$d_{\text{at}} = \rho_e^{\text{at}} d_e + \mathcal{O}_{eN} + v^{\text{at}} S_{\text{at}}, \quad (1.10)$$

où $[v^{\text{at}}] = \text{cm}^{-2}$ et $[S_{\text{at}}] = e \text{ cm}^3$. Ces trois contributions sont les suivantes :

- L’EDM de l’électron d_e . Selon le théorème de Schiff, celui-ci devrait être totalement écranté par la réorganisation du nuage atomique. Ce n’est toutefois pas le cas si on considère l’électron comme relativiste, or, dans le cas des atomes lourds, les électrons les plus proches du noyau sont ultra-relativistes. L’EDM de l’électron génère un décalage en énergie des niveaux d’une molécule proportionnel au champ effectif perçu par les électrons. Le facteur multiplicatif ρ_e^{at} décrit l’écrantage du champ électrique et est propre à chaque système. Pour certains systèmes, il peut s’agir en fait d’une amplification allant jusqu’à 10^3 .

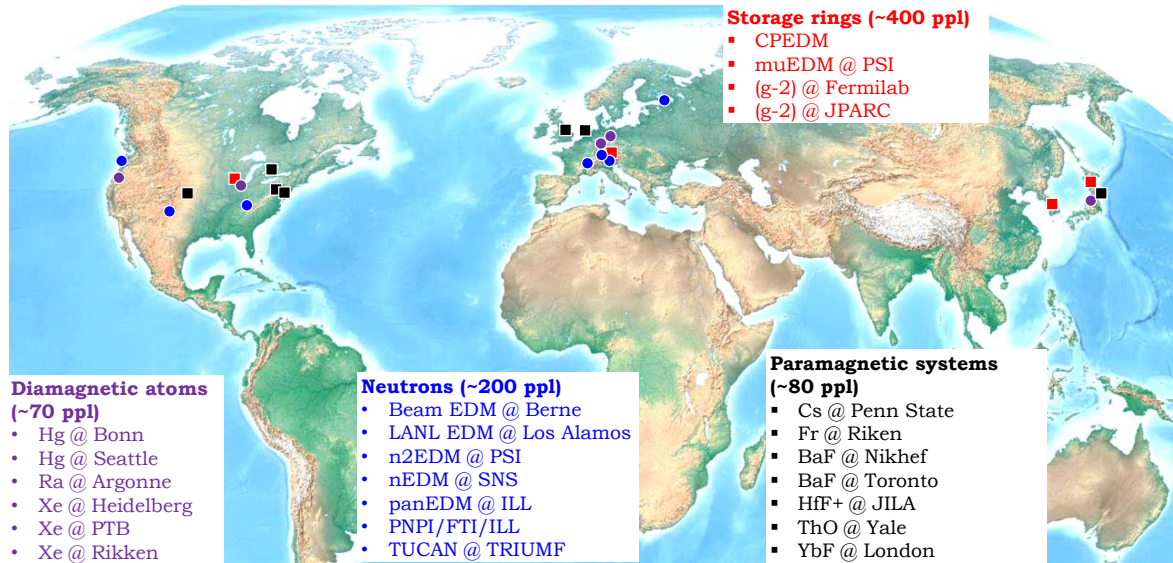


FIGURE 1.5 – Projets de recherche EDM dans le monde, avec une estimation du nombre de physiciens impliqués, repris de PIGNOL [2019], adapté de PSI WEBSITE [2019]

- Les couplages quark-électron \mathcal{O}_{eN} violant la symétrie CP et contribuant à l'EDM atomique.
- Le moment de Schiff S_{at} FLAMBAUM et GINGES [2002]. Il s'agit d'un moment nucléaire violant P et T . C'est une déformation nucléaire générant un champ électrique dans le noyau. Ce moment peut provenir des contributions des EDM des nucléons d_n et d_p composant le noyau, ainsi que d'interactions hadroniques violant elles-mêmes P et T . C'est l'interaction électrostatique de ce moment avec les électrons atomiques qui génère une contribution à l'EDM atomique.

1.1.3.1 EDM des atomes diamagnétiques

Les atomes diamagnétiques sont des atomes de spin électronique nul. Pour les atomes diamagnétiques de spin nucléaire $I = 1/2$, il est alors possible d'obtenir un temps de cohérence des spins très long, ce qui en fait des systèmes de choix pour les mesures d'EDM. Des expériences mesurant l'EDM de ces systèmes (^{199}Hg , ^{129}Xe , ^{225}Ra) ont permis de poser des limites sur les EDM atomiques. Ces mesures sont sensibles au moment de Schiff, ce qui permet de donner des limites pour les EDM des nucléons et pour les interactions nucléon-nucléon violant P et T , soit CP . Les divers systèmes diamagnétiques ont une sensibilité comparable aux sources de violation de CP CHUPP et collab. [2019].

La meilleure limite pour l'EDM du ^{199}Hg date de 2016 et est $|d_{\text{Hg}}| < 7.4 \times 10^{-30}$. Il s'agit du système dont l'EDM est le plus fortement contraint. Cette limite permet d'en établir indirectement une pour l'EDM du neutron, qui est du même ordre de grandeur que celles données par les expériences de mesure directe de l'EDM du neutron. Toutefois, le calcul de ces limites pour les EDM des nucléons repose sur des hypothèses et approximations de modèle nucléaire et il convient donc de les considérer avec prudence.

Les expériences en projet répertoriées dans le tableau 1.1 de recherche d'EDM pour les systèmes diamagnétiques sont très prometteuses et visent à améliorer d'un facteur 100 les sensibilités

respectives des limites actuelles.

1.1.3.2 EDM des atomes paramagnétiques et des molécules polaires

La mesure d'EDM des systèmes paramagnétiques, tels que les atomes ou molécules avec un électron non-apparié, sont sensibles aux deux autres contributions à l'EDM atomique : l'EDM des électrons et les interactions électron-nucléon violant la symétrie T . Les systèmes les plus probants sont les atomes à Z élevé, tels que le césium ou le francium radioactif, ainsi que des molécules polaires lourdes, telles BaF, ThO ou YbF. La limite la plus récente sur l'EDM de l'électron ($|d_e| < 1.1 \times 10^{-29} e \text{ cm}$) a été réalisée à Harvard par l'expérience ACME ANDREEV et collab. [2018] qui utilise du monoxyde de thorium (ThO). Cette molécule a l'avantage d'avoir un intense champ électrique effectif et d'être facilement polarisable. Ce sont les deux éléments permettant d'annuler l'écrantage et d'amplifier la contribution de l'EDM électronique à l'EDM atomique.

Il existe de nombreuses futures expériences visant à améliorer la sensibilité sur l'EDM de l'électron. Ces expériences utilisent différentes techniques et molécules et ont pour objectif une amélioration d'un facteur 100 ou plus de la sensibilité.

1.1.3.3 EDM de particules chargées

Contrairement aux atomes, molécules ou neutrons, les particules chargées posent un défi supplémentaire pour les mesures d'EDM. En effet, avec l'application d'un champ électrique pour générer un couplage à l'EDM, il est impossible de garder de telles particules au repos. Toutefois, ces particules peuvent être confinées dans des anneaux de stockage grâce à un champ électrique radial, un champ magnétique vertical ou une combinaison des deux. Ces mesures sont toutefois très techniques du point de vue des effets systématiques, particulièrement les effets relativistes $\vec{v} \times \vec{E}$ et $\vec{v} \times \vec{B}$.

La mesure de l'EDM du muon tombe dans cette catégorie, contrairement à l'électron, dont l'EDM peut être mesuré grâce à la manipulation de systèmes neutres. La mesure la plus sensible de l'EDM du muon ($|d_\mu| < 1.8 \times 10^{-19} e \text{ cm}$ BENNETT et collab. [2009]) a été faite en parallèle de la mesure du $g - 2$ au Brookhaven National Laboratory (BNL). De nouvelles expériences sont en développement afin de pouvoir améliorer la sensibilité sur cette mesure. Si cette sensibilité est bien en-deçà de celles des expériences permettant d'extraire l'EDM de l'électron, la mesure de l'EDM du muon reste intéressante, certaines théories de nouvelle physique pouvant produire un large EDM pour le muon.

Pour le proton, la meilleure limite est actuellement obtenue de façon indirecte grâce à la limite sur l'EDM du ^{199}Hg . Une expérience de mesure de l'EDM du proton et du deuton avec un projet d'anneau de stockage dédié est en cours de développement. Une première mesure de test sur l'anneau de stockage COSY à Jülich en Allemagne RATHMANN et NIKOLAEV [2019] est en cours.

1.1.3.4 EDM du neutron

Comme nous l'avons déjà discuté dans la section 1.1.2, la plupart des expériences actuelles de mesure de l'EDM du neutron utilisent des neutrons ultra-froids. La mesure de l'EDM du neutron se base sur la comparaison de la fréquence de précession dans un environnement avec champ magnétique B_0 et champ électrique E , tantôt parallèles, tantôt anti-parallèles,

$$f_n = \frac{1}{\pi\hbar} (\mu_n B_0 \pm d_n E). \quad (1.11)$$

Nous reviendrons sur le phénomène de précession du spin dans la section 1.3 consacrée à l'explication de la méthode de mesure. Les temps de stockage et de précession libre des neutrons

sont maintenant de l'ordre de la centaine de secondes. La dernière limite a été publiée par la collaboration nEDM, qui a utilisé la source de spallation de PSI. Une nouvelle expérience est en construction au même endroit, qui utilisera la même source de neutrons mais sera basée sur l'utilisation d'un spectromètre à deux chambres. Plusieurs autres expériences, en construction ou en projet, exploitent l'idée de la double chambre contenant des UCN (voir tableau 1.1). Leurs différences résident dans les autres éléments d'expérience, tels que la source de neutrons ultra-froids, la statistique étant l'un des facteurs primordiaux de ce type de mesure, ou le contrôle des effets systématiques, et plus particulièrement du champ magnétique. Une expérience cryogénique est actuellement également en cours de développement à Oak Ridge. Toutes ces expériences visent une amélioration de la sensibilité d'un facteur 10 à 100.

TABLEAU 1.1 – Liste des projets actifs de mesure d’EDM des atomes diamagnétiques (Hg, Xe, Ra), des systèmes paramagnétiques, des particules chargées et du neutron PSI WEBSITE [2019].

Projet	Lieu	Concept	Ref.
Hg EDM	Seattle	cellules de vapeur de ^{199}Hg	GRANER et collab. [2016]
quMercury	Bonn	Refroidissement laser ^{199}Hg	
MIXed	Jülich, Heidelberg	$^{129}\text{Xe} + ^3\text{He}$	ALLMENDINGER et collab. [2019]
HeXeEDM	Berlin	$^{129}\text{Xe} + ^3\text{He}$	SACHDEVA et collab. [2019]
Xe EDM	Riken	$^{129}\text{Xe} + ^{131}\text{Xe}$	SATO et collab. [2018]
Ra EDM	Argonne	Refroidissement laser ^{225}Ra	BISHOF et collab. [2016]
Cs,Ru EDM	Penn State	Piège froid d’alcalin	TANG et collab. [2018]
Fr EDM	CYRIC, Riken	Refroidissement laser francium	
EDM ³	Toronto	BaF dans une matrice de gaz rare	VUTHA et collab. [2018]
NL-eEDM	Nikhef	faisceau de BaF froid	AGGARWAL et collab. [2018]
JILA EDM	Boulder	molécules HfF^+ et ThF^+ piégées	CAIRNCROSS et collab. [2017]
ACME	Yale	faisceau de ThO cryogénique	ANDREEV et collab. [2018]
eEDM	London	faisceau de YbF lent	HUDSON et collab. [2011]
CPEDM		anneau de stockage, proton/deuton	
muEDM	PSI	anneau de stockage, muon	CRIVELLIN et collab. [2018]
μ g-2/EDM	JPARC	anneau de stockage compact, muon	ABE et collab. [2019]
μ g-2	Fermilab	Anneau de muon, énergie magique	CHISLETT [2016]
nEDM@SNS	Oak Ridge	UCN dans l’hélium superfluide	AHMED et collab. [2019a]
n2EDM	PSI	double chambre UCN	ABEL et collab. [2019b]
nEDM@LANL	Los Alamos	double chambre UCN	ITO et collab. [2018]
panEDM	ILL Grenoble	double chambre UCN	WURM et collab. [2019]
TUCAN	TRIUMF	double chambre UCN	AHMED et collab. [2019b]
PNPI nEDM	ILL - PNPI	double chambre UCN	SEREBROV [2017]
beam nEDM	ESS	faisceau de neutrons froids pulsé	CHANEL et collab. [2019]

1.2 Le neutron

Comme cela a déjà été évoqué dans la section 1.1.2, c'est l'utilisation de neutrons ultra-froids qui a permis aux expériences de mesure de l'EDM du neutron d'atteindre le niveau de précision actuel. Nous allons donc discuter les propriétés de cette espèce et expliquer pourquoi elle est particulièrement adaptée pour ce type d'expérience. Pour ce faire, nous donnerons d'abord un aperçu des propriétés générales des neutrons et des méthodes de production de ceux-ci, avant de nous pencher plus en détail sur les particularités propres aux UCN.

1.2.1 Le neutron libre

1.2.1.1 Bref historique

Le neutron a été imaginé pour la première fois en 1920 par E. Rutherford. L'idée était que cette nouvelle particule neutre était en fait constituée d'un proton et d'un électron liés d'une façon particulière, formant ainsi un doublet neutre RUTHERFORD [1920] :

« Such an atom would have very novel properties. Its external field would be practically zero, except very close to the nucleus, and in consequence it should be able to move freely through matter. Its presence would probably be difficult to detect by the spectroscope, and it may be impossible to contain it in a sealed vessel. »

C'est douze ans plus tard, en 1932, que le neutron est découvert par J. Chadwick CHADWICK [1935], pour lequel il reçoit le prix Nobel en 1935. Dès lors, le neutron fait l'objet d'études approfondies et permet la compréhension de la structure nucléaire des atomes. En 1934, E. Fermi explique les origines de la désintégration β du neutron WILSON [1968]. Également en 1934, E. Fermi irradie des éléments lourds avec des neutrons et démontre ainsi l'existence de nouveaux éléments radioactifs. Cette découverte est récompensée par le prix Nobel en 1938. Cette même année, O. Hahn, L. Meitner, et F. Strassmann découvrent la fission nucléaire de l'uranium induite par une irradiation de neutrons. En 1942, sous la direction de E. Fermi, la première pile atomique diverge à l'université de Chicago. Les réacteurs nucléaires ont alors pour but de produire des bombes atomiques. La première centrale nucléaire pour la production d'énergie entre en service en 1951 en Russie. A la fin des années 1950, les premiers réacteurs de recherche sont construits, permettant la production de neutrons libres en tant qu'objets d'étude de la physique fondamentale.

1.2.1.2 Propriétés générales du neutron

Les neutrons sont des particules massives ($m_n = 939.565413(6) \text{ MeV}/c^2$) et neutres ($q_n = -0.2(8) \times 10^{-21} e$) composant le noyau des atomes TANABASHI et collab. [2018]. Ils ne sont stables qu'à l'intérieur des noyaux et il faut les extraire de ceux-ci pour pouvoir étudier les neutrons libres. En effet, ils se désintègrent sous l'effet de l'interaction faible avec une durée de vie moyenne de l'ordre de 15 minutes ($\tau_n = 880.2 \pm 1.0 \text{ s}$). Le spectre d'énergie utile des neutrons s'étend du peV à quelques MeV et il existe donc une très large gamme d'énergie des neutrons. Les neutrons rapides se comportent avant tout comme des particules, mais la dualité onde-corpuscule devient nécessaire pour décrire les neutrons de faible énergie cinétique. On utilisera donc alternativement la vitesse v et l'énergie cinétique E , mais aussi la longueur d'onde de De Broglie,

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_n E}}, \quad (1.12)$$

pour décrire le neutron.

On peut classer le neutron dans différentes catégories en fonction de son énergie cinétique. Ces catégories et leurs propriétés sont listées dans le tableau 1.2. Les neutrons produits dans les

TABEAU 1.2 – Différentes gammes d'énergie des neutrons, inspiré de PIGNOL [2009] et ROULIER [2015].

Catégorie	Énergie	Vitesse (m/s)	Longueur d'onde (nm)
Rapide	$500 \text{ keV} < E$	$10^7 < v$	$\lambda < 4 \times 10^{-5}$
Épithermique	$25 \text{ meV} < E < 500 \text{ keV}$	$2200 < v < 10^7$	$4 \times 10^{-5} < \lambda < 0.18$
Thermique	$E \sim 25 \text{ meV}$	$v \sim 2200$	$\lambda \sim 0.18$
Froid	$0.05 \text{ meV} < E < 25 \text{ meV}$	$100 < v < 2200$	$0.18 < \lambda < 4$
Très froid	$250 \text{ neV} < E < 0.05 \text{ meV}$	$7 < v < 100$	$4 < \lambda < 57$
Ultra froid	$E < 250 \text{ neV}$	$v < 7$	$57 < \lambda$

réacteurs par la fission de l'uranium ont une énergie moyenne de 2 MeV et sont très rapidement ralentis par des collisions sur les noyaux du matériau modérateur. Ils se thermalisent à l'énergie typique de 25 meV, correspondant à une température d'environ 300 K. C'est pourquoi le statut de neutron thermique est défini aussi précisément. Cette modération des neutrons est essentielle dans le cadre des réactions en chaîne, car les neutrons rapides n'induisent pas suffisamment de nouvelles fissions.

1.2.1.3 La production de neutrons libres

Le neutron n'étant pas stable en dehors du noyau, pour pouvoir utiliser ou étudier des neutrons libres, il est nécessaire de les produire continuellement. Deux types d'installation permettent d'obtenir des rayonnements intenses de neutrons libres.

Nous avons déjà évoqué la première : le réacteur nucléaire à haut flux, tel que le réacteur de l'Institut Laue-Langevin (ILL). Ces réacteurs utilisent la fission contrôlée. Sous l'effet d'une collision avec un neutron, un noyau lourd fissionne en émettant des fragments de fission, généralement deux noyaux plus légers et des neutrons libres. Ces neutrons peuvent alors eux-même induire de nouvelles fissions en collisionnant à leur tour au cœur du réacteur. Le nombre de neutrons issus d'un processus de fission en induisant de nouveaux détermine la criticité du réacteur. En fonction du coefficient de criticité, le flux de neutrons produit peut diminuer (réacteur sous-critique), se maintenir (critique) ou diverger (super-critique). Comme nous l'avons déjà évoqué, les neutrons produits par un réacteur sont thermalisés dans le milieu modérateur et sont donc en majorité des neutrons thermiques. Le réacteur de l'ILL délivre le flux de neutrons thermiques continu le plus intense au monde au niveau du modérateur (1.5×10^{15} neutron/cm²/s) avec une puissance thermique de 58.3 MW.

Le deuxième type d'installation permettant d'obtenir un flux intense de neutrons libres est la source de spallation, comme la source de neutrons de PSI, dont le fonctionnement sera décrit en détail dans la section 2.1.1. Le principe d'une telle source est de bombarder une particule accélérée, généralement des protons d'énergie de l'ordre du GeV, sur une cible contenant des noyaux lourds (tungstène, mercure). La source de PSI utilise un faisceau de protons d'une puissance d'environ 2 MW. L'accélération des particules incidentes se fait la plupart du temps avec un accélérateur linéaire suivi d'un cyclotron et le bombardement est généralement pulsé à des fréquences de l'ordre de la dizaine de Hertz. Les noyaux lourds se fragmentent alors en émettant environ une vingtaine de neutrons par noyau touché. Les neutrons ainsi produits ont un large spectre d'énergie, permettant des utilisations variées de ces flux, comme la sonde de la matière par diffraction neutronique, la production de radio-isotopes pour la médecine ou même l'essai de matériaux pour le nucléaire. Bien entendu, l'usage qui nous intéresse le plus reste la physique fondamentale du neutron.

1.2.2 Interactions fondamentales

Le neutron est sensible aux quatre interactions fondamentales à différentes échelles, selon ses propriétés. C'est une particule massive de masse environ égale à celle du proton et qui est par conséquent sujette à la pesanteur. Instable en tant que particule libre, le neutron se désintègre sous l'effet de l'interaction faible, bien que celle-ci soit justement assez faible, ce qui explique sa longue durée de vie. C'est l'interaction forte qui assure la cohésion des nucléons au sein d'un noyau atomique et nous verrons que cette interaction est également celle qui nous permet de stocker les neutrons lorsque ceux-ci ont une très faible énergie (neutrons ultra-froids). Enfin, bien que neutre, le neutron possède un moment magnétique et est donc sensible à l'interaction électromagnétique. De plus, le neutron doit également posséder un moment dipolaire électrique et il interagit donc en principe avec les champs électriques, même si la valeur de l'EDM est extrêmement faible.

1.2.2.1 Interaction gravitationnelle

Pour les simulations de neutrons appartenant à la gamme d'énergie allant de froids à rapides, l'interaction gravitationnelle n'est pas prise en compte car elle est négligeable. En effet, son intensité comparée aux autres forces est infime et elle n'influence pas (ou très peu) la trajectoire des neutrons. Toutefois, pour des neutrons très froids ou des UCN, l'énergie associée à la gravité est du même ordre de grandeur que leur énergie cinétique. Les trajectoires de tels neutrons sont donc majoritairement dictées par l'interaction gravitationnelle. La masse du neutron est connue avec une très grande précision : $m_n = 1.675 \times 10^{-27}$ kg. Dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ tel que le champ terrestre, le neutron aura tout simplement un potentiel gravitationnel de la forme :

$$V_g = m_n g z = 1.02 \times 10^{-7} \text{ eV} \times \frac{z}{1 \text{ m}}, \quad (1.13)$$

où z est l'altitude du neutron par rapport à une référence arbitraire. A la surface de la Terre, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Pour les neutrons de basse énergie, qui nous intéressent particulièrement, la gravité peut être utilisée pour les ralentir, avec l'usage de guides verticaux, mais également pour les accélérer afin de limiter les pertes lors de la détection ou dans les feuilles de polarisation.

1.2.2.2 Interaction faible

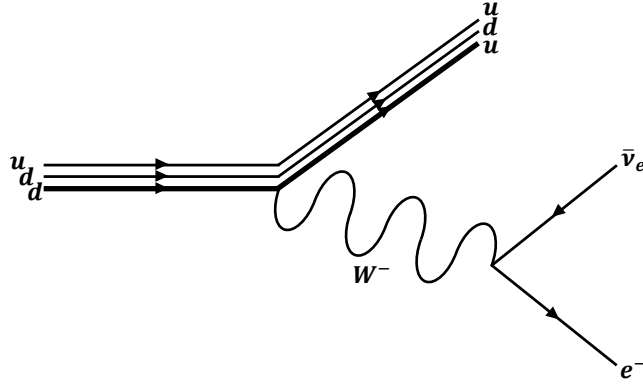
Le neutron libre est sensible à l'interaction faible principalement par le biais de la désintégration β^- , dont le diagramme est visible en figure 1.6. Lors de cette désintégration, le neutron est converti en proton, du fait de la conversion d'un quark down en quark up, qui s'accompagne de l'émission d'un boson W^- virtuel (de masse $\sim 80 \text{ GeV}$ et de charge électrique $-e$). Ce boson va à son tour se désintégrer et former une paire électron-antineutrino. L'énergie de désintégration de ce processus est de 782 keV et la désintégration β^- du neutron s'écrit donc :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + 782 \text{ keV}. \quad (1.14)$$

L'interaction faible viole la conservation de la parité et la désintégration du neutron ne fait pas exception à cette règle. En effet, la distribution angulaire des produits de cette désintégration n'est pas isotrope. C'est du fait de cette désintégration que le neutron libre a une durée de vie limitée. Le *Particle Data Group* TANABASHI et collab. [2018] donne pour la durée de vie du neutron la valeur

$$\tau_n = 880.2 \pm 1.0 \text{ s}, \quad (1.15)$$

valeur qui tente de moyenniser les résultats non-compatibles issus de deux types de mesures. Il s'agit des mesures utilisant des faisceaux de neutrons, pour lesquelles on détecte les produits de


 FIGURE 1.6 – Désintégration β du neutron (udd) en proton (uud) et paire électron-antineutrino

désintégration du neutron, et les mesures stockant des neutrons ultra-froids, pour lesquelles on compte le nombre de neutrons restant dans la bouteille à différents temps. Ces deux types de mesures donnent actuellement des résultats différant de 4 écarts-types WIETFELDT [2018] et cette incompatibilité n'a pas encore été expliquée.

L'intérêt de la mesure du temps de vie du neutron réside aujourd'hui dans la détermination de l'élément V_{ud} de la matrice CKM, avec la mesure du coefficient de corrélation angulaire A entre spin du neutron et direction de l'électron. Le temps de vie du neutron a également un intérêt dans le contexte de la cosmologie afin de pouvoir calculer les rendements de la nucléosynthèse primordiale.

1.2.2.3 Interaction électromagnétique

Comme son nom l'indique, le neutron est une particule de charge neutre. Ayant un spin $1/2$, si le neutron était une particule ponctuelle, l'équation de Dirac imposerait un moment magnétique nul. Le moment magnétique du neutron μ_n existe toutefois et est mesuré avec une très grande précision (meilleure qu'une partie par million),

$$\mu_n = -6.030774 \times 10^{-8} \text{ eV/T} \sim -\frac{2}{3} \mu_p, \quad (1.16)$$

ce qui indique la nature composite du neutron. Le modèle des quarks constituant prédit le rapport des moments magnétiques du neutron et du proton et ce rapport est vérifié approximativement. Du fait de l'existence de ce moment magnétique, un champ magnétique \vec{B} exercera sur le neutron le potentiel

$$V_{\text{mag}} = -\vec{\mu}_n \cdot \vec{B} = -\gamma_n \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \quad (1.17)$$

dans lequel $\vec{\sigma}$ désigne le vecteur formé par les trois matrices de Pauli et γ_n est le rapport gyromagnétique du neutron,

$$\gamma_n = \frac{2\mu_n}{\hbar}. \quad (1.18)$$

Plongé dans un champ magnétique, un neutron subira donc deux effets issus du potentiel (1.17).

Tout d'abord, il verra son spin précesser autour de la direction du champ magnétique à la fréquence f_n , proportionnelle à l'amplitude du champ \vec{B} . Cet effet est essentiel et c'est grâce à lui que l'on peut espérer mesurer l'EDM du neutron, comme cela sera discuté dans la section 1.3.1.

Le deuxième effet intervient lorsque le neutron se trouve en présence d'un champ magnétique inhomogène. Une force s'exerce alors sur le neutron, égale à $-\vec{\nabla}V_{\text{mag}}$. Le sens de cette force dépend de l'alignement entre le spin du neutron et la direction du champ. Ce second effet est utilisé pour polariser les neutrons ultra-froids. En effet, en appliquant un champ \vec{B} intense, le potentiel (1.17) permet de former une barrière de potentiel sélective, son signe dépendant du sens du spin des neutrons. Les neutrons ayant un spin parallèle au sens du champ pourront alors traverser cette barrière de potentiel tandis que les neutrons ayant leur spin anti-parallèle seront réfléchis.

En plus d'un moment magnétique, le neutron possède un moment dipolaire électrique. Cependant, l'amplitude de celui-ci est si faible que l'influence du champ électrique sur le neutron est infime. Pour donner un ordre d'idée de cet effet, si l'EDM du neutron valait $1 \times 10^{-27} e \text{ cm}$, en appliquant un champ électrique de 15 kV/cm, le spin du neutron mettrait 4 ans à faire un tour complet. La mesure de cet EDM est toutefois le sujet de cette thèse et si l'amplitude de la force exercée par un champ électrique est négligeable comparée aux autres interactions fondamentales, nous verrons qu'il est tout de même possible de quantifier cet effet.

1.2.2.4 Interaction forte

L'interaction forte est responsable de la cohésion entre les nucléons à l'échelle des noyaux atomiques. Son échelle d'énergie typique est de 10 MeV. En revanche, pour un neutron libre, l'intensité de cette interaction est très fortement diluée, l'énergie typique associée devenant de l'ordre de 10^{-7} eV . L'interaction forte va alors jouer un rôle uniquement lorsque le neutron libre interagit avec un matériau. On appelle neutrons optiques les neutrons dont la longueur d'onde de De Broglie est grande devant la distance typique entre les atomes. Ce sont des neutrons d'énergie inférieure à 80 meV. Lorsqu'un neutron optique approche de la surface d'un matériau, il interagit avec les noyaux du milieu de façon cohérente par l'interaction forte, tout comme un photon visible le ferait par le biais de l'interaction électromagnétique. On peut alors parler de réflexion et de réfraction des neutrons. Lorsque la vitesse du neutron est très faible (neutron froid à ultra froid dans le tableau 1.2), la longueur d'onde devient alors très grande devant la distance entre les atomes du milieu. Pour un matériau solide, il est alors possible d'exprimer l'interaction forte d'un neutron avec le matériau sous la forme d'un potentiel appelé « potentiel de Fermi optique », ou simplement potentiel de Fermi :

$$V = \frac{2\pi\hbar^2}{m_n} N b_{\text{coh}}, \quad (1.19)$$

où N désigne la densité volumique des noyaux du milieu matériel et b_{coh} représente la longueur de diffusion cohérente des atomes. Malgré le fait que l'interaction forte soit attractive, il est important de noter que la majorité des matériaux ont un potentiel de Fermi positif, soit répulsif. Le neutron interagit avec le matériau dans son ensemble et non plus avec les atomes composant ce dernier. On note que lorsqu'un neutron optique se déplace dans un matériau, il existe une probabilité non nulle pour ce neutron de se faire absorber par un atome du milieu. Cette possibilité peut se traduire par l'ajout d'un second terme imaginaire au potentiel de Fermi. Si un neutron d'énergie cinétique E entre en contact avec une surface matérielle de potentiel V avec un angle d'incidence θ , ce neutron sera totalement réfléchi si

$$E \sin^2 \theta < V. \quad (1.20)$$

En définissant la vitesse limite du matériau comme $v_{\text{lim}} = \sqrt{2V/m_n}$, cette condition devient

$$v \sin \theta < v_{\text{lim}}. \quad (1.21)$$

Si la vitesse incidente perpendiculairement est inférieure à la vitesse limite, alors le neutron sera réfléchi sur la surface, sinon il la traversera. C'est grâce à ce phénomène dépendant de l'angle d'incidence que l'on peut guider les neutrons dans des matériaux adaptés (haut potentiel de Fermi). Le matériau de référence pour le guidage des neutrons est le nickel. La définition exacte d'un neutron ultra-froid se fait quant à elle par rapport au nickel 58, matériau au potentiel de Fermi le plus élevé ($V = 335$ neV). Un neutron ultra-froid sera en effet un neutron dont la vitesse est inférieure à la vitesse limite du nickel 58, permettant un stockage de ce neutron dans une « boîte » de nickel 58, car il se réfléchira systématiquement sur les parois.

Nous allons maintenant nous intéresser plus en détail à ce type de neutrons.

1.2.3 Neutrons ultra-froids (UCN)

Les neutrons ultra-froids sont difficiles à produire en grande quantité. En effet, il n'est pas aisé de ralentir des neutrons, qui traversent la matière en interagissant très peu. La réflexion des neutrons grâce au potentiel de Fermi a été mise en évidence en 1946 FERMI et MARSHALL [1947], permettant ainsi la possibilité de guider les neutrons afin d'obtenir des faisceaux de neutrons. L'idée de pouvoir stocker des neutrons germe dès lors mais présente des difficultés techniques et il faudra attendre jusqu'en 1969 pour que les premiers UCN soient observés à Dubna LUSHCHIKOV et collab. [1969].

1.2.3.1 Propriétés des UCN

Nous avons vu dans la section précédente que le neutron libre est sensible aux potentiels gravitationnel, magnétique et aussi au potentiel optique généré par l'interaction forte. Dans le cas d'un UCN, ces potentiels sont du même ordre de grandeur que l'énergie du neutron aux échelles accessibles en laboratoire. En effet, un UCN a une énergie cinétique de l'ordre de la centaine de neV, comme l'énergie potentielle gravitationnelle d'un UCN à 1 m du sol, ainsi que le potentiel optique d'un matériau usuel ou un champ magnétique de 1 à 2 T. La physique des UCN GOLUB et collab. [1991] met à profit cette similitude des ordres de grandeur des potentiels.

Nous l'avons déjà évoqué, l'intérêt principal des UCN est leur capacité à être stockés dans des enceintes fermées, grâce au potentiel de Fermi. Avec des neutrons d'énergie suffisamment faible et un matériau adapté, quel que soit l'angle d'incidence, les UCN ne pourront pas franchir les parois de leur « bouteille ». Le temps d'observation des neutrons dans de telles enceintes est alors limité par le temps de vie des neutrons et les pertes par collision sur les murs comme suit :

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_{\text{pertes}}}. \quad (1.22)$$

Les pertes peuvent être dues à des absorptions par les noyaux composant les parois ou à des diffusions inélastiques. Il est possible de les prendre en compte en redéfinissant le potentiel de Fermi sous forme complexe,

$$U = V - iW, \quad (1.23)$$

où V est la partie réelle évoquée précédemment. Pour un matériau composite, elle se calcule comme étant la moyenne des potentiels des divers composants. W , la partie imaginaire, permet de modéliser les pertes de neutrons dues aux collisions murales et s'exprime comme

$$W = \frac{\hbar}{2} v_n \langle \sigma_{\text{pertes}} \rangle. \quad (1.24)$$

Elle est indépendante de la vitesse car $\sigma_{\text{pertes}} \propto 1/v_n$ et se calcule à partir des sections efficaces d'absorption et de diffusion inélastique. La qualité de la surface des parois ou d'autres causes non-modélisées peuvent également être responsables de pertes supplémentaires.

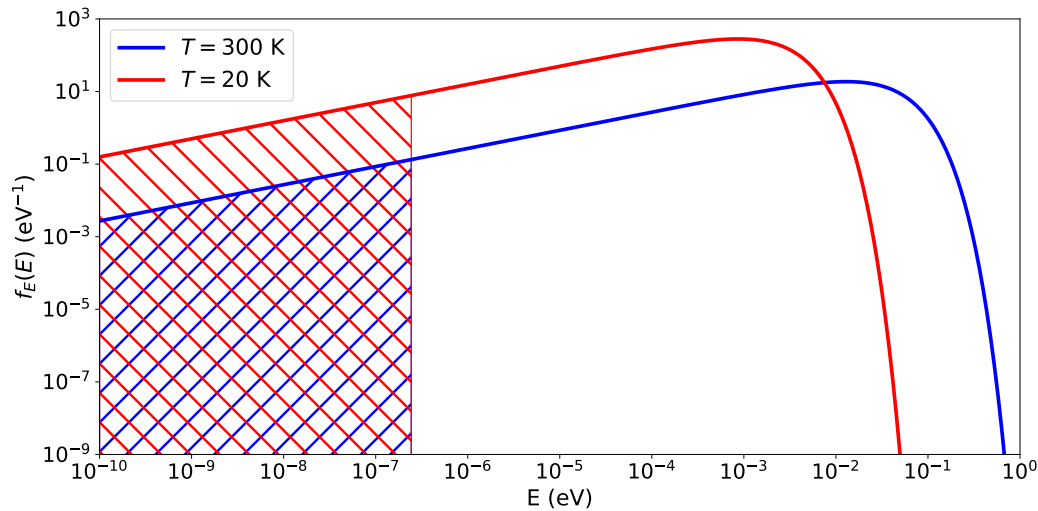


FIGURE 1.7 – Spectre des énergies de neutrons thermalisés à différentes températures, suivant une distribution de Maxwell-Boltzmann. La courbe bleue correspond à des neutrons thermiques en sortie de réacteur nucléaire, tandis que la courbe rouge montre des neutrons ayant été modérés dans un milieu plus froid ($T = 20$ K), comme c'est le cas au réacteur de l'ILL. Les surfaces hachurées correspondent aux proportions d'UCN dans les spectres respectifs. On voit qu'avec la modération dans des milieux de plus en plus froids, on parvient à augmenter de façon non-négligeable cette proportion.

1.2.3.2 Production des UCN

Afin de pouvoir les stocker, il faut tout d'abord produire les UCN. Nous avons déjà vu les deux types de sources de neutrons libres. Les neutrons issus des réacteurs sont pour la plupart des neutrons thermiques, tandis que les neutrons issus des sources de spallation ont un spectre énergétique plus large. Dans les deux cas, il est nécessaire de ralentir les neutrons afin de pouvoir obtenir des UCN. Pour ce faire, différentes techniques sont utilisées dans les différentes sources d'UCN actuellement en service, tout d'abord pour obtenir des neutrons froids :

- La modération. Les neutrons passent dans un milieu à basse température, avec lequel ils se thermalisent par le biais de collisions élastiques. Ils acquièrent alors un spectre en énergie de type Maxwell-Boltzmann. En utilisant des modérateurs de plus en plus froids, il est possible de décaler ce spectre vers des énergies de plus en plus basses. Ce principe est illustré sur la figure 1.7. Le deutérium est le modérateur le plus utilisé, sous forme solide ($T < 18$ K), liquide ($T < 25$ K) ou d'eau lourde D_2O ($T \sim 300$ K), car il a une grande section efficace de diffusion élastique.

Une fois que les neutrons sont froids ($E \sim$ meV), il faut alors passer à d'autres techniques de refroidissement pour obtenir des UCN. En effet, la température correspondant à la limite haute du spectre des UCN est ~ 3 mK. De gros volumes de modérateurs étant nécessaires afin d'avoir une bonne efficacité, la modération devient alors techniquement difficile. Les possibles méthodes pour continuer le refroidissement sont :

- La sélection des UCN parmi un spectre de neutrons froids. Dans le spectre des neutrons issus d'une modération, il existe une très faible proportion d'UCN. Lorsque le nombre de neutrons est suffisamment important, cette portion peut être non-négligeable et peut être extraite par le biais de guides adaptés. Cette technique est utilisée pour la source PF2 de l'ILL. Dans ce cas particulier, avant d'extraire les UCN, les neutrons sont ralentis par une ascension (perte d'énergie potentielle gravitationnelle) suivis d'un passage dans une turbine

(ralentissement mécanique par rebondissement sur une paroi en mouvement), afin de décaler le spectre en énergie et ainsi augmenter le nombre d'UCN.

- La production super-thermale avec accumulation dans de l'hélium superfluide. Les neutrons sont refroidis en transférant leur énergie à l'hélium sous forme de phonon. On peut directement observer les neutrons dans le volume dans lequel ils auront été modérés. Cette technique est utilisée pour certaines sources de l'ILL, à Grenoble, et aussi à TRIUMF, à Vancouver.
- La production super-thermale dans du deutérium solide. Le principe de base est le même que pour l'hélium superfluide. Les neutrons cèdent de l'énergie aux atomes de deutérium par le biais de phonons. Ce principe est utilisé pour les sources de PSI, Los Alamos et Mayence (TRIGA).

1.3 Principe de mesure et difficultés

1.3.1 Principe général de la mesure

Nous l'avons déjà évoqué, les mesures d'EDM sont des mesures de précision dans lesquelles il est primordial :

- de maximiser le temps d'exposition des particules considérées au champ électrique, ce qui, dans le cas du neutron, est parachevé grâce à l'utilisation de neutrons ultra-froids ;
- d'avoir le maximum de statistique, soit pour les neutrons d'avoir la source la plus performante possible ;
- de contrôler les effets systématiques, en les évitant par construction de l'expérience ou en les mesurant pour les corriger dans l'analyse.

Pour réaliser une telle mesure dans le cas du neutron, on utilise la précession du spin autour du champ électrique, décrite en section 1.2.2 et illustrée en figure 1.1a. Nous allons voir dans un premier temps comment relier fréquence de précession et EDM et comment mesurer cette fréquence avec précision. Nous nous attarderons ensuite sur l'effet systématique principal de l'expérience nEDM à PSI qui décale cette mesure.

Si on généralise le Hamiltonien (1.6) dans le cas d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B}_0 , on obtient l'expression suivante,

$$\hat{H} = -\mu_n \hat{\sigma} \cdot \vec{B}_0 - d_n \hat{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (1.25)$$

Le spin d'un neutron plongé dans un tel environnement précèssera à la fréquence

$$f_n = \frac{2}{h} |\mu_n B_0 \pm d_n E|, \quad (1.26)$$

dépendant des orientations respectives des champs \vec{B}_0 et \vec{E} . Cette précession et la valeur de la fréquence associée sont illustrées sur la figure 1.8 dans des champs parallèles (1.8a) et anti-parallèles (1.8b). En mesurant la fréquence de Larmor lorsque les champs \vec{B}_0 et \vec{E} sont parallèles $f_n^{\uparrow\uparrow}$ et anti-parallèles $f_n^{\uparrow\downarrow}$, si on suppose que le $E = |\vec{E}|$ est identique dans les deux configurations, on peut extraire l'EDM de la façon suivante,

$$d_n = \frac{h}{4E} (f_n^{\uparrow\uparrow} - f_n^{\uparrow\downarrow}) - \frac{\mu_n}{2E} (B_0^{\uparrow\uparrow} - B_0^{\uparrow\downarrow}), \quad (1.27)$$

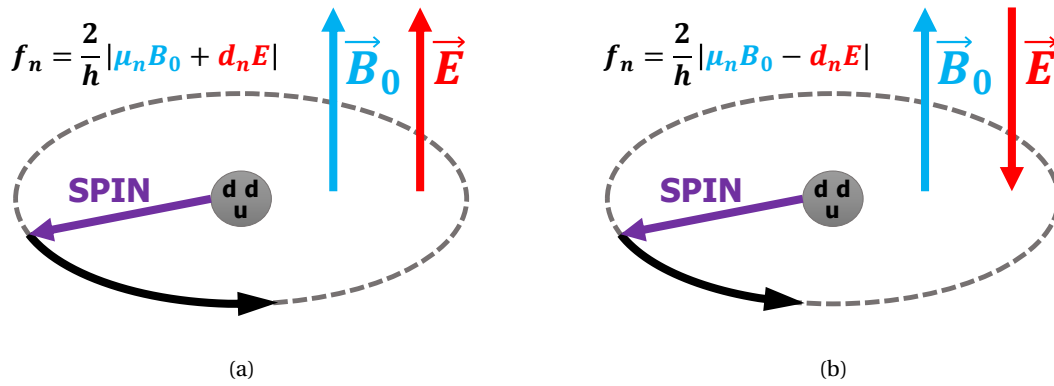


FIGURE 1.8 – Illustration de la précession du spin du neutron dans des champs magnétique \vec{B}_0 et électrique \vec{E} parallèles (a) et anti-parallèles (b).

où $B_0^{\uparrow\downarrow}$ ($B_0^{\uparrow\downarrow}$) est l'amplitude de la composante verticale du champ magnétique appliqué, dans la configuration où les champs \vec{B}_0 et \vec{E} sont parallèles (anti-parallèles). On peut voir qu'il est essentiel de pouvoir mesurer la fréquence de précession avec précision, ainsi que d'avoir un champ magnétique stable. En réalité, nous verrons que le champ magnétique n'est généralement pas suffisamment stable pour pouvoir négliger le second terme de l'équation (1.27). Cette instabilité dans l'expérience nEDM de PSI entraîne la nécessité de l'utilisation d'un co-magnétomètre mercure, ce qui sera discuté dans la section 1.3.3.

1.3.2 Procédure de Ramsey

Il n'existe pas de moyen optique pour mesurer directement f_n et l'on a donc recours à la méthode de Ramsey, dite « méthode des champs oscillants alternés » RAMSEY [1950, 1989]. Cette technique repose sur la méthode de résonance de Rabi RABI et collab. [1938] et consiste à mesurer la probabilité $P_{\uparrow \rightarrow \downarrow}$ pour des spins initialement polarisés up $|\uparrow\rangle_z$ de transiter vers l'état $down$ $|\downarrow\rangle_z$ au terme d'un cycle particulier illustré sur la figure 1.9. En pratique, on mesurera en réalité l'asymétrie A égale à la différence des nombres de neutrons up et $down$ sur le nombre de neutrons total. Les valeurs des paramètres de cette méthode dans la description qui suit correspondent à celles de l'expérience nEDM de PSI, qui sera décrite plus en détail dans le Chapitre 2.

Le cycle commence avec une population d'UCN polarisés spin up stockés dans une chambre de précession, que l'on plonge dans des champs magnétique \vec{B}_0 et électrique \vec{E} verticaux homogènes. On applique alors pendant $t_{LF} = 2$ s un champ magnétique transverse $\vec{B}_{LF}(t)$ oscillant à basse fréquence f_{LF} (l'indice LF réfère à *Low Frequency*), proche de la fréquence de résonance des spins des neutrons, afin d'initier un basculement $\pi/2$ des spins de Rabi. Les spins sont alors laissés à la précession libre dans le plan transverse pendant $T = 180$ s, puis un deuxième basculement $\pi/2$ de Rabi est appliqué, de même fréquence, durée et phase que le premier. Si la fréquence f_{LF} est identique à la fréquence de Larmor des neutrons, l'inversion des spins sera complète, comme illustrée en figure 1.9. Si ce n'est pas le cas, alors la rotation des spins sera déphasée par rapport au champ $\vec{B}_{LF}(t)$ appliqué. En fonction de ce déphasage, les neutrons ont alors une probabilité non nulle de rebasculer dans l'état up initial. A la fin de ce cycle, les neutrons sont évacués de la chambre de précession et sont alors comptés en fonction de leur polarisation up ou $down$ afin de remonter à la fréquence de précession.

Il est intéressant de noter que lorsque les expériences se faisaient encore avec des faisceaux de neutrons froids, les basculements de Rabi étaient appliqués au faisceau polarisé lorsque celui-

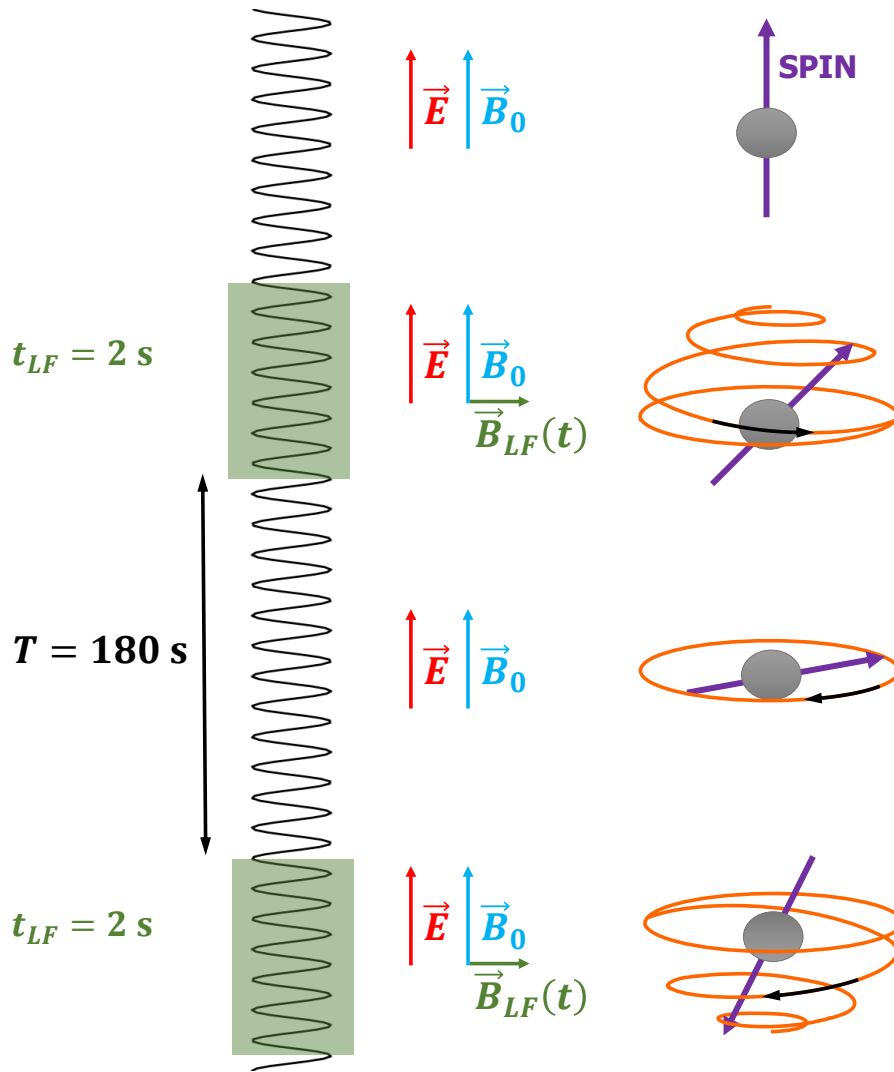


FIGURE 1.9 – Illustration de la dynamique du spin du neutron subissant la méthode des champs oscillants alternés de Ramsey si la fréquence des pulses correspond à la fréquence de Larmor.

ci traversait une zone dans laquelle s'exerçait le champ transverse oscillant. Les pulses de Rabi étaient donc séparés spatialement, ce qui n'est plus le cas aujourd'hui, les UCN pouvant rester stockés dans une chambre, nous permettant d'avoir deux pulses strictement identiques.

En réalité, pour un neutron, à chaque étape de la procédure de Ramsey (premier et second basculements, précession de Larmor), le spin a une certaine probabilité de conserver sa polarisation ou de changer d'état. Plus la fréquence de basculement de Rabi f_{LF} est proche de la fréquence résonante $|\gamma_n B_0|/2\pi \sim 30.2$ Hz, plus la probabilité de changer d'état est importante. Il est possible d'obtenir les expressions théoriques des nombres de neutrons polarisés spin *up* et *down* (respectivement N^\uparrow et N^\downarrow) en fin de cycle, en fonction de cette différence entre la fréquence de Larmor f_n et la fréquence de basculement appliquée f_{LF} :

$$N^\uparrow = \frac{N_{\text{tot}}}{2} [1 - \alpha \cos(\Omega \delta f)], \quad (1.28)$$

$$N^\downarrow = \frac{N_{\text{tot}}}{2} [1 + \alpha \cos(\Omega \delta f)] \quad (1.29)$$

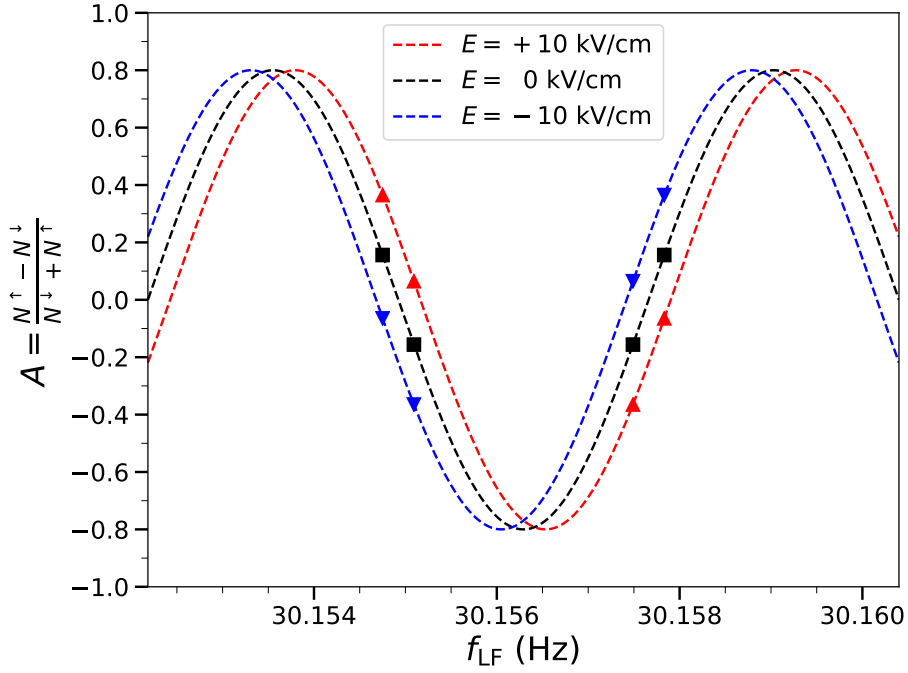


FIGURE 1.10 – Frange de Ramsey dans l’hypothèse $d_n = 5 \times 10^{-23} e \text{ cm}$, avec $T = 180 \text{ s}$, $B_0 = 1034 \text{ nT}$, $E = \pm 10 \text{ kV/cm}$, et $\alpha = 0.8$. Les courbes en pointillé correspondent à l’asymétrie théorique attendue. Les points noirs (rouges, bleus) sont les quatre points de fonctionnement pour quatre valeurs de f_{LF} dans le cas $E = 0 \text{ kV/cm}$ ($E = 10 \text{ kV/cm}$, $E = -10 \text{ kV/cm}$). La frange est centrée sur la fréquence de précession de Larmor des neutrons.

où N_{tot} est le nombre de neutrons total du cycle, $\delta f = f_{\text{LF}} - f_n$, α est la visibilité de Ramsey et $\Omega = 2\pi(T + 4t_{\text{LF}}/\pi)$. La visibilité de Ramsey α est la polarisation des UCN au bout du temps de précession T . Ω définit la largeur de la *frange de Ramsey*, $\pi/(2\gamma_n\Omega)$, illustrée en figure 1.10, à laquelle nous nous intéresserons dans un instant. Les neutrons étant au départ tous polarisés *up*, l’asymétrie A , définie comme suit,

$$A = \frac{N^\uparrow - N^\downarrow}{N^\uparrow + N^\downarrow}, \quad (1.30)$$

peut s’exprimer théoriquement comme

$$A = -\alpha \cos \Omega \delta f. \quad (1.31)$$

Pour extraire la fréquence de précession de Larmor des neutrons f_n , le principe est donc de mesurer l’asymétrie pour quatre valeurs de f_{LF} et d’ajuster f_n en fonction des couples (f_{LF}, A) . La courbe théorique de l’asymétrie en fonction de f_{LF} pour une valeur d’EDM conséquente ($d_n = 5 \times 10^{-23} e \text{ cm}$) est visible sur la figure 1.10. Il s’agit de la frange de Ramsey, centrée sur la fréquence de précession f_n . Comme nous l’avons déjà dit, lorsque $f_{\text{LF}} = f_n$, la probabilité de basculement des spins est maximale et l’asymétrie est donc minimale, comme on le voit au centre de la frange. Si l’EDM du neutron est non nul, on peut voir que f_n , et par conséquent la frange toute entière, sont décalées en présence d’un champ électrique. Le choix des quatre points de fonctionnement est fait de sorte à mesurer dans les régions de pentes maximales ($\delta f \sim \pm\pi/(2\Omega)$), afin d’avoir la sensibilité optimale sur l’estimation de f_n . En prenant toutefois exactement ces valeurs, l’ajustement n’est pas sensible à l’incurvation de la frange, et donc à son amplitude, qui dépend de la visibilité α .

Il est donc nécessaire de choisir des fréquences légèrement décalées de $\pi/(2\Omega)$ afin d'y être sensible. En utilisant la relation entre l'asymétrie et f_n de l'équation (1.31) et en propageant l'erreur poissonnienne purement statistique de comptage des neutrons, on peut montrer que la sensibilité statistique sur la fréquence f_n est

$$\sigma_{f_n} = \frac{1}{2\pi T \alpha \sqrt{N_{\text{tot}}}}. \quad (1.32)$$

L'EDM étant mesuré à partir de la fréquence de Larmor selon la relation $d_n = \frac{\hbar}{4E} (f_n^{\uparrow\uparrow} - f_n^{\downarrow\downarrow})$ (Eq. (1.27) en négligeant la différence $B_0^{\uparrow\uparrow} - B_0^{\downarrow\downarrow}$), on obtient la figure de mérite de la mesure de l'EDM du neutron :

$$\sigma_{d_n} = \frac{\hbar}{2ET\alpha\sqrt{N_{\text{tot}}}}. \quad (1.33)$$

On voit dans cette figure qu'afin de maximiser la sensibilité statistique pour la mesure de l'EDM, il est nécessaire d'avoir le plus grand nombre de neutrons possible N_{tot} pendant le plus long temps possible T , ce qui explique le facteur statistique limitant des mesures sur faisceau. En effet, bien que le nombre de neutrons disponibles pour les mesures de type faisceau soit plus important, les temps de précession T atteints dans ces dernières sont de l'ordre de quelques ms, tandis que les mesures actuelles en chambre de stockage atteignent des temps T de l'ordre de 10^2 s. La maximisation de la polarisation α est également essentielle afin d'avoir la meilleure sensibilité, point qui sera discuté dans la section 2.4. Les facteurs à maximiser se contrebalancent toutefois et il est nécessaire de trouver le meilleur équilibre d'optimisation de ces paramètres. En particulier, l'augmentation du temps de précession T entraînerait une diminution de la visibilité α et du nombre de neutrons en fin de cycle N_{tot} .

Les expériences de mesure d'EDM sont donc généralement construites de façon à maximiser la sensibilité statistique, tout en gardant les effets systématiques sous contrôle. Nous allons à présent discuter le contrôle de la stabilité temporelle du champ \vec{B}_0 de l'expérience nEDM à PSI au moyen d'un co-magnétomètre et l'effet systématique qui en découle.

1.3.3 L'indispensable co-magnétomètre mercure

Nous avons vu dans la section 1.3.1 que la technique de mesure de l'EDM du neutron nécessite un champ magnétique parfaitement stable afin que le second terme de l'équation (1.27), proportionnel à $(B_0^{\uparrow\uparrow} - B_0^{\downarrow\downarrow})$, s'annule. Hélas, il est en pratique très difficile d'obtenir un champ magnétique constant sur des échelles de temps suffisantes (plusieurs heures) pour mesurer la fréquence f_n dans les configurations parallèle et anti-parallèle. Dans l'expérience nEDM de PSI, malgré de nombreux éléments permettant d'optimiser la stabilité temporelle du champ (cf. section 2.2), les dérives de celui-ci sont trop importantes pour pouvoir obtenir une mesure sensible de l'EDM du neutron. Dans le but de surmonter cette difficulté, l'expérience est donc équipée d'un co-magnétomètre ^{199}Hg qui mesure les variations temporelles magnétiques à chaque instant. Nous ne détaillerons pas ici le fonctionnement de ce co-magnétomètre, qui sera abordé plus tard dans la section 2.3.1, mais expliquerons simplement son principe général d'utilisation.

En pratique, afin de contrôler la stabilité du champ perçu par les neutrons, il est nécessaire de pouvoir mesurer celui-ci en temps réel dans le volume dans lequel précèdent les neutrons. Pour ce faire, on remplit la chambre de stockage non plus seulement d'UCN, mais également d'atomes de mercure polarisés. On applique à ces atomes un basculement $\pi/2$ de Rabi afin de faire précéder leurs spins librement autour de \vec{B}_0 , dans le plan transverse. Une lecture optique de cette précession permet de mesurer la fréquence de Larmor des atomes de mercure f_{Hg} , qui, tout comme f_n ,

est sensible aux variations de \vec{B}_0 comme suit :

$$f_{\text{Hg}}(t) = \frac{|\gamma_{\text{Hg}}|}{2\pi} B_0(t), \quad (1.34)$$

où B_0 est l'amplitude absolue du champ \vec{B}_0 dépendant du temps et γ_{Hg} est le rapport gyromagnétique des atomes de mercure. Pour s'affranchir de la dépendance en $B_0(t)$, on ne s'intéresse donc plus seulement à la fréquence neutron f_n , mais au rapport des fréquences de précession UCN et mercure,

$$\mathcal{R} = \frac{f_n}{f_{\text{Hg}}}. \quad (1.35)$$

Les fréquences de précession de chaque espèce sont égales à la somme d'un terme, largement dominant, proportionnel à la composante verticale du champ magnétique \vec{B}_0 , et d'un terme d'EDM, infime, proportionnel à l'amplitude du champ électrique \vec{E} appliqué. Ignorons pour le moment l'EDM du mercure afin de simplifier les expressions. Le rapport des fréquences peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R} = \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| (1 + \delta_{\text{EDM}}), \quad (1.36)$$

avec

$$\delta_{\text{EDM}} = \pm E \frac{2}{\hbar |\gamma_n B_0|} d_n. \quad (1.37)$$

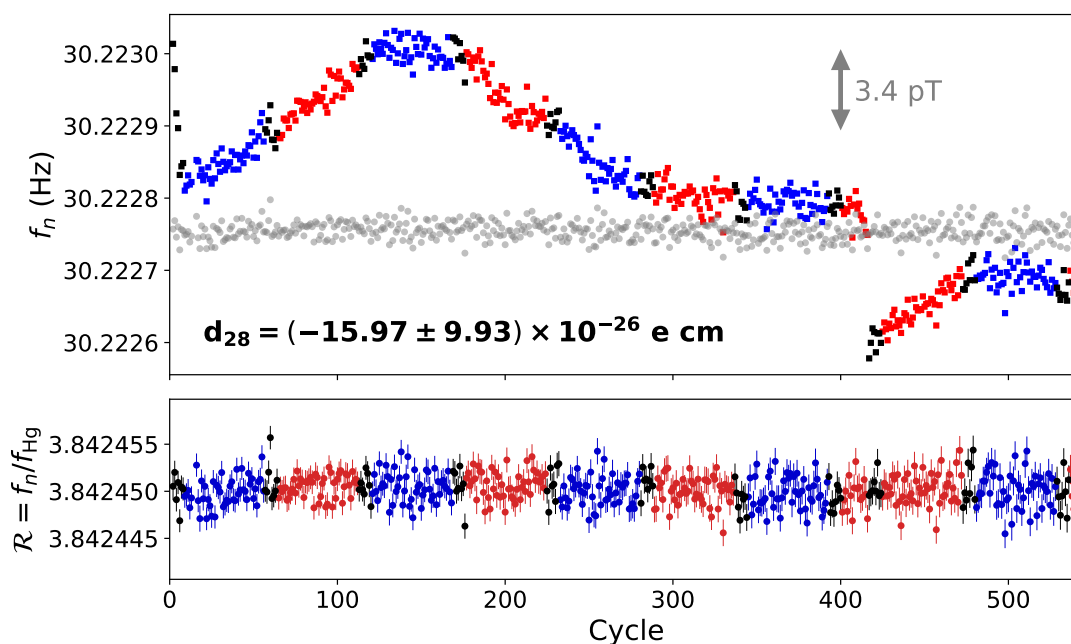
L'utilisation du rapport des fréquences plutôt que de la fréquence neutron uniquement permet donc d'avoir accès à l'EDM en s'affranchissant du second terme de l'équation (1.27) dépendant des fluctuations temporelles de \vec{B}_0 .

L'effet de la correction de la fréquence neutron avec la fréquence mercure est illustré sur la figure 1.11 pour deux séquences de données nEDM de l'expérience de PSI. On peut voir que l'utilisation du ratio \mathcal{R} plutôt que de la fréquence f_n permet de corriger efficacement les dérives du champ pour simplement conserver les fluctuations statistiques de f_n . La figure 1.11b permet de montrer l'impact de cette correction dans le cas d'une dérive conséquente du champ \vec{B}_0 . Durant les trois jours de cette séquence de données, le champ a dérivé d'une centaine de pT. Après correction par la fréquence de précession du mercure, les fluctuations restantes sur la fréquence neutron sont de l'ordre du pT et correspondent à la fluctuation statistique attendue (1.32).

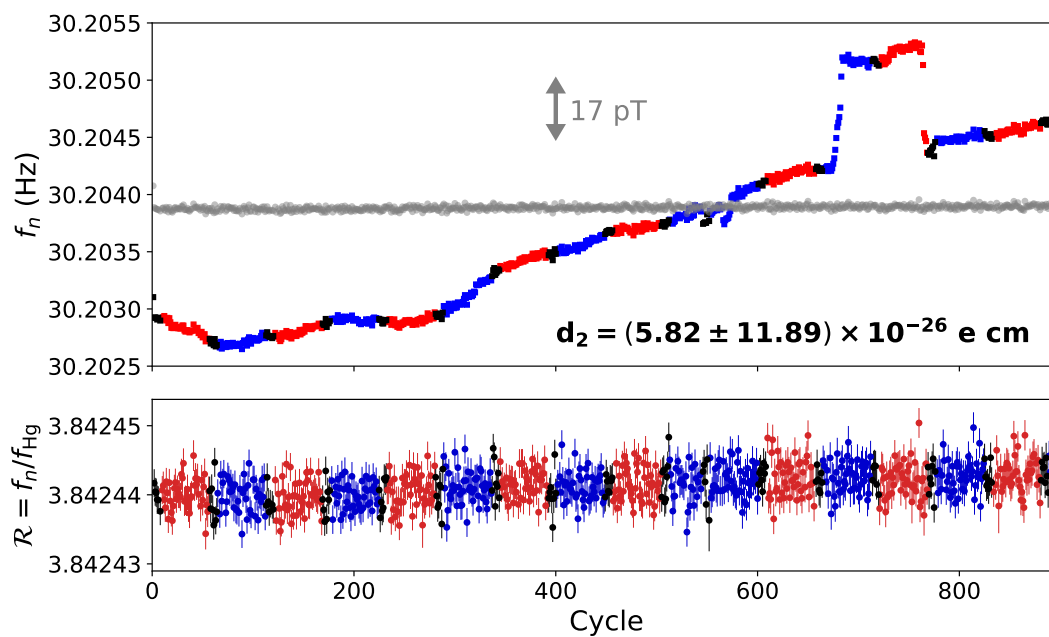
La correction des dérives du champ magnétique \vec{B}_0 est donc essentielle dans toute expérience de mesure de l'EDM du neutron. La meilleure technique à ce jour mise en pratique est l'utilisation d'un co-magnétomètre mercure, qui permet de moyennner le champ perçu par les UCN dans le même volume que ceux-ci pendant leur temps de précession. L'amélioration de la sensibilité apportée par le co-magnétomètre a permis d'établir les deux plus récentes limites sur l'EDM du neutron ABEL et collab. [2020]; BAKER et collab. [2006]; PENDLEBURY et collab. [2015]. Hélas, cette amélioration ne vient pas sans une contrepartie négative dont nous allons discuter ci-après.

1.3.4 Le faux EDM du mercure

En utilisant la mesure du rapport \mathcal{R} plutôt que de la fréquence de précession des neutrons f_n , les effets systématiques modifiant la valeur mesurée de f_n ne sont plus seulement ceux décalant directement cette valeur, mais également ceux affectant la fréquence de précession des atomes de mercure f_{Hg} . L'un de ces décalages est la source d'erreur systématique la plus conséquente sur la mesure de l'EDM du neutron à PSI et sa correction est l'objectif principal de cette thèse. Il s'agit du faux EDM relativiste du mercure, que nous allons décrire ci-après.



(a) Séquence de données nEDM 28.



(b) Séquence de données nEDM 2.

FIGURE 1.11 – Correction de la fréquence de précession des neutrons f_n par celle du mercure f_{Hg} pour deux séquences de données nEDM différentes. Chaque point correspond à un cycle de mesure. Les points rouges (noirs, bleus) représentent les cycles avec le champ électrique parallèle (nul, anti-parallèle) au champ magnétique. En haut, on retrouve la valeur mesurée de f_n (en couleur) et celle corrigée et remise à l'échelle avec une valeur de champ arbitraire b (en gris) $\frac{f_n}{f_{\text{Hg}}} \frac{|Y_{\text{Hg}}|}{2\pi} b$. En bas, on trouve le rapport des fréquences \mathcal{R} qui est utilisé par la suite dans l'analyse EDM et son erreur associée issue de l'erreur sur la fréquence f_n . La valeur de l'EDM mesuré de la séquence issue de l'analyse statistique est affichée pour chacune des deux séquences.

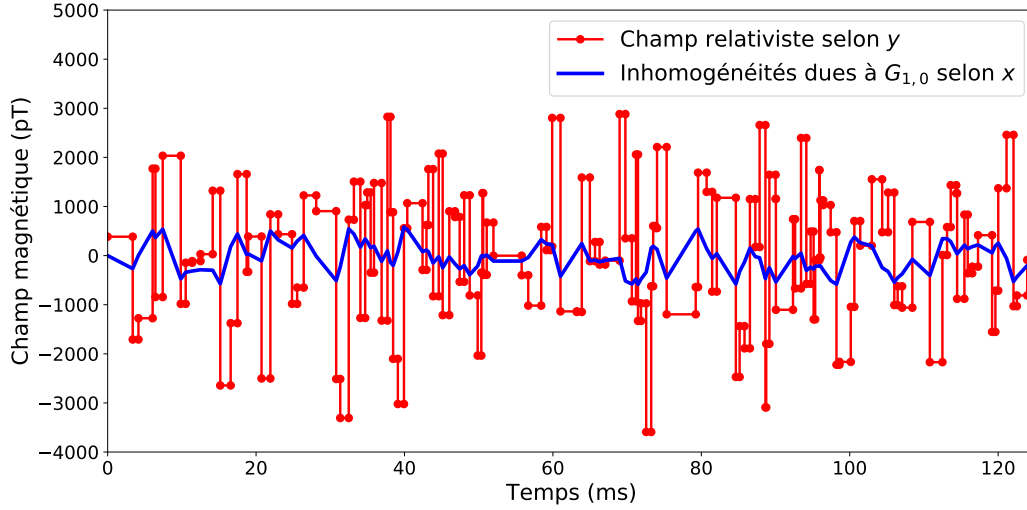


FIGURE 1.12 – Simulation Monte-Carlo du champ transverse perçu par un atome de mercure thermique en mouvement balistique dans un cylindre ($H = 12$ cm et $2R = 47$ cm) dans un champ électrique d’amplitude $E = 11$ kV/cm et en présence d’un gradient linéaire de champ, selon l’axe x , $G_{1,0} = 50$ pT/cm. Les points et lignes rouges correspondent au champ relativiste selon y , $\frac{E}{c^2} v_x(t)$. Les lignes bleues correspondent au champ non-uniforme selon x , $B_x(\vec{r}(t)) = -\frac{1}{2} G_{1,0} x(t)$.

1.3.4.1 L’effet $\vec{v} \times \vec{E}$

Lorsqu’une particule se déplace à vitesse \vec{v} dans un champ électrique statique \vec{E} , elle perçoit un champ magnétique relativiste $-\vec{v} \times \vec{E}/c^2$. Dans le cadre d’une expérience de mesure d’EDM, ce champ vient s’ajouter au champ magnétique principal de l’expérience \vec{B}_0 . Toutefois, lorsqu’une particule se déplace en présence d’inhomogénéités magnétiques \vec{B} , son spin est soumis à un champ fluctuant \vec{b} , constitué du champ relativiste et des inhomogénéités, dont les composantes transverses sont PIGNOL et collab. [2015] :

$$\begin{cases} b_x(t) = B_x(\vec{r}(t)) - \frac{E}{c^2} v_y(t) \\ b_y(t) = B_y(\vec{r}(t)) + \frac{E}{c^2} v_x(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

Des valeurs simulées par Monte-Carlo des composantes de ce champ fluctuant sont illustrées sur la figure 1.12 pour un atome de mercure dans l’environnement typique de l’expérience nEDM de PSI. Un tel champ fluctuant induit un décalage de la fréquence de précession δf . Il est important de noter que le bruit du champ longitudinal n’induit pas de décalage en fréquence, au contraire du bruit transverse du champ. Par souci de cohérence avec les divers articles évoquant le sujet, on parlera plutôt du décalage de la pulsation $\delta\omega$, en rappelant que la relation entre ces deux quantités est simplement $\omega = 2\pi f$. Ce décalage a été évoqué pour la première fois dans le cadre de neutrons ou d’atomes subissant la procédure de Ramsey en 1991 par E. D. Commins [1991] et a été identifié comme étant une phase géométrique. En utilisant la théorie de Redfield, une théorie perturbative basée sur le formalisme de la matrice densité, l’expression générique d’un décalage en fréquence induit par un champ perturbatif s’écrit LAMOREAUX et GOLUB [2005]; PIGNOL et collab. [2015]

$$\delta\omega = \frac{\gamma^2}{2} \{ \text{Re} [S_{xy}(\omega_0) - S_{yx}(\omega_0)] + \text{Im} [S_{xx}(\omega_0) + S_{yy}(\omega_0)] \}, \quad (1.39)$$

où γ est le rapport gyromagnétique des particules considérées, $\omega_0 = \gamma B_0$ est la pulsation de précession dans un champ \vec{B}_0 et

$$S_{kl}(\omega_0) = \int_0^\infty e^{i\omega_0\tau} \langle b_k(0)b_l(\tau) \rangle d\tau \quad (1.40)$$

représente la transformée de Fourier des fonctions de corrélation du champ. Ici, les chevrons représentent la moyenne d'ensemble sur toutes les particules considérées. Étant donnée l'expression des composantes transverses du champ fluctuant (1.38), on remarque que le décalage en fréquence $\delta\omega$ (1.39) peut être séparé en trois contributions en fonction de la dépendance au champ électrique,

$$\delta\omega = \delta\omega_{B^2} + \delta\omega_{E^2} + \delta\omega_{BE}. \quad (1.41)$$

La fréquence de précession et l'EDM étant reliés de façon inversement proportionnelle au champ électrique (1.27), ces trois contributions ont un effet différent sur la mesure de l'EDM. Le premier terme est indépendant du champ électrique,

$$\delta\omega_{B^2} = \frac{\gamma^2}{2} \int_0^\infty \sin(\omega_0\tau) \langle B_x(0)B_x(\tau) + B_y(0)B_y(\tau) \rangle d\tau, \quad (1.42)$$

et reste inchangé lors de l'inversion de \vec{E} . Le décalage $\delta\omega_{B^2}$ est donc identique pour les configurations parallèles et anti-parallèles et n'induit pas de faux EDM. Le second terme est quant à lui proportionnel à E^2 ,

$$\delta\omega_{E^2} = \frac{\gamma^2 E^2}{2c^4} \int_0^\infty \sin(\omega_0\tau) \langle v_x(0)v_x(\tau) + v_y(0)v_y(\tau) \rangle d\tau, \quad (1.43)$$

et peut induire un décalage en fréquence si l'amplitude du champ \vec{E} est différente lorsque celui-ci est inversé, comme cela a été discuté dans LAMOREAUX [1996]. Cette contribution est toutefois négligeable dans le cadre de l'expérience qui nous intéresse et ne sera donc pas discutée plus avant. Le dernier terme, en revanche, est celui qui nous concerne et qui est à l'origine du décalage le plus important. En effet, il est directement proportionnel à E ,

$$\delta\omega_{BE} = \frac{\gamma^2 E}{c^2} \int_0^\infty \cos(\omega_0\tau) \langle B_x(0)v_x(\tau) + B_y(0)v_y(\tau) \rangle d\tau, \quad (1.44)$$

et prend donc des valeurs opposées en configuration parallèle et antiparallèle. Du fait de la relation (1.27), il se traduit donc directement en un faux signal d'EDM comme suit :

$$d^{\text{faux}} = \frac{\hbar}{2E} \delta\omega_{BE} = \frac{\hbar\gamma^2}{2c^2} \int_0^\infty \cos(\omega_0\tau) \langle B_x(0)v_x(\tau) + B_y(0)v_y(\tau) \rangle d\tau \quad (1.45)$$

Cet effet existe pour les deux populations présentes dans l'expérience nEDM de PSI, les neutrons ultra-froids et les atomes de mercure, les deux se déplaçant dans la chambre et percevant un champ relativiste proportionnel à leur vitesse. Son amplitude dépend toutefois du comportement de la population considérée, comme nous allons l'expliquer ci-après.

1.3.4.2 Régime adiabatique et non-adiabatique

Les particules d'un gaz contenu dans un récipient fermé peuvent entrer en collision entre elles ou sur les murs du volume dans lequel elles sont contenues. Étant données leur densités et les dimensions de la chambre de nEDM, les atomes de mercure, comme les UCN, ont un comportement balistique, c'est-à-dire que les collisions sur les murs sont bien plus fréquentes que les collisions

avec les autres particules. La fréquence des collisions murales est toutefois différente pour ces deux populations, car elle dépend de la vitesse des particules. En effet, si un gaz a une vitesse quadratique moyenne $v_{\text{RMS}} = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$, le temps typique entre deux collisions murales est $\tau_c = 2R/v_{\text{RMS}}$ ($2R$ étant la largeur typique du volume de stockage, comme le diamètre dans le cas d'une chambre cylindrique). Ce temps de corrélation τ_c correspond au temps au bout duquel les fonctions de corrélations (telle $\langle B(0)v(\tau_c) \rangle$) tendent vers zéro. A partir de ce temps et de la pulsation de précession de la population ω_0 , on peut définir le paramètre d'adiabaticité $\omega_0\tau_c$.

Pour les UCN, on a généralement $\omega_0\tau_c \gg 1$, ce qui signifie que la fréquence de précession de Larmor est bien plus rapide que le taux de collisions murales. Les neutrons sont donc dans le régime dit « adiabatique » des particules lentes dans un environnement à champ fort. Cela signifie que le spin d'un neutron va sonder localement le champ car il va précesser rapidement tout en se déplaçant lentement.

A l'inverse, les atomes de mercure étant à température ambiante, ils se déplacent bien plus rapidement et on a $\omega_0\tau_c \ll 1$. Le temps moyen entre deux collisions est bien inférieur au temps nécessaire pour sonder le champ localement et le mercure ne va donc pas percevoir les variations locales du champ de la même façon que les UCN. Les atomes de mercure tombent donc dans le régime dit « non-adiabatique » des particules rapides dans un environnement à champ faible.

Il est possible, en utilisant les propriétés des transformées de Fourier et en appliquant les approximations appropriées, d'obtenir des versions simplifiées de l'expression (1.45) dans les deux cas particuliers GUIGUE et collab. [2014]; PENDLEBURY et collab. [2004]; PIGNOL et collab. [2015] des régimes adiabatique,

$$d^{\text{false}} = -\frac{\hbar v_{\text{RMS}}^2}{2c^2 B_0^2} \left\langle \frac{\partial B_z}{\partial z} \right\rangle \quad (1.46)$$

et non-adiabatique PIGNOL et ROCCIA [2012],

$$d^{\text{false}} = -\frac{\hbar \gamma^2}{2c^2} \langle xB_x + yB_y \rangle, \quad (1.47)$$

où les chevrons font cette fois référence à la moyenne volumique sur la chambre de stockage des particules. Ces expressions sont valables pour tout volume de stockage et pour toutes les formes d'inhomogénéités magnétiques.

1.3.4.3 Les inhomogénéités magnétiques

Le faux EDM relativiste existe donc pour les deux populations qui cohabitent dans l'expérience de PSI et dépend dans les deux cas des inhomogénéités du champ magnétique. Il a été discuté en détail dans le contexte de cette expérience dans ABEL et collab. [2019a]. Le faux EDM des neutrons d_n^{faux} est un effet direct qui est en réalité négligeable comparé à la sensibilité statistique de l'expérience. Bien que son calcul soit important pour faire le budget des systématiques d'une telle expérience, nous ne développerons donc pas en détail son expression. Le faux EDM du mercure $d_{\text{Hg}}^{\text{faux}}$, quant à lui, induit un faux EDM sur les neutrons par la relation suivante,

$$d_{n \leftarrow \text{Hg}}^{\text{faux}} = \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| d_{\text{Hg}}^{\text{faux}}. \quad (1.48)$$

Cet effet, bien qu'indirect, est environ 30 fois plus grand que l'effet direct du faux EDM des neutrons. En injectant l'équation (1.47) dans l'expression du faux EDM induit (1.48), celui-ci devient

$$d_{n \leftarrow \text{Hg}}^{\text{faux}} = -\frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{2c^2} \langle xB_x + yB_y \rangle. \quad (1.49)$$

La correction de ce faux EDM grâce à la mesure des inhomogénéités magnétiques, contenues dans le facteur $\langle xB_x + yB_y \rangle$, a été l'objectif phare tout du long de cette thèse et sera donc discutée avec force détails dans les chapitres suivants.

Il est possible de calculer analytiquement le dernier facteur de l'expression (1.49) en décomposant le champ magnétique en une combinaison de polynômes harmoniques,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{l,m} G_{l,m} \begin{bmatrix} \Pi_{\rho,l,m}(\vec{r}) \vec{e}_\rho \\ + \Pi_{\phi,l,m}(\vec{r}) \vec{e}_\phi \\ + \Pi_{z,l,m}(\vec{r}) \vec{e}_z \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

où les $\Pi_{i,l,m}(\vec{r})$ sont des polynômes d'ordre l en ρ et z qui décrivent les « modes » du champ avec les gradients $G_{l,m}$ associés. Cette décomposition est systématiquement utilisée pour décrire le champ dans le cadre de l'expérience nEDM et elle est développée en détail en annexe A jusqu'à l'ordre $l = 7$. Étant donné la forme cylindrique de la chambre de précession de l'expérience de PSI, le système de coordonnées cylindriques est le plus adapté pour décrire le champ et les différents effets affectant la fréquence de précession. On réécrira donc le faux EDM induit des neutrons (1.49) sous la forme

$$d_{n\leftarrow\text{Hg}}^{\text{faux}} = -\frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{2c^2} \langle \rho B_\rho \rangle. \quad (1.51)$$

En injectant la paramétrisation polynomiale (1.50) dans (1.51), le faux EDM devient

$$d_{n\leftarrow\text{Hg}}^{\text{faux}} = -\frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{2c^2} \sum_{l,m} G_{l,m} \langle \rho \Pi_{\rho,l,m} \rangle, \quad (1.52)$$

les $\Pi_{\rho,l,m}$ étant les composantes radiales du champ.

Si l'on considère une chambre de précession cylindrique de rayon R et de hauteur H dont le centre coïncide avec l'origine du système de coordonnées, de par les symétries du système, la moyenne volumique de nombreux modes s'annule. Du fait de la moyenne sur la coordonnée ϕ , tous les modes $m \neq 0$ satisfont $\langle \rho \Pi_{\rho,l,m \neq 0} \rangle = 0$, et du fait de la moyenne sur la coordonnée z , tous les modes avec l pair satisfont $\langle \rho \Pi_{\rho,l \text{ pair},0} \rangle = 0$. Les seuls modes contribuant au faux EDM du mercure sont les modes $\Pi_{\rho,l,0}$ avec l impair :

$$d_{n\leftarrow\text{Hg}}^{\text{faux}} = -\frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{2c^2} \sum_{l \text{ odd}} G_{l,0} \langle \rho \Pi_{\rho,l,0} \rangle. \quad (1.53)$$

Les expressions des composantes radiales du champ pour les modes $l, m = 0$ sont listées dans le tableau 1.3. En moyennant sur le volume cylindrique décrit précédemment et en utilisant la paramétrisation polynomiale jusqu'à l'ordre 7, l'expression du faux EDM induit par le mercure devient

$$d_{n\leftarrow\text{Hg}}^{\text{faux}} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 \begin{bmatrix} G_{1,0} - G_{3,0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{H^2}{4} \right) \\ + G_{5,0} \left(\frac{5R^4}{16} - \frac{5R^2H^2}{12} + \frac{H^4}{16} \right) \\ - G_{7,0} \left(\frac{7R^6}{32} - \frac{35R^4H^2}{64} + \frac{7R^2H^4}{32} - \frac{H^6}{64} \right) + \dots \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

L'effet du faux EDM du mercure produit par un gradient linéaire $G_{1,0}$ a été expérimentalement vérifié dans AFACH et collab. [2015] en appliquant de larges gradients magnétiques. L'effet induit

TABLEAU 1.3 – Composantes radiales du champ magnétique pour les modes $l, m = 0$ jusqu'à l'ordre 7.

l	$\Pi_{\rho,l,m=0}(\rho, z)$
0	0
1	$-\frac{1}{2}\rho$
2	$-\rho z$
3	$\frac{3}{8}\rho^3 - \frac{3}{2}\rho z^2$
4	$\frac{3}{2}\rho^3 z - 2\rho z^3$
5	$-\frac{5}{16}\rho^5 + \frac{15}{4}\rho^3 z^2 - \frac{5}{2}\rho z^4$
6	$-\frac{15}{8}\rho^5 z + \frac{15}{2}\rho^3 z^3 - 3\rho z^5$
7	$\frac{35}{128}\rho^7 - \frac{105}{16}\rho^5 z^2 + \frac{105}{8}\rho^3 z^4 - \frac{7}{2}\rho z^6$

par le terme cubique $G_{3,0}$ a également été vérifié plus récemment ABEL et collab. [2019a]. Cette dernière mesure est explicitée en détail dans KOMPOSH [2017].

En connaissant l'ordre de grandeur des gradients $G_{l \text{ impair},0}$ contribuant (de l'ordre de quelques pT/cm), il est possible d'estimer l'ordre de grandeur de cet effet grâce à la relation (1.54), et l'on obtient

$$d_{n \leftarrow \text{Hg}}^{\text{false}} \sim 4.4 \times 10^{-27} \text{ e cm} [G_{1,0} + \dots] \times \frac{1}{1 \text{ (pT/cm)}}. \quad (1.55)$$

Nous verrons par la suite qu'il s'agit donc d'un effet dont l'amplitude rivalise avec la sensibilité statistique des dernières limites sur l'EDM du neutron ABEL et collab. [2020]; BAKER et collab. [2006]; PENDLEBURY et collab. [2015]. Nous discuterons dans la section 2.5 et le chapitre 4 la façon dont cet effet est estimé et corrigé grâce à la mesure des gradients du champ magnétique.

1.4 Conclusion

Le Modèle Standard de la physique des particules est une théorie dont les prédictions ont été vérifiées à de multiples reprises et qui, si l'on excepte le phénomène d'oscillation des neutrinos, n'a jamais été mis en défaut par les expériences. Toutefois, il ne permet pas d'expliquer à lui seul toutes les observations, notamment cosmologiques, telles que l'asymétrie baryonique de l'Univers. Afin de pouvoir y parvenir, des modèles au-delà du MS apportant de nouvelles sources de violation de CP sont nécessaires. Les moment dipolaires électriques des particules élémentaires, comme le neutron ou l'électron, sont des observables qui violent la symétrie CP et sont de ce fait sensibles à ces potentielles nouvelles sources de violation de CP . Il s'agit toutefois de grandeurs extrêmement petites et la mesure de ces EDM est un véritable « challenge » technique qui requiert un contrôle optimal de tous les paramètres des expériences. Le champ magnétique en particulier doit être le plus stable et uniforme possible, ou, à défaut, les variations temporelles et les inhomogénéités doivent être monitorées afin de pouvoir être annulées. De nombreux projets de par le monde ont pour objectif d'améliorer la sensibilité de telles expériences dans l'espoir de mesurer un signal non nul pour divers systèmes (électron, neutron, proton, atomes diamagnétiques, etc.). La mesure d'un EDM non nul aurait des répercussions très intéressantes pour l'identification de nouvelle physique. Dans le cas du neutron, cette épopée a commencé dès les années 50 et se poursuit encore aujourd'hui. Les progrès de la physique des neutrons sur les dernières décen-

nies ont permis d'améliorer de 6 ordres de grandeur la première limite de 1957. Les expériences les plus récentes de mesure de l'EDM du neutron utilisent des neutrons ultra-froids stockés dans une chambre et consistent à déterminer la fréquence de précession des UCN afin de remonter à l'EDM. Le contrôle du champ magnétique dans ces expériences est hélas compliqué et, dans le cas de l'expérience nEDM de PSI, l'affranchissement des variations temporelles du champ grâce à l'utilisation d'un co-magnétomètre ^{199}Hg s'accompagne d'un effet systématique considérable : le faux EDM relativiste du mercure. Cet effet est dû aux inhomogénéités de champ magnétique inévitablement présentes, une uniformité parfaite du champ étant techniquement irréalisable. Nous verrons dans la suite de cette thèse comment évaluer et corriger cet effet en mesurant les dites inhomogénéités afin d'extraire le « vrai » EDM du neutron.

1.5 Références

- ABE, M. et collab. 2019, «A new approach for measuring the muon anomalous magnetic moment and electric dipole moment», *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, vol. 2019, n° 5. 15
- ABEL, C. et collab. 2019a, «Magnetic-field uniformity in neutron electric-dipole-moment experiments», *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 042 112. 32, 34
- ABEL, C. et collab. 2019b, «The n2EDM experiment at the Paul Scherrer Institute», dans *EPJ Web Conf.*, vol. 219. 15
- ABEL, C. et collab. 2020, «Measurement of the permanent electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, p. 081 803. 10, 28, 34
- AFACH, S. et collab. 2015, «Measurement of a false electric dipole moment signal from ^{199}Hg atoms exposed to an inhomogeneous magnetic field», *Eur. Phys. J. D*, vol. 69, n° 225. 33
- AGGARWAL, P. et collab. 2018, «Measuring the electric dipole moment of the electron in BaF», *Eur. Phys. J. D*, vol. 72, n° 197. 15
- AHMED, M. W. et collab. 2019a, «A new cryogenic apparatus to search for the neutron electric dipole moment», *Journal of Instrumentation*, vol. 14, n° 11, p. 11 017. 15
- AHMED, S. et collab. 2019b, «First ultracold neutrons produced at triumph», *Phys. Rev. C*, vol. 99, p. 025 503. 15
- ALLMENDINGER, F., I. ENGIN, W. HEIL, S. KARPUK, H.-J. KRAUSE, B. NIEDERLÄNDER, A. OFFENHÄUSSER, M. REPETTO, U. SCHMIDT et S. ZIMMER. 2019, «Measurement of the permanent electric dipole moment of the ^{129}Xe atom», *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 022 505. 15
- ALTAREV, I., Y. BORISOV, A. BRANDIN, A. EGOROV, V. EZHOV, S. IVANOV, V. LOBASHOV, V. NAZARENKO, G. PORSEV, V. RYABOV, A. SEREBROV et R. TALDAEV. 1980, «A search for the electric dipole moment of the neutron using ultracold neutrons», *Nuclear Physics A*, vol. 341, p. 269–283. 10
- ANDREEV, V. et collab. 2018, «Improved limit on the electric dipole moment of the electron», *Nature*, vol. 562, p. 355–360. 13, 15
- ATLAS COLLABORATION ET CMS COLLABORATION. 2015, «Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, p. 191 803. 5

- BAKER, C. A. et collab. 2006, «Improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 131 801. [10, 28, 34](#)
- BENNETT, G. W. et collab. 2009, «Improved limit on the muon electric dipole moment», *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 052 008. [13](#)
- BISHOF, M. et collab. 2016, «Improved limit on the ^{225}Ra electric dipole moment», *Phys. Rev. C*, vol. 94, p. 025 501. [15](#)
- CABIBBO, N. 1963, «Unitary symmetry and leptonic decays», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, p. 531–533. [6](#)
- CAIRNCROSS, W. B., D. N. GRESH, M. GRAU, K. C. COSSEL, T. S. ROUSSY, Y. NI, Y. ZHOU, J. YE et E. A. CORNELL. 2017, «Precision measurement of the electron’s electric dipole moment using trapped molecular ions», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, p. 153 001. [15](#)
- CHADWICK, J. 1935, «The neutron and its properties», Nobel lecture. [16](#)
- CHANEL, E., Z. HODGE, D. RIES, I. SCHULTHESS, O. SOLDNER, TORSTEN AD STALDER, J. THORNE et F. M. PIEGSA. 2019, «The pulsed neutron beam EDM experiment», dans *EPJ Web Conf.*, vol. 219. [15](#)
- CHISLETT, R. 2016, «The muon EDM in the g-2 experiment at Fermilab», dans *EPJ Web Conf.*, vol. 118. [15](#)
- CHRISTENSON, J. H., J. W. CRONIN, V. L. FITCH et R. TURLAY. 1964, «Evidence for the 2π decay of the K_2^0 meson», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, p. 138–140. [4](#)
- CHUPP, T. E., P. FIERLINGER, M. J. RAMSEY-MUSOLF et J. T. SINGH. 2019, «Electric dipole moments of atoms, molecules, nuclei, and particles», *Rev. Mod. Phys.*, vol. 91, p. 015 001. [6, 7, 12](#)
- CLINE, J. M. 2017, «Is electroweak baryogenesis dead?», *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 376, n° 20170116. [5](#)
- COMMINS, E. D. 1991, «Berry’s geometric phase and motional fields», *American Journal of Physics*, vol. 59, n° 12, p. 1077–1080. [30](#)
- CRIVELLIN, A., M. HOFERICHTER et P. SCHMIDT-WELLENBURG. 2018, «Combined explanations of $(g - 2)_{\mu,e}$ and implications for a large muon edm», *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 113 002. [15](#)
- DRESS, W. B., P. D. MILLER, J. M. PENDLEBURY, P. PERRIN et N. F. RAMSEY. 1977, «Search for an electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. D*, vol. 15, p. 9–21. [10](#)
- FERMI, E. et L. MARSHALL. 1947, «Interference phenomena of slow neutrons», *Phys. Rev.*, vol. 71, p. 666–677. [21](#)
- FLAMBAUM, V. V. et J. S. M. GINGES. 2002, «Nuclear schiff moment and time-invariance violation in atoms», *Phys. Rev. A*, vol. 65, p. 032 113. [12](#)
- FLAMBAUM, V. V. et A. KOZLOV. 2012, «Screening and finite-size corrections to the octupole and schiff moments», *Phys. Rev. C*, vol. 85, p. 068 502. [11](#)
- GOLUB, R., D. J. RICHARDSON et S. K. LAMOREAUX. 1991, *Ultra-Cold Neutrons*, Adam Hilger. [21](#)
- GRANER, B., Y. CHEN, E. G. LINDAHL et B. R. HECKEL. 2016, «Reduced limit on the permanent electric dipole moment of ^{199}Hg », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 161 601. [15](#)

- GUIGUE, M., G. PIGNOL, R. GOLUB et A. K. PETUKHOV. 2014, «Universality of spin relaxation for spin-1/2 particles diffusing over magnetic-field inhomogeneities in the adiabatic regime», *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 013 407. [32](#)
- HUDSON, J. J., D. M. KARA, I. J. SMALLMAN, B. E. SAUER, M. R. TARBUTT et E. HINDS. 2011, «Improved measurement of the shape of the electron», *Nature*, vol. 473, p. 493–496. [15](#)
- HUET, P. 1994, «Electroweak baryogenesis and the Standard Model», dans *Phenomenology of Unification From Present to Future, Proceedings of the Conference*, p. 77–91. [5](#)
- ITO, T. M. et collab. 2018, «Performance of the upgraded ultracold neutron source at los alamos national laboratory and its implication for a possible neutron electric dipole moment experiment», *Phys. Rev. C*, vol. 97, p. 012 501. [15](#)
- KERMAIDIC, Y. 2016, *Mesure du moment dipolaire électrique du neutron : analyse de données et développement autour du ^{199}Hg* , thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. [11](#)
- KIRCH, K. 2013, «Edm searches», dans *AIP Conference Proceedings* **1560**, 90. [10](#)
- KLAUS, J. 2013, «Searching for electric dipole moments», *Ann. Phys.*, vol. 525, n° 8–9, 550–564. [10](#)
- KOBAYASHI, M. et T. MASKAWA. 1973, «CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction», *Progress of Theoretical Physics*, vol. 49, n° 2, p. 652–657. [6](#)
- KOMPOSH, S. 2017, *Realization of a high-performance laser-based mercury magnetometer for neutron EDM experiments*, thèse de doctorat, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich. [34](#)
- LAMOREAUX, S. K. 1996, «Additional motional-magnetic-field considerations for electric-dipole-moment experiments», *Phys. Rev. A*, vol. 53, p. R3705–R3708. [31](#)
- LAMOREAUX, S. K. et R. GOLUB. 2005, «Detailed discussion of a linear electric field frequency shift induced in confined gases by a magnetic field gradient : Implications for neutron electric-dipole-moment experiments», *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 032 104. [30](#)
- LIU, C.-P. et J. ENGEL. 2007, «Schiff screening of relativistic nucleon electric-dipole moments by electrons», *Phys. Rev. C*, vol. 76, p. 028 501. [11](#)
- LUSHCHIKOV, V., Y. POKOTILOVSKII, A. STRELKOV et F. SHAPIRO. 1969, «Observation of ultracold neutrons», *JEPT Lett. (USSR) (Engl. Transl.)*, vol. 9, p. 23. [21](#)
- MORISSEY, D. E. et M. J. RAMSEY-MUSOLF. 2012, «Electroweak baryogenesis», *New J. Phys.*, vol. 14, n° 12, p. 125 003. [5](#)
- PENDLEBURY, J. M., W. HEIL, Y. SOBOLEV, P. G. HARRIS, J. D. RICHARDSON, R. J. BASKIN, D. D. DOYLE, P. GELTENBORT, K. GREEN, M. G. D. VAN DER GRINTEN, P. S. IAYDJIEV, S. N. IVANOV, D. J. R. MAY et K. F. SMITH. 2004, «Geometric-phase-induced false electric dipole moment signals for particles in traps», *Phys. Rev. A*, vol. 70, p. 032 102. [32](#)
- PENDLEBURY, J. M. et collab. 2015, «Revised experimental upper limit on the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 092 003. [10](#), [28](#), [34](#)
- PIGNOL, G. 2009, *Préparation de l'expérience GRANIT et recherche de nouvelles interactions avec les neutrons*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble. [17](#)

- PIGNOL, G. 2019, «A global perspective on searches for Electric Dipole Moments», dans *IUPAP*. 10, 12
- PIGNOL, G., M. GUIGUE, A. PETUKHOV et R. GOLUB. 2015, «Frequency shifts and relaxation rates for spin-1/2 particles moving in electromagnetic fields», *Phys. Rev. A*, vol. 92, p. 053 407. 30, 32
- PIGNOL, G. et S. ROCCIA. 2012, «Electric-dipole-moment searches : Reexamination of frequency shifts for particles in traps», *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 042 105. 32
- PLANCK COLLABORATION. 2016, «Planck 2015 results - XIII. Cosmological parameters», *Astronomy & Astrophysics*, vol. 594, p. A13. 5
- POSPELOV, M. et A. RITZ. 2005, «Electric dipole moments as probes of new physics», *Annals of Physics*, vol. 318, p. 119–169. 6
- PSI WEBSITE. 2019, «www.psi.ch/fr/nedm/edms-world-wide», . 9, 12, 15
- PURCELL, E. M. et N. F. RAMSEY. 1950, «On the possibility of electric dipole moments for elementary particles and nuclei», *Phys. Rev.*, vol. 78, p. 807–807. 9
- RABI, I. I., J. R. ZACHARIAS, S. MILLMAN et P. KUSCH. 1938, «A new method of measuring nuclear magnetic moment», *Phys. Rev.*, vol. 53, p. 318–318. 24
- RAMSEY, N. F. 1950, «A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields», *Phys. Rev.*, vol. 78, p. 695–699. 24
- RAMSEY, N. F. 1989, «Experiments with Separated Oscillatory Fields and Hydrogen Masers», Nobel lecture. 24
- RATHMANN, F. et N. N. NIKOLAEV. 2019, «Electric dipole moment searches using storage rings», dans *SPIN2018 Conf. Proc.* 13
- ROULIER, D. 2015, *Production et détection de neutrons ultra-froids pour le spectromètre GRANIT*, thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. 17
- RUTHERFORD, E. 1920, «Bakerian lecture : Nuclear constitution of atoms», dans *Proceedings of the Royal Society A*. 16
- SACHDEVA, N. et collab. 2019, «New limit on the permanent electric dipole moment of ^{129}Xe using ^3He comagnetometry and squid detection», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 123, p. 143 003. 15
- SAKHAROV, A. D. 1967, «Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe», *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 5, p. 32–35. 5
- SANDARS, P. G. H. 1967, «Measurability of the proton electric dipole moment», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, p. 1396–1398. 11
- SANDARS, P. G. H. 1968, «The electric-dipole moments of an atom II. The contribution from an electric-dipole moment on the electron with particular reference to the hydrogen atom», *J. Phys. B.*, vol. 1, p. 511. 11
- SATO, T. et collab. 2018, «Development of co-located ^{129}Xe and ^{319}Xe nuclear spin masers with external feedback scheme», *Phys. Rev. A*, vol. 382, p. 588–594. 15

- SCHIFF, L. I. 1963, «Measurability of nuclear electric dipole moments», *Phys. Rev.*, vol. 132, p. 2194–2200. [11](#)
- SENG, C.-Y. 2015, «Reexamination of the standard model nucleon electric dipole moment», *Phys. Rev. C*, vol. 91, p. 025 502. [8](#)
- SEREBROV, A. 2017, «Present status and future prospects of nEDM experiment of PNPI-ILL-PTI collaboration», dans *INPC2016*, 179. [15](#)
- SMITH, J. H., E. M. PURCELL et N. F. RAMSEY. 1957, «Experimental limit to the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev.*, vol. 108, p. 120–122. [9](#)
- TANABASHI, M. et collab. 2018, «Review of particle physics», *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 030 001. [5](#), [16](#), [18](#)
- TANG, C., T. ZHANG et D. S. WEISS. 2018, «Improving sensitivity to magnetic fields and electric dipole moments by using measurements of individual magnetic sublevels», *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 033 404. [15](#)
- VUTHA, A. C., M. HORBATSCH et E. A. HESSELS. 2018, «Orientation-dependent hyperfine structure of polar molecules in a rare-gas matrix : A scheme for measuring the electron electric dipole moment», *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 032 513. [15](#)
- WIETFELDT, F. E. 2018, «Measurements of the neutron lifetime», *Atoms*, *6*(4), 70. [19](#)
- WILSON, F. L. 1968, «Fermi's Theory of Beta Decay», *American Journal of Physics*, vol. 36, p. 1150. [16](#)
- WU, C. S., E. AMBLER, R. W. HAYWARD, D. D. HOPPES et R. P. HUDSON. 1957, «Experimental test of parity conservation in beta decay», *Phys. Rev.*, vol. 105, p. 1413–1415. [4](#)
- WURM, D. et collab. 2019, «The PanEDM neutron electric dipole moment experiment at the ILL», dans *EPJ Web Conf.*, vol. 219. [15](#)

Chapitre 2

L'expérience nEDM

« *Ingenious, really, how many ways Muggles have found of getting along without magic.* »

Arthur Weasley, in *Harry Potter and the Chamber of Secrets* by Joanne K. Rowling

Sommaire

2.1 Description de l'expérience	42
2.1.1 La source de neutrons ultra-froids	42
2.1.2 Le spectromètre nEDM	44
2.2 Génération du champ magnétique	47
2.2.1 Le système de bobines	47
2.2.2 Blindages magnétiques	50
2.2.3 Simulations de la bobine B_0 et du blindage passif	52
2.3 Contrôle en ligne du champ magnétique	56
2.3.1 Fonctionnement du co-magnétomètre mercure	56
2.3.2 Inhomogénéités magnétiques et co-magnétomètre mercure	60
2.3.3 Magnétométrie césium	65
2.4 La polarisation des UCN	68
2.4.1 Les mécanismes de dépolarisation	68
2.4.2 Mesure de la dépolarisation dues aux inhomogénéités	72
2.4.3 Algorithme d'optimisation de l'uniformité magnétique	80
2.5 Stratégie de correction du faux EDM	84
2.5.1 Sensibilité de l'expérience nEDM	84
2.5.2 Correction au premier ordre	85
2.5.3 Correction des ordres supérieurs	86
2.6 Conclusion	88
2.7 Références	89

L'appareil de mesure de l'EDM du neutron utilisé dans l'expérience nEDM de PSI a servi à établir environ la moitié des limites sur l'EDM du neutron issues de mesures avec des UCN. En effet, exploité depuis les années 80 à l'ILL à Grenoble, ce spectromètre a continuellement été amélioré afin d'augmenter la sensibilité de la mesure. En 2006, après quatre ans d'acquisition de données, il permet à la collaboration RAL-Sussex-ILL d'établir une dernière limite [BAKER et collab. \[2006\]](#); [PENDLEBURY et collab. \[2015\]](#) et il est ensuite déménagé en 2009 auprès de la nouvelle source d'UCN de PSI, celle-ci devant permettre d'améliorer la sensibilité statistique grâce à une densité plus élevée en neutrons.

De nombreux composants ont depuis été remplacés et ces nouvelles améliorations, associées avec l'intensité de la source de neutrons, ont permis d'augmenter la sensibilité statistique et de mieux contrôler les effets systématiques. Ces efforts nous ont permis d'établir une nouvelle limite après deux ans de prise de données en 2015 et 2016 [ABEL et collab. \[2020a\]](#).

Dans ce chapitre, nous détaillerons le fonctionnement de l'expérience nEDM telle qu'elle a été réalisée à PSI, ainsi que ses différents composants, en nous intéressant particulièrement à l'aspect magnétique. Nous décrirons ensuite comment a été organisée la prise de données de façon à pouvoir maximiser la sensibilité statistique tout en minimisant et en corrigeant le faux EDM induit par le mercure.

2.1 Description de l'expérience

2.1.1 La source de neutrons ultra-froids

La source de neutrons ultra-froids de PSI [WOHLMUTHER et HEIDENREICH \[2006\]](#) est une source de spallation approvisionnée par un faisceau de protons de 590 MeV en mode pulsé issu de l'accélérateur HIPA de PSI. Un schéma de cette source est visible sur la figure 2.1. L'intensité moyenne de ce faisceau est de 2.2 mA et peut aller jusqu'à 2.4 mA [AYRES \[2018\]](#). Il approvisionne également deux cibles de production de pions et la première source de spallation de PSI, SINQ. Un aimant de déflexion rapide (moins de 1 ms) [D. et collab. \[2005\]](#) permet d'orienter le faisceau en direction de la source d'UCN pour une durée maximale de 8 s. Pendant la période de prise de données de l'expérience nEDM, en fonctionnement normal, la source recevait des pulses d'une durée de 3 s toutes les 300 s, correspondant à une utilisation de 1 % du temps de faisceau. Ce faible pourcentage d'utilisation est recommandé, car il permet de garder la température de la source suffisamment basse.

La cible de spallation (2 sur la figure 2.1) est composée de 760 tubes de zirconium remplis de plomb dont le taux de production moyen est de 8 neutrons par proton incident [BECKER et collab. \[2015\]](#). Les neutrons issus du processus de spallation ont une énergie moyenne d'environ 2 MeV. Ils sont tout d'abord thermalisés par des collisions élastiques dans un volume de 3300 L d'eau lourde (D_2O) à 31 °C (3 sur fig. 2.1) et descendent donc à une énergie moyenne d'environ 25 meV. La modération des neutrons continue dans un cristal solide de deutérium (4 sur fig. 2.1) de 30 L à environ 5 K, ce qui leur permet d'atteindre une énergie moyenne de 10 meV. Comme cela a été expliqué dans la section 1.2.3, il est ensuite trop difficile de continuer le refroidissement des neutrons par modération. Le solide de deutérium joue alors également le rôle de convertisseur super-thermal et les neutrons perdent leur énergie en l'échangeant avec les atomes du cristal sous forme de phonons, devenant ainsi des UCN dont l'énergie est inférieure à 250 neV. Afin de maintenir le cristal de deutérium fonctionnel pour la source, le système de refroidissement par hélium super-critique à 4.5 K, ainsi que les lignes d'approvisionnement en deutérium passent par le tube central (10 sur fig. 2.1).

Une fois convertis en UCN, les neutrons contenus dans la partie supérieure du cristal peuvent

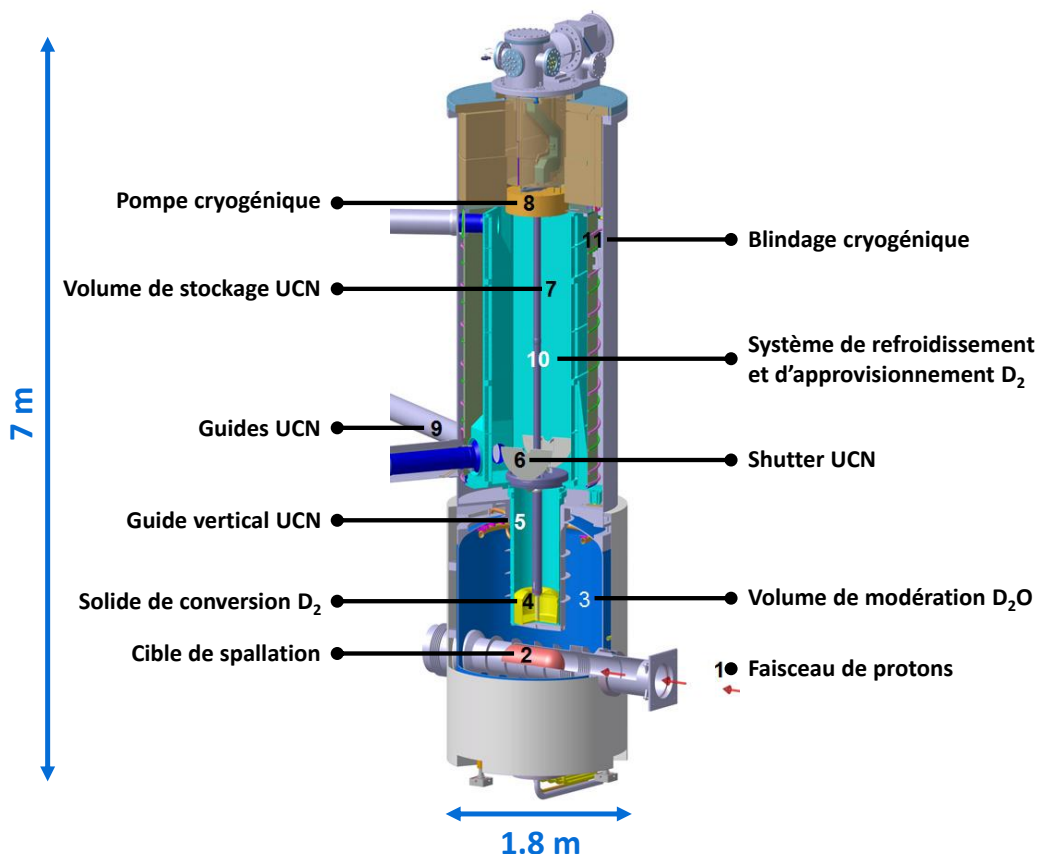


FIGURE 2.1 – Schéma de la source de production d'UCN de PSI utilisée pour l'expérience nEDM, adaptée de LAUSS [2014].

sortir de celui-ci pour gagner le vide au-dessus. Ce faisant, ils acquièrent une énergie supplémentaire d'environ 100 neV due au potentiel optique de Fermi du deutérium ALTAREV et collab. [2008]. Une ascension d'environ 1 m dans un guide UCN vertical (5 sur fig. 2.1) leur permet de perdre directement cet excès d'énergie. Les neutrons entrent alors dans une chambre de stockage (7 sur fig. 2.1) d'approximativement 2 m³ de volume dont les parois sont recouvertes de carbone de type diamant – ou *Diamond Like Carbon* (DLC), le haut potentiel de Fermi de ce matériau permettant de retenir les UCN. Un obturateur – ou *shutter* (6 sur fig. 2.1) permet de refermer cette chambre à la fin du pulse du faisceau. La chambre de stockage est entourée d'un blindage cryogénique à 80 K (11 sur fig. 2.1) et une pompe cryogénique (8 sur fig. 2.1) permet de pomper les atomes et molécules de gaz résiduels. Trois guides UCN, South, West 1 and West 2 (9 sur fig. 2.1) permettent d'acheminer les neutrons en-dehors de la source vers les différentes zones d'expérience. L'expérience nEDM était installée dans la zone South pendant toute la durée de la prise de données.

Lors d'une comparaison récente des performances de différentes sources UCN BISON et collab. [2017], la source de PSI a été reconnue comme ayant la plus haute densité d'UCN après 2 s de stockage. Bien que la densité d'UCN soit moindre que les prévisions lors de sa construction, cette source reste donc actuellement la plus intense en fonctionnement, ce qui nous permet d'avoir le maximum de sensibilité statistique en un temps donné d'acquisition.

Une fois les UCN produits dans la source, ils parcourent une dizaine de mètres dans les guides avant de parvenir à la zone d'expérience. Les guides utilisés sont des tubes en verre poli dont l'intérieur est enduit d'un matériau à haut potentiel de Fermi, comme un alliage de nickel et molybdène

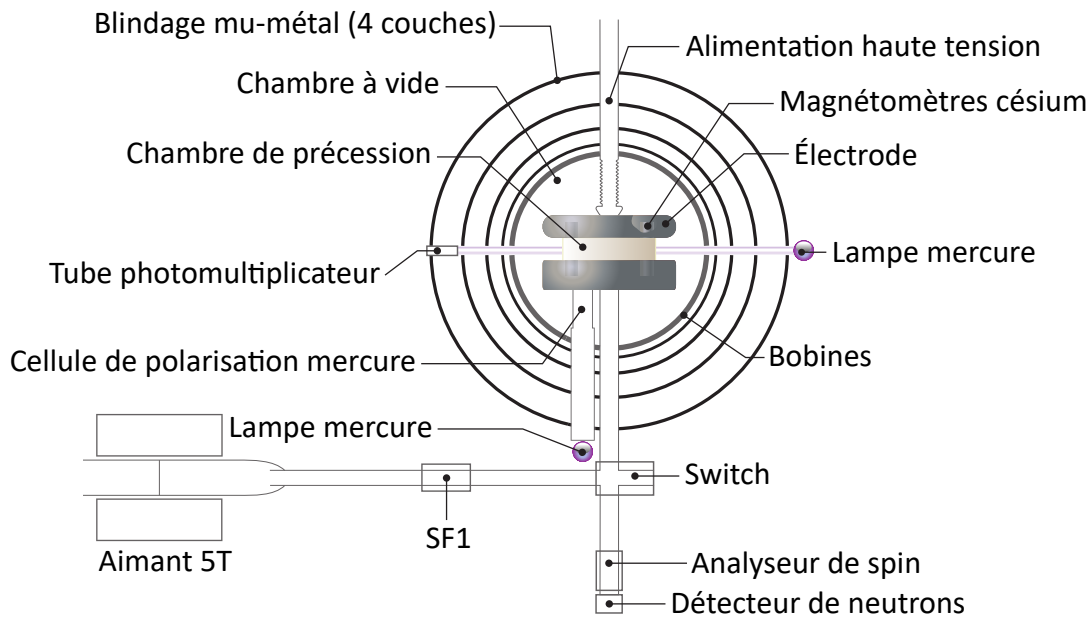


FIGURE 2.2 – Schéma du spectromètre de l'expérience nEDM à PSI.

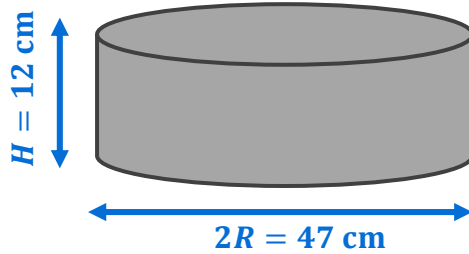
($V_F = 224(15)$ neV DAUM et collab. [2014]) ou du ^{58}Ni . Le polissage de la surface du guide et la haute valeur du potentiel de Fermi permettent de maximiser les chances des UCN d'être réfléchis sur les parois des guides.

2.1.2 Le spectromètre nEDM

Les neutrons issus de la source ne sont pas polarisés et doivent donc l'être avant de pouvoir subir la procédure de Ramsey décrite en section 1.3.2. Le spectromètre nEDM est illustré sur la figure 2.2, incluant les composants de l'expérience depuis la polarisation des neutrons jusqu'à leur détection. Les différents éléments de cette figure seront discutés dans cette section et les suivantes. La polarisation s'effectue à l'aide d'un aimant supra-conducteur de 5 T SEREBROV et collab. [2005]. A l'intérieur de celui-ci, les UCN ayant leur spin aligné avec le champ de l'aimant sont accélérés et passent à travers une feuille d'aluminium de $100\ \mu\text{m}$ d'épaisseur. Le principe de l'interaction entre les UCN et le champ magnétique permettant cette polarisation est décrit dans la section 1.2.2. A la sortie de ce polariseur, la polarisation des neutrons est de 100%. Ce pourcentage est maintenu jusqu'au début de la procédure de Ramsey grâce à l'utilisation de bobines dédiées au guidage du spin entourant les guides UCN jusqu'à l'entrée dans la chambre de précession. Il est possible d'inverser la polarisation des spins des neutrons au moyen d'un *spin-flipper*, SF1, situé avant l'entrée dans la chambre. L'efficacité de ce spin-flipper est environ de 100% AYRES [2018]. Lors de la prise de données, l'état de SF1 (allumé ou éteint) était modifié tous les 112 cycles.

Une fois polarisés, les neutrons passent alors dans le *switch*, qui permet de les orienter d'un conduit à l'autre à l'aide de différents guides UCN courbes. Les deux positions du switch qui nous intéressent permettent de relier la source au spectromètre, afin de remplir ce dernier, ainsi que que le spectromètre aux détecteurs de neutrons, lorsque le cycle de Ramsey est terminé, afin de vider la chambre de précession. Il est toutefois également possible de connecter directement la source aux détecteurs.

L'entrée des neutrons dans la chambre de précession se fait en 30 s. Celle-ci est un cylindre dont les dimensions $R = 23.5$ cm et $H = 12$ cm sont illustrées sur la figure 2.3a. La chambre se com-



(a) Schéma des dimensions internes de la chambre de précession.



(b) Photo de l'électrode inférieure.

FIGURE 2.3 – Chambre de précession cylindrique nEDM. Sur (a) sont illustrées les dimensions de la chambre. Sur (b), on trouve une photo de l'électrode inférieure de la chambre, percée des trous permettant l'entrée des UCN et des atomes de mercure. La rainure permet l'insertion de la paroi verticale du cylindre.

pose de deux matériaux distincts. Deux électrodes en aluminium viennent former les bases inférieure et supérieure du cylindre. L'électrode du bas est visible en photo sur la figure 2.3b. Elles sont enduites de DLC, matériau au potentiel de Fermi élevé $V_F = 250$ neV, afin de contenir au mieux les neutrons dans la chambre. Ces deux électrodes servent à appliquer le champ \vec{E} de 11 kV/cm nécessaire à l'expérience. Elles sont creusées de rainures circulaires dans lesquelles vient s'insérer un cylindre creux en polystyrène de diamètre interne $2R = 47$ cm. Le polystyrène n'est pas un matériau adapté pour produire une surface réfléchissante, du fait de sa grande densité en hydrogène. L'intérieur de ce cylindre est donc recouvert d'un dépôt de polystyrène deutéré dont le potentiel de Fermi est mesuré à 161 neV BODEK et collab. [2008]. La chambre de précession est contenue dans une chambre à vide cylindrique en aluminium, autour de laquelle sont enroulées les bobines servant à produire le champ magnétique \vec{B}_0 .

Les atomes de mercure du co-magnétomètre (cf. section 2.3.1) font leur entrée dans la chambre depuis leur cellule de polarisation après les neutrons, durant un intervalle de temps de 2 s. Un basculement $\pi/2$ de Rabi leur est alors appliqué, puis la procédure de Ramsey (illustrée en figure 1.9) est exécutée pour les neutrons. Le temps de précession libre avant le second basculement est de $T = 180$ s. La trappe permettant l'évacuation des neutrons est alors rouverte, le switch reliant cette fois chambre de précession et détecteurs.

La détection des neutrons se fait au moyen d'un analyseur simultané de spin (*U-shaped simultaneous spin analyzer (USSA)* AFACH et collab. [2015a]), illustré en figure 2.4, pendant une durée de 60 s. Il s'agit d'un système de détection composé de deux bras identiques. Chaque bras (A et B) est équipé de trois éléments :

- Un spin-flipper (SF2a et SF2b) dont les états sont inversés l'un par rapport à l'autre.
- Une feuille d'analyse polarisante permettant le passage d'un unique état de spin et réfléchissant l'autre état.
- Un détecteur à scintillation NANOSC BAN et collab. [2009]; BAN et collab. [2016] permettant de compter les neutrons par conversion en particules chargées dans le scintillateur.

Le principe de l'USSA est de compter les neutrons des deux états de spin (up et down) simultanément, chacun respectivement dans un bras du détecteur. Les deux feuilles polarisantes laissant

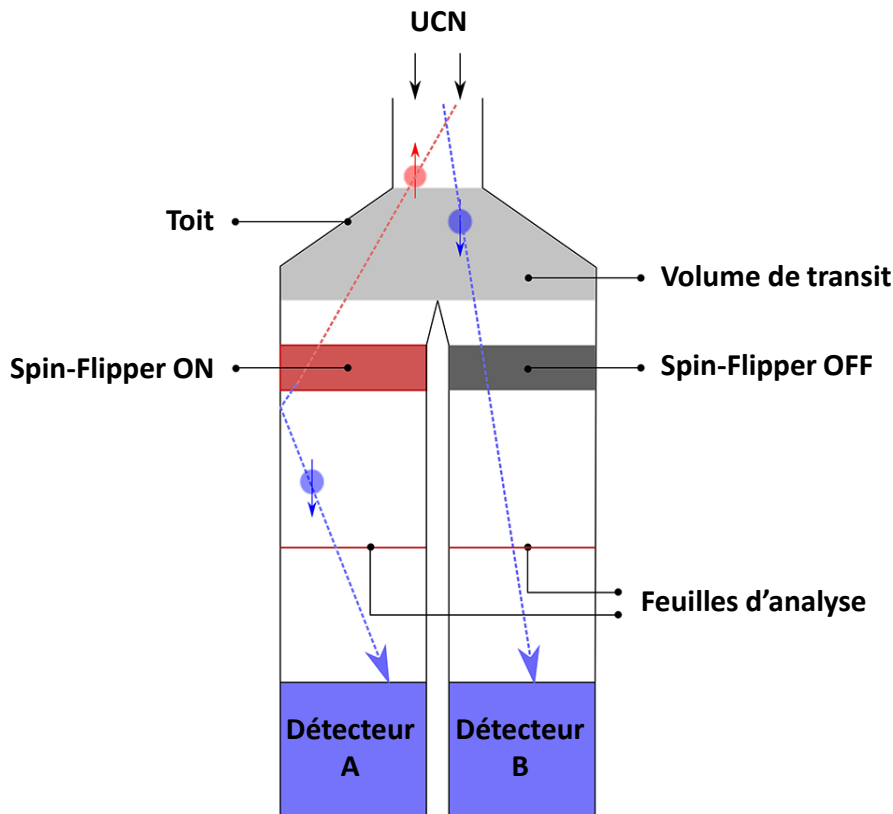


FIGURE 2.4 – Schéma de l'analyseur simultané de spin, repris de AFACH et collab. [2015a]. Chaque bras est composé d'un système complet d'analyse de spin. Le détecteur A (B) du bras gauche (droit) compte les UCN de spin up (down).

passer le même état de spin, le spin-flipper permet aux neutrons dans l'état de spin inverse de pouvoir être détectés aux aussi. Si un neutron arrive dans le bras du détecteur ne correspondant pas à son état de spin, il est réfléchi par la feuille et a alors une chance de se réorienter vers le second bras. Les spin-flippers inversent le spin à chaque passage de neutron ; si un neutron passe dans le mauvais bras après avoir vu son spin inversé, en ressortant du bras, il retrouvera son état de spin initial. Les efficacités respectives des spin-flippers A et B sont $(97.0 \pm 1.2)\%$ et $(97.1 \pm 0.9)\%$ AFACH et collab. [2015a]. Le principe de fonctionnement du détecteur afin de compter les deux états de spin simultanément est illustré sur la figure 2.4. La feuille d'analyse passée, les UCN sont détectés par capture neutronique sur l'un des NANOSC. Chacun de ces détecteurs se compose de 9 scintillateurs en verre dopés en ${}^6\text{Li}$ associés à des tubes photo-multiplicateurs. Les UCN sont capturés par les atomes de lithium selon la réaction suivante,



et les particules produites déposent leur énergie dans les scintillateurs, formant un pic aisément distinguable du bruit de fond ambiant. Une dizaine de milliers de neutrons sont comptés dans les détecteurs à chaque cycle de mesure.

Un cycle complet de mesure, depuis l'entrée des neutrons jusqu'à leur détection, prend un peu moins de 300 s, ce qui laisse quelques secondes entre chaque cycle afin de se préparer à l'arrivée du pulse de protons suivant. Les étapes de ce cycle sont résumées dans le tableau 2.1. Durant

TABLEAU 2.1 – Résumé d'un cycle de mesure de l'expérience nEDM

Événement	Durée (s)
Entrée des UCN	30
Entrée des atomes de ^{199}Hg	2
Basculement $\pi/2$ du ^{199}Hg (~ 8 Hz)	2
Basculement $\pi/2$ des UCN (~ 30 Hz)	2
Précession libre	180
Basculement de $\pi/2$ des UCN	2
Sortie et comptage des UCN	60

tout ce cycle de mesure, un contrôle de l'environnement magnétique est essentiel afin de garder une polarisation maximale des UCN et limiter les effets systématiques dus aux inhomogénéités du champ. Nous allons voir à présent comment est généré et contrôlé le champ magnétique de l'expérience.

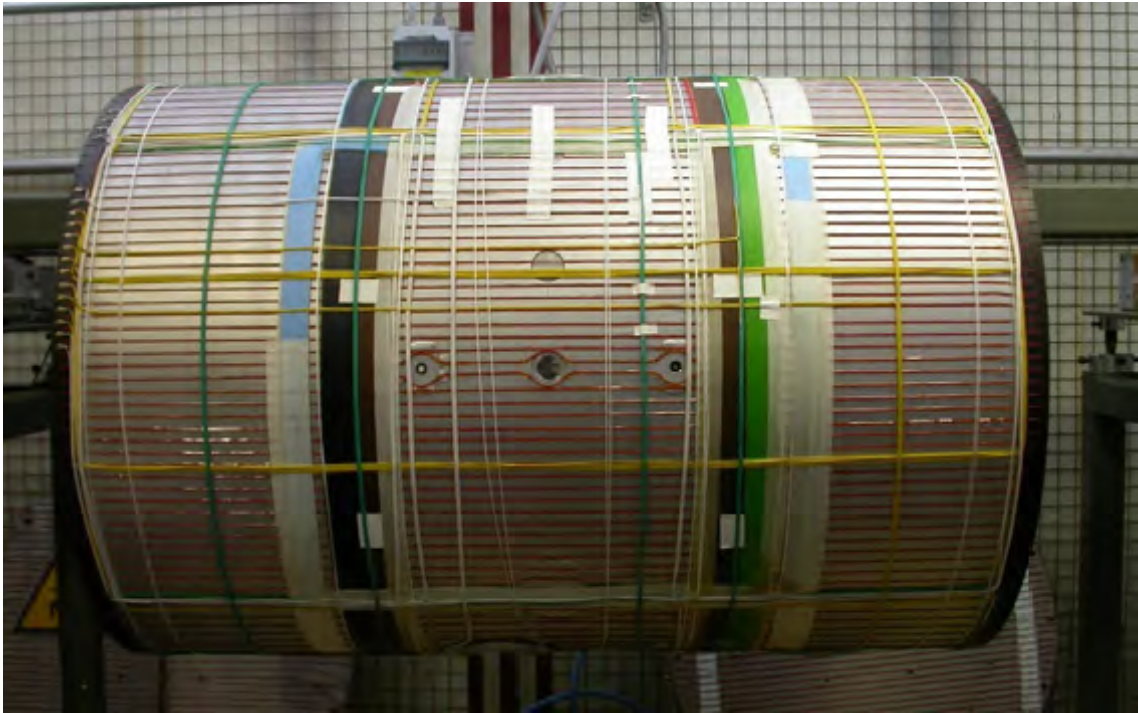
2.2 Génération du champ magnétique

Le champ magnétique \vec{B}_0 utilisé dans l'expérience nEDM est un champ vertical qui se doit d'être le plus stable et le plus uniforme possible. Pour ce faire, un blindage magnétique permet d'isoler l'expérience du champ statique extérieur et de ses perturbations. Les UCN polarisés sont donc transportés depuis l'aimant polariseur supra-conducteur jusqu'à l'intérieur du blindage avant d'être utilisés pour la mesure de l'EDM. Ce faisant, ils sont soumis à de fortes variations de champ pouvant causer leur dépolariation. Des bobines de guidage entourent donc les guides UCN afin d'assurer donc le transport des spins tout au long du parcours des neutrons. A l'intérieur du blindage, le champ \vec{B}_0 de l'expérience est généré par une bobine principale, associée à une trentaine de bobines de corrections, afin d'obtenir la meilleure uniformité possible, les inhomogénéités étant responsables d'effets systématiques conséquents, comme cela a été discuté dans la section 1.3.4.

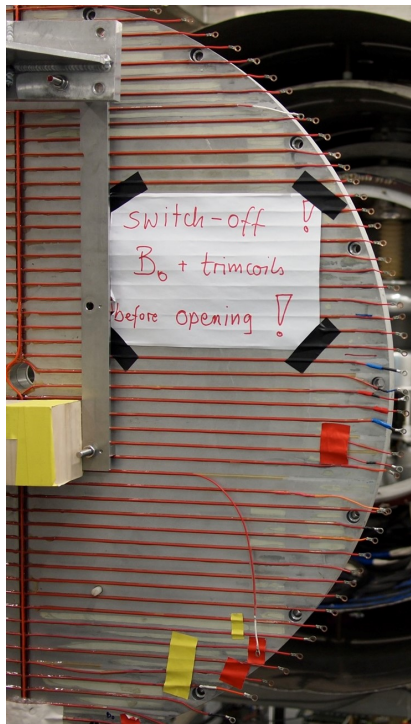
2.2.1 Le système de bobines

La bobine principale utilisée pour générer le champ magnétique est la bobine B_0 . Il s'agit d'une bobine $\cos\theta$ de 54 spires enroulées et collées directement sur la surface cylindrique de la chambre à vide en aluminium, comme on peut le voir sur la figure 2.5a. Cette bobine fait partie des composants de l'expérience nEDM déjà présent dans l'expérience de mesure de l'EDM du neutron de l'ILL BAKER et collab. qui ont été ré-utilisés tels quels. Notons que ce n'est pas le cas de l'ensemble des bobines de compensation, qui a entièrement été repensé et refait pour l'expérience de PSI. La configuration en $\cos\theta$ sur un cylindre permet de produire un champ magnétique stationnaire et uniforme orthogonal à l'axe du cylindre COILLOT et collab. [2016]. En effet, en théorie, autour d'une cavité cylindrique de dimension longitudinale (axe y dans notre cas) infinie et à l'intérieur d'un matériau de perméabilité magnétique infinie, une telle bobine produit un champ homogène quelle que soit la section transversale de la cavité BAKER et collab.. C'est vers cet état idéal que tend l'ensemble bobine B_0 et blindage magnétique passif de l'expérience nEDM. Nous décrirons ce dernier dans la section suivante 2.2.2.

L'uniformité relative du champ généré par la bobine B_0 dans la chambre de précession est de



(a) Vue de côté de la bobine B_0 (câbles rouges) et des bobines de corrections (câbles verts, jaunes et blancs) autour de la chambre à vide.



(b) Vue de face de la porte de la chambre à vide avec les connecteurs en laiton de la bobine B_0 .

FIGURE 2.5 – Photos de la bobine B_0 de l'expérience nEDM de PSI

$\delta B_0/B_0 \sim 10^{-3}$, comme nous le verrons en détail plus tard. L'écartement vertical entre les spires de la bobine B_0 est de 20 mm. La chambre à vide devant pouvoir être ouverte, chaque spire est coupée au niveau des arêtes du cylindre, comme illustré sur la figure 2.5b. Des connecteurs en laiton assurent la continuité du courant une fois la chambre à vide refermée. La chambre à vide est percée de plusieurs trous permettant le passage de divers éléments de l'expérience et le parcours des spires est alors incurvé de façon à contourner ces trous. En dehors de ces exceptions et de la continuité d'une spire à l'autre, ces dernières sont parfaitement parallèles. La résistance de la bobine est d'environ 10 Ω et un courant de 17 mA est nécessaire afin de produire un champ \vec{B}_0 d'amplitude 1 μ T. Le choix de cette amplitude par la collaboration RAL-Sussex-ILL avait été dicté par des raisons purement pratiques, cette amplitude n'influençant pas directement la précision statistique de la mesure (cf. éq. (1.33)). Il a donc été fait de façon à

- avoir un champ d'amplitude largement supérieure au champ résiduel (< 2 nT) dans la chambre de précession,
- minimiser la dépolarisation des neutrons à leur entrée dans le blindage magnétique entourant la chambre à vide,
- garder le champ le plus stable possible dans le temps,
- avoir le champ le plus homogène possible,
- éviter que la fréquence de résonance des neutrons ne soit trop proche de la fréquence du réseau électrique, à savoir 50 Hz.

Les deux premiers points impliquent d'avoir un champ suffisamment large et les deux seconds limitent au contraire l'amplitude maximum. Quant au dernier point, avec le choix de 1 μ T, la fréquence de Larmor des neutrons se trouve aux alentours de 30 Hz.

Le courant d'environ 17 mA est apporté par une source de courant de haute stabilité. Celle-ci a été caractérisée par la mesure de l'écart-type d'Allan et est de l'ordre de 100 fT à 300 s, 300 s correspondant à la durée d'un cycle de mesure de nEDM. Un pico-ampèremètre Keithley 6487 est connecté en permanence afin de mesurer les possibles fluctuations du courant en direct. La stabilité de la source permet de limiter les instabilités découlant de celles du courant.

La bobine B_0 permet donc de générer un champ de 1 μ T relativement stable et théoriquement très uniforme. Des simulations de cette bobine et des mesures du champ produits ont été réalisées dans le cadre de cette thèse afin d'évaluer l'uniformité prédite et mesurée en réalité. Le résultat des simulations sera discuté dans la section 2.2.3 tandis que les mesures du champ seront l'objet du chapitre 3.

Afin de parfaire l'uniformité du champ produit par la bobine B_0 , 30 bobines de compensation, dites *trimcoils*, viennent s'ajouter à l'expérience. Ces bobines sont enroulées autour de la chambre à vide au-dessus des câbles de la bobine B_0 (visibles sur la figure 2.5a) et autour des cheminées traversant le blindage magnétique. Certaines sont dans l'axe du cylindre et d'autres y sont orthogonales. Parmi ces trimcoils se trouvent les bobines TTC (*Top Transverse Center*) et BTC (*Bottom Transverse Center*), deux bobines orthogonales à l'axe du cylindre qui nous permettront d'appliquer un gradient vertical de champ magnétique dans la chambre de précession. L'utilité de ces deux bobines et de produire un tel gradient sera discuté dans la section 2.5.2. Les bobines de guidage des spins présentes à l'intérieur du blindage influencent également l'uniformité du champ produit dans la chambre de précession et leur contribution doit également être prise en compte. Les trimcoils, comme les bobines de guidage, sont alimentées au moyen de 5 sources de courant disposant chacune de 8 canaux. Chaque canal est individuellement contrôlé par ordinateur et le courant peut être ajusté de -200 mA à +200 mA par pas de 1 μ A.

Nous avons déjà dit que le rôle des bobines de guidage des spins est de maintenir la polarisation des UCN pendant leur transport. Un premier ensemble de solénoïdes accompagnent les guides horizontaux acheminant les UCN de l'aimant de polarisation au switch. Trois autres solénoïdes prennent ensuite le relais pour transporter les spins jusqu'à l'entrée dans la chambre de précession. L'entrée des UCN dans le blindage magnétique passif est un passage particulièrement délicat pendant lequel les neutrons sont soumis à de fortes variations de champ et le guidage des spins est donc essentiel pour cette étape. Dans cette zone, le champ des bobines de guidage se doit donc d'être aligné avec le champ B_0 produit dans la chambre à vide afin d'assurer une continuité. Ces bobines, étant très proches de la chambre de précession et générant localement un champ vertical, peuvent être responsables d'inhomogénéités au sein de la chambre.

L'expérience nEDM dispose donc de nombreuses bobines servant à générer le champ \vec{B}_0 le plus uniforme possible ainsi qu'à maintenir la polarisation initiale des UCN à son maximum. Nous allons à présent voir les éléments de l'expérience qui permettent de protéger l'expérience des perturbations magnétiques externes.

2.2.2 Blindages magnétiques

La première protection contre les perturbations externes consiste en un contrôle de la température dans la salle contenant le spectromètre nEDM (la *thermohouse*). Pour ce faire, la thermohouse est isolée thermiquement du hall expérimental et un système de climatisation permet de réguler la température à l'intérieur et de maintenir $\Delta T < 0.1$ K.

L'expérience nEDM est située dans une large zone expérimentale sur l'aire de PSI et d'autres expériences dans le voisinage utilisent des aimants pouvant générer des champs puissants. C'est le cas des installations SULTAN/EDIPO, qui peuvent produire un champ magnétique continu de l'ordre de la dizaine de teslas. Ces champs externes intenses occasionnent de fortes perturbations magnétiques et le spectromètre nEDM doit donc être protégé afin d'assurer la stabilité et l'uniformité du champ magnétique dans la chambre de précession. De plus, des variations du champ magnétique ponctuelles peuvent être causées par le passage de véhicules ou le transport de matériel à proximité de la zone d'expérience. Deux types de blindage permettent d'assurer une telle protection.

Le premier type de blindage est un blindage passif, constitué de 4 cylindres de mu-métal (chacun composé d'une partie centrale et de deux bouchons). Le mu-métal est un alliage de nickel et de fer doux ayant une très haute perméabilité magnétique relative (entre 20 000 et 100 000). Cette haute perméabilité lui permet d'attirer les lignes de champ et ainsi dévier le flux magnétique. Cela en fait un matériau de premier choix pour protéger des champs statiques, quasi-statiques (à variations lentes) ou à basse fréquence. Un blindage en mu-métal ne fonctionne donc pas en bloquant le champ magnétique mais simplement en déviant les lignes de champ le long du blindage. De ce fait, pour protéger efficacement une zone, l'idéal sera d'enfermer celle-ci dans un blindage fermé contenant le moins de trous possible. L'efficacité de blindage du mu-métal est affectée par l'intensité du champ auquel il est soumis (saturation à champs forts et diminution de la perméabilité à champs faibles). C'est pourquoi les blindages sont souvent composés de plusieurs couches de mu-métal afin de réduire successivement le champ à chaque nouvelle épaisseur.

Le blindage de nEDM était déjà présent dans l'expérience de l'ILL et ses dimensions exactes ainsi que les détails de sa fabrication sont décrits dans BAKER et collab.. Les quatre couches sont percées de plusieurs trous permettant de laisser passer les guides neutrons, l'arrivée du mercure ainsi que le faisceau lumineux permettant d'évaluer la précession du mercure, l'alimentation de la haute tension, les bobines de démagnétisation et le système de pompage à vide. Les facteurs

de blindage ont été mesurés en appliquant un champ à l'extérieur du blindage et en mesurant le champ à l'intérieur de celui-ci à l'aide d'un magnétomètre fluxgate. Pour des petites perturbations (moins de $1 \mu\text{T}$), ils sont respectivement de 13300 ± 600 pour la direction x (diamètre horizontal de la chambre à vide), 1600 ± 20 pour la direction y (axe du cylindre de la chambre à vide) et 8600 ± 300 pour la direction z (axe vertical). Le blindage joue à la fois un rôle dans le maintien de la stabilité du champ de l'expérience (en réduisant fortement l'amplitude des perturbations extérieures) et dans la production d'un champ uniforme (en réduisant le champ non-uniforme statique externe). Sans ce blindage, les inhomogénéités de champ dans la chambre de précession seraient trop importantes pour que le temps de cohérence des spins des neutrons T_2 soit de plus de quelques secondes. Avec lui, dans le champ homogène produit par la bobine B_0 , ce temps est d'environ 400 s KERMAIDIC [2016]. En ajoutant des courants appropriés dans les trimcoils précédemment évoqués, ce temps de cohérence peut être augmenté jusqu'à plus de 2000 s.

En simulant le champ magnétique produit par la bobine B_0 seule et par l'ensemble bobine B_0 / blindage, on peut voir que seulement 60% du champ est directement produit par la bobine, tandis que les 40% restants viennent de la magnétisation du blindage induite par le retour de flux de la bobine. Deux points importants découlent de ce fait. Tout d'abord, cela veut dire qu'une partie des inhomogénéités du champ \vec{B}_0 ne vient pas des imperfections de la bobine mais de celles du blindage (surface irrégulière, trous, soudure, etc.). De plus, cela signifie que le blindage, et plus particulièrement les dites imperfections, sont magnétisées par le champ produit par la bobine B_0 , même une fois que celui-ci n'est plus présent. Lorsque l'on souhaite inverser la direction de ce champ, ainsi qu'à chaque ouverture du blindage, il est donc nécessaire de démagnétiser le blindage. Cette démagnétisation est une procédure d'environ 5 minutes et est réalisée à l'aide de bobines enroulées entre les couches du blindage. Ces bobines sont alimentées de façon sinusoïdale à une fréquence de 10 Hz de façon à générer un champ suffisamment intense pour saturer le mu-métal au début de la procédure. L'amplitude absolue du champ décroît alors exponentiellement jusqu'à zéro afin de réduire progressivement l'aire du cycle d'hystérésis en le recentrant sur l'origine. Cette procédure de démagnétisation a été utilisée régulièrement lors de la prise de données nEDM et la pertinence de son évocation concernant la mesure des inhomogénéités magnétiques sera explicitée dans la section 3.3.1.

Chaque élément de l'expérience nEDM contenu à l'intérieur de la couche de blindage interne a fait l'objet d'une recherche de dipôles magnétiques constitués par des impuretés ferromagnétiques et, si nécessaire, d'une démagnétisation au sein de l'installation BMSR-2 du Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB). En effet, si le blindage passif protège la chambre de précession des dipôles extérieurs, ceux situés à l'intérieur près de la chambre peuvent générer des inhomogénéités de champ locales et ainsi induire à leur tour un faux EDM ABEL et collab. [2019]; PIGNOL et ROCCIA [2012].

Afin de maintenir une magnétisation stable du blindage passif, et ainsi éviter d'avoir recours au processus de démagnétisation trop régulièrement, le champ environnant doit être le plus stable possible, particulièrement pour les basses fréquences (inférieures à quelques hertz). Pour obtenir un tel état de fait, un système de compensation du champ environnant (ou Surrounding Field Compensation (SFC)) a été mis en place autour du blindage de mu-métal. Ce système permet à la fois de compenser le champ statique autour de l'expérience (incluant le champ terrestre) mais également les variations du champ dues aux perturbations magnétiques évoquées plus haut. La description détaillée de ce système et de ses performances peut être trouvée dans AFACH et collab. [2014]. Il s'agit d'un ensemble de trois paires de larges bobines rectangulaires disposées en configuration Helmholtz autour du blindage passif associées à dix magnétomètres fluxgates. La disposition des éléments de ce système est illustré sur la figure 2.6.

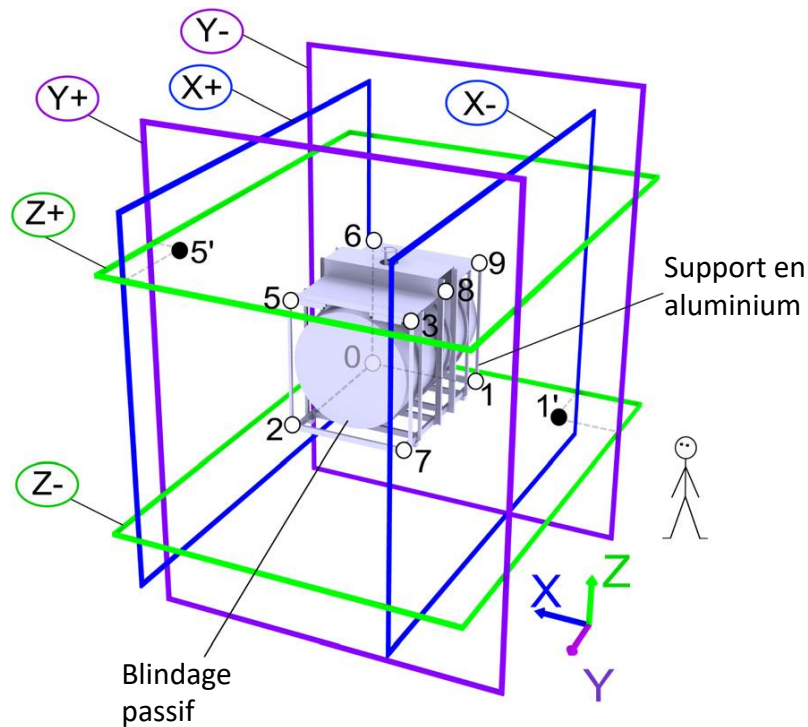


FIGURE 2.6 – Blindage actif (SFC) autour du blindage passif de nEDM. Les numéros indiquent la position des dix fluxgates servant à mesurer le champ magnétique.

Deux modes de fonctionnement sont possibles pour le SFC. En mode statique, les bobines sont alimentées par des courants constants de façon à compenser le champ statique (principalement composé du champ terrestre). En mode dynamique, un algorithme de rétroaction utilise les valeurs de champ lues par les fluxgates à une fréquence de 6 Hz afin de calculer les courants à injecter dans les bobines du système permettant de compenser les variations du champ. La gamme de fréquences pour laquelle le SFC est capable de compenser va de 10^{-3} Hz à 0.5 Hz, ce qui correspond à des échelles de temps allant de quelques secondes à l'heure. Le facteur de blindage supplémentaire apporté par le SFC va de 5 à 50 dans cette gamme de fréquences.

2.2.3 Simulations de la bobine B_0 et du blindage passif

Lors de cette thèse, j'ai réalisé des simulations de la bobine B_0 et du blindage de mu-métal en utilisant la méthode des éléments finis. Toutes ces simulations ont été faites avec le module Maxwell de Ansys pour des géométries plus ou moins simplifiées de la bobine et des quatre couches de blindage passif. Le champ simulé étant le champ statique produit par la bobine B_0 , de nombreux éléments ne modifiant pas ce champ n'ont pas été simulés afin de simplifier les calculs, tels que la chambre à vide en aluminium ou toute la structure de la chambre de précession. Une illustration d'un quart de la géométrie lors des simulations finales est illustrée sur la figure 2.7. Dans ces dernières, la bobine est considérée comme un ensemble de 54 spires de cuivre rectangulaires parfaitement parallèles espacées d'intervalles verticaux de 2 cm. Afin de minimiser le temps de calcul, la section de ces spires est choisie comme étant un carré de quelques millimètres de côté. Un courant identique de ± 17.150 mA parcourt les 54 spires dans le même sens. Pour les simulations, la perméabilité magnétique relative du mu-métal composant le blindage est fixée entre $\mu = 10\,000$ et $\mu = 30\,000$. L'épaisseur réelle des couches de blindage étant extrêmement fine (2 mm) comparée

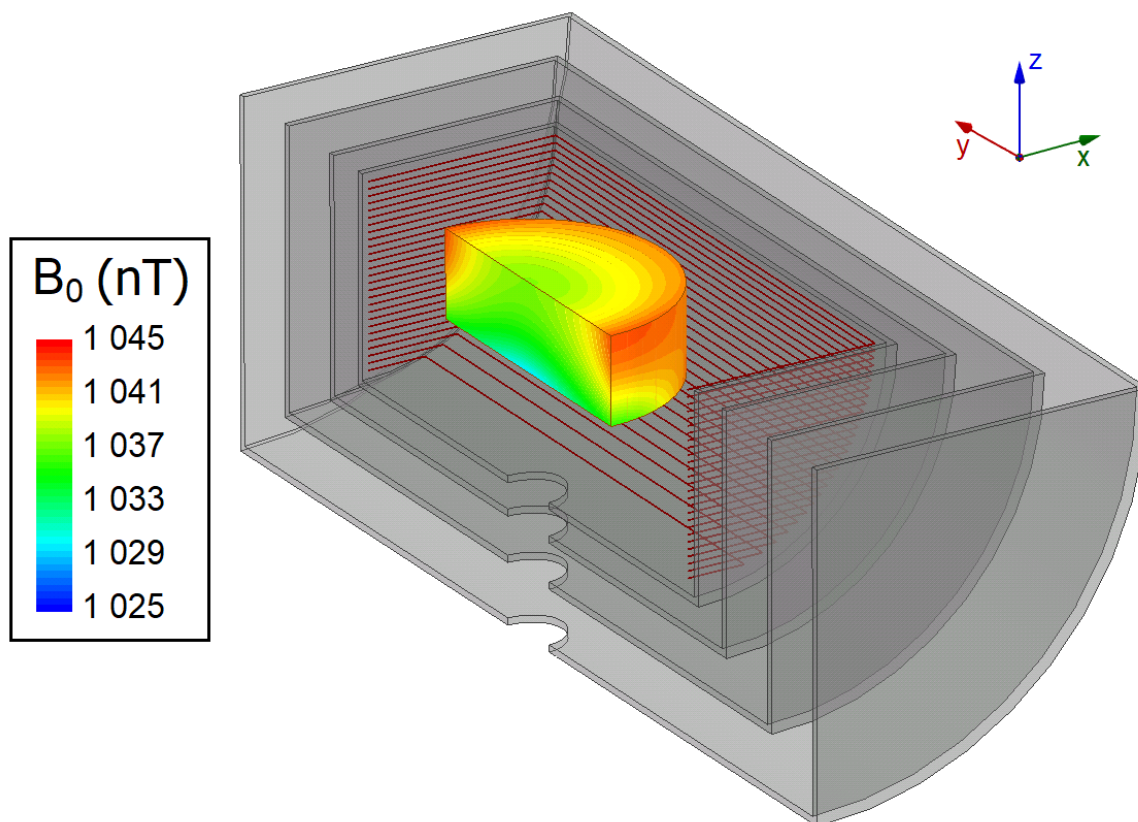


FIGURE 2.7 – Simulation du champ généré par la bobine B_0 au sein des quatre couches de blindage passif dans le volume d'intérêt. L'illustration représente un quart du volume complet; la géométrie est symétrique par rapport aux plans de coupe. Les dimensions de la couche externe de blindage sont $R_{MS4}^{simu} = 0.98$ m and $H_{MS4}^{simu} = 2.79$ m. Les spires de la bobines sont représentées en rouge. Le volume d'intérêt est un cylindre de 80 cm de diamètre et 50 cm de haut, plus large que la chambre de précession et que le volume couvert par les cartographies de champ magnétiques.

aux dimensions de la géométrie totale, des problèmes de maillage aux interfaces de ces volumes sont apparus lors de la résolution dans les simulations. Afin de contourner ce problème, une version plus épaisse du blindage (20 mm) associée à une perméabilité relative plus faible (1 000 à 3 000) ont été simulées. Les dimensions internes des couches de blindage correspondent aux dimensions réelles et c'est les dimensions externes de celles-ci qui ont été augmentées afin d'obtenir un blindage plus épais. Chaque épaisseur de blindage est considérée comme un cylindre creux de mu-métal, creusé en son centre de trous de 20 cm de diamètre, le long de l'axe vertical z , afin de représenter les trous les plus gros du blindage réel. La géométrie simulée est donc parfaitement symétrique par rapport aux plans d'origine, (xOy) , (xOz) et (yOz) .

Les simulations ainsi réalisées ont été analysées avec la méthode qui sera décrite dans la section 3.2. Cette méthode a été développée dans le but d'analyser les mesures réelles du champ magnétique produit par la bobine B_0 et ainsi extraire les gradients généralisés $G_{l,m}$ servant à décrire les inhomogénéités du champ. Quelques différences dans la procédure d'analyse des mesures et des simulations existent toutefois. En effet, le champ simulé a été ajusté avec les polynômes harmoniques jusqu'à l'ordre $l = 7$ (ordre d'analyse maximal implémenté dans le programme d'analyse) tandis que nous verrons dans le chapitre 3 que ce n'est pas le choix qui a été fait pour analyser les mesures. De plus, l'intérêt des simulations étant l'étude du champ produit par la bobine B_0

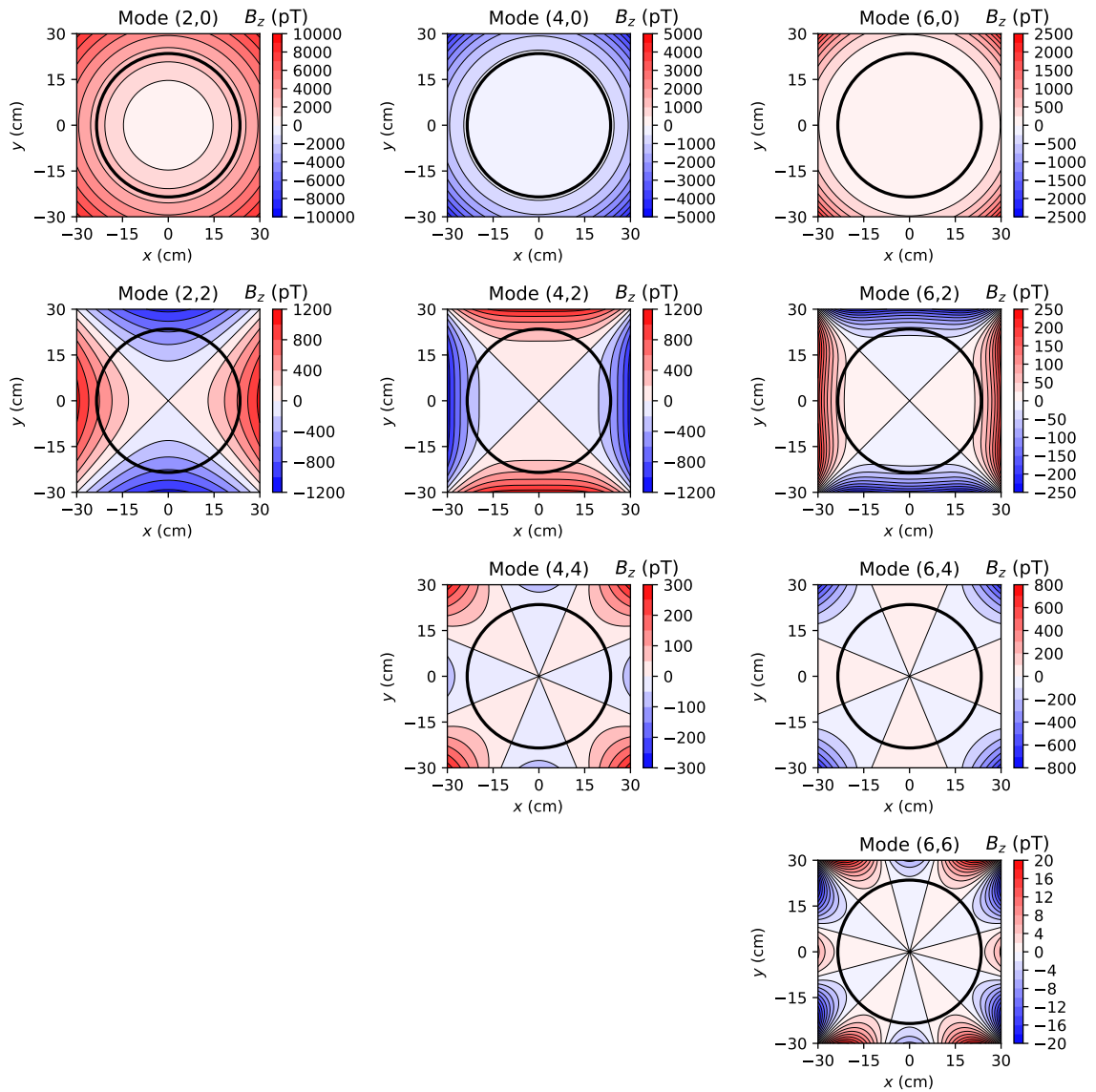
TABLEAU 2.2 – Valeurs prédites par les simulations Ansys des modes de champ magnétique autorisés par les symétries de la bobine B_0 pour une configuration B_0 up.

	$G_{l,m_{B_0}}^{\text{simu}}$ (pT/cm ^l)	$\Delta G_{l,m_{B_0}}^{\text{simu}}$ (pT/cm ^l)
$G_{0,0}$	1034.5×10^3	5.1×10^3
$G_{2,0}$	-9.26	0.14
$G_{2,2}$	1.18	0.21
$G_{4,0}$	-3.63×10^{-3}	0.06×10^{-3}
$G_{4,2}$	1.37×10^{-3}	0.01×10^{-3}
$G_{4,4}$	-8.66×10^{-5}	0.14×10^{-5}
$G_{6,0}$	-1.16×10^{-6}	0.02×10^{-6}
$G_{6,2}$	2.77×10^{-7}	0.02×10^{-7}
$G_{6,4}$	-7.89×10^{-8}	0.04×10^{-8}
$G_{6,6}$	8.89×10^{-9}	0.16×10^{-9}

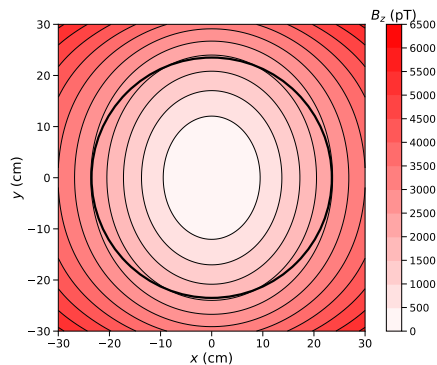
dans le blindage magnétique, celles-ci ont été analysées dans le système de coordonnées centré sur le centre de la bobine. En revanche, les cartes de champ seront analysées dans le système dont l'origine est le centre de la chambre de précession, décalée de 2 cm par rapport à celui de la bobine. Pour évaluer les incertitudes numériques de la méthode de simulation, nous avons joué sur la variation de divers paramètres, tels que l'affinage du maillage ou les valeurs du couple (épaisseur de blindage, perméabilité relative) et comparé les résultats des différentes simulations ainsi obtenues. L'écart-type standard de ces résultats permet d'obtenir une estimation de ces incertitudes.

Dans l'hypothèse d'une bobine « parfaite », ce qui est le cas de la bobine simulée, le champ magnétique généré par celle-ci est fortement contraint par les symétries du système. En utilisant la paramétrisation polynomiale du champ décrite dans la section 1.3.4 et détaillée dans l'annexe A, il est possible d'identifier les quelques modes $G_{l,m}$ autorisés à être non nuls par les symétries, le premier de ceux-ci étant le terme constant $G_{0,0}$, dont la valeur prédite par la simulation est de 1034.5 nT. Nous avons déjà évoqué le fait que le champ \vec{B}_0 provient à 40% du retour de flux de la première couche du blindage. En effet, en simulant uniquement la bobine, on obtient une estimation de $G_{0,0}$ de l'ordre de seulement 600 nT. En revanche, dès l'ajout de la première épaisseur de blindage, la valeur simulée de $G_{0,0}$ est de l'ordre de 1 μ T. Les modes suivants autorisés sont les modes avec l et m pairs et positifs. Ces modes, ainsi que la prédiction de leur valeur et leur incertitudes, sont listés dans le tableau 2.2 jusqu'à l'ordre 7 de la paramétrisation polynomiale. Les inhomogénéités dues à chacun de ces modes sont représentées sur la figure 2.8a dans le plan horizontal par rapport aux dimensions de la chambre de précession. L'inhomogénéité totale due à la somme de tous les modes autorisés est représentée sur la figure 2.8b. Le mode constant $G_{0,0}$ n'est pas représenté ni pris en compte sur ces figures, étant donné qu'il n'intervient pas dans la génération d'inhomogénéités. On peut voir sur cette dernière figure que l'uniformité absolue prédite par les simulations dans le volume de la chambre de précession est $\delta B_0 = 3$ nT, ce qui correspond à une uniformité relative de $\delta B_0/B_0 = 3 \times 10^{-3}$.

Tous les autres modes que ceux listés dans le tableau 2.2 sont interdits par les symétries du système {bobine + blindage}. Toutefois, ce système n'est en réalité pas parfaitement symétrique



(a) Simulation du champ vertical produit par les modes autorisés de la bobine B_0 considérés individuellement.



(b) Simulation du champ vertical produit par l'ensemble des modes autorisés de la bobine B_0 .

FIGURE 2.8 – Simulation des inhomogénéités du champ produites par les modes autorisés de la bobine B_0 dans le plan (xOy) . Le cercle noir représente les dimensions de la chambre de précession ($R = 23.5$ cm).

(connexions des spires, trous du blindage non-symétriques, détours des câbles dus aux trous dans le blindage, alignement imparfait des spires, etc.). Les modes censés être interdits existent donc, bien que la plupart aient une amplitude bien inférieure à celle des modes autorisés. Des simulations de géométries plus réalistes de la bobine ou du blindage ont également été explorées, mais elles ne seront pas évoquées plus avant, car finalement peu pertinentes. En effet, générer une géométrie identique à la réalité était impossible et simuler une approximation de ces imperfections n'apporterait pas de connaissance suffisante sur les modes interdits. L'objectif étant donc seulement d'obtenir une estimation des modes autorisés, la simulation d'un système idéal est suffisante et l'exploitation des symétries permet un temps de calcul beaucoup plus rapide. Une comparaison entre les valeurs mesurées du champ et celles simulées sera discutée dans la section 3.3.2.

La bobine B_0 , associée au blindage magnétique, permet donc en théorie de produire un champ très uniforme et relativement stable. Nous avons toutefois déjà évoqué dans la section 1.3.3 la nécessité de contrôler la stabilité du champ en temps réel grâce au co-magnétomètre mercure. Nous allons donc à présent nous intéresser en détail aux éléments de magnétométrie de l'expérience assurant le contrôle du champ.

2.3 Contrôle en ligne du champ magnétique

L'utilisation du co-magnétomètre mercure dans l'expérience nEDM est indispensable, comme cela a déjà été discuté dans la section 1.3.3. En effet, malgré les divers éléments évoqués ci-avant servant à produire un champ magnétique \vec{B}_0 le plus stable possible, les dérives temporelles de celui-ci sont supérieures à la précision statistique de la mesure de la fréquence de Larmor des neutrons. Il est donc nécessaire de pouvoir contrôler et corriger ces dérives en temps réel. C'est le rôle assuré par le co-magnétomètre mercure.

À l'origine, le système de co-magnétométrie mercure avait été développé pour l'expérience de mesure de l'EDM du neutron de l'ILL, par la collaboration RAL-Sussex-ILL BAKER et collab.; GREEN et collab. [1998]. La sensibilité expérimentale des mesures précédentes était alors justement limitée par les dérives de champ magnétique et des tentatives de mesure du champ avaient déjà été faites, utilisant des magnétomètres disposés à l'extérieur de la chambre de précession des neutrons SMITH et collab. [1990]. Malgré la volonté de les placer le plus proche possible de la chambre de précession, le positionnement de tels magnétomètres était contraint toutefois par les différents éléments des expériences. Ces solutions restaient donc limitées par le fait que le champ mesuré ne correspondait pas parfaitement au champ que percevaient les neutrons. La solution d'adopter un co-magnétomètre permettant de mesurer le champ au sein même de la chambre de précession a donc été mise en place. Dans l'expérience nEDM de PSI, la magnétométrie en ligne se compose donc du co-magnétomètre mercure dans la chambre, dont le fonctionnement sera décrit dans la section suivante, et de magnétomètres césium entourant la chambre, qui seront discutés dans la section 2.3.3.

2.3.1 Fonctionnement du co-magnétomètre mercure

Dans l'expérience de l'ILL et celle qui lui a succédé, nEDM à PSI, les atomes de mercure polarisés cohabitent donc avec les UCN dans le volume de précession, permettant ainsi d'accéder à la valeur moyenne du champ \vec{B}_0 dans la chambre durant tout le temps de précession des neutrons. Le principe de fonctionnement de ce co-magnétomètre est illustré sur la figure 2.9. Il consiste à polariser verticalement les spins des atomes de ^{199}Hg , injecter la vapeur dans la chambre de précession et faire basculer les spins dans le plan transverse afin que ceux-ci précessent librement

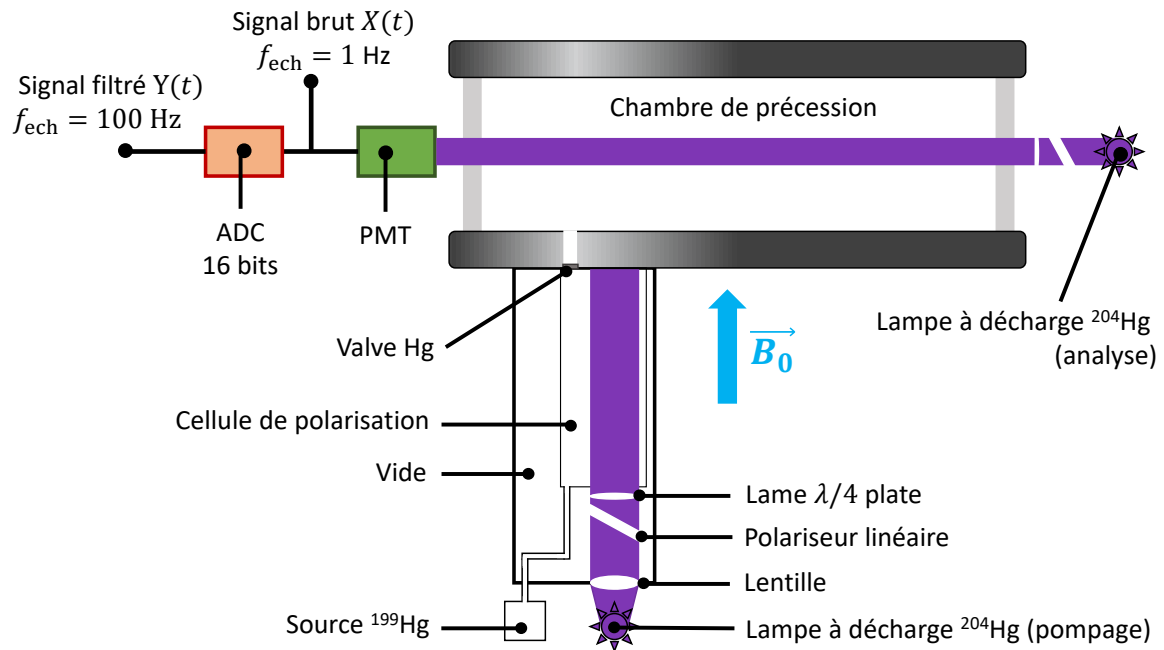


FIGURE 2.9 – Schéma de fonctionnement du co-magnétomètre mercure dans l'expérience nEDM (pas à l'échelle), repris et adapté de KERMAIDIC [2016]. Dans la partie inférieure se trouvent la source ^{199}Hg et les éléments servant à la polarisation de la vapeur. Dans la partie supérieure se trouvent la chambre de précession et les éléments d'analyse du signal de précession.

dans le champ, tout comme les neutrons. En mesurant leur fréquence de précession, on peut alors remonter à la valeur du champ magnétique scalaire, moyennée sur le volume de la chambre, qui dérive au fil des cycles de mesure, comme cela a été illustré par la figure 1.11.

2.3.1.1 Production de la vapeur polarisée de ^{199}Hg

La source de mercure est constituée d'une poudre de monoxyde de mercure (HgO), isotopiquement enrichie en ^{199}Hg à plus de 90%, qui se situe en-dehors du blindage magnétique de l'expérience. Une résistance chauffante permet d'amener cette poudre à $200\text{ }^\circ\text{C}$ afin de séparer mercure et oxygène et d'envoyer les atomes de mercure, alors non-polarisés, dans la cellule de polarisation qui se trouve au-dessus de la source. La finesse du tube reliant source et cellule permet d'éviter que les atomes ne redescendent dans la source. La cellule est une chambre cylindrique de dimensions $R_{\text{polar}} = 3.5\text{ cm}$ et $H_{\text{polar}} = 28.7\text{ cm}$. Une lampe à décharge remplie de vapeur de ^{204}Hg envoie un faisceau UV vertical (aligné avec le champ \vec{B}_0) à travers la chambre. Ce faisceau est polarisé circulairement au moyen d'un polariseur linéaire suivi d'une lame quart d'onde $\lambda/4$. Il va lui-même permettre de polariser par pompage optique les spins des atomes de ^{199}Hg . Le principe simplifié du pompage optique nucléaire est illustré sur la figure 2.10.

Dans son état fondamental, l'atome de ^{199}Hg possède un spin électronique nul $S = 0$ et un spin nucléaire $I = 1/2$, du fait d'un neutron célibataire. Son spin total est donc $F = 1/2$. En présence d'un champ magnétique externe non nul, la dégénérescence de l'état fondamental m_f , mais également celle de l'état excité m_e est levée par effet Zeeman. Il est à noter que la différence entre les deux niveaux fondamentaux étant bien inférieure à l'énergie d'agitation thermique, la polarisation initiale de la vapeur est nulle. Avec l'application d'un faisceau résonant de longueur d'onde 253.7 nm

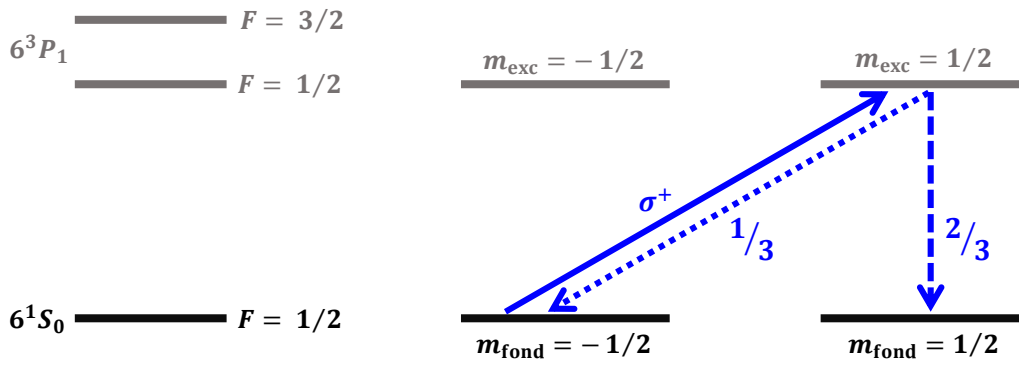


FIGURE 2.10 – Illustration simplifiée de la structure hyperfine du ^{199}Hg , avec les deux premiers états excités $F = 1/2$ et $F = 3/2$, et du principe du pompage optique nucléaire pour la transition $F = 1/2$ utilisé dans l'expérience nEDM.

polarisé σ^+ , les atomes de l'état fondamental de composante de spin $\sigma_z = -1/2$ peuvent absorber les photons et ainsi passer dans l'état excité de composante de spin $\sigma_z = +1/2$. Les photons σ^+ portant un moment angulaire égal à $+1$, ils ne peuvent pas être absorbés par les atomes de l'état fondamental $\sigma_z = 1/2$. La différence d'énergie entre l'état fondamental et l'état excité est d'environ 5 eV. Les atomes ayant absorbé des photons se désexcitent ensuite vers l'état fondamental, avec une proportion $2/3$ vers l'état $\sigma_z = 1/2$ et $1/3$ vers l'état $\sigma_z = -1/2$. En appliquant en continu le faisceau résonant, un déséquilibre des deux populations fondamentales se forme progressivement et la vapeur de mercure se polarise donc dans l'état spin up.

La lumière résonante utilisée est produite par une lampe à décharge de ^{204}Hg , la raie d'émission de celui-ci coïncidant avec la transition $F = 1/2$ du ^{199}Hg . L'écart entre ces deux raies est infime devant les largeurs Doppler des raies à température ambiante. En revanche, la largeur Doppler de la raie du ^{204}Hg est suffisamment faible pour que la lumière ne puisse pas exciter les atomes de ^{199}Hg dans un autre état que le premier état excité $F = 1/2$.

Une fois que la chambre de précession a été remplie avec les UCN issus de la source de neutrons, au début de chaque cycle de mesure, la valve mercure s'ouvre pendant deux secondes, permettant l'injection de la vapeur de mercure. Le volume de la chambre est vingt fois plus important que celui de la cellule de polarisation, ce qui entraîne une dilution conséquente du ^{199}Hg dans la chambre. La production de cette vapeur de mercure polarisée se fait en continu pendant les cycles de mesure, de façon à avoir une population d'atomes de ^{199}Hg polarisés conséquente à injecter dans la chambre à chaque début de cycle.

2.3.1.2 Précession et mesure du champ magnétique

Lorsque la vapeur de mercure est injectée dans la chambre de précession, les spins des atomes de mercure sont donc alignés avec le champ magnétique vertical B_0 . Afin de pouvoir les faire précesser, on provoque un basculement $\pi/2$ de Rabi. Pour ce faire, un champ magnétique perturbatif oscillant à la fréquence $f_{\text{Hg}} = \gamma_{\text{Hg}} B_0 / 2\pi \sim 8 \text{ Hz}$ résonante est appliqué dans le plan transverse pendant 2 s. Comme pour les neutrons lors de la procédure de Ramsey, les spins se mettent alors à précesser autour du champ B_0 en basculant dans le plan transverse.

Le signal de précession mercure est analysé à l'aide d'une seconde lampe à décharge ^{204}Hg . Comme pour la première lampe, le faisceau de lumière résonant à 253.7 nm est focalisé puis polarisé circulairement au moyen d'un polariseur linéaire et d'une lame quart d'onde. Ce faisceau traverse la chambre de précession selon l'axe x en passant par deux fenêtres circulaires en saphir

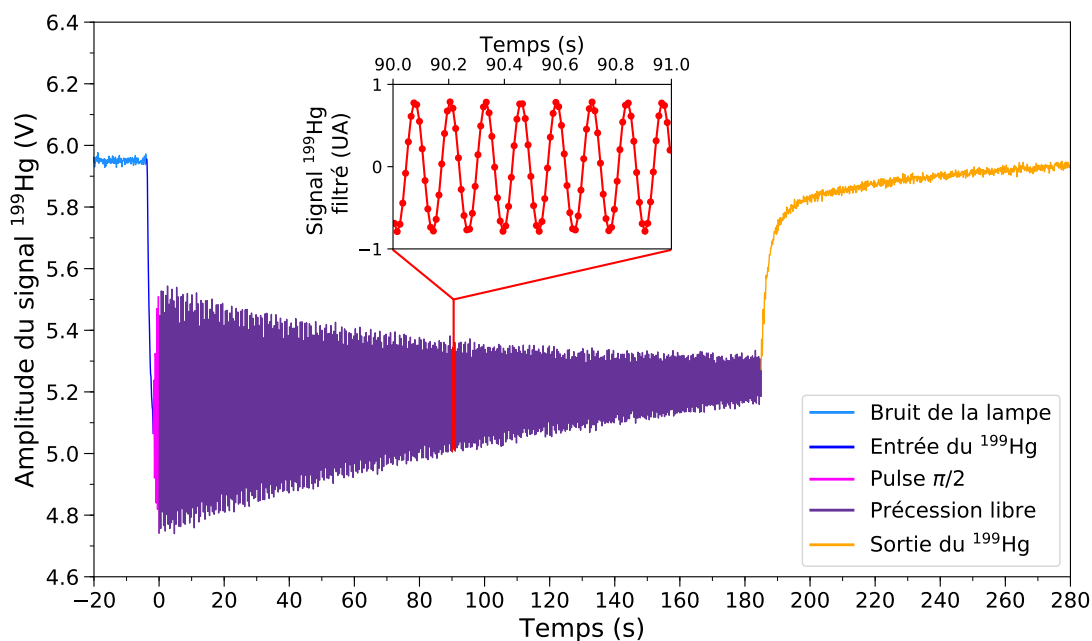


FIGURE 2.11 – Signal électrique d’absorption brut de la lampe ^{204}Hg . La première portion (bleu clair) correspond au bruit de la lampe enregistré avant l’entrée des atomes de ^{199}Hg . La chute de l’intensité (bleu foncé) correspond à l’ouverture de la valve Hg. Puis le basculement de Rabi est appliqué (rose), suivi de la phase de précession libre (violet). Après 180 s, la chambre est ouverte et les atomes de ^{199}Hg sont pompés à l’extérieur (orange). Dans l’encadré, en rouge, se trouve un extrait du signal une fois celui-ci filtré et échantillonné à 100 Hz.

enduites de polyéthylène deutéré. Les atomes de ^{199}Hg peuvent alors absorber les photons du faisceau. Par conservation du moment angulaire, cette absorption est modulée à la fréquence de précession, elle-même proportionnelle à l’amplitude du champ \vec{B}_0 . En mesurant l’intensité de la lumière transmise, il est donc possible d’extraire la valeur moyenne de B_0 .

La lumière en sortie de la chambre est détectée par un tube photo-multiplieur (PMT) dont le courant, de l’ordre de quelques μA est amplifié au moyen d’un amplificateur de courant. Le signal brut obtenu est un signal de tension compris entre 0 et 10 V. L’exemple du signal brut d’absorption mercure pour un cycle nEDM est visible sur la figure 2.11. On peut voir la modification de l’absorption durant les différentes phases du cycle. Le temps précédant l’entrée du mercure dans la chambre sert à mesurer le bruit de la lampe seule. On voit que l’intensité transmise diminue brusquement à l’ouverture de la valve Hg, puis qu’elle se met à osciller avec l’application du basculement de Rabi et pendant tout le temps de précession libre. Enfin, à la fin du cycle de mesure, le mercure est pompé en dehors de la chambre de précession et l’intensité transmise ré-augmente jusqu’à sa valeur initiale.

Ce signal est le signal brut en sortie du PMT et de l’amplificateur de courant et il doit être traité plus avant afin de pouvoir extraire précisément à la fréquence de Larmor des spins des atomes de ^{199}Hg . Les composantes continue (DC) et alternative (AC) de ce signal sont tout d’abord séparées et il est filtré par un filtre passe-bande en entrée d’un convertisseur analogique numérique – ou *analog-to-digital converter* (ADC) 16 bits et échantillonné à 100 Hz. Une représentation du signal filtré pendant une seconde est visible dans l’encadré sur la figure 2.11. On peut facilement identifier la fréquence d’environ 8 Hz. Le signal ainsi numérisé est ensuite ajusté par la *méthode des deux fenêtres adaptatives* KERMAIDIC [2016] afin d’extraire la fréquence de précession f_{Hg} . La

valeur moyennée, en temps sur la précession $T = 180$ s et en volume sur la chambre de stockage, de l'amplitude du champ, B_0 , peut être calculée grâce au rapport gyromagnétique du mercure γ_{Hg} avec une précision typique comprise entre 10 fT et 100 fT, soit une sensibilité relative de 0.01 ppm à 0.1 ppm.

2.3.2 Inhomogénéités magnétiques et co-magnétomètre mercure

Malgré l'amélioration sur la sensibilité de mesure apportée par le co-magnétomètre, celui-ci ne vient pas sans quelques inconvénients. Nous avons déjà évoqué le plus problématique, le faux EDM relativiste du mercure, dans la section 1.3.4. Pour rappel, il s'agit d'un décalage en fréquence de signe opposé avec l'inversion du champ électrique \vec{E} , qui se confond donc avec un signal EDM. Ce décalage se transmet directement à la fréquence des neutrons du fait de l'utilisation du rapport des fréquences $\mathcal{R} = f_n / f_{\text{Hg}}$.

Il existe d'autres effets décalant la valeur du rapport \mathcal{R} . Tous ces effets ne sont pas nécessairement des effets systématiques, étant donné que c'est la différence de \mathcal{R} dans les configurations de champs parallèles et anti-parallèles qui sert à calculer l'EDM. Nous allons ici évoquer deux de ces effets, qui sont liés à la différence de perception du champ magnétique des deux espèces précesant dans la chambre, les UCN et les atomes de ^{199}Hg , et qui sont donc des conséquences directes de l'utilisation du co-magnétomètre mercure.

2.3.2.1 L'invisible composante transverse

L'effet que nous allons discuter ici est le second effet systématique lié à l'utilisation du co-magnétomètre mercure que je me suis appliquée à corriger au cours de cette thèse. Il s'agit cette fois d'un effet indirect, ce qui nous incitera ici à glisser une parenthèse sur la distinction entre effet direct et indirect. Les effets considérés comme directs, tel le faux EDM du mercure, sont les décalages de \mathcal{R} qui sont corrélés avec le champ électrique. En effet, lorsque celui-ci est inversé, ces décalages changent alors de signe et créent donc un faux signal d'EDM. Les effets indirects, quant à eux, n'ont aucune corrélation avec le champ électrique. Il s'agit de décalages dont l'amplitude diffère selon si le champ magnétique \vec{B}_0 est dirigé vers le haut ou vers le bas. En théorie, de tels décalages ne devraient pas générer de faux EDM car ils n'apparaissent pas dans la valeur de l'EDM extraite de l'analyse. C'est toutefois le cas, en raison de la stratégie de correction du faux EDM relativiste du mercure, qui implique l'utilisation du rapport des fréquences \mathcal{R} et dont le principe sera expliqué dans la section 2.5. La réalisation de cette correction sera quant à elle discutée en détails dans le chapitre 4 et nous verrons à ce moment-là comment ce type de décalage peut être la cause de l'apparition d'un faux EDM.

Ce deuxième effet systématique dû à l'utilisation du co-magnétomètre découle du fait déjà évoqué que les atomes de mercure et les UCN ne perçoivent pas le champ magnétique de la même façon étant données leurs vitesses moyennes respectives. Le mercure se situe dans le régime non-adiabatique et va donc simplement moyenner le champ sur toute la chambre, voyant ainsi le champ suivant :

$$B_{\text{Hg}} = \left| \left\langle \vec{B}_0 \right\rangle \right| = B_0, \quad (2.2)$$

où les chevrons représentent ici la moyenne sur le volume de précession. Les neutrons, en revanche, sont dans le régime adiabatique et ils vont être sensibles aux variations locales de champ. Le champ moyen perçu par les neutrons sera donc

$$B_n = \left\langle |\vec{B}_0| \right\rangle = \left\langle \sqrt{B_0^2 + B_T^2} \right\rangle = B_0 \left\langle \left(1 + \frac{B_T^2}{B_0^2} \right) \right\rangle = B_0 + \frac{\langle B_T^2 \rangle}{2B_0}, \quad (2.3)$$

où $\langle B_T^2 \rangle$ décrit les inhomogénéités transverses moyennes du champ magnétique. L'expression de $\langle B_T^2 \rangle$ en coordonnées cartésiennes étant plus intuitive que son expression en coordonnées cylindriques, c'est celle que nous donnerons ici. Dans ce système, $\langle B_T^2 \rangle$ s'exprime comme suit,

$$\langle B_T^2 \rangle = \left\langle (B_x - \langle B_x \rangle)^2 + (B_y - \langle B_y \rangle)^2 \right\rangle. \quad (2.4)$$

Cette expression peut être développée afin d'exprimer $\langle B_T^2 \rangle$ en fonction des gradients généralisés de la paramétrisation du champ discutée dans l'annexe A. Un tel développement, ainsi que l'expression de $\langle B_T^2 \rangle$ en coordonnées cylindriques sont présentés dans l'annexe B. Les calculs analytiques permettant d'obtenir $\langle B_T^2 \rangle$ jusqu'à l'ordre 7 ont été réalisés au cours de cette thèse avec Mathematica.

La différence entre le champ perçu par les UCN et les atomes de mercure se traduit en un décalage du rapport des fréquences $\left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \frac{\langle B_T^2 \rangle}{2B_0^2}$. Comme nous l'avons dit, ce décalage n'induit pas directement de faux EDM mais aura un effet indirect et il doit donc, tout comme le faux EDM du mercure, être corrigé. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître la valeur de $\langle B_T^2 \rangle$ lors des séquences de prise de données nEDM. Les divers décalages de \mathcal{R} et leur correction, si nécessaire, seront discutés plus en détails dans la section 4.1 et nous nous contenterons donc de retenir pour le moment que le mercure est indirectement responsable d'un second effet systématique qui pourra être corrigé grâce à la mesure des inhomogénéités magnétiques.

2.3.2.2 Le décalage gravitationnel

Le deuxième décalage du rapport des fréquences \mathcal{R} que nous allons discuter ici n'est pas considéré comme un effet systématique dans l'expérience nEDM. En effet, cet effet n'est pas corrélé au champ électrique et ne cause donc pas d'effet direct. De plus, contrairement aux inhomogénéités transverses, il ne cause pas non plus d'effet systématique indirect lors de la correction du faux EDM, pour la simple raison que cet effet est l'un des acteurs majeurs de cette correction, comme nous le verrons dans la section 2.5. Il s'agit toutefois bien d'un décalage de \mathcal{R} lié à la différence de comportement des UCN et des atomes de ^{199}Hg dans la chambre de précession.

Pour comprendre l'origine du décalage gravitationnel, il est nécessaire de raisonner en terme d'énergie cinétique des populations. Les UCN ont une énergie inférieure à 250 neV et une ascension verticale de 1 m correspond pour eux à une perte d'énergie d'environ 100 neV (voir section 1.2.2). On rappelle que la chambre de précession a une hauteur H de 12 cm. En pratique, les neutrons présents dans la chambre sont répartis sur un spectre d'énergie et certains d'entre eux n'ont donc pas l'énergie suffisante pour atteindre le haut de la chambre. Très sensibles à la gravité, ils se contenteront donc de décrire des paraboles en rebondissant sur l'électrode inférieure. Les UCN vont donc en moyenne résider plus longtemps dans la partie basse du volume de stockage. Par conséquent, la hauteur du centre de gravité de la population d'UCN, $\langle z \rangle$, se situe légèrement en-deçà du centre de la chambre. Nous verrons en détail comment calculer $\langle z \rangle$ dans la section 4.2 et nous contenterons de souligner ici que cette hauteur est négative et de l'ordre de quelques millimètres, en considérant que le centre de la chambre correspond à la position $z = 0$.

Les atomes de ^{199}Hg , en revanche, forment un gaz à température ambiante, qui se répartit et se déplace naturellement uniformément dans la chambre. Le centre de gravité de cette population est donc tout simplement le centre de la chambre de précession. Les hauteurs moyennes des deux population différant, elles moyennent donc différemment le champ magnétique dans le volume de stockage. En utilisant la paramétrisation polynomiale du champ, il est possible d'exprimer cette différence en terme des gradients généralisés. Pour ce faire, on commence par écrire le champ

vertical moyen perçu par une population :

$$\langle B_z \rangle = \sum_{l,m} G_{l,m} \langle \Pi_{z,l,m} \rangle. \quad (2.5)$$

En vertu de la symétrie cylindrique de la chambre de précession nEDM, la moyenne de tous les termes avec $m \neq 0$ s'annule. Les termes restants sont donc, en développant la paramétrisation jusqu'à l'ordre $l = 7$,

$$\begin{aligned} \langle B_z \rangle = & G_{0,0} + G_{1,0} \langle z \rangle + G_{2,0} \left\langle z^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right\rangle + G_{3,0} \left\langle z^3 - \frac{3}{2} \rho^2 z \right\rangle \\ & + G_{4,0} \left\langle z^4 - 3\rho^2 z^2 + \frac{3}{8} \rho^4 \right\rangle + G_{5,0} \left\langle z^5 - 5\rho^2 z^3 + \frac{15}{8} \rho^4 z \right\rangle \\ & + G_{6,0} \left\langle z^6 - \frac{15}{2} \rho^2 z^4 + \frac{45}{8} \rho^4 z^2 - \frac{5}{16} \rho^6 \right\rangle \\ & + G_{7,0} \left\langle z^7 - \frac{21}{2} \rho^2 z^5 + \frac{105}{8} \rho^4 z^3 - \frac{35}{16} \rho^6 z \right\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les UCN et les atomes de mercure peuplant de la même façon la chambre horizontalement, pour les deux populations, on a

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{R^2}{2} \quad (2.7)$$

$$\langle \rho^4 \rangle = \frac{R^4}{3} \quad (2.8)$$

$$\langle \rho^6 \rangle = \frac{R^6}{4}. \quad (2.9)$$

Pour les atomes de mercure, qui peuplent la hauteur uniformément, on peut calculer

$$\langle z \rangle_{\text{Hg}} = \langle z^3 \rangle_{\text{Hg}} = \langle z^5 \rangle_{\text{Hg}} = \langle z^7 \rangle_{\text{Hg}} = 0, \quad (2.10)$$

et

$$\langle z^2 \rangle_{\text{Hg}} = \frac{H^2}{12}, \quad (2.11)$$

$$\langle z^4 \rangle_{\text{Hg}} = \frac{H^4}{80}, \quad (2.12)$$

$$\langle z^6 \rangle_{\text{Hg}} = \frac{H^6}{448}. \quad (2.13)$$

Le champ moyen perçu par le mercure est donc

$$\begin{aligned} B_0 = \langle B_z \rangle_{\text{Hg}} = & G_{0,0} + G_{2,0} \left(\frac{H^2}{12} - \frac{R^2}{4} \right) + G_{4,0} \left(\frac{H^4}{80} - \frac{H^2 R^2}{8} + \frac{R^4}{8} \right) \\ & + G_{6,0} \left(\frac{H^6}{448} - \frac{3H^4 R^2}{64} + \frac{5H^2 R^4}{32} - \frac{5R^6}{64} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

En revanche, pour les UCN, les moyennes de ces polynômes dépendent de la distribution spatiale des neutrons dans la chambre. La première puissance de z est la hauteur du centre de masse $\langle z \rangle_n =$

$\langle z \rangle$ que nous avons évoquée plus haut. Pour calculer les moyennes des puissances supérieures de z , on approche la densité verticale de neutrons par une fonction linéaire de z . Cette approximation nous permet de calculer, avec une précision de l'ordre de quelques pourcents les termes suivants,

$$\langle z^2 \rangle_n \simeq \frac{H^2}{12}, \quad (2.15)$$

$$\langle z^3 \rangle_n \simeq \frac{3H^2}{20} \langle z \rangle, \quad (2.16)$$

$$\langle z^4 \rangle_n \simeq \frac{H^4}{80}, \quad (2.17)$$

$$\langle z^5 \rangle_n \simeq \frac{3H^4}{112} \langle z \rangle, \quad (2.18)$$

$$\langle z^6 \rangle_n \simeq \frac{H^6}{448}, \quad (2.19)$$

$$\langle z^7 \rangle_n \simeq \frac{H^6}{192} \langle z \rangle. \quad (2.20)$$

Le champ moyen vu par les neutrons est donc

$$\langle B_z \rangle_n = G_{0,0} + G_{1,0} \langle z \rangle + G_{2,0} \left(\frac{H^2}{12} - \frac{R^2}{4} \right) + G_{3,0} \left(\frac{3H^2}{20} - \frac{3R^2}{4} \right) \langle z \rangle \quad (2.21)$$

$$+ G_{4,0} \left(\frac{H^4}{80} - \frac{R^2 H^2}{8} + \frac{R^4}{8} \right) + G_{5,0} \left(\frac{3H^4}{112} - \frac{3R^2 H^2}{8} + \frac{5R^4}{8} \right) \langle z \rangle$$

$$+ G_{6,0} \left(\frac{H^6}{448} - \frac{3R^2 H^4}{64} + \frac{5R^4 H^2}{32} - \frac{5R^6}{64} \right)$$

$$+ G_{7,0} \left(\frac{H^6}{192} - \frac{9R^2 H^4}{64} + \frac{21R^4 H^2}{32} - \frac{35R^6}{64} \right) \langle z \rangle. \quad (2.22)$$

Les fréquences de précession des spins des neutrons et des atomes de mercure sont proportionnelles aux champs respectivement perçus par ces populations. Si l'on considère uniquement l'effet gravitationnel et que l'on ignore tous les autres effets pouvant agir sur l'une ou l'autre de ces fréquences, le rapport de celles-ci peut alors s'écrire

$$\mathcal{R} = \frac{f_n}{f_{\text{Hg}}} = \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \left(\frac{\langle B_z \rangle_n}{B_0} \right) \quad (2.23)$$

$$= \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \left(1 + \frac{\langle B_z \rangle_n - B_0}{B_0} \right),$$

$$= \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| (1 + \delta_{\text{Grav}}).$$

Le décalage gravitationnel se définit donc comme suit,

$$\delta_{\text{Grav}} = \frac{\langle B_z \rangle_n - B_0}{B_0} = \frac{G_{\text{Grav}} \langle z \rangle}{B_0}, \quad (2.24)$$

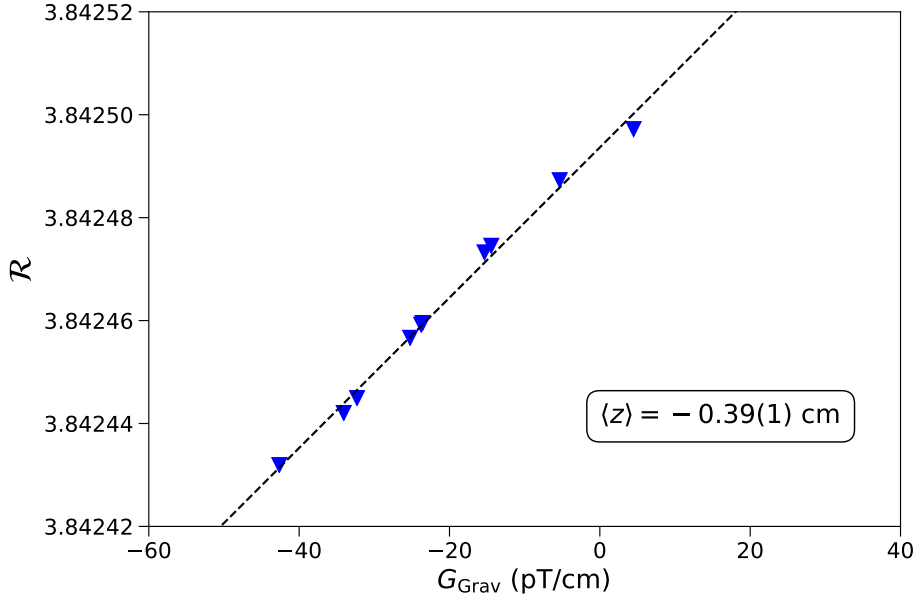


FIGURE 2.12 – Illustration du décalage gravitationnel du rapport des fréquences de précession des neutrons et du mercure. Les valeurs du gradient gravitationnel G_{Grav} et du rapport des fréquences \mathcal{R} sont celles d'un ensemble de séquences de données acquises à la suite des unes des autres sans démagnétisation du blindage, avec le champ magnétique \vec{B}_0 dirigé vers le bas. La valeur de $\langle z \rangle$ affichée correspond à un ajustement des valeurs de \mathcal{R} en fonction de G_{Grav} basé sur l'expression (2.23). Ce type d'ajustement sera discuté plus en détail dans la section 4.2 avec la détermination de $\langle z \rangle$.

avec G_{Grav} le « gradient gravitationnel » dont l'expression jusqu'à l'ordre $l = 7$ de la paramétrisation polynomiale est

$$G_{\text{Grav}} = \left[\begin{array}{l} G_{1,0} + G_{3,0} \left(\frac{3H^2}{20} - \frac{3R^2}{4} \right) \\ + G_{5,0} \left(\frac{3H^4}{112} - \frac{3R^2H^2}{8} + \frac{5R^4}{8} \right) \\ + G_{7,0} \left(\frac{H^6}{192} - \frac{9R^2H^4}{64} + \frac{21R^4H^2}{32} - \frac{35R^6}{64} \right) \end{array} \right]. \quad (2.25)$$

L'effet du gradient gravitationnel sur le rapport des fréquences \mathcal{R} a été mesuré à de multiples reprises au cours de la prise de données nEDM. Une illustration de cet effet est visible sur la figure 2.12. La dépendance linéaire de \mathcal{R} en G_{Grav} est nettement identifiable. En ajustant ce type de données, il est possible d'obtenir une estimation de $\langle z \rangle$, comme nous le verrons dans le chapitre 4. Il n'est toutefois pas encore temps de discuter plus avant ce type d'ajustement et l'on retiendra simplement ici que le décalage gravitationnel est un effet non-négligeable et mesurable qui dépend linéairement du gradient gravitationnel G_{Grav} .

Le décalage gravitationnel est donc un effet lié aux inhomogénéités magnétiques exprimées par les gradients généralisés $G_{l \text{ impair}, 0}$, tout comme le faux EDM du mercure. Il s'agit d'un effet qui s'inverse avec la direction du champ magnétique \vec{B}_0 , comme cela peut se voir dans l'expression (2.24), le signe du facteur B_0 dépendant de cette direction. Comme nous l'avons déjà dit, le décalage gravitationnel n'est pas une source d'effet systématique sur la mesure du faux EDM. Cela n'est en réalité vrai que si les inhomogénéités du champ contribuant à cet effet ne varient pas au cours de la mesure de l'EDM. En effet, si le mercure permet de corriger efficacement la fréquence

neutron des dérives du champ moyen B_0 , il n'est hélas pas sensible aux variations des gradients de ce champ, particulièrement les gradients verticaux (longitudinaux au champ \vec{B}_0). La correction des dérives de ces gradients est l'un des rôles assurés par les magnétomètres césium.

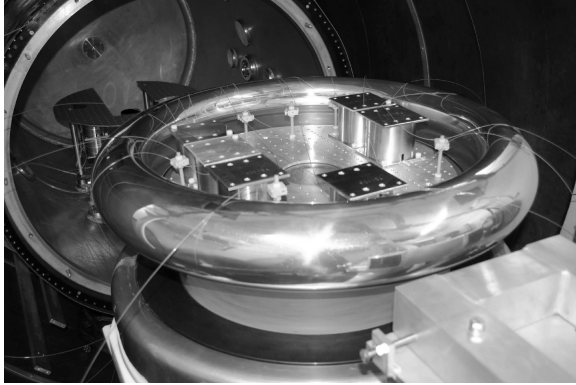
2.3.3 Magnétométrie césium

Nous venons de le dire, les magnétomètres césium jouent leur rôle dans l'analyse des données EDM en mesurant et en permettant de compenser les dérives des gradients verticaux du champ magnétique B_0 . Ils remplissent également un autre rôle, d'importance capitale : l'optimisation des courants à injecter dans les bobines de compensation (trimcoils) afin d'obtenir le champ le plus uniforme possible. L'objectif de cette uniformisation du champ est premièrement de minimiser la dépolarisation des UCN au cours d'un cycle de mesure, mais également de réduire l'amplitude des effets liés aux inhomogénéités de champ. Cette optimisation sera discutée dans la section 2.4.3. Nous nous attacherons ici simplement à décrire brièvement le principe de fonctionnement de ces magnétomètres, leurs apports et leurs inconvénients. Une description plus détaillée de ces magnétomètres, de leurs modes d'utilisation et de leur rôle dans l'expérience de PSI peut être trouvée dans ABEL et collab. [2020b]; WURSTEN [2020].

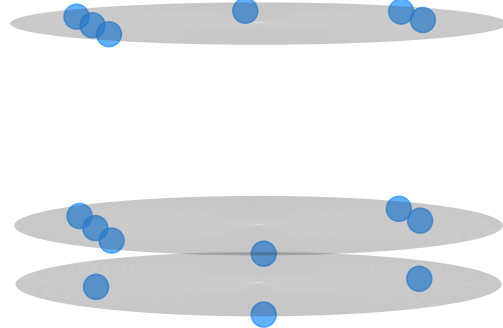
2.3.3.1 Principe de fonctionnement

Le système de magnétométrie césium est un système « en ligne », tout comme la magnétométrie mercure. C'est-à-dire que les magnétomètres césium vont nous permettre de contrôler le champ en temps réel pendant les cycles de mesure nEDM. En revanche, à l'inverse du mercure, les magnétomètres césium ne vont pas mesurer le champ directement dans la chambre de précession. En effet, au nombre de seize (bien que l'un d'entre eux ait été dysfonctionnel durant toute la prise de données nEDM), ces magnétomètres sont disposés au-dessus et en dessous de celle-ci, à trois hauteurs différentes, comme cela est illustré sur la figure 2.13. La position du magnétomètre défaillant n'est pas indiqué sur la figure 2.13b. Ces seize capteurs sont faits en matériaux non-magnétiques, du fait de leur proximité avec la chambre de précession. En effet, ils sont à l'intérieur du blindage de mu-métal et les plus proches sont situés à environ 7 cm au-dessus et en dessous des parois internes de la chambre de stockage des neutrons. Les magnétomètres les plus bas (Cs-super-bottom) sont environ 8 cm plus bas que ceux situés juste en dessous de la chambre. Cette configuration à trois étages et différents rayons non-symétrique permet d'obtenir un ensemble de capteurs sensible aux gradients de champ magnétique.

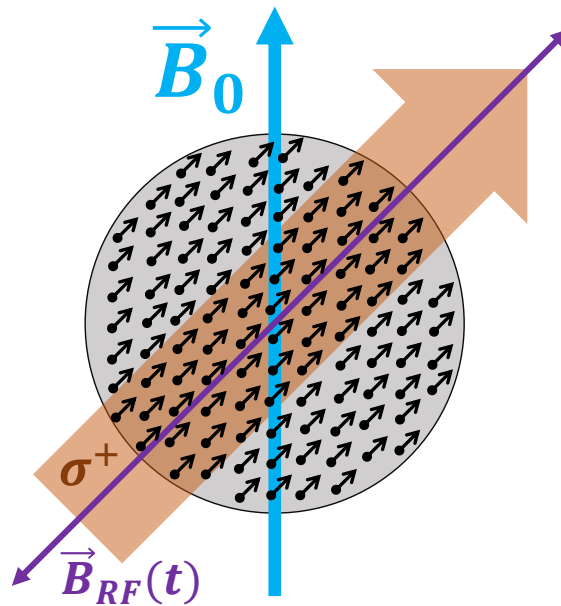
Le principe de fonctionnement de ces magnétomètres est similaire à celui du mercure. Il s'agit de magnétomètres scalaires (mesurant l'amplitude du champ) au sein desquels les spins des atomes vont précesser, modulant ainsi une lumière incidente à leur fréquence de précession. Chaque magnétomètre consiste en une cellule de verre sphérique d'environ 28 mm de diamètre, dont les parois internes sont recouvertes de paraffine. Ces cellules sont remplies de vapeur de ^{133}Cs , le seul isotope stable du césium, à température ambiante. Un faisceau de lumière à 894.6 nm est transporté depuis un laser par fibres optiques et est divisé afin de pouvoir approvisionner chaque magnétomètre. Avant la traversée d'un magnétomètre, ce faisceau est polarisé circulairement σ^+ au moyen d'un polariseur linéaire suivi d'une lame quart d'onde. Dans un magnétomètre, la direction de ce faisceau est à 45° de la direction du champ magnétique principal \vec{B}_0 , comme cela est illustré sur la figure 2.13c. Contrairement au cas du mercure, où une première lampe assurait le rôle du pompage optique et une seconde permettait la lecture de la fréquence de précession, cette lumière va ici remplir ces deux rôles à la fois KOMPOSCH [2017]. Pour comprendre le fonctionnement de ces magnétomètres, on peut considérer que chaque atome de césium présent dans la cellule suit un cycle en trois étapes ROCCIA [2009] :



(a) Photo de la chambre de précession hors de la chambre à vide.



(b) Schéma non à l'échelle des positions des magnétomètres Cs les uns par rapport aux autres.



(c) Illustration du principe de fonctionnement d'un magnétomètre césium. Le faisceau de lumière polarisée σ^+ incident est orienté à 45° du champ \vec{B}_0 et le champ RF appliqué est parallèle au vecteur d'onde du faisceau appliqué.

FIGURE 2.13 – Magnétomètres césium de nEDM à PSI. Sur (a), on peut voir quatre magnétomètres montés au-dessus de la chambre à vide. Sur (b) sont représentées les positions relatives des magnétomètres césium, la chambre à vide cylindrique se trouvant entre le premier et le second plan. Il y a 6 magnétomètres au-dessus de la chambre (Cs-top), 6 directement en dessous (Cs-bottom) et 3 encore en dessous (Cs-super-bottom). Sur (c) est illustré le principe de pompage et de lecture optique des magnétomètres.

- L'atome traverse le faisceau de lumière polarisée σ^+ . Il va alors être « pompé » sur la composante hyperfine $F_{\text{fond}} = 4 \rightarrow F_{\text{exc}} = 3$ de la transition du D_1 du césium. Le faisceau est assez intense pour que l'atome se polarise après une unique traversée.
- Une fois sorti du faisceau, l'atome va alors pouvoir se déplacer dans la cellule en précessant librement pendant un temps T_{Cs} . Durant cette précession, l'atome va accumuler une phase proportionnelle à sa fréquence de Larmor, et donc au champ magnétique perçu.
- L'atome traverse à nouveau le faisceau lumineux. La quantité de lumière absorbée va alors dépendre de la projection du spin par rapport au vecteur d'onde de la lumière \vec{k} . Lorsque l'atome sort du faisceau, il est de nouveau dans l'état polarisé et recommence à la deuxième étape.

Si au cours de ce cycle, l'atome se dépolarise par collision sur une paroi de la cellule, il recommence alors le cycle à zéro. Plus le temps T_{Cs} pendant lequel le spin précesse est long, meilleure est la précision sur la mesure du champ magnétique. La paraffine enduisant la paroi interne de la cellule permet de faire monter le temps caractéristique de dépolarisation de la vapeur à l'ordre du dixième de seconde. Afin que la précession des spins de tous les atomes soit cohérente, un champ radio-fréquence (RF) oscillant à la fréquence de Larmor du césium est appliqué dans la cellule parallèlement au vecteur d'onde \vec{k} du faisceau lumineux, au moyen d'une paire de bobines de Helmholtz. La modulation de l'intensité lumineuse transmise permet alors d'extraire la valeur du champ magnétique scalaire en utilisant la différence de phase entre la pulsation du champ RF appliqué et la pulsation de Larmor. En sortie de cellule, cette intensité est détectée par une photodiode.

2.3.3.2 Apports et inconvénients

Nous avons déjà évoqué au début de cette section les deux usages principaux des magnétomètres césium dans l'expérience nEDM. Le premier est la mesure des variations des gradients verticaux du champ magnétique, particulièrement le gradient $G_{1,0}$, pendant la prise de données. Pour réaliser cette mesure, les valeurs de champ lues par les quinze magnétomètres fonctionnels sont ajustées avec les premiers ordres de la paramétrisation polynomiale du champ décrite en annexe A. Le champ principal \vec{B}_0 étant vertical et les magnétomètres étant scalaires, on considère que les magnétomètres mesurent la norme de la composante z du champ. L'ajustement se fait donc avec les gradients généralisés contribuant à $B_{0,z}$. Étant donné le nombre de magnétomètres disponibles (15), il n'est possible d'ajuster le champ que jusqu'à l'ordre $l = 2$, obtenant ainsi les neuf premiers gradients $G_{l=0,\dots,2,m=-l,\dots,l}$. Les gradients ainsi ajustés contiennent donc des contributions systématiques des ordres supérieurs. De plus, chaque magnétomètre est sujet à différents effets qui peuvent biaiser sa mesure et ainsi fausser l'exactitude. Plus de détails peuvent être trouvés dans ABEL et collab. [2020b]; WURSTEN [2020] mais on retiendra ici qu'en combinant ces différents effets, chaque magnétomètre pris individuellement a une exactitude de l'ordre de 45 à 90 pT. La mesure de $G_{1,0}$ par les magnétomètres césium est donc précise ($\sigma_{G_{1,0}} \sim 0.002$ pT/cm au bout de $T = 180$ s) mais hélas biaisée de l'ordre de la dizaine de pT. L'utilité de cette mesure du gradient étant toutefois de corriger ses dérives et non pas sa valeur absolue, l'exactitude de la valeur mesurée ne pose en réalité pas de problèmes.

Le deuxième rôle des magnétomètres césium est de contribuer à l'optimisation de l'uniformité magnétique pour chaque séquence de données nEDM. Cette optimisation permet d'augmenter de façon considérable le maintien de la polarisation des UCN pendant les cycles de mesure et sera discutée dans la section 2.4.3. En effet, il existe plusieurs processus de dépolarisation liés aux inhomogénéités de champ dont nous allons à présent discuter.

2.4 La polarisation des UCN

Afin de rappeler l'importance de la polarisation des neutrons dans une expérience telle que celle-ci, on rappelle ici la figure de mérite de la mesure de l'EDM du neutron,

$$\sigma_{d_n} = \frac{\hbar}{2ET\alpha\sqrt{N_{\text{tot}}}}, \quad (2.26)$$

où N_{tot} est le nombre de neutrons, T le temps de précession libre, E l'amplitude du champ électrique appliqué et α est la visibilité (ou contraste) de la frange de Ramsey, soit la polarisation à la fin d'un cycle de mesure. Maximiser la polarisation est donc l'un des bras de levier possible pour augmenter la sensibilité statistique. Pour ce faire, il est nécessaire de comprendre les différents mécanismes de dépolarisation à l'œuvre afin de les réduire. Des discussions détaillées sur ces effets peuvent être trouvées dans ABEL et collab. [2019]; AFACH et collab. [2015b,c]; HARRIS et collab. [2014].

2.4.1 Les mécanismes de dépolarisation

Deux cas de figures sont à considérer : le cas où les spins sont alignés avec le champ magnétique (ce qui est le cas avant le premier basculement de Rabi et après le deuxième) ; on parle alors de « dépolarisation longitudinale », et le cas où les spins précessent dans le plan transverse au champ magnétique (ce qui est le cas pendant la précession libre) ; on parle dans ce cas de « dépolarisation transverse ». Dans le premier cas, l'évolution de la polarisation en fonction du temps de stockage t peut s'écrire

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\alpha}{T_1}, \quad (2.27)$$

avec $1/T_1$ le taux de dépolarisation, égal à

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_{1,\text{murs}}} + \frac{1}{T_{1,\text{mag}}}, \quad (2.28)$$

où $T_{1,\text{murs}}$ est le temps de relaxation des spins longitudinaux dû aux collisions murales et $T_{1,\text{mag}}$ est celui dû à la dépolarisation intrinsèque dans un champ magnétique non-uniforme. Ces causes de dépolarisation seront explicitées ci-après. Dans le second cas, l'évolution de la polarisation est

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\alpha}{T_2} + \dot{\alpha}_{\text{grav}}, \quad (2.29)$$

où $\dot{\alpha}_{\text{grav}}$ est la contribution de la dépolarisation amplifiée par gravitation, et $1/T_2$ peut s'écrire, comme dans le premier cas, comme

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_{2,\text{murs}}} + \frac{1}{T_{2,\text{mag}}}. \quad (2.30)$$

Nous allons maintenant décrire plus en détail les différentes contributions à la dépolarisation.

2.4.1.1 Dépolarisation due aux collisions murales

Les parois internes de la chambre de stockage ne sont pas parfaites et elles peuvent contenir des impuretés magnétiques. En cas de collision avec un mur, un UCN peut donc voir son spin être affecté par de telles impuretés. Les impuretés peuvent être orientées dans toutes les directions. De plus, le temps d'interaction lors de la collision avec les murs est bien plus court que la période de

précession de Larmor des neutrons. En pratique, on peut donc voir que la relaxation des spins sera similaire, quelle que soit la direction de ceux-ci. On peut donc écrire

$$\frac{1}{T_{1,\text{murs}}} = \frac{1}{T_{2,\text{murs}}} = \beta\nu, \quad (2.31)$$

où β est la probabilité de dépolarisation par collision, qui, en utilisant des matériaux appropriés, peut être comprise entre 10^{-6} et 10^{-5} , et ν représente la fréquence moyenne de collision, dans notre cas inférieure à 50 s^{-1} . En pratique, cela mène à un taux de dépolarisation dû aux collisions murales de l'ordre de l'inverse du millier de secondes. Bien que cette contribution à la polarisation ne soit pas négligeable, ce n'est pas un effet limitant pour le maintien d'une forte polarisation. De plus, bien que cet effet puisse être limité en changeant les dimensions de la chambre ou les matériaux constituant les parois, il n'est pas influencé par l'optimisation de l'uniformité magnétique et ne sera donc pas abordé plus avant.

2.4.1.2 Dépolarisation amplifiée par gravitation

Lors de la description des propriétés des neutrons (voir section 1.2), nous avons évoqué le fait que les UCN sont des neutrons de très basse énergie ($E \leq 200 \text{ neV}$) pour lesquelles l'interaction gravitationnelle est significative. Une ascension de 1 m pour un neutron correspond à une perte d'énergie cinétique d'environ 100 neV. En fonction de leur énergie, les UCN n'atteindront donc pas tous la même hauteur lors de leurs rebonds et la hauteur moyenne d'un UCN dans la chambre sera directement liée à son énergie cinétique. En partant de cette idée, on peut considérer des « groupes » d'UCN distribués différemment verticalement en fonction de leur énergie. En présence d'inhomogénéités verticales de champ magnétique dans la chambre de stockage, les spins des neutrons d'un groupe vont percevoir un champ différent d'un autre groupe et donc précesser à une fréquence légèrement différente. C'est le phénomène qu'on appelle « dépolarisation amplifiée par gravitation », qui ne concerne que la dépolarisation transverse.

En pratique, si on note $n(\epsilon) d\epsilon$ la probabilité pour un neutron d'appartenir au groupe d'énergie ϵ , après un temps de précession T , les spins des neutrons du groupe d'énergie ϵ auront accumulé une phase $\varphi(\epsilon, T, G_{l,m})$ dépendante du temps de précession T , du rapport gyromagnétique des neutrons γ_n et des gradients généralisés du champ magnétique $G_{l,m}$. En réalité, les gradients contribuant à la dépolarisation amplifiée par gravité sont ceux associés à des inhomogénéités $\Pi_{z,l,m}$ dont la moyenne pour une hauteur donnée z dépend de cette hauteur. Tous les polynômes avec $m \neq 0$ étant proportionnels à $\cos(m\phi)$ ou $\sin(m\phi)$, leur moyenne pour une valeur fixe de z est égale à zéro. Seuls les gradients $G_{l,0}$ peuvent donc jouer un rôle dans la dépolarisation amplifiée par gravitation et l'on peut réécrire la phase accumulée $\varphi(\epsilon, T, G_{l,0})$.

Si l'on suppose la polarisation initiale parfaite et que l'on néglige la dépolarisation à l'intérieur même d'un groupe d'énergie ϵ , la polarisation générale après un temps de précession T en présences de gradients $G_{l,0}$ peut s'écrire

$$\alpha(T, G_{l,0}) = \int \cos[\varphi(\epsilon, T, G_{l,0})] n(\epsilon) d\epsilon. \quad (2.32)$$

Cette expression peut être approximée en utilisant le développement de Taylor au second ordre du cosinus, approximation valable uniquement pour des petites valeurs de $\varphi(\epsilon, T, G_{l,0})$, ce qui est généralement le cas pour des gradients faibles. L'expression (2.32) devient alors

$$\alpha(T, G_{l,0}) = 1 - \frac{1}{2} \int \varphi(\epsilon, T, G_{l,0})^2 n(\epsilon) d\epsilon. \quad (2.33)$$

En considérant la paramétrisation polynomiale du champ (voir annexe A) jusqu'à l'ordre $l = 2$, la phase φ peut s'écrire en fonction des gradients $G_{1,0}$ et $G_{2,0}$ comme suit,

$$\varphi(\epsilon, T, G_{l,0}) = \gamma_n T \left[G_{1,0} (\bar{z}(\epsilon) - \langle z \rangle) + G_{2,0} (\overline{z^2}(\epsilon) - \langle z^2 \rangle) \right], \quad (2.34)$$

où $\bar{z}(\epsilon)$ et $\overline{z^2}(\epsilon)$ sont respectivement la hauteur moyenne et la hauteur carrée moyenne des neutrons du groupe d'énergie ϵ , et $\langle z \rangle$ et $\langle z^2 \rangle$ sont la hauteur moyenne et la hauteur carrée moyenne de l'ensemble des neutrons dans la chambre. De là, on peut déduire le taux de dépolarisation $\dot{\alpha}_{\text{grav}}$ dû à ce phénomène de dépolarisation, en fonction desdits gradients,

$$\dot{\alpha}_{\text{grav}} = -\gamma_n^2 T \left[G_{1,0}^2 \text{Var} [\bar{z}] + G_{2,0}^2 \text{Var} [\overline{z^2}] \right], \quad (2.35)$$

avec $\text{Var} [\bar{z}]$ et $\text{Var} [\overline{z^2}]$ les variances respectives des distributions de $\bar{z}(\epsilon)$ et $\overline{z^2}(\epsilon)$ dont les expressions sont :

$$\text{Var} [\bar{z}] = \int [\bar{z}(\epsilon) - \langle z \rangle]^2 n(\epsilon) d\epsilon, \quad (2.36)$$

et

$$\text{Var} [\overline{z^2}] = \int [\overline{z^2}(\epsilon) - \langle z^2 \rangle]^2 n(\epsilon) d\epsilon. \quad (2.37)$$

On peut donc voir que la dépolarisation amplifiée par gravitation est une conséquence directe des inhomogénéités verticales de la composante longitudinale, représentées par les gradients $G_{l,0}$. Pour pouvoir réduire cet effet au maximum et ainsi optimiser la polarisation, il est donc nécessaire de minimiser ces gradients, ceux-ci étant, au premier ordre $G_{1,0}$ et au second ordre $G_{2,0}$.

2.4.1.3 Dépolarisation intrinsèque

La dépolarisation intrinsèque est la dépolarisation des neutrons au sein d'un même groupe d'énergie ϵ . Chaque neutron a une trajectoire aléatoire unique à travers le volume de stockage. Si le champ n'est pas parfaitement uniforme, chaque neutron va donc percevoir un champ magnétique légèrement différent des autres neutrons. Tous les neutrons d'un même groupe vont donc accumuler une phase dépendant de leur trajet au sein de la chambre. Ce processus peut être décrit par la théorie de relaxation des spins, qui consiste en une approche générale de calcul des décalages en fréquence et des taux de relaxation dépendant des fonctions de corrélation d'une perturbation, au second ordre de cette perturbation. Notons qu'il s'agit de la même théorie qui permet de calculer les déplacements en fréquence de l'effet $\vec{v} \times \vec{E}$ traité dans le chapitre précédent. Dans notre cas, les perturbations sont les composantes du champ magnétique. En utilisant la théorie de relaxation des spins pour des neutrons de spin 1/2 stockés dans un volume clos ABEL et collab. [2020a]; PIGNOL et collab. [2015], on obtient le taux de relaxation longitudinale,

$$\frac{1}{T_{1,\text{mag}}} = \gamma_n^2 \int_0^\infty \left\langle B_{0_x}^c(0) B_{0_x}^c(t) + B_{0_y}^c(0) B_{0_y}^c(t) \right\rangle \cos(\omega t) dt, \quad (2.38)$$

où les chevrons représentent la moyenne d'ensemble sur toutes les particules permettant de calculer les fonctions de corrélation du champ et ω est la pulsation de précession de Larmor. On s'intéresse ici aux composantes du champ centrées, soit les inhomogénéités $B_{0_i}^c(t) = B_{0_i}(t) - \langle B_{0_i} \rangle$, les contributions constantes n'induisant pas de relaxation des spins. Le taux de relaxation transverse, quant à lui, s'écrit

$$\frac{1}{T_{2,\text{mag}}} = \frac{1}{2T_{1,\text{mag}}} + \gamma_n^2 \int_0^\infty \left\langle B_{0_z}^c(0) B_{0_z}^c(t) \right\rangle dt \quad (2.39)$$

Il a été montré dans AFACH et collab. [2015b] que l'ordre de grandeur du taux de dépolarisation intrinsèque longitudinale peut être estimé par

$$\frac{1}{T_{1,\text{mag}}} \sim \frac{\nu^3 \Delta B_T^2}{80R^3 \gamma_n^2 B_0^4}, \quad (2.40)$$

avec ν la vitesse des neutrons, R le rayon de la chambre de précession et ΔB_T^2 la valeur typique de la différence du champ transverse. En utilisant des valeurs typiques de l'expérience nEDM ($R = 23.5$ cm, $B_0 = 1$ μ T, $\nu = 3$ m/s and $\Delta B_T = 2$ nT), on peut estimer $T_{1,\text{mag}} \sim 10^{10}$ s. La contribution à la dépolarisation des UCN due aux inhomogénéités transverses du champ est donc négligeable et il est peu pertinent de discuter son expression en fonction des gradients généralisés $G_{l,m}$. Nous ne nous intéresserons donc par la suite qu'à la contribution des inhomogénéités longitudinales de l'équation (2.39).

En utilisant la paramétrisation polynomiale harmonique de l'annexe A, on peut réécrire la fonction de corrélation

$$\langle B_{0_z}^c(0) B_{0_z}^c(t) \rangle = \sum_{l,m} \sum_{l',m'} G_{l,m} G_{l',m'} \langle \Pi_{z,l,m}^c(0) \Pi_{z,l',m'}^c(t) \rangle. \quad (2.41)$$

Dans le cas de l'expérience nEDM, les termes $m \neq m'$ s'annulent du fait de la symétrie cylindrique, menant à un taux de dépolarisation intrinsèque égal à

$$\frac{1}{T_{2,\text{mag}}} = \gamma_n^2 \sum_{l,l',m} G_{l,m} G_{l',m} \int_0^\infty \langle \Pi_{z,l,m}^c(0) \Pi_{z,l',m}^c(t) \rangle dt. \quad (2.42)$$

Le taux de dépolarisation est donc une fonction quadratique des gradients généralisés et sa valeur dépend de la rapidité de décroissance des fonction de corrélation. On notera que les neutrons les plus lents se dépolarisent plus vite. Lorsqu'un seul gradient $G_{l,m}$ est non nul en plus du terme constant $G_{0,0}$, on peut simplifier l'expression (2.42) comme suit,

$$\frac{1}{T_{2,\text{mag}}} = \gamma_n^2 G_{l,m}^2 \langle \Pi_{z,l,m}^c{}^2 \rangle \tau_{l,m}, \quad (2.43)$$

avec

$$\tau_{l,m} = \frac{1}{\langle \Pi_{z,l,m}^c{}^2 \rangle} \int_0^\infty \langle \Pi_{z,l,m}^c(0) \Pi_{z,l,m}^c(t) \rangle dt \quad (2.44)$$

le temps de corrélation associé à la contribution $G_{l,m}^2$, et

$$\langle \Pi_{z,l,m}^c{}^2 \rangle = \langle (\Pi_{z,l,m}(\vec{r}) - \langle \Pi_{z,l,m}(\vec{r}) \rangle)^2 \rangle \quad (2.45)$$

la moyenne sur le volume de la chambre du polynôme centré associé au gradient $G_{l,m}$.

Il est possible de calculer les fonctions de corrélation au moyen de simulations Monte-Carlo des trajectoires des neutrons dans la chambre et d'en déduire $\langle \Pi_{z,l,m}^c{}^2 \rangle \tau_{l,m}$. En se limitant au cas $l = 1$, une étude de la sorte a été faite AFACH et collab. [2015b], accompagnée d'un modèle heuristique de dépolarisation en présence de gradients de champ linéaires. Ce modèle heuristique prédit les valeurs des temps de corrélation $\tau_{1,1}$, $\tau_{1,-1}$ et $\tau_{1,0}$ en fonction de ν la vitesse des neutrons, R le rayon de la chambre et \mathcal{H} la hauteur maximale que peuvent atteindre les neutrons de vitesse ν :

$$\langle \Pi_{z,1,-1}^c{}^2 \rangle \tau_{1,-1} = \langle \Pi_{z,1,1}^c{}^2 \rangle \tau_{1,1} = \frac{8R^3}{9\pi\nu}, \quad (2.46)$$

$$\langle \Pi_{z,1,0}^c{}^2 \rangle \tau_{1,0} = \frac{\mathcal{H}^3}{16\nu}. \quad (2.47)$$

Les calculs issus de ce modèle et les résultats issus du Monte-Carlo présentés dans cette étude étaient en bon accord et il est donc possible d'utiliser le modèle heuristique pour approcher la dépolarisation due aux gradients du premier ordre.

2.4.2 Mesure de la dépolarisation dues aux inhomogénéités

Des runs de données nEDM à forts gradients ont été réalisés à diverses périodes durant la prise de données afin de pouvoir mesurer l'évolution de la polarisation en présence de tels gradients. Ces runs contiennent chacun une dizaine de cycles de mesure, un cycle de mesure étant délimité comme on le rappelle par la fréquence de fonctionnement de la source d'UCN. Afin de produire ces gradients, des courants choisis spécifiquement ont été injectés dans les trimcoils afin de faire varier un gradient en particulier en laissant les autres quasi-nuls et invariants. Les différents gradients dont l'effet a été testé sont $G_{1,0}$, $G_{1,1}$, $G_{1,-2}$ et $G_{1,2}$, et $G_{2,0}$. Les gradients $G_{1,-2}$ et $G_{1,2}$ n'interviennent pas dans les deux mécanismes de dépolarisation principaux présents dans l'expérience, à savoir la dépolarisation amplifiée par gravitation et la dépolarisation intrinsèque transverse. En étudiant les runs appliquant ces gradients, on n'observe en effet aucune corrélation entre la polarisation α et la valeur des gradients. Ces runs ont en réalité été enregistrés afin d'étudier l'effet de ces gradients sur le rapport \mathcal{R} des fréquences de précession neutron et mercure et nous n'en parlerons donc pas plus ici. En revanche, les autres gradients pour lesquelles de telles mesures ont été faites, $G_{1,0}$, $G_{1,1}$ et $G_{2,0}$, ont bien un effet sur la polarisation, comme nous allons le constater par la suite.

Trois types de runs ont été utilisés pour effectuer ces mesures, dont le principe est schématisé sur la figure 2.14. Ces différents types de runs ont pour but d'isoler les différentes contributions à la dépolarisation lors du stockage des UCN dans la chambre de précession. La différence entre ces modes est au niveau du cycle de mesure. Chaque cycle commence par le remplissage de la chambre de récession avec des neutrons polarisés spin up (avec une efficacité de polarisation de l'ordre de 100%). Puis, à la fin du remplissage, le shutter UCN se ferme et on peut alors distinguer les trois types de cycles utilisés :

- Mode T_1 (polarisation longitudinale) : Les UCN sont stockés dans la chambre pendant un temps T avec leur spin aligné le long du champ \vec{B}_0 . Le taux de dépolarisation dans cette situation est donné par l'équation (2.28).
- Mode Ramsey : Il s'agit du mode normal d'acquisition de nEDM. Un basculement $\pi/2$ de Rabi est appliqué en début de cycle, puis les spins sont laissés à la précession libre dans le plan transverse pendant un temps T avant qu'un second basculement $\pi/2$ ne soit appliqué en fin de cycle. L'évolution de la polarisation est alors donnée par (2.29).
- Mode spin-écho AFACH et collab. [2015c] : Ce mode est assez similaire au mode Ramsey. Au début et à la fin du cycle sont appliqués des basculements $\pi/2$. Au milieu du temps de précession exactement est également appliqué un basculement π . Le but de ce basculement supplémentaire est d'annuler les déphasages des groupes de neutrons d'énergies différentes. Cette opération permet donc d'annuler la dépolarisation amplifiée par gravitation et d'isoler la dépolarisation intrinsèque. Le taux de dépolarisation est alors uniquement donné par (2.30).

A la fin de chacun de ces trois types de cycles, le shutter UCN est rouvert et les neutrons sont évacués et comptés en fonction de leur direction de polarisation, comme cela est décrit dans la section 2.1.2. Pour les modes T_1 et spin-écho, la polarisation est directement donnée par le calcul de l'asymétrie (voir (1.30)), dont on rappelle ici l'expression, $A = (N^\uparrow - N^\downarrow) / (N^\uparrow + N^\downarrow)$. On a donc $\alpha = A$ pour ces deux modes. En mode Ramsey, la polarisation est donnée par la valeur de l'asymétrie à la fréquence de Larmor, soit quand la fréquence appliquée pour les basculements $\pi/2$ f_{LF} est égale

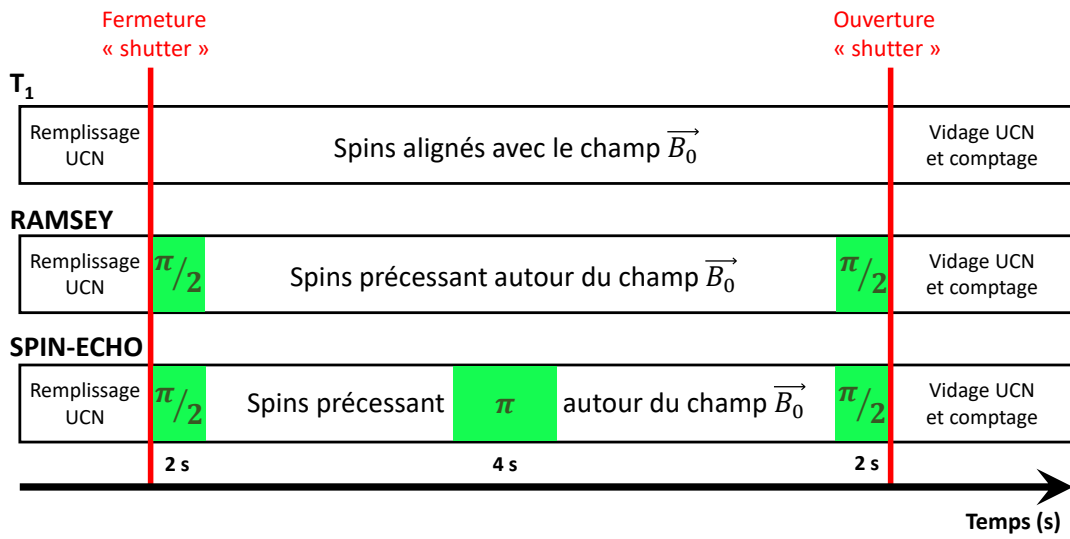


FIGURE 2.14 – Illustration des différentes méthodes de runs nEDM utilisés pour étudier les différentes contributions à la dépolarisation.

à la fréquence de précession des neutrons f_n , $\alpha = A(f_{LF} = f_n)$. En pratique, on mesure l'asymétrie pour différentes valeurs de f_{LF} et on ajuste la frange de Ramsey avec un cosinus (voir section 1.3.2) afin d'extraire la valeur de f_n et α .

Les gradients appliqués lors de ces runs de mesure sont contrôlés en ligne avec les magnétomètres césium, qui, comme nous l'avons déjà dit, permettent d'ajuster le champ B_{0z} jusqu'à l'ordre $l = 2$. Il est également possible d'obtenir la valeur de ces gradients en utilisant les résultats de l'analyse des cartes de champ magnétique. Nous n'explicitons pas ici cette méthode car elle sera discutée en détails dans le chapitre 3 mais précisons simplement qu'elle permet d'avoir accès à tous les gradients jusqu'à l'ordre $l = 6$.

2.4.2.1 Dépolarisation due au gradient vertical $G_{1,0}$:

Le gradient $G_{1,0}$ contribue aux inhomogénéités de la composante verticale B_{0z} . Il s'agit du gradient linéaire en z et il joue un rôle dans la dépolarisation amplifiée par gravité et dans la dépolarisation intrinsèque transverse. Les résultats de la mesure de la polarisation α en fonction de la valeur du gradient $G_{1,0}$ appliqués sont visibles sur la figure 2.15. Avec les valeurs appliquées, $|G_{1,0}| < 50$ pT/cm la dépolarisation intrinsèque, longitudinale comme transverse, est négligeable. La polarisation lors des runs de type T_1 et spin-écho est donc constante, ce qui est en accord avec les estimations données par les équations respectives (2.40) et (2.47). Il est très difficile de fixer à zéro les autres gradients et le fait que la polarisation en mode spin-écho soit plus faible peut s'expliquer par la présence de gradients résiduels causant de la dépolarisation intrinsèque transverse.

Dans le cas du mode Ramsey, on peut voir l'effet de la dépolarisation amplifiée par gravitation due au gradient $G_{1,0}$. Le taux de dépolarisation est alors donné par l'équation (2.35) en tenant compte uniquement de la contribution de $G_{1,0}$, le gradient $G_{2,0}$ étant nul lors de ces runs. On rappelle que cette expression est valable uniquement pour les faibles valeurs de gradient induisant de faibles décalages de phase parmi les groupes de neutrons. Les points centraux ont donc été ajustés avec le modèle

$$\alpha(G_{1,0}) = \alpha_0 - \frac{1}{2} \gamma_n^2 G_{1,0}^2 \text{Var}[\bar{z}] T^2, \quad (2.48)$$

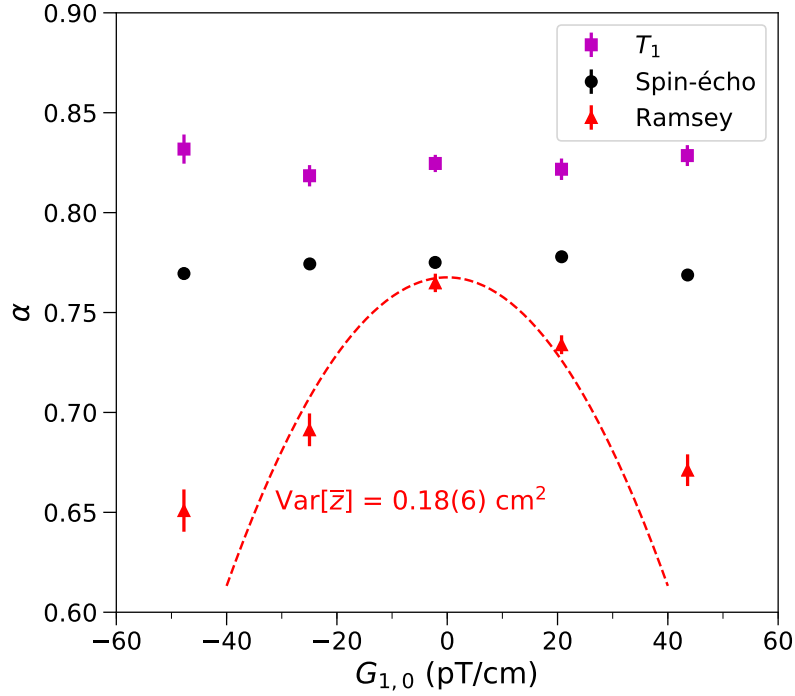


FIGURE 2.15 – Polarisation finale des UCN après un temps de stockage de 180 s en fonction du gradient linéaire vertical $G_{1,0}$ appliqué. Les carrés correspondent aux runs en mode T_1 , les cercles aux runs de spin-écho et les triangles aux runs normaux de type Ramsey. La ligne en pointillé est un ajustement de la polarisation des runs en mode Ramsey, en considérant uniquement la dépolarisation amplifiée par gravitation (effet dominant dans ce cas), basé sur les équations (2.29) et (2.35). Cet ajustement exclut les deux points extrêmes pour lesquels l'approximation de la phase faible n'est plus valable.

où α_0 et $\text{Var}[\bar{z}]$ ont été laissés comme paramètres libres, α_0 comprenant à la fois la polarisation initiale et l'efficacité de détection, celle-ci venant limiter la polarisation mesurée. On trouve $\alpha_0 = 0.77 \pm 0.01$ et $\text{Var}[\bar{z}] = 0.18 \pm 0.06 \text{ cm}^2$.

2.4.2.2 Dépolarisation due au gradient horizontal $G_{1,1}$

Le gradient $G_{1,1}$ contribue de la même façon que le gradient $G_{1,-1}$ à la dépolarisation intrinsèque transverse (voir l'équation (2.46)). En revanche, il n'intervient pas dans le mécanisme de dépolarisation amplifiée par gravité étant donné que les polynômes $\Pi_{z,1,1}(\vec{r})$ et $\Pi_{z,1,-1}(\vec{r})$ ne dépendent pas de z . La mesure de l'effet de ce gradient sur la polarisation est visible sur la figure 2.16 pour des runs de type spin-écho et Ramsey. Comme attendu, la polarisation mesurée après les runs des deux types est identique. En effet, la technique de spin-écho permet seulement d'annuler le déphasage dû à la dépolarisation amplifiée par gravitation. En revanche, la dépolarisation intrinsèque est un processus irréversible que cette technique ne permet pas de récupérer. On voit que pour des valeurs de gradient élevées (au-delà de 100 pT), la polarisation diminue fortement. La minimisation de ces gradients est donc essentielle pour le maintien de la polarisation. Pour ces runs, l'évolution de la polarisation en fonction du temps de précession et du gradient $G_{1,1}$ appliqué s'écrit

$$\alpha(T, G_{1,1}) = \alpha_0 e^{-\frac{T}{T_{2,\text{mag}}(G_{1,1})}}, \quad (2.49)$$

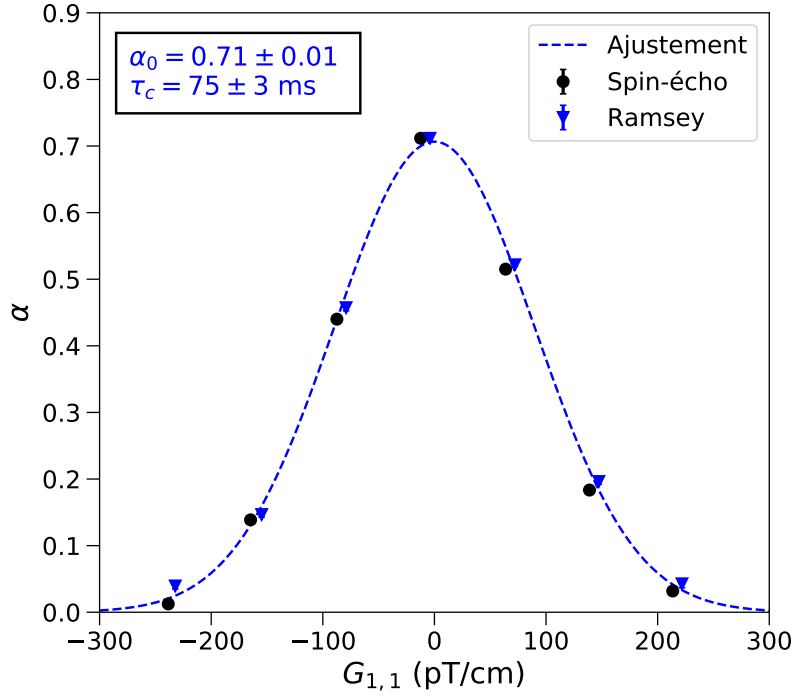


FIGURE 2.16 – Polarisation finale des UCN après un temps de stockage de 180 s en fonction du gradient linéaire horizontal $G_{1,1}$ appliqué. Les cercles correspondent aux runs de spin-écho et les triangles aux runs normaux de type Ramsey. La ligne en pointillé bleu est un ajustement de la polarisation utilisant comme taux de dépolarisation l’expression (2.43) et laissant comme paramètres libres α_0 et $\tau_{1,1}$.

avec le taux de dépolarisation $1/T_{2,\text{mag}}$ dépendant de $G_{1,1}$. Sur le graphique, la ligne en pointillé bleu représente un ajustement de la polarisation par ce modèle, avec $1/T_{2,\text{mag}}(G_{1,1})$ donné par (2.43). Le champ magnétique étant uniquement composé d’un terme constant et du gradient $G_{1,1}$, la composante verticale du champ s’écrit en coordonnées cartésiennes $B_{0,z} = G_{0,0} + xG_{1,1}$ et le taux de dépolarisation devient

$$\frac{1}{T_{2,\text{mag}}(G_{1,1})} = \gamma_n^2 G_{1,1}^2 \frac{R^2}{4} \tau_{1,1}. \quad (2.50)$$

Pour cet ajustement, α_0 et $\tau_{1,1}$ sont laissés comme paramètres libres et l’ajustement donne $\alpha_0 = 0.71 \pm 0.01$ et $\tau_{1,1} = 75 \pm 3$ ms. La théorie est en bon accord avec les mesures et montre que le gradient $G_{1,1}$, ainsi que son compagnon $G_{1,-1}$, doivent être maintenus à de faibles valeurs afin de limiter la dépolarisation intrinsèque transverse.

2.4.2.3 Dépolarisation due au gradient horizontal $G_{2,0}$

Le gradient $G_{2,0}$, d’ordre $l = 2$, peut théoriquement contribuer aux deux types de dépolarisation dus aux inhomogénéités magnétiques évoqués dans la section précédente. En effet, nous avons vu qu’il joue un rôle dans la dépolarisation amplifiée par gravitation à travers l’expression (2.35). De plus, en développant l’expression du taux de dépolarisation intrinsèque transverse (voir (2.42)) à l’ordre $l = 2$ de la paramétrisation polynomiale du champ, on voit qu’un terme en $G_{2,0}^2$ peut apparaître, ainsi qu’un terme en $G_{1,0}G_{2,0}$.

Afin d’étudier l’effet de $G_{2,0}$ sur la polarisation, des runs de type Ramsey et spin-écho ont été faits en faisant varier ce gradient de -20 à $+20$ pT/cm². Le résultat des mesures de la polarisation

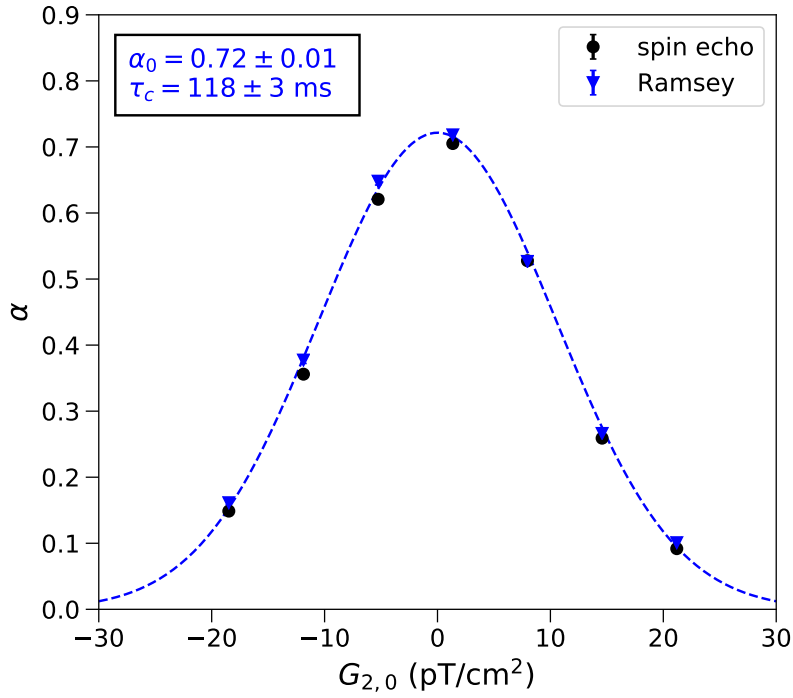


FIGURE 2.17 – Polarisation finale des UCN après un temps de stockage de 180 s en fonction du gradient de second ordre $G_{2,0}$ appliqué. Les cercles correspondent aux runs de spin-écho et les triangles aux runs normaux de type Ramsey. La ligne en pointillé bleue est un ajustement de la polarisation utilisant comme taux de dépolarisation l'expression (2.43) et laissant comme paramètres libres α_0 et $\tau_{2,0}$.

en fonction du gradient $G_{2,0}$ appliqué est visible sur la figure 2.17. On observe que la polarisation à l'issue des runs de type Ramsey et spin-écho est quasi-identique. On peut donc d'ores et déjà dire que la contribution à la dépolarisation amplifiée par gravitation du $G_{2,0}$ est négligeable comparée à la dépolarisation intrinsèque transverse. Pour cette dernière; en calculant les moyennes volumiques $\langle \Pi_{z,2,0}^c \rangle$ et $\langle \Pi_{z,1,0}^c \Pi_{z,2,0}^c \rangle$, on peut montrer que le terme en $G_{1,0}G_{2,0}$ contribuant à la dépolarisation est négligeable devant le terme en $G_{2,0}^2$ pour les valeurs des gradients appliquées durant ces runs. Seule la contribution de $G_{2,0}^2$ a donc été considérée pour analyser ces runs. La ligne en pointillé bleue représente l'ajustement de la polarisation en fonction de ce gradient selon le modèle suivant

$$\alpha(T, G_{2,0}) = \alpha_0 e^{-\frac{T}{T_{2,\text{mag}}(G_{2,0})}}, \quad (2.51)$$

avec

$$\frac{1}{T_{2,\text{mag}}(G_{2,0})} \simeq \gamma_n^2 G_{2,0}^2 \frac{R^4}{48} \tau_{2,0}. \quad (2.52)$$

Le polynôme de la paramétrisation du champ associé au gradient $G_{2,0}$ est le suivant :

$$\Pi_{z,2,0}(\vec{r}) = z^2 - \frac{\rho^2}{2}. \quad (2.53)$$

La contribution en z^2 de ce polynôme a été négligée dans l'expression (2.52) par souci de simplicité car elle est dix fois inférieure à la contribution en ρ^2 . Pour cet ajustement de la polarisation, les paramètres α_0 et $\tau_{2,0}$ ont été laissés comme paramètres libres et l'on trouve $\alpha_0 = 0.72 \pm 0.01$ et $\tau_{2,0} = 118 \pm 3$ ms.

On peut voir que le gradient $G_{2,0}$ est donc responsable d'une partie de la dépolarisation intrinsèque transverse. A l'instar de $G_{1,1}$ et $G_{1,-1}$, qui contribuent également à la dépolarisation intrinsèque, et de $G_{1,0}$, qui contribue à la dépolarisation gravitationnelle, il doit donc être maintenu le plus petit possible pour les runs de prise de données nEDM.

2.4.2.4 Simulations Monte-Carlo des temps de corrélation $\tau_{1,1}$ et $\tau_{2,0}$

Il est possible de simuler la trajectoire d'un neutron dans la chambre de stockage au moyen d'une simulation Monte-Carlo. Ce faisant, on peut en déduire les fonctions de corrélation de polynômes dépendant des positions des neutrons $\langle x^a y^b z^c(0) x^i y^j z^k(t) \rangle$ pour différentes valeurs de t . C'est le rôle que remplit le programme de simulations MC « ToMAT ». Il s'agit d'un programme de simulation de trajectoires de particules au sein d'un volume fermé. A partir de ces fonctions simulées, on peut donc calculer les fonctions de corrélation des polynômes centrés décrivant le champ magnétique, en particulier les deux qui vont nous intéresser :

$$\begin{aligned} & - \left\langle \Pi_{z,1,1}^c(0) \Pi_{z,1,1}^c(t) \right\rangle, \\ & - \left\langle \Pi_{z,2,0}^c(0) \Pi_{z,2,0}^c(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

En simulant ces fonctions jusqu'à des valeurs de temps t élevées avec un pas suffisamment petit, on peut alors approcher l'intégrale allant de $t = 0$ à $t = +\infty$ en utilisant la méthode des trapèzes. Comme on peut le voir dans l'expression (2.44), cette intégrale pour un polynôme $\Pi_{z,l,m}^c$ nous donne accès à la valeur de $\tau_{l,m}$, le temps de corrélation associé au gradient $G_{l,m}$. Il suffit pour cela de calculer la moyenne du polynôme centré sur le volume de la chambre, telle qu'elle est donnée par l'expression (2.45), et de diviser l'intégrale obtenue grâce aux simulations par cette moyenne volumique. Grâce aux simulations MC de trajectoires du programme ToMAT, on peut donc calculer $\tau_{1,1}$ et $\tau_{2,0}$ en fonction des caractéristiques des neutrons simulés. ToMAT permet de faire varier deux paramètres qui représentent le comportement des neutrons dans la chambre. Ces paramètres sont

- la vitesse ν ,
- la probabilité pour les réflexions sur les parois d'être diffuses p .

En principe, les UCN dans la chambre sont répartis sur un spectre de vitesse inférieur à 7 m/s, mais en pratique, une seule vitesse peut être choisie pour une simulation. Une première approximation doit donc être faite en utilisant une seule vitesse supposée représentative de l'ensemble des neutrons. Quant aux réflexions, on suppose qu'elles sont plus majoritairement spéculaires que diffuses et que p est donc plus proche de 0 que de 1. La valeur exacte de ce paramètre dans la chambre de stockage nEDM n'est toutefois pas connue. Nous allons donc étudier l'effet de la variation de ces paramètres sur les temps de corrélation $\tau_{1,1}$ et $\tau_{2,0}$. La comparaison entre les valeurs simulées de ces temps et leurs valeurs mesurées ci-avant devrait nous permettre d'estimer les valeurs des paramètres ν et p les plus représentatives du spectre de vitesse des UCN et des caractéristiques de la chambre de précession nEDM. Notons que ToMAT ne tient pas compte de la gravité et que les résultats qui vont suivre sont donc approximatifs et peuvent être vus comme un prélude à une étude plus approfondie s'appuyant sur des simulations plus réalistes.

Variation de la vitesse On s'attend à une dépendance simple du temps de corrélation $\tau_{l,m}$ en fonction de la vitesse ν . En effet, les fonctions de corrélation dépendent de la trajectoire des neutrons et la « longueur » de celle-ci est directement proportionnelle à la vitesse. Pour le programme de simulation, en ne changeant que le paramètre ν , la forme verticale de la fonction de corrélation ne devrait donc pas être pas altérée. Pour des vitesses faibles, elle devrait en revanche être plus

étirée horizontalement que pour des vitesses plus grandes. On s'attend donc à une dépendance inverse entre $\tau_{l,m}$ et v . La simplicité de cette dépendance n'est en réalité valable que si la gravité est négligée, ce qui, comme nous l'avons dit, est le cas dans le programme ToMat. Une première série de simulations de la fonction $\langle \Pi_{z,1,1}^c(0)\Pi_{z,1,1}^c(t) \rangle$ a été réalisée en faisant varier v et p afin de vérifier cette dépendance et ainsi confirmer le bon fonctionnement du programme de simulation. Les résultats de cette première série sont visibles sur la figure 2.18. On peut voir sur 2.18a que la modification du paramètre v a pour seul effet une dilatation horizontale de la fonction de corrélation. Et sur 2.18b, on observe bien $\tau_{1,1} \propto 1/v$. Intéressons-nous maintenant à la dépendance de $\tau_{l,m}$ en fonction de la probabilité pour les réflexions sur les parois d'être diffuses.

Variation de la probabilité de réflexions diffuses Contrairement à la dépendance en fonction de la vitesse, la relation entre le temps de corrélation $\tau_{l,m}$ et p est moins évidente et n'est pas nécessairement la même pour tous les ordres (l, m) . Pour étudier cette relation, une série de simulations des fonctions $\langle \Pi_{z,1,1}^c(0)\Pi_{z,1,1}^c(t) \rangle$ et $\langle \Pi_{z,2,0}^c(0)\Pi_{z,2,0}^c(t) \rangle$ à une vitesse fixe $v = 3$ m/s a été réalisée. Notre objectif ici n'est pas d'identifier précisément la dépendance entre les temps $\tau_{1,1}$ et $\tau_{2,0}$ avec p , mais simplement de comprendre l'effet de p sur les fonctions de corrélation et par conséquent sur les temps de corrélation.

Les représentations graphiques desdites fonctions de corrélation simulées sont visibles sur la figure 2.19. Seules deux valeurs de probabilité sont représentées afin de ne pas surcharger les graphiques. On constate que plus la probabilité de réflexions diffuses est importante, plus l'amplitude des fonctions de corrélation s'atténue rapidement. Étant données les formes des fonctions pour les deux polynômes différents considérés, cette atténuation n'a pas le même impact sur les temps de corrélation $\tau_{1,1}$ et $\tau_{2,0}$. En effet, $\tau_{1,1}$ va augmenter avec p tandis que $\tau_{2,0}$ va à l'inverse diminuer quand p augmente.

On peut remarquer que les temps de corrélation mesurés $\tau_{1,1}^{\text{mes}} = 75$ ms et $\tau_{2,0}^{\text{mes}} = 118$ ms sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus pour les simulations avec $v = 3$ m/s. Cependant, le spectre de vitesse des UCN dans l'expérience nEDM n'est pas bien connu et on ne peut donc pas déduire la valeur du paramètre p en étudiant la valeur d'un seul de ces temps de corrélation en fonction de p . Nous allons toutefois voir qu'il est possible d'estimer p en étudiant ces temps non plus séparément mais leur rapport.

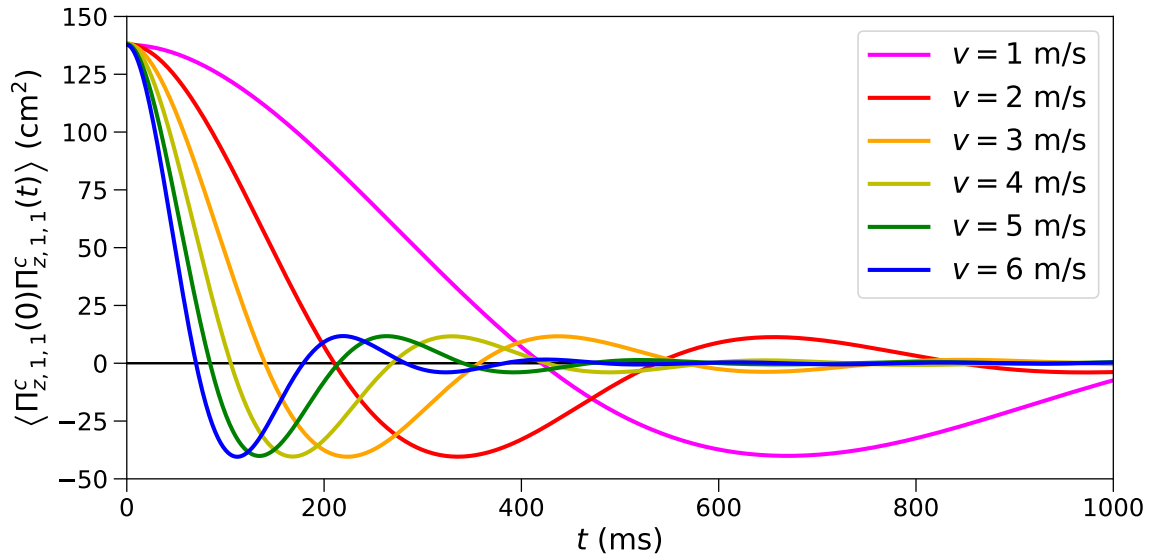
Estimation de p pour le spectromètre nEDM Nous l'avons montré un peu avant, pour un gradient $G_{l,m}$, le temps de corrélation associé $\tau_{l,m}$ varie en $1/v$. On peut donc écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{f_{1,1}(p)}{v}, \\ \tau_{2,0} = \frac{f_{2,0}(p)}{v}, \end{cases} \quad (2.54)$$

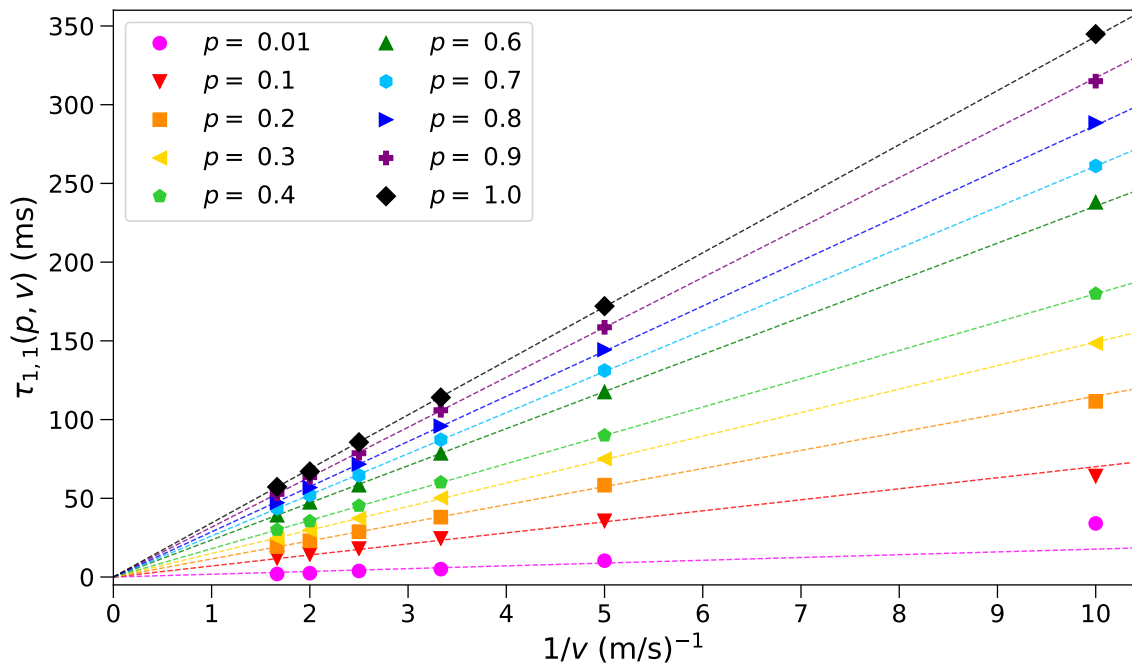
où les fonctions $f_{1,1}(p)$ et $f_{2,0}(p)$ sont des fonctions non déterminées différentes et dépendant uniquement de p . Si l'on veut s'affranchir de la dépendance en vitesse, on peut donc s'intéresser au rapport des temps de corrélation :

$$\frac{\tau_{2,0}}{\tau_{1,1}} = \frac{f_{2,0}(p)}{f_{1,1}(p)} = f(p), \quad (2.55)$$

qui ne dépend plus que de la probabilité pour les réflexions d'être diffuses. Grâce aux runs faisant varier les gradients $G_{1,1}$ et $G_{2,0}$, nous avons pu mesurer la valeur de ce rapport dans la chambre de précession nEDM : $\tau_{2,0}^{\text{mes}}/\tau_{1,1}^{\text{mes}} = 1.6 \pm 0.1$. En réalisant environ 900 simulations des fonctions de



(a) Fonction de corrélation $\langle \Pi_{z,1,1}^c(0) \Pi_{z,1,1}^c(t) \rangle$ pour différentes valeurs de vitesse thermique v avec la probabilité de réflexions diffuses fixée à $p = 0.3$.



(b) Temps de corrélation $\tau_{1,1}$ en fonction de l'inverse de la vitesse thermique v pour différentes valeurs de p et ajustements linéaires correspondant $\tau_{1,1}(p, v) = f_{1,1}(p) / v$.

FIGURE 2.18 – Illustration de la dépendance de la fonction de corrélation $\langle \Pi_{z,1,1}^c(0) \Pi_{z,1,1}^c(t) \rangle$ et du temps de corrélation $\tau_{1,1}$ déduit en fonction de la vitesse thermique des neutrons simulés.

corrélation en faisant varier les paramètres p et ν , nous avons pu obtenir le profil de la fonction $f(p)$. Celui-ci est visible sur la figure 2.20. On peut voir qu'il est possible grâce à cette étude d'estimer la valeur de la probabilité p dans notre système de mesure, à savoir le spectromètre nEDM. Comme on s'y attendait, on trouve une valeur plus proche de 0 que de 1, ce qui veut dire que ce sont les réflexions spéculaires qui dominent dans la chambre de précession et non les réflexions diffuses.

De plus, une fois p^{mes} déterminé, il est possible d'estimer également la vitesse thermique ν la plus représentative de la population d'UCN pour les simulations. En effet, avec p^{mes} connu, on peut de nouveau s'intéresser aux temps de corrélation $\tau_{1,1}$ et $\tau_{2,0}$ de façon séparée et en étudiant les variations de $\tau_{1,1} \times \nu$ et $\tau_{2,0} \times \nu$ en fonction de p , on peut en déduire graphiquement

$$\nu^{\text{mes}} \simeq \frac{f_{1,1}(p^{\text{mes}})}{\tau_{1,1}^{\text{mes}}} \simeq \frac{f_{2,0}(p^{\text{mes}})}{\tau_{2,0}^{\text{mes}}} \sim 1.9 \text{ m/s.} \quad (2.56)$$

Cette étude des runs à forts gradients et des simulations associées est donc très intéressante. Elle nous a en effet permis d'étudier la dépolarisation causée par les gradients $G_{1,0}$, $G_{1,1}$ et $G_{2,0}$ en déterminant les taux de dépolarisation associés et les limites dans lesquelles il est nécessaire de contenir ces gradients pour maintenir une bonne polarisation. Nous allons voir ci-après comment un tel contrôle est effectué. De plus, la comparaison des temps de corrélation mesurés avec des simulations des trajectoires des neutrons nous ont également apporté des informations sur les propriétés de la chambre de stockage nEDM vis-à-vis des réflexions murales des neutrons. Bien que l'aspect global du spectre des UCN reste inconnu, nous avons toutefois également pu extraire une valeur de vitesse thermique représentative de la population présente dans le spectromètre.

2.4.3 Algorithme d'optimisation de l'uniformité magnétique

Nous venons de le voir, la dépolarisation est intimement liée à l'uniformité magnétique et il est donc essentiel d'optimiser celle-ci afin de maintenir la polarisation et ainsi augmenter la sensibilité statistique de la mesure de l'EDM du neutron. Pour ce faire, nous avons déjà dit qu'un algorithme basé sur la mesure du champ magnétique fournie par les magnétomètres césium est utilisé au début de chaque séquence de mesure nEDM afin de minimiser les gradients du champ. Comme nous l'avons vu, lors des cycles de mesure de type Ramsey, ce qui est le cas des cycles servant à mesurer l'EDM du neutron, les causes principales de dépolarisation sont la dépolarisation intrinsèque transverse et la dépolarisation amplifiée par gravité. Améliorer l'homogénéité longitudinale au champ \vec{B}_0 est la clé permettant de limiter ces deux mécanismes. Nous avons également évoqué dans la section 2.3.2.1 l'effet systématique secondaire lié aux inhomogénéités transverses du champ $\langle B_T^2 \rangle$. Enfin, on rappelle que l'effet systématique principal, le faux EDM du mercure, dépend des gradients $G_{l \text{ impair}, 0}$, qui contribuent aux inhomogénéités longitudinales. En conclusion, l'objectif de cet algorithme d'optimisation est d'améliorer la sensibilité statistique en réduisant les inhomogénéités longitudinales, et de minimiser les effets systématiques en augmentant l'uniformité longitudinale et transverse.

Les magnétomètres césium ont directement accès à la composante longitudinale du champ. Toutefois, nous avons discuté dans la section 2.3.3 du fait que la précision de ces magnétomètres est limitée à 45 à 90 pT. L'objectif de la routine est donc de réduire les variations entre les magnétomètres à cette échelle de grandeur. Les composantes transverses du champ pourraient quant à elles être accessibles également en utilisant ces magnétomètres, en mode variomètre (voir ABEL et collab. [2020a]), mais la précision de mesure resterait insuffisante pour maintenir $\langle B_T^2 \rangle$ suffisamment bas (quelques nT²). Des données issues des premières campagnes de mesures hors-ligne du champ magnétique (voir chapitre 3) ont donc également été utilisées. Ces données permettaient de prédire le champ magnétique généré par unité de courant par chacune des 30 bobines

de compensation (trimcoils) et des bobines de guidage présentes dans le blindage. En combinant ces connaissances des gradients issues des mesures en ligne et hors-ligne du champ, l'algorithme d'optimisation minimise la somme de trois termes, l'un dépendant des inhomogénéités longitudinales, le second des inhomogénéités transverses et le troisième servant à régulariser la procédure, le nombre de paramètres étant supérieur au nombre de contraintes (mesures du champ). Le détail sur chacun de ces termes et la façon d'optimiser sont expliqués en détail dans ABEL et collab. [2020a].

L'utilisation de cette méthode d'optimisation durant la prise de données nEDM a permis d'augmenter la visibilité α de 35% par rapport à des données prises en 2014 pour lesquelles cette procédure n'existait pas. Cette amélioration permet de diminuer l'erreur statistique de 25% et la visibilité moyenne obtenue est de 0.76 sur les 99 séquences de données nEDM. Cette valeur correspond à un temps de relaxation transverse des spins d'environ 1450 s. La valeur de α par séquence de données est illustrée sur la figure 2.21. Pour obtenir une telle amélioration de la sensibilité statistique grâce au nombre de neutrons, celui-ci aurait dû être augmenté d'un facteur 1.8, ce qui est un facteur non négligeable pour des expériences exigeant de longues périodes de prise de données. Maintenant que nous avons vu comment la sensibilité statistique est optimisée, nous allons à présent discuter de la correction de l'effet systématique principal, le faux EDM du mercure.

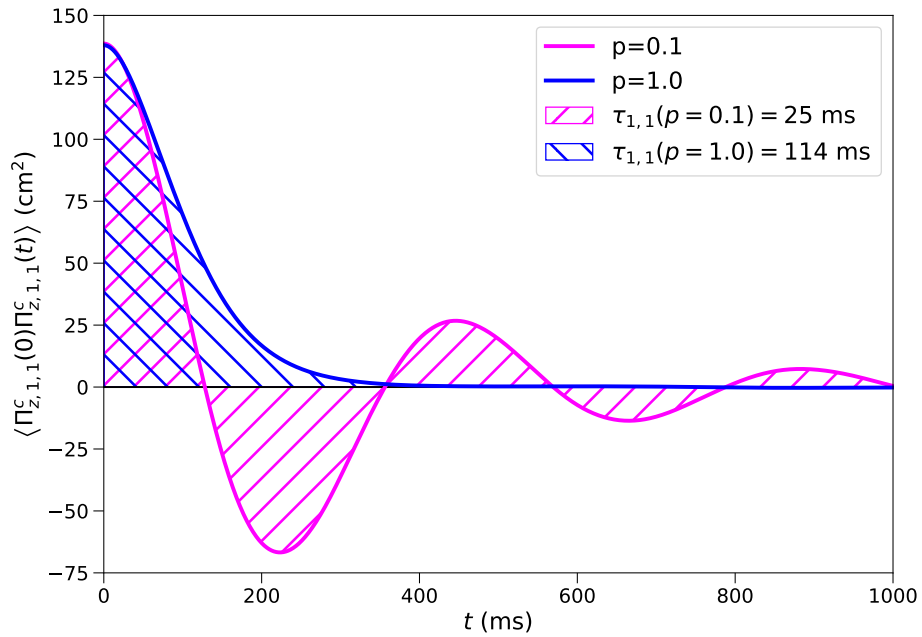
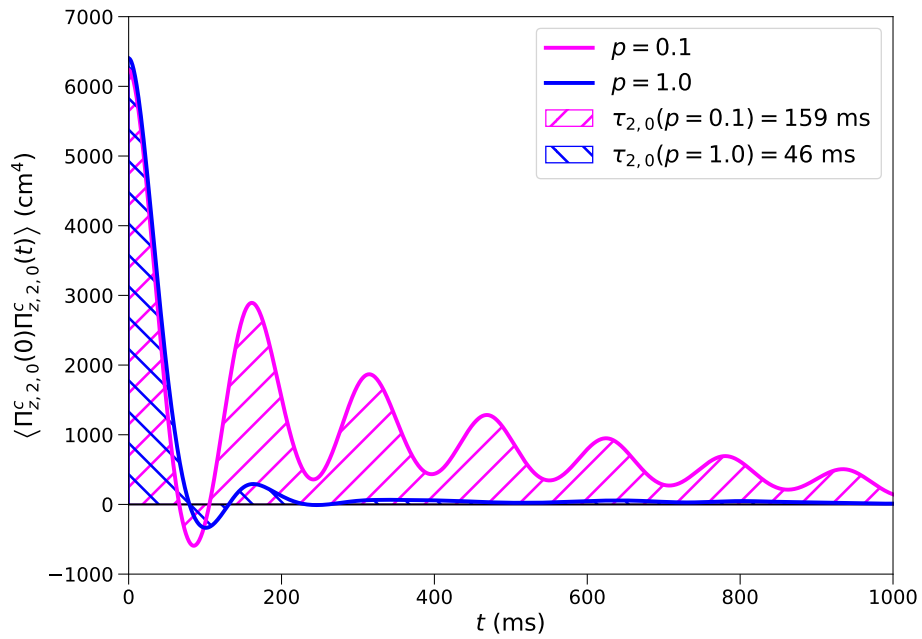

 (a) $\langle \Pi_{z,1,1}^c(0)\Pi_{z,1,1}^c(t) \rangle$.

 (b) $\langle \Pi_{z,2,0}^c(0)\Pi_{z,2,0}^c(t) \rangle$.

FIGURE 2.19 – Simulations Monte-Carlo des fonctions de corrélation $\langle \Pi_{z,1,1}^c(0)\Pi_{z,1,1}^c(t) \rangle$ (sur a) et $\langle \Pi_{z,2,0}^c(0)\Pi_{z,2,0}^c(t) \rangle$ (sur b) dont les calculs d'intégrales permettent d'extraire $\tau_{1,1}$ et $\tau_{2,0}$. Les simulations sont réalisées en simulant des neutrons de vitesse $v = 3$ m/s. Les courbes roses (bleues) correspondent à une probabilité pour les réflexions murales d'être diffuses $p = 0.1$ (1).

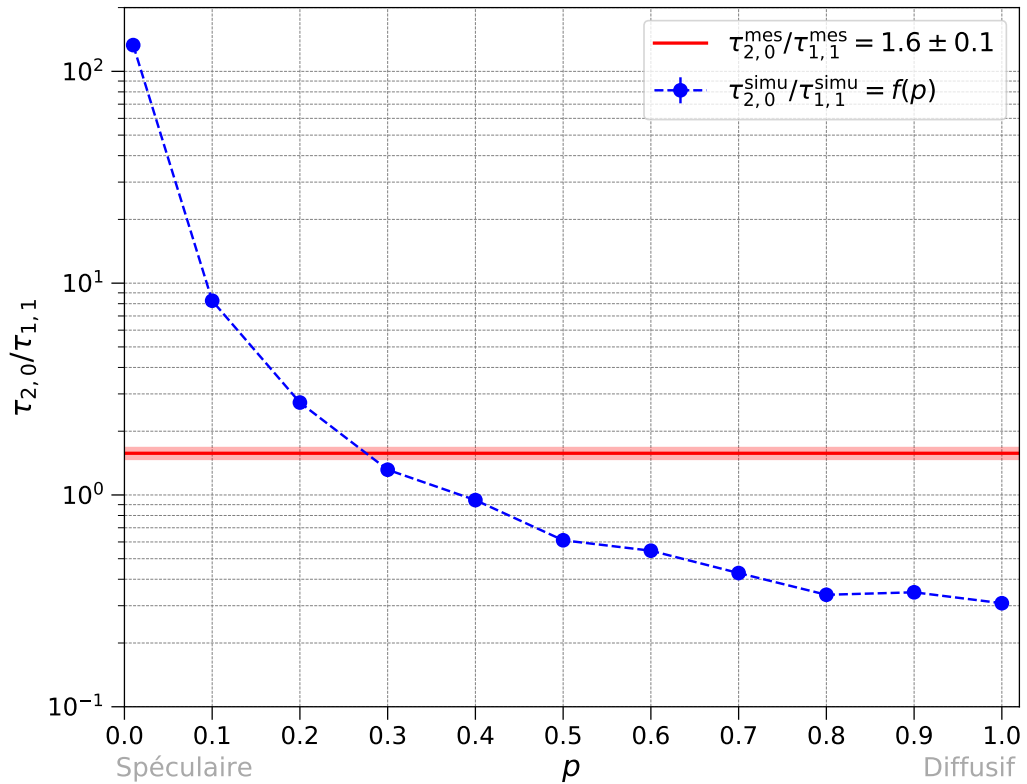


FIGURE 2.20 – Simulation du rapport $\tau_{2,0}/\tau_{1,1} = f(p)$ pour différentes valeurs de p et comparaison avec la valeur mesurée de ce rapport dans l'expérience nEDM. En utilisant l'intersection des deux courbes, on estime $p^{\text{mes}} \sim 0.27$.

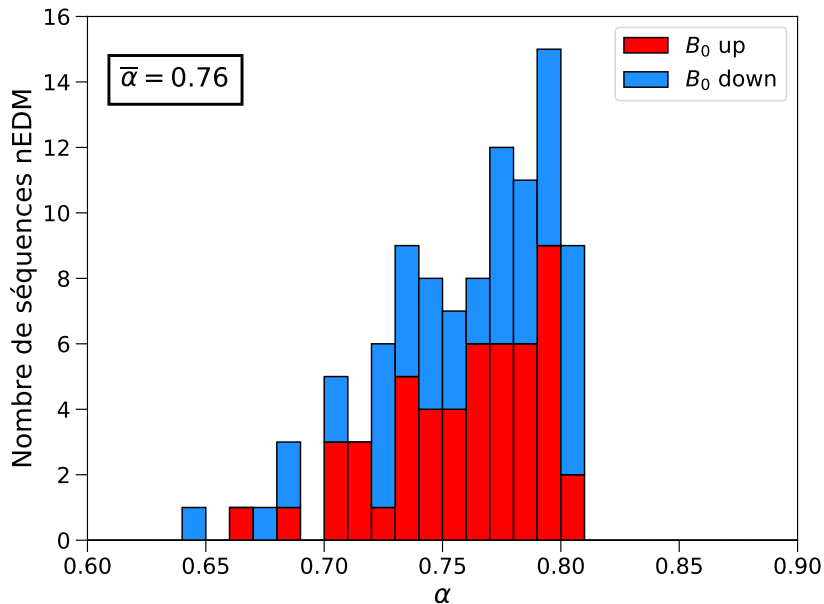


FIGURE 2.21 – Valeurs de la visibilité de la frange de Ramsey α moyennée par séquence pour les 99 séquences de données nEDM, en rouge (bleu) pour les séquences avec le champ \vec{B}_0 dirigé vers le haut (bas).

2.5 Stratégie de correction du faux EDM

On rappelle ici l'expression du faux EDM du neutron induit par le faux EDM du mercure, en fonction des gradients généralisés de la paramétrisation polynomiale du champ magnétique jusqu'à l'ordre $l = 7$,

$$d_{n-\text{Hg}}^{\text{faux}} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 \begin{bmatrix} G_{1,0} - G_{3,0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{H^2}{4} \right) \\ + G_{5,0} \left(\frac{5R^4}{16} - \frac{5R^2 H^2}{12} + \frac{H^4}{16} \right) \\ - G_{7,0} \left(\frac{7R^6}{32} - \frac{35R^4 H^2}{64} + \frac{7R^2 H^4}{32} - \frac{H^6}{64} \right) + \dots \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Cette expression nous sera utile pour comprendre la stratégie de correction et j'invite le lecteur à s'y référer autant de fois qu'il est nécessaire.

Avant d'entrer dans les détails de cette stratégie de correction, il est utile ici de faire une brève parenthèse sur la sensibilité statistique accumulée pendant la prise de données nEDM afin de pouvoir comparer l'impact des systématiques sur la mesure.

2.5.1 Sensibilité de l'expérience nEDM

Les séquences de mesures nEDM ont été prises à PSI sur une plage de deux ans, en 2015 et en 2016. Pendant cette période, 54 068 cycles de Ramsey ont été réalisés, avec un temps de précision $T = 180$ s. La durée totale d'un cycle étant de 300 s, le nombre de cycles par jour est limité à 288. Le nombre moyen de neutrons comptés par cycle est de 11 400. Ces cycles sont rassemblés en 99 séquences, elles-mêmes découpées en sous-séquences, lors desquelles la polarité du champ électrique est régulièrement inversée. Au cours de la prise de données d'une séquence, la configuration magnétique (polarité de \vec{B}_0 et courants dans les trimcoils) ne varie pas. Chaque sous-séquence est analysée individuellement pour extraire une valeur d'EDM. Les sous-séquences sont ensuite combinées afin d'obtenir une mesure d'EDM par séquence. On redonnera ici une fois de plus la figure de mérite de mesure de l'EDM du neutron,

$$\sigma_{d_n} = \frac{\hbar}{2ET\alpha\sqrt{N_{\text{tot}}}}. \quad (2.58)$$

Nous avons déjà donné la valeur de la polarisation moyenne ($\bar{\alpha} = 0.76$) pour ces séquences de données et l'on rappelle que le champ électrique \vec{E} utilisé dans l'expérience est de 11 kV/cm. Après les coupures d'analyse, en utilisant l'équation (2.58), on peut calculer l'erreur statistique irréductible comme étant 0.98×10^{-26} e cm. En réalité, en prenant également en compte les incertitudes statistiques issues des étapes d'ajustement de l'analyse, on arrive à une sensibilité statistique finale de

$$\sigma_{d_n} = 1.1 \times 10^{-26} \text{ e cm}. \quad (2.59)$$

Ce nombre est à comparer avec la sensibilité statistique de la limite précédente sur l'EDM du neutron (BAKER et collab. [2006]; PENDLEBURY et collab. [2015]) qui était de 1.5×10^{-26} e cm.

La principale amélioration de la mesure faite à PSI ne réside toutefois pas dans l'augmentation de la sensibilité statistique, mais bien dans le contrôle et la correction des effets systématiques avec une réduction d'un facteur 5 de l'erreur systématique sur la limite entre les deux mesures. En effet, lors de la prise de données de l'expérience nEDM, une stratégie de prise de données particulière a été mise en place afin de pouvoir corriger au premier ordre l'effet systématique principal

de l'expérience, le faux EDM du mercure. Cette stratégie, qui avait déjà été utilisée pour établir la précédente limite, est appelée méthode du point de croisement et sera expliquée succinctement dans la section suivante et plus en détail dans la section 4.1. La correction des ordres supérieurs du faux EDM du mercure a également été implémentée dans l'analyse nEDM, permettant de réduire ainsi de façon drastique l'erreur systématique sur l'EDM du neutron. Cette correction repose sur l'exploitation de la mesure hors-ligne du champ magnétique, la cartographie du champ. L'analyse des « cartes de champ » et le calcul des corrections qui en découlent ont constitué le cœur du travail de cette thèse et les deux derniers chapitres de ce document y seront donc consacrés.

Nous allons maintenant expliciter le principe de base de cette stratégie de correction. Nous avons déjà discuté dans la section 2.3.2.2 le décalage gravitationnel δ_{Grav} impactant le rapport \mathcal{R} des fréquences de précession des neutrons et des atomes de mercure. L'utilisation de cet effet à notre avantage est au cœur de la stratégie de correction au premier ordre du faux EDM du mercure.

2.5.2 Correction au premier ordre

Pour comprendre le principe de la stratégie de correction du faux EDM au premier ordre, il est utile de considérer la paramétrisation polynomiale du champ limitée à l'ordre $l = 1$ (on peut aussi considérer que l'on se limite à l'ordre $l = 2$, cela revenant au même du point de vue des expressions considérées ci-après). Dans ce cas, le gradient gravitationnel (2.25) impliqué dans l'effet du décalage gravitationnel devient simplement

$$G_{\text{Grav}} = G_{1,0}, \quad (2.60)$$

et le faux EDM (2.57)

$$d_{n \leftarrow \text{Hg}}^{\text{faux}} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 G_{1,0}. \quad (2.61)$$

On remarque que la contribution au premier ordre des inhomogénéités magnétiques est égale à $G_{1,0}$ pour le décalage gravitationnel comme pour le faux EDM du mercure. C'est cette identique dépendance qui va être utilisée pour corriger cet effet.

Par séquence de données, l'analyse nEDM permet d'extraire une valeur de l'EDM du neutron d_n . Cet EDM mesuré est composé du vrai signal EDM et du faux EDM induit par le mercure, comme suit,

$$d_n = d_n^{\text{vrai}} + d_{n \leftarrow \text{Hg}}^{\text{faux}} = d_n^{\text{vrai}} + \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 G_{1,0}. \quad (2.62)$$

Sur une séquence, il est également possible d'extraire le rapport moyen des fréquences \mathcal{R}_0 . Le champ électrique étant régulièrement inversé lors d'une séquence, ce rapport moyen ne contient pas de terme d'EDM, vrai ou faux, puisque ceux-ci s'annulent entre les cycles à polarité électrique positive et négative. Les décalages non proportionnels au champ électrique, en revanche, sont bien présents. Afin de clarifier le principe de la stratégie de correction, on considérera ici que \mathcal{R}_0 n'est impacté que par l'effet du décalage gravitationnel et on négligera les autres sources de décalage, qui seront détaillées dans la section 4.1.1. Ce rapport peut alors s'écrire

$$\mathcal{R}_0 = \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \left(1 + \frac{G_{1,0} \langle z \rangle}{B_0} \right), \quad (2.63)$$

où le second terme, proportionnel à $G_{1,0}$, a son signe défini par la polarité du champ magnétique. On rappelle ici que $\langle z \rangle$ est négatif.

On dispose donc de deux grandeurs par séquence, \mathcal{R}_0 et d_n , contenant chacune un terme proportionnel au gradient linéaire longitudinal $G_{1,0}$. Si l'on substitue $G_{1,0}$ par son expression en fonction de \mathcal{R}_0 dans (2.62), on obtient

$$d_n = d_n^{\text{vrai}} + B_0 \frac{\hbar \gamma_{\text{Hg}}^2 R^2}{8c^2 \langle z \rangle} \left(\mathcal{R}_0 - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \right). \quad (2.64)$$

On voit que la relation entre \mathcal{R}_0 et d_n est donc linéaire et le signe de la pente dépend de la polarité du champ magnétique \vec{B}_0 . Lorsque le gradient $G_{\text{Grav}} = G_{1,0} = 0$, le second terme de l'expression (2.64) s'annule et l'on a alors $d_n = d_n^{\text{vrai}}$. Nous avons déjà dit à maintes reprises qu'il est impossible d'obtenir un champ parfaitement uniforme. En pratique, lors des mesures, le gradient $G_{1,0}$ n'est donc jamais nul. Le principe de correction de ce premier ordre du faux EDM repose donc, non pas sur la suppression de ce gradient, mais au contraire sur l'application d'un tel gradient, différent pour chaque séquence de données. Nous avons évoqué dans la section 2.2.1 les trimcoils BTC et TTC, qui permettent de générer un tel gradient dans la chambre de précession sans modifier de façon conséquente les autres gradients du champ. En appliquant des courants adaptés dans ces deux bobines, on peut donc obtenir un ensemble de points (\mathcal{R}_0, d_n) devant théoriquement former une droite. Si l'on applique ce principe de mesure avec des séquences pour les deux polarités du champ magnétique, on obtient alors en réalité deux jeux de données $(\mathcal{R}_0^\uparrow, d_n^\uparrow)$ et $(\mathcal{R}_0^\downarrow, d_n^\downarrow)$ qui peuvent s'ajuster avec l'expression (2.64) avec des pentes de signes opposés égales à,

$$\pm B_0 \frac{\hbar \gamma_{\text{Hg}}^2 R^2}{8c^2 \langle z \rangle}, \quad (2.65)$$

et une ordonnée à l'origine composée d'une partie signée et de la vraie valeur de l'EDM,

$$d_n^{\text{vrai}} - B_0 \frac{\hbar \gamma_{\text{Hg}}^2 R^2}{8c^2 \langle z \rangle} \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right|. \quad (2.66)$$

Une illustration schématique des courbes d'ajustement est visible sur la figure 2.22. Au point de croisement de ces deux courbes, le deuxième terme de (2.64) est nécessairement nul. Il s'agit donc du point pour lequel $G_{\text{Grav}} = G_{1,0} = 0$ et l'ordonnée de ce point d_x est égale à la véritable valeur de l'EDM du neutron $d_n = d_n^{\text{vrai}}$.

Cette méthode dite du point de croisement permet donc de corriger au premier ordre le faux EDM du mercure, proportionnel à $G_{1,0}$. Pour pouvoir la mettre en place, il est nécessaire de mesurer l'EDM pour des séquences de données dans les deux polarités du champ magnétique \vec{B}_0 , et d'appliquer un gradient vertical longitudinal différent pour chacune de ces séquences, ce qui a été réalisé pour la prise de données nEDM. Bien que cette correction soit une technique permettant de s'affranchir de la contribution principale de cet effet systématique, les contributions des ordres supérieurs ne sont pas négligeables et doivent donc elles aussi être prises en compte. Nous allons voir ci-après comment cela est fait dans l'analyse nEDM.

2.5.3 Correction des ordres supérieurs

Dans la section précédente, nous avons simplifié les expressions en considérant la paramétrisation polynomiale du champ uniquement jusqu'à l'ordre $l = 1$. Reprenons-les maintenant en se limitant cette fois à l'ordre $l = 7$. Pour faciliter la compréhension du problème, il est nécessaire d'introduire ici quelques nouvelles notations. Le gradient gravitationnel étant utilisé dans la méthode du point de croisement, réécrivons la formule du faux EDM induit par le mercure (2.57) en

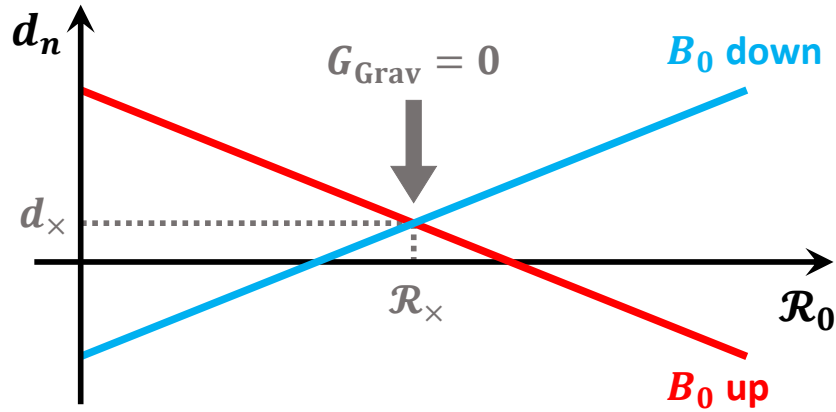


FIGURE 2.22 – Illustration schématique de la méthode du point de croisement. La courbe en rouge (bleu) représente l’ajustement des séquences avec le champ magnétique \vec{B}_0 dirigé vers le haut (bas). Le point de croisement des deux droites correspond au point pour lequel le gradient gravitationnel est nul, soit le point pour lequel la contribution « gravitationnelle » du faux EDM s’annule.

y introduisant le gradient gravitationnel (2.25). Le faux EDM devient alors

$$d_{n-\text{Hg}}^{\text{faux}} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 \left[\begin{array}{l} + G_{3,0} \left(\frac{H^2}{10} + \frac{R^2}{4} \right) \\ + G_{5,0} \left(\frac{H^4}{28} - \frac{R^2 H^2}{24} - \frac{5R^4}{16} \right) \\ + G_{7,0} \left(\frac{H^6}{96} - \frac{5R^2 H^4}{64} - \frac{7R^4 H^2}{64} + \frac{21R^6}{64} \right) \\ + \dots \end{array} \right]. \quad (2.67)$$

Pour pouvoir comparer aisément les contributions des ordres supérieurs, on définit les quantités suivantes,

$$\widehat{G}_3 = G_{3,0} \left(\frac{H^2}{10} + \frac{R^2}{4} \right), \quad (2.68)$$

$$\widehat{G}_5 = G_{5,0} \left(\frac{H^4}{28} - \frac{R^2 H^2}{24} - \frac{5R^4}{16} \right), \quad (2.69)$$

$$\widehat{G}_7 = G_{7,0} \left(\frac{H^6}{96} - \frac{5R^2 H^4}{64} - \frac{7R^4 H^2}{64} + \frac{21R^6}{64} \right), \quad (2.70)$$

ainsi que le gradient « fantôme » \widehat{G} , simple somme des contributions fantômes de tous les ordres supérieurs au faux EDM une fois G_{Grav} introduit dans l’expression :

$$\widehat{G} = \widehat{G}_3 + \widehat{G}_5 + \widehat{G}_7 + \dots \quad (2.71)$$

On appelle ces gradients les gradients « fantômes » car ils contribuent au faux EDM mais pas au gradient gravitationnel. Certaines combinaisons linéaires des modes de la paramétrisation harmonique décrite en annexe A vont donc générer des gradients de champ qui n’interviendront pas dans le décalage gravitationnel mais généreront un faux EDM. Une illustration de tels « modes

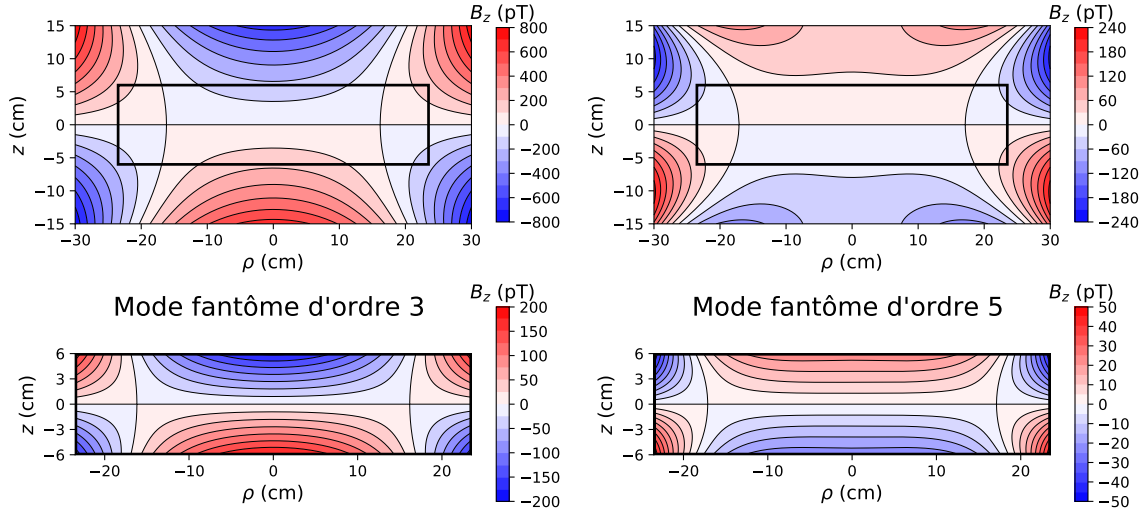


FIGURE 2.23 – Représentation de modes « fantômes » du champ magnétique pour des valeurs de gradients \hat{G}_3 et \hat{G}_5 typiques de la bobine B_0 en configuration up. A gauche, on trouve une représentation d'un mode d'ordre 3 et à droite d'ordre 5. Le rectangle noir représente les dimensions internes de la chambre de précession. Les deux graphiques en bas sont des agrandissements des graphiques en haut sur la chambre.

fantômes » avec des valeurs de gradients typiques de la bobine B_0 en configuration up sont représentés sur la figure 2.23 pour une coupe dans le plan (xOz) .

En employant les notations définies dans (2.68) à (2.70), lorsque l'on utilise l'expression

$$\mathcal{R}_0 = \left| \frac{Y_n}{Y_{\text{Hg}}} \right| \left(1 + \frac{G_{\text{Grav}} \langle z \rangle}{B_0} \right), \quad (2.72)$$

pour substituer G_{Grav} dans l'expression de l'EDM mesuré, celui-ci devient alors

$$d_n = d_n^{\text{vrai}} + B_0 \frac{\hbar Y_{\text{Hg}}^2 R^2}{8c^2 \langle z \rangle} \left(\mathcal{R}_0 - \left| \frac{Y_n}{Y_{\text{Hg}}} \right| \right) + \frac{\hbar |Y_n Y_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 \hat{G}. \quad (2.73)$$

Le gradient fantôme \hat{G} étant différent pour chaque séquence de mesure nEDM, lorsque l'on applique la méthode du point de croisement, chaque point se voit donc décalé verticalement d'une valeur égale au troisième terme de l'expression (2.73). Pour se retrouver dans le cas idéal de cette technique et pouvoir lire la valeur de d_n^{vrai} au point de de croisement, il est donc nécessaire de venir corriger l'EDM mesuré pour chaque séquence de ce troisième terme. Pour ce faire, le gradient \hat{G} doit être connu avec la meilleure précision possible. Il n'existe hélas pas de méthode de mesure en ligne qui permette d'accéder à sa valeur. Une technique de mesure hors-ligne du champ magnétique a donc été mise au point dans l'expérience afin de pouvoir mesurer ce gradient avec précision : la cartographie du champ magnétique, à laquelle sera consacré le chapitre suivant.

2.6 Conclusion

L'expérience nEDM de PSI, après avoir récupéré le spectromètre de l'expérience de l'ILL en 2009, a pu accumuler une sensibilité statistique $\sigma_{d_n} = 1.1 \times 10^{-26} e \text{ cm}$ en deux ans d'acquisition de données en 2015 et 2016. La mesure de l'EDM dans cette expérience se fait à travers la mesure de la fréquence de précession de neutrons ultra-froids dans une chambre de stockage en utilisant la procédure de Ramsey. Lors de chaque cycle de mesure, plusieurs milliers d'UCN sont injectés

dans la chambre, précessent librement pendant 180 s, puis sont comptabilisés en fonction de leur état de spin. 54 068 cycles répartis en 99 séquences de mesures ont été accumulés pendant la prise de données.

Pour mesurer l'EDM du neutron, en particulier dans le cadre de l'expérience nEDM de PSI, l'uniformité du champ magnétique joue un rôle central. Dans ce contexte, au cours de ce chapitre :

- Nous avons décrit le système de bobines associé au blindage générant le champ \vec{B}_0 et simulé par la méthode des éléments finis l'uniformité attendue. Le résultat de ces calculs pour les modes autorisés par les symétries est de $\delta B_0/B_0 \sim 10^{-3}$. Ceci constituera un point de comparaison avec le résultat de l'analyse des cartographies.
- Nous avons présenté le fonctionnement du système de double magnéto-métrie mercure et césium ainsi que les effets de décalage du rapport \mathcal{R} causés par les différences de comportement entre UCN et atomes de mercure.
- Nous avons exposé en détail les mécanismes de dépolarisation des neutrons, en particulier ceux induits par les inhomogénéités du champ magnétique. La méthode d'uniformisation en ligne utilisant les magnétomètres césium développée dans la thèse d'Elise Wursten a permis d'optimiser la polarisation ($\bar{\alpha} = 0.76$) et par conséquent la précision statistique de la mesure. La compréhension précise des mécanismes de dépolarisation est récente et est exposée dans l'article ABEL et collab. [2019] qui inclut certains résultats obtenus pendant cette thèse. L'étude que nous avons présentée ici est une version étendue de celle faite dans cet article. Nous avons en particulier considéré la dépolarisation intrinsèque des UCN induites par différents modes du champ magnétique. A l'aide de simulations MC des trajectoires des neutrons, nous avons montré qu'il est possible d'accéder à la vitesse des neutrons et à la probabilité de réflexion diffuse dans la chambre de précession. L'exploration de ce chemin pourra faire l'objet d'un travail plus approfondi au sein de la collaboration nEDM dans les années à venir.
- L'uniformité du champ magnétique ne joue pas seulement un rôle dans l'amélioration de la sensibilité statistique. Elle est également d'une importance cruciale pour le contrôle des effets systématiques, en particulier le faux EDM induit par le mercure. Nous avons présenté la stratégie de correction de cet effet. Elle consiste à exploiter le décalage gravitationnel du rapport des fréquences neutrons et mercure pour corriger la contribution du gradient « gravitationnel » du faux EDM. Celle des composantes « fantômes » d'ordre supérieur repose quant à elle sur une mesure hors-ligne de ces composantes, la cartographie du champ.

2.7 Références

- ABEL, C. et collab. 2019, «Magnetic-field uniformity in neutron electric-dipole-moment experiments», *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 042 112. [51](#), [68](#), [89](#)
- ABEL, C. et collab. 2020a, «Measurement of the permanent electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, p. 081 803. [42](#), [70](#), [80](#), [81](#)
- ABEL, C. et collab. 2020b, «Optically Pumped Cs Magnetometers Enabling a High-Sensitivity Search for the Neutron Electric Dipole Moment», To be published. [65](#), [67](#)
- AFACH, S. et collab. 2014, «Dynamic stabilization of the magnetic field surrounding the neutron electric dipole moment spectrometer at the Paul Scherrer Institute», *Journal of Applied Physics*, vol. 116, n° 8, p. 084 510. [51](#)

- AFACH, S. et collab. 2015a, «A device for simultaneous spin analysis of ultracold neutrons», *The European Physical Journal A*, vol. 51, n° 143. 45, 46
- AFACH, S. et collab. 2015b, «Gravitational depolarization of ultracold neutrons : Comparison with data», *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 052 008. 68, 71
- AFACH, S. et collab. 2015c, «Observation of Gravitationally Induced Vertical Striation of Polarized Ultracold Neutrons by Spin-Echo Spectroscopy», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, p. 162 502. 68, 72
- ALTAREV, I., F. ATCHISON, M. DAUM, A. FREI, E. GUTSMIEDL, G. HAMPEL, F. J. HARTMANN, W. HEIL, A. KNECHT, J. V. KRATZ, T. LAUER, M. MEIER, S. PAUL, Y. SOBOLEV et N. WIEHL. 2008, «Direct experimental verification of neutron acceleration by the material optical potential of solid $^2\text{H}_2$ », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 014 801. 43
- AYRES, N. 2018, *Data and Systematic Error Analysis for the Neutron Electric Dipole Moment Experiment at the Paul Scherrer Institute and Search for Axionlike Dark Matter*, thèse de doctorat, *Sussex University*. 42, 44
- BAKER, C. A., Y. CHIBANE, M. CHOUDER, P. GELTENBORT, K. GREEN, P. G. HARRIS, B. R. HECKEL, P. IAYDJIEV, S. N. IVANOV, I. KILVINGTON, S. K. LAMOREAUX, D. J. MAY, J. M. PENDLEBURY, J. D. RICHARDSON, D. B. SHIERS, K. F. SMITH et M. VAN DER GRINTEN. «Apparatus for measurement of the electric dipole moment of the neutron using a cohabiting atomic-mercury magnetometer», . 47, 50, 56
- BAKER, C. A. et collab. 2006, «Improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 131 801. 42, 84
- BAN, G., K. BODEK, T. LEFORT, O. NAVILIAT-CUNCIC, E. PIERRE, C. PLONKA et G. ROGEL. 2009, «UCN detection with ^6Li -doped glass scintillators», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 611, n° 2, p. 280 – 283. 45
- BAN, G. et collab. 2016, «Ultracold neutron detection with ^6Li -doped glass scintillators», *The European Physical Journal A*, vol. 52, n° 326. 45
- BECKER, H., G. BISON, B. BLAU, Z. CHOWDHURI, J. EIKENBERG, M. FERTL, K. KIRCH, B. LAUSS, G. PERRET, D. REGGIANI, D. RIES, P. SCHMIDT-WELLENBURG, V. TALANOV, M. WOHLMUTHER et G. ZSIGMOND. 2015, «Neutron production and thermal moderation at the PSI UCN source», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 777, p. 20 – 27. 42
- BISON, G., M. DAUM, K. KIRCH, B. LAUSS, D. RIES, P. SCHMIDT-WELLENBURG, G. ZSIGMOND, T. BRENNER, P. GELTENBORT, T. JENKE, O. ZIMMER, M. BECK, W. HEIL, J. KAHLBERG, J. KARCH, K. ROSS, K. EBERHARDT, C. GEPPERT, S. KARPUK, T. REICH, C. SIEMENSEN, Y. SOBOLEV et N. TRAUTMANN. 2017, «Comparison of ultracold neutron sources for fundamental physics measurements», *Phys. Rev. C*, vol. 95, p. 045 503. 43
- BODEK, K., M. DAUM, R. HENNECK, S. HEULE, M. KASPRZAK, K. KIRCH, A. KNECHT, M. KUZNIAK, B. LAUSS, M. MEIER, G. PETZOLDT, M. SCHNEIDER et G. ZSIGMOND. 2008, «Storage of ultracold neutrons in high resistivity, non-magnetic materials with high Fermi potential», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 597, p. 222 – 226. 45
- COILLOT, C., E. NATIVEL, M. ZANCA et C. GOZE-BAC. 2016, «The magnetic field homogeneity of coils by means of the space harmonics suppression of the current density distribution», *Journal of Sensors and Sensor Systems*, vol. 5, n° 2, p. 401–408. 47

- D., A. et collab. 2005, «A fast kicker magnet for the PSI 600MeV proton beam to the PSI ultra-cold neutron source», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 541, n° 3, p. 598 – 609. [42](#)
- DAUM, M., B. FRANKE, P. GELTENBORT, E. GUTSMIEDL, S. IVANOV, J. KARCH, M. KASPRZAK, K. KIRCH, A. KRAFT, T. LAUER, B. LAUSS, A. R. MÜLLER, S. PAUL, P. SCHMIDT-WELLENBURG, T. ZECHLAU et G. ZSIGMOND. 2014, «Transmission of ultra-cold neutrons through guides coated with materials of high optical potential», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 741, p. 71 – 77. [44](#)
- GREEN, K., P. G. HARRIS, P. IAYDJIEV, D. J. R. MAY, J. M. PENDLEBURY, K. F. SMITH, M. VAN DER GRINTEN, P. GELTENBORT et S. IVANOV. 1998, «Performance of an atomic mercury magnetometer in the neutron EDM experiment», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 404, n° 2, p. 381 – 393. [56](#)
- HARRIS, P. G., J. M. PENDLEBURY et N. E. DEVENISH. 2014, «Gravitationally enhanced depolarization of ultracold neutrons in magnetic-field gradients», *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 016011. [68](#)
- KERMAIDIC, Y. 2016, *Mesure du moment dipolaire électrique du neutron : analyse de données et développement autour du ^{199}Hg* , thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. [51](#), [57](#), [59](#)
- KOMPOSCH, S. V. 2017, *Realization of a high-performance laser-based mercury magnetometer for neutron EDM experiments*, thèse de doctorat, [ETH Zurich](#). [65](#)
- LAUSS, B. 2014, «Ultracold Neutron Production at the Second Spallation Target of the Paul Scherrer Institute», *Physics Procedia*, vol. 51, p. 98 – 101. ESS Science Symposium on Neutron Particle Physics at Long Pulse Spallation Sources, NPPatLPS 2013. [43](#)
- PENDLEBURY, J. M. et collab. 2015, «Revised experimental upper limit on the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 092003. [42](#), [84](#)
- PIGNOL, G., M. GUIGUE, A. PETUKHOV et R. GOLUB. 2015, «Frequency shifts and relaxation rates for spin-1/2 particles moving in electromagnetic fields», *Phys. Rev. A*, vol. 92, p. 053407. [70](#)
- PIGNOL, G. et S. ROCCIA. 2012, «Electric-dipole-moment searches : Reexamination of frequency shifts for particles in traps», *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 042105. [51](#)
- ROCCIA, S. 2009, *The mercury co-magnetometer for the neutron electric dipole moment experiment : Optimization and application to test the Lorentz invariance*, thèse de doctorat, [Université Joseph-Fourier - Grenoble I](#). [65](#)
- SEREBROV, A. P., M. S. LASAKOV, A. K. FOMIN, P. GELTENBORT, A. N. MURASHKIN, I. A. KRASNOSHEKOVA, Y. P. RUDNEV et A. V. VASILIEV. 2005, «Superconducting UCN polarizer for a new EDM spectrometer», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 545, n° 1, p. 490 – 492. [44](#)
- SMITH, K. F., N. CRAMPIN, J. M. PENDLEBURY, D. J. RICHARDSON, D. SHIERS, K. GREEN, A. I. KILVINGTON, J. MOIR, H. B. PROSPER, D. THOMPSON, N. F. RAMSEY, B. R. HECKEL, S. K. LAMOREAUX, P. AGERON, W. MAMPE et A. STEYERL. 1990, «A search for the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Lett. B*, vol. 234, n° 1, p. 191 – 196. [56](#)
- WOHLMUTHER, M. et G. HEIDENREICH. 2006, «The spallation target of the ultra-cold neutron source UCN at PSI», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, vol. 564, n° 1, p. 51 – 56. [42](#)
- WURSTEN, E. 2020, *A new precise measurement of the neutron electric dipole moment*, thèse de doctorat, University of Leuven. Thèse à venir. [65](#), [67](#)

Chapitre 3

Cartographie du champ magnétique

« *"I think we've outgrown full-time education. [...] Time to test our talents in the real world, d'you reckon?" asked Fred.*
"Definitely," said George. »

Fred and George Weasley in *Harry Potter and the Order of the Phoenix* by Joanne K. Rowling

Sommaire

3.1 Méthode de cartographie	94
3.1.1 Le mappeur	94
3.1.2 Étalonnage du détecteur	98
3.1.3 Les campagnes de cartographie	101
3.2 Analyse d'une carte de champ	104
3.2.1 Analyse cercle par cercle	105
3.2.2 Ajustement par les modes harmoniques du champ	107
3.2.3 Combinaison des axes d'analyse	110
3.3 Analyse globale	111
3.3.1 Analyse des cartes de B_0 : reproductibilité et répétabilité	112
3.3.2 Analyse des cartes de B_0 : comparaison avec les simulations	122
3.3.3 Analyse des cartes de bobines : linéarité et prédiction du champ	123
3.4 Conclusion	129
3.5 Références	131

Nous venons de le voir dans le chapitre précédent, afin de pouvoir corriger les ordres supérieurs de l'effet dû au faux EDM du mercure, il est nécessaire de connaître avec précision la valeur du gradient fantôme \widehat{G} pour chacune des 99 séquences de mesures nEDM. On rappelle ici l'expression de ce gradient en fonction des gradients généralisés $G_{l,m}$ de la paramétrisation polynomiale jusqu'à l'ordre $l = 7$,

$$\begin{aligned}\widehat{G} &= \widehat{G}_3 + \widehat{G}_5 + \widehat{G}_7 \\ &= G_{3,0} \left(\frac{H^2}{10} + \frac{R^2}{4} \right) + G_{5,0} \left(\frac{H^4}{28} - \frac{R^2 H^2}{24} - \frac{5R^4}{16} \right) + G_{7,0} \left(\frac{H^6}{96} - \frac{5R^2 H^4}{64} - \frac{7R^4 H^2}{64} + \frac{21R^6}{64} \right).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Les différents éléments de mesure du champ magnétique de l'expérience nEDM ne permettent toutefois pas d'avoir accès à ce gradient en temps réel. Il existe également une autre quantité dépendant des inhomogénéités du champ qui ne peut pas être mesurée en ligne, il s'agit de la moyenne des inhomogénéités transverses $\langle B_T^2 \rangle$, dont l'expression en fonction des gradients généralisés est donnée jusqu'à l'ordre 7 dans l'annexe B. Pour rappel, $\langle B_T^2 \rangle$ est responsable d'un effet systématique indirect apparaissant à cause de la nécessité d'utiliser la méthode du point de croisement.

Puisqu'elles ne peuvent pas être obtenues en ligne, ces deux quantités, \widehat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$, doivent être mesurées hors-ligne. Une technique de cartographie magnétique a donc été mise au point dans l'expérience afin de caractériser le champ magnétique produit par les bobines dans la chambre à vide nEDM. Dans ce chapitre, nous allons discuter de ces mesures. Dans un premier temps, nous parlerons de la méthode de cartographie, puis nous nous intéresserons à l'analyse des cartes de champ issues des campagnes de mesures. Enfin, nous montrerons comment extraire une prédiction des valeurs de \widehat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ pour chaque séquence nEDM. Avant d'entrer dans le vif du sujet, précisons que toutes les valeurs de distances et les positions qui seront données dans ce chapitre seront données en centimètres.

3.1 Méthode de cartographie

Des campagnes de cartographie du champ magnétique ont plusieurs fois été faites à PSI depuis l'installation de l'expérience nEDM en 2009 jusqu'à son démontage en 2017. Pour réaliser ces campagnes, le spectromètre nEDM (voir section 2.1.2) a été retiré de la chambre à vide pour laisser place au système de mesure des cartes de champ magnétique : le mappieur.

3.1.1 Le mappieur

3.1.1.1 Mécanique du mappieur

Le mappieur est un appareil de mesure du champ magnétique automatique construit spécifiquement pour l'expérience nEDM. Il s'installe dans la chambre à vide une fois celle-ci complètement vidée, comme on peut le voir sur la figure 3.1. Ce système permet de déplacer un magnétomètre, généralement de type fluxgate, dans la chambre à vide selon le système de coordonnées cylindriques. Le volume de mesure du mappieur est un cylindre d'environ 70 cm de diamètre et 35 cm de haut, centré sur le centre de l'ensemble chambre à vide/bobine B_0 /blindage magnétique, ce qui recouvre largement le volume de la chambre de précession ($H = 12$ cm et $R = 23.5$ cm). Trois moteurs permettent d'assurer les trois types de mouvement du mappieur, qui sont illustrés sur la figure 3.2 :

- déplacement vertical le long de l'axe z ,

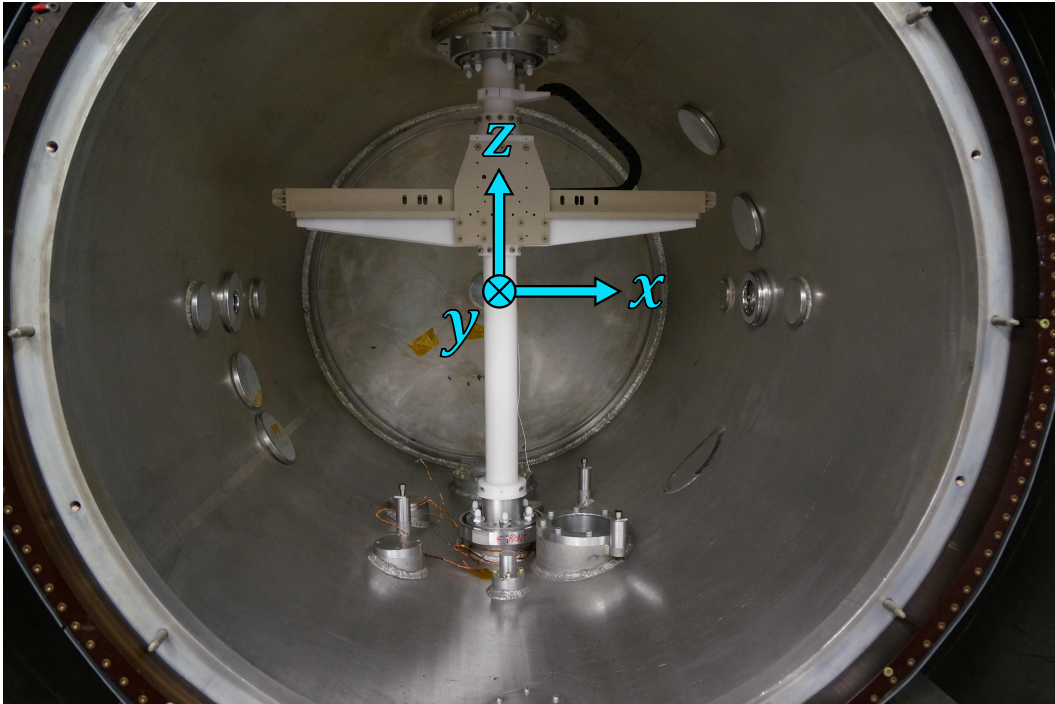


FIGURE 3.1 – Mappeur de champ magnétique installé dans la chambre à vide nEDM. Il se compose de deux bras montés sur un axe rotatif. Un chariot permettant de contenir le magnétomètre peut se déplacer le long du guide formé par les bras. La chambre de précession a complètement été retirée afin de pouvoir installer le mappeur. Sur le cercle extérieur représentant la paroi de la chambre à vide, on peut remarquer les connecteurs de la bobines B_0 . Les axes cartésiens de la chambre à vide et de la bobine sont représentés à titre indicatif.

- déplacement radial le long de l'axe tournant ρ ,
- déplacement azimutal le long de l'axe tournant ϕ .

Ces moteurs sont situés en-dehors du blindage magnétique, en-dessous de l'appareil expérimental, à la fois pour une raison de place, mais également pour éviter la présence de matériau magnétique à l'intérieur du blindage magnétique. En effet, toutes les parties qui composent le mappeur situées à l'intérieur du blindage sont faites de matériaux non-magnétiques (polyétheréthercétone (PEEK), polyoxyméthylène (POM), aluminium, céramique, verre, etc.). De plus, aucune surface conductrice n'est situé à proximité de la fluxgate afin d'éviter le bruit Johnson (ou bruit thermique) et les courants de Foucault que pourraient induire les pulses d'excitation de la fluxgate.

Le mouvement selon l'axe z est réalisé avec une colonne couplée à un transducteur linéaire, permettant de déplacer tout l'ensemble du mappeur verticalement depuis le bas. Ce transducteur a une résolution égale à $10 \mu\text{m}$. Le mouvement radial est assuré à l'aide d'un ensemble crémaillère plus pignon faisant la jonction entre le moteur radial et le chariot permettant de supporter le magnétomètre. Enfin le mouvement azimutal est simplement effectué au moyen d'une rotation de l'axe central du mappeur. Le chariot portant le magnétomètre se déplace sur le bras radial du mappeur au moyen de douze roues non-métalliques roulant sur des rails linéaires, afin d'éviter tout mouvement azimutal indésirable. Les positions radiale et azimutale (ρ et ϕ) sont lues par les potentiomètres à fil. Bien que ceux-ci aient théoriquement des résolutions infinies, en pratique, elles sont respectivement de l'ordre de $10 \mu\text{m}$ et 0.01° .

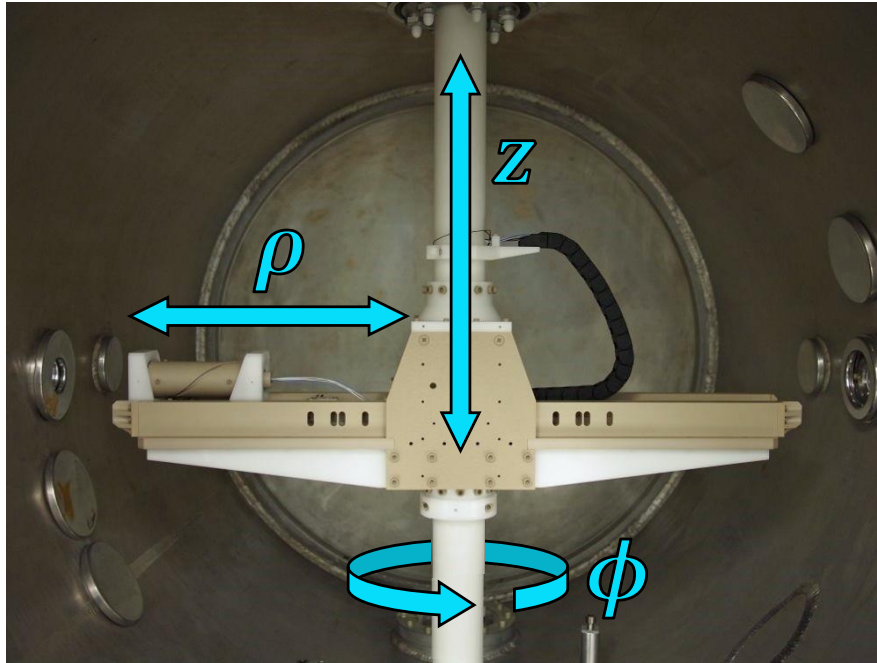


FIGURE 3.2 – Illustration des axes de mouvement du mappeur nEDM. Sur le bras gauche du système de déplacement, on peut voir le chariot de déplacement du magnétomètre associé au système permettant l'étalonnage de celui-ci.

3.1.1.2 Capteurs utilisés avec le mappeur

Trois types de détecteurs peuvent être installés sur le système mécanique du mappeur :

- un magnétomètre fluxgate trois axes à bas bruit,
- un magnétomètre césium (voir section 2.3.3),
- un inclinomètre à deux axes (KELAG KAS901-51A).

L'inclinomètre a été utilisé pour caractériser les mouvements mécaniques du mappeur au début de chaque campagne de mesure. Étant légèrement magnétique, il est seulement utilisé dans ce but et est retiré lors des mesures de champ magnétique. Lors de la campagne la plus récente, des cartes de champ ont été réalisées avec un magnétomètre césium mesurant le champ scalaire. L'analyse de ces cartes n'a toutefois pas abouti à des résultats concluants du fait de l'instabilité de fonctionnement du magnétomètre sur le temps d'acquisition d'une carte (plusieurs heures) et de l'inexactitude du champ mesuré. Nous n'en parlerons donc pas plus dans cette thèse, et nous concentrerons sur l'analyse des cartes mesurées avec le magnétomètre fluxgate, que l'on désignera par la suite simplement sous le terme « la fluxgate ». Le principe de fonctionnement d'un tel magnétomètre est expliqué dans la section suivante.

La fluxgate du mappeur est un modèle FL3-2 de Sensys fabriqué spécifiquement pour ce système. Il s'agit d'un modèle trois axes, construits à partir de trois capteurs indépendants montés dans un boîtier les uns à côté des autres avec 2 cm de distance entre chacun. Les caractéristiques de cette fluxgate sont listées dans le tableau 3.1. On rappelle que la *thermohouse* contenant l'expérience a une température régulée par un système d'air conditionné permettant de maintenir les variations de température inférieures à 0.1 K. La température n'est donc pas une réelle source de bruit dans le cas de nos mesures de champ.

Il existe différents types de magnétomètres fluxgate. Le principe de base de fonctionnement reste toutefois le même pour chacun d'entre eux. Une fluxgate consiste en un ensemble de trois

TABLEAU 3.1 – Propriétés de la fluxgate du mappeur (Sensys FL3-2)

Propriété	Valeur
Plage de mesure	$\pm 2 \mu\text{T}$
Orthogonalité	$< 0.5^\circ$
Dérive du zéro	$< 0.1 \text{ nT/K}$
Coefficient d'échelle de température	+20 ppm/K, typiquement
Bruit	$< 20 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$
Sorties analogiques	5.0 V/ μT

éléments permettant de convertir un champ magnétique en une tension électrique KUANG [2012] :

- un noyau en matériau ferromagnétique avec une très grande perméabilité magnétique (généralement une petite barre de mu-métal),
- une bobine d'excitation enroulée autour du noyau et alimentée par un courant alternatif,
- une bobine de lecture enroulée autour du noyau afin de mesurer le flux magnétique dans celui-ci.

La bobine d'excitation génère un champ qui permet de maintenir le noyau ferromagnétique dans un cycle de saturation/insaturation en le magnétisant alternativement dans une direction puis l'autre et ainsi de suite. Les fréquences d'excitation des fluxgates sont typiquement de l'ordre de la dizaine de kHz. Lorsque le noyau est non saturé, il garde une perméabilité très grande. Mais lorsqu'il est saturé, sa perméabilité devient beaucoup plus faible. Le champ alternatif ainsi généré induit à son tour un courant alternatif dans la bobine de lecture. Lorsque la fluxgate est dans un environnement magnétique neutre, les courants d'excitation et de lecture correspondent. En revanche, en présence d'un champ magnétique externe aligné le long de l'axe d'excitation du noyau, celui-ci se superpose au champ d'excitation et le processus de saturation se retrouve altéré. Le barreau ferromagnétique est plus facilement magnétisé dans le sens du champ externe que dans le sens inverse. Le flux magnétique dans le noyau va en être modifié et le courant induit dans la bobine de lecture se décale par rapport au courant d'excitation. Le sens et l'amplitude de ce décalage sont directement reliés au sens et à l'amplitude du champ externe. En intégrant le courant de sortie, on obtient une tension analogique proportionnelle au champ magnétique. On peut voir que c'est le cas de la fluxgate utilisée dans nEDM (voir tableau 3.1). Une fluxgate trois axes comme celle utilisée dans l'expérience est simplement l'association de trois des capteurs décrits ci-dessus selon trois axes orthogonaux afin d'obtenir une mesure vectorielle du champ magnétique.

Les fluxgates sont des magnétomètres souvent utilisés pour des mesures précises à basse fréquence lorsqu'il est nécessaire de mesurer le champ à température ambiante. Il s'agit de détecteurs de petites tailles dont le prix est accessible, et qui requièrent un très faible apport en énergie pour fonctionner, ce qui les rend idéaux dans de nombreuses applications. Il est possible d'utiliser une fluxgate pour mesurer des champs sur une plage allant du dixième de nT au mT, pour des champs statiques ou à des fréquences allant jusqu'à quelques kHz, ce qui en fait des détecteurs très polyvalents. Il s'agit toutefois de détecteurs très sensibles dont la performance peut être influencée par de multiples facteurs, tels que la forme du noyau ferromagnétique, le nombre d'enroulements des bobines d'excitation et de lecture, les variations de température, l'électronique associée à l'excitation et la lecture, etc. De plus, elles sont sujettes à des offsets et il est donc nécessaire de les étalonner en inversant le sens de mesure des capteurs pour déduire la valeur de l'offset.

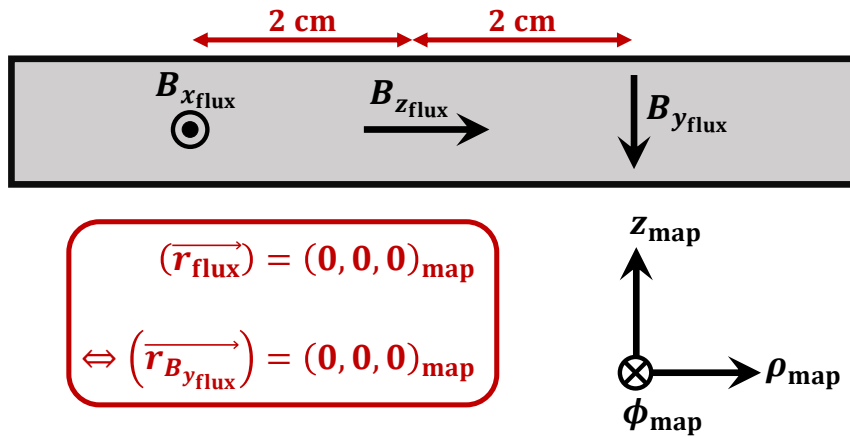


FIGURE 3.3 – Correspondance entre les axes de mesures de la fluxgate et le système de coordonnées cylindriques du mappieur. On considère que la fluxgate est à la position $(0, 0, 0)_{\text{map}}$ lorsque le capteur y de celle-ci (permettant de mesurer la composante verticale du champ) est à cette position.

Ce faisant, on obtient deux mesures de champ qui devraient être opposées en cas d'offset nul. En additionnant ces deux mesures, on annule la contribution du champ existant pour ne conserver que celle de l'offset.

Pour réaliser ces étalonnages avec le mappieur nEDM, une rainure hélicoïdale est creusée dans le contenant de la fluxgate. En déplaçant pneumatiquement un doigt dans cette rainure, le boîtier de la fluxgate effectue une rotation sur lui-même de π autour de l'axe ρ . Cette rainure est visible sur la figure 3.2. Les offsets de la fluxgate et le processus d'analyse des cartes d'étalonnage sera discuté dans la section suivante.

3.1.2 Étalonnage du détecteur

Les trois capteurs de la fluxgate sont décalés de trois offsets, indépendants les uns des autres, de l'ordre de quelques nT chacun. Avant chaque nouvelle utilisation de celle-ci, il est donc nécessaire d'effectuer une carte d'étalonnage.

3.1.2.1 Carte d'étalonnage

Pour réaliser une telle carte, le système mécanique du mappieur positionne la fluxgate au centre du système de coordonnées cylindriques du mappieur $(0, 0, 0)_{\text{map}}$, ce qui correspond à la position $(0, 0, -2)_{\text{ch}}$ dans le système de coordonnées centré sur la chambre de précession. Il est nécessaire ici de faire une parenthèse pour établir les différents noms des axes et les différents systèmes de coordonnées utilisés afin d'éviter toute confusion future. La figure 3.3 illustre la correspondance entre les axes de mesure des capteurs et les axes du système de coordonnées du mappieur. L'axe du boîtier de la fluxgate correspond au bras radial du mappieur et les capteurs selon les directions x , y et z de la fluxgate permettent respectivement d'avoir accès aux composantes B_{0_ϕ} , B_{0_z} et B_{0_ρ} du champ \vec{B}_0 . Quant au système de la chambre de précession, nous avons déjà dit qu'il s'agit du même que celui du mappieur, décalé verticalement de 2 cm vers le haut. Par la suite, on utilisera très peu les noms des axes des capteurs de la fluxgate mais plutôt directement ceux du champ mesuré dans le système de coordonnées du mappieur ou celui de la chambre de précession en effectuant simplement le changement de signe approprié si nécessaire. Fermons donc ici la parenthèse sur les systèmes de coordonnées et reprenons la description du processus d'étalonnage des capteurs de la fluxgate.

Une fois celle-ci à la position $(0,0,0)_{\text{map}}$, elle effectue une rotation autour de l'axe z_{map} en enregistrant une mesure du champ magnétique tous les 10° , soit 36 mesures en tout. On répète ensuite l'opération de rotation en plaçant successivement les deux autres capteurs à l'origine du mappieur, soit aux positions $(2,0,0)_{\text{map}}$ et $(4,0,0)_{\text{map}}$. Une fois ces trois cercles de mesures effectués, on pourrait théoriquement déjà extraire les offsets des sondes transverse, O_ρ et O_ϕ . En effet, étant donné que l'on effectue un « tour » complet de mesures pour ces deux directions, la moyenne des mesures devrait nous permettre d'accéder directement à l'offset. Deux problèmes se posent néanmoins :

- Il n'est pas possible de calculer l'offset de la sonde verticale avec seulement ces mesures.
- En cas de mauvaise position d'un capteur sur l'axe de rotation ou d'alignement imparfait entre les axes de la fluxgate avec ceux du mappieur, la mesure des offsets O_ρ et O_ϕ que l'on obtiendrait serait faussée.

Pour remédier à ces deux points, on utilise le mécanisme permettant de retourner la fluxgate en la faisant pivoter de 180° autour de l'axe radial, avant de réitérer les rotations de 36 mesures pour chacun des capteurs. Les six cercles de mesures (de rayon nul) ainsi obtenus permettent d'extraire de façon fiable les valeurs des trois offsets, O_ρ , O_ϕ et O_z . Pour ce faire, chacun d'entre eux est ajusté avec une série de Fourier au premier ordre,

$$B_{0j}^i = A_j^i + B_j^i \cos(\phi) + C_j^i \sin(\phi), \quad (3.2)$$

où i indique l'orientation de la fluxgate (1 ou 2) et j la coordonnée de la composante du champ mesuré. L'offset pour une direction est ensuite calculé simplement en moyennant les valeurs du paramètres constant A_j^i pour les deux orientations de la fluxgate,

$$O_j = \frac{A_j^1 + A_j^2}{2}. \quad (3.3)$$

Un exemple des résultats d'une carte d'étalonnage est visible sur la figure 3.4. On peut voir pour les composantes radiales et azimutales que la moyenne des cercles en orientation 1 et 2 diffère légèrement, ce qui peut s'expliquer par les désalignements évoqués ci-avant. En effet, si une petite portion de la composante verticale vient modifier le champ mesuré, elle sera de signe opposé en inversant le sens de la fluxgate. La solution d'utiliser la moyenne des termes constants dans les deux orientations permet donc d'annuler une telle contribution et ainsi d'extraire le véritable offset de la sonde.

3.1.2.2 Les dérives des offsets

En se référant au tableau 3.1, on peut voir que les offsets sont susceptibles de dériver de façon corrélée avec les variations de température (voir la dérive du zéro). Nous avons déjà dit que la température est maintenue très stable dans la chambre de l'expérience et les variations de température n'ont donc pas d'effet important sur les offsets de la fluxgate. Toutefois, ces offsets dérivent tous trois, de façon indépendante les uns des autres et des variations de température. On suppose que la cause de ces dérives est liée au fonctionnement intrinsèque de la mesure du champ par la fluxgate mais cela n'a pas été étudié au cours de cette thèse. Nous nous contenterons donc ici de décrire ces dérives et d'expliquer comment les prendre en compte lors de l'analyse d'une carte de champ.

Afin de les caractériser, des enregistrements du champ à l'origine, de quarante minutes, ont été réalisés régulièrement durant les campagnes de cartographie, ainsi que quelques uns de plusieurs heures. Un exemple d'un tel enregistrement est visible sur la figure 3.5. On peut voir qu'en

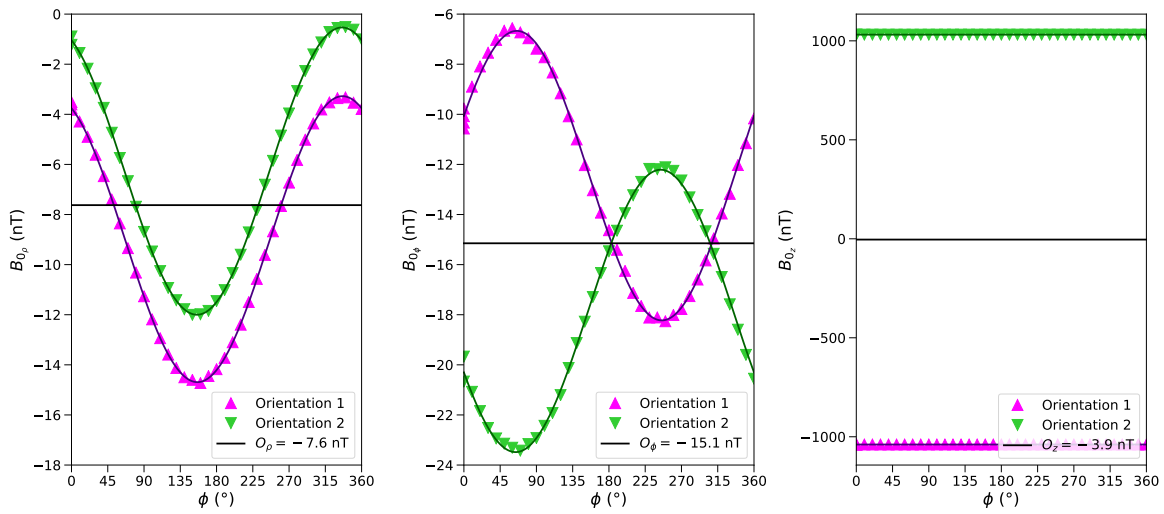


FIGURE 3.4 – Carte d'étalonnage dans une configuration de champ \vec{B}_0 up. Le champ est mesuré par la fluxgate à la position $(0,0,0)_{\text{map}}$ dans les deux orientations possibles de celle-ci. Les lignes continues colorées représentent les ajustements (3.2) et les lignes noires les valeurs d'offset déduites.

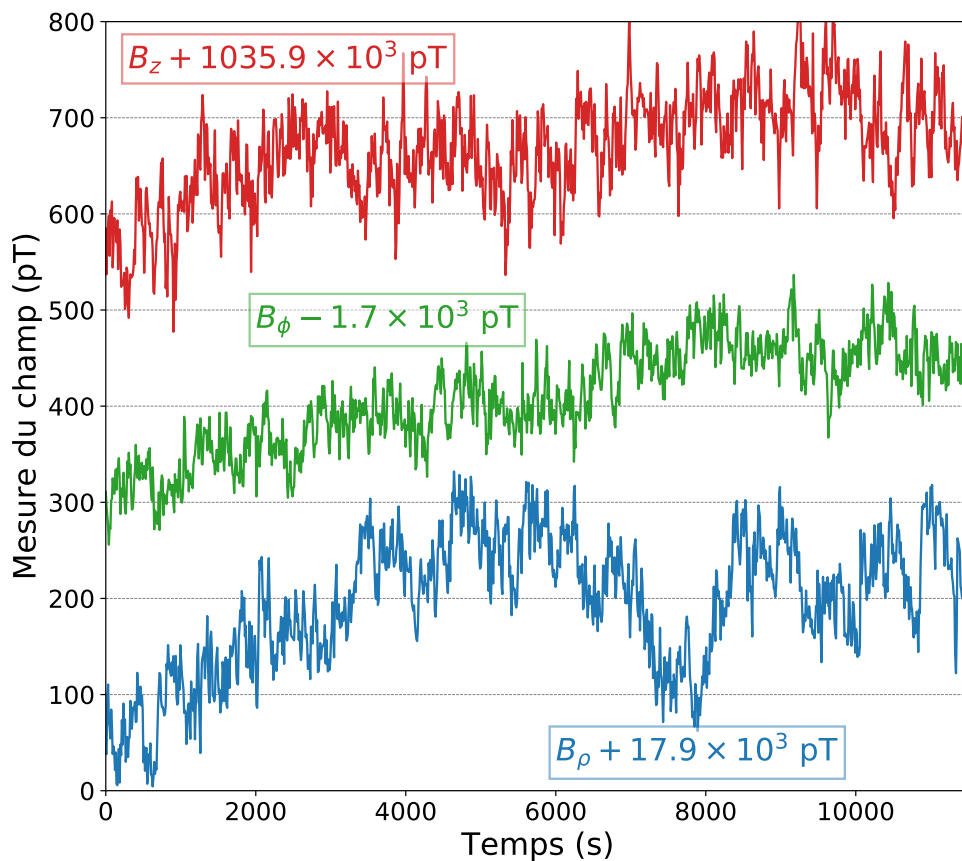


FIGURE 3.5 – Enregistrement des trois composantes de champ à l'origine $(0,0,0)_{\text{map}}$ toutes les dix secondes pendant trois heures. Sur cette plage de temps, les offsets dérivent de quelques centaines de pT.

quelques heures, la valeur mesurée par la fluxgate dérive de quelques centaines de pT. Si l'on se réfère à la figure 1.11b du chapitre 1, on voit sur celle-ci que pour une séquence de données d'environ 70 heures, le champ mesuré par le mercure n'a dérivé que d'environ 90 pT, et il s'agit d'une des séquences présentant l'une des dérives les plus importantes observées pendant la prise de données. On peut donc raisonnablement en conclure que les dérives « observées » par les capteurs de la fluxgate sont en réalité les dérives des offsets des détecteurs eux-même et non pas des dérives réelles du champ.

Sur des mesures courtes, ces dérives n'ont pas une grande importance, mais elles deviennent problématiques sur de longs temps. L'acquisition d'une carte de champ complète prenant quelques heures à réaliser, il est nécessaire de prendre en compte ces dérives. Pour ce faire, en pratique, on effectue au moins deux cartes d'étalonnage, une précédant la mesure et une après celle-ci et l'on extrapole une dérive linéaire pendant la durée d'acquisition afin de soustraire un offset linéaire en temps à la mesure du champ magnétique.

3.1.3 Les campagnes de cartographie

Depuis l'installation de l'expérience nEDM à PSI en 2009 jusqu'à son démontage en 2017, plusieurs campagnes de cartographies indépendantes ont été faites dans le but de caractériser l'uniformité du champ magnétique. Nous nous intéresserons ici au trois dernières campagnes, qui ont été réalisées avec le mappeur et la fluxgate décrits précédemment. Ces trois campagnes ont pris place respectivement en 2013 et 2014, avant les deux années de prise de données nEDM, et en 2017, après celles-ci. La réalisation d'une campagne représente un temps relativement long, une campagne comprenant l'installation du mappeur dans la chambre à vide, la réalisation de multiples mesures de mise en route (telles que des mesures faites avec l'inclinomètre) et enfin l'acquisition des cartes de champ à proprement parler. Durant ces trois campagnes, environ trois cent cartes de champ ont été enregistrées. La durée d'acquisition d'une carte prend de 3 à 6 heures.

Les cartographies étant des mesures hors-ligne du champ, il faut pouvoir évaluer notre capacité à reproduire exactement le même champ que celui utilisé pour les séquences de mesure nEDM. Nous appellerons cette capacité la « reproductibilité du champ ». C'est l'une des sources d'erreur qui sera présente sur les valeurs de \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ que nous allons extraire. Le rôle des cartographies est donc non seulement d'obtenir une valeur de \hat{G} et de $\langle B_T^2 \rangle$ par séquence nEDM, mais également de quantifier précisément l'erreur sur ces quantités, en partie en évaluant la reproductibilité du champ. Le fait d'avoir réalisé des campagnes indépendantes est l'une des clés qui va nous permettre d'accéder à la reproductibilité.

Une carte est composée d'un ensemble de mesures vectorielles du champ magnétique pour 3 420 positions dans un volume cylindrique de 32 cm de haut sur 68 cm de diamètre, ce qui permet de mesurer le champ sur un volume plus large que la chambre de précession. Les dimensions de ces deux volumes sont illustrées sur la figure 3.6. Pour réaliser une carte complète standard, le mappeur effectue un ensemble de cercles (hauteur z et rayon ρ fixes) en tournant autour de l'axe vertical du mappeur. Chaque cercle se compose de 36 mesures, espacées de $\delta\phi = 10^\circ$, plus deux mesures supplémentaires à $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 180^\circ$. À une hauteur donnée z sont réalisés 18 cercles, espacés de $\delta\rho = 2$ cm. Cet espacement correspond à la distance séparant les trois capteurs de la fluxgate, afin de pouvoir obtenir la mesure vectorielle complète du champ sur un cercle en réalisant trois cercles de mesures. Enfin, le mappeur réalise ce processus d'acquisition de 18 cercles pour 5 hauteurs différentes, espacées de $\delta z = 8$ cm. Une carte est donc en tout composée de 90 cercles, eux-mêmes composés de 38 points. Une représentation graphique de la composante de champ B_{0z} pour une carte du champ produit par la bobine B_0 en configuration up est visible sur la figure 3.7. Par défaut, le terme « carte » sera utilisé par la suite pour désigner les cartes correspondant au processus de mesure décrit ci-avant. Toute autre type de mesure sera précisé, comme les

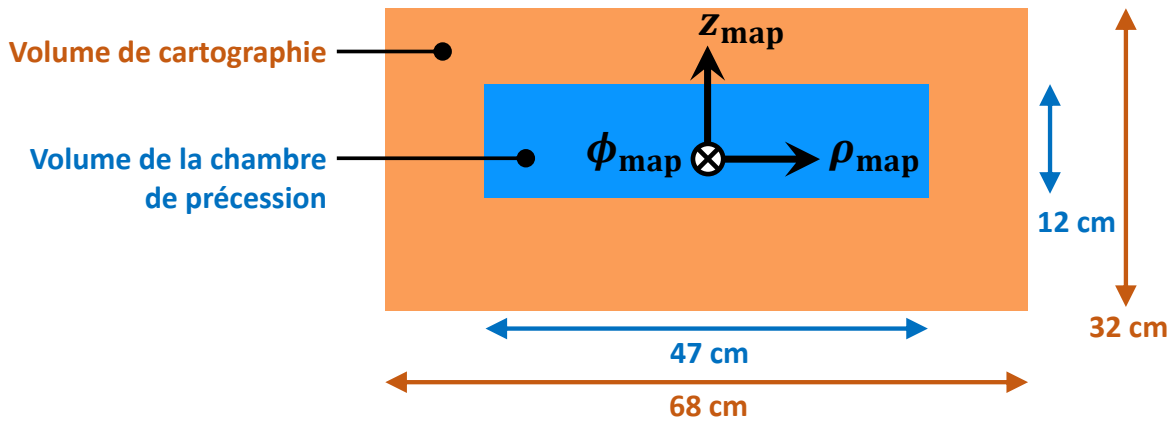


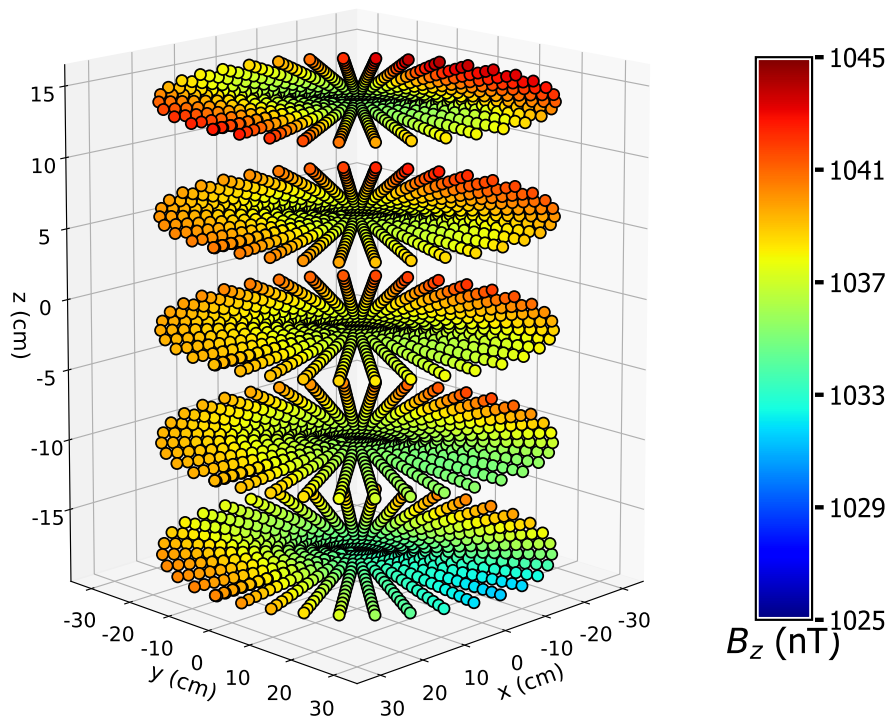
FIGURE 3.6 – Illustration à l'échelle, dans le plan (xOz) , de la taille de la chambre de précession positionné par rapport au volume de mesure couvert par une carte de champ.

procédures d'étalonnage qui seront systématiquement appelées cartes d'étalonnage.

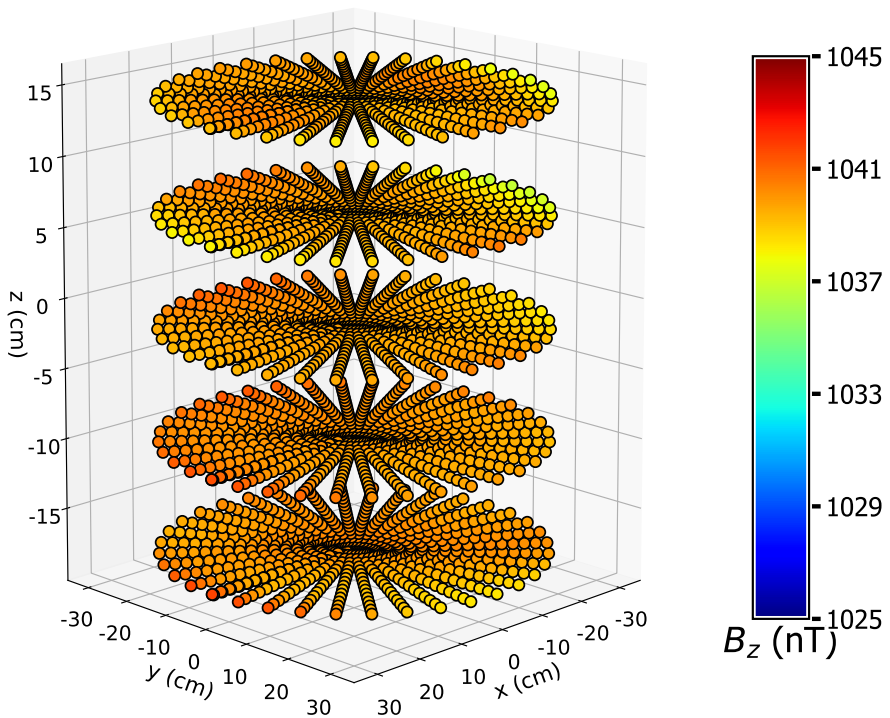
Pendant chaque campagne, différentes cartes de champs ont été prises :

- des cartes du champ \vec{B}_0 , pour lesquelles seule la bobine B_0 était alimentée avec son courant de ± 17 mA,
- des cartes du champ rémanent B_{rem} , pour lesquelles aucun courant ne circulait dans les différentes bobines de l'expérience,
- des cartes du champ produit par les trimcoils, avec seulement une trimcoil alimentée avec un courant de quelques milliers de μA ,
- des cartes du champ produit par les bobines de guidage, avec une seule bobine de guidage alimentée avec un courant de quelques milliers de μA ,
- des cartes de séquences, avec la bobine B_0 , les trimcoils et les bobines de guidage alimentées avec un ensemble de courants utilisés pour une séquence de mesure nEDM.

On rappelle qu'il est nécessaire d'étalonner le détecteur à chaque nouvelle mesure. Chacune de ces cartes a donc quasiment systématiquement été précédée et suivie d'une ou deux cartes d'étalonnage. De plus, cela a également déjà été évoqué, des enregistrements de 40 minutes au centre du système de coordonnées du mappeteur ont régulièrement été réalisés. D'autres cartes auxiliaires ont également été prises pendant ces campagnes de cartographies, mais nous n'en parlerons pas plus en détail car elles ne sont pas utiles à la réalisation de notre objectif, extraire les valeurs de \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ pour toutes les séquences nEDM.



(a) Carte de champ de la bobine B_0 en configuration up.



(b) Carte de champ d'une configuration nEDM.

FIGURE 3.7 – Valeur de la composante B_{0z} du champ magnétique pour une carte du champ produit par la bobine B_0 (a) et une carte du champ utilisé pour l'une des séquences de données nEDM (b). La même échelle est utilisée pour permettre une comparaison de l'uniformité dans les deux cas.

3.2 Analyse d'une carte de champ

Nous allons à présent nous pencher sur la méthode que nous avons développée pour analyser les cartes de champ magnétique réalisées avec le mappeur nEDM. L'analyse globale de toutes les cartes sera discutée dans la section 3.3 et nous allons nous intéresser ici à la procédure d'analyse d'une unique carte de champ.

L'une des potentielles sources d'erreur sur les gradients extraits des cartes serait l'inexactitude du champ mesuré par la fluxgate. On ne parle pas ici d'imprécision des capteurs de la fluxgate en eux-mêmes, mais de possibles imperfections du mappeur, telles qu'un léger décalage de sa position zéro, une orthogonalité imparfaite entre les trois capteurs de la fluxgate, ou encore une imperfection de l'inclinaison du mappeur (qui pourrait être décrite par l'ensemble de trois angles, un de roulis, un de tangage et un de lacet). Ces possibles défauts constituent les effets systématiques de la cartographie et peuvent être intégrés aux erreurs finales de l'analyse, ou ils peuvent être rendus négligeables en utilisant une méthode d'analyse adaptée. Ignorons ici les premiers exemples de ces imperfections, qui seront traités comme des erreurs systématiques, et concentrons-nous sur le dernier. Si les axes de mesure de la fluxgate ne sont pas alignés avec les axes du système de coordonnées de la bobine, les composantes mesurées du champ vont en réalité être une combinaison linéaire des composantes réelles. Considérons ici uniquement deux composantes, une verticale et une horizontale, avec les axes du détecteur décalés d'un très petit angle α par rapport aux axes du système de coordonnées. Le champ de l'expérience étant vertical et l'inhomogénéité relative étant de l'ordre du millier, la contribution de la composante horizontale à la composante verticale mesurée peut être négligée, et les composantes mesurées du champ s'écrivent

$$\begin{cases} B_v^{\text{mes}} = B_v^{\text{vrai}} \cos \alpha, \\ B_h^{\text{mes}} = B_h^{\text{vrai}} \cos \alpha + B_v^{\text{vrai}} \sin \alpha, \end{cases} \quad (3.4)$$

où mes et vrai désignent respectivement les composantes mesurées et réelles et v et h signifient verticale et horizontale. L'angle α étant très petit, on peut utiliser le développement limité en zéro des fonctions sinus et cosinus (3.4) devient

$$\begin{cases} B_v^{\text{mes}} = B_v^{\text{vrai}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^3), \\ B_h^{\text{mes}} = B_h^{\text{vrai}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + B_v^{\text{vrai}} \alpha + \mathcal{O}(\alpha^3), \end{cases} \quad (3.5)$$

On peut voir que la composante mesurée horizontale est plus fortement impactée par la présence d'un tel désalignement des axes. L'impact du terme de champ vertical constant $G_{0,0}$ est particulièrement problématique car il n'existe pas de tel terme constant pour les composantes B_{0_p} et B_{0_ϕ} . Pour cette raison, l'extraction des gradients $G_{l,0}$ est faite en utilisant uniquement la composante mesurée verticale du champ. Les autres gradients généralisés sont en revanche extraits en combinant les résultats d'analyse des trois composantes mesurées du champ. La technique d'analyse des trois composantes est décrite ci-après dans les sections 3.2.1 et 3.2.2 pour le cas de la composante B_{0_z} et permet de réduire l'impact des désalignements. On rappelle ici que l'analyse des cartes se fait dans le système de coordonnées centré sur le centre de la chambre de précession car nous avons besoin des valeurs de \hat{G} et $\langle B_1^2 \rangle$ dans ce repère. Tous les graphiques liés à l'analyse qui seront présentés dans les sections suivantes seront donc tracés en fonctions des coordonnées dans ce système.

3.2.1 Analyse cercle par cercle

Une carte de champ peut être vue comme un ensemble de 90 cercles comprenant chacun 38 points de mesures du champ magnétique (voir figure 3.7). Nous allons ici nous concentrer sur l'analyse de la composante B_{0_z} . La première étape de l'analyse d'une carte consiste à ajuster le champ par cercle avec une série de Fourier. En effet, sur un cercle, le rayon (soit la coordonnée ρ) et la hauteur (soit la coordonnée z) sont fixes et le champ ne dépend donc que de la coordonnée ϕ . On réalise donc un ajustement par la méthode des moindres carrés du champ comme suit, avec les coefficients de Fourier $a_{\pm m,z}$ comme paramètres :

$$B_{0_z} = \sum_{m \geq 0} [a_{m,z} \cos(m\phi) + a_{-m,z} \sin(m\phi)]. \quad (3.6)$$

Les trente-huit points qui composent le cercle sont traités équitablement dans l'ajustement, avec une erreur $\Delta B_{0_z} = 1$, étant donné que nous ne disposons pas d'estimation fiable de leur erreur et qu'il n'existe *a priori* aucune raison de les traiter différemment. Pour chaque cercle c , l'algorithme d'ajustement minimise donc la somme

$$\chi_{z,c}^2 = \sum_{\phi_i} \left(B_{0_z} - \sum_{m \geq 0} [a_{m,z} \cos(m\phi_i) + a_{-m,z} \sin(m\phi_i)] \right)^2, \quad (3.7)$$

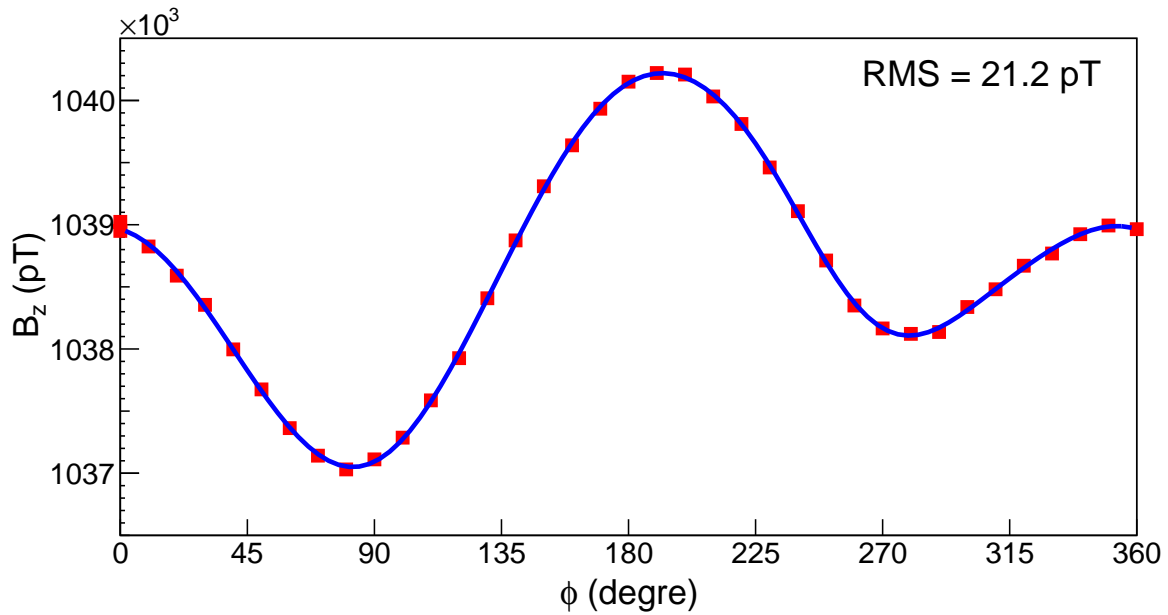
et l'on obtient par cercle, soit par doublet de valeur (ρ_c, z_c) un jeu de coefficients de Fourier $a_{m,z,c}$ et leurs incertitudes associées, issues de la matrice de covariance des paramètres de l'ajustement. Afin de prendre en compte la « qualité » de chaque cercle pour la suite de l'analyse et d'avoir une propagation d'erreurs réalistes, on normalise ces incertitudes avec le χ^2 comme suit,

$$\Delta a_{m,z,c}^{\text{nouveau}} = \Delta a_{m,z,c}^{\text{ajustement}} \sqrt{\frac{\chi_{z,c}^2}{\text{NDF}}}, \quad (3.8)$$

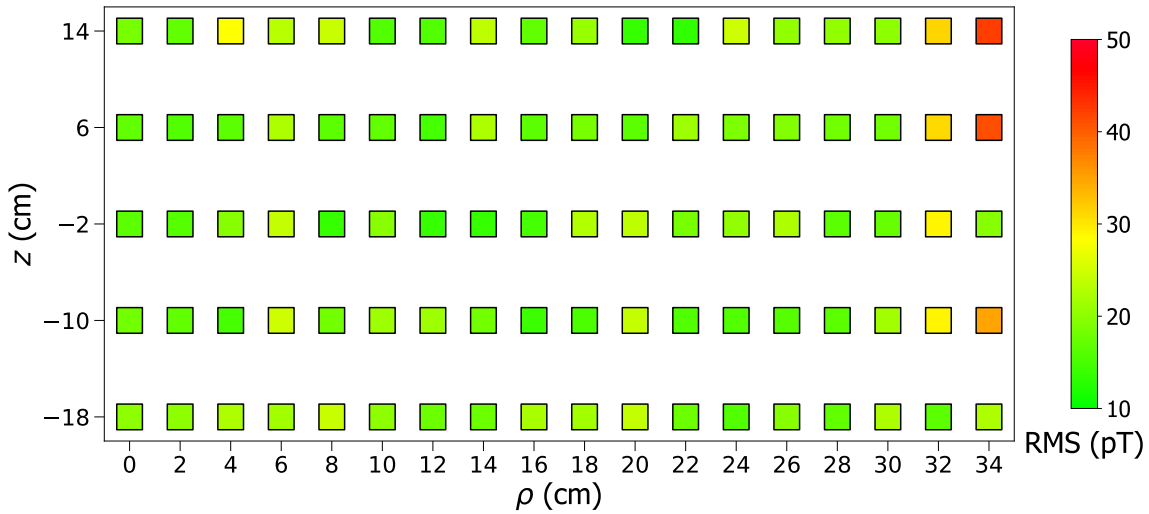
où NDF est le nombre de degré de liberté de l'ajustement par la série de Fourier, soit le nombre de points moins le nombre de paramètres, $\text{NDF} = 38 - (2m_{\text{max}} + 1)$, m_{max} étant l'ordre maximum de la série utilisée. Un exemple de l'ajustement des cercles d'une carte est visible sur la figure 3.8. Il s'agit d'une carte du champ produit par la bobine B_0 en configuration up, ajusté avec une série de Fourier jusqu'à l'ordre $m_{\text{max}} = 6$. Le calcul de la racine du résidu carré moyen permet de donner un critère de qualité pour les cercles, comme on peut le voir sur la figure 3.8b. La valeur moyenne de ces résidus est aux alentours de 20 pT, ce qui correspond à l'ordre de grandeur des variations de lecture de la fluxgate sur un temps similaire (~ 80 s). On peut voir que l'algorithme parvient généralement moins bien à ajuster les cercles extérieurs avec une série de Fourier. La mauvaise qualité de ces cercles peut en partie s'expliquer par l'augmentation de la probabilité de désalignements de la fluxgate pour des rayons élevés. Une autre cause possible est la troncature des ordres de Fourier $m \geq 7$. Grâce à la normalisation des erreurs, le poids statistique de ces cercles pour les étapes suivantes de l'analyse sera donc diminué par rapport aux autres.

L'ordre maximal de l'ajustement est le même pour toutes les cartes de champ analysées et a été choisi à $m_{\text{max}} = 6$ pour différentes raisons :

- L'amélioration des résidus de l'ajustement en passant de $m_{\text{max}} = 6$ à $m_{\text{max}} = 7$ n'est pas significatif.
- La contribution de l'ordre $m = 7$ au faux EDM, soit la contribution de \widehat{G}_7 à \widehat{G} est plus petite que la contribution principale à l'incertitude sur \widehat{G} issue des cartographies, dont nous discuterons dans la section 3.3.1.



(a) Ajustement de Fourier de B_{0z} , jusqu'à $m_{\max} = 6$, pour le cercle ($\rho = 22, z = 6$). La racine du résidu carré moyen de l'ajustement est de 21.2 pT



(b) Valeurs de la racine du résidu carré moyen par cercle en fonction du rayon ρ_c et de la hauteur z_c du cercle.

FIGURE 3.8 – Ajustement de la composante de champ B_{0z} avec une série de Fourier jusqu'à l'ordre $m_{\max} = 6$, pour une carte du champ produit par la bobine B_0 en configuration up. Sur (a) se trouvent les valeurs du champ mesuré et la courbe de l'ajustement pour le cercle de rayon $\rho = 22 \text{ cm}$ et de hauteur $z = 6 \text{ cm}$. Sur (b) se trouvent les valeurs de la racine du résidu carré moyen (RMS) pour chaque cercle de la carte.

- La contribution de l'ordre $m = 7$ à l'inhomogénéité transverse $\langle B_1^2 \rangle$ est complètement négligeable.
- L'augmentation de l'ordre maximal de l'ajustement fait augmenter de façon exponentielle le temps de calcul du programme d'analyse, pour cette étape de l'analyse comme pour les suivantes.

Une fois l'analyse cercle par cercle effectuée, la carte n'est donc plus vue comme un ensemble de 3 420 mesures vectorielles du champ dépendant des trois coordonnées ρ , ϕ et z , mais comme un ensemble de 90 jeux de coefficients de Fourier, pour chaque direction du champ, dépendant uniquement de ρ et z . L'étape suivante de l'analyse va donc être de relier ces coefficients aux gradients généralisés à travers le développement polynomial.

3.2.2 Ajustement par les modes harmoniques du champ

En coordonnées cylindriques, les polynômes harmoniques de la paramétrisation du champ décrite dans l'annexe A dépendent bien évidemment des trois coordonnées spatiales ρ , ϕ et z . Notons toutefois que le terme « polynôme » est né de la paramétrisation exprimée en coordonnées cartésiennes, pour lesquelles ce sont bien des polynômes d'ordre l en (x, y, z) qui décrivent le champ. En revanche, en utilisant le système de coordonnées cylindriques, plus adapté à notre géométrie, les fonctions $\Pi_{l,m}(\vec{r})$ qui nous servent à décomposer le champ sont en réalité le facteur d'un polynôme $\tilde{\Pi}_{l,m}(\rho, z)$ d'ordre l en (ρ, z) et d'une fonction trigonométrique de ϕ , comme on peut le voir avec l'exemple de la direction z :

$$\Pi_{z,l,m}(\vec{r}) = \begin{cases} \tilde{\Pi}_{z,l,m}(\rho, z) \times \cos(m\phi) & \text{pour } m \geq 0, \\ \tilde{\Pi}_{z,l,m}(\rho, z) \times \sin(m\phi) & \text{pour } m < 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

C'est cette généreuse propriété que nous exploitons pour pouvoir modéliser les coefficients de Fourier obtenus précédemment. En effet, ceux-ci ne dépendent que du couple (ρ, z) , la dépendance en ϕ du champ ayant été traitée avec la première étape de l'analyse. Ce sont donc les polynômes $\tilde{\Pi}_{z,l,m}(\rho, z)$ qui sont utilisés pour ajuster les coefficients de Fourier en fonction de la dépendance en ϕ des fonctions $\Pi_{z,l,m}(\vec{r})$ à partir desquels ils sont calculés. Cette dépendance est caractérisée par l'ordre m des polynômes et des coefficients de Fourier. Les coefficients $a_{\pm m, z}$ seront donc ajustés avec une combinaison linéaire des $\tilde{\Pi}_{z,l,\pm m}(\rho, z)$ pour m fixe et l variant. Le modèle permettant d'ajuster les coefficients de Fourier $a_{m,z,c}$ d'un cercle c peut donc s'écrire

$$a_{m,z,c} = \sum_{l=0}^{l_{\max}} G_{l,m} \tilde{\Pi}_{z,l,m}(\rho_c, z_c). \quad (3.10)$$

Il y a autant d'ajustements réalisés pendant la deuxième étape d'analyse que de coefficients de Fourier issus de la première étape pour un cercle donné, soit $(2m_{\max} + 1) = 13$. L'ordre maximal de ces ajustements l_{\max} est limité par l'ordre d'ajustement maximal de la première étape d'analyse, m_{\max} . En réalité, le choix de $l_{\max} = m_{\max} = 6$ a été fait en étudiant les résultats d'analyse globalement et les raisons derrière ce choix, exposées dans la section précédente, sont donc également valables pour le choix de l_{\max} .

Comme pour la première étape d'analyse, les ajustements se font par la méthode des moindres carrés. Pour un ordre m donné, la quantité à minimiser est la suivante, sommée sur les cercles c ,

$$\chi_{m,z}^2 = \sum_c \left(\frac{a_{m,z,c} - \sum_{l=0}^{l_{\max}} G_{l,m} \tilde{\Pi}_{z,l,m}(\rho_c, z_c)}{\Delta a_{m,z,c}} \right)^2. \quad (3.11)$$

Le modèle est ici une fonction linéaire des paramètres et la minimisation revient donc alors simplement à l'inversion d'un système linéaire. Prenons toutefois le temps de détailler ci-après cette procédure dans notre cas. En dérivant $\chi_{m,z}^2$ par rapport à chacun des paramètres d'ajustement $G_{l,m}$, on obtient le système suivant,

$$\begin{bmatrix} \sum_c \frac{\tilde{\Pi}_{0,m} a_{m,z,c}}{\Delta a_{m,z,c}^2} \\ \vdots \\ \sum_c \frac{\tilde{\Pi}_{l_{\max},m} a_{m,z,c}}{\Delta a_{m,z,c}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_c \frac{\tilde{\Pi}_{0,m}^2}{\Delta a_{m,z,c}^2} & \cdots & \sum_c \frac{\tilde{\Pi}_{0,m} \tilde{\Pi}_{l_{\max},m}}{\Delta a_{m,z,c}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_c \frac{\tilde{\Pi}_{0,m} \tilde{\Pi}_{l_{\max},m}}{\Delta a_{m,z,c}^2} & \cdots & \sum_c \frac{\tilde{\Pi}_{l_{\max},m}^2}{\Delta a_{m,z,c}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{0,m} \\ \vdots \\ G_{l_{\max},m} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

que l'on peut écrire plus simplement sous la forme

$$\overrightarrow{A_{m,z}} = M_{m,z} \overrightarrow{G_m}. \quad (3.13)$$

Pour extraire les estimateurs des gradients généralisés, soit les valeurs des paramètres d'ajustement, on inverse ce système,

$$\overrightarrow{G_m} = M_{m,z}^{-1} \overrightarrow{A_{m,z}}. \quad (3.14)$$

Les erreurs sur ces estimateurs, comprenant les erreurs propagées de la première étape d'analyse et les erreurs de l'ajustement de la seconde étape, sont extraites de la matrice de covariance des paramètres, $\Sigma_{m,z}$, définie comme suit,

$$\Sigma_m = M_m^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta G_{0,m}^2 & \cdots & r_{G_{0,m}, G_{l_{\max},m}} \Delta G_{0,m} \Delta G_{l_{\max},m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{G_{0,m}, G_{l_{\max},m}} \Delta G_{0,m} \Delta G_{l_{\max},m} & \cdots & \Delta G_{l_{\max},m}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

où $r_{G_{l,m}, G_{l',m}}$ est le coefficient de corrélation de $G_{l,m}$ et $G_{l',m}$. L'erreur sur le paramètre $G_{l,m}$ est donc obtenue en prenant l'élément diagonal ll de cette matrice,

$$\Delta G_{l,m} = \sqrt{(\Sigma_{m,z})_{ll}} = \sqrt{(M_{m,z}^{-1})_{ll}}. \quad (3.16)$$

On rappelle que la grandeur que l'on cherche à mesurer avec les cartographies de champ est le gradient fantôme \hat{G} , qui, dépend des gradients généralisés $G_{l \text{ impair}, 0}$ (voir éq. (3.1)). Les estimateurs de ces gradients étant issus du même ajustement, celui des coefficients de Fourier $a_{0,z}$, ils sont corrélés. Le calcul de l'incertitude sur l'estimateur de \hat{G} doit donc prendre en compte ces corrélations en appliquant une propagation d'erreurs comprenant les corrélations, comme suit,

$$\Delta \hat{G}^2 = \sum_l \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial G_{l,0}} \right)^2 \Delta G_{l,0}^2 + \sum_l \sum_{l' \neq l} \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial G_{l,0}} \frac{\partial \hat{G}}{\partial G_{l',0}} \right) r_{G_{l,0}, G_{l',0}} \Delta G_{l,0} \Delta G_{l',0}, \quad (3.17)$$

L'ordre maximal de l'ajustement étant $l_{\max} = m_{\max} = 6$, le \hat{G} extrait de l'analyse d'une carte ne dépend donc que des gradients $G_{3,0}$ et $G_{5,0}$ et l'expression (3.17) devient

$$\Delta \hat{G}^2 = \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial G_{3,0}} \right)^2 \Delta G_{3,0}^2 + \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial G_{5,0}} \right)^2 \Delta G_{5,0}^2 + 2 \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial G_{3,0}} \frac{\partial \hat{G}}{\partial G_{5,0}} \right) r_{G_{3,0}, G_{5,0}} \Delta G_{3,0} \Delta G_{5,0}, \quad (3.18)$$

soit, en développant,

$$\begin{aligned} \Delta \hat{G}^2 &= \left(\frac{H^2}{10} + \frac{R^2}{4} \right)^2 \Delta G_{3,0}^2 + \left(\frac{H^4}{28} - \frac{R^2 H^2}{24} - \frac{5R^4}{16} \right)^2 \Delta G_{5,0}^2 \\ &+ \left[\left(\frac{H^2}{10} + \frac{R^2}{4} \right) \left(\frac{H^4}{28} - \frac{R^2 H^2}{24} - \frac{5R^4}{16} \right) \right] r_{G_{3,0}, G_{5,0}} \Delta G_{3,0} \Delta G_{5,0}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

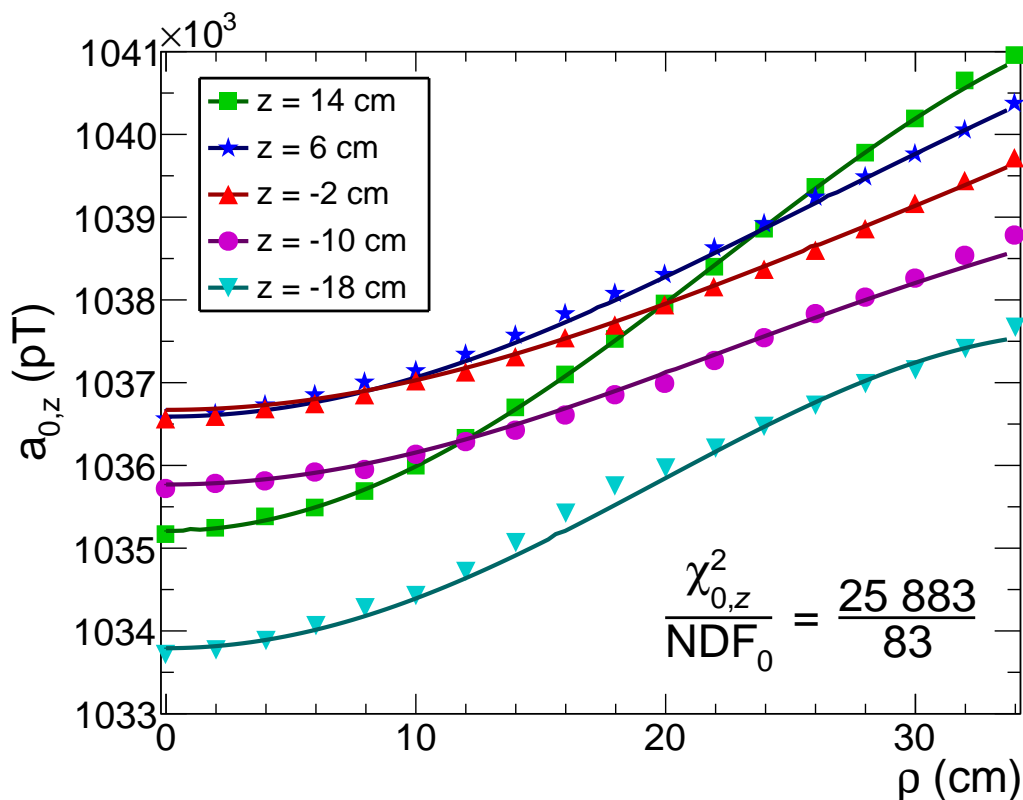


FIGURE 3.9 – Ajustement des coefficients de Fourier $a_{0,z}$ pour une carte du champ produit par la bobine B_0 en configuration up. Les différents symboles (et couleurs) représentent les différentes valeurs des hauteurs z des cercles, mais ces courbes représentent le même ajustement projeté sur le plan ($\rho O a_{0,z}$). Les barres d'erreur des points sont trop petites pour être visibles.

Nous avons vu avec les expressions (3.15) et (3.16) que les termes diagonaux de la matrice de covariance Σ_0 nous permettaient d'accéder directement à $\Delta G_{3,0}^2$ et $\Delta G_{5,0}^2$. Quant aux termes non diagonaux de cette même matrice, ils nous permettent d'avoir également accès au terme $r_{G_{3,0}, G_{5,0}} \Delta G_{3,0} \Delta G_{5,0}$.

Un exemple de l'ajustement avec les polynômes harmoniques des coefficients de Fourier $a_{0,z}$ pour une carte du champ produit par la bobine B_0 en configuration up est visible sur la figure 3.9. Malgré le fait de les avoir normalisées lors de la première étape de l'analyse, les erreurs sur les coefficients de Fourier sont largement sous-estimées, comme cela pourrait se voir si l'on agrandissait la figure 3.9. En conséquences, les valeurs des $\chi^2_{m,z}$ par degré de liberté sont donc bien plus larges que l'unité, particulièrement pour l'ordre $m = 0$. L'étude des enregistrements de 40 minutes faits par la fluxgate au centre du système de coordonnées nous a mené à la conclusion que cette sous-estimation des barres d'erreurs est due au fait qu'elles ne tiennent pas compte de la dérive des offsets de la fluxgate. En effet, comme cela a été dit dans la section 3.1.2, une extrapolation linéaire de ces dérives est faite avant l'analyse des cartes. Toutefois, on peut voir sur la figure 3.5 que ces dérives ne sont pas linéaires. A l'échelle de temps de mesure d'un cercle (80 s), ces dérives n'ont qu'un impact limité et les erreurs issues de la première étape de l'analyse ne reflètent donc pas leur effet. En revanche, lorsque l'on ajuste ensemble les coefficients de Fourier de chaque cercle, l'échelle de temps passe à plusieurs heures et l'impact de ces dérives devient visible, particulièrement dans le cas $m = 0$. Afin de tenir compte de la contribution de ces dérives aux incertitudes

sur les gradients extraits par l'analyse, on applique la même méthode utilisée lors de la première étape d'analyse en normalisant les erreurs avec le $\chi_{m,z}^2$:

$$\Delta G_{l,m}^{\text{nouveau}} = \Delta G_{l,m}^{\text{ajustement}} \sqrt{\frac{\chi_{m,z}^2}{\text{NDF}_m}}, \quad (3.20)$$

NDF_m étant le nombre de degré de liberté de l'ajustement de l'ordre m par les polynômes harmoniques. On notera que le même facteur multiplicatif est appliqué à l'incertitude sur le gradient fantôme \widehat{G} , celui-ci étant une combinaison linéaire de gradients généralisés $G_{l,m}$.

3.2.3 Combinaison des axes d'analyse

La procédure d'analyse décrite dans les deux sections précédentes s'applique pour chacune des composantes mesurées du champ, $B_{0\rho}$, $B_{0\phi}$ et B_{0z} . Voyons maintenant comment sont combinées ces informations. L'analyse selon l'axe z permet d'extraire 49 des 61 gradients généralisés permettant de décrire le champ en se limitant à $l_{\text{max}} = m_{\text{max}} = 6$. En effet, tous les gradients de type $G_{l,\pm(l+1)}$ ne contribuent pas à la composante verticale du champ. L'analyse des composantes radiales et azimutales donnent respectivement accès à 60 et 54 des gradients généralisés, le terme constant $G_{0,0}$ ne contribuant pas au champ horizontal et les gradients $G_{l,0}$ ne permettant pas de décrire la composante azimutale.

Comme nous l'avons déjà dit, les gradients de type $G_{l,0}$, qui comprennent les gradients $G_{3,0}$ et $G_{5,0}$ dont dépend \widehat{G} , sont uniquement extraits grâce à l'analyse de la composante verticale du champ B_{0z} afin de limiter les erreurs systématiques dues aux désalignements. En revanche, pour les autres gradients, lorsqu'ils peuvent être fournis par plusieurs directions d'analyse, celles-ci sont statistiquement combinées afin de réduire l'erreur sur ces gradients. Cette combinaison consiste en une simple moyenne pondérée pour chaque gradient, comme suit,

$$G_{l,m} = \frac{w_\rho G_{l,m,\rho} + w_\phi G_{l,m,\phi} + w_z G_{l,m,z}}{w_\rho + w_\phi + w_z}, \quad (3.21)$$

avec

$$w_i = \left(\frac{1}{\Delta G_{l,m,i}} \right)^2, \quad (3.22)$$

et

$$\Delta G_{l,m} = \sqrt{\frac{1}{w_\rho + w_\phi + w_z}}. \quad (3.23)$$

Une fois cette dernière étape réalisée, l'analyse de la carte de champ individuelle est complète et a permis l'extraction du gradient fantôme \widehat{G} et de son incertitude associée, ainsi que des 61 gradients généralisés jusqu'aux ordres $l_{\text{max}} = m_{\text{max}} = 6$, qui vont nous permettre de calculer $\langle B_T^2 \rangle$ grâce à son expression donnée dans l'annexe B. Avec notre méthode de propagation des erreurs, les incertitudes sur les gradients issus de l'analyse d'une carte tiennent donc théoriquement compte des erreurs d'ajustement et des erreurs dues au dérives des offsets de la fluxgate. Il existe cependant d'autres sources d'erreurs liées à la technique de mesure par cartographie qui doivent également être prises en compte, comme nous allons le voir dans la section suivante en ne nous intéressant plus seulement à l'analyse des cartes individuellement, mais dans leur ensemble.

Afin de pouvoir comparer les contributions de ces différentes sources, il est intéressant ici de donner les valeurs des incertitudes issues de l'analyse d'une carte sur les grandeurs d'intérêt, le gradient fantôme \widehat{G} et l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$. Celles-ci ne sont bien évidemment pas identiques pour chaque carte prise individuellement, mais leurs ordres de grandeur restent

constants. Pour \widehat{G} , on pourra prendre comme valeur de comparaison $\Delta\widehat{G}_{\text{ajustement}} \sim 0.2 \text{ pT/cm}$. L'expression de $\langle B_T^2 \rangle$ en fonction des gradients généralisés est relativement complexe et il est fastidieux de calculer l'erreur propagée de l'ajustement sur cette grandeur en tenant compte des corrélations. On peut toutefois approcher l'ordre de grandeur de cette erreur en considérant uniquement la contribution des gradients $G_{1,2}$ et $G_{1,-2}$ à l'inhomogénéité transverse. Ces gradients constituent en effet les contributions majeures à $\langle B_T^2 \rangle$. Ce faisant, on trouve sur les cartes de B_0 une incertitude moyenne de l'ordre de $\Delta\langle B_T^2 \rangle_{\text{ajustement}} \sim 0.02 \text{ nT}^2$. On notera que cette incertitude est évidemment légèrement sous-estimée étant donné que toutes les autres contributions sont négligées.

3.3 Analyse globale

Nous avons déjà décrit les différentes configurations magnétiques pour lesquelles des cartes de champ ont été enregistrées dans la section 3.1.3. Chacune de ces cartes a été analysée avec la méthode d'analyse décrite dans la section précédente (voir 3.2) afin d'en extraire les gradients généralisés et les quantités d'intérêt déduites : le gradient fantôme \widehat{G} et l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$. Toutefois, afin de comprendre les différentes sources d'incertitude de la cartographie du champ, il est nécessaire d'analyser les cartes de champ dans leur ensemble. Pour avoir une compréhension claire du principe et des objectifs de cette analyse globale, j'invite le lecteur à consulter la figure 3.10 qui les résume. Les différentes parties illustrées sur ce schéma seront discutées dans les sections suivantes.

Les cartes du champ produit par la bobine B_0 en configuration up ou down, que l'on appellera seulement par la suite cartes de B_0 , vont nous permettre d'accéder à la reproductibilité du champ, qui a déjà été évoquée précédemment, et à la répétabilité des cartographies. La distinction entre ces deux sources d'incertitudes et la méthode pour les estimer sera discutée dans la section suivante (section 3.3.1). L'analyse des cartes de B_0 , dans le référentiel de la bobine, nous donne accès à la mesure du champ produit par le système composé de la bobine B_0 et du blindage passif. Ce champ pourra être comparé au champ simulé par la méthode des éléments finis (voir section 2.2.3).

Enfin, ces cartes nous permettent également de prédire la contribution de la bobine B_0 au champ magnétique des séquences nEDM. Le champ pouvant être modélisé par une combinaison linéaire des gradients généralisés et une bobine produisant un champ proportionnel à l'amplitude du courant l'alimentant, il est théoriquement possible de considérer le champ, et par extension les gradients généralisés $G_{l,m}$ comme une somme des contributions venant des différentes bobines de l'expérience (bobine B_0 , bobines de guidage (GC) et trimcoils (TC)). En combinant les résultats de l'analyse des cartes du champ produit par toutes ces bobines, il devrait donc être possible de prédire le champ d'une configuration magnétique quelconque dont l'on connaît les courants d'alimentation des bobines. C'est le principe de la linéarité des gradients. Cette linéarité est avérée dans le cas où aucun matériau magnétique n'est présent. Dans notre cas, on rappelle que la bobine est entourée du blindage de mu-métal et que celui-ci, en se magnétisant, contribue à 40% au champ \vec{B}_0 de l'expérience. Lorsque le blindage est loin du régime saturé, le champ produit par celui-ci devrait en théorie également être linéaire en fonction des courants. Si l'on veut exploiter cette linéarité du champ, il est donc nécessaire de vérifier si elle existe à l'amplitude du champ \vec{B}_0 utilisé dans l'expérience. Pour pouvoir vérifier l'existence de cette linéarité et, le cas échéant, déterminer la précision de cette méthode de prédiction, on peut comparer ces prédictions à la mesure des gradients produits directement dans les configurations magnétiques des séquences nEDM. Cette comparaison sera discutée dans la section 3.3.3.

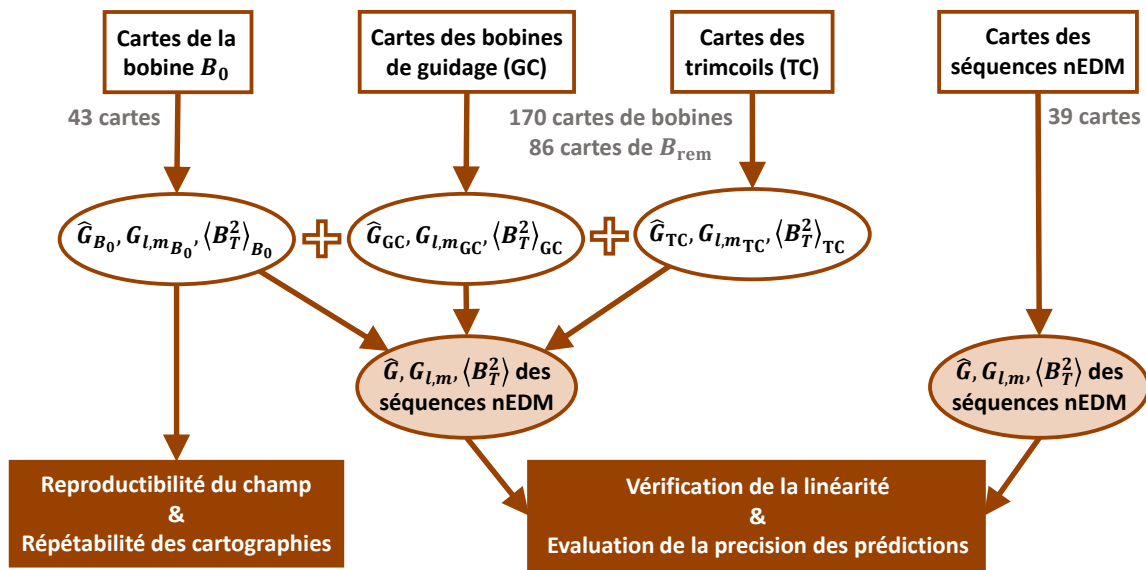


FIGURE 3.10 – Schéma du principe et des objectifs de l'analyse globale des cartes de champ magnétique.

3.3.1 Analyse des cartes de B_0 : reproductibilité et répétabilité

Lorsque nous avons discuté du blindage magnétique passif dans le chapitre précédent (voir section 2.2.2), nous avons évoqué la procédure de démagnétisation régulièrement appliquée pendant la prise de données nEDM. Il est utile ici de faire un bref retour sur ce sujet afin d'introduire le concept de reproductibilité magnétique.

Rappelons que pour la prise de données, le principe est d'appliquer un champ magnétique le plus uniforme possible, en configuration up ou down et de mesurer l'EDM pour plusieurs séquences, chacune de ces séquences appliquant un gradient longitudinal $G_{1,0}$ différent, afin de pouvoir appliquer la procédure du point de croisement en tant que dernière étape de l'analyse (voir section 2.5). Le gradient $G_{1,0}$ est appliqué en faisant varier de façon opposée le courant circulant dans les bobines BTC et TTC. Un ensemble de séquences enregistrées avec des courants identiques dans toutes les bobines de l'expérience excepté pour BTC et TTC est appelé un « bloc ». Lorsque la bobine B_0 est alimentée, les couches les plus internes du mu-métal vont se magnétiser. Tant que la configuration magnétique de base ne change pas, c'est-à-dire tant que l'on reste au sein d'un même bloc de séquences, il n'est pas nécessaire de démagnétiser le blindage, le champ restant quasiment identique d'une séquence à l'autre. En revanche, lorsque l'on change de bloc, la procédure d'uniformisation du champ (voir section 2.4.3) est appliquée et la direction du champ produit par la bobine B_0 est parfois même inversée, la méthode du point de croisement requérant des blocs mesurés avec la bobine B_0 en configuration up et down. Lors de tels changements, le blindage doit être démagnétisé afin de ne pas augmenter les inhomogénéités dans la chambre de précession. De plus, avec l'inversion du champ sans démagnétisation, le champ produit par le blindage devient instable temporellement. Chaque nouveau bloc de séquences suit donc une procédure de démagnétisation afin d'éviter ces effets.

3.3.1.1 Reproductibilité du champ et répétabilité des cartographies

Lorsque l'on parle de reproductibilité du champ magnétique, il s'agit donc en réalité de la reproductibilité de la démagnétisation. En effet, l'état du blindage peut être différent après chaque démagnétisation. Or le blindage participe, rappelons-le, à 40% de la production du champ \vec{B}_0 . Par

conséquent, lorsque la bobine B_0 est alimentée après une démagnétisation du blindage, le champ généré peut être différent. On appelle « reproductibilité magnétique » notre capacité à obtenir deux fois le même champ magnétique (soit exactement les mêmes valeurs pour tous les gradients généralisés $G_{l,m}$) après une démagnétisation en appliquant les mêmes courants dans toutes les bobines. En pratique, les trimcoils contribuant de façon minimale au champ total, on peut évaluer cette reproductibilité en étudiant uniquement celle du champ produit par la bobine B_0 seule. Le champ étant décrit par le développement en polynômes harmoniques (annexe A), nous parlerons en réalité de la reproductibilité de chaque gradient généralisé pris individuellement. On considèrera par la suite que la reproductibilité d'un gradient $G_{l,m}$ est une source d'erreur aléatoire gaussienne centrée sur zéro et d'écart-type $\sigma_{G_{l,m}}$. Par la suite, on appellera directement reproductibilité du gradient $G_{l,m}$ le nombre $\sigma_{G_{l,m}}$.

La cartographie est une mesure hors-ligne du champ et la reproductibilité de celui-ci est donc l'une des incertitudes de cette mesure. En effet, le blindage est démagnétisé avant l'acquisition d'un bloc de séquences, ce qui signifie un premier tirage aléatoire sur la gaussienne de la reproductibilité. Il est également démagnétisé à chaque changement de configuration magnétique lors de la cartographie et l'incertitude issue de la reproductibilité intervient donc une seconde fois. Nous verrons plus en détail par la suite les contributions des différentes incertitudes, mais l'on retiendra ici que la reproductibilité du champ est une source d'erreur indépendante de la technique de cartographie ou de son analyse. Par conséquent, il s'agit d'une erreur irréductible de cette mesure qu'il est nécessaire de connaître. Fort heureusement, il est possible de l'estimer grâce à la cartographie. Pour ce faire, plusieurs cartes du champ produit par la bobine B_0 seule ont été enregistrées après des démagnétisations du blindage. L'étude de l'écart des gradients sur ces cartes peut être un moyen d'estimer leurs reproductibilités. Cet écart est toutefois également affecté par une autre source d'erreur : la répétabilité des cartographies.

La « répétabilité des cartographies » quantifie la capacité à mesurer un champ magnétique identique (soit obtenir des gradients généralisés identiques en fin d'analyse) en cartographiant plusieurs fois de suite le champ sans modifier la configuration magnétique ni démagnétiser le blindage. C'est une incertitude qui peut prendre sa source dans les imperfections de mesure telles que les dérives des offsets ou les désalignements des sondes de la fluxgate. La méthode d'analyse tente de prendre en compte ces imperfections. Une amélioration de la technique de mesure ou de l'analyse pourrait donc théoriquement nous permettre de diminuer la répétabilité. Comme pour la reproductibilité du champ, on considère qu'il s'agit d'une source d'erreur aléatoire gaussienne que l'on peut estimer en étudiant le champ produit par la bobine B_0 seule. Elle intervient sur chaque gradient généralisé $G_{l,m}$ et sera par la suite représentée par le nombre $\tau_{G_{l,m}}$. Elle se traduit par l'écart entre les gradients mesurés sur un groupe de cartes non-séparées par une démagnétisation du blindage.

Pour pouvoir estimer la reproductibilité du champ et la répétabilité des cartographies, des groupes de une à trois cartes de B_0 ont été pris au cours de chacune des trois campagnes de cartographie. Au sein de ces groupes, le blindage n'est pas démagnétisé, ce qui permet d'avoir accès à la répétabilité. En revanche, chacun de ces groupes est précédé et suivi d'une démagnétisation du blindage. Les variations entre les groupes offrent donc un accès à la reproductibilité. Un schéma permettant d'illustrer le principe de cette prise de données et le niveau auquel interviennent la reproductibilité σ et la répétabilité τ est visible sur la figure 3.11. Le nombre de cartes au sein de chaque groupe n'étant malheureusement pas constant, l'estimation de la reproductibilité et de la répétabilité n'est pas un problème statistique standard. Une partie du travail de cette analyse a donc consisté à en établir un. Le champ magnétique étant soumis à la reproductibilité et sa mesure à la répétabilité, toute grandeur servant à décrire le champ dont on peut extraire une valeur grâce à la cartographie a sa propre reproductibilité et répétabilité. Quelle que soit la grandeur considérée,

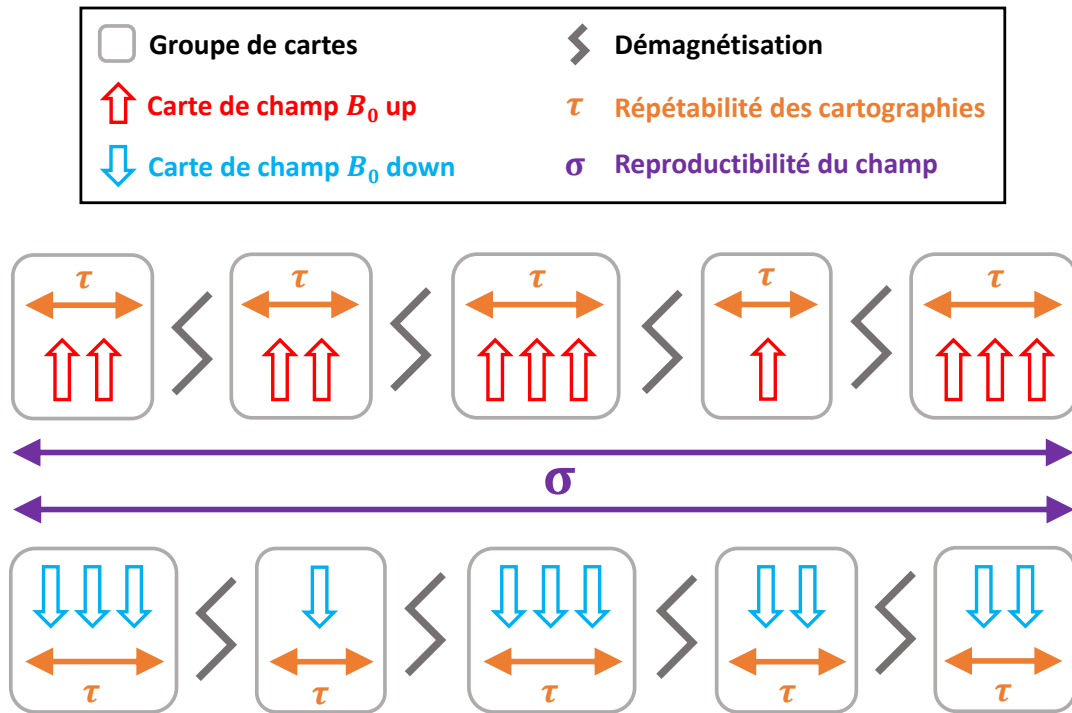


FIGURE 3.11 – Schéma de la prise de données des cartes du champ produit par la bobine B_0 seule et illustration de l'influence de la reproductibilité du champ et la répétabilité des cartographies sur l'écart entre ces mesures.

reproductibilité et répétabilité s'estiment toujours de la même façon à partir des valeurs mesurées de cette grandeur. C'est donc le cas pour les deux quantités que les cartographies ont pour but d'extraire, le gradient fantôme \hat{G} et l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$. Pour exprimer notre modèle, nous donnerons donc les formules en considérant le gradient \hat{G} . Une dernière remarque est à considérer avant d'entrer dans le détail du modèle. La reproductibilité et la répétabilité ne dépendent pas de la polarité du champ \vec{B}_0 appliqué. Leurs estimateurs sont donc calculés à partir de toutes les cartes de B_0 , qu'elles soient en configuration up ou down. Ces calculs impliquent toutefois des écarts aux valeurs moyennes et celles-ci dépendent bien entendu du sens du champ magnétique.

3.3.1.2 Modèle statistique des cartes de B_0

Commençons par établir clairement les paramètres de notre système de statistiques. Soient N le nombre de cartes de B_0 total et g le nombre de groupes de cartes séparés par des démagnétisations du blindage. On peut considérer que N et g sont chacun composés de deux parties, le nombre de cartes et de groupes de cartes avec B_0 positif, N^\uparrow et g^\uparrow , et ceux avec B_0 négatif, N^\downarrow et g^\downarrow . Chaque groupe i est composé de n_i cartes de champ. Pour chaque carte j , on dispose d'une mesure du gradient fantôme \hat{G}_{ij} . Nous allons définir quatre estimateurs pour réduire ce système. Une description plus détaillée de ce système accompagnée des démonstrations ayant mené aux expressions de ces estimateurs peuvent être trouvées dans l'annexe C. Le premier estimateur utile pour décrire nos mesures est la moyenne du gradient \hat{G} dans un groupe i ,

$$\bar{\hat{G}}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \hat{G}_{ij}. \quad (3.24)$$

Il existe autant de moyennes de groupe $\overline{\widehat{G}}_i$ que de groupes, soit g , et l'établissement de ces estimateurs n'est en réalité qu'une étape permettant le calcul des trois autres estimateurs, qui nous intéressent plus particulièrement. En effet, en utilisant les écarts aux moyennes dans chaque groupe, on peut déjà définir l'estimateur du carré de la répétabilité $\tau_{\widehat{G}}$ comme suit,

$$\tau_{\widehat{G}}^2 = \frac{1}{N-g} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (\widehat{G}_{ij} - \overline{\widehat{G}}_i)^2. \quad (3.25)$$

Les moyennes individuelles des groupes nous permettent également d'accéder à la moyenne du gradient sur tous les groupes, soit le gradient moyen produit par la bobine B_0 , qui servira par la suite pour établir la contribution de la bobine B_0 aux gradients des configurations magnétiques des séquences nEDM. On rappelle qu'il y a deux valeurs moyennes, l'une en configuration up et l'autre en down, que l'on désignera plus tard par $\widehat{G}_{B_0}^\uparrow$ et $\widehat{G}_{B_0}^\downarrow$ pour simplifier les notations. Dans le cadre de notre modèle statistique, toutefois, par souci de cohérence avec le reste des expressions, l'estimateur de ces gradients moyens sont les suivants :

$$\overline{\widehat{G}}^\uparrow = \frac{1}{N^\uparrow} \sum_{i=1}^{g^\uparrow} n_i \overline{\widehat{G}}_i = \frac{1}{N^\uparrow} \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \sum_{j=1}^{n_i} \widehat{G}_{ij}, \quad (3.26)$$

$$\overline{\widehat{G}}^\downarrow = \frac{1}{N^\downarrow} \sum_{i=1}^{g^\downarrow} n_i \overline{\widehat{G}}_i = \frac{1}{N^\downarrow} \sum_{i=1}^{g^\downarrow} \sum_{j=1}^{n_i} \widehat{G}_{ij}. \quad (3.27)$$

Enfin, en combinant les moyennes de groupe individuelles, les deux moyennes globales et la répétabilité, on peut construire l'estimateur du carré de la reproductibilité comme suit, non biaisé par la répétabilité :

$$\sigma_{\widehat{G}}^2 = \frac{1}{g} \left[\sum_{i=1}^{g^\uparrow} n_i (\overline{\widehat{G}}_i - \overline{\widehat{G}}^\uparrow)^2 + \sum_{i=1}^{g^\downarrow} n_i (\overline{\widehat{G}}_i - \overline{\widehat{G}}^\downarrow)^2 \right] - \tau_{\widehat{G}}^2. \quad (3.28)$$

C'est donc équipés de ces estimateurs statistiques pour le gradient fantôme, les gradients généralisés et l'inhomogénéité transverse que nous avons analysé de façon globale l'ensemble des cartes de B_0 .

3.3.1.3 Analyse globale pour le gradient fantôme \widehat{G}

Les résultats de l'analyse des cartes du champ produit par la bobine B_0 , du champ rémanent et leur dispersion sont visibles sur la figure 3.12 pour le gradient fantôme \widehat{G} . Lors de la campagne de cartographie de 2013 et pendant une partie de celle de 2014, des éléments magnétiques étaient fâcheusement présents dans la chambre à vide de l'expérience. Pour éviter tout biais sur les grandeurs mesurées grâce aux cartes, le choix a donc été fait d'extraire leurs valeurs en se basant uniquement sur les cartes enregistrées une fois ces éléments magnétiques retirés. Les gradients généralisés $G_{l,m}$ sont plus ou moins fortement impactés par la présence de ces éléments et ceux composant le gradient fantôme \widehat{G} ne le sont pas particulièrement. C'est pourquoi la figure 3.12 se compose de deux histogrammes, l'un comprenant toutes les cartes des trois campagnes, afin de mettre en évidence la très bonne reproductibilité de \widehat{G} sur les différentes années de campagne, et l'autre ne comprenant que les cartes prises après le retrait des éléments magnétiques, afin de voir la dispersion réelle utilisée pour l'estimation de $\sigma_{\widehat{G}}$ et $\tau_{\widehat{G}}$. Les résultats des cartes de champ rémanent ont quant à eux été ajoutés à la figure pour mettre en évidence la symétrie du gradient fantôme \widehat{G} produit par la bobine B_0 en configuration up et down.

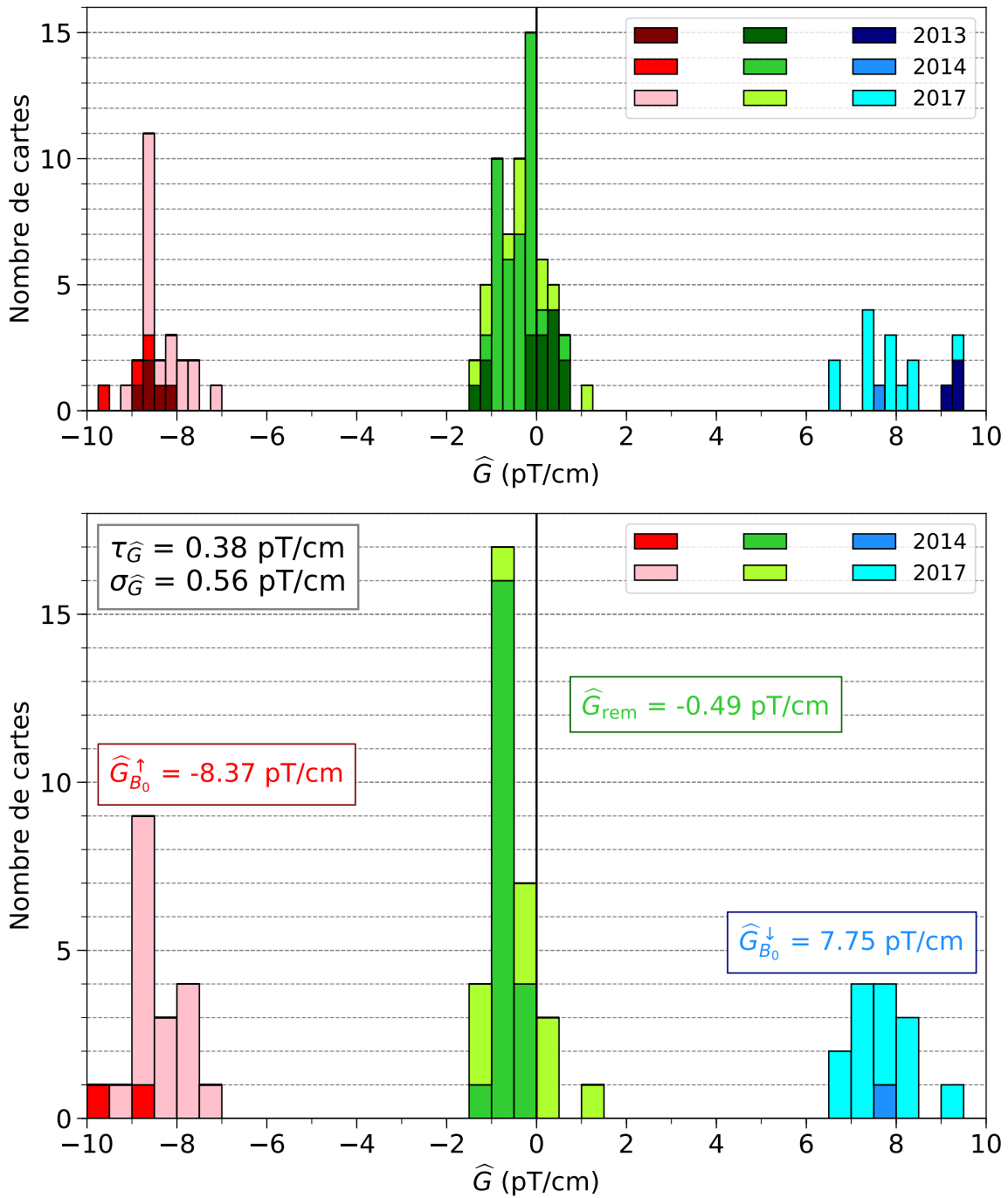


FIGURE 3.12 – Histogramme des valeurs du gradient fantôme \hat{G} pour les cartes du champ produit par la bobine B_0 et les cartes de champ rémanent. En haut, toutes les cartes de B_0 et B_{rem} acquises au cours des trois campagnes sont prises en compte. En bas, seules les cartes utilisées pour le calcul des estimateurs statistiques sont prises en compte. Les valeurs en couleur représentent les estimateurs des moyennes globales de \hat{G} définies selon les équations (3.26) et (3.27). Les estimateurs de la reproductibilité $\sigma_{\hat{G}}$ et de la répétabilité $\tau_{\hat{G}}$ sont calculés uniquement avec les cartes de B_0 et sont affichés dans le cadre en haut à gauche de la figure.

On peut voir sur ces histogrammes que le gradient \widehat{G} est remarquablement reproductible entre les différentes campagnes de cartographie, entre lesquelles on rappelle que le mappeur était démonté et retiré de la chambre à vide nEDM. On constate également que le champ semble moins reproductible dans la configuration B_0 down, mais le nombre de cartes enregistrées n'est pas suffisant pour pouvoir conclure à un réel effet plutôt qu'à une simple fluctuation statistique. De plus, aucune raison possible pouvant expliquer une telle asymétrie n'a pu être identifiée.

La conclusion la plus importante à tirer de cette analyse globale est que la reproductibilité du champ $\sigma_{\widehat{G}} = 0.56$ pT/cm est supérieure à la répétabilité des cartographies $\tau_{\widehat{G}} = 0.38$ pT/cm. Cela signifie que le facteur limitant la précision des cartographies ne dépend pas des méthodes d'acquisition et d'analyse de celles-ci, mais bien de la qualité du blindage ou de la procédure de démagnétisation. En pratique, cela veut dire que les cartographies n'ont pas besoin d'être plus précises étant donné que ce ne sont pas elles qui limitent la mesure.

Les moyennes du gradient fantôme produit avec B_0 positif, $\widehat{G}_{B_0}^{\dagger}$, et négatif, $\widehat{G}_{B_0}^{\downarrow}$, nous seront utiles par la suite pour pouvoir étudier la linéarité et prédire les gradients des configurations magnétiques des séquences nEDM. Prenons ici le temps de commenter les valeurs de ces moyennes. Le faux EDM du mercure se compose de la contribution « gravitationnelle » et de la contribution « fantôme », qui peut elle-même se décomposer en sous-contributions selon les ordres de la paramétrisation. La contribution d'ordre 7 a été évaluée en réalisant l'analyse jusqu'à l'ordre $l = 7$. Les contributions des ordres supérieurs étant inférieures, elles ont été ignorées. En considérant uniquement les ordres de grandeur des moyennes de ces différentes contributions pour le champ produit par la bobine B_0 positif, le gradient total causant un faux EDM peut donc s'écrire comme suit,

$$G_{\text{Grav}, B_0}^{\dagger} (-80 \text{ pT/cm}) + \widehat{G}_{3B_0}^{\dagger} (+10 \text{ pT/cm}) + \widehat{G}_{5B_0}^{\dagger} (-2 \text{ pT/cm}) + \widehat{G}_{7B_0}^{\dagger} (+0.3 \text{ pT/cm}) + \dots \quad (3.29)$$

On rappelle que la contribution gravitationnelle est annulée grâce à la méthode du point de croisement et que les contributions fantômes sont corrigées grâce aux cartographies. On peut déjà observer ici que, bien que la somme des termes fantômes soit dix fois plus faible que le terme gravitationnel seul, il ne s'agit pas d'une contribution négligeable, ce que nous montrerons en effet par la suite.

On peut également noter sur la figure 3.12 que du point de vue de \widehat{G} , le champ produit par la bobine B_0 est relativement symétrique en inversant la polarité de celui-ci, ce qui est attendu pour un système parfaitement symétrique par rapport au plan (xOy) . Toutefois, nous l'avons déjà dit, la bobine n'est pas parfaite et le blindage peut également contenir des imperfections. De plus, le champ rémanent au sein de la chambre à vide n'est pas nécessairement nul. Certains des gradients généralisés se retrouvent plus impactés et ne sont alors pas symétriques par rapport à zéro dans les deux polarités du champ. C'est le cas par exemple du gradient $G_{1,0}$ pour lequel la valeur moyenne pour les cartes de champ rémanent est significativement différente de zéro (~ -12 pT/cm). Les reproductibilités, répétabilités et moyennes globales pour tous les gradients généralisés peuvent être trouvées dans l'annexe D. Passons maintenant aux résultats pour la seconde grandeur d'intérêt extraite grâce aux cartographies, l'inhomogénéité transverse.

3.3.1.4 Analyse globale pour l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$

Les résultats de l'analyse des cartes du champ produit par la bobine B_0 et leur dispersion sont visibles sur la figure 3.13 pour l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$. Contrairement au cas du gradient fantôme, on ne montrera pas ici l'histogramme prenant en compte toutes les cartes de B_0 des trois campagnes de cartographie. En effet, $\langle B_T^2 \rangle$ est l'une des grandeurs décrivant le champ les plus impactées par les éléments magnétiques qui ont été retirés pendant la campagne de 2014. En réalité,

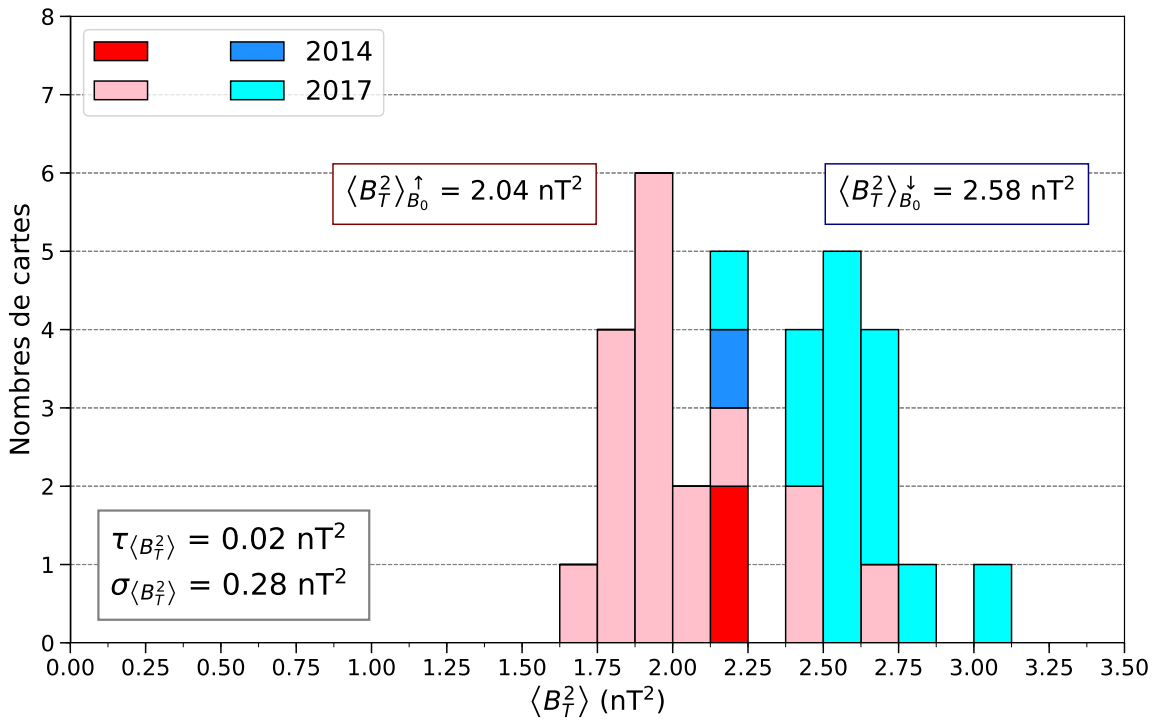


FIGURE 3.13 – Histogramme des valeurs de l’inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$ pour les cartes du champ produit par la bobine B_0 . Seules les cartes utilisées pour le calcul des estimateurs statistiques sont représentées. Les valeurs en couleur représentent les estimateurs des moyennes globales de $\langle B_T^2 \rangle$ définies selon les équations (3.26) et (3.27). Les estimateurs de la reproductibilité $\sigma_{\langle B_T^2 \rangle}$ et de la répétabilité $\tau_{\langle B_T^2 \rangle}$ sont affichés dans le cadre en bas à gauche de la figure.

ce sont les gradients $G_{1,2}$ et $G_{1,-2}$ qui sont très fortement impactés et ces gradients constituent la contribution majeure à $\langle B_T^2 \rangle$. L’inhomogénéité transverse des cartes de champ rémanent ne présente également pas de réel intérêt d’un point de vue de la symétrie du champ par inversion de polarité, $\langle B_T^2 \rangle$ étant une grandeur strictement positive. On peut voir en revanche que les valeurs moyennes de $\langle B_T^2 \rangle$ en configuration up et down sont légèrement différentes, ce qui, comme nous l’avons dit en introduisant l’effet de l’inhomogénéité transverse (voir section 2.3.2.1) induit un faux EDM de façon indirecte par la méthode du point de croisement.

Comme pour le cas du gradient fantôme, on constate que la reproductibilité $\sigma_{\langle B_T^2 \rangle} = 0.28 nT^2$ est supérieure à la répétabilité $\tau_{\langle B_T^2 \rangle} = 0.02 nT^2$, cette fois d’un facteur dix. Les erreurs étant sommées quadratiquement, on pourrait donc même considérer l’incertitude sur $\langle B_T^2 \rangle$ issue de la répétabilité des cartographies comme négligeable.

3.3.1.5 Comparaison des incertitudes

Les valeurs moyennes globales des gradients généralisés, de \hat{G} et de $\langle B_T^2 \rangle$ produits par la bobine B_0 , ainsi que leur reproductibilité, leur répétabilité et l’erreur d’ajustement moyenne issue de la méthode d’analyse sont listées dans le tableau 3.2 jusqu’à l’ordre $l = 3$. Celles des ordres supérieurs des gradients généralisés peuvent être trouvées dans l’annexe D. Comme pour \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$, on peut voir que la reproductibilité est la source d’incertitude dominante sur quasiment tous les gradients généralisés. La relation entre la répétabilité et l’incertitude d’ajustement est quant à elle un peu plus complexe.

TABLEAU 3.2 – Valeurs moyennes produites par la bobine B_0 , reproductibilité, répétabilité et erreur d’ajustement des gradients généralisés, de \widehat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$. Les valeurs moyennes, reproductibilité et répétabilité sont calculées respectivement en utilisant les formules (3.26), (3.27), (3.28) et (3.25). Les résultats pour les ordres supérieurs sont visibles en annexe D.

x	Unité	$x_{B_0}^\uparrow$	$x_{B_0}^\downarrow$	σ_x	τ_x	$\Delta x_{\text{ajustement}}$
\widehat{G}	pT/cm	-8.37	7.75	0.56	0.38	~ 0.19
$\langle B_T^2 \rangle$	nT ²	2.04	2.58	0.28	0.02	~ 0.02
$G_{0,-1}$	$\times 10^3$ pT	2.897	-4.315	0.525	0.037	~ 0.003
$G_{0,0}$	$\times 10^3$ pT	1034.230	-1035.730	1.007	0.082	~ 0.007
$G_{0,1}$	$\times 10^3$ pT	1.350	-1.585	0.225	0.011	~ 0.003
$G_{1,-2}$	pT/cm	-16.36	36.84	3.71	0.40	~ 0.15
$G_{1,-1}$	pT/cm	-41.42	-14.12	8.60	0.62	~ 0.15
$G_{1,0}$	pT/cm	23.00	-61.62	9.24	1.88	~ 0.73
$G_{1,1}$	pT/cm	-20.13	18.39	13.09	0.39	~ 0.16
$G_{1,2}$	pT/cm	-70.95	69.70	3.98	0.42	~ 0.23
$G_{2,-3}$	pT/cm ²	-0.691	0.137	0.092	0.011	~ 0.006
$G_{2,-2}$	pT/cm ²	0.084	-0.145	0.052	0.013	~ 0.005
$G_{2,-1}$	pT/cm ²	0.870	-1.581	0.182	0.009	~ 0.010
$G_{2,0}$	pT/cm ²	-7.944	8.339	0.210	0.157	~ 0.042
$G_{2,1}$	pT/cm ²	-0.738	1.565	0.258	0.016	~ 0.010
$G_{2,2}$	pT/cm ²	2.294	-1.997	0.084	0.027	~ 0.006
$G_{2,3}$	pT/cm ²	1.074	0.041	0.538	0.009	~ 0.006
$G_{3,-4}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	1.58	-0.49	1.86	0.14	~ 0.14
$G_{3,-3}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	0.13	2.52	1.20	0.10	~ 0.13
$G_{3,-2}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	0.23	0.12	1.16	0.20	~ 0.20
$G_{3,-1}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	-6.07	1.32	1.86	0.69	~ 0.39
$G_{3,0}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	-70.21	62.82	4.22	3.08	~ 1.92
$G_{3,1}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	9.00	-33.30	6.22	0.47	~ 0.41
$G_{3,2}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	14.05	-17.98	1.49	0.10	~ 0.28
$G_{3,3}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	-0.21	3.40	0.56	0.14	~ 0.13
$G_{3,4}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	2.29	10.80	2.00	0.20	~ 0.17

On rappelle que la répétabilité quantifie notre capacité à réaliser deux fois la même mesure du champ grâce à la cartographie. Cette source d'incertitude contient donc toutes les sources dues aux différences d'acquisition (ou d'analyse) d'une carte à l'autre. Ces différences peuvent être dues à des erreurs de position de la fluxgate, aux désalignements si ceux-ci varient, mais elles sont principalement causées par les dérives des offsets de la fluxgate. En effet, d'une carte à l'autre, les offsets dérivent de façon indépendante et impactent donc la mesure différemment.

L'erreur issue de l'ajustement se compose elle aussi théoriquement de plusieurs contributions. La première d'entre elles est l'incomplétude du modèle. En effet, on ajuste le champ jusqu'à un certain ordre du modèle et les ordres supérieurs non ajustés devraient être en partie responsables des résidus de l'ajustement. De plus, notre méthode de normalisation des erreurs est censée permettre la prise en compte des dérives des offsets.

En théorie, l'erreur d'ajustement devrait donc être supérieure à la répétabilité. On constate toutefois que ce n'est pas le cas pour la majorité des gradients, particulièrement dans le cas de l'ordre $m = 0$. Cela s'explique par la façon dont l'on tente de prendre en compte les dérives de l'offset dans l'analyse. La normalisation par le χ^2 de l'ajustement s'appuie en effet sur l'hypothèse d'erreurs indépendantes des différents cercles. Cependant, l'erreur due à aux dérives n'est certainement pas indépendante d'un cercle de mesure à l'autre. Pour les ordres $m \neq 0$, la différence relative entre la répétabilité et l'erreur d'ajustement est plus faible que pour l'ordre $m = 0$. En effet, dans le cas de l'ordre $m = 0$, les coefficients de Fourier a_0 ajustés lors de la première étape d'analyse sont les plus impactés par cette dérive, car ils capturent le terme constant du champ sur un cercle. Pour la plupart des gradients, l'erreur propagée de l'ajustement ne capture donc pas complètement la répétabilité des cartographies. Afin d'avoir l'estimation la plus fiable de l'incertitude de mesure de la cartographie, pour la suite, on prend donc le parti de choisir l'incertitude la plus large entre la répétabilité et l'erreur d'ajustement. Dans le cas des deux grandeurs d'intérêt \widehat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$, il s'agit donc de la répétabilité. Nous allons à présent nous intéresser de plus près au gradient total responsable du faux EDM induit par le mercure pour comprendre l'intérêt de la combinaison entre méthode du point de croisement et cartographie du champ.

3.3.1.6 Cartographie et point de croisement : deux méthodes inséparables

Le lecteur arrivé jusqu'ici s'est peut-être déjà posé cette question : pourquoi est-il nécessaire d'appliquer la méthode du point de croisement pour corriger seulement une partie du faux EDM et d'utiliser les cartographies pour corriger le reste? Puisque l'on mesure tous les gradients du champ magnétique à l'aide de la cartographie, n'est-il pas plus simple de corriger entièrement le faux EDM grâce à celle-ci? Que cette question ait en effet déjà frappé le lecteur, ou qu'il découvre sa justesse à l'instant, il est temps à présent d'y répondre. On rappelle que l'expression du faux EDM induit par le mercure est la suivante :

$$d_{n \leftarrow \text{Hg}}^{\text{faux}} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 (G_{\text{Grav}} + \widehat{G}), \quad (3.30)$$

avec G_{Grav} le gradient gravitationnel et \widehat{G} le gradient fantôme dont les expressions respectives en fonction des gradients généralisés jusqu'à l'ordre 7 de la paramétrisation polynomiales sont (2.25) et (3.1). Si l'on voulait corriger entièrement le faux EDM au moyen des cartographies, c'est donc la somme de ces deux gradients qu'il faudrait mesurer. L'analyse de toutes les cartes de B_0 nous a permis d'extraire les valeurs des moyennes globales, de la reproductibilité et de la répétabilité de cette somme. Ces résultats sont visibles sur la figure 3.14. Ils sont à comparer avec ceux du gradient fantôme seul \widehat{G} visibles sur la figure 3.12.

La comparaison des valeurs absolues de $G_{\text{Grav}} + \widehat{G}$ et \widehat{G} n'a que peu d'intérêt étant donné qu'il s'agit de grandeurs qui ont vocation à être soustraites à l'EDM mesuré. Elle peut présenter un inté-

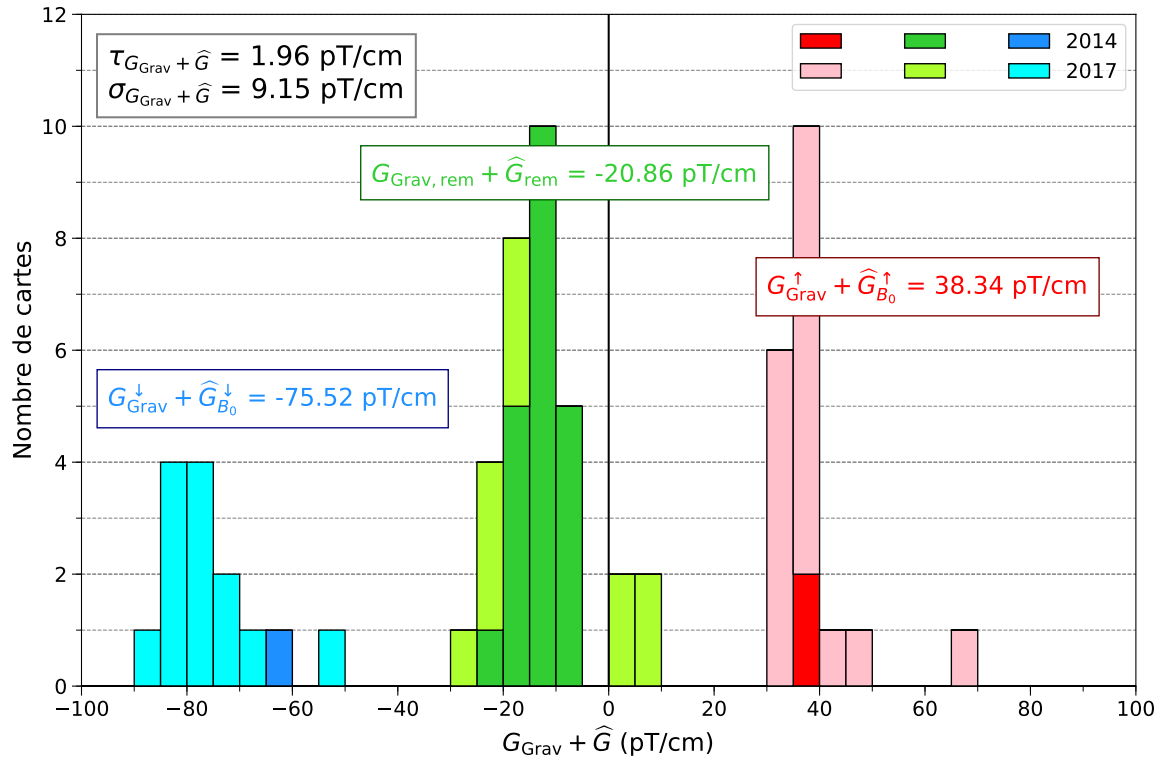


FIGURE 3.14 – Histogramme des valeurs du gradient total générant le faux EDM du mercure, $G_{\text{Grav}} + \hat{G}$, pour les cartes du champ produit par la bobine B_0 . Seules les cartes utilisées pour le calcul des estimateurs statistiques sont représentées. Les valeurs en couleur représentent les estimateurs des moyennes globales de $\langle B_T^2 \rangle$ définies selon les équations (3.26) et (3.27). Les estimateurs de la reproductibilité $\sigma_{G_{\text{Grav}} + \hat{G}}$ et de la répétabilité $\tau_{G_{\text{Grav}} + \hat{G}}$ sont affichés dans le cadre en bas à gauche de la figure.

rêt pour évaluer les contributions au faux EDM des différents ordres des modes du champ, ce qui a déjà été discuté précédemment. L'incertitude sur ces grandeurs est en revanche très importante car elle déterminera l'erreur systématique sur l'EDM mesuré restante une fois leur contribution soustraite. Comme pour la plupart des gradients, la reproductibilité est la source d'erreur dominante pour la somme $G_{\text{Grav}} + \hat{G}$, avec $\sigma_{G_{\text{Grav}} + \hat{G}} = 9.15$ pT/cm. Pour le seul gradient fantôme, on rappelle que la reproductibilité est de $\sigma_{\hat{G}} = 0.56$ pT/cm, soit seize fois plus petite. Si l'on effectue une simple propagation d'erreur naïve de cette reproductibilité sur l'EDM mesuré par séquence en ne considérant que l'erreur systématique due à la correction du faux EDM, en corrigeant tout le faux EDM grâce aux cartographies, l'incertitude systématique résultante par séquence est d'environ 4×10^{-26} e cm. L'erreur statistique moyenne par séquence est quant à elle d'environ 12^{-26} e cm. On pourrait donc considérer que l'erreur due à la reproductibilité de $G_{\text{Grav}} + \hat{G}$ est suffisamment faible par rapport à l'incertitude statistique. Toutefois, comme nous le verrons en traitant la propagation des erreurs des cartographies dans le chapitre suivant, cette erreur de reproductibilité se corrèle d'une séquence à l'autre et a donc un impact bien plus important. Avec une correction de tout le faux EDM en utilisant les cartographies, la reproductibilité de $G_{\text{Grav}} + \hat{G}$ détériore fortement l'incertitude finale sur l'EDM du neutron. La reproductibilité de $G_{\text{Grav}} + \hat{G}$ n'est donc pas suffisante pour pouvoir corriger le faux EDM entièrement grâce à la mesure du champ par les cartographies. En revanche, en corrigeant uniquement la contribution de \hat{G} grâce aux cartographies et celle de G_{Grav} avec la méthode du point de croisement, il est possible de réduire drastiquement cette incertitude, comme nous le verrons par la suite.

Nous avons pu voir en étudiant les cartes du champ produit par la bobine B_0 que le facteur limitant sur la précision des mesures par cartographie prend sa source dans la reproductibilité du champ magnétique. L'analyse de ces cartes nous a permis d'estimer cette reproductibilité, ainsi que la répétabilité des cartographies du champ. Nous avons également constaté que le champ magnétique après une démagnétisation du blindage n'est pas suffisamment reproductible pour que l'on puisse corriger entièrement le faux EDM dû au mercure grâce aux cartographies. La reproductibilité seule du gradient fantôme est toutefois bien plus faible que celle de la somme $G_{\text{Grav}} + \hat{G}$ et la combinaison de la méthode du point de croisement et de la mesure de \hat{G} par cartographie est donc la meilleure façon de corriger l'EDM mesuré de cet effet systématique.

Nous reviendrons sur la contribution des différentes sources d'erreur pour \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ en discutant des différentes méthodes possibles pour extraire une valeur pour ces grandeurs par séquence nEDM. Concentrons-nous à présent sur l'autre intérêt de l'analyse des cartes de B_0 , la comparaison du champ mesuré avec le champ simulé par la méthode des éléments finis.

3.3.2 Analyse des cartes de B_0 : comparaison avec les simulations

On rappelle que le champ simulé par la méthode des éléments finis avec le logiciel Ansys a été analysé avec la même méthode d'analyse, décrite dans la section 3.2, que les cartes de champ enregistrées pendant les cartographies. Pour ce faire, ce champ simulé a été enregistré pour des positions permettant de former une « carte simulée » du champ produit par B_0 . Les cartes simulées se composent de 22 995 valeurs vectorielles du champ \vec{B}_0 réparties sur le volume de cartographie. Elles se composent de 315 cercles contenant chacun 73 points espacés de $\delta\phi = 5^\circ$ et répartis sur 9 hauteurs espacée de $\delta z = 4$ cm. En les analysant, nous avons pu extraire les valeurs simulées des modes autorisés par les symétries de la bobine B_0 qui sont données dans le chapitre précédent, dans le tableau 2.2.

Pour comparer les gradients mesurés aux gradients simulés pour ces modes, on analyse les cartes de B_0 dans le référentiel de la bobine B_0 , qui coïncide avec celui du mappeur et l'on applique à chacune des cartes la méthode d'analyse décrite dans la section 3.2. Puis les résultats sont analysés dans leur ensemble avec la méthode décrite dans la section précédente pour obtenir les estimateurs des valeurs moyennes, de la reproductibilité et de la répétabilité des gradients dans ce référentiel. Les valeurs moyennes des gradients des modes autorisés et leurs incertitudes de mesure, calculées à partir de la reproductibilité du champ et la répétabilité des cartographies sont listées dans le tableau 3.3. Les écarts relatifs entre les valeurs simulées et mesurées sont également listés dans cet tableau. On peut voir que le terme constant $G_{0,0}$ est prédit de façon très précise (0.03%) par les simulations. La prédiction des autres modes autorisés par les simulations est en accord à 20% près avec les mesures, sauf pour les gradients $G_{2,2}$ et $G_{6,6}$. Pour ce dernier, cette différence peut s'expliquer par la précision de la méthode d'analyse. En effet, étant donné que pour les mesures, celle-ci est limitée aux ordres $l_{\text{max}} = m_{\text{max}} = 6$, le gradient $G_{6,6}$ est le moins contraint par la seconde étape de l'analyse. De plus, il s'agit du gradient le plus susceptible de contenir les contributions des ordres supérieurs qui ne peuvent pas être ajustées par le modèle.

Pour tous les modes autorisés, les incertitudes de la mesure et des simulations ne suffisent pas à expliquer les différences constatées. Les erreurs sur les simulations ayant été obtenues en faisant varier les paramètres de celles-ci afin d'estimer l'erreur numérique, on peut conclure que les différences sont probablement dues à la simplification de la géométrie du système. En effet, on rappelle que les simulations ont été réalisées dans l'hypothèse d'une bobine parfaite et d'un système symétrique, ce qui n'est bien évidemment pas le cas dans la réalité. Ce qui peut être retenu de cette analyse est donc notre capacité à prédire l'amplitude du terme constant $G_{0,0}$ de façon très précise et la possibilité d'obtenir l'ordre de grandeur des modes autorisés dans le cas d'un système

TABLEAU 3.3 – valeurs des gradients généralisés moyens produits par la bobine B_0 pour les modes autorisés par les symétries de la bobine et comparaison avec leurs valeurs simulées par Ansys. Les gradients moyens $G_{l,m_{B_0}}^\dagger$ sont calculés à partir des cartes de B_0 en utilisant la formule de l'estimateur de la moyenne globale (3.26). L'erreur sur cette valeur mesurée, $\Delta G_{l,m_{B_0}}^\dagger$, est calculée à partir de la reproductibilité, la répé-

tabilité et le nombre de cartes moyennées, $\Delta G_{l,m_{B_0}}^\dagger = \sqrt{\frac{\sigma_{G_{l,m}}^2 + \tau_{G_{l,m}}^2}{N^\dagger}}$.

Mode	$G_{l,m_{B_0}}^\dagger$	$\Delta G_{l,m_{B_0}}^\dagger$	$\frac{ G_{l,m_{B_0}}^{\text{simu}} - G_{l,m_{B_0}}^\dagger }{G_{l,m_{B_0}}^\dagger}$
Unité	(pT/cm ^l)	(pT/cm ^l)	–
G _{0,0}	1034.15×10^3	0.23×10^3	0.03%
G _{2,0}	-7.62	0.06	21%
G _{2,2}	2.24	0.02	48%
G _{4,0}	-4.03×10^{-3}	0.09×10^{-3}	10%
G _{4,2}	1.59×10^{-3}	0.01×10^{-3}	14%
G _{4,4}	-1.10×10^{-4}	0.03×10^{-4}	21%
G _{6,0}	-1.35×10^{-6}	0.05×10^{-6}	13%
G _{6,2}	2.57×10^{-7}	0.04×10^{-7}	8%
G _{6,4}	-1.03×10^{-7}	0.02×10^{-7}	23%
G _{6,6}	-1.49×10^{-8}	0.12×10^{-8}	166%

composé d'une bobine et de plusieurs couches de blindage de mu-métal.

3.3.3 Analyse des cartes de bobines : linéarité et prédiction du champ

Il existe en théorie deux façons d'extraire les gradients de champ pour chaque séquence nEDM à partir des cartographies. La première possibilité est de cartographier toutes les configurations magnétiques utilisées lors de la prise de données. Chaque bloc de séquences aura alors une carte qui lui correspondra. En appliquant la méthode d'analyse d'une carte à celle-ci, on pourra alors obtenir une valeur ajustée pour chaque gradient généralisé et ainsi une valeur de \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$. Il s'agit d'une méthode qui peut s'avérer longue et fastidieuse dès lors que la quantité de blocs de séquences est grande, ce qui est nécessairement le cas lors d'expériences exigeant une forte sensibilité statistique. Cette méthode reste néanmoins facile à appliquer une fois les cartes de champ acquises car elle ne requiert que l'analyse carte par carte.

La seconde possibilité est d'exploiter la linéarité des gradients par rapport aux courants appliqués dans les différentes bobines du système et de prédire les gradients d'une configuration magnétique quelconque en combinant l'analyse des cartes de ces bobines. S'il existe de nombreuses configurations magnétiques différentes, cette méthode devrait être plus rapide. Cependant, il est nécessaire de cartographier au moins deux fois chacune des bobines afin d'assurer la qualité de la prédiction. La contribution de la bobine B_0 nous vient quant à elle des cartes de B_0 qui sont de toute façon nécessaires pour estimer la reproductibilité et la répétabilité. Pour pouvoir appliquer cette seconde méthode, il faut également vérifier que la linéarité des gradients est bien présente.

La première étape de l'analyse des bobines et des cartes de configurations magnétiques au cours de cette thèse a donc été l'étude de la linéarité des gradients. Cette vérification a été suivie d'une comparaison entre les deux méthodes d'extraction des gradients, afin de déterminer la plus pertinente à utiliser pour l'analyse nEDM.

3.3.3.1 Extraction des coefficients des bobines

Contrairement à celui la bobine B_0 , les courants circulant dans les trimcoils pendant les séquences de prises de données nEDM sont variables. En effet, rappelons-nous qu'ils sont déterminés par l'algorithme de minimisation des inhomogénéités au début d'un bloc de séquences. De même, bien que l'amplitude absolue des courants dans les bobines de guidage ne varie pas, en fonction de la direction de \vec{B}_0 , ces courants peuvent être positifs ou négatifs. Il ne suffit donc pas d'injecter un courant donné dans ces bobines, de les cartographier une fois et d'utiliser les gradients extraits de l'analyse. Pour pouvoir utiliser, ou tout du moins vérifier la linéarité, il est donc nécessaire de connaître les gradients générés par unité de courant circulant dans les différentes bobines. Dans notre cas, l'unité de courant adapté est le μA . La situation idéale pour extraire ces gradients produits par unité de courant serait de disposer de plusieurs cartes par bobine avec de larges courants positifs et négatifs appliqués. En pratique, une à cinq cartes par bobine ont été enregistrées au cours des trois campagnes de cartographies, dans lesquelles des courants élevés (de l'ordre de quelques mA) ont effectivement été appliqués.

A chaque fois qu'une carte du champ généré par une bobine de guidage ou une trimcoil a été prise, une ou plusieurs cartes du champ rémanent B_{rem} ont également été enregistrées avant ou après celle-ci, sans démagnétisation du blindage. En effet, les inhomogénéités magnétiques rémanentes doivent être soustraites au champ produit par la bobine afin de n'extraire que celui-ci. Les cartes de B_{rem} et de la bobine sont analysées avec la méthode décrite dans la section 3.2 pour en extraire les gradients généralisés $G_{l,m}$ et le gradient fantôme \hat{G} . S'ils y a plusieurs cartes du champ rémanent, les gradients issus de ces cartes sont alors moyennés de façon pondérée. Ils sont ensuite soustraits à ceux du champ généré par la bobine. Les incertitudes sont bien évidemment sommées quadratiquement lors de cette étape. Une fois la contribution du champ rémanent déduite, les gradients et leurs incertitudes d'ajustement sont divisés par le courant i_c circulant dans la bobine c afin d'obtenir les coefficients $g_{l,m,c}$ et \hat{g}_c de la bobine de génération de ces gradients par unité de $1 \mu\text{A}$,

$$\begin{aligned} g_{l,m,c} &= \frac{G_{l,m,c}}{i_c}, \\ \hat{g}_c &= \frac{\hat{G}_c}{i_c}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

avec i_c en μA . Lorsque plusieurs cartes d'une même bobine ont été enregistrées, les coefficients finaux pour cette bobines sont alors calculés en moyennant de façon pondérée les coefficients issus de l'analyse de toutes les cartes de cette bobine.

3.3.3.2 Vérification de la linéarité des gradients

Si elle existait, la linéarité des gradients nous permettrait de prédire ceux-ci pour une configuration magnétique quelconque à partir des courants circulant dans les bobines. Afin de vérifier l'existence de cette linéarité et la possibilité de l'exploiter, on peut comparer les gradients issus de l'analyse des cartes des configurations magnétiques nEDM à leurs valeurs prédites grâce à la linéarité. La prédiction d'un gradient repose sur sa valeur moyenne dans les cartes de B_0 , les courants

dans les différentes bobines du système et les coefficients de ces bobines associés à ce gradient, comme suit,

$$G_{l,m}^{\text{pred}} = G_{l,m_{B_0}}^{\uparrow\text{ou}\downarrow} + \sum_c^{N_{\text{bob}}} i_c g_{l,m,c}, \quad (3.32)$$

$$\widehat{G}^{\text{pred}} = \widehat{G}_{B_0}^{\uparrow\text{ou}\downarrow} + \sum_c^{N_{\text{bob}}} i_c \widehat{g}_c, \quad (3.33)$$

où N_{bob} est le nombre de bobines de guidage et de trimcoils et $G_{l,m_{B_0}}^{\uparrow\text{ou}\downarrow}$ et $\widehat{G}_{B_0}^{\uparrow\text{ou}\downarrow}$ sont estimés avec les expressions (3.26) et (3.27). Un bon accord sur une telle comparaison permettrait de montrer la linéarité. Cette comparaison est hélas soumise à la reproductibilité du champ, qui, on le montrera tout à l'heure, est l'erreur dominante des cartographies. Afin de vérifier la linéarité des gradients en s'affranchissant de la contribution de la reproductibilité, une procédure de comparaison particulière a été mise en place.

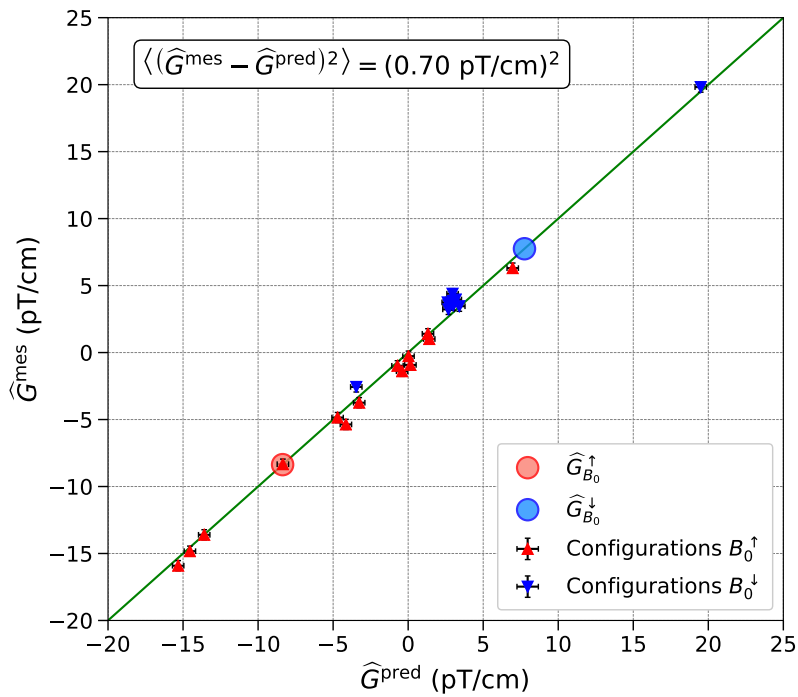
Les cartes des configurations magnétiques des séquences nEDM ont quasiment systématiquement été enregistrées dans les mêmes groupes que des cartes de B_0 . Rappelons qu'un groupe correspond à un ensemble de cartes acquises sans application de la procédure de démagnétisation du blindage. Il n'y a donc pas de fluctuations des mesures dues à la reproductibilité entre les cartes d'un même groupe. Le principe de cette méthode de vérification de la linéarité est donc de comparer les gradients prédits, en utilisant comme contribution de la bobine B_0 non plus les moyennes globales estimées à partir de toutes les cartes de B_0 , mais les gradients extraits de l'analyse des cartes de B_0 enregistrées dans le même groupe.

Les résultats de cette comparaison pour le gradient fantôme \widehat{G} sont visibles sur la figure 3.15a. Les différentes mesures sont réparties le long de la première bissectrice, ce qui confirme l'hypothèse de la linéarité des gradients. Sur la figure, seules les contributions de la répétabilité ou de l'erreur d'ajustement (on rappelle que c'est la plus grande des deux qui est prise en compte) des cartes de configuration et de B_0 sont comprises dans les barres d'erreur. La reproductibilité n'intervenant pas dans ce cas de figure, les écarts à la première bissectrice restants sont issus de la précision de la contribution à la prédiction des bobines additionnelles. En utilisant la différence carrée moyenne, il est possible de donner une estimation de cette source d'erreur. Pour \widehat{G} , la différence est de $(0.70 \text{ pT/cm})^2$ et elle peut être décrite par les contributions quadratiques suivantes :

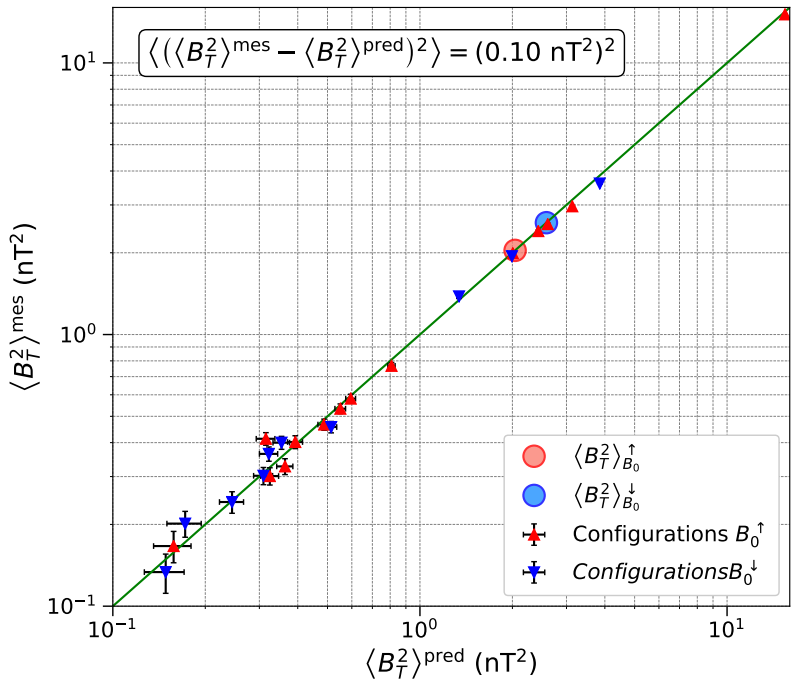
- L'incertitude due à la technique de prise de données et d'analyse des cartographies. Comme cela a été discuté dans la section 3.3.1, cette incertitude est représentée par le maximum entre la répétabilité des cartographies $\tau_{\widehat{G}}$ et l'erreur issue de l'ajustement. Dans le cas du gradient fantôme \widehat{G} , on prend donc la répétabilité. Cette source est comptée deux fois, une fois pour la carte de configuration et une autre pour la carte de B_0 , ce qui fait une contribution totale de $2 \times (0.38 \text{ pT/cm})^2$.
- L'erreur de prédiction des bobines de guidage et des trimcoils, qui peut donc être estimée par déduction, soit $(0.45 \text{ pT/cm})^2$.

On voit que l'erreur de prédiction des bobines additionnelles est du même ordre de grandeur que la répétabilité. Elle est toutefois inférieure à la reproductibilité $\sigma_{\widehat{G}}$ et celle-ci reste donc la source d'erreur dominante sur les cartographies.

Cette méthode de comparaison a aussi été appliquée pour l'inhomogénéité transverse. Celle-ci n'est bien sûr pas linéaire directement, contrairement aux gradients. On peut toutefois la calculer à partir des gradients eux-mêmes. Les résultats sont visibles sur la figure 3.15b. Les valeurs mesurées et prédites sont également en bon accord et on peut estimer la contribution à la différence carrée moyenne de la prédiction des bobines de la même façon que pour le gradient fantôme, ce



(a) Comparaison pour le gradient fantôme \hat{G} .



(b) Comparaison pour l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$.

FIGURE 3.15 – Comparaison des valeurs, calculées avec la mesure d'une carte de B_0 du même groupe et les prédictions des bobines additionnelles en abscisse, et mesurées pour les cartes de configurations magnétiques en ordonnée. La ligne verte est la première bissectrice $x = y$. Les barres d'erreurs ne comprennent que la contribution de la répétabilité. La valeur encadrée est la différence au carré moyenne de cette comparaison.

qui donne $(0.09 \text{ nT}^2)^2$. On voit pour l'inhomogénéité transverse que cette source d'erreur est largement dominante dans le cadre de la vérification de la linéarité. Elle reste toutefois trois fois plus faible que la reproductibilité $\sigma_{\langle B_T^2 \rangle}$.

Sur la figure 3.15b, il est intéressant de remarquer que tous les points sont concentrés dans le carré délimité par la borne supérieure de 4 nT^2 , à l'exception d'un seul d'entre eux. Ce point correspond à la configuration magnétique de l'une des premières séquences de données nEDM acquise en 2015. L'algorithme d'uniformisation du champ évoqué dans le chapitre précédent (voir section 2.4.3) ne prenait alors pas en compte la minimisation de l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$. On ne peut donc que constater l'efficacité de cet algorithme en comparant l'ordre de grandeur de $\langle B_T^2 \rangle$ pour ce point particulier et pour toutes les autres configurations magnétiques.

Nous avons pu montrer que la linéarité des gradients est bien vérifiée. La deuxième méthode pour extraire \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ par séquence nEDM en exploitant la linéarité est donc bien réalisable. Nous allons à présent comparer les deux méthodes d'extraction afin de déterminer laquelle est la plus précise et la moins sujette aux erreurs.

3.3.3.3 Comparaison des deux méthodes d'extraction des gradients

Commençons ici par rappeler brièvement les deux différentes méthodes possibles pour extraire le gradient fantôme et l'inhomogénéité transverse pour chaque séquence de données nEDM à partir des cartes de champ magnétique. Pour une séquence donnée, \hat{G} et les gradients généralisés $G_{l,m}$ servant à calculer $\langle B_T^2 \rangle$ peuvent être :

1. mesurés grâce à l'analyse d'une carte du champ utilisé lors de cette séquence (bobine B_0 alimentée et application des mêmes courants dans les bobines de guidage et trimcoils),
2. prédits par le calcul en combinant la contribution de la bobine B_0 (avec l'estimateur de moyenne globale (3.26) ou (3.27) et celle des bobines additionnelles grâce à la linéarité (méthode décrite par les équations (3.32) et (3.33)).

Une comparaison graphique de ces méthodes pour les deux grandeurs d'intérêt \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ est visible sur la figure 3.16. Comme on pouvait s'y attendre étant donné les résultats de la vérification de la linéarité, les valeurs données par les deux méthodes sont en excellent accord, tant pour \hat{G} que $\langle B_T^2 \rangle$. Les différences carrées moyennes sont cette fois plus grandes, ce qui est parfaitement attendu étant donné que la reproductibilité entre cette fois en ligne de compte, tout du moins pour les valeurs mesurées. On peut déjà voir sur le graphique que les barres d'erreurs horizontales sont plus petites et que la méthode de prédiction est donc plus précise. Nous allons détailler les différentes contributions aux erreurs pour la mesure et la prédiction dans le cas du gradient fantôme afin de s'en convaincre.

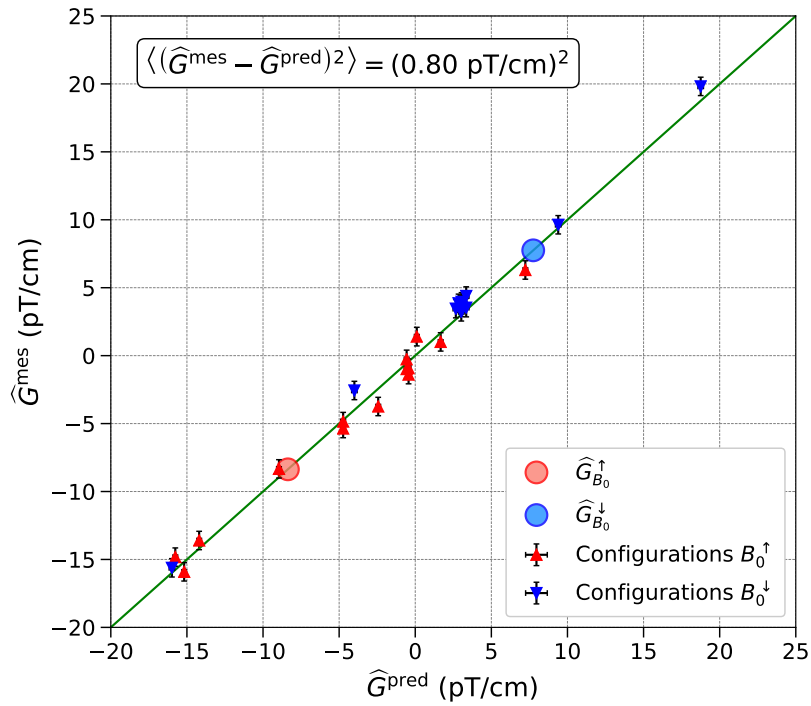
Plaçons-nous dans le cas simple où l'on considère une unique séquence de données nEDM prise entre deux démagnétisations du blindage. L'incertitude sur le gradient fantôme \hat{G} issue de la première méthode d'extraction est

$$(\Delta \hat{G}^{\text{mes}})^2 = \sigma_{\hat{G}}^2 + \sigma_{\hat{G}}^2 + \tau_{\hat{G}}^2, \quad (3.34)$$

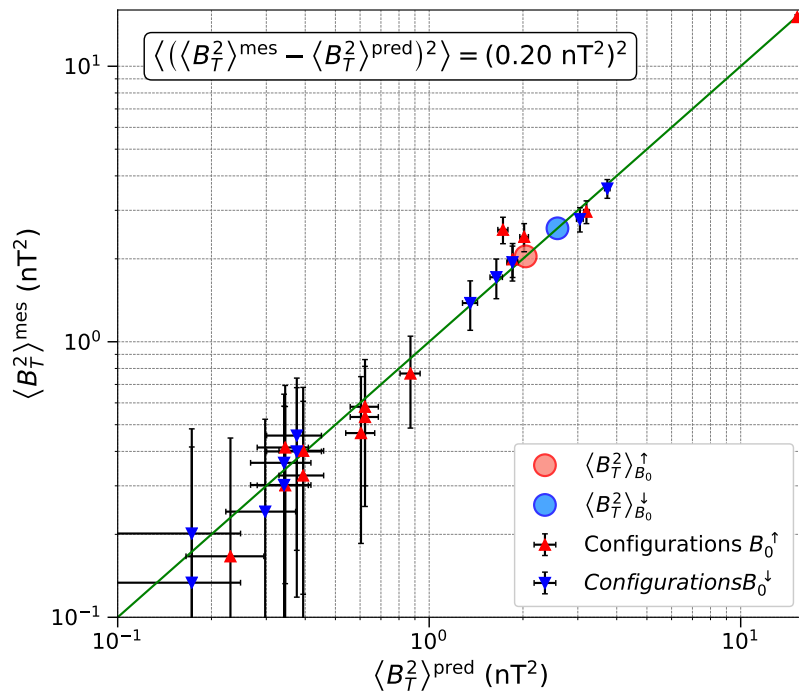
et pour la seconde,

$$\left(\Delta \hat{G}^{\text{pred}}\right)^2 = \sigma_{\hat{G}}^2 + \frac{\sigma_{\hat{G}}^2 + \tau_{\hat{G}}^2}{N_{\text{torl}}} + \sum_c^{N_{\text{bob}}} (i_c \Delta \hat{g}_c)^2. \quad (3.35)$$

Le premier terme commun aux deux méthodes est la reproductibilité $\sigma_{\hat{G}}$. En effet, les cartographies étant une mesure hors-ligne du champ magnétique, la reproductibilité est une limitation



(a) Comparaison pour le gradient fantôme \widehat{G} .



(b) Comparaison pour l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$.

FIGURE 3.16 – Comparaison des valeurs, calculées avec la méthode de prédiction (2) abscisse, et mesurées pour les cartes de configurations magnétiques (1) en ordonnée. La ligne verte est la première bissectrice $x = y$. La valeur encadrée est la différence au carré moyenne de cette comparaison.

intrinsèque de ces mesures et doit être prise en compte en tant qu'incertitude sur le champ utilisé lors de la séquence nEDM.

Pour la première méthode d'extraction, les deux termes suivants sont simplement les deux incertitudes intervenant sur la mesure d'un gradient sur une carte de champ :

- la reproductibilité du champ $\sigma_{\hat{G}} = 0.56$ pT/cm qui intervient à chaque génération de champ après une démagnétisation,
- la répétabilité des cartographies $\tau_{\hat{G}} = 0.38$ pT/cm qui représente l'incertitude sur la mesure et l'analyse.

La somme quadratique de ces différentes contributions donne une erreur finale de $\Delta\hat{G}^{\text{mes}} \sim 0.9$ pT/cm, ceux qui correspondent à une contribution d'environ 4×10^{-27} e cm à l'EDM mesuré sur la séquence de données.

Les deux derniers termes de la seconde méthode correspondent quant eux directement aux incertitudes sur les termes de l'équation (3.33) :

- l'incertitude sur l'estimateur de la moyenne globale issue de l'analyse des cartes de B_0 , qui dépend du sens du champ, $\frac{\sigma_{\hat{G}}^2 + \tau_{\hat{G}}^2}{N_{\text{tot}}} \sim 0.2$ pT/cm,
- l'incertitude sur la prédiction du gradient produit par des bobines additionnelles, dont on a pu estimer une valeur moyenne grâce à la vérification de la linéarité, $\sum_c^{N_{\text{bob}}} (i_c \Delta \hat{g}_c) \sim 0.45$ pT/cm.

Dans le cas de la deuxième méthode, la combinaison de toutes les différentes contributions donne une erreur finale de $\Delta\hat{G}^{\text{pred}} \sim 0.7$ pT/cm, soit environ 3×10^{-27} e cm pour l'EDM mesuré sur la séquence.

On en conclut que la méthode la plus précise d'extraction est la prédiction en combinant l'analyse des cartes de B_0 et des cartes des trimcoils et des bobines de guidage. C'est donc cette méthode qui a été utilisée pour calculer les corrections à appliquer sur l'EDM et le rapport des fréquences pour chaque séquence, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Une dernière remarque peut être faite par rapport à un avantage de cette méthode comparée à celle s'appuyant sur la mesure du champ pour chaque configuration magnétique. L'utilisation de plusieurs cartes de B_0 et plusieurs cartes de chaque bobine additionnelle permet de diminuer l'impact d'une carte « défectueuse » (sujette à une large fluctuation statistique ou présentant un défaut dans l'acquisition de données), ce qui n'est pas le cas de la seconde méthode, pour laquelle une seule carte de chaque configuration magnétique a été enregistrée. Il est maintenant temps d'exploiter les résultats issus des cartographies magnétiques en détaillant la façon dont ils s'inscrivent dans l'analyse nEDM.

3.4 Conclusion

La mesure hors-ligne du gradient fantôme \hat{G} et de l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$ est faite au moyen des cartographies magnétiques. Celles-ci consistent à mesurer le champ vectoriel pour un ensemble de cercles de points. Les mesures sont réalisées par le mappeur, un système mécanique équipé d'un magnétomètre fluxgate à bas bruit qui s'installe dans la chambre à vide nEDM. Les cartographies de l'expérience nEDM se sont étalées sur trois campagnes, en 2013, 2014 et 2017, au cours desquelles plusieurs centaines de cartes ont été enregistrées, l'acquisition de chaque carte prenant de 3 à 6 heures. Des cartes auxiliaires, telles que des cartes d'étalonnage ou des enregistrements à une position fixe permettant l'étude du bruit de la fluxgate ont également régulièrement été réalisées au cours de ces campagnes.

Toutes les cartes ont été analysées individuellement en utilisant un algorithme particulier découpé en trois étapes : l'ajustement du champ en fonction de la position azimutale cercle par

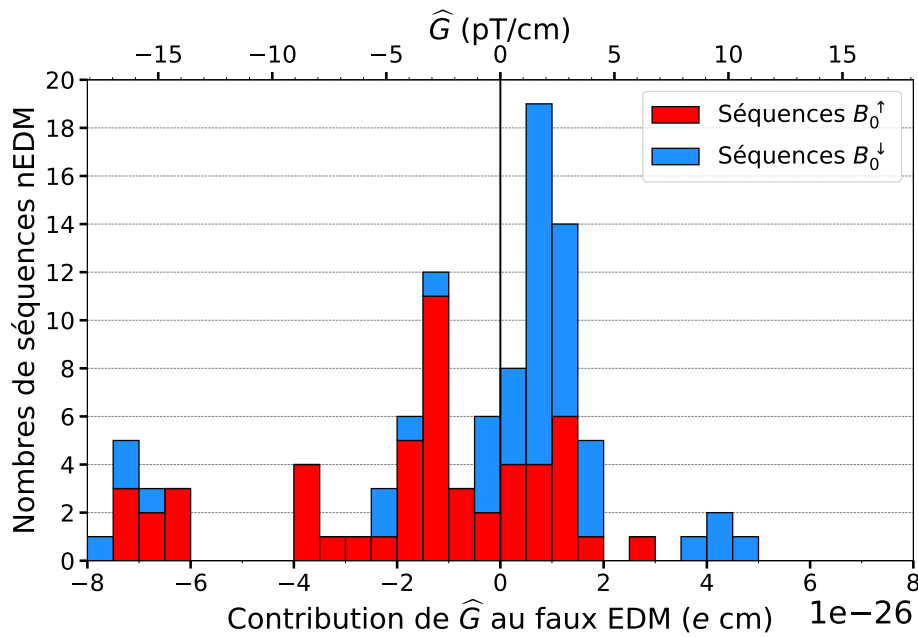


FIGURE 3.17 – Valeurs de la contribution de \hat{G} au faux EDM du mercure pour les 99 séquences de données nEDM.

cercle grâce à une série de Fourier, l’ajustement des coefficients de Fourier obtenus en fonction de la hauteur et du rayon avec le développement en polynômes harmoniques et enfin la combinaison des résultats des trois axes d’analyse du champ. Grâce à cette méthode, il est possible d’extraire par carte les valeurs des gradients généralisés $G_{l,m}$ et les quantités déduites \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$.

En plus de l’analyse carte par carte, une procédure d’analyse globale des cartes du champ produit par la bobine B_0 nous a permis d’extraire la source d’erreur principale de la mesure par cartographie, la reproductibilité de champ σ , qui quantifie notre capacité à reproduire une même configuration magnétique après une démagnétisation du blindage passif de mu-métal. L’analyse globale de tous les types de cartes a également permis de quantifier toutes les autres sources d’incertitude des cartographies, telles que la répétabilité de la mesure τ ou l’erreur de prédiction des bobines additionnelles. En se basant sur l’étude de ces différentes sources d’erreur, nous avons pu déterminer la méthode la plus précise pour extraire \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ par séquence de données nEDM. Cette méthode repose sur une prédiction de ces valeurs par le calcul en exploitant la linéarité des gradients de champ magnétique. Les gradients d’une configuration magnétique quelconque sont donc calculés en combinant ceux produits par la bobine B_0 et ceux produits par chaque bobine additionnelle du système (bobines de guidage et trimcoils).

Pour une séquence nEDM prise individuellement, l’effet systématique dû aux ordres supérieurs du faux EDM peut aller jusqu’à $8 \times 10^{-26} e \text{ cm}$. Les valeurs de cette contribution pour les 99 séquences EDM sont représentées sur la figure 3.17. Il s’agit donc d’un effet systématique dont l’amplitude par séquence rivalise avec la sensibilité statistique. Par séquence, la correction des ordres supérieurs grâce à la mesure de \hat{G} par la cartographie permet donc de soustraire cet effet en ne conservant comme erreur systématique que l’incertitude de \hat{G} propagée sur l’EDM, soit une erreur de l’ordre de $3 \times 10^{-27} e \text{ cm}$. L’impact de cette correction correspond donc une réduction d’un facteur 25 de l’erreur systématique pour une séquence.

Nous allons maintenant nous intéresser à la correction de ces ordres supérieurs pour l’ensemble des 99 séquences, ainsi qu’à celles faites sur le rapport des fréquences \mathcal{R} en détaillant la

dernière étape de l'analyse nEDM, qui nous permet d'obtenir la mesure de l'EDM du neutron.

3.5 Références

KUANG, K., éd.. 2012, "*Magnetic Sensors – Principles and Applications*", InTech. [97](#)

Chapitre 4

Point de croisement et EDM du neutron

« - *After all this time?*
- *Always.* »

Albus Dumbledore and Severus Snape in *Harry Potter and the Deathly Hallows* by Joanne K. Rowling

Sommaire

4.1	Méthode du point de croisement	134
4.1.1	Les sources de décalage du rapport \mathcal{R}	134
4.1.2	Équations de la méthode du point de croisement	138
4.2	Détermination de la hauteur du centre de masse des neutrons $\langle z \rangle$	140
4.2.1	Ajustement bloc par bloc	140
4.2.2	Choix de la méthode de mesure du gradient gravitationnel	141
4.3	Covariance de la méthode du point de croisement	144
4.3.1	Contribution statistique	144
4.3.2	Contribution de la reproductibilité du champ	145
4.3.3	Contribution de l'erreur sur la prédiction des gradients de champ	146
4.4	Résultat de la méthode du point de croisement	147
4.4.1	Le résultat de l'équipe Ouest	147
4.4.2	Mesure de l'EDM du neutron	150
4.5	Références	152

La méthode du point de croisement est la dernière étape de l'analyse des données nEDM. Bien que ce nom ait initialement été choisi en raison du principe de fonctionnement de cette méthode, il s'agit d'un nom fort approprié car cette étape est le point de croisement des étapes précédentes de l'analyse. En effet, d'un côté, l'analyse statistique a été entièrement réalisée par séquence (j'invite le lecteur à se référer à la thèse de KERMAIDIC [2016]), nous fournissant les valeurs de l'EDM mesuré d_{ni} et du rapport moyen des fréquences \mathcal{R}_{0i} , ainsi que l'erreur statistique par séquence. De l'autre, grâce à l'analyse des cartographies du champ magnétique qui a été faite au cours de cette thèse, on dispose de mesures du gradient fantôme \hat{G}_i et de l'inhomogénéité transverse $\langle B_{\perp}^2 \rangle_i$ et de leurs incertitudes pour chaque séquence. L'application de la méthode du point de croisement va consister à combiner les résultats de ces deux analyses parallèles pour pouvoir extraire l'EDM du neutron tout en corrigeant l'effet systématique du faux EDM individuellement par séquence.

Dans ce chapitre, nous allons expliquer plus en détail cette méthode et la façon dont elle a été mise en pratique afin d'extraire le résultat nEDM qui a permis d'établir la plus récente limite. Nous commencerons par discuter les différentes sources de décalage impactant le rapport des fréquences \mathcal{R} , et par conséquent, les deux grandeurs issues de l'analyse statistique, d_n et \mathcal{R}_0 . Nous aborderons également les choix faits pour déterminer les paramètres de cette méthode d'ajustement, en particulier la hauteur du centre de masse des UCN, $\langle z \rangle$, qui intervient dans la pente des droites à ajuster. Nous verrons ensuite comment sont prises en compte et propagées les incertitudes issues de l'analyse des cartes de champ magnétique. Enfin, nous discuterons du résultat EDM et de l'impact des corrections apportées par la cartographie.

Notons que la méthode du point de croisement telle qu'elle est explicitée ci-après a été développée sur un jeu de données en aveugle afin de ne pas influencer la performance de la méthode par le résultat. De plus, les séquences nEDM ont été entièrement analysées (et les cartographies également) par deux équipes différentes ayant le même jeu de données avec un *blinding* différent.

4.1 Méthode du point de croisement

Nous avons déjà expliqué le principe de la méthode du point de croisement, qui permet la correction du premier ordre du faux EDM induit par le mercure, dans la section 2.5.2. Nous avons également discuté du perfectionnement de cette méthode avec la correction des ordres supérieurs dans la section 2.5.3. Ces explications ont été faites en supposant que seuls le faux EDM dû au mercure et le décalage gravitationnel affectaient les quantités impliquées dans l'ajustement du point de croisement, d_n et \mathcal{R}_0 . Bien évidemment, il n'en est rien, et il existe diverses sources de décalage affectant ces grandeurs, que nous allons décrire ci-après plus ou moins succinctement, en fonction de leur importance.

4.1.1 Les sources de décalage du rapport \mathcal{R}

Sur une séquence, les décalages affectant le moment dipolaire électrique mesuré d_n ou le rapport moyen des fréquences \mathcal{R}_0 sont dus aux décalages du rapport des fréquences par cycle \mathcal{R} lui-même, qui sert à les calculer. Rappelons que celui-ci peut être modifié de sa valeur théorique $|\gamma_n/\gamma_{\text{Hg}}|$ par des effets intervenant sur la fréquence de Larmor des UCN, f_n , celle des atomes de mercure f_{Hg} , ou encore des effets impactant les deux fréquences de façon différente. Les effets

connus décalant \mathcal{R} dans l'expérience nEDM de PSI sont résumés dans l'expression suivante,

$$\mathcal{R} = \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \begin{pmatrix} + \delta_{n\text{EDM}} + \delta_{\text{HgEDM}} \\ 1 + \delta_{n\text{EDM}}^{\text{faux}} + \delta_{\text{HgEDM}}^{\text{faux}} + \delta_{\text{Quad}} \\ + \delta_{\text{Grav}} + \delta_{\text{T}} + \delta_{\text{Terre}} + \delta_{\text{autres}} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Les termes présents dans cette équation ont des origines différentes et peuvent être nuls dans certaines circonstances. En fonction de leur dépendance vis-à-vis des champs électrique et magnétique, ils peuvent causer un effet systématique nul, direct ou indirect, comme nous le verrons par la suite. Nous pouvons classer ces termes en trois catégories distinctes :

- les termes dépendant du champ électrique, qui s'annulent en cas de champ électrique nul, $\delta_{n\text{EDM}}$, δ_{HgEDM} , $\delta_{n\text{EDM}}^{\text{faux}}$, $\delta_{\text{HgEDM}}^{\text{faux}}$ et δ_{Quad} ,
- les termes causés par l'inhomogénéité du champ magnétique, δ_{Grav} et δ_{T} , qui n'existent pas en cas d'uniformité parfaite du champ (cas $\vec{B}_0 = G_{0,0}\vec{e}_z$),
- les effets secondaires, qui ne sont reliés ni au champ électrique, ni au champ magnétique, mais qui induisent néanmoins un décalage, δ_{Terre} et δ_{autres} .

4.1.1.1 Effets dépendant du champ électrique

Le premier terme lié au champ électrique est bien entendu le décalage lié à l'EDM du neutron lui-même,

$$\delta_{n\text{EDM}} = -\frac{2E}{\hbar|\gamma_n|B_0}d_n^{\text{vrai}}, \quad (4.2)$$

où E et B_0 sont les amplitudes scalaires signées respectives des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B}_0 . Le signe de cette contribution est donc inversé lorsque les champs sont parallèles ou anti-parallèles. Son signe dépend également du signe, inconnu, de l'EDM du neutron, d_n^{vrai} . Ce décalage se retrouve bien évidemment dans la valeur de l'EDM mesuré par séquence, d_n . En revanche, puisque cette contribution s'annule entre les configurations parallèles et anti-parallèles, elle n'est pas présente dans le rapport moyen des fréquences sur une séquence, \mathcal{R}_0 .

Le second terme est également un signal dû à un véritable EDM, celui de l'atome de ^{199}Hg . Il s'exprime comme suit,

$$\delta_{\text{HgEDM}} = -\frac{2E}{\hbar|\gamma_n|B_0}d_{n\leftarrow\text{Hg}}, \quad (4.3)$$

avec $d_{n\leftarrow\text{Hg}}$ pouvant être estimé grâce à la mesure la plus récente de l'EDM du mercure, $d_{\text{Hg}} = (2.2 \pm 3.1) \times 10^{-30} e \text{ cm}$ GRANER et collab. [2016],

$$d_{n\leftarrow\text{Hg}} = \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| d_{\text{Hg}} = (0.8 \pm 1.2) \times 10^{-29} e \text{ cm}. \quad (4.4)$$

Comme pour le terme de l'EDM du neutron, ce terme n'est présent que dans le rapport moyen \mathcal{R}_0 , sa contribution s'annulant avec l'inversion du champ électrique. Toutefois, sa contribution à d_n est elle-même négligeable par rapport à la sensibilité statistique et aux autres effets systématiques et nous pourrions donc ignorer ce terme en appliquant la méthode du point de croisement.

Le terme $\delta_{n\text{EDM}}^{\text{faux}}$ est dû au faux EDM direct des neutrons et s'exprime comme suit,

$$\delta_{n\text{EDM}}^{\text{faux}} = -\frac{2E}{\hbar|\gamma_n|B_0}d_n^{\text{faux}}, \quad (4.5)$$

avec

$$d_n^{\text{faux}} = -\frac{\hbar v_{\text{rms}}^2}{2c^2 B_0^2} \left\langle \frac{\partial B_{0z}}{\partial z} \right\rangle, \quad (4.6)$$

où $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$ est la vitesse quadratique moyenne du gaz d'UCN. Nous avons déjà discuté cet effet dans le chapitre 1 de cette thèse (voir section 1.3.4) comme étant négligeable. Ce terme sera donc lui aussi ignoré par la suite.

Le terme $\delta_{\text{HgEDM}}^{\text{faux}}$ est bien entendu le terme central du problème que cherche à résoudre cette thèse. Il s'agit du décalage causé par le faux EDM du mercure, qui s'écrit

$$\delta_{\text{HgEDM}}^{\text{faux}} = -\frac{2E}{\hbar |\gamma_n| B_0} d_{n-\text{Hg}}^{\text{faux}}, \quad (4.7)$$

avec, on le rappelle,

$$d_{n-\text{Hg}}^{\text{faux}} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}| R^2}{8c^2} (G_{\text{grav}} + \widehat{G}), \quad (4.8)$$

où G_{Grav} est le gradient gravitationnel et \widehat{G} le gradient fantôme, dont les expressions respectives jusqu'à l'ordre $l = 7$ du développement polynomial sont

$$G_{\text{Grav}} = \left[\begin{array}{l} G_{1,0} + G_{3,0} \left(\frac{3H^2}{20} - \frac{3R^2}{4} \right) \\ + G_{5,0} \left(\frac{3H^4}{112} - \frac{3R^2 H^2}{8} + \frac{5R^4}{8} \right) \\ + G_{7,0} \left(\frac{H^6}{192} - \frac{9R^2 H^4}{64} + \frac{21R^4 H^2}{32} - \frac{35R^6}{64} \right) \end{array} \right], \quad (4.9)$$

et

$$\widehat{G} = \widehat{G}_3 + \widehat{G}_5 + \widehat{G}_7 = \left[\begin{array}{l} G_{3,0} \left(\frac{H^2}{10} + \frac{R^2}{4} \right) \\ + G_{5,0} \left(\frac{H^4}{28} - \frac{R^2 H^2}{24} - \frac{5R^4}{16} \right) \\ + G_{7,0} \left(\frac{H^6}{96} - \frac{5R^2 H^4}{64} - \frac{7R^4 H^2}{64} + \frac{21R^6}{64} \right) \end{array} \right]. \quad (4.10)$$

Ce terme, comme tous ceux présentés ci-avant, est linéaire en E et ne contribue donc pas au rapport moyen \mathcal{R}_0 mais il est bien évidemment présent dans l'EDM mesuré d_n .

Le terme δ_{Quad} dépend également du champ électrique mais pas linéairement. Il s'agit du terme quadratique en E de l'effet $\vec{v} \times \vec{E}$ des neutrons et des atomes de mercure, qui s'exprime comme

$$\delta_{\text{Quad}} = \left(\frac{v_{\text{rms}}^2}{B_0^2} + \frac{\gamma_{\text{Hg}}^2 R^2}{4} \right) \frac{E^2}{c^4}, \quad (4.11)$$

où le premier terme est dû à l'effet direct sur les neutrons et le second à celui indirect induit par le mercure. Ce terme a également déjà été discuté dans le premier chapitre (voir section 1.3.4) comme étant négligeable.

4.1.1.2 Effets dus aux inhomogénéités du champ magnétique

Le décalage le plus large intervenant dans l'équation (4.1) est sans conteste le décalage gravitationnel δ_{Grav} . Pour un rappel de la cause de cet effet et du développement de son expression en fonction des gradients généralisés du développement polynomial du champ magnétique, j'invite le lecteur à se référer à la section 2.3.2.2. L'expression de ce décalage est la suivante,

$$\delta_{\text{Grav}} = \frac{G_{\text{Grav}} \langle z \rangle}{B_0}, \quad (4.12)$$

l'expression de G_{Grav} étant donnée par (4.9). On rappelle que $\langle z \rangle$ est négatif et de l'ordre de quelques millimètres et que B_0 est l'amplitude signée de la composante B_{0z} du champ \vec{B}_0 . Le décalage gravitationnel ne dépendant pas du champ électrique, il n'a pas de raison de varier lors de l'inversion de celui-ci et ce terme ne se propage donc pas sur l'EDM mesuré d_n . Il est en revanche bien évidemment présent dans le rapport moyen \mathcal{R}_0 , ce qui constitue la clé essentielle pour réaliser la méthode du point de croisement.

Nous avons également déjà parlé de l'effet dû à l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$, dans la section 2.3.2.1. Cet effet induit le décalage suivant,

$$\delta_T = \frac{\langle B_T^2 \rangle}{2B_0^2}. \quad (4.13)$$

On rappelle que l'expression de $\langle B_T^2 \rangle$ en fonction des gradients généralisés jusqu'à l'ordre 7 de la paramétrisation polynomiale peut être trouvée dans l'annexe B. Tout comme le décalage gravitationnel, δ_T n'induit pas de faux EDM direct dans d_n mais reste visible dans l'expression de \mathcal{R}_0 .

4.1.1.3 Effets secondaires

La mesure du rapport des fréquences de précession f_n et f_{Hg} est réalisée dans le référentiel tournant à la fréquence de rotation de la Terre, f_{Terre} . Les fréquences mesurées sont par convention définies comme positives et, dépendant du sens du champ magnétique, f_{Terre} va donc causer un décalage positif ou négatif des valeurs mesurées de ces fréquences. Le décalage sur le rapport \mathcal{R} s'exprime comme suit,

$$\delta_{\text{Terre}} = -\frac{B_0}{|B_0|} \left(\frac{f_{\text{Terre}}}{f_n} + \frac{f_{\text{Terre}}}{f_{\text{Hg}}} \right) \cos \theta, \quad (4.14)$$

avec $f_{\text{Terre}} = 11.6 \mu\text{Hz}$ et θ l'angle entre la direction du champ \vec{B}_0 et l'axe de rotation de la Terre. La fréquence de rotation de la Terre étant connue très précisément, cet effet, une fois corrigé, n'altère en rien la sensibilité de la mesure. Il s'agit d'un effet de l'ordre de 10^{-6} qui impacte fortement le résultat de la méthode du point de croisement dû à son signe dépendant de la direction du champ magnétique. Comme tous les effets non dépendant du champ électrique \vec{E} , ce décalage affecte uniquement le rapport moyen \mathcal{R}_0 parmi les deux quantités qui nous intéressent.

D'autres effets secondaires, qui sont regroupés dans le terme δ_{autres} , induisent un décalage du rapport \mathcal{R} et par conséquent de sa valeur moyenne \mathcal{R}_0 . Nous ne détaillerons pas de tels effets ci-après car ils n'ont pas été étudiés au cours de cette thèse. En effet, il s'agit de décalages très faibles qui seront pris en compte après l'application de la méthode du point de croisement, en tant qu'erreurs systématiques sur l'EDM du neutron.

4.1.1.4 Résumé des décalages affectant d_n et \mathcal{R}_0

Dans la suite de ce chapitre, afin d'alléger les notations, pour une séquence i , on utilisera les notations d_i et \mathcal{R}_i pour signifier respectivement l'EDM mesuré d_{ni} et la rapport moyen \mathcal{R}_{0i} . Si l'on ne considère aucun des effets négligeables, qui seront comptabilisés dans le budget final des erreurs systématiques, on peut exprimer d_i comme suit,

$$\begin{aligned} d_i &= d_i^{\text{vrai}} + d_i^{\text{faux}} \\ &= d_i^{\text{vrai}} + \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}| R^2}{8c^2} (G_{\text{grav}i} + \hat{G}_i), \end{aligned} \quad (4.15)$$

et le rapport \mathcal{R}_i comme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &= \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| (1 + \delta_{\text{Grav}i} + \delta_{\text{T}i} + \delta_{\text{Terre}i}) \\ &= \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \left[1 + \frac{G_{\text{Grav}i} \langle z \rangle}{B_{0i}} + \frac{\langle B_{\text{T}}^2 \rangle_i}{2B_{0i}^2} - \frac{B_{0i}}{|B_{0i}|} \left(\frac{f_{\text{Terre}}}{f_n} + \frac{f_{\text{Terre}}}{f_{\text{Hg}}} \right) \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

La valeur absolue du terme $\delta_{\text{Terre}i}$ est identique quelque soit le sens du champ magnétique et seul le signe de ce terme change dépendant de \vec{B}_0 . Afin de ne pas alourdir inutilement les équations, son expression détaillée ne sera pas redonnée par la suite.

Pour chacune des 99 séquences de données nEDM, l'analyse des données nEDM nous fournit donc un couple (d_i, \mathcal{R}_i) et l'analyse des cartes de champ nous permet d'obtenir les valeurs $(\hat{G}_i, \langle B_{\text{T}}^2 \rangle_i)$. Ce sont toutes ces grandeurs et leurs erreurs associées qui vont être utilisées pour réaliser la méthode du point de croisement. Passons à présent à la description complète de celle-ci telle qu'elle a été appliquée pour la extraire la valeur de l'EDM du neutron.

4.1.2 Équations de la méthode du point de croisement

Le principe de base de la méthode du point de croisement a déjà été explicité dans la section 2.5. Il s'agit d'utiliser la dépendance en G_{Grav} du faux EDM d_i^{faux} et de \mathcal{R}_i pour pouvoir extrapoler la valeur de l'EDM lorsque $G_{\text{Grav}} = 0$ et que le faux EDM s'annule. Comme nous l'avons toutefois vu, la contribution du gradient fantôme n'est pas annulée grâce à cette méthode et elle doit être soustraite séquence par séquence. Voyons les équations complètes du modèle permettant de relier d_i et \mathcal{R}_i . A partir des ensembles $(d_i, \mathcal{R}_i, \hat{G}_i, \langle B_{\text{T}}^2 \rangle_i, B_{0i})$, nous allons définir les grandeurs d'intérêt pertinentes pour développer le modèle d'ajustement ci-après. Afin de faciliter la lecture, les expressions de ces grandeurs et du modèle final utilisé seront encadrées.

Si l'on inverse l'équation (4.16) afin d'exprimer $G_{\text{Grav}i}$ en fonction de \mathcal{R}_i , on obtient

$$G_{\text{Grav}i} = \left| \frac{\gamma_{\text{Hg}}}{\gamma_n} \right| \times \frac{B_{0i}}{\langle z \rangle} \left[\mathcal{R}_i - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \left(\frac{\langle B_{\text{T}}^2 \rangle_i}{2B_{0i}^2} - \delta_{\text{Terre}i} \right) - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \right]. \quad (4.17)$$

On définit alors par séquence la grandeur $\mathcal{R}_i^{\text{corr}}$, le rapport moyen des fréquences corrigé des effets de l'inhomogénéité transverse et de la rotation de la Terre,

$$\boxed{\mathcal{R}_i^{\text{corr}} = \mathcal{R}_i - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \left(\frac{\langle B_{\text{T}}^2 \rangle_i}{2B_{0i}^2} - \delta_{\text{Terre}i} \right)}, \quad (4.18)$$

ce qui permet de réécrire plus simplement l'expression (4.17) :

$$G_{\text{Gravi}} = \left| \frac{\gamma_{\text{Hg}}}{\gamma_n} \right| \times \frac{B_{0i}}{\langle z \rangle} \left(\mathcal{R}_i^{\text{corr}} - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \right). \quad (4.19)$$

En substituant G_{Gravi} dans l'équation (4.15) et en réarrangeant les termes de celle-ci, on obtient la relation entre d_i et $\mathcal{R}_i^{\text{corr}}$ suivante :

$$d_i - \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}| R^2}{8c^2} \hat{G}_i = d_i^{\text{vrai}} + \frac{\hbar \gamma_{\text{Hg}}^2 R^2}{8c^2} \frac{B_{0i}}{\langle z \rangle} \left(\mathcal{R}_i^{\text{corr}} - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \right). \quad (4.20)$$

On définit la nouvelle variable d_i^{corr} comme l'EDM mesuré affranchi de la contribution fantôme du faux EDM,

$$\boxed{d_i^{\text{corr}} = d_i - \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}| R^2}{8c^2} \hat{G}_i,} \quad (4.21)$$

ainsi que la pente d'ajustement η_i , dépendante de la direction du champ magnétique :

$$\boxed{\eta_i = \frac{\hbar \gamma_{\text{Hg}}^2 R^2}{8c^2} \times \frac{B_{0i}}{\langle z \rangle}.} \quad (4.22)$$

Ces deux nouvelles définitions nous permettent de simplifier l'expression (4.21) en établissant la relation simple suivante entre les grandeurs d_i^{corr} , $\mathcal{R}_i^{\text{corr}}$ et η_i :

$$d_i^{\text{corr}} = d_i^{\text{vrai}} + \eta_i \left(\mathcal{R}_i^{\text{corr}} - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \right). \quad (4.23)$$

En pratique, l'application de la méthode du point de croisement va donc consister à ajuster les données $(d_i^{\text{corr}}, \mathcal{R}_i^{\text{corr}}, \eta_i)$ pour obtenir d_x et \mathcal{R}_x , les estimations respectives des paramètres d_i^{vrai} et $|\gamma_n / \gamma_{\text{Hg}}|$. Les variations temporelles de la norme B_0 n'excédant pas quelques centaines de pT sur les séquences de données, on peut faire l'approximation $B_{0i} = B_0$ et prendre la valeur moyenne de B_0 fournie par le co-magnétomètre mercure sur les 99 séquences. Avec cette décision, on notera que η_i n'est en réalité pas une réelle variable à ajuster. En effet, il s'agit tout simplement de la pente du modèle et pour toutes les séquences, $|\eta_i| = \eta$. Toutefois, étant donné que le signe de cette pente s'inverse entre les séquences où le champ magnétique \vec{B}_0 est dirigé vers le haut et celles où il est dirigé vers le bas, l'introduction de cette « variable » supplémentaire permet de décrire les séquences acquises dans les deux directions du champ avec le même modèle.

L'équation (4.23) décrit donc deux droites de pente absolue égale mais de signe opposé, comme illustré par la figure 2.22 du chapitre 2. Chacune de ces droites correspond à une direction du champ magnétique \vec{B}_0 et les paramètres d'ajustement \mathcal{R}_x et d_x correspondent aux coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. En utilisant toutes les notations appropriées pour décrire le modèle d'ajustement de la méthode du point de croisement, celui-ci s'écrit sous la forme

$$\boxed{d_i^{\text{corr}} - \eta_i \mathcal{R}_i^{\text{corr}} = d_x - \eta_i \mathcal{R}_x.} \quad (4.24)$$

Cet ajustement est réalisé avec une minimisation de χ^2 sommé sur les 99 séquences de données. Il existe diverses sources d'incertitudes contribuant pour chaque séquence et nous verrons un peu plus tard qu'elles ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres. Les erreurs propagées des

corrections magnétiques en particulier peuvent être corrélées d'une séquence à l'autre et c'est donc une minimisation de χ^2 avec une matrice de covariance des données non-diagonale qui est appliquée. La somme à minimiser est donc la suivante :

$$\chi^2(d_x, \mathcal{R}_x) = \sum_{i,j}^{99} \left[\left(d_i^{\text{corr}} - \eta_i \mathcal{R}_i^{\text{corr}} \right) - (d_x - \eta_i \mathcal{R}_x) \right] C_{ij}^{-1} \left[\left(d_j^{\text{corr}} - \eta_j \mathcal{R}_j^{\text{corr}} \right) - (d_x - \eta_j \mathcal{R}_x) \right], \quad (4.25)$$

où C est la matrice de covariance des données. Il s'agit d'une matrice carrée symétrique (99×99) dont les différentes contributions seront détaillées dans la section 4.3. Le problème étant linéaire en fonction des paramètres, la minimisation du χ^2 donné dans l'équation (4.25) mène au système suivant,

$$\begin{bmatrix} \sum_{i,j}^{99} C_{ij}^{-1} \left(d_i^{\text{corr}} - \eta_i \mathcal{R}_i^{\text{corr}} \right) \\ \sum_{i,j}^{99} C_{ij}^{-1} \eta_j \left(d_i^{\text{corr}} - \eta_i \mathcal{R}_i^{\text{corr}} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i,j}^{99} C_{ij}^{-1} & -\sum_{i,j}^{99} C_{ij}^{-1} \eta_i \\ -\sum_{i,j}^{99} C_{ij}^{-1} \eta_i & \sum_{i,j}^{99} C_{ij}^{-1} \eta_i \eta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ \mathcal{R}_x \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

qu'il suffit d'inverser pour obtenir les paramètres d'ajustement d_x et \mathcal{R}_x . Pour ce faire, deux éléments sont toutefois nécessaires. Le premier a déjà été évoqué, il s'agit de la matrice de covariance C, dont nous discuterons la composition sous peu. Le second élément nécessaire pour résoudre ce système est la valeur de la pente du modèle η_i , dont l'expression est donnée par l'équation (4.22). Le facteur B_0 est connu puisqu'il s'agit simplement de l'amplitude signée du champ magnétique, mesurée par le magnétomètre mercure de façon très précise. La valeur du rapport gyromagnétique du mercure est tirée de la littérature : $\gamma_{\text{Hg}} = 2\pi \times 7.590188(13)$ MHz/T. Un seul élément manque donc pour pouvoir connaître la pente de l'ajustement; il s'agit de la hauteur du centre de masse des neutrons, $\langle z \rangle$. Nous allons donc voir comment celle-ci a été déterminée.

4.2 Détermination de la hauteur du centre de masse des neutrons $\langle z \rangle$

On se rappelle avoir conclu dans le chapitre précédent que, du fait de la mauvaise reproductibilité du gradient $G_{1,0}$, nous ne sommes pas capable de calculer avec suffisamment de précision le faux EDM du mercure en s'appuyant uniquement sur les mesures de la cartographie. Si l'on veut calculer la valeur du gradient gravitationnel seul en utilisant les cartes de champ, le même problème se pose. Cependant, si l'on s'intéresse uniquement à la variation de ce gradient sur un bloc de séquences et non à sa valeur exacte, la reproductibilité n'est alors plus un problème. On rappelle qu'un bloc de séquences consiste en un groupe d'une à dix séquences nEDM acquises à la suite sans démagnétisation du blindage et avec pour seule variation les courants des bobines BTC et TTC, qui génèrent principalement un gradient $G_{1,0}$. Au sein d'un même bloc, la reproductibilité intervient dans l'incertitude sur les G_{Grav} de toutes les séquences de façon complètement corrélée. Pour un unique bloc, on peut donc calculer les G_{Grav} de façon inexacte mais précise. C'est grâce à cette idée que l'on va pouvoir estimer la valeur de $\langle z \rangle$.

4.2.1 Ajustement bloc par bloc

Nous avons donné dans la section 4.1.1 l'expression du rapport moyen des fréquences par séquence (voir eq. (4.16)). Au sein d'un bloc, la direction du champ magnétique étant toujours la même, l'effet de la rotation de la Terre, δ_{Terre} reste constant. Comme nous l'avons dit précédemment, il s'agit d'un effet de l'ordre de 10^{-6} , soit avec une amplitude plus de 10^{-6} fois plus petite

que $|\gamma_n/\gamma_{\text{Hg}}|$. Dans le problème de la détermination de $\langle z \rangle$, afin de simplifier le problème et les expressions, nous allons donc négliger cette contribution au ratio \mathcal{R}_i . Si l'on corrige celui-ci de l'inhomogénéité transverse, c'est-à-dire si l'on s'intéresse plutôt à la grandeur $\mathcal{R}_i - |\gamma_n/\gamma_{\text{Hg}}| \delta_{Ti}$, celle-ci dépend donc du gradient gravitationnel comme suit :

$$\mathcal{R}_i - \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \delta_{Ti} = \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \left(1 + \frac{G_{\text{Gravi}} \langle z \rangle}{B_0} \right). \quad (4.27)$$

Afin d'obtenir une estimation de $\langle z \rangle$, nous allons donc ajuster pour chaque bloc b la quantité $\mathcal{Q}_i = \mathcal{R}_i - |\gamma_n/\gamma_{\text{Hg}}| \delta_{Ti}$ en fonction du gradient gravitationnel, en laissant comme paramètres libres $\langle z \rangle_b$ et \mathcal{R}_b en tant qu'estimations respectives de $\langle z \rangle$ et $|\gamma_n/\gamma_{\text{Hg}}|$. Le modèle d'ajustement est donc le suivant :

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{R}_b + \frac{\mathcal{R}_b \langle z \rangle_b}{B_0} G_{\text{Gravi}i}. \quad (4.28)$$

Pour réaliser cet ajustement, on utilise une fois de plus la méthode de minimisation des moindres carrés. Nous n'utilisons pas ici la méthode pondérée par les erreurs car celles-ci sont quasiment identiques pour toutes les séquences d'un même bloc, que ce soit pour la quantité \mathcal{Q}_i ou $G_{\text{Gravi}i}$. Pour chaque bloc b , on va donc minimiser la somme suivante :

$$\chi_b^2 = \sum_i \left(\mathcal{Q}_i - \mathcal{R}_b - \frac{\mathcal{R}_b \langle z \rangle_b}{B_0} G_{\text{Gravi}i} \right)^2. \quad (4.29)$$

Le système obtenu se simplifie admirablement pour obtenir la solution suivante,

$$\mathcal{R}_b = \frac{\sum_i \mathcal{Q}_i G_{\text{Gravi}i}}{\sum_i G_{\text{Gravi}i} + \frac{\langle z \rangle_b}{B_0} \sum_i G_{\text{Gravi}i}^2} \quad (4.30)$$

et

$$\langle z \rangle_b = -B_0 \frac{\sum_i \mathcal{Q}_i \sum_i G_{\text{Gravi}i} - \sum_i \mathcal{Q}_i G_{\text{Gravi}i} \sum_i 1}{\sum_i \mathcal{Q}_i \sum_i G_{\text{Gravi}i}^2 - \sum_i \mathcal{Q}_i G_{\text{Gravi}i} \sum_i G_{\text{Gravi}i}}. \quad (4.31)$$

La valeur du paramètre \mathcal{R}_b n'a ici pour nous que peu d'intérêt et nous nous intéresserons donc seulement à $\langle z \rangle_b$. Nous avons déjà donné l'illustration d'un tel ajustement dans le deuxième chapitre de cette thèse pour montrer la dépendance du rapport des fréquences en fonction du gradient gravitationnel. J'invite donc le lecteur à consulter à nouveau la figure 2.12 pour voir la représentation graphique de l'un des ajustements par bloc réalisés ici.

Une fois ces calculs réalisés sur tous les blocs, on peut alors moyenner les valeurs de $\langle z \rangle_b$ obtenues afin d'estimer $\langle z \rangle$ et simplement utiliser l'écart-type de cette distribution en tant qu'incertitude. Pour ce faire, le choix a été fait d'ignorer tous les blocs de trois séquences ou moins. En effet, ces blocs ne disposent que d'un ou zéro degré de liberté pour pouvoir ajuster les données et il n'est donc pas pertinent de les prendre en compte.

Nous avons établi la méthode pour pouvoir déterminer $\langle z \rangle$. Il nous faut maintenant décider des outils à utiliser pour la mettre en application. C'est ce que nous allons faire ci-après en choisissant la technique de mesure du gradient gravitationnel G_{Gravi} .

4.2.2 Choix de la méthode de mesure du gradient gravitationnel

Deux options sont possibles pour déterminer la valeur du gradient gravitationnel par séquence. La première découle de façon logique du travail présenté précédemment dans cette thèse : il s'agit

TABLEAU 4.1 – Comparaison des résultats de l'estimation de $\langle z \rangle$ avec les différentes méthodes de détermination du gradient gravitationnel.

Méthode	Blocs avec $N_{\text{seq}} > 2$		Blocs avec $N_{\text{seq}} > 3$	
	$\overline{\langle z \rangle}$ (cm)	$\sigma_{\langle z \rangle}$ (cm)	$\overline{\langle z \rangle}$ (cm)	$\sigma_{\langle z \rangle}$ (cm)
Cartographies	-0.41	0.05	-0.41	0.04
Magnétomètres	-0.36	0.04	-0.36	0.03
Magnétomètres et cartographies	-0.40	0.04	-0.39	0.03

de calculer une « prédiction » de ce gradient en utilisant la linéarité du champ dans notre expérience, comme on le fait pour le gradient fantôme \hat{G} . Le second choix possible consiste à utiliser les magnétomètres césium qui mesurent le champ en temps réel pendant les séquences de façon précise bien qu'inexacte. Ces deux méthodes ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients l'une par rapport à l'autre.

La cartographie est une mesure hors-ligne du champ. Elle ne pourra donc prédire les valeurs de $G_{\text{Grav}i}$ qu'à la reproductibilité près, à laquelle vient s'ajouter l'erreur de prédiction, qui dépend de la reproductibilité, répétabilité, et des erreurs liées aux bobines additionnelles. J'invite le lecteur à reconsulter l'équation (3.35) dans le chapitre précédent pour le détail de l'incertitude sur un gradient prédit uniquement avec la cartographie. En réalité, nous l'avons déjà dit, la reproductibilité n'a ici que peu d'importance. En effet, au sein d'un même bloc, tous les gradients $G_{\text{Grav}i}$ sont affectés de la même façon par la reproductibilité et la variation entre eux ne devrait quant à elle pas être modifiée. Une autre faiblesse de l'utilisation de la cartographie est qu'elle n'est pas capable de capturer d'éventuelles dérives du gradient gravitationnel au cours d'une séquence.

A l'inverse, l'un des rôles des magnétomètres césium est justement de capturer ces dérives. De plus, ils mesurent le champ en ligne et ne sont donc pas soumis à la reproductibilité de celui-ci. Cependant, les magnétomètres césium ont un inconvénient majeur. Ils ne permettent d'ajuster le champ mesuré que jusqu'à l'ordre $l = 2$ du développement en polynômes harmoniques. Le gradient gravitationnel qu'ils mesurent est donc composé uniquement du gradient vertical linéaire ajusté $G_{1,0}$ et celui-ci est affectée d'une erreur non-estimable due à la troncature du modèle à l'ordre 2. De plus, nous avons discuté en parlant des magnétomètres césium de leur inexactitude (voir section 2.3.3). Comme pour la cartographie, l'inexactitude n'est pas réellement un problème ici car c'est la précision de la connaissance des variations qui nous intéresse. Toutefois, il est à noter que les raisons de ce comportement des magnétomètres césium sont mal comprises et qu'il est donc difficile d'estimer son impact.

Une première étude a donc été faite en utilisant chacune des deux méthodes pour comparer les résultats obtenus dans les deux cas. Les résultats sont visibles sur la figure 4.1 ainsi que sur les premières lignes du tableau 4.1. On constate que l'écart-type des résultats issus des magnétomètres césium est plus faible. Cela est attendu car si les mesures des magnétomètres sont inexactes, elles sont très précises et sont donc capables de capturer les variations du champ de façon précise, ce qui n'est pas autant le cas avec les prédictions obtenues grâce aux cartographies. Toutefois, comme nous l'avons déjà évoqué, le gradient gravitationnel mesuré par les magnétomètres césium souffre de l'incomplétude de la paramétrisation polynomiale, ce qui est beaucoup moins le cas pour celui issu de la cartographie, les cartes étant analysées jusqu'à l'ordre $l = 6$.

Afin de remédier aux problèmes des deux méthodes de mesure des $G_{\text{Grav}i}$, nous avons opté pour la solution de les combiner afin d'obtenir les avantages de ces deux méthodes tous en éli-

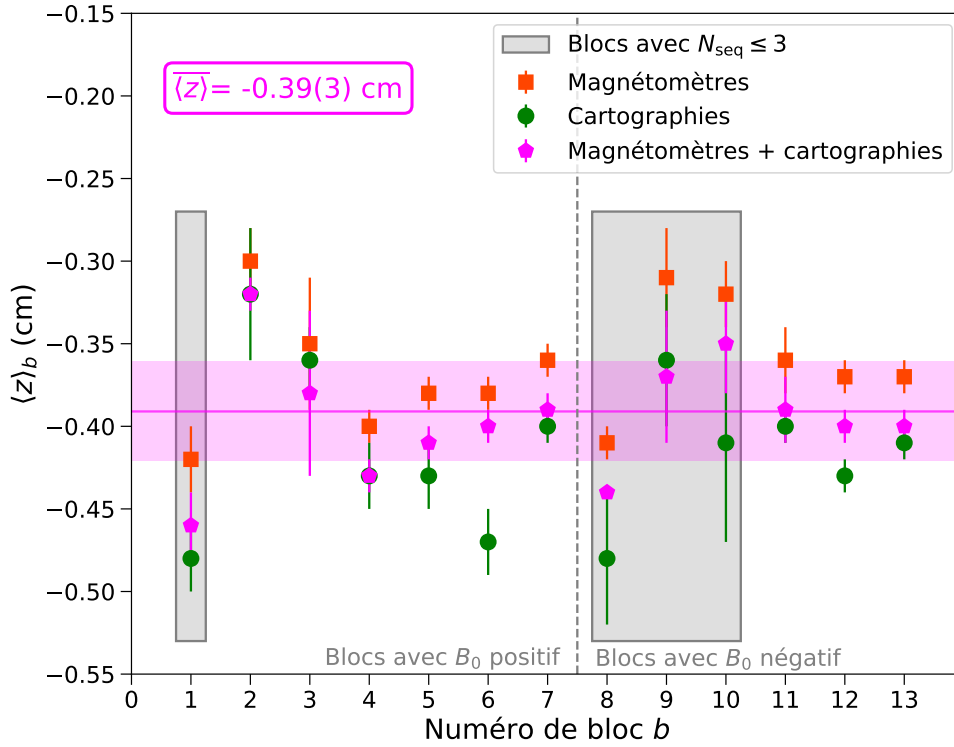


FIGURE 4.1 – Comparaison des résultats de l'estimation de $\langle z \rangle_b$ avec les différentes méthodes de mesure du gradient gravitationnel.

minant au mieux leurs inconvénients. Pour ce faire, on utilise l'information issue des cartes de champ pour soustraire la contribution de presque tous ordres $l \geq 3$ au champ mesuré par les magnétomètres césium. Seules les contributions des ordres $l \leq 2$ et celle du gradient vertical cubique $G_{3,0}$ ne sont pas soustraites. Une fois seulement cette soustraction effectuée, le champ restant est ajusté avec les termes paramétrisation polynomiale correspondant aux ordres non-soustraits. On effectue donc pour chaque séquence d'un bloc l'ajustement suivant

$$B_z^{\text{CsM}}(\vec{r}_j) - \sum_{\substack{l \geq 3, m \\ l, m \neq 3, 0}} G_{l,m}^{\text{map}} \Pi_{l,m}(\vec{r}_j) = \sum_{l < 3, m} G_{l,m} \Pi_{l,m}(\vec{r}_j) + G_{3,0} \Pi_{3,0}(\vec{r}_j), \quad (4.32)$$

où les $G_{l,m}^{\text{map}}$ sont les gradients généralisés issus de l'analyse des cartographies et \vec{r}_j est la position du magnétomètre césium j . Ce faisant, on obtient les gradients $G_{1,0}$ et $G_{3,0}$ qui nous permettent de calculer le gradient gravitationnel de la séquence jusqu'à l'ordre $l = 3$. Ces valeurs de gradient sont ensuite utilisées pour obtenir l'estimation de $\langle z \rangle$ selon la méthode expliquée dans la section précédente. Les résultats de cette méthode combinée sont visibles sur la dernière ligne du tableau 4.1. On peut voir que l'écart-type des résultats obtenus est le même qu'avec l'utilisation des magnétomètres césium uniquement, qui donne le résultat le plus précis. Toutefois, la correction des ordres supérieurs a décalé la valeur moyenne de $\langle z \rangle$ vers celle que l'on obtient en utilisant uniquement la cartographie, qui donne théoriquement un résultat plus exact. C'est donc le résultat de cette méthode qui sera retenu pour être utilisé dans la technique du point de croisement :

$$\langle z \rangle = -0.39 \pm 0.03 \text{ cm}. \quad (4.33)$$

Il faut bien évidemment prendre en compte l'incertitude de cette valeur dans le résultat de l'ajustement du point de croisement. La propagation de cette incertitude vient s'additionner à l'erreur

sur le paramètre d_x avec une valeur de 7×10^{-28} e cm.

4.3 Covariance de la méthode du point de croisement

A présent que la hauteur du centre de masse des neutrons $\langle z \rangle$ a été estimée, presque tous les ingrédients nécessaires à la réalisation de la méthode du point de croisement sont réunis. Le dernier point qui nous reste à discuter est la composition de la matrice de covariance des données. Comme nous l'avons déjà dit un peu avant, il s'agit d'une matrice carrée symétrique de dimension (99×99) . Afin de distinguer les différentes contributions à cette matrice et donc à la propagation des erreurs sur le paramètre d_x de la méthode, nous avons séparé cette matrice en une somme de matrices représentant respectivement les différentes sources d'incertitude, comme suit,

$$C = C_{\text{stat}} + C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité}} + C_{\text{map}}^{\text{prédiction}}. \quad (4.34)$$

Certaines de ces contributions peuvent elles-mêmes être partagées en plusieurs matrices, comme nous le verrons sous peu. Prenons ici le temps de détailler chacun des trois termes de l'expression (4.34). Par souci d'homogénéisation et afin de faciliter la comparaison des différentes contributions, lorsque nous donnerons les valeurs de celles-ci, elles seront systématiquement données en unités de 10^{-28} e cm. Précisons également que lorsque nous citerons de telles valeurs, il s'agit bien entendu de contributions se sommant quadratiquement pour calculer l'incertitude finale.

4.3.1 Contribution statistique

La première contribution est celle qui nous vient de l'analyse des séquences nEDM. C'est à l'issue de cette analyse que l'on obtient pour chaque séquence les valeurs de d_i et \mathcal{R}_i . Chacune des séquences étant analysée individuellement, il n'existe pas de corrélation entre elles et il s'agit donc ici d'une matrice diagonale :

$$C_{\text{stat}} = \begin{pmatrix} \Delta d_1^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Delta d_2^2 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \Delta d_{98}^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Delta d_{99}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

où Δd_i^2 correspond à l'erreur sur d_i . Cette erreur comprend l'incertitude statistique irréductible calculée à partir du nombre de neutrons et de la visibilité dans la séquence, ainsi que la propagation des erreurs des différentes étapes d'ajustement de l'analyse. Pour une meilleure compréhension de cette incertitude, j'invite le lecteur à se référer à KERMAIDIC [2016].

L'analyse des séquences fournit aussi une incertitude sur le rapport moyen \mathcal{R}_i que nous pourrions prendre en compte dans cette matrice mais, en pratique, cette incertitude donne une contribution complètement négligeable et il n'est donc pas pertinent de la prendre en compte.

Cette matrice est la contribution majeure à l'erreur finale une fois la méthode du point de croisement appliquée. Si l'on ignore toutes les autres contributions à la matrice de covariance, c'est-à-dire si l'on prend $C = C_{\text{stat}}$, l'erreur sur le paramètre d_x à l'issue de l'ajustement est de 102.6×10^{-28} e cm.

4.3.2 Contribution de la reproductibilité du champ

Deux contributions à la reproductibilité du champ sont à prendre en considération : le gradient fantôme \hat{G}_i et l'inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle_i$, qui sont respectivement utilisés pour calculer d_i^{corr} et $\mathcal{R}_i^{\text{corr}}$. On peut donc écrire

$$C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité}} = C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité } \hat{G}} + C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité } \langle B_T^2 \rangle}. \quad (4.36)$$

Le principe de prise en compte est le même pour ces deux grandeurs, bien que le facteur multiplicatif soit différent. Nous donnerons l'expression de ces deux matrices en nous intéressant d'abord à celle du gradient fantôme.

Pour tenir compte de façon appropriée de la part de l'erreur des cartographies due à la reproductibilité du champ, il est nécessaire de rappeler quelques points essentiels. La reproductibilité ne dépend pas des cartographies mais consiste simplement en la capacité à obtenir le même champ magnétique après une démagnétisation du blindage. Les blocs, au nombre de 28, sont séparés par des démagnétisations. La reproductibilité étant considérée comme une erreur gaussienne aléatoire, les contributions aux erreurs de séquences appartenant à des blocs différents ne sont donc par corrélées. En revanche, au sein d'un même bloc, les séquences s'enchaînent sans démagnétisation et l'erreur due à la reproductibilité du champ est alors parfaitement corrélée pour toutes les séquences d'un bloc. On peut donc définir la matrice $C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité } \hat{G}}$ comme suit,

$$C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité } \hat{G}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & A_{27} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{28} \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

où les A_k sont autant de matrices carrées qu'il y a de blocs, chaque matrice A_k ayant pour dimension la taille du bloc k . Du fait de la corrélation complète au sein d'un bloc, les matrices A_k s'écrivent donc

$$A_k = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}| R^2}{8c^2} \times \sigma_{\hat{G}}^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

De la même façon, on définit également la matrice $C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité } \langle B_T^2 \rangle}$ comme une matrice diagonale par bloc :

$$C_{\text{map}}^{\text{reproductibilité } \langle B_T^2 \rangle} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & B_{27} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{28} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

avec

$$B_k = \eta \left| \frac{\gamma_n}{\gamma_{\text{Hg}}} \right| \frac{1}{2B_0^2} \times \sigma_{\langle B_T^2 \rangle}^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

où η est, on le rappelle, la valeur absolue de la pente des deux droites du modèle d'ajustement.

Les contributions de $\sigma_{\widehat{G}}$ et $\sigma_{\langle B_T^2 \rangle}$ ont été calculées séparément et sont respectivement de 7.0×10^{-28} e cm et 4.4×10^{-28} e cm.

4.3.3 Contribution de l'erreur sur la prédiction des gradients de champ

Nous venons de prendre en compte la première contribution aux incertitudes dues aux mesures de \widehat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ grâce au cartographies. Rappelons-nous qu'il en existe trois (voir éq. (3.35)). Les deux autres représentent l'erreur sur nos prédictions des valeurs de \widehat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$ et vont donc être prises en compte dans la matrice $C_{\text{map}}^{\text{prédiction}}$. Elles se répartissent en deux matrices, l'une liée à la prédiction du champ produit par la bobine B_0 uniquement et l'autre liée à la prédiction du champ produit par les bobines de compensation et de guidage (TC + GC) :

$$C_{\text{map}}^{\text{prédiction}} = C_{\text{map}}^{\text{prédiction } B_0} + C_{\text{map}}^{\text{prédiction TC+GC}}. \quad (4.41)$$

Nous ne discuterons ici que de l'erreur de prédiction pour le gradient fantôme \widehat{G} . Celle de l'in-homogénéité transverse, en plus d'être fastidieuse à calculer, reste négligeable par rapport à la reproductibilité et n'a donc pas été considérée.

Commençons par discuter la contribution liée au champ de la bobine B_0 . Si l'on se réfère aux formules des estimateurs des moyennes globales présentées dans le chapitre précédent (voir éq. (3.26) et éq.(3.27)), on peut voir que le terme de la prédiction du gradient fantôme pour cette contribution est calculé individuellement pour les configurations up (B_0 positif) et down (B_0 négatif). Pour cette contribution, les séquences enregistrées avec le champ positif n'ont donc aucune raison d'être corrélées avec celles en champ négatif. A l'inverse, si un biais existe dans l'une de ces prédictions, c'est toutes les séquences de la direction biaisée qui sont affectées de la même façon. Pour une direction donnée du champ \vec{B}_0 , toutes les séquences sont donc entièrement corrélées, ce qui nous mène à la définition de la matrice suivante :

$$C_{\text{map}}^{\text{prédiction } B_0} = \begin{pmatrix} D_{\uparrow} & 0 \\ 0 & D_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

où D_{\uparrow} et D_{\downarrow} sont deux matrices carrées de dimensions respectives $(N_{\text{seq}}^{\uparrow} \times N_{\text{seq}}^{\uparrow})$ et $(N_{\text{seq}}^{\downarrow} \times N_{\text{seq}}^{\downarrow})$. Des deux matrices sont elles-mêmes définies comme suit,

$$D_{\uparrow(\downarrow)} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}| R^2}{8c^2} \times \frac{\sigma_{\widehat{G}}^2 + \tau_{\widehat{G}}^2}{N_{\uparrow(\downarrow)}} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

où l'on reconnaît l'erreur de prédiction $\frac{\sigma_{\widehat{G}}^2 + \tau_{\widehat{G}}^2}{N_{\uparrow(\downarrow)}}$ en facteur de la matrice correspondant à la corrélation de toutes les séquences dans la direction données du champ. La prise en compte de cette contribution à l'erreur ajoute une erreur de 4.4×10^{-28} e cm sur le paramètre d_x final.

La deuxième partie de l'erreur de la prédiction est donc liée aux bobines additionnelles du système. Les courants dans celles-ci varient généralement et peuvent prendre des valeurs négatives ou positives selon les blocs de séquences. Selon les bobines, les séquences sont donc alternativement corrélées ou anti-corrélées. La matrice illustrant la corrélation due à cette source d'erreur peut en réalité elle-même être séparée en une somme d'autant de matrices qu'il y a de bobines

additionnelles c et s'exprimer comme suit,

$$C_{\text{map}}^{\text{prédiction TC+GC}} = \frac{\hbar |\gamma_n \gamma_{\text{Hg}}| R^2}{8c^2} \times \sum_c \Delta \hat{g}_c \begin{pmatrix} i_{c1}^2 & i_{c1}i_{c2} & \cdots & i_{c1}i_{c98} & i_{c1}i_{c99} \\ i_{c1}i_{c2} & i_{c2}^2 & \cdots & i_{c2}i_{c98} & i_{c2}i_{c99} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ i_{c1}i_{c98} & i_{c2}i_{c98} & \cdots & i_{c98}^2 & i_{c98}i_{c99} \\ i_{c1}i_{c99} & i_{c2}i_{c99} & \cdots & i_{c98}i_{c99} & i_{c99}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

où i_{ci} est le courant circulant dans la bobine c pour la séquence i et $\Delta \hat{g}_c$ est l'erreur sur le coefficient de production du gradient fantôme de la bobine c . Le nombre de cartes de bobines acquises pendant les campagnes de cartographie étant parfois faible, afin de ne pas risquer de sous-estimer cette contribution à l'erreur, des facteurs multiplicatifs dépendant du nombre de cartes ont été appliqués aux $\Delta \hat{g}_c$ issus de l'analyse des cartes. Ce faisant, on obtient une contribution à l'incertitude sur d_x de 2.4×10^{-28} e cm. Étant donné que les erreurs ont été artificiellement augmentées pour obtenir cette contribution qui reste plus faible que toutes les précédentes, le choix a finalement été fait de la négliger et la matrice $C_{\text{map}}^{\text{prédiction TC+GC}}$ n'est donc pas prise en compte dans la matrice de covariance totale C du point de croisement.

Nous avons listé les principales contributions aux incertitudes sur les grandeurs ajustées. Il en existe d'autres mais celles-ci sont soit faibles, soit peu adaptées à l'écriture sous forme de matrice de covariance. Elles seront traitées en tant qu'erreurs additionnelles sur d_x une fois la méthode du point de croisement appliquée, comme nous allons le discuter dans un instant.

4.4 Résultat de la méthode du point de croisement

Il ne manque à présent plus aucun élément pour pouvoir exécuter la méthode du point de croisement. Nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, cette méthode a été entièrement développée les données nEDM *blindées* et l'analyse du début à la fin a été réalisée en parallèle par deux équipes (Ouest et Est) de la collaboration sans aucun partage de code. Le résultat que cette thèse a contribué à établir est celui de l'équipe Ouest. Toutefois, c'est les résultats combinés des deux équipes qui ont mené à la mesure de l'EDM la plus récente publiée ABEL et collab. [2020].

4.4.1 Le résultat de l'équipe Ouest

En utilisant la matrice de covariance C précédemment définie et la hauteur du centre de masse $\langle z \rangle = -0.39(3)$ cm déterminée grâce à une étude parallèle, on effectue donc la minimisation du χ^2 donné dans l'expression (4.25). On obtient pour le résultat suivant :

$$\begin{cases} d_{x,\text{Ouest}} = (-0.09 \pm 1.03) \times 10^{-26} \text{ e cm}, \\ \mathcal{R}_{x,\text{Ouest}} = 3.8424546(34), \\ \frac{\chi_{\text{Ouest}}^2}{\text{NDF}} = \frac{106}{97}. \end{cases}$$

La représentation graphique des données et de l'ajustement est visible sur la figure 4.2. Plusieurs remarques peuvent être faites à propos de ce résultat. Tout d'abord, l'erreur donnée par l'ajustement pour le paramètre d_x tient compte de deux contributions qui ne sont pas incluses directement par le biais de la matrice de covariance C mais qui font partie intégrante de l'incertitude issue de la méthode du point de croisement.

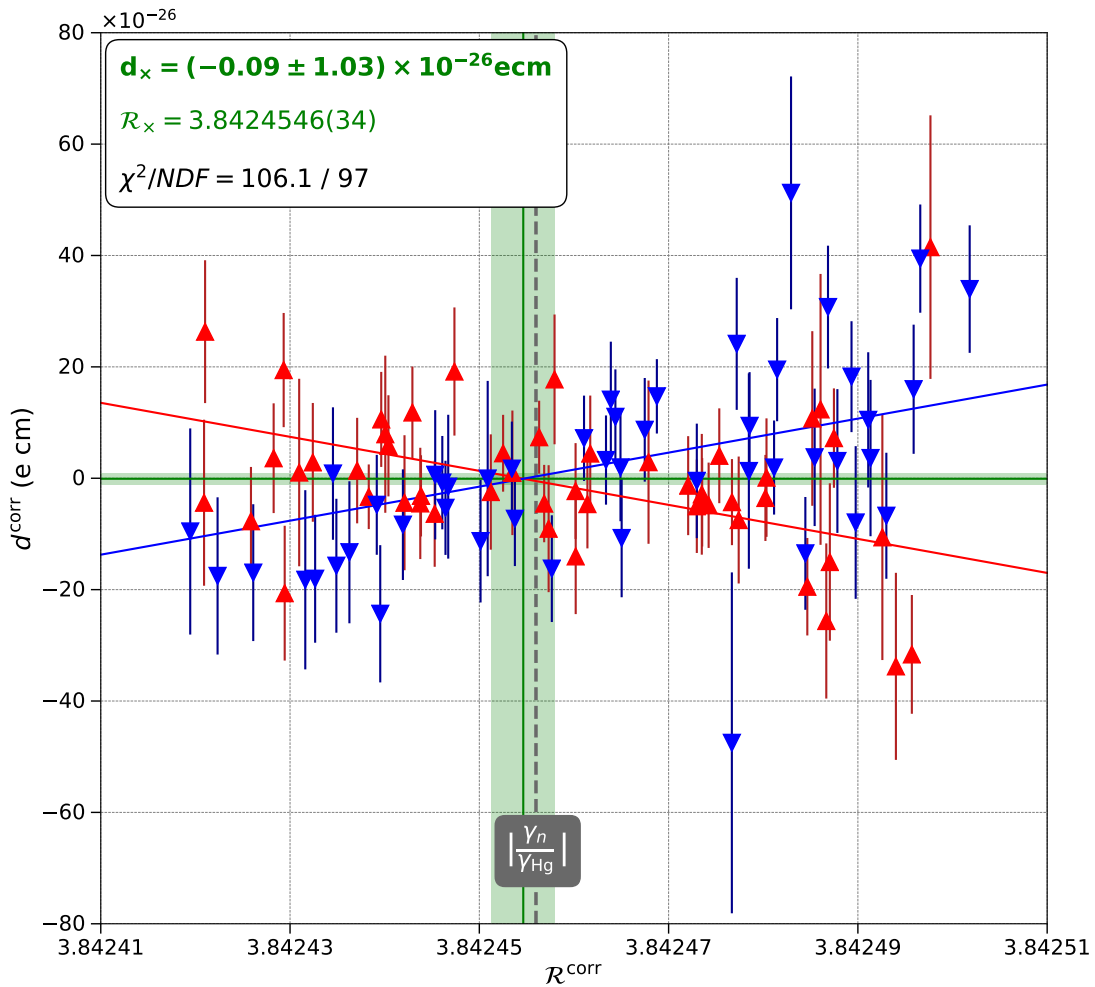


FIGURE 4.2 – Résultat de la méthode du point de croisement. Les triangles rouges (bleus) représentent les séquences avec le champ magnétique \vec{B}_0 orienté vers le haut (bas). Les lignes horizontale et verticale vertes représentent les résultats de la méthode pour les paramètres respectifs d_x et \mathcal{R}_x ainsi que leurs erreurs associées. La ligne verticale en pointillé gris représente la valeur théorique de $\gamma_n/\gamma_{\text{Hg}}$ calculée à partir des valeurs des rapports gyromagnétiques γ_n et γ_{Hg} de la littérature.

4.4.1.1 Effet de la troncature de la paramétrisation harmonique à l'ordre 6

La première de ces contributions est une estimation de l'erreur due à la troncature des ordres $l \geq 7$ lors de l'analyse des cartographies. Prenons le temps de faire une brève parenthèse pour discuter de cette dernière. Pour pouvoir l'estimer, l'analyse de toutes les cartes a été faite en utilisant comme ordre limite non plus 6 mais $l_{\text{max}} = l_{\text{max}} = 7$. Les corrections dues au gradient fantôme ont été calculées en utilisant les résultats de cette analyse et en calculant le gradient fantôme jusqu'à l'ordre 7. On rappelle que la contribution de l'ordre 7 au gradient fantôme est du même ordre de grandeur que la reproductibilité, qui est l'erreur dominante pour la détermination de ce gradient à l'aide des cartes de champs. C'est pourquoi il a été décidé de considérer les ordres supérieurs ou égaux à 7 comme une source d'erreur additionnelle sans les corriger directement. La méthode du point de croisement a été appliquée avec ces corrections allant jusqu'à l'ordre 7 et le décalage du paramètre d_x , arrondi par excès à 3×10^{-28} e cm, a été pris comme estimation de l'erreur due à cette incomplétude de la paramétrisation polynomiale. Cette erreur est considérée comme faisant

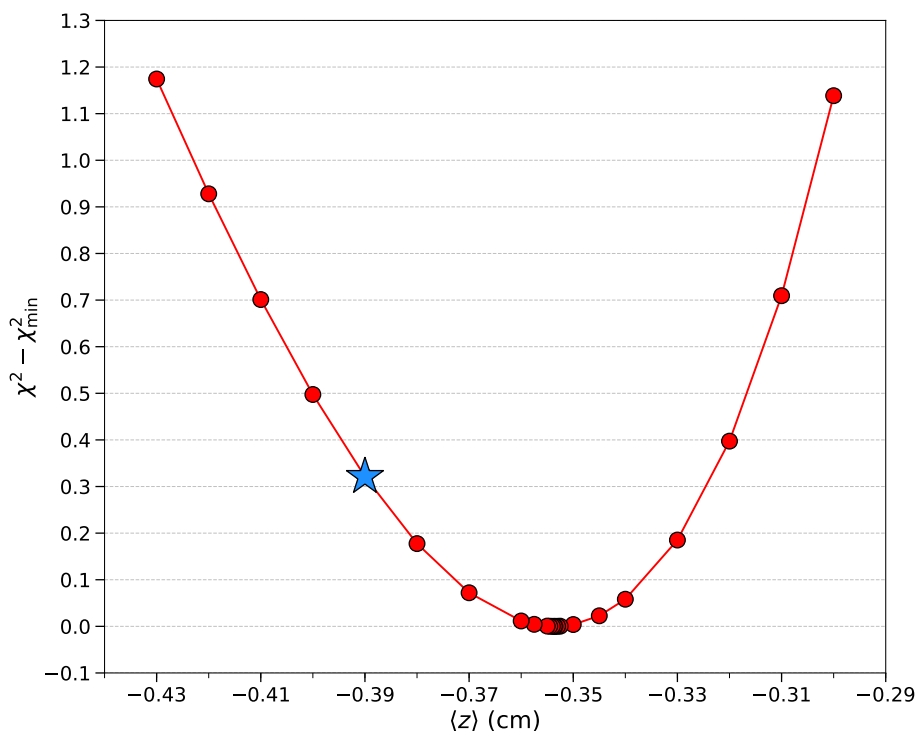


FIGURE 4.3 – Évolution du χ^2 de la méthode du point de croisement en fonction de la valeur choisie pour fixer le paramètre $\langle z \rangle$ intervenant dans la pente de l’ajustement. Afin de simplifier l’interprétation de ce graphique, c’est la valeur de $\chi^2 - \chi_{\min}^2$ qui est tracée. L’étoile bleue correspond à notre valeur choisie de $\langle z \rangle = -0.39(3)$ cm et au $\chi^2 - \chi_{\min}^2$ correspondant.

partie de l’erreur due à la correction du champ fantôme et sera donc concaténée avec celle-ci par la suite.

4.4.1.2 Réflexion sur l’erreur sur $\langle z \rangle$

La seconde erreur qui est directement ajoutée quadratiquement à l’erreur sur d_x est la propagation de l’erreur sur la hauteur du centre de masse $\langle z \rangle$ des UCN. Celle-ci contribue pour, on le rappelle, 7×10^{-28} e cm. Étant donné que le choix de ne pas ajuster la pente mais de fixer celle-ci est un choix intrinsèque à la méthode du point de croisement, il est normal que l’incertitude sur ladite pente soit également considérée comme une erreur découlant de cette méthode. Une étude a toutefois été faite afin de vérifier la pertinence de la valeur de $\langle z \rangle$ choisie pour l’ajustement. Il s’agit d’observer la variation du χ^2 du point de croisement en fonction de la valeur d’entrée choisie pour $\langle z \rangle$. On s’attend bien évidemment à observer une parabole dont le minimum correspond à la valeur de $\langle z \rangle$ telle qu’elle serait ajustée si ce paramètre était laissé en tant que paramètre libre. Les résultats de cette étude sont visibles sur la figure 4.3. On peut voir que le minimum de la parabole ne correspond pas à la valeur utilisée $\langle z \rangle = -0.39(3)$ cm mais se trouve plutôt aux alentours de -0.35 cm. Le critère intéressant à regarder ici est l’intervalle défini par les abscisses des points d’ordonnée égale à 1. Il définit l’erreur d’ajustement que porterait le paramètre $\langle z \rangle$ s’il était laissé libre. On peut donc estimer avec cette étude que, si $\langle z \rangle$ était laissé libre, l’ajustement donnerait $\langle z \rangle^{\text{ajusté}} = -0.35(6)$ cm. En tenant compte des incertitudes, cette valeur est parfaitement compatible avec celle que nous avons choisie. Le choix de fixer $\langle z \rangle$ étant justifié par l’estimation qui a été faite de ce paramètre (voir section 4.2), cette décision a donc été maintenue.

4.4.1.3 Effets des corrections sur d_i^{corr} et $\mathcal{R}_i^{\text{corr}}$

Un autre point sur lequel il est intéressant de s'arrêter est bien évidemment l'influence des corrections issues de la cartographie du champ magnétique, afin de voir l'amélioration du résultat apporté grâce au travail effectué au cours de cette thèse. Nous avons vu à la fin du chapitre 3 que la valeur absolue des corrections dues à \widehat{G} pour chaque séquence prise individuellement pouvait aller jusqu'à 800×10^{-28} e cm (voir figure 3.17). Qu'en est-il en considérant l'ensemble des séquences et leur covariance? Le décalage final sur d_x est en réalité bien plus petit, du fait des valeurs variées du gradient fantôme \widehat{G} dans les différentes séquences. En effet, la correction de la part du faux EDM due à ce gradient décale d_x de 69×10^{-28} e cm. Bien que le décalage global soit bien moindre que celui individuel par séquence, il correspond à presque 60% de l'erreur statistique sur d_x , qui est ici l'erreur dominante. En prenant en compte les différentes sources d'erreur sur le gradient fantôme \widehat{G} (reproductibilité, prédiction et troncature des ordres supérieurs à 7), l'erreur finale due à ces corrections est de 10×10^{-28} e cm.

En pratique, sans la correction des composantes fantômes d'ordre supérieur, l'erreur systématique due au faux EDM du mercure serait donc 7 fois plus grande. Nous l'avons déjà dit à de multiples reprises et nous allons le voir dans un instant en faisant le budget des erreurs systématiques, il s'agit de l'effet principal affectant la mesure finale de l'EDM (soit d_x). Même après sa correction, l'erreur due à cet effet reste la contribution majoritaire à l'incertitude systématique. Elle est toutefois dix fois plus faible que la contribution de l'erreur statistique, ce qui signifie que la mesure est limitée par la sensibilité statistique et non par les effets systématiques.

La correction globale de l'effet indirect dû à l'inhomogénéité transverse est quant à elle bien plus faible, comme on s'y attend. Elle décale la valeur de d_x de $(0 \pm 5) \times 10^{-28}$ e cm. Cela s'explique par le fait que le décalage est de même signe et de même ordre de grandeur pour chacune des 99 séquences. La correction de cet effet permet néanmoins d'améliorer le χ^2 de l'ajustement de deux unités. Enfin, notons que la correction de l'effet dû à la fréquence de rotation de la Terre, corrige d_x de -92×10^{-28} e cm. Il s'agit donc d'un décalage non négligeable qu'il est très important de prendre en compte pour ne pas biaiser le résultat de la mesure de l'EDM.

4.4.2 Mesure de l'EDM du neutron

Dans ce dernier chapitre, nous avons vu que l'application de la méthode du point de croisement requiert la réunion de plusieurs ingrédients. Il est tout d'abord nécessaire de comprendre toutes les sources de décalages affectant le rapport des fréquences. La hauteur du centre de masse des neutrons, $\langle z \rangle$ est également un élément clé de la réalisation de cet ajustement. Nous avons vu qu'elle peut être estimée grâce à une étude parallèle du rapport moyen des séquences nEDM en fonction du gradient gravitationnel, bloc par bloc. Enfin, le dernier élément manquant pour pouvoir réaliser la méthode du point de croisement est la matrice de covariance des données. En effet, si les incertitudes purement statistiques ne sont pas corrélées d'une séquence à l'autre, ce n'est pas le cas pour les corrections apportées par la cartographie. Grâce à la réunion de tous ces éléments, nous avons pu conclure l'analyse des données nEDM et extraire la valeur de l'EDM du neutron, $d_{x,\text{Ouest}} = (-0.09 \pm 1.03) \times 10^{-26}$ e cm.

Ce résultat est celui qui a été calculé par l'équipe d'analyse Ouest de la collaboration nEDM. Comme dit précédemment, c'est la combinaison des résultats des deux équipes d'analyse qui a été utilisée pour établir la limite publiée en février 2020 par la collaboration nEDM ABEL et collab. [2020]. Cette limite améliore la sensibilité statistique par rapport à la précédente limite établie BAKER et collab. [2006]; PENDLEBURY et collab. [2015], en passant d'une erreur statistique de 1.5×10^{-26} e cm à 1.1×10^{-26} e cm. Mais c'est l'amélioration de l'erreur systématique qui constitue l'avancée remarquable établie avec cette nouvelle limite. En effet, l'étude approfondie des dif-

TABLEAU 4.2 – Résumé des effets systématiques, en unité de 10^{-28} e cm. Les trois premiers effets sont traités directement pendant la méthode du point de croisement, soit à travers la covariance, soit en étant additionnés quadratiquement avec l’erreur issue de celle-ci. Les autres effets sont considérés indépendamment du point de croisement. Tableau repris et adapté de ABEL et collab. [2020].

Effet	Décalage	Incertitude
Erreur sur $\langle z \rangle$	-	7
Correction du gradient fantôme \hat{G}	69	10
Correction de l’inhomogénéité transverse $\langle B_T^2 \rangle$	0	5
EDM du mercure GRANER et collab. [2016]	-0.1	0.1
Terme quadratique de l’effet $\nu \times E$	-	0.1
Dipôles magnétiques au sein du spectromètre	-	4
Dérives non-compensées du gradient vertical linéaire	-	7.5
Autres	-	7.3
TOTAL	69	18

férents effets systématiques nous a permis de les comprendre et, quand cela était possible, de les réduire ou de les corriger. Grâce à ce contrôle des systématiques, cette erreur a pu être divisée d’un facteur 5 par rapport à la précédente limite. Prenons donc le temps de discuter de la composition de cette erreur avant de révéler enfin la valeur de l’EDM du neutron mesurée par l’expérience de PSI.

Les différents effets systématiques sont résumés dans le tableau 4.2. On voit que l’effet des gradients d’ordres supérieurs \hat{G} constitue bien l’effet le plus conséquent et que, même une fois corrigé, il s’agit toujours de la part la plus importante de l’erreur systématique. Les effets contribuant également sont la propagation de l’erreur sur la hauteur du centre de masse des neutrons $\langle z \rangle$, qui a déjà été discutée, l’effet dû à l’inhomogénéité transverse, la présence de dipôles magnétiques au sein du spectromètre, ce qui crée des perturbations de champ locales pouvant générer un faux EDM, la part des dérives du gradient gravitationnel non compensée par l’utilisation des magnétomètres césium et enfin d’autres sources diverses qui n’ont pas fait l’objet d’une étude approfondie au cours de cette thèse. Au total, en prenant en compte toutes les sources de décalage du rapport \mathcal{R} qui contribuent à l’erreur systématique, celle-ci est de 18×10^{-28} e cm.

A l’issue de la méthode du point de croisement, les analyses indépendantes des deux équipes donnent les résultats suivants :

$$d_{\times, \text{Ouest}} = (-0.09 \pm 1.03) \times 10^{-26} \text{ e cm}, \quad (4.45)$$

$$d_{\times, \text{Est}} = (+0.15 \pm 1.07) \times 10^{-26} \text{ e cm}. \quad (4.46)$$

La petite différence entre ces deux résultats peut s’expliquer par les différents critères de sélection utilisés dans les deux analyses. Une méthode n’ayant pas de raison d’être plus performante l’une que l’autre, c’est la moyenne des deux résultats qui a été prise comme résultat. En combinant ces résultats et en séparant les contributions statistique et systématique de l’incertitude grâce à l’étude des systématiques telle qu’elle est présentée ci-avant, le résultat de la mesure de l’EDM du neutron par la collaboration nEDM est donc

$$d_n = (0.0 \pm 1.1_{\text{stat}} \pm 0.2_{\text{syst}}) \times 10^{-26} \text{ e cm}. \quad (4.47)$$

Ce résultat permet d'établir la limite à 90% de confiance suivante,

$$|d_n| < 1.8 \times 10^{-26} e \text{ cm.} \quad (4.48)$$

Une fois de plus depuis 1957, la mesure de l'EDM du neutron est donc compatible avec zéro, avec toutefois toujours plus de précision, permettant ainsi de contraindre toujours plus la nouvelle physique générant un EDM pour le neutron.

4.5 Références

ABEL, C. et collab. 2020, «Measurement of the permanent electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, p. 081 803. [147](#), [150](#), [151](#)

BAKER, C. A. et collab. 2006, «Improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 131 801. [150](#)

GRANER, B., Y. CHEN, E. G. LINDAHL et B. R. HECKEL. 2016, «Reduced limit on the permanent electric dipole moment of ^{199}Hg », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 161 601. [135](#), [151](#)

KERMAIDIC, Y. 2016, *Mesure du moment dipolaire électrique du neutron : analyse de données et développement autour du ^{199}Hg* , thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. [134](#), [144](#)

PENDLEBURY, J. M. et collab. 2015, «Revised experimental upper limit on the electric dipole moment of the neutron», *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 092 003. [150](#)

Conclusion

« *Full of Dark Magic? [...] It looks to me as though it is merely a piece of parchment that insults anyone who tries to read it.* »

Remus Lupin in *Harry Potter and the Prisoner of Azkaban* by Joanne K. Rowling

Dans l'introduction de ce manuscrit, nous avons dit que les EDM de particules telles que le neutron sont des sources privilégiées de violation de CP . La mesure d'un EDM non nul pour le neutron, ou l'électron, par exemple, permettrait de contraindre de nombreux modèles de physique au-delà du MS. Mais comme nous l'avons également évoqué, les expériences réalisant de telles mesures sont de véritables défis techniques, tant du point de vue de la sensibilité statistique que du contrôle des effets systématiques.

Nous avons pu voir au cours de cette thèse que l'un des défis les plus importants relève de la génération et du contrôle du champ magnétique. Celui-ci doit en effet être suffisamment stable au cours du temps, ce qui n'est en pratique pas réalisable. Pour parer à ce problème, dans l'expérience nEDM de PSI, nous avons vu qu'un co-magnétomètre mercure est utilisé afin de contrôler en temps réel les dérives du champ. Cette amélioration, bien qu'indispensable pour améliorer la sensibilité statistique, s'accompagne hélas de plusieurs aspects négatifs, dont l'effet systématique principal de l'expérience, le faux EDM induit par le mercure, qui peut se décomposer en deux contributions comme suit,

$$d_{n\text{-Hg}}^{\text{faux}} = \frac{\hbar |Y_n Y_{\text{Hg}}|}{8c^2} R^2 (G_{\text{Grav}} + \hat{G}), \quad (4.49)$$

avec G_{Grav} la contribution dite gravitationnelle et \hat{G} la contribution fantôme.

Une stratégie de correction en deux étapes de ce faux EDM a donc été mise en place. Elle repose sur l'exploitation du décalage gravitationnel, qui permet la correction de la contribution due au gradient gravitationnel et sur la mesure hors-ligne des inhomogénéités du champ magnétique, qui permet la correction de la contribution fantôme. Cette stratégie de correction est la dernière étape de l'analyse des données nEDM qui permet d'aboutir à la mesure finale de l'EDM du neutron. C'est sa mise en place et son application qui ont constitué le cœur du travail de cette thèse.

Grâce à cette méthode, une réduction d'un facteur 7 de l'erreur systématique due au faux EDM a pu être atteinte. Cette correction, ainsi que la connaissance et le contrôle de tous les autres effets systématiques connus, ont permis d'améliorer d'un facteur 5 l'erreur systématique par rapport à la précédente mesure et d'établir

$$d_n = (0.0 \pm 1.1_{\text{stat}} \pm 0.2_{\text{syst}}) \times 10^{-26} \text{ e cm}, \quad (4.50)$$

menant ainsi à la limite suivante :

$$|d_n| < 1.8 \times 10^{-26} \text{ e cm} \quad (90\% \text{ C.L.}). \quad (4.51)$$

Cette limite, comme toutes les précédentes depuis 1957, est compatible avec zéro. Chaque nouvelle génération d'expérience, toutefois, améliore la sensibilité de cette mesure, permettant ainsi de contraindre de plus en plus les potentiels modèles de nouvelle physique au-delà du MS. La prochaine génération, qui devrait permettre d'augmenter la sensibilité de cette limite d'au moins un ordre de grandeur, marquera sans doute un tournant intéressant dans le champ de la recherche d'EDM, que ce soit par la découverte fascinante d'un EDM non nul ou bien le durcissement des contraintes quant aux modèles de physique au-delà du MS en cas de nouvelle mesure de zéro.

Le contrôle et la correction des effets systématiques appliqués dans l'expérience nEDM de PSI ont mené à une amélioration remarquable de l'erreur systématique, réduisant celle-ci à seulement 10% de la sensibilité statistique. En théorie, il est donc possible d'améliorer encore la sensibilité de la mesure en augmentant simplement la précision statistique. En pratique, l'étude approfondie et la compréhension des effets systématiques devraient également permettre d'envisager les expériences futures avec une nouvelle réduction de l'erreur systématique. L'expérience n2EDM, en particulier, qui sera opérée par la collaboration nEDM à PSI également et qui est actuellement en cours de construction, devrait bénéficier pleinement du savoir acquis et des nouvelles méthodes de contrôle développées au cours de l'expérience nEDM.

Annexe A

Paramétrisation harmonique du champ magnétique

Dans les expériences de mesure d'EDM modernes, un champ magnétique faible est généralement appliqué dans un volume restreint ($\sim 1 \text{ m}^3$). Ce champ peut être considéré comme purement statique et a une très bonne uniformité. Les inhomogénéités étant toutefois intimement liées à des effets systématiques, il est important de pouvoir les décrire de façon adéquate. Dans l'expérience nEDM de PSI, c'est en 2010 qu'apparaît la première expansion polynomiale servant à décrire le champ magnétique. La version actuelle de cette expansion a été établie en 2016. Dans le cadre de cette thèse, le système de coordonnées le plus approprié est le système de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) et les polynômes seront donc donnés dans cette base. L'expansion du champ peut s'écrire sous la forme

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{l,m} G_{l,m} [\Pi_{\rho,l,m}(\vec{r})\vec{e}_\rho + \Pi_{\phi,l,m}(\vec{r})\vec{e}_\phi + \Pi_{z,l,m}(\vec{r})\vec{e}_z], \quad (\text{A.1})$$

où les fonctions (ou *modes*) $\vec{\Pi}_{l,m}$ sont des polynômes harmoniques de degré l en ρ, z et de dépendance d'ordre m en ϕ , et où les $G_{l,m}$ sont les coefficients d'expansion (ou *gradients*).

Le champ magnétique devant satisfaire les équations de Maxwell (A.2), (A.3), le choix des polynômes ne peut toutefois pas être arbitraire. Les équations à satisfaire dans une région sans courants ni magnétisation sont

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.2})$$

et

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}. \quad (\text{A.3})$$

Ces contraintes équivalent à établir un potentiel magnétique dont le champ magnétique dérive

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Sigma(\vec{r}), \quad (\text{A.4})$$

tel que ce potentiel satisfasse l'équation de Laplace

$$\Delta\Sigma(\vec{r}) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Les solutions à l'équation de Laplace sont appelées fonctions harmoniques. Les polynômes de degré $l - 1$ décrivant le champ sont donc obtenus en dérivant tous les polynômes harmoniques possibles de degré l .

Les harmoniques solides, en termes de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) ,

$$r^l Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} r^l P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (\text{A.6})$$

forment une base de polynômes complexes, l étant le degré du polynôme et m un entier compris entre $-l$ et l . Dans (A.6), les $Y_{l,m}$ sont les harmoniques sphériques standard et les P_l^m sont les polynômes de Legendre associés. L'expression de ces polynômes jusqu'à l'ordre $l = 6$ est donnée dans la table A.1. Afin de construire notre base, il est nécessaire de prendre les parties réelles et imaginaires de ces harmoniques. Le choix de la normalisation peut quant à lui être arbitraire et a été fait de façon pratique. On définit donc les polynômes composant le potentiel,

$$\Sigma_{l,m} = C_{l,m}(\phi) r^l P_l^{|m|}(\cos \theta), \quad (\text{A.7})$$

avec

$$C_{l,m}(\phi) = \frac{(l-1)!(-2)^{|m|}}{(l+|m|)!} \cos(m\phi) \quad \text{pour } m \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

$$C_{l,m}(\phi) = \frac{(l-1)!(-2)^{|m|}}{(l+|m|)!} \sin(|m|\phi) \quad \text{pour } m < 0. \quad (\text{A.9})$$

Il suffit ensuite de convertir ces expressions dans le système de coordonnées approprié et on obtient les modes du champ en utilisant le gradient de ce potentiel magnétique :

$$\begin{cases} \Pi_{\rho,l,m} = \partial_{\rho} \Sigma_{l+1,m} \\ \Pi_{\phi,l,m} = \frac{1}{\rho} \partial_{\phi} \Sigma_{l+1,m} . \\ \Pi_{z,l,m} = \partial_z \Sigma_{l+1,m} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

l faisant référence au degré du polynôme, il est à noter que les modes d'ordre l sont obtenus en dérivant le potentiel d'ordre $l+1$. Les expressions des modes jusqu'à l'ordre $l = 7$ en coordonnées cylindriques sont données dans les tables A.2, A.3 et A.4.

Les coordonnées cartésiennes sont parfois utilisées dans l'expérience ou pour visualiser les données. Les modes dans ce système s'obtiennent de la façon suivante,

$$\begin{cases} \Pi_{x,l,m} = \partial_x \Sigma_{l+1,m} \\ \Pi_{y,l,m} = \partial_y \Sigma_{l+1,m} , \\ \Pi_{z,l,m} = \partial_z \Sigma_{l+1,m} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

et le lien entre base en coordonnées cylindriques et cartésiennes est le suivant :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Pi_{\rho} = \cos \phi \Pi_x + \sin \phi \Pi_y \\ \Pi_{\phi} = -\sin \phi \Pi_x + \cos \phi \Pi_y . \\ \Pi_z = \Pi_z \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Une paramétrisation du champ magnétique similaire a été proposée dans le cadre du projet SNS nEDM AHMED et collab. [2019], qui peut être trouvée dans NOURI et PLASTER [2014a,b]. L'utilisation des harmoniques sphériques dans le but de modéliser un champ magnétique quasi-uniforme est en réalité tout d'abord apparue pour la résonance magnétique nucléaire (RMN) ANDERSON [1961] puis dans le cadre de l'imagerie par résonance magnétique (IRM) BRIGUET et CHANKJI [1985]; HOULT et collab. [1981]. Dans ces contextes, l'uniformité du champ est également très importante.

Une telle expansion polynomiale des inhomogénéités du champ (A.1) est une généralisation naturelle d'une description en termes de gradients uniformes. Les coefficients $G_{l,m}$ sont les gradients généralisés des modes de degré l . Ce niveau de généralisation est nécessaire dans le cadre des expériences de type mesure d'EDM, afin de discuter les effets liés aux inhomogénéités avec le degré de précision adapté.

TABLEAU A.1 – Polynômes de Legendre associés jusqu'à l'ordre $l = 5$.

l	m	$P_l^m(\cos \theta)$
1	0	$\cos \theta$
1	1	$-\sin \theta$
2	0	$\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	1	$-3 \cos \theta \sin \theta$
2	2	$3 \sin^2 \theta$
3	0	$\frac{1}{2} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)$
3	1	$-\frac{3}{2} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$
3	2	$15 \cos \theta \sin^2 \theta$
3	3	$-15 \sin^3 \theta$
4	0	$\frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
4	1	$-\frac{5}{2} \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3) \sin \theta$
4	2	$\frac{15}{2} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta$
4	3	$-105 \cos \theta \sin^3 \theta$
4	4	$105 \sin^4 \theta$
5	0	$\frac{1}{8} \cos \theta (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15)$
5	1	$-\frac{15}{8} (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \sin \theta$
5	2	$\frac{105}{2} \cos \theta (3 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta$
5	3	$-\frac{105}{2} (9 \cos^2 \theta - 1) \sin^3 \theta$
5	4	$945 \cos \theta \sin^4 \theta$
5	5	$-945 \sin^5 \theta$
6	0	$\frac{1}{16} \cos \theta (231 \cos^6 \theta - 315 \cos^4 \theta + 105 \cos^2 \theta - 5)$
6	1	$-\frac{21}{8} \cos \theta (33 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 5) \sin \theta$
6	2	$\frac{105}{8} (33 \cos^4 \theta - 18 \cos^2 \theta + 1) \sin^2 \theta$
6	3	$-\frac{315}{2} \cos \theta (11 \cos^2 \theta - 3) \sin^3 \theta$
6	4	$\frac{945}{2} (11 \cos^2 \theta - 1) \sin^4 \theta$
6	5	$-10395 \cos \theta \sin^5 \theta$
6	6	$10395 \sin^6 \theta$

TABLEAU A.2 – Base des polynômes harmoniques en coordonnées cylindriques, de l'ordre $l = 0$ à $l = 5$.

l	m	Π_ρ	Π_ϕ	Π_z
0	-1	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
0	0	0	0	1
0	1	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
1	-2	$\rho \sin 2\phi$	$\rho \cos 2\phi$	0
1	-1	$z \sin \phi$	$z \cos \phi$	$\rho \sin \phi$
1	0	$-\frac{1}{2}\rho$	0	z
1	1	$z \cos \phi$	$-z \sin \phi$	$\rho \cos \phi$
1	2	$\rho \cos 2\phi$	$-\rho \sin 2\phi$	0
2	-3	$\rho^2 \sin 3\phi$	$\rho^2 \cos 3\phi$	0
2	-2	$2\rho z \sin 2\phi$	$2\rho z \cos 2\phi$	$\rho^2 \sin 2\phi$
2	-1	$\frac{1}{4}(4z^2 - 3\rho^2) \sin \phi$	$\frac{1}{4}(4z^2 - \rho^2) \cos \phi$	$2\rho z \sin \phi$
2	0	$-\rho z$	0	$-\frac{1}{2}\rho^2 + z^2$
2	1	$\frac{1}{4}(4z^2 - 3\rho^2) \cos \phi$	$\frac{1}{4}(\rho^2 - 4z^2) \sin \phi$	$2\rho z \cos \phi$
2	2	$2\rho z \cos 2\phi$	$-2\rho z \sin 2\phi$	$\rho^2 \cos 2\phi$
2	3	$\rho^2 \cos 3\phi$	$-\rho^2 \sin 3\phi$	0
3	-4	$\rho^3 \sin 4\phi$	$\rho^3 \cos 4\phi$	0
3	-3	$3\rho^2 z \sin 3\phi$	$3\rho^2 z \cos 3\phi$	$\rho^3 \sin 3\phi$
3	-2	$\rho(3z^2 - \rho^2) \sin 2\phi$	$\frac{1}{2}\rho(6z^2 - \rho^2) \cos 2\phi$	$3\rho^2 z \sin 2\phi$
3	-1	$\frac{1}{4}z(4z^2 - 9\rho^2) \sin \phi$	$\frac{1}{4}z(4z^2 - 3\rho^2) \cos \phi$	$\rho(3z^2 - \frac{3}{4}\rho^2) \sin \phi$
3	0	$\frac{3}{8}\rho(\rho^2 - 4z^2)$	0	$\frac{1}{2}z(2z^2 - 3\rho^2)$
3	1	$\frac{1}{4}z(4z^2 - 9\rho^2) \cos \phi$	$\frac{1}{4}z(3\rho^2 - 4z^2) \sin \phi$	$\rho(3z^2 - \frac{3}{4}\rho^2) \cos \phi$
3	2	$\rho(3z^2 - \rho^2) \cos 2\phi$	$\frac{1}{2}\rho(\rho^2 - 6z^2) \sin 2\phi$	$3\rho^2 z \cos 2\phi$
3	3	$3\rho^2 z \cos 3\phi$	$-3\rho^2 z \sin 3\phi$	$\rho^3 \cos 3\phi$
3	4	$\rho^3 \cos 4\phi$	$-\rho^3 \sin 4\phi$	0
4	-5	$\rho^4 \sin 5\phi$	$\rho^4 \cos 5\phi$	0
4	-4	$4\rho^3 z \sin 4\phi$	$4\rho^3 z \cos 4\phi$	$\rho^4 \sin 4\phi$
4	-3	$\frac{1}{4}(24\rho^2 z^2 - 5\rho^4) \sin 3\phi$	$\frac{3}{4}(8\rho^2 z^2 - \rho^4) \cos 3\phi$	$4\rho^3 z \sin 3\phi$
4	-2	$4(\rho z^3 - \rho^3 z) \sin 2\phi$	$2(2\rho z^3 - \rho^3 z) \cos 2\phi$	$(6\rho^2 z^2 - \rho^4) \sin 2\phi$
4	-1	$\frac{1}{8}(8z^4 - 36\rho^2 z^2 + 5\rho^4) \sin \phi$	$\frac{1}{8}(8z^4 - 12\rho^2 z^2 + \rho^4) \cos \phi$	$(4\rho z^3 - 3\rho^3 z) \sin \phi$
4	0	$\frac{1}{2}(3\rho^3 z - 4\rho z^3)$	0	$\frac{1}{8}(8z^4 - 24\rho^2 z^2 + 3\rho^4)$
4	1	$\frac{1}{8}(8z^4 - 36\rho^2 z^2 + 5\rho^4) \cos \phi$	$-\frac{1}{8}(8z^4 - 12\rho^2 z^2 + \rho^4) \sin \phi$	$(4\rho z^3 - 3\rho^3 z) \cos \phi$
4	2	$4(\rho z^3 - \rho^3 z) \cos 2\phi$	$-2(2\rho z^3 - \rho^3 z) \sin 2\phi$	$(6\rho^2 z^2 - \rho^4) \cos 2\phi$
4	3	$\frac{1}{4}(24\rho^2 z^2 - 5\rho^4) \cos 3\phi$	$-\frac{3}{4}(8\rho^2 z^2 - \rho^4) \sin 3\phi$	$4\rho^3 z \cos 3\phi$
4	4	$4\rho^3 z \cos 4\phi$	$-4\rho^3 z \sin 4\phi$	$\rho^4 \cos 4\phi$
4	5	$\rho^4 \cos 5\phi$	$-\rho^4 \sin 5\phi$	0

TABLEAU A.3 – Base des polynômes harmoniques en coordonnées sphériques, de l'ordre $l = 5$ à $l = 6$.

l	m	Π_ρ	Π_ϕ	Π_z
5	-6	$\rho^5 \sin 6\phi$	$\rho^5 \cos 6\phi$	0
5	-5	$5\rho^4 z \sin 5\phi$	$5\rho^4 z \cos 5\phi$	$\rho^5 \sin 5\phi$
5	-4	$\frac{1}{2}(20\rho^3 z^2 - 3\rho^5) \sin 4\phi$	$\rho^3(10z^2 - \rho^2) \cos 4\phi$	$5\rho^4 z \sin 4\phi$
5	-3	$\frac{5}{4}(8\rho^2 z^3 - 5\rho^4 z) \sin 3\phi$	$\frac{5}{4}(8\rho^2 z^3 - 3\rho^4 z) \cos 3\phi$	$\frac{5}{4}(8\rho^3 z^2 - \rho^5) \sin 3\phi$
5	-2	$\frac{5}{16}(16\rho z^4 - 32\rho^3 z^2 + 3\rho^5) \sin 2\phi$	$\frac{5}{16}(16\rho z^4 - 16\rho^3 z^2 + \rho^5) \cos 2\phi$	$5(2\rho^2 z^3 - \rho^4 z) \sin 2\phi$
5	-1	$\frac{1}{8}(8z^5 - 60\rho^2 z^3 + 25\rho^4 z) \sin \phi$	$\frac{1}{8}(8z^5 - 20\rho^2 z^3 + 5\rho^4 z) \cos \phi$	$\frac{5}{8}(8\rho z^4 - 12\rho^3 z^2 + \rho^5) \sin \phi$
5	0	$\frac{5}{16}(-8\rho z^4 + 12\rho^3 z^2 - \rho^5)$	0	$\frac{1}{8}(8z^5 - 40\rho^2 z^3 + 15\rho^4 z)$
5	1	$\frac{1}{8}(8z^5 - 60\rho^2 z^3 + 25\rho^4 z) \cos \phi$	$-\frac{1}{8}(8z^5 - 20\rho^2 z^3 + 5\rho^4 z) \sin \phi$	$\frac{5}{8}(8\rho z^4 - 12\rho^3 z^2 + \rho^5) \cos \phi$
5	2	$\frac{5}{16}(16\rho z^4 - 32\rho^3 z^2 + 3\rho^5) \cos 2\phi$	$-\frac{5}{16}(16\rho z^4 - 16\rho^3 z^2 + \rho^5) \sin 2\phi$	$5(2\rho^2 z^3 - \rho^4 z) \cos 2\phi$
5	3	$\frac{5}{4}(8\rho^2 z^3 - 5\rho^4 z) \cos 3\phi$	$-\frac{5}{4}(8\rho^2 z^3 - 3\rho^4 z) \sin 3\phi$	$\frac{5}{4}(8\rho^3 z^2 - \rho^5) \cos 3\phi$
5	4	$\frac{1}{2}(20\rho^3 z^2 - 3\rho^5) \cos 4\phi$	$-\rho^3(10z^2 - \rho^2) \sin 4\phi$	$5\rho^4 \cos 4\phi z$
5	5	$5\rho^4 z \cos 5\phi$	$-5\rho^4 z \sin 5\phi$	$\rho^5 \cos 5\phi$
5	6	$\rho^5 \cos 6\phi$	$-\rho^5 \sin 6\phi$	0
6	-7	$\rho^6 \sin 7\phi$	$\rho^6 \cos 7\phi$	0
6	-6	$6\rho^5 z \sin 6\phi$	$6\rho^5 z \cos 6\phi$	$\rho^6 \sin 6\phi$
6	-5	$\frac{1}{4}\rho^4(60z^2 - 7\rho^2) \sin 5\phi$	$\frac{5}{4}\rho^4(12z^2 - \rho^2) \cos 5\phi$	$6\rho^5 z \sin 5\phi$
6	-4	$\rho^3 z(20z^2 - 9\rho^2) \cos 4\phi$	$2\rho^3 z(10z^2 - 3\rho^2) \cos 4\phi$	$\frac{3}{2}\rho^4(10z^2 - \rho^2) \sin 4\phi$
6	-3	$\frac{3}{16}\rho^2(80z^4 - 100\rho^2 z^2 + 7\rho^4) \cos 3\phi$	$\frac{3}{16}\rho^2(80z^4 - 60\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \cos 3\phi$	$\frac{5}{2}\rho^3 z(8z^2 - 3\rho^2) \sin 3\phi$
6	-2	$\frac{1}{8}\rho z(48z^4 - 160\rho^2 z^2 + 45\rho^4) \cos 2\phi$	$\frac{1}{8}\rho z(48z^4 - 80\rho^2 z^2 + 15\rho^4) \cos 2\phi$	$\frac{15}{16}\rho^2(16z^4 - 16\rho^2 z^2 + \rho^4) \sin 2\phi$
6	-1	$\frac{1}{64}(64z^6 - 720\rho^2 z^4 + 600\rho^4 z^2 - 35\rho^6) \cos \phi$	$\frac{1}{64}(64z^6 - 240\rho^2 z^4 + 120\rho^4 z^2 - 5\rho^6) \cos \phi$	$\frac{3}{4}\rho z(8z^4 - 20\rho^2 z^2 + 5\rho^4) \sin \phi$
6	0	$\frac{3}{8}\rho(-8z^5 + 20\rho^2 z^3 - 5\rho^4 z)$	0	$\frac{1}{16}(16z^6 - 120\rho^2 z^4 + 90\rho^4 z^2 - 5\rho^6)$
6	1	$\frac{1}{64}(64z^6 - 720\rho^2 z^4 + 600\rho^4 z^2 - 35\rho^6) \sin \phi$	$-\frac{1}{64}(64z^6 - 240\rho^2 z^4 + 120\rho^4 z^2 - 5\rho^6) \sin \phi$	$\frac{3}{4}\rho z(8z^4 - 20\rho^2 z^2 + 5\rho^4) \cos \phi$
6	2	$\frac{1}{8}\rho z(48z^4 - 160\rho^2 z^2 + 45\rho^4) \sin 2\phi$	$-\frac{1}{8}\rho z(48z^4 - 80\rho^2 z^2 + 15\rho^4) \sin 2\phi$	$\frac{15}{16}\rho^2(16z^4 - 16\rho^2 z^2 + \rho^4) \cos 2\phi$
6	3	$\frac{3}{16}\rho^2(80z^4 - 100\rho^2 z^2 + 7\rho^4) \sin 3\phi$	$-\frac{3}{16}\rho^2(80z^4 - 60\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \sin 3\phi$	$\frac{5}{2}\rho^3 z(8z^2 - 3\rho^2) \cos 3\phi$
6	4	$\rho^3 z(20z^2 - 9\rho^2) \sin 4\phi$	$-2\rho^3 z(10z^2 - 3\rho^2) \sin 4\phi$	$\frac{3}{2}\rho^4(10z^2 - \rho^2) \cos 4\phi$
6	5	$\frac{1}{4}\rho^4(60z^2 - 7\rho^2) \cos 5\phi$	$-\frac{5}{4}\rho^4(12z^2 - \rho^2) \sin 5\phi$	$6\rho^5 z \cos 5\phi$
6	6	$6\rho^5 z \cos 6\phi$	$-6\rho^5 z \sin 6\phi$	$\rho^6 \cos 6\phi$
6	7	$\rho^6 \cos 7\phi$	$-\rho^6 \sin 7\phi$	0

TABLEAU A.4 – Base des polynômes harmoniques en coordonnées sphériques, à l'ordre $l = 7$.

l	m	Π_ρ	Π_ϕ	Π_z
7	-8	$\rho^7 \sin 8\phi$	$\rho^7 \cos 8\phi$	0
7	-7	$7\rho^6 z \sin 7\phi$	$7\rho^6 z \cos 7\phi$	$\rho^7 \sin 7\phi$
7	-6	$\rho^5(21z^2 - 2\rho^2) \sin 6\phi$	$\frac{3}{2}\rho^5(14z^2 - \rho^2) \cos 6\phi$	$7\rho^6 z \sin 6\phi$
7	-5	$\frac{7}{4}\rho^4 z(20z^2 - 7\rho^2) \sin 5\phi$	$\frac{35}{4}\rho^4 z(4z^2 - \rho^2) \cos 5\phi$	$\frac{7}{4}\rho^5(12z^2 - \rho^2) \sin 5\phi$
7	-4	$\frac{7}{4}\rho^3(20z^4 - 18\rho^2 z^2 + \rho^4) \sin 4\phi$	$\frac{7}{8}\rho^3(40z^4 - 24\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \cos 4\phi$	$\frac{7}{2}\rho^4 z(10z^2 - 3\rho^2) \sin 4\phi$
7	-3	$\frac{7}{16}\rho^2 z(48z^4 - 100\rho^2 z^2 + 21\rho^4) \sin 3\phi$	$\frac{21}{16}\rho^2 z(16z^4 - 20\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \cos 3\phi$	$\frac{7}{16}\rho^3(80z^4 - 60\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \sin 3\phi$
7	-2	$\frac{7}{16}\rho(16z^6 - 80\rho^2 z^4 + 45\rho^4 z^2 - 2\rho^6) \sin 2\phi$	$\frac{7}{32}\rho(32z^6 - 80\rho^2 z^4 + 30\rho^4 z^2 - \rho^6) \cos 2\phi$	$\frac{7}{16}\rho^2 z(48z^4 - 80\rho^2 z^2 + 15\rho^4) \sin 2\phi$
7	-1	$\frac{1}{64}z(64z^6 - 1008\rho^2 z^4 + 1400\rho^4 z^2 - 245\rho^6) \sin \phi$	$\frac{1}{64}z(64z^6 - 336\rho^2 z^4 + 280\rho^4 z^2 - 35\rho^6) \cos \phi$	$\frac{7}{64}\rho(64z^6 - 240\rho^2 z^4 + 120\rho^4 z^2 - 5\rho^6) \sin \phi$
7	0	$\frac{7}{128}\rho(-64z^6 + 240\rho^2 z^4 - 120\rho^4 z^2 + 5\rho^6)$	0	$\frac{1}{16}z(16z^6 - 168\rho^2 z^4 + 210\rho^4 z^2 - 35\rho^6)$
7	1	$\frac{1}{64}z(64z^6 - 1008\rho^2 z^4 + 1400\rho^4 z^2 - 245\rho^6) \cos \phi$	$-\frac{1}{64}z(64z^6 - 336\rho^2 z^4 + 280\rho^4 z^2 - 35\rho^6) \sin \phi$	$\frac{7}{64}\rho(64z^6 - 240\rho^2 z^4 + 120\rho^4 z^2 - 5\rho^6) \cos \phi$
7	2	$\frac{7}{16}\rho(16z^6 - 80\rho^2 z^4 + 45\rho^4 z^2 - 2\rho^6) \cos 2\phi$	$-\frac{7}{32}\rho(32z^6 - 80\rho^2 z^4 + 30\rho^4 z^2 - \rho^6) \sin 2\phi$	$\frac{7}{16}\rho^2 z(48z^4 - 80\rho^2 z^2 + 15\rho^4) \cos 2\phi$
7	3	$\frac{7}{16}\rho^2 z(48z^4 - 100\rho^2 z^2 + 21\rho^4) \cos 3\phi$	$-\frac{21}{16}\rho^2 z(16z^4 - 20\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \sin 3\phi$	$\frac{7}{16}\rho^3(80z^4 - 60\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \cos 3\phi$
7	4	$\frac{7}{4}\rho^3(20z^4 - 18\rho^2 z^2 + \rho^4) \cos 4\phi$	$-\frac{7}{8}\rho^3(40z^4 - 24\rho^2 z^2 + 3\rho^4) \sin 4\phi$	$\frac{7}{2}\rho^4 z(10z^2 - 3\rho^2) \cos 4\phi$
7	5	$\frac{7}{4}\rho^4 z(20z^2 - 7\rho^2) \cos 5\phi$	$-\frac{35}{4}\rho^4 z(4z^2 - \rho^2) \sin 5\phi$	$\frac{7}{4}\rho^5(12z^2 - \rho^2) \cos 5\phi$
7	6	$\rho^5(21z^2 - 2\rho^2) \cos 6\phi$	$-\frac{3}{2}\rho^5(14z^2 - \rho^2) \sin 6\phi$	$7\rho^6 z \cos 6\phi$
7	7	$7\rho^6 z \cos 7\phi$	$-7\rho^6 z \sin 7\phi$	$\rho^7 \cos 7\phi$
7	8	$\rho^7 \cos 8\phi$	$-\rho^7 \sin 8\phi$	0

Annexe B

Inhomogénéité transverse

La grandeur $\langle B_T^2 \rangle$, appelée inhomogénéité transverse, décrit les inhomogénéités du champ transverse moyennées sur le volume de la chambre de précession. Son expression en fonction du champ magnétique en coordonnées cartésiennes est la suivante :

$$\langle B_T^2 \rangle = \langle (B_x - \langle B_x \rangle)^2 + (B_y - \langle B_y \rangle)^2 \rangle. \quad (\text{B.1})$$

En coordonnées cylindriques, cette expression devient

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle &= \langle B_\rho^2 \rangle + \langle B_\phi^2 \rangle \\ &- \langle B_\rho \cos \phi \rangle^2 - \langle B_\rho \sin \phi \rangle^2 - \langle B_\phi \sin \phi \rangle^2 - \langle B_\phi \cos \phi \rangle^2 \\ &+ 2 \langle B_\rho \cos \phi \rangle \langle B_\phi \sin \phi \rangle - 2 \langle B_\rho \sin \phi \rangle \langle B_\phi \cos \phi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les chevrons désignent ici la moyenne sur le volume de la chambre de précession cylindrique de rayon R et de hauteur H . Le premier terme de l'expression (B.2) est donc donné par

$$\langle B_\rho^2 \rangle = \frac{1}{\pi R^2 H} \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} B_\rho^2 \rho \, d\phi \, d\rho \, dz. \quad (\text{B.3})$$

En décrivant le champ magnétique au moyen du développement en polynômes harmoniques donné dans l'annexe A, il est possible d'exprimer $\langle B_T^2 \rangle$ en fonction des gradients généralisés du champ $G_{l,m}$. Cela a été fait en se limitant à l'ordre $l = 7$ de la paramétrisation. On peut séparer les contributions de ceux-ci en fonction de l'ordre l du développement. $\langle B_T^2 \rangle$ devient alors la somme des contributions pures des différents ordres l et de leurs interférences :

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle &= \langle B_T^2 \rangle_{10} + \langle B_T^2 \rangle_{20} + \langle B_T^2 \rangle_{30} + \langle B_T^2 \rangle_{40} + \langle B_T^2 \rangle_{50} + \langle B_T^2 \rangle_{60} + \langle B_T^2 \rangle_{70} \\ &+ \langle B_T^2 \rangle_{311} + \langle B_T^2 \rangle_{412} + \langle B_T^2 \rangle_{513} + \langle B_T^2 \rangle_{511} + \langle B_T^2 \rangle_{614} + \langle B_T^2 \rangle_{612} \\ &+ \langle B_T^2 \rangle_{715} + \langle B_T^2 \rangle_{713} + \langle B_T^2 \rangle_{711}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On notera que les ordres pairs n'interfèrent pas avec les ordres impairs.

B.1 Contributions pures

Détaillons ci-après les contributions pures des ordres l . Dans le but de donner un ordre d'idée de l'importance des diverses contributions les unes par rapport aux autres, on rappelle que les dimensions de la chambre sont $R = 23.5$ cm et $H = 12$ cm.

Ordre $l = 1$: La contribution de l'ordre linéaire est la suivante,

$$\langle B_T^2 \rangle_{LO} = \frac{R^2}{2} (G_{1,-2}^2 + G_{1,2}^2) + \frac{H^2}{12} (G_{1,-1}^2 + G_{1,1}^2) + \frac{R^2}{8} G_{1,0}^2. \quad (B.5)$$

Il s'agit de la contribution majoritaire de $\langle B_T^2 \rangle$, en particulier le premier terme, dépendant des gradients $G_{1,2}$ et $G_{1,-2}$ et proportionnel au rayon de la chambre au carré.

Ordre $l = 2$: La contribution de l'ordre quadratique s'exprime comme suit,

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle_{20} &= \frac{R^4}{3} (G_{2,-3}^2 + G_{2,3}^2) \\ &+ \frac{R^2 H^2}{6} (G_{2,-2}^2 + G_{2,2}^2) \\ &+ \frac{1}{12} \left(\frac{R^4}{2} + \frac{H^4}{15} \right) (G_{2,-1}^2 + G_{2,1}^2) \\ &+ \frac{R^2 H^2}{24} G_{2,0}^2. \end{aligned} \quad (B.6)$$

Ordre $l = 3$:

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle_{30} &= \frac{R^6}{4} (G_{3,-4}^2 + G_{3,4}^2) \\ &+ \frac{R^4 H^2}{4} (G_{3,-3}^2 + G_{3,3}^2) \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{5R^6}{4} - R^4 H^2 + \frac{9R^2 H^4}{20} \right) (G_{3,-2}^2 + G_{3,2}^2) \\ &+ \frac{1}{32} \left(\frac{5R^4 H^2}{2} - \frac{3R^2 H^4}{5} + \frac{H^6}{14} \right) (G_{3,-1}^2 + G_{3,1}^2) \\ &+ \frac{1}{32} \left(\frac{9R^6}{8} - R^4 H^2 + \frac{9R^2 H^4}{20} \right) G_{3,0}^2. \end{aligned} \quad (B.7)$$

Ordre $l = 4$:

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle_{40} &= \frac{R^8}{5} (G_{4,-5}^2 + G_{4,5}^2) \\ &+ \frac{R^6 H^2}{3} (G_{4,-4}^2 + G_{4,4}^2) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{17R^8}{20} - R^6 H^2 + \frac{3R^4 H^4}{5} \right) (G_{4,-3}^2 + G_{4,3}^2) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{5R^6 H^2}{12} - \frac{R^4 H^4}{5} + \frac{R^2 H^6}{28} \right) (G_{4,-2}^2 + G_{4,2}^2) \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{R^8}{5} - \frac{R^6 H^2}{4} + \frac{R^4 H^4}{4} - \frac{R^2 H^6}{35} + \frac{H^8}{450} \right) (G_{4,-1}^2 + G_{4,1}^2) \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{3R^6 H^2}{8} - \frac{R^4 H^4}{5} + \frac{R^2 H^6}{28} \right) G_{4,0}^2. \end{aligned} \quad (B.8)$$

Ordre $l = 5$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{B}_T^2 \rangle_{50} &= \frac{R^{10}}{6} (G_{5,-6}^2 + G_{5,6}^2) \\
&+ \frac{5R^8H^2}{12} (G_{5,-5}^2 + G_{5,5}^2) \\
&+ \frac{1}{4} \left(\frac{13R^{10}}{12} - \frac{5R^8H^2}{3} + \frac{5R^6H^4}{4} \right) (G_{5,-4}^2 + G_{5,4}^2) \\
&+ \frac{5}{16} \left(\frac{17R^8H^2}{12} - R^6H^4 + \frac{5R^4H^6}{21} \right) (G_{5,-3}^2 + G_{5,3}^2) \\
&+ \frac{5}{64} \left(\frac{25R^{10}}{24} - \frac{7R^8H^2}{3} + \frac{11R^6H^4}{4} - \frac{5R^4H^6}{7} + \frac{5R^2H^8}{72} \right) (G_{5,-2}^2 + G_{5,2}^2) \\
&+ \frac{1}{64} \left(\frac{65R^8H^2}{12} - 5R^6H^4 + \frac{5R^4H^6}{3} - \frac{5R^2H^8}{36} + \frac{H^{10}}{176} \right) (G_{5,-1}^2 + G_{5,1}^2) \\
&+ \frac{5}{128} \left(\frac{5R^{10}}{12} - R^8H^2 + \frac{5R^6H^4}{4} - \frac{5R^4H^6}{14} + \frac{5R^2H^8}{144} \right) G_{5,0}^2.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Ordre $l = 6$:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{B}_T^2 \rangle_{60} &= \frac{R^{12}}{7} (G_{6,-7}^2 + G_{6,7}^2) \\
 &+ \frac{R^{10}H^2}{2} (G_{6,-6}^2 + G_{6,6}^2) \\
 &+ \frac{1}{8} \left(\frac{37R^{12}}{14} - 5R^{10}H^2 + \frac{9R^8H^4}{2} \right) (G_{6,-5}^2 + G_{6,5}^2) \\
 &+ \frac{1}{4} \left(\frac{13R^{10}H^2}{4} - 3R^8H^4 + \frac{25R^6H^6}{28} \right) (G_{6,-4}^2 + G_{6,4}^2) \\
 &+ \frac{1}{128} \left(\frac{261R^{12}}{14} - 55R^{10}H^2 + \frac{171R^8H^4}{2} - \frac{225R^6H^6}{7} + \frac{25R^4H^8}{6} \right) (G_{6,-3}^2 + G_{6,3}^2) \\
 &+ \frac{1}{64} \left(\frac{125R^{10}H^2}{8} - 21R^8H^4 + \frac{295R^6H^6}{28} - \frac{5R^4H^8}{3} + \frac{9R^2H^{10}}{88} \right) (G_{6,-2}^2 + G_{6,2}^2) \\
 &+ \frac{1}{256} \left(\begin{aligned} &\frac{225R^{12}}{56} - \frac{25R^{10}H^2}{2} + \frac{101R^8H^4}{4} \\ &-\frac{345R^6H^6}{28} + \frac{383R^4H^8}{168} - \frac{9R^2H^{10}}{77} + \frac{9H^{12}}{2548} \end{aligned} \right) (G_{6,-1}^2 + G_{6,1}^2) \\
 &+ \frac{1}{128} \left(\frac{25R^{10}H^2}{4} - 9R^8H^4 + \frac{135R^6H^6}{28} - \frac{5R^4H^8}{6} + \frac{9R^2H^{10}}{176} \right) G_{6,0}^2.
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Ordre $l = 7$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{B}_T^2 \rangle_{70} &= \frac{R^{14}}{8} (G_{7,-8}^2 + G_{7,8}^2) \\
&+ \frac{7R^{12}H^2}{12} (G_{7,-7}^2 + G_{7,7}^2) \\
&+ \frac{1}{8} \left(\frac{25R^{14}}{8} - 7R^{12}H^2 + \frac{147R^{10}H^4}{20} \right) (G_{7,-6}^2 + G_{7,6}^2) \\
&+ \frac{7}{32} \left(\frac{37R^{12}H^2}{6} - 7R^{10}H^4 + \frac{5R^8H^6}{2} \right) (G_{7,-5}^2 + G_{7,5}^2) \\
&+ \frac{7}{8} \left(\frac{35R^{14}}{128} - R^{12}H^2 + \frac{77R^{10}H^4}{40} - \frac{15R^8H^6}{16} + \frac{175R^6H^8}{1152} \right) (G_{7,-4}^2 + G_{7,4}^2) \\
&+ \frac{7}{512} \left(\frac{87R^{12}H^2}{2} - 77R^{10}H^4 + \frac{103R^8H^6}{2} - \frac{35R^6H^8}{3} + \frac{21R^4H^{10}}{22} \right) (G_{7,-3}^2 + G_{7,3}^2) \\
&+ \frac{7}{1024} \left(\frac{119R^{14}}{16} - \frac{65R^{12}H^2}{2} + \frac{609R^{10}H^4}{8} - 53R^8H^6 + \frac{1085R^6H^8}{72} - \frac{35R^4H^{10}}{22} + \frac{7R^2H^{12}}{104} \right) (G_{7,-2}^2 + G_{7,2}^2) \\
&+ \frac{1}{4096} \left(\frac{4375R^{12}H^2}{12} - 735R^{10}H^4 + \frac{1141R^8H^6}{2} - \frac{2975R^6H^8}{18} + \frac{875R^4H^{10}}{44} - \frac{21R^2H^{12}}{26} + \frac{H^{14}}{60} \right) (G_{7,-1}^2 + G_{7,1}^2) \\
&+ \frac{7}{4096} \left(\frac{175R^{14}}{32} - 25R^{12}H^2 + \frac{245R^{10}H^4}{4} - \frac{91R^8H^6}{2} + \frac{665R^6H^8}{48} - \frac{35R^4H^{10}}{22} + \frac{7R^2H^{12}}{104} \right) G_{7,0}^2.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

B.2 Termes d'interférences

Interférence de l'ordre $l = 3$ avec les ordres inférieurs : L'ordre cubique interfère avec l'ordre linéaire comme suit,

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle_{3II} &= \frac{1}{2} \left(-R^4 + \frac{R^2 H^2}{2} \right) (G_{1,-2} G_{3,-2} + G_{1,2} G_{3,2}) \\ &+ \frac{1}{8} \left(-R^2 H^2 + \frac{H^4}{5} \right) (G_{1,-1} G_{3,-1} + G_{1,1} G_{3,1}) \\ &+ \frac{1}{8} \left(-R^4 + \frac{R^2 H^2}{2} \right) G_{1,0} G_{3,0}. \end{aligned} \quad (B.12)$$

Interférence de l'ordre $l = 4$ avec les ordres inférieurs : L'ordre $l = 4$ interfère avec l'ordre quadratique :

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle_{4I2} &= \left(-\frac{R^6}{2} + \frac{R^4 H^2}{3} \right) (G_{2,-3} G_{4,-3} + G_{2,3} G_{4,3}) \\ &+ \left(-\frac{R^4 H^2}{3} + \frac{R^2 H^4}{10} \right) (G_{2,-2} G_{4,-2} + G_{2,2} G_{4,2}) \\ &+ \frac{1}{4} \left(-\frac{R^6}{4} + \frac{R^4 H^2}{6} - \frac{R^2 H^4}{15} + \frac{H^6}{105} \right) (G_{2,-1} G_{4,-1} + G_{2,1} G_{4,1}) \\ &+ \frac{1}{4} \left(-\frac{R^4 H^2}{3} + \frac{R^2 H^4}{10} \right) G_{2,0} G_{4,0}. \end{aligned} \quad (B.13)$$

Interférence de l'ordre $l = 5$ avec les ordres inférieurs : L'ordre $l = 5$ interfère avec les ordres cubique,

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle_{5I3} &= \frac{1}{2} \left(-R^8 + \frac{5R^6 H^2}{6} \right) (G_{3,-4} G_{5,-4} + G_{3,4} G_{5,4}) \\ &+ \frac{1}{4} \left(-\frac{5R^6 H^2}{2} + R^4 H^4 \right) (G_{3,-3} G_{5,-3} + G_{3,3} G_{5,3}) \\ &+ \frac{1}{32} \left(-7R^8 + \frac{65R^6 H^2}{6} - 7R^4 H^4 + \frac{15R^2 H^6}{14} \right) (G_{3,-2} G_{5,-2} + G_{3,2} G_{5,2}) \\ &+ \frac{1}{32} \left(-5R^6 H^2 + 3R^4 H^4 - \frac{13R^2 H^6}{28} + \frac{H^8}{36} \right) (G_{3,-1} G_{5,-1} + G_{3,1} G_{5,1}) \\ &+ \frac{1}{64} \left(-3R^8 + 5R^6 H^2 - \frac{7R^4 H^4}{2} + \frac{15R^2 H^6}{28} \right) G_{3,0} G_{5,0}, \end{aligned} \quad (B.14)$$

et linéaire,

$$\begin{aligned} \langle B_T^2 \rangle_{5II} &= \frac{1}{4} \left(\frac{5R^6}{4} - \frac{5R^4 H^2}{3} + \frac{R^2 H^4}{4} \right) (G_{1,-2} G_{5,-2} + G_{1,2} G_{5,2}) \\ &+ \frac{1}{16} \left(\frac{5R^4 H^2}{3} - R^2 H^4 + \frac{H^6}{14} \right) (G_{1,-1} G_{5,-1} + G_{1,1} G_{5,1}) \\ &+ \frac{1}{16} \left(\frac{5R^6}{4} - \frac{5R^4 H^2}{3} + \frac{R^2 H^4}{4} \right) G_{1,0} G_{5,0}. \end{aligned} \quad (B.15)$$

Interférence de l'ordre $l = 6$ avec les ordres inférieurs : L'ordre $l = 6$ interfère avec les ordres pairs $l = 4$,

$$\begin{aligned}
 \langle B_T^2 \rangle_{6I4} &= \frac{1}{2} (-R^{10} + R^8 H^2) (G_{4,-5} G_{6,-5} + G_{4,5} G_{6,5}) \\
 &+ \left(-R^8 H^2 + \frac{R^6 H^4}{2} \right) (G_{4,-4} G_{6,-4} + G_{4,4} G_{6,4}) \\
 &+ \frac{1}{16} \left(-\frac{11R^{10}}{2} + \frac{23R^8 H^2}{2} - \frac{21R^6 H^4}{2} + \frac{15R^4 H^6}{7} \right) (G_{4,-3} G_{6,-3} + G_{4,3} G_{6,3}) \\
 &+ \frac{1}{16} \left(-7R^8 H^2 + \frac{13R^6 H^4}{2} - \frac{13R^4 H^6}{7} + \frac{R^2 H^8}{6} \right) (G_{4,-2} G_{6,-2} + G_{4,2} G_{6,2}) \\
 &+ \frac{1}{64} \left(\begin{array}{c} -\frac{5R^{10}}{2} + \frac{11R^8 H^2}{2} - \frac{29R^6 H^4}{4} \\ +\frac{31R^4 H^6}{14} - \frac{19R^2 H^8}{105} + \frac{3H^{10}}{385} \end{array} \right) (G_{4,-1} G_{6,-1} + G_{4,1} G_{6,1}) \\
 &+ \frac{1}{32} \left(-3R^8 H^2 + 3R^6 H^4 - \frac{13R^4 H^6}{14} + \frac{R^2 H^8}{12} \right) G_{4,0} G_{6,0}.
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

et $l = 2$:

$$\begin{aligned}
 \langle B_T^2 \rangle_{6I2} &= \frac{1}{8} (3R^8 - 5R^6 H^2 + R^4 H^4) (G_{2,-3} G_{6,-3} + G_{2,3} G_{6,3}) \\
 &+ \frac{1}{4} \left(\frac{5R^6 H^2}{4} - R^4 H^4 + \frac{3R^2 H^6}{28} \right) (G_{2,-2} G_{6,-2} + G_{2,2} G_{6,2}) \\
 &+ \frac{1}{16} \left(\frac{3R^8}{4} - \frac{5R^6 H^2}{4} + \frac{7R^4 H^4}{12} - \frac{R^2 H^6}{7} + \frac{H^8}{126} \right) (G_{2,-1} G_{6,-1} + G_{2,1} G_{6,1}) \\
 &+ \frac{1}{16} \left(\frac{5R^6 H^2}{4} - R^4 H^4 + \frac{3R^2 H^6}{28} \right) G_{2,0} G_{6,0}.
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Interférence de l'ordre $l = 7$ avec les ordres inférieurs : Enfin, l'ordre $l = 7$ interfère quant à lui avec tous les ordres impairs inférieurs :

$$\begin{aligned}
 \langle B_T^2 \rangle_{715} &= \frac{1}{2} \left(-R^{12} + \frac{7R^{10}H^2}{6} \right) (G_{5,-6}G_{7,-6} + G_{5,6}G_{7,6}) \\
 &+ \frac{7}{8} \left(-\frac{5R^{10}H^2}{3} + R^8H^4 \right) (G_{5,-5}G_{7,-5} + G_{5,5}G_{7,5}) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(-R^{12} + \frac{21R^{10}H^2}{8} - \frac{49R^8H^4}{16} + \frac{25R^6H^6}{32} \right) (G_{5,-4}G_{7,-4} + G_{5,4}G_{7,4}) \\
 &+ \frac{1}{64} \left(-\frac{385R^{10}H^2}{6} + \frac{161R^8H^4}{2} - \frac{65R^6H^6}{2} + \frac{35R^4H^8}{9} \right) (G_{5,-3}G_{7,-3} + G_{5,3}G_{7,3}) \\
 &+ \frac{5}{256} \left(\begin{array}{l} -\frac{13R^{12}}{2} + \frac{259R^{10}H^2}{12} - 35R^8H^4 \\ +\frac{33R^6H^6}{2} - \frac{49R^4H^8}{18} + \frac{7R^2H^{10}}{44} \end{array} \right) (G_{5,-2}G_{7,-2} + G_{5,2}G_{7,2}) \\
 &+ \frac{1}{1024} \left(\begin{array}{l} -175R^{10}H^2 + 259R^8H^4 - \frac{265R^6H^6}{2} \\ +\frac{215R^4H^8}{9} - \frac{31R^2H^{10}}{22} + \frac{H^{12}}{26} \end{array} \right) (G_{5,-1}G_{7,-1} + G_{5,1}G_{7,1}) \\
 &+ \frac{1}{1024} \left(\begin{array}{l} -25R^{12} + \frac{175R^{10}H^2}{2} - \frac{301R^8H^4}{2} \\ +\frac{305R^6H^6}{4} - \frac{245R^4H^8}{18} + \frac{35R^2H^{10}}{44} \end{array} \right) G_{5,0}G_{7,0}.
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
\langle B_T^2 \rangle_{7I3} &= \frac{7}{8} \left(\frac{R^{10}}{2} - R^8 H^2 + \frac{R^6 H^4}{4} \right) (G_{3,-4} G_{7,-4} + G_{3,4} G_{7,4}) \\
&+ \frac{3}{32} (7R^8 H^2 - 7R^6 H^4 + R^4 H^6) (G_{3,-3} G_{7,-3} + G_{3,3} G_{7,3}) \\
&+ \frac{1}{8} \left(\frac{21R^{10}}{16} - \frac{7R^8 H^2}{2} + \frac{49R^6 H^4}{16} - R^4 H^6 + \frac{7R^2 H^8}{96} \right) (G_{3,-2} G_{7,-2} + G_{3,2} G_{7,2}) \\
&+ \frac{1}{64} \left(\frac{77R^8 H^2}{8} - \frac{91R^6 H^4}{8} + \frac{25R^4 H^6}{8} - \frac{R^2 H^8}{3} + \frac{H^{10}}{88} \right) (G_{3,-1} G_{7,-1} + G_{3,1} G_{7,1}) \\
&+ \frac{1}{32} \left(\frac{35R^{10}}{32} - \frac{49R^8 H^2}{16} + \frac{189R^6 H^4}{64} - R^4 H^6 + \frac{7R^2 H^8}{96} \right) G_{3,0} G_{7,0}.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
\langle B_T^2 \rangle_{7II} &= + \frac{1}{32} \left(-7R^8 + \frac{35R^6 H^2}{2} - 7R^4 H^4 + \frac{R^2 H^6}{2} \right) (G_{1,-2} G_{7,-2} + G_{1,2} G_{7,2}) \\
&+ \frac{1}{64} \left(-\frac{35R^6 H^2}{6} + 7R^4 H^4 - \frac{3R^2 H^6}{2} + \frac{H^8}{18} \right) (G_{1,-1} G_{7,-1} + G_{1,1} G_{7,1}) \\
&+ \frac{1}{128} \left(-7R^8 + \frac{35R^6 H^2}{2} - 7R^4 H^4 + \frac{R^2 H^6}{2} \right) G_{1,0} G_{7,0}.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Annexe C

Modèle statistique des groupes de cartes

Nous nous attacherons à décrire dans cette annexe le modèle statistique permettant d'obtenir les expressions des estimateurs des gradients moyens produits par la bobine B_0 , de la répétabilité des cartographies et de la reproductibilité du champ magnétique. Par souci de simplicité pour les expressions, on considérera ici le développement de ce modèle pour une grandeur générale x mesurée par carte de champ.

On dispose de $N = N^\uparrow + N^\downarrow$ mesures de x , avec N^\uparrow (N^\downarrow) le nombre de cartes avec le champ \vec{B}_0 dirigé vers le haut (bas). Ces cartes sont réparties en $g = g^\uparrow + g^\downarrow$ groupes, chaque groupe étant séparé des autres par une démagnétisation du blindage. Un groupe i contient n_i mesures de x . On peut donc écrire

$$N = \sum_{i=1}^g n_i. \quad (\text{C.1})$$

Au sein d'un groupe, les valeurs mesurées de x sont distribuées normalement autour de la moyenne du groupe et avec un écart-type égal à la répétabilité τ . La moyenne d'un groupe est elle-même distribuée selon une gaussienne centrée sur zéro et d'écart-type égal à la reproductibilité σ . La valeur j -ième valeur mesurée de x au sein du groupe i peut donc être décrite par l'expression suivante,

$$x_{ij} = x_0 + \delta_i + w_{ij}, \quad (\text{C.2})$$

avec $\delta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $w_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$.

Estimation de la moyenne d'un groupe En théorie, la moyenne d'un groupe devrait converger vers $x_0 + \delta_i$ lorsque la taille du groupe n_i tend vers l'infini. En effet, au sein d'un groupe i , δ_i n'est pas considéré comme une variable aléatoire mais bien comme un nombre avec une valeur fixe et égale pour tous les éléments du groupe. Pour estimer la moyenne du groupe, on construit l'estimateur suivant,

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j x_{ij}, \quad (\text{C.3})$$

où les coefficients α_j sont à déterminer pour avoir l'estimateur non biaisé le plus efficace possible. Le calcul de l'espérance de l'estimateur permet de fournir une première condition sur les valeurs de α_j . On précise que l'on utilise ici l'espérance sur le groupe i , qui sera indiquée par des chevrons suivis de l'indice i . Cette notation sera à distinguer de l'espérance calculée sur l'ensemble des groupes, qui sera simplement notée avec des chevrons. La même distinction sera faite pour les calculs de variance. Donnons ici les valeurs sur un groupe i de l'espérance ainsi que de la variance

des trois contributions à la valeur mesurée x_{ij} , qui nous servirons par la suite :

$$\langle x_0 \rangle_i = x_0, \quad (\text{C.4})$$

$$\langle \delta_i \rangle_i = \delta_i, \quad (\text{C.5})$$

$$\langle w_{ij} \rangle_i = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$\text{Var}[x_0]_i = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\text{Var}[\delta_i]_i = 0, \quad (\text{C.8})$$

$$\text{Var}[w_{ij}]_i = \tau^2. \quad (\text{C.9})$$

A partir de ces expressions, l'espérance de l'estimateur \bar{x}_i se calcule comme suit,

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}_i \rangle_i &= \left\langle \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j x_{ij} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j \langle x_{ij} \rangle_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j \langle x_0 + \delta_i + w_{ij} \rangle_i \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j (\langle x_0 \rangle_i + \langle \delta_i \rangle_i + \langle w_{ij} \rangle_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j (x_0 + \delta_i) \\ &= (x_0 + \delta_i) \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Pour que cet estimateur soit non biaisé, on doit donc avoir

$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j = 1. \quad (\text{C.11})$$

Au sein d'un groupe, il n'y a pas de raison valable de ne pas traiter les cartes sur un pied d'égalité. On peut donc ajouter la condition que $\alpha_j = \alpha$ pour tout j . Ces deux conditions nous amènent à l'estimateur de la moyenne empirique sur un groupe,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad (\text{C.12})$$

dont on peut calculer la variance, qui nous sera utile par la suite :

$$\text{Var}[\bar{x}_i]_i = \text{Var} \left[\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right]_i = \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \text{Var}[x_{ij}]_i \quad (\text{C.13})$$

$$= \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (\text{Var}[x_0] + \text{Var}[\delta_i] + \text{Var}[w_{ij}]_i) \quad (\text{C.14})$$

$$= \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \tau^2 = \frac{\tau^2}{n_i}. \quad (\text{C.15})$$

Estimation de la répétabilité τ La répétabilité des cartographies représente la capacité à réaliser deux fois de suite la même mesure avec un résultat identique. Elle peut être estimée au sein d'un groupe grâce à l'écart moyen des valeurs de ce groupe à sa moyenne. On pourrait donc en théorie l'estimer à partir d'un seul groupe de cartes. Toutefois, nous disposons de nombreux groupes et

L'on peut donc obtenir une estimation plus fiable en utilisant les écarts à la moyenne d'un groupe de tous les groupes, en pondérant le poids de chaque groupe d'un facteur γ_i . Appelons r^2 l'estimateur du carré de la répétabilité τ^2 . On définit donc r^2 comme :

$$r^2 = \sum_{i=1}^g \gamma_i \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2. \quad (\text{C.16})$$

Pour obtenir la condition de normalisation des γ_i permettant de faire de r^2 un estimateur non biaisé, il faut comme tout à l'heure calculer l'espérance de notre estimateur. Notons que bien que r^2 soit calculé avec tous les groupes, il s'agit en fait simplement de la moyenne pondérée des estimateurs par groupe du carré de la répétabilité. Comme dans le cas de l'estimateur de la moyenne d'un groupe, l'espérance de r^2 se calcule donc ici par groupe i , comme suit,

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_i &= \left\langle \sum_{i=1}^g \gamma_i \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right\rangle_i = \sum_{i=1}^g \gamma_i \sum_{j=1}^{n_i} \langle (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \rangle_i \\ &= \sum_{i=1}^g \gamma_i \sum_{j=1}^{n_i} \left(\langle x_{ij}^2 \rangle_i - 2 \langle x_{ij} \bar{x}_i \rangle_i + \langle \bar{x}_i^2 \rangle_i \right). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Voyons comment chacun des trois termes de l'expression précédente se calcule. Pour ce faire, on va avoir besoin de l'espérance sur un groupe i des contributions au carré à la variable x_{ij} :

$$\langle x_0^2 \rangle_i = x_0^2, \quad (\text{C.18})$$

$$\langle \delta_i^2 \rangle_i = \delta_i^2, \quad (\text{C.19})$$

$$\langle w_{ij}^2 \rangle_i = \langle (w_{ij} - 0)^2 \rangle_i = \langle (w_{ij} - \langle w_{ij} \rangle_i)^2 \rangle_i = \text{Var} [w_{ij}]_i = \tau^2. \quad (\text{C.20})$$

A partir des expressions (C.4) à (C.6) et (C.18) à (C.20), on calcule

$$\begin{aligned} \langle x_{ij}^2 \rangle_i &= \langle (x_0 + \delta_i + w_{ij})^2 \rangle_i = \langle x_0^2 + \delta_i^2 + w_{ij}^2 + 2x_0\delta_i + 2x_0w_{ij} + 2\delta_iw_{ij} \rangle_i \\ &= x_0^2 + \delta_i^2 + \tau^2 + 2x_0\delta_i \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$= \tau^2 + (x_0 + \delta_i)^2, \quad (\text{C.22})$$

et

$$\begin{aligned} \langle x_{ij} \bar{x}_i \rangle_i &= \left\langle x_{ij} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} \right\rangle_i = \frac{1}{n_i} \left\langle x_{ij} \left(x_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} x_{ik} \right) \right\rangle_i = \frac{1}{n_i} \left(\langle x_{ij}^2 \rangle_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} \langle x_{ij} x_{ik} \rangle_i \right) \\ &= \frac{1}{n_i} \left(\langle x_{ij}^2 \rangle_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} \langle x_{ij} \rangle_i \langle x_{ik} \rangle_i \right) = \frac{1}{n_i} [\tau^2 + (x_0 + \delta_i)^2 + (n_i - 1) (x_0 + \delta_i)^2] \\ &= \frac{1}{n_i} [\tau^2 + n_i (x_0 + \delta_i)^2], \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

et enfin

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{x}_i^2 \rangle_i &= \left\langle \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right) \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} \right) \right\rangle_i = \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left\langle x_{ij} \left(x_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} x_{ik} \right) \right\rangle_i \\
 &= \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\langle x_{ij}^2 \rangle_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} \langle x_{ij} x_{ik} \rangle_i \right) = \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\langle x_{ij}^2 \rangle_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} \langle x_{ij} \rangle_i \langle x_{ik} \rangle_i \right) \\
 &= \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} [\tau^2 + (x_0 + \delta_i)^2 + (n_i - 1)(x_0 + \delta_i)^2] = \frac{1}{n_i^2} n_i [\tau^2 + n_i (x_0 + \delta_i)^2] \\
 &= \frac{1}{n_i} [\tau^2 + n_i (x_0 + \delta_i)^2]. \tag{C.24}
 \end{aligned}$$

En injectant les résultats des calculs des trois termes dans l'expression de l'espérance de la répétabilité au carré, (C.17), celle-ci devient

$$\begin{aligned}
 \langle r^2 \rangle_i &= \sum_{i=1}^g \gamma_i \sum_{j=1}^{n_i} \left[\tau^2 + (x_0 + \delta_i)^2 - \frac{2}{n_i} [\tau^2 + n_i (x_0 + \delta_i)^2] + \frac{1}{n_i} [\tau^2 + n_i (x_0 + \delta_i)^2] \right] \\
 &= \sum_{i=1}^g \gamma_i \sum_{j=1}^{n_i} \tau^2 \frac{n_i - 1}{n_i} \\
 &= \tau^2 \sum_{i=1}^g \gamma_i (n_i - 1). \tag{C.25}
 \end{aligned}$$

Pour que l'estimateur r^2 de τ^2 soit donc non biaisé, il faut donc que la condition suivante sur les γ_i soit vérifiée :

$$\sum_{i=1}^g \gamma_i (n_i - 1) = 1 \tag{C.26}$$

Bien que tous les groupes ne contiennent pas le même nombre de cartes n_i , la majorité d'entre eux sont composés de deux ou trois cartes et il a donc été décidé de les considérer équitablement d'un point de vue statistique. La condition supplémentaire $\gamma_i = \gamma$ vient donc s'ajouter à la condition de normalisation et l'on calcule

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^g \gamma (n_i - 1) &= 1 \\
 \gamma \left(\sum_{i=1}^g n_i - \sum_{i=1}^g 1 \right) &= 1 \\
 \gamma (N - g) &= 1. \tag{C.27}
 \end{aligned}$$

L'estimateur de la répétabilité est donc défini comme suit,

$$r^2 = \frac{1}{N - g} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2. \tag{C.28}$$

Estimation des moyennes globales Dans ce paragraphe, on ne traitera que le cas des cartes de champ positif, les équations se développant de façon strictement identique dans le cas opposé. Le choix initial qui a été fait pour estimer la moyenne globale d'une grandeur était de prendre les moyennes de chaque groupe et de calculer une moyenne pondérée de ces moyennes avec un poids proportionnel à la taille des groupes. Ce faisant, on verra que ce choix nous a conduit au calcul de la simple moyenne empirique sur toutes les cartes de champ, tous groupes confondus. Prenons donc le temps de le montrer en partant d'une expression générale de la moyenne globale sur les $g \uparrow$ groupes avec le champ \vec{B}_0 dirigé vers le haut :

$$\overline{x^\uparrow} = \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \beta_i \overline{x_i}. \quad (\text{C.29})$$

Comme pour les estimateurs des moyennes de groupe et de la répétabilité, on calcule l'espérance pour obtenir la condition de normalisation des coefficients β_i . En revanche, contrairement aux deux estimateurs évoqués précédemment, on remarque cette fois que l'estimateur de la moyenne globale nécessite plusieurs groupes pour être valable. Les calculs de variance et d'espérance se feront donc cette fois en moyennant sur tous les groupes. Dans ce contexte, l'espérance et la variance des trois contributions à la mesure x_{ij} sont données ci-après :

$$\langle x_0 \rangle = x_0, \quad (\text{C.30})$$

$$\langle \delta_i \rangle = 0, \quad (\text{C.31})$$

$$\langle w_{ij} \rangle = 0, \quad (\text{C.32})$$

$$\text{Var}[x_0] = 0, \quad (\text{C.33})$$

$$\text{Var}[\delta_i] = \sigma^2, \quad (\text{C.34})$$

$$\text{Var}[w_{ij}] = \tau^2. \quad (\text{C.35})$$

Calculons donc l'espérance de $\overline{x^\uparrow}$.

$$\begin{aligned} \langle \overline{x^\uparrow} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \beta_i \overline{x_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \beta_i \langle \overline{x_i} \rangle = \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \beta_i \left\langle \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \frac{\beta_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \langle x_{ij} \rangle = \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \frac{\beta_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_0 \\ &= \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \beta_i x_0 \\ &= x_0 \sum_{i=1}^{g^\uparrow} \beta_i = x_0 \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

En théorie, si l'estimateur est non biaisé, il devrait tendre vers x_0 . Pour que ce soit le cas, la condition de normalisation suivante s'impose donc :

$$\sum_{i=1}^{g^\uparrow} \beta_i = 1. \quad (\text{C.37})$$

Intéressons-nous maintenant à la variance de cet estimateur pour la minimiser afin qu'il soit le plus efficace possible :

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[\bar{x} \right] &= \text{Var} \left[\sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \beta_i \bar{x}_i \right] = \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \beta_i^2 \text{Var} \left[\bar{x}_i \right] = \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \beta_i^2 \text{Var} \left[\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \frac{\beta_i^2}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \text{Var} \left[x_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \frac{\beta_i^2}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (\sigma^2 + \tau^2) \\
 &= (\sigma^2 + \tau^2) \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \frac{\beta_i^2}{n_i}
 \end{aligned} \tag{C.38}$$

Le choix des β_i est fait de façon à respecter la condition de normalisation tout en minimisant la variance de l'estimateur que l'on vient juste de calculer. Pour ce faire, on prend

$$\beta_i = \frac{n_i}{\sum_{j=1}^{g^{\dagger}} n_j} = \frac{n_i}{N^{\dagger}}. \tag{C.39}$$

L'expression de l'estimateur de moyenne globale pour les cartes prises avec un champ magnétique \vec{B}_0 dirigé vers le haut est donc la suivante :

$$\bar{x}^{\dagger} = \frac{1}{N^{\dagger}} \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} n_i \bar{x}_i = \frac{1}{N^{\dagger}} \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}. \tag{C.40}$$

Notons qu'avec ce choix de pondération, la variance de l'estimateur devient

$$\text{Var} \left[\bar{x} \right] = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{N^{\dagger}}. \tag{C.41}$$

C'est le carré de cette variance qui sera utilisé comme erreur sur la moyenne globale, en prenant comme valeur pour σ et τ leurs estimateurs respectifs.

Estimation de la reproductibilité La reproductibilité σ représente l'écart entre les moyennes mesurées sur les différents groupes de mesure. Pour l'estimer, on utilise donc les écarts carrés moyens des moyennes des groupes à la moyenne globale. Comme pour l'estimateur de la moyenne globale, on s'intéresse donc à l'ensemble des groupes. On définit donc l'estimateur du carré de la reproductibilité, s^2 , comme suit,

$$s^2 = \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \lambda_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}^{\dagger} \right)^2 + \sum_{i=1}^{g^{\dagger}} \kappa_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}^{\dagger} \right)^2 - r^2. \tag{C.42}$$

Le traitement des groupes n'a pas de raison de dépendre du sens du champ magnétique. Par conséquent, les coefficients de pondération λ_i et κ_i ne devrait pas être définis différemment. Pour les calculs qui vont suivre, on utilisera donc une version simplifiée de cette expression,

$$s^2 = \sum_{i=1}^g \lambda_i \left(\bar{x}_i - \bar{x} \right)^2 - r^2, \tag{C.43}$$

en gardant à l'esprit que le terme $\bar{\bar{x}}$ peut désigner la moyenne globale en champ positif ou négatif selon le groupe sur lequel les écarts sont calculés. Avant de calculer l'espérance de cet estimateur, calculons quelques espérances et variances qui nous seront utiles par la suite :

$$\langle x_0^2 \rangle = x_0^2, \quad (C.44)$$

$$\langle \delta_i^2 \rangle = \langle (\delta_i - 0)^2 \rangle = \langle (\delta_i - \langle \delta_i \rangle)^2 \rangle = \text{Var}[\delta_i] = \sigma^2, \quad (C.45)$$

$$\langle w_{ij}^2 \rangle = \langle (w_{ij} - 0)^2 \rangle = \langle (w_{ij} - \langle w_{ij} \rangle)^2 \rangle = \text{Var}[w_{ij}] = \tau^2., \quad (C.46)$$

à partir desquelles on peut calculer

$$\begin{aligned} \langle x_{ij}^2 \rangle &= \langle (x_0 + \delta_i + w_{ij})^2 \rangle = \langle x_0^2 + \delta_i^2 + w_{ij}^2 + 2x_0\delta_i + 2x_0w_{ij} + 2\delta_iw_{ij} \rangle \\ &= x_0^2 + \sigma^2 + \tau^2. \end{aligned} \quad (C.47)$$

Armés de ces calculs, on peut dorénavant s'attaquer à l'espérance de s^2 :

$$\begin{aligned} \langle s^2 \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^g \lambda_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 - r^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^g \lambda_i \langle (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 \rangle - \langle r^2 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^g \lambda_i \langle (\bar{x}_i^2 - 2\bar{x}_i\bar{\bar{x}} + \bar{\bar{x}}^2) \rangle - \tau^2 \\ &= \sum_{i=1}^g \lambda_i \left(\langle \bar{x}_i^2 \rangle - 2\langle \bar{x}_i\bar{\bar{x}} \rangle + \langle \bar{\bar{x}}^2 \rangle \right) - \tau^2. \end{aligned} \quad (C.48)$$

Nous allons calculer chacun des trois termes composant l'expression précédente individuellement :

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}_i^2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right) \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} \right) \right\rangle = \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left\langle x_{ij} \left(x_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} x_{ik} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\langle x_{ij}^2 \rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} \langle x_{ij}x_{ik} \rangle \right) = \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\langle x_{ij}^2 \rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} \langle x_{ij} \rangle \langle x_{ik} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} [x_0^2 + \sigma^2 + \tau^2 + (n_i - 1)x_0^2] = \frac{1}{n_i^2} n_i (\sigma^2 + \tau^2 + n_i x_0^2) \\ &= \frac{1}{n_i} (\sigma^2 + \tau^2 + n_i x_0^2), \end{aligned} \quad (C.49)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}_i \bar{\bar{x}} \rangle &= \left\langle \bar{x}_i \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^g n_k \bar{x}_k \right) \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle n_i \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^g n_k \bar{x}_i \bar{x}_k \right\rangle \\ &= \frac{1}{N} \left(n_i \langle \bar{x}_i^2 \rangle + \langle \bar{x}_i \rangle \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^g n_k \langle \bar{x}_k \rangle \right) = \frac{1}{N} [(\sigma^2 + \tau^2 + n_i x_0^2) + (N - n_i) x_0^2] \\ &= x_0^2 + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{N}, \end{aligned} \quad (C.50)$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{x}^2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^g n_i \bar{x}_i \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^g n_k \bar{x}_k \right) \right\rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^g n_i \left\langle \bar{x}_i \sum_{k=1}^g n_k \bar{x}_k \right\rangle \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^g \left(n_i^2 \langle \bar{x}_i^2 \rangle + n_i \langle \bar{x}_i \rangle \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^g n_k \langle \bar{x}_k \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^g [n_i (\sigma^2 + \tau^2 + n_i x_0^2) + n_i (N - n_i) x_0^2] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^g n_i (\sigma^2 + \tau^2 + N x_0^2) \\
 &= x_0^2 + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{N}.
 \end{aligned} \tag{C.51}$$

Quand on additionne ces termes dans l'expression de l'espérance de s^2 , on obtient donc

$$\begin{aligned}
 \langle s^2 \rangle &= \sum_{i=1}^g \lambda_i \left[\frac{1}{n_i} (\sigma^2 + \tau^2 + n_i x_0^2) - 2 \left(x_0^2 + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{N} \right) + x_0^2 + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{N} \right] - \tau^2 \\
 &= \sum_{i=1}^g \lambda_i (\sigma^2 + \tau^2) \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N} \right) - \tau^2 \\
 &= (\sigma^2 + \tau^2) \sum_{i=1}^g \lambda_i \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N} \right) - \tau^2.
 \end{aligned} \tag{C.52}$$

On veut pouvoir estimer σ^2 avec s^2 . Pour que cet estimateur soit non biaisé, la condition suivante doit donc être vérifiée :

$$\sum_{i=1}^g \lambda_i \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N} \right) = 1. \tag{C.53}$$

Le choix qui a été fait est $\lambda_i = n_i / g$ afin de pondérer chaque groupe avec sa taille. On notera que ce choix mène à un léger biais de l'estimateur $b(s^2) = -(\sigma^2 + \tau^2) / g$. Il reposait alors sur un calcul erroné de $\langle s^2 \rangle$ qui a été découvert trop tard pour pouvoir le changer. Cependant, l'estimateur est non biaisé asymptotiquement, c'est-à-dire qu'il tend vers la valeur vraie du paramètre lorsque g est grand. Pour garder un choix similaire de pondération tout en s'affranchissant du biais, il faudrait prendre

$$\lambda_i = \frac{n_i}{g-1}. \tag{C.54}$$

Après la découverte de cette erreur, le calcul des estimateurs non biaisés de la reproductibilité des grandeurs d'intérêt a été fait et la différence s'est avérée minime et sans réel impact pour la suite de l'analyse.

Conclusion Le modèle statistique que nous avons établi permet donc de pouvoir estimer aussi bien moyennes globales, répétabilité et reproductibilité. Des améliorations de ce modèle sont encore possibles en adaptant les facteurs de pondération des estimateurs afin de minimiser leurs variances. C'est un travail qui sera fait afin que ce modèle puisse être le plus optimal possible pour l'expérience qui suivra nEDM, n2EDM.

Annexe D

Résultats annexes de l'analyse des cartographies

Dans cette annexe, on présentera l'ensemble des résultats de l'analyse globale des cartes de champ pour les gradients généralisés jusqu'à l'ordre maximum de l'analyse $l_{\max} = m_{\max} = 6$.

D.1 Reproductibilité et répétabilité

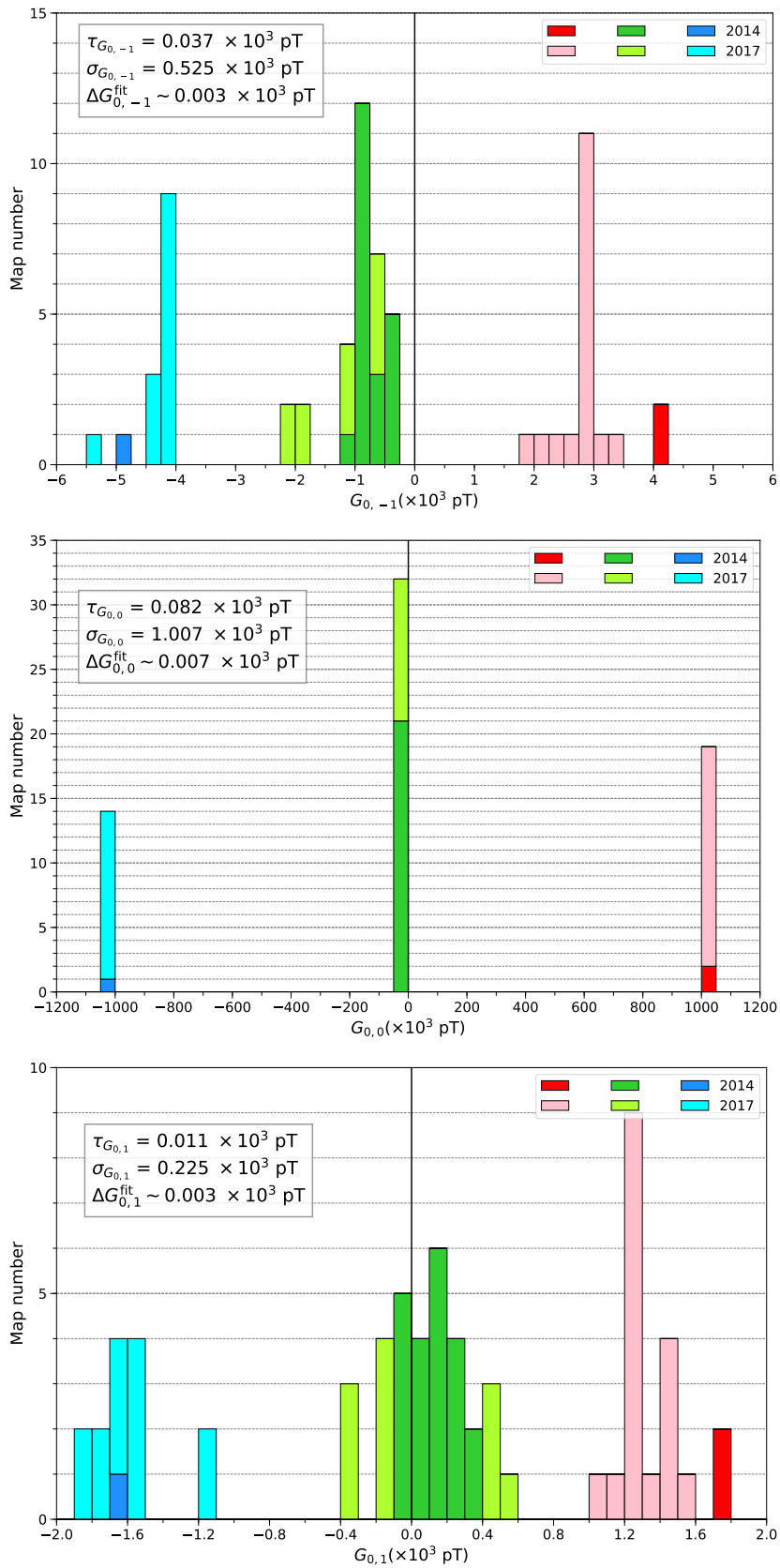


FIGURE D.1 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 0$.

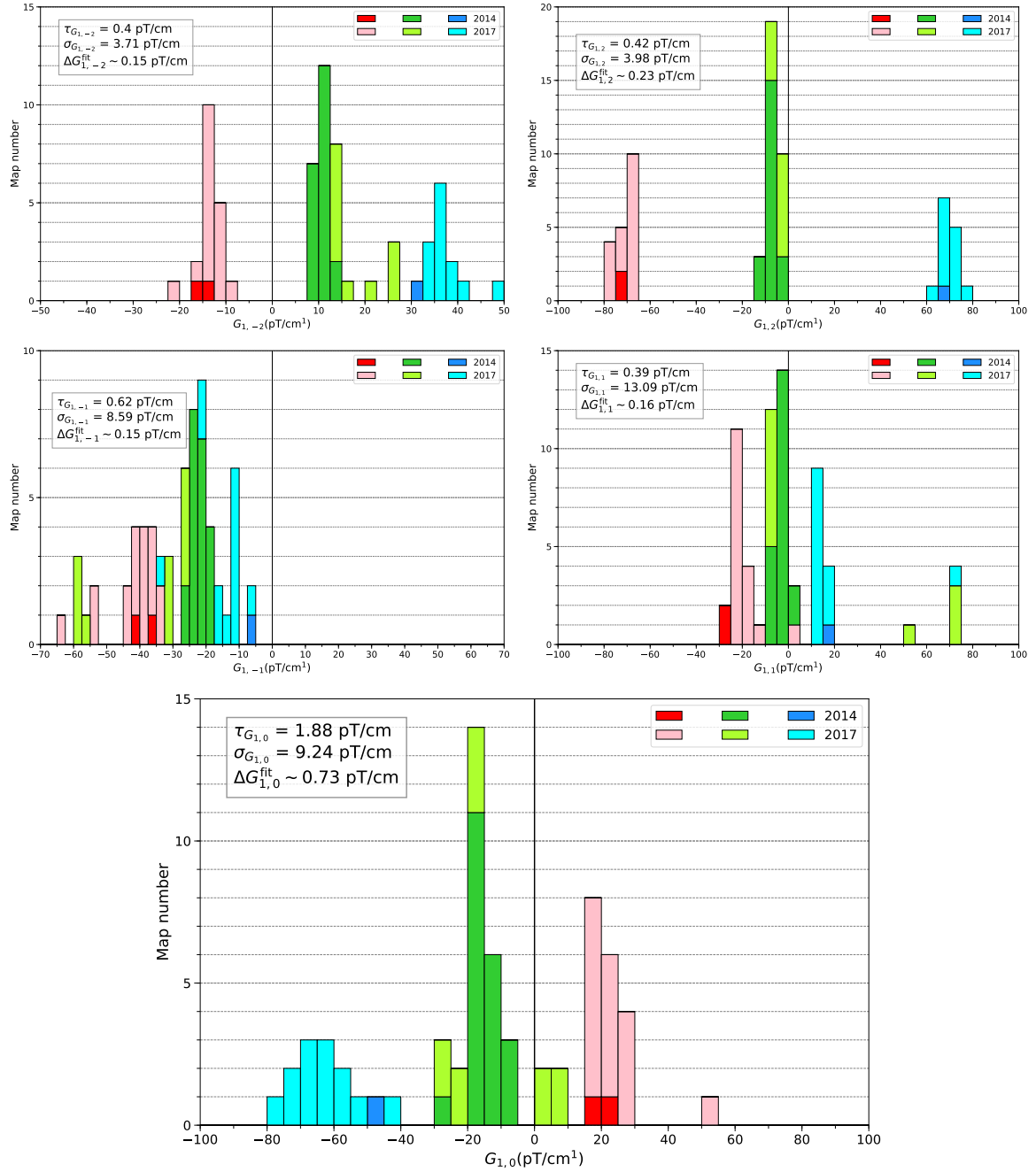


FIGURE D.2 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 1$.

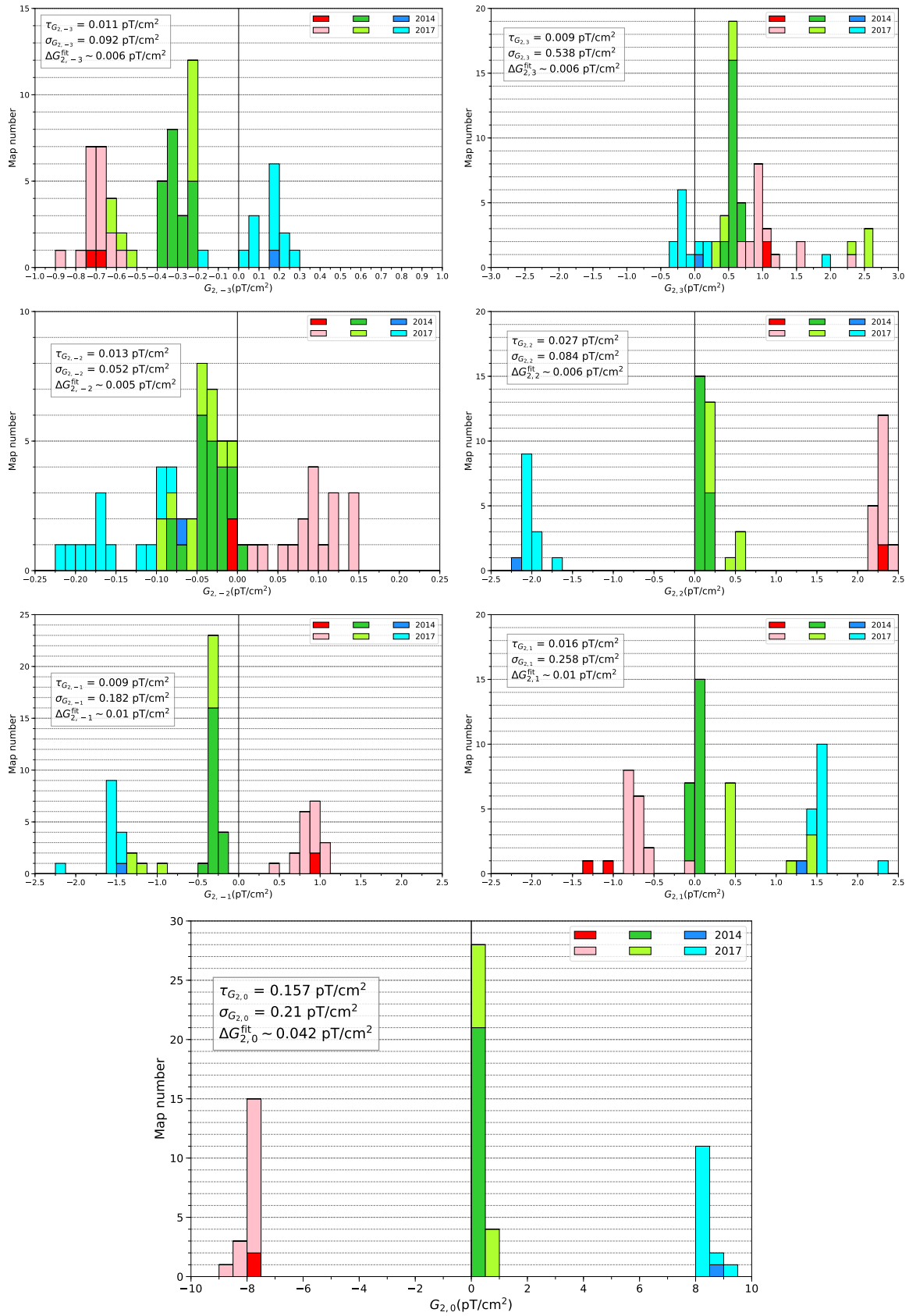


FIGURE D.3 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 2$.

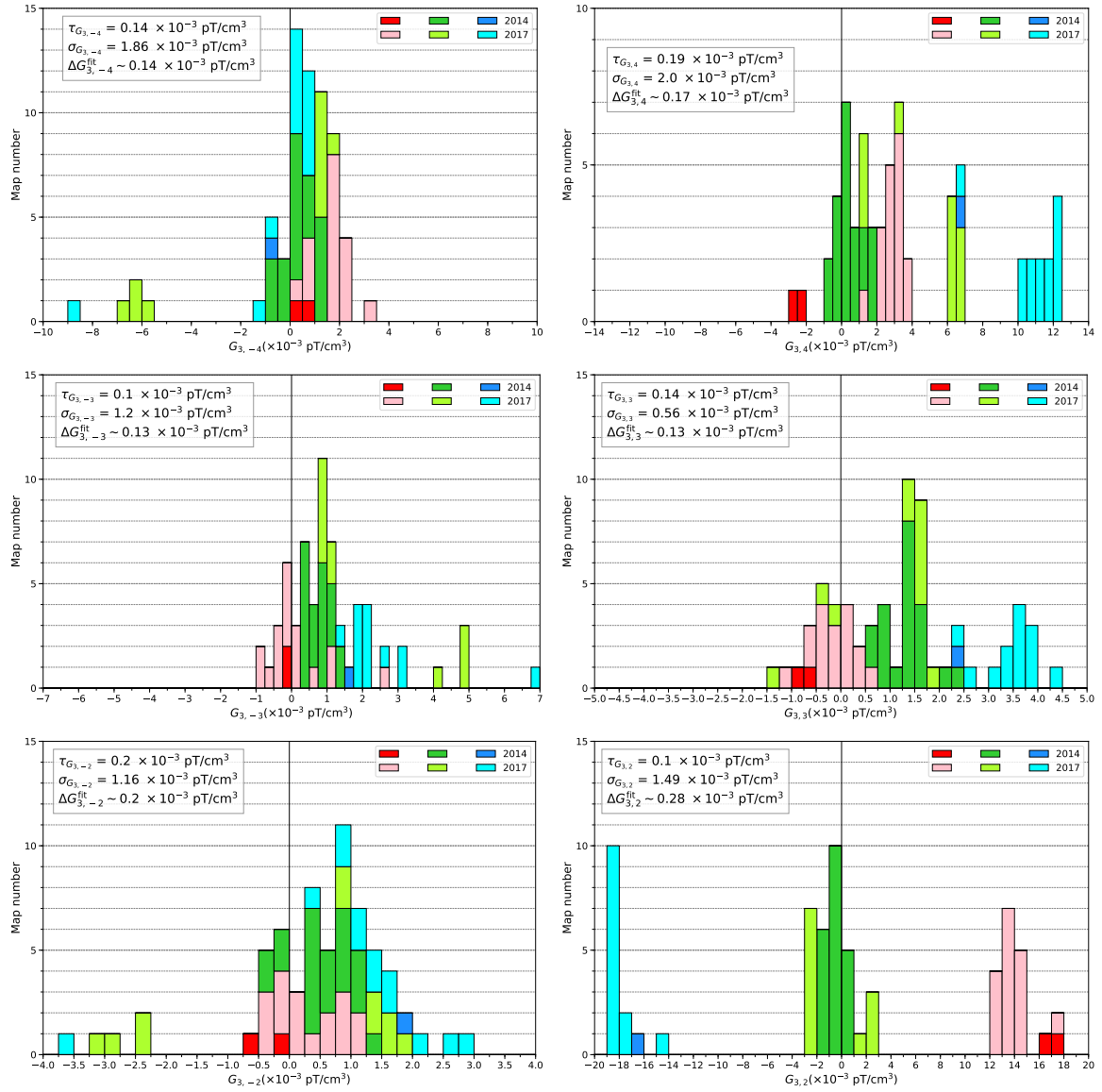


FIGURE D.4 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 3$.

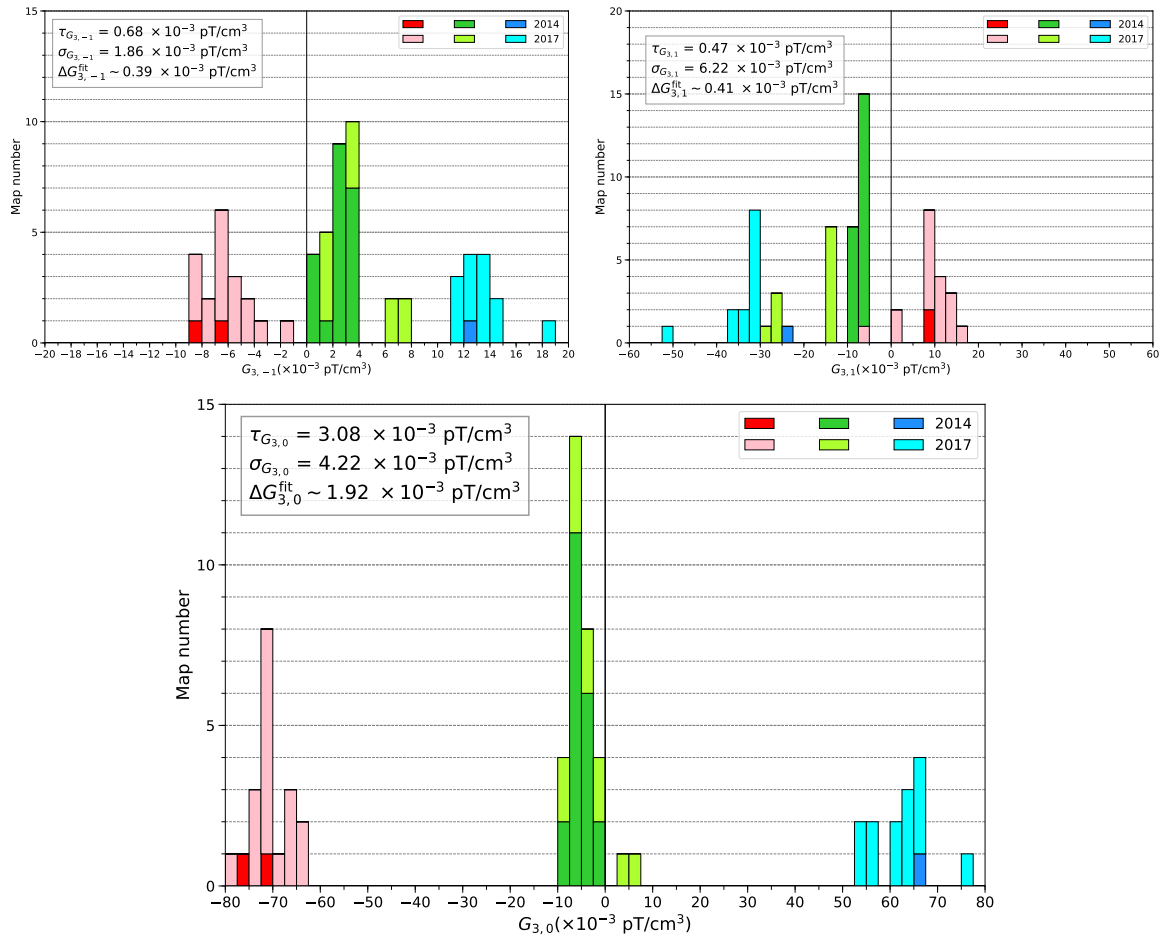


FIGURE D.5 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 3$.

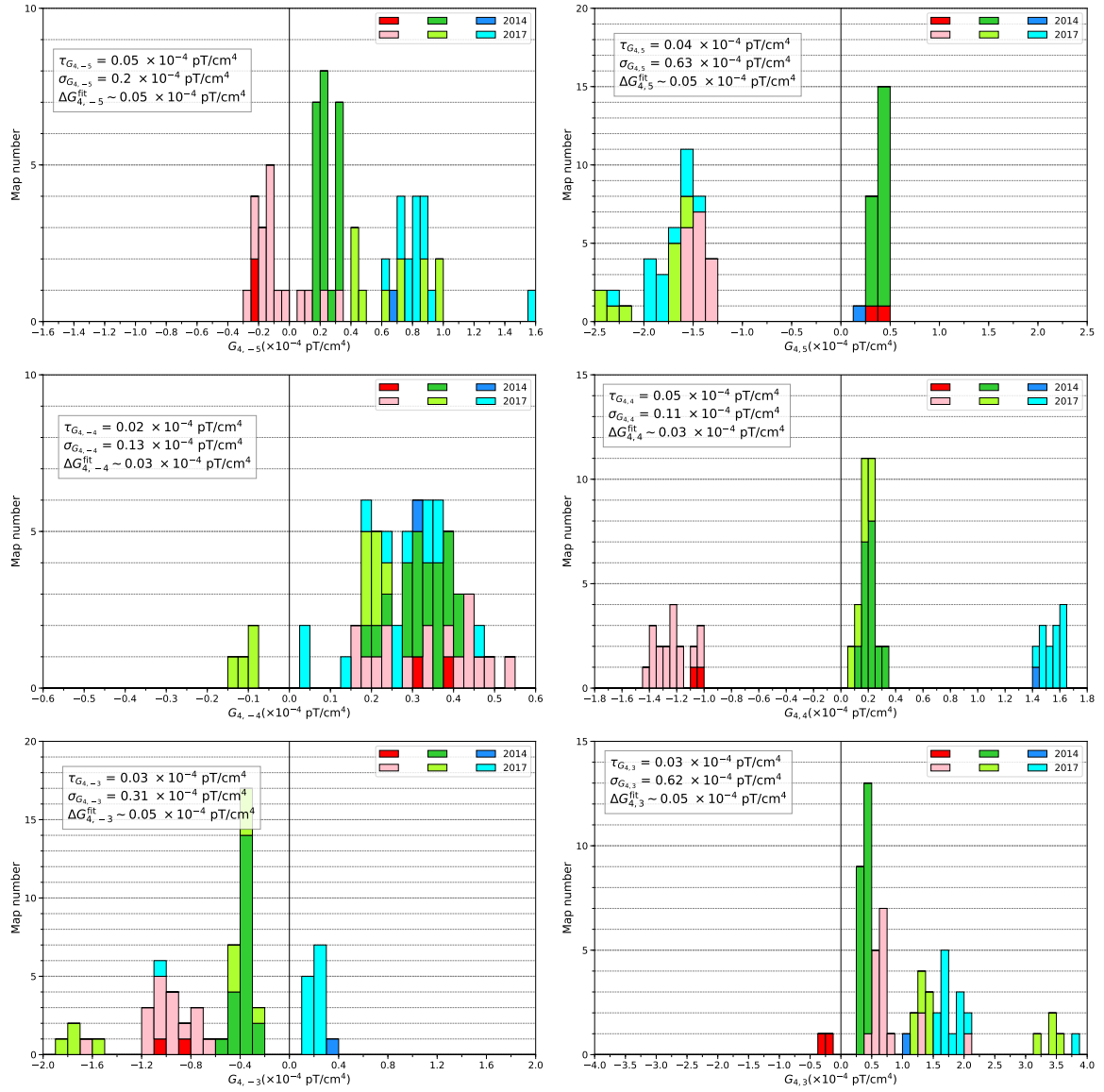


FIGURE D.6 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 4$.

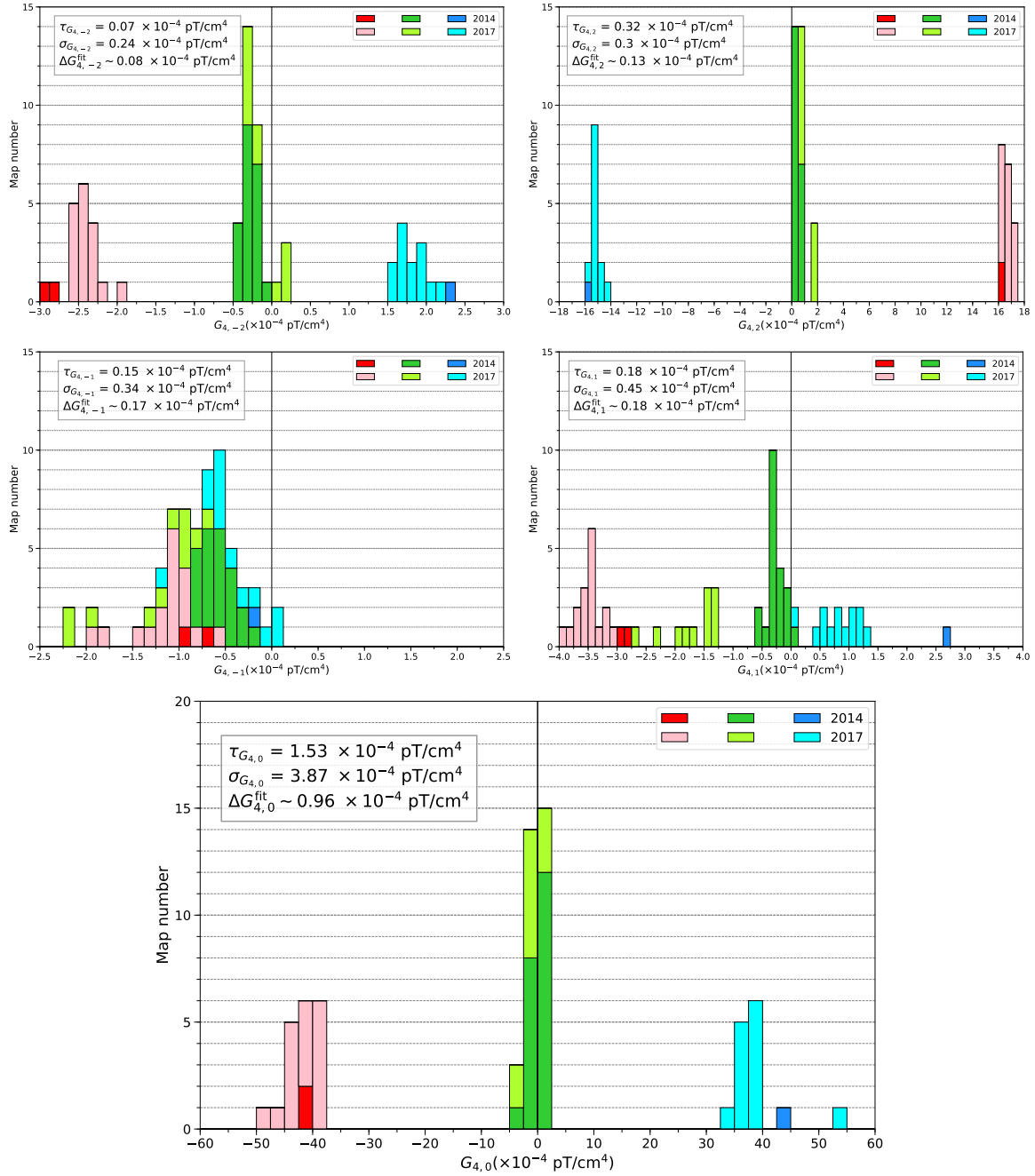
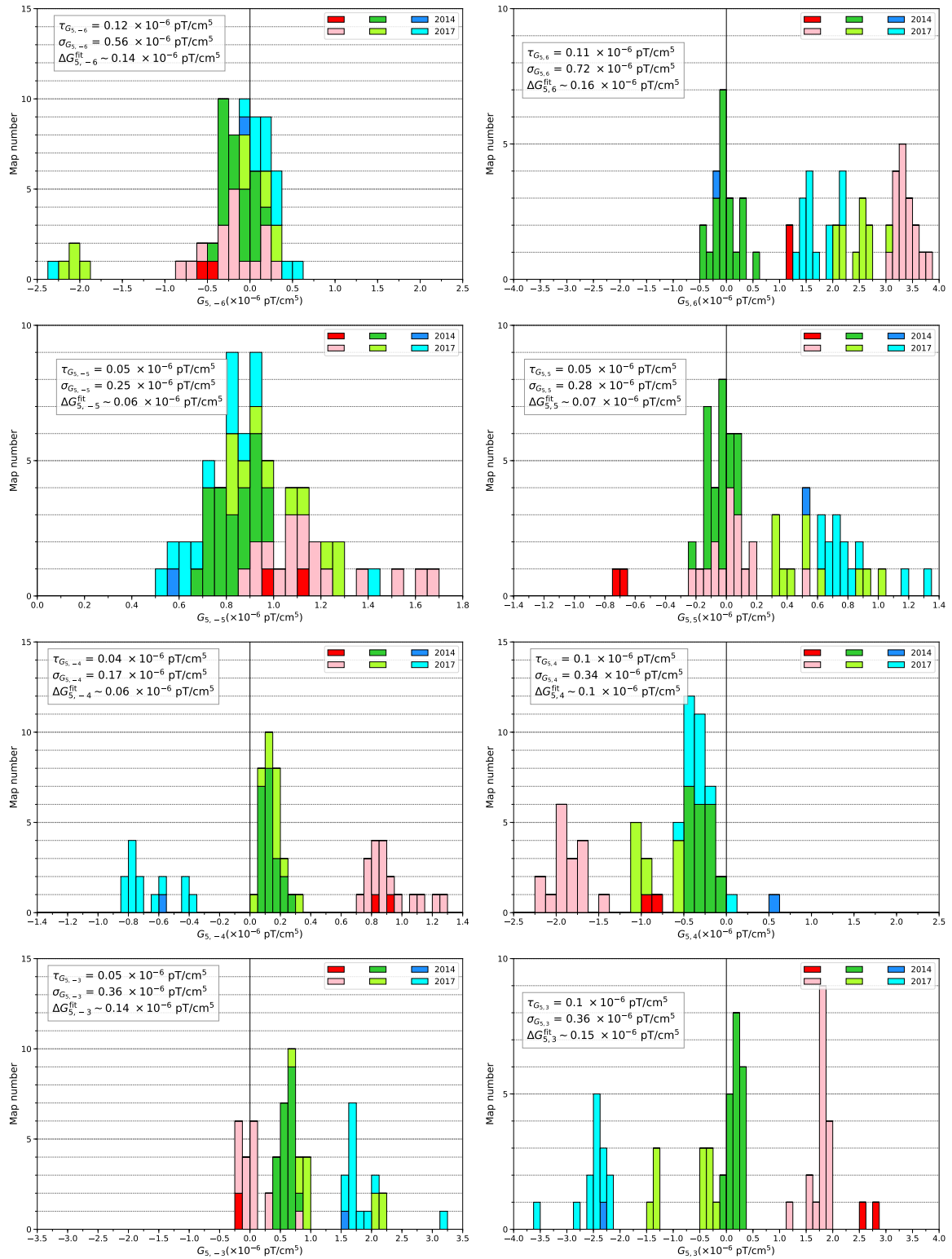


FIGURE D.7 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 4$.


 FIGURE D.8 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l=5$.

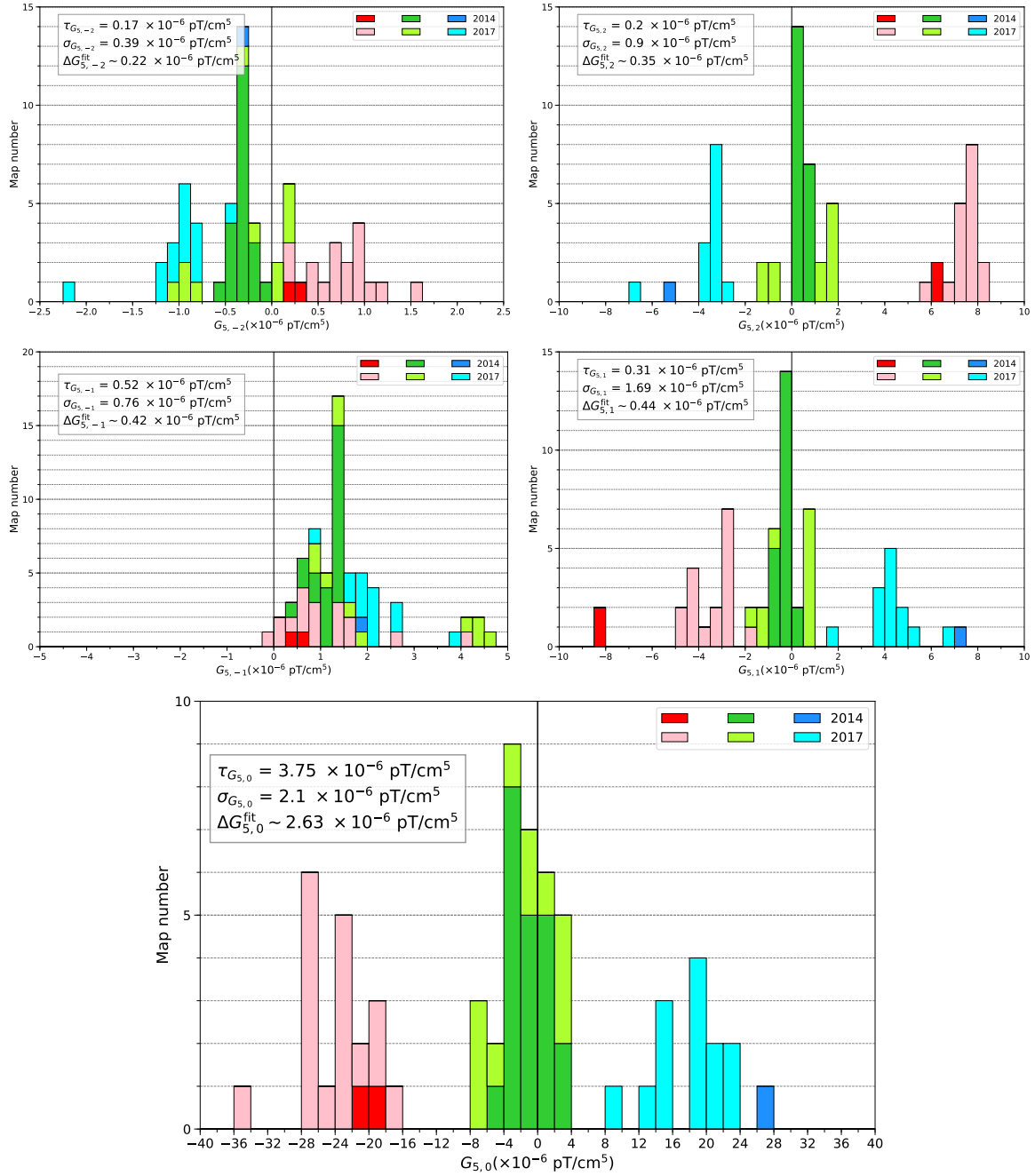


FIGURE D.9 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 5$.

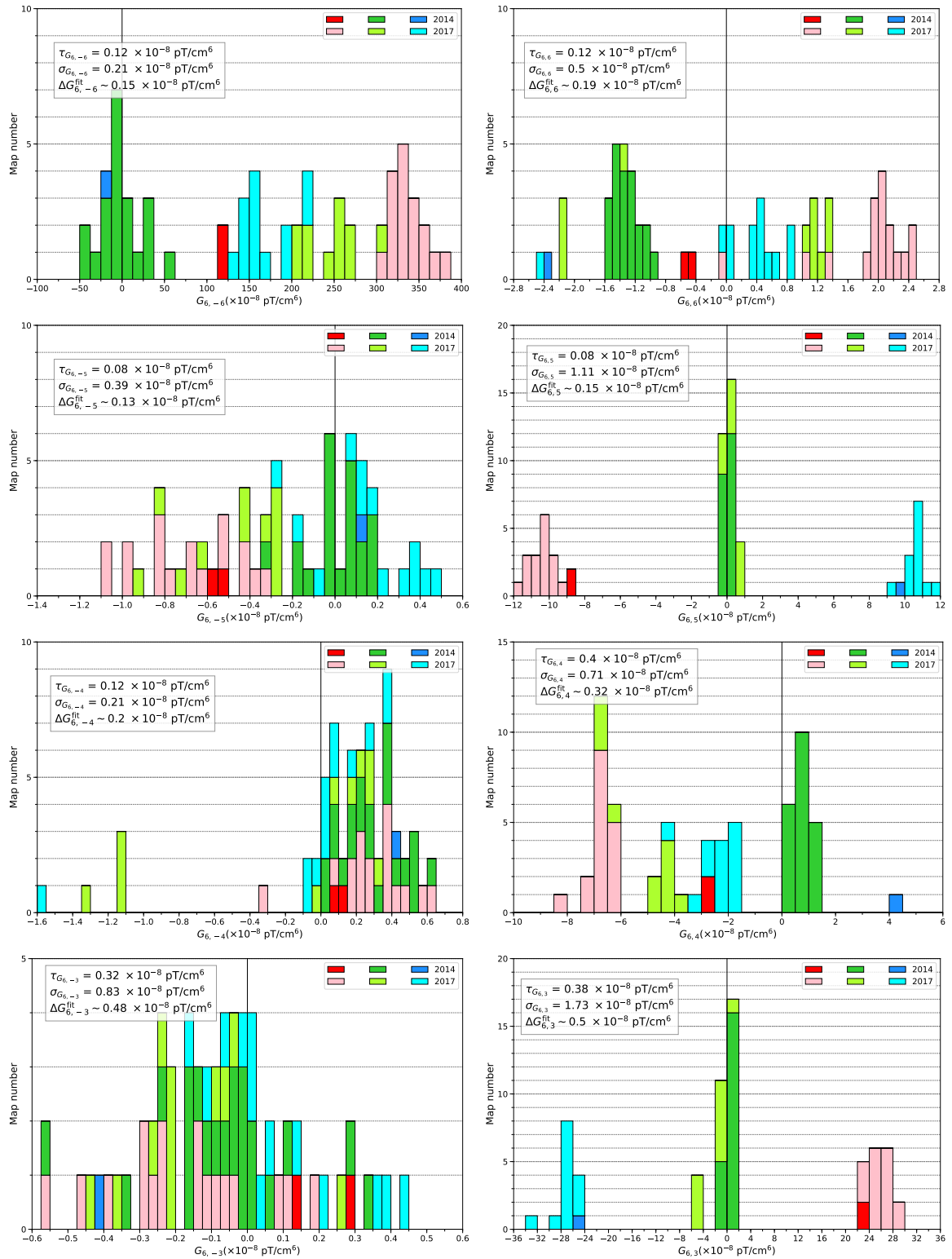


FIGURE D.10 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 6$.

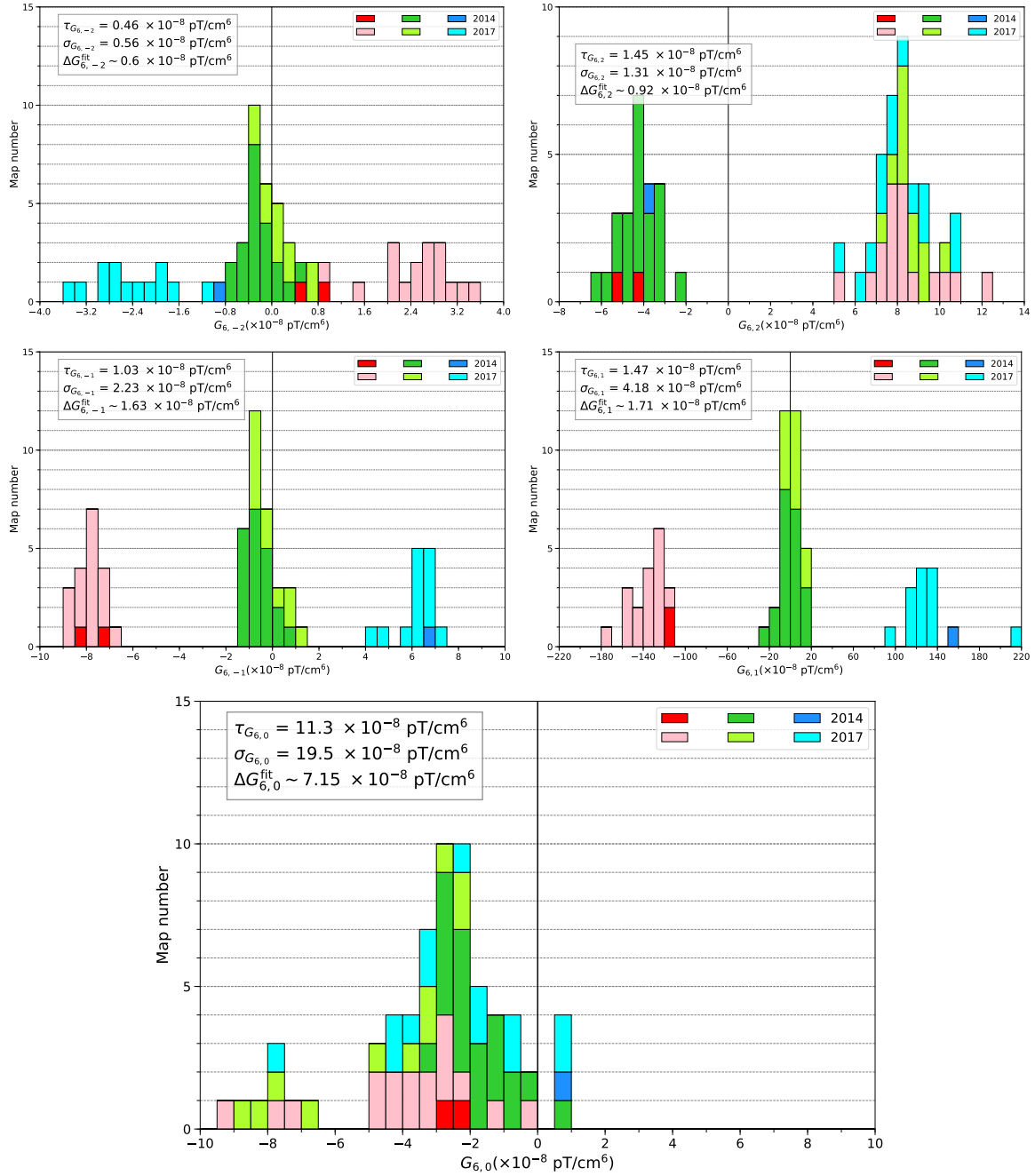


FIGURE D.11 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l = 6$.

TABLEAU D.1 – Valeurs moyennes produites par la bobine B_0 , reproductibilité, répétabilité et erreur d'ajustement des gradients généralisés jusqu'à l'ordre $l = 3$, de \hat{G} et $\langle B_T^2 \rangle$. Les valeurs moyennes, reproductibilité et répétabilité sont calculées respectivement en utilisant les formules (3.26), (3.27), (3.28) et (3.25).

x	Unité	$x_{B_0}^\uparrow$	$x_{B_0}^\downarrow$	σ_x	τ_x	$\Delta x_{\text{ajustement}}$
\hat{G}	pT/cm	-8.37	7.75	0.56	0.38	~ 0.19
$\langle B_T^2 \rangle$	nT ²	2.04	2.58	0.28	0.02	~ 0.02
$G_{0,-1}$	$\times 10^3$ pT	2.897	-4.315	0.525	0.037	~ 0.003
$G_{0,0}$	$\times 10^3$ pT	1034.230	-1035.730	1.007	0.082	~ 0.007
$G_{0,1}$	$\times 10^3$ pT	1.350	-1.585	0.225	0.011	~ 0.003
$G_{1,-2}$	pT/cm	-16.36	36.84	3.71	0.40	~ 0.15
$G_{1,-1}$	pT/cm	-41.42	-14.12	8.60	0.62	~ 0.15
$G_{1,0}$	pT/cm	23.00	-61.62	9.24	1.88	~ 0.73
$G_{1,1}$	pT/cm	-20.13	18.39	13.09	0.39	~ 0.16
$G_{1,2}$	pT/cm	-70.95	69.70	3.98	0.42	~ 0.23
$G_{2,-3}$	pT/cm ²	-0.691	0.137	0.092	0.011	~ 0.006
$G_{2,-2}$	pT/cm ²	0.084	-0.145	0.052	0.013	~ 0.005
$G_{2,-1}$	pT/cm ²	0.870	-1.581	0.182	0.009	~ 0.010
$G_{2,0}$	pT/cm ²	-7.944	8.339	0.210	0.157	~ 0.042
$G_{2,1}$	pT/cm ²	-0.738	1.565	0.258	0.016	~ 0.010
$G_{2,2}$	pT/cm ²	2.294	-1.997	0.084	0.027	~ 0.006
$G_{2,3}$	pT/cm ²	1.074	0.041	0.538	0.009	~ 0.006
$G_{3,-4}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	1.58	-0.49	1.86	0.14	~ 0.14
$G_{3,-3}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	0.13	2.52	1.20	0.10	~ 0.13
$G_{3,-2}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	0.23	0.12	1.16	0.20	~ 0.20
$G_{3,-1}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	-6.07	1.32	1.86	0.69	~ 0.39
$G_{3,0}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	-70.21	62.82	4.22	3.08	~ 1.92
$G_{3,1}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	9.00	-33.30	6.22	0.47	~ 0.41
$G_{3,2}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	14.05	-17.98	1.49	0.10	~ 0.28
$G_{3,3}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	-0.21	3.40	0.56	0.14	~ 0.13
$G_{3,4}$	$\times 10^{-3}$ pT/cm ³	2.29	10.80	2.00	0.20	~ 0.17

TABLEAU D.2 – Valeurs moyennes produites par la bobine B₀, reproductibilité, répétabilité et erreur d'ajustement des gradients généralisés de l'ordre $l = 4$ à $l = 5$. Les valeurs moyennes, reproductibilité et répétabilité sont calculées respectivement en utilisant les formules (3.26), (3.27), (3.28) et (3.25).

x	Unité	$x_{B_0}^\uparrow$	$x_{B_0}^\downarrow$	σ_x	τ_x	$\Delta x_{\text{ajustement}}$
G _{4,-5}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-0.09	0.85	0.20	0.06	~0.05
G _{4,-4}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	0.34	0.26	0.13	0.02	~0.03
G _{4,-3}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-1.00	0.13	0.31	0.03	~0.05
G _{4,-2}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-2.45	1.85	0.24	0.07	~0.08
G _{4,-1}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-1.10	-0.43	0.33	0.15	~0.17
G _{4,0}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-41.92	38.80	3.87	1.53	~0.96
G _{4,1}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-3.43	0.94	0.45	0.18	~0.18
G _{4,2}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	16.70	-15.21	0.30	0.32	~0.13
G _{4,3}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	0.69	1.85	0.62	0.03	~0.05
G _{4,4}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-1.22	1.54	0.11	0.05	~0.03
G _{4,5}	$\times 10^{-4}$ pT/cm ³	-1.27	-1.65	0.63	0.04	~0.05
G _{5,-6}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	-0.21	0.02	0.56	0.12	~0.14
G _{5,-5}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	1.16	0.78	0.25	0.05	~0.06
G _{5,-4}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	0.92	-0.66	0.16	0.04	~0.06
G _{5,-3}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	0.02	1.82	0.36	0.05	~0.14
G _{5,-2}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	0.72	-0.97	0.39	0.17	~0.22
G _{5,-1}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	1.07	2.08	0.76	0.52	~0.42
G _{5,0}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	-23.89	18.66	2.10	3.75	~2.63
G _{5,1}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	-3.83	4.48	1.69	0.31	~0.44
G _{5,2}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	7.34	-3.75	0.90	0.20	~0.35
G _{5,3}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	1.84	-2.51	0.36	0.10	~0.15
G _{5,4}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	-1.77	-0.28	0.34	0.10	~0.10
G _{5,5}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	-0.04	0.79	0.28	0.05	~0.07
G _{5,6}	$\times 10^{-6}$ pT/cm ³	3.13	1.56	0.72	0.11	~0.16

TABLEAU D.3 – Valeurs moyennes produites par la bobine B_0 , reproductibilité, répétabilité et erreur d'ajustement des gradients généralisés de l'ordre $l = 6$. Les valeurs moyennes, reproductibilité et répétabilité sont calculées respectivement en utilisant les formules (3.26), (3.27), (3.28) et (3.25).

x	Unité	$x_{B_0}^\uparrow$	$x_{B_0}^\downarrow$	σ_x	τ_x	$\Delta x_{\text{ajustement}}$
$G_{6,-6}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-0.69	0.17	0.21	0.12	~0.15
$G_{6,-5}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	0.28	0.00	0.39	0.08	~0.13
$G_{6,-4}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-0.13	0.07	0.21	0.12	~0.20
$G_{6,-3}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	2.34	-2.32	0.83	0.32	~0.48
$G_{6,-2}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-7.86	6.22	0.56	0.46	~0.60
$G_{6,-1}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-3.81	-2.26	2.23	1.03	~1.63
$G_{6,0}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-134.53	131.46	19.54	11.25	~7.15
$G_{6,1}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	6.99	7.14	4.18	1.47	~1.71
$G_{6,2}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	25.64	-26.67	1.31	1.45	~0.92
$G_{6,3}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-6.34	-1.87	1.73	0.38	~0.50
$G_{6,4}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-10.26	10.59	0.71	0.40	~0.32
$G_{6,5}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	1.63	0.01	1.11	0.08	~0.15
$G_{6,6}$	$\times 10^{-8}$ pT/cm ³	-1.49	-0.16	0.50	0.12	~0.19

D.2 Vérification de la prédiction

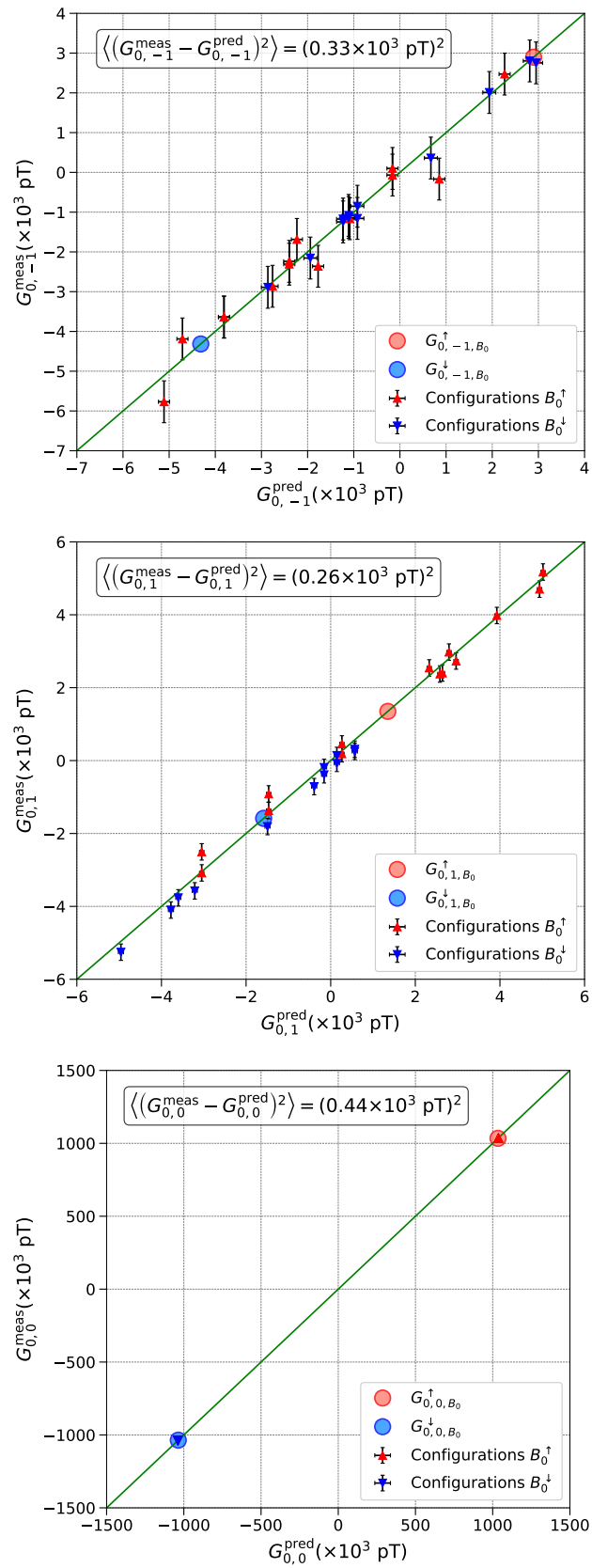


FIGURE D.12 – pour les gradients d'ordre $l = 0$.

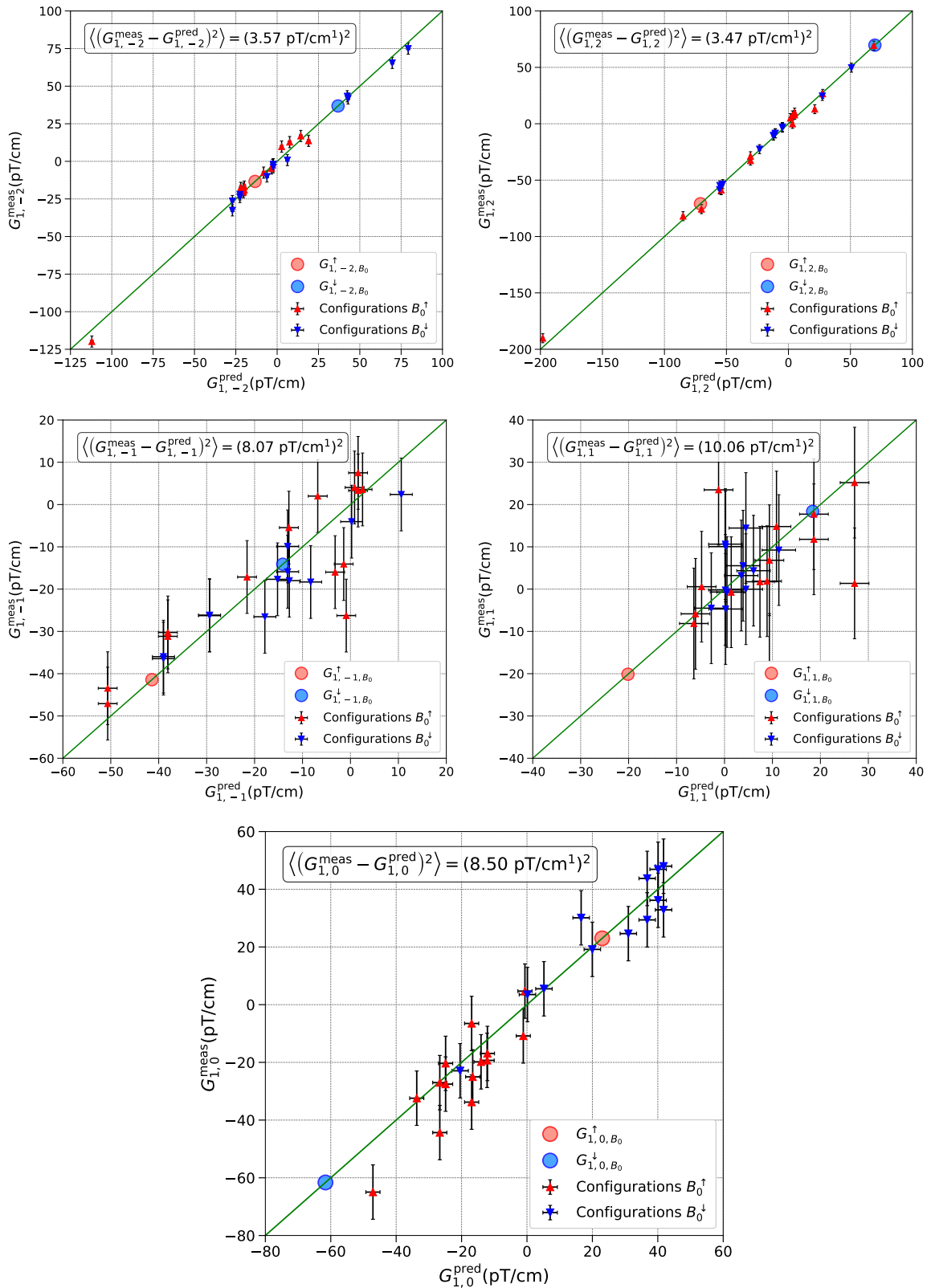


FIGURE D.13 – pour les gradients d'ordre $l = 1$.

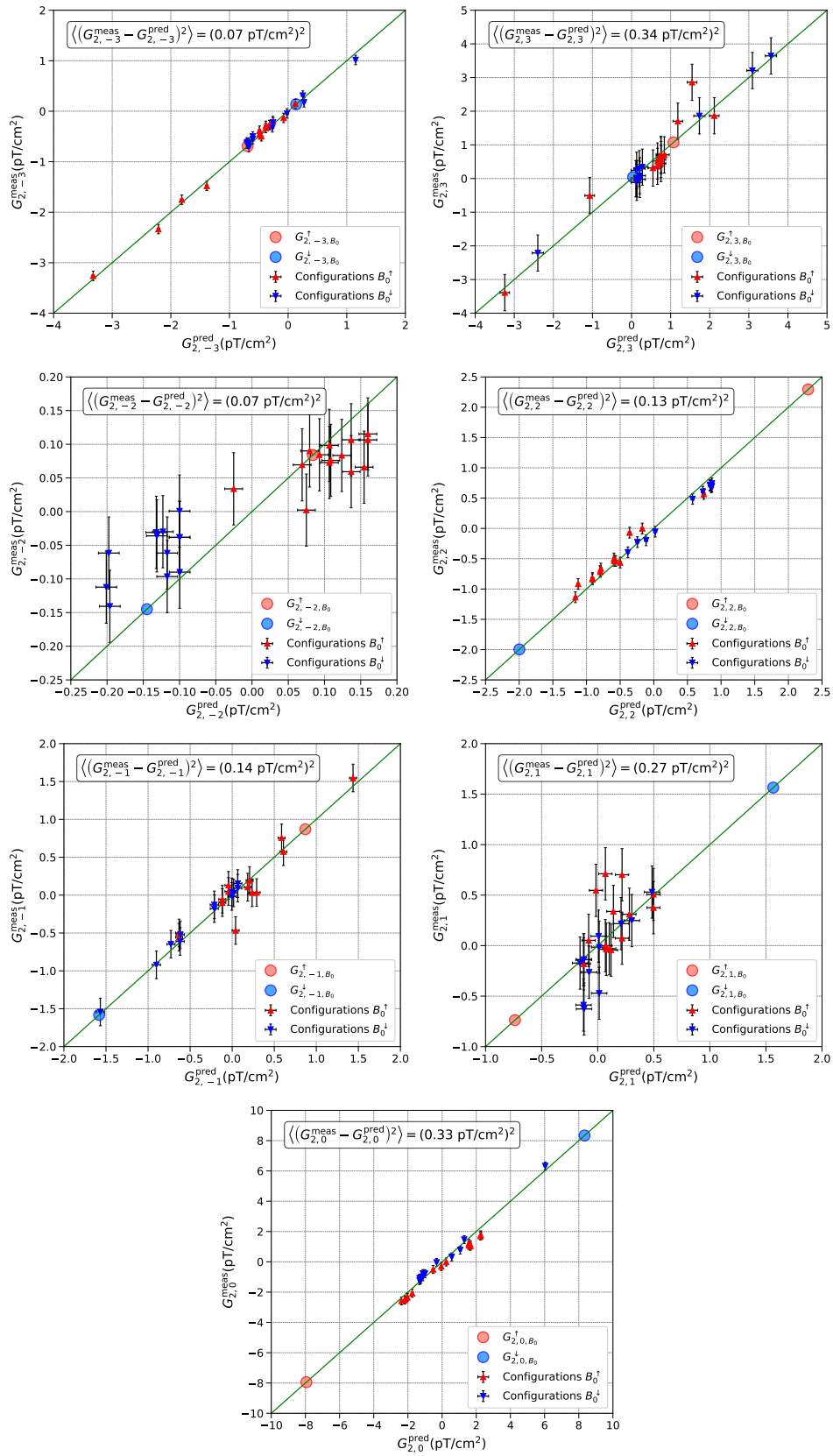


FIGURE D.14 – gradients d'ordre $l=2$.

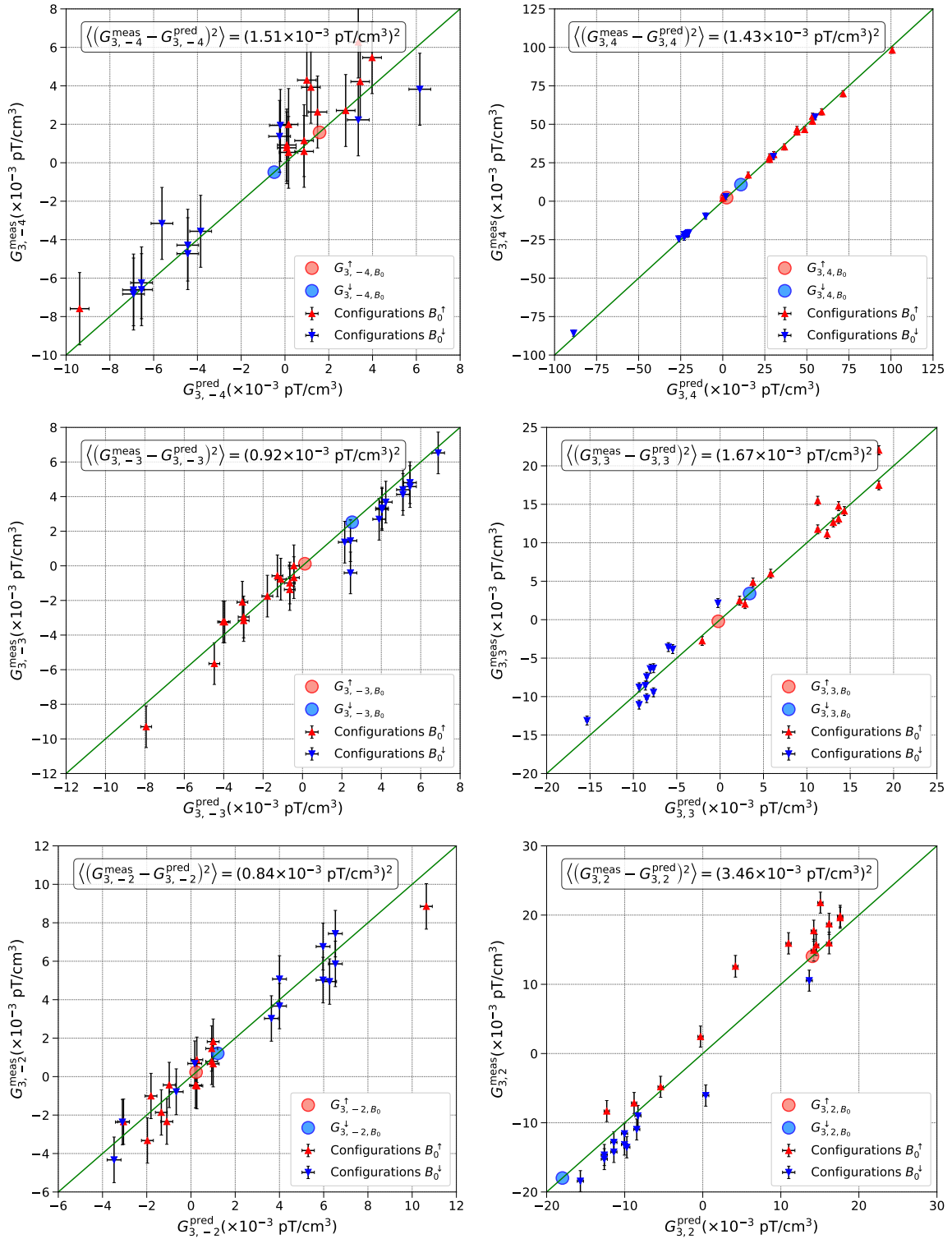


FIGURE D.15 – gradients d'ordre $l = 3$.

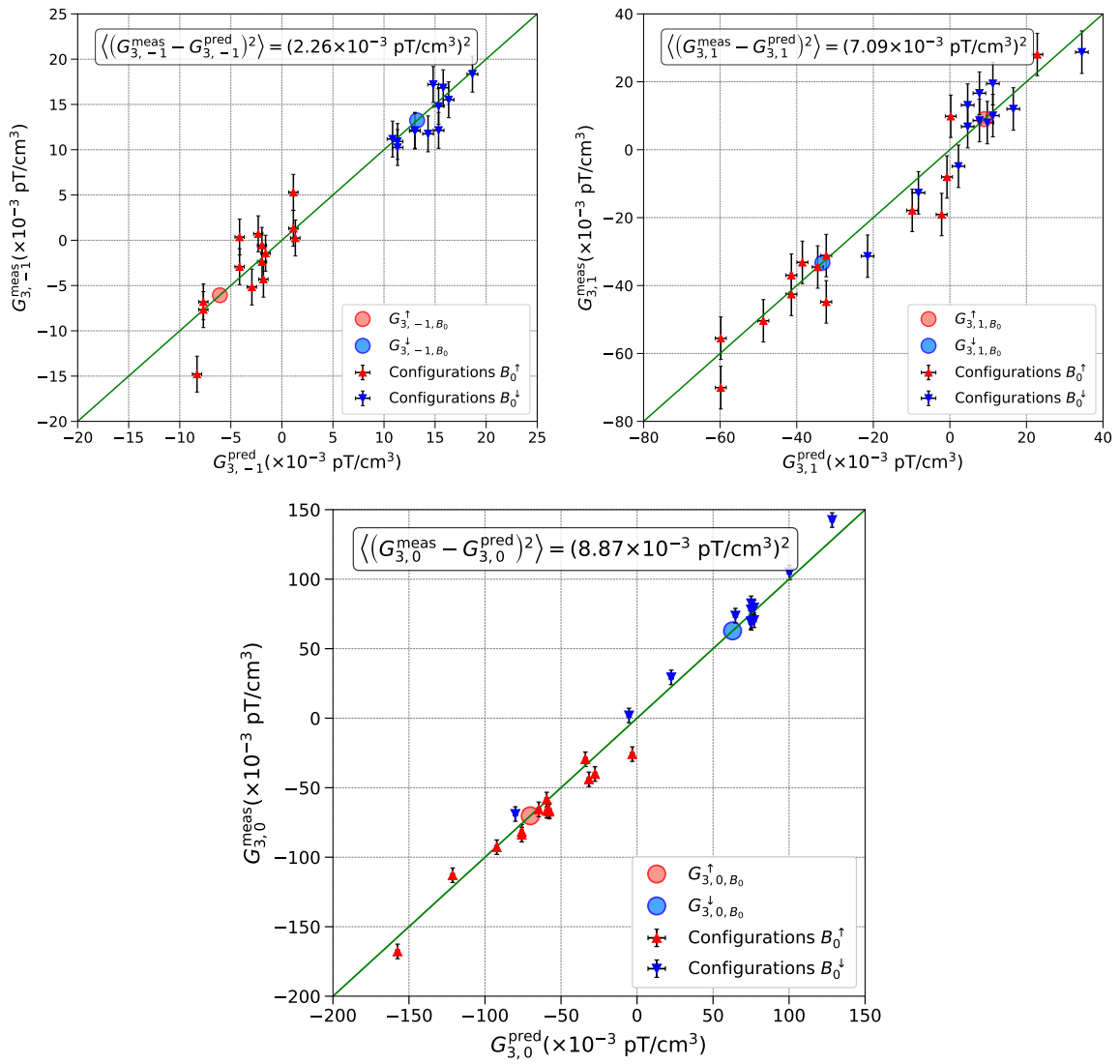


FIGURE D.16 – Résultats de l'analyse globale des cartes de B_0 pour les gradients d'ordre $l=3$.

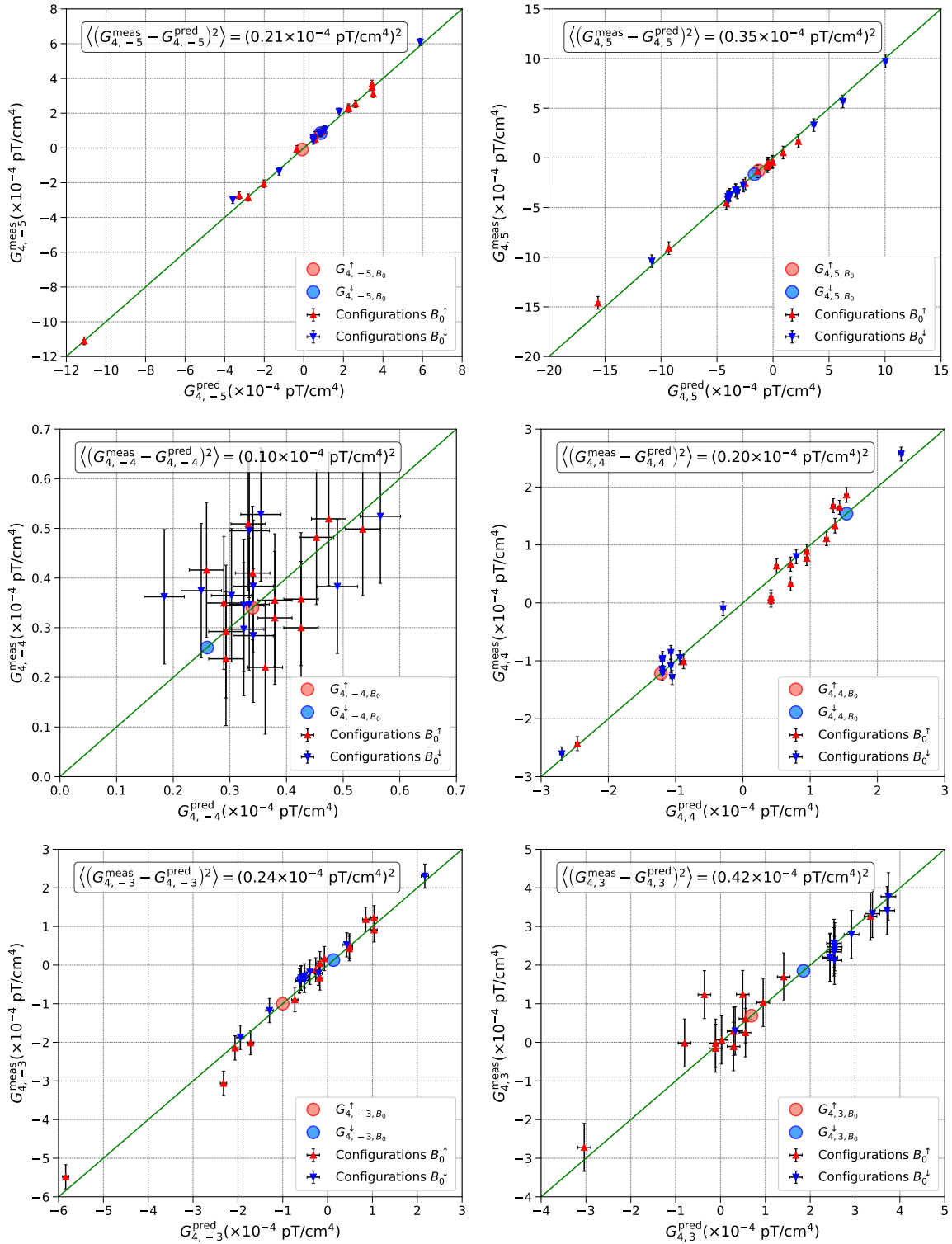


FIGURE D.17 – les gradients d'ordre $l = 4$.

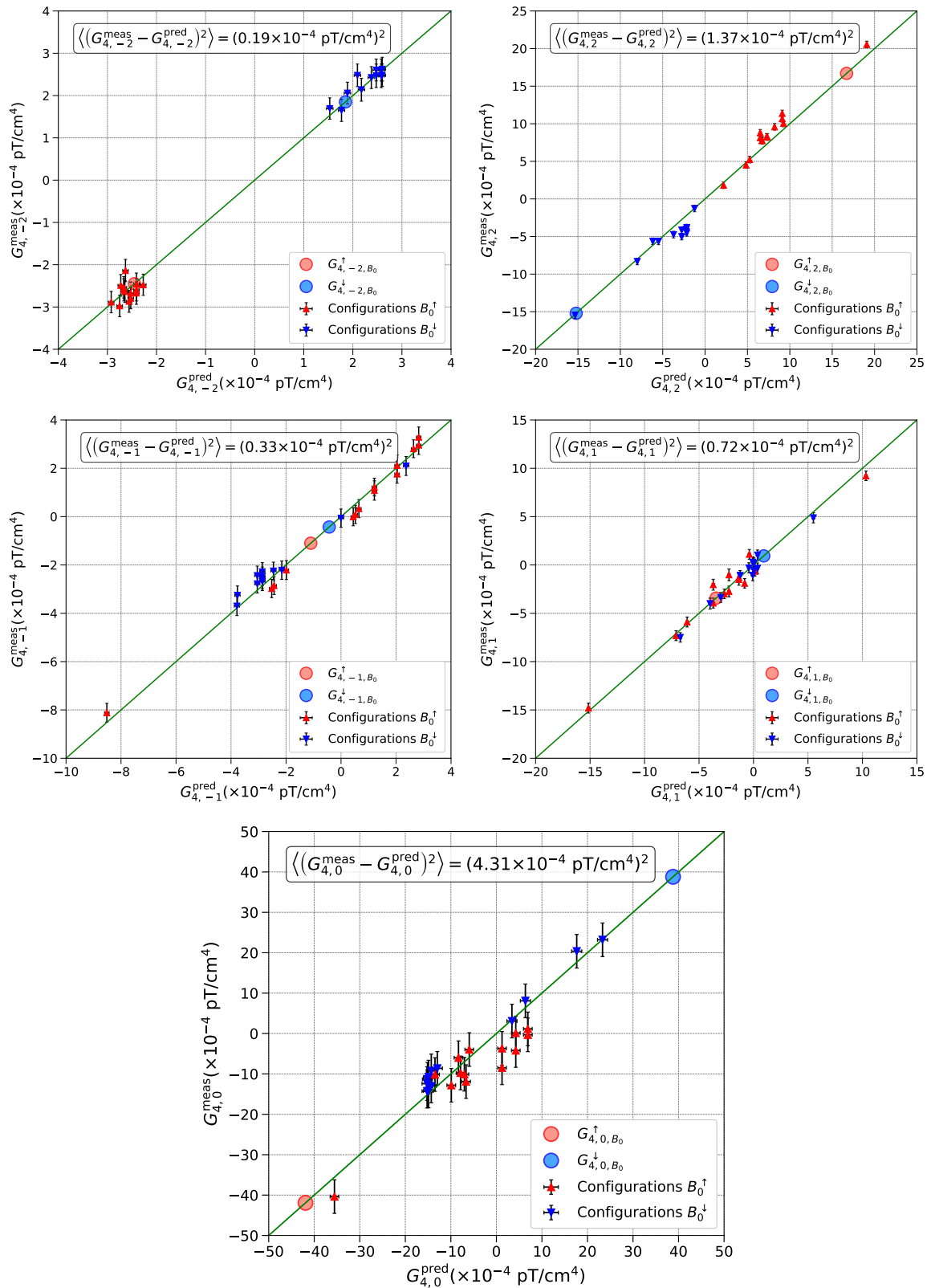


FIGURE D.18 – les gradients d'ordre $l = 4$.

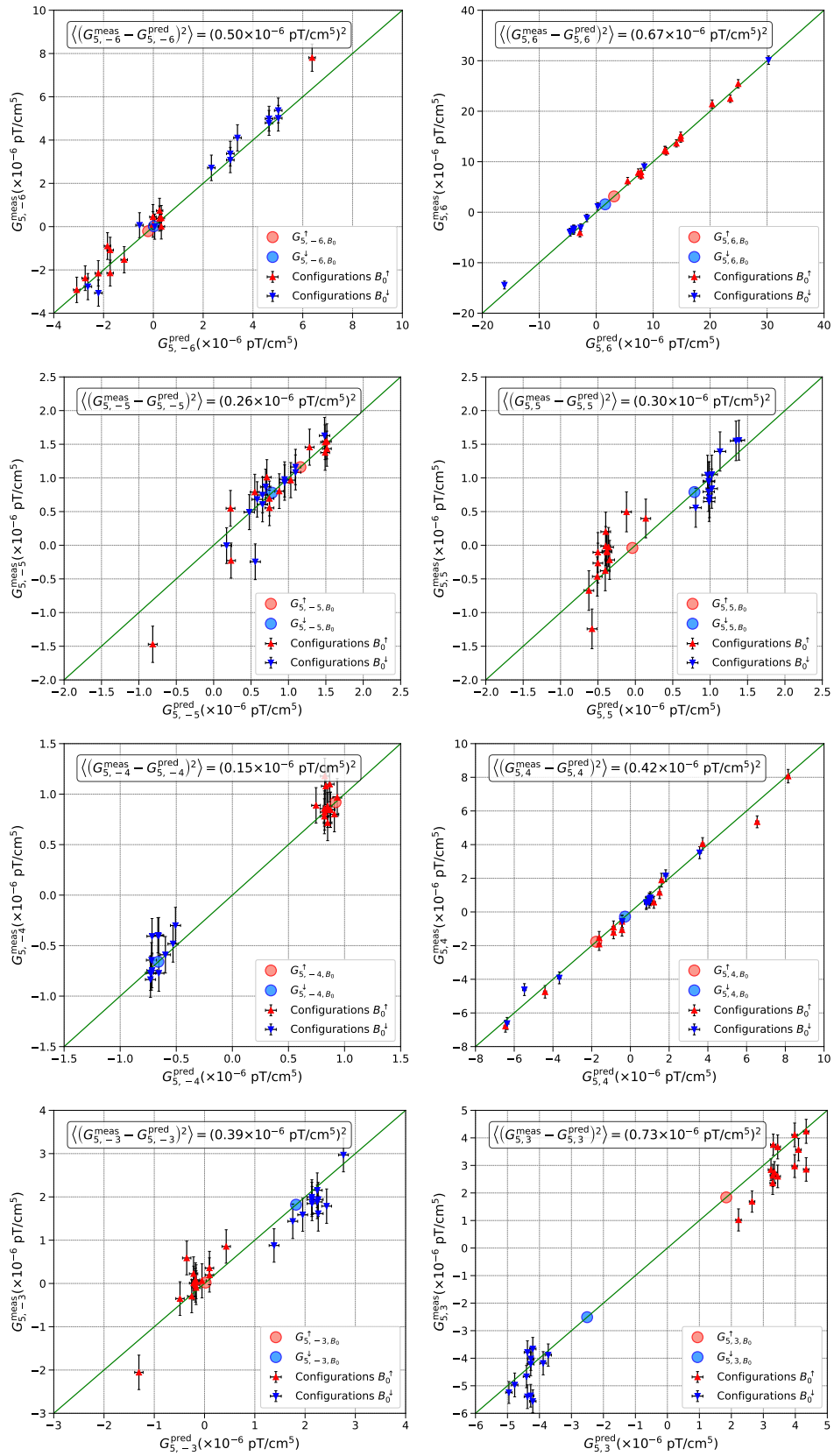


FIGURE D.19 – les gradients d'ordre $l = 5$.

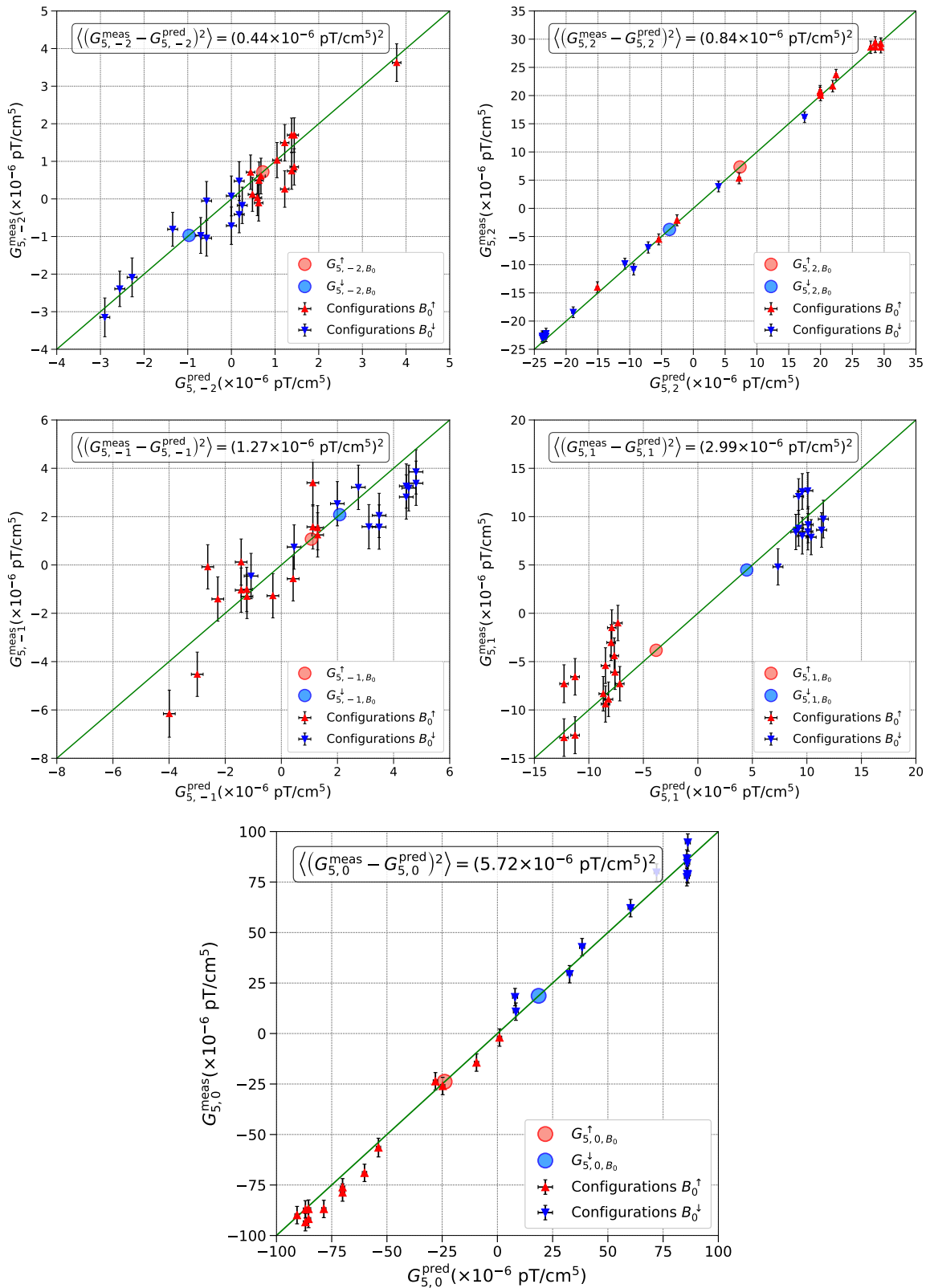


FIGURE D.20 – les gradients d'ordre $l = 5$.

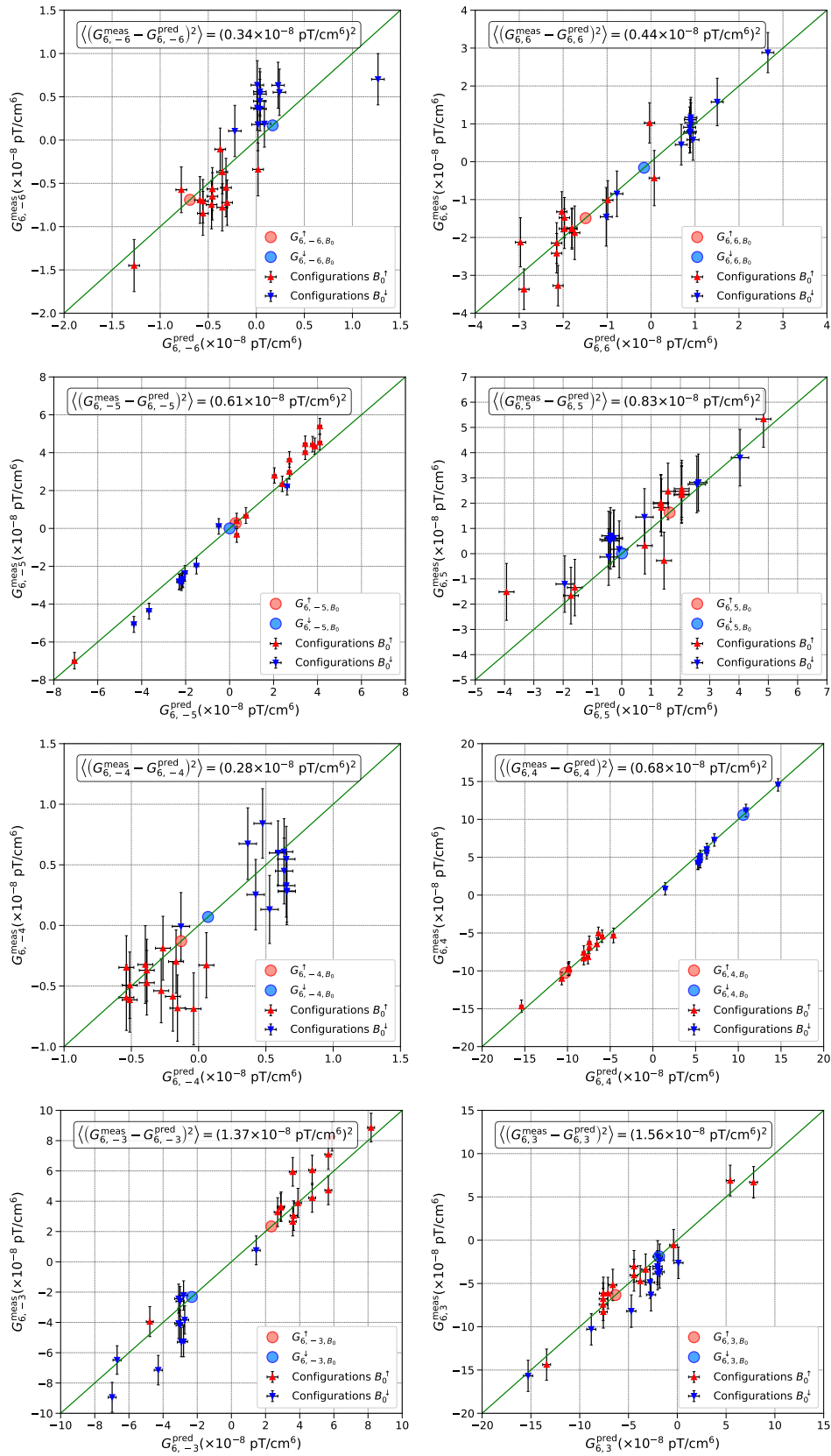


FIGURE D.21 – les gradients d'ordre $l=6$.

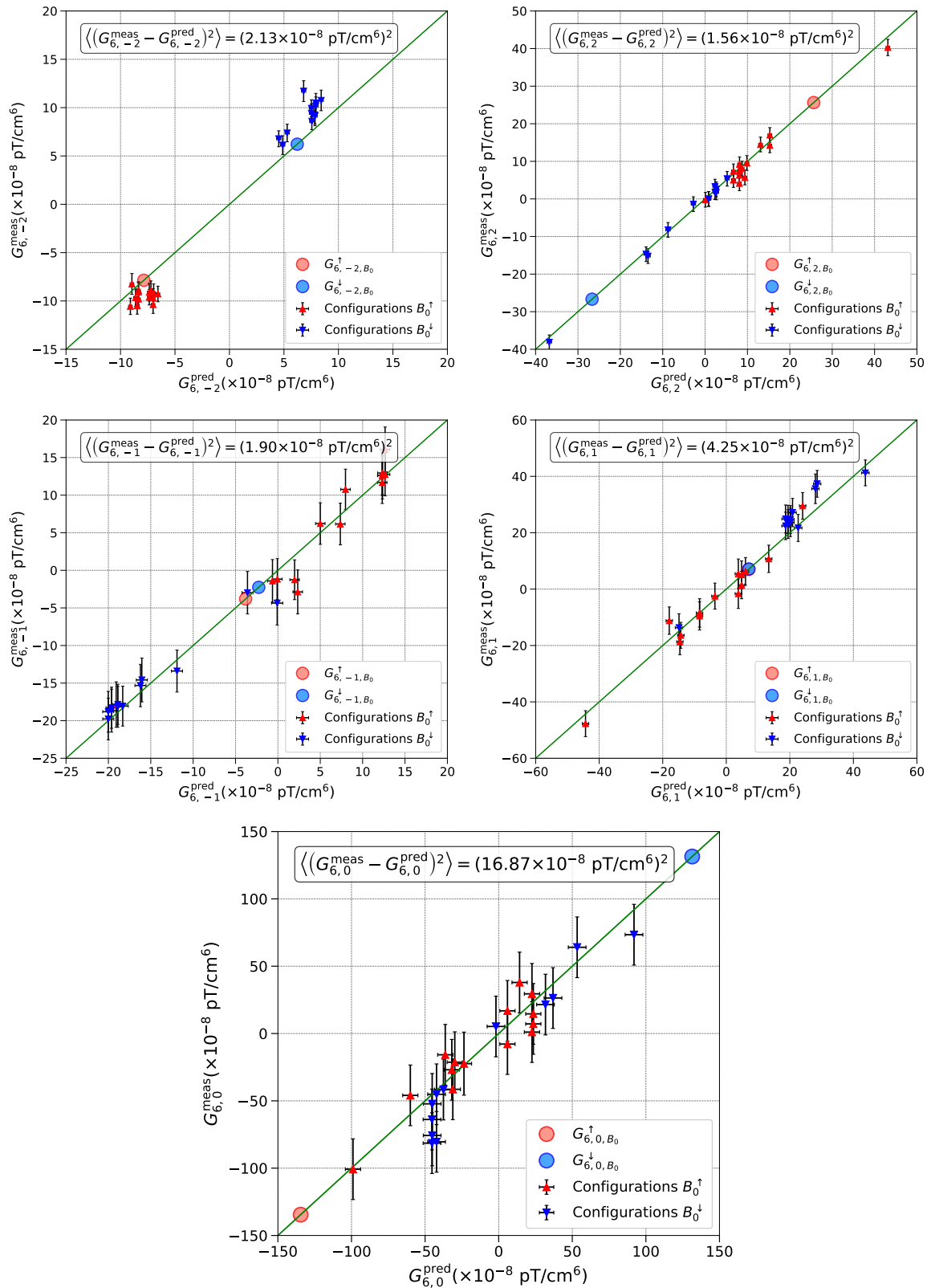


FIGURE D.22 – les gradients d'ordre $l=6$.

Annexe E

Références

- AHMED, M. W. et collab. 2019, «A new cryogenic apparatus to search for the neutron electric dipole moment», *Journal of Instrumentation*, vol. 14, n° 11, p. 11 017. [156](#)
- ANDERSON, W. A. 1961, «Electrical current shims for correcting magnetic fields», *Review of Scientific Instruments*, vol. 32, n° 3, p. 241–250. [156](#)
- BRIGUET, A. et J. CHANKJI. 1985, «On the magnetic field of rectangular coils», *Review of Scientific Instruments*, vol. 56, n° 8, p. 1626–1631. [156](#)
- HOULT, D. I., S. GOLDSTEIN et J. CAPONITI. 1981, «Electromagnet for nuclear magnetic resonance imaging», *Review of Scientific Instruments*, vol. 52, n° 9, p. 1342–1351. [156](#)
- NOURI, N. et B. PLASTER. 2014a, «Sensitivity requirements for accessing interior magnetic field vector components in neutron electric dipole moment experiments via exterior boundary-value measurements», *Journal of Instrumentation*, vol. 9, n° 11, p. 11 009. [156](#)
- NOURI, N. et B. PLASTER. 2014b, «Systematic optimization of exterior measurement locations for the determination of interior magnetic field vector components in inaccessible regions», *Nucl. Instrum. Meth. A*, vol. 767, p. 92–98. [156](#)

Annexe F

Liste des acronymes

ADC convertisseur analogique numérique – ou *analog-to-digital converter*. 59

BAU asymétrie baryonique de l'Univers. 4, 5

DLC carbone de type diamant – ou *Diamond Like Carbon*. 43, 45

EDM moment dipolaire électrique. 1, 2

ILL Institut Laue-Langevin. 17, 22, 23, 42, 47, 50, 56, 88

IRM imagerie par résonance magnétique. 156

MS Modèle Standard. 1, 4–9, 34

PSI Institut Paul Scherrer. 1, 2, 10, 14, 17, 23, 24, 27, 28, 30–33, 35, 42, 43, 47, 48, 50, 56, 65, 66, 84, 88, 89, 94, 101, 135, 151, 154, 155

PTB Physikalisch-Technische Bundesanstalt. 51

QCD chromodynamique quantique. 6

RMN résonance magnétique nucléaire. 156

SFC Surrounding Field Compensation. 51, 52

USSA U-shaped simultaneous spin analyzer. 45